Développements limités

Introduction.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Si f est dérivable en a, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a), \text{ ce qui se récrit } \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{=} f'(a)+o(1).$$

Multiplions par x : on obtient

$$f(x)-f(a) \underset{a}{=} f'(a)(x-a)+o(x-a),$$

et enfin

$$f(x) \underset{a}{=} \underbrace{f(a)+f'(a)(x-a)}_{\text{fonction affine}} \quad + \underbrace{o(x-a)}_{\text{négligeable}},$$

ou encore

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a)+f'(a)h \quad +o(h),$$

On a donc obtenu une approximation de la fonction f au voisinage de a par une fonction polynomiale de degré inférieur à 1. Dans ce cours, on cherche à généraliser ce genre d'approximation : on cherchera à approximer une fonction f par une fonction polynomiale de degré quelconque.

DL (Avant-première : le développement limité du sinus en 0 à l'ordre 3)**.**

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Ce type de résultat va offrir de nouveaux outils pour les études locales et asymptotiques de fonctions (et donc de suites par substitution...)

Par exemple, $\dfrac{\sin x - x}{x^3} = \dfrac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = -\dfrac{1}{6}+o(1)$, ce qui amène une convergence hors de portée jusqu'alors

$$\frac{\sin x - x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}.$$

1 Existence de développements limités.

Dans cette partie, on considère un intervalle I non vide et non réduit à un point, et a un nombre réel, élément ou borne de I. La fonction f est définie sur I, sauf peut-être en a. Elle est en tout cas définie au voisinage de a. L'écriture $f(a+h)$ aura donc toujours un sens pour un certain h au voisinage de 0.

1.1 Notion de développement limité en a.

Définition 1.

On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de a ($\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Proposition 2 (se ramener à 0)**.**

La fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, c'est-à-dire s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o\left(h^n\right).$$

Exemples. $\mathrm{DL}_1(2)$ de ln ; $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

DL.

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Proposition 3 (Unicité d'un DL en a)**.**

Supposons que f admette au voisinage de a deux développements limités

$$\begin{cases} f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o\left(h^n\right) \\ f(a+h) \underset{0}{=} b_0 + b_1 h + \ldots + b_n h^n + o\left(h^n\right) \end{cases} \quad \text{Alors, } \begin{cases} a_0 = b_0 \\ \quad \ldots \\ a_n = b_n. \end{cases}$$

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelée **partie régulière** du DL de f en a à l'ordre n.

Proposition 4 (Parité/Imparité et DL en 0).

Si une fonction paire admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, ses coefficients d'ordre impair sont nuls.
Si une fonction impaire admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, ses coefficients d'ordre pair sont nuls.

Proposition 5 (Troncature).

Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, de partie régulière $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la fonction f admet un $\mathrm{DL}_p(a)$ de partie régulière $x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.

Proposition 6 (DL à l'ordre 1 et dérivabilité).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes.

1. f est dérivable en a.
2. Il existe deux réels a_0, a_1 tels que

$$\forall x \in I \quad f(a+h) \underset{a}{=} a_0 + a_1 h + o(h).$$

Dans le cas où 2 est vraie, alors nécessairement, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) sera généralisée à un ordre plus grand par la formule de Taylor-Young, qui nous dira que si on a suffisamment de régularité en a, on y a un DL.
En revanche, l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) ne se généralise pas aux ordres plus grands que 2 : voir le TD pour un exemple de fonction admettant un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'étant pas deux fois dérivable en 0.

1.2 Primitivation d'un développement limité.

Proposition 7 (Primitivation d'un DL).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et a un élément de I.
On suppose que f' admet un DL à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a : $\exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$f'(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o\left(h^n\right).$$

Alors, f admet un DL à l'ordre $n+1$ au voisinage de a et

$$f(a+h) \underset{0}{=} \boxed{f(a)} + a_0 h + \frac{a_1}{2} h^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} h^{n+1} + o\left(h^{n+1}\right).$$

On a encadré la « constante d'intégration » : on tâchera de ne pas l'oublier lorsqu'on primitive un DL... surtout lorsqu'elle n'est pas nulle ! ;)

Exemple 8.

En partant du DL en 0 au premier ordre de tan obtenir celui à l'ordre 3.
Utiliser le DL obtenu pour en déduire celui à l'ordre 5.

DL.

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \quad = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

DL.

$$\arctan(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

1.3 Formule de Taylor-Young et DL usuels.

Théorème 9 (Formule de Taylor-Young)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et $a \in I$. Alors, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a :

$$f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o\left(h^n\right).$$

DL.

$$\exp(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).$$

Méthode.

Il faut connaître les DL usuels à l'ordre n. On saura à la fois

— écrire la forme dépliée $e^x = {}^0\!\!=1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$, qui dans la pratique est généralement écrite et utilisée pour $n \in \{1, 2, 3\}$.

— écrire la somme et les coefficients sous leur forme générale : ces coefficients seront à savoir en spé dans le cours sur les séries entières, de toute façon.

DL.

$$\cos x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2p+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2p+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+2}).$$

Exemple 10.

Donner le $\mathrm{DL}_2(\pi/4)$ de cos

- en se ramenant en 0.
- en utilisant la formule de Taylor-Young,

DL (Pour un réel α fixé)**.**

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k + o(x^n)\\ &\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, le DL de $(1+x)^\alpha$ donne

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).}$$

De même, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).}$$

Remarque. Pour un réel α et un entier naturel k non nul, on note parfois

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

On note aussi $\binom{\alpha}{0} = 1$. Ce nombre est alors appelé "coefficient binomial généralisé". On peut ainsi écrire

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n).$$

Lorsque α est un entier naturel, on retrouve la formule du binôme avec un négligeable nul.

⚠ On n'utilisera pas le DL de $(1+x)^\alpha$ lorsque l'exposant dépend de x ! Exemple typique : $(1+\frac{1}{n})^n$.

2 DL et opérations.

Par définition, un DL en a pour une fonction f est un DL en 0 pour $h \mapsto f(a+h)$. C'est donc au voisinage de ce point qu'on énonce tous les résultats de cette section. Dans les énoncés des propositions ci-dessous, les fonctions f et g sont supposées définies au voisinage de 0, sauf peut-être en ce point.

Somme.

Proposition 11.

Sommer un $DL_n(0)$ pour f et un $DL_p(0)$ pour g donne un $DL_q(0)$ pour $f+g$, où $q = \min(p,q)$. Les coefficients de la somme sont la somme des coefficients.

DL.

$$\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2p}\right) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p+1}\right).$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2p+2}\right) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+2}\right).$$

Produit.

Proposition 12.

Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors $f \times g$ aussi.

Preuve. Supposons qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n$ ainsi que $b_0, b_1, \dots, b_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o(x^n).$$

Notons $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ respectivement les parties régulières dans le DL à l'ordre n de f et g. On a

$$f(x) \times g(x) = (P(x) + o(x^n))\,(Q(x) + o(x^n)) = P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^{2n}).$$

On a $o(x^{2n}) = o(x^n)$. De plus, les fonctions P et Q sont continues en 0 donc y sont bornées. On a donc $P(x)o(x^n) = o(x^n)$ et $Q(x)o(x^n) = o(x^n)$. On a donc

$$f(x) \times g(x) = P(x)Q(x) + o(x^n).$$

La fonction polynomiale PQ est de degré inférieur à $2n$. Pour obtenir la partie régulière à l'ordre n de notre DL, il reste à tronquer à l'ordre n pour obtenir la fonction polynomiale R. On a alors

$$f(x) \times g(x) = R(x) + o(x^n).$$

Notons $R = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, c_k est le coefficient devant X^k du produit PQ : on rappelle que

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

□

Exemple 13 (Première et dernière fois qu'on développe un produit de DL jusqu'au bout)**.**

Calculer naïvement le DL à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{e^x}{1-x}$ en écrivant tous les termes, puis souligner en rouge les termes qu'il était inutile de calculer.

Méthode (Calcul malin d'un produit de DL)**.**

Lorsqu'on développe le produit de deux développements limités d'ordre n, les termes d'ordre supérieur à $n+1$ ne sont pas écrits. On les remplace au fur et à mesure du calcul par $o(x^n)$.

Considérons le produit d'un DL de f et d'un DL de g en visant un DL final à l'ordre n.
Si le premier terme non nul de f est d'ordre $p \in [\![0, n]\!]$, il suffit d'utiliser un DL de g à l'ordre $n-p$; on rappelle en effet que $x^p \times o(x^{n-p}) = o(x^n)$.

Exemples 14.

$\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x} \cdot e^x$, $\qquad$ $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $\qquad$ $\mathrm{DL}_6(0)$ de $x \mapsto (1-\cos x)\sin x$.

Quotient. Voici un quotient de DL en 0 dans lequel on a factorisé les premiers termes non nuls :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m}{b_n x^n} \cdot \frac{1 + c_1 x + \ldots + c_p x^p + o(x^p)}{1 + d_1 x + \ldots + d_q x^q + o(x^q)}.$$

$\boxed{\text{L'idée}}$: on peut alors calculer le développement limité à l'ordre q de

$$\frac{1}{1 + d_1 x + \ldots + d_q x^q + o(x^q)} \quad \boxed{\text{à l'aide de celui de } \frac{1}{1+u}} \quad \text{en posant } u(x) = d_1 x + \ldots + d_q x^q + o(x^q)$$

et d'une substitution. Il restera à faire un produit de DL : on obtient alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \left(1 + e_1 x + \ldots e_r x^r + o(x^r)\right), \qquad \text{où } r = \min(p, q)$$

DL.

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{th}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Exemple 15.

$$\mathrm{DL}_2(0) \text{ de } x \mapsto \frac{\sin x}{\ln(1+x)}.$$

Composée.

Exemple 16.

$$\mathrm{DL}_8(0) \text{ de } x \mapsto \cos(x^2). \qquad \mathrm{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \sin\left(\ln(1+x)\right).$$

3 Applications des développements limités.

Dans les deux prochains paragraphes, la fonction f est supposée définie au voisinage de a sauf peut-être en a.

3.1 Calcul de limite, d'équivalent.

Méthode (Limite ?/ Prolongeable par continuité ?/Continue ?).

L'existence d'une limite est équivalente à celle d'un DL à l'ordre 0. Plus précisément, pour $a_0 \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} a_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1).$$

On cherchera notamment à écrire des DL à l'ordre 0 pour prouver qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point.
Si de surcroît f est définie en a, elle y est continue ssi elle admet en a un DL à l'ordre 0.

Exemple 17 (L'exemple de l'introduction).

On a $\frac{\sin x - x}{x^3} \underset{0}{=} -\frac{1}{6} + o(1)$. On en déduit

$$\frac{\sin x - x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}.$$

Exemple 18 (Un exemple du cours précédent).

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. En écrivant des DL à l'ordre 1, on avait obtenu

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \underset{0}{=} \exp\left(\ln(\sqrt{ab}) + o(1)\right). \qquad \text{On en déduit} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}.$$

Exemple 19 (Fil rouge (1/3)).

Montrer que

$$f : x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x},$$

est prolongeable par continuité en 0.

Méthode (Obtenir un équivalent à partir d'un DL).

Un DL peut nous aider à obtenir une écriture du type

$$f(a+h) \underset{0}{=} a_p h^p + o(h^p),$$

avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \neq 0$ (c'est le premier coefficient non nul du DL). On sait alors que

$$f(x) \underset{a}{\sim} a_p (x-a)^p.$$

Exemples 20.

Soient a et b deux réels. On pose

$$g : x \mapsto \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2},$$

définie au voisinage de 0.

1. Calculer un développement limité de g en 0 à l'ordre 6.
2. Donner un équivalent de g en 0 de la forme $g(x) \underset{0}{\sim} cx^n$ avec c et n à préciser (on discutera selon la valeur de a et b).

3.2 Étude locale d'une fonction.

Méthode (Dérivable ? / Équation de la tangente ?).

Si f est définie en a, d'après la proposition 6, montrer la dérivabilité en a revient à montrer l'existence d'un DL à l'ordre 1 en a. L'écriture

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a),$$

implique que f est dérivable en a et que l'on a $f(a) = a_0$ et $f'(a) = a_1$.
La courbe de f admet alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ comme tangente en a.

Exemple 21 (Fil rouge (2/3)).

Reprenons

$$f : x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

— Démontrer que f est prolongeable en 0 en une fonction dérivable en 0.
— Pour prouver que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$, que faudrait-il faire ?

Méthode (Positions relatives du graphe et de la tangente).

Supposons que l'on dispose d'un DL de la forme

$$f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_p h^p + o(h^p),$$

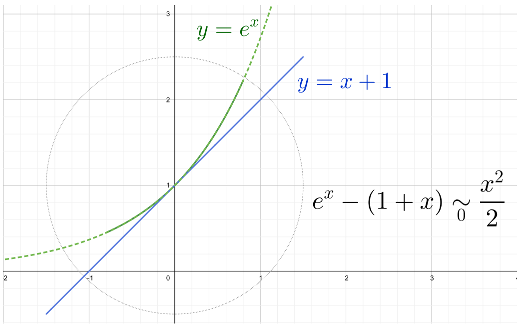
où a_p désigne le premier coefficient non nul après l'ordre 1.
Alors, le graphe de f admet au point a une tangente d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$, et on a

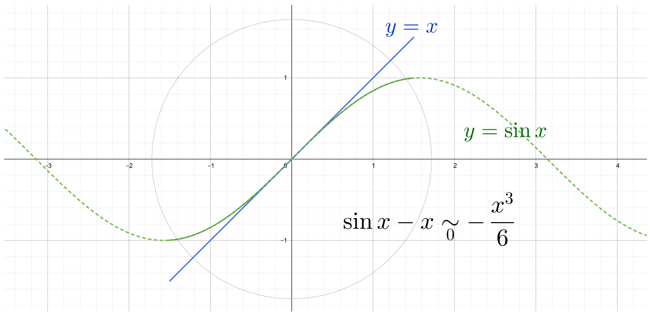
$$f(a+h) - (a_0 + a_1 h) \underset{0}{\sim} a_p h^p.$$

Au voisinage de a, la différence entre f et sa tangente est du signe de $a_p h^p$. Plus précisément,

- Si p est pair, on constate que le graphe est *au-dessus* de sa tangente au voisinage de a si $a_p > 0$, *en-dessous* si $a_p < 0$.
- Si p est impair, on constate un **point d'inflexion** : les positions relatives du graphe et de la tangente sont *opposées de part et d'autre* de a (dépend du signe de a_p).

Deux exemples immédiats pour lesquels on connaît déjà les positions relatives : exp et sin.





Exemple. Fil rouge (3/3) : Comparer $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ à sa tangente au voisinage de 0.

Proposition 22 (DL d'ordre 2 et extremum local).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément à l'*intérieur* de I ($a \in I$ n'est pas une borne de I).

- Supposons que f admet un DL à l'ordre 1 en a :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + o(h).$$

  Pour que f admette un extremum local en a, il est **nécessaire** que a_1 soit nul.
  Il est équivalent de dire que si f est dérivable en un point a intérieur à son ensemble de définition, et y possède un extremum, alors a est un point critique : $f'(a) = 0$.

- Supposons que f admet un DL à l'ordre 2 en a :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + o\left(h^2\right)$$

  Pour que f admette un extremum local en a, il est **suffisant** que $a_1 = 0$ et que $a_2 \neq 0$.
  — si $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, f admet en a un minimum local,
  — si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, f admet en a un maximum local.

Exercices

Manipuler les DL usuels

30.1 **[♦◇◇]** Donner, pour chacune des fonctions suivantes, le développement limité au point 0 à l'ordre 3.

$$a : x \mapsto \ln(1+x) + e^{-x} \quad b : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \quad c : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2} \quad d : x \mapsto \frac{1}{2+x}.$$

30.2 **[♦◇◇]** Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \exp(x)\sin(x)$ et de $x \mapsto (\ln(1-x))^2$.

30.3 **[♦♦◇]** Donner le développement limité au point 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

30.4 **[♦♦◇]** Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ et $g : x \mapsto \arctan(e^x)$.

1. Donner un DL de f en 0 à l'ordre 2.
2. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire un DL de g en 0 à l'ordre 3.

30.5 **[♦♦◇]** À l'aide du théorème de primitivation, donner le DL de arcsin en 0 à l'ordre 5.

30.6 **[♦♦◇]** Calculer le DL à l'ordre 10 en 0 de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$.

30.7 **[♦♦♦]** Donner le DL à l'ordre 100 au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln \displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}$.

Formule de Taylor-Young

30.8 **[♦◇◇]** Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et x_0 un réel de l'intervalle I. Montrer que la limite suivante existe et la calculer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$

30.9 **[♦♦◇]** Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$. Calculer pour k dans $[\![0,5]\!]$ la valeur de $f^{(k)}(0)$.

30.10 **[♦♦◇]** [La régularité offre des DL mais la réciproque n'est pas vraie]
Soit $f : x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$, prolongée par continuité en 0.

1. Justifier qu'elle admet un DL à l'ordre 2 en 0.
2. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0.
3. Expliquer le titre de l'exercice.

30.11 **[♦♦♦]**

1. Donner le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en 0 à l'ordre $2n$, où $n \in \mathbb{N}$.
   On exprimera les coefficients à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{2k}{k}$.
2. En déduire une expression de $\arcsin^{(2n+1)}(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent de $\arcsin^{(2n+1)}(0)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

30.12 **[♦♦♦]** Montrer que $f : x \mapsto xe^{x^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
Justifier l'existence d'un DL à l'ordre 4 de f^{-1} en 0 et le calculer.

Applications du calcul de développements limités

30.13 **[♦♦♢]** Calculer le DL à l'ordre 2 en zéro de la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$. En déduire la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

30.14 **[♦♦♢]** Calculer les limites ci-dessous, si elles existent :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3\cdot 2^{\frac{1}{n}}-2\cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)^n\ ;\quad \lim_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{x+1}{x}}-(x-1)^{\frac{x}{x-1}}.$$

30.15 **[♦♢♢]** Donner un équivalent de $(1+\frac{1}{n})^{n^2}$.

30.16 **[♦♢♢]** Calculer un équivalent de $e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}$.

30.17 **[♦♦♢]** Donner un équivalent simple en 0 de $f(x)=x^x-\sin(x)^{\sin(x)}$.

30.18 **[♦♦♢]** Montrer que le graphe de $f : x \mapsto x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ admet une asymptote en $+\infty$; on précisera l'équation de cette droite ainsi que la position du graphe par rapport à l'asymptote.

30.19 **[♦♦♢]** Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, prolongée par continuité en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

30.20 **[♦♦♦]** Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

30.21 **[♦♦♦]** Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}] \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=\sin(u_n).\end{cases}$

1. Justifier que u est bien définie.
2. Démontrer que u tend vers 0.
3. Démontrer que la suite v définie par $v_n=\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}$ converge et préciser sa limite.
4. À l'aide du théorème de Cesáro, donner un équivalent de $\frac{1}{u_n^2}$, puis de u_n.

30.22 **[♦♦♦]**

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x+e^x=n$ admet une unique solution réelle notée x_n.
2. Établir le développement asymptotique :

$$x_n=\ln n-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

30.23 **[♦♦♦]** [Recollement des solutions d'une équation différentielle]
Résoudre <u>sur $\mathbb{R}$</u> l'équation différentielle $x(x^2+1)y'+2(x^2+1)y=x$.

30.24 **[♦♦♦]** Soit $f : x \mapsto \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)^x$.
Donner un développement asymptotique au voisinage de 1 où figurent tous les termes tendant vers $+\infty$.
