Colles, semaine 8 (20/11→24/11)

Équa. diff. linéaires d'ordre 1
EDL2 à coefficients constants

La semaine passée a été consacrée aux équations différentielles linéaires.

À l'ordre 1, on a résolu les équations

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E_1)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.
La variation de la constante permet de chercher une solution particulière dans tous les cas.

A l'ordre 2, on s'est contenté du cas de coefficients constants et des seconds membres utiles pour la physique, à savoir les équations de la forme

$$y'' + ay' + by = f, \qquad (E_2)$$

où $a, b \in \mathbb{K}$ et où f est une fonction de la forme $x \mapsto Ae^{\alpha x}$ ou $t \mapsto \cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$.

Les colleurs n'hésiteront pas, si les méthodes standard sont maîtrisées, à proposer des exercices plus ambitieux : recollement à l'ordre 1, changement de fonction inconnue pour linéariser une équation ou pour faire chuter l'ordre, équations fonctionnelles se ramenant à une équation différentielle...

Questions de cours.

- Intégrales de Wallis : $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. Relation entre W_{n+2} et W_n (vu en DM).
- Théorème de résolution de : $y' + a(x)y = 0$.
- L'ensemble S_0 des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est stable par combinaisons linéaires.
- (*) Théorème de résolution de $y'' + ay' + by = 0$ (solutions complexes).
  En se plaçant dans le cas où l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, preuve du fait qu'une solution y est nécessairement de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.
  (on a écrit $y : x \mapsto \ell(x)e^{r_1 x}$ et exploité une équation du premier ordre en ℓ').
- (*) Théorème de résolution de $y''+ay'+by = 0$ (solutions réelles) dans le cas où l'équation caractéristique possède deux racines conjuguées (oscillations amorties).
- N'importe quelle résolution d'équation standard du type (E_1).
- N'importe quelle résolution d'équation standard du type (E_2).

À venir en semaine 9 : Suites réelles (la pratique).