Corrigé du DM 17

Travail supplémentaire demandé. Copie annotée à rendre le vendredi 22 mars.

Je vous demande de réaliser un travail de relecture critique de votre copie. Il s'agit de lire le corrigé, en parallèle de la relecture de votre copie et d'annoter cette dernière. Il s'agit surtout de retravailler sur ce qui a été fait, pas de compléter votre travail en ajoutant des questions que vous n'avez pas su traiter. Pour ce qui concerne ces dernières, vous pouvez décrire en quelques mots ce qui vous a manqué.

Important : pour écrire vos annotations, vous utiliserez une couleur différente de celle(s) utilisée(s) pour la rédaction de la copie.

Voici une liste de points délicats où il est possible que vous ayez commis une erreur sur votre copie. Bien sûr la liste n'est pas exhaustive !

1. I-2 : ai-je vraiment prouvé que $E_0^{(0)}$ est un plan vectoriel ? C'est-à-dire qu'il est engendré par une famille libre de deux vecteurs ?
2. I-4 : ai-je pensé à vérifier que x et y sont bien des éléments de $E_a^{(0)}$ avant de prouver que cette famille est libre ?
3. I-6 : l'exemple typique d'une question où on se regarde derrière soi : ai-je fait sur ma copie une référence explicite aux questions 4 et 5 dont on doit combiner les résultats ici ?
4. II-1 : une preuve d'unicité. On est au mois de mars. Est-ce que je prends désormais ces points faciles à marquer en ayant la bonne rédaction ? Est-ce que j'ai vu qu'il y avait un argument de rigidité polynomiale ?
5. II-4 : ai-je vraiment prouvé que Kerθ est une droite vectorielle ? C'est-à-dire qu'il est engendré par un vecteur, non nul ?
6. II-7 : ai-je pensé à vérifier que les $x^{(k)}$ sont bien des éléments de $E_a^{(p)}$ avant de prouver que cette famille est libre ?

Pour terminer, je vous demande de noter la présentation de votre copie entre 0 et 4. Vous pouvez relire les consignes de présentation données au début de l'année, examiner la lisibilité globale.

Problème. Algèbre linéaire et suites récurrentes.

Partie I Cas où P est constant.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. S'il existe b, b' deux réels tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b = au_n + b'$$
alors en particulier $u_1 = au_0 + b = au_0 + b'$, et donc $\boxed{b = b'}$.

2. Par définition, $E_0^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = b\}$ est l'ensemble des suites réelles constantes à partir du rang 1.
Notons c la suite de premier terme nul puis constante égale à 1 et c' celle de premier terme égal à 1 puis constante égale à 0. On a : $\boxed{E_0^{(0)} = \text{Vect}(c, c')}$.
Vérifions que (c, c') est libre. Pour cela, on considère $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda c + \mu c' = 0$. On a donc
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda c_n + \mu c'_n = 0.$$
En particulier, le cas $n = 0$ amène $\lambda = 0$ et $n = 1$ amène $\mu = 0$.
Ceci prouve que (c, c') est libre, et achève donc de prouver que $E_0^{(0)}$ est un plan vectoriel.

3. Soit u et v dans $E_a^{(0)}$ et soit λ et μ deux réels. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned}(\lambda u + \mu v)_{n+1} &= \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}\\ &= \lambda(au_n + b_u) + \mu(av_n + b_v)\\ &= a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda b_u + \mu b_v)\end{aligned}$$
Donc $\lambda u + \mu v \in E_a^{(0)}$ avec $b_{\lambda u + \mu v} = \lambda b_u + \mu b_v$. $E_a^{(0)}$ est donc stable par combinaisons linéaires. Comme il contient la suite nulle z (avec $b_z = 0$) c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. — $x \in E_a^{(0)}$ avec $b_x = 1 - a$ car :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = 1 = ax_n + b_x = a.1 + (1 - a)$$
— $y \in E_a^{(0)}$ avec $b_y = 0$ car :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = a^{n+1} = ay_n + b_y = a.a^n + 0$$

— (x, y) est une famille libre. Pour le prouver considérons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha x + \beta y = 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha + \beta a^n = 0$$

Cette égalité étant vraie en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$.

Ceci conduit au système $\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta a = 0 \end{array}\right.$ de Cramer car $a \neq 1$, d'où $\alpha = \beta = 0$.

5. (a) Pour λ, μ deux réels, $u \in E_a^{(0)}$ on résout

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda + \mu a = u_1 \end{array}\right. \iff \begin{cases} \lambda(1-a) = -au_0 + u_1 \\ \mu(1-a) = u_0 - u_1 \end{cases}$$

soit encore $\begin{cases} \lambda(1-a) = b_u \\ \mu(1-a) = u_0(1-a) - b_u \end{cases}$.

Puisque $a \neq 1$, le système admet pour unique solution $(\lambda, \mu) = \left(\frac{b_u}{1-a}, u_0 - \frac{b_u}{1-a}\right)$

(b) Raisonnons par récurrence pour prouver $\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda x_n + \mu y_n$.
- $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après le résultat de I 5.a.
- Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} & = & \lambda(a x_n + b_x) + \mu a y_n = a(\lambda x_n + \mu y_n) + \lambda(1-a) \\ & = & a(\lambda x_n + \mu y_n) + b_u = a u_n + b_u = u_{n+1}. \end{array}$$

La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $u = \lambda x + \mu y$.

(c) On vient de prouver que toute suite de $E_a^{(0)}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de x et y : la famille (x, y) engendre $E_a^{(0)}$.

6. On a vu en I.4. que la famille (x, y) est libre. On en conclut que la famille (x, y) est une base de $E_a^{(0)}$, et que $\boxed{E_a^{(0)} \text{ est un espace vectoriel de dimension } 2}$.
Le résultat ci-dessous est cohérent avec le cas particulier examiné en I-2.

Partie II Cas où P est quelconque.

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_p[X]^2$ tels que : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = a u_n + P(n) = a u_n + Q(n)$. Montrons que $P = Q$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(n) = u_{n+1} - a u_n = Q(n)$$

Ainsi, $P - Q$ a une infinité de racines : l'ensemble des entiers naturels. C'est donc le polynôme nul, CQFD.

2. $\forall (u, v) \in (E_a^{(p)})^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)_{n+1} &= \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(a u_n + P_u(n)) + \mu(a v_n + P_v(n)) \\ &= a(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda P_u(n) + \mu P_v(n)) \\ &= a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda P_u + \mu P_v)(n) \end{aligned}$$

$\lambda P_u + \mu P_v \in \mathbb{R}_p[X]$, donc $\lambda u + \mu v \in E_a^{(p)}$ avec $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$.

$$\boxed{E_a^{(p)} \text{ est donc un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

3. On vient de voir que $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ ce qui s'écrit :

$$\theta(\lambda u + \mu v) = \lambda \theta(u) + \mu \theta(v)$$

θ est donc une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4. On a : $u \in \mathrm{Ker}\theta \iff \theta(u) = 0 \iff P_u = 0$.
Donc : $u \in \mathrm{Ker}(\theta) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a u_n$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\theta \text{ est donc l'ensemble des suites géométriques de raison } a.}$$

Remarquons que la suite (y) du I.4. est non nulle, appartient à engendre $\mathrm{Ker}\theta$ car toute suite géométrique u de raison a est telle que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda a^n$$

Donc $\mathrm{Ker}\theta = \mathrm{Vect}(y)$ avec y non nulle : c'est une droite vectorielle de $E_a^{(p)}$:

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\theta) = 1}$$

5. Considérons $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Il existe une suite $u \in E_a^{(p)}$ telle que $\theta(u) = P$ car *il suffit de la construire !* Posons $u_0 = 666$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = au_n + P(n)$. La suite u est bien définie et c'est clairement un antécédent de P par θ dans $\mathrm{Im}(P)$.
Ainsi, θ est surjective : on a $\mathrm{Im}\theta = \mathbb{R}_p[X]$ et

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}\theta = p + 1}$$

6. (a) Soit $u \in E_a^{(p)}$. Son image $\theta(u)$ se décompose sur la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$:

$$\exists(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p+1} \quad \theta(u) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k X^k.$$

Or, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $X^k = \theta\left(v^{(k)}\right)$, d'où $\theta(u) = \sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k \theta\left(v^{(k)}\right)$. Par linéarité,

$$\theta\left(u - \sum_{k=0}^{p} \lambda_k v^{(k)}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad u - \sum_{k=0}^{p} \lambda_k v^{(k)} \in \mathrm{Ker}\theta.$$

Nous avons prouvé que $\mathrm{Ker}\theta = \mathrm{Vect}(y)$, donc il existe un réel μ tel que

$$u = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k v^{(k)} + \mu y,$$

ce qui achève de prouver que $(v^{(0)}, \ldots, v^{(p)}, y)$ engendre $E_a^{(p)}$.

(b) Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p, \mu) \in \mathbb{K}^{p+2}$ tels que $\lambda_0 v^{(0)} + \cdots \lambda_p v^{(p)} + \mu y = 0$.
Appliquons θ : par linéarité, on obtient

$$\lambda_0 X^0 + \cdots \lambda_p X^p + \mu \underbrace{\theta(y)}_{=0} = 0.$$

La base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$ étant libre, tous les λ_k sont nuls. Il reste $\mu y = 0$ et comme y n'est pas la suite nulle, $\mu = 0$. Ceci achève de prouver que la famille est libre.

(c) Les questions a et b prouvent que $(v^{(0)}, \ldots, v^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$. Ceci prouve que ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension finie et que

$$\boxed{\dim E_a^{(p)} = p + 2}$$

7. <u>Les $x^{(k)}$ appartiennent à $E_a^{(p)}$</u>. Soit $k \in [\![0, p]\!]$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1}^{(k)} - a x_n^{(k)} = (n+1)^k - a n^k = Q_k(n),$$

en posant $Q_k = (X+1)^k - aX^k$, qui appartient bien à $\mathbb{R}_p[X]$.
<u>La famille $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est libre.</u> En effet, si $\lambda_0, \ldots, \lambda_p, \alpha$ sont des scalaires tels que

$$\alpha y + \sum_{i=0}^{p} \lambda_i x^{(i)} = 0,$$

alors comme $y \in \mathrm{Ker}\theta$ (question II.4), il vient en appliquant θ, linéaire,

$$0 = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \theta(x^{(k)}) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_i Q_k$$

Or la famille (Q_k) est libre car pour tout k, le polynôme de Q_k est de degré k (il suffit de développer Q_k, on a un coefficient dominant égal à $1 - a$) donc $\lambda_k = 0$ pour tout entier $k \in [\![0, p]\!]$. Il reste donc $\alpha y = 0$ donc $\alpha = 0$ car $y \neq 0$.

<u>Conclusion.</u> La famille $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est une famille de vecteurs de $E_a^{(p)}$, libre et de cardinal $p+2$. Or, on a établi à la question précédente que $E_a^{(p)}$ est de dimension $p + 2$. Ceci donne que

$$\boxed{(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y) \text{ est une base de } E_a^{(p)}.}$$

8. Par hypothèse, on cherche $u \in E_2^{(1)}$ avec $P_u = -2X + 7$. Donc avec le résultat donné par II.7, il existe des scalaires $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha + \beta n + \gamma 2^n$$

Il nous faut donc trouver les coefficients α, β, γ. Déterminons un système en évaluant en $n = 0, 1$ puis 2 :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_1 = 3 \\ u_2 = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = -2 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 3 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = -2 \\ \beta + \gamma = 5 \\ 2\beta + 3\gamma = 13 \end{cases}$$

soit finalement $\begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$ et donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -5 + 2n + 3.2^n}$.