Colles, semaine 14 (15/01→19/01)

Calcul matriciel
parties 1 et 2

Dans la partie 1 du cours, on définit les combinaisons linéaires de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Le produit matriciel de deux matrices rectangulaires a été ensuite défini, ainsi que la transposée.

La partie 2 du cours a été consacrée à l'anneau $M_n(\mathbb{K})$. Nous avons donné quelques exemples de puissances de matrices et examiné quelques parties remarquables de $M_n(\mathbb{K})$, notamment l'ensemble des triangulaires supérieures, ainsi que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$. Et enfin, bien sûr, défini le groupe des inversibles de cet anneau : le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$.

La notion de matrice inversible est donc au programme de la colle. On a un critère d'inversibilité pour les matrices diagonales, ainsi que pour les matrices de taille 2

Mais attention ! le lien avec les systèmes linéaires ne sera fait qu'en début de semaine prochaine, et il faudra attendre pour la méthode d'inversion des matrices inversibles par le pivot.

Questions de cours.

- Associativité du produit matriciel.
- Transposée d'un produit.
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit.
- Exercice : Toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de $S_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice de $A_n(\mathbb{K})$.
- Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Inversibilité et inverse d'une matrice de taille 2 (avec le polynôme annulateur).

Savoir-faire importants.

- Le **produit matriciel** : en pratique, en théorie.
- Montrer qu'une certaine partie de $M_n(\mathbb{K})$ est **stable** par combinaison linéaire, ou stable par produit.
- Calcul des **puissances** d'une matrice : en faisant une conjecture sur les premières puissances, ou en utilisant le binôme. Attention à la puissance 0 !
- Connaître les propriétés de la transposition.
- Savoir multiplier à gauche, à droite par une matrice diagonale.
- Savoir prouver qu'une matrice est **inversible** en proposant un candidat pour l'inverse, notamment en exploitant un polynôme annulateur comme dans la dernière question de cours.

À venir en semaine 15 : Matrices, suite et fin. Début des polynômes.