Exercice 1, énoncé. Inégalité de Ky-Fan.

1. Démontrer que $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ est concave sur $]0, \frac{1}{2}]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in]0, \frac{1}{2}]^n$. Montrer que

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{1/n}} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}.$$

Corrigé.

1. Pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \ln(x) - \ln(1-x)$. La fonction f est dérivable deux fois sur $]0, \frac{1}{2}]$ et on a

$$\forall x \in]0, \tfrac{1}{2}] \quad f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \quad \text{ et } \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}.$$

La dérivée seconde de f est négative sur $]0, \frac{1}{2}]$: $\boxed{f \text{ est concave sur cet intervalle}}$.

2. Appliquons l'inégalité de Jensen à la fonction f qui est concave, pour la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

On obtient

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{1-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{1-x_i}\right),$$

c'est-à-dire

$$\ln\left(\frac{\cancel{\frac{1}{n}}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\cancel{\frac{1}{n}}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)}\right) \geq \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\right).$$

L'exponentielle étant croissante, on obtient

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)} \geq \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{1/n}} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}}.$$

Exercice 2, énoncé

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On définit $\Delta_f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)-x| \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que Δ_f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que Δ_f est continue sur $\mathbb{R}$.
   On pourra vérifier que f est 1-lipschitzienne.
3. Calculer les limites de Δ_f en $+\infty$.
   On pourra commencer par introduire les bornes de f sur $[0,1]$.
4. Justifier que Δ_f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
5. Prouver que l'ensemble des points où ce minimum est atteint est un intervalle.

Corrigé.

1. Soient x et y deux réels, soit $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\Delta_f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right) &= \int_0^1 \left|f(t)-((1-\lambda)x+\lambda y)\right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left|((1-\lambda)(f(t)-x)+\lambda(f(t)-y))\right| \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ceci en ayant écrit $f = (1-\lambda)f + \lambda f$.
Pour $t \in [0,1]$ fixé, l'inégalité triangulaire donne

$$|((1-\lambda)(f(t)-x)+\lambda(f(t)-y))| \leq (1-\lambda)|f(t)-x| + \lambda|f(t)-y|$$

Par croissance de l'intégrale, puis linéarité,

$$\int_0^1 |((1-\lambda)(f(t)-x)+\lambda(f(t)-y))|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 ((1-\lambda)|f(t)-x|+\lambda|f(t)-y|)\,\mathrm{d}t$$
$$\leq (1-\lambda)\int_0^1 |f(t)-x|\mathrm{d}t+\lambda\int_0^1 |f(t)-y|\mathrm{d}t$$

Ceci laisse donc

$$\Delta_f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right) \leq (1-\lambda)\Delta_f(x)+\lambda\Delta_f(y).$$

$$\boxed{\text{La fonction } \Delta_f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soient x et y deux réels.
En utilisant la linéarité, puis l'inégalité triangulaire pour l'intégrale,

$$\begin{aligned}|\Delta_f(x)-\Delta_f(y)| &= \left|\int_0^1 |f(t)-x|\mathrm{d}t-\int_0^1 |f(t)-y|\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\int_0^1 |f(t)-x|-|f(t)-y|\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \int_0^1 ||f(t)-x|-|f(t)-y||\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour $t\in[0,1]$ fixé, l'inégalité triangulaire généralisée donne

$$||f(t)-x|-|f(t)-y|| \leq |(f(t)-x)-(f(t)-y)| \leq |x-y|.$$

Intégrons cette inégalité : par croissance,

$$\int_0^1 ||f(t)-x|-|f(t)-y||\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |x-y|\mathrm{d}t.$$

ce qui amène $\qquad |\Delta_f(x)-\Delta_f(y)| \leq |x-y|.$

$$\boxed{\text{La fonction } \Delta_f \text{ est 1-lipschitzienne, et partant, continue sur } \mathbb{R}.}$$

3. La fonction continue f admet sur le segment $[0,1]$ un maximum M et un minimum m.
• Soit $x\geq M$. On a

$$\forall t\in[0,1] \quad f(t)\leq M\leq x \quad \text{donc} \quad |f(t)-x| = x-f(t)$$

Par linéarité,

$$\Delta_f(x) = \int_0^1 (x-f(t))\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \Delta_f(x) = x-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Au voisinage de $+\infty$, Δ_f est donc affine de pente 1. Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

• Soit $x\leq m$. On a

$$\forall t\in[0,1] \quad f(t)\geq M\geq x \quad \text{donc} \quad |f(t)-x| = f(t)-x$$

Par linéarité,

$$\Delta_f(x) = \int_0^1 (f(t)-x)\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \Delta_f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-x.$$

Au voisinage de $-\infty$, Δ_f est donc affine de pente -1. Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

4. Puisque d'après la question précédente, Δ_f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$, elle prend des valeurs supérieures à $\Delta_f(0)$ au voisinage de ces deux points. Considérons $A<0$ et $B>0$ tels que

$$\forall x\in]-\infty,A]\cup[B,+\infty[\quad \Delta_f(x)\geq\Delta_f(0).$$

Sur le segment $[A,B]$, la fonction Δ_f, continue d'après 2, possède un minimum : notons-le μ. Puisque $0\in[A,B]$, on a $\mu\leq\Delta_f(0)$.
Ainsi, pour $x\in\mathbb{R}\setminus[A,B]$ $\Delta_f(x)\geq\Delta_f(0)\geq\mu$: le réel μ minore Δ_f sur tout $\mathbb{R}$.
Puisque ce minorant μ est atteint (entre A et B),

$$\boxed{\mu \text{ est le minimum global de } \Delta_f}.$$

5. Soient a et b deux points où le minimum μ de Δ_f est atteint. Par convexité, pour tout $\lambda\in[0,1]$,

$$\Delta_f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)\underbrace{\Delta_f(a)}_{=\mu}+\lambda\underbrace{\Delta_f(b)}_{=\mu} = \mu.$$

Puisque μ est un minorant de Δ_f sur $\mathbb{R}$, on a aussi $\Delta_f((1-\lambda)a+\lambda b)\geq\mu$, ce qui amène par antisymétrie $\Delta_f((1-\lambda)a+\lambda b)=\mu$. L'ensemble sur lequel le minimum est atteint est donc une partie convexe de $\mathbb{R}$: c'est un $\boxed{\text{intervalle}}$.