# DS 9 version B 2h



## Problème. Sur la notion de fonction génératrice.

Dans ce problème, $m$ et $n$ sont des entiers naturels non nuls et $p \in [0,1]$.
Toutes les variables aléatoires seront supposées définies sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P)$ et à valeurs entières positives : $X(\Omega)$ sera une partie finie de $\mathbb{N}$.

On appelle fonction génératrice de $X$ et on note $G_X$ la fonction

$$G_X : t \mapsto E(t^X).$$

1. Fonction génératrice et loi d'une variable aléatoire.

   Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs entières.

   (a) Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$G_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) t^k.$$

   (b) Justifier que $X$ et $Y$ ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

2. Fonction génératrice et lois usuelles.

   Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer

   (a) $G_X(t)$ pour $X$ suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

   (b) $G_U(t)$ pour $U$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

   (c) $G_Y(t)$, pour $Y$ suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

3. Fonction génératrice et espérance.

   Soit $X : \Omega \to [\![0, n]\!]$.

   (a) Justifier que $G'_X(1) = E(X)$.

   (b) À l'aide de ce qui précède, retrouver l'expression connue pour l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$.

4. Fonction génératrice et somme de deux variables.

   (a) Montrer que si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires **indépendantes**, alors
   $$G_{X+Y} = G_X \times G_Y.$$

   (b) *Application 1*
   On modélise un lancer de deux dés équilibrés en considérant un couple $(X,Y)$ de deux variables indépendantes et toutes deux de loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
   Quelle est la loi de $X+Y$ ?

   (c) *Application 2*
   Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, $X$ suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$ et $Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Démontrer que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m+n,p)$.

---

## Exercice. Distance au s.e.v. des matrices symétriques.

Dans cet exercice, on travaille dans l'espace vectoriel $E = M_2(\mathbb{R})$.
On note $F = S_2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques.

On utilisera les notations standard pour sa base canonique : $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.
*C'est le produit scalaire canonique sur $M_2(\mathbb{R})$.*

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $E$.

2. On considère la famille de trois matrices $\mathcal{F} = (E_{1,1}, E_{2,2}, S)$, avec $S = E_{1,2} + E_{2,1}$.

   (a) Vérifier que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale, et que c'est une base de $F$.

   (b) Est-ce une base orthonormée de $F$ ?

3. Notons $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   En vous aidant de la famille $\mathcal{F}$, calculer $p_F(M)$, le projeté orthogonal de $M$ sur $F$

4. En déduire $d(M,F)$, la distance de $M$ à $F$.
   Voyez-vous un autre moyen de calculer cette distance ?