

Fonctions usuelles

Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exponentielle and friends.	2
Exercice 3.1	2
Exercice 3.2	2
Exercice 3.3	3
Exercice 3.4	5
Exercice 3.5	6
Exercice 3.6	7
Exercice 3.7	8
Trigonométrie. Fonctions circulaires.	9
Exercice 3.8	9
Exercice 3.9	10
Exercice 3.10	11
Exercice 3.11	12
Exercice 3.12	12
Fonctions circulaires réciproques.	13
Exercice 3.13	13
Exercice 3.14	13
Exercice 3.15	14
Exercice 3.16	15
Exercice 3.17	16

Exercice 3.1 [◆◆◆]

Résoudre $2 \ln \left(\frac{x+3}{2} \right) = \ln(x) + \ln(3)$, sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\begin{aligned} 2 \ln \left(\frac{x+3}{2} \right) &= \ln(x) + \ln(3) \\ \iff \ln \left(\left(\frac{x+3}{2} \right)^2 \right) &= \ln(3x) \\ \iff \frac{(x+3)^2}{4} &= 3x \\ \iff x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ \iff x &= 3 \end{aligned}$$

Ainsi, 3 est l'unique solution.

**Exercice 3.2 [◆◆◆]**

Résoudre l'équation $\text{ch}(x) = 2$. Que dire des solutions ?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= 2 \\ \iff e^x + e^{-x} &= 4 \\ \iff e^{2x} - 4e^x + 1 &= 0 \\ \iff e^x &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \iff x &= \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\ln(2 - \sqrt{3})$ et $\ln(2 + \sqrt{3})$ sont les uniques solutions dans \mathbb{R} .

On remarque que :

$$\ln(2 + \sqrt{3}) = -\ln \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) = -\ln(2 - \sqrt{3})$$

Les solutions sont opposées.



Exercice 3.3 [◆◆◆]

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}} &= \sqrt{x}^x \\ \Longleftrightarrow e^{\sqrt{x} \ln x} &= e^{x \ln(\sqrt{x})} \\ \Longleftrightarrow \sqrt{x} \ln(x) &= \frac{x}{2} \ln(x) \\ \Longleftrightarrow \ln(x) \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} &= \frac{x}{2} \\ \Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ \Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4\end{aligned}$$

Les uniques solutions sont donc 1 et 4.

□

Exercice 3.4 [◆◆◆] Trigonométrie hyperbolique.

1. Montrer que pour tous réels a et b , on a

(a) $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$.

(b) $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$.

(c) Trouver une identité pour $\operatorname{th}(a+b)$.

2. Pour x réel, on pose $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$(a) \operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (b) \operatorname{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad (c) \operatorname{th} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

1.

(a)

$$\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b)$$

(b)

$$\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} = \operatorname{sh}(a+b)$$

(c)

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)}$$

On divise en haut et en bas par $\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)$.

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} + \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}}{1 + \frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}} = \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1+t^2}{1-t^2} &= \frac{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1-t^2} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)\end{aligned}$$

□

Exercice 3.5 [◆◆◆]

Sans calculatrice, comparer π^e et e^π .

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \end{cases}$$

Un magnifique tableau de variations :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		—	— 0 +	
f	$+\infty$	$+\infty$	e	$+\infty$

Diagram illustrating the variation of f with arrows indicating the direction of change between the values in the third row.

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\ln(\pi)} &> e \\ \iff \pi &> e \ln(\pi) \\ \iff e^\pi &> e^{e \ln \pi} \\ \iff e^\pi &> \pi^e \end{aligned}$$

Donc $e^\pi > \pi^e$.

□

Exercice 3.6 [◆◆◆]

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.
2. Des deux nombres $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[3]{24}$, lequel est le plus grand ?

1. f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+ de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{(x+1)^{2/3}} \right) \end{cases}$$

On a :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	-1	0

2.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{24} \\ &= \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{3} \\ &= (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) - (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

Or f est croissante sur \mathbb{R}_+ , ainsi : $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$.

On en conclut que $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

□

Exercice 3.7 [◆◆◆]

1. Soit α un réel et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$ (on discutera selon les valeurs de α).
2. Soit $\alpha \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$$

1. Posons $f : x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$. f est définie, continue et dérivable sur $] -1, +\infty[$ de dérivée :

$$g : \begin{cases}] -1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1) \end{cases}$$

Alors :

⊙ Si $\alpha \in]0, 1[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$\alpha - 1$	0	$-\infty$

⊙ Si $\alpha \in]1, +\infty[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$\alpha - 1$	0	$+\infty$

⊙ Si $\alpha \in]-\infty, 0[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

Ainsi, $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ lorsque $\alpha \notin [0, 1]$.

2. D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = (n+1)^\alpha$$

□

Exercice 3.8 [◆◆◆]

Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R} .

$$\text{a) } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } \sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x \quad \text{c) } \cos x + \sin x = 1$$

a)

$$\begin{aligned} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \begin{cases} 2x \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ 2x \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{8} [\pi] \\ x \equiv \frac{3\pi}{8} [\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x &\iff 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \\ &\iff -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \\ &\iff \cos x = -2 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

c)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos x - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(x) + \sin(x))$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x = 1 &\iff \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 \\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{2\pi}{4} [2\pi] \\ x \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

□

Exercice 3.9 [◆◆◆]

Soit x un réel. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

Notons \mathcal{P}_n cette proposition. Montrons que \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation.

On a : $|\sin(0x)| \leq 0|\sin x| \iff 0 \leq 0$.

Ainsi, \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Montrons \mathcal{P}_{n+1} .

On a :

$$\begin{aligned} |\sin(nx + x)| &= |\sin(nx) \cos(x) + \sin(x) \cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx) \cos(x)| + |\sin(x) \cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)| |\cos(x)| + |\sin(x)| |\cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \\ &\leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| \quad (\text{HR}) \\ &\leq (n + 1)|\sin(x)| \end{aligned}$$

C'est exactement \mathcal{P}_{n+1} .

Conclusion.

Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 3.10 [◆◆◆]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} \quad (n \text{ fois le symbole } \sqrt{\cdot})$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

2. En déduire $\lim u_n$

1. Notons \mathcal{P}_n cette proposition. Montrons que \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation.

On a : $2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Ainsi, \mathcal{P}_1 est vérifiée.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Montrons \mathcal{P}_{n+1} .

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ \iff \sqrt{2 + u_n} &= \sqrt{2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\ \iff u_{n+1} &= \sqrt{2(1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}))} \end{aligned}$$

Or $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$

Ainsi, $1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}$

Alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{4 \cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} = 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

\mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

Conclusion.

Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2 \cos(0) = 2$$

□

Exercice 3.11 [◆◆◆]

Calculer $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$.

On a :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= \frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{7} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{8} \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} \\ &= -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} \frac{1}{8} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

□

Exercice 3.12 [◆◆◆]

Calculer $\tan \frac{\pi}{8}$.

On a :

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{4} &= \tan \frac{2\pi}{8} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2 \tan \frac{\pi}{8} &= 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} \\ \iff \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 &= 0 \\ \iff \tan \frac{\pi}{8} &= -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

□

Exercice 3.13 [◆◆◆]

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

⊙ Montrons que $\arctan(x) \leq x$.

Posons $f : x \mapsto \arctan x - x$. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{x^2}{x^2+1} \end{cases}$$

On a :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
f	0	$-\infty$

Donc $\arctan(x) \leq x$.

⊙ Montrons que $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$.

Posons $f : x \mapsto x - \frac{x^3}{3} - \arctan(x)$. f est dérivable sur \mathbb{R}_+ de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{x^4}{x^2+1} \end{cases}$$

On a :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
f	0	$-\infty$

Donc $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$.

□

Exercice 3.14 [◆◆◆]

Montrer que

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

On a :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$$

En appliquant \arctan , on obtient bien que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

□

Exercice 3.15 [◆◆◆]

Soit l'équation

$$\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Justifier que l'équation admet une unique solution sur $[-1, 1]$.
2. Donner une expression de cette solution.

1. arctan est strictement croissante sur \mathbb{R} et prend ses valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc l'équation admet une unique solution sur \mathbb{R} .

2. Soit $x \in [-1, 1]$

On a :

$$\begin{aligned}\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ \iff \tan(\arcsin(x) + \arcsin(\frac{x}{2})) &= 1 \\ \iff \frac{3x}{2} \cdot \frac{2}{2-x^2} &= 1 \\ \iff 2x^2 + 6x - 4 &= 0 \\ \iff x &= -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

L'unique solution est donc $\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2}$.

□

Exercice 3.16 [◆◆◆]

Soit

$$f : x \mapsto \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right).$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1, 1[$.
 2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
 3. En déduire une expression plus simple de la fonction f .
 4. Retrouver ce résultat par preuve directe.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. g est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée :

$$g' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \end{cases}$$

Alors :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
g	-1	1

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1, 1[$.

2. On a $f :]-1, 1[\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$.

Ainsi, f est dérivable comme composée de fonctions dérivables, et :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

3. Sur \mathbb{R} , $f - \arctan$ est de dérivée nulle donc constante. Ainsi :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \arctan(x) = C.$$

Évaluons en 0: $f(0) - \arctan(0) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0$.Donc $f = \arctan$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \tan \left(\arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right) &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{1+x^2} \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(f(x)) = x$. Donc $f = \arctan$.

□

Exercice 3.17 [◆◆◆]

Pour $a < x < b$, montrer que

$$\arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}.$$

On a :

$$\cos \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \right) \right) = \sqrt{1 - \frac{x-a}{b-a}} = \sqrt{\frac{b-x}{b-a}}$$

$$\cos \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x-a}{b-x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b-a}{b-x}}} = \sqrt{\frac{b-x}{b-a}}$$

Ainsi, $\cos \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = \cos \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$.

Or, $\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \in]-1, 1[$ et $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \in]-1, 1[$ donc $\arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$.

□