Chapitre 16

Relations binaires.

Sommaire.

1 Relations binaires et leurs éventuelles propriétés. 1

2 Relations d'équivalence. 1

3 Relations d'ordre. 2

4 Exercices. 4

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Relations binaires et leurs éventuelles propriétés.

Soit E un ensemble.

Définition 1

On appelle **relation binaire** sur E un prédicat $\mathscr{R}(x,y)$ sur $E \times E$, c'est-à-dire une propriété dépendant de $(x,y) \in E \times E$ et pouvant être vérifiée ou pas par chaque couple (x,y) de $E \times E$.

Soit $(x,y) \in E^2$. Si la propriété $\mathscr{R}(x,y)$ est vérifiée, on dit que x et y sont **en relation**, et on note

$$x \mathrel{\mathscr{R}} y.$$

Remarque. On peut aussi définir plus rigoureusement une relation binaire $\mathscr{R}$ comme une partie de $E \times E$. Pour $(x,y) \in E \times E$, on dit alors que x est en relation avec y si $(x,y) \in \mathscr{R}$.

Définition 2: Propriétés que possède éventuellement une relation binaire.

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est
- **réflexive** si pour tout $x \in E$, on a $x \mathrel{\mathscr{R}} x$,
- **symétrique** si pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $x \mathrel{\mathscr{R}} y \Longrightarrow y \mathrel{\mathscr{R}} x$,
- **antisymétrique** si pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $(x \mathrel{\mathscr{R}} y \text{ et } y \mathrel{\mathscr{R}} x) \Longrightarrow x = y$,
- **transitive** si pour tout $(x,y,z) \in E^3$, on a $(x \mathrel{\mathscr{R}} y \text{ et } y \mathrel{\mathscr{R}} z) \Longrightarrow x \mathrel{\mathscr{R}} z$,

Exemple 3

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites du plan, et E un ensemble quelconque.

Relation	réflexive ?	symétrique ?	antisymétrique ?	transitive ?
$=$ sur E	✓	✓	✓	✓
$<$ sur $\mathbb{R}$	✗	✗	✗	✓
$\perp$ sur $\mathcal{D}$	✗	✓	✗	✗
$\parallel$ sur $\mathcal{D}$	✓	✓	✗	✓

2 Relations d'équivalence.

Définition 4

Sur un ensemble E, une **relation d'équivalence** est une relation binaire $\sim$ qui est réflexive, symétrique et transitive.

Deux éléments x et y qui sont en relation sont dits **équivalents**.

Pour $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x l'ensemble des éléments qui sont équivalents à x; on notera ici cet ensemble $[x]$:

$$[x] = \{y \in E \mid x \sim y\}.$$

Exemple. Sur E, l'égalité est une relation d'équivalence. Que dire des classes d'équivalence ?

Exemple 5: Relation d'équivalence associée à une fonction.

Soit $f : E \to F$ une application. Pour $x,y \in E$, on pose $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$.
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E. Décrire les classes d'équivalences.

Solution :

Montrons que c'est une relation d'équivalence :
— **Réflexivité :** Soit $x \in E$, on a $f(x) = f(x)$ donc $x \sim x$.
— **Symétrie :** Soient $x,y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, on a $f(y) = f(x)$.
— **Transitivité :** Soient $x,y,z \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$. On a $f(x) = f(z)$.
Soit $x \in E$: $[x] = \{y \in E \mid f(x) = f(y)\} = f^{-1}(\{f(x)\})$.

Définition 6

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$, la relation de **congruence** modulo α est définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \equiv y[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = y + k\alpha.$$

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Sur $\mathbb{Z}$, la relation de **congruence** modulo n est définie par

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ p \equiv q[n] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid p = q + kn.$$

Proposition 7: ★

Les relations de congruence sont des relations d'équivalence.

Preuve :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
— **Réflexivité :** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x = x + 0\alpha$ donc $x \equiv x[\alpha]$.
— **Symétrie :** Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\exists k \in \mathbb{Z} \mid x = y + k\alpha$. Alors $y = x - k\alpha$ et $y \equiv x[\alpha]$.
— **Transitivité :** Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\exists k, k' \in \mathbb{Z} \mid x = y + k\alpha$ et $y = z + k'\alpha$. Alors $x = z + (k + k')\alpha$.
C'est bien une relation d'équivalence.

Proposition 8

Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Pour $x, x' \in E$,

$$x \sim x' \iff x' \in [x] \iff [x] = [x'].$$

Preuve :

$\boxed{3 \implies 2}$ Supposons que $[x] = [x']$. Puisque $x' \in [x']$, $x' \in [x]$ car $[x] = [x']$.

$\boxed{2 \implies 1}$ Supposons $x' \in [x]$, on a par définition $x' \sim x$ donc $x \sim x'$ (symétrie).

$\boxed{1 \implies 3}$ Supposons $x \sim x'$, alors $\forall y \in [x],\ y \sim x \sim x'$ donc $y \in [x']$, de même pour $y \in [x']$.
Par double inclusion, $[x] = [x']$.

On a bien $3 \implies 2 \implies 1 \implies 3$, donc les équivalences sont vraies.

Théorème 9

Les classes d'équivalence pour une relation d'équivalence sur un ensemble E forment une partition de cet ensemble.

Preuve :

• Une classe d'équivalence est non-vide car définie à partir d'un élément de E : $\forall x \in E,\ x \in [x]$.
• Montrons que E est l'union des classes d'équivalence par double inclusion.
$\boxed{\supset}$ est claire car les $[x]$ sont des parties de E.
$\boxed{\subset}$ Soit $x \in E$, on a $x \in [x]$ et $[x] \in E_{/\sim}$ donc x est dans l'union des classes d'équivalence.
• Montrons que les classes d'équivalence sont deux-à-deux disjointes. Soient $[x] \neq [x']$ deux classes d'équiv.
– Par l'absurde, supposons que $\exists y \in [x] \cap [x']$. Alors $[y] = [x] = [x']$, absurde.
– Ainsi, toutes les classes d'équivalence sont deux-à-deux disjointes.

Les classes d'équivalence forment donc une partition de E.

3 Relations d'ordre.

Définition 10

Sur un ensemble E, une **relation d'ordre** est une relation binaire $\preceq$ qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Au sujet du couple $(E, \preceq)$, on peut alors parler d'ensemble ordonné.

Définition 11

Une relation d'ordre sur un ensemble E est dite **totale** si on peut toujours comparer deux éléments de E, c'est-à-dire que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \preceq y \ \text{ ou } \ y \preceq x.$$

Dans le cas contraire, on peut parler d'ordre **partiel**.

Exemple 12: Inégalités.

La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, c'est un ordre total.
La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas réflexive).

Exemple 13: Inclusion.

Soit E un ensemble. La relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
Dès que E possède plus de deux éléments, c'est un ordre partiel.

Solution :

Supposons que $|E| \geq 2$. Soient $x, y \in E \mid x \neq y$. On a $\{x\} \not\subset \{y\}$ et $\{y\} \not\subset \{x\}$. C'est un ordre partiel.

Exemple 14: Divisibilité sur les entiers positifs. ★

Soient p et q deux entiers naturels. On dit que p divise q si il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $q = kp$; on note alors $p \mid q$. La relation $\mid$ est une relation d'ordre (partielle) sur $\mathbb{N}$.

Solution :

— **Réflexivité :** Soit $p \in \mathbb{N}$, on a $p = p \cdot 1$ donc $p \mid p$.
— **Transitivité :** Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $\exists k, k' \in \mathbb{N}$ $q = kp$ et $r = k'q$, alors $r = pkk'$ et $p \mid r$.
— **Antisymétrie :** Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\exists k, k' \in \mathbb{N}$ $q = kp$ et $p = k'q$, alors $q = qkk'$ donc $q(1 - kk') = 0$.
• Si $q = 0$, alors $p = qk' = 0 = q$ donc $p = q$.
• Si $kk' = 1$, alors $k = k' = 1$ car $k, k' \in \mathbb{N}$. Or, $q = pk$ donc $p = q$.

Exemple 15: Ordre lexicographique.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'ordre lexicographique est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}^p$.
Deux p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ sont comparés d'abord selon leur première coordonnée, puis selon la deuxième en cas d'égalité, etc...
Les p-uplets sont alors ordonnés comme dans un dictionnaire.
Pour cet ordre sur $\mathbb{N}^3$, $(1, 2, 4)$ est plus petit que $(1, 3, 2)$, qui est lui même plus petit que $(1, 3, 4)$.

Définition 16

Considérons deux ensembles, chacun muni d'une relation d'ordre : $(E, \preceq_E)$ et $(F, \preceq_F)$.
D'une application $f : E \to F$, on dit qu'elle est :
- **croissante** si $\forall (x, x') \in E^2,\ x \preceq_E x' \Longrightarrow f(x) \preceq_F f(x')$.
- **décroissante** si $\forall (x, x') \in E^2,\ x \preceq_E x' \Longrightarrow f(x') \preceq_F f(x)$.
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 17

Connaissons-nous des fonctions monotones (au sens de l'inclusion) de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même ?

Solution :

L'identité, la constante, ou le complémentaire...

Définition 18: Majorant, minorant.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
- On dit que A est **majorée** dans E si il existe un élément M de E tel que
$$\forall x \in A,\ x \preceq M.$$
Dans ce contexte, M est appelé un **majorant** de A.
- On dit que A est **minorée** dans E si il existe un élément m de E tel que
$$\forall x \in A,\ m \preceq x.$$
Dans ce contexte, m est appelé un **minorant** de A.
- On dit que A est **bornée** dans E si elle est majorée et minorée.

Définition 19: Maximum, minimum.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
- S'il existe un majorant de A qui appartient à A, alors cet élément est unique.
Il est appelé plus grand élément de A, ou encore **maximum** de A et noté $\max(A)$.
- S'il existe un minorant de A qui appartient à A, alors cet élément est unique.
Il est appelé plus petit élément de A, ou encore **minimum** de A et noté $\min(A)$.

Exemple 20

Soit E un ensemble. Alors $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonnée.
$\mathcal{P}(E)$ possède-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

Solution :

Un minimum : $\varnothing$ car $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \varnothing \subset X$ et $\varnothing \subset E$ et un maximum : E car $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ X \subset E$ et $E \subset E$.

Définition 21: Borne supérieure, inférieure.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, alors cet élément est unique. Il est appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup(A)$.
- Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, alors cet élément est unique. Il est appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf(A)$.

Exemple 22

Soit E un ensemble. Dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$, toute partie A de $\mathcal{P}(E)$ possède une borne supérieure, ainsi qu'une borne inférieure : on a

$$\sup(A) = \bigcup_{X \in A} X \quad \text{et} \quad \inf(A) = \bigcap_{X \in A} X.$$

Solution :

Soit $X_0 \in A$. On a $\bigcup\limits_{X \in A} X = X_0 \cup \bigcup\limits_{X \in A \setminus X_0} X$ donc $X_0 \subset \bigcup\limits_{X \in A} X$.
Soit M un majorant de A. Soit $x \in \bigcup\limits_{x \in A} X$ donc $\exists X \in A \mid x \in X$.
Or $X \subset M$ donc $x \in M$ donc $\bigcup_{X \in A} X$ est le plus petit des majorants.
De même pour l'intersection.

4 Exercices.

Exercice 1: ♦♦◊

Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser le cardinal de la classe d'équivalence d'un réel x.

Solution :

$\boxed{1.}$
Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien que $xe^x = xe^x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$, on a bien $ye^x = xe^y$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Montrons que $xe^z = ze^x$.
D'après la première égalité, $y = xe^{y-x}$.
On remplace y dans la seconde : $xe^{y-x+z} = ze^y$.
On divise par e^y : $xe^{z-x} = z$. On multiplie par e^x : $xe^z = ze^x$.
On a bien $x \mathscr{R} z$.

$\boxed{2.}$ Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
On a $x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y}$.
On pose $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$. La classe d'équivalence de x est alors $\{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}$.
La question revient à chercher le nombre d'éléments dans $\mathbb{R}$ qui ont la même image par f.
On a que f est dérivable et $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$. Alors :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

Alors, pour $x \in]-\infty, 0]$, $|[x]| = 1$, pour $x = 1$, $|[x]| = 1$ et sinon, $|[x]| = 2$.

Exercice 2: ♦♦◊

On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$p \mathscr{R} q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \ : \ p^n = q.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

Solution :

Réflexivité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $p^1 = p$, donc $p \mathscr{R} p$.
Antisymétrie : Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = p$. Montrons que $p = q$.
On a $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = p$. De plus, $q^m = p$, donc $q^{nm} = p^n = q$.
Ainsi, $p = p^{nm}$ et $q = q^{nm}$. Alors, soit $p = q = 1$, soit $n = m = 1$ et alors $p = q$ dans tous les cas.
Transitivité : Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = r$. Montrons que $p \mathscr{R} r$.
On a que $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = r$. Or $nm \in \mathbb{N}^*$, donc $p \mathscr{R} r$.

Alors $\mathscr{R}$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
Ce n'est pas un ordre total : il n'existe pas d'entier n tel que $2^n = 3$ ou $3^n = 2$, par exemple.

Exercice 3: ♦♦♢

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $x \preceq y$ si

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \ : \ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.
2. Si $n \geq 2$, montrer qu'il s'agit d'un ordre partiel.

Solution :

$\boxed{1.}$ **Réflexivité** : Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a bien que $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i$.
Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $x \preceq y$ et $y \preceq x$. Montrons que $x = y$.
On a que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \ \wedge \sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i$.
Par antisymétrie de $\leq$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$.
Par récurrence forte triviale sur k, on peut montrer que tous les éléments sont égaux 1 à 1.
i.e. Avec $k = 1$, $x_1 = y_1$, on suppose $x_j = y_j$ pour tout $j < k$ et on a $\sum_{i=1}^{j-1} x_i + x_k = \sum_{i=1}^{j-1} y_i = y_k$

Transitivité : Soient 1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
$x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \preceq y$ et $y \preceq z$. Montrons que $x \preceq z$.
On a que $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} z_i$. Par transitivité de $\leq$, $x \preceq z$.

2. Soient $x = (0, 2)$ et $y = (1, 0)$.
On a $\sum_{i=1}^{2} x_i \geq \sum_{i=1}^{2} y_i$ et $\sum_{i=1}^{1} x_i \leq \sum_{i=1}^{1} y_i$: x et y ne sont pas comparables, $\preceq$ est un ordre partiel.

Exercice 4: ♦♦♢

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit une relation binaire en posant que deux réels strictement positifs sont en relation, ce qu'on note $x \mathscr{R} y$ si et seulement si

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ px = qy$$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Démontrer que pour cette relation, deux classes d'équivalence sont nécessairement en bijection.

Solution :

$\boxed{1.}$ **Réflexivité** : Soit $x \in \mathbb{N}^*$. On a que $1 \cdot x = 1 \cdot x$ donc $x \mathscr{R} x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^*$ $px = qy$. On a $qy = px$ donc $y \mathscr{R} x$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^*$ $px = qy$ et $\exists (p', q') \in \mathbb{N}^*$ $p'y = q'z$.
On a $y = \frac{p}{q}x$ donc $p'\frac{p}{q}x = q'z$. Alors $pp'x = qq'z$ et $x \mathscr{R} z$.

$\boxed{2.}$ Soient $[x]$ et $[y]$ deux classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ avec $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.
On pose $f : \begin{cases} [x] \to [y] \\ a \mapsto \frac{a}{x}y \end{cases}$.
Pour $a \in [x]$, on a $f(a) \in [y]$: $\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $pa = qx$ Alors $a = \frac{q}{p}x$ et $f(a) = \frac{q}{p}\frac{x}{x}y \iff pf(a) = qy$.
On a f **injective** : Soient $a, a' \in [x]$ tels que $f(a) = f'(a)$ on a $\frac{y}{x}a = \frac{y}{x}a'$ donc $a = a'$.
On a f **surjective** : Soit $b \in [y]$: $\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $pb = qy$, alors $b = \frac{q}{p}y$.
On pose $a \in [x] \mid pa = qx$, donc $a = \frac{q}{p}x$. On a $f(a) = \frac{q}{p}y = b$.
Donc f est bien une fonction bijective de $[x]$ vers $[y]$.

Exercice 5: ♦♦♢

Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathscr{R}$ par

$$x \mathscr{R} y \iff x^2 + 2y = y^2 + 2x.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{R}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un réel a.

Solution :

1. **Réflexivité** : On a bien que $x^2 + 2x = x^2 + 2x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathscr{R} y$, par symétrie de l'égalité, on a $y \mathscr{R} x$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$. Par transitivité de l'égalité, $x \mathscr{R} z$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} & x^2 + 2a = a^2 + 2x \\ \iff & x^2 - a^2 = 2(x - a) \\ \iff & (x - a)(x + a) = 2(x - a) \\ \iff & (x - a)(x + a - 2) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, soit $x = a$, soit $x = 2 - a$.
La classe d'équivalence de a est alors : $[a] = \{2 - a, a\}$.

Exercice 6: ♦♦◊

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E.
Pour $x, y \in E$, on note $x \sim y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, ...x_n \in E$ tels que

$$x_0 = x,\ x_0 \mathscr{R}\, x_1,\ x_1 \mathscr{R}\, x_2,\ ...,\ x_{n-1} \mathscr{R}\, x_n,\ x_n = y.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation transitive sur E.
2. On suppose $\mathscr{R}$ réflexive et symétrique. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Montrons $x \sim z$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $_0, ..., x_n \in E$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $y_0, ..., y_m \in E$ tels que

$$x_0 = x,\ x_0 \mathscr{R}\, x_1,\ ..., x_{n-1} \mathscr{R}\, x_n = y_0 \mathscr{R}\, y_1,\ ...,\ y_{n-1} \mathscr{R}\, y_n = z$$

Alors on a $m + n$ éléments de E tels que

$$x_0 = x,\ x_0 \mathscr{R}\, x_1,\ ...,\ x_{m+n-1} \mathscr{R}\, x_{m+n},\ x_{m+n} = z.$$

On en conclut que $x \sim z$: $\sim$ est transitive sur E.

$\boxed{2.}$ **Réflexivité** : Soit $x \in E$. On pose $x_0 = x$ et $x_1 = x$. Par réflexivité de $\mathscr{R}$, on a $x_0 \mathscr{R}\, x_1$.
Alors on a que $x_0 = x,\ x_0 \mathscr{R}\, x_1,\ x_1 = x$. C'est exactement $x \sim x$.

Symétrie : Soient $x, y \in E$ tels que $x \sim y$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, ..., x_n$ tels que [la relation].
Par symétrie de $\mathscr{R}$, on obtient :

$$x_n = y,\ x_n \mathscr{R}\, x_{n-1},\ ...,\ x_1 \mathscr{R}\, x_0,\ x_0 = x$$

On pose alors $(y_0, y_1, ..., y_n) = (x_n, x_{n-1}, ...x_0)$ et on obtient que

$$y_0 = y,\ y_0 \mathscr{R}\, y_1,\ ...,\ y_{n-1} \mathscr{R}\, y_n,\ y_n = x$$

Alors $y \sim x$ et on en conclut que $\sim$ est réflexive.
On a déjà montré la transitivité de $\sim$: c'est une relation d'équivalence sur E.

Exercice 7: ♦♦♦

Soit E un ensemble et A une partie de E. Pour deux parties X et Y de E on note $X \sim Y$ lorsque $X \cap A = Y \cap A$, ce qui définit sur $\mathcal{P}(E)$ une relation binaire.
1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On note $\mathcal{P}(E)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences pour $\sim$.
Démontrer qu'il existe une bijection de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(E)/\sim$.

Solution :

$\boxed{1.}$ **Réflexivité** : Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Par réflexivité de l'égalité, on a que $X \cap A = X \cap A$: $X \sim X$.
Symétrie : Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \sim Y$. Par symétrie de l'égalité, $Y \sim X$.
Transitivité : Soient $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$. Par transitivité de l'égalité, $X \sim Z$.
Alors $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

$\boxed{2.}$ On pose $f : \begin{cases} \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(E)/\sim \\ X \mapsto [X] \end{cases}$

f est d'abord bien définie puisque $A \subset E$ et que $\sim$ est une relation sur E.

Montrons que f est **injective** : Soient $X, X' \in (\mathcal{P}(A))^2$ tels que $f(X) = f(X')$.
On a $[X] = [X']$. Alors $X \cap A = X' \cap A$, or $X \subset A$ et $X' \subset A$ donc $X = X'$.

Montrons que f est **surjective** : Soit $C \in \mathcal{P}(E)/\sim$. Alors $\exists X \in \mathcal{P}(E) \mid [X] = C$.
Ainsi, $X \cap A \in \mathcal{P}(A)$ et $f(X \cap A) = [X]$ puisque $X \cap A \cap A = X \cap A$. On a bien que f est surjective.

On en conclut que f est une bijection de $\mathcal{P}(A)$ vers $\mathcal{P}(E)/\sim$.