Suites, La Pratique
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Exercices.

Exercice 13.1 [♦◊◊]

Une suite croissante est une fonction croissante sur $\mathbb{N}$.
Démontrer que le titre de l'exercice dit vrai, c'est-à-dire, pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équivalence entre
1. $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geq u_n$.
2. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2\ n \leq p \Longrightarrow u_n \leq u_p$.

Supposons 2, montrons 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$
On a $n \leq n+1$. D'après 2, $u_n \leq u_{n+1}$. ez

Supposons 1, montrons 2.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$. On sait que $u_{n+1} \geq u_n$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, $u_{n+3} \geq u_{n+2}$, etc...
Par récurrence triviale et par transitivité, pour tout entier $q \geq n$, $u_q \geq u_n$.
En particulier, $u_p \geq u_n$

□

Exercice 13.2 [♦♦◊]

Soit a un réel supérieur à 1 et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \frac{a^n}{n!}$.
Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de a.
(u_n) est strictement positive sur $\mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On peut donc écrire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$.
Ainsi, (u_n) est croissante $(a \geq n+1)$ puis décroissante $(a \leq n+1)$, ce qui implique qu'un maximum existe.
Ce maximum est atteint lorsque $a = n+1$ c'est à dire quand $n = \lfloor a \rfloor$.
Ainsi, le maximum de la suite u est : $\frac{a^{\lfloor a \rfloor}}{\lfloor a \rfloor !}$

□

Exercice 13.3 [♦◊◊]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1}.$$

Prouver que la suite (u_n) est bornée.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$. Donc :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\
&\leq \frac{n^2+n}{n^2+2n+2} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Majorer en valeur absolue c'est borner

□

Exercice 13.4 [♦◊◊]

Soit $\alpha \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha(1-\alpha) \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha(1-\alpha) \end{cases}$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de α et n.
2. Donner $\lim u_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose l'équation au point fixe : $x = (1-\alpha)x + \alpha(1-\alpha)$.
Sa solution est : $x = 1-\alpha$.
On a : $u_{n+1} - (1-\alpha) = (1-\alpha)u_n + \alpha(1-\alpha) - (1-\alpha)$.
Ainsi, $u_{n+1} + \alpha - 1 = (1-\alpha)(u_n + \alpha - 1)$.
On pose $v_n := u_n + \alpha - 1$. Par définition, v est géométrique, de raison $1-\alpha$.
Son terme général est : $v_n = v_0(1-\alpha)^n$.
Or $v_0 = u_0 + \alpha - 1 = \alpha(1-\alpha) + \alpha - 1 = (\alpha-1)(1-\alpha)$.
On en déduit que $v_n = (\alpha-1)(1-\alpha)^{n+1}$.
Finalement, $u_n = (\alpha-1)(1-\alpha)^{n+1} - \alpha + 1$.

□

Exercice 13.5 [♦◊◊]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
1. Donner la forme du terme général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

2. Supposons dans cette question que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Donner sous forme factorisée le terme général de l'unique suite (u_n) satisfaisant la relation ci-dessus et telle que $u_0 = u_1 = 1$.

Polynome caractéristique : $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1$. $\Delta = -4\sin^2(\theta)$. $r_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $r_2 = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.
Lorsque $\theta \in \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda n\cos^n(\theta) + \mu\cos^n(\theta)$.
Lorsque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$.
2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$.
On a $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = \cos(\theta) + \mu\sin(\theta) = 1$ donc $\mu = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}n, \ u_n = \cos(n\theta) + \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(n\theta)$
Comment tu factorises ça wtf

□

Exercice 13.6 [♦♦◊]

Soit (u_n), définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, \ u_{n+1} = 3u_n + 2^n \end{cases}$.

1. Prouver qu'il existe une suite (a_n) géométrique de raison 2 qui satisfait la relation de récurrence.
2. Donner le terme général de (u_n).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit (a_n) une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = a_0 2^n$$

On cherche (a_n) telle que $a_{n+1} = 3a_n + 2^n = 3a_0 2^n + 2^n = 2^n(3a_0 + 1)$.
Posons $a_0 = -1$. On a $a_{n+1} = 2^n(-2) = -2^{n+1} = a_0 2^{n+1}$.
Ainsi, la suite géométrique (a_n) de raison 2 et de premier terme -1 satisfait la relation de récurrence.
2. On a $u_{n+1} - 2a_n = 3u_n + 2^n - 2a_n \iff u_{n+1} - a_{n+1} = 3(u_n - a_n)$.
On pose $v_n := u_n - a_n$. Alors $v_0 = u_0 - a_0 = 2$ et $v_n = 2 \cdot 3^n$.
On en déduit que $u_n = v_n + a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n = 2(3^n - 2^{n-1})$
On a $u_{n+1} = 2(3^{n+1} - \cdot 2^n)$

□

Exercice 13.7 [♦♦◊]

Étudier la suite (u_n), définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 > 0; u_1 > 0 \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} &\iff \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) \\ &\iff \ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)) \end{aligned}$$

On pose $v_n := \ln(u_n)$.
On obtient : $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$.
C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 !
Polynome caractéristique : $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$. $\Delta = \frac{9}{4}$. $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, $v_n = \lambda + \frac{\mu(-1)^n}{2^n} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et v_n une telle suite.
Alors $v_0 = \lambda + \mu$ et $v_1 = \lambda - \frac{\mu}{2}$.
On a $v_0 + 2v_1 = 3\lambda = \ln(u_0u_1^2)$. Donc $\lambda = \ln(\sqrt[3]{u_0u_1^2})$.
On a $u_n = e^\lambda \cdot e^{\frac{\mu(-1)^n}{2^n}} \to e^\lambda$. Ainsi, $u_n \to \sqrt[3]{u_0u_1^2}$.

□

Exercice 13.8 [♦◊◊]

Soit $a > 1$. Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = (\lfloor a^n \rfloor)^{1/n}$.
Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.
On a :

$$a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n \iff (a^n - 1)^{\frac{1}{n}} < \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \leq a$$

On peut appliquer la fonction $x \mapsto \frac{1}{n}$: elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $a > 1$.
D'une part, $(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} = (a^n(1 - \frac{1}{a^n}))^{\frac{1}{n}} = a(1 - \frac{1}{a^n})^{\frac{1}{n}} \to a$.
D'autre part, $a \to a$ (*big brain*)
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes : $\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \to a$.

□

Exercice 13.9 [♦♦◊]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.
2. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
1. On pose $f : x \mapsto \ln(1 + x) - x$. f est dérivable comme somme et $f' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$. f décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \leq 0$. Ainsi, $\ln(1 + x) \leq x$.
On pose $g : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x)$. g est dérivable comme somme, $g' : x \mapsto -\frac{x^2}{1+x}$. g décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Or $g(0) = 0$ donc $g(x) \leq 0$. Ainsi, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$.
2. Posons $v_n := \ln(u_n)$. Alors $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
Alors $\sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}) \leq v_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$: $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$.
Par théorème des gendarmes, $v_n \to \frac{1}{2}$. Ainsi, $u_n \to \sqrt{e}$.

□

Exercice 13.10 [♦♦♦]

Étudier la convergence de la suite de terme général $\frac{1!+2!+...+n!}{n!}$.
Soit (u_n) une suite de terme général : $\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait d'avance que $u_n \geq 1$, puisque $\sum_{k=1}^{n} k! \geq n!$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! &= \frac{n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! \\
&\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \\
&\longrightarrow 1
\end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes (AQAB), $u_n \to 1$.

□

Exercice 13.11 [♦◊◊]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\arctan(x))^n dx$. Justifier que (I_n) est convergente.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $\arctan(x)^n \in [0,1]$ donc $\arctan^{n+1}(x) \leq \arctan^n(x)$.
Alors :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\arctan^{n+1}(x) - \arctan^n(x)\right) dx \leq 0.$$

Ainsi, I_n est décroissante et minorée par 0 : I_n est convergente d'apres le TLM.

□

Exercice 13.12 [♦◊◊]

Soit α un réel de $]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\alpha^k)$.
1. Justifier brièvement que $\forall x \in \mathbb{R}\ 1+x \leq e^x$.
2. Démontrer que (u_n) est une suite convergente, et que $\lim u_n \leq \exp(\frac{\alpha}{1-\alpha})$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, par convexité de l'exponentielle, elle est supérieure à toutes ses tangentes, en particulier $x+1$.
2. Puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leq e^x$, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ 1+\alpha^k \leq e^{\alpha^k}$.
Ainsi :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha^k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{\alpha^k} = \exp(\sum_{k=1}^{n}\alpha^k) = \exp(\frac{\alpha-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}) \leq \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

On a $u_n > 0$ donc on peut écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \alpha^{n+1} > 1$$

Donc (u_n) est croissante et majorée, ainsi elle converge vers un réel $l \leq \exp(\frac{\alpha}{1-\alpha})$

□

Exercice 13.13 [♦◊◊]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \; et \; v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4n^2+6n+2} > 0$$
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

Alors (u_n) et (v_n) sont monotones de monotonies contraires.
On a :

$$u_n - v_n = -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Ainsi, (u_n) et (v_n) sont adjacentes : elles convergent vers la même limite.

□

Exercice 13.14 [♦♦◊]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 > v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \; v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune. En examinant la suite $(u_n v_n)$, exprimer cette limite en fonction de u_0 et v_0.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$. Montrons $\mathcal{P}_n$: «$v_n - u_n \leq 0$».
$\mathcal{P}_0$ est évident. On suppose $\mathcal{P}_n$ pour un n fixé. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - v_n^2}{2(u_n+v_n)} = -\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \leq 0$.
$\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai. Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} - \frac{v_n(u_n+v_n)}{u_n+v_n} = \frac{v_n(u_n-v_n)}{u_n+v_n} \geq 0$.
Ainsi, u est décroissante, v est croissante.
u est minorée par 0 : elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.
Puisque $u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \cdot \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} = u_n v_n$, $(u_n v_n)$ est constante et $u_n v_n = u_0 v_0$.
On obtient que v_n converge aussi vers une limite $m \in \mathbb{R}$.
On a : $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \longrightarrow \frac{l+m}{2}$.
Ainsi, $l = \frac{l+m}{2}$ donc $l = m$. Les deux suites convergent vers la même limite.
Puisque $u_n v_n = u_0 v_0$, $lm = u_0 v_0$ donc $l = m = \sqrt{u_0 v_0}$

□