

Suites, La Pratique
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Exercices.

Avant de parler de convergence.	2
Exercice 13.1	2
Exercice 13.2	2
Exercice 13.3	2
Exercice 13.4	3
Exercice 13.5	3

Exercice 13.1 [◆◆◆]

Une suite croissante est une fonction croissante sur \mathbb{N} .

Démontrer que le titre de l'exercice dit vraie, c'est à dire, pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équivalence entre

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} \geq u_n$.
2. $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \ n \leq p \implies u_n \leq u_p$.

Supposons 2, montrons 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $n \leq n + 1$. D'après 2, $u_n \leq u_{n+1}$. ez

Supposons 1, montrons 2.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$. On sait que $u_{n+1} \geq u_n$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, $u_{n+3} \geq u_{n+2}$, etc...

Par récurrence triviale et par transitivité, pour tout entier $q \geq n$, $u_q \geq u_n$.

En particulier, $u_p \geq u_n$

□

Exercice 13.2 [◆◆◆]

Soit a un réel supérieur à 1 et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \frac{a^n}{n!}$.

Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de a . (u_n) est strictement positive sur \mathbb{N} .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On peut donc écrire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$.

Ainsi, (u_n) est croissante ($a \geq n+1$) puis décroissante ($a \leq n+1$), ce qui implique qu'un maximum existe. Ce maximum est atteint lorsque $a = n+1$ c'est à dire quand $n = \lfloor a \rfloor$.

Ainsi, le maximum de la suite u est : $\frac{a^{\lfloor a \rfloor}}{\lfloor a \rfloor!}$

□

Exercice 13.3 [◆◆◆]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1}.$$

Prouver que la suite (u_n) est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$. Donc :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2 + 1} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \\ &\leq \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Majorer en valeur absolue c'est borner

□

Exercice 13.4 [◆◆◆]

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = \alpha(1 - \alpha) \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) \end{cases}$$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de α et n .
2. Donner $\lim u_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose l'équation au point fixe : $x = (1 - \alpha)x + \alpha(1 - \alpha)$.

Sa solution est : $x = 1 - \alpha$.

On a : $u_{n+1} - (1 - \alpha) = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) - (1 - \alpha)$.

Ainsi, $u_{n+1} + \alpha - 1 = (1 - \alpha)(u_n + \alpha - 1)$.

On pose $v_n := u_n + \alpha - 1$. Par définition, v est géométrique, de raison $1 - \alpha$.

Son terme général est : $v_n = v_0(1 - \alpha)^n$.

Or $v_0 = u_0 + \alpha - 1 = \alpha(1 - \alpha) + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(1 - \alpha)$.

On en déduit que $v_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1}$.

Finalement, $u_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1} - \alpha + 1$.

□

Exercice 13.5 [◆◆◆]