Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes. L'équation

$$\boxed{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0},$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, est appelée **équation algébrique** : elle s'écrit seulement avec des sommes et des produits. On parle aussi d'équation **polynomiale** puisque l'application $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est appelée polynôme.

Dans le cours sur les polynômes, nous énoncerons le théorème de d'Alembert-Gauss (ou théorème fondamental de l'algèbre) qui affirme que si $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous nuls, l'équation ci-dessus possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Prenons par exemple l'équation $x^6 + 2x^2 + 3 = 0$. On peut vite voir qu'elle ne possède pas de solution réelle. En effet, pour tout x réel, $x^6 + 2x^2 + 3 \geq 3 > 0$. Le théorème de d'Alembert-Gauss nous apprend que dans $\mathbb{C}$, il y a une solution. Mais il ne nous dit pas comment la trouver ! Il n'existe d'ailleurs pas de méthode générale.

Dans cette partie, on va s'intéresser à des équations algébriques particulières et importantes, pour lesquelles on a une méthode de résolution.

1 Racines carrées d'un nombre complexe.

Rappelons que la racine carrée d'un nombre réel positif a est le nombre réel positif dont le carré vaut a. Il est noté $\sqrt{a}$. On réservera le symbole $\sqrt{\ }$ pour la racine carrée d'un nombre *réel positif*.

Définition 1.

Soit $a \in \mathbb{C}$. Une **racine carrée** de a est un nombre complexe z tel que $z^2 = a$.

Exemple. Racines carrées d'un nombre réel positif. Racines carrées d'un nombre réel négatif.

Proposition 2.

Tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées et elles sont opposées.

⚠ Attention : l'écriture $\sqrt{a}$ continue à n'avoir de sens que lorsque a est un réel positif. Rappelons qu'elle désigne la solution positive de l'équation $x^2 = a$. Une écriture du type « $\sqrt{1+i}$ » n'a aucun sens.

Méthode (Recherche des racines carrées sous forme trigonométrique)**.**

Soit l'équation $z^2 = a$ (d'inconnue z, avec $a \in \mathbb{C}^*$ fixé).
On écrit a sous forme trigonométrique : $a = \rho e^{i\alpha}$ ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$).
Les racines carrées de a sont

$$\sqrt{\rho}e^{i\alpha/2} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\rho}e^{i\alpha/2}.$$

Méthode (Recherche des racines carrées sous forme algébrique)**.**

Soit l'équation $z^2 = a$ (d'inconnue z, avec $a \in \mathbb{C}$ fixé).
On écrit z et a sous forme algébrique : $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$ et $a = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
On a $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Ainsi,

$$z^2 = a \iff \left\{ \begin{array}{ll} |z|^2 & = |a| \\ z^2 & = a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + y^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ x^2 - y^2 & = & \alpha \\ 2xy & = & \beta \end{array} \right.$$

Les deux premières lignes permettent de calculer x^2 et y^2 et donc x et y au signe près.
La dernière ligne permet de savoir si x et y sont de même signe ou de signes opposés.

Exemple 3.

1. Calculer les racines carrées de $-4i$, ainsi que celles du nombre $3 - 4i$.
2. Calculer de deux façons les racines carrées du nombre $1 + i$.
   En déduire une expression de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

2 Racines n-èmes de l'unité et équation $z^n = a$.

Définition 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine $n$ème de l'unité** toute solution complexe de l'équation

$$z^n = 1.$$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$èmes de l'unité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Remarquons que $1 \in \mathbb{U}_n$. À quelle condition a-t-on $-1 \in \mathbb{U}_n$?
- Démontrer que $\mathbb{U}_n$ est stable par conjugaison : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{U}_n \Longrightarrow \overline{z} \in \mathbb{U}_n$.

Théorème 5 (Description des racines $n$èmes de l'unité)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \qquad \text{(ensemble de cardinal } n\text{)}.$$

Proposition 6 (Propriétés algébriques des racines $n$èmes de 1)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines $n$èmes de l'unité forment une progression géométrique de raison $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$:

$$\mathbb{U}_n = \left\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\right\}.$$

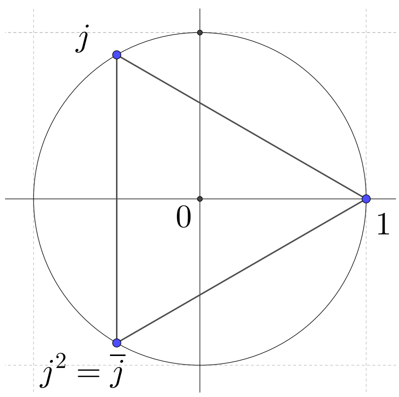
Les nombres $\omega, \omega^2 \ldots, \omega^{n-1}$ sont les $n-1$ solutions de l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k = 0$.
Si $n \geq 2$, alors la somme des racines $n$èmes de l'unité est nulle.

Corollaire 7 (Cas particulier important : racines troisième de l'unité)**.**

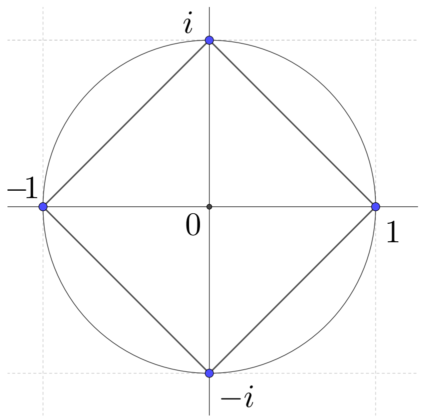
Notons $\boxed{j = e^{\frac{2i\pi}{3}}}$. L'équation $z^3 = 1$ a pour solutions les trois éléments de $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^{-1} = \bar{j}$$

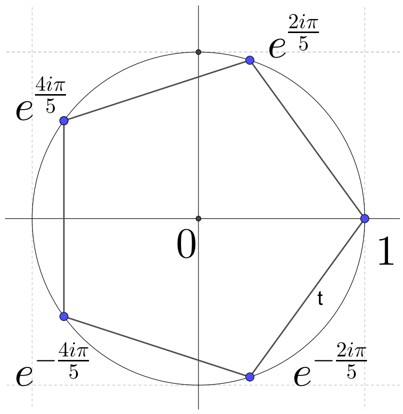
Les nombres j et j^2 sont les solutions de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.



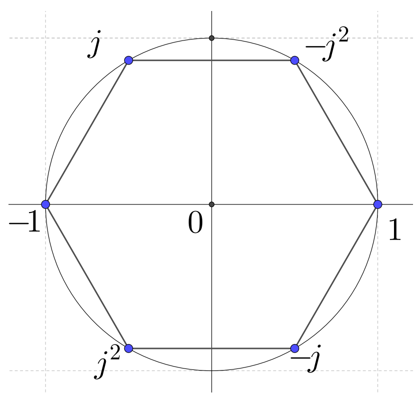
$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$



$\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$



$\mathbb{U}_5$



$\mathbb{U}_6$

Méthode (Résoudre $z^n = a$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ quelconque).

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On peut l'écrire $a = \rho e^{i\alpha}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le nombre $z_0 := \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}}$ est une solution de l'équation $z^n = a$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = a \iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n.$$

L'ensemble des solutions de $z^n = a$ est donc $\left\{ z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

Les points dont l'affixe est solution de l'équation forment un polygone régulier à n sommets.

Exemple 8.

Résolution de $z^3 = 8i$.

3 Équations du second degré.

Définition 9.

On appelle **équation du second degré** toute équation de la forme

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation sont appelées ses **racines**.

Proposition 10 (Équations du second degré, coefficients complexes).

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

et on note Δ le nombre complexe $b^2 - 4ac$, qu'on appelle **discriminant** de l'équation.

- Si $\Delta \neq 0$, alors Δ a exactement deux racines carrées que l'on note δ et $-\delta$. L'équation a alors exactement deux racines : $r_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine "double" : $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Factorisation du trinôme : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{az^2 + bz + c = a(z - r_1)(z - r_2)}.$$

Proposition 11 (Équations du second degré, coefficients réels)**.**

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors Δ a pour racines carrées $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$ et l'équation a deux racines réelles distinctes
$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine "double" : $r = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors Δ a pour racines carrées $i\sqrt{|\Delta|}$ et $-i\sqrt{|\Delta|}$ et l'équation a deux racines complexes conjuguées
$$r_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Proposition 12 (Relations coefficients-racines)**.**

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et z_1 et z_2 deux nombres complexes. Il y a équivalence entre

1. z_1 et z_2 sont deux racines, éventuellement égales, de $az^2 + bz + c = 0$;
2. $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Remarque. Ainsi, si S et P sont deux nombres complexes, le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 & = & S \\ z_1 z_2 & = & P \end{cases}$$

a deux solutions dans $\mathbb{C}^2$: les couples (r_1, r_2) et (r_2, r_1), où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation

$$z^2 - Sz + P = 0.$$

Exemple 13.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser à vue les expressions

$$z^2 + 2z - 3, \qquad 2z^2 + z - 1, \qquad z^2 - 2r\cos(\theta)z + r^2.$$

Exercices

$\boxed{\textbf{10.17}}$ **[♦◇◇]**

1. Calculer les racines carrées du nombre $-8i$.
   On donnera ces nombres sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0.$$

$\boxed{\textbf{10.18}}$ **[♦◇◇]** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calcul de

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z \quad \text{et} \quad \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z$$

$\boxed{\textbf{10.19}}$ **[♦♦◇]** Donner une expression du périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$.
Que conjecture-t-on sur la limite lorsque $n \to +\infty$?
Essayer de prouver votre conjecture.

$\boxed{\textbf{10.20}}$ **[♦◇◇]** Soit $\omega \in \mathbb{U}_7$, une racine 7e de l'unité différente de 1.

1. Justifier que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$.
2. Calculer le nombre $\dfrac{\omega}{1+\omega^2} + \dfrac{\omega^2}{1+\omega^4} + \dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}$.
   Indication : La réponse est un entier négatif.

$\boxed{\textbf{10.21}}$ **[♦♦◇]** Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Rappel de définition : quand dit-on qu'un nombre réel θ est un *argument* d'un nombre complexe z ?
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donner le module et un argument de $e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$.
3. Établir l'égalité

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

$\boxed{\textbf{10.22}}$ **[♦♦◇]** Soit θ un nombre réel appartenant à $]0, \pi[$. Résoudre l'équation

$$z^2 - 2e^{i\theta}z + 2ie^{i\theta}\sin\theta = 0.$$

On écrira les solutions sous forme algébrique <u>et</u> sous forme trigonométrique.

$\boxed{\textbf{10.23}}$ **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 2\cos(\theta)z^n + 1 = 0$.

$\boxed{\textbf{10.24}}$ **[♦♦◇]** Résoudre.

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0.$$

$\boxed{\textbf{10.25}}$ **[♦♦♦]** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = z^n$.

$\boxed{\textbf{10.26}}$ **[♦♦♦]** Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} u^2 + v^2 &= -1 \\ uv &= 1 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{10.27}}$ **[♦♦♦]** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = (1+z)^n = 1$.
Montrer que n est un multiple de 6 et que $z^3 = 1$.
