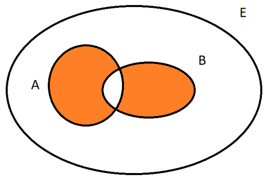
Corrigé du DS 2

1. « $x \in A\Delta B$ » est synonyme de « $x \in A$ OU BIEN $x \in B$ ».



2.

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A\cup B)\setminus(A\cap B)\\
&= (A\cup B)\cap\overline{A\cap B}\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) && \text{(Morgan)}\\
&= \underbrace{(A\cap\overline{A})}_{\emptyset}\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup\underbrace{(B\cap\overline{B})}_{\emptyset} && \text{(distributivité)}\\
&= (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B).
\end{aligned}$$

3. (a) En appliquant l'identité de la question précédente aux ensembles $A\Delta B$ et C, on obtient

$$(A\Delta B)\Delta C = \left[(A\Delta B)\cap\overline{C}\right]\cup\left[\overline{A\Delta B}\cap C\right].$$

Calculons d'une part

$$\begin{aligned}
(A\Delta B)\cap\overline{C} &= \big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big)\cap\overline{C}\\
&= \big((A\cup\overline{A})\cap(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})\big)\cap\overline{C}\\
&= \big(E\cap(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cap E\big)\cap\overline{C}\\
&= \big((A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})\big)\cap\overline{C}\\
&= \big(\emptyset\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup\emptyset\big)\cap\overline{C}\\
&= (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cup B\cap\overline{C}).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\overline{A\Delta B}\cap C &= \overline{(A\cap\overline{B}\cup(\overline{A}\cap B))}\cap C\\
&= (\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap C\\
&= (\overline{A}\cup B\cap C)\cup(A\cup\overline{B}\cap C).
\end{aligned}$$

En faisant la réunion, on obtient bien

$$(A\Delta B)\Delta C = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C).$$

(b) L'ensemble $(A\Delta B)\Delta C$ est donc celui des éléments de E qui sont dans les trois parties A, B et C à la fois, ou dans l'une d'elles sans être dans les deux autres.

(c) Dans la description précédente, A, B et C jouent des rôles symétriques : le sens ne change pas si on permute les lettres. On a donc

$$(A\Delta B)\Delta C = (B\Delta C)\Delta A.$$

Et puisque Δ est commutatif (clair d'après la définition), on a

$$\boxed{(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)}.$$

On a bien prouvé l'*associativité* de Δ.

4. On démontre ceci par récurrence sur n.
• Considérons deux ensembles A_1 et A_2 pour traiter le cas $n=2$. Un élément de E est dans 0, 1 ou 2 des ensembles A_i. S'il est dans un nombre impair d'ensembles A_i, c'est qu'il est dans un des A_i et pas dans l'autre, ce qui est précisément être dans $A_1\Delta A_2$.
• Soit $n\geq 2$. Supposons la propriété au rang n. Démontrons-la au rang $n+1$ et pour cela, considérons $A_1,\ldots,A_{n+1}$ parties de E. Par associativité, on a

$$A_1\Delta\cdots\Delta A_n\Delta A_{n+1} = (A_1\Delta\cdots\Delta A_n)\,\Delta A_{n+1}.$$

— Soit x un élément de E qui est dans $A_1\Delta\cdots\Delta A_n\Delta A_{n+1}$, donc dans $(A_1\Delta\cdots\Delta A_n)\,\Delta A_{n+1}$. On a donc

$$x\in A_1\Delta\cdots\Delta A_n \text{ ou bien } x\in A_{n+1}$$

Dans le cas où $x\in A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ et $x\notin A_{n+1}$, l'hypothèse de récurrence nous donne que x appartient à un nombre impair de parties parmi $A_1,\ldots,A_n$, et donc parmi $A_1,\ldots A_{n+1}$.
Dans le cas où $x\in A_{n+1}$ mais $x\notin A_1\Delta\cdots\Delta A_n$, alors le nombre de parties A_i dont x est un élément vaut 1, qui est impair (en effet, par hypothèse de récurrence, $A_1\Delta\cdots\Delta A_n\subset A_1\cup\cdots\cup A_n$).

— Soit x un élément de E qui est dans un nombre impair de parties parmi $A_1,\ldots,A_{n+1}$.

- Supposons que $x\in A_{n+1}$. Alors il ne saurait alors être dans $A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ car alors il serait dans un nombre impair de parties parmi $A_1,\ldots,A_n$ et donc dans un nombre pair de parties parmi $A_1,\ldots A_n$.
- Supposons que $x\notin A_{n+1}$. Alors x est dans un nombre impair de parties $A_1,\ldots,A_n$ donc... dans $A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ par hypothèse de récurrence.

On a prouvé que $x \in (A_1 \Delta \cdots \Delta A_n) \Delta \Delta A_{n+1}$.
Par double-inclusion, on vient de prouver que $A_1 \Delta \cdots \Delta A_{n+1}$ est exactement l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à un nombre impair de parties parmi $A_1, \cdots, A_{n+1}$.

Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété voulue est vraie pour tout entier n supérieur à 2.

Exercice 2. Formule de Machin.

1. Voir preuve dans le cours.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note $f_a : x \mapsto \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$.

(a) La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction f_a est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\}$.
On a $\boxed{f_a(0) = \arctan(a)}$.
Calculons la limite en $+\infty$. Pour cela, factorisons

$$\frac{a+x}{1-ax} = \frac{\cancel{x}(1+a/x)}{\cancel{x}(-a+1/x)},$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(-\frac{1}{a}) = -\arctan(\frac{1}{a}) = \arctan(a) - \frac{\pi}{2}$, où on a utilisé l'imparité de arctan et la formule redémontrée en question 1. On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \arctan(a) - \frac{\pi}{2}}$.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{a+x}{1-ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{a}\}$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a donc que f_a est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\}$ comme composée. Pour tout x différent de $1/a$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-ax)-(a+x)(-a)}{(1-ax)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \\ &= \frac{1+a^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} \\ &= \frac{1+a^2}{1-\cancel{2ax}+a^2x^2+a^2+\cancel{2ax}+x^2} \\ &= \frac{\cancel{1+a^2}}{\cancel{(1+a^2)}(1+x^2)}. \end{aligned}$$

(c) Les fonctions f_a et arctan ont même dérivée sur les intervalles $]-\infty, \frac{1}{a}[$ et $]\frac{1}{a}, +\infty[$. Sur chacun de ces deux intervalles, elles sont égales à une constante additive près.

- On note C la constante réelle telle que

$$\forall x \in]-\infty, \tfrac{1}{a}[\quad f_a(x) = \arctan(x) + C.$$

Évaluons en 0 pour connaître C :

$$f_a(0) = \arctan(0) + C \quad \text{ce qui laisse} \quad C = \arctan(a).$$

On obtient donc

$$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{a}[\quad \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a).$$

- On note C' la constante réelle telle que

$$\forall x \in]\tfrac{1}{a}, +\infty[\quad f_a(x) = \arctan(x) + C'.$$

Passons à la limite en $+\infty$ pour connaître C' :

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) + C'.$$

Ceci laisse

$$\arctan(a) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + C' \quad \text{d'où} \quad C' = \arctan(a) - \pi.$$

On obtient donc

$$\forall x \in]\tfrac{1}{a}, +\infty[\quad \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi.$$

On a bien démontré que pour tout $b \in \mathbb{R}$ tel que $ab \neq 1$, on a

$$\boxed{\arctan(a) + \arctan(b) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) & \text{si } b < \frac{1}{a} \\ \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi & \text{si } b > \frac{1}{a}. \end{cases}}$$

3. On utilise l'identité démontrée à la question précédente avec $a=b=\frac{1}{5}$ (en remarquant que $\frac{1}{5}<5$) :

$$2\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{5}) = \arctan\left(\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) = \arctan\left(\frac{10}{24}\right).$$

Ce qui laisse $2\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$.

4. On en déduit que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = 2\arctan(\frac{5}{12}).$$

On va donc réappliquer l'identité prouvée plus haut avec $a=b=\frac{5}{12}$ (en remarquant que $\frac{5}{12}<\frac{12}{5}$).

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{10}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}\right) = \arctan\left(\frac{10\times 12}{144-25}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right).$$

5. On calcule

$$4\arctan(\frac{1}{5}) - \frac{\arctan(\pi}{4} = \arctan\left(\frac{120}{119}\right) + \arctan(-1).$$

On va (à nouveau !) appliquer l'identité de la question 2 avec $a=\frac{120}{119}$ et $b=-1$ (en remarquant que $b<\frac{1}{a}$) :

$$4\arctan(\frac{1}{5}) - \frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{\frac{120}{119}-1}{1-\frac{120}{119}\times(-1)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

On a bien démontré

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).}$$

Problème. Homographies conservant le cercle.

Partie I. Homographies de type A

1. Pour $z\in\mathbb{U}$ on a $|z|=1$, donc $|A_\omega(z)| = \frac{|\omega|}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$. Cela montre bien que

$$\boxed{z\in\mathbb{U} \implies A_\omega(z)\in\mathbb{U}}.$$

Partie II. Homographies de type B

1. (a) Raisonnons par l'absurde en supposant que $|z|=1$ et $\overline{\alpha}z+1=0$.
On aurait alors $\overline{\alpha}z=-1$, puis en prenant les modules $|\overline{\alpha}|\,|z|=1$ et donc $|\overline{\alpha}|=1$ car $|z|=1$. Cela contredit le fait que $\alpha\notin\mathbb{U}$. Ce raisonnement par l'absurde prouve que

$$\boxed{|z|=1 \implies \overline{\alpha}z+1\neq 0}.$$

(b) Soit $z\in\mathbb{U}$, c.-à-d. $|z|=1$. On sait qu'alors $\overline{z}=\frac{1}{z}$ (car $z\overline{z}=1$).

$$|B_{\omega,\alpha}(z)| = |\omega|\cdot\frac{|z+\alpha|}{|\overline{\alpha}z+1|} = 1\cdot\frac{|z+\alpha|}{|z(\overline{\alpha}+\frac{1}{z})|} = \frac{|z+\alpha|}{|z|\cdot|\overline{\alpha}+\overline{z}|} = \frac{|z+\alpha|}{|\overline{\alpha+z}|} = 1.$$

$$\boxed{z\in\mathbb{U} \implies B_{\omega,\alpha}(z)\in\mathbb{U}}$$

Partie III. Homographies conservant $\mathbb{U}$

On suppose que $\forall z\in\mathbb{U}\quad h(z)\in\mathbb{U}$.

1. (a) $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z'}+z'\overline{z} = |z|^2+|z'|^2+\overline{\overline{z}z'}+\overline{z}z'$.
Puisque $\overline{\overline{z}z'}+\overline{z}z' = 2\mathrm{Re}(\overline{z}z')$, il vient

$$\boxed{|z+z'|^2 = |z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}(\overline{z}z')}.$$

(b) Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et posons $z=e^{i\theta}$. Alors $z\in\mathbb{U}$.
Par hypothèse on a $h(z)=h\left(e^{i\theta}\right)\in\mathbb{U}$, c.-à-d. $|h(z)|=1$.
Or $|h(z)|=\frac{|az+b|}{|cz+d|}$; $|h(z)|=1$ donne donc $|az+b|=|cz+d|$.
Ainsi $\left|ae^{i\theta}+b\right|^2 = \left|ce^{i\theta}+d\right|^2$.

En développant par la formule de la question précédente on obtient :

$$\left|ae^{i\theta}+b\right|^2 = \left|ae^{i\theta}\right|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{a}e^{-i\theta}b\right) = |a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{a}be^{-i\theta}\right).$$

On trouve de même $\left|ce^{i\theta}+d\right|^2 = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{c}de^{-i\theta}\right)$. Il reste bien

$$\boxed{|a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{a}be^{-i\theta}\right) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{c}de^{-i\theta}\right)}.$$

(c) En prenant $\theta = 0$ on obtient $u + 2\mathrm{Re}(v) = 0$; avec $\theta = \pi$ il vient $u - 2\mathrm{Re}(v) = 0$. En ajoutant ces deux relations on trouve $2u = 0$ et donc

$$\boxed{u = 0}.$$

Ensuite, en écrivant $v = re^{i\alpha}$ avec $(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, la relation devient

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad : \quad 2r\mathrm{Re}(e^{i(\alpha-\theta)}) = 0.$$

Prendre $\theta = \alpha$ conduit à $2r = 0$, c.-à-d.

$$\boxed{v = 0}.$$

(d) On pose $u = |a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2$ et $v = \overline{a}b - \overline{c}d$.
D'après la question ***b*** on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad : \quad u + 2\mathrm{Re}(ve^{-i\theta}) = 0.$$

La question précédente montre que $u = v = 0$, c.-à-d.

$$\boxed{|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \quad \text{et} \quad \overline{a}b = \overline{c}d}.$$

2. (a) $\overline{c}(ad - bc) = a\underbrace{\overline{c}d}_{=\overline{a}b} - bc\overline{c} = a\overline{a}b - b\,|c|^2 = |a|^2\,b - b\,|c|^2$ et donc

$$\boxed{\overline{c}(ad - bc) = b\left(|a|^2 - |c|^2\right)}.$$

Raisonnons par l'absurde. Si $|a|^2 - |c|^2 = 0$ alors (relation précédente) $\overline{c}(ad - bc) = 0$ et donc $\overline{c} = 0$ puisque $ad - bc \neq 0$. On aurait donc $c = 0$. Puis $|a|^2 = |c|^2 = 0$ donnerait $a = 0$. Mézalors $ad - bc = 0 - 0 = 0$, ce qui contredirait $ad - bc \neq 0$.

$$\boxed{|a|^2 - |c|^2 \neq 0}.$$

(b) Constatons que $|a|\,|b| = |c|\,|d|$ puisque $\overline{a}b = \overline{c}d$. Alors

$$\begin{aligned}\left(|a|^2 - |c|^2\right)\left(|a|^2 - |d|^2\right) &= |a|^4 - (\underbrace{|c|^2 + |d|^2}_{=|a|^2+|b|^2})\,|a|^2 + (|c|\,|d|)^2 \\ &= |a|^4 - \left(|a|^2 + |b|^2\right)|a|^2 + (|a|\,|b|)^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(|a|^2 - |c|^2\right)\left(|a|^2 - |d|^2\right) = 0}$$

(c) Puisque $|a|^2 - |c|^2 \neq 0$, la relation précédente laisse $|a|^2 - |d|^2 = 0$, d'où immédiatement

$$\boxed{|a| = |d|}.$$

La relation $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ impose ensuite

$$\boxed{|b| = |c|}.$$

3. Dans ce cas, $|a| = |d| = 0$: $a = d = 0$. De $ad - bc \neq 0$ on déduit que $c \neq 0$. On a donc $D_{c,d} = \mathbb{C}^*$ et, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = \frac{b}{cz}$. On pose $\omega = \frac{b}{c}$. On constate que $|\omega| = \frac{|b|}{|c|} = 1$. Alors

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad h(z) = \frac{\omega}{z} \qquad \boxed{h = A_\omega}$$

4. Dans ce cas, $a \neq 0$ et $d \neq 0$ (car $|d| = |a|$). On a donc

$$\forall z \in D_{c,d} \quad : \quad h(z) = \frac{a}{d} \times \frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z + 1}.$$

Notons

$$\omega = \frac{a}{d} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{b}{a}.$$

On observe que $|\omega| = \frac{|a|}{|d|} = 1$.
Grâce aux relations $\overline{a}b = \overline{c}d$ et $|a| = |d|$: $\alpha = \frac{b\overline{a}}{a\overline{a}} = \frac{\overline{c}d}{d\overline{d}} = \frac{\overline{c}}{\overline{d}}$. Ainsi

$$\overline{\alpha} = \frac{c}{d}.$$

D'une part : $z \in D_{c,d} \iff \frac{c}{d}z + 1 \neq 0 \iff \overline{\alpha}z + 1 \neq 0$ et donc $D_{c,d} = D_{\overline{\alpha},1}$.
D'autre part :

$$\forall z \in D_{c,d} \quad h(z) = \omega\frac{z + \alpha}{\overline{\alpha}z + 1} \qquad \boxed{h = B_{\omega,\alpha}}.$$