Équations Algébriques
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Etienne pour les exercices 9.25 et 9.26

Exercices.

Exercice 10.17 [♦◊◊]

1. Calculer les racines carrées du nombre $-8i$.
On donnera ces nombres sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

Notons δ une racine de $-8i$:

$$\delta = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2 - 2i$$

2. Le discriminant Δ vaut $-8i$. Ses racines carrées sont donc $2-2i$ et $-2+2i$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{3-i, 1+i\}$.

□

Exercice 10.18 [♦◊◊]

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calcul de

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z \quad \text{et} \quad \prod_{z\in\mathbb{U}_n} z$$

On a :

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Et :

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

□

Exercice 10.19 [♦♦◊]

Donner une expression du périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$.
Que conjecture-t-on sur la limite lorsque $n \to +\infty$? Essayer de prouver votre conjecture.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}}||e^{-\frac{\pi}{n}} - e^{\frac{\pi}{n}}| = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Et, puisque $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi$$

□

Exercice 10.20 [♦◊◊]

Soit $\omega \in \mathbb{U}_7$, une racine 7e de l'unité différente de 1.
1. Justifier que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6 = 0$.
2. Calculer le nombre $\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

1. On a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2, \sum\limits_{z\in\mathbb{U}_n} z = 0$ dans le 10.18.
2. On a :

$$\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{2+2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5}{\omega^6} = -\frac{2\omega^6}{\omega^6} = -2$$

□

Exercice 10.21 [♦♦◊]

1. Quand dit-on qu'un nombre réel θ est un argument d'un nombre complexe z ?
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donner le module et un argument de $e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$.
3. Établir l'égalité

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1| = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

1. θ est un argument de $z \neq 0$ ssi $z = |z|e^{i\theta}$.
2. On a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{\pi(2k+n)}{2n}}$$

Ainsi son module est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et l'un de ses arguments est $\frac{\pi(2k+n)}{2n}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1| &= \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 2\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

Or, $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$. Ainsi (formule du cours) :

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1| &= 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\frac{\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\end{aligned}$$

□

Exercice 10.22 [♦♦♢]

Soit θ un nombre réel appartenant à $]0, \pi[$. Résoudre l'équation

$$z^2 - 2e^{i\theta}z + 2ie^{i\theta}\sin\theta = 0.$$

On écrira les solutions sous forme algébrique <u>et</u> sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4e^{2i\theta} - 8ie^{i\theta}\sin\theta = 4e^{i\theta}\left(\cos\theta + i\sin\theta - 2i\sin\theta\right)\\ &= 4e^{i\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) = 4e^{i\theta}e^{-i\theta}\\ &= 4\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ x_2 &= e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

□

Exercice 10.23 [♦♦♢]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 2\cos(\theta)z^n + 1 = 0$.

1. $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta) \leq 0$.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2\cos(\theta) + i\sqrt{4\sin^2(\theta)}}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}\\ x_2 &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta}\end{aligned}$$

2. Posons $z' = z^n$.
On sait que z' est solution de $z'^2 - 2\cos(\theta)z' + 1 = 0$.
Ainsi, $z'_1 = e^{i\theta}$ et $z'_2 = e^{-i\theta}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}z_1 &= {z'_1}^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{i\theta}{n}}\\ z_2 &= {z'_2}^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{i\theta}{n}}\end{aligned}$$

□

Exercice 10.24 [♦♦◊]

Résoudre.
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+1=0.$$

Posons $\omega=\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$. On a : $\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$.
On a alors $\omega\in\mathbb{U}_4\setminus\{1\}$.
Ainsi, $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=i$ ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-1$ ou $\left(\frac{z+i}{z-1}\right)=-i$.
1. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=i \iff z+i=iz+1 \iff z(1-i)=1-i \iff z=1$.
2. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-1 \iff z+i=i-z \iff z=-z \iff z=0$.
3. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-i \iff z+i=-1-zi \iff z(1+i)=-1-i \iff z=-\frac{1+i}{1+i}=-1$

L'ensemble des solutions est donc : $\{-1,0,1\}$.

$\square$