

D17 – Filtrage

Correction

Exercice 1 – Impédance d'entrée d'un oscilloscope

1. On a

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_0}{1 + jR_0C_0\omega}.$$

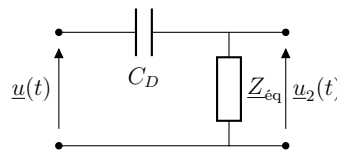
2. Les tensions u et u_1 sont mesurées entre les mêmes nœuds, de sorte que

$$u_1 = u.$$

La fonction de transfert correspondant au couplage DC est donc

$$\underline{H}_{\text{DC}}(j\omega) = \frac{u_1}{u} = 1.$$

3. Avec l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$, le circuit devient



On reconnaît un pont diviseur de tension car l'intensité du courant sortant du filtre est nulle. On en déduit (...)

$$u_2 = \frac{jR_0C_D\omega}{1 + jR_0(C_D + C_0)\omega} u,$$

d'où

$$\underline{H}_{\text{AC}}(j\omega) = \frac{jR_0C_D\omega}{1 + jR_0(C_D + C_0)\omega}.$$

Dans la limite où $C_D \gg C_0$, on a $C_D + C_0 \approx C_D$, d'où

$$\underline{H}_{\text{AC}}(j\omega) \approx \frac{jR_0C_D\omega}{1 + jR_0C_D\omega}.$$

On en déduit finalement

$$\underline{H}_{\text{AC}}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{AC}}} \quad \text{et} \quad \omega_{\text{AC}} = \frac{1}{R_0C_D}.$$

4. On reconnaît la fonction de transfert d'un **filtre passe-haut du premier ordre**.

Pour un signal quelconque de fréquence 1 kHz, les fréquences de la composante fondamentale (1 kHz) et des harmoniques (des multiples entiers de 1 kHz) sont très grandes devant la fréquence de coupure du filtre (~ 10 Hz). Elles ne sont donc pas affectées par le filtre.

Seule la composante continue est coupée. C'est l'intérêt du couplage AC : éliminer la composante continue du signal mesuré. Bien sûr, si la fréquence du signal devient comparable ou inférieure à la fréquence de coupure du filtre, les composantes variables du signal seront aussi filtrées.

5. On a

$$G_{AC}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On peut réécrire le gain en divisant au numérateur et au dénominateur par x :

$$G_{AC}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

Le gain maximal est obtenu quand $x \rightarrow +\infty$, et vaut

$$G_{AC,\max} = 1.$$

La fréquence de coupure est telle que

$$G_{AC}(x_c) = \frac{G_{AC,\max}}{\sqrt{2}}, \quad \text{d'où} \quad x_c = 1.$$

Avec $x = \omega/\omega_{AC}$ et $\omega = 2\pi f$, on en déduit finalement la fréquence de coupure

$$f_{c,AC} = \frac{\omega_{AC}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_0 C_D}.$$

6. Sur la Fig. 1, on mesure l'amplitude des deux signaux. On trouve $U_1 = 2$ V et $U_2 \approx 1,4$ V, d'où $U_2/U_1 = 0,7 \approx 1/\sqrt{2}$. La fréquence du signal est donc très proche de la fréquence de coupure associée au couplage AC. On mesure la période du signal, qui vaut $T \approx 4,2 \times 20$ ms = 84 ms, ce qui correspond à une fréquence de 12 Hz. On en déduit donc

$$f_{c,AC} = 12 \text{ Hz.}$$

7. À la fréquence de coupure, on attend un déphasage du signal u_2 par rapport au signal u_1

$$\varphi(x_c) = \arg H_{AC}(jx_c) = \arg \left(\frac{j}{1+j} \right) = +\frac{\pi}{4}.$$

Sur la Fig. 1, on remarque que $u_2(t)$ est en avance par rapport à $u_1(t)$ de $\Delta t \approx 0,5 \times 20$ ms = 10 ms. Le déphasage de u_2 par rapport à u_1 vaut donc

$$\varphi = \frac{2\pi \Delta t}{T} = 0,75 \text{ rad} \approx \frac{\pi}{4}.$$

Ce résultat confirme que la mesure est réalisée à la fréquence de coupure du couplage AC.

8. On a

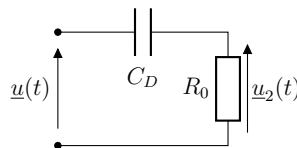
$$C_D = \frac{1}{2\pi R_0 f_{c,AC}}.$$

A.N. : $C_D = 13 \text{ nF} \gg 63 \text{ pF}$. La capacité C_D est environ 200 fois plus grande que C_0 , ce qui confirme l'hypothèse $C_D \gg C_0$.

9. Puisque le couplage DC a une fonction de transfert unitaire, le signal observé sur la voie 1 n'est pas modifié et correspond à la tension aux bornes du GBF. On peut interpréter l'allure du signal observé sur la voie 2 avec le couplage AC de deux manières.

Filtrage. Cette fois la fréquence du signal est de 2,4 Hz, ce qui est plus faible que la fréquence de coupure $f_{c,AC}$: le signal mesuré sur la voie 2 est donc filtré. La composante fondamentale et les premières harmoniques sont sensiblement atténuées alors que les harmoniques de rang élevé ne sont pas affectées. Or ces dernières sont associées aux variations rapides du signal : les discontinuités du signal carré sont transmises et on les retrouve dans le signal mesuré. Le signal carré est un signal constant par morceau, et les portions constantes sont filtrées.

Temporel. On assiste à une succession de charges et décharges du condensateur C_D , en mesurant l'intensité du courant à travers la résistance R_0 . En négligeant l'effet du condensateur C_0 devant celui de C_D , le circuit devient



et son temps caractéristique vaut $R_0 C_D = 13 \text{ ms}$, ce qui est cohérent avec le signal observé sur l'oscilloscope : on observe la réponse d'un circuit du premier ordre à un échelon.

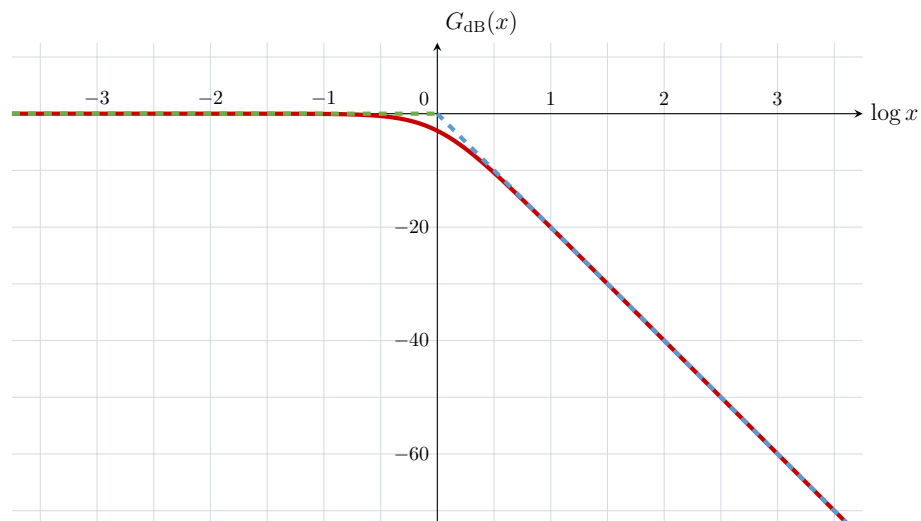
10. Cf. cours.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}, \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}.$$

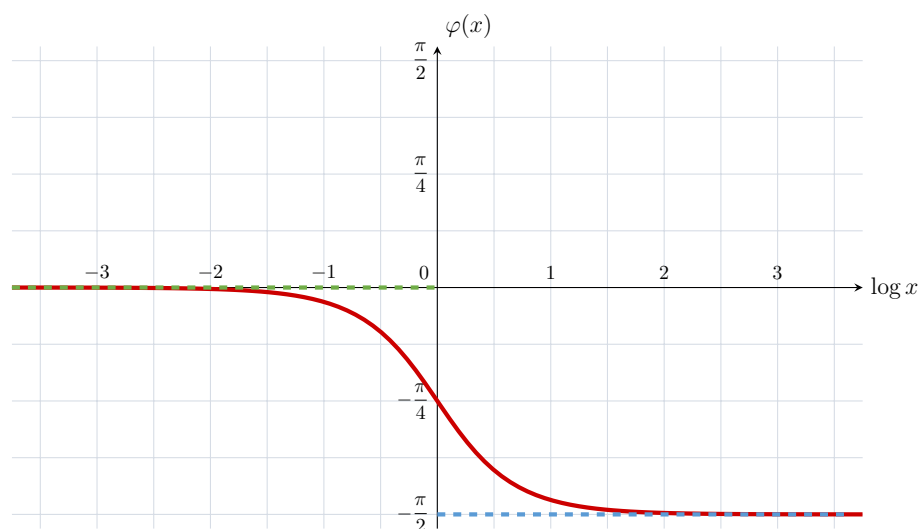
11. Cf. cours.

$$G_{\text{dB}}(x) \underset{\text{BF}}{\sim} 0 \text{ dB} \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}(x) \underset{\text{HF}}{\sim} -20 \log x,$$

ce qui correspond à une asymptote horizontale à 0 dB en BF et une asymptote de pente -20 dB/décade en HF pour le gain. De plus, $G_{\text{dB}}(1) = -3 \text{ dB}$.



La phase présente des asymptotes horizontales à 0 rad en BF et $-\pi/2$ en HF. De plus, $\varphi(1) = -\pi/4$.



Enfin

$$G_{\text{dB,max}} = 0 \text{ dB.}$$

12. Cf. cours.

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

A.N. : $f_c = 5,0 \text{ kHz}$ pour (a) et (b).

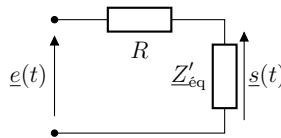
13. On procède comme d'habitude.

Composante	continue	fondamentale	harmonique
f (kHz)	0	5	50
$\log x$	$-\infty$	0	1
G_{dB} (dB)	0	-3	-20
G	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{10}$
φ (rad)	0	$-\frac{\pi}{4}$	$\sim -\frac{\pi}{2}$

On en déduit

$$s(t) = E + \frac{E}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E}{10} \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

14. On commence par simplifier le circuit de manière à faire apparaître un pont diviseur de tension.



On a

$$\underline{s}(t) = \frac{\underline{Z}'_{eq}}{R + \underline{Z}'_{eq}} \underline{e}(t).$$

Le calcul de \underline{Z}'_{eq} est le même que celui de \underline{Z}_{eq} à la question 1 en remplaçant R_0 par R et C_D par $C + C_0$ car la capacité équivalente de deux condensateurs en parallèle est la somme de leurs capacités. On en déduit (...)

$$\underline{H}'(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_c}}, \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{R_0}{R + R_0}, \quad \text{et} \quad \omega'_c = \frac{R + R_0}{RR_0(C + C_0)}.$$

Il s'agit toujours d'un **filtre passe-bas**.

15. On a désormais

$$G'_{dB,max} = 20 \log H_0 \quad \text{et} \quad f'_c = \frac{R + R_0}{2\pi RR_0(C + C_0)}.$$

A.N. : $G'_{dB,max} = -4,1 \times 10^{-2} \text{ dB} \approx 0 \text{ dB}$ et $f'_c = 5,0 \text{ kHz} = f_c$ pour (a) et $G'_{dB,max} = -4,5 \text{ dB} \neq 0 \text{ dB}$ et $f'_c = 3,6 \text{ kHz} \neq f_c$ pour (b).

Dans le cas (a), les caractéristiques du filtre ne sont presque pas modifiées. En effet, on a alors $R \ll R_0$ et $C \gg C_0$ ce qui permet de simplifier les expressions de H_0 et ω'_c . On retrouve

$$H_0 \approx 1 \quad \text{et} \quad \omega'_c \approx \omega_c.$$

L'influence de l'oscilloscope est négligeable avec ce choix de composants.

Dans le cas (b), l'influence de l'oscilloscope n'est pas négligeable car on a $R \approx R_0$ et $C \approx C_0$. L'intensité du courant en sortie du filtre n'est alors pas négligeable ce qui explique les écarts observés.