

Équations Algébriques

Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Etienne pour les exercices 9.25 et 9.26

Exercices.

Exercice 10.17	2
Exercice 10.18	2
Exercice 10.19	3
Exercice 10.20	3
Exercice 10.21	3
Exercice 10.22	4
Exercice 10.23	4

Exercice 10.17 [◆◆◆]

1. Calculer les racines carrées du nombre $-8i$.

On donnera ces nombres sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

Notons δ une racine de $-8i$:

$$\delta = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2 - 2i$$

2. Le discriminant Δ vaut $-8i$. Ses racines carrées sont donc $2 - 2i$ et $-2 + 2i$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{3 - i, 1 + i\}$.

□

Exercice 10.18 [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calcul de

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z \quad \text{et} \quad \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z$$

On a :

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Et :

$$\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

□

Exercice 10.19 [◆◆◆]

Donner une expression du périmètre du polygone régulier formé par les nombres de \mathbb{U}_n .

Que conjecture-t-on sur la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$? Essayer de prouver votre conjecture.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le périmètre du polygone régulier formé par les nombres de \mathbb{U}_n est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}}| |e^{-\frac{\pi}{n}} - e^{\frac{\pi}{n}}| = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Et, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi$$

□

Exercice 10.20 [◆◆◆]

Soit $\omega \in \mathbb{U}_7$, une racine 7e de l'unité différente de 1.

1. Justifier que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$.

2. Calculer le nombre $\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

1. On a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2, \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$ dans le 10.18.

2. On a :

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{2 + 2\omega + 2\omega^2 + 2\omega^3 + 2\omega^4 + 2\omega^5}{\omega^6} = -\frac{2\omega^6}{\omega^6} = -2$$

□

Exercice 10.21 [◆◆◆]

1. Quand dit-on qu'un nombre réel θ est un argument d'un nombre complexe z ?

2. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Donner le module et un argument de $e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$.

3. Établir l'égalité

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

1. θ est un argument de $z \neq 0$ ssi $z = |z|e^{i\theta}$.

2. On a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{\pi(2k+n)}{2n}}$$

Ainsi son module est $2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et l'un de ses arguments est $\frac{\pi(2k+n)}{2n}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| &= \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right) \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \end{aligned}$$

Or, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$. Ainsi (formule du cours) :

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1| &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \end{aligned}$$

□

Exercice 10.22 [◆◆◆]

Soit θ un nombre réel appartenant à $]0, \pi[$. Résoudre l'équation

$$z^2 - 2e^{i\theta}z + 2ie^{i\theta}\sin\theta = 0.$$

On écrira les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4e^{2i\theta} - 8ie^{i\theta}\sin\theta = 4e^{i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta - 2i\sin\theta) \\ &= 4e^{i\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) = 4e^{i\theta}e^{-i\theta} \\ &= 4\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ x_2 &= e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

□

Exercice 10.23 [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^{2n} - 2\cos(\theta)z^n + 1 = 0$.
1. $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta) \leq 0$.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2\cos(\theta) + i\sqrt{4\sin^2(\theta)}}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \\ x_2 &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta}\end{aligned}$$

2. Posons $z' = z^n$.

On sait que z' est solution de $z'^2 - 2\cos(\theta)z' + 1 = 0$.

Ainsi, $z'_1 = e^{i\theta}$ et $z'_2 = e^{-i\theta}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}z_1 &= z'_1{}^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{i\theta}{n}} \\ z_2 &= z'_2{}^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{i\theta}{n}}\end{aligned}$$

□