Matrices et applications linéaires

1 Représentations matricielles.

1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 1 (Matrice colonne d'un vecteur dans une base)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sur $\mathcal{B}$: $\exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On appelle **matrice colonne** de x dans la base $\mathcal{B}$, et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exemple 2.

Les familles $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X+3, (X+3)^2)$ sont deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = (X+3)^2$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(P) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Le résultat simple suivant est un premier pont jeté entre l'algèbre linéaire et le calcul matriciel.

Lemme 3 (Isomorphisme d'espaces vectoriels induit par le choix d'une base)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E.
L'application

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Notamment, si x et x' sont deux vecteurs de E, et λ, μ deux scalaires de $\mathbb{K}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\lambda x + \mu x'\right) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x').$$

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et rappelons que pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'application e_i^*, qui à un vecteur x associe sa coordonnée sur e_i, est une forme linéaire. La linéarité de $\varphi_{\mathcal{B}}$ devient assez claire lorsqu'on écrit

$$\forall x \in E \quad \varphi_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} e_1^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{pmatrix}.$$

Les dimensions étant égales au départ et à l'arrivée, on pourrait utiliser la caractérisation des isomorphismes en dimension finie pour conclure, mais la bijectivité de $\varphi_{\mathcal{B}}$ est claire : un vecteur $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ possède bien sûr un antécédent unique dans E : c'est $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$. □

Définition 4 (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **matrice de la famille** $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left(C_1 \mid C_2 \mid \ldots \mid C_p\right),$$

où, pour $j \in [\![1, p]\!]$, C_j est la matrice colonne de v_j dans la base $\mathcal{B}$.

Avec les notations de la définition précédente,

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad \exists!(a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n : v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_p) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \color{red}{v_1} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{v_j} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{v_p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & a_{1,j} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{2,j} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{n,j} & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \color{red}{e_1} \\ \color{red}{e_2} \\ \color{red}{\vdots} \\ \color{red}{e_n} \end{array}$$

1.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.

Définition 5 (Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases)**.**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie non nulle (on note $p = \dim E$ et $n = \dim F$).
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **matrice** de u **dans les bases** $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et on note

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))$, où $u(\mathcal{B})$ est la famille des images de $\mathcal{B}$ par u.
Ainsi, dans la $j$ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))$ se trouvent les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Avec les notations de la définition précédente,

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad \exists!(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n : u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

On a donc

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \end{array} & \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) = & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & a_{1,j} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{2,j} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{n,j} & \vdots & \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \end{array}$$

Définition 6 (Cas particulier d'un endomorphisme)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.
On appelle **matrice** de u **dans la base** $\mathcal{B}$, et on note

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(\mathbb{K})$$

plutôt que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$, la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.

Exemple 7 (Matrice de l'endomorphisme de dérivation dans la base canonique)**.**

Soit $D : P \mapsto P'$ endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}_3[X]$.
Deux écritures de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$: $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ ou $\mathcal{B}' = (X^3, X^2, X, 1)$.
Voici la matrice de D dans la base $\mathcal{B}$ (ajouter les "bordures"). Donner celle dans $\mathcal{B}'$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(D) = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Exemple 8 (Matrice de l'endomorphisme de transposition dans la base canonique)**.**

Donner la matrice de $t : M \mapsto M^T$ dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exemple 9 (Matrice d'une similitude directe de point fixe l'origine)**.**

Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et notons $\mathcal{B}$ la base $(1, i)$.
Fixons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et considérons l'application

$$f : z \mapsto (a + ib)z.$$

Écrire la matrice de cet endomorphisme dans la base $\mathcal{B}$.
Cas particulier des rotations de centre l'origine : pour $\theta \in \mathbb{R}$, écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de

$$z \mapsto e^{i\theta} z.$$

Exemple 10 (La base canonique n'est pas toujours la meilleure)**.**

Soit $f : P \mapsto (X+1)P'$, endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$.
Écrire les quatre matrices

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f).$$

Quelle est la « meilleure » représentation ? Pourquoi la dernière est-elle la moins facile à écrire ?

À *une* application linéaire, on peut donc associer *des* matrices : la matrice d'une application linéaire *dépend du couple de bases* avec lequel on travaille. La troisième partie de ce cours est consacré au **changement de bases**, on s'intéressera aux liens qui existent entre les différentes matrices qui représentent une application linéaire dans des couples de bases différentes.

Pour les homothéties, les choses sont plus simples : la matrice est toujours la même, pourvu que les bases au départ et à l'arrivée coïncident.

Proposition 11 (Matrice de l'identité, d'une homothétie)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

La matrice de l'identité dans *une* base de E est la matrice identité.

Plus généralement, pour tout base $\mathcal{B}$ de E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda \mathrm{id}_E) = \lambda I_n$.

Remarque. La terminologie *matrice identité* était restée obscure mais on comprend désormais que la matrice identité est la matrice... de l'identité ! (pourvu qu'on prenne une même base au départ et à l'arrivée).

Remarque. La matrice de id_E dans un couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ avec $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$ n'est pas la matrice identité ! Voir plus loin la notion de matrice de passage.

Théorème 12 (Isomorphisme d'espaces vectoriels induit par le choix d'un couple de bases).

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles p et n.
On se donne $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.

L'application

$$\Phi_{\mathcal{C},\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Notamment, si u et v sont deux applications linéaires de $\mathscr{L}(E,F)$ linéaires et λ et μ deux scalaires,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v).$$

1.3 Composition des applications et produit matriciel.

Proposition 13 (Coordonnées de l'image d'un vecteur).

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions (non nulles) respectives p et n.
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Preuve. Commençons par introduire des notations. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ celle de F. On travaille avec $u \in \mathscr{L}(E,F)$ ainsi qu'avec un vecteur x fixé dans E. On note

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

On veut démontrer que $Y = AX$, c'est à dire que les coordonnées de l'image $u(x)$ s'obtiennent à l'aide d'un *produit matriciel*. Puisque $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, on obtient par linéarité

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \right) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right) f_i$$

Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. La coordonnée de $u(x)$ sur f_i a été noté y_i. On vient donc d'obtenir

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \quad \text{c-à-d} \quad [Y]_{i,1} = \sum_{j=1}^{p} [A]_{i,j} [X]_{j,1} = [AX]_{i,1}.$$

Ceci achève de démontrer $Y = AX$. □

Remarque. Ainsi, pour $x \in E$ et $y \in F$, en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$, on a

$$\boxed{y = u(x) \iff Y = AX.}$$

Lemme 14 (de calcul matriciel)**.**

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $j \in [\![1,p]\!]$ et E_j le $j$ème vecteur de la base canonique de $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Le produit ME_j est la $j$ème colonne de la matrice M.

Théorème 15 (*la matrice de la composée, c'est le produit des matrices*)**.**

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle.
Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases, respectivement de E, F et G.
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(v) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u).$$

Preuve. Notons

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u), \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(v), \quad C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(v \circ u),$$

le but étant de prouver l'égalité $C = BA$. Notons p la dimension de E, et $(e_1, \ldots, e_p)$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Fixons j dans $[\![1,p]\!]$. Ainsi, la $j$ème colonne de C vaut par définition

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(v \circ u(e_j)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(v \circ u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_j) = CE_j,$$

où $E_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_j)$ (c'est aussi le $j$ème vecteur de la base canonique de $M_{p,1}(\mathbb{K})$. Par ailleurs,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(v \circ u(e_j)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(v(u(e_j))) = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(v)}_{B} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_j)) = B \cdot \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)}_{A} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_j) = BAE_j.$$

Ainsi, $CE_j = BAE_j$ pour tout $1 \leq j \leq p$, ce qui montre que C et BA sont égales colonne par colonne. $\square$

Corollaire 16 (Caractérisation matricielle des isomorphismes)**.**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectivement de E et F. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$. Alors

u est bijective ssi A est inversible.

Dans le cas où u est un isomorphisme, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u^{-1}) = A^{-1}$.

Exemple 17.

Soit un n-uplet $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. La **matrice de Vandermonde** associée à λ, notée V_λ, est définie par

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. On note $u_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)) \end{array} \right.$.
   Vérifier que V_λ est la matrice de u_λ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{K}^n$.
2. Démontrer que V_λ est inversible si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts.

Théorème 18 (Isomorphisme d'anneaux induit par le choix d'une base).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et et $\mathcal{B}$ une base de E.
L'application

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Notamment, si u et v sont deux endomorphismes de E, alors

$$\Phi_{\mathcal{B}}(v \circ u) = \Phi_{\mathcal{B}}(v) \cdot \Phi_{\mathcal{B}}(u).$$

De plus, $\Phi_{\mathcal{B}}$ induit un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 19 (Commutativité, itérés).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

1. $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $AB = BA$.
2. $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = A^k$.
3. Si de surcroît u est un automorphisme, la ligne précédente est vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2 Point de vue linéaire sur les matrices.

2.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Proposition-Définition 20.

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée** à A l'application

$$f : \begin{cases} M_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{cases}.$$

L'application f est linéaire et sa matrice dans les bases canoniques de $M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $M_{n,1}(\mathbb{K})$ n'est autre que A.

Lorsque A est carrée, f est appelée **endomorphisme canoniquement associé** à A.

Un léger abus fréquent consiste à identifier les colonnes à k lignes avec les k-uplets. On confondra ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3.$$

L'application l'application linéaire f canoniquement associée à $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ pourra donc être vue comme une application

$$f : M_{p,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{ou, au prix du léger abus ci-dessus, comme} \quad \boxed{f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n.}$$

Exemple 21.

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Donner sans calcul $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ et $f(0,0,1)$. Calculer $f(1,2,3)$.

Exemple 22.

Soit N la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à N.
Décrire l'action de f sur la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et justifier que $N^4 = 0$.

2.2 Rang, image et noyau d'une matrice.

Dans ce paragraphe et les suivants, les espaces $\mathbb{K}^p$ et $M_{p,1}(\mathbb{K})$ sont délibérément confondus.

Définition 23.

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée.

- Le noyau de f peut être appelé noyau de la matrice A, noté alors $\mathrm{Ker}(A)$.
- L'image de f peut être appelée image de la matrice A, noté alors $\mathrm{Im}(A)$.
- Le rang de f sera appelé **rang** de la matrice A et noté $\mathrm{rg}(A)$.

Proposition 24.

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée.

- Par définition, $\mathrm{Ker}(A)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ défini par

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathbb{K}^p : AX = 0_{n,1}\}.$$

  On sait résoudre un tel système linéaire homogène (pivot) et donc trouver une base du noyau.
- L'image de A est engendrée par les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de A :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, \dots, C_p\right),$$

  On saura extraire une base de cette famille génératrice, et en particulier en déduire rg(A).
- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p)$.
  De plus, $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p)$.
- $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.

Remarque. Les **colonnes** engendrent l'image de A ; le rang de la matrice est celui de la famille des colonnes. En revanche, ce sont les **lignes** de A qui donnent un système d'équations du noyau.

Exemple 25 (Voici des matrices de taille n. Donner leur rang)**.**

$$A = \begin{pmatrix} & & & n \\ & & \iddots & \\ & 2 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 26 (Noyau de la matrice Attila)**.**

Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Quel est son rang ?
Donner une base de $\mathrm{Ker}(J)$

- en posant le système linéaire (point de vue des lignes)
- en prenant le point de vue des colonnes et en utilisant le théorème du rang.

On formalise ci-dessous la méthode qui nous a permis ci-dessus de trouver des vecteurs du noyau en regardant les colonnes.

Méthode (Les combinaisons nulles de colonnes offrent des vecteurs dans le noyau)**.**

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, de colonnes $C_1, \ldots, C_p$ et $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'a.l. canoniquement associée.

Supposons qu'on ait une combinaison linéaire nulle des colonnes : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j C_j = 0_{n,1}$.

En notant $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, on a

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(e_j) = 0_{\mathbb{K}^n}, \quad \text{i.e.} \quad f\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j\right) = 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{soit} \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j \in \mathrm{Ker}(f).$$

Théorème 27 (Caractérisations de l'inversibilité d'une matrice)**.**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. $\mathrm{Ker}(A)$ est trivial, réduit à $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
3. La famille des colonnes de A engendre $\mathbb{K}^n$.
4. $\mathrm{rg}(A) = n$.

On retiendra en particulier que

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{rg}(A) = n.}$$

Corollaire 28 (*un côté suffit*).

Pour une matrice carrée, l'existence d'un inverse à gauche (resp. à droite) suffit pour que cette matrice soit inversible. Alors, son inverse n'est autre que l'inverse à gauche (resp. à droite).

Corollaire 29 (CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire).

Une matrice triangulaire est inversible s.s.i. ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Proposition 30 (Rang et produit matriciel).

1. Lors d'un produit matriciel, le rang ne peut que diminuer :
$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{rg}(AB) \leq \min\left(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\right).$$
2. Le produit par une matrice inversible laisse le rang inchangé : pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$,
$$\forall P \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A) \qquad \text{et} \qquad \forall Q \in GL_p(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{rg}(AQ) = \mathrm{rg}(A).$$

Preuve.
1. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. On va tout traduire en termes d'applications linéaires. Notons
$$f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p,$$
les applications linéaires canoniquement associées respectivement à A et B. Notons $\mathcal{B}_q$, $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques respectivement de $\mathbb{K}^q$, $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. On a alors
$$AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_q}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_q}(f \circ g).$$
Ainsi, $f \circ g$ est l'application canoniquement associée à AB : on a
$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(f \circ g), \quad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(g).$$
On a démontré dans le cours sur les applications linéaires l'inégalité
$$\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)).$$
On en déduit l'inégalité $\mathrm{rg}(AB) \leq \min\left(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\right)$.

2. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$. Notons f, u et v les applications canoniquement associées à ces trois matrices. Puisque P et Q sont inversibles, u et v sont des isomorphismes. Or on a montré dans le cours sur les applications linéaires que la composition par un isomorphisme laissait le rang inchangé. On a donc
$$\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(u \circ f) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(AQ) = \mathrm{rg}(f \circ v) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A). \quad \square$$

2.3 Rang d'une matrice et lien avec les autres notions de rang

Proposition 31 (Le rang de la famille, c'est le rang de n'importe quelle matrice associée).

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. On a
$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(A).$$

Preuve. On notera n la dimension de E, $(x_1, \dots, x_p)$ les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ et $(C_1, \dots, C_p)$ les colonnes de A. On souhaite montrer

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}(A)$$
$$\text{i.e.} \qquad \dim \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

Notons $V = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ (sous-espace vectoriel de E) et $V' = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ (sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, noté aussi $\operatorname{Im}(A)$ plus haut). Il s'agit de prouver que $\dim V = \dim V'$, ce qui nous allons faire en prouvant que V et V' sont isomorphes.

La première proposition de ce cours énonce que, pour $\mathcal{B}$ une base de E fixée, l'application $\varphi_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Cette fonction envoie les vecteurs de $\mathcal{F}$ sur les colonnes de A :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad \varphi(x_j) = C_j,$$
$$\text{d'où} \qquad \varphi(V) = \operatorname{Im}\left(\varphi_{|V}\right) = \operatorname{Vect}\left(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)\right) = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p) = V'.$$

Or, on sait que $\varphi_{|V}$ est injective puisque φ l'est. Ceci achève de démontrer que $\varphi_{|V}$ réalise un isomorphisme entre V et V', ce qui implique que ces espaces sont de même dimension. $\square$

Proposition 32 (Le rang de l'a.l., c'est le rang de n'importe quelle matrice associée)**.**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F.
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$. On a

$$\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A).$$

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On a $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}\left(u(e_1), \dots, u(e_p)\right)$. Or, d'après la proposition précédente,

$$\operatorname{rg}\left(u(e_1), \dots, u(e_p)\right) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p))\right), \qquad \text{soit} \quad \operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A). \quad \square$$

2.4 Systèmes linéaires : un bilan.

Proposition 33 (Sous-espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène)**.**

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$, d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est $\operatorname{Ker}(A)$, le noyau de A. La dimension de cet espace de solutions est $p - \operatorname{rg}(A)$.

Proposition 34 (Sous-espace affine des solutions d'un système linéaire compatible)**.**

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le système linéaire $AX = B$, d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est compatible ssi $B \in \operatorname{Im}(A)$.
Si c'est le cas et que X_{pa} est une solution particulière, l'ensemble des solutions du système est le sous-espace affine passant par X_{pa} et dirigé par $\operatorname{Ker}(A)$.

Corollaire 35.

Si A est carrée et inversible de taille n, alors tout système linéaire $AX = B$ avec $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ a une unique solution. Il est alors dit **de Cramer**.

3 Changements de bases, équivalence, similitude.

3.1 Changement de bases.

Définition 36.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

c'est-à-dire celle des vecteurs de $\mathcal{B}'$ écrits sur la base $\mathcal{B}$. Autre notation possible : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Proposition 37 (Matrice de passage et application identité)**.**

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E ; espace vectoriel de dimension finie non nulle.

- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$.
- La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse

$$\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \quad P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

- Si X et X' sont les matrices colonnes de x respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors,

$$X' = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}X.$$

Remarque. On passe donc de X (coordonnées dans $\mathcal{B}$) à X' (coordonnées dans $\mathcal{B}'$) en multipliant X par la matrice de passage de... $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Un mauvais point pour cette terminologie ! Pour ce qui concerne la notation, en revanche, $X' = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}X$ est cohérente du point de vue de la relation de Chasles.

Une même application linéaire peut être représentée dans des couples de bases différents. Les matrices de passage permettent de passer d'une représentation à l'autre.

Théorème 38 (Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une appli. lin.)**.**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie non nulle.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
On note

· $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$ (*la matrice de u dans les anciennes bases*)

· $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(u)$ (*celle de u dans les nouvelles bases*),

· $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ (*matrices de passage d'une ancienne à une nouvelle base*)

Alors,

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}.$$

Lorsque deux matrices A et A' satisfont la relation encadrée, on parlera de matrices équivalentes.
Le paragraphe 3.2 est consacré à l'étude de cette relation.

Spécifions le résultat précédent dans le cas d'un endomorphisme.

Théorème 39 (Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$. On note

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ (*la matrice de* u *dans l'ancienne base*)
- $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ (*celle de* u *dans la nouvelle base*),
- $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (*matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base*)

Alors,
$$\boxed{A' = P^{-1}AP}.$$

Lorsque deux matrices A et A' satisfont la relation encadrée, on parlera de matrices semblables. Le paragraphe 3.3 est consacré à l'étude de cette relation.

Notations 40.

Dans la pratique, la base $\mathcal{B}$ est l'*ancienne base*, souvent la base canonique, alors que $\mathcal{B}'$ sera une *nouvelle base* que l'on souhaite adaptée à l'endomorphisme auquel on s'intéresse, de façon à ce que la matrice dans cette base soit simple (voit dans le paragraphe sur les matrices semblables la recherche d'une base de diagonalisation).

Il sera donc souvent plus facile d'exprimer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (vecteurs de la nouvelle base, exprimés dans l'ancienne) que $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. C'est pour cette raison qu'on réserve la notation simple P pour la première des deux matrices. La seconde (donc P^{-1}), sera obtenue dans un second temps, pourquoi pas avec un calcul d'inverse par le pivot. Pour certaines applications, il pourra même arriver qu'on n'aie pas du tout besoin d'expliciter P^{-1}.

3.2 Matrices équivalentes et rang.

Proposition-Définition 41.

Soient deux matrices A et A' de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est **équivalente** à A' si
$$\exists P \in GL_p(\mathbb{K}) \quad \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}) \quad A' = Q^{-1}AP.$$

L'équivalence des matrices est une relation d'équivalence sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

<u>Première interprétation</u> : changement de bases pour la représentation d'une application linéaire.

Supposons que $A' = Q^{-1}AP$ avec P et Q inversibles. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors A' est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, avec $\mathcal{B}'$ la famille des colonnes de P et $\mathcal{C}'$ celle des colonnes de Q.

Deuxième interprétation : opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Supposons qu'on transforme A en A' en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes de A et montrons que A et A' sont équivalentes. Par transitivité, il suffit d'examiner le cas d'une opération sur les lignes, et d'une opération sur les colonnes. Faire une opération sur les lignes de A revient à multiplier à gauche par une matrice d'opération élémentaire (donc inversible) et faire une opération sur les colonnes revient à faire un tel produit à droite.

Réciproquement, c'est moins clair : supposons que $A' = Q^{-1}AP$ avec P et Q inversibles. Peut-on voir les matrices P et Q comme un produit de matrices d'opérations élémentaires ? De manière plus formelle, les matrices d'opérations élémentaires *engendrent*-elles le groupe $GL_n(\mathbb{K})$? L'algorithme du pivot de Gauss utilisé pour l'inversion des matrices montre que oui... mais nous laisserons le lecteur méditer sur cette question !

Définition 42 (La matrice J_r)**.**

Soit r un entier naturel non nul inférieur à n et à p. Dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$, on note J_r la matrice ci-dessous

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, dans $M_{3,4}(\mathbb{K})$, la matrice J_2 est celle-ci : $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 43 (Équivalence à J_r pour une matrice de rang r)**.**

Soit r un entier inférieur à n et à p. Toute matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à J_r.

Corollaire 44 (Classification des matrices équivalentes par le rang)**.**

Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
Le nombre de classes d'équivalence pour l'équivalence des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est $\min(n,p)+1$.

Théorème 45 (Invariance du rang par transposition)**.**

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A).$$

Corollaire 46.

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $(C_1,\dots,C_p)$ la famille de ses colonnes et $(L_1,\dots,L_n)$ la famille de ses lignes.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1,\dots,C_p) = \mathrm{rg}(L_1,\dots,L_n).$$

Premier complément sur le rang : Rang et opérations élémentaires.

Proposition 47.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp lignes) conservent l'image (resp le noyau).
Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes conservent le rang.

Preuve. Par transitivité, il suffit de traiter le cas d'une seule opération élémentaire.
Supposons qu'une opération élémentaire sur les lignes permet de passer de A à A'. Il existe alors une matrice d'opération élémentaire, qu'on note P, telle que $A' = PA$. Facile de prouver par double inclusion que $\mathrm{Ker}(PA) = \mathrm{Ker}(A)$.
Supposons qu'une opération élémentaire sur les colonnes permet de passer de A à A'. Il existe alors une matrice d'opération élémentaire, qu'on note P, telle que $A' = AP$. Facile de prouver par double inclusion que $\mathrm{Im}(AP) = \mathrm{Im}(A)$.
Le produit par une matrice inversible laisse le rang invariant, donc les opérations élémentaires préservent le rang. ☐

Lemme 48 (Rang d'une matrice échelonnée)**.**

Si les r nombres $\alpha_{i,i}$ (pour $1 \leq i \leq r$) sont non nuls, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,r} & \dots & \alpha_{1,p} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ (0) & & \alpha_{r,r} & \dots & \alpha_{r,p} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{est de rang égal à } r$$

Méthode.

L'algorithme du pivot de Gauss permet d'échelonner en lignes une matrice donnée. En ajoutant des échanges sur les colonnes, on se ramène à une matrice du type de celle du lemme précédent, sur laquelle on peut lire le rang.

Exemples 49 (Calculs de rang)**.**

Soit $n \geq 2$ et a, b, c, d quatre scalaires. Calculer le rang des matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Second complément sur le rang : Rang et matrices extraites.

Définition 50.

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** de A toute matrice obtenue en supprimant certaines lignes et colonnes de A, plus précisément tout matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_s,j_1} & \cdots & a_{i_s,j_t} \end{pmatrix}, \text{ avec } 1 \leq s \leq n,\ 1 \leq t \leq p,\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq n,\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_t \leq p.$$

Théorème 51.

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si B est une matrice extraite de A, alors $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.
2. Caractérisation du rang par les matrices extraites.
   Le rang est la taille maximale des matrices inversibles extraites de A.

Exemple 52 (Matrice compagnon)**.**

Pour $a_0, \ldots, a_{n-1}$, on considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\mathrm{rg}(C - xI_n) \geq n - 1$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour avoir $\mathrm{rg}(C) = n$.

3.3 Matrices semblables.

Proposition-Définition 53.

Soient deux matrices A et A' de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **semblable** à A' si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \quad A' = P^{-1}AP.$$

La similitude des matrices est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.

Interprétation : changement de base.
Supposons que $A' = P^{-1}AP$ avec P inversible. Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
La matrice A est celle de f dans $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et A' est la matrice de f dans la "nouvelle" base $\mathcal{B}'$ où $\mathcal{B}'$ est la famille des colonnes de P.

Exemple 54 (Semblable à l'identité)**.**

Justifier que la seule matrice semblable à I_n, c'est elle-même.
Idem pour toute matrice de forme λI_n, notamment la matrice nulle.

Exemple 55 (AB et BA)**.**

Soient $(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$. Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA sont semblables.

Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes, la réciproque n'étant pas vraie (pourquoi ?)
Contrairement à ce qui a été fait pour l'équivalence des matrices, nous ne décrirons pas les différentes classes d'équivalence pour la similitude des matrices. On se contente ici de considérer des exemples où pour une matrice de départ donnée, on propose une matrice semblable *plus simple*

Exemple 56 (Réduction d'une matrice nilpotente)**.**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 57 (Une diagonalisation)**.**

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Expliciter une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$.
Le travail qui vient d'être fait sera généralisé (quand c'est possible !) par le cours de spé.

Définition 58 (rappel).

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de la matrice A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 59 (Trace et opérations, rappel).

Pour toutes matrices A et B carrées d'ordre n,

- La trace est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.
- $\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$.
- $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2 \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Proposition 60 (La trace est invariante par similitude).

Si deux matrices sont semblables, alors elles ont même trace. La réciproque est fausse.

L'invariance de la trace par similitude donne un sens à la définition ci-dessous.

Définition 61.

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle.
On appelle **trace** de u, et on note $\mathrm{tr}(u)$ la trace de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base de E.

Proposition 62.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

- L'application $\mathrm{tr} : u \mapsto \mathrm{tr}(u)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.
- Pour tous u et v dans $\mathscr{L}(E)$, $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.

Exemple 63 (Pas possible).

Soit E un espace de dimension finie non nulle.
Démontrer qu'il ne saurait exister d'endomorphismes u et v de E tels que $uv - vu = \mathrm{id}_E$.

Exemple 64 (Trace d'un projecteur).

Soit p un projecteur de E, espace vectoriel de dimension finie non nulle. Montrer que

$$\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p).$$

Exercices

Représentation matricielle des applications linéaires.

32.1 **[♦◇◇]** Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $u(P) = P + (X-1)P'$.

1. Justifier (brièvement) que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])$.
2. Donner la matrice de u dans la base canonique.
3. À l'aide de cette matrice, justifier que u est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

32.2 **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $f : P \mapsto P(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

32.3 **[♦♦◇]** Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.

1. Comparer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ puis donner leurs dimensions.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

32.4 **[♦♦◇]** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Démontrer l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Changement de bases, matrices semblables, rang.

32.5 **[◇◇◇]** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et I_3 ont le même rang et la même trace.
Les matrices A et I_3 sont-elles semblables ? équivalentes ?

32.6 **[♦◇◇]** Matrice d'une symétrie
On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$e'_1 = (1,-1,-3) \quad e'_2 = (1,0,3) \quad e'_3 = (2,-1,1).$$

On définit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \mathrm{Vect}(e'_1) \quad G = \mathrm{Vect}(e'_2, e'_3).$$

1. Déterminer une base et la dimension de F et de G. Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
   Donner la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de la symétrie vectorielle s par rapport à F parallèlement à G.
3. Calculer la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{32.7}}$ **[♦◊◊]**
Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

$\boxed{\textbf{32.8}}$ **[♦◊◊]**
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ non inversible. Prouver qu'il existe une matrice B non nulle dans $M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = 0$.

$\boxed{\textbf{32.9}}$ **[♦◊◊]**
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ de même rang et telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Démontrer qu'il existe deux matrices U et V de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $A = UV$ et $B = VU$.

$\boxed{\textbf{32.10}}$ **[♦◊◊]** On suppose que $n \geq 2$. Calculer le rang de $A = (\sin(i+j))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

$\boxed{\textbf{32.11}}$ **[♦♦◊]** Matrices de rang 1
Soit $H \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}H = 1$.

1. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = UV^\top$.
2. Calculer $V^\top U$.
3. Montrer que $H^2 = \mathrm{tr}(H)H$.
4. Montrer que
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad : \quad HAH = \mathrm{tr}(AH)\, H.$$

$\boxed{\textbf{32.12}}$ **[♦♦◊]** Rang de $A^\top A$
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On note u et v les applications linéaires canoniquement associées à A et $A^\top A$.

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y^\top Y = 0_{1,1}$. Montrer que $Y = 0_{n,1}$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}u = \mathrm{Ker}v$.
3. Conclure que
$$\mathrm{rg}(A^\top A) = \mathrm{rg}A.$$

$\boxed{\textbf{32.13}}$ **[♦♦◊]** Un calcul de BA à partir de AB !
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que AB est une matrice de projection. Calculer son rang.
2. Montrer que $BA \in GL_2(\mathbb{R})$ (on pourra calculer son rang).
3. Montrer que $BA = I_2$.

$\boxed{\textbf{32.14}}$ **[♦♦♦]** Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^2 = P$. On définit φ, endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ par
$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = PM + MP.$$
Démontrer que $\mathrm{tr}(\varphi) = 2nr$, où r est le rang de P.
