Chapitre 25

Espaces Vectoriels et Applications Linéaires.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

Soit F l'ensemble des suites bornées et G l'ensemble des suites qui tendent vers 0.

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. Pourquoi peut-on dire que G est un sous-espace vectoriel de F ?

Solution :

$\boxed{1.}$ La suite nulle tend vers 0 donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in G$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in G$, c'est-à-dire $u \to 0$ et $v \to 0$.
On a $\lambda u + \mu v \to 0$ par produit et somme de limites donc $\lambda u + \mu v \in G$.
Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\boxed{2.}$ La suite nulle est bornée donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in F$, c'est-à-dire u et v sont bornées.
Alors $\exists M_u, M_v \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M_u \ \wedge\ |v_n| \leq M_v$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda u_n + \mu v_n \leq \lambda M_u + \mu M_v$ donc $\lambda u + \mu v$ est bornée et appartient à F.
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\boxed{3.}$ G est un sous-espace vectoriel de F car $G \subset F$ et G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2: ♦◊◊

Dans chacun des cas suivants, justifier que F_i est un s.e.v. de E_i.

1. $E_1 = \mathbb{R}^3$ et $F_1 = \{(x, y, x+y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.
2. $E_2 = M_n(\mathbb{R})$ et $F_2 = \{M \in E_2 : \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.
3. $E_3 = M_n(\mathbb{R})$ et $F_3 = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $F_1 = \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$ c'est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{2.}$ On a $F_2 = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, or Tr est linéaire donc F_2 est un s.e.v. de E_2.

$\boxed{3.}$ La matrice nulle commute avec toutes les matrices donc $0_{M_n(\mathbb{R})} \in F_3$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F_3$, c'est-à-dire $AM = MA$ et $AN = NA$.
On a $A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A$ donc $\lambda M + \mu N \in F_3$.
Ainsi, F_3 est un s.e.v. de E_3.

Exercice 3: ♦♦◊

Soit U l'ensemble des fonctions croissantes sur I.
Soit $V = \{f - g \mid f, g \in U\}$. Montrer que V est un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Solution :

La fonction nulle, notée 0 est croissante sur I et $0 = 0 - 0$ donc $0 \in V$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi, \psi \in V : \exists f_\varphi, g_\varphi \in U \mid \varphi = f_\varphi - g_\varphi$ et $\exists f_\psi, g_\psi \in U \mid \psi = f_\psi - g_\psi$.
Alors $\lambda\varphi + \mu\psi = \lambda(f_\varphi - g_\varphi) + \mu(f_\psi - g_\psi) = (\lambda f_\varphi + \mu f_\psi) - (\lambda g_\varphi + \mu g_\psi)$.
Or $\lambda f_\varphi + \mu f_\psi$ et $\lambda g_\varphi + \mu g_\psi$ sont croissantes car sommes de fonctions croissantes donc $\lambda\varphi + \mu\psi \in V$.
Ainsi, V est un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Exercice 4: ♦♦◊

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $u = (1, j, j^2)$, $v = (1, j^2, j)$ et $w = (j, j^2, 1)$.
Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(u, v, w) &= \left\{x(1, j, j^2) + y(1, j^2, j) + z(j, j^2, 1) \mid x, y, z \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{(x + y + zj, xj + yj^2 + zj^2, xj^2 + yj + z) \mid x, y, z \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\right\}
\end{aligned}$$

En effet, $\forall x, y, z \in \mathbb{C}, x + y + zj + xj + yj^2 + zj^2 + xj^2 + yj + z = (x + y + z)(1 + j + j^2) = 0$.

Exercice 5: ♦♦♦

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux s.e.v. de E. Montrer :

$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $F \cup G$ est un s.e.v. de E.
Par l'absurde, supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
Soient $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. On a $x + y \in F \cup G$, puisque c'est un s.e.v.
Ainsi, $x + y \in F$, ce qui est absurde car $y \notin F$, ou $x + y \in G$, ce qui est absurde car $x \notin G$.
Donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $F \subset G$ SPDG.
Alors $F \cup G = G$, qui est un s.e.v. de E.

Exercice 6: ♦♦◊

Soit P l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que P et I sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Démontrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$.

Solution :

$\boxed{1.}$ La fonction nulle est paire et impaire donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in P \cap I$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in P$, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = g(x)$. On prend $x \in \mathbb{R}$.
Alors $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$.
Ainsi, $\lambda f + \mu g \in P$. Même raisonnement pour I.
Ainsi, P et I sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$\boxed{2.}$ On a $P \cap I = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$.
Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $x \in \mathbb{R}$.
Analyse. Supposons qu'il existe $g \in P$ et $h \in I$ tels que $f = g + h$.
Alors $f(x) = g(x) + h(x)$ et $f(-x) = g(x) - h(x)$.
En sommant, on a $2g(x) = f(x) + f(-x)$ et $2h(x) = f(x) - f(-x)$.
Ainsi, $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Synthèse. On pose $g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
On a bien que $f = g + h$, $g \in P$ et $h \in I$.
Ainsi, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$.

Exercice 7: ♦♦◊

Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes et F l'ensemble des suites réelles de limite nulle.

1. Démontrer que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On admettra que F l'est aussi.
2. Soit c la suite constante égale à 1. Montrer que $E = F \oplus \mathrm{Vect}(c)$.

Solution :

$\boxed{1.}$ La suite nulle converge et $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$, c'est-à-dire u et v convergent.
Alors $\lambda u + \mu v$ converge par produit et somme de limites donc $\lambda u + \mu v \in E$.
Ainsi, E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\boxed{2.}$ On a $F \cap \mathrm{Vect}(c) = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$ car les suites constantes, sauf $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, n'ont pas de limite nulle.
Soit $u \in E$, alors $\exists l \in \mathbb{R} \mid u_n \to l$.
Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - l$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + l \cdot c_n$. Or $v \in F$ et $l \cdot c \in \mathrm{Vect}(c)$.
Ainsi, $E = F \oplus \mathrm{Vect}(c)$.

Exercice 8: ♦♦◊

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. On note $P\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des poynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par P.

1. Justifier que $P\mathbb{K}[X]$ est un s.e.v. de E.
2. Démontrer que $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Le polynôme nul est divisible par tout polynôme donc $0_{\mathbb{K}[X]} \in P\mathbb{K}[X]$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $Q, R \in P\mathbb{K}[X]$.
Alors P divise $\lambda Q + \mu R$ car P divise λQ et μR.
Ainsi, $\lambda Q + \mu R \in P\mathbb{K}[X]$ donc $P\mathbb{K}[X]$ est un s.e.v. de E.

$\boxed{2.}$ On a $P\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{n-1}[X] = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ car si $A \in P\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors P divise A et A est de degré strictement inférieur à n, ce qui n'est possible que pour $0_{\mathbb{K}[X]}$.
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, alors $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \times P\mathbb{K}[X] \mid A = PQ + R$.
Or $\deg(R) < \deg(P) = n$ donc $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $PQ \in P\mathbb{K}[X]$.
Ainsi, $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$.

Exercice 9: ⧫⧫⧫

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G, H trois s.e.v. de E tels que :

$$\begin{cases} F+G = F+H = F+(G\cap H) \\ F\cap G = F\cap H \end{cases}$$

Montrer que $G = H$.

Solution :

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in G$.
Alors $\exists (x_F, x_{G\cap H}) \in F \times G\cap H \mid x = x_F + x_{G\cap H}$.
Ainsi, $x_F = x - x_{G\cap H} \in G$ comme somme d'éléments de G.
On obtient $x_F \in F\cap G = F \cap H$.
Ainsi, $x_F \in H$ et $x = x_F + x_{G\cap H} \in H$ comme somme d'éléments de H.
Donc $G \subset H$.

$\boxed{\supset}$ Raisonnement identique, $H \subset G$.
Ainsi, $G = H$ par double inclusion.

Exercice 10: ⧫◊◊

Montrer que les vecteurs $(1,0,1,0), (0,1,0,1)$ et $(1,2,3,4)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Solution :

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1,0,1,0) + \mu(0,1,0,1) + \nu(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$.
Système trivial, on trouve $\lambda = \mu = \nu = 0$.
Ainsi, la famille est libre.

Exercice 11: ⧫◊◊

Montrer que les suites $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}, v = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Solution :

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(n)_{n\in\mathbb{N}} + \nu(2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a $\lambda + \mu n + \nu 2^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En particulier, pour $n = 0$, on a $\lambda + \nu = 0$.
Pour $n = 1$, on a $\lambda + \mu + 2\nu = \mu + \nu = 0$ en simplifiant les $\lambda + \nu$.
Pour $n = 2$, on a $\lambda + 2\mu + 4\nu = \nu = 0$ en simplifiant les $\lambda + \nu$ et $\mu + \nu$.
Ainsi, $\lambda = \mu = \nu = 0$ et la famille est libre.

Exercice 12: ⧫⧫◊

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $q_1 < q_2 < ... < q_p$ p réels strictement positifs.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note $a^{(k)}$ la suite géométrique de raison q_k et de premier terme 1.
Montrer que $(a^{(1)}, ..., a^{(p)})$ est libre.

Solution :

Par récurrence sur p :
Initialisation. Pour $p = 1$, la famille est réduite à un seul vecteur donc elle est libre.
Hérédité. Supposons que la famille est libre pour $p - 1 \in \mathbb{N}$.
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que pour $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_1 q_1^n + ... + \lambda_p q_p^n = 0$.
Alors $\lambda_1 \left(\frac{q_1}{q_p}\right)^n + ... + \lambda_p = 0$, on fait tendre vers l'infini : $\lambda_p = 0$.
On obtient $\lambda_1 q_1^n + ... + \lambda_{p-1} q_{p-1}^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par hypothèse de récurrence, on a $\lambda_1 = ... = \lambda_{p-1} = 0$.
Conclusions. Par principe de récurrence, la famille est libre pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13: ⧫⧫◊

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
Démontrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution :

Soient $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n = 0$.
Alors $\lambda_0(1-X)^n + ... + \lambda_n X^n = 0$.
Pour $X = 1$, on a $\lambda_n = 0$.
On obtient $\lambda_0(1-X)^n + ... + \lambda_{n-1}X^{n-1}(1-X) = 0$.
Donc $(1-X)\left(\lambda_0(1-X)^{n-1} + ... + \lambda_{n-1}X^{n-1}\right) = 0$.
Donc $\lambda_0(1-X)^{n-1} + ... + \lambda_{n-1}X^{n-1} = 0$ car $1 - X \neq 0$.
On itère le raisonnement pour obtenir $\lambda_0 = ... = \lambda_n = 0$.
Ainsi, la famille est libre.

Exercice 14: ♦♦♦

Déterminer les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que :

1. f est dérivable et (f, f') est une famille liée.
2. f est deux fois dérivable et (f, f', f'') est une famille liée.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable telle que (f, f') est liée.
Puisque (f, f') est liée, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid f' = \lambda f$.
Alors $f' = \lambda f$, une EDL1.
Ainsi, $f \in \{x \mapsto \alpha e^{\lambda x} \mid \alpha, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{2.}$ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fois dérivable telle que (f, f', f'') est liée.
Puisque (f, f', f'') est liée, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid f'' = \lambda f + \mu f'$.
Alors $f'' = \lambda f + \mu f'$, une EDL2.
Les fonctions sont donc les solutions de cette EDL2.

Exercice 15: ♦♦◊

Soit $u : E \to F$ linéaire et $(e_i)_{i\in I} \in E^I$.

1. Montrer que si u est injective et si $(e_i)_{i\in I}$ est libre, alors $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre.
2. Montrer que si u est surjective et si $(e_i)_{i\in I}$ engendre E, alors $(u(e_i))_{i\in I}$ engendre F.

Solution :

$\boxed{1.}$ Supposons u injective et $(e_i)_{i\in I}$ libre.
Soit J une partie finie de I et $(\lambda_j)_{j\in J}$ telle que $\sum_{j\in J} \lambda_j u(e_j) = 0$.
Alors $u\left(\sum_{j\in J} \lambda_j e_j\right) = 0$ par linéaritéde u puis $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0$ par linéarité et injectivité de u.
Or $(e_i)_{i\in I}$ est libre donc $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$.
Ainsi, $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre.

$\boxed{2.}$ Supposons u surjective et $(e_i)_{i\in I}$ génératrice de E.
Soit $y \in F$, alors $\exists x \in E \mid y = u(x)$ par surjectivité de u.
Puisque $(e_i)_{i\in I}$ engendre E, $\exists (\lambda_i)_{i\in I} \mid x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.
Ainsi, $y = u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i u(e_i)$ par linéarité de u.
Ainsi, $(u(e_i))_{i\in I}$ engendre F.

Exercice 16: ♦◊◊

Pour chacun de ces ensembles, prouver qu'il s'agit d'un espace vectoriel et en donner une base.

1. $F = \{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z - t = 0 \text{ et } 2x + 4y + z + 3t = 0\}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Montrons que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$.
On a $0_{\mathbb{R}_3[X]} \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in F$. Alors $\exists (\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, P = \alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta$ et $Q = \gamma X^3 + \delta X + \gamma + \delta$.
Ainsi, $\lambda P + \mu Q = (\lambda\alpha + \mu\gamma)X^3 + (\lambda\beta + \mu\delta)X + (\lambda\alpha + \mu\gamma) + (\lambda\beta + \mu\delta) \in F$.
Ainsi, F est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$.
La famille $(X^3, X, 1)$ est une base de F.

$\boxed{2.}$ On a $G = \{(x, \frac{t-x}{2} - 1, 4 - 5t, t) \mid x, t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -\frac{1}{2}, 4, 0), (0, \frac{1}{2}, -5, 1))$.
La famille $(1, -\frac{1}{2}, 4, 0), (0, \frac{1}{2}, -5, 1)$ est une base de G.

Exercice 17: ♦◊◊

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit pour tout $k \in [\![0, n]\!], P_k = \sum_{i=0}^{k} X^i$.
Démontrer que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Quelles sont les coordonnées de $1_{\mathbb{R}[X]}$ dans cette base ? et celles de X^n ?

Solution :

On sait que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre comme famille de polynomes de degrés deux-à-deux distincts.
Montrons que c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\exists (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Alors $P = a_n P_n + (a_{n-1} - a_n)P_{n-1} + ... + (a_0 - ... - a_n)P_0$. Donc $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est génératrice.
Ainsi, $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Les coordonnées de $1_{\mathbb{R}[X]}$ dans cette base sont $(1, 0, ..., 0)$ et celles de X^n sont $(0, ..., -1, 1)$.

Exercice 18: ♦♦◊

Soit $(x_1, ..., x_n)$ un n-uplet de réels deux-à-deux distincts et $(L_1, ...L_n)$ leurs polynômes de Lagrange.
Montrer que $(L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Donner les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

Solution :

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k = 0$.
Alors $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k = 0$.
Ainsi, $(L_1, ..., L_n)$ est libre.
C'est une famille libre de n vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.