Problème 1. Une inégalité.

L'objectif est de montrer l'inégalité :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad a^b + b^a > 1.}$$

1. *Inégalités de Bernoulli*

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x. \end{array} \right.$$

   (a) Justifier que f est dérivable et calculer f'.

   (b) En le justifiant, dresser le tableau de variation de f dans le cas $\alpha < 1$ et dans le cas $\alpha > 1$. (*On ne demande pas les limites.*)

   (c) En déduire les inégalités de Bernoulli :

$$\begin{array}{rlcl} \forall \alpha \in]0,1[& \forall x \in]-1,+\infty[& : & (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \\ \forall \alpha \in]1,+\infty[& \forall x \in]-1,+\infty[& : & (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x. \end{array}$$

2. *Inégalité préliminaire*

   Soient $a \in]0,1[$ et $b \in]0,1[$.

   (a) Montrer que $a^{1-b} \leq 1 + (1-b)(a-1)$.

   (b) En déduire que $a^b \geq \frac{a}{a+b-ab}$ et conclure que

$$a^b + b^a \geq \frac{a+b}{a+b-ab}.$$

3. *Preuve du résultat principal*

   Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$a^b + b^a > 1.$$

   On pourra distinguer les trois cas : $a \geq 1$, $b \geq 1$ et $(a,b) \in]0,1[^2$.

4. *La minoration par 1 est optimale*

   (a) Calculer : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^x \right)$.

   (b) Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad : \quad a^b + b^a \geq m.$$

   Montrer que $m \leq 1$.

Problème 2. Une somme qui télescope.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \mathrm{th}\left(2^k a\right).$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$ et $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)$.

   En déduire que si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathrm{th}(x) = \frac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \frac{1}{\mathrm{th}(x)}.$$

2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 2^k \mathrm{th}\left(2^k a\right) = \frac{2^{k+1}}{\mathrm{th}\left(2^{k+1} a\right)} - \frac{2^k}{\mathrm{th}\left(2^k a\right)}.$$

3. Calculer S_n.