Problème : Similitude entre une matrice et son inverse.

posé au concours blanc 2022

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (u écrit n fois). On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$.

On note $M_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $M_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

Partie A

1. Une question de cours.
   On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.
   (a) Redémontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $M_3(\mathbb{R})$.
   (b) Redémontrer que deux matrices semblables ont même trace.

2. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.

   On considère l'application w de $\mathrm{Ker}(u^{i+j})$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$. Ainsi,

$$w : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(u^{i+j}) & \to & E \\ x & \mapsto & u^j(x) \end{array} \right. .$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(u^i)$.
   (b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+j})) \leq \dim \mathrm{Ker}(u^i) + \dim \mathrm{Ker}(u^j)$.

3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 2$.
   (a) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$.
   (On pourra utiliser deux fois la question 2 (b)).
   (b) Justifier l'existence d'un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$.
   En déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
   (c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 1$.
   (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
   (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\mathrm{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
   (c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de } M_3(\mathbb{R}).$$

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et se donne une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = T = I_3 + N.$$

5. Justifier que A est inversible.
6. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
7. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

8. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

   (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, en utilisant la question A-3, en déduire, une matrice semblable à la matrice M.

   (b) Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.

   (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

   (d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

9. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
   Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10. **Exemple** : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

    On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

    (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

    (b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.

    (c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

11. Réciproquement, toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?