

Forme Trigonométrique  
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 7.1 . . . . .	2
Exercice 7.2 . . . . .	2
Exercice 7.3 . . . . .	2
Exercice 7.4 . . . . .	3
Exercice 7.5 . . . . .	4
Exercice 7.6 . . . . .	4
Exercice 7.7 . . . . .	5

**Exercice 7.1 [◆◆◆]**

Calculer  $(1+i)^{2023}$ .

On a :

$$(1+i)^{2023} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2023} = \sqrt{2}^{2023} e^{i\frac{2023\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2023} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

□

**Exercice 7.2 [◆◆◆]**

Soient trois réels  $x, y, z$  tels que  $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$ . Montrer que  $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} &= 0 \\ \iff e^{-ix} + e^{-iy} + e^{-iz} &= 0 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (e^{ix} + e^{iy} + e^{iz})^2 &= e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} + 2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) \\ \iff e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} &= -2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) \end{aligned}$$

Or :

$$2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) = 2e^{i(x+y+z)}(e^{-ix} + e^{-iy} + e^{-iz}) = 0$$

Ainsi,

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$$

□

**Exercice 7.3 [◆◆◆]**

1. Déterminer les formes algébriques et trigonométriques du nombre

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$$

2. En déduire l'expression de  $\cos(\frac{7\pi}{12})$  et de  $\sin(\frac{7\pi}{12})$  à l'aide de radicaux.

1. On a :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} + i\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \right)$$

2. On a :

$$\begin{cases} \cos(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \\ \sin(\frac{7\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \end{cases} \quad \text{Donc : } \frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

□

**Exercice 7.4 [◆◆◆]**

Soit un réel  $\theta$ . Linéariser  $(\cos \theta)^5$  et  $(\sin \theta)^6$ .

On a :

$$\begin{aligned} (\cos \theta)^5 &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^5 \\ &= \frac{1}{32} (e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}) \\ &= \frac{1}{32} (2 \cos(5\theta) + 10 \cos(3\theta) + 20 \cos(\theta)) \\ &= \frac{1}{16} (\cos(5\theta) + 5 \cos(3\theta) + 10 \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (\sin \theta)^6 &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^6 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}) \\ &= -\frac{1}{64} (2 \cos(6\theta) - 12 \cos(4\theta) + 30 \cos(2\theta) - 20) \\ &= \frac{1}{32} (10 + 6 \cos(4\theta) - 15 \cos(2\theta) - \cos(6\theta)) \end{aligned}$$

□

**Exercice 7.5 [◆◆◆]**

1. Soit  $x$  un réel. Exprimer  $\cos(5x)$  comme un polynôme en  $\cos(x)$ .
2. Montrer que  $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$  est racine du trinôme  $x \mapsto 16x^2 - 20x + 5$ .
3. En déduire l'égalité  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .

1. On a :

$$\begin{aligned} \cos(5x) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^5) \\ &= \cos^5(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x) \\ &= \cos^5(x) - 10 \cos^3(x)(1 - \cos^2(x)) + 5 \cos(x)(1 - 2 \cos^2(x) + \cos^4(x)) \\ &= 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5 \cos(x) \end{aligned}$$

2. Posons  $x = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$  On a :

$$\begin{aligned} \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{10}\right) &= 16 \cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ \iff 16 \cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 &= 0 \\ \iff 16x^2 - 20x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$  est racine de ce trinôme.

3. On a :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} 16x^2 - 20x + 5 &= 0 \\ \iff x &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$  car  $\cos(\pi/5) > \cos(\pi/3) = 0.5$ . On en déduit que  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .

### Exercice 7.6 [◆◆◆]

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$

Notons :  $S' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$  On a :

$$\begin{aligned} S + iS' &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k \\ &= (1 + e^{ix})^n \\ &= \left(e^{\frac{ix}{2}}\right)^n \left(e^{-\frac{ix}{2}} + e^{\frac{ix}{2}}\right)^n \\ &= e^{\frac{inx}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc  $S = \Re\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{inx}{2}}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \Re\left(e^{\frac{inx}{2}}\right)$ .

Or, on a :

$$\Re\left(e^{\frac{inx}{2}}\right) = \Re\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

En conclusion :

$$S = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

□

**Exercice 7.7 [◆◆◆] Noyaux de Dirichlet et de Féjer.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . On note

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

1. Montrer que  $D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}}$ .
2. Montrer que  $F_n(x) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$ .