Fonctions usuelles
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exponentielle and friends. 1
Exercice 3.1 1
Exercice 3.2 2
Exercice 3.3 2

Exercice 3.1 [♦◊◊]

Résoudre $2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3)$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned}
& 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3) \\
\iff & \ln\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right) = \ln(3x) \\
\iff & \frac{(x+3)^2}{4} = 3x \\
\iff & x^2 - 6x + 9 = 0 \\
\iff & x = 3
\end{aligned}$$

Ainsi, 3 est l'unique solution.

Exercice 3.2 [♦♦♢]

Résoudre l'équation $ch(x) = 2$. Que dire des solutions ?
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned} &\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \\ \iff &e^x + e^{-x} = 4 \\ \iff &e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \\ \iff &e^x = 2 \pm \sqrt{3} \\ \iff &x = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\ln(2 - \sqrt{3})$ et $\ln(2 + \sqrt{3})$ sont les uniques solutions dans $\mathbb{R}$.
On remarque que :

$$\ln(2 + \sqrt{3}) = -\ln\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = -\ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Les solutions sont opposées.

Exercice 3.3 [♦♢♢]

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned} &x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \\ \iff &e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \\ \iff &\sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \\ \iff &\ln(x)(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) = 0 \\ \iff &\ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\ \iff &x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ \iff &x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Les uniques solutions sont donc 1 et 4.