

# Fonctions usuelles

## Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

### Exercices.

<b>Exponentielle and friends.</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Exercice 3.1</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Exercice 3.2</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>Exercice 3.3</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>Exercice 3.4</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>Exercice 3.5</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Exercice 3.6</b> . . . . .	<b>5</b>

### Exercice 3.1 [◆◆◆]

Résoudre  $2 \ln \left( \frac{x+3}{2} \right) = \ln(x) + \ln(3)$ , sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 & 2 \ln \left( \frac{x+3}{2} \right) = \ln(x) + \ln(3) \\
 \iff & \ln \left( \left( \frac{x+3}{2} \right)^2 \right) = \ln(3x) \\
 \iff & \frac{(x+3)^2}{4} = 3x \\
 \iff & x^2 - 6x + 9 = 0 \\
 \iff & x = 3
 \end{aligned}$$

Ainsi, 3 est l'unique solution.

**Exercice 3.2 [◆◆◆]**

Résoudre l'équation  $ch(x) = 2$ . Que dire des solutions ?

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

On a :

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= 2 \\ \iff e^x + e^{-x} &= 4 \\ \iff e^{2x} - 4e^x + 1 &= 0 \\ \iff e^x &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \iff x &= \ln(2 \pm \sqrt{3})\end{aligned}$$

Ainsi,  $\ln(2 - \sqrt{3})$  et  $\ln(2 + \sqrt{3})$  sont les uniques solutions dans  $\mathbb{R}$ .

On remarque que :

$$\ln(2 + \sqrt{3}) = -\ln\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = -\ln(2 - \sqrt{3})$$

Les solutions sont opposées.

**Exercice 3.3 [◆◆◆]**

Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

On a :

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}} &= \sqrt{x}^x \\ \iff e^{\sqrt{x} \ln x} &= e^{x \ln(\sqrt{x})} \\ \iff \sqrt{x} \ln(x) &= \frac{x}{2} \ln(x) \\ \iff \ln(x) \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) &= 0 \\ \iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} &= \frac{x}{2} \\ \iff x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ \iff x = 1 \text{ ou } x &= 4\end{aligned}$$

Les uniques solutions sont donc 1 et 4.

**Exercice 3.4 [◆◆◆] Trigonométrie hyperbolique.**

1. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a

(a)  $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b).$

(b)  $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b).$

(c) Trouver une identité pour  $\operatorname{th}(a+b).$

2. Pour  $x$  réel, on pose  $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right).$  Montrer que

$$(a) \operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (b) \operatorname{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad (c) \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

1.

(a)

$$\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b)$$

(b)

$$\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} = \operatorname{sh}(a+b)$$

(c)

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)}$$

On divise en haut et en bas par  $\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b).$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} + \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}}{1 + \frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}} = \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1+t^2}{1-t^2} &= \frac{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1-t^2} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)\end{aligned}$$

□

**Exercice 3.5 [◆◆◆]**

Sans calculatrice, comparer  $\pi^e$  et  $e^\pi$ .

Soit  $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \end{cases}$$

Un magnifique tableau de variations :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		-	- 0 +	
$f$	$+\infty$	$-\infty$	$e$	$+\infty$

On en conclut que :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\ln(\pi)} &> e \\ \iff \pi &> e \ln(\pi) \\ \iff e^\pi &> e^{e \ln \pi} \\ \iff e^\pi &> \pi^e\end{aligned}$$

Donc  $e^\pi > \pi^e$ .

### Exercice 3.6 [◆◆◆]

1. Étudier les variations de  $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$ .
2. Des deux nombres  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  et  $\sqrt[3]{24}$ , lequel est le plus grand ?

1.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{(x+1)^{2/3}} \right) \end{cases}$$

On a :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	-1	0

- 2.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{24} \\ &= \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{3} \\ &= (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) - (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

Or  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , ainsi :  $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$ .

On en conclut que  $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ .