Problème. Polynômes de Legendre.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = (X^2-1)^n \quad \text{et} \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}.$$

Les polynômes L_n sont appelés **polynômes de Legendre**.

Dans tout ce problème enfin, m et n désigneront des entiers naturels.

Partie A. Une famille de polynômes scindés simples sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer L_0 et L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}\left(3X^2-1\right)$.

2. (a) Quel est le degré de U_n ? Son coefficient dominant ?
   Calculer $U_n^{(2n)}$. Que vaut $U_n^{(k)}$ lorsque $k > 2n$?
   (b) Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de son coefficient dominant.

3. (a) Énoncer le théorème de Rolle.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :
   $$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$
   (c) Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que
   $$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
   Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que
   $$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$
   (d) En déduire que si n est non nul, L_n admet n racines simples, toutes dans l'intervalle $]-1,1[$.

Partie B. Évaluation de L_n en 1 et en -1.

1. À l'aide de la formule de Leibniz, démontrer :
   $$L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k.$$
2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

Partie C. Calcul des nombres $\langle L_n, L_m\rangle$.

Dans cette partie, pour deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on notera $\langle P, Q\rangle$ l'intégrale

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci définit un "produit scalaire" sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ (fin d'année). Ci-dessous, nous allons prouver que les L_i sont des polynômes deux à deux "orthogonaux".

1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note
   $$\mathcal{P}(k) : « \langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = (-1)^k \langle U_n^{(n-k)}, U_m^{(m+k)}\rangle ».$$
   (a) En supposant n non nul, à l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ $\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$.
   (b) Justifier l'égalité
   $$\langle L_n, L_m\rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m}n!m!}\langle U_n, U_m^{(m+n)}\rangle.$$
2. À l'aide de ce qui précède, démontrer que
   $$n \neq m \Longrightarrow \langle L_n, L_m\rangle = 0.$$
3. (a) Toujours à l'aide de la question 1 (b), démontrer que
   $$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t.$$
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $J_k = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^k\mathrm{d}t$.
   Intégrer J_k par parties et obtenir une relation entre J_k et J_{k-1} lorsque $k \geq 1$.
   (c) En déduire une expression de J_n, puis que
   $$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

Exercice 1. Convergence linéaire vers le point fixe.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

1. Démontrer que f possède un unique point fixe ℓ sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on exprimera à l'aide de a.
2. Prouver que $[\ell, +\infty[$ est stable par f.
3. Démontrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[\ell, +\infty[$.
4. Soit u la suite définie par $u_0 \in [\ell, +\infty[$ et par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
5. Que dire lorsque $u_0 \in]0, \ell[$?

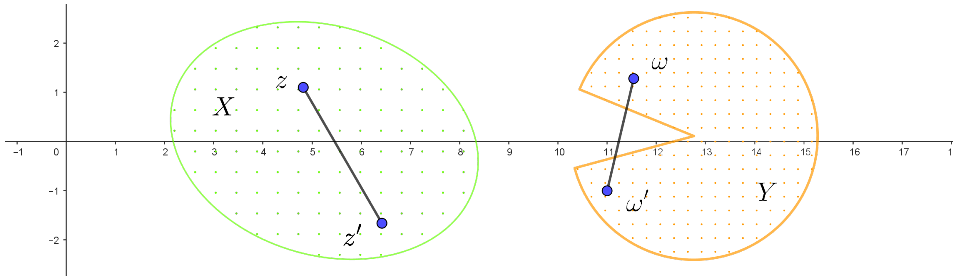
Exercice 2. Sur la notion générale de convexité.

Pour deux nombres complexes z et z', on appelle segment $[z, z']$ l'ensemble

$$[z, z'] = \{(1-\lambda)z + \lambda z' \ \mid \ \lambda \in [0,1]\}.$$

D'une partie X de $\mathbb{C}$, on dit qu'elle est **convexe** si

$$\forall (z, z') \in X^2 \quad [z, z'] \subset X.$$



X est convexe — Y ne l'est pas

1. Démontrer qu'une intersection quelconque de parties convexes de $\mathbb{C}$ est convexe.
2. L'exemple des disques.
   Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Considérons le disque de centre z_0 et de rayon r :
   $$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| \leq r\}.$$
   (a) Représenter $\mathcal{D}(z_0, r)$ dans le cas particulier où $z_0 = 2 + i$ et $r = 1$.
   (b) Démontrer (dans le cas général) que $\mathcal{D}(z_0, r)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
   Indication : $z_0 = (1-\lambda)z_0 + \lambda z_0$.
3. Soit X une partie convexe de $\mathbb{C}$.
   Démontrer que X est stable pour le barycentre, c'est-à-dire
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in X^n \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \in X.$$
   On pourra raisonner par récurrence.

....

Pour $A = (x, y)$ et $B = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, le segment $[A, B]$ est l'ensemble

$$[A, B] = \{((1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)y + \lambda y') \ \mid \ \lambda \in [0,1]\}.$$

D'une partie X de $\mathbb{R}^2$, on dit qu'elle est **convexe** si

$$\forall (A, B) \in X^2 \quad [A, B] \subset X.$$

N.B. Rien de nouveau si on identifie le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et le nombre complexe $x + iy$!

5. L'exemple des demi-plans.
   Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère le demi plan
   $$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ ax + by \geq c\right\}.$$
   (a) Représenter H dans le cas particulier où $a = b = c = 1$.
   (b) Démontrer (dans le cas général) que H est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
6. Épigraphe d'une fonction convexe.
   Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Son **épigraphe** est l'ensemble
   $$\mathcal{E}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x \in I \quad \text{et} \quad y \geq f(x)\right\}.$$
   (a) Représenter l'épigraphe de votre fonction convexe préférée.
   (b) Montrer que si f est convexe sur I, alors $\mathcal{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
   (c) En quoi la question 5 est-elle (sauf exception) un cas particulier de celle-ci ?