

Primitives et intégrales

Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 8.1	2
Exercice 8.	2
Exercice 8.3	3

Exercice 8.1 [◆◆◆]

Donner les primitives des fonctions suivantes (on précisera l'intervalle que l'on considère).

$$\begin{aligned} a : x \mapsto \cos x e^{\sin x}; \quad b : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}; \quad c : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}; \quad d : x \mapsto \frac{1}{3x+1}; \\ e : x \mapsto \frac{\ln x}{x}; \quad f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}; \quad g : x \mapsto \sqrt{3x+1}; \quad h : x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\sin x} + c \end{cases}; \quad B : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\sin x) + c \end{cases}; \\ C : \begin{cases}]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\sqrt{\sin x} + c \end{cases}; \quad D : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3} \ln(3x+1) + c \end{cases}; \\ E : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \ln^2 x + c \end{cases}; \quad F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln x) + c \end{cases}; \\ G : \begin{cases} [-\frac{1}{3}, +\infty] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c \end{cases}; \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + c \end{cases}. \end{aligned}$$

Avec c les constantes d'intégration.

□

Exercice 8.2 [◆◆◆] Issu du cahier de calcul

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1. Sans chercher à les calculer, donner le signe des intégrales suivantes.

$$\int_{-2}^3 e^{-x^2} dx; \quad \int_5^{-3} |\sin x| dx; \quad \int_1^a \ln^7(x) dx (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

2. En vous ramenant à des aires, calculer de tête

$$\int_1^3 7dx; \quad \int_0^7 3xdx; \quad \int_{-2}^1 |x| dx.$$

1.

La première est positive car $-2 < 3$ et la fonction est positive sur $[-2, 3]$.

La seconde est négative car $5 > -3$ et la fonction est positive sur $[-3, 5]$.

La dernière est positive lorsque $a \geq 1$ et négative lorsque $a \leq 1$ car \ln^7 est positive sur $[1, +\infty[$.

2.

La première vaut $2 \times 7 = 14$.

La seconde vaut $\frac{7^2 \times 3}{2} = \frac{147}{2}$.

La dernière vaut $\frac{1}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 2.5$

□

Exercice 8.3 [◆◆◆]

Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{x}dx, \quad I_2 = \int_{-1}^1 2^x dx, \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln^3(t)}{t} dt, \quad I_4 = \int_0^1 \frac{x}{2x^2+3} dx,$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2+3} dx, \quad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx, \quad I_7 = \int_0^\pi |\cos x| dx, \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx.$$

$$I_1 = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad I_2 = \left[\frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{\ln 2}, \quad I_3 = \left[\frac{\ln^4 t}{4} \right]_1^e = \frac{1}{4},$$

$$I_4 = \left[\frac{1}{4} \ln(2x^2+3) \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{5}{3} \right) \right), \quad I_5 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\sqrt{\frac{2}{3}} x \right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right),$$

$$I_6 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} [-2 \sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad I_7 = [2 \sin x]_0^\pi = 2,$$

$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \cos x \sin^2(x) dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x + \tan x - \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (\tan^2 x + 1) dx - \frac{\ln 2}{2} = \left[\frac{1}{2} \tan^2(x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\ln 2}{2}$$

$$= \frac{1 - \ln 2}{2}$$

□