

Suites, La Pratique  
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Exercices.

Avant de parler de convergence. . . . . 2

    Exercice 13.1 . . . . . 2

    Exercice 13.2 . . . . . 2

    Exercice 13.3 . . . . . 2

    Exercice 13.4 . . . . . 3

    Exercice 13.5 . . . . . 3

    Exercice 13.6 . . . . . 3

    Exercice 13.7 . . . . . 4

Encadrement. . . . . 4

    Exercice 13.8 . . . . . 4

    Exercice 13.9 . . . . . 4

    Exercice 13.10 . . . . . 5

Monotonie. . . . . 5

    Exercice 13.11 . . . . . 5

    Exercice 13.12 . . . . . 5

    Exercice 13.13 . . . . . 6

    Exercice 13.14 . . . . . 6

    Exercice 13.15 . . . . . 7

    Exercice 13.16 . . . . . 7

Modes de définition particulier d’une suite . . . . . 8

    Exercice 13.17 . . . . . 8

**Exercice 13.1** [◆◆◆]

Une suite croissante est une fonction croissante sur  $\mathbb{N}$ .

Démontrer que le titre de l'exercice dit vrai, c'est-à-dire, pour une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'équivalence entre

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} \geq u_n$ .

2.  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \ n \leq p \implies u_n \leq u_p$ .

Supposons 2, montrons 1.

Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a  $n \leq n+1$ . D'après 2,  $u_n \leq u_{n+1}$ . ez

Supposons 1, montrons 2.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $n \leq p$ . On sait que  $u_{n+1} \geq u_n$ ,  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ,  $u_{n+3} \geq u_{n+2}$ , etc...

Par récurrence triviale et par transitivité, pour tout entier  $q \geq n$ ,  $u_q \geq u_n$ .

En particulier,  $u_p \geq u_n$

□

**Exercice 13.2** [◆◆◆]

Soit  $a$  un réel supérieur à 1 et  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \frac{a^n}{n!}$ .

Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de  $a$ .  
 $(u_n)$  est strictement positive sur  $\mathbb{N}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On peut donc écrire :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$ .

Ainsi,  $(u_n)$  est croissante ( $a \geq n+1$ ) puis décroissante ( $a \leq n+1$ ), ce qui implique qu'un maximum existe.

Ce maximum est atteint lorsque  $a = n+1$  c'est à dire quand  $n = \lfloor a \rfloor$ .

Ainsi, le maximum de la suite  $u$  est :  $\frac{a^{\lfloor a \rfloor}}{\lfloor a \rfloor!}$

□

**Exercice 13.3** [◆◆◆]

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1}.$$

Prouver que la suite  $(u_n)$  est bornée.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $-1 \leq \sin n \leq 1$ . Donc :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2 + 1} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \\ &\leq \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Majorer en valeur absolue c'est borner

□

**Exercice 13.4** [◆◆◆]

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = \alpha(1 - \alpha) \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) \end{cases}$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de  $\alpha$  et  $n$ .
2. Donner  $\lim u_n$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On pose l'équation au point fixe :  $x = (1 - \alpha)x + \alpha(1 - \alpha)$ .

Sa solution est :  $x = 1 - \alpha$ .

On a :  $u_{n+1} - (1 - \alpha) = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) - (1 - \alpha)$ .

Ainsi,  $u_{n+1} + \alpha - 1 = (1 - \alpha)(u_n + \alpha - 1)$ .

On pose  $v_n := u_n + \alpha - 1$ . Par définition,  $v$  est géométrique, de raison  $1 - \alpha$ .

Son terme général est :  $v_n = v_0(1 - \alpha)^n$ .

Or  $v_0 = u_0 + \alpha - 1 = \alpha(1 - \alpha) + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(1 - \alpha)$ .

On en déduit que  $v_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1}$ .

Finalement,  $u_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1} - \alpha + 1$ .

2. Puisque  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $(1 - \alpha)^{n+1} \rightarrow 0$  et alors  $\lim u_n = -\alpha + 1$ .

□

**Exercice 13.5** [◆◆◆]

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

1. Donner la forme du terme général d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} - 2 \cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

2. Supposons dans cette question que  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ . Donner sous forme factorisée le terme général de l'unique suite  $(u_n)$  satisfaisant la relation ci-dessus et telle que  $u_0 = u_1 = 1$ .

Polynome caractéristique :  $r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1$ .  $\Delta = -4 \sin^2(\theta)$ .  $r_1 = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  et  $r_2 = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$ .

Lorsque  $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ :  $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda n \cos^n(\theta) + \mu \cos^n(\theta)$ .

Lorsque  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ :  $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$ .

2. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$ .

On a  $u_0 = \lambda = 1$  et  $u_1 = \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = 1$  donc  $\mu = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ .

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \cos(n\theta) + \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(n\theta)$

*Comment tu factorises ça wtf*

□

**Exercice 13.6** [◆◆◆]

Soit  $(u_n)$ , définie par récurrence par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, \ u_{n+1} = 3u_n + 2^n \end{cases}$ .

1. Prouver qu'il existe une suite  $(a_n)$  géométrique de raison 2 qui satisfait la relation de récurrence.
2. Donner le terme général de  $(u_n)$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $(a_n)$  une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = a_0 2^n$$

On cherche  $(a_n)$  telle que  $a_{n+1} = 3a_n + 2^n = 3a_0 2^n + 2^n = 2^n(3a_0 + 1)$ .

Posons  $a_0 = -1$ . On a  $a_{n+1} = 2^n(-2) = -2^{n+1} = a_0 2^{n+1}$ .

Ainsi, la suite géométrique  $(a_n)$  de raison 2 et de premier terme  $-1$  satisfait la relation de récurrence.

2. On a  $u_{n+1} - 2a_n = 3u_n + 2^n - 2a_n \iff u_{n+1} - a_{n+1} = 3(u_n - a_n)$ .

On pose  $v_n := u_n - a_n$ . Alors  $v_0 = u_0 - a_0 = 2$  et  $v_n = 2 \cdot 3^n$ .

On en déduit que  $u_n = v_n + a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n = 2(3^n - 2^{n-1})$

On a  $u_{n+1} = 2(3^{n+1} - 2^n)$

□

### Exercice 13.7 [◆◆◇]

Étudier la suite  $(u_n)$ , définie par récurrence par  $\begin{cases} u_0 > 0; u_1 > 0 \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} &\iff \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) \\ &\iff \ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)) \end{aligned}$$

On pose  $v_n := \ln(u_n)$ .

On obtient :  $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$ .

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 !

Polynôme caractéristique :  $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ .  $\Delta = \frac{9}{4}$ .  $r_1 = 1$  et  $r_2 = -\frac{1}{2}$ .

Ainsi,  $v_n = \lambda + \frac{\mu(-1)^n}{2^n} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $v_n$  une telle suite.

Alors  $v_0 = \lambda + \mu$  et  $v_1 = \lambda - \frac{\mu}{2}$ .

On a  $v_0 + 2v_1 = 3\lambda = \ln(u_0u_1^2)$ . Donc  $\lambda = \ln(\sqrt[3]{u_0u_1^2})$ .

On a  $u_n = e^\lambda \cdot e^{\frac{\mu(-1)^n}{2^n}} \rightarrow e^\lambda$ . Ainsi,  $u_n \rightarrow \sqrt[3]{u_0u_1^2}$ .

□

### Exercice 13.8 [◆◇◇]

Soit  $a > 1$ . Pour  $n \geq 1$ , on définit  $u_n = (\lfloor a^n \rfloor)^{1/n}$ .

Montrer que  $(u_n)$  est convergente et donner sa limite.

On a :

$$a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n \iff (a^n - 1)^{\frac{1}{n}} < \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \leq a$$

On peut appliquer la fonction  $x \mapsto \frac{1}{n}$  : elle est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et  $a > 1$ .

D'une part,  $(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} = (a^n(1 - \frac{1}{a^n}))^{\frac{1}{n}} = a(1 - \frac{1}{a^n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow a$ .

D'autre part,  $a \rightarrow a$  (*big brain*)

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :  $\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \rightarrow a$ .

□

### Exercice 13.9 [◆◆◇]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n^2})$ .

1. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .

2. Montrer que  $u$  converge et déterminer sa limite.

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

1. On pose  $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ .  $f$  est dérivable comme somme et  $f' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$ .  $f$  décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Or  $f(0) = 0$  donc  $f(x) \leq 0$ . Ainsi,  $\ln(1+x) \leq x$ .

On pose  $g : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ .  $g$  est dérivable comme somme,  $g' : x \mapsto -\frac{x^2}{1+x}$ .  $g$  décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Or  $g(0) = 0$  donc  $g(x) \leq 0$ . Ainsi,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ .

2. Posons  $v_n := \ln(u_n)$ . Alors  $v_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n^2})$ .

Alors  $\sum_{k=1}^n (\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}) \leq v_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} : \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$ .

Par théorème des gendarmes,  $v_n \rightarrow \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $u_n \rightarrow \sqrt{e}$ .

□

**Exercice 13.10 [◆◆◆]**

Étudier la convergence de la suite de terme général  $\frac{1!+2!+\dots+n!}{n!}$ .

Soit  $(u_n)$  une suite de terme général :  $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On sait d'avance que  $u_n \geq 1$ , puisque  $\sum_{k=1}^n k! \geq n!$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k! &= \frac{n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-2} k! \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \\ &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes (AQAB),  $u_n \rightarrow 1$ .

□

**Exercice 13.11 [◆◆◆]**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\arctan(x))^n dx$ . Justifier que  $(I_n)$  est convergente.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , on a  $\arctan(x)^n \in [0, 1]$  donc  $\arctan^{n+1}(x) \leq \arctan^n(x)$ .

Alors :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\arctan^{n+1}(x) - \arctan^n(x)) dx \leq 0.$$

Ainsi,  $I_n$  est décroissante et minorée par 0 :  $I_n$  est convergente d'après le TLM.

□

**Exercice 13.12 [◆◆◆]**

Soit  $\alpha$  un réel de  $]0, 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha^k)$ .

1. Justifier brièvement que  $\forall x \in \mathbb{R} \ 1 + x \leq e^x$ .

2. Démontrer que  $(u_n)$  est une suite convergente, et que  $\lim u_n \leq \exp(\frac{\alpha}{1-\alpha})$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , par convexité de l'exponentielle, elle est supérieure à toutes ses tangentes, en particulier  $x + 1$ .

2. Puisque  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$ , on a  $\forall k \in \mathbb{N}, 1 + \alpha^k \leq e^{\alpha^k}$ .

Ainsi :

$$\prod_{k=1}^n (1 + \alpha^k) \leq \prod_{k=1}^n e^{\alpha^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^n \alpha^k\right) = \exp\left(\frac{\alpha - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)$$

On a  $u_n > 0$  donc on peut écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \alpha^{n+1} > 1$$

Donc  $(u_n)$  est croissante et majorée, ainsi elle converge vers un réel  $l \leq \exp(\frac{\alpha}{1-\alpha})$

□

**Exercice 13.13** [◆◆◆]

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Démontrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4n^2 + 6n + 2} > 0 \\ v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Alors  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont monotones de monotonies contraires.

On a :

$$u_n - v_n = -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Ainsi,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes : elles convergent vers la même limite. □

**Exercice 13.14** [◆◆◆]

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par  $u_0 > v_0 > 0$  et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune. En examinant la suite  $(u_n v_n)$ , exprimer cette limite en fonction de  $u_0$  et  $v_0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$ . Montrons  $\mathcal{P}_n : \langle v_n - u_n \leq 0 \rangle$ .

$\mathcal{P}_0$  est évident. On suppose  $\mathcal{P}_n$  pour un  $n$  fixé. Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

On a  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - v_n^2}{2(u_n + v_n)} = -\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq 0$ .

$\mathcal{P}_{n+1}$  est vrai. Par récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a  $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - \frac{v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} \geq 0$ .

Ainsi,  $u$  est décroissante,  $v$  est croissante.

$u$  est minorée par 0 : elle converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$ .

Puisque  $u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \cdot \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$ ,  $(u_n v_n)$  est constante et  $u_n v_n = u_0 v_0$ .

On obtient que  $v_n$  converge aussi vers une limite  $m \in \mathbb{R}$ .

On a :  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \longrightarrow \frac{l+m}{2}$ .

Ainsi,  $l = \frac{l+m}{2}$  donc  $l = m$ . Les deux suites convergent vers la même limite.

Puisque  $u_n v_n = u_0 v_0$ ,  $lm = u_0 v_0$  donc  $l = m = \sqrt{u_0 v_0}$  □

**Exercice 13.15 [◆◆◆]**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

1. Pour chacune des deux suites  $u$  et  $v$ , faire un pronostic : convergente ou divergente ?

2. Justifier que pour tout entier  $k$  supérieur à 2, on a  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

En déduire que la suite  $(v_n)$  est majorée puis qu'elle converge vers une limite finie.

3. (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{2n} - u_n \geq 1/2$ .

(b) Démontrer par l'absurde que  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .

1. Conjecture :  $u$  diverge et  $v$  converge.

2. Soit  $k \in \mathbb{N} \mid k \geq 2$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $k^2 \geq k^2 - k \iff \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ .

On a :

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Et :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

$v$  est croissante et majorée : elle converge vers une limite finie.

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Grâce au TLM, on sait que  $u_n$  tend soit vers  $+\infty$ , soit vers un réel.

Supposons que  $u$  tende vers une limite réelle, notée  $l$ .

On a alors, en passant à la limite que :  $u_{2n} - u_n = \frac{1}{2} \implies l - l = \frac{1}{2}$ .

C'est absurde, donc  $u_n \longrightarrow +\infty$ .

□

**Exercice 13.16 [◆◆◆]**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}$$

où  $a_n$  est la  $n$ ème décimale de  $\pi$ . Étudier la convergence de  $(u_n)$ .

On pose  $v_n := \sqrt{9 + \sqrt{9 + \dots + \sqrt{9}}}$ , ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = \sqrt{9 + v_n}$  et  $v_0 = 3$

Soit  $\mathcal{P}_n$  la proposition : « $v_n \leq 9$ ». Montrons  $\mathcal{P}_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$\mathcal{P}_0$  est immédiat. Supposons  $\mathcal{P}_n$  pour un  $n$  fixé. Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

$$v_n \leq 9 \iff v_n + 9 \leq 18 \iff v_{n+1} \leq \sqrt{18} \leq 9.$$

Ainsi,  $v$  est majorée par 9.

On a  $u_1 = \sqrt{3}$ ,  $u_2 = \sqrt{3 + \sqrt{1}}$ ,  $u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4}}}$ ...

Or  $\sqrt{\cdot}$  est croissante et  $3 \leq 3 + \sqrt{1} \leq 3 + \sqrt{1 + \sqrt{4}} \leq \dots$  car  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n \geq 0$ .

Alors  $(u_n)$  est croissante et majorée par 9.

D'après le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge vers  $l \leq 9$ .

□

Exercice 13.17 [◆◆◆]

Étudier la suite  $u$  définie par  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2) \end{cases}$ .

Posons  $f : x \mapsto \frac{1}{3}(4 - x^2)$ .  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a :  $f' : x \mapsto -\frac{2}{3}x$  et :

$x$	$-\infty$	$-4$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f$	$-\infty$	$-4$	$\frac{4}{3}$	$1$	$-\infty$

$\mathbb{R}$  est stable par  $f$ ,  $(u_n)$  est bien définie.  
Soit  $l \in \mathbb{R}$ . On a  $f(l) = l \iff \frac{1}{3}(4 - l^2) = l \iff l^2 + 3l - 4 = 0$ .  $r_1 = 1, r_2 = -4$ .  
Les points fixes de  $f$  sont donc en  $-4$  et  $1$ .  
On remarque que  $] - \infty, -4]$  est un intervalle stable par  $f$  sur lequel  $f$  est monotone.

Cas n°1 :  $u_0 \in \{-4, 1\}$   
Remarque : Lorsque  $u_0 \in \{1, 4\}$ , on a  $u_1 \in \{-4, 1\}$  : même raisonnement.  
Ce sont les points fixes de  $f$  :  $(u_n)$  est convergente vers  $u_0$ .

Cas n°2 :  $u_0 \in ] - \infty, -4[$ .  
Remarque : Lorsque  $u_0 \in ]4, +\infty[$ , on a  $u_1 \in ] - \infty, -4[$  : même raisonnement.  
On a  $f$  croissante sur  $] - \infty, -4]$ , alors  $(u_n)$  est monotone sur cet intervalle.  
De plus,  $u_1 - u_0 = \frac{1}{3}(4 - u_0^2) - u_0 < 0$ , alors  $(u_n)$  est décroissante.  
Enfin, on a que  $u_0$  est inférieur à tout point fixe de  $f$  :  $u$  ne peut pas converger, elle diverge vers  $-\infty$

Cas n°3 :  $u_0 \in ] - 4, 4[$ .  
On a que  $] - 4, 4[$  est un intervalle stable par  $f$  sur lequel  $f$  est croissante puis décroissante.  
De plus,  $\forall x \in ] - 4, 1[, f(x) - x > 0$  et  $\forall x \in ]1, 4[, f(x) - x < 0$  et pour  $x = 1, f(x) - x = 0$ .  
Ainsi,  $(u_n)$  est croissante sur  $] - 4, 1]$  et décroissante sur  $[1, 4[$ .  
Aussi,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [2, 4] \Rightarrow u_{n+1} \in ] - 4, 0]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]1, 2] \Rightarrow u_{n+1} \in [0, 1[$   
Et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1] \Rightarrow u_{n+1} \in [1, \frac{4}{3}]$ .  
Par théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge vers  $1$ .

□



Exercice 13.18 [◆◆◆]

Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $x_n > 0$  tel que  $x_n^n + x_n = 3$ . Prouver que  $(x_n)$  converge et déterminer sa limite.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $f_n : x \mapsto x^n + x$ .  $f_n$  est dérivable et  $f'_n : x \mapsto nx^{n-1} + 1$  on a :

$x$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
$f_n$	0	$+\infty$

On a que  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , de plus  $f_n$  prend ses valeurs dans  $]0, +\infty[$ . D'après le TVI, il existe une unique solution à l'équation  $x_n^n + x_n = 3$ . La suite  $(x_n)$  est donc bien définie. De plus, puisque  $f_n(1) = 2 < f_n(x_n)$ , on a que  $x_n > 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, il est évident que  $x_n < 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
Montrons que  $(x_n)$  est décroissante. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$3 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} = x_{n+1}f_n(x_{n+1}) - x_{n+1}^2 + x_{n+1}$$

Ainsi,  $f_n(x_{n+1}) = \frac{3+x_{n+1}^2-x_{n+1}}{x_{n+1}} = x_{n+1} - 1 + \frac{3}{x_{n+1}} < 3$  car  $x_n \in [1, 3]$ .  
Alors  $f_n(x_{n+1}) < 3 = f_n(x_n)$ . On a bien montré que  $(x_n)$  est décroissante.  
La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée par 1, d'après le TLM, elle converge vers une limite  $l \geq 1$ .  
Supposons que  $l > 1$ .  
Alors :  $x_n^n = e^{n \ln(x_n)} \rightarrow +\infty$  car  $x_n \rightarrow l$ .  
Donc  $x_n^n + x_n \rightarrow +\infty$ , ce qui est absurde :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^n + x_n = 3 \rightarrow 3$ . Ainsi,  $(x_n)$  converge vers 1.

□