## Une célébrité : la fonction Gamma

Dans ce problème, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $\Gamma_n$ la fonction définie par

$$\forall x \in ]0,+\infty[ \qquad \Gamma_n(x) = \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

**Partie A.** Une suite d'intégrales.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in [1,+\infty[$, on note

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{x-1}\mathrm{d}u.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la fonction $F_n$ est bien définie sur $[1,+\infty[$.
2. (a) Démontrer l'inégalité
$$\forall (a,b) \in ]0,+\infty[^2 \quad a<b \implies \frac{a}{b} \leq \ln(b)-\ln(b-a) \leq \frac{a}{b-a}.$$
   (b) Fixons $u$ dans $]0,+\infty[$ et posons $f_u : x \mapsto x\ln(1-\frac{u}{x})$.
   Étudier les variations de $f_u$ sur $]u,+\infty[$.
   (c) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in [0,n] \quad \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1}.$$
   (d) Soit $x \in [1,+\infty[$. Démontrer que la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Dans cette question, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x \in [1,+\infty[$.
   (a) Justifier l'inégalité
$$F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}u.$$
   (b) Justifier l'existence d'un réel $A$ strictement positif tel que
$$\forall u \geq A \quad u^{x-1} \leq e^{u/2}.$$
   (c) En déduire une majoration de $F_n(x)$ par une quantité indépendante de $n$.

**Partie B.** La fonction Gamma comme limite.

Dans cette partie, pour deux réels positifs $a$ et $b$, on notera

$$I(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b\mathrm{d}t.$$

1. (a) Démontrer pour tous réels positifs $a$ et $b$ la relation
$$(a+1)I(a,b+1) = (b+1)I(a+1,b).$$
   (b) Pour $a \in [1,+\infty[$ un réel supérieur à 1 et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $I(a,n)$ à l'aide de $a$ et de $n$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1,+\infty[$.
   Établir une relation entre $F_n(x)$ et $I(x-1,n)$.
   En déduire que $F_n(x) = \Gamma_n(x)$.
   (b) Prouver que pour tout $x \in [1,+\infty[$, la suite $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]0,+\infty[$.
   Établir une relation entre $\Gamma_{n+1}(x)$ et $\Gamma_n(x+1)$.
   (b) Soit $x \in ]0,1[$. Justifier que la suite $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

*Ce qui précède permet de donner un sens à la définition suivante :*

$$\boxed{\forall x \in ]0,+\infty[ \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x).}$$

4. (a) Que vaut $\Gamma(1)$ ?
   (b) Démontrer que
$$\forall x \in ]0,+\infty[ \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
   (c) Donner la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

**Partie C.** Intermède : deux petits résultats de convexité.

Soit $I$ un intervalle.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définies sur $I$ et $f$ sa limite, au sens où
$$\forall x \in I \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$
Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est convexe sur $I$.
Démontrer que $f$ est convexe sur $I$.

2. Soit $g$ une fonction deux fois dérivable sur $I$ et strictement positive sur $I$.
Montrer que si $\ln \circ g$ est convexe, alors $g$ est convexe.

**Partie D.** Convexité et log-convexité de $\Gamma$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Prouver que $\ln \circ \Gamma_n$ est convexe sur $]0, +\infty[$.
En déduire que $\Gamma_n$ est convexe sur $]0, +\infty[$.
   (b) Démontrer que $\ln \circ \Gamma$ et $\Gamma$ sont convexes sur $]0, +\infty[$.
*On justifiera que* $\Gamma$ *est strictement positive sur* $]0, +\infty[$.

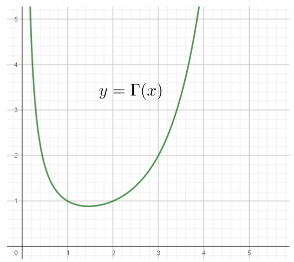
2. Soit $\Upsilon$ une fonction strictement positive sur $]0, +\infty[$ et telle que
— $\Upsilon(1) = 1$ ;
— $\forall x \in ]0, +\infty[ \ \Upsilon(x + 1) = x\Upsilon(x)$ ;
— $\ln \circ \Upsilon$ est convexe.
On va démontrer que nécessairement, $\Upsilon = \Gamma$. On notera $\psi = \ln \circ \Upsilon$.

   (a) Soit $x \in ]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\psi(n)$ ? Démontrer l'égalité
$$\psi(x) - \ln(\Gamma_n(x)) = \psi(n + 1 + x) - \psi(n + 1) - x\ln(n).$$
puis établir l'inégalité
$$\psi(n + 1) - \psi(n) \leq \frac{\psi(n + 1 + x) - \psi(n + 1)}{x} \leq \psi(n + 2) - \psi(n + 1).$$
   (b) Conclure.

*Quelques éléments sur la fonction* $\Gamma$.

En seconde année, on définira la fonction $\Gamma$ comme une intégrale « à paramètre » :
$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}x.$$
Il s'agira d'abord de donner un sens à cet écriture. Premier problème : la borne infinie bien sûr. Un autre pourrait passer inaperçu : pour $x < 1$, la fonction $u \mapsto e^{-u}u^{x-1}$ n'est *pas* prolongeable par continuité en 0. C'est ce qui explique que dans ce problème, la fonction $F_n$ n'est définie que sur $[1, +\infty[$.

On a prouvé que $\Gamma$ était convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette convexité sur un intervalle ouvert implique (exercice pas si facile) que cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$. En fait, $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pour le prouver, il faudra recourir aux théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (spé). Les variations de $\Gamma$ sont inaccessibles pour le moment.




La fonction $\Gamma$, on l'a vu, vérifie la relation
$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x),$$
ce qui implique notamment que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.
Ainsi, la fonction $\Gamma$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ qui prolonge la factorielle (translatée). On peut imaginer tout un tas de fonctions continues qui font cela mais nous avons prouvé en partie D que $\Gamma$ est l'unique fonction « log-convexe » qui satisfait la relation donnée plus haut et d'image 1 en 1. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Bohr-Mollerup.

Il y aurait bien des choses à dire sur la fonction $\Gamma$ mais la page est bientôt terminée. On donne les deux belles valeurs ci-dessous :
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \Gamma'(1) = -\gamma, \quad (\gamma \text{ constante d'Euler}).$$