

# Propriétés de $\mathbb{R}$

## Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

---

### Exercices.

Inégalités. . . . .	1
Exercice 2.1 . . . . .	2
Exercice 2.2 . . . . .	3
Exercice 2.3 . . . . .	3
Exercice 2.4 . . . . .	4
Valeurs absolues. . . . .	4
Exercice 2.5 . . . . .	5
Exercice 2.6 . . . . .	6
Entiers, rationnels. . . . .	6
Exercice 2.7 . . . . .	6
Exercice 2.8 . . . . .	7
Exercice 2.9 . . . . .	8
Exercice 2.10 . . . . .	8
Parties bornées . . . . .	8
Exercice 2.11 . . . . .	9
Exercice 2.12 . . . . .	10

---

**Exercice 2.1** [◆◆◆]

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3 - a^2b + b^3 - ab^2}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2(a - b) + b^2(b - a)}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)(a^2 - b^2)}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a + b)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Or  $(a - b)^2 \geq 0$ ,  $(a + b) \geq 0$  et  $ab \geq 0$ .

Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$ .

□

**Exercice 2.2** [◆◆◆]

1. Montrer que  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .  
 Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} &\leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \iff a+b &\leq a + 2\sqrt{ab} + b \\ \iff 2\sqrt{ab} &\geq 0 \\ \iff \sqrt{ab} &\geq 0 \\ \iff ab &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . □

2. Montrer que  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$ .  
 Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ .  
 Considérons  $a \geq b$ , alors  $|a-b| = a-b$ .

$$\begin{aligned} |\sqrt{a} - \sqrt{b}| &\leq \sqrt{a-b} \\ \iff a - 2\sqrt{ab} + b &\leq a-b \\ \iff 2b &\leq 2\sqrt{ab} \\ \iff b^2 &\leq ab \\ \iff b &\leq a \end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque  $b \geq a$ .  
 Ainsi,  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$ . □

**Exercice 2.3** [◆◆◆] *Manipuler la notion de distance*

En utilisant la notion de distance sur  $\mathbb{R}$ , écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \leq 6 \text{ et } |x^2-1| > 3\}$$

On a :

$$x \in [-9, 3] \text{ et } x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

Donc :

$$x \in [-9, -2] \cup [2, 3]$$

**Exercice 2.4 [◆◆◇] Plusieurs façons de définir une moyenne**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a \leq b$ . On définit les nombres  $m, g, h$  par

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Et on les appelle respectivement moyenne arithmétique, géométrique et harmonique de  $a$  et  $b$ .  
Démontrer l'encadrement

$$a \leq h \leq g \leq m \leq b$$

Montrons les inégalités une par une :

- $m \leq b \iff \frac{a+b}{2} - b \leq 0 \iff \frac{a-b}{2} \leq 0 \iff a - b \leq 0 \iff a \leq b.$
- $g \leq m \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$
- $h \leq g \iff \frac{1}{h} \geq \frac{1}{g} \iff \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 0 \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2ab} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2ab} \geq 0.$
- $a \leq h \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{h} \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \geq 0 \iff \frac{b-a}{2ab} \geq 0 \iff b - a \geq 0 \iff a \leq b$

Ainsi,  $a \leq h \leq g \leq m \leq b$ .

□

**Exercice 2.5** [◆◆◆]

Résoudre l'équation

$$\ln |x| + \ln |x + 1| = 0$$

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ .

$$\begin{aligned} \ln |x| + \ln |x + 1| &= 0 \\ \iff \ln (|x(x + 1)|) &= 0 \\ \iff |x(x + 1)| &= 1 \end{aligned}$$

Supposons  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$ .

On a :

$$\begin{aligned} |x(x + 1)| &= 1 \\ \iff x(x + 1) &= 1 \\ \iff x^2 + x - 1 &= 0 \\ \iff x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Supposons  $x \in ]-1, 0[$ .

$$\begin{aligned} |x(x + 1)| &= 1 \\ \iff -x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions dans  $] -1, 0[$ .L'ensemble des solutions de l'équation est :  $\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ **Exercice 2.6** [◆◆◆]

Résoudre l'équation

$$|x - 2| = 6 - 2x$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .Considérons  $x \geq 2$ 

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 6 - 2x \\ \iff x - 2 &= 6 - 2x \\ \iff x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Considérons  $x \leq 2$ 

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 6 - 2x \\ \iff 2 - x &= 6 - 2x \\ \iff x &= 4 \end{aligned}$$

Seul la solution  $x = \frac{8}{3}$  convient. Ainsi, l'unique solution à l'équation est  $\frac{8}{3}$ .

**Exercice 2.7 [◆◆◆]**

Démontrer l'égalité  $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout réel  $x$ .

Soient  $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ .

Notons  $r$  la partie fractionnaire de  $x$ , ainsi  $x = \lfloor x \rfloor + r$ .

On a alors  $nx = n\lfloor x \rfloor + nr$  et  $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nr \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nr \rfloor$ .

Conséquemment,  $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n}$ .

Or,  $0 \leq \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < 1$  car  $0 \leq r < 1$ , donc  $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$ .

Ainsi,  $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$ .

Par conséquent,  $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ .

□

**Exercice 2.8 [◆◆◇] mal de crane tier**

1. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

On a :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \iff & 2\sqrt{x(x+1)} - 2x < 1 \\ \iff & (2\sqrt{x(x+1)})^2 < (1+2x)^2 \\ \iff & 4x(x+1) < 4x^2 + 4x + 1 \\ \iff & 4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x < 1 \\ \iff & 0 < 1 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ \iff & 1 < 2\sqrt{(x+1)^2} - 2\sqrt{x(x+1)} \\ \iff & 1 < 2|x+1| - 2\sqrt{x(x+1)} \\ \iff & (2x+1)^2 > (2\sqrt{x(x+1)})^2 \\ \iff & 4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x \\ \iff & 1 > 0 \end{aligned}$$

□

2. Soit  $p$  un entier supérieur à 2. Que vaut la partie entière de

$$\sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$

On a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc, en remplaçant  $x$  par  $x-1$  :

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1} < \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Ainsi,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

MAIS ALORS :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p^2-1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &< \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{p^2-1} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{p^2} - \sqrt{1} &< \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{p^2-1} - \sqrt{0} \\ \Leftrightarrow 2p - 2 &< \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{p^2-1} \\ \Leftrightarrow 2p - 2 &< \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < [2\sqrt{p^2-1}] \end{aligned}$$

Or  $2p - 2 < 2\sqrt{p^2-1} < 2p$  donc  $[2\sqrt{p^2-1}] = 2p - 2$

On en conclut :

$$\left[ \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \right] = 2p - 2$$

**Exercice 2.9 [◆◆◆]**

Prouver que  $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$  est un nombre irrationnel.

Supposons que  $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$ . Alors il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  premiers entre eux tels que :

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$$

Alors :

$$\begin{aligned} p \ln 3 &= q \ln 2 \\ \iff \ln(3^p) &= \ln(2^q) \\ \iff e^{\ln(3^p)} &= e^{\ln 2^q} \\ \iff 3^p &= 2^q \end{aligned}$$

Or  $3^p$  est toujours impair et  $2^q$  est toujours pair, donc cela est absurde.

Ainsi,  $\frac{\ln 2}{\ln 3}$  est irrationnel. □

**Exercice 2.10 [◆◆◆]**

Soient  $x$  et  $y$  deux rationnels positifs tels que

$\sqrt{x}$  et  $\sqrt{y}$  soient irrationnels.

Montrer que  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  est irrationnel. Supposons  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ .

On a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= x - y \\ \iff \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \end{aligned}$$

Or  $x - y \in \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$  par hypothèse. Donc  $\sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ .

D'autre part,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{x}$$

$\sqrt{x}$  est donc la somme de deux rationnels, et est donc rationnel.

C'est absurde. On en conclut que  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  est irrationnel. □



**Exercice 2.11** [◆◆◇]

Soit l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Cette partie de  $\mathbb{R}$  est-elle bornée ? Possède-t-elle un maximum ? Un minimum ?

Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = \frac{n^2 - 1}{n} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \\ &= \frac{n^3 - n}{n^3 + n} = \frac{n^3 + n}{n^3 + n} - \frac{2n}{n^3 + n} \\ &= 1 - \frac{2}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Étudions le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{2}{(n+1)^2 + 1} - 1 + \frac{2}{n^2 + 1} \\ &= \frac{2}{n^2 + 1} - \frac{2}{n^2 + 2n + 2} \\ &= \frac{4n + 2}{(n^2)(n^2 + 2n + 2)} \end{aligned}$$

C'est toujours positif : on en déduit que,  $(u_n)$  est croissante sur  $\mathbb{N}^*$ .

Elle admet donc un minimum en 1, qui est 0.

Elle admet aussi un majorant lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Ainsi,  $A$  admet 0 comme minimum, n'a pas de maximum et est majorée par 1.

**Exercice 2.12** [◆◆◆]

1. Montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad : \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}.$$

Étudier le cas d'égalité.

2. En déduire que l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \mid (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ et } a+b+c \geq 2 \right\}$$

admet un minimum et le calculer.

1. Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} &\geq 0 \\ \iff \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)} &\geq 0 \\ \iff (a-b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} &= \frac{3a-b}{4} \\ \iff (a-b)^2 &= 0 \\ \iff a &= b \end{aligned}$$

2. Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^{*3}$  tels que  $a+b+c \geq 2$ .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} &\geq \frac{3a-b}{4} + \frac{3b-c}{4} + \frac{3c-a}{4} \\ &\geq \frac{2a+2b+2c}{4} \\ &\geq \frac{a+b+c}{2} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Or, lorsque  $a = b = c = \frac{2}{3}$ , on a  $a+b+c \geq 2$  et:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = 3 \frac{a}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ainsi,  $1 \in E$  et  $\forall x \in E, x \geq 1$  donc 1 est minimum de  $E$ .

FIN DU TD 2 VU QU'ON A PAS FAIT LES BORNES INF ET SUP