**Problème 1**. Une preuve de l'identité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. *Corrigé de Sylvain Bruiltet.*

1. Par la formule du binôme :

$$P_n=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left(i^{2n+1-k}-(-1)^{2n+1-k}i^{2n+1-k}\right)X^k.$$

Si $k=2\ell+1$ est impair :

$$\begin{aligned}i^{2n+1-k}-(-1)^{2n+1-k}i^{2n+1-k}&=i^{2n-2\ell}-(-1)^{2n-2\ell}i^{2n-2\ell}\\&=i^{2n-2\ell}-i^{2n-2\ell}\\&=0.\end{aligned}$$

Si $k=2\ell$ est pair :

$$\begin{aligned}i^{2n+1-k}-(-1)^{2n+1-k}i^{2n+1-k}&=i^{2(n-\ell)+1}-(-1)^{2(n-\ell)+1}i^{2(n-\ell)+1}\\&=i^{2(n-\ell)+1}+i^{2(n-\ell)+1}\\&=2i\cdot i^{2(n-\ell)}\\&=2i(-1)^{n-\ell}.\end{aligned}$$

Il reste

$$P_n=\sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n+1}{2\ell}(-1)^{n-\ell}X^{2\ell}.$$

$$\boxed{a_\ell=(-1)^{n-\ell}\binom{2n+1}{2\ell}}$$

On en déduit que

$$\boxed{P_n\in\mathbb{R}[X]\ \text{ est un polynôme pair}}\quad\boxed{\deg P_n=2n}$$

$$\boxed{a_n=2n+1}\quad\boxed{a_{n-1}=-\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}$$

2. • On constate que $i$ n'est pas racine de $P_n$. Pour $z\in\mathbb{C}$, $z\neq i$ :

$$\begin{aligned}P_n(z)=0&\iff\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1}=1\\&\iff\exists k\in[\![0,2n]\!]\ :\ \frac{z+i}{z-i}=e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\\&\iff\exists k\in[\![0,2n]\!]\ :\ \left(1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right)z=-i\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right)\\&\iff\exists k\in[\![1,2n]\!]\ :\ z=-i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}\quad\text{(pas de racines pour } k=0)\\&\iff\exists k\in[\![0,2n]\!]\ :\ z=-i\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}\cdot\frac{e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}}+e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}{e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}}-e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}\\&\iff\exists k\in[\![1,2n]\!]\ :\ z=-i\frac{2\cos\frac{k\pi}{2n+1}}{-2i\sin\frac{k\pi}{2n+1}}\\&\iff\exists k\in[\![0,2n]\!]\ :\ \boxed{z=\frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}}}.\end{aligned}$$

• Pour $1\leq k\leq 2n$, on a $0<\frac{k\pi}{2n+1}<\pi$.
Sur $[0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[$ la fonction tan est injective : elle est strictement croissante sur chacun des deux intervalles donc injective sur chacun, et de plus, les images des réels de $[0,\pi/2[$ sont positives et celles de $]\pi/2,\pi[$ strictement négatives. Les $\omega_k$, $1\leq k\leq 2n$, sont donc $2n$ racines distinctes de $P_n$.
Puisque $P_n$ est de degré $2n$, il est scindé sur $\mathbb{R}$ : il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ telle que

$$P_n(X)=\lambda\cdot\prod_{k=1}^{2n}(X-\omega_k).$$

La constante $\lambda$ est le coefficient dominant de $P$, qui vaut $2n+1$. Conclusion :

$$\boxed{P_n=(2n+1)\prod_{k=1}^{2n}(X-\omega_k)}.$$

3. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$.

$$\tan \frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} = \tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \tan\left(-\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

$$\boxed{\omega_{2n+1-k} = -\omega_k}$$

$$\prod_{k=1}^{2n}(X-\omega_k) = \prod_{k=1}^{n}(X-\omega_k)\prod_{k=n+1}^{2n}(X-\omega_k)$$

et

$$\prod_{k=n+1}^{2n}(X-\omega_k) = \prod_{k=1}^{n}(X-\omega_{2n+1-k}) = \prod_{k=1}^{n}(X+\omega_k),$$

de sorte que

$$\prod_{k=1}^{2n}(X-\omega_k) = \prod_{k=1}^{n}(X-\omega_k)(X+\omega_k) = \boxed{\prod_{k=1}^{n}(X^2-\omega_k^2)}.$$

On a donc bien $\boxed{P_n(X) = Q_n(X^2)}$. Immédiatement :

$$\boxed{\deg Q_n = n} \quad \boxed{Q_n \text{ est de coefficient dominant } 2n+1}.$$

$$Q_n(X^2) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X^2-\omega_k^2) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}(X-\omega_k) = \boxed{P_n(X)}.$$

Notons $Q_n = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. L'égalité $Q_n(X^2) = P_n(X)$ devient

$$\sum_{k=0}^{n} b_k X^{2k} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{2k}.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme :

$$\boxed{\text{le coefficient de } X^{n-1} \text{ de } Q_n(X) \text{ est } b_{n-1} = a_{n-1} = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}.$$

4. On définit :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\omega_k^2 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}.$$

(a) Constatons que $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$, et donc

$$\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}} = 1 + \omega_k^2.$$

En sommant de $k=1$ à $k=n$ :

$$\boxed{S_n = n + T_n}.$$

(b) La somme des racines de $Q_n$ est égale à $T_n$. D'après les relations coefficients/-racines (somme des racines) :

$$T_n = -\frac{b_{n-1}}{b_n} = \boxed{\frac{n(2n-1)}{3}}.$$

Ensuite $S_n = n + T_n$ permet de trouver :

$$\boxed{S_n = \frac{2n(n+1)}{3}}.$$

5. (a) • On utilise l'inégalité des accroissements finis pour la fonction sin.

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad : \quad |\sin'(t)| \leq 1.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad : \quad |\sin(x) - \sin(0)| \leq 1 \cdot |x - 0|$$

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad : \quad \sin(x) \leq x}.$$

• On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction $\varphi : x \mapsto \tan x - x$.
Cette fonction est dérivable et $\varphi'(x) = \tan^2 x \geq 0$ ; $\varphi$ est donc croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad : \quad \begin{aligned} &\varphi(x) \geq \varphi(0) \\ &\tan x - x \geq 0 \\ &\boxed{\tan x \geq x}. \end{aligned}$$

• On a ainsi

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad : \quad 0 < \sin x \leq x \leq \tan x.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad : \quad \frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}}.$$

(b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a $x = \frac{k\pi}{2n+1} \in ]0, \pi/2[$, de sorte que l'on peut appliquer la question précédente :

$$\omega_k^2 \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

En sommant et en arrangeant un peu :

$$(\star) \qquad \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} T_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n.$$

On connaît $T_n$ et $S_n$ (questions 5)b)). Le langage des équivalents (rentrée de mars !) est ici bien pratique pour conclure.

$$T_n \sim S_n \sim \frac{2n^2}{3}$$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} T_n \sim \frac{\pi^2}{(2n)^2} \cdot \frac{2n^2}{3} \sim \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n \sim \frac{\pi^2}{(2n)^2} \cdot \frac{2n^2}{3} \sim \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi

$$\lim \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} T_n = \lim \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par encadrement, $(\star)$ montre que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}}.$$

$\star \star \star$

Au XVII$^{\text{e}}$ siècle Mengoli calcula, pour $r \in \mathbb{N}^*$, que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+r)} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}.$$

Mais il ne savait pas traiter le cas $r = 0$. En 1644, il pose publiquement la question du calcul de

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

D'excellents mathématiciens s'attaquèrent sans réussite au problème, dont les réputés frères Bernoulli.

La convergence très lente de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_n$ rend difficile le calcul de valeurs approchées de sa limite par des termes de cette suite. Par d'autres méthodes, Stirling et Euler parviennent à de bonnes valeurs approchées en 1730 et 1731.

En 1735, 91 ans après l'énoncé de la question, Euler annonce le résultat

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sa démonstration, même pour les critères de l'époque, n'était que partielle. Il lui fallut 7 ans pour combler les lacunes de sa preuve.

Les méthodes développées par Euler étaient suffisamment profondes pour lui permettre d'obtenir quelques années après :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

Et plus généralement le calcul pour $p\in\mathbb{N}^\star$ de

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2p}}=r_p\cdot\pi^{2p},$$

où les $r_p$ sont des nombres rationnels qui s'expriment à l'aide d'une suite connue, la suite de Bernoulli.

---

**Exercice.** Deux questions en guise d'échauffement.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $P=X^5+aX^2+bX$.

   (a) On calcule $P'=5X^4+2aX+b$. D'après la caractérisation des racines multiples,

   $$1 \text{ est racine de multiplicité } 2 \iff \begin{cases} P(1)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+a+b=0 \\ 5+2a+b=0 \end{cases}$$

   En faisant la différence des deux lignes, on obtient vite que $(a,b)=(-4,3)$ est l'unique solution du système.

   (b) Il s'agit donc de factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P=X^5-4X^2+bX$. On sait que $(X-1)^2$ divise $P$. On peut donc poser la division euclidienne de $P$ par de polynôme. On obtient

   $$P=X(X-1)^2(X^2+2X+3).$$

   Il s'agit bien d'un produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ irréductibles : ils sont de degré 1 ou de degré 2 sans racines réelle (le discriminant du trinôme vaut $-8$).

2. • L'ensemble des antécédents de $\omega$ est non vide car le polynôme $P-\omega$ est non constant donc il possède une racine dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert Gauss. Ceci démontre que l'ensemble des antécédents de $\omega$ est non vide.

   • Supposons que $\omega$ possède une infinité d'antécédents. Alors le polynôme $P-\omega$ a une infinité de racines. Par rigidité des polynômes, il est nul, ce qui donne que $P$ est constant égal à $\omega$ (contradiction). Ceci démontre que l'ensemble des antécédents de $\omega$ est fini.