Chapitre 15

Applications : images et antécédents.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

L'essentiel du premier cours sur les applications.

Définition 1

Soient E et F deux ensembles.

Une **application** f de E dans F est un procédé qui à tout élément x de E associe un unique élément dans F, que l'on note $f(x)$. Cet objet est aussi appelé **fonction**, et décrit par

$$f:\begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x)\end{cases}$$

L'ensemble E est alors appelé **ensemble de départ** et l'ensemble F **ensemble d'arrivée** de f.
Soient $x\in E$ et $y \in F$ tels que

$$y=f(x);$$

On dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f.
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou bien $\mathcal{F}(E,F)$.
L'application **identité** sur un ensemble E est

$$\mathrm{id}_E:\begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & x\end{cases}$$

Proposition 2: Égalité de deux fonctions.

Deux applications sont égales si et seulement si elles sont égales en tout point :

$$\forall (f,g)\in\mathcal{F}(E,G)^2,\quad f=g \iff \forall x\in E,\ f(x)=g(x).$$

Définition 3

Soient E,F,G trois ensembles et $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications.
La **composée** de f par g, notée $g\circ f$ est l'application

$$g\circ f:\begin{cases} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x))\end{cases}$$

Proposition 4: Propriétés de la composition.

- L'identité est neutre pour la composition :

$$\forall f\in\mathcal{F}(E,F),\quad \mathrm{id}_F\circ f=f \quad \text{et} \quad f\circ \mathrm{id}_E=f.$$

- La composition est associative :

$$\forall f\in\mathcal{F}(E,F),\ \forall g\in\mathcal{F}(F,G),\ \forall h\in\mathcal{F}(G,H),\quad (h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f).$$

Fonctions indicatrices.

Dans ce qui suit, E est un ensemble.

Définition 5

Soit A une partie de E. La **fonction indicatrice** de A est l'application notée $\mathbb{1}_A$, définie par

$$\mathbb{1}_A:\begin{cases} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases}1 & \text{si } x\in A,\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}\end{cases}$$

Proposition 6

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Les égalités qui suivent sont des égalités entre applications.
Si A et B sont disjoints, alors $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
Plus généralement,

$$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A\cap B}, \qquad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B, \qquad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}.$$

Preuve :

$\boxed{1.}$ Supposons $A \cap B = \varnothing$. Montrons que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$. Soit $x \in E$.
— Si $x \in A$, alors $x \notin B$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = 1$.
— Si $x \in B$, cas symétrique.
— Si $x \notin A \cup B$, alors $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)$.
$\boxed{2.}$ Supposons A, B quelconques. Soit $x \in E$.
— $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\setminus B}$ car $A = (A\cap B) \cup (A \setminus B)$ (union disjointe) donc $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
— On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ donc $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
— On a

$$\begin{aligned}
1_A \cdot \mathbb{1}_B = 0 &\iff \mathbb{1}_A(x) = 0 \ \text{ ou } \ \mathbb{1}_B(x) = 0 \iff x \notin A \ \text{ ou } \ x \notin B \\
&\iff \neg(x \in A \ \text{ et } \ x \in B) \iff \neg(x \in A \cap B) \\
&\iff x \notin A \cap B \iff \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0.
\end{aligned}$$

Les deux fonctions valent 0 sur les mêmes points, il n'y a qu'une autre image possible, elles sont donc égales en tout point.

Proposition 7: Une partie est caractérisée par sa fonction indicatrice.

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \quad A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B.$$

1 Images par une application.

1.1 Image directe.

Définition 8

Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E.
On appelle **image** (directe) de A par f et on note $f(A)$ la partie de F ci-dessous

$$f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\} = \{y \in F \ : \ \exists x \in A \ y = f(x)\}.$$

Lorsque c'est l'image de E tout entier que l'on considère, on peut noter

$$\mathrm{Im}(f) = f(E).$$

Exemple 9

1. Que vaut $\mathrm{Im}(\arctan)$?
2. Soit $\exp : z \mapsto e^z ; \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ l'exponentielle complexe. Que valent $\exp(\mathbb{R})$ et $\exp(i\mathbb{R})$?

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $\mathrm{Im}(\arctan) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
$\boxed{2.}$ On a $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et $\exp(i\mathbb{R}) = \mathbb{U}$.

Proposition 10: ★

Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de E. On a

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{ et } \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Preuve :

• Soit $y \in f(A \cup B)$: $\exists x \in A \cup B \mid f(x) = y$. Ainsi, $x \in A$ ou $x \in B$: $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$: $y \in f(A) \cup f(B)$.
• Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$: $\exists x \in A \cup B \mid y = f(x)$ donc $y \in f(A \cup B)$.
Par double inclusion, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

★ Soit $y \in f(A \cap B)$, $\exists x \in A \cap B \mid y = f(x)$, donc $x \in A$ et $x \in B$ donc $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$: $y \in f(A) \cap f(B)$.

Exemple 11

Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Considérons $A = [1, +\infty[$, et $B =]-\infty, 1]$. Montrer que

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Solution :

On a $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$ et $f(A) \cap f(B) = [1, +\infty[$.

1.2 Image réciproque.

Définition 12

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de F.
On appelle **image réciproque** de A par f, et on note $f^{-1}(A)$ la partie de E ci-dessous

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \ : \ f(x) \in A\}$$

En particulier, si $y_0 \in F$, $f^{-1}(\{y_0\})$ est l'ensemble des antécédents de y_0 par f dans E.

⚠ La notation $f^{-1}(A)$ peut prêter à confusion.
Si $f : E \to F$ n'est pas bijective, **l'application** f^{-1} **n'est pas définie**, contrairement à l'ensemble $f^{-1}(A)$. Bref, sauf dans le cas où la réciproque existe, l'image de la réciproque n'est pas l'image par la réciproque...

Exemple 13

1. La fonction tan étant définie sur l'ensemble que l'on sait, déterminer $\tan^{-1}(\mathbb{R}_+)$.
2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{cases}$. Que valent $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\{0\})$?

Solution :

$\boxed{1.}$ $\tan^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in D_{\tan} \mid f(x) \in \mathbb{R}_+\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.
$\boxed{2.}$ $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \mathbb{R}_+\} = (\mathbb{R}_-)^2 \cup (\mathbb{R}_+)^2$ et $f^{-1}(\{0\}) = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Proposition 14: ★

Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de F. On a

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Preuve :

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \iff f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \iff x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \\ x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \iff f(x) \in A \ \text{ et } f(x) \in B \iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

2 Applications injectives, surjectives, bijectives.

2.1 Injectivité.

Définition 15

Une application $f : E \to F$ est dite **injective** si tout élément de F a au plus un antécédent dans E, ce qui s'écrit:

$$\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

Méthode

1. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **est** injective :
   - On considère deux éléments x et x' de E,
   - On suppose que $f(x) = f(x')$,
   - On montre que $x = x'$.
2. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **n'est pas** injective, il suffit d'exhiber une paire $\{x, x'\}$ d'éléments de E tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

D'une application $f : E \to F$ injective, on peut dire que c'est une **injection** de E vers F.

Exemple 16: ★

1. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle injective ?
2. Soient

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & p + \sqrt{2}q \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{cases}$$

   Montrer que f est injective et que g ne l'est pas.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$. Elle n'est pas injective.
$\boxed{2.}$ Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et $(r,z) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$.
Alors $p - r + (q-s)\sqrt{2} = 0$, or $p - r \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}(q-s) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc $p = r$ et $q = s$: elle est injective.

g n'est pas injective car $g(1,0) = g(0,1) = 0$.

Exemple 17

Soit $f : X \mapsto \mathbb{R}$, où $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer que si f est strictement monotone, alors elle est injective.

Solution :

Soient $x, x' \in X$ tels que $x > x'$. Par contraposée, on suppose $x \neq x'$. Montrons que $f(x) \neq f(x')$.
— Si f est strictement croissante, alors $f(x) > f(x')$ donc $f(x) \neq f(x')$.
— Si f est strictement décroissante, alors $f(x) < f(x')$ donc $f(x) \neq f(x')$.
Dans tous les cas, $f(x) \neq f(x')$ donc la fonction est injective.

Proposition 18: ★

La composée de deux applications injectives est injective.

Preuve :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ injectives. Soient $x, x' \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.
On a $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $f(x) = f(x')$ car g est injective et $x = x'$ car f est injective.

Proposition 19: Une réciproque partielle.

Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

$$g \circ f \text{ est injective} \Longrightarrow f \text{ est injective.}$$

Preuve :

Supposons $g \circ f$ injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
On applique g : $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$.

2.2 Surjectivité.

Définition 20

Une application $f : E \to F$ est dite **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent dans E, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \mid y = f(x).$$

Méthode

1. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **est** surjective :
   - On considère une élément y de F,
   - On trouve/prouve l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
2. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **n'est pas** surjective, il suffit d'exhiber un élément de F n'ayant pas d'antécédent dans E par f.

D'une application $f : E \to F$ surjective, on peut dire aussi que c'est une **surjection** de E vers F.

Exemple 21: ★

1. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective ?
2. Soient

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & p + \sqrt{2}q \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{cases}$$

   Montrer que g est surjective et que f ne l'est pas.

Solution :

$\boxed{1.}$ Elle n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par sin.
$\boxed{2.}$ Soit $y' \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y' = xy\ :\ (1, y')$. Donc g est surjective.

Supposons que $1/2$ ait un antécédent par f. Notons le (p,q). Alors $p + \sqrt{2}q = \frac{1}{2}$ et $2p + 2\sqrt{2} = 1$.
• Si $q = 0$, alors $2p = 1$, impossible car $p \in \mathbb{Z}$.
• Si $q \neq 0$, alors $\frac{p}{q} + \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{p}{q} = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$ donc $\frac{2p-q}{2q} = \sqrt{2}$. Absurde car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
On en déduit que $1/2$ n'a pas d'antécédent par f. Elle n'est pas surjective.

Proposition 22: Vision ensembliste de la surjectivité.

Soit $f : E \to F$ une application. On a

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F.$$

Preuve :

On a:

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \forall y \in F,\ \exists x \in E \mid f(x) = y \\ &\iff \forall y \in F,\ y \in f(E) \quad \text{ou} \quad y \in \mathrm{Im}(f) \\ &\iff F \subset \mathrm{Im}(f) \iff F = \mathrm{Im}(f). \end{aligned}$$

Proposition 23: ★

La composée de deux application surjectives est surjective

Preuve :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions surjectives.
Soit $z \in G$: $\exists y \in F \mid z = g(y)$ par surjectivité de g et $\exists x \in E \mid g(y) = f(x)$ par surjectivité de f.
Alors $z = g(f(x))$ donc $g \circ f$ est surjective.

Proposition 24: Une réciproque partielle.

Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

$$g \circ f \text{est surjective} \Longrightarrow g \text{ est surjective.}$$

Preuve :

Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $y \in G$: $\exists x \in E \mid y = g(f(x))$ donc $f(x)$ est antécédent de y par g.

2.3 Bijectivité et application réciproque.

Définition 25

Soit une application $f : E \to F$. Elle est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F possède un unique antécédent dans E, ce qui s'écrit

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \mid y = f(x).$$

Définition 26

Soit $f : E \to F$ une application bijective. On considère, pour tout élément y de F son unique antécédent par f, que l'on note $f^{-1}(y)$. Ce procédé permet de définir comme suit l'**application réciproque** de f, notée f^{-1} :

$$f^{-1} : \begin{cases} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{cases}$$

Méthode : Calcul de la réciproque d'une fonction.

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective et $y \in F$. S'il est possible de résoudre l'équation

$$y = f(x),$$

c'est-à-dire exprimer x en fonction de y, on a une expression de $f^{-1}(y)$.

Si, pour tout élément $y \in F$, on sait prouver l'existence et l'unicité d'un antécédent dans E, on a prouvé la bijectivité de f.

Théorème 27: Caractérisation de la bijectivité par l'existence d'un inverse à gauche et à droite.

Soit $f : E \to F$ une application. Alors

$$f \text{ est bijective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \ : \ g \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

Autrement dit, f est bijective ssi elle admet un (même) « inverse » à gauche et à droite pour la composition. De plus, lorsque cet inverse g existe, $g = f^{-1}$.

Preuve :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f bijective. Posons $g = f^{-1}$ (qui existe bien) : $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
On a id_E et id_F bijectives, donc $g \circ f$ et $f \circ g$ aussi.
— $g \circ f$ est surjective et injective, alors g est surjective et f est injective.
— $f \circ g$ est surjective et injective, alors f est surjective et g est injective.
Donc f est g sont bijectives : f^{-1} existe et $f^{-1} = g$.

Proposition 28

La composée de deux applications bijectives est bijective.
De plus, si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Preuve :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ bijectives donc $f^{-1} : F \to E$ et $g^{-1} : G \to F$ existent. On a:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_G$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f) = f^{-1} \circ f \circ g^{-1} \circ g = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Par caractérisation, $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

3 Exercices.

Images directes, images réciproques.

Exercice 1: ⧫◊◊

Soit $f : E \to F$ une application. Soient deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer l'égalité

$$f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B)).$$

Solution :

Procédons par double inclusion.
⊚ Soit $y \in f(A) \cap B$. Montrons que $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.
On a $y \in f(A)$ et $y \in B$.
$\exists x \in A \mid y = f(x)$ donc $x \in A$ et $x \in f^{-1}(B)$ car $y \in B$.
Ainsi $x \in A \cap f^{-1}(B)$ et $f(x) = y \in f(A \cap f^{-1}(B))$

⊚ Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ Montrons que $y \in f(A) \cap B$.
$\exists x \in A \cap f^{-1}(B) \mid y = f(x)$ donc $x \in A$ et $x \in f^{-1}(B)$.
Ainsi, $f(x) = y \in f(A)$ et $f(x) = y \in B$: $y \in f(A) \cap B$.

Exercice 2: ⧫⧫◊

Soit $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Montrer que si f est injective, la réciproque est vraie.
2. Soit B une partie de F.
   (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
   (b) Démontrer que si f est surjective, la réciproque est vraie.
3. Montrer que $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.
4. Montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

Solution :

$\boxed{1.a)}$ Soit $x \in A$. Montrons que $x \in f^{-1}(f(A))$.
On a $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$.

$\boxed{1.b)}$ On suppose f injective, soit $x \in f^{-1}(f(A))$.
On applique f : $f(x) \in f(A)$. Par injectivité de f, $x \in A$.

$\boxed{2.a)}$ Soit $y \in f(f^{-1}(B))$.
On a $\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$. Ainsi, $f(x) \in B$: $y \in B$.

$\boxed{2.b)}$ Supposons f surjective, soit $y \in B$.
On a $\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$ et $f(x) = y \in f(f^{-1}(B))$.

$\boxed{3.}$ Soit $y \in f(f^{-1}(f(A)))$. Montrons que $y \in f(A)$.
On a $\exists x \in f^{-1}(f(A)) \mid y = f(x)$ et $f(x) \in f(A)$ donc $y \in f(A)$.
Soit $y \in f(A)$. Montrons que $y \in f(f^{-1}(f(A)))$.
On a $\exists x \in A \mid y = f(x)$ alors $f(x) \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $f(x) = y \in f(f^{-1}(f(A)))$.

$\boxed{4.}$ Soit $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$. Montrons que $y \in f^{-1}(B)$.
On a $f(y) \in f(f^{-1}(B))$ alors $y \in f^{-1}(B)$.
Soit $y \in f^{-1}(B)$. Montrons que $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
On a $f(y) \in f(f^{-1}(B))$ donc $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.

Exercice 3: ⧫⧫⧫

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que

$$f \text{ est injective } \iff [\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$$

Solution :

⊚ Supposons f injective. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On sait déjà que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Montrons alors que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. On a que $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$.
Ainsi, $\exists x_A \in A \mid y = f(x_A)$ et $\exists x_B \in B \mid y = f(x_B)$.
Or f est injective : $x_A = x_B$, ainsi $x_A \in A \cap B$.
On a enfin que $f(x_A) \in f(A \cap B)$, alors $y \in f(A \cap B)$.

⊚ Supposons $[\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$. Montrons que f est injective.
Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Soient $x, x' \in E$. On suppose que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.
On a que $\{x\}$ et $\{x'\} \in \mathcal{P}(E)$.
Ainsi : $f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$.
Supposons que $x \neq x'$. On a alors : $f(\varnothing) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$: $\varnothing = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$.
Or $f(x) = f(x')$ donc $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} \neq \varnothing$. C'est absurde : $x = x'$.
On a bien montré que f est injective.

Applications injectives, surjectives.

Exercice 4: ♦◊◊

Soient

$$f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (n,p) & \mapsto & (-1)^n p \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1+ix}{1-ix} \end{cases}$$

Ces fonctions sont-elles injectives ? Surjectives ?

Solution :

On a que f n'est pas injective : $f(0,1) = f(2,1) = 1$.
Montrons que f est surjective.
Soit $y \in \mathbb{Z}$. Montrons que $\exists (n,p) \in \mathbb{N}^2 \mid f(n,p) = y$.
Si $y \geq 0$, on prend $n = 0$ et $p = |y|$.
Si $y \leq 0$, on prend $n = 1$ et $p = |y|$.

On a que g n'est pas surjective : 0 n'a aucun antécédent par g.
Montrons que g est injective.
Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, supposons $g(x) = g(x')$. Montrons que $x = x'$.
On a :

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\iff \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1+ix'}{1-ix'} \\ &\iff (1+ix)(1-ix') = (1+ix')(1-ix) \\ &\iff 1 - ix' + ix + xx' = 1 - ix + ix' + xx' \\ &\iff 2ix = 2ix' \\ &\iff x = x' \end{aligned}$$

On a bien que g est injective.

Exercice 5: ♦◊◊

Dans cet exercice, on admet que π est irrationnel.
Démontrer que $\cos_{|\mathbb{Q}}$ n'est pas injective et que $\sin_{|\mathbb{Q}}$ l'est.

Solution :

On sait que cos est paire : $\cos_{|\mathbb{Q}}$ l'est aussi.
Alors $\cos_{|\mathbb{Q}}(\frac{1}{2}) = \cos_{|\mathbb{Q}}(-\frac{1}{2})$. Or $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$: $\cos_{|\mathbb{Q}}$ n'est pas injective.

Soient $x, x' \in \mathbb{Q}^2$. Supposons que $\sin_{|\mathbb{Q}}(x) = \sin_{|\mathbb{Q}}(x')$. Montrons que $x = x'$.
On a :

$$\begin{aligned} \sin_{|\mathbb{Q}}(x) = \sin_{|\mathbb{Q}}(x') &\iff x \equiv x'[2\pi] \ (2\pi\text{-périodicité}) \\ &\iff x = x' + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Or, $\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ x' + 2k\pi \notin \mathbb{Q}$. On a alors que $k = 0$:

$$\sin_{|\mathbb{Q}}(x) = \sin_{|\mathbb{Q}}(x') \iff x = x' + 2 \cdot 0\pi \iff x = x'$$

Exercice 6: ♦♦◊

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si x} \geq 0 \\ 2x^2 \text{ si x} < 0 \end{cases}$

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}}$ est injective.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $f(2) = 4$ et $f(-\sqrt{2}) = 4$: f n'est pas injective.
$\boxed{2.}$ Soient $x, x' \in \mathbb{Q}$ tels que $f_{|\mathbb{Q}}(x) = f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x})$. Montrons que $x = \widetilde{x}$.
<u>Cas n°1 : x et $\widetilde{x}$ positifs</u> :

$$f_{|\mathbb{Q}}(x) = f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x}) \iff x^2 = \widetilde{x}^2 \iff x = \widetilde{x}$$

<u>Cas n°2 : x et $\widetilde{x}$ strictement négatifs</u> :

$$f_{|\mathbb{Q}}(x) = f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x}) \iff 2x^2 = 2\widetilde{x}^2 \iff x^2 = \widetilde{x}^2 \iff x = \widetilde{x} \ \text{ car } x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}_-^*$$

<u>Cas n°3 : $x \geq 0$ et $\widetilde{x} < 0$</u> :

$$f_{|\mathbb{Q}}(x) = f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x}) \iff x^2 = 2\widetilde{x}^2 \iff x = -\sqrt{2}\widetilde{x} \iff -\frac{x}{\widetilde{x}} = \sqrt{2}$$

Cela est impossible par stabilité de $\mathbb{Q}$ par la division. Donc $f_{|\mathbb{Q}}(x) \neq f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x})$.
Le cas où $x < 0$ et $\widetilde{x} \geq 0$ est symétrique.
On a prouvé que $f_{|\mathbb{Q}}$ est injective.

Exercice 7: ⧫◊◊

Soit $f : E \to E$. Montrer que
1. f est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.
2. f est surjective si et seulement si $f \circ f$ est surjective.

Solution :

$\boxed{1.}$ Supposons f injective. D'après 18, $f \circ f$ est injective.
Supposons $f \circ f$ injective. D'après 19, f est injective.

$\boxed{2.}$ Supposons f surjective. D'après 23, $f \circ f$ est surjective.
Supposons $f \circ f$ surjective. D'après 24, f est surjective.

Exercice 8: ⧫⧫◊

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application.
On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \mathrm{id}_E$.

Solution :

⊚ Supposons f injective. Soit $x \in E$.
On a $f \circ f(x) = f(x)$. Par injectivité de f, $f(x) = x$ donc $f = \mathrm{id}_E$.

⊚ Supposons f surjective. Soit $y \in E$.
On a $f \circ f(y) = f(y)$ et $\exists x \in E \mid f(x) = y$ par surjectivité de f.
Donc $f \circ f \circ f(x) = f \circ f(x)$. Alors $f \circ f(x) = f(x)$ et $f(y) = y$: $f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 9: ⧫⧫◊

Soit E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que

$$f \text{ est surjective} \iff f \text{ est injective}$$

Solution :

⊚ Supposons f injective, montrons que f est surjective.
Soit $y \in E$. Par définition de f : $f \circ f \circ f(y) = f(y)$.
Par injectivité de f : $f \circ f(y) = y$.
Donc $f(y)$ est antécédent de y : f est surjective.

⊚ Supposons f surjective, montrons f injective.
Soient $y, y' \in E$ tels que $f(y) = f(y')$. Montrons que $y = y'$.
Par surjectivité de f, $\exists x, x' \in E \mid f(x) = y \ \wedge \ f(x') = y'$.
Ainsi, $f \circ f(x) = f \circ f(x')$.
Appliquons f : $f \circ f \circ f(x) = f \circ f \circ f(x')$.
Alors : $f(x) = f(x')$ et donc $y = y'$.
On a bien prouvé l'injectivité de f.

Exercice 10: ⧫◊◊

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n + (-1)^n \end{cases}$.
Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même et donner sa réciproque.

Solution :

Montrons que f est un inverse à gauche et à droite d'elle-même. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(n) = f(n + (-1)^n) &= n + (-1)^n + (-1)^{n+(-1)^n} \\ &= n + (-1)^n(1 + (-1)^{(-1)^n}) \end{aligned}$$

Or $(-1)^n$ est toujours impair : $(-1)^{(-1)^n} = -1$. Ainsi :

$$f \circ f(n) = n + (-1)^n(1 - 1) = n$$

On a bien que f est un inverse à gauche et à droite d'elle même : f est bijective et est sa propre réciproque.

Exercice 11: ♦♦♦

Soient E un ensemble et $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On définit

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

1. Calculer $\Phi(\varnothing)$ et $\Phi(E \setminus (A \cup B))$. Que dire de A et B si $(A, \varnothing)$ admet un antécédent par Φ ?
2. Montrer que Φ injective $\iff A \cup B = E$.
3. Montrer que Φ surjective $\iff A \cap B = \varnothing$.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $\Phi(\varnothing) = (\varnothing, \varnothing)$ et $\Phi(E \setminus (A \cup B)) = ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap A, (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap B) = (\varnothing, \varnothing)$.
Si $(A, \varnothing)$ admet un antécéddent par Φ alors A et B sont disjoints : $A \cap B = \varnothing$.

$\boxed{2.}$ ⊚ Supposons Φ injective. Montrons $A \cup B = E$.
On a que $\Phi(E) = (A,B)$ et $\Phi(A \cup B) = (A,B)$. Par injectivité de Φ, $E = A \cup B$.

⊚ Supposons $A \cup B = E$. Montrons que Φ est injective.
Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ telles que $\Phi(X) = \Phi(Y)$. Montrons que $X = Y$.
On a

$$\begin{aligned} (X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) &\implies X \cap A = Y \cap A \ \wedge \ X \cap B = Y \cap B \\ &\implies (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) \\ &\implies X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B) \\ &\implies X = Y \text{ car } A \cup B = E \end{aligned}$$

$\boxed{3.}$ ⊚ Supposons Φ surjective. Montrons $A \cap B = \varnothing$.
On a que $\exists X \in \mathcal{P}(E) \mid \Phi(X) = (A, \varnothing)$ puisque $(A, \varnothing) \in \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(B)$ et que Φ est surjective.
Or, puisque X existe, on a que A et B sont disjoints: $A \cap B = \varnothing$.

⊚ Supposons $A \cap B = \varnothing$. Montrons que Φ est surjective.
Soit $Y \in \mathcal{P}(A)$ et $Z \in \mathcal{P}(B)$. Montrons que $\exists X \in \mathcal{P}(E) \mid \Phi(X) = (Y, Z)$.
On choisit $X = Y \cup Z$. On a $\Phi(X) = ((Y \cup Z) \cap A, (Y \cup Z) \cap B)$.
Or $A \cap B = \varnothing$. En particulier, $Y \cap B = \varnothing$ et $Z \cap A = \varnothing$ car $Y \in \mathcal{P}(A)$ et $Z \in \mathcal{P}(B)$.
Alors, $\mathit{\Phi}(X) = (Y \cap A, Z \cap B) = (Y, Z)$. On a bien que X est un antécédent de (Y, Z).

Exercice 12: ♦♦♦

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
1. Démontrer que f est injective si et seulement si elle est inversible à gauche.
Plus précisément, prouver l'assertion

$$f \text{ est injective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \ g \circ f = \mathrm{id}_E$$

2. Démontrer que f est surjective si et seulement si elle est inversible à <u>droite</u>.
Plus précisément, prouver l'assertion

$$f \text{ est } \underline{\text{surjective}} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \ f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Solution :

$\boxed{1.}$
⊚ Supposons f injective et soit $g : F \to E$. Soit $y \in F$.
• Si $y \in f(E)$, on a $\exists! x \in E \mid f(x) = y$, alors on pose $g(y) = x$.
• Si $y \notin f(E)$, on prend un élément $x \in F$ quelconque et on pose $g(y) = x$.
On a que g est bien définie sur F et $\forall x \in E, \ g(f(x)) = x$ par définition.

⊚ Supposons que $\exists g \in \mathcal{F}(F, E) \ g \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrons que f est injective.
Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
On a $f(x) = f(x') \iff g(f(x)) = g(f(x')) \iff \mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \iff x = x'$.

$\boxed{2.}$
⊚ Supposons f surjective et soit $g : F \to E$.
Soit $y \in F : \exists x \in E \mid y = f(x)$.
Or il peut exister plusieurs x différents dont y est l'image, on fait le choix de n'en garder qu'un particulier.
Alors on pose $g(y) = x$. Ainsi, on a $f(g(y)) = f(x)$, c'est-à-dire $f(g(y)) = y : f \circ g = \mathrm{id}_F$.

⊚ Supposons que $\exists g \in \mathcal{F}(F, E) \ f \circ g = \mathrm{id}_F$. Montrons que f est surjective.
Soit $y \in F$. On a que $f \circ g(y) = y$ car $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Ainsi, y est l'image de $f \circ g(y)$: f est surjective.

Exercice 13: ♦♦♦ Théorème de Cantor.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathcal{P}(E))$. Montrer que f n'est pas surjective.
Indication : on pourra considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Solution :

Montrons que A n'a pas d'antécédent par f.
Supposons qu'il en ait un.
Alors $\exists \alpha \in E \mid A = f(\alpha)$.
⊚ Supposons que $\alpha \in A$. Alors $\alpha \in \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
Donc $\alpha \notin f(\alpha)$ donc $\alpha \notin A$. Absurde.

⊚ Supposons que $\alpha \notin A$. Alors $\alpha \notin \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
Donc $\alpha \in A$. Absurde.
α n'existe pas : A n'a pas d'antécédent par f et f n'est pas surjective.