Chapitre 1

Sommes et produits.

Sommaire.

1 Sommes et produits d'une famille finie de nombres. 1

2 Règles de calculs. 2

3 Téléscopage. 2

4 Sommes et produits de référence. 3

5 Changements d'indice. 5

6 Coefficients binomiaux et formule du binôme. 5

7 Sommes doubles. 6

8 Exercices. 7

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Sommes et produits d'une famille finie de nombres.

Notation

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble **fini non vide** I.

On note $\sum_{i\in I} a_i$ (resp. $\prod_{i\in I} a_i$) la somme (resp. le produit) des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Exemple. Notons $I = \{\Diamond, \heartsuit, \Delta\}$, puis posons $a_\Diamond := 2,\ a_\heartsuit := e$ et $a_\Delta := \pi$.
Alors $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de trois nombres complexes.

$$\sum_{i\in I} a_i = a_\Diamond + a_\heartsuit + a_\Delta = 2 + e + \pi \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} a_i = a_\Diamond \times a_\heartsuit \times a_\Delta = 2e\pi.$$

Notation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $I = [\![1, n]\!] = \{1, 2, ..., n\}$, on peut aussi noter

$$a_1 + ... + a_n = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} a_i = \sum_{1\leq i\leq n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Plus généralement, si $m, n \in \mathbb{Z},\ m \leq n$ et $I = [\![m, n]\!] = \{m, m+1, ..., n\}$ on peut noter

$$a_m + ... + a_n = \sum_{i\in[\![m,n]\!]} a_i = \sum_{m\leq i\leq n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i.$$

Remarque. La lettre i est une variable *muette*, elle a seulement un sens localement, dans l'écriture de la somme ou du produit :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Notation

Si I est l'ensemble vide, on convient qu'une expression du type $\sum_{i\in I} a_i$ vaut 0 et que $\prod_{i\in I} a_i$ vaut 1.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Détailler les sommes suivantes, éventuellement avec des points de suspension.

$$\sum_{k=2}^{5} k,\quad \sum_{k=0}^{0} 2^k,\quad \sum_{k=0}^{n} k^2,\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2,\quad \sum_{k=1}^{0} k,\quad \sum_{k=0}^{n} 1.$$

Proposition 3

Soient deux entiers m et n tels que $m \leq n$ et $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ des nombres.
L'ensemble $[\![m, n]\!]$ contient $n - m + 1$ entiers, de sorte que

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \text{ est une somme de } n-m+1 \textbf{ termes},$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i \text{ est un produit de } n-m+1 \textbf{ facteurs}.$$

Preuve :

On a $[\![m, n]\!] = [\![1, n]\!] \setminus [\![1, m-1]\!]$ donc $|[\![m, n]\!]| = |[\![1, n]\!] - |[\![1, m-1]\!]| = n - m + 1$.
On a $[\![m, n]\!] = \{m + 0, m + 1, ..., m + (n - m)\}$ donc $|[\![m, n]\!]| = n - m + 1$.

Exemple 4: Termes ou facteurs égaux.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Que valent $\sum\limits_{k=0}^{n} a$ et $\prod\limits_{k=0}^{n} a$?

Solution :

On a $\sum\limits_{k=0}^{n} a = (n+1)a$ et $\prod\limits_{k=0}^{n} a = a^{n+1}$.

2 Règles de calculs.

Proposition 5: Linéarité de la somme.

Soient deux familles de nombres $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble fini et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i \in I}(a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i.$$

Corrolaire 6: La somme de la combinaison linéaire, c'est la combinaison linéaire des sommes.

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ et $\lambda, \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i \in I}(\lambda a_i + \lfloor_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \sum\nolimits_{i \in I} b_i.$$

Proposition 7: Produits de produits.

Soient deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{i \in I}(a_i \cdot b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i\right)\left(\prod_{i \in I} b_i\right), \quad \text{En particulier, } \prod_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Si de surcroît tous les b_i sont non nuls

$$\prod_{i \in I} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i \in I} a_i}{\prod_{i \in I} b_i}.$$

Proposition 8: Relation de Chasles.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et m un entier tel que $1 \leq m \leq n$. Soit $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^{n} a_i\right).$$

Proposition 9: Exponentielle d'une somme, logarithme d'un produit.

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles finies de nombre réels, les b_i étant tous strictement positifs.

$$\exp\left(\sum_{i \in I} a_i\right) = \prod_{i \in I} \exp(a_i) \quad \text{et} \quad \ln\left(\prod_{i \in I} b_i\right) = \sum_{i \in I} \ln(b_i).$$

3 Téléscopage.

Théorème 10: Sommes télescopiques.

Soient $a_m, a_{m+1}, ..., a_n, a_{n+1}$ des nombres complexes. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

Proposition 11: Produits télescopiques.

Soient $a_m, a_{m+1}, ..., a_n, a_{n+1}$ des nombres complexes non nuls. Alors,

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Exemple 12

Soit n un entier supérieur à 2. Simplifier

$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)^6 - k^6), \quad \sum_{k=1}^{n+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \quad \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^6 - k^6) = (n+1)^6$.

$\boxed{2.}$ On a $\sum_{k=1}^{n+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+2} - 1$.

$\boxed{3.}$ On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

$\boxed{4.}$ On a $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$.

4 Sommes et produits de référence.

Proposition 13: $\sum_{k=1}^{n} k^p$ avec $p \in \{1, 2, 3\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Preuve :

Pour la première somme, on a

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

On peut montrer la deuxième par récurrence, ou en calculant $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$.

Proposition 14: Progression géométrique. ★

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Preuve :

Le cas $q = 1$ est trivial.
Dans le cas $q \neq 1$, on a:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple 15: de sommes de progressions géométriques.

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \leq n)$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{n} 2^k$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$, $\sum_{k=m}^{n} x^k$.

Solution :

On a:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k - 1 = \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} - 1 = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1).$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = \frac{1 + (-1)^n (x^2)^{n+1}}{1 + x^2}.$$

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{m-1} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1 - x^m}{1-x} = \frac{x^m - x^{n+1}}{x-1} = x^m \frac{1 - x^{n-m+1}}{1-x}.$$

Proposition 16: Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$. ★

Soient a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Preuve :

On a par téléscopage:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\right) = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n.$$

Exemple 17

Factoriser : $\quad a^2 - b^2, \quad a^3 - b^3, \quad a^4 - b^4, \quad a^3 + b^3.$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}
&a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).\\
&a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).\\
&a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).\\
&a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).
\end{aligned}$$

Définition 18

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** de n et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... (n-1) \cdot n \quad \text{si } n \geq 1,$$

et on pose que $0! = 1$. Par exemple, $2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120.$

Remarque. Vu en Terminale: $n!$ est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. C'est aussi le nombre de façons différentes de numéroter n objets. Sera revu dans le cours de dénombrement.

Proposition 19: Une relation simple et utile.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \prod_{k=1}^{n} k \cdot (n+1) = (n+1) \cdot n!$

Exemple 20: Produit des entiers pairs, des entiers impairs. ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n! \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!.\\
&\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{2n} k}{\prod_{k=0}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}
\end{aligned}$$

5 Changements d'indice.

Exemple 21: ★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} k^2 + \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2.$$

Solution :

On a:

$$\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k}) = \sum_{j=2}^{n+2}\sqrt{j} - \sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} = \sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-1.$$

$$\sum_{k=1}^{2n} k^2 + \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2n}(1+(-1)^k)k^2 = \sum_{k=1}^{n} 2(2k)^2 = 8\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{4}{3}n(n+1)(2n+1).$$

Proposition 22

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini I et σ une bijection de I vers I. Alors

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

6 Coefficients binomiaux et formule du binôme.

Définition 23

Pour deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on appelle **coefficient binomial** «p parmi n» le nombre

$$\binom{n}{p} := \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0,n]\!]. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 24

Soient n et p deux entiers naturels.

Le nombre $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$, on a $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.

Exemple 25

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 26: ★

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*\ p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}, \quad \forall p \in \mathbb{N}\ \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Appelées formule de symétrie, formule du pion et formule de Pascal, dans l'ordre.

Preuve :

On ne fait que les cas où $p \leq n$.

$\boxed{1.}$ Soit $p \in [\![0,n]\!]$.

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n(n-p)!)} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

$\boxed{2.}$ Soit $p \in [\![0,n]\!]$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{p \times (p-1)!(n-p)!} = \frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

$\boxed{3.★}$ Soit $p \in [\![0,n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \times \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{n-p}\right) \\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \times \left(\frac{n+1}{(p+1)(n-p)}\right) \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Exemple 27

Démontrer que les coefficients binomiaux sont des entiers.

Solution :

Montrons le par récurrence sur n.
Initialisation. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a $\binom{0}{p} = 0$ si $p \neq 0$ et $\binom{0}{p} = 1$ sinon.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N},\ \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.
On a $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \in \mathbb{N}$ par somme d'entiers. **Conclusion.** Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Théorème 28: Formule du binôme de Newton. ★

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve :

Montrons le par récurrence sur n.
Initialisation. On a $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exemple 29

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b^5) &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

Exemple 30: Calculs classiques.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Solution :

On a:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = (1-1)^n = 0^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}.$$

7 Sommes doubles.

Théorème 31: Sommes doubles: deux écritures.

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$, $I = [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ et $(a_{i,j})_{i,j \in I}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i,j \in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Proposition 32: Produit de deux sommes.

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$ et deux familles de nombres compelxes $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^p b_j\right)=\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_i\cdot b_j.$$

En particulier,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2=\sum_{i=1}^n a_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j.$$

Proposition 33: Sommes triangulaires : deux écritures.

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$, et $I=\{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]: i\leq j\}$.
Soit $(a_{i,j})_{i,j\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I. Leur somme peut s'écrire:

$$\sum_{i,j\in I} a_{i,j}=\sum_{j=1}^p\sum_{i=1}^j a_{i,j}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=i}^p a_{i,j}.$$

Méthode

Dans les doubles sommes, on peut ajouter des parenthèses superflues:

$$\sum_{i,j\in I} a_{i,j}=\sum_{k=1}^p\left(\sum_{i=1}^j a_{i,j}\right).$$

À l'intérieur des parenthèses, on calcule à j fixé, c'est-à-dire que l'on traite j comme une constante.

Exemple 34: ★

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j+1}$

Solution :

On a:

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{i}{j+1}=\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^j i=\sum_{j=2}^{n+1}\frac{j+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n j=\frac{n(n+1)}{4}.$$

8 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

Démontrer :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^n(-1)^k k=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Solution :

Initialisation. Pour $n=1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n(-1)^k k=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}=-1$$

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie. On a:

$$\sum_{k=1}^n(-1)^k k=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

Donc:

$$\sum_{k=1}^n(-1)^k k+(-1)^{n+1}(n+1)=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}+(-1)^{n+1}(n+1)$$

Donc:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k&=\frac{(-1)^n(2n+1)-1+4(-1)^{n+1}(n+1)}{4}\\&=\frac{(-1)^n(-2n-3)-1}{4}\\&=\frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4}\\&=\frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)-1}{4}\end{aligned}$$

Conclusion. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2: ⧫◊◊

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1), \quad \sum_{k=n}^{2n} e^{-k}, \quad \sum_{k=0}^{2n} |k-n|.$$

Solution :

On a:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{k=n}^{2n} e^{-k} = \sum_{k=0}^{n} e^{-k-n} = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{e})^k = e^{-n} \cdot \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} = \frac{e^{-n}-e^{-2n-1}}{1-e^{-1}}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} |k-n| = \sum_{k=0}^{n} (-k+n) + \sum_{k=0}^{n} (k+n-n) = -\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Exercice 3: ⧫⧫◊

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=-n}^{n} (k+2), \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

Solution :

On a:

$$\sum_{k=-n}^{n} (k+2) = \sum_{k=0}^{2n} (k-n+2) = 2(2n+1) = 4n+2$$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k} 4k^2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k-1} (4k^2-4k+1) = n(2n+1)$$

Exercice 4: ⧫⧫◊

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}), \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!.$$

Solution :

On a:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=0}^{n} (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$$

Exercice 5: ⧫⧫◊

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}), \quad \sum_{k=1}^{n} (u_{2k+1} - u_{2k-1}).$$

Solution :

On a:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2(k+1)} - u_{2(k)}) = u_{2n} - u_0$$

Et :

$$\sum_{k=1}^{n} (u_{2k+1} - u_{2k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+1})$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+2}) + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k} - u_{2k+1})$$

$$= u_{2n+1} - u_{2n} - u_{2n-1} + u_0$$

$$\text{Alors : } \sum_{k=1}^{n} (u_{2k+1} - u_{2k-1}) = u_{2n+1} - u_{2n-1}$$

Exercice 6: ♦♦◊

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} kq^{k-1}$.

Que vaut-elle si $q = 1$? Désormais, on supposera $q \neq 1$.

Soit la fonction $f_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. En la voyant comme la dérivée d'une autre que l'on calculera, calculer S_n.

Solution :

Pour $q = 1$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On remarque que $\sum\limits_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ est la dérivée de $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ à une constante près.

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}$$

Et sa dérivée est :

$$\frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

On en déduit que

$$S_n = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$$

Exercice 7: ♦♦◊

0.999... = 1. Expliquer.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$0,999... = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 9\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9 - \frac{9}{10^n}}{9}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{9 - \frac{9}{10^n}}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Exercice 8: ♦♦◊

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : x \mapsto x^n$. On se donne un entier naturel p et un réel x.

Exprimer le nombre $f_n^{(p)}(x)$ à l'aide de factorielles.

Solution :

On a:

- Lorsque $p \leq n$: $\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$
- Lorsque $p > n$: 0

Exercice 9: ♦♦◇

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide d'un téléscopage, démontrer l'identité :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Grâce au cas $p = 1$, retrouver l'expression connue de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.

3. Grâce au cas $p = 2$, retrouver l'expression connue de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

$\boxed{2.}$ On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{3.}$ On a :

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k!}{2(k-2)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k$$

Et :

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{6(n-2)!} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

On en déduit donc que *(on isole* $\sum\limits_{k=2}^{n} k^2$ *du premier résultat.)*:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k^2 &= 2\left(\frac{n(n+1)(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2n(n+1)(n-1) + 3n(n+1) - 6}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6}{6}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=2}^{n} k^2 + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 10: ♦♦◇

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{ch}(kx)$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e^x} \right)^k \right) \\ &= \frac{1 - e^{(n+1)x}}{2 - 2e^x} + \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{2 - 2e^{-x}}\end{aligned}$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{ch}(kx) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{-x})^k \\ &\overset{Newton}{=} \frac{1}{2} \left((1+e^x)^n + (1+e^{-x})^n \right)\end{aligned}$$

Exercice 11: ♦♦◊

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i}$$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i} &= \sum_{j=0}^{n} 2^{-j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} 2^{-j} \cdot 2^{j} \\ &= n+1\end{aligned}$$

Exercice 12: ♦♦◊

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|$$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j| &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |i-j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} |i-j| + \sum_{i=j+1}^{n} |i-j| \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j+1}^{n} (i-j) - \sum_{i=1}^{j} (i-j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-j} i - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i + \sum_{j=1}^{n} j^2\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-j} i = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

Et :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Donc :

$$S_n = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Exercice 13: ♦♦◊

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k}$$

Solution :

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

Exercice 14: ♦♦♦

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ cette proposition. Montrons $\mathcal{P}_n$ pour tout n.
Initialisation. Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} \frac{(-1)^0}{k} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 15: ♦♦♦

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k = \sum\limits_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\sum\limits_{k=1}^{n} H_k$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} kH_k$ en fonction de n et H_n.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sum_{k=p}^{n} 1 = \sum_{p=1}^{n} \frac{n-p+1}{p} \\
= n\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{p-1}{p} = nH_n + H_n - n \\
= (n+1)H_n - n
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kH_k &= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{k}{p} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n} \frac{k}{p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sum_{k=p}^{n} k \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{(n-p+1)(p+n)}{2p} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{n^2 - p^2 + p + n}{p} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{n^2+n}{p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{p(1-p)}{p} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(n(n+1)H_n + n\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)H_n + n}{2} - \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{2n(n+1)H_n + 2n - n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(2(n+1)H_n - n + 1)}{4}
\end{aligned}$$