Chapitre 20

Calcul Matriciel

Sommaire.

1 Matrices rectangulaires et opérations. 1
1.1 Combinaisons linéaires de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ . . . 1
1.2 Produit matriciel. . . . 2
1.3 Transposition. . . . 4

2 Matrices carrées. 5
2.1 Structure d'anneau de $M_n(\mathbb{K})$ . . . 5
2.2 Trace d'une matrice carrée. . . . 6
2.3 Parties remarquables de $M_n(\mathbb{K})$ . . . 6
2.4 Groupe des matrices inversibles. . . . 8

3 Systèmes linéaires et matrices. 9
3.1 Écriture matricielle des systèmes linéaires. Structures des ensembles de solutions. . . . 9
3.2 Méthode du pivot et résolution des systèmes linéaires. . . . 9
3.3 Systèmes linéaires et inversibilité des matrices. . . . 10
3.4 Méthode du pivot et calcul de l'inverse. . . . 12

4 Exercices. 13

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

Dans tout ce qui suit, n et p et q désigneront des entiers naturels non nuls, et $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices rectangulaires et opérations.

1.1 Combinaisons linéaires de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

- On appelle **matrice** de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tablaeu d'éléments de $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
- L'ensemble $M_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté $M_n(\mathbb{K})$. Les matrices de cet ensemble sont qualifiées de carrées.
- Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les **coefficients** de A sont écrits à l'aide d'un double indice : $a_{i,j}$ désigne le coefficient qui est sur la ligne i et sur la colonne j. Ainsi, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$.
- La matrice A écrite ci-dessus se représente entre parenthèses:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque. Ayant $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a l'inclusion $M_{n,p}(\mathbb{R}) \subset M_{n,p}(\mathbb{C})$.

Définition 2

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ deux matrices de même type.
On dit que A et B sont **égales** et on note $A = B$ si

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}.$$

On va munir $M_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une structure de groupe additif.

Définition 3: Somme de deux matrices.

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **somme** de A et B, et on note $A + B$ la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$A + B = (c_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Proposition 4: $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+)$

Le couple $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien. Plus précisément,

1. $+$ est une loi de composition interne sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. $+$ est associative.
3. $+$ est commutative.
4. il existe une matrice dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est neutre pour l'addition : c'est la matrice nulle dont tous les coefficients sont nuls et elle est notée $0_{n,p}$.
5. toute matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ possède un symétrique $-A$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Si $A=(a_{i,j})$, la matrice $-A$ est la matrice $(-a_{i,j})$ et on a $-A+A=A+(-A)=0_{np}$.

Preuve :

Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(-a_{i,j})=(-1)\cdot A$. Alors $A+B=B+A=0_{n,p}$.
Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$: $[A+B]_{i,j}=a_{i,j}-a_{i,j}=0$. Idem pour $B+A$.
Donc A est bien symétrisable et $-A=B=(-1)\cdot A$.

Définition 5: Multiplication par un scalaire.

SOient $A=(a_{i,j})$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On appelle multiple de A par le scalaire λ, et on note $\lambda\cdot A$ ou plus simplement λA la matrice:

$$\lambda A=(\lambda a_{i,j}).$$

Si A et B sont deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\lambda A+\mu B$ est une **combinaison linéaire** de A et B.

Proposition 6: Propriétés de la multiplication par un scalaire.

- $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $1\cdot A=A$.
- $\cdot$ est distributif sur $+$.
- $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda(\mu\cdot A)=(\lambda\mu)\cdot A$.

Preuve :

Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Soient $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$.

$$[(\lambda+\mu)A]_{i,j}=(\lambda+\mu)[A]_{i,j}=\lambda[A]_{i,j}+\mu[A]_{i,j}=[\lambda A]_{i,j}+[\mu A]_{i,j}=[\lambda A+\mu A]_{i,j}.$$

Proposition 7: Autour du zéro et du symétrique.

- $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ 0A=0_{n,p}$.
- $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda 0_{n,p}=0_{n,p}$.
- $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ -A=(-1)A$.
- $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda A=0_{n,p}\Longrightarrow(\lambda=0\ \text{ ou }\ A=0_{n,p})$.

Preuve :

Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Supposons que $\lambda A=0_{n,p}$ et $A\neq 0_{n,p}$.
Alors $\exists(i_0,j_0)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]\mid[A]_{i_0,j_0}\neq 0$ et $\lambda[A]_{i_0,j_0}=0$ donc $\lambda=0$ par intégrité de $\mathbb{K}$.

Définition 8: Matrice élémentaire.

Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$. Dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$, on note pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ la matrice $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la position (i,j) qui vaut 1.

Proposition 9

Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors:

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}E_{i,j}.$$

On a décomposé A comme combinaison linéaire des $E_{i,j}$.

1.2 Produit matriciel.

Définir le produit de deux matrices en multipliant coefficient par coefficient n'a pas d'intérêt. Même si la définition qui suit peut sembler étrange au premier abord, nous verrons que le produit matriciel :
— a un lien avec la résolution des systèmes linéaires (partie 3).
— a un lien avec la composition des applications linéaires (second semestre).

Définition 10: Produit matriciel.

Soient deux matrices $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})\in M_{p,q}(\mathbb{K})$.
On appelle **produit** de A et B, et on note AB la matrice de $M_{n,q}(\mathbb{K})$:

$$AB=(c_{i,j})\quad\text{où}\quad\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}.$$

Exemple 11

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$, avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.
Calculer AA, AB, AC, BA, BC, CA, CB, CC, lorsque le produit a un sens.

Solution :

$$AC = \begin{pmatrix} 2y+3z & x \\ 5y+6z & 4x \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}, \quad BB = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 4x & 5x & 6x \\ y & 2y & 3y \\ z & 2z & 3z \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 5x & 0 \\ 3y & -y \\ 3z & -z \end{pmatrix}$$

Proposition 12: Propriétés du produit matriciel. ★

Soient $A, B, C \in M(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Lorsque les produits ont un sens, on a :

1. $A(B+C) = AB + AC$.
2. $(A+B)C = AC + BC$.
3. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) \quad$ et $\quad (\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$.
4. $(AB)C = A(BC)$.

Preuve :

$\boxed{1.}$ Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $A(B+C) \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ et $(AB + AC) \in M_{n,q}(\mathbb{K})$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$.

$$\begin{aligned} [A(B+C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B+C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[C]_{k,j} \\ &= [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} = [AB+AC]_{i,j}. \end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Distributivité à droite : pareil.
$\boxed{3.}$ Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$.

$$[(\lambda A)(\mu B)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [\lambda A]_{i,k}[\mu B]_{k,j} = \lambda\mu \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j} = \lambda\mu [AB]_{i,j} = [(\lambda\mu)AB]_{i,j}.$$

$\boxed{★}$ Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$.

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q} [AB]_{i,k}[C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{p} [A]_{i,l}[B]_{l,k} \right) [C]_{k,j} \\ &= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} [A]_{i,l}[B]_{l,k}[C]_{k,j} = \sum_{l=1}^{p} [A]_{i,l} \sum_{k=1}^{q} [B]_{l,k}[C]_{k,j} \\ &= \sum_{l=1}^{p} [A]_{i,l}[BC]_{l,j} = [A(BC)]_{i,j}. \end{aligned}$$

Proposition 13: Produit par la matrice nulle.

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A \cdot 0_{p,q} = 0_{n,q} \quad \text{et} \quad 0_{q,n} \cdot A = 0_{q,p}.$$

Preuve :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

$$[A \cdot 0_{p,q}]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[0_{p,q}]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \cdot 0 = 0 = [0_{n,q}]_{i,j}.$$

Exemple 14: Deux propriétés que le produit matriciel NE possède PAS.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $AB = 0_{2,2}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

1. Même lorsque les deux produits AB et BA ont un sens, et ont même type, l'égalité $AB = BA$ n'est pas toujours vraie : A et B ne commutent pas toujours.
2. Le produit AB peut être nul sans que ni A ni B ne soit la matrice nulle.

Définition 15: Matrice diagonale.

On appelle matrice **diagonale** d'ordre n toute matrice $D = (d_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0.$$

Pas de contrainte sur les coefficients $d_{i,i}$ dits coefficients diagonaux.
On note parfois, pour $d_1, ..., d_n \in \mathbb{K}$,

$$\text{Diag}(d_1, ..., d_n) := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Exemples. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ aussi.

Proposition 16: Effet de la multiplication par une matrice diagonale.

Soit une matrice $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et deux matrices diagonales.

$$D = \text{Diag}(d_1, ..., d_n) \in M_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D' = \text{Diag}(d'_1, ..., d'_p) \in M_p(\mathbb{K}).$$

- La matrice DM s'obtient en multipliant la ligne i de M par d_i, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- La matrice MD' s'obtient en multipliant la collone j de M par d'_j, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Définition 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice identité** d'ordre n, et on note I_n la matrice diagonale $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Proposition 18

La matrice identité est neutre pour la multiplication matricielle :

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \ I_n A = A \ \text{ et } \ AI_p = A.$$

Preuve :

Application directe de 16.

1.3 Transposition.

Définition 19

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **transposée** de la matrice A, et on note $A^\top$ la matrice de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$A^\top = (a_{j,i}).$$

Proposition 20: Transposée d'une combinaison linéaire.

Pour toutes matrices A et B de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour tous scalaires λ, μ de $\mathbb{K}$:

$$(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

Preuve :

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$: $[(\lambda A + \mu B)^\top]_{i,j} = [\lambda A + \mu B]_{j,i} = [\lambda A]_{j,i} + [\mu B]_{j,i} = [\lambda A^\top + \mu B^\top]_{j,i}$.

Proposition 21: Transposée d'un produit. ★

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors
$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Preuve :

On a $AB \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ donc $(AB)^\top \in M_{q,n}(\mathbb{K})$. Soient $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$.
$$\begin{aligned}[(AB)^\top]_{i,j} = [AB]_{j,i} &= \sum_{k=1}^{p}[A]_{j,k}[B]_{k,i} = \sum_{k=1}^{p}[A^\top]_{k,j}[B^\top]_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^{p}[B^\top]_{i,k}[A^\top]_{k,j} = [B^\top A^\top]_{i,j}.\end{aligned}$$

2 Matrices carrées.

2.1 Structure d'anneau de $M_n(\mathbb{K})$

On rappelle que $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, on appellera **coefficients diagonaux** les n coefficients $a_{i,i}$ avec $i \in [\![1,n]\!]$.

Proposition 22: Anneau $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.
- 0_n est le neutre additif.
- I_n est le neutre multiplicatif.

Définition 23

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On définit la puissance p-ième de A:
$$A^0 = I_n; \quad \text{et} \quad A^{p+1} = A^p \cdot A.$$

Proposition 24: Toujours vrai.

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ A^{p+q} = A^p A^q;\ (\lambda A)^p = \lambda^p A^p;\ (A^p)^q = A^{pq}.$$

Preuve :

Les deux premiers points ont été montrés par récurrence pour un anneau quelconque.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $\mathcal{P}_n$: « $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p$ ».
Initialisation. $(\lambda A)^0 = I_n$ et $\lambda^0 A^0 = I_n$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}_n$; $(\lambda A)^{n+1} = (\lambda^p A^p)(\lambda A) = \lambda^{p+1}(A^p A) = \lambda^{p+1} A^{p+1}$.
Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

Proposition 25

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA$. Alors:
1. $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ A^p B^q = B^q A^p$.
2. $\forall p \in \mathbb{N},\ (AB)^p = A^p B^p$.
3. $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-k-1}; \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

Preuve :

Vrai dans un anneau quelconque.

Exemple 26

Calculer les puissances de la matrice A définie par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution :

Par récurrence triviale, $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}$.
On conjecture la propriété en regardant les premières puissances de A.

Exemple 27

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que N est nilpotente puis calculer l'inverse de M_a.

Solution :

On vérifie facilement que $N^4 = 0$. On a $M_a = I_4 + aN$ et $I_4 = I_4^4 + aN^4 = (I_4 + aN) \sum_{k=0}^{3} I_4(-aN)^k$
Donc $M_a^{-1} = I_4 - aN + a^2N^2 - a^3N^3$

Exemple 28: Puissance de la matrice Attila.

Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer ses puissances.

Solution :

On a $J^2 \in M_n(\mathbb{K})$ où tous les coefficients valent n : $J^2 = nJ$.
Par récurrence triviale, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $J^p = n^{p-1}J$.

Proposition 29: Produit de deux matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $(E_{i,j},\ 1 \leq i,j \leq n)$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$. On a

$$\forall i,j,k,l \in [\![1,n]\!],\ E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

où pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit le **symbole de Kronecker** par $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$

2.2 Trace d'une matrice carrée.

Définition 30

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de la matrice A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 31: Trace et opérations. ★

Pour toutes matrices A et B carrées d'ordre n, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

- $\mathrm{Tr}(A^\top) = \mathrm{Tr}(A)$.
- $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B)$.
- $\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$.

Preuve :

• $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda A + \mu B]_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} [B]_{i,i} = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(A)$.
★ $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}[B]_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [B]_{j,i}[A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [BA]_{k,k} = \mathrm{Tr}(BA)$.

2.3 Parties remarquables de $M_n(\mathbb{K})$

• <u>**Matrices diagonales.**</u>

Proposition 32: Matrices diagonales.

Notons $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées diagonales de taille n.

1. $0_n \in D_n(\mathbb{K})$.
2. $D_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires.
3. $D_n(\mathbb{K})$ est stable par produit matriciel.

Preuve :

Soient $D = \mathrm{Diag}(d_1, ..., d_n)$ et $D' = \mathrm{Diag}(d_1', ..., d_n')$ dans $D_n(\mathbb{K})$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$\lambda D + \mu D' = \begin{pmatrix} \lambda d_1 + \mu d_1' & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda d_n + \mu d_n' \end{pmatrix} \ :\ \lambda D + \mu D' \in D_n(\mathbb{K}).$$

$$DD' = \begin{pmatrix} d_1 d_1' & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n d_n' \end{pmatrix} \ :\ DD' \in D_n(\mathbb{K}).$$

• **Matrices triangulaires.**

Définition 33: Matrice triangulaire.

Soit $T = (t_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elle est **triangulaire supérieure** si tous ses coefficients sous la diagonale sont nuls, c'est-à-dire

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

On dire que T est **triangulaire inférieure** si tous ses coefficients sur la diagonale sont nuls c'est-à-dire

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad i < j \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

Proposition 34: ★

Notons ici $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp $T_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de taille n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ contiennent la matrice nulle et sont stables par combinaison linéaire.
2. $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par produit matriciel.

Preuve :

Soient $T, T' \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
$\boxed{1.}$ Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i > j$

$$[\lambda T + \mu T']_{i,j} = \lambda [T]_{i,j} + \mu [T']_{i,j} = 0 \ : \ \lambda T + \mu T' \in T_n^+(\mathbb{K}).$$

$\boxed{★}$ Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i > j$.

$$[TT']_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[T]_{i,k}}_{0 \text{ si } k<i} \times \underbrace{[T']_{k,j}}_{0 \text{ si } k>j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{[T]_{i,k}}_{0} [T']k,j + \sum_{k=i}^{n} [T]_{i,k} \underbrace{[T']_{k,j}}_{0} = 0.$$

Donc $TT' \in T_n^+(\mathbb{K})$

• **Matrices symétriques, antisymétriques.**

Définition 35: Symétrie, antisymétrie.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A est symétrique si $A^\top = A$, antisymétrique si $A^\top = -A$.
L'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$ est $S_n(\mathbb{K})$; antisymétriques de $M_n(\mathbb{K})$ est $A_n(\mathbb{K})$.
Remarque. S est symétrique $\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ [S]_{i,j} = [S]_{j,i}$.
Remarque. S est antisymétrique $\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ [S]_{i,j} = -[S]_{j,i}$.

Exemple 36

Monter que $S_n(\mathbb{K})$ contient 0_n, est stable par combinaison linéaire, mais pas par produit.

Solution :

• $0_n^\top = 0_n = -0_n$ donc $0_n \in S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K})$.
• Soient $S, \widetilde{S} \in S_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$(\lambda S + \mu \widetilde{S})^\top = \lambda S^\top + \mu \widetilde{S}^\top = \lambda S + \mu \widetilde{S} \in S_n(\mathbb{K}).$$

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$.

Exemple 37: ★

Démontrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Solution :

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Supposons l'existence de $S \in S_n(\mathbb{K})$ et $A \in A_n(\mathbb{K})$ tels que $S + A = M_n(\mathbb{K})$.
Alors $(S+A)^\top = M^\top$: $S^\top + A^\top = M^\top$ donc $S - A$ donc

$$\begin{cases} S + A = M \\ S - A = M^\top \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2S = M + M^\top \\ 2A = M - M^\top \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} S = \frac{M+M^\top}{2} \\ A = \frac{M-M^\top}{2} \end{cases}$$

Ainsi, (S, A) est unique.

Soient $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$.
On a $S + A = M$ et $S\top = \frac{1}{2}(M^\top + M) = S$ et $A^\top = \frac{1}{2}(M^\top - M^{\cancel{\top\top}}) = -A$.
Donc (S, A) convient et est unique.

2.4 Groupe des matrices inversibles.

Définition 38

Le groupe des inversibles de l'anneau $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est appelé **groupe linéaire** et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Ainsi, une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **inversible** (c'est-à-dire appartient à $GL_n(\mathbb{K})$) si

$$\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n \quad \text{ et } \quad BA = I_n.$$

Lorsque A est inversible, une telle matrice B est unique : on l'apelle **inverse** de A, notée A^{-1}.

Proposition 39: Propriétés de groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.

1. $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$.
2. $\forall (A, B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2 \quad AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}) \quad A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad A^p \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.

Preuve :

Exactement pareil que pour un groupe quelconque.

Proposition 40: $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par transposition. ★

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, alors

$$A^\top \text{ est inversible et } (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Preuve :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$: A^{-1} existe et $(A^{-1})^\top$ aussi.
• $A^\top \cdot (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n, \quad (A^{-1})^\top(A^\top) = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n$.
Donc $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

Proposition 41: Inversibilité des matrices diagonales.

Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, ..., d_n) \in M_n(\mathbb{K})$.

$$D \in GL_n(\mathbb{K}) \iff (\forall i \in [\![1, n]\!],\ d_i \neq 0) \iff D^{-1} = \mathrm{Diag}(d_1^{-1}, ..., d_n^{-1}).$$

Preuve :

Supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ d_i \neq 0$. On pose $\widetilde{D} = \mathrm{Diag}(d_1^{-1}, ..., d_n^{-1})$.
Alors $D\widetilde{D} = \mathrm{Diag}(1, ..., 1) = \widetilde{D}D$ donc $\widetilde{D} = D^{-1}$.

Par contraposée, supposons $\exists i \in [\![1, n]\!] \mid d_i = 0$.
Alors $\forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ DM$ a sa ligne i nulle donc $DM \neq I_n$.
Donc D n'a pas d'inverse a droite : elle n'est pas inversible.

Proposition 42: Inversibilité et inverse d'une matrice de taille 2. ★

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le réel $\det(A) = ad - bc$. On a

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si c'est le cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Preuve :

On a $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ab + bd & bc + d^2 \end{pmatrix}$; $\quad \mathrm{Tr}(A)A - \det(A)I_2 = (a + d) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = ... = A^2$.
On a $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\det(A) \neq 0$. Alors $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A = -\det(A)I_2$.
Alors $A(A - \mathrm{Tr}(A)I_2) = -\det(A)I_2$ donc $A\left(\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Tr}(A)I_2 - A)\right) = I_2$.
Posons $B = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Tr}(A)I_2 - A)$. On a $AB = I_2$ et $BA = I_2$ donc A inversible et $A^{-1} = B$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\det(A) = 0$, alors $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A = 0_2$ donc $A(A - \mathrm{Tr}(A)I_2) = 0_2$.
Supposons A inversible par l'absurde. Alors $A - \mathrm{Tr}(A)I_2 = 0_2$ puis $A = \mathrm{Tr}(A)I_2$ et $\det(A) = \mathrm{Tr}(A)^2$.
Donc $\mathrm{Tr}(A) = 0$: $A = 0_2$, absurde car 0_2 n'est pas inversible.
Alors A est inversible.

Remarque. On définira la notion de déterminant d'une matrice carrée de taille quelconque en fin d'année, mais ce n'est pas une mince affaire...

3 Systèmes linéaires et matrices.

3.1 Écriture matricielle des systèmes linéaires. Structures des ensembles de solutions.

Définition 43

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

L'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est appelée **système linéaire** de n équations linéaires sur $\mathbb{K}^p$, de **second membre** B. Il s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad i.e. \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On appelle **solution** du système toute matrice colonne $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = B$, ou encore tout p-uplet $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui soit solution de chacune des n équations.

Ainsi, l'ensemble des solutions d'un système linéaire est une partie de $M_{p,1}(\mathbb{K})$ ou de $\mathbb{K}^p$, les notions de p-uplet et de matrice colonne à p lignes étant délibérément confondues.

Proposition 44

Un système linéaire de la forme $AX = 0_{n,1}$ est dit **homogène**.
L'ensemble S_0 de ses solutions contient le p-uplet nul et il est stable par combinaisons linéaires.

$$S_0 = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\}.$$

Preuve :

- $A0_{p,1} = 0_{n,1}$ donc $0_{p,1} \in S_0$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(X, Y) \in S_0$. $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda(AX) + \mu(AY) = 0$.

Définition 45

Le système linéaire $AX = B$ est dit **compatible** s'il possède une solution.

Proposition 46: Critère de compatibilité.

Le système linéaire $AX = B$ est compatible ssi BB est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Preuve :

Soient $c_1, ..., c_p$ les colonnes de A.

$$\begin{aligned} AX = B \text{ est compatible } &\iff \exists X \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = B \\ &\iff \exists (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i c_i = B \\ &\iff B \text{ est combinaison linéaire des colonnes de } A. \end{aligned}$$

Proposition 47

Soit $AX = B$ un système linéaire compatible et $X_{pa} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière du système. L'ensemble des solutions S s'écrit :

$$S = \{X_{pa} + Y,\ Y \in S_0\}.$$

où S_0 est l'ensemble des solutions de $AX = 0_{n,1}$, système homogène associé.

Preuve :

Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} X \in S &\iff AX = B \iff AX = AX_{pa} \iff A(X - X_{pa}) = 0_{n,1} \\ &\iff X - X_{pa} \in S_0 \iff \exists Y \in S_0 \mid X - X_{pa} = Y \\ &\iff \exists Y \in S_0 \mid X = X_{pa} + Y. \end{aligned}$$

3.2 Méthode du pivot et résolution des systèmes linéaires.

Exemple 48: Révisons la méthode du pivot.

On résout à l'aide de l'algorithme du pivot le système linéaire

$$\begin{cases} 3x + 4y + 9z = 8 \\ 20x + 30y + 70z = 60 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Définition 49

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système ou d'une matrice l'une des opérations suivantes :

1. Échange des $i$èmes et $j$èmes lignes. On note $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplication d'une ligne par un scalaire λ non nul. On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. Ajout à la ligne L_i $(i \neq j)$ multipliée par un scalaire μ. On note $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$.

Définition 50: Un peu de vocabulaire sur les systèmes linéaires.

Dans un système ou dans une matrice, on appelle **ligne nulle** une ligne où tous les coefficients sont nuls; elle correspond alors à l'équation $0 = 0$.
On appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier coefficient non nul.

On dit qu'un système linéaire est **échelonné** s'il a une structure en escalier. Plus précisément, si les lignes sous une ligne nulle sont toutes nulles et qu'à chaque ligne (non nulle), le pivot de la ligne se trouve strictement à droite du pivot de la ligne au-dessus.

Dans un système échelonné, on dit qu'une **inconnue** et **principale** si sur une des lignes du système, son coefficient est un pivot. Elle est dite **secondaire** sinon.

Exemple 51

$$(\mathscr{L}_1)\begin{cases} \boxed{1}x + y + z &= 0 \\ \boxed{2}y + z &= 2 \\ \boxed{4}y - z &= -1 \\ 0 &= \boxed{5} \end{cases} \qquad (\mathscr{L}_2)\begin{cases} t + \boxed{1}x - y + z &= 0 \\ -t + \boxed{2}z &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

- Dans les systèmes linéaires ci-dessus, on a encadré les $\boxed{\text{pivots}}$.
- Le système $(\mathscr{L}_2)$ est échelonné, contrairement au système $(\mathscr{L}_1)$ qui ne l'est pas.
- Dans le système $(\mathscr{L}_2)$, x et z sont des inconnues principales, et y et t des inconnues secondaires.

Méthode : Écriture paramétrique de l'ensemble des solutions d'un système échelonné

Lorsqu'un système échelonné a des inconnues secondaires, on peut donner une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions :

- en prenant les inconnues secondaires comme des paramètres prenant des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$,
- et en exprimant les inconnues principales en fonction de ces paramètres.

Proposition 52: Existence et unicité de solutions pour un système échelonné.

1. Un système linéaire échelonné est compatible si et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres.
2. Un système échelonné compatible a une unique solution si et seulement si il n'a que des inconnues principales, ce qui n'arrive que pour une matrice carrée.
   Son ensemble de solutions est alors un singleton; un tel système est dit **de Cramer**.
3. Si le système échelonné possède au moins une inconnue secondaire, alors il possède une infinité de solutions. On sait donenr une écriture paramétrique de cet ensemble de solutions.

Théorème 53: admis.

L'algorithme du pivot transforme un système linéaire quelconque en un système linéaire échelonné ayant le même ensemble de solutions que le système de départ.

3.3 Systèmes linéaires et inversibilité des matrices.

Théorème 54: Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice en termes de systèmes linéaires.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les trois assertions ci-dessous sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. Le système homogène $AX = 0_{n,1}$ a pour unique solution la colonne nulle $0_{n,1}$.
3. Pour tout $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, possède une unique solution.

Corrolaire 55: un côté suffit.

Pour une matrice carrée, l'existence d'un inverse à gauche (ou à droite) suffit pour que cette matrice soit inversible. Alors son inverse n'est autre que son inverse à gauche (ou à droite).
Plus précisément, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$:

$$(\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \quad BA = I_n) \Longrightarrow (A \in GL_n(\mathbb{K}) \ \text{ et } \ A^{-1} = B).$$
$$(\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n) \Longrightarrow (A \in GL_n(\mathbb{K}) \ \text{ et } \ A^{-1} = B).$$

Preuve :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
• Supposons $\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \mid BA = I_n$. On pose $AX = 0_{n,1}$ avec $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.
Supposons X solution : $B(AX) = B0_{n,1}$, donc $X = 0_{n,1}$ est l'unique solution de $AX = 0_{n,1}$.
Alors A est inversible par caractérisation. On a $BA = I_n$ donc $BAA^{-1} = A^{-1}$ donc $B = A^{-1}$.
• Supposons $\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \mid B = I_n$.
On a un inverse à gauche pour B : B est inversible et $B^{-1} = A$. Donc $A^{-1} = (B^{-1})^{-1} = B$.

Corrolaire 56: vers une méthode de calcul effectif de l'inverse

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad AX = Y \iff X = BY.$$

alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Preuve :

Soit $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution de $AX = Y$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est BY.
Par caractérisation, A est inversible.
Notons $E_1, E_2, ..., E_n$ les colonnes de I_n. Par hypothèse, $AX = E_j$ a pour unique solution BE_j pour tout j.
Or $AX = E_j$ a aussi pour solution $A^{-1}E_j$. Ainsi, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $BE_j = A^{-1}E_j$. Alors :

$$B = BI_n = B(E_1 \mid E_2 \mid ... \mid E_n) = (BE_1 \mid ... \mid BE_n) = A^{-1}(E_1 \mid ... \mid E_n) = A^{-1}I_n = A^{-1}$$

Méthode : calcul de l'inverse : en posant le système.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour calculer l'inverse de A (s'il existe) :

1. on pose le système linéaire $AX = Y$, avec $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$;
2. on échelonne le système : s'il n'y a que des inconnues principales, le système est de Cramer et la matrice A est inversible;
3. on peut alors réaliser des opérations élémentaires supplémentaires sur les lignes, pour éliminer les coefficients au dessus de la diagonale : on obtient une égalité du type $X = BY$ et
$\boxed{A^{-1} = B}$.

Exemple 57

Inversibilité et inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ On pose $AX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$AX = Y \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ \quad\ \ y + z = b \\ \qquad\quad z = c \end{cases}.$$

$\boxed{2.}$ On échelonne (c'est déjà fait). Pas d'inconnues secondaires : une unique solution. Donc $A \in GL_3(\mathbb{R})$.
$\boxed{3.}$ On résout :

$$\begin{cases} x & & = a - b \\ & y & = b - c \\ & & z = c \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On a $AX = Y \iff X = BY$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $A^{-1} = B$.

Proposition 58: CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Une matrice triangulaire est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Preuve :

Soit $T = \begin{pmatrix} t_1 & & & (*) \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & t_n \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On pose $TX = 0_{n,1}$. Alors :

$$\begin{cases} t_1 x_1 + ... & = 0 \\ \quad t_2 x_2 + ... & = 0 \\ \qquad \vdots & \\ \qquad t_n x_n & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T \text{ est inversible} &\iff X = 0_{n,1} \text{ est l'unique solution de } TX = 0 \\ &\iff \text{pas d'incconues secondaires pour ce système.} \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ t_i \neq 0. \end{aligned}$$

3.4 Méthode du pivot et calcul de l'inverse.

À voir dans le poly : matrices de transposition, dilatation et transvection.

Proposition 65

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Méthode : calcul de l'inverse : en opérant sur l'identité en parallèle.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On va travailler par opérations sur la matrice $(A \mid I_n) \in M_{n,2n}(\mathbb{K})$.

- On échelonne A, en faisant les opérations élémentaires sur $(A \mid I_n)$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right) \overset{\frown}{\text{pivot}} \left(\begin{array}{c|c} T & * \end{array} \right).$$

  La matrice A est inversible ssi la matrice T l'est, c'est-à-dire si cette dernière n'a que des coefficients diagonaux non nuls.
- Dans le dernier cas, à l'aide d'opérations élémentaires, on transforme T en la matrice I_n. La matrice à droite de la membrane n'est autre que A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{c|c} T & * \end{array} \right) \overset{\frown}{\text{pivot}} \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array} \right).$$

- Complexité ? Le nombre d'opérations algébriques (somme, produit) effectuées est un $O(n^3)$.

Explications. Transformer A en I_n en faisant des opérations élémentaires sur les lignes revient à multiplier A à gauche par des matrices de permutation, de dilation ou de transvection $E_1, ..., E_N$ où $N \in \mathbb{N}$. On a

$$E_N E_{N-1} ... E_1 A = I_n.$$

La matrice $E_N E_{N-1} ... E_1$ est un inverse à gauche de A. En travaillant sur la "double-matrice" $(A \mid I_n)$, on calcule ce produit au fur et à mesure, en réalisant toutes les opérations faites sur A, simultanément sur la matrice à droite de la membrane.

Exemple 66: Une diagonalisation.

Soient

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Montrer que $A = P^{-1} D P$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Calculer D^n puis A^n.
4. Justifier que D est inversible et donner son inverse. En déduire A^{-1}.

Solution :

$\boxed{1.}$

$$\left(\begin{array}{c|c} P & I_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) = P^{-1}$$

Exemple: Suite du 66

$\boxed{2.}$ Facile.
$\boxed{3.}$ $A^n = P^{-1}D^nP$.
$\boxed{4.}$ D est inversible car diagonale à coefficients diagonaux non nuls, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
Alors $A = P^{-1}DP$ inversible comme produit d'inversibles, $A^{-1} = (P^{-1}DP)^{-1} = P^{-1}D^{-1}P$.

4 Exercices.

Combinaisons linéaires de matrices. Produit de matrices.

Exercice 1: ♦◊◊

Soit A une matrice carrée de $M_n(\mathbb{C})$ et $\sigma(A)$ la somme de ses coefficients.
Notons J la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Monter que $JAJ = \sigma(A)J$.

Solution :

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$[JAJ]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}[JA]_{i,k}[J]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[J]_{k,l}[A]_{l,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[A]_{l,k} = \sigma(A) = \sigma(A)[J]_{i,j} = [\sigma(A)J]_{i,j}.$$

Exercice 2: ♦◊◊

Soit θ un réel. Calculer les puissances des trois matrices définies ci-dessous:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 1 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

$\boxed{A.}$ On a $A^3 = 0_3$ donc $\forall n \geq 3,\ A^n = 0$.
$\boxed{B.}$ On a $B = A + I_3$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k = \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}A^k$.
$\boxed{C.}$ On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) & 0 \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 3: ♦♦◊

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$.

Solution :

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma^n = \begin{pmatrix} n & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & n \end{pmatrix}$.
On a de plus $A = a\gamma + bI_3$ donc $A^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\gamma^k$.

Exercice 4: ♦♦◊

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A à l'aide d'une matrice colonne et de sa transposée.
2. Calculer les puissances de A.

Solution :

$\boxed{1.}$ On pose $\gamma = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a $\gamma\gamma^\top = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = A$.
$\boxed{2.}$ On a $A^2 = \gamma(\gamma^\top\gamma)\gamma^\top = \gamma(\mathrm{Tr}(A)I_1)\gamma^\top = \mathrm{Tr}(A)\gamma\gamma^\top = \mathrm{Tr}(A)A$.
Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \mathrm{Tr}(A)^{n-1}A$.

Exercice 5: ♦◇◇

Soient A et B deux matrices symétriques. Démontrer que AB est symétrique ssi $AB = BA$.

Solution :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $AB \in S_n(\mathbb{K})$. Alors $AB = (AB)^\top = B^\top A^\top = BA$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $AB = BA$. Alors $(AB)^\top = (BA)^\top$ puis $B^\top A^\top = A^\top B^\top$ et $BA = AB$.

Exercice 6: ♦♦◇

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$. Elle est dite centro-symétrique si

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{n+1_i,n+1-j} = a_{i,j}.$$

On note $C_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices centro-symétriques de taille n.

1. Donner une exemple de matrice de $C_2(\mathbb{R})$ et de $C_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $C_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.
3. Montrer que $C_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.

Solution :

$\boxed{1.}$ $I_2 \in C_2(\mathbb{R})$ et $I_3 \in C_3(\mathbb{R})$.
$\boxed{2.}$ Soient $A, B \in C_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}[\lambda A + \mu B]_{i,j} &= \lambda[A]_{i,j} + \mu[B]_{i,j} = \lambda[A]_{n+1-i,n+1-j} + \mu[B]_{n+1-i,n+1-j} \\ &= [\lambda A + \mu B]_{n+1-i,n+1-j}\end{aligned}$$

Donc $(\lambda a + \mu B) \in C_n(\mathbb{K})$.
$\boxed{3.}$ Soient $A, B \in C_n(\mathbb{K})$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}[AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{n+1-i,n+1-k}[B]_{n+1-k,n+1-j} \\ &= [AB]_{n+1-i,n+1-j}\end{aligned}$$

Donc $(AB) \in C_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7: ♦◇◇

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $AB - BA \neq I_n$.

Solution :

On suppose par l'absurde que $AB - BA = I_n$ alors $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$. Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB - BA) &= \sum_{i=1}^{n}[AB]_{i,i} - [BA]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}[B]_{j,i} - [B]_{i,j}[A]_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}[B]_{j,i} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{j,i}[B]_{i,j} = 0\end{aligned}$$

Donc $n = 0$, absurde.

Exercice 8: ♦◇◇

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. Justifier l'équivalence $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0 \iff A = 0_{n,n}$.

Solution :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n}[A^\top A]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A^\top]_{i,j}[A]_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}^2 = 0$$

C'est une somme nulle de termes positifs, tous les termes sont nuls donc $A = 0_{n,m}$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $A = 0_{n,n}$. Alors $A^\top A = 0_{n,n}$ et $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0$.

Exercice 9: ♦♦♦

Soit un couple de matrices $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ tel que

$$\forall X \in M_n(\mathbb{K}), \quad AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Solution :

Supposons par l'absurde que $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$: $\exists (i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4 \mid [A]_{i,j} \neq 0$ et $[B]_{k,l} \neq 0$.
On note C_i la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le i-ème qui vaut 1.
On note L_i la matrice ligne de $M_{1,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le i-ème qui vaut 1.
Alors $L_i \underbrace{AC_jL_kB}_{=0} C_l = [A]_{i,j}[B]_{k,l}I_1 = 0_1$ donc $[A]_{i,j}[B]_{k,l} = 0$ donc $[A]_{i,j} = 0$ ou $[B]_{k,l} = 0$. Absurde.

Matrices inversibles et leurs inverses.

Exercice 10: ♦◊◊

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, calculer $A(\theta)A(\theta')$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que $A(\theta)$ est inversible et calculer $A(\theta)^{-1}$.
3. Expliciter le morphisme de groupes qui a été croisé dans cet exercice.

Solution :

$\boxed{1.}$ $A(\theta)A(\theta') = ... = A(\theta + \theta')$.

$\boxed{2.}$ $\det(A\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc inversible et $A^{-1}(\theta) = \frac{1}{\det(A(\theta))}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin(\theta) & \cos\theta \end{pmatrix} = A(-\theta)$.

$\boxed{3.}$ On a $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad GL_2(\mathbb{R}) \\ \theta \mapsto A(\theta) & \end{cases}$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice 11: ♦♦◊

1. Soit N une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N} \mid N^n = 0$.
   En considérant $I_n - N^n$, montrer que $I_n - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.
2. En utilisant ce qui précède, calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Vérifier en recalculant l'inverse à l'aide du pivot.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $I_n^p - N^p = (I_n - N)\sum_{k=0}^{n-1} N^k \cancel{I_n^{n-1-k}} = I_n$.
Donc $\sum_{k=0}^{n-1} N^k = (I_n - N)^{-1}$.

$\boxed{2.}$ On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $N^3 = 0_3$.

De plus, $I_n - N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'inverse $I_n + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3.}$ Et puis quoi encore ?

Exercice 12: ♦♦◊

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On considère $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}.$$

On pose $\overline{M} = (\overline{m_{i,j}})$.

1. Calculer $M\overline{M}$.
2. Justifier que M est inversible et donner M^{-1}.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned} [M\overline{M}]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[\overline{M}]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\overline{\omega}^{(k-1)(j-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\omega^{i-1}\overline{\omega}^{j-1}\right)^{k-1} = \omega^{j-i}\sum_{k=1}^{n}\omega^{k(i-j)} \end{aligned}$$

Si $i = j$, $[M\overline{M}]_{i,j} = n$. Sinon, $[M\overline{M}]_{i,j} = \omega^{j-i}\frac{1-\omega^{n(i-j)}}{1-\omega^{i-j}} = ... = \omega^{i-j}$.

$\boxed{2.}$ On montre par le calcul que $\frac{1}{n}\overline{M}$ est l'inverse de M.

Exercice 13: ♦♦◊

Soit A une matrice inversible telle que la somme des coefficients de chaque ligne vaut s.
Démontrer que $s \neq 0$ puis que la somme des coefficients sur chaque ligne de A^{-1} vaut s^{-1}.

Solution :

Supposons par l'absurde que $s = 0$. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Alors $\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k} = s = 0$.
Donc $[A^{-1}]_{j,i}\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k} = 0$, donc :

$$\sum_{i=1}^{n}[A^{-1}]_{j,i}\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k} = 0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A^{-1}]_{j,i}[A]_{i,k}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[A^{-1}]_{j,i}[A]_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}[A^{-1}A]_{j,k} = \sum_{j=1}^{n}[I_n]_{j,k} = 0$.
Or, $\sum_{j=1}^{n}[I_n]_{j,k} = 1$ donc $1 = 0$, absurde, donc $s \neq 0$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}[A^{-1}]_{i,j}[A]_{j,k} = [I_n]_{i,k}$.. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,j} = s$ donc $\displaystyle[A^{-1}]_{k,i}\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,j} = s[A^{-1}]_{k,i}$.
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[A^{-1}]_{k,i}\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,j} = s\sum_{i=1}^{n}[A^{-1}]_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A^{-1}]_{k,i}[A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}[I_n]_{k,j} = 1$. Or $s \neq 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[A^{-1}]_{k,i} = s^{-1}$.

Exercice 14: ♦♦◊

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur à 2.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ tels que
$$M^2 + aM + bI_n = 0.$$
Montrer que M est inversible et exprimer son inverse en fonction de M.
2. Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Calculer J^2. Montrer que $J - I_n$ est inversible et calculer son inverse.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $M(M + ai_N) = -bI_n$ donc $M(-\frac{1}{b}M - \frac{a}{b}I_n) = I_n$ donc $M^{-1} = -\frac{1}{b}M - \frac{a}{b}I_n$.
$\boxed{2.}$ Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $[J^2]_{i,j} = ... = n$. On a $(J - I_n)^2 = J^2 - 2J + I_n$.
Donc d'après 1., $J - I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(J - I_n)^{-1} = \frac{1}{n-1}J - I_n$.

Exercice 15: ♦♦♦

Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Solution :

On a $A + B = AB$ donc $AB - A - B + I_n = I_n$ donc $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$.
Alors $(A - I_n)^{-1} = (B - I_n)$ donc $(A - I_n)$ et $(B - I_n)$ commutent.
Donc $(A - I_n)(B - I_n) = (B - I_n)(A - I_n)$ donc $AB - A - B + I_n = BA - A - B + I_n$ donc $AB = BA$.