Développements limités

1 Existence de développements limités. 2
1.1 Notion de développement limité en 0. 2
1.2 Primitivation d'un développement limité en 0. 4
1.3 Formule de Taylor-Young et DL usuels en 0. 5
1.4 Développement limité en un point quelconque. 6

2 DL et opérations. 7

3 Applications des développements limités. 9
3.1 Calcul de limite, d'équivalent. 9
3.2 Étude locale d'une fonction. 10
3.3 Exemples de développements asymptotiques. 13
3.4 Formule de Stirling. 14

Exercices 16

Introduction.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0. Si f est dérivable en 0, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0), \text{ ce qui se récrit } \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) + o(1).$$

Multiplions par x : on obtient

$$f(x) - f(0) \underset{0}{=} f'(0)x + o(x),$$

et enfin

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x}_{\text{fonction affine}} + \underbrace{o(x)}_{\text{négligeable}} .$$

On a donc obtenu une approximation de la fonction f au voisinage de 0 par une fonction polynomiale de degré inférieur à 1. Dans ce cours, on cherche à généraliser ce genre d'approximation : on cherchera à approximer une fonction f par une fonction polynomiale de degré quelconque.

DL (Avant-première : le développement limité du sinus en 0 à l'ordre 3)**.**

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Ce type d'écriture nous permettra de calculer des limites parfaitement inaccessibles auparavant. Par exemple, $\dfrac{\sin x - x}{x^3} = \dfrac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\dfrac{1}{6} + o(1)$, ce qui amène la convergence plutôt inattendue $\dfrac{\sin x - x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{6}$.

1 Existence de développements limités.

Sauf mention du contraire ou plus amples précisions, les fonctions considérées dans cette partie sont définies au voisinage de 0, sauf peut-être en 0 et sont à valeurs réelles ou complexes. Et n sera un entier naturel.

1.1 Notion de développement limité en 0.

Définition 1.

On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de 0 ($\mathrm{DL}_n(0)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o\left(x^n\right).$$

Exemples. $\mathrm{DL}_2(0)$ de cos et $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

DL.

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Proposition 2 (Unicité d'un DL en 0).

Supposons que f admette au voisinage de 0 deux développements limités

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & \underset{0}{=} & a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o\left(x^n\right) \\ f(x) & \underset{0}{=} & a'_0 + a'_1 x + \ldots + a'_n x^n + o\left(x^n\right) \end{array}\right. \quad \text{Alors,} \left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & a'_0 \\ a_1 & = & a'_1 \\ & \ldots & \\ a_n & = & a'_n. \end{array}\right.$$

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelée **partie régulière** du DL de f en 0 à l'ordre n.

Preuve. En égalant les deux écritures, on obtient

$$(a_0 - a'_0) + (a_1 - a'_1)x + (a_2 - a'_2)x^2 + \ldots + (a_n - a'_n)x^n + o\left(x^n\right) = 0.$$

Faisons tendre x vers 0. On obtient $\underline{a_0 - a'_0 = 0}$. On divise par x (en supposant $x \neq 0$) et on obtient alors

$$(a_1 - a'_1) + (a_2 - a'_2)x + \ldots + (a_n - a'_n)x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right) = 0.$$

À nouveau, on fait tendre x vers 0 et on obtient $\underline{a_1 - a'_1 = 0}$. On itère ce procédé pour obtenir le résultat voulu □

Proposition 3 (Parité/Imparité et DL en 0).

Si une fonction paire admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, ses coefficients d'ordre impair sont nuls.
Si une fonction impaire admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, ses coefficients d'ordre pair sont nuls.

Preuve. Considérons f une fonction paire définie au voisinage de 0. Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$: il existe $a_0 \dots a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$$

Puisque f est définie en $-x$ et que $f(-x) = f(x)$, on a

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + o\left(x^n\right),$$

puisque $o((-x)^n) = o(x^n)$. Par unicité du $\mathrm{DL}_n(0)$, on a $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $a_k = (-1)^k a_k$. Si k est impair, on a $a_k = -a_k$, ce qui donne $a_k = 0$. On raisonne de la même façon pour une fonction impaire. $\square$

Proposition 4 (Troncature).

Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, de partie régulière $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la fonction f admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ de partie régulière $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k$.

Preuve. Si f satisfait les hypothèses, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)}_{o(x^p)} \qquad \square.$$

Exemple 5 (Tronquer un DL).

Supposons qu'on a le DL suivant pour une fonction f définie au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} 2 - x + x^3 + o(x^3).$$

Donner les développements limités de f en 0 aux ordres 0, 1 et 2.

Proposition 6 (DL à l'ordre 1 et dérivabilité).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, définie en 0. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes.

1. f est dérivable en 0.
2. Il existe deux réels a_0, a_1 tels que

$$\forall x \in I \quad f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1 x + o(x).$$

Dans le cas où 2 est vraie, alors nécessairement, $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

Preuve. • Supposons que f est dérivable en 0. Le taux d'accroissement en 0 tend vers le nombre dérivé : cela s'écrit

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) + o(1).$$

Multiplions par x pour obtenir $f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$: ceci est un DL à l'ordre 1 en 0.

• Supposons l'existence de deux réels a_0 et a_1 tels que $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$. Alors f tend vers a_0 en 0. Cette limite ne peut être que $f(0)$, parce-que f est *définie* en 0 (voir cours sur la continuité pour cette subtilité). Pour $x \in I \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-a_0}{x} = \frac{a_1 x + o(x)}{x} = a_1 + o(1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} a_1.$$

Ce qui précède démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = a_1$. □

L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) sera généralisée à un ordre plus grand par la formule de Taylor-Young, qui nous dira que si on a suffisamment de régularité en 0, on y a un DL. En revanche, l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) ne se généralise pas aux ordres plus grands que 2 : voir TD pour un exemple de fonction admettant un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'étant pas deux fois dérivable en 0.

1.2 Primitivation d'un développement limité en 0.

Proposition 7 (Primitivation d'un DL en 0)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, intervalle contenant 0.
On suppose que f' admet un DL à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 : $\exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$f'(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o\left(x^n\right).$$

Alors, f admet un DL à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 et

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Preuve. On suppose vérifiées les hypothèses de la proposition. Soit la fonction ci-dessous, définie sur I :

$$g : x \mapsto f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Il faut démontrer que $g(x) \underset{0}{=} o\left(x^{n+1}\right)$. Soit $x \in I \setminus \{0\}$. Supposons $x > 0$ pour fixer les idées, on traiterait de la même façon le cas $x < 0$. La fonction g est dérivable sur $[0, x]$, de dérivée $g' : x \mapsto f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. La fonction g est donc continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\exists c_x \in]0, x[\quad \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(c_x).$$

Ainsi, comme $g(0) = 0$,

$$\left|\frac{g(x)}{x^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{x^n} \cdot \frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{g'(c_x)}{x^n}\right| \leq \left|\frac{g'(c_x)}{c_x^n}\right| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

La dernière limite est obtenue en rappelant que par hypothèse, $g'(x) = o\left(x^n\right)$, et que de plus, lorsque x tend vers 0, $c_x \in]0, x[$ tend vers 0 par encadrement. □

À partir du développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre $n-1$, on obtient par primitivation les $\mathrm{DL}_n(0)$ suivants.

DL.

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \quad = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$
$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Autre exemple, on a $\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u)$, donc $\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$. Par primitivation,

DL.

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

1.3 Formule de Taylor-Young et DL usuels en 0.

Proposition 8 (Formule de Taylor-Young en 0)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, intervalle contenant 0. Alors, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$

Preuve.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ l'énoncé ci-dessus.

• Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur I. Elle est notamment continue en 0 et $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$. On peut réécrire ceci $f(x) \underset{0}{=} f(0) + o(1)$, ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$, considérons f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, f est dérivable sur I et f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. D'après $\mathcal{P}(n)$, f' admet le DL suivant en a à l'ordre n :

$$f'(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$

D'après la proposition 7, la fonction f admet un DL en 0 à l'ordre $n+1$ donné par

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Or, $(f')^{(k)}(0) = f^{(k+1)}(0)$ et $k!(k+1) = (k+1)!$. Un changement d'indice $k' = k+1$ amène alors

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{n+1}\right),$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

DL.

$$\begin{aligned}
\exp(x) &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right). \\
\cos x &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2p+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} + o(x^{2p+1}) \\
\sin x &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2p+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o(x^{2p+2}). \\
(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \\
&\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, le DL de $(1+x)^\alpha$ donne

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).}$$

De même, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).}$$

Remarque. Pour un réel α et un entier naturel k non nul, on note parfois

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

On note aussi $\binom{\alpha}{0} = 1$. Ce nombre est alors appelé "coefficient binomial généralisé". On peut ainsi écrire

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n).$$

Lorsque α est un entier naturel, on retrouve la formule du binôme avec un négligeable nul.

⚠ On n'utilisera pas le DL de $(1+x)^\alpha$ lorsque l'exposant dépend de x ! Exemple typique : $(1+\frac{1}{n})^n$.

1.4 Développement limité en un point quelconque.

Définition 9.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a ($\mathrm{DL}_n(a)$) si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, c'est-à-dire s'il existe $a_0, a_1 \ldots, a_n$ tels que

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n).$$

Ceci peut s'écrire aussi

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Méthode.

Généralement, lorsqu'on aura besoin du DL d'une fonction f en un point a autre que 0, on se ramènera en 0 en travaillant sur la fonction $h \mapsto f(a+h)$.

Exemple 10.

Calculer le DL de $x \mapsto \frac{1}{x}$ à l'ordre 2 au point 1. Puis au voisinage de 3.

En appliquant la formule de Taylor-Young en 0 à la fonction $h \mapsto f(a+h)$, on obtient le résultat suivant, qui appartient à la famille des formules de Taylor.

Théorème 11 (Formule de Taylor-Young)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$.
Alors, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Même si elle n'est pas si utile dans la « pratique » des calculs de DL, on retiendra cette idée fondamentale qui est que les dérivées successives en un point donnent accès au DL en ce point. Et par unicité du DL... c'est aussi vrai réciproquement... lorsque les dérivées successives existent ! **Preuve**. Posons $g : h \mapsto f(a+h)$. Elle est définie sur l'intervalle $J = \{x-a, x \in I\}$, intervalle sur lequel elle est de classe $\mathcal{C}^n$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. D'après la formule de Taylor-Young (en 0), g possède un DL en 0 à l'ordre n qui est

$$f(a+h) = g(h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

Il reste alors à se convaincre que $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$. En prenant $h = x - a$, on obtient bien

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

$\square$

Exemple 12.

Donner le $\mathrm{DL}_3(\pi/4)$ de cos

- en utilisant la formule de Taylor-Young,
- en vous ramenant en 0.

2 DL et opérations.

On a expliqué comment une question de DL pouvait toujours se ramener à une question de DL en 0. C'est donc au voisinage de ce point qu'on énonce les résultats de cette section.

Dans les énoncés des propositions ci-dessous, les fonctions f et g sont supposées définies au voisinage de 0, sauf peut-être en ce point.

Somme.

Proposition 13.

Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors $f + g$ aussi.
Les coefficients de la somme sont la somme des coefficients.

Preuve. Supposons qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n$ ainsi que $b_0, b_1, \dots, b_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

Rappelons que $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$ donc

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + o(x^n).$$

$\square$

DL.

$$\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2p}\right) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p+1}\right).$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2p+2}\right) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+2}\right).$$

Produit.

Proposition 14.

Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors $f \times g$ aussi.

Preuve. Supposons qu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ainsi que $b_0, b_1, \ldots, b_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

Notons $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ respectivement les parties régulières dans le DL à l'ordre n de f et g. On a

$$f(x) \times g(x) = (P(x) + o(x^n))\,(Q(x) + o(x^n)) = P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^{2n}).$$

On a $o(x^{2n}) = o(x^n)$. De plus, les fonctions P et Q sont continues en 0 donc y sont bornées. On a donc $P(x)o(x^n) = o(x^n)$ et $Q(x)o(x^n) = o(x^n)$. On a donc

$$f(x) \times g(x) = P(x)Q(x) + o(x^n).$$

La fonction polynomiale PQ est de degré inférieur à $2n$. Pour obtenir la partie régulière à l'ordre n de notre DL, il reste à tronquer à l'ordre n pour obtenir la fonction polynomiale R. On a alors

$$f(x) \times g(x) = R(x) + o(x^n).$$

□

Exemple 15 (Première et dernière fois qu'on développe un produit de DL jusqu'au bout)**.**

Calculer naïvement le DL à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{e^x}{1-x}$ en écrivant tous les termes, puis souligner en rouge les termes qu'il était inutile de calculer.

Méthode (Calcul malin d'un produit de DL)**.**

Lorsqu'on développe le produit de deux développements limités d'ordre n, les termes d'ordre supérieur à $n+1$ ne sont pas écrits. On les remplace au fur et à mesure du calcul par $o(x^n)$.

Considérons le produit d'un DL de f et d'un DL de g en visant un DL final à l'ordre n.
Si le premier terme non nul de f est d'ordre p avec $p \leq n$, il suffit d'utiliser un DL de g à l'ordre $n - p$.

Exemples 16.

$\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x} \cdot e^x$, $\qquad$ $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $\qquad$ $\mathrm{DL}_6(0)$ de $x \mapsto (1 - \cos x) \sin x$.

Quotient. Voici un quotient de DL en 0 dans lequel on a factorisé les premiers termes non nuls :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_p x^p}{a'_{p'} x^{p'}} \cdot \frac{1 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + o(x^n)}{1 + b'_1 x + \ldots + b'_{n'} x^{n'} + o(x^{n'})}.$$

On peut alors calculer le développement limité à l'ordre n' de

$$\frac{1}{1 + b'_1 x + \ldots + b'_{n'} x^{n'} + o(x^{n'})}$$

à l'aide de celui de $\frac{1}{1+u}$ et d'une substitution. Il restera à faire un produit de DL : on obtient alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_p}{a'_p} x^{p-p'} \left(1 + c_1 x + \ldots c_q x^q + o(x^q)\right), \qquad \text{où } q = \min(n, n')$$

DL.

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Exemple 17.

$$\mathrm{DL}_2(0) \text{ de } x \mapsto \frac{\sin x}{\ln(1+x)}.$$

Composée.

Exemple 18.

$$\mathrm{DL}_8(0) \text{ de } x \mapsto \cos(x^2). \qquad \mathrm{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \sin\left(\ln(1+x)\right).$$

3 Applications des développements limités.

Dans les deux prochains paragraphes, la fonction f est supposée définie au voisinage de a sauf peut-être en a.

3.1 Calcul de limite, d'équivalent.

Méthode (Limite ?/ Prolongeable par continuité ?)**.**

L'existence d'une limite est équivalente à celle d'un DL à l'ordre 0. Plus précisément, pour $a_0 \in \mathbb{K}$,

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} a_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1).$$

Exemple 19 (L'exemple de l'introduction).

$$\frac{\sin x - x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}.$$

Exemple 20.

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer (en prouvant que la limite existe)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Méthode (Obtenir un équivalent à partir d'un DL).

Un DL peut parfois nous aider à obtenir une écriture du type

$$f(x) \underset{a}{=} a_p(x-a)^p + o((x-a)^p),$$

avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \neq 0$ (c'est le premier coefficient non nul du DL). On sait alors que

$$f(x) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Exemples 21.

1. Donner un équivalent de $\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$.
2. Donner le signe au voisinage de 0 de $\ln(1-x) + x\sqrt{1+x}$.

3.2 Étude locale d'une fonction.

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Méthode (Dérivable ? / Équation de la tangente ?).

Si f est définie en a, d'après la proposition 6, montrer la dérivabilité en a revient à montrer l'existence d'un DL à l'ordre 1 en a. L'écriture

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a),$$

implique que f est dérivable en a et que l'on a $f(a) = a_0$ et $f'(a) = a_1$.
La courbe de f admet alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ comme tangente en 0.

Exemple 22.

Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Méthode (Positions relatives du graphe et de la tangente)**.**

Supposons que l'on dispose d'un DL de la forme

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p),$$

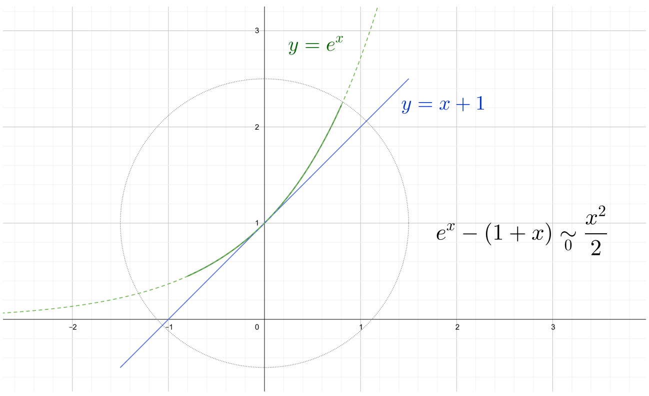
où a_p désigne le premier coefficient non nul après l'ordre 1.
Alors, le graphe de f admet au point a une tangente d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$, et on a

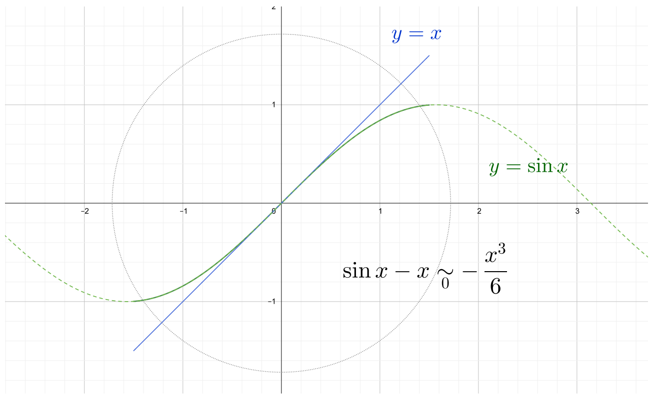
$$f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Au voisinage de a, la différence entre f et sa tangente est du signe de $a_p(x-a)^p$. Plus précisément,

- Si p est pair, on constate que le graphe est *au-dessus* de sa tangente au voisinage de a si $a_p > 0$, *en-dessous* si $a_p < 0$.
- Si p est impair, on constate un **point d'inflexion** : les positions relatives du graphe et de la tangente sont *opposées de part et d'autre* de a (dépend du signe de a_p).

Deux exemples immédiats pour lesquels on connaît déjà les graphes : exp et sin.





Exemple 23 (Deux études locales)**.**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-e^{-x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
Prouver que son graphe possède une tangente en 0 dont on donnera l'équation.
Préciser localement la position du graphe par rapport à sa tangente (esquisser le graphe).

Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$.
Mettre en évidence l'existence d'un point d'inflexion en 0 (esquisser le graphe localement).

Proposition 24 (DL d'ordre 2 et extremum local)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément à l'*intérieur* de I ($a \in I$ n'est pas une borne de I).

- Supposons que f admet un DL à l'ordre 1 en a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o\left(x-a\right).$$

Pour que f admette un extremum local en a, il est **nécessaire** que a_1 soit nul.
Il est équivalent de dire que si f est dérivable en un point a intérieur à son ensemble de définition, et y possède un extremum, alors a est un point critique : $f'(a) = 0$.

- Supposons que f admet un DL à l'ordre 2 en a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$$

Pour que f admette un extremum local en a, il est **suffisant** que $a_1 = 0$ et que $a_2 \neq 0$.
Plus précisément,
— si $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, f admet en a un minimum local,
— si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, f admet en a un maximum local.

Si f possède un DL à l'ordre 2 en a et que $a_1 = a_2 = 0$, tout est possible : un point d'inflexion, un extremum local, ou rien de tout ça.

Défi : êtes-vous capables de construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, qui change infiniment souvent de signe et de variations au voisinage de ce point, et dont les dérivées successives sont nulles en 0 ?

3.3 Exemples de développements asymptotiques.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Nous avons démontré dans le cours précédent que

$$H_n \sim \ln(n) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad H_n = \ln(n) + o\left(\ln(n)\right).$$

Le résultat qui vient est plus précis.

Théorème 25 (Série harmonique et constante d'Euler (HP ?))**.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Il existe une constante strictement positive appelée **constante d'Euler** et notée γ telle que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Preuve. Pas besoin de DL ici : on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ puis on prouve que u et v sont deux suites adjacentes qui convergent vers une même limite strictement positive. □

La constante d'Euler a pour valeur approchée $0,577215$. On sait peu de choses de ce nombre, et notamment on ignore s'il est rationnel ou irrationnel. Avec des développements limité ainsi que des théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries (spé) on peut établir le résultat plus fin suivant :

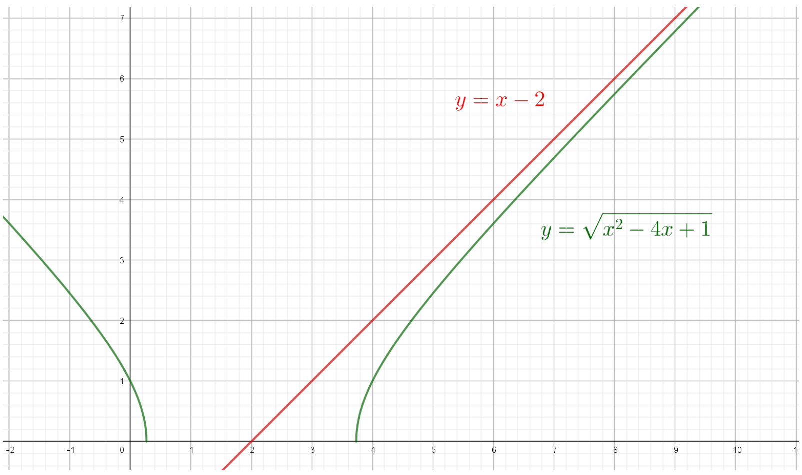
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exemple 26 (Un développement asymptotique grâce à un DL)**.**

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1}$. On calcule

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x - 2 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le graphe possède une asymptote au voisinage de $+\infty$: la droite d'équation $y = x - 2$ et elle est en-dessous au voisinage de $+\infty$.



3.4 Formule de Stirling.

Le but de ce paragraphe est d'établir, en deux étapes, le résultat ci-dessous.

Théorème 27 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Corollaire 28 (La formule de Stirling écrite comme un développement asymptotique)**.**

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1).$$

Étape 1. L'équivalent sans la constante multiplicative.

Proposition 29.

Il existe une constante C dans $]0, +\infty[$ telle que

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Principales étapes de la démonstration.

- On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \ln\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}\right).$$

- Grâce à un développement limité, on obtient

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{12n^2},$$

ce qui donne

$$0 \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{à.p.d.c.r.}$$

- Notons n_0 un rang à partir duquel l'inégalité ci-dessus est vraie. Grâce au théorème de la limite monotone, on établit la convergence de

$$\left(\sum_{k=n_0}^{n}(u_{k+1} - u_k)\right)_{n\geq n_0}$$

- Par télescopage, on en déduit que u est convergente.

- La suite de terme général e^{-u_n} converge vers une constante strictement positive, CQFD.

Étape 2. Calcul de la constante à l'aide des intégrales de Wallis.

Proposition 30.

La constante C de la proposition 29 vaut $\sqrt{2\pi}$.

Principales étapes de la démonstration.

• On considère la suite d'intégrales dites de Wallis définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \mathrm{d}x.$$

• L'intégration par parties permet d'établir

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

• Moyennant quoi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

• En particulier, ceci donne accès au coefficient binomial $\binom{2n}{n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{2n}{n} = \frac{2}{\pi} 2^{2n} I_{2n}.$$

• Or, par quotient d'équivalents, en utilisant la proposition 29,

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{n}} 2^{2n}.$$

• On voit donc qu'un calcul explicite de la constante C est possible si on parvient à obtenir un équivalent explicite des intégrales de Wallis !

• La relation de récurrence simple vérifiée par la suite (I_n) amène

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

• Or, la suite (I_n) est décroissante. On a en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$$

ce qui amène

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2n} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}.$$

• Pas de composition pour le calcul d'équivalent ! Mais en prenant les précautions nécessaires pour le passage à la racine, on obtient

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

• En confrontant les deux équivalents obtenus pour $\binom{2n}{n}$, on obtient $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$.

Exercices

Manipuler les DL usuels

23.1 **[♦◇◇]** Donner, pour chacune des fonctions suivantes, le développement limité au point 0 à l'ordre 3.

$$a : x \mapsto \ln(1+x) + e^{-x} \quad b : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \quad c : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2} \quad d : x \mapsto \frac{1}{2+x}.$$

23.2 **[♦◇◇]** Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \exp(x)\sin(x)$ et de $x \mapsto (\ln(1-x))^2$. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de th.

23.3 **[♦♦◇]** Donner le développement limité au point 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

23.4 **[♦♦◇]** Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ et $g : x \mapsto \arctan(e^x)$.

1. Donner un DL de f en 0 à l'ordre 2.
2. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire un DL de g en 0 à l'ordre 3.

23.5 **[♦♦◇]** À l'aide du théorème de primitivation, donner le DL de arcsin en 0 à l'ordre 5.

23.6 **[♦♦◇]**

1. Écrire un DL en 0 à l'ordre 1 de tan.
2. À l'aide de $\tan' = 1 + \tan^2$, en déduire un $\mathrm{DL}_3(0)$ de tan.
3. À l'aide de $\tan' = 1 + \tan^2$, en déduire un $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan.
4. À l'aide de $\tan' = 1 + \tan^2$, en déduire un $\mathrm{DL}_7(0)$ de tan.

23.7 **[♦♦◇]** Calculer le DL à l'ordre 10 en 0 de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$.

23.8 **[♦♦♦]** Montrer que $f : x \mapsto xe^{x^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
Justifier l'existence d'un DL à l'ordre 4 de f^{-1} en 0 et le calculer.

23.9 **[♦♦♦]** Soit a_n le terme d'ordre n dans le DL en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Expliciter a_n à l'aide du coefficient $\binom{2n}{n}$.

23.10 **[♦♦♦]** Donner le DL à l'ordre 100 au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln \displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}$.

Formule de Taylor-Young

23.11 **[♦◇◇]** Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et x_0 un réel de l'intervalle I. Montrer que la limite suivante existe et la calculer :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$

23.12 **[♦♦◇]** Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$. Calculer pour k dans $[\![0,5]\!]$ la valeur de $f^{(k)}(0)$.

23.13 **[♦♦◇]** [La régularité offre des DL mais la réciproque n'est pas vraie]
Soit $f : x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$, prolongée par continuité en 0.

1. Justifier qu'elle admet un DL à l'ordre 2 en 0.
2. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0.
3. Expliquer le titre de l'exercice.

Applications du calcul de développements limités

23.14 [♦♦◇] Calculer le DL à l'ordre 2 en zéro de la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$. En déduire la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

23.15 [♦♦◇] Calculer les limites ci-dessous, si elles existent :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3\cdot 2^{\frac{1}{n}}-2\cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)^n\ ;\quad \lim_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{x+1}{x}}-(x-1)^{\frac{x}{x-1}}.$$

23.16 [♦◇◇] Calculer un équivalent de $e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}$.

23.17 [♦◇◇] Donner un équivalent simple en 0 pour $x \mapsto \ln(1+x)+e^{-x}-1$. Quel signe au voisinage de 0 ?

23.18 [♦♦◇] Donner un équivalent simple en 0 de $f(x) = x^x - \sin(x)^{\sin(x)}$.

23.19 [♦♦◇] Montrer que le graphe de $f : x \mapsto x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ admet une asymptote en $+\infty$; on précisera l'équation de cette droite ainsi que la position du graphe par rapport à l'asymptote.

23.20 [♦♦◇] Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, prolongée par continuité en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

23.21 [♦♦♦] Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

23.22 [♦♦♦] Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}] \\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\sin(u_n).\end{cases}$

1. Justifier que u est bien définie.
2. Démontrer que u tend vers 0.
3. Démontrer que la suite v définie par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}$ converge et préciser sa limite.
4. À l'aide du théorème de Cesáro, donner un équivalent de $\frac{1}{u_n^2}$, puis de u_n.

23.23 [♦♦♦]

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x+e^x=n$ admet une unique solution réelle notée x_n.
2. Établir le développement asymptotique :

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

23.24 [♦♦♦] [Recollement des solutions d'une équation différentielle]
Résoudre <u>sur $\mathbb{R}$</u> l'équation différentielle $x(x^2+1)y'+2(x^2+1)y=x$.

23.25 [♦♦♦] Soit $f : x \mapsto \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)^x$.
Donner un développement asymptotique au voisinage de 1 où figurent tous les termes tendant vers $+\infty$.
