Propriétés de $\mathbb{R}$
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 2.1 [♦◊◊]

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\ \iff \quad & \frac{a^3 + b^3 - a^2 + b^2}{ab} \geq 0 \\ \iff \quad & \frac{(a^2 - 2ab + b^2)(a + b)}{ab} \geq 0 \\ \iff \quad & \frac{(a - b)^2(a + b)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Or $(a - b)^2 \geq 0$, $(a + b) \geq 0$ et $ab \geq 0$.
Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.1 [♦◊◊]

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\
\iff \ & \frac{a^3 + b^3 - a^2 + b^2}{ab} \geq 0 \\
\iff \ & \frac{(a^2 - 2ab + b^2)(a + b)}{ab} \geq 0 \\
\iff \ & \frac{(a - b)^2(a + b)}{ab} \geq 0
\end{aligned}$$

Or $(a - b)^2 \geq 0$, $(a + b) \geq 0$ et $ab \geq 0$.
Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$.