Petits systèmes linéaires

1 Droites et plans.

Droites

Définition 1.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $c \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ qui sont solutions de l'équation linéaire

$$ax + by = c$$

est une **droite affine** de $\mathbb{R}^2$.

La droite d'équation $ax + by = 0$ est dite **vectorielle**. Parallèle à la première, elle contient $(0,0)$.

Proposition 2.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère les droites

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\right\} \quad \text{et} \quad D_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\right\}.$$

Considérons
- $\overrightarrow{u}$ un *vecteur* (couple) (α, β) non nul de D_0 (une solution non nulle de $ax + by = 0$) ;
- M_p un couple (x_p, y_p) de D (une solution particulière de $ax + by = c$).

On a

$$D_0 = \{(\lambda\alpha, \lambda\beta) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$$D = \{(x_p + \lambda\alpha, y_p + \lambda\beta) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{M_p \oplus \lambda\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle ces écritures des **représentations paramétriques** de D_0 et D, le réel λ étant un *paramètre*. L'addition $\oplus$ est ici celle des couples, coordonnée par coordonnée.

Exemple 3.

Droite d'équation $x - 3y = -6$. Représentation(s) paramétrique(s). Droite vectorielle associée.

Exemple 4 (Système linéaire 2×2 : l'intersection de droites sous-jacente)**.**

Soient (a,b,c) et (a',b',c') trois triplets de réels, tels que $(a,b)\neq(0,0)$ et $(a',b')\neq(0,0)$.
On considère le système linéaire ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = c \\ a'x & + & b'y & = c' \end{array}\right.$$

En raisonnant en termes d'intersection de droites, discuter la forme que peut avoir l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 5 (Notre système linéaire 2×2 préféré : somme et différence)**.**

Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & a \\ x-y & = & b \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{a+b}{2} \\ y & = & \frac{a-b}{2} \end{array}\right.$$

Plans

Définition 6.

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ et $d\in\mathbb{R}$.

L'ensemble des triplets (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ qui sont solutions de l'équation linéaire

$$ax+by+cz=d$$

est un plan affine de $\mathbb{R}^3$.

Le plan d'équation $ax+by+cz=0$ est dit **vectoriel**, il contient le triplet $(0,0,0)$.

Proposition 7.

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ et $d\in\mathbb{R}$. On considère les plans

$$P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax+by+cz=d\right\} \quad \text{et} \quad P_0=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax+by+cz=0\right\}.$$

Considérons
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux *vecteurs* (triplets) non colinéaires de P_0 ;
- M_p un triplet de P.

On a

$$P_0=\left\{\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v} \;\middle|\; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\} \qquad \text{et} \qquad P=\left\{M_p+\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v} \;\middle|\; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

On appelle ces écritures des **représentations paramétriques** de P_0 et P, les réels λ et μ étant des *paramètres*. L'addition $+$ est ici celle des triplets, coordonnée par coordonnée.

Exemple 8.

Plan d'équation $x - y - z = 3$. Représentation(s) paramétrique(s). Plan vectoriel associé.

Exemple 9 (Système linéaire 2×3 : l'intersection de plans sous-jacente)**.**

Soient (a, b, c, d) et (a', b', c', d') trois 4-uplets de réels, tels que (a, b, c) et (a', b', c') sont différents de $(0, 0, 0)$. On considère le système linéaire ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccl} ax & + & by & + & cz & = d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = d' \end{array} \right.$$

En réfléchissant en termes d'intersection de plans, discuter la forme que peut avoir l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}^3$.

2 L'algorithme du pivot, par l'exemple.

Exemple 10.

Donner l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & z & = 1 \\ 2x & - & y & + & 11z & = -1 \\ 3x & + & 4y & + & z & = 1 \end{array} \right.$$

Exemple 11.

Donner l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ccccccl} 2x & + & 3y & + & 7z & = 6 \\ x & + & y & + & 2z & = 2 \\ 3x & + & 4y & + & 9z & = 8 \end{array} \right.$$

Exemple 12.

Discuter selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la compatibilité et les solutions du système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{cccl} x & + & (m+1)y & = (m+2) \\ mx & + & (m+4)y & = 8 \end{array} \right.$$

Interpréter en termes d'intersection de droites.

Définition 13.

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système l'une des opérations suivantes :

1. Échange des $i$èmes et $j$èmes lignes. On note $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplication d'une ligne par un scalaire λ non nul. On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. Ajout à la ligne L_i d'une ligne L_j $(i \neq j)$ multipliée par un scalaire μ. On note $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$.

Proposition 14 (admise)**.**

Si on passe d'un système linéaire à un autre par un nombre fini d'opérations élémentaires, les deux systèmes ont le même ensemble de solutions.

Définition 15.

Un système linéaire ayant une unique solution est dit de **Cramer**.

Exercices

9.1 **[♦◇◇]** [Un système de Cramer bête et méchant]
Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$ (si vous ne trouvez pas une unique solution $(3, 5, 2)$, recommencez).

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} 3x & + & y & - & 2z & = 10 \\ 2x & - & y & + & z & = 3 \\ x & - & y & + & 2z & = 2 \end{array}\right.$$

9.2 **[♦◇◇]** Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2y & - & z & = 2 \\ x & - & 2y & + & 3z & = -2 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = -2 \end{array}\right.$$

9.3 **[♦♦◇]** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & ay & + & a^2 z & = a^3 \\ x & + & by & + & b^2 z & = b^3 \\ x & + & cy & + & c^2 z & = c^3 \end{array}\right.$$

9.4 **[♦♦♦]** Soit λ un paramètre réel et le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} (2-\lambda)x & + & y & + & z & = 0 \\ x & + & (2-\lambda)y & + & z & = 0 \\ x & + & y & + & (2-\lambda)z & = 0 \end{array}\right.$$

Le résoudre, en discutant selon les valeurs de λ.
