Colles, semaine 9 (27/11→1/12)

Suites : la pratique
Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Cette semaine, des **exercices sur les suites réelles**.
La question de cours pourra, elle, porter sur la notion de borne supérieure. La caractérisation epsilonesque de la borne supérieure prépare le travail de la semaine prochaine.

Les théorèmes "du lycée" ont été rappelés, et illustrés par de (très) nombreux exemples, mais pas encore démontrés ! Les preuves de ces théorèmes seront écrites la semaine prochaine dans le cours *Suites réelles : la théorie*. On évitera donc pour le moment la notion de suite extraite.

Les deux outils principaux pour prouver la convergence d'une suite sont

1. l'<u>encadrement</u> (avec notamment le théorème dit des gendarmes).
2. la <u>monotonie</u> (avec notamment le théorème de la limite monotone, ou encore le théorème de convergence des suites adjacentes).

Questions de cours.

- Déterminer le terme général de n'importe quelle suite arithmético-géométrique.
- Déterminer le terme général de n'importe quelle suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- (*) Caractérisation epsilonesque de la borne supérieure
  (le colleur peut demander une seule implication).
- Soit $B = \left\{r \in \mathbb{Q} \mid r < \sqrt{2}\right\}$. Le nombre $\sup(B)$ existe et vaut $\sqrt{2}$.
- Soit $C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \mid \ n, p \in \mathbb{N}^*\right\}$. Le nombre $\sup(C)$ existe et vaut 1.
- Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
  Montrer que $\sup(A) \leq \sup(B)$.
- (*) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, $\lambda > 0$ et $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$.
  Preuve de l'égalité $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Savoir-faire importants.

- Savoir encadrer, minorer, majorer.
  Quoi ? Une somme, une intégrale, un produit, un quotient...
- Techniques élémentaires de calculs de limites : limites usuelles, factorisation du terme prépondérant.
- Savoir prouver qu'une suite est monotone.
- Connaître les techniques d'étude d'une suite définie par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

À venir en semaine 10 : Suites (et fin).