Relations Binaires
Corrigé

DARVOUX Théo

Décembre 2023

MRC Babacar pour une partie des 3 premiers

Exercices.

Exercice 16.1 [$\blacklozenge\blacklozenge\lozenge$]

Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser le cardinal de la classe d'équivalence d'un réel x.

1.
Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien que $xe^x = xe^x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$, on a bien $ye^x = xe^y$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Montrons que $xe^z = ze^x$.
D'après la première égalité, $y = xe^{y-x}$.
On remplace y dans la seconde : $xe^{y-x+z} = ze^y$.
On divise par e^y : $xe^{z-x} = z$. On multiplie par e^x : $xe^z = ze^x$.
On a bien $x \mathscr{R} z$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
On a $x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y}$.
On pose $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$. La classe d'équivalence de x est alors $\{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}$.
La question revient à chercher le nombre d'éléments dans $\mathbb{R}$ qui ont la même image par f.
On a que f est dérivable et $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$. Alors :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Alors, pour $x \in]-\infty, 0]$, $|[x]| = 1$, pour $x = 1$, $|[x]| = 1$ et sinon, $|[x]| = 2$.

$\square$

Exercice 16.2 [$\blacklozenge\blacklozenge\lozenge$]

On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$p \mathscr{R} q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \ : \ p^n = q.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

Réflexivité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $p^1 = p$, donc $p \mathscr{R} p$.

Antisymétrie : Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = p$. Montrons que $p = q$.
On a $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = p$. De plus, $q^m = p$, donc $q^{nm} = p^n = q$.
Ainsi, $p = p^{nm}$ et $q = q^{nm}$. Alors, soit $p = q = 1$, soit $n = m = 1$ et alors $p = q$ dans tous les cas.

Transitivité : Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = r$. Montrons que $p \mathscr{R} r$.
On a que $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = r$. Or $nm \in \mathbb{N}^*$, donc $p \mathscr{R} r$.

$\mathscr{R}$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
Ce n'est pas un ordre total : il n'existe pas d'entier n tel que $2^n = 3$ ou $3^n = 2$, par exemple.

$\square$

Exercice 16.3 [♦♦◊]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $x \preceq y$ si

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \ : \ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.
2. Si $n \geq 2$, montrer qu'il s'agit d'un ordre partiel.

1.
Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a bien que $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i$.
Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $x \preceq y$ et $y \preceq x$. Montrons que $x = y$.
On a que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \ \wedge \sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i$.
Par antisymétrie de $\leq$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$.
Par récurrence forte triviale sur k, on peut montrer que tous les éléments sont égaux 1 à 1.
i.e. Avec $k = 1$, $x_1 = y_1$, on suppose $x_j = y_j$ pour tout $j < k$ et on a $\sum_{i=1}^{j-1} x_i + x_k = \sum_{i=1}^{j-1} y_i = y_k$
Transitivité : Soient 1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
$x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \preceq y$ et $y \preceq z$. Montrons que $x \preceq z$.
On a que $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} z_i$. Par transitivité de $\leq$, $x \preceq z$.

2. Soient $x = (0, 2)$ et $y = (1, 0)$.
On a $\sum_{i=1}^{2} x_i \geq \sum_{i=1}^{2} y_i$ et $\sum_{i=1}^{1} x_i \leq \sum_{i=1}^{1} y_i$: x et y ne sont pas comparables, $\preceq$ est un ordre partiel. □

Exercice 16.4 [♦♦◊]

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit une relation binaire en posant que deux réels strictement positifs sont en relation, ce qu'on note $x \mathscr{R} y$ si et seulement si

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ px = qy$$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Démontrer que pour cette relation, deux classes d'équivalence sont nécessairement en bijection.

1.
Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{N}^*$. On a que $1 \cdot x = 1 \cdot x$ donc $x \mathscr{R} x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^*$ $px = qy$. On a $qy = px$ donc $y \mathscr{R} x$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^*$ $px = qy$ et $\exists (p', q') \in \mathbb{N}^*$ $p'y = q'z$.
On a $y = \frac{p}{q}x$ donc $p'\frac{p}{q}x = q'z$. Alors $pp'x = qq'z$ et $x \mathscr{R} z$.

2. Soient $[x]$ et $[y]$ deux classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ avec $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.
On pose $f : \begin{cases} [x] \to [y] \\ a \mapsto \frac{a}{x}y \end{cases}$.
Pour $a \in [x]$, on a $f(a) \in [y]$: $\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $pa = qx$ Alors $a = \frac{q}{p}x$ et $f(a) = \frac{q}{p}\frac{x}{x}y \iff pf(a) = qy$.
On a f **injective** : Soient $a, a' \in [x]$ tels que $f(a) = f'(a)$ on a $\frac{y}{x}a = \frac{y}{x}a'$ donc $a = a'$.
On a f **surjective** : Soit $b \in [y]$: $\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $pb = qy$, alors $b = \frac{q}{p}y$.
On pose $a \in [x] \mid pa = qx$, donc $a = \frac{q}{p}x$. On a $f(a) = \frac{q}{p}y = b$.
Donc f est bien une fonction bijective de $[x]$ vers $[y]$. □

Exercice 16.5 [♦♦◊]

Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathscr{R}$ par

$$x \mathrel{\mathscr{R}} y \iff x^2 + 2y = y^2 + 2x.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{R}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un réel a.

1. **Réflexivité** : On a bien que $x^2 + 2x = x^2 + 2x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathrel{\mathscr{R}} y$, par symétrie de l'égalité, on a $y \mathrel{\mathscr{R}} x$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathrel{\mathscr{R}} y$ et $y \mathrel{\mathscr{R}} z$. Par transitivité de l'égalité, $x \mathrel{\mathscr{R}} z$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} & x^2 + 2a = a^2 + 2x \\ \iff & x^2 - a^2 = 2(x-a) \\ \iff & (x-a)(x+a) = 2(x-a) \\ \iff & (x-a)(x+a-2) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, soit $x = a$, soit $x = 2 - a$.
La classe d'équivalence de a est alors : $[a] = \{2 - a, a\}$.

□

Exercice 16.6 [♦♦◊]

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E.
Pour $x, y \in E$, on note $x \sim y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, ...x_n \in E$ tels que

$$x_0 = x,\ x_0 \mathrel{\mathscr{R}} x_1,\ x_1 \mathrel{\mathscr{R}} x_2,\ ...,\ x_{n-1} \mathrel{\mathscr{R}} x_n,\ x_n = y.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation transitive sur E.
2. On suppose $\mathscr{R}$ réflexive et symétrique. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

1. Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Montrons $x \sim z$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $_0, ..., x_n \in E$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $y_0, ..., y_m \in E$ tels que

$$x_0 = x,\ x_0 \mathrel{\mathscr{R}} x_1,\ ..., x_{n-1} \mathrel{\mathscr{R}} x_n = y_0 \mathrel{\mathscr{R}} y_1,\ ...,\ y_{n-1} \mathrel{\mathscr{R}} y_n = z$$

Alors on a $m + n$ éléments de E tels que

$$x_0 = x,\ x_0 \mathrel{\mathscr{R}} x_1,\ ...,\ x_{m+n-1} \mathrel{\mathscr{R}} x_{m+n},\ x_{m+n} = z.$$

On en conclut que $x \sim z$: $\sim$ est transitive sur E.

2.
Réflexivité : Soit $x \in E$. On pose $x_0 = x$ et $x_1 = x$. Par réflexivité de $\mathscr{R}$, on a $x_0 \mathrel{\mathscr{R}} x_1$.
Alors on a que $x_0 = x,\ x_0 \mathrel{\mathscr{R}} x_1,\ x_1 = x$. C'est exactement $x \sim x$.

Symétrie : Soient $x, y \in E$ tels que $x \sim y$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, ..., x_n$ tels que [la relation].
Par symétrie de $\mathscr{R}$, on obtient :

$$x_n = y,\ x_n \mathrel{\mathscr{R}} x_{n-1},\ ...,\ x_1 \mathrel{\mathscr{R}} x_0,\ x_0 = x$$

On pose alors $(y_0, y_1, ..., y_n) = (x_n, x_{n-1}, ...x_0)$ et on obtient que

$$y_0 = y,\ y_0 \mathrel{\mathscr{R}} y_1,\ ...,\ y_{n-1} \mathrel{\mathscr{R}} y_n,\ y_n = x$$

Alors $y \sim x$ et on en conclut que $\sim$ est réflexive.
On a déjà montré la transitivité de $\sim$: c'est une relation d'équivalence sur E.

□

Exercice 16.7 [♦♦♦]

Soit E un ensemble et A une partie de E. Pour deux parties X et Y de E on note $X \sim Y$ lorsque $X \cap A = Y \cap A$, ce qui définit sur $\mathscr{P}(E)$ une relation binaire.
1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On note $\mathscr{P}(E)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences pour $\sim$.
Démontrer qu'il existe une bijection de $\mathscr{P}(A)$ dans $\mathscr{P}(E)/\sim$.

1.
Réflexivité : Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Par réflexivité de l'égalité, on a que $X \cap A = X \cap A$: $X \sim X$.
Symétrie : Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \sim Y$. Par symétrie de l'égalité, $Y \sim X$.
Transitivité : Soient $X, Y, Z \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$. Par transitivité de l'égalité, $X \sim Z$.
Alors $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

2. On pose $f : \begin{cases} \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(E)/\sim \\ X \mapsto [X] \end{cases}$
f est d'abord bien définie puisque $A \subset E$ et que $\sim$ est une relation sur E.

Montrons que f est **injective** : Soient $X, X' \in (\mathscr{P}(A))^2$ tels que $f(X) = f(X')$.
On a $[X] = [X']$. Alors $X \cap A = X' \cap A$, or $X \subset A$ et $X' \subset A$ donc $X = X'$.

Montrons que f est **surjective** : Soit $C \in \mathscr{P}(E)/\sim$. Alors $\exists X \in \mathscr{P}(E) \mid [X] = C$.
Ainsi, $X \cap A \in \mathscr{P}(A)$ et $f(X \cap A) = [X]$ puisque $X \cap A \cap A = X \cap A$. On a bien que f est surjective.

On en conclut que f est une bijection de $\mathscr{P}(A)$ vers $\mathscr{P}(E)/\sim$.

□