

Suites, La Pratique  
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

---

Exercices.

Avant de parler de convergence. . . . .	2
Exercice 13.1 . . . . .	2
Exercice 13.2 . . . . .	2
Exercice 13.3 . . . . .	2
Exercice 13.4 . . . . .	3
Exercice 13.5 . . . . .	3
Exercice 13.6 . . . . .	4
Exercice 13.7 . . . . .	4
Monotonie. . . . .	4

---

**Exercice 13.1** [◆◆◆]

Une suite croissante est une fonction croissante sur  $\mathbb{N}$ .

Démontrer que le titre de l'exercice dit vraie, c'est à dire, pour une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'équivalence entre

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} \geq u_n$ .
2.  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \ n \leq p \implies u_n \leq u_p$ .

Supposons 2, montrons 1.

Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a  $n \leq n + 1$ . D'après 2,  $u_n \leq u_{n+1}$ . ez

Supposons 1, montrons 2.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $n \leq p$ . On sait que  $u_{n+1} \geq u_n$ ,  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ,  $u_{n+3} \geq u_{n+2}$ , etc...

Par récurrence triviale et par transitivité, pour tout entier  $q \geq n$ ,  $u_q \geq u_n$ .

En particulier,  $u_p \geq u_n$

□

**Exercice 13.2** [◆◆◆]

Soit  $a$  un réel supérieur à 1 et  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \frac{a^n}{n!}$ .

Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de  $a$ .  $(u_n)$  est strictement positive sur  $\mathbb{N}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On peut donc écrire :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$ .

Ainsi,  $(u_n)$  est croissante ( $a \geq n+1$ ) puis décroissante ( $a \leq n+1$ ), ce qui implique qu'un maximum existe. Ce maximum est atteint lorsque  $a = n+1$  c'est à dire quand  $n = \lfloor a \rfloor$ .

Ainsi, le maximum de la suite  $u$  est :  $\frac{a^{\lfloor a \rfloor}}{\lfloor a \rfloor!}$

□

**Exercice 13.3** [◆◆◆]

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1}.$$

Prouver que la suite  $(u_n)$  est bornée.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $-1 \leq \sin n \leq 1$ . Donc :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2 + 1} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \\ &\leq \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Majorer en valeur absolue c'est borner

□

**Exercice 13.4** [◆◆◆]

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = \alpha(1 - \alpha) \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) \end{cases}$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de  $\alpha$  et  $n$ .
2. Donner  $\lim u_n$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On pose l'équation au point fixe :  $x = (1 - \alpha)x + \alpha(1 - \alpha)$ .

Sa solution est :  $x = 1 - \alpha$ .

On a :  $u_{n+1} - (1 - \alpha) = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) - (1 - \alpha)$ .

Ainsi,  $u_{n+1} + \alpha - 1 = (1 - \alpha)(u_n + \alpha - 1)$ .

On pose  $v_n := u_n + \alpha - 1$ . Par définition,  $v$  est géométrique, de raison  $1 - \alpha$ .

Son terme général est :  $v_n = v_0(1 - \alpha)^n$ .

Or  $v_0 = u_0 + \alpha - 1 = \alpha(1 - \alpha) + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(1 - \alpha)$ .

On en déduit que  $v_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1}$ .

Finalement,  $u_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1} - \alpha + 1$ .

□

**Exercice 13.5** [◆◆◆]

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

1. Donner la forme du terme général d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 2 \cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

2. Supposons dans cette question que  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ . Donner sous forme factorisée le terme général de l'unique suite  $(u_n)$  satisfaisant la relation ci-dessus et telle que  $u_0 = u_1 = 1$ .

Polynôme caractéristique :  $r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1$ .  $\Delta = -4 \sin^2(\theta)$ .  $r_1 = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  et  $r_2 = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$ .

Lorsque  $\theta \in \pi\mathbb{Z}$  :  $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda n \cos^n(\theta) + \mu \cos^n(\theta)$ .

Lorsque  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$  :  $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$ .

2. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$ .

On a  $u_0 = \lambda = 1$  et  $u_1 = \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = 1$  donc  $\mu = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ .

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta) + \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(n\theta)$

*Comment tu factorises ça wtf*

□

**Exercice 13.6** [◆◆◆]

Soit  $(u_n)$ , définie par récurrence par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = 3u_n + 2^n \end{cases}$ .

1. Prouver qu'il existe une suite  $(a_n)$  géométrique de raison 2 qui satisfait la relation de récurrence.
2. Donner le terme général de  $(u_n)$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $(a_n)$  une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 2^n$$

On cherche  $(a_n)$  telle que  $a_{n+1} = 3a_n + 2^n = 3a_0 2^n + 2^n = 2^n(3a_0 + 1)$ .

Posons  $a_0 = -1$ . On a  $a_{n+1} = 2^n(-2) = -2^{n+1} = a_0 2^{n+1}$ .

Ainsi, la suite géométrique  $(a_n)$  de raison 2 et de premier terme  $-1$  satisfait la relation de récurrence.

2. On a  $u_{n+1} - 2a_n = 3u_n + 2^n - 2a_n \iff u_{n+1} - a_{n+1} = 3(u_n - a_n)$ .

On pose  $v_n := u_n - a_n$ . Alors  $v_0 = u_0 - a_0 = 2$  et  $v_n = 2 \cdot 3^n$ .

On en déduit que  $u_n = v_n + a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n = 2(3^n - 2^{n-1})$

On a  $u_{n+1} = 2(3^{n+1} - 2^n)$

□

**Exercice 13.7 [◆◆◇]**

Étudier la suite  $(u_n)$ , définie par récurrence par  $\begin{cases} u_0 > 0; u_1 > 0 \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} &\iff \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) \\ &\iff \ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)) \end{aligned}$$

On pose  $v_n := \ln(u_n)$ .

On obtient :  $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$ .

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 !

Polynome caractéristique :  $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ .  $\Delta = \frac{9}{4}$ .  $r_1 = 1$  et  $r_2 = -\frac{1}{2}$ .

Ainsi,  $v_n = \lambda + \frac{\mu(-1)^n}{2^n} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $v_n$  une telle suite.

Alors  $v_0 = \lambda + \mu$  et  $v_1 = \lambda - \frac{\mu}{2}$ .

On a  $v_0 + 2v_1 = 3\lambda = \ln(u_0u_1^2)$ . Donc  $\lambda = \ln(\sqrt[3]{u_0u_1^2})$ .

On a  $u_n = e^\lambda \cdot e^{\frac{\mu(-1)^n}{2^n}} \rightarrow e^\lambda$ . Ainsi,  $u_n \rightarrow \sqrt[3]{u_0u_1^2}$ .

□