Exercice. Une partie bornée.

On note A la partie de $\mathbb{R}$ ci-dessous :

$$A = \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \ \middle|\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Justifier que A possède un minimum et donner sa valeur.
2. Justifier que A possède une borne supérieure et que $\sup(A) \leq 1$.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, montrer que
$$\lfloor \sqrt{p^2 - 1} \rfloor = p - 1.$$
4. En déduire que
$$\sqrt{p^2-1} - \lfloor \sqrt{p^2 - 1} \rfloor = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{p+1}{p-1}}}.$$
5. Démontrer enfin que $\sup(A) = 1$.

Problème Suites sous-additives.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad : \quad u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad v_n = \frac{u_n}{n}.$$

Le but de l'exercice est d'étudier la nature de la suite (v_n).

1. (a) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$u_{qa} \leq q u_a.$$
   (b) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$, montrer que
$$u_{qa+r} \leq q u_a + u_r.$$
2. On se donne $a \in \mathbb{N}^*$.
   Si $n \in \mathbb{N}$, on note q_n et r_n le quotient et le reste de la division euclidienne de l'entier n par l'entier a. On admettra que cela signifie que
$$n = a q_n + r_n \qquad (q_n, r_n) \in \mathbb{N}^2 \qquad r_n \in [\![0, a[\![.$$
   (a) Montrer que
$$q_n = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor.$$
   Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{q_n}{n}.$$
   (b) Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{r_n}}{n} = 0.$$
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\forall n \geq n_0 \quad : \quad \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_a}{a} + \frac{1}{2}\varepsilon.$$
3. *Si la suite $(v_n)_n$ est minorée*
   On suppose que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est minorée. On définit
$$\ell = \inf \left\{ \frac{u_n}{n} \ \middle|\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$
   (a) Justifier l'existence de la borne inférieure définissant ℓ.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$.
   Justifier l'existence de $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_a}{a} < \ell + \frac{1}{2}\varepsilon$.
   (c) Conclure que
$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell.$$

4. *Si la suite* (v_n) *n'est pas minorée*

   On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas minorée.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathbb{R}$.

   Justifier l'existence de $a \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\frac{u_a}{a} < A - \frac{1}{2}\varepsilon$.

   (b) Conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$$

5. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad : \quad w_{m+n} \leq w_m w_n.$$

   Montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{w_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.