

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^n = n(z^n + 1).$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 2.

Soit l'équation différentielle $|x|y' - y = x^2$.

1. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .
2. Déterminer les solutions sur \mathbb{R} .