Khôlles 29/04

M7, T3, T4

Question 1

Énoncer le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe pour un solide en rotation.

Solution :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à son axe (O_z) est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \quad \text{soit} \quad J_z\dot{\omega} = \sum_i M_i$$

Question 2

Énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe et montrer qu'il est équivalent à la loi du moment cinétique scalaire.

Solution :

TEC : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i$ et $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega^2$ et $\mathcal{P}_i = \vec{M}_i\dot{\theta}$.
TMCS : $\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M}_i$ et $L_z = J_z\omega$ et $J\dot{\omega} = \sum_i \vec{M}_i$.

Question 3

Établir l'équation du mouvement du pendule pesant avec le TEC.

Solution :

Système : {Pendule de masse m}.
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : $\vec{p} = m\vec{g}$, $M_z(\vec{p}) = -d\sin\theta mg$ donc $\mathcal{P}(\vec{p}) = M_z(\vec{p}).\dot{\theta} = -lmg\dot{\theta}\sin\theta$.
$\vec{R}$ la réaction du pivot, qui est idéal : $M_z(\vec{R}) = 0$ donc $\mathcal{P}(\vec{R}) = 0$.
Étude cinématique : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$.
TEC: $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{p}) + \cancel{\mathcal{P}(\vec{R})} \Longrightarrow J\ddot{\theta}\dot{\theta} = -lmg\dot{\theta}\sin\theta \Longrightarrow J\ddot{\theta} + lmg\sin\theta = 0$.

Question 4

Établir l'équation du mouvement du pendule pesant avec le TMC.

Solution :

Système : {Pendule de masse m}.
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : $\vec{p} = m\vec{g}$, $M_z(\vec{p}) = -d\sin\theta mg$ Et $M_z(\vec{R}) = 0$ car c'est une liaison pivot idéale.
Etude cinématique : $\vec{OM} = l\vec{e_r}$, $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$
Ainsi, $L_z = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{e_r} \wedge ml\dot{\theta}\vec{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{e_z}$ et $\frac{dL_z}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e_z}$.
TMC : $\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \Longrightarrow ml^2\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

Question 5

Énoncer complètement le second principe : propriétés de l'entropie, bilan d'entropie et expliciter les différents termes.

Solution :

L'entropie S est une fonction d'état extensive et additive.
Deuxième principe:

$$\Delta S = S_{\text{créée}} + S_{\text{éch}}$$

Où est $S_{\text{créée}}$ est l'entropie créée par le système et $S_{\text{éch}}$ est l'entropie échangée avec l'extérieur.
On a $S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ au contact des thermostats de températures T_i.
Si $S_{\text{créée}} = 0$, la transformation est réversible, sinon elle est irréversible.

Question 6

Citer et établir la loi de Laplace pour un gaz parfait et ses conditions d'application.
On rappelle l'entropie d'un gaz parfait :

$$S(P,V) = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{P}{P_0} + \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{V}{V_0} + S_0.$$

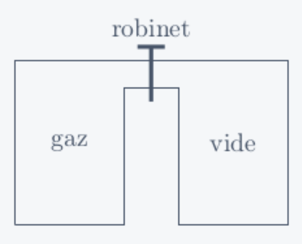
Solution :

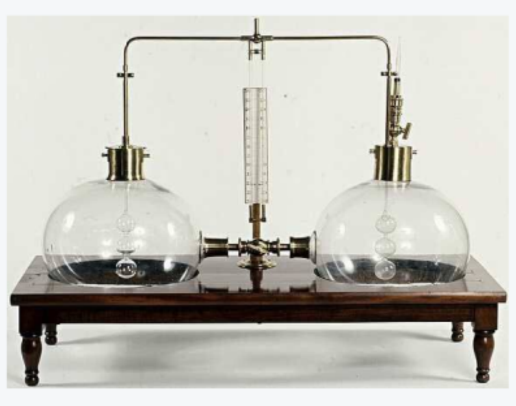
Conditions: on considère un gaz parfait, subissant une transformation adiabatique réversible.
Loi de Laplace: $PV^\gamma = cste$.
Les conditions adiabatique et réversible assurent que $\Delta S = 0$.
De plus, $\Delta S = S(P_2, V_2) - S(P_1, V_1) = ... = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{P_2V_2^\gamma}{P_1V_1^\gamma}$ donc $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$.

Question 7

Application 8 – Détente de Joule – Gay-Lussac

« L'appareil à deux globes » est constitué de deux ballons en verre de même volume $V_0 \approx 14\,\text{L}$, reliés entre eux par une tubulure de laiton munie d'un robinet. L'un des ballons peut être relié à une machine pneumatique permettant d'y faire le vide, ou à une réserve de gaz.





On suppose la demi-enceinte de droite initialement vide et le gaz dans la demi-enceinte de gauche à la température T_0. Lorsque l'on ouvre le robinet, le gaz se répand très rapidement dans le vide.

1. Justifier que l'on peut approximer la transformation du gaz comme étant adiabatique et sans travail échangé.
2. Exprimer le volume et la température finale du gaz V_f et T_f en fonction des valeurs initiales V_0 et T_0.
3. Déterminer l'entropie créée au cours de la transformation. Interpréter.

Solution :

Système : {gaz + vide}
$\boxed{1.}$ La transformation est adiabatique car rapide devant les transferts. Elle est isochore donc $W = 0$.

$\boxed{2.}$ Premier principe: $\Delta U = \cancel{W} + Q = mc(T_f - T_0) = 0$ donc $T_f = T_0$ et $V_f = 2V_0$.

$\boxed{3.}$ Deuxième principe : $\Delta S = \Delta S_{GP} + \cancel{\Delta S_{vide}} = S(T_0, 2V_0) - S(T_0, V_0) = nR\ln(2)$.
L'entropie échangée est nulle car adiabatique. Donc $\Delta S = S_{\text{créée}} = nR\ln 2 \Longrightarrow$ irréversible.

Question 8: Application 9

Application 9 – Chauffage par effet Joule

On considère une masse m d'eau de capacité thermique massique c, initialement à la température $T_i = 20\,°\text{C}$, dans un calorimètre dont on néglige la valeur en eau. On plonge une résistance $R = 5\,\Omega$ (de capacité thermique négligeable), parcourue par un courant d'intensité $I = 1\,\text{A}$ pendant $\tau = 1\,\text{min}$ dans l'eau.

1. Établir l'expression de la température finale T_f. Faire l'application numérique.
2. Exprimer l'entropie créée. Conclure.
3. Que devient cette expression en supposant $T_f \approx T_i$, c'est-à-dire si $RI^2\tau \ll mcT_i$? Faire l'application numérique.

Donnée : on rappelle que l'entropie massique d'une phase condensée est donnée par

$$s(t) = c\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0,$$

où s_0 est l'entropie massique à la température T_0 et c la capacité thermique massique.

Solution :

Système : {Eau + Résistance + Calorimètre}
$\boxed{1.}$ Travail électrique : $W = RI^2\tau$.
On a $\Delta H = W + \cancel{Q} = mc(T_f - T_i)$ donc $T_f = T_i + \frac{RI^2\tau}{mc}$.

$\boxed{2.}$ $\Delta S = \Delta S_{eau} + \cancel{\Delta S_{calo}} + \cancel{\Delta S_R} = mc\ln\frac{T_f}{T_i}$.
Adiabatique : $S_{\text{éch}} = 0$ donc $S_{\text{créée}} = mc\ln\frac{T_f}{T_i}$ donc irréversible.

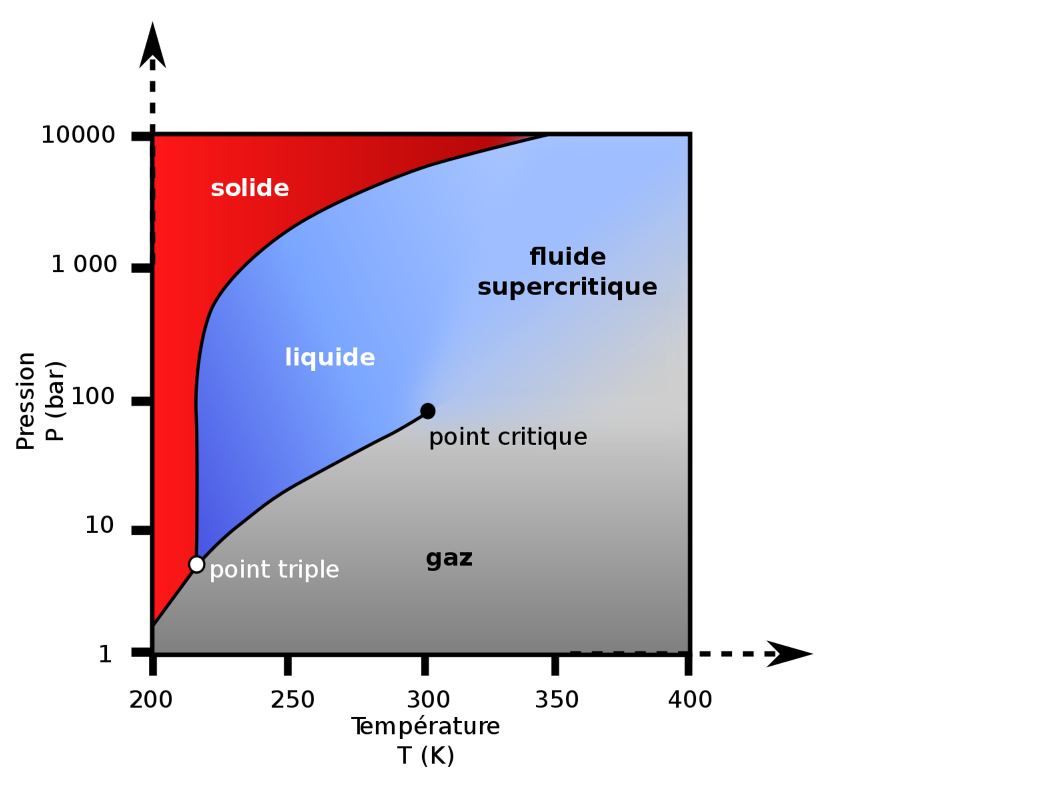
$\boxed{3.}$ $S_{\text{créée}} = mc\ln(1 + \frac{RI^2\tau}{mcT_i}) \sim \frac{RI^2\tau}{T_i} > 0$.

Question 9

Diagramme de phase (P, T) quelconque avec point triple et critique.

Solution :

C'est :

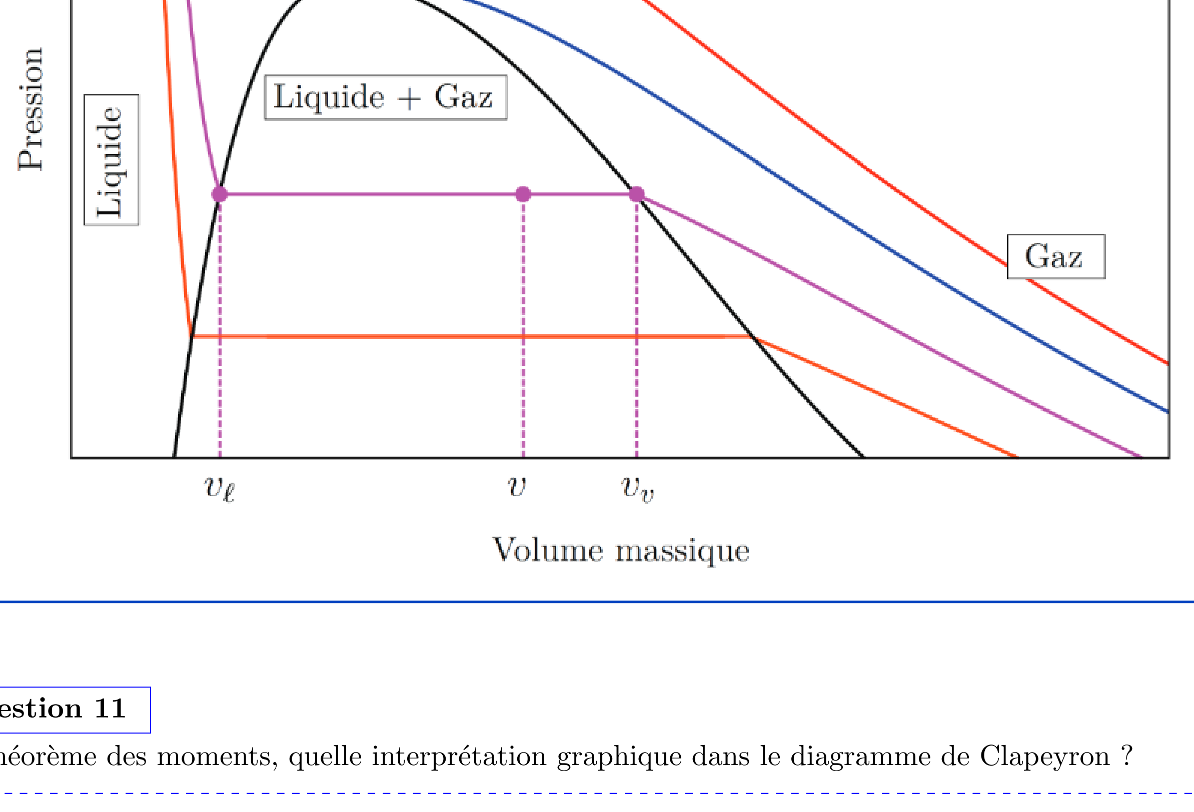


Question 10

Tracer l'allure générale d'un diagramme de Clapeyron (P, v) pour un équilibre liquide-vapeur et y placer les phases. Nommer les lignes et les points particuliers. Tracer l'allure de quelques isothermes.

Solution :

Courbe d'**ébullition** à gauche du point critique C, de **rosée** à droite.



Question 11

Théorème des moments, quelle interprétation graphique dans le diagramme de Clapeyron ?

Solution :

On a :

$$w_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l} \qquad \text{et} \qquad w_l = \frac{v - v_v}{v_l - v_v}$$

C'est la position de v par rapport à v_l et v_v.
Comment s'en rappeler ? On regarde les cas limites: si $v = v_v$ alors $w_l = 0$, et si $v = v_l$ alors $w_v = 0$.