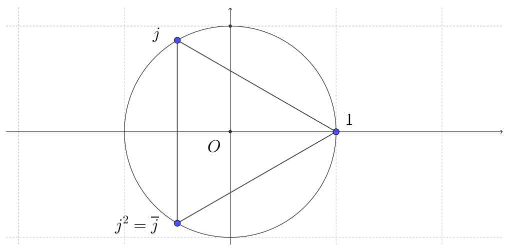
Corrigé du DM 7

Exercice .

1. Puisque $0^3 = 0 \neq 1$, on cherche les solutions de l'équation sur $\mathbb{C}^*$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $r \in \mathbb{R}_+^*$ son module et $\theta \in \mathbb{R}$ un de ses arguments.
   $$z^3 = 1 \iff r^3 e^{3i\theta} = e^{i0} \iff \begin{cases} r^3 &= 1 \\ 3\theta &= 0\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r &= 1 \\ \theta &= 0\ [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}.$$
   On a notamment utilisé que 1 était la seule solution de $r^3 = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même sur $\mathbb{R}$: penser au graphe de $x \mapsto x^3$ pour s'en convaincre).
   On obtient les trois solutions attendues : 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.
   On parle de racines troisièmes de l'unité puisque lorsqu'on met ces nombres à la puissance 3, on obtient 1 : l'unité.
2. On a
   $$j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{2i\pi - \frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j}.$$
   Pour calculer $1 + j + j^2$,
   · On peut reconnaître une progression géométrique, et écrire que
   $$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - 1}{1 - j} = 0.$$
   · Sinon, on peut écrire
   $$1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 1 + 2\mathrm{Re}(e^{\frac{2i\pi}{3}}) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = 1 - 1 = 0.$$
3. (a)



   (b) On sait calculer les distances entre deux sommets de ce triangle : elles sont données par les modules $|j - 1|$, $|j^2 - j|$ et $|1 - j^2|$. On a
   $$|j^2 - j| = |j(j-1)| = |j| \cdot |j - 1| = |j - 1|,$$
   $$|1 - j^2| = |j^3 - j^2| = |j^2| \cdot |j - 1| = |j - 1|,$$
   ce qui montre que le triangle est équilatéral. Notons P_3 son périmètre.
   $$P_3 = 3|j - 1| = 3\left|e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1\right| = 3\left|e^{\frac{i\pi}{3}}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\right| = 3 \cdot |e^{\frac{i\pi}{3}}| \cdot |2i\sin(\frac{\pi}{3})| = 3\sqrt{3}.$$
4. (a) La première égalité à démontrer est classique :
   $$S_0 + S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$
   Pour la seconde,
   $$\begin{aligned}(j+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} j + \binom{n}{2} j^2 + \dots + \binom{n}{3k} + \binom{n}{3k+1} j + \binom{n}{3k+2} j^2 + \cdots \\ &= S_0 + S_1 j + S_2 j^2\end{aligned}$$
   En effet, pour k entier,
   $$j^{3k} = (j^3)^k = 1^k = 1, \qquad j^{3k+1} = j^{3k} j = j, \qquad \text{et } j^{3k+2} = j^{3k} j^2 = j^2.$$
   De même,
   $$\begin{aligned}(j^2+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (j^2)^k \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} j^2 + \binom{n}{2} j + \dots + \binom{n}{3k} + \binom{n}{3k+1} j^2 + \binom{n}{3k+2} j + \cdots \\ &= S_0 + S_1 j^2 + S_2 j\end{aligned}$$
   En effet, pour k entier,
   $$(j^2)^{3k} = j^{6k} = 1, \quad (j^2)^{3k+1} = j^{6k+2} = j^2 \quad \text{et } (j^2)^{3k+2} = j^{6k+4} = j^4 = j.$$
   (b) On a montré
   $$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 = 2^n & (L_1) \\ S_0 + S_1 j + S_2 j^2 = (j+1)^n & (L_2) \\ S_0 + S_1 j^2 + S_2 j = (j^2+1)^n & (L_3) \end{cases}$$
   Sommons : $L_1 + L_2 + L_3$ donne
   $$3S_0 + S_1 \underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0} + S_2 \underbrace{(1 + j^2 + j)}_{=0} = 2^n + (j+1)^n + (j^2+1)^n.$$

Or, $j^2 = \overline{j}$ donc $(j^2+1)^n = \overline{(j+1)^n}$. On a donc

$$3S_0 = 2^n + (j+1)^n + \overline{(j+1)^n} = 2^n + 2\mathrm{Re}((j+1)^n).$$

Or,

$$(j+1)^n = e^{\frac{in\pi}{3}}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^n = e^{\frac{in\pi}{3}}\underbrace{(2\cos(\frac{\pi}{3}))}_{=1}{}^n = e^{\frac{in\pi}{3}}.$$

On a donc bien

$$3S_0 = 2^n + 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{in\pi}{3}}\right) = 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \qquad \boxed{S_0 = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}$$

Problème. Intégrales de Wallis et applications.

A. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, les fonction u et v étant bien $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\cos t)}_{u'(t)}\underbrace{(\cos t)^{n+1}}_{v(t)}\mathrm{d}t \\
&= \Big[\underbrace{(\sin t)}_{u(t)}\underbrace{(\cos t)^{n+1}}_{v(t)}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin t)}_{u(t)}\underbrace{(n+1)(-\sin t)(\cos t)^n}_{v'(t)}\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2(\cos t)^n \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos t)^n \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2}\mathrm{d}t \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$$

2. On procède par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{P}_n : \quad « \, W_{2n} > 0 \text{ et } W_{2n+1} > 0 \, ».$$

- $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a, d'après la relation trouvée en question 1 :

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \quad \text{et} \quad W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1}.$$

  Les nombres W_{2n+2} et W_{2n+3} sont strictement positifs par produit de nombres strictement positifs : $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ce qui établit que

$$\boxed{\text{tous les termes de la suite } (W_n) \text{ sont strictement positifs.}}$$

3. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Préciser la valeur de cette constante. Pour $n \geq 0$, notons provisoirement $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Alors, par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n.$$

De plus $u_0 = W_1W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\mathrm{d}t \times \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \pi/2$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}}$$

4. Pour $0 \leq t \leq \pi/2$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$ et donc

$$(\cos t)^{n+2} \leq (\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n.$$

En intégrant :

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Puisque $W_n > 0$, on a $W_{n+2}/W_n \leq W_{n+1}/W_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par la question 1, il vient

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

On en déduit, par encadrement, que

$$\boxed{\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a établi en question 3 l'égalité

$$(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2},$$

qu'on récrit

$$nW_n^2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{\pi}{2}.$$

Isolons

$$nW_n^2 = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

On a $\frac{n}{n+1} \to 0$ ainsi que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 0$ d'après la question 4, d'où

$$nW_n^2 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sqrt{n}W_n \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Pour justifier le passage à la racine et l'écriture de l'inverse plus haut, on rappelle que l'on a établi la stricte positivité de W_n pour tout entier n.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par itération, on calcule

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} W_0$$

En multipliant par $(2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2 = 2^n n!$ au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} W_0.$$

On a déjà calculé $W_0 = \frac{\pi}{2}$. De manière analogue, on obtient

$$W_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1} W_1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} W_1.$$

On a déjà calculé $W_1 = 1$.

On pouvait bien sûr faire une récurrence, et certains trouverons même cela plus rigoureux que les itérations ci-dessus. Mais attention, pour entreprendre une récurrence, il faut que l'énoncé nous donne comme ici la formule à établir. Avec la preuve ci-dessus, on l'a trouvée tout seul.

B. Intégrale de Gauss

Pour tout x réel on pose

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

1. (a) $t \mapsto e^{-t^2}$ est <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{-x^2}$ pour tout x réel. Par conséquent f' est strictement positive sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$ et $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

   (b) Après avec justifié que pour tout $t \geq 1$, on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, justifiez que

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \int_1^x e^{-t^2} \mathrm{d}t \leq \int_1^x e^{-t} \mathrm{d}t.$$

   En déduire que f est majorée sur $[1, +\infty[$.

   Croissante et majorée, f admet une limité finie en $+\infty$ (d'après le théorème de la limite monotone, admis pour le moment).

   Pour tout $t \geq 1$ on a $t \leq t^2$ et donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Les bornes des intégrales étant « dans le bon sens »», on aura pour $x \geq 1$:

$$\int_1^x e^{-t^2} \mathrm{d}t \leq \int_1^x e^{-t} \mathrm{d}t.$$

   Ainsi, pour $x \geq 1$, on obtient grâce à la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 e^{-t^2} \mathrm{d}t + \int_1^x e^{-t^2} \mathrm{d}t \\ &\leq f(1) + \int_1^x e^{-t} \mathrm{d}t \\ &\leq f(1) + \left[-e^{-t}\right]_1^x \\ &\leq f(1) + \frac{1}{e} - e^{-x} \\ &\leq \boxed{f(1) + \frac{1}{e}}. \end{aligned}$$

2. (a) L'inégalité $1+u \leq e^u$ est vraie pour tout réel u. (On peut la démontrer en invoquant des arguments de convexité ou plus naïvement en étudiant rapidement la fonction $t \mapsto e^t - t - 1$.)

On aura donc aussi, en remplaçant u par $-u$:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad e^{-u} \geq 1-u.$$

Soit $u < 1$. Alors $1-u > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ donc $e^u \leq \frac{1}{1-u}$.

$$\boxed{u < 1 \implies 1+u \leq e^u \leq \frac{1}{1-u}}$$

(b) On applique ce qui précède à $u = -\frac{x^2}{n} < 1$: $1 - \frac{x^2}{n} \leq e^{-\frac{x^2}{n}} \leq \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-1}$. Puisque $0 \leq x \leq \sqrt{n}$, il s'agit d'inégalités entre nombres positifs. La fonction $t \mapsto t^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{0 \leq x \leq \sqrt{n} \implies \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}}.$$

3. (a) La fonction $t \mapsto \sqrt{n}\sin t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	$\sqrt{n}\sin t$
$\mathrm{d}x$	$\sqrt{n}\cos t\mathrm{d}t$
$x=0$	$t=0$
$x=\sqrt{n}$	$t=\frac{\pi}{2}$

Le changement de variable proposé conduit à

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right)^n \sqrt{n}\cos t\mathrm{d}t = \boxed{\sqrt{n}W_{2n+1}}.$$

(b) La fonction $t \mapsto \sqrt{n}\tan t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	$\sqrt{n}\tan t$
$\mathrm{d}x$	$\frac{\sqrt{n}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$
$x=0$	$t=0$
$x=\sqrt{n}$	$t=\frac{\pi}{4}$

Le changement de variable proposé conduit à

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(1+\tan^2 t\right)^n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2} t\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n-2} t\mathrm{d}t \quad \text{car} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t\mathrm{d}t \geq 0 \\ &\leq \boxed{\sqrt{n}W_{2n-2}}. \end{aligned}$$

(c) En intégrant les inégalités de 2)b) entre 0 et $\sqrt{n}$, la croissance de l'intégrale donne

$$\boxed{I_n \leq f\left(\sqrt{n}\right) \leq J_n}.$$

Les deux questions précédentes donnent ensuite

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq f\left(\sqrt{n}\right) \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

Or, en utilisant A 5,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \sqrt{2n+1}W_{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\sqrt{n}W_{2n-2} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}} \cdot \sqrt{2n-2}W_{2n-2} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit par encadrement que $f\left(\sqrt{n}\right) \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} f\left(\sqrt{n}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, on conclut que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$