Équations Différentielles Linéaires d'ordre 1

Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Ibrahim pour 11.1, 11.2, 11.3

Exercices.

Je rédige pas la variation de la constante parce que c'est trop long et toujours la même chose allez lire votre cours

Exercice 11.1 [♦◇◇]

Résoudre les équations différentielles ci-dessous

1. $y' - 2y = 2$ sur $\mathbb{R}$ 2. $(x^2+1)y' + xy = x$ 3. $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. $y' - \ln(x)y = x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ 5. $(1-x)y' - y = \frac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$

1. Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
Solution particulière, avec y constante : $S_p : x \mapsto -1$.
Ensemble de solutions : $S = \{\lambda e^{2x} - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. L'équation se réecrit comme $y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
Solution particulière : $S_p : x \mapsto 1$ est solution évidente.
Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3.Soit $I = \ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda \cos x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I. On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution } &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x) \\ &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = 2\sin(x) \\ &\iff \lambda = -2\cos \end{aligned}$$

Ainsi, $z = -2\cos^2$.
Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \lambda \cos x - 2\cos^2 x \ \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
4. Soit $I = \mathbb{R}_+^*$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda \frac{x^x}{e^x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I. On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution } &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x)\frac{x^x}{e^x} = x^x \\ &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x) = e^x \\ &\iff \lambda = e^{\cdot} \end{aligned}$$

Ainsi, $z : x \mapsto x^x$
Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \lambda \frac{x^x}{e^x} + x^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
5. Soit $I =]-\infty, 1[$. L'équation se réecrit comme $y' - \frac{1}{1-x}y = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I. On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution } &\iff \forall x \in I,\ \frac{\lambda'(x)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \frac{1}{1-x} \\ &\iff \forall x \in I,\ \lambda(x) = -\ln(1-x) \end{aligned}$$

Ainsi, $z : x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.
Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

□

Exercice 11.2 [♦◊◊]

Résoudre sur R_+^* le problème de Cauchy $\begin{cases} y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$.

Solution homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda x^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I. On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution } &\iff \forall x \in I\ \lambda'(x)x^2 = x^2\cos x \\ &\iff \forall x \in I\ \lambda'(x) = \cos x \\ &\iff \lambda = \sin \end{aligned}$$

Ainsi, $z : x \mapsto x^2 \sin x$.
Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \lambda x^2 + x^2\sin x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
Conditions initiales : Soit $y \in S$. On a :

$$\begin{aligned} y(\pi) = 0 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda\pi^2 + \pi^2\sin(\pi) = 0 \\ &\iff \lambda\pi^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \end{aligned}$$

L'unique solution de ce problème de Cauchy est donc : $y : x \mapsto x^2\sin x$.

□

Exercice 11.3 [♦♦◊]

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)dt$$

Analyse.

On suppose qu'il existe y dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de cette équation.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
En dérivant l'égalité, on obtient : $y''(x) + y'(x) = 0$. On pose $g(x) = y'(x)$.
On a : $g'(x) + g(x) = 0$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Ainsi, $g \in S$ et $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x) = -\lambda e^{-x} + \mu$.
On a :

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)dt &\iff \lambda e^{-x} - \lambda e^{-x} + \mu = \left[\lambda e^{-t} + \mu t\right]_0^1 \\ &\iff \mu = \lambda e^{-1} + \mu - \lambda \\ &\iff \lambda(e^{-1} - 1) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\{x \mapsto \mu \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.
Synthèse.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R} \mid y(x) = \mu$. On a $y'(x) + y(x) = \mu$ et $\int_0^1 y(t)dt = \int_0^1 \mu dt = \mu$

□

Exercice 11.4 [♦♦♦] «Recollement»

Soit l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.
1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Trouver toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$

1. On se ramène à l'équation : $y' - \frac{1}{x^2}y = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble de solutions $S_+ = \{x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{x}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, l'ensemble de solutions $S_- = \{x \mapsto \mu e^{-\frac{1}{x}} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.
2. Une solution de y sur $\mathbb{R}$ est solution sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ \mu e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

On a :

$$\mu e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^-]{} +\infty \quad \text{et} \quad \lambda e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

Donc y est prolongeable en 0 si et seulement si $\mu = 0$. On a alors $y(0) = 0$.
On a :

$$\text{x} > 0 : \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{\lambda e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -\lambda \left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \ c.c.$$
$$\text{x} < 0 : \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

Donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$.
La fonction est alors continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $0^2y'(0) - y(0) = 0$, l'équation est donc satisfaite en 0.
Les solutions sont donc les fonctions :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

□