Exercice 1. Sur l'associativité de la différence symétrique.

Considérons un ensemble noté E. Pour toutes parties A et B de E, on appelle différence symétrique de A et B et on note $A\Delta B$ l'ensemble

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

1. Représenter deux parties A et B de E ainsi que $A\Delta B$ sur un dessin.
   Compléter la phrase suivante :

   « un élément x de E est dans $A\Delta B$ si et seulement si $x\in A$ ... $x\in B$. »

2. Montrer que pour tout couple de parties $(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2$,

$$A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B).$$

3. Soient A, B et C trois parties de E.
   (a) Démontrer que

$$(A\Delta B)\Delta C = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C).$$

   (b) En déduire une description (phrase en français) de l'ensemble $(A\Delta B)\Delta C$ qui mette en évidence que les rôles de A, B, C sont ici interchangeables.
   (c) En déduire sans aucun calcul supplémentaire que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

4. (*plus difficile) Démontrer que pour tout entier n supérieur à 2, et pour tout n-uplet $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de parties de E, l'ensemble

$$A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_n$$

   est exactement celui des éléments de E appartenant à un nombre impair de A_i.

Exercice 2. Formule de Machin.

1. Démontrer : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \ \arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

2. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. On note $f_a : x\mapsto \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$.

   (a) Calculer (en fonction de a) les nombres $f_a(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$.
   (b) Démontrer que f_a est dérivable sur son ensemble de définition et que

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\tfrac{1}{a}\}\quad f_a'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

   (c) En déduire que pour tout $b\in\mathbb{R}$ tel que $ab\neq 1$, on a

$$\arctan(a)+\arctan(b)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) & \text{si } b<\frac{1}{a}\\ \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)+\pi & \text{si } b>\frac{1}{a}.\end{cases}$$

3. Établir que $2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{5}{12}\right)$.

4. En déduire que $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{120}{119}\right)$.

5. En déduire enfin la formule de Machin :

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right).}$$

John Machin, découvreur de cette formule en 1706, l'utilisa pour calculer les cent premières décimales de π.

Problème. Homographies conservant le cercle.

On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que
$$ad - bc \neq 0.$$

On note $D_{c,d} = \{z \in \mathbb{C} \mid cz + d \neq 0\}$ et on définit la fonction h sur $D_{c,d}$ par

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} D_{c,d} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}. \end{array} \right.$$

(La fonction h est appelée une homographie.)

Le but du problème est de déterminer toutes les homographies h qui conservent $\mathbb{U}$, c'est-à-dire telles que
$$\forall z \in \mathbb{U} \quad h(z) \in \mathbb{U}.$$

Partie I. Homographies de type A

Soit $\omega \in \mathbb{U}$ et A_ω la fonction de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$A_\omega : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{\omega}{z}. \end{array} \right.$$

(On dira que A_ω est une homographie de type A.)

1. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{U} \quad A_\omega(z) \in \mathbb{U}.$$

Partie II. Homographies de type B

Soit $(\omega, \alpha) \in \mathbb{U} \times \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$ et soit $B_{\omega,\alpha}$ la fonction de $D_{\overline{\alpha},1}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$B_{\omega,\alpha} : \left\{ \begin{array}{ccc} D_{\overline{\alpha},1} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \omega \cdot \frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}. \end{array} \right.$$

(On dira que $B_{\omega,\alpha}$ est une homographie de type B.)

2. (a) Pour $z \in \mathbb{U}$, montrer que $\overline{\alpha}z + 1 \neq 0$.

   (b) Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{U} \quad B_{\omega,\alpha}(z) \in \mathbb{U}.$$

Partie III. Homographies conservant $\mathbb{U}$

On suppose que
$$\forall z \in \mathbb{U} \quad h(z) \in \mathbb{U}.$$

3. (a) Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, montrer que $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{z}z')$.

   (b) Montrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ : |a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{a}be^{-i\theta}\right) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{c}de^{-i\theta}\right).$$

   (On pourra commencer par constater que $|az+b| = |cz+d|$ pour tout $z \in \mathbb{U}$.)

   (c) Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad : \quad u + 2\mathrm{Re}\left(ve^{-i\theta}\right) = 0.$$

   Montrer que $u = v = 0$.

   (d) Conclure que
$$(\bigstar) \qquad |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \quad \text{et} \quad \overline{a}b = \overline{c}d.$$

4. (a) Montrer que $\overline{c}(ad-bc) = \left(|a|^2 - |c|^2\right) b$.

   En déduire que $|a|^2 - |c|^2 \neq 0$. (On rappelle que $ad - bc \neq 0$.)

   (b) Montrer que $\left(|a|^2 - |c|^2\right)\left(|a|^2 - |d|^2\right) = 0$.

   (c) Conclure que $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$.

5. Si $|a| = 0$, montrer que h est une homographie de type A.

6. Si $|a| \neq 0$, montrer que h est une homographie de type B.