Chapitre 22

Limites et continuité.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

0 Introduction : deux préalables.

0.1 Retour sur la notion d'intervalle.

Définition 1

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est **convexe** si pour tout $a, b \in A$ avec $a \leq b$, on a $[a, b] \subset A$.

Proposition 2: Caractérisation des intervalles.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Preuve :

• Soit $I =]a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Soit $(a', b') \in I^2 \mid a' \leq b'$. Soit $x \in [a', b']$. Alors $a < a' \leq x \leq b' \leq b$ donc $x \in]a, b]$.
Ainsi, I est convexe.
• Soit $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ un convexe de $\mathbb{R}$. On traite le cas où C est borné.
— Si $C \neq 0$, alors $\exists s, i \in \mathbb{R} \mid \sup(C) = s$ et $\inf(C) = i$ on a donc $C \subset [g, d]$.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists bb \in C \mid d - \varepsilon < b \leq d$ et $\exists a \in C \mid g \leq a < g + \varepsilon$.
Par convexité de C, $[a, b] \subset C$ donc $[g + \varepsilon, d - \varepsilon] \subset C$ donc $]g, d[\in C \subset [g, d]$.
Donc $C = [g, d]$ ou $C = [g, d[$ ou $C =]g, d]$ ou $C =]g, d[$: c'est un intervalle.
— Si $C = \varnothing$, c'est un intervalle.

Exemple 3: Applications de la caractérisation.

Justifier que
1. $\mathbb{R}^*$ n'est pas intervalle.
2. une intersection d'intervalles est un intervalle.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $1 \in \mathbb{R}^*$ et $-1 \in \mathbb{R}^*$ mais $[-1, 1] \not\subset \mathbb{R}^*$, donc $\mathbb{R}^*$ n'est pas convexe, ce n'est pas un intervalle.

Dans tout le cours, les lettres I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non-vides et non réduits à un point.

0.2 Propriété vraie au voisinage d'un point.

La notion suivante jouera pour les fonctions, le rôle que jouait pour les suites le «à partir d'un certain rang».

Définition 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I.
On dit qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage de** a si
- $\boxed{a \in \mathbb{R}}$ il existe $\eta > 0$ tel que la propriété est vraie sur $[a - \eta, a + \eta] \cap I$,
- $\boxed{a = +\infty}$ il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $[A, +\infty[$.
- $\boxed{a = -\infty}$ il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $] - \infty, A]$.

1 Limites d'une fonction.

1.1 Définitions et premières propriétés.

Définition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Les équivalences ci-dessous définissent l'assertion f **admet** L **pour limite en** a, ce qui sera notée

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L.$$

1. Cas a fini, $L = l$, fini :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta] \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

2. etc...

Proposition 6: Unicité de la limite.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Si f admet une limite en a, celle-ci est unique. Plus précisément, pour $L, L' \in \overline{R}$, si f admet L et L' pour limite en a, alors $L = L'$.
On pourra donc parler, lorsqu'elle existe, de **la** limite de la fonction en a, que l'on notera $\lim_{x \to a} f(x)$.

Preuve :

Supposons a, l, l' finis. Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in I$. Alors $|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'|$.
On a $\exists \eta > 0 \mid \forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta],\ |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\exists \eta' > 0 \mid \forall x \in I \cap [a - \eta', a + \eta'],\ |f(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\alpha = \min(\eta, \eta')$. Alors pour $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, on a :

$$|l - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{donc} \quad l - l' = 0 \quad \text{donc} \quad l = l'.$$

Proposition 7: Quand la limite est finie.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{R}$ un élément ou une borne de I.

- Si f admet une limite finie en a, alors elle est bornée au voisinage de a.
- Si de surcroît, f est définie en a (qui est forcément fini, dans ce cas) alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Preuve :

• On pose $\varepsilon = 1$. $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ est vraie au voisinage de a, donc $l - 1 \leq f(x) \leq l + 1$.
• Supposons f définie en $a \in I$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.
Alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid |f(a) - l| \leq \varepsilon$ car $a \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$. Donc $f(a) = l$.

1.2 Caractérisation séquentielle de la limite.

Théorème 8: Caractérisation séquentielle de la limite. ★

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un élément ou une borne de I et L un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Il y a équivalence entre :

1. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$.
2. $\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}},\ u_n \to a \implies f(u_n) \to L$.

Preuve :

On suppose a et l finis.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.
Soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid u_n \to a$. Soit $\varepsilon > 0$: $\exists \eta > 0 \mid \forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta],\ |f(x) - l| \leq \varepsilon$.
On a $u_n \to a$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n \in [a - \eta, a + \eta]$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$ donc $\forall n \geq n_0,\ u_n \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, donc $|f(u_n) - l| \leq \varepsilon$ alors $f(u_n) \to l$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}},\ u_n \to a \implies f(u_n) \to l$.
Par l'absurde, on suppose que $\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \eta > 0,\ \exists x \in I \cap [a - \eta, a + \eta],\ |f(x) - l| > \varepsilon$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\eta = \frac{1}{n} > 0$ donc $\exists x_n \in I \cap [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}],\ |f(x_n) - l| > \varepsilon$. Ceci construit la suite (x_n).
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \frac{1}{n} \leq x_n \leq a + \frac{1}{n}$. Alors $x_n \to a$ par théorème des gendarmes.
Donc $f(x_n) \to l$ par supposition, or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(x_n) - l| > \varepsilon$, c'est absurde.

Méthode

Pour prouver que $f : I \to \mathbb{R}$ n'**admet pas** de limite en a, il suffit d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I telles que :

$$\begin{cases} u_n \to a \\ v_n \to a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} (f(u_n)) \text{ et } (f(v_n)) \\ \text{ne convergent pas vers la même limite.} \end{array}$$

Exemple 9: ★

Montrer que cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $2\pi n \to +\infty$ et $2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$.
Or $\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(u_n) = 0 \to 0$ et $\sin(v_n) = 1 \to 1$ donc pas de limite.

1.3 Opérations sur les fonctions admettant une limite.

Proposition 10

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I.
Supposons que f et g admettent en a des limites finies, respectivement l et l'.

1. La fonction $f+g$ admet $l+l'$ pour limite en a.
2. La fonction fg admet ll' pour limite en a.
3. Si $l \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $1/f$ admet pour limite $1/l$ en a.

Preuve :

$\boxed{1.}$ Soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid u_n \to a$ donc $f(u_n) \to l$ et $g(u_n) \to l'$.
Ainsi, $f(u_n) + g(u_n) \to l + l'$, donc $(f+g)(u_n) \to l + l'$ donc $(f+g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l + l'$.

$\boxed{2.}$ Idem.

$\boxed{3.}$ Supposons $l' > 0$. La propriété $g(x) \in [l' - \frac{l'}{2}, l' + \frac{l'}{2}]$ est vraie au voisinage de a.
Alors $f(u_n) \to l$ et $g(u_n) \to l'$ donnent $\frac{f(u_n)}{f(g_n)} \to \frac{l}{l'}$.

Exemple 11: Cas d'une limite infinie : débrouillez-vous.

La limite $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{1}{x \ln(x)}$ existe-t-elle ? Que vaut-elle ?

Solution :

On a $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0_+]{} 0_-$ par croissances comparées, donc $\dfrac{1}{x \ln(x)} \xrightarrow[x \to 0_+]{} -\infty$.

Proposition 12: Conservation des inégalités larges par passage à la limite.

Soient f et g deux fonctions définies sur I, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I et $(l, l') \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \text{ et } g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l' \end{cases} \qquad \text{alors } l \leq l'.$$

Preuve :

Soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid u_n \to a$. On a $f(u_n) \to l$ et $g(u_n) \to l'$ or $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \leq g(u_n)$ donc $l \leq l'$.

Proposition 13: Composition des limites : deux fonctions.

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
Soient $a \in \overline{J}$ et $b \in \overline{I}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ g(y) \xrightarrow[y \to b]{} c \end{cases} \qquad \text{alors } g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c.$$

Preuve :

Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} c$. Soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid u_n \to a$.
Alors $f(u_n) \to b$ donc $g(f(u_n)) \to c$. On a $g \circ f(u_n) \to c$ pour toute suite $u_n \to a$.
Par caractérisation, $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$.

1.4 Limite à gauche, limite à droite.

Définition 14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une borne finie de I. On dit que f admet en a une

- **limite à gauche** si $a \neq \inf(I)$ et si $f_{|]-\infty, a[\cap I}$ admet une limite en a.
- **limite à droite** si $a \neq \sup(I)$ et si $f_{|]a, +\infty[\cap I}$ admet une limite en a.

Lorsqu'elles existent, ces limites sont notées respectivement

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \left(ou \lim_{x \to a_-} f(x) \text{ et } \lim_{x \to a_+} f(x)\right).$$

Supposons que f n'est pas définie en a. Si f admet une limite à gauche et à droite en a et que ces limites sont égales à $L \in \mathbb{R}$, on appelle ce nombre limite en a et on écrit

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} L.$$

Exemple 15: quand les limites à gauche et à droite coïncident.

Démontrer que

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 1.$$

Solution :

Soit $x > 0$. $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

Proposition 16

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $l \in \mathbb{R}$ et f définie en a. Alors:

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \iff \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a_-]{} l \\ f(x) \xrightarrow[x\to a_+]{} l \\ f(a) = l \end{cases}$$

1.5 Théorèmes d'existence de limite.

Théorème 17: des gendarmes, pour les fonctions.

Soient f, g, h définies sur I, $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x), \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \text{ et } h(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \end{cases} \quad \text{alors} \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l.$$

Preuve :

On applique le théorème des gendarmes (suites) sur $f(u_n), g(u_n), h(u_n)$ avec la caractérisation séquentielle.

Exemple 18

Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$ admet une limite en 0, que l'on précisera.

Solution :

Soit $x > 0$. On a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ et $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$.
Par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$ donc f admet 0 comme limite à droite en a.
Par parité, $f(x) \xrightarrow[x\to 0_-]{} 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1.$$

En effet, en posant $y = \frac{1}{x} \to 0$ on retrouve le sinus cardinal.

Proposition 19: de minoration, de majoration.

Soient f et g définies sur I et $a \in \overline{I}$.

- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$

Théorème 20: de la limite monotone, pour les fonctions.

- Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est croissante sur I, alors elle admet en tout point de $]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite. De plus,

$$\forall c \in]a, b[,\ \lim_{x\to c_-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c_+} f(x).$$

  Il existe aussi une limite à droite en a et une limite à gauche en b.
- Soit f une fonction croissante, définie sur $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
  Si elle est majorée, elle admet une limite finie en $+\infty$. Sinon elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Preuve :

On pose $A = \{f(x) \mid x \in]a, c[\}$. On a $A \subset \mathbb{R}$ et $A \neq \varnothing$.
Alors $\forall x \in A,\ f(c) \geq x$ car f est croissante, donc $s := \sup(A)$ existe.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in]a, c[,\ s - \varepsilon \leq f(x_0) \leq s + \varepsilon$. Par croissance de f : $\forall x \in [x_0, c[,\ f(x_0) \leq f(x)$.
Or $f(x_0) \geq s - \varepsilon$ et $f(x) \leq s$ donc $\forall x \in [x_0, c[,\ |f(x) - s| \leq \varepsilon$ au voisinage de c à gauche.
On a bien l'existence de $\lim_{x\to c} f(x)$: c'est s, et $s \leq f(c)$ car $f(c)$ majore A.

2 Continuité en un point.

2.1 Définitions.

Définition 21

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a).$$

Définition 22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **continue à gauche en** a si f admet $f(a)$ pour limite à gauche en a.
On dit que f est **continue à droite en** a si f admet $f(a)$ pour limite à droite en a.

Exemple 23

La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue à gauche en 2 ? continue à droite en 2 ?

Solution :

On a $\forall x \in [1, 2[,\ f(x) = 1$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to 2_-]{} 1$, or $f(2) = 2$, donc f n'est pas continue à gauche en 2.
On a $\forall x \in [2, 3[,\ f(x) = 2$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to 2_+]{} 2$ et $f(2) = 2$, donc f est continue à droite en 2.

Proposition 24

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Elle est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple 25

Établir la continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-1/x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Solution :

On a $\forall x \leq 0,\ f(x) = f(0) = 0$ donc f est continue à gauche en 0.
On a $\forall x > 0,\ f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0_+]{} 0$ et $f(0) = 0$ donc f est continue à droite en 0.
Donc f est continue en 0.

Proposition 26: Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Il y a équivalence entre :

1. f est continue en a.
2. Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Rappel

Soit $f : I \to I$ stable par f et (u_n) définie par $u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers une limite l, que $l \in I$ et que f est continue en l, alors $f(l) = l$.

Exemple 27: CCINP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution :

Monotonie.
— Si $u_0 = u_1$, alors (u_n) est constante égale à u_0.
— Si $u_0 < u_1$, alors (u_n) est croissance par récurrence triviale.
— Si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante par récurrence triviale.

On veut connaitre les variations en fonction de x_0, on pose donc $g : x \mapsto \arctan(x) - x$.
On a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty, 0[,\ g(x) > 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) < 0$.
— Si $x_0 = 0$, (u_n) est constante égale à 0.
— Si $x_0 < 0$, (u_n) est strictement croissante.
— Si $x_0 > 0$, (u_n) est strictement décroissante.

Convergence.
On a $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ stables par arctan et 0 son seul point fixe sur $\mathbb{R}$.
— Si $x_0 = 0$, on a la convergence vers 0 car la suite est constante.
— Si $x_0 > 0$, on a (u_n) décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers 0 comme seul point fixe de arctan.
— Si $x_0 < 0$, on a (u_n) croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0 comme seul point fixe de arctan.

Exemple 28: (*) Une équation fonctionnelle classique.

Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Solution :

Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
• $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
• $f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0$ donc $f(x) = f(-x)$: la fonction est paire.
• $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = f(n - 1) + f(1) = ... = nf(1)$.
• Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. $f(qr) = qf(r)$ donc $f(r) = rf(1)$.
• Soit $x \in \mathbb{R} : \exists (r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid r_n \to x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = r_n(f_1) \to xf(1)$.
Donc $f(x) = xf(1)$ donc f est linéaire : $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Synthèse. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto ax$. Soient $x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, c'est une fonction linéaire. Les fonction linéaires sont donc les seules fonctions qui conviennent.

2.2 Prolongement par continuité.

Définition 29

Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Si f admet une limite finie en a, on pose

$$f(a) := \lim_{x \to a} f(x).$$

La fonction f est alors définie sur I et elle est automatiquement continue en a. On dit que l'on a réalisé au point a un **prolongement de f par continuité.**

Exemple 30

Prolongement par continuité en 0 de la fonction sinus cardinal $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

2.3 Opérations sur les fonctions continues en un point.

Proposition 31: Combinaisons linéaires, produit, inverse de fonctions continues.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que f et g sont continues en a. Alors,

- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
- La fonction fg est continue en a.
- Si $f(a) \neq 0$, alors, la fonction $(1/f)$ est définie et continue au voisinage de a.

Proposition 32: Composition de fonctions continues.

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.

3.1 Continuité sur un intervalle, opérations.

Définition 33

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **continue sur** I si elle est continue en tout point de I.
L'ensemble des fonctions continues sur I pourra être noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I)$.

Proposition 34

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit.
Le quotient de deux fonctions continues sur I est continu sur I si la fonction au dénominateur ne s'annule pas sur I.

Proposition 35

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur I et g continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 36

Démontrer la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

3.2 Théorème des valeurs intermédiaires (and friends).

Théorème 37: des valeurs intermédiaires.

Soient deux réels $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a, b] \quad y = f(c).$$

Corrolaire 38

Si une fonction continue sur un intervalle y change de signe, alors elle s'annule sur cet intervalle.
Si une fonction continue sur un intervalle ne s'y annule pas, alors $f > 0$ ou $f < 0$ sur I.

Exemple 39

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Solution :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $\widetilde{P} : x \mapsto P(x)$. On a $\widetilde{P}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $\widetilde{P}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.
Donc $\widetilde{P}$ change de signe et est continue. Par TVI, elle s'annule.

Exemple 40: ★

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue sur $[a,b]$. Montrer l'existence d'un point fixe pour f.

Solution :

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$, continue comme somme.
On a $f(b) \in [a,b]$ donc $g(b) \leq 0$ et $f(a) \in [a,b]$ donc $g(a) \geq 0$.
Ainsi, g change de signe et est continue. Par TVI, $\exists x_0 \in [a,b] \mid f(x_0) - x_0 = 0$...

Corrolaire 41: ★

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Preuve :

Soit f continue sur un intervalle I. Soient $a, b \in I \ : \ a \leq b$. Soit $y \in [a,b]$.
On a $\exists \alpha \in I \mid a = f(\alpha)$ et $\exists \beta \in I \mid b = f(\beta)$ et f continue sur $[\min(\alpha,\beta), \max(\alpha,\beta)]$.
En effet, $[\min(\alpha,\beta), \max(\alpha,\beta)] \subset I$ par convexité de I.
Par TVI, $\exists \gamma \in [\min(\alpha,\beta), \max(\alpha,\beta)] \mid y = f(\gamma)$ donc $y \in f(I)$.

Corrolaire 42: TVI strictement monotone.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur $[a,b]$. Pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists! c \in [a,b] \quad y = f(c).$$

Preuve :

Existence. TVI.
Unicité. On sait que toute fonction strictement monotone est injective.

Théorème 43: Théorème de la bijection continue.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.

- Elle réalise une bijection de I dans $f(I)$, qui est un intervalle.
- De plus, sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f, et elle est continue sur J.

Preuve :

On a $J = f(I)$ est un intervalle comme image d'un intervalle par une fonction continue.
• $J = f(I)$ donc $\forall y \in J, \ \exists x \in I \mid y = f(I)$: surjective.
• f est injective sur I car elle y est strictement monotone.
• f est donc bijective de I vers J. Il existe donc $f^{-1} : J \to I$.
• Supposons f strictement croissante. Soient $y, y' \in J \mid y < y'$. Supposons $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$.
On applique f croissante : $y \geq y'$: absurde donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$: même monotonie.

Proposition 44

Soit une fonction définie sur un intervalle et à valeurs réelles.
Si elle est continue sur l'intervalle et injective, alors elle est strictement monotone.

3.3 Théorème des bornes atteintes.

Théorème 45: ★★

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$:

$$\exists c \in [a,b] \mid f(c) = \min_{[a,b]} f.$$

$$\exists d \in [a,b] \mid f(d) = \max_{[a,b]} f.$$

Preuve :

Notons $A = f([a,b])$ non vide. On pose $S = \sup(A)$ si A est majoré, $+\infty$ sinon.
Alors $\exists (\alpha_n) \in A^{\mathbb{N}} \mid \alpha_n \to S$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ \alpha_n \in A$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists x_n \in [a,b] \mid \alpha_n = f(x_n)$. On a donc une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$.
C'est une suite bornée. D'après Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite convergente :

$$\exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists l \in \mathbb{R}, \ x_{\varphi(n)} \to l \in [a,b] \text{ (car } \forall n \in \mathbb{N}, \ x_{\varphi(n)} \in [a,b]).$$

Ainsi, f est continue en $l \in [a,b]$ et $f(x_{\varphi(n)}) \to f(l)$ et $f(x_n) \to S$.
Par unicité de la limite, $S = f(l)$ donc S est fini et atteinte en l. C'est le maximium de f sur $[a,b]$.

Corrolaire 46: Image d'un segment. ★

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Preuve :

Soit $[a,b]$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $a\leq b$. Soit f continue sur $[a,b]$.
D'après le TBA, f est bornée sur $[a,b]$ et y atteint ses bornes, on pose $m=\min_{[a,b]} f$ et $M=\max_{[a,b]} f$.
Alors $m,M\in f([a,b])\subset[m,M]$. Ainsi, par TVI, $[m,M]\subset f([a,b])$ donc $[m,M]=f([a,b])$.

4 Exercices.

Limites.

Exercice 1: ♦◊◊

Calculer (en montrant qu'elles existent) : $\lim\limits_{x\to 0_+} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$, $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

Solution :

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leq\frac{1}{x}<\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+1$ et $\frac{1}{x}-1<\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leq\frac{1}{x}$ donc $1-x<x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leq 1$.
Ainsi, $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\xrightarrow[x\to 0_+]{}1$ par théorème des gendarmes.

Soit $x>1$. On a $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=0$ car $\frac{1}{x}<1$ donc $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=0$ pour $x>1$ donc $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

Exercice 2: ♦◊◊

Soient $f:[0,1]\to[0,1]$ et $g:[0,1]\to[0,1]$. On suppose que fg admet 1 pour limite en 0.
Montrer que f et g admettent 1 pour limite en 0.

Solution :

Soit $x\in[0,1]$. On a $0\leq f(x)g(x)\leq f(x)\leq 1$.
Or $f(x)g(x)\xrightarrow[x\to 0]{}1$ donc par théorème des gendarmes, $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}1$. On en déduit que $g(x)\xrightarrow[x\to 0]{}1$.

Exercice 3: ♦♦◊

Montrer que la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Solution :

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $f(n)=\dfrac{n^n}{n^n}=1\to 1$ et $f(n+\dfrac{1}{2})=\dfrac{(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}{n^n}=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\to+\infty$.
Donc f n'a pas de limite en $+\infty$.

Continuité (locale).

Exercice 4: ♦♦◊

Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ croissante, et telle que $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution :

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $x<a$. On a $x\frac{f(a)}{a}\leq f(x)\leq f(a)$ donc $f(x)\xrightarrow[x\to a_-]{}f(a)$ par gendarmes.

Soit $x>a$. Alors $f(a)\leq f(x)\leq x\frac{f(a)}{a}$ donc $f(x)\xrightarrow[x\to a_+]{}f(a)$ par gendarmes.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5: ♦◊◊

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, à la fois 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique, et continue en 0.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f.
2. Montrer que f est constante.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soient $a,b\in\mathbb{Z}^2$. On a $f(x+a)=f(x+b\sqrt{2})=f(x)$ donc $f(a+b\sqrt{2})=f(0)$.
Par le binôme de Newton, on trouve que $(\sqrt{2}-1)^n$ s'écrit comme $a+b\sqrt{2}$ et est donc période de f.
$\boxed{2.}$ On a $u_n:=(\sqrt{2}-1)^n\to 0$ et $u_n=a_n+b_n\sqrt{2}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.
On pose $p_n=\lfloor\frac{x}{u_n}\rfloor$. Alors $p_nu_n\leq x<(p_n+1)u_n$ et $(p_nu_n)\to x$ car $0\leq x-p_nu_n<u_n$.
Or, $p_nu_n=a_n'+b_n'\sqrt{2}$ et $f(p_nu_n)=f(0)$ donc $f(x)=f(0)$ car f est continue en 0.

Exercice 6: ♦♦◊

Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Solution :

Supposons par l'absurde que $\lfloor 1_{\mathbb{Q}} \rfloor$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{Q}$. Posons (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. On a $x_n \to x$.
On pose $a_n = x - \frac{1}{\pi n} \to x$ et $b_n = x + \frac{1}{\pi n} \to x$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq x \leq b_n,\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a_n) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(b_n) = 0$ donc $x \notin \mathbb{Q}$: absurde.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1$ or $x_n \to x$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ continue en x donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$, absurde.
Donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7: ♦◊◊

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est prolongeable par continuité sur les bords de son intervalle de définition.

Solution :

Soit $x \in]0,1[$. On a $f(x) = (x-1)\ln(1-x)\frac{\ln(x)}{x-1}$ or $(x-1)\ln(1-x) \to 0$ par CC et $\ln(x)/x - 1 \to 1$ en 1.
Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. De même, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Donc f est prolongeable par continuité en 0 et en 1, et $f(0) = f(1) = 0$.

Exercice 8: ♦♦♦

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) - f(x) = x.$$

Solution :

Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) - f(x) = x$.
Par récurrence triviale, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) - f(\frac{x}{2^n}) = x\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
Or f est continue en 0 donc $f(x) - f(\frac{x}{2^n}) \to f(x) - f(0)$ et $x\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \to x$.
Donc par unicité de la limite, $f(x) - f(0) = x$ donc f est solution si $\exists a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a + x$.
Synthèse. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto a + x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(2x) - f(x) = a + 2x - a - x = x$ et $f(0) = a$.

Continuité (globale).

Exercice 9: ♦◊◊

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$. Montrer que f possède un point fixe.

Solution :

Soit $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Elle est continue puisque f l'est. On a $g \xrightarrow[x\to+\infty]{} l < 1$.
— Si $f(0) = 0$, alors f admet un point fixe qui est 0;
— Si $f(0) > 0$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to 0_-]{} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to 0_+]{} +\infty$ donc par TVI il existe un point fixe.
— Si $f(0) < 0$, même raisonnement.

Exercice 10: ♦♦◊

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et continue.
Prouver que f possède un unique point fixe.

Solution :

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.
Unicité. On a g strictement décroissante, donc injective : elle ne peut s'annuler qu'une unique fois.
Existence. Supposons par l'absurde que g ne s'annule pas.
On a que g est continue, donc elle est soit strict. positive, soit strict. négative.
Si g positive : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, absurde car f décroissante.
Si g négative : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < x$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, absurde car f décroissante.

Exercice 11: ♦♦◊

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies M et m en $+\infty$ et $-\infty$.
Montrer que f est bornée.

Solution :

On pose $\varepsilon = 1$, $\exists A < 0,\ \forall x \leq A,\ |f(x) - m| \leq 1$ et $\exists B > 0,\ \forall x \geq B,\ |f(x) - M| \leq 1$.
Donc $\forall x \leq A,\ m - 1 \leq f(x) \leq m + 1$ et $\forall x \geq B,\ M - 1 \leq f(x) \leq M + 1$.
Donc f est bornée sur $]-\infty, A]$ et sur $[B, +\infty[$.
De plus, f est continue sur $[A, B]$ donc d'après le TBA, elle y est aussi bornée.
Ainsi, f est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 12: ♦◊◊

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est continue et que g est bornée, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Solution :

$\boxed{g \circ f.}$ On a $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ donc $g(f(\mathbb{R})) \subset g(\mathbb{R})$.
Or g est bornée par $M \in \mathbb{R}$ donc $g(f(\mathbb{R})) \subset [-M, M]$ donc $g \circ f$ est bornée.
$\boxed{f \circ g.}$ On a $\exists M \in \mathbb{R} \mid g(\mathbb{R}) \subset [-M, M]$, et f continue sur $[-M, M] \subset \mathbb{R}$.
D'après le TBA, f est bornée sur $[-M, M]$ donc $f(g(\mathbb{R}))$ est borné, donc $f \circ g$ est bornée.

Exercice 13: ♦♦◊

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| \leq |x|$.

1. Prouver que 0 est un point fixe de f et que c'est le seul.
2. Prouver que pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leq k|x|$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $|f(x)| < |x|$ donc $-|x| < f(x) < |x|$ et f continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc $f(0) = 0$ par continuité de f en 0.
Supposons qu'il en existe un autre, $l \in \mathbb{R}^*$. Alors $f(l) = l$ et $|f(l)| < |l|$, donc $|l| < |l|$, absurde.
$\boxed{2.}$ Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ un segment.
Supposons par l'absurde que $\forall k \in [0, 1[,\ \exists x \in [a, b],\ |f(x)| > k|x|$, donc $k|x| < |f(x)| \leq |x|$.
Donc $-k|x| < -|f(x)| < k|x|$ donc $0 < -|f(x)| < 0$ en prenant $k = 0$ donc $f(x) = 0$.
De plus, en faisant tendre k vers 1, on a $|x| \leq |f(x)| \leq |x|$ donc $f|(x)| = |x| = 0$, absurde car $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 14: ♦♦♦

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x)$$

admet au moins une solution.

Solution :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $g : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{p}\right)$. Soit $x \in [0, 1]$, on a:

$$\sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{k}{p}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k+1}{p}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Si l'un des $g\left(\frac{k}{p}\right)$ est nul, on a une solution.
Sinon, on les suppose tous non nuls, et puiqu'on a une somme nulle: $\exists i, j \in [\![0, p-1]\!] \mid g\left(\frac{i}{p}\right) \geq 0$ et $g\left(\frac{j}{p}\right) \leq 0$.
Puisque g est continue sur $[0, 1]$, elle l'est sur $[\frac{i}{p}, \frac{j}{p}]$ (en supposant $i \leq j$), donc on y applique le TVI.
On a alors $\exists c \in [\frac{i}{p}, \frac{j}{p}] \mid g(c) = 0$. On a donc une solution.
Dans tous les cas, on a une solution pour $f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.