Corrigé du DM 19

Exercice 1. Essentiel.

• Soit $\eta \in]0, \varepsilon[$. On propose la comparaison

$$\frac{\ln(n)}{n^{1+\varepsilon}} = o\left(\frac{1}{n^{1+\eta}}\right).$$

En effet, le quotient des deux suites laisse

$$n^{1+\eta} \cdot \frac{\ln(n)}{n^{1+\varepsilon}} = \frac{\ln(n)}{n^{\varepsilon-\eta}} \longrightarrow 0 \qquad \text{(par croissances comparées).}$$

Puisque $1+\eta > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{1+\eta}}$ converge. Par comparaison,

$$\boxed{\sum \frac{\ln(n)}{n^{1+\varepsilon}} \text{ converge.}}$$

• On propose la minoration

$$\frac{1}{n^{1-\varepsilon}\ln(n)} \geq \frac{1}{n} \quad \text{à.p.d.c.r..}$$

En effet, le quotient des deux suites laisse

$$n \cdot \frac{1}{n^{1-\varepsilon}\ln(n)} = \frac{n^{\varepsilon}}{\ln(n)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{donc} \quad n \cdot \frac{1}{n^{1-\varepsilon}\ln(n)} \geq 1 \text{ à.p.d.c.r..}$$

Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on obtient par comparaison que

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^{1-\varepsilon}\ln(n)} \text{ diverge.}}$$

Exercice 2.

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(n\ln(n)\ln\left(\frac{n}{n+a}\right)\right) \\
&= \exp\left(-n\ln(n)\ln\left(\frac{n+a}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(-n\ln(n)\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(-n\ln(n)\left(\frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-a\ln(n) + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(-a\ln(n)\right) \times \exp\left(O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$, on a

$$\exp\left(O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

il vient,

$$u_n \sim \exp\left(-a\ln(n)\right) \sim \frac{1}{n^a}$$

La comparaison entre séries à termes positifs permet de conclure à partir de cette comparaison à une série de Riemann :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } a > 1.}$$

Exercice 3.

En factorisant par le terme prépondérant sous les racines, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} \\ &= \sqrt{n} \times \left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right) \end{aligned}$$

À partir de

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O\left(x^3\right)$$

on obtient,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{1}{n}} &= 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \sqrt{1+\frac{2}{n}} &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

donc

$$u_n = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\frac{a+2b}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{a+4b}{8}\right) \times \frac{1}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

1. si $1+a+b \neq 0$ alors
$$u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$$
$$\boxed{\text{Dans ce cas, } \sum u_n \text{ diverge (grossièrement !).}}$$
2. si $1+a+b = 0$ et $a+2b \neq 0$ alors
$$u_n \sim \left(\frac{a+2b}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\boxed{\text{Dans ce cas, } \sum u_n \text{ diverge.}}$$
3. si $1+a+b = 0$ et $a+2b = 0$ alors $b = 1$ et $a = -2$ et
$$u_n \sim \frac{1}{4n^{3/2}}$$
$$\boxed{\text{Dans ce cas, } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Exercice 4. Règle de Raabe-Duhamel et application.

1. (a) Calculons

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Par comparaison avec une série de Riemann convergente, on en déduit que

$$\boxed{\sum (b_{n+1} - b_n) \text{ converge.}}$$

(b) Le lien suite-série (télescopage) donne que (b_n) est une suite convergente. Notons sa limite ℓ. Par continuité de l'exponentielle en ℓ, on obtient $n^\alpha u_n \to e^\ell$. En notant $c = e^\ell$, on obtient

$$\boxed{u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = \frac{2n+4-3}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{n}}.$$

Or, $\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, d'où

$$u_n = 1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit d'après la question précédente qu'il existe une constante c strictement positive telle que

$$\boxed{u_n \sim \frac{c}{n^{3/2}}.}$$

(b) On va reprendre le calcul d'équivalent, cette fois à l'aide de la formule de Stirling. En ajoutant les facteurs pairs « manquants » au numérateur, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n)}{(2 \cdot 4 \cdots (2n))^2} = \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La formule de Stirling donne

$$(n!) \sim 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \quad \text{et} \quad (2n)! \sim \sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}.$$

Le quotient laisse

$$u_n \sim \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi 2n}}{2\pi n} \quad \text{soit} \quad \boxed{u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}}$$

On retrouve le résultat de la question précédente, avec cette fois une valeur explicite pour la constante.

Problème. Semi-convergence de la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ $(\theta \notin 2\pi\mathbb{Z})$.

1. La série des modules est la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, divergente.
   On s'apprête donc bien à étudier une série qui n'est pas absolument convergente.

2. Pour $n \geq 1$, on calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{k+1} \\
&= a_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k - a_0 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{k+1} \\
&= a_n b_n - a_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (b_k - b_{k+1}).
\end{aligned}$$

3. (a) On a déjà fait souvent ce calcul d'une somme géométrique :

$$D_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{(-2i)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{(-2i)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

d'où,

$$|D_n(\theta)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

(on a majoré le numérateur par 1 et ôté la valeur absolue car $\theta/2 \in]0, \pi[$, intervalle sur lequel le sinus est positif).

(b) Pour tout $k \geq 0$ on a $e^{ik\theta} = D_k(\theta) - D_{k-1}(\theta)$ (en posant $D_{-1}(\theta) = 0$).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la question 2. permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (D_k(\theta) - D_{k-1}(\theta)) \frac{1}{k} \\
&= \frac{D_n(\theta)}{n} - D_0(\theta) \cdot \frac{1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} D_k(\theta) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right). \\
&= \frac{D_n(\theta)}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k(\theta)}{k(k+1)}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

4. Notons $C = \dfrac{1}{\sin(\theta/2)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \dfrac{D_n(\theta)}{n(n+1)} \right| \leq \dfrac{C}{n^2}$.
   On sait que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente $(2 > 1)$ donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{D_n(\theta)}{n(n+1)}$ converge absolument donc converge.
   Puisque $(D_n(\theta))_{n \geq 0}$ est bornée, $D_n(\theta)/n \to 0$. On peut donc, en revenant à $(*)$, constater que la somme partielle de la série de départ converge. On a de plus

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D_n(\theta)}{n(n+1)}.$$

La série étudiée est bien convergente, sans être absolument convergente.
On peut parler de semiconvergence.

On remarque que pour $\theta = \pi$, on retrouve la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui fut l'exemple du cours pour une telle situation.

5. Utilisons les formules d'Euler :

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}.$$

D'après ce qui précède, les séries $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ et $\sum \frac{e^{-in\theta}}{n}$ sont convergentes.
Grâce aux formules d'Euler, on obtient par combinaison linéaire que

$$\boxed{\sum \frac{\cos(n\theta)}{n} \text{ et } \sum \frac{\sin(n\theta)}{n} \text{ convergent.}}$$

6. On peut montrer, à l'aide de la comparaison astucieuse qui va suivre, qu'elles ne sont pas absolument convergentes. Pour $n \geq 0$, puisque $|\cos(n\theta)| \leq 1$, on a

$$|\cos(n\theta)| \geq \cos^2(n\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2n\theta)\right).$$

Sommons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos(k\theta)|}{k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k\theta)}{k}.$$

Le travail précédent implique que la série $\sum \frac{\cos(2n\theta)}{n}$ est convergente.
De plus, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par minoration, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos(k\theta)|}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui achève de montrer que

$$\boxed{\sum \frac{\cos(n\theta)}{n} \text{ ne converge pas absolument.}}$$

(on pourrait démontrer la même chose pour $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$).

Complément.

On propose ci-dessous un petit travail complémentaire pour calculer la somme de la série étudiée par le problème. L'idée de base :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikx}}{k}\right) = ie^{ikx}...$$

On fixe θ un réel dans $]0, 2\pi[$ et on pose

$$A_n(\theta) = \int_{\pi}^{\theta} \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I(\theta) = \int_{\pi}^{\theta} \frac{e^{it}}{1-e^{it}}\mathrm{d}t.$$

1. *Lemme de Riemann-Lebesgue.*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer :

$$\int_a^b e^{int} f(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. *Un calcul d'intégrale.*
Démontrer que

$$I(\theta) = \frac{1}{2}(\pi - \theta) + i\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

3. Fixons $\theta \in]0, 2\pi[$, et posons
   (a) Démontrer que

   $$A_n(\theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(\theta).$$

   (b) En déduire que

   $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln(2) - \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\frac{\pi - \theta}{2}}$$

   On utilisera sans la recalculer la somme de la série harmonique alternée obtenue dans le cours.