35

Intégrales sur un segment

Dans le chapitre précédent, nous avons *construit* l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) et à valeurs réelles. Ainsi, lorsque $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, son intégrale sur $[a, b]$ a été notée

$$\int_{[a,b]} f.$$

Ce chapitre-ci se donne des objectifs plus pratiques. On s'appuie sur les calculs de primitive déjà faits au premier semestre, en cherchant cette fois à mettre en valeur les applications des propriétés théoriques de l'intégrale de Riemann.

Dans la partie 1 de ce cours, nous nous débarrassons de la contrainte sur l'ordre des bornes pour la définition, que nous étendons aux fonctions à valeurs complexes. Nous (re)donnons les **propriétés de l'intégrale** montrées dans le chapitre de construction et appliquons ces propriétés dans une selection d'exercices de cours.

La partie 2 du cours est consacrée au **théorème fondamental de l'analyse**. Une preuve de ce théorème est donnée, même si elle se trouve déjà, en réalité, dans notre construction (et au coeur de celle-ci). Parmi les conséquences du théorème se trouvent la formule de calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive, et celles d'**intégration par parties** et de **changement de variable**, dont on redonne les énoncés. On signale que ces outils déjà connus sont utilisés dans les exercices de cours de la partie 1.

Les parties 3 et 4 sont consacrées à des nouveautés : la **formule de Taylor avec reste intégral**, et les **sommes de Riemann**. Ces dernières seront l'occasion de parler de continuité uniforme.

1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

1.1 Ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, la définition de « f est continue par morceaux sur $[a, b]$ » peut être reprise du chapitre précédent, sans modification.

Définition 1 (Fonction c.p.m sur un intervalle)**.**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la restriction $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

On se convaincra que $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{K}), +, \times)$. Il est clair que $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Exemple 2.

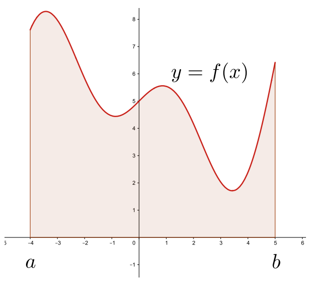
La fonction $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Expliquer.

1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux entre deux bornes.

Dans le chapitre de construction, nous avons démontré que les fonctions continues par morceaux sur un segment (et à valeurs réelles) y sont intégrables au sens de Riemann. Plus concrètement, si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ (où $a < b$), on a donné un sens au nombre

$$\int_{[a,b]} f.$$

Lorsque f prend des valeurs positives, on a interprété le nombre ci-dessus comme *l'aire sous la courbe* de f :



Définition 3.

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ou plus simplement $\int_a^b f$ le nombre réel défini par

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_{[a,b]} f \text{ si } a < b, \qquad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_{[b,a]} f \text{ si } a > b.$$

Proposition-Définition 4.

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont continues par morceaux sur I.
Pour $a, b \in I$, on pose

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}\left(f(x)\right)\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}\left(f(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la partie réelle de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle, idem pour la partie imaginaire.

Preuve. Pour prouver la continuité par morceaux de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à partir de celle de f, on introduit une subdivision adaptée à f $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et on prouve qu'elle est adaptée à sa partie réelle et à sa partie imaginaire. On peut utiliser pour cela les relations

$$\forall x \in I \quad \mathrm{Re}(f(x)) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \overline{f(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f(x)) = \frac{1}{2i}\left(f(x) - \overline{f(x)}\right).$$

En effet, ces relations donnent que pour un i fixé dans $[\![0, n-1]\!]$, les restrictions de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à $]a_i, a_{i+1}[$ y sont continues, et prolongeables par continuité sur les bords. □

1.3 Relation de Chasles.

Proposition 5 (Relation de Chasles)**.**

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et $(a, b, c) \in I^3$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Preuve. La relation a été établie dans le cours de construction pour une fonction à valeurs réelles dans le cas où $a < c < b$. On laisse au lecteur le soin de prouver que la relation demeure vraie pour une fonction à valeur complexes, et surtout qu'elle est vraie quel que soit l'ordre sur a, b, c en utilisant la définition 3. □

1.4 Linéarité.

Proposition 6 (Linéarité de l'intégrale)**.**

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et $(a, b) \in I^2$. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Preuve. La relation a été établie dans le cours de construction pour une fonction à valeurs réelles et des scalaires réels. On laisse au lecteur le soin de prouver que la relation demeure vraie pour une fonction à valeur complexes, en utilisant la définition 4. □

1.5 Intégrales et inégalités.

Évidemment, puisque nous parlons ici d'inégalités, les fonctions considérées seront seulement à valeurs **réelles**, sauf pour l'inégalité triangulaire. Nous soulignons aussi que les propriétés qui suivent réclament toujours que les intégrales examinées soient écrites avec des bornes « bien rangées ». Cette hypothèse essentielle a été encadrée à chaque fois.

Proposition 7 (Positivité).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ où le segment $[a,b]$ est tel que $\boxed{a \leq b}$.

Si f est positive sur $[a,b]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un nombre positif.
Si f est négative sur $[a,b]$, cette intégrale est un nombre négatif.

Proposition 8 (Intégrale nulle d'une fonction positive et continue).

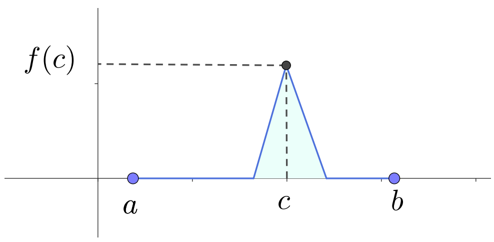
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $\boxed{a < b}$.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} f \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur} [a,b] \\ f \text{ est } \underline{\text{positive}} \text{ sur} [a,b] \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \end{array} \right\} \quad \text{alors } f \text{ est nulle sur } [a,b].$$

On a aussi par contraposée la propriété de *stricte positivité de l'intégrale*

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} f \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur} [a,b] \\ f \text{ est } \underline{\text{positive}} \text{ sur} [a,b] \\ \exists c \in [a,b] \ f(c) > 0 \end{array} \right\} \quad \text{alors } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

Remarque. Dans la première implication, *positive* peut être remplacé par *de signe constant*.



Proposition 9 (Croissance).

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, avec $\boxed{a \leq b}$.

$$f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 10 (Inégalité de la moyenne)**.**

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, avec $\boxed{a \leq b}$.

Si f est minorée par un réel m et majorée par un réel M sur $[a,b]$, alors,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a), \quad \text{Lorsque } a<b, \text{ on a } \ m \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Notamment, si f est constante, égale à C sur $[a,b]$, $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = C(b-a)$.

Remarque. Lorsque $a<b$, le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente la *valeur moyenne* prise par f sur $[a,b]$.

Proposition 11 (Inégalité triangulaire)**.**

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, avec $\boxed{a \leq b}$.

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

1.6 Quelques exercices de cours.

Exemple 12.

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I_a = \displaystyle\int_a^{a^2} \ln^3(x)\mathrm{d}x$. Existence et signe de I_a.

Exemple 13.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$.
Justifier que f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

Exemple 14 (Un exercice : suite définie par une intégrale)**.**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n := \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$.

1. Prouver que (I_n) est convergente.
2. Prouver que la limite vaut 0 à l'aide d'une intégration par parties.
3. Donner un équivalent de I_n.

Exemple 15 (Lemme de Riemann-Lebesgue).

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque. Le résultat du lemme de Riemann-Lebesgue demeure vrai lorsque f est seulement supposée continue mais c'est plus difficile : les arguments pour le montrer seront développés en seconde année. L'hypothèse $\mathcal{C}^1$, souvent vérifiée dans la pratique, est commode car elle permet l'intégration par parties.

2 Intégration et dérivation.

2.1 Théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 16 (Théorème fondamental de l'analyse).

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soit $a \in I$. La fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de dérivée $F' = f$.

Corollaire 17.

Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Une conséquence : la primitive donnée par le TFA est l'*unique* primitive de f sur I qui s'annule en a.

Proposition 18.

Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Proposition 19.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Exemple 20 (Déjà traité dans le cours du 1er semestre).

Soit la fonction
$$F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est dérivable sur D et calculer sa dérivée. Donner les variations de f.
3. (*) Calculer les limites intéressantes.

2.2 Outils de calcul intégral.

Théorème 21 (Formule d'intégration par parties).

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,
$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 22 (Suites dont le terme général est une intégrale).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n := \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$
Expliciter directement le nombre I_n à l'aide d'un calcul de primitive n'est parfois pas possible mais dans certains cas, une IPP permettra d'obtenir une **relation de récurrence** sur la suite (I_n).

Exemple à connaître : la suite des intégrales de Wallis.

Théorème 23 (Formule de changement de variable).

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$, $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{K})$ et $(a, b) \in I^2$. On a
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Le moyen mnémotechnique pour se souvenir de la formule : on pose $x = \varphi(t)$ et on écrit « $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ ».

Exemple 24 (Un changement de variable).

Démontrer que $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{4 + \sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$ en posant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

Corollaire 25 (Intégrale d'une fonction paire, d'une fonction impaire)**.**

Soit $f \in \mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$.

$$\text{Si } f \text{ est paire, } \int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t. \qquad \text{Si } f \text{ est impaire, } \int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Preuve. La preuve avait été écrite en début d'année pour une fonction continue et l'idée reste la même : le changement de variable $x=-t$. Considérons une subdivision σ de $[-a,a]$ et créons à partir de σ une nouvelle subdivision de ce segment cette fois *symétrique* par rapport à 0. Il suffit pour cela d'y mettre 0, tous les points de σ, et tous lesurs opposés. On obtient

$$\sigma' = (-b_p,\dots,-b_1,b_0,b_1,\dots,b_p), \quad \text{avec } b_0=0.$$

On a alors

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{b_i}^{b_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{b_i}^{b_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\mathrm{d}t,$$

où pour i fixé $\widetilde{f}_i$ désigne la restriction de f à $]b_i,b_{i+1}[$, prolongée par continuité (de sorte que $f_{|[b_i,b_{i+1}]}$) et $\widetilde{f}_i$ ne diffèrent qu'en b_i et en b_{i+1} éventuellement. Pour $i \in [\![0,p-1]\!]$, on obtient par changement de variable $t=-x$,

$$\int_{b_i}^{b_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\mathrm{d}t = -\int_{-b_i}^{-b_{i+1}} \widetilde{f}_i(-x)\mathrm{d}x = \int_{-b_{i+1}}^{-b_i} \widetilde{f}_i(-x)\mathrm{d}x.$$

En sommant, on obtient

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{b_i}^{b_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{-b_{i+1}}^{-b_i} \widetilde{f}_i(-x)\mathrm{d}x = \int_{-b_p}^{b_0} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t.$$

On obtient bien que
- si f est paire, alors $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t$;
- si f est impaire, $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^0 (-1)f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t$.

□

Corollaire 26.

Soit $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, une fonction T périodique, où T est un réel strictement positif.

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve. On laisse au lecteur le soin d'adapter la preuve donnée en début d'année pour une fonction continue, et ceci en utilisant la même idée : prouver que

$$\varphi : a \mapsto \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$$

est constante en la dérivant. Cette fois, la fonction φ n'est plus dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier mais seulement en tout point où f est continue... □

3 Formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème 27 (Formule de Taylor avec reste intégral).

Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

- Dans le second membre de l'égalité ci-dessus, la première moitié est la fonction polynomiale
$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$
parfois appelée polynôme de Taylor à l'ordre n de f. On l'a déjà vu apparaître dans la formule de Taylor-Young : c'est la partie régulière du DL en a à l'ordre n. Pour les fonctions usuelles, et $a = 0$, on connait ses coefficients, car on connait nos développements limités sur le bout des doigts...
- La seconde moitié
$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$
est appelée **reste intégral** à l'ordre n. C'est une expression semi-explicite de l'erreur d'approximation d'une fonction par son polynôme de Taylor à l'ordre n.

Exemple 28 (Comparer une fonction et son polynôme de Taylor).

Montrer l'inégalité :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}.$$

L'égalité avec reste intégral a pour corollaire l'inégalité ci-dessous, qui généralise l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 29 (Inégalité de Taylor Lagrange).

Soit I un intervalle, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$.
On suppose que la fonction $|f^{(n+1)}|$ est majorée par une constante M_{n+1} sur I. Alors,

$$\forall x \in I \quad \left| f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 30 (Une fonction qui est somme de sa série de Taylor).

Prouver que

$$\forall x \in [0, 1] \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x).$$

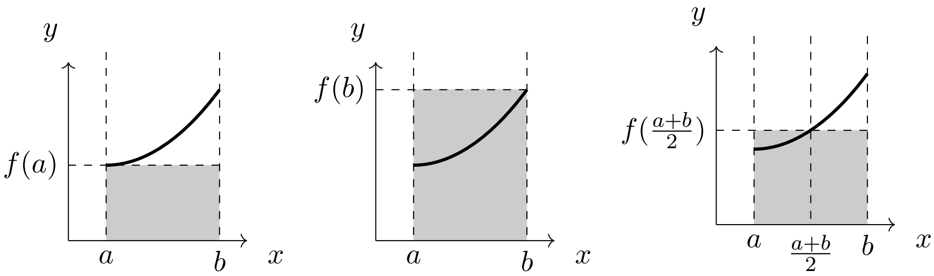
4 Sommes de Riemann.

Dans cette partie du cours, les théorèmes sont établis pour des fonctions c.p.m. à valeurs complexes. Dès que l'on interprète les choses en termes d'« aire sous la courbe », ou d'« aire de rectangle », il faudra considérer que la fonction dont on parle à ce moment là est à valeurs *réelles positives*.

4.1 Convergence des sommes de Riemann.

Une première approximation du nombre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est celle donnée par l'aire d'un rectangle de base $b-a$ et de hauteur $f(c)$ où c est un point de $[a,b]$. On fait donc l'approximation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(c)$.

Trois choix naturels pour le point c : $c = a$ ("rectangle à gauche"), $c = b$ (à droite), $c = \frac{a+b}{2}$ (point milieu).



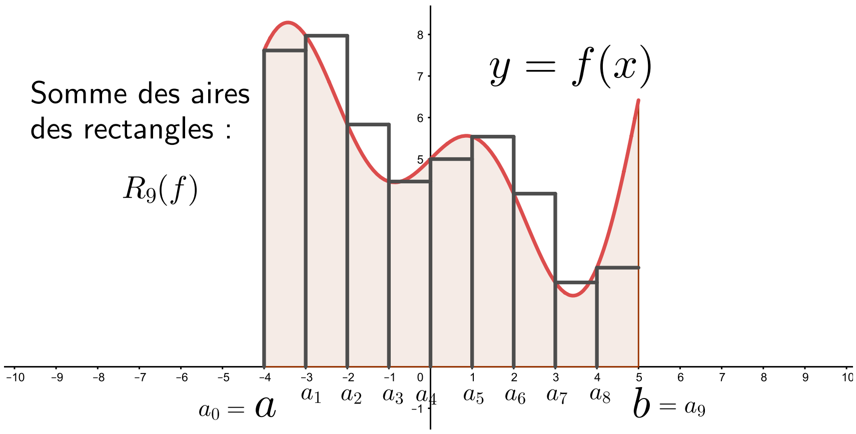
Définition 31.

Soit un segment $[a,b]$ avec $a < b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on note $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

La famille $(a_0, \ldots, a_n)$ est appelée **subdivision régulière** de $[a,b]$ à n segments. Chaque segment de la subdivision est de longueur $\frac{b-a}{n}$, et ce nombre est appelé **pas** de la subdivision.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On appelle $n$ème **somme de Riemann** de f le nombre

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k).$$



Théorème 32 (Convergence des sommes de Riemann)**.**

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on note $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et $R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(a_k)$. Alors,

$$R_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarques.

- Ajouter ou retrancher un nombre fini de rectangles ne change rien puisque, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, la contribution du rectangle en question aussi. Par exemple,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = R_n(f) + \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \ + \ 0.$$

- Le programme officiel n'exige la preuve du résultat que dans le cas d'une fonction f lispschitzienne sur $[a,b]$. Nous écrirons cette preuve en prouvant la proposition 36. Le renforcement de l'hypothèse permet de préciser la vitesse de convergence.
- Pour prouver le résultat sous l'hypothèse que f est continue, nous aurons besoin de la notion de *continuité uniforme* (voir paragraphe 4.3).

Corollaire 33 (Cas particulier important : $a = 0$ et $b = 1$)**.**

Soit $f \in \mathcal{CM}([0,1],\mathbb{K})$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 34 (Calculer)**.**

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}; \qquad \text{et} \qquad \lim \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}.$$

Exemple 35 (Inégalité de Jensen pour les intégrales)**.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et φ une fonction convexe *et continue* sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité de Jensen pour les intégrales :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Un autre très bel exemple d'utilisation des sommes de Riemann pour un calcul d'intégrale : le dernier exercice du TD.

4.2 Comparaison de la méthode des rectangles avec celle des trapèzes.

On rappelle que si M est un réel positif et $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est M-lispschitzienne sur I, si

$$\forall (x, y) \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Il est clair qu'une telle fonction est continue sur I. On travaille donc dans ce paragraphe sous une hypothèse plus forte que dans le précédent.

Rappelons nous aussi que grâce aux accroissements finis, nous savons prouver que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment, elle y est M-lipschitzienne, avec $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

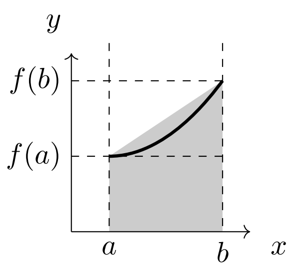
Proposition 36 (Erreur d'approximation avec la méthode des rectangles)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction M-lipschitzienne, (avec $M \in \mathbb{R}_+^*$).
Notons $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Ce nombre est une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Voici une majoration de l'erreur d'approximation $\quad \left|R_n(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{M(b-a)^2}{2n}$.

On a donc $\quad \left|R_n(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Peut-on faire mieux qu'une erreur d'approximation en $O(\frac{1}{n})$? La réponse est <u>oui</u> : en remplaçant le rectangle par un trapèze dans l'approximation élémentaire.



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a) + f(b)\right).$$

On peut préciser la qualité de l'approximation ci-dessus : si f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$(*) \qquad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;-\; \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a) + f(b)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}M_2 \quad \text{où} \quad M_2 = \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|.$$

Ceci se démontre à l'aide d'une double IPP.

Notons toujours $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, et sommons, pour définir $T_n(f)$, la somme des aires des n trapèzes associés à la subdivision $(a_k)_{0\leq k\leq n}$.

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\left(f(a_k) + f(a_{k+1})\right) = \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(a_k) + \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\left(f(a_n) - f(a_0)\right)$$

On obtient

$$T_n(f) = R_n(f) + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(b)-f(a)}{2}.$$

Les expressions de $T_n(f)$ et de $R_n(f)$ sont très proches ! Pour chacune, l'algorithme de calcul est de complexité $O(n)$. Pourtant, comme on va le voir ci-dessous, l'approximation par la méthode des trapèzes est meilleure car l'erreur commise est un $O(\frac{1}{n^2})$.

Proposition 37 (Erreur d'approximation avec la méthode des trapèzes)**.**

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{K})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $T_n(f)$ comme ci-dessus. On a

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Éléments de preuve.

Comme dans la preuve de la proposition 36, on obtient, grâce à la relation de Chasles, que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T_n(f)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\left(f(a_k) + f(a_{k+1})\right)\right|.$$

Or, en utilisant l'inégalité (*) énoncée plus haut entre a_k et a_{k+1}, puis en sommant, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T_n(f)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12} \cdot M_2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

□

4.3 Complément : continuité uniforme d'une fonction.

Définition 38.

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **uniformément continue sur** I si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

Exemple. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'y est pas uniformément continue.

Proposition 39.

Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I y est uniformément continue.

Théorème 40 (de Heine)**.**

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Application : preuve du théorème 32 de convergence des sommes de Riemann sous l'hypothèse continue.

On considère $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et on note $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{n}$. On note enfin $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ la somme de Riemann de f pour un certain entier naturel n non nul.

En reprenant le travail fait dans la preuve de la proposition 36, on prouve que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - R_n(f)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|\mathrm{d}t.$$

On va majorer cette distance par un certain nombre strictement positif ε.

La fonction f a été supposée continue sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Il existe donc un réel strictement positif η tel que pour tous $(x,y) \in [a,b]^2$, $|x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Supposons que n est pris suffisamment grand de sorte que $\frac{b-a}{n} \leq \eta$.
Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel $t \in [a_k, a_{k+1}]$, on a $|t - a_k| \leq (a_{k+1} - a_k) = \frac{b-a}{n} \leq \eta$, ce qui donne $|f(t) - f(a_k)| \leq \varepsilon$. Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|\mathrm{d}t \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon \ \mathrm{d}t = \varepsilon\frac{b-a}{n}.$$

Sommons ! On obtient

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - R_n(f)\right| \leq (b-a)\varepsilon.$$

Ceci achève de prouver que

$$R_n(f) \to \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

$\square$

Exercices

Propriétés générales des intégrales.

$\boxed{\textbf{35.1}}$ **[♦♦◊]** Trouver toutes les fonctions f de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = (b-a)\max_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

$\boxed{\textbf{35.2}}$ **[♦♦♦]** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Justifier que f s'annule au moins deux fois sur $[0,1]$.

$\boxed{\textbf{35.3}}$ **[♦♦♦]** Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 |\sin nx|\mathrm{d}x$ existe et la calculer

---

Suites définies par des intégrales

$\boxed{\textbf{35.4}}$ **[♦◊◊]** Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

$\boxed{\textbf{35.5}}$ **[♦◊◊]** Soit (u_n) la suite dont le terme général est défini pour tout entier naturel n par

$$u_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

Conjecturer que (u_n) tend vers un nombre réel à préciser. Démontrer votre conjecture.

$\boxed{\textbf{35.6}}$ **[♦♦◊]** Soit (I_n) la suite dont le terme général est défini pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_0^1 x^n\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que $I_n\to 0$.
2. Calculer un équivalent de I_n.

Intégration par parties et changement de variable.

$\boxed{\textbf{35.7}}$ **[♦◊◊]** Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0,1]$. Calculer

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\mathrm{d}x.$$

$\boxed{\mathbf{35.8}}$ **[♦♦♢]**

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$.
2. Calculer par récurrence l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x$.

$\boxed{\mathbf{35.9}}$ **[♦♦♢]** On considère les deux intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}\, dt \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}\, dt$$

1. A l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - t$ calculer $I + J$.
2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ montrer que $I = J$.
3. En déduire I et J.

$\boxed{\mathbf{35.10}}$ **[♦♦♢]** Calculer, pour tout entier naturel n le nombre $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$.

$\boxed{\mathbf{35.11}}$ **[♦♦♢]** Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. En vous aidant du changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$, démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\alpha\cos x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{|\sin\alpha|}.$$

Théorème fondamental de l'analyse et applications.

$\boxed{\mathbf{35.12}}$ **[♦♦♢]** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que si g est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle.

$\boxed{\mathbf{35.13}}$ **[♦♦♦]** Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t)\, dt$$

$\boxed{\mathbf{35.14}}$ **[♦♦♢]** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (f est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f(\mathbb{R}_+)$).

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = x\, f(x)$$

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in f(\mathbb{R}_+)$,

$$\int_0^a f(t)\, dt + \int_0^b f^{-1}(t)\, dt \geq ab$$

Formule de Taylor avec reste intégral.

$\boxed{\textbf{35.15}}$ **[♦♦◇]** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $f(a)=0$.

1. Montrer que
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \le \frac{(b-a)^2}{2} \times \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$$
2. Étudier le cas d'égalité.

$\boxed{\textbf{35.16}}$ **[♦♦♦]** [Inégalité de Kolmogorov]
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées.
On note $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
Nous allons prouver que f' est bornée et majorer $x \mapsto |f(x)|$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h>0$. Montrer que
$$\big|f(a+h) - f(a-h) - 2hf'(a)\big| \le M_2 h^2.$$
puis que $|f'(a)| \le \frac{1}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$.
2. Justifier l'existence de $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$. Montrer que $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$.

Sommes de Riemann.

$\boxed{\textbf{35.17}}$ **[♦◇◇]** Montrer la convergence des suites u, v, w dont le terme général est donné ci-dessous, en précisant la limite :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \qquad v_n \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor, \qquad w_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$$

$\boxed{\textbf{35.18}}$ **[♦♦◇]** Prouver l'existence du nombre suivant et le calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}.$$

$\boxed{\textbf{35.19}}$ **[♦♦♦]** Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Limite de la suite de terme général $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right)$.

$\boxed{\textbf{35.20}}$ **[♦♦♦]** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$u_n = \left(2^2 3^3 \cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$
Démontrer que $u_n \sim c\sqrt{n}$ où vous expliciterez la constante c.

$\boxed{\textbf{35.21}}$ **[♦♦♦]** Soit $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$. Justifier que l'intégrale ci-dessous existe et la calculer :

$$I_\lambda = \int_0^\pi \ln(1-2\lambda\cos t + \lambda^2)\mathrm{d}t.$$
