Fonctions usuelles
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 4.1 [⧫◊◊]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x-2 \in \mathbb{R} \\ f(x-2) = f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+3 \in \mathbb{R} \\ f(x+3) = f(x) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x-2+3 \in \mathbb{R} \\ f(x-2+3) = f(x-2) = f(x) \end{cases}$$

□

Exercice 4.2 [⧫⧫⧫]

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(f(x)) = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et f une solution du problème.
On remarque que $f : x \mapsto x$ est solution du problème.
Supposons $f(x) > x$, on a : $f(f(x)) > f(x)$ par croissance de f. Or $f(f(x)) = x$ donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.
Supposons $f(x) < x$, on a : $f(f(x)) < f(x)$ par croissance de f. Or $f(f(x)) = x$ donc $x < f(x)$, ce qui est absurde.
Ainsi, la seule fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ solution est $f : x \mapsto x$. □

Exercice 4.3 [⧫◊◊] S'entraîner tout seul à dériver.

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée.

$$A : x \mapsto x^{\pi}, \quad B : x \mapsto \pi^{x}, \quad C : x \mapsto \cos(5x), \quad D : x \mapsto \operatorname{th}(\operatorname{ch}(x)),$$
$$E : x \mapsto \ln\left(1+x^3\right) n \quad F : x \mapsto \cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right), \quad G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}, \quad H : x \mapsto \sin|x+1|.$$

- $A' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi x^{\pi-1} \end{cases}$
- $B' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\pi)\pi^{x} \end{cases}$
- $C' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -5\sin(5x) \end{cases}$
- $D' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{ch}(x))} \end{cases}$
- $E' : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x^2}{1+x^3} \end{cases}$
- $F' : \begin{cases}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}} \end{cases}$
- $G' : x \mapsto -\frac{3}{2}(3x-1)^{3/2}$
- $H'_- : \begin{cases}]-\infty,-1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\cos(-x-1) \end{cases}$
- $H'_+ : \begin{cases}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x+1) \end{cases}$

□

Exercice 4.4 [♦◊◊]

Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x\ln(x)}$$
$$(f : x \mapsto e^{x\ln^2(x)})$$

On a :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x)(\ln(x)+2)e^{x\ln^2(x)} \end{cases}$$

Son tableau de variations est donc :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	e^{4/e^2}	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

□

Exercice 4.5 [♦♦◊]

1. Démontrer que
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
2. À l'aide du théorème des gendarmes, calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
3. Retrouver ce résultat en faisant apparaître un taux d'accroissement.

1. Posons :

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \qquad\qquad g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

Elles sont dérivables et tout et tout :

$$f' : x \mapsto -\frac{x}{(1+x)^2} \qquad\qquad g' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

L'inégalité est donc vérifiée car ces fonctions prennent des valeurs négatives.

2. Soit $x \in]-1,+\infty[$. On a :

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Et :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

3. On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

□

Exercice 4.6 [♦♦♢]

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

Posons :

$$f : x \mapsto x - \sin x \qquad\qquad g : x \mapsto x - \sin x - \frac{x^3}{6}$$

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$:

$$f' : x \mapsto 1 - \cos x \qquad\qquad g' : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$$

La première inégalité est triviale car $\cos x \leq 1$, ainsi $x - \sin x \geq 0$.
On a :

$$g'' : x \mapsto \sin x - x$$

Et donc :

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$-$	
$g'(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$
g	0	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, g prend des valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+$, donc : $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.

□

Exercice 4.7 [♦♦◊]

Faire une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

⊚ Soit $x \in]-1,1[$.
On a :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

⊚ Soit $x \in]-\infty,-1[ ]1,+\infty[$.
On a :

$$f : x \mapsto \ln\left(-\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Pour les limites :

$$f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right|\right)$$

□

Exercice 4.8 [♦♦◊]

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in]0,1[\qquad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in]0,1[$.
On a :

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x\ln x}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)}$$

Posons :

$$f : x \mapsto e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)} \qquad f' : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)}$$

x	0		0.5		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	‖ 1	→	$\frac{1}{2}$	→	1 ‖

□

Exercice 4.9 [♦♦♢]

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.
2. Prouver que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. On a :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$$

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow 1$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

On applique f, fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui ne change pas les inégalités:

$$\begin{aligned} \frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \end{aligned}$$

□

Exercice 4.10 [♦♦♢]

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.
1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Étudier ses variations et donner le tableau correspondant.

1. Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x \end{cases}$ On a : $g' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{cases}$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
g	$+\infty \searrow 0$

f donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} -f(x) &= -\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x^2+1-x^2}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \\ &= f(-x) \end{aligned}$$

3. On a :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

□

Exercice 4.11 [♦♦♢]

Notons a le nombre

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

1. Montrer que $a^3 = 6a+40$.
2. En déduire la valeur de a.

1.

$$\begin{aligned} a^3 &= 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2(20-14\sqrt{2})} + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})^2} \\ &= 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(400-392)} + 3\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})(400-392)} \\ &= 40 + 6\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + 6\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\ &= 6a+40 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} & a^3 - 6a - 40 = 0 \\ \iff & (a-4)(a^2+4a+10) = 0 \\ \iff & a = 4 \end{aligned}$$

□

Exercice 4.12 [♦◊◊]

Considérons la fonction

$$f : \begin{cases}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \end{cases} .$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de f. Peut-on écrire en conclusion que $f^{-1} = f$?

Soit $x \in]1, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \iff & y = \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \\ \iff & \ln(y) = -\frac{1}{\ln(x)} \\ \iff & -\frac{1}{\ln(y)} = \ln(x) \\ \iff & x = \exp(-\frac{1}{\ln(y)}) \end{aligned}$$

L'équation a une unique solution, f réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+^*$.
2. On a :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to]1, +\infty[\\ x \mapsto \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \end{cases}$$

$f \neq f^{-1}$ car leurs domaines de définition sont différents.

□

Exercice 4.13 [♦♦♦]

1. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque, qu'on notera argth.
2. De deux façons différentes, montrer que argth est dérivable sur son intervalle de définition et calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argth}\left(\frac{1+3\operatorname{th} x}{3+\operatorname{th} x}\right) = x + \ln\sqrt{2}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}
&y = \operatorname{th} x \\
\iff &y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
\iff &y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\
\iff &e^{2x}(1-y) = y+1 \\
\iff &e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \\
\iff &x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

L'équation a une unique solution, th réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

Sa réciproque est argth : $\begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \end{cases}$

2. On peut montrer que argth est dérivable sur $]-1,1[$ par le théorème de dérivée des réciproques ou en dérivant $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ comme composée de fonctions dérivables.
On retrouve dans les deux cas:

$$\operatorname{argth}' : \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \end{cases}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{argth}\left(\frac{1+3\operatorname{th} x}{3+\operatorname{th} x}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1+3\operatorname{th} x}{3+\operatorname{th} x}+1}{1-\frac{1+3\operatorname{th} x}{3+\operatorname{th} x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{4+4\operatorname{th} x}{3+\operatorname{th} x}}{\frac{2-2\operatorname{th} x}{3+\operatorname{th} x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+2\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)}\right) + \frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}\right) + \ln(\sqrt{2}) \\
&= x + \ln\sqrt{2}
\end{aligned}$$

□