Corrigé du DS 3

Exercice 1. Deux calculs pour s'échauffer en ce matin glacial.

Nous noterons I et J les deux intégrales à calculer.

1. On réalise une intégration par parties avec les deux fonctions arctan et $x \mapsto -\frac{1}{2}x^{-2}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$:
$$I = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{\arctan(x)}{x^3}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\arctan(x)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 - \int_{1/\sqrt{3}}^1 -\frac{1}{2}x^{-2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{6}\right] + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x,$$
en calculant $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$. En écrivant
$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2},$$
on obtient
$$I = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[-x^{-1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 - \frac{1}{2}\left[\arctan(x)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1,$$
soit après simplification
$$\boxed{I = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}.$$

2. On pose $x = \sin t$.

x	$\sin(t)$
$\mathrm{d}x$	$\cos(t)\mathrm{d}t$
$x=0$	$t=0$
$x=1$	$t=\frac{\pi}{2}$

$$J = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\mathrm{d}t.$$
Or, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a
$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos(t).$$
Ainsi,
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t.$$
Un soupçon de trigonométrie pour linéariser (on pouvait s'en sortir avec de la duplication, mais les formules d'Euler, c'était très bien aussi !)
$$\sin^2(t)\cos^2(t) = \left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1-\cos(4t)}{8}.$$
Ainsi,
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4t)}{8}\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\cdot 0 : \qquad \boxed{J = \frac{\pi}{16}}.$$

Exercice 2. Un théorème de point fixe.

1. La partie A est non vide. En effet, $f(a) \in [a,b]$ donc $a \leq f(a)$ et $a \in A$.
   La partie A est aussi majorée par b.
   D'après l'axiome de la borne supérieure, $s = \sup(A)$ existe.
   Puisque $a \in A$, $a \leq s$ et puisque b est un majorant de A, $s \leq b$ (s est le plus petit des majorants) : $s \in [a,b]$.
2. Soit $x \in A$. Puisque s est un majorant de A, on a $x \leq s$. La croissance de f donne alors $f(x) \leq f(s)$.
   Or, $x \leq f(x)$ par définition de A donc par transitivité, $x \leq f(s)$.
   Ce qui précède prouve que $f(s)$ est un majorant de A
3. On vient de prouver que $f(s)$ est un majorant de A et le nombre s est par définition le plus petit des majorants de A : $\boxed{s \leq f(s)}$.
4. De l'inégalité précédente, par croissance de f, on déduit que $f(s) \leq f(f(s))$.
   Ceci montre que $f(s) \in A$ puis que $\boxed{f(s) \leq s}$ puisque s majore A.
5. Par antisymétrie, on conclut que $\boxed{f(s) = s}$.
   Ce qui achève de prouver que f possède un point fixe dans $[a,b]$.

Exercice 3. Équation d'Euler.

1. (a) L'équation caractéristique a pour racine double -1 et $x \mapsto e^{-2x}$ est une solution particulière de (E'). Son ensemble de solutions S' est donc

$$\boxed{S' = \left\{x \mapsto e^{-2x} + \lambda x e^{-x} + \mu e^{-x} \;\mid\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

(b) La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $I = \mathbb{R}_+^*$, intervalle sur lequel y est dérivable. Ceci prouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée. On montrerait de même que y_0' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = e^x y_0'(e^x) \quad \text{et} \quad f''(x) = e^{2x} y_0''(e^x) + e^x y_0'(e^x).$$

(c) Pour x un réel, on

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + f(x) &= e^{2x} y_0''(e^x) + e^x y_0'(e^x) + 2e^x y_0'(e^x) + y_0(e^x) \\ &= (e^x)^2 y_0''(e^x) + 3e^x y_0'(e^x) + y_0(e^x) \\ &\underset{*}{=} \frac{1}{(e^x)^2} = e^{-2x} \end{aligned}$$

où on a utilisé que y_0 est solution de (E).
Le calcul précédent démontre bien que f est solution de (E').

(d) D'après la question 1, il existe un couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-2x} + \lambda x e^{-x} + \mu e^{-x}.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y_0(x) = f(\ln(x)) = \frac{1}{x^2} + \lambda \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\mu}{x}.$$

2. Notons S l'ensemble des solutions de l'équation (E). Nous avons prouvé que

$$S \subset \left\{x \mapsto \frac{1}{x^2} + \lambda \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\mu}{x} \;\mid\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3. Il faut prouver l'autre inclusion, ce qui se fait bien.

4. Notons S'' l'ensemble des solutions de l'équation (E''). L'équation homogène se résout sans difficulté et la variation de la constante amène une solution particulière. On obtient

$$\boxed{S'' = \left\{x \mapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{\lambda}{x} \;\mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

5. On dérive deux fois, on injecte... et ça marche.

6. La fonction y_0 est deux fois dérivable en tant que solution de (E) donc g est deux fois dérivable comme produit. Pour $x \in I$, on calcule

$$g(x) = x y_0(x) \quad g'(x) = y_0(x) + x y_0'(x), \quad g''(x) = 2y_0'(x) + x y_0''(x).$$

Pour prouver que g' est solution de (E''), calculons

$$x g''(x) + g'(x) = x^2 y_0''(x) + 2x y_0'(x) + x y_0'(x) + y_0(x) = 0,$$

puisque y_0 est solution de (E).

7. La question 2 nous donne que g' appartient à l'ensemble S'' déterminé en question 1 : il existe donc un réel λ tel que

$$\forall x \in I \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\lambda}{x}.$$

En primitivant, on en déduit l'existence d'une constante supplémentaire μ telle que

$$\forall x \in I \quad g(x) = \frac{1}{x} + \lambda \ln(x) + \mu.$$

Il nous reste à diviser par x pour obtenir que

$$\forall x \in I \quad y_0(x) = \frac{1}{x^2} + \lambda \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\mu}{x}.$$

Ceci établit la même inclusion que dans la question 2, et nous concluons comme dans la question 3.

Problème. Étude d'une suite récurrente.

1. On rédige cette récurrence triviale dans les règles de l'art, puisque c'est la première de la copie.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \geq \sqrt{n} \geq 1 > 0$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \geq 1$: la suite est $\boxed{\text{croissante}}$. Par ailleurs $u_n \geq \sqrt{n}$ donne par minoration : $\boxed{\lim u_n = +\infty}$.

3. On a $u_n^2 \to \ell^2$ par produit, et $\sqrt{n} \to +\infty$.
   Par opérations, sur les limites : $\frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \to 0$.
   Par ailleurs $u_{n+1]} \to \ell$. En passant à la limite dans la relation de récurrence définissant u :
$$\boxed{\ell = 0}.$$

4. (a) On raisonne par récurrence sur n : c'est vrai pour $n = k$ par hypothèse. Soit n un entier supérieur à k. On suppose $u_n < \sqrt{n}$. Alors $u_n^2 < n$ (on rappelle que $u_n \geq 0$) et puisque $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}$,
$$u_{n+1} < \frac{n}{\sqrt{n}} \qquad \text{car } u_n^2 < n$$
$$u_{n+1} < \sqrt{n} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} < \sqrt{n+1} \qquad \text{car } \sqrt{n} < \sqrt{n+1}.$$
$$\boxed{u_n < \sqrt{n} \text{ pour tout } n \geq k}$$

   (b) Soit $n \geq k$. On vient de montrer que $\frac{u_n}{\sqrt{n}} < 1$. Puisque $u_n \geq 0$, on en déduit que $\frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \leq u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$.
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq k} \text{ est décroissante}}$$

   (c) On sait que (u_n) est <u>minorée</u> par 0 et que (u_n) est <u>décroissante</u> à partir du rang k. On en déduit que u converge grâce au théorème de la limite monotone. D'après 3, sa limite ne peut être que 0.
$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$$

5. Si la suite u converge, sa limite est nulle d'après 3. Par conséquent, à partir d'un certain rang on aura $u_n < 1$ (prendre « $\varepsilon = \frac{1}{2}$ »dans la définition de la convergence).
   Réciproquement, s'il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$ alors a fortiori $u_k < \sqrt{k}$; la question 4 nous assure alors de la convergence de la suite.
$$\boxed{(u_n) \text{ converge} \iff \exists\, k > 2 \text{ tq } u_k < 1}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = w_{n+1} > 0$.
$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$$

7. On calcule :
$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \ln k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k}} \ln k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2^{l+1}} \ln(l+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}. \end{aligned}$$
   Or $v_{n-1} = v_n - w_n$, donc (...) $\boxed{v_n = -w_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k}} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$.

8. Pour $k = 1$ on obtient $\frac{1}{2^k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$. Les autres termes de la somme étant positifs :
$$\boxed{\frac{1}{2}\ln 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}.$$

Par ailleurs, en utilisant la remarque de l'énoncé :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{2^k}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \le (\ln 2)\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}_{\le 1}$$
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \le \ln 2}$$

9. On sait que la suite (v_n) est <u>croissante</u> (question 6). De plus pour $n \ge 1$, d'après les questions 7 et 8,

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n$$
$$v_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad \text{car } w_n \ge 0$$
$$v_n \le \ln 2.$$

La suite (v_n) est donc <u>majorée</u>. On conclut que

$$\boxed{(v_n) \text{ converge}}.$$

10. Des questions précédentes, il résulte :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad \frac{1}{2}\ln 2 \le v_n - w_n \le \ln 2.$$

Or $\lim v_n = V$ et $\lim w_n = 0$ (croissances comparées). Il vient par passage à la limite

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln 2 \le V \le \ln 2}.$$

11. Pour tout $k \ge 1$, $\ln u_{k+1} = \ln \frac{u_k^2}{\sqrt{k}} = 2\ln u_k - \frac{1}{2}\ln k$

$$\ln u_{k+1} - 2\ln u_k = -\frac{1}{2}\ln k \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2^{k+1}}\ln u_{k+1} - \frac{1}{2^k}\ln u_k = -\frac{1}{2^{k+2}}\ln k.$$

En sommant de $k = 1$ à $k = n-1$, on trouve par télescopage

$$\frac{1}{2^n}\ln u_n - \frac{1}{2}\ln u_1 = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+2}}\ln k.$$

En isolant $\ln(u_n)$, $\boxed{\ln u_n = 2^{n-1}\ln a - 2^{n-2}v_{n-2}}$.

12. Pour $k \ge 2$, on a :

$$u_k < 1 \iff \ln u_k < 0 \iff 2^{k-1}\ln a - 2^{k-2}v_{k-2} < 0 \iff 2\ln a < v_{k-2}.$$

La question 5 conclut.

13. On suppose $a < e^{V/2}$. Puisque $\lim v_n = V$ et $V > 2\ln a$, on aura $v_n > 2\ln a$ à partir d'un certain rang. En particulier il existe $k > 2$ tel que $v_k > 2\ln a$, ce qui implique la convergence de la suite $\mathbf{u}$ d'après la question précédente. On sait dans ce cas que $\lim u_n = 0$ (question 3).

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0 \text{ si } a < e^{V/2}}$$

14. Si $a \ge e^{\frac{V}{2}}$, montrer que $\lim u_n = +\infty$. On suppose $a \ge e^{V/2}$. Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante de limite V, on aura

$$\forall k > 2 \quad : \quad v_{k-2} < V \le 2\ln a.$$

D'après la question 12, la suite (u_n) est divergente. L'hypothèse de la question 4 est

$$\exists k \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad u_k < \sqrt{k}.$$

Elle n'est pas satisfaite car la conclusion de la question 4 n'est pas vérifiée. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad u_k \ge \sqrt{k}.$$

D'après la question 2, $\lim u_n = +\infty$.

$$\boxed{\lim u_n = +\infty \text{ si } a \ge e^{V/2}}$$