22 Limites et continuité d'une fonction

0 Introduction : deux préalables.

0.1 Retour sur la notion d'intervalle.

Définition 1.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est **convexe** si pour tout $a, b \in A$ avec $a \leq b$, on a $[a, b] \subset A$.

Proposition 2 (Caractérisation des intervalles).

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Exemple 3 (Applications de la caractérisation).

Justifier que

1. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.
2. une intersection d'intervalles est un intervalle.

Dans tout le cours, les lettres I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

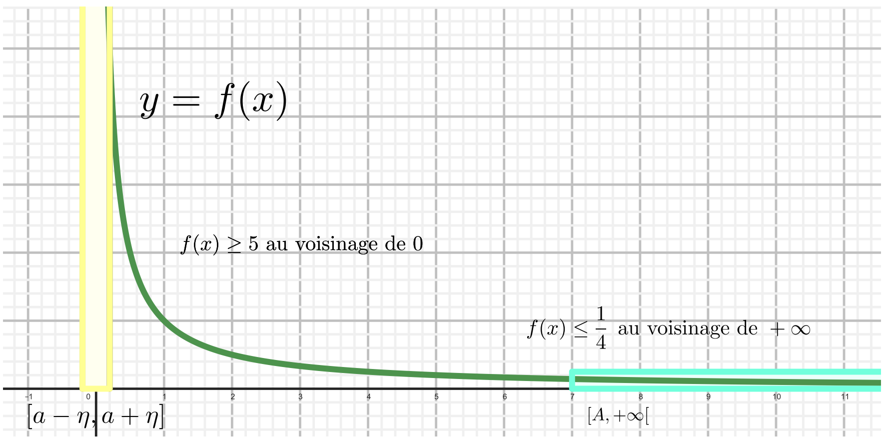
0.2 Propriété vraie au voisinage d'un point.

La notion suivante jouera pour les fonctions, le rôle que jouait pour les suites le « à partir d'un certain rang ».

Définition 4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I.
On dit qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage de** a si

- [$a \in \mathbb{R}$, a *fini*] il existe $\eta > 0$ tel que la propriété est vraie sur $[a-\eta, a+\eta] \cap I$,
- [cas $a = +\infty$] il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $[A, +\infty[$,
- [cas $a = -\infty$] il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $]-\infty, A]$.



1 Limites d'une fonction.

1.1 Définitions et premières propriétés.

Définition 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Les équivalences ci-dessous définissent l'assertion f **admet** L **pour limite en** a, ce qui sera notée

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L.$$

I Cas a fini, $L = \ell$, finie :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \quad |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$$

II Cas $a = +\infty$, $L = \ell$, finie :

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in I \cap [A, +\infty[\quad |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$$

III Cas $a = -\infty$, $L = \ell$, finie :

$$f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A < 0 \quad \forall x \in I \cap]-\infty, A] \quad |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$$

IV Cas a fini, $L = +\infty$:

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \quad \iff \quad \forall B > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) \ge B.$$

V Cas $a = +\infty$, $L = +\infty$:

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \iff \quad \forall B > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in I \cap [A, +\infty[\quad f(x) \ge B.$$

VI Cas $a = -\infty$, $L = +\infty$:

$$f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \iff \quad \forall B > 0 \quad \exists A < 0 \quad \forall x \in I \cap]-\infty, A] \quad f(x) \ge B.$$

VII Cas a fini, $L = -\infty$:

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \quad \iff \quad \forall B < 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) \le B.$$

VIII Cas $a = +\infty$, $L = -\infty$:

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \iff \quad \forall B < 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in I \cap [A, +\infty[\quad f(x) \le B.$$

IX Cas $a = -\infty$, $L = -\infty$:

$$f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \iff \quad \forall B < 0 \quad \exists A < 0 \quad \forall x \in I \cap]-\infty, A] \quad f(x) \le B.$$

Version commune pour I, II, et III : dire que la fonction f admet le nombre réel ℓ pour limite en a (qui est fini, ou pas selon les cas), c'est dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ *au voisinage de* a.

Proposition 6 (Unicité de la limite)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Si f admet une limite en a, celle-ci est unique. Plus précisément, pour $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$, si f admet L et L' pour limite en a, alors $L = L'$.
On pourra donc parler, lorsqu'elle existe, de **la** limite de la fonction en a, que l'on notera $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Une nuance (la même que pour les suites) :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \qquad \text{signifie « } f \text{ admet une limite en } a \textbf{ et } \text{celle-ci vaut } L \text{ ».}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{signifie « la limite de } f \text{ en } a \text{ vaut } L \text{ ».}$$

Écrire la seconde phrase réclame de savoir que la limite de f en a existe.

Proposition 7 (Quand la limite est finie)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I.

- Si f admet une limite finie en a, alors elle est bornée au voisinage de a.
- Si de surcroît f est <u>définie</u> en a (qui est forcément fini, dans ce cas) alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

1.2 Caractérisation séquentielle de la limite.

Théorème 8 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un élément ou une borne (fini ou infinie) de I et L un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Il y a équivalence entre :

1. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$.
2. $\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}} \quad u_n \to a \implies f(u_n) \to L$.

Méthode.

Pour prouver que $f : I \to \mathbb{R}$ n'**admet pas** de limite en a, il suffit d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I telles que :

$$\begin{cases} u_n \to a \\ v_n \to a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} (f(u_n)) \text{ et } (f(v_n)) \\ \text{ne convergent pas vers la même limite.} \end{array}$$

Exemple 9.

Montrer que cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$.

1.3 Opérations sur les fonctions admettant une limite.

Proposition 10.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I.
Supposons que f et g admettent en a des limites finies, respectivement ℓ et ℓ'.

1. La fonction $f + g$ admet $\ell + \ell'$ pour limite en a.
2. La fonction fg admet $\ell\ell'$ pour limite en a.
3. Si $\ell \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $1/f$ admet pour limite $1/\ell$ en a.

Exemple 11 (Cas d'une limite infinie : débrouillez-vous)**.**

La limite $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x \ln(x)}$ existe-t-elle ? Que vaut-elle ?

Proposition 12 (Conservation des inégalités larges par passage à la limite)**.**

Soient f et g deux fonctions définies sur I, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, élément ou borne de I et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} \forall x \in I \quad f(x) \leq g(x) \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \;\text{ et }\; g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell' \end{array} \right. \qquad \text{alors } \ell \leq \ell'.$$

En particulier,

— si f est majorée par un réel M sur I et a une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq M$.

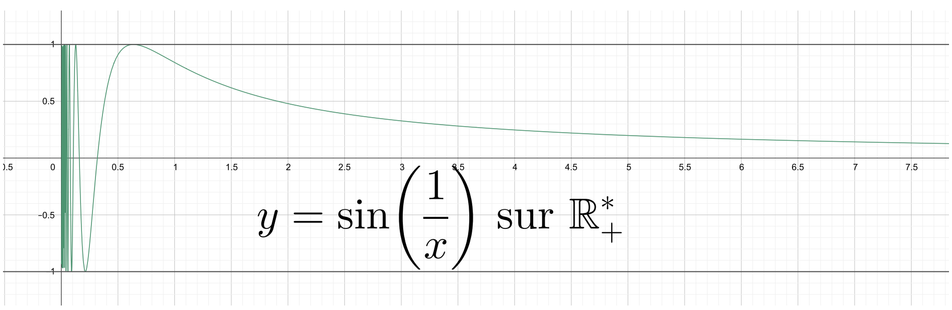
— si f est minorée par un réel m sur I et a une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq m$.

Proposition 13 (Composition des limites : deux fonctions)**.**

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
Soient $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, a étant un élément ou une borne de I et b un élément ou une borne de J.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \\ g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} c \end{array} \right. \qquad \text{alors} \quad g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} c.$$

Que dire de la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$? En 0 ?



1.4 Limite à gauche, limite à droite.

Définition 14.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une borne finie de I. On dit que f admet en a une

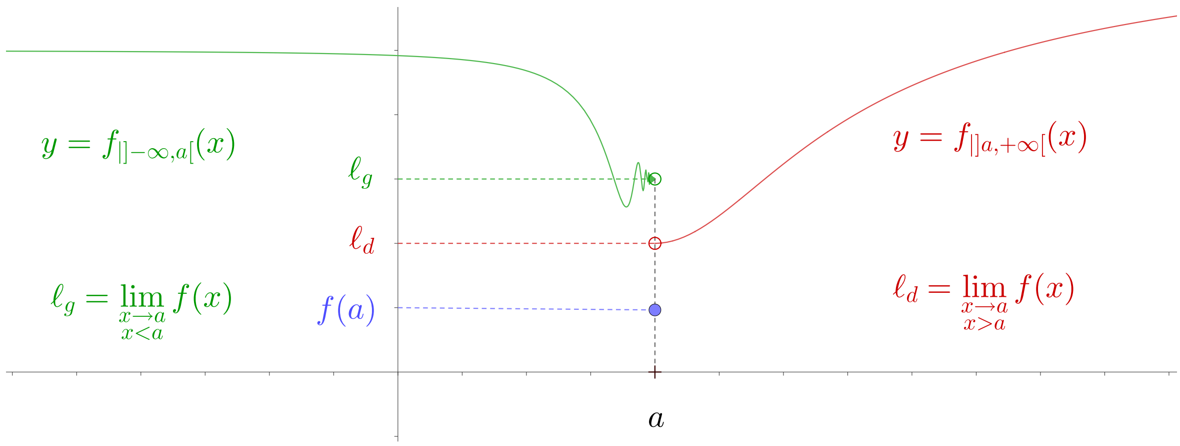
- **limite à gauche** si $a \neq \inf(I)$ et si $f_{|\ ]-\infty,a[\cap I}$ admet une limite en a.
- **limite à droite** si $a \neq \sup(I)$ et si $f_{|\ ]a,+\infty[\cap I}$ admet une limite en a.

Lorsqu'elle existent, ces limites sont notées respectivement

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad \left(\text{ou } \lim_{x\to a-} f(x) \text{ et } \lim_{x\to a+} f(x)\right).$$

Supposons que f n'est pas définie en a. Si f admet une limite à gauche et à droite en a et que ces limites sont égales (disons à L), on appelle ce nombre limite en a et on écrit

$$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\to} L.$$



Exemple 15 (quand les limites à gauche et à droite coïncident).

Démontrer que

$$\frac{\sin x}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\to} 1.$$

Proposition 16.

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\ell \in \mathbb{R}$ (on insiste sur l'hypothèse que f est définie en a). On a l'équivalence :

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell \iff \begin{cases} f(x) \underset{x\to a-}{\to} \ell \\ f(x) \underset{x\to a+}{\to} \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}$$

1.5 Théorèmes d'existence de limite.

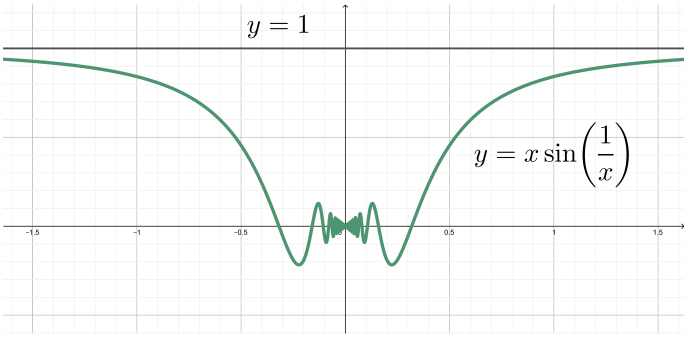
Théorème 17 (des gendarmes, pour les fonctions).

Soient f, g, h définies sur I, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I et $\ell \in \mathbb{R}$.

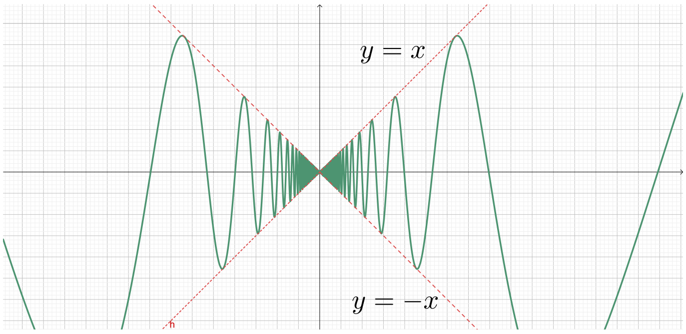
$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall x \in I \ f(x) \leq g(x) \leq h(x), \\ f(x) \underset{x \to a}{\to} \ell \ \text{ et } h(x) \underset{x \to a}{\to} \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad g(x) \underset{x \to a}{\to} \ell.$$

Exemple 18.

Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$ possède une limite en 0, que l'on précisera.



La fonction $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, sur $\mathbb{R}^*$.



La fonction $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, zoom en 0.

Proposition 19 (de minoration, de majoration).

Soient f et g définies sur I et $a \in \overline{I}$.

- Si $\forall x \in I \ f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$, alors $g(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$.
- Si $\forall x \in I \ f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$.

Théorème 20 (de la limite monotone pour les fonctions).

• Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est croissante sur I, alors elle admet en tout point de $]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite. De plus

$$\forall c \in]a, b[\quad \lim_{x \to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c+} f(x).$$

Il existe aussi une limite à droite en a et une limite à gauche en b.
• Soit f une fonction croissante, définie sur un intervalle de forme $[A, +\infty[$ avec A dans $\mathbb{R}$.
Si elle est majorée, elle admet une limite finie en $+\infty$. Sinon, elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

2 Continuité en un point.

2.1 Définitions.

Définition 21.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} f(a).$$

Remarque. La définition ci-dessus est un peu redondante. En effet, d'après P7 si f admet une limite en a *et* est définie en a, alors nécessairement, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Définition 22.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **continue à gauche en** a si f admet $f(a)$ pour limite à gauche en a. On dit que f est **continue à droite en** a si f admet $f(a)$ pour limite à droite en a.

Exemple 23.

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue à gauche en 2 ? continue à droite en 2 ?

Proposition 24.

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Elle est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple 25.

Établir la continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-1/x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Proposition 26 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)**.**

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Il y a équivalence entre les deux assertions

1) f est continue en a.
2) Pour <u>toute suite</u> $u \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Application L'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) ci-dessus nous permet le "passage à la limite" dans une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (lorsqu'on sait que la limite existe, bien sûr). On rappelle le résultat suivant.

Rappel.

Soit $f : I \to I$ (l'intervalle I est stable par f), et (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$
Si (u_n) converge vers une limite ℓ, que $\ell \in X$ et que f est continue en ℓ, alors ℓ est un *point fixe* de f, c'est-à-dire

$$\boxed{f(\ell) = \ell}$$

Exemple 27 (CC-INP MPI 43)**.**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exemple 28 ((*) Une équation fonctionnelle classique)**.**

Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2.2 Prolongement par continuité.

Définition 29.

Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit une $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Si f admet une limite finie en a, on pose

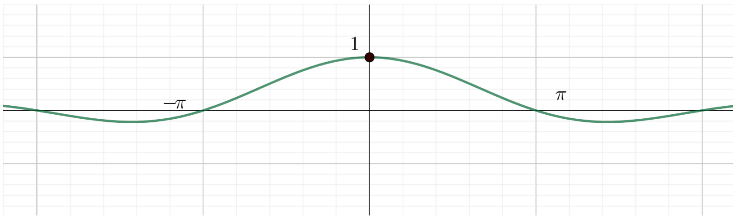
$$f(a) := \lim_{x \to a} f(x).$$

La fonction f est alors définie sur I et elle est automatiquement continue en a. On dit que l'on a réalisé au point a un **prolongement de f par continuité**.

Bien sûr, faire un tel prolongement n'est possible que lorsque la fonction possède une limite finie en a, point où elle n'est pas définie. On pourra dire d'une telle fonction qu'elle est **prolongeable par continuité** en a.

Exemple 30.

Prolongement par continuité en 0 de la fonction *sinus cardinal* $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$.



2.3 Opérations sur les fonctions continues en un point.

Proposition 31 (Combinaisons linéaires, produit, inverse de fonctions continues)**.**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que f et g sont continues en a. Alors,

- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a,
- la fonction fg est continue en a,
- si $f(a) \neq 0$, alors, la fonction $(1/f)$ est bien définie au voisinage de a et y est continue.

Proposition 32 (Composition de fonctions continues)**.**

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.

3.1 Continuité sur un intervalle, opérations.

Définition 33.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **continue sur** I si elle est continue en tout point de I.
L'ensemble des fonctions continues sur I pourra être noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, ou seulement $\mathcal{C}(I)$.

Proposition 34.

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit.
Le quotient de deux fonctions continues sur I est continu sur I si la fonction au dénominateur ne s'annule pas sur I.

Proposition 35.

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur I et g continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 36 (jongler avec les théorèmes globaux et le point de vue local)**.**

Démontrer la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

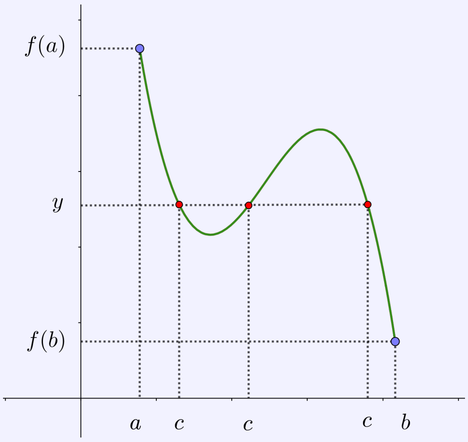
$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

3.2 Théorème des valeurs intermédiaires (and friends).

Théorème 37 (des valeurs intermédiaires)**.**

Soient deux réels $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a, b] \quad y = f(c).$$



Corollaire 38.

Si une fonction continue sur un intervalle y change de signe, alors elle s'annule sur cet intervalle. Si une fonction continue sur un intervalle ne s'y annule pas, alors $f > 0$ ou $f < 0$ sur I.

Exemple 39.

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exemple 40.

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$, continue sur $[a, b]$.
Montrer l'existence d'un point fixe pour f (i.e. $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$).

Corollaire 41.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire 42 (TVI strictement monotone)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists! c \in [a, b] \quad y = f(c).$$

Le théorème suivant permet de prouver qu'une fonction continue réalise une bijection entre deux intervalles.

Théorème 43 (Théorème de la bijection continue)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.

- Elle réalise une bijection de I dans $f(I)$, qui est un intervalle.
- De plus, sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f, et elle est continue sur J.

La preuve de l'énoncé qui suit est non exigible.

Proposition 44.

Soit une fonction définie sur un intervalle et à valeurs réelles.
Si elle est continue sur l'intervalle et injective, alors elle est strictement monotone.

3.3 Théorème des bornes atteintes.

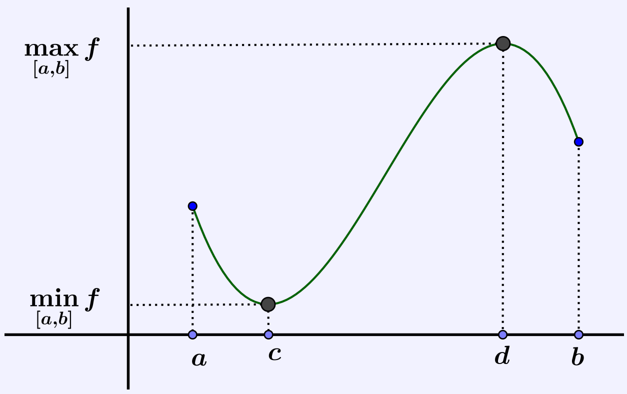
Théorème 45.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[a, b]$.

Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$:

$$\exists c \in [a, b] \quad : \quad f(c) = \min_{[a,b]} f$$

$$\exists d \in [a, b] \quad : \quad f(d) = \max_{[a,b]} f.$$



Corollaire 46 (Image d'un segment.)**.**

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Annexe : Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

Pour une fonction à valeurs complexes, la définition de $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ peut être reprise en remplaçant la valeur absolue par le module.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I. Si $\ell \in \mathbb{C}$, on peut démontrer comme pour les suites que

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

La définition de la continuité d'une fonction f en un point de son intervalle de définition, ainsi que celle de la continuité sur un intervalle restent inchangées. On peut montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaires sont deux fonctions continues sur I.

L'énoncé du TVI n'a plus de sens lorsqu'on considère une fonction à valeurs complexes. Un résultat global demeure : toute fonction f à valeurs complexes, continue sur un segment, y est bornée (son module y est majoré).

Preuves

Preuve du fait que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement ses parties convexes (prop 2). Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

- Supposons que X est un intervalle. Il est donc de l'un des trois types suivant.
  - un segment $[g, d] = \{x \in \mathbb{R} : g \leq x \text{ et } x \leq d\}$ où $g, d \in \mathbb{R}$.
  - un intervalle ouvert $]g, d[= \{x \in \mathbb{R} : g < x \text{ et } x < d\}$ où $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,
  - un intervalle semi-ouvert, par exemple du type $]g, d] = \{x \in \mathbb{R} : g < x \text{ et } x \leq d\}$ où $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, d \in \mathbb{R}$

Dans les trois cas, on peut vérifier que ces parties sont convexes.
Par exemple, dans le cas d'un segment $[g, d]$, si a et b sont dans $[g, d]$ avec $a \leq b$, on a $g \leq a \leq b \leq d$ d'où $[a, b] \subset [g, d]$. Dans le cas où $a > b$, alors $[a, b] = \emptyset \subset [g, d]$.

- Supposons que X est convexe, c'est-à-dire satisfait : $\forall a, b \in X \quad [a, b] \subset X$.
  - ⋆ Cas où X est vide. Alors X est un intervalle : l'intervalle $[0, -5]$ par exemple !
  - ⋆ Cas où X est non vide, majorée et minorée. La partie X admet alors une borne supérieure, que l'on note d et une borne inférieure, que l'on note g. Ce sont respectivement un majorant, et un minorant de X, de sorte que
  $$X \subset [g, d].$$
  Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure (et inférieure), il existe $\alpha \in X$ tel que $g \leq \alpha < g + \varepsilon$. Il existe $\beta \in X$ tel que $d - \varepsilon < \beta \leq d$. Si on a supposé de surcroît que $\varepsilon < \frac{d-g}{2}$, on a
  $$g \leq \alpha < g + \varepsilon < d - \varepsilon < \beta \leq d.$$
  Or, d'après l'hypothèse, le segment $[\alpha, \beta]$ est tout entier inclus dans X. Puisqu'il contient $[g + \varepsilon, d - \varepsilon]$, on parvient à
  $$[g + \varepsilon, d - \varepsilon] \subset X \subset [g, d].$$
  Dans ce qui précède, le nombre ε, peut être pris arbitrairement petit, ce qui conduit à
  $$]g, d[\subset X \subset [g, d].$$

On a donc
$$X =]g, d[\quad \text{ou} \quad X = [g, d[\quad \text{ou} \quad X =]g, d] \quad \text{ou} \quad X = [g, d].$$
On a bien montré que X est un intervalle.

⋆ Cas où X est non vide, majorée et non minorée. En adaptant les idées ci-dessus, le lecteur montrera que qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que
$$X =]-\infty, d[\quad \text{ou} \quad X =]-\infty, d].$$

⋆ Cas où X est non vide, non majorée, et minorée. En adaptant les idées ci-dessus, le lecteur montrera que qu'il existe $g \in \mathbb{R}$ tel que
$$X =]g, +\infty[\quad \text{ou} \quad X = [g, +\infty[.$$

⋆ Cas où X est non vide, non majorée et non minorée. On peut alors montrer que $X =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

□

Preuve de la proposition 16
• Supposons $f(x) \underset{x \to a}{\to} \ell$. D'après la proposition 7, on a que $f(a) = \ell$. Pour tout ε positif, l'inégalité $|f(x) - \ell| \le \varepsilon$ est vraie pour tous les réels x de I se trouvant dans un certain intervalle de la forme $I \cap [a - \eta, a + \eta]$, où $\eta \in \mathbb{R}_+^*$. C'est notamment vrai pour tous ceux de $I \cap]a, a + \eta]$, ce qui donne que ℓ est limite à droite, et c'est vrai pour tous les réels de $I \cap [a - \eta, a[$, ce qui donne que ℓ est limite à gauche.
• Supposons réciproquement que ℓ est limite à gauche, à droite, et que ℓ est la valeur de f au point a.
Soit $\varepsilon > 0$. On a
$$\exists \gamma > 0 \ \forall x \in [a-\gamma, a[\cap I \quad |f(x) - \ell| \le \varepsilon, \qquad \text{et} \qquad \exists \delta > 0 \ \forall x \in]a, a + \delta] \cap I \quad |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$$
Posons $\eta = \min(\gamma, \delta)$. On a
$$\forall x \in I \quad x \in [a-\eta, a[\cup]a, a + \eta] \Longrightarrow |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$$
D'après la troisième hypothèse, $|f(a) - \ell| = 0 \le \varepsilon$. L'inégalité $|f(x) - \ell| \le \varepsilon$ est donc bien vraie au voisinage de a, CQFD. □

Preuve du théorème de la limite monotone pour les fonctions (20)
On détaille seulement la preuve du premier point, le second est facile.

Soit une fonction définie et croissante sur un intervalle $]a, b[$, où on considère un point c. On va démontrer l'existence d'une limite à gauche en c pour f. Nous avons un candidat, que l'on définit par
$$s_g = \sup \{f(x) \ x \in]a, c[\}.$$
Cette définition a un sens : la partie dont on prend la borne supérieure est non vide (elle contient $f\left(\frac{a+c}{2}\right)$ par exemple) et majorée par $f(c)$, f étant croissante.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure,
$$\exists x_0 \in]a, c[\quad s_g - \varepsilon < f(x_0) \le s_g.$$
Par croissance de f, pour tout $x \in [x_0, c[$, $f(x) \ge f(x_0) \ge s_g - \varepsilon$ et puisque $f(c)$ majore f sur $]a, c[$ on a aussi $f(x) \le s_g$. Posons $\eta = c - x_0$ on a bien
$$\forall x \in [c - \eta, c[\quad s_g - \varepsilon \le f(x) \le s_g,$$
ce qui montre $f(x) \underset{x \to c-}{\to} s_g$.
De manière analogue, on peut démontrer que
$$f(x) \underset{x \to c-}{\to} i_d, \qquad \text{où} \qquad i_d = \inf \{f(x) \ x \in]c, b[\}. \qquad □$$

Deuxième preuve (courte !) du TVI. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Fixons y entre $f(a)$ et $f(b)$. Soit la partie

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq y\}.$$

Cette partie est non vide : puisque y est entre $f(a)$ et $f(b)$, on a $f(a) \leq y$ ou $f(b) \leq y$, donc $a \in A$ ou $b \in A$. La partie A est aussi majorée (par b). Posons donc $s = \sup(A)$.

• Pour $\varepsilon > 0$, $s + \varepsilon \notin A$. Ainsi, $f(s+\varepsilon) > y$. Or par continuité (à droite) de f en s, $f(s+\varepsilon) \underset{x \to s+}{\to} f(s)$. La stabilité des inégalités larges donne $f(s) \geq y$.

• On sait trouver une suite d'éléments de A tendant vers s : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in A \quad s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$. Notamment, pour tout n entier, $f(x_n) \leq y$. En passant à la limite, par continuité (à gauche) de f en s, $f(s) \leq y$.
• Les deux inégalités donnent que $f(s) = y$: on a trouvé un antécédent de y par f. □

Preuve du théorème de la bijection continue (Th 43)
Pour fixer les idées, supposons f strictement croissante sur I et notons $J = f(I)$.

• On a vu que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle : c'est vrai en particulier pour $J = f(I)$. C'est par définition même de $J = f(I)$ que $f : I \to J$ est surjective. L'injectivité provient de la stricte monotonie (voir cours sur les applications). Ceci prouve la bijectivité de $f : I \to J$.

• Soit y et y' deux éléments de $J = f(I)$ tels que $y < y'$. Supposons $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$. En appliquant f qui est croissante, on obtient $y \geq y'$, ce qui n'est pas. On a donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$, ce qui montre la stricte monotonie de f^{-1}.

• Prouvons la continuité de f^{-1} sur J (démo non exigible). Si $b \in J$, d'après le théorème de la limite monotone, f^{-1} admet en b une limite à gauche et à droite que l'on note G et D (on suppose ici que b est à l'*intérieur* de J en laissant au lecteur le soin d'adapter si b est un bord) : $G \leq f^{-1}(b) \leq D$. Les limites à gauche et à droite G et D sont des éléments de I. Détaillons pour G : si y_0 est élément de J strictement inférieur à b, alors par passage à la limite, $f^{-1}(y_0) \leq G \leq f^{-1}(b)$. Encadré par deux éléments de l'intervalle I, G est encore un élément de I. Par continuité de f en G puis en D, on a

$$f(G) = \lim_{y \to b-} f(f^{-1}(y)) = b \qquad \text{et} \qquad f(D) = \lim_{y \to b-} f(f^{-1}(y)) = b.$$

Ainsi, $f(G) = f(D)$ et par injectivité de f, $G = D$. On obtient $G = f^{-1}(b) = D$, ce qui démontre la continuité de f^{-1} en b. □

Exercices

Limites.

$\boxed{\mathbf{22.1}}$ **[♦♢♢]** Calculer (en montrant qu'elles existent) : $\lim\limits_{x\to 0+} x\lfloor \frac{1}{x}\rfloor \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x\lfloor \frac{1}{x}\rfloor$

$\boxed{\mathbf{22.2}}$ **[♦♢♢]** Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$. On suppose que fg admet 1 pour limite en 0. Montrer que f et g admettent 1 pour limite en 0.

$\boxed{\mathbf{22.3}}$ **[♦♦♢]** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Continuité (point de vue local).

$\boxed{\mathbf{22.4}}$ **[♦♦♢]** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, croissante, et telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\mathbf{22.5}}$ **[♦♢♢]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, à la fois 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique, et continue en 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f.
2. Montrer que f est constante.

$\boxed{\mathbf{22.6}}$ **[♦♦♢]** Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{22.7}}$ **[♦♢♢]** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est prolongeable par continuité sur les bords de son intervalle de définition.
Indication : on pourra se convaincre que $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ possède une limite finie.

$\boxed{\mathbf{22.8}}$ **[♦♦♦]** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) - f(x) = x.$$

Continuité (point de vue global).

$\boxed{\mathbf{22.9}}$ **[♦♢♢]** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$. Montrer que f possède un point fixe.

$\boxed{\mathbf{22.10}}$ **[♦♦♢]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et continue.
Prouver que f possède un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = x$.

$\boxed{\mathbf{22.11}}$ **[♦♦♢]** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.
Montrer que f est bornée.

$\boxed{\mathbf{22.12}}$ **[♦♢♢]** Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est continue et que g est bornée, alors $g \circ f$ est $f \circ g$ sont bornées.

$\boxed{\mathbf{22.13}}$ **[♦♦♢]** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| < |x|$.

1. Prouver que 0 est un point fixe de f et que c'est le seul.
2. Prouver que pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $k \in [0,1[$ tel que $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq k|x|$.

$\boxed{\mathbf{22.14}}$ **[♦♦♦]** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x)$$

admet au moins une solution.
