

Primitives et intégrales

Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

MRC AMINE POUR L'EXO 8.8

Exercices.

Exercice 8.1	2
Exercice 8.2	2
Exercice 8.3	3
Exercice 8.4	3
Exercice 8.5	4
Exercice 8.6	4
Exercice 8.7	4
Exercice 8.8	5
Exercice 8.9	6
Exercice 8.10 (W.I.P)	6
Exercice 8.11 (W.I.P)	6
Exercice 8.12	7
Exercice 8.13	7
Exercice 8.14 (W.I.P)	8
Exercice 8.15	9
Exercice 8.16	11

Exercice 8.1 [◆◆◆]

Donner les primitives des fonctions suivantes (on précisera l'intervalle que l'on considère).

$$\begin{aligned} a : x \mapsto \cos x e^{\sin x}; \quad b : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}; \quad c : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}; \quad d : x \mapsto \frac{1}{3x+1}; \\ e : x \mapsto \frac{\ln x}{x}; \quad f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}; \quad g : x \mapsto \sqrt{3x+1}; \quad h : x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\sin x} + c \end{cases}; \quad B : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\sin x) + c \end{cases}; \\ C : \begin{cases}]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\sqrt{\sin x} + c \end{cases}; \quad D : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3} \ln(3x+1) + c \end{cases}; \\ E : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \ln^2 x + c \end{cases}; \quad F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln x) + c \end{cases}; \\ G : \begin{cases} [-\frac{1}{3}, +\infty] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c \end{cases}; \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + c \end{cases}. \end{aligned}$$

Avec c les constantes d'intégration.

□

Exercice 8.2 [◆◆◆] Issu du cahier de calcul

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1. Sans chercher à les calculer, donner le signe des intégrales suivantes.

$$\int_{-2}^3 e^{-x^2} dx; \quad \int_5^{-3} |\sin x| dx; \quad \int_1^a \ln^7(x) dx (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

2. En vous ramenant à des aires, calculer de tête

$$\int_1^3 7dx; \quad \int_0^7 3xdx; \quad \int_{-2}^1 |x|dx.$$

1.

La première est positive car $-2 < 3$ et la fonction est positive sur $[-2, 3]$.

La seconde est négative car $5 > -3$ et la fonction est positive sur $[-3, 5]$.

La dernière est positive lorsque $a \geq 1$ et négative lorsque $a \leq 1$ car \ln^7 est positive sur $[1, +\infty[$.

2.

La première vaut $2 \times 7 = 14$.

La seconde vaut $\frac{7^2 \times 3}{2} = \frac{147}{2}$.

La dernière vaut $\frac{1}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 2.5$

□

Exercice 8.3 [◆◆◆]

Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{x}dx, \quad I_2 = \int_{-1}^1 2^x dx, \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln^3(t)}{t} dt, \quad I_4 = \int_0^1 \frac{x}{2x^2+3} dx,$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2+3} dx, \quad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx, \quad I_7 = \int_0^\pi |\cos x| dx, \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx.$$

$$I_1 = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad I_2 = \left[\frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{\ln 2}, \quad I_3 = \left[\frac{\ln^4 t}{4} \right]_1^e = \frac{1}{4},$$

$$I_4 = \left[\frac{1}{4} \ln(2x^2+3) \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{5}{3} \right) \right), \quad I_5 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\sqrt{\frac{2}{3}} x \right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right),$$

$$I_6 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} [-2 \sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad I_7 = [2 \sin x]_0^\pi = 2,$$

$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \cos x \sin^2(x) dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x + \tan x - \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (\tan^2 x + 1) dx - \frac{\ln 2}{2} = \left[\frac{1}{2} \tan^2(x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\ln 2}{2}$$

$$= \frac{1 - \ln 2}{2}$$

□

Exercice 8.4 [◆◆◆]

Calculer le nombre $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

1. À l'aide d'une IPP.
2. À l'aide du changement de variable $x = t^2$.

$$1. \quad \int_1^2 \ln x \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = [\ln x \cdot 2\sqrt{x}]_1^2 - 2 \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{2} \ln 2 - 2 [2\sqrt{x}]_1^2 = 2\sqrt{2}(\ln 2 - 2) + 4$$

- 2.

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln t^2}{t} 2t dt = 4 \int_1^{\sqrt{2}} \ln(t) dt = 4 [t \ln t - t]_1^{\sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$$

□

Exercice 8.5 [◆◆◆]

Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}} dt \quad \text{en posant } t = u^2.$$

On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{1}{(u^2+1)u} 2u du = 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2+1} du = 2 [\arctan(u)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

□

Exercice 8.6 [◆◆◆]

Calculer

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1} dt \quad \text{en posant } u = t^5.$$

On a :

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1} dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{5}t^5}{t^5+1} 5t^4 dt = \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{u}{u+1} du = \frac{1}{5} \int_0^1 1 - \frac{1}{u+1} du = \frac{1}{5} (1 - \ln 2)$$

□

Exercice 8.7 [◆◆◆]En posant le changement de variable $u = \tan(x)$, calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+\cos^2(\arctan(u))} \cdot \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \int_0^1 \frac{1+u^2}{(2+u^2)(1+u^2)} du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2+u^2} du \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

□

Exercice 8.8 [◆◆◆]

On pose

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

1. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, prouver que $C = S$.
2. Calculer $C + S$, en déduire la valeur commune de ces deux intégrales.

1. En posant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, on a :

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} (-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\cos(u) + \sin(u)} du \end{aligned}$$

Ainsi, $C = S$.

2. On a :

$$\begin{aligned} C + S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $C = S = \frac{\pi}{4}$.

□

Exercice 8.9 [◆◆◆]

On considère les deux intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1 + \sin(2t)}} dt \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1 + \sin(2t)}} dt$$

1. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - t$ calculer $I + J$.
2. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ montrer que $I = J$.
3. En déduire I et J .

1. On a :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\sqrt{1 + \sin(2t)}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - u) + \sin(\frac{\pi}{4} - u)}{\sqrt{1 + \cos(2u)}} du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos(u)}{\sqrt{2 \cos^2(u)}} du = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos(u)}{\sqrt{2} |\cos(u)|} du = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. On a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1 + \sin(2t)}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sqrt{1 + \sin(\pi - u)}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sqrt{1 + \sin(u)}} du = J$$

3. On a $2I = 2J = I + J = \frac{\pi}{2}$. Donc $I = J = \frac{\pi}{4}$.

□

Exercice 8.10 [◆◆◆]

Que vaut

$$\int_{-666}^{666} \ln \left(\frac{1 + e^{\arctan(x)}}{1 + e^{-\arctan(x)}} \right) dx ?$$

Exercice 8.11 [◆◆◆]

Le but de cet exercice est de calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

1. Justifier que l'équation $\text{sh}(x) = 1$ possède une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α .

Exprimer α à l'aide de la fonction \ln .

2. Calculer J en posant $x = \text{sh}(t)$. On exprimera le résultat en fonction de α .
3. À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une équation reliant I et J .
4. En déduire une expression de I en fonction de α .

Exercice 8.12 [◆◆◆]

Calculer $\int_0^1 \arctan(x^{1/3})dx$ en posant d'abord $x = t^3$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(x^{\frac{1}{3}})dx &= \int_0^1 \arctan(t) \cdot 3t^2 dt \\ &= [\arctan(t) \cdot t^3]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 t dt + \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(2) \\ &= \frac{1}{4} (\pi - 2 + \ln(4))\end{aligned}$$

□

Exercice 8.13 [◆◆◆]

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$ en posant $x = \frac{\pi}{4} - u$.

On a :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan u}\right) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan u) du = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I\end{aligned}$$

On en déduit que $2I = \frac{\pi}{4} \ln 2$. Ainsi, $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$

□

Exercice 8.14 [◆◆◇] Les intégrales de Wallis

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le nombre

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

2. Démontrer les égalités suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 8.15 [◆◆◆]

Pour tous entiers naturels p et q , on note

$$I(p, q) := \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Avec un changement de variable, démontrer que $I(p, q) = I(q, p)$.

2. À l'aide de l'intégration par parties, démontrer

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p+1)I(p, q+1) = (q+1)I(p+1, q).$$

3. (a) Calculer $I(p, 0)$ pour un entier p donné.

(b) Démontrer enfin que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

1. Changement de variable : $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 t^p (1-t)^q dt = - \int_1^0 (1-u)^p u^q du = \int_0^1 u^q (1-u)^p du$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \int_0^1 t^p (1-t)^{q+1} dt = \left[\frac{1}{p+1} t^{p+1} \cdot (1-t)^{q+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1} t^{p+1} \cdot -(q+1)(1-t)^q dt \\ &= \frac{q+1}{p+1} \int_0^1 t^{p+1} (1-t)^q dt = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) \end{aligned}$$

Donc on a bien $(p+1)I(p, q+1) = (q+1)I(p+1, q)$.

3. (a) On a :

$$I(p, 0) = \int_0^1 t^p dt = \left[\frac{1}{p+1} t^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

(b) Soit \mathcal{P}_q la proposition $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Montrons que \mathcal{P}_q est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $q = 0$, on a $I(p, q) = \frac{1}{p+1}$ et $\frac{p!q!}{(p+q+1)!} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}$. \mathcal{P}_0 est vérifiée.

Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$ fixé tel que \mathcal{P}_q soit vraie. Montrons \mathcal{P}_{q+1} .

On a :

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) = \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!} \\ &= \frac{(p+1)!(q+1)!}{(p+1)(p+q+2)!} = \frac{p!(q+1)!}{(p+(q+1)+1)!} \end{aligned}$$

C'est exactement \mathcal{P}_{q+1} .

Conclusion : Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_q est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 8.16 [◆◆◆]

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que $J_n = 2I_n + nI_{n-1}$ est indépendant de n . Déterminer sa valeur.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis, en utilisant la question 2., démontrer l'encadrement

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

1. On a :

$$I_0 = \int_1^e x dx = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

$$I_1 = \int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e x \ln^n x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln^n x \right]_1^e - \frac{n}{2} \int_1^e x \ln^{n-1} x dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $2I_n = e^2 - nI_{n-1}$.

Ainsi, $J_n = 2I_n + nI_{n-1} = e^2$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x \ln^{n+1} x dx - \int_1^e x \ln^n x dx = \int_1^e x \ln^n x (\ln x - 1) dx$$

Or, pour $x \in [1, e]$, $\ln x \in [0, 1]$ donc $\ln x - 1 \leq 0$. Ainsi, $x \ln^n x (\ln x - 1) \leq 0$.

On en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et donc que (I_n) est décroissante.

Montrons que $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$:

$$\begin{aligned} I_n &\leq I_{n-1} \\ \iff nI_n &\leq nI_{n-1} \\ \iff (n+2)I_n &\leq 2I_n + nI_{n-1} \\ \iff I_n &\leq \frac{e^2}{n+2} \end{aligned}$$

Montrons que $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &\leq I_n \\ \iff (n+1)I_{n+1} &\leq (n+1)I_n \\ \iff (n+3)I_{n+1} &\leq 2I_{n+1} + (n+1)I_n \\ \iff I_{n+1} &\leq \frac{e^2}{n+3} \iff \frac{e^2}{n+3} \leq I_{n+1} \leq I_n \end{aligned}$$

4. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{n+3} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{n+2} = 0$$

Ainsi, d'après le Sandwich Theorem, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

On a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^2}{n+3} = e^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^2}{n+2} = e^2$$

Ainsi, d'après le Théorème de l'Étau, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e^2$$

□