

Ensembles et applications

Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 5.1	2
Exercice 5.2	2

Exercice 5.1 [◆◆◆]

Soient A, B deux parties d'un ensemble E . Établir que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad \text{et} \quad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

On a :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \setminus B)} \\ &= A \cap \overline{(\overline{A} \cup B)} \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

□

Exercice 5.2 [◆◆◆]

Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble E , telles que

$$E = A \cup B \cup C, \quad A \cap D \subset B, \quad B \cap D \subset C, \quad C \cap D \subset A.$$

Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.

Soit $x \in D$, on sait que $x \in E$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$.

⊙ Si $x \in A$, alors $x \in A \cap D$, donc $x \in B$.

⊙ Si $x \in B$, alors $x \in B \cap D$, donc $x \in C$.

⊙ Si $x \in C$, alors $x \in C \cap D$, donc $x \in A$.

On en déduit que $x \in A \cap B \cap C$.

Ainsi, $D \subset A \cap B \cap C$.

□