$\boxed{\textbf{Problème 1}}$ Commutants.

Partie A Généralités et exemples.

1. (a) · $\mathcal{C}(A) \subset M_n(\mathbb{K})$ par définition.
   · Puisque $A \cdot 0_n \cdot A = 0_n = 0_n \cdot A$: $0_n \in \mathcal{C}(A)$.
   · Soient M et N deux matrices de $\mathcal{C}(A)$, λ et μ deux scalaires de $\mathbb{K}$.

$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A.$$

   Ceci montre que $\lambda M + \mu N \in \mathcal{C}(A)$: $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires.
   Par caractérisation $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } (M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)}$.

   (b) · Nous savons d'après la question précédente que $\mathcal{C}(A)$ est stable par différence.
   · Montrons la stabilité par produit.
   Soient M et N deux matrices de $\mathcal{C}(A)$. On a

$$A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A.$$

   Ceci prouve que $MN \in \mathcal{C}(A)$. Nous avons utilisé l'associativité du produit matriciel et le fait que M et N commutent avec A.
   · Enfin, il est clair que I_n, neutre multiplicatif de l'anneau, commute avec A : $I_n \in \mathcal{C}(A)$.
   Par caractérisation $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-anneau de } (M_n(\mathbb{K}), +, \times)}$.

2. Toutes les matrices commutent avec I_n : on a $\boxed{\mathcal{C}(I_n) = M_n(\mathbb{K})}$, de dimension $\boxed{n^2}$.

3. Les calculs mettant en jeu une matrice diagonale sont rapide :

$$AM = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$$

   On a $AM = MA \iff b = c = 0$, ce qui amène

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, d \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}),$$

   en utilisant les notations standard pour les matrices de la base canonique de $M_2(\mathbb{K})$.
   La famille $(E_{1,1}, E_{2,2})$ engendre $\mathcal{C}(A)$ et elle est libre (sous-famille de la base canonique). C'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathcal{C}(A)}$.
   On a bien que $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 2 comme annoncé par l'énoncé.

4. Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a $BM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $MB = \begin{pmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{pmatrix}$.
   On en déduit que

$$\mathcal{C}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, a, b, d, e, i \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3}).$$

   La famille génératrice obtenue est libre : $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une $\boxed{\text{base de } \mathcal{C}(B)}$. On a bien que $\mathcal{C}(B)$ est de dimension 5 comme annoncé par l'énoncé.

Partie B Commutant d'une matrice diagonalisable avec *vaps* deux à deux distinctes.

5. (a) $[DM]_{i,j} = d_i [M]_{i,j}$ et $[MD]_{i,j} = d_j [M]_{i,j}$.
   (b) Supposons que M appartient à $\mathcal{C}(D)$ et considérons (i,j) avec $i \neq j$. Puisque $DM = MD$, on a en particulier $[DM]_{i,j} = [MD]_{i,j}$, soit $d_i [M]_{i,j} = d_j [M]_{i,j}$, et enfin $(d_i - d_j)[M]_{i,j} = 0$. Par hypothèse, $d_i \neq d_j$, ce qui amène $[M]_{i,j} = 0$. Ceci prouve que M est diagonale.
   Réciproquement, si M est diagonale, il est clair qu'elle commute avec la matrice diagonale D.
   (c) Nous venons de démontrer que

$$\mathcal{C}(D) = \{\text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) \mid \delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(E_{i,i})_{1 \le i \le n}.$$

   La famille $(E_{i,i})_{1 \le i \le n}$ engendre $\mathcal{C}(D)$ et elle est libre comme sous-famille de la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$: c'est une $\boxed{\text{base de } \mathcal{C}(D)}$. Ceci établit en particulier que $\boxed{\dim \mathcal{C}(D) = n}$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question 3.

6. (a) On a

$$DM = MD \iff P^{-1}APM = MP^{-1}AP \iff APMP^{-1} = PMP^{-1}A.$$

   La dernière implication directe est obtenue en multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite. Ceci démontre $\boxed{M \in \mathcal{C}(D) \iff PMP^{-1} \in \mathcal{C}(A)}$
   (b) i. La fonction Φ va bien de $\mathcal{C}(D)$ dans $\mathcal{C}(A)$ d'après la question précédente. En multipliant par P et P^{-1}, on obtient aussi facilement que Ψ va de $\mathcal{C}(A)$ vers $\mathcal{C}(D)$: Φ et Ψ sont bien définies.

Vérifions la linéarité de Φ (celle de Ψ s'établit de la même façon).
Soient M et N dans $\mathcal{C}(D)$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$.

$$\Phi(\lambda M+\mu N)=P(\lambda M+\mu N)P^{-1}=\lambda PMP^{-1}+\mu PNP^{-1}=\lambda\Phi(M)+\mu\Phi(N).$$

ii. Soit $M\in M_n(\mathbb{K})$.
On a $\Phi\circ\Psi(M)=P(P^{-1}MP)P^{-1}=I_nMI_n=M$
et $\Psi\circ\Phi(M)=P^{-1}(PMP^{-1})P=I_nMI_n=M$.
Ceci démontre que $\boxed{\Phi\circ\Psi=\Psi\circ\Phi=\mathrm{id}_{M_n(\mathbb{K})}}$.

iii. La question précédente prouve que l'application Φ est bijective, de réciproque Ψ. L'application Φ étant linéaire, il s'agit d'un isomorphisme (le mot est attendu ici) entre $\mathcal{C}(D)$ et $\mathcal{C}(A)$, qui ont donc même dimension.
En utilisant le résultat de 5-(c), on a $\boxed{\dim\mathcal{C}(A)=n}$.

7. *Un exemple de matrice diagonalisable.*

(a) Notons C_1,C_2,C_3 les trois colonnes de A. On a $C_3=-2C_1$, de sorte que

$$\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3)=\mathrm{rg}(C_1,C_2),$$

La famille (C_1,C_2) est libre (deux vecteurs non colinéaires) : $\boxed{\mathrm{rg}(A)=2}$.
En appliquant le théorème du rang à f, on obtient

$$\dim\mathrm{Ker}(f)=\dim\mathbb{K}^3-\mathrm{rg}(f)=\dim\mathbb{K}^3-\mathrm{rg}(A)=3-2=1.$$

Le noyau de f est une droite. Tout vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$ en est une base. En notant $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$, la relation $2C_1+C_2=0$ amène $2f(e_1)+f(e_3)=0$, soit $f(2e_1+e_3)=0$. On a $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(2e_1+e_3)}$.

(b) On pouvait faire le produit matriciel ou écrire $u=e_1+e_2$ et $v=e_1+e_3$.
On obtient $f(u)=(-1,-1,0)$ et $f(v)=(1,0,1)$.
On a donc $\boxed{f(u)=-u \text{ et } f(v)=v}$.

(c) Notons $w=2e_1+e_3$ le vecteur trouvé en question 1. Il est facile (...) d'établir que $\mathcal{B}'=(u,v,w)$ est famille libre : puisqu'elle compte trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{K}^3$. Posons

$$P=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Notons-la D puisqu'elle est diagonale. La formule du changement de base pour l'endomorphisme f s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{D=P^{-1}AP}.$$

Partie C Commutant d'un endomorphisme diagonalisable avec deux valeurs propres.

8. Soit $x\in E_\lambda$. Par définition de E_λ, $f(x)-\lambda x=0$. On a donc $f(x)=\lambda x\in E_\lambda$ (puisque E_λ est un sous-espace vectoriel : c'est un noyau). Remarquons de surcroît que $f_{|E_\lambda}=\lambda\mathrm{id}_{E_\lambda}$: l'endomorphisme induit par f sur E_λ est l'homothétie de rapport λ.

9. Soit $x\in E_\lambda(f)$ (on a donc $f(x)=\lambda x$). Montrons que $g(x)\in E_\lambda$. On calcule

$$f(g(x))=f\circ g(x)\underset{g\in\mathcal{C}(f)}{=}g\circ f(x)=g(f(x))=g(\lambda x)=\lambda g(x).$$

On a bien que $g(x)\in\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id})=E_\lambda(f)$: $\boxed{E_\lambda(f)\text{ est stable par } g}$.

10. L'inclusion réciproque est triviale puisque E_λ et E_μ sont des sous-espaces vectoriels. Soit $x\in E_\lambda(f)\cap E_\mu(f)$. On a $f(x)=\lambda x=\mu x$. On a donc $(\lambda-\mu)x=0_E$. Puisque $\lambda\neq\mu$, on a $x=0_E$.
Cela achève de prouver que $\boxed{E_\lambda \text{ et } E_\mu \text{ sont en somme directe}}$.

11. (a) L'application Λ est $\boxed{\text{bien définie}}$ puisque si $g\in\mathcal{C}(f)$, on a établi en question 9 que E_λ et E_μ sont stables par g : les endomorphismes induits $g_{|E_\lambda}$ et $g_{|E_\mu}$ existent bien. Montrons que Λ est $\boxed{\text{linéaire}}$. Soient $(g,h)\in\mathcal{C}(f)^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$. On a

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha g+\beta h)&=\left((\alpha g+\beta h)_{|E_\lambda},(\alpha g+\beta h)_{|E_\mu}\right)\\&=\left(\alpha g_{|E_\lambda}+\beta h_{|E_\lambda},\alpha g_{|E_\mu}+\beta h_{|E_\mu}\right)\qquad\text{restreindre, c'est linéaire}\\&=\alpha(g_{|E_\lambda},g_{|E_\mu})+\beta(h_{|E_\lambda},h_{|E_\mu})\\&=\alpha\Lambda(g)+\mu\Lambda(h).\end{aligned}$$

(b) Soit $g \in \operatorname{Ker}(\Lambda)$.
On a donc $\Lambda(g) = (0_{\mathscr{L}(E_\lambda)}, 0_{\mathscr{L}(E_\mu)})$, soit $g_{|E_\lambda} = 0_{\mathscr{L}(E_\lambda)}$ et $g_{|E_\mu} = 0_{\mathscr{L}(E_\mu)}$.
L'application g est nulle sur deux supplémentaires (en fait $E = E_\lambda + E_\mu$ suffit ici). Elle est donc nulle sur E tout entier : $g = 0_{\mathscr{L}(E)}$: $\boxed{\Lambda \text{ est injective}}$.

(c) Soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E_\lambda) \times \mathscr{L}(E_\mu)$. Puisque E_λ et E_μ sont supplémentaires, il existe (un unique) endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g_{|E_\lambda} = u$ et $g_{|E_\mu} = v$ (c'est un des modes de définition d'une application linéaire dans le cours). Reste à vérifier que g commute avec f. L'égalité $g \circ f(x) = f \circ g(x)$ est vraie lorsque x appartient à E_λ ou E_μ puisque u commute avec l'homothétie $\lambda \mathrm{id}_{E_\lambda}$ et v commute avec l'homothétie $\lambda \mathrm{id}_{E_\mu}$. Par linéarité, elle est vraie pour tout vecteur x de E : $g \in \mathcal{C}(f)$.
Le couple (u, v) a bien un antécédent par Λ : $\boxed{\Lambda \text{ est surjective}}$.

12. On a noté $p = \dim E_\lambda$. Par supplémentarité, $\dim E_\mu = n - p$.
La question 11 établit que les espaces $\mathcal{C}(f)$ et $\mathscr{L}(E_\lambda) \times \mathscr{L}(E_\mu)$ sont isomorphes. En particulier, ils ont même dimension. Ceci amène

$$\dim \mathcal{C}(f) = \dim \mathscr{L}(E_\lambda) + \dim \mathscr{L}(E_\mu) \quad \text{soit} \quad \boxed{\dim \mathcal{C}(f) = p^2 + (n-p)^2}.$$

On peut remarquer que ce résultat est cohérent avec celui de la question 4 : si f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à B, il est facile de voir que (bon, il faut réfléchir un peu) $E_1(f)$ est de dimension 2 et $E_2(f)$ de dimension 1, ces deux sous-espaces étant supplémentaires. Puisque $\mathcal{C}(B)$ et $\mathcal{C}(f)$ sont isomorphes (vous savez, le miroir...) on retrouve que $\dim \mathcal{C}(B) = 2^2 + (3-2)^2 = 5$.

13. (a) Si p est un $\boxed{\text{projecteur}}$ de E, alors $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E_1(p) \oplus E_0(p)$.
On rappelle que la relation $p \circ p = p$ (idempotence) caractérise les projecteurs de E parmi ses endomorphismes.

(b) Si s est une $\boxed{\text{symétrie}}$ de E, alors $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}) = E_1(s) \oplus E_1(s)$.
On rappelle que la relation $s \circ s = \mathrm{id}$ (involutivité) caractérise les symétries de E parmi ses endomorphismes.

$\boxed{\textbf{Problème 2}}$ Produits infinis.

Partie A Autour de la définition : premiers exemples.

1. *Produits téléscopiques*

(a) Soit $N \geq 2$. On a

$$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suites des produits partiels tend vers 0 : $\boxed{\text{ce produit infini est divergent}}$.

(b) Soit $N \geq 2$. On a

$$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{n^2} = \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} \prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n} = \frac{N+1}{2N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{Ce produit infini est convergent et } \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$.

2. *Conditions nécessaires de convergence*

(a) Par contraposée, supposons qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $u_{n_1} = 0$. Soit $N \geq n_1$. Le produit partiel P_N vaut 0 (c'est un produit fini dont un des facteurs est nul). Ainsi, (P_N) est stationnaire à 0 : elle tend vers 0, ce qui contredit que le produit infini est convergent (la définition n'autorise pas une limite nulle).

(b) Supposons que $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge. Alors tous les termes u_n sont non nuls. Pour $N \geq n_0$, on peut considérer le quotient des produits partiels $\frac{P_{N+1}}{P_N} = u_{N+1}$. Notons ℓ la valeur du produit infini (la limite de (P_N)). Par définition, $\ell \neq 0$, de sorte que

$$\frac{P_{N+1}}{P_N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1.$$

Ceci démontre que $\boxed{u_N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$.

(c) La condition $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ n'est pas suffisante, comme on le voit avec l'exemple de la question 1-(a) : le produit infini diverge alors que son "facteur général" tend vers 1.

3. *Lien avec les séries*

(a) Soit $N \geq n_0$. La propriété de morphisme pour ln donne

$$\ln(P_N) = \sum_{n=n_0}^{N} \ln(u_n).$$

Par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $(P_N)_{N\geq n_0}$ converge vers une limite non nulle si et seulement si $(\ln(P_N))_{N\geq n_0}$ converge.
Autrement dit, la suite des produits partiels converge vers une limite non nulle ssi la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(u_n)$ converge. On a bien

$$\boxed{\prod_{n\geq n_0} u_n \text{ converge} \iff \sum \ln(u_n) \text{ converge}}.$$

Dans le cas où il y a convergence, par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\boxed{\ln\left(\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n)}.$$

(b) • Supposons que le produit infini $\prod\limits_{n\geq n_0} (1-u_n)$ converge.
D'après 3-(a), la série $\sum \ln(1-u_n)$ est convergente. Or, d'après 2-(b), la convergence du produit entraîne $1-u_n \to 1$, soit $u_n \to 0$. On a donc l'équivalent $\ln(1-u_n) \sim u_n$. Par comparaison des séries à termes positifs, on obtient la convergence de la série $\sum u_n$.
• Supposons que $\sum u_n$ est une série convergente.
Alors $u_n \to 0$, et donc $\ln(1-u_n) \sim u_n$, ce qui entraîne que $\sum \ln(1-u_n)$ converge, puis $\prod(1-u_n)$ converge.

$$\boxed{\prod_{n\geq n_0} (1-u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}}.$$

(c) Puisque $\alpha > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 < 1 - \frac{1}{n^\alpha} < 1$. D'après la question précédente, le produit $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Nous savons que ceci advient si et seulement si $\alpha > 1$ (critère de convergence des séries de Riemann).

Partie B Vers le produit eulérien du sinus (correction succinte).

4. (a) En développant avec le binôme, on obtient

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1} X^{2n+1} - \left(-\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1} X^{2n+1}\right) + Q_n(X),$$

où $Q_n(X)$ est de degré inférieur à $2n$.
Puisque $i^{2n+1} = (-1)^n i$, le calcul amène $P_n(X) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} X^{2n+1} + Q_n(X)$.
Le coefficient devant X^{2n+1} étant non nul, on a $\boxed{\deg P_n(X) = 2n+1}$.

(b) Soit $k \in [\![0,2n]\!]$. On calcule

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= \frac{1}{2i}\left[\left(1+i\tan\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^{2n+1} - \left(1-i\tan\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}\right] \\ &= \ldots = \cos^{-2n-1}\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\sin(k\pi) = 0. \end{aligned}$$

Ceci démontre que les x_k sont racines de P_n. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$.
La fonction tan étant strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < x_1 < \ldots, x_n$.
On remarque de surcroît que $x_{2n+1-k} = -x_k$ (calcul).
Les racines trouvées sont au nombre de $2n+1$ (elles sont distinctes deux à deux). Or, P_n a au plus $2n+1$ racines puisque son degré vaut $2n+1$.
$\boxed{\text{L'ensemble des racines de } P_n \text{ est bien } \{x_k \mid k \in [\![0,2n]\!]\}}$.

(c) Le nombre de racines vaut le degré : P_n est scindé sur $\mathbb{C}$.
Il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $P_n(X) = \alpha \prod\limits_{k=0}^{2n}(X-x_k)$. En écrivant à part $X - x_0 = X$ et en utilisant le fait que $x_{2n+1-k} = -x_k$, on obtient

$$P_n(X) = \alpha X \prod_{k=1}^{n}(X-x_k)(X+x_k) = \alpha X \prod_{k=1}^{n}(X-x_k^2) = \alpha \prod_{k=1}^{n}(-x_k^2) \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_k^2}\right)$$

(d) En dérivant la forme développée, on obtient $P_n'(0) = 1$.
En écrivant $P_n'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{P_n(x)-P_n(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \lambda \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{x_k^2}\right)$, on obtient $P_n'(0) = \lambda$. Ceci amène $\boxed{\lambda = 1}$.

5. $(1+\frac{a}{n})^n = \exp(n\ln(1+\frac{a}{n})) = \exp(n(\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n}))) = \exp(a+o(1)) \to \boxed{\exp(a)}$.
En admettant que la convergence demeure vraie avec $z = ix$, on a

$$P_n(x) \to \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \boxed{\sin x}.$$