Équations Algébriques
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Etienne pour les exercices 9.25 et 9.26

Exercices.

Exercice 10.17 [♦◊◊]

1. Calculer les racines carrées du nombre $-8i$.
On donnera ces nombres sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

Notons δ une racine de $-8i$:

$$\delta = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2 - 2i$$

2. Le discriminant Δ vaut $-8i$. Ses racines carrées sont donc $2-2i$ et $-2+2i$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{3-i, 1+i\}$.

□

Exercice 10.18 [♦◊◊]

Soit $n \in \mathbb{N}$n $n \geq 2$. Calcul de

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z \quad \text{et} \quad \prod_{z\in\mathbb{U}_n} z$$

On a :

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Et :

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

□

Exercice 10.19 [♦♦◊]

Donner une expression du périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$.
Que conjecture-t-on sur la limite lorsque $n \to +\infty$? Essayer de prouver votre conjecture.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}}||e^{-\frac{\pi}{n}} - e^{\frac{\pi}{n}}| = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Et, puisque $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi$$

□