Chapitre 14

Suites réelles : la théorie.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

0 Propriété de la borne supérieure.

Définition 1

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On appelle **borne supérieure** de A et on note $\sup A$, le plus petit des majorants de A, lorsqu'il existe.
- On appelle **borne inférieure** de A et on note $\inf A$, le plus grand des minorants de A, lorsqu'il existe.

Implicite dans cette définition : l'unicité de la borne supérieure. On peut la montrer comme on avait prouvé celle du maximum. Pour ce qui concerne l'existence, commençons par examiner un cas simple.

Proposition 2

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un maximum M, alors elle a une borne supérieure, qui vaut M.

Preuve :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ admettant un maximum M. Soit M' un majorant de A, alors $M' \geq M$.
Ainsi, M est le plus petit des majorants : $\sup A = M$.

Théorème 3: Axiome de la borne supérieure.

Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4: Caractérisation de la borne supérieure. ★

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \mid \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha \end{cases}$$

Preuve :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\alpha = \sup A$, c'est un majorant de A. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que $A \cap]\alpha - \varepsilon, \alpha] = \varnothing$.
Alors $A \subset]-\infty, \alpha - \varepsilon]$ car α est majorant de A, donc $\alpha - \varepsilon$ majore A.
C'est absurde car α est le plus petit des majorants.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que α majore A et que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \mid \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.
Supposons qu'il existe $\beta < \alpha$, majorant de A. Posons $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$.
Alors $\beta = \alpha - \varepsilon$: $\exists x \in A \mid \beta < x \leq \alpha$, absurde car β majore A : α est le plus petit des majorants de A.

Exemple 5: ★

Soit $A = [0, 1[$. Justifier l'existence de $\sup A$ puis la calculer.
Soit $B = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \sqrt{2}\}$. Justifier l'existence de $\sup B$ puis la calculer.
Soit $C = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \mid (n, p) \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\sup C$ et $\inf C$, après avoir justifié qu'elles existent.

Solution :

- A est non vide et majorée par 1, $\sup A = 1$.
- B est non vide et majorée par $\sqrt{2}$. $\sup B = \sqrt{2}$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- C est non vide et majorée par 1, $\sup C = 1$, $\inf C = 0$.

Méthode : Majorer une borne supérieure / passage au sup.

Soient M un réel et A une partie de $\mathbb{R}$ possédant une borne supérieure. Pour démontrer l'inégalité

$$\sup A \leq M,$$

il suffira de montrer que M est un majorant de A.

Exemple 6: ★

Soient A et B deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Justifier que $\sup A \leq \sup B$.

Solution :

Puisque $A \subset B$, on a $\sup B$ majorant de A, or $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, donc $\sup A \leq \sup B$.

Exemple 7: Homogénéité du sup. ★

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la partie $\lambda A := \{\lambda x \mid x \in A\}$.
Montrer l'égalité

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A).$$

Solution :

Soit $x \in A$.
$\boxed{\leq}$ On a $x \leq \sup(A)$ donc $\lambda x \leq \lambda \sup(A)$ donc $\lambda \sup(A)$ majore λA : $\lambda \sup(A) \geq \sup(\lambda A)$.
$\boxed{\geq}$ On a $\lambda x \leq \sup(\lambda A)$ donc $x \leq \frac{1}{\lambda} \sup(\lambda A)$ donc $\sup(A) \leq \frac{1}{\lambda} \sup(\lambda A)$ donc $\lambda \sup(A) \leq \sup(\lambda A)$.
Par double inégalité, on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

1 Limite d'une suite.

Définition 8: Convergence vers $l \in \mathbb{R}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) **converge** vers l et on note $u_n \to l$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid\ \forall n \geq n_0 \ :\ |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Cette définition est écrite sous cette forme par Cauchy en 1821. Elle avait été donnée par d'Alembert dans l'Encyclopédie (1767) : *« On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher la première plus près que d'une grandeur donnée si petite qu'on la puisse supposer... »*

Proposition 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On a

$$u_n \to l \iff |u_n - l| \to 0$$

Preuve :

Par équivalences :

$$\begin{aligned} u_n \to l &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \ :\ |u_n - l| \leq \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \ :\ ||u_n - l| - 0| \leq \varepsilon \\ &\iff |u_n - l| \to 0 \end{aligned}$$

Méthode

Prouver une convergence du type $u_n \to l$, c'est montrer que la **distance** $|u_n - l|$ peut être rendu « aussi petite que l'on veut ». On cherchera donc

- À majorer $|u_n - l|$ par un réel ε quelconque à partir d'un certain rang n_0 qui dépend de ε. C'est ce que nous ferons dans les preuves de ce cours mais dans les exercices, on dégainera rarement ε !
- À majorer $|u_n - l|$ par une suite convergeant notoirement vers 0. On peut alors conclure grâce au théorème d'encadrement.

Exemple 10

- Soit (u_n) une suite constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que $u_n \to a$.
- Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{n+1}{n}$.
  Démontrer que $u_n \to l$ où l est un réel à déterminer.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soient $\varepsilon > 0$, $\forall n \geq 0$, $|u_n - a| = |a - a| = 0 \leq \varepsilon$ donc $u_n \to a$.
$\boxed{2.}$ Soit $\varepsilon > 0$. On pose $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Alors $\forall n \geq n_0$, $|u_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ par décroissance de (u_n).
Donc $u_n \to 1$.

Définition 11

Soit (u_n) une suite réelle. On dit qu'elle **tend vers** $+\infty$ et on note $u_n \to +\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \mid\ \forall n \geq n_0\ :\ u_n \geq M.$$

Exemple 12

Pour $n \geq 2$, posons $u_n = \ln(\ln(n))$. Montrer que $u_n \to +\infty$.

Solution :

Soit $M > 0$. On pose $n_0 = \exp(\exp(M))$, alors $u_{n_0} = M$ et $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq u_{n_0} = M$ car ln est croissante.
Donc $u_n \to +\infty$.

Proposition 13: Tendre vers $-\infty$

Soit (u_n) une suite réelle. On dit qu'elle **tend** vers $-\infty$ et on note $u_n \to -\infty$ si

$$\forall M < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \mid\ \forall n \geq n_0\ :\ u_n \leq M.$$

On a l'équivalence $u_n \to -\infty \iff -u_n \to +\infty$.

Preuve :

Par équivalences :

$$\begin{aligned} u_n \to -\infty &\iff \forall M < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \mid\ \forall n \geq n_0\ :\ u_n \leq M \\ &\iff \forall M < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \mid\ \forall n \geq n_0\ :\ -u_n \geq -M \\ &\iff \forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \mid\ \forall n \geq n_0\ :\ -u_n \geq M \\ &\iff -u_n \to +\infty \end{aligned}$$

Proposition 14: Unicité de la limite.

Soit (u_n) une suite réelle et $L, L' \in \overline{R}$. Si $u_n \to L$ et $u_n \to L'$, alors $L = L'$.
Le nombre L est alors appelé limite de la suite (u_n) et noté $\lim u_n$.

Preuve :

Dans le cas où les deux limites sont finies...
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1,\ |u_n - L| \leq \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2,\ |u_n - L'| \leq \varepsilon$.
Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$, et $n \geq n_0$. Alors $|u_n - L| \leq \varepsilon$ et $|u_n - L'| \leq \varepsilon$.

$$|L - L'| = |L - u_n + u_n - L'| \leq |L - u_n| + |u_n - L'| \leq 2\varepsilon.$$

Donc $|L - L'| \leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $L = L'$.

Définition 15

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **convergente** si elle converge vers une limite finie. Si une suite n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Exemple 16

On démontre que la suite de terme général $(-1)^n$ est divergente.

Solution :

Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $(-1)^n \to l$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \frac{1}{2}$. Soit $n \geq n_0$.
D'une part, $|u_{n+1} - l + l - u_n| \leq |u_{n+1} - l| + |u_n - l| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| = 2$. Alors $2 \leq 1$, absurde. Donc $(-1)^n$ est divergente.

Proposition 17

Toute suite convergente est bornée.

Preuve :

Soit (u_n) convergente de limite l. Soit $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq 1$.
Posons $T_{n_0} = \{u_k \mid k \in [\![0, n_0]\!]\}$. C'est un ensemble fini, de cardinal inférieur à n_0. Ainsi, il possède un maximum et un minimum, qu'on note M et m. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\min(m, l-1), \max(M, l+1)]$, elle est bornée.

La réciproque est fausse : la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée et divergente.

2 Limites et opérations : preuves des résultats.

On démontre ici une partie seulement de tous les résultats ayant été donnés sous forme de tableaux dans le cours Suites réelles : la pratique.

Proposition 18: Somme de deux suites ayant une limite. ★

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et l, l' deux nombres réels.

Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$, alors $u_n + v_n \to l + l'$.

Si $u_n \to l$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$.

Preuve :

★ Supposons que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$. Soit $\varepsilon > 0$.
On a $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1,\ |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2,\ |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour $n \geq n_0$, on a :

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a bien $u_n + v_n \to l + l'$.

• Supposons que $u_n \to l$ et $v_n \to +\infty$. Soit $M > 0$.
On a $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1,\ u_n \in [l-1, l+1]$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2,\ v_n \geq M - (l-1)$.
Pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a $u_n + v_n \geq l - 1 + M - (l-1) = M$, donc $u_n + v_n \to +\infty$.

Lemme 19

Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Preuve :

Soient u et v deux suites réelles telles que $u_n \to 0$ et v bornée. Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque v est bornée, $(|v_n|)$ est majorée : $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M$.
Puisque $u_n \to 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{M}$.
Alors : $\forall n \geq n_0,\ |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$

Lemme 20

Si (u_n) converge vers $l > 0$, alors $u_n > \frac{l}{2}$ à partir d'un certain rang, en particulier $u_n > 0$ à.p.d.c.r.

Preuve :

Prenons $\varepsilon = \frac{l}{2}$. On a $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n \in [l - \frac{l}{2}, l + \frac{l}{2}]$. En particulier, $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq \frac{l}{2} > 0$.

Proposition 21: Produit de deux suites ayant une limite. ★

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et l, l' deux nombres réels.

Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$, alors $u_n v_n \to ll'$.

Supposons $l > 0$. Si $u_n \to l$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \to +\infty$.

Preuve :

★ Supposons $u_n \to l$ et $v_n \to l'$.
Soit $\varepsilon > 0$: $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1,\ |u_n||v_n - l'| \leq \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2,\ |l'||u_n - l| \leq \varepsilon$.
Pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a:

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n(v_n - l') + u_n l' - ll'| = |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \\ &= |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Donc $u_n v_n \to ll'$.

• Supposons $u_n \to l > 0$ et $v_n \to +\infty$. Soit $M > 0$: $\exists n_0' \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0'\ v_n \geq \frac{2M}{l}$.
D'après le lemme, on a : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n \geq \frac{l}{2}$. Donc pour $n \geq \max(n_0, n_0')$: $u_n v_n \geq \frac{l}{2} \cdot \frac{2M}{l} \geq M$.

Proposition 22: Inverse, quotient de deux suites ayant une limite.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et l, l' deux nombres réels, avec $l \neq 0$.

Si $(u_n) \to 0_+$, alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$. Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$, alors $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{l}{l'}$.

Preuve :

• Supposons $u_n \to 0_+$. Soit $M > 0$, on pose $\varepsilon = M^{-1}$.
Puisque $u_n \to 0_+$, on a $0 \leq u_n \leq M^{-1}$ àpdcr, donc $u_n^{-1} \geq M$ àpdcr.

Proposition 23: Lemme de Cesàro.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n la moyenne arithmétique des n premiers termes de u : $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Si $u_n \to l$, alors $c_n \to l$.

3 Passer à la limite ?

Les propositions ci-dessous examinent la possibilité de passer à la limite dans une inégalité ou une égalité.

Proposition 24: Passage à la limite d'une inégalité large.

Soient u et v deux suites réelles et l, l' deux réels.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \\ u_n \to l \quad \text{et} \quad v_n \to l' \end{cases} \qquad \text{alors } l \leq l'.$$

En particulier,

- si u est majorée par $M \in \mathbb{R}$ et admet une limite, alors $\lim u_n \leq M$.
- si u est minorée par $m \in \mathbb{R}$ et admet une limite, alors $\lim u_n \geq m$.

Preuve :

Cas particulier. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$ et $u_n \to l$. Par l'absurde, supposons $l M$.
On pose $\varepsilon = \frac{l-M}{2} > 0$. Puisque $u_n \to l$, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, absurde car alors $u_{n_0} > M$.
Donc $l \leq M$. Même preuve pour le cas minoré.

Cas général. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$, que $u_n \to l$ et que $v_n \to l'$.
On a $(v_n - u_n)$ minorée par 0 et $v_n - u_n \to l' - l$.
D'après le cas particulier, $l' - l \geq 0$ donc $l \leq l'$.

Les inégalités structes ne sont **pas** conservées : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} > 0$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Exemple 25

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Que dire de la monotonie de u ?
2. Supposons $u_0 \in [0,1]$. Montrer que (u_n) est convergente et que $\lim u_n = 0$.
3. Supposons que $u_0 < 0$. Montrer que $(u_n) \to -\infty$. Que dire si $u_0 > 1$?

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.
$\boxed{2.}$ Supposons $u_0 \in [0,1]$, Par récurrence, on montre que $u_n \geq 0$. Vrai pour u_0.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} = u_n(1-u_n) \geq 0$ donc u est minorée par 0 par récurrence.
La suite est décroissante et minorée donc elle converge par TLM, on note l sa limite.
On a $l = l - l^2$ par passage à la limite donc $l = 0$.
$\boxed{3.}$ Supposons $u_0 < 0$ et u minorée. Par TLM, u converge, on note l sa limite, alors $l = 0$.
Par décroissance de u, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_0$ donc $l \leq u_0$ donc $0 \leq u_0 < 0$, absurde.
Donc u n'est pas minorée : elle diverge vers $-\infty$. Quand $u_0 > 1$, $u_1 < 0$.

Voici un résultat utilisé pour obtenir une équation sur la limite d'une suite convergente définie par une relation du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Proposition 26: La limite comme point fixe.

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f : X \to X$ et u une suite satisfait $u_0 \in X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers une limite l, que $l \in I$ et que f est continue en l, alors $f(l) = l$.

Preuve :

On a $u_{n+1} = f(l)$ et $u_{n+1} \to l$ donc $u_n \to l$ donc $f(u_n) \to f(l)$ car f est continue en l.
Alors $f(l) = l$.

Exemple 27

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \operatorname{ch}(u_n)$. Démontrer que (u_n) diverge.

Solution :

Supposons u convergente vers $l \in \mathbb{R}$, alors $l = \operatorname{ch}(l)$, or ch n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}$, absurde donc u diverge.

4 Existence d'une limite : preuve des théorèmes.

On se concentre ici sur les preuves de résultats qui ont été abondamment utilisés dans le cours **Suites réelles : la pratique**. On y renvoie le lecteur pour les illustrations, les exemples, les corollaires...

On rappelle qu'établir un encadrement ou exploiter une monotonie sont les deux stratégies principales face à un problème de convergence de suites.

Encadrement.

Théorème 28: d'encadrement, ou des gendarmes. ★

Soient trois suites réelles $(g_n), (u_n), (d_n)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ g_n \leq u_n \leq d_n$.
Si de surcroît, (g_n) et (d_n) convergent vers la limite $l \in \mathbb{R}$, alors

$$(u_n) \text{ est convergente et } \lim u_n = l.$$

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1,\ |g_n - l| \leq \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2,\ |d_n - l| \leq \varepsilon$.
Alors $\forall n \geq \max(n_1, n_2),\ l - \varepsilon \leq g_n \leq u_n \leq d_n \leq l + \varepsilon$ donc $u_n \to l$.

Proposition 29: de minoration, de majoration. ★

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ et $v_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

Preuve :

Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ et $u_n \to +\infty$. Soit $M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n \geq M$.
Alors $\forall n \geq n_0,\ v_n \geq u_n \geq M$

Monotonie.

Théorème 30: de la limite monotone. ★

Toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie.
Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$

Preuve :

Soit (u_n) une suite croissante.
• Supposons u majorée : $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
Posons $T = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, non vide et majoré : on note $l = \sup(T)$. Soit $\varepsilon > 0$.
Par caractérisation : $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ s - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq l$ et par croissance de u : $\forall n \geq n_0,\ u_{n_0} \leq u_n$.
Ainsi, $\forall n \geq n_0,\ l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq l$. On a bien $u_n \to l$.
• Supposons que u n'est pas majorée. Soit $M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ u_{n_0} > M$.
Par croissance de u, $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq u_{n_0} > M$ donc $u_n \to +\infty$.

On rappelle que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsqu'elles sont monotones, de monotonie contraire, et que leur différence tend vers 0.

Théorème 31: Convergence des suites adjacentes. ★

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite finie.

Plus précisément, si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes (u croissante et v décroissante), alors elles convergent vers une même limite finie $l \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$.

Preuve :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. On suppose u croissante, v décroissante et $u_n - v_n \to 0$.
• u est croissante, par TLM, elle est convergente ou divergente vers $+\infty$.
— Supposons que $u \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq v_0 - u_n$ par décroissance de v.
Ainsi, puisque $u_n \to +\infty$, $v_0 - u_n \to -\infty$ donc $v_n - v_n \to -\infty$, absurde donc u converge.
• v est décroissante, par TLM, elle est convergente ou divergente vers $-\infty$.
— Pour les mêmes raisons, v_n converge.
Notons $l = \lim u_n$ et $l' = \lim v_n$. On a $v_n - u_n \to 0$ et $v_n - u_n \to l - l'$ donc par unicité de la limite, $l = l'$.
On a l plus petit majorant de u et plus grand minorant de v d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$.

5 Suites extraites.

Définition 32

Soit (u_n) une suite. Une **suite extraite** de (u_n) est une suite (v_n) dont le terme général est de la forme

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple. Soit (u_n) une suite réelle.

- Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).
- D'autres exemples : (u_{n+1}), (u_{n^2}), (u_{2^n})...

Lemme 33

Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.

Preuve :

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « $\varphi(n) \geq \mathbb{N}$ ».
Initialisation. $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ par stricte croissante de φ.
Ainsi, $\varphi(n+1) > n$ donc $\varphi(n+1) \geq n+1$ car $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$.
Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.

Proposition 34

Soit (u_n) une suite convergente.
Toute suite extraite de (u_n) converge vers la limite de (u_n).

Preuve :

Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n) avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \varepsilon$.
Pour $n \geq n_0$, $\varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0$ donc $|u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$.

Méthode : Prouver la divergence d'une suite avec deux suites extraites.

Si une suite a deux suites extraites ne convergeant pas vers la même limite, alors elle diverge.

Exemple 35

Montrer (à nouveau) que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Solution :

On a $(-1)^{2n} \to 1$ et $(-1)^{2n+1} \to -1$, donc deux suites extraites de $((-1)^n)$ n'ont pas la même limite.

Proposition 36

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } u_{2n} \to l \text{ et } u_{2n+1} \to l, \text{ alors } u_n \to l.$$

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2,\ |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$.
Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$. $\forall k \geq 2n_0,\ |u_k - l| \leq \varepsilon$ donc $u_n \to l$.

Théorème 37: de Bolzano-Weierstrass.

Toute suite bornée possède une suite extraite convergente.

6 Traduction séquentielle de certaines propriétés.

Définition 38

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est **dense** dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Plus précisément, si

$$\forall a < b \in \mathbb{R}, \quad X \cap \ ]a, b[\neq \varnothing.$$

Exemple. Dans le cours Propriétés de $\mathbb{R}$, on a démontré que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Proposition 39: Caractérisation séquentielle de la densité.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre les assetions

1. X est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel α, il existe une suite d'éléments de X qui tend vers α.

Preuve :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons X dense dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par densité de X dans $\mathbb{R}$, $X \cap]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}[\neq \varnothing$. Soit $x_n \in X]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}[$.
Par construction, $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha - \frac{1}{n} \leq x_n \leq \alpha + \frac{1}{n}$ et par encadrement, $x_n \to \alpha$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid x_n \to \alpha$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On pose $\alpha = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{R}$. Alors $\exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid x_n \to \alpha$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |x_n - \alpha| \leq \varepsilon$ alors $x_{n_0} \in]a, b[\cap X$.
On a bien $]a, b[\cap X \neq \varnothing$ donc X est dense dans $\mathbb{R}$.

Corollaire. Tout réel est la limite d'une suite de rationnels.

Proposition 40

Si X est une partie de $\mathbb{R}$ non-vide majorée (resp. non majorée), alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$)

7 Suites complexes.

Définition 41

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) **converge** vers l et on note $u_n \to l$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Proposition 42

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. On a

$$u_n \to l \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \to \mathrm{Re}(l) \\ \mathrm{Im}(u_n) \to \mathrm{Im}(l) \end{cases}$$

Restent vraies avec des suites à valeurs complexes :

— Les résultats sur la limite d'une somme, d'un produit.

— Une limite usuelle : si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < 1$, alors $z^n \to 0$.

— L'idée que pour prouver qu'une suite de nombres complexes tend vers 0, on peut écraser son module par une suite qui tend vers 0.

— Toute suite de nombres complexes qui converge vers une limite finie est bornée (c'est-à-dire que la suite des modules est majorée).

— Bolzano-Weierstrass : de toute suite de nombres complexes bornée (majorée en valeur absolue), on peut extraire une suite convergente.

À oublier en revanche : tous les arguments à base d'encadrement ou de monotonie : on rappelle que dans $\mathbb{C}$, on ne dispose pas d'une relation d'ordre.

8 Exercices

Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 1: ♦♦◊

Calculer les bornes supérieures et inférieures des parties, après en avoir prouvé l'existence.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad B = \left\{ \frac{m}{nm+1} \mid m \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad C = \{x^2 + y^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy = 1\}.$$

Solution :

$\boxed{A}$ A est non-vide, minoré par -1 et majoré 2. On note u la suite de terme général $\frac{1}{n} + (-1)^n$.
On a (u_{2n}) et (u_{2n+1}) décroissantes. De plus, $u_2 > u_1$ donc $\sup A = u_2$ et $\inf A = \min(\lim u_{2n}, \lim u_{2n+1}) = -1$.
$\boxed{B}$ B est non-vide, minoré par 0 et majoré par 1.
À n fixé, $\dfrac{m}{nm+1} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1$ donc $\sup B = 1$ et à m fixé, $\dfrac{m}{nm+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\inf B = 0$.
$\boxed{C}$ Posons $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$. On a:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	||	$-$		$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Donc $\inf C = 2$ et $\sup C = +\infty$.
On a posé cette fonction f car pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$, $xy = 1 \iff y = x^{-1}$.

Exercice 2: ♦♦◊

Soient A et B deux aprties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B := \{x+y \mid (x,y) \in A \times B\}$. Démontrer

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Solution :

$\boxed{\leq}$ Soit $x \in A+B$, $\exists a,b \in A \times B \mid x = a+b$. On a $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$ donc $x \leq \sup(A)+\sup(B)$.
On a donc $\sup(A+B) \leq \sup(A)+\sup(B)$.
$\boxed{\geq}$ Soient $a,b \in A \times B$ on a $a+b \leq \sup(A+B)$ donc $a \leq \sup(A+B) - b$ donc $\sup(A) \leq \sup(A+B) - b$.
Ainsi, $b \leq \sup(A+B) - \sup(A)$, d'où $\sup(A)+\sup(B) \leq \sup(A+B)$.

Suites convergentes : quelques exercices de plus.

Exercice 3: ♦♦◊

Soit (u_n) une suite de réels non nuls telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$.
Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Solution :

Soit $\varepsilon \in]0,1[$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq \varepsilon$. Soit $n \geq n_0$.
On a $|u_{n+1}| \leq \varepsilon |u_n|$ donc $|u_{n+1}| \leq \varepsilon^2 |u_{n-1}|$ et par récurrence, $|u_{n+1}| \leq \varepsilon^{n-n_0}|u_{n_0}|$.
Or $\varepsilon^{n-n_0} \to 0$ donc $\varepsilon^{n-n_0}|u_{n_0}| \to 0$ donc $u_{n+1} \to 0$ $|u_{n+1}| \to 0$ car $(|u_n|)$ est strictement positive.
Ainsi, (u_n) converge vers 0.

Exercice 4: ♦♦◊

Soit u une suite bornée et v définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sup\{u_k \mid k \in [\![n,+\infty]\!]\}$.
Justifier que v est bien définie et qu'elle est convergente.

Solution :

On note $A_n = \{u_k \mid k \in [\![n,+\infty]\!]\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a A_n non vide car $u_n \in A_n$ et majoré car u est bornée. Ainsi, v est bien définie.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{n+1} \subset A_n$ donc $\sup(A_{n+1}) \leq \sup(A_n)$ donc $v_{n+1} \leq v_n$: v est décroissante.
Enfin, u est bornée, notons m sa borne inférieure, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq \inf A_n \geq \inf A_0 = m$.
Donc v est minorée et décroissante donc elle converge par TLM.

Exercice 5: ♦♦◊

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 > v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}; \quad v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune. En examinant la suite (u_nv_n), exprimer cette limite en fonction de u_0 et v_0.

Solution :

Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n > 0$.
Initialisation. Immédiate.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq v_n > 0$. On a :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} > 0.$$

Conclusion. Par récurrence, on a $u_n > v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} < 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{u_nv_n - v_n^2}{u_n+v_n} > \frac{v_n^2 - v_n^2}{u_n+v_n} = 0$$

Donc (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
On en déduit que (u_n) est minorée par v_0 et (v_n) est majorée par u_0, donc par TLM elles convergent.
Notons l, l' leurs limites. On a:

$$l = \frac{l+l'}{2} \quad \text{donc} \quad 2l = l + l' \quad \text{donc} \quad l = l'.$$

Par calcul, on trouve que (u_nv_n) est constante égale à u_0v_0 car pour $n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n$. Ainsi:

$$l = \frac{2u_0v_0}{2l} \quad \text{donc} \quad l^2 = u_0v_0 \quad \text{donc} \quad l = \sqrt{u_0v_0}.$$

On a exclu la solution négative car on a montré que $u_n > v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6: ♦♦◊ Lemme de Riemann-Lebesgue.

Soit $[a,b]$ un segment avec $a \le b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b e^{int} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b e^{int} f(t)\mathrm{d}t\right| &\le \left|\left[\frac{1}{in}e^{int}f(t)\right]_a^b\right| + \left|\int_a^b \frac{1}{in}e^{int}f'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{n}|f(b)| + \frac{1}{n}|f(a)| + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t \\ &\to 0\end{aligned}$$

Par théorème des gendarmes, on obtient le résultat.

Exercices avec epsilon.

Exercice 7: ♦◊◊

Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire.

Solution :

Soit $(u_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ convergente vers $l \in \mathbb{N}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \ge n_0,\ |u_n - l| < 1$.
Alors $\forall n \ge n_0,\ u_n = l$, donc (u_n) est stationnaire.

Exercice 8: ♦♦◊

Soit (u_n) une suite réelle. Prouver l'équivalence

$$u_n \to 0 \iff \frac{u_n}{1+|u_n|} \to 0.$$

Solution :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $u_n \to 0$. Alors $1+|u_n| \to 1$ donc par inverse : $\frac{1}{1+|u_n|} \to 1$ donc par produit : $\frac{u_n}{1+|u_n|} \to 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\frac{u_n}{1+|u_n|} \to 0$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \ge n_0,\ \left|\frac{u_n}{1+|u_n|}\right| \le \varepsilon$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{u_n}{1+|u_n|}\right| = \frac{|u_n|}{|1+|u_n||} \le \varepsilon \quad \text{donc} \quad |u_n| \le \varepsilon(1+|u_n|) \quad \text{donc} \quad |u_n|(1-\varepsilon) \le \varepsilon$$

Donc $|u_n|(1-\varepsilon) \to 0$ donc $|u_n| \to 0$ donc $u_n \to 0$.

Exercice 9: ♦♦♦ Cesàro généralisé.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels et $l \in \mathbb{R}$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que

$$\text{Si } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l, \text{ alors } \frac{\sum_{k=1}^n a_k u_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

Solution :

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{k=1}^n a_k u_k}{\sum_{k=1}^n a_k} - l\right| &= \left|\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k}\left(\sum_{k=1}^n a_k u_k - l\sum_{k=1}^n a_k\right)\right| = \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k}\left|\sum_{k=1}^n a_k(u_k - l)\right| \\ &\le \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k}\sum_{k=1}^n a_k|u_k - l|\end{aligned}$$

Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \ge n_0,\ \sum_{k=1}^n a_k|u_k - l| \le \varepsilon \sum_{k=1}^n a_k$. On a:

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n a_k u_k}{\sum_{k=1}^n a_k} - l\right| \le \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k}\sum_{k=1}^n a_k|u_k - l| \le \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n a_k}\varepsilon = \varepsilon.$$

Donc $\frac{\sum_{k=1}^n a_k u_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Suites extraites.

Exercice 10: ♦◊◊

Démontrer qu'une suite extraite d'une suite extraite d'une suite (u_n) est une suite extraite de (u_n).

Solution :

Soient $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = u_{\varphi(n)}$ et $w_n = v_{\psi(n)}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = u_{\varphi\circ\psi(n)}$ et $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ par composition.
Ainsi, (w_n) est extraite de (u_n).De plus, (w_n) est extraite de (v_n) qui est extraite de (u_n).
On a bien le résultat.

Exercice 11: ♦♦◊

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $(|u_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$ ssi u admet une suite extraite convergente.

Solution :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $(|u_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$. Alors $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.
Ainsi, $(|u_n|)$ est bornée donc admet une suite extraite convergente d'après Bolzano-Weierstrass.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que u admette une suite extraite convergente $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
Par l'absurde, on suppose que $|u_n| \to +\infty$, donc pour $M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n| > M$.
Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$ donc pour $n \geq n_0$, $|u_{\varphi(n)}| \geq |u_n| > M$.
Ainsi, $|u_{\varphi(n)}|$ diverge, donc $u_{\varphi(n)}$ aussi, ce qui est absurde. Donc $|u_n|$ ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice 12: ♦♦◊

Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes.
Montrer que (u_n) est convergente.

Solution :

Soit $l_1 = \lim u_{2n}$, $l_2 = \lim u_{2n+1}$ et $l_3 = \lim u_{3n}$.
On a u_{6n} extraite de u_{3n} et u_{2n} donc u_{6n} converge vers l_1 et l_3. Par unicité de la limite, $l_1 = l_3$.
On a u_{6n+3} extraite de u_{3n} et u_{2n+1} donc u_{6n+3} converge vers l_2 et l_3. Par unicité de la limite, $l_2 = l_3$.
Donc $l_1 = l_2 = l_3$ et d'après 36, (u_n) converge vers leur limite commune.

Exercice 13: ♦♦♦

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n > 0,\ \frac{a_n}{b_n} \to l \quad \text{et} \quad l \notin \mathbb{Q}.$$

Montrer que $b_n \to +\infty$.

Solution :

Par l'absurde, on suppose que (b_n) ne diverge pas vers $+\infty$: $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n < M$.
D'après Bolzano-Weierstrass, il existe $(b_{\varphi(n)})$ convergente vers $\beta \in \mathbb{N}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
On en déduit que $a_{\varphi(n)} \to \beta l \in \mathbb{N}$, alors $l = \frac{\beta l}{\beta} \in \mathbb{Q}$, absurde donc $b_n \to +\infty$.

Exercice 14: ♦♦♦

On veut montrer que la suite de terme général $\sin(n)$ diverge.
On note $u_n = \sin(n)$. On raisonne par l'absurde en supposant que (u_n) est convergente, de limite l.

1. En considérant $\sin(n+1) - \sin(n-1)$, montrer que $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. En déduire une contradition.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n)$.
Par passage à la limite, on a $0 = 2\sin(1) \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n) = 0$.

$\boxed{2.}$ On a $\sin(2n) = 2\sin(n)\cos(n) \to 0$ donc $l = 0$ par unicité, donc $\cos^2(n) + \sin^2(n) \to 0$.
Or $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$, donc $0 = 1$ par unicité de la limite, absurde.

Exercice 15: ♦♦♦

Démontrer la divergence de la suite (u_n) de terme général $\sin(\ln(n))$.

Solution :

Par l'absurde, on suppose que $u_n \to l \in [-1, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\varphi : n \mapsto n^2$. On a $u_{\varphi(n)} \to l$ donc $2\cos(\ln(n))\sin(\ln(n)) \to l$.
De plus, $|\cos(\ln(n))| = \sqrt{1 - \sin^2(\ln(n))} \to \sqrt{1 - l^2} := \gamma$.
Donc par passage à la limite, $|l| = 2|l|\gamma$ donc $|l|(1-\gamma) = 0$.
D'une part, on a $\sin(\ln(2^{n+1})) = ... = \sin(n\ln(2))\cos(\ln(2)) + \cos(n\ln(2))\sin(\ln(2))$.
D'autre part, on a $\sin(\ln(2^{n-1})) = ... = \sin(n\ln(2))\cos(\ln(2)) - \cos(n\ln(2))\sin(\ln(2))$.
Ainsi, $\sin(\ln(2^{n+1})) - \sin(\ln(2^{n-1})) = ... = 2\cos(n\ln(2))\sin(\ln(2))$.
Le membre de gauche tend vers 0, celui de droite vers $2\gamma\sin(\ln(2))$ donc par unicité de la limite, $\gamma = 0$.
Or, $|l|(1-\gamma) = 0$ et $\gamma \neq 1$ donc $|l| = l = 0$.
Enfin, $\cos^2(\ln(n)) + \sin^2(\ln(n)) = 1$ et $\cos^2(\ln(n)) + \sin^2(\ln(n)) \to 0$, absurde.