Ensembles et applications
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 5.1 [♦◊◊]

Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Établir que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \qquad \text{et} \qquad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

On a :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \ \cap \overline{B})} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

□

Exercice 5.2 [♦◊◊]

Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble E, telles que

$$E = A \cup B \cup C, \qquad A \cap D \subset B, \qquad B \cap D \subset C, \qquad C \cap D \subset A.$$

Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.
Soit $x \in D$, on sait que $x \in E$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$.
⊚ Si $x \in A$, alors $x \in A \cap D$, donc $x \in B$.
⊚ Si $x \in B$, alors $x \in B \cap D$, donc $x \in C$.
⊚ Si $x \in C$, alors $x \in C \cap D$, donc $x \in A$.
On en déduit que $x \in A \cap B \cap C$.
Ainsi, $D \subset A \cap B \cap C$.

□

Exercice 5.3 [♦♦◊]

Démontrer que
$$\mathbb{R} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\right\}.$$

On note $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\right\}$
⊚ Montrons que $\mathbb{R} \subset A$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
∘ Si $x \leq 0$, On pose $a = 1$ et $b = x - 1$, ainsi $x = a + b$ donc $x \in A$.
∘ Si $x > 0$, On pose $a = x + 1$ et $b = -1$, ainsi $x = a + b$ donc $x \in A$.
Dans tous les cas $x \in A$, on en conclut que $\mathbb{R} \subset A$.
⊚ Montrons que $A \subset \mathbb{R}$.
Soit $x \in A$, alors il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $x = a + b$.
Or $a + b \in \mathbb{R}$, donc $x \in \mathbb{R}$. On en conclut que $A \subset \mathbb{R}$.

□

Exercice 5.4 [♦♦◊]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ n parties de E telles que
$$A_n = E \qquad \text{et} \qquad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n.$$

On pose $B_1 = A_1$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, on pose $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.
Prouver que $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ est un recouvrement disjoint de E.

Soit $x \in E$. Alors $x \in A_n$. Il existe alors k le plus petit entier tel que $x \in A_k$. Ainsi, $x \in B_k$ puisque $x \in A_k \wedge x \notin A_{k-1}$ par définition de k.
On en déduit que tout élément de E appartient à au moins un (B_k).

Montrons maintenant que tout élément de E appartient aussi au plus à un B_k.
Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$ et $x \in B_i$ et $x \in B_j$.
Or, puisque $x \in B_j$ et $i < j$, $x \notin A_i$. De plus, puisque $x \in B_i$, $x \in A_i$ ce qui est absurde.
Ainsi, tout élément de E appartient au plus à un (B_k).

$(B_k)_{1\leq k\leq n}$ est donc un recouvrement disjoint de E.

□

Exercice 5.5 [♦♦♢]

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Démontrer que

$$B \subset A \iff (\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)).$$

Supposons $B \subset A$.
Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
On a :

$$(A \cap X) \cup B = (A \cup B) \cap (X \cup B) = A \cap (X \cup B)$$

Supposons $(\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B))$.
On a $B \in \mathcal{P}(E)$, donc :

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup B = A \cap (B \cup B) &\iff (A \cup B) \cap B = A \cap B \\ &\iff (A \cup B) = A \\ &\iff B \subset A \end{aligned}$$

$\square$