

Suites, La Pratique
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Exercices.

Avant de parler de convergence.	2
Exercice 13.1	2
Exercice 13.2	2
Exercice 13.3	2
Exercice 13.4	3
Exercice 13.5	3
Exercice 13.6	4
Exercice 13.7	4
Encadrement.	4
Exercice 13.8	4
Exercice 13.9	4

Exercice 13.1 [◆◆◆]

Une suite croissante est une fonction croissante sur \mathbb{N} .

Démontrer que le titre de l'exercice dit vraie, c'est à dire, pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équivalence entre

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} \geq u_n$.
2. $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \ n \leq p \implies u_n \leq u_p$.

Supposons 2, montrons 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $n \leq n + 1$. D'après 2, $u_n \leq u_{n+1}$. ez

Supposons 1, montrons 2.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$. On sait que $u_{n+1} \geq u_n$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, $u_{n+3} \geq u_{n+2}$, etc...

Par récurrence triviale et par transitivité, pour tout entier $q \geq n$, $u_q \geq u_n$.

En particulier, $u_p \geq u_n$

□

Exercice 13.2 [◆◆◆]

Soit a un réel supérieur à 1 et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \frac{a^n}{n!}$.

Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de a . (u_n) est strictement positive sur \mathbb{N} .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On peut donc écrire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$.

Ainsi, (u_n) est croissante ($a \geq n+1$) puis décroissante ($a \leq n+1$), ce qui implique qu'un maximum existe. Ce maximum est atteint lorsque $a = n+1$ c'est à dire quand $n = \lfloor a \rfloor$.

Ainsi, le maximum de la suite u est : $\frac{a^{\lfloor a \rfloor}}{\lfloor a \rfloor!}$

□

Exercice 13.3 [◆◆◆]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1}.$$

Prouver que la suite (u_n) est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$. Donc :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2 + 1} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \\ &\leq \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Majorer en valeur absolue c'est borner

□

Exercice 13.4 [◆◆◆]

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha(1 - \alpha) \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) \end{cases}$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de α et n .
2. Donner $\lim u_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose l'équation au point fixe : $x = (1 - \alpha)x + \alpha(1 - \alpha)$.

Sa solution est : $x = 1 - \alpha$.

On a : $u_{n+1} - (1 - \alpha) = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) - (1 - \alpha)$.

Ainsi, $u_{n+1} + \alpha - 1 = (1 - \alpha)(u_n + \alpha - 1)$.

On pose $v_n := u_n + \alpha - 1$. Par définition, v est géométrique, de raison $1 - \alpha$.

Son terme général est : $v_n = v_0(1 - \alpha)^n$.

Or $v_0 = u_0 + \alpha - 1 = \alpha(1 - \alpha) + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(1 - \alpha)$.

On en déduit que $v_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1}$.

Finalement, $u_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1} - \alpha + 1$.

□

Exercice 13.5 [◆◆◆]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Donner la forme du terme général d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 2 \cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

2. Supposons dans cette question que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Donner sous forme factorisée le terme général de l'unique suite (u_n) satisfaisant la relation ci-dessus et telle que $u_0 = u_1 = 1$.

Polynôme caractéristique : $r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1$. $\Delta = -4 \sin^2(\theta)$. $r_1 = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et $r_2 = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$.

Lorsque $\theta \in \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda n \cos^n(\theta) + \mu \cos^n(\theta)$.

Lorsque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$.

On a $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = 1$ donc $\mu = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta) + \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(n\theta)$

Comment tu factorises ça wtf

□

Exercice 13.6 [◆◆◆]

Soit (u_n) , définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = 3u_n + 2^n \end{cases}$.

1. Prouver qu'il existe une suite (a_n) géométrique de raison 2 qui satisfait la relation de récurrence.
2. Donner le terme général de (u_n) .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit (a_n) une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 2^n$$

On cherche (a_n) telle que $a_{n+1} = 3a_n + 2^n = 3a_0 2^n + 2^n = 2^n(3a_0 + 1)$.

Posons $a_0 = -1$. On a $a_{n+1} = 2^n(-2) = -2^{n+1} = a_0 2^{n+1}$.

Ainsi, la suite géométrique (a_n) de raison 2 et de premier terme -1 satisfait la relation de récurrence.

2. On a $u_{n+1} - 2a_n = 3u_n + 2^n - 2a_n \iff u_{n+1} - a_{n+1} = 3(u_n - a_n)$.

On pose $v_n := u_n - a_n$. Alors $v_0 = u_0 - a_0 = 2$ et $v_n = 2 \cdot 3^n$.

On en déduit que $u_n = v_n + a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n = 2(3^n - 2^{n-1})$

On a $u_{n+1} = 2(3^{n+1} - 2^n)$

□

Exercice 13.7 [◆◆◇]

Étudier la suite (u_n) , définie par récurrence par
$$\begin{cases} u_0 > 0; u_1 > 0 \\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} &\iff \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) \\ &\iff \ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)) \end{aligned}$$

On pose $v_n := \ln(u_n)$.

On obtient : $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$.

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 !

Polynome caractéristique : $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$. $\Delta = \frac{9}{4}$. $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, $v_n = \lambda + \frac{\mu(-1)^n}{2^n} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et v_n une telle suite.

Alors $v_0 = \lambda + \mu$ et $v_1 = \lambda - \frac{\mu}{2}$.

On a $v_0 + 2v_1 = 3\lambda = \ln(u_0u_1^2)$. Donc $\lambda = \ln(\sqrt[3]{u_0u_1^2})$.

On a $u_n = e^\lambda \cdot e^{\frac{\mu(-1)^n}{2^n}} \rightarrow e^\lambda$. Ainsi, $u_n \rightarrow \sqrt[3]{u_0u_1^2}$.

□

Exercice 13.8 [◆◆◇]

Soit $a > 1$. Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = (\lfloor a^n \rfloor)^{1/n}$.

Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On a :

$$a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n \iff (a^n - 1)^{\frac{1}{n}} < \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \leq a$$

On peut appliquer la fonction $x \mapsto \frac{1}{n}$: elle est croissante sur \mathbb{R}_+ et $a > 1$.

D'une part, $(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} = (a^n(1 - \frac{1}{a^n}))^{\frac{1}{n}} = a(1 - \frac{1}{a^n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow a$.

D'autre part, $a \rightarrow a$ (*big brain*)

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes : $\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \rightarrow a$.

□

Exercice 13.9 [◆◆◇]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n^2})$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1. On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$. f est dérivable comme somme et $f' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$. f décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \leq 0$. Ainsi, $\ln(1+x) \leq x$.

On pose $g : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$. g est dérivable comme somme, $g' : x \mapsto -\frac{x^2}{1+x}$. g décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Or $g(0) = 0$ donc $g(x) \leq 0$. Ainsi, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

2. Posons $v_n := \ln(u_n)$. Alors $v_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n^2})$.

Alors $\sum_{k=1}^n (\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}) \leq v_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} : \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$.

Par théorème des gendarmes, $v_n \rightarrow \frac{1}{2}$. Ainsi, $u_n \rightarrow \sqrt{e}$.

□