Chapitre 5
Ensembles

1 Ensembles et opérations.

1.1 Notations.

Définition 1: Naive

- Un **ensemble** non vide E est une collection d'objets x appelés **éléments**.
- On dit d'un élément x de E qu'il **appartient** à E, ce qui se note $x \in E$
  Si l'objet x n'est pas un élément de l'ensemble E, on peut noter $x \notin E$
- On pose qu'il existe un ensemble n'ayant pas d'éléments et que cet ensemble est unique.
  On l'appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$. Pour tout objet x, l'assertion $x \in \varnothing$ est fausse.
- Signe ≪=≫. Si x et y deux éléments d'un ensemble E, on notera $x = y$
  si on veut exprimer que x et y sont un seul et même élément de E.

Exemple 2: Ensembles de nombres

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$; $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
2. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\}$
3. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels strictement positifs. On a $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des entiers compris entre 1 et n s'écrit
   $$\{1, 2, \ ... \ , n\}$$
   ,
   ou bien $\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$. Cet intervalle d'entiers pourra aussi être noté $[\![1, n]\!]$.

Exemple 3

Écrire de deux façons l'ensemble des couples de réels opposés.

Preuve :

En **extension**: $\{(x, -x), x \in \mathbb{R}_+\}$
En **compréhension**: $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = -b\}$

Méthode: Démontrer qu'un ensemble est vide

Le raisonnement par l'absurde peut être utile : on suppose que l'ensemble n'est pas vide, on prend un élément de l'ensemble, et on cherche une contradiction.

1.2 Inclusion.

Définition 4

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B, ce que l'on note $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B :
$$\forall x \in A \quad x \in B$$

Méthode

Pour prouver une inclusion $A \subset B$,

1. On considère un élément de A ("Soit $x \in A$")
2. puis on prouve qu'il est dans B (on devra conclure avec "donc $x \in B$")

Exemple 5

Justifier que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ puis que $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{Z}$, on peut écire x comme $\frac{x}{1}$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{N}^*$

Donc $x \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\}$)

Ainsi on a donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{3}{2} \not\in \mathbb{Z}$

Ainsi on a donc $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$

On peut remarquer que pour prouver qu'il n'y a pas d'inclusion, il suffit de montrer une contradiction.

Proposition 6: Transitivité

Soient A, B, C trois ensembles.

$$(A \subset B \ et \ B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$$

Preuve :

Supposons $A \subset B$ et $B \subset C$

Soit $x \in A$,

Donc $x \in B$ ($A \subset B$)

Donc $x \in C$ ($B \subset C$)

On en conclut : $A \subset C$

Théorème 7: Double-inclusion

Soient A et B deux ensembles. On a

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \ et \ B \subset A$$

Preuve :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Suposons $A = B$

On a bien évidemment que $A \subset B$ et $B \subset A$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suposons $A \subset B$ et $B \subset A$

On a bien évidemment que $A = B$ (Tout élément de A est élément de B et réciproquement, on a donc exactement les mêmes éléments)