Chapitre 43

Fonctions de deux variables.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

Un cours très chaotique marqué par la fin d'année et 33°C dans la salle !

1 Fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles.

1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.
- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathscr{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x - a\| < r\}.$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathscr{B}}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x - a\| \leq r\}.$$

Exemple 2

Représenter $\overline{\mathscr{B}}(0_{\mathbb{R}^2}, \frac{1}{2})$. Représenter la boule ouverte de centre $(2, 1)$ et de rayon 1.

Définition 3

On dit qu'une partie X de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si

$$\forall x \in X \quad \exists r > 0 \quad \mathscr{B}(x, r) \subset X$$

Exemple 4

Dessiner un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Solution :

Soit $\mathscr{B}(a, r)$ une boule ouverte et $x \in \mathscr{B}(a, r)$. On pose $r' = r - \|x - a\|$. Alors $\mathscr{B}(x, r') \subset X$.
En effet, pour $y \in \mathscr{B}(x, r')$, $\|y - x\| < r' = r - \|x - a\|$ donc $\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\|$.
Alors $\|y - a\| < r$: $y \in \mathscr{B}(a, r)$.

Soient $X_1, ..., X_n$ des ouverts de R^2 et $x \in \bigcap_{i=1}^{n} X_i$.
Par définition, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x \in X_i$ et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists r_i > 0 \quad \mathscr{B}(x, r_i) \subset X_i$.
Posons $\rho = \min_{i \in [\![1,n]\!]} r_i$, prouvons $\mathscr{B}(x, \rho) \subset \bigcap_{i=1}^{n} X_i$.
Soit $y \in \mathscr{B}(x, \rho)$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\|y - x\| < \rho \leq r_i$ donc $y \in \mathscr{B}(x, r_i)$.
Or, $\mathscr{B}(x, r_i) \subset X_i$ donc $y \in X_i$, et ce pour tout i.

1.2 Limite et continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f **tend vers** l en a, noté $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in U \quad \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Définition 6

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$, ainsi que $l \in \mathbb{R}$.

- On dit que f est **continue en** a si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.
- On dit que f est **continue sur** U si f est continue en tout $a \in U$.

2 Dérivées partielles.

2.1 Dérivées partielles, gradient.

Définition 7

Soient U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a = (x_0, y_0) \in U$.

- On dit que f admet une **première dérivée partielle** en a si $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0. Dans ce cas, on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ sa limite:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$
- On dit que f admet une **deuxième dérivée partielle** en a si $y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0. Dans ce cas, on note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sa limite:
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Définition 8

Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $a \in U$, on définit son **gradient** en a noté $\nabla f(a)$ par
$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Méthode

Calculer la première dérivée partielle, c'est par définition dériver $x \mapsto f(x, y)$ pour y *fixé* : on dérive en traitant y comme une constante.
Pour le calcul de la seconde dérivée partielle, c'est x qui est traité comme une constante.

Exemple 9

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + x^2y - 2y^2$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ puis $\nabla f(1, 2)$.
2. Si g est dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
   Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ et $\nabla F(x, y)$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 4y$.

Alors $\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\boxed{2.}$ On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} g'(\frac{y}{x})$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} g'(\frac{y}{x})$

Alors $\nabla F(x, y) = \frac{1}{x^2} g'(\frac{y}{x}) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Exemple 10:

Contrairement au cas d'une fonction d'une variable réelle, l'existence des dérivées partielles en a n'implique pas la continuité en a. On le constatera sur l'exemple ci-dessous :

f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Solution :

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

Supposons par l'absurde que $f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(0, 0)$.

C'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x, y) - (0, 0)\| \leq \eta \Longrightarrow |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \varepsilon$.
Alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x, y)\| \leq \eta \Longrightarrow |f(x, y)| \leq \varepsilon$.
Pour $x \neq 0$, $f(x, x) = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$, on a pour tout $|x| \leq \frac{\eta}{\sqrt{2}}$.
On a $\|(x, x)\| \leq \sqrt{(\frac{\eta}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{\eta}{\sqrt{2}})^2} \leq \eta$.

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 11

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$.
On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur U si f possède deux dérivées partielles en tout point de U, **et** que ces dérivées partielles sont continues sur U.
On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Exemple 12

1. Si I, J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ alors la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$.
2. $(x, y) \mapsto \arctan(\frac{y}{x})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
3. $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Solution :

$\boxed{3.}$ Les dérivées partielles existent en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Elles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$...

Proposition 13: DL à l'ordre 1.

Toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ admet le DL à l'ordre 1 suivant en tout point $a = (x_0, y_0) \in U$.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|).$$

Ou encore

$$f(a + H) \underset{H\to(0,0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), H\rangle + o(\|H\|).$$

Corrolaire 14

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U y est continue.

Définition 15: Plan tangent à la surface en un point.

Soit f une fonction de C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On considère un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ appartenant à la surface d'équation $z = f(x, y)$, c'est-à-dire tel que $(x_0, y_0) \in U$ et $z_0 = f(x_0, z = y_0)$.
Le plan d'équation

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est appelé **plan tangent** en (x_0, y_0) à la surface $z = f(x, y)$.

3 Deux questions naturelles.

3.1 Comment dériver une composée ?

Théorème 16: Règle de la chaîne (1).

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathcal{C}^1(I, U)$.
Alors $F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec

$$\forall t \in I \quad F'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t), y(t)) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

$$\text{soit} \quad \forall t \in I, \ (f \circ \gamma)'(t) = \langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t))\rangle.$$

On dit qu'on a calculé la dérivée de f suivant l'arc paramétré γ.

Preuve :

...

$$\begin{aligned}
F(t+h) &= f(\gamma(t+h)) = f(x(t+h), y(t+h)) = f(x(t+h), y(t+h)) \\
&= f(x(t) + hx'(t) + \varepsilon_1(h), y(t) + hy'(t) + \varepsilon_2(h)) \\
&= f(\underbrace{(x(t), y(t))}_{a} + \underbrace{(hx'(t) + \varepsilon_1(h), hy'(t) + \varepsilon_2(h))}_{H}) \\
&= f(x(t), y(t)) + \langle \nabla f(x(t), y(t)), H\rangle + o(\|H\|) \\
&= f(\gamma(t)) + (hx'(t) + \varepsilon_1(h))\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + (hy'(t) + \varepsilon_2(h))\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) + o(\|H\|) \\
&= f(\gamma(t)) + h(x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))) + o(h)
\end{aligned}$$

Exemple 17

Soit $f \in \mathcal{C}^1(R^2, \mathbb{R})$. Calculer la dérivée de $\varphi : t \mapsto f(t^3, \cos t)$.

Solution :

On a:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 3t^2 \frac{\partial f}{\partial t^3}(t^3, \cos t) - \sin(t) \frac{\partial f}{\partial \cos(t)}(t^3, \cos(t))$$

Théorème 18: Règle de la chaîne (2).

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{cases} U & \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \end{cases}$.

Si $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, et $\varphi(U) \subset V$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et

$$\forall (u,v) \in U \quad \begin{aligned} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)). \\ \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)). \end{aligned}$$

Méthode : À la physicienne.

En notant $x(u,v) = \varphi_1(u,v)$ et $y = \varphi_2(u,v)$:

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Exemple 19: Changement de variable affine.

Soient a, b, c, d, e, f six réels et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer les dérivées partielles de

$$h : (x,y) \mapsto g(ax + by + c, dx + ey + f)$$

Solution :

On note $u = ax + by + c$ et $v = dx + ey + f$.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = a\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + d\frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = b\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + e\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

3.2 Que peut-on dire au sujet des extrema ?

Définition 20

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que

1. f admet un **maximum local** en a si $f(a)$ majore $f(A)$ au voisinage de a, soit
$$\exists r > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq r \Longrightarrow f(x) \leq f(a).$$
2. f admet un **minimum local** en a si $f(a)$ minore $f(A)$ au voisinage de a, soit
$$\exists r > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq r \Longrightarrow f(x) \geq f(A).$$
3. f présente un **extremum local** en a si elle y admet un maximum ou un minimum local.
4. **Extremum global** : un maximum (resp. minimum) est global si il majore (resp. minore) f sur tout A.

Exemple 21

$f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ présente un minimum global en $(0,0)$.

Proposition 22

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$.

Si f admet un extremum local en a, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \quad \text{autrement dit} \quad \nabla f(a) = (0,0).$$

On dit alors que a est un **point critique**.

Exemple 23: La réciproque est fause !

Comme pour les fonctions d'une seule variable, la réciproque est fausse.

Vérifier ainsi que $(0,0)$ est un point critique de $f:(x,y)\mapsto x^2-y^2$ mais n'est pas un extremum.
On le remarque aussi sur le graphe : première page du poly.

Exemple 24

1. $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2-2x-4y$ admet un minimum global en un point de $\mathbb{R}^2$ à préciser.
2. La fonction $f:(x,y)\mapsto x^3+y^3-6(x^2-y^2)$ présente un minimum local en $(4,0)$, un maximum local en $(0,-4)$. Les autres points critiques ne sont pas des extrema.