Fonctions usuelles
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 4.1 [♦◊◊]

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction 2-périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.
On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\begin{cases}x-2\in\mathbb{R}\\ f(x-2)=f(x)\end{cases}\quad \text{et}\quad\begin{cases}x+3\in\mathbb{R}\\ f(x+3)=f(x)\end{cases}$$

Alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}\begin{cases}x-2+3\in\mathbb{R}\\ f(x-2+3)=f(x-2)=f(x)\end{cases}$$

□

Exercice 4.2 [♦♦♦]

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(f(x))=x.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et f une solution du problème.
On remarque que $f:x\mapsto x$ est solution du problème.
Supposons $f(x)>x$, on a : $f(f(x))>f(x)$ par croissance de f. Or $f(f(x))=x$ donc $x>f(x)$, ce qui est absurde.
Supposons $f(x)<x$, on a : $f(f(x))<f(x)$ par croissance de f. Or $f(f(x))=x$ donc $x<f(x)$, ce qui est absurde.
Ainsi, la seule fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ solution est $f:x\mapsto x$.

Exercice 4.3 [♦◊◊] S'entraîner tout seul à dériver.

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée.

$$A:x\mapsto x^\pi,\quad B:x\mapsto \pi^x,\quad C:x\mapsto\cos(5x),\quad D:x\mapsto \operatorname{th}(\operatorname{ch}(x)),$$
$$E:x\mapsto \ln\left(1+x^3\right)n\quad F:x\mapsto\cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right),\quad G:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{3x-1}},\quad H:x\mapsto\sin|x+1|.$$

$G':x\mapsto-\frac{3}{2}(3x-1)^{3/2}$

- $A':\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \pi x^{\pi-1}\end{cases}$
- $D':\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{ch}(x))}\end{cases}$
- $H'_-:\begin{cases}]-\infty,-1[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -\cos(-x-1)\end{cases}$
- $B':\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \ln(\pi)\pi^x\end{cases}$
- $E':\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \frac{3x^2}{1+x^3}\end{cases}$
- $H'_+:\begin{cases}]1,+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \cos(x+1)\end{cases}$
- $C':\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -5\sin(5x)\end{cases}$
- $F':\begin{cases}]1,+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}}\end{cases}$

Exercice 4.4 [♦◊◊]

Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x\ln(x)}.$$

On a :

$$f : x \mapsto e^{x\ln^2(x)}$$

Donc :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x)(\ln(x)+2)e^{x\ln^2(x)} \end{cases}$$

Son tableau de variations est donc :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	e^{4/e^2}	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 4.5 [♦♦◊]

1. Démontrer que
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
2. À l'aide du théorème des gendarmes, calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
3. Retrouver ce résultat en faisant apparaître un taux d'accroissement.

1. Posons :

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \qquad\qquad g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

Elles sont dérivables et tout et tout :

$$f' : x \mapsto -\frac{x}{(1+x)^2} \qquad\qquad g' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

L'inégalité est donc vérifiée car ces fonctions prennent des valeurs négatives.

2. Soit $x \in]-1,+\infty[$. On a :
$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$
Et :
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} 1 = 1$$
Donc, d'après le théorème des gendarmes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
3. On a :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

□

Exercice 4.6 [♦♦♢]

Démontrer l'inégalité
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$
Posons :
$$f : x \mapsto x - \sin x \qquad\qquad g : x \mapsto x - \sin x - \frac{x^3}{6}$$
Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$:
$$f' : x \mapsto 1 - \cos x \qquad\qquad g' : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$$
La première inégalité est triviale car $\cos x \leq 1$, ainsi $x - \sin x \geq 0$.
On a :
$$g'' : x \mapsto \sin x - x$$
Et donc :

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$-$	
$g'(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$
g	0	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, g prend des valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+$, donc : $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.

□

Exercice 4.7 [♦♦◊]

Faire une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

◎ Soit $x \in]-1,1[$.
On a :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

◎ Soit $x \in]-\infty,-1[]1,+\infty[$.
On a :

$$f : x \mapsto \ln\left(-\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}.$$

Ainsi,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Pour les limites :

$$f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right|\right)$$

Exercice 4.8 [♦♦◊]

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in]0,1[\qquad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in]0,1[$.
On a :

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x\ln x}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)}$$

Posons :

$$f : x \mapsto e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)} \qquad f' : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)}$$

x	0		0.5		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	‖ 1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1 ‖

□

Exercice 4.9 [♦♦♢]

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.
2. Prouver que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. On a :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow 1$