Fonctions usuelles
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 3.1 [♦◇◇]

Résoudre $2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3)$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned} & 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3) \\ \iff & \ln\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right) = \ln(3x) \\ \iff & \frac{(x+3)^2}{4} = 3x \\ \iff & x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \iff & x = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, 3 est l'unique solution.

Exercice 3.2 [♦♦♢]

Résoudre l'équation $ch(x) = 2$. Que dire des solutions ?
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned} &\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \\ \iff &e^x + e^{-x} = 4 \\ \iff &e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \\ \iff &e^x = 2 \pm \sqrt{3} \\ \iff &x = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\ln(2-\sqrt{3})$ et $\ln(2+\sqrt{3})$ sont les uniques solutions dans $\mathbb{R}$.
On remarque que :

$$\ln(2+\sqrt{3}) = -\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = -\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Les solutions sont opposées.

Exercice 3.3 [♦♢♢]

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned} &x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \\ \iff &e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \\ \iff &\sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \\ \iff &\ln(x)(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) = 0 \\ \iff &\ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\ \iff &x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ \iff &x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Les uniques solutions sont donc 1 et 4.

Exercice 3.4 [♦◊◊] Trigonométrie hyperbolique.

1. Montrer que pour tous réels a et b, on a

 (a) $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$.

 (b) $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$.

 (c) Trouver une identité pour $\operatorname{th}(a+b)$.

2. Pour x réel, on pose $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$\text{(a)}\ \operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \text{(b)}\ \operatorname{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \text{(c)}\ \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

1.
(a)

$$\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b)$$

(b)

$$\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} - e^{a-b}}{2} = \operatorname{sh}(a+b)$$

(c)

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)}$$

On divise en haut et en bas par $\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)$.

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} + \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}}{1 + \frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}} = \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$$

2.
(a)

$$\begin{aligned}\frac{1+t^2}{1-t^2} &= \frac{1+\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})}{1-\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2})+\operatorname{sh}^2(\frac{x}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2})-\operatorname{sh}^2(\frac{x}{2})}\\ &= \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1-t^2} &= \frac{2\operatorname{th}(\frac{x}{2})}{1-\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2})\operatorname{ch}(\frac{x}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2})-\operatorname{sh}^2(\frac{x}{2})}\\ &= \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2} &= \frac{2\operatorname{th}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2})\operatorname{ch}(\frac{x}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2})+\operatorname{sh}^2(\frac{x}{2})}\\ &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)\end{aligned}$$

□

Exercice 3.5 [♦♦♢]

Sans calculatrice, comparer π^e et e^π.
Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$f' : \begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}\end{cases}$$

Un magnifique tableau de variations :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On en conclut que :

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{\ln(\pi)} > e\\ \iff\ &\pi > e\ln(\pi)\\ \iff\ &e^\pi > e^{e\ln\pi}\\ \iff\ &e^\pi > \pi^e\end{aligned}$$

Donc $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 3.6 [♦♦♦]

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.
2. Des deux nombres $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[3]{24}$, lequel est le plus grand ?

1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\right) \end{cases}$$

On a :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	-1	$\nearrow$	0

2.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{24} \\ =& \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{3} \\ =& (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) - (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

Or f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi : $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$.
On en conclut que $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Exercice 3.7 [♦♦♢]

1. Soit α un réel et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$ (on discutera selon les valeurs de α).
2. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$$

1. Posons $f : x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$. f est définie, continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$ de dérivée :

$$g : \begin{cases}]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha((1+x)^{\alpha-1}-1) \end{cases}$$

Alors :

◎ Si $\alpha \in]0,1[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	$\alpha-1$	↗	0	↘	$-\infty$

◎ Si $\alpha \in]1,+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	$\alpha-1$	↘	0	↗	$+\infty$

◎ Si $\alpha \in]-\infty,0[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Ainsi, $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$ lorsque $\alpha \notin [0,1]$.

2. D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geq \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = (n+1)^\alpha$$

□