13 Suites réelles : la pratique

0 Qu'est-ce qu'une suite ? 1

1 Calculs de limites. 2
1.1 Limites usuelles. 2
1.2 Opérations algébriques et limites. 3

2 Existence d'une limite : deux outils fondamentaux. 4
2.1 L'encadrement. 4
2.2 La monotonie. 6

3 Suites particulières. 8
3.1 Suites stationnaires 8
3.2 Suites arithmético-géométriques. 8
3.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. 9

4 Modes de définition. 11
4.1 Définition implicite. 11
4.2 Définition par une relation de type « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». 11

Exercices 13

Ce chapitre sera complété par le cours **Suites réelles : la théorie**, dans lequel sera donnée une définition rigoureuse de la notion de suite convergente, ainsi que des preuves pour les théorème énoncés ici. On souhaiter d'abord focaliser sur les méthodes et les exemples, et notamment sur les deux outils fondamentaux que sont le théorème d'encadrement, et le théorème des gendarmes.

0 Qu'est-ce qu'une suite ?

Définition 1.

On appelle **suite réelle** une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles.

Une suite numérique est donc une suite de *nombres*. On s'intéressera un jour à des suites de matrices, des suites de fonctions...

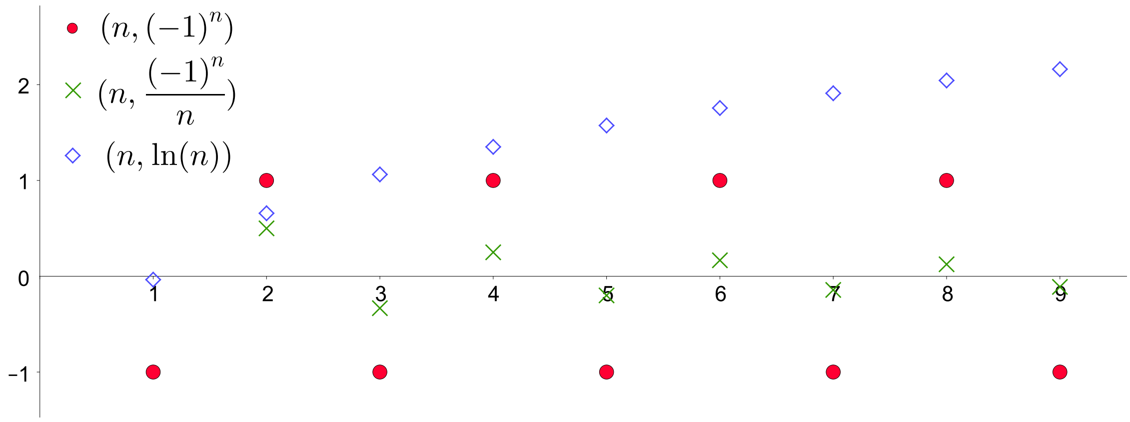
Notation.

Soit une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $u(n)$ est noté u_n et appelé **terme général** de la suite, ou terme de rang n. La suite u est notée $(u_n)_{n\geq 0}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).

Remarque. On peut considérer des suites définies seulement sur une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $[n_0, +\infty[\cap\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$. On notera alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

On pourra voir la variable n comme une variable de temps (discret), où u_n donne l'état du système observé au temps n. On peut représenter cette évolution en donnant le graphe de l'application u :

$$\{(n, u_n), n \in \mathbb{N}\}.$$



Trois graphes de suites

1 Calculs de limites.

1.1 Limites usuelles.

Proposition 2 (Limite d'une puissance de n).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite, qui vaut

$$\lim n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Proposition 3 (Limite d'une suite géométrique).

Soit $q \in \mathbb{R}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \in]-1, 1[\\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1. \end{cases}$$

Proposition 4 (Croissances comparées).

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p > 1$ et $q \in]-1, 1[$. On a les limites suivantes.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{p^n} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^a q^n = 0.$$

Une suite géométrique l'emporte toujours sur une puissance de n

1.2 Opérations algébriques et limites.

Pour énoncer les propositions suivantes, on se donne (u_n) et (v_n) des suites réelles admettant une limite, finie ou infinie, ainsi que deux réels ℓ et ℓ'. Les tableaux donnent les limites de suites construites par opérations sur (u_n) et (v_n). La mention F.I. (« forme indéterminée ») signale que l'on ne peut rien dire en général.

Proposition 5 (Limite d'une somme)**.**

Si (u_n) (v_n) sont deux suites convergentes, alors $(u_n + v_n)$ l'est aussi et la limite de la somme est la somme des limites.
Ce résultat correspond à la première colonne du tableau ci-dessous, où ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	ℓ' ou $+\infty$	ℓ' ou $-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Proposition 6 (Limite d'un produit)**.**

$\lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$\ell'>0$ ou $+\infty$	$\ell'<0$ ou $-\infty$	0	$\ell'>0$ ou $+\infty$	$\ell'<0$ ou $-\infty$	0
$\lim u_n v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

En prenant (v_n) constante égale à λ, on en déduit ce qu'il faut sur les limites et la multiplication par un scalaire. Par exemple, si (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \to \lambda\ell$; si $u_n \to +\infty$ et $\lambda < 0$, $\lambda u_n \to -\infty$, etc...

On rappelle la notation courante ci-dessous : on écrit

- $u_n \to 0_+$ lorsque (u_n) tend vers 0 en restant strictement positive à.p.d.c.r.
- $u_n \to 0_-$ lorsque (u_n) tend vers 0 en restant strictement négative à.p.d.c.r.

Proposition 7 (Limite et inverse)**.**

Dans tous les cas ci-dessous, la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

$\lim u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0_+	0_-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0_+	0_-

Un quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ s'écrit $u_n \cdot \dfrac{1}{v_n}$. En combinant les propositions 6 et 7, on obtient

Proposition 8 (Limite et quotient)**.**

On suppose si besoin que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	ℓ	0	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0_+	0_-	0	$\ell > 0$ ou 0_+	$\ell < 0$ ou 0_-	$\pm\infty$
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2 Existence d'une limite : deux outils fondamentaux.

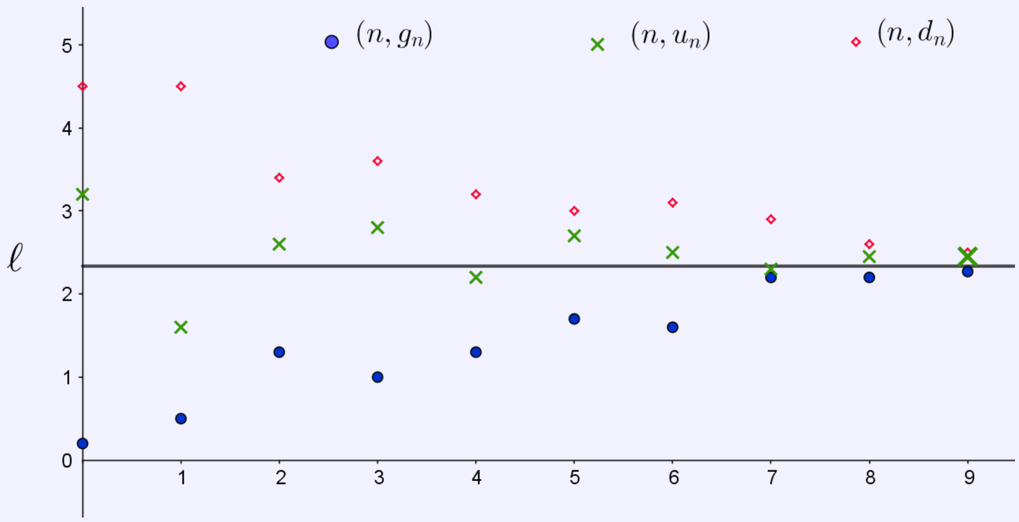
Dans cette partie, on énonce et on illustre les deux outils principaux qui pourront être mobilisés dans la pratique pour prouver qu'une suite converge : le théorème d'encadrement, et le théorème de la limite monotone. Ces résultats reposent sur des inégalités : toutes les suites ici seront **réelles**.

2.1 L'encadrement.

Théorème 9 (d'encadrement, ou des gendarmes)**.**

Soient trois suites réelles (g_n), (u_n), (d_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \leq u_n \leq d_n$.
Si de surcroît, (g_n) et (d_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$(u_n) \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \lim u_n = \ell.$$



Exemple 10 (utiliser le théorème d'encadrement)**.**

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\lfloor \sqrt{n} - 1 \rfloor}{\lfloor \sqrt{n} + 1 \rfloor}$ converge et préciser sa limite.

Méthode (Majorer la distance par une suite qui tend vers 0)**.**

Pour montrer qu'une suite (u_n) tend vers un réel ℓ, il suffit d'obtenir une majoration du type

$$|u_n - \ell| \leq v_n$$

où (v_n) est une suite qui tend vers 0.

En particulier, pour montrer qu'une suite tend vers 0, il suffit de majorer sa valeur absolue par une suite qui tend vers 0.

Méthode (Encadrer une somme, une intégrale).

Pour encadrer une somme,
- on propose un encadrement pour chaque terme,
- puis on somme les inégalités.

Parfois intéressant : majorer/minorer chaque terme par le plus grand/petit d'entre eux.

Pour encadrer une intégrale,
- on propose un encadrement pour la fonction intégrée,
- puis intègre l'inégalité (croissance de l'intégrale : bornes bien rangées parmi les hypothèses).

L'inégalité triangulaire est un outil pour majorer la valeur absolue d'une somme ou d'une intégrale.

Exemple 11 (Montrer qu'une suite tend vers 0 en écrasant sa valeur absolue).

Démontrer que les suites de terme général ci-dessous tendent vers 0 :

$$u_n = \frac{n\sin(n)}{n+2^n}; \qquad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2}; \qquad w_n = \int_0^1 x^n \sin(nx)\arctan(n^x)\mathrm{d}x$$

Exemple 12 (utiliser le théorème d'encadrement avec des sommes).

Convergence et limite des suites u et v de terme général

$$u_n = n\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n^2+k} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor k\pi \rfloor.$$

Proposition 13 (de minoration, de majoration).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$ et $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

Exemple 14.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Démontrer que $u_n \to +\infty$.

Exemple 15 (La série harmonique).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, justifier que $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.
2. Démontrer que $H_n \to +\infty$.

2.2 La monotonie.

Définition 16.

Une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite

$$\textbf{croissante} \text{ si } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n, \qquad \textbf{décroissante} \text{ si } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n,$$

monotone si elle est croissante ou décroissante.

Méthode.

Soit un entier n. Pour comparer deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} d'une suite u, on pourra

- Examiner le signe de $u_{n+1} - u_n$. C'est bête à dire mais

$$u_{n+1} \geq u_n \iff u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

- Dans le cas où la suite est strictement positive, comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, puisqu'alors

$$u_{n+1} \geq u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

Définition 17.

Une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est

$$\textbf{majorée} \text{ si } \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq M., \qquad \textbf{minorée} \text{ si } \exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq m,$$

bornée si elle est majorée et minorée.

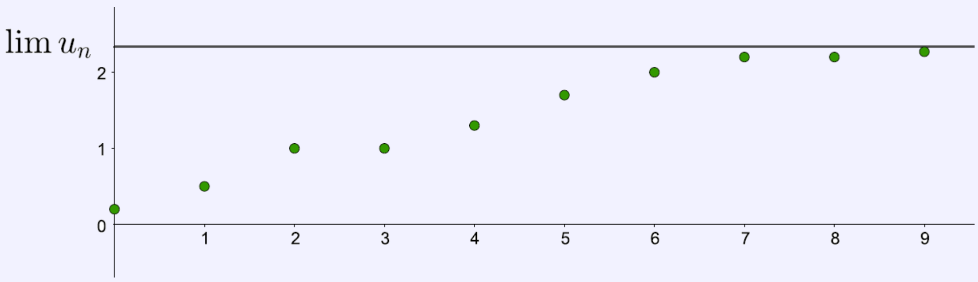
Remarque au cas où... Une suite majorée, c'est une suite dont les termes sont majorés par une constante.

Proposition 18 (Caractérisation des suites bornées)**.**

Une suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

Théorème 19 (de la limite monotone)**.**

Toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie.
Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.



Corollaire 20.

Toute suite décroissante et minorée converge vers une limite finie.
En particulier, toute suite positive est convergente.
Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Exemple 21.

Établir la convergence des suites u et v définies pour tout n par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$.

Définition 22.

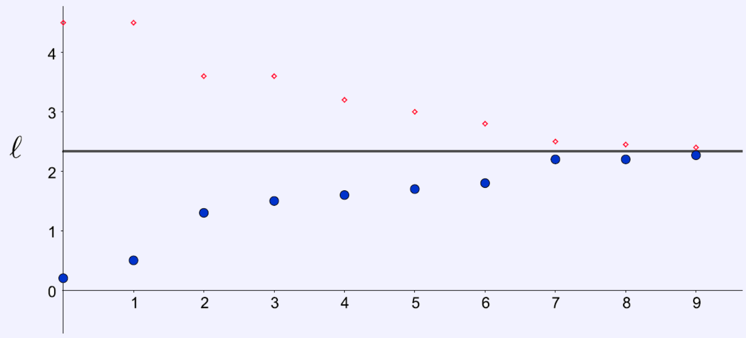
On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque
- (u_n) et (v_n) sont monotones de monotonie opposée,
- $v_n - u_n \to 0$.

Théorème 23 (Convergence des suites adjacentes)**.**

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite finie.

Plus précisément, si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes (u croissante et v décroissante), alors elles convergent vers une même limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$



Exemple 24.

oient les suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$

1. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite finie.
2. On admet que $e = \lim u_n$. Démontrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

3 Suites particulières.

Dans ce qui suit, les suites considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

3.1 Suites stationnaires

Définition 25.

Une suite (u_n) est dite **stationnaire** si elle est constante *à partir d'un certain rang*, c'est-à-dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$.

Exemple 26.

Soit p un entier naturel.
Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \cos\left(\frac{2\pi n!}{p!}\right)$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire.

Exemple 27.

Montrer que l'ensemble des suites stationnaires est stable par combinaisons linéaires.

3.2 Suites arithmético-géométriques.

Définition 28.

Soit $r \in \mathbb{K}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique** de raison r si

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Proposition 29.

Le terme général d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$ est donné par

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

Définition 30.

Soit $q \in \mathbb{K}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique de raison** q si

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = q \cdot u_n.$$

Proposition 31.

Le terme général d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$ est donné par

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Définition 32.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe a et b dans $\mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = au_n + b \quad (*)$$

Fixons a et b dans $\mathbb{K}$. La suite constante égale à $\alpha \in \mathbb{K}$ satisfait $(*)$ si et seulement si $\alpha = a\alpha + b$.
On peut alors dire que α est un *point fixe* pour la fonction $x \mapsto ax + b$.

Méthode (Calcul du terme général d'une suite satisfaisant $(*)$, avec $a \neq 1$)**.**

On pose l'équation au point fixe

$$ax + b = x.$$

Notons α l'unique solution de cette solution. Alors, pour tout n, $\begin{cases} u_{n+1} &= & au_n + b \\ \alpha &= & a\alpha + b \end{cases}$

En faisant la différence de ces deux lignes, on obtient, pour tout n,

$$u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha),$$

Notons $v_n := u_n - \alpha$. Ceci définit une suite auxiliaire (v_n) dont on vient de montrer qu'elle est géométrique. On sait donc exprimer le terme général de (v_n), puis de (u_n).

Exemple 33.

Calculer le terme général à l'ordre n de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4. \end{cases}$$

3.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Définition 34.

On dit qu'une suite (u_n) est **récurrente linéaire d'ordre** 2 s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ avec $b \neq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \quad (**)$$

On cherche une suite particulière qui satisfait $(**)$. Soit $r \in \mathbb{C}$ et (u_n) la suite de terme général $u_n = r^n$.

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ satisfait } (**) \quad &\iff \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ &\iff \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \\ &\iff \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad r^n \left(r^2 - ar - b\right) = 0. \\ &\iff \quad r^2 - ar - b = 0 \end{aligned}$$

(on a pris $n = 0$ pour obtenir la dernière implication directe.)

Définition 35.

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie d'après la relation $(**)$ ci-dessus.
On appelle **équation caractéristique** associée l'équation du second ordre.

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Proposition 36 (Terme général dans le cas complexe)**.**

Soit (u_n) une suite *complexe* récurrente linéaire d'ordre 2 définie d'après la relation $(**)$ (déf. 34), où a et b sont complexes, avec $b \neq 0$.

- Si l'équation caractéristique a deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si l'équation caractéristique a une unique solution r, alors il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda n r^n + \mu r^n.$$

Ceci sera prouvé au second semestre, dans le cours d'algèbre linéaire.

Proposition 37 (Terme général dans le cas réel)**.**

Soit (u_n) une suite *réelle* récurrente linéaire d'ordre 2 définie d'après la relation $(**)$ (déf. 34), où a et b sont réels, avec $b \neq 0$.

- Si l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si l'équation caractéristique a une unique solution r, alors il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda n r^n + \mu r^n.$$
- Si l'équation caractéristique n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, alors elle a deux solutions complexes conjuguées distinctes de la forme $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right).$$

Exemple 38 (La suite de Fibonacci)**.**

Soit (F_n), définie par récurrence par $\left\{\begin{array}{l} F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \\ \forall n \geq 0 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{array}\right.$.

1. Calculer son terme général.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.

4 Modes de définition.

Dans les exemples étudiés jusqu'ici, on disposait d'une expression **explicite** du terme général d'une suite. On peut établir une éventuelle convergence en se ramenant à des limites usuelles (partie 1 de ce cours) ou en s'appuyant sur l'un des deux outils fondamentaux rappelés en partie 2 : l'encadrement, ou l'exploitation de la monotonie. Mentionnons que le calcul de limite sera renforcé au second semestre avec l'étude des développements limités.

On peut aussi définir une suite de manière **implicite** : pour tout entier n, le nombre u_n est défini comme solution d'une équation du type « $F(u_n, n) = 0$ ». On donne un exemple dans le paragraphe à suivre.

Une autre façon classique pour définir une suite est d'utiliser une **relation de récurrence**. Les termes de la suites étant supposés bien définis jusqu'à un certain rang n, le terme suivant u_{n+1} est défini comme une fonction de n et des termes précédents :

$$u_{n+1} = f(n, u_0, u_2, \dots, u_n).$$

On se concentrera dans le second paragraphe de cette partie sur les relations du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

4.1 Définition implicite.

Exemple 39.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^n \ln(x) = 1$ possède une unique solution x_n.
   Ceci définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$.
3. Étudier la monotonie de la suite et la convergence de cette suite.

4.2 Définition par une relation de type « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Exemple 40.

Le système $\begin{cases} u_0 = e^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définit **pas** une suite réelle. Pourquoi ?

Pour qu'une suite u soit bien définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut que les termes de la suite *restent* dans l'intervalle de définition de f. On donne dans ce qui suit une condition suffisante sur f pour que cela arrive.

Proposition 41.

Soit une fonction f définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. On dit que X est **stable** par f si $f(X) \subset X$, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, on a $f(x) \in X$. Dans ces conditions, une contrainte du type

$$\begin{cases} u_0 = a \in X \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

définit correctement une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode (Monotonie des suites définies à partir de $u_{n+1} = f(u_n)$: utilisation de $x \mapsto f(x) - x$)**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. L'étude du signe de $x \mapsto f(x) - x$ permet de déterminer la monotonie de f.

1. Si $x \mapsto f(x) - x$ est *positive* sur une partie $X' \subset X$ stable par f et que $u_0 \in X'$, alors $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in X'$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n \geq 0$: (u_n) est *croissante*.
2. Si $x \mapsto f(x) - x$ est *négative* sur un intervalle $J \subset I$ stable par f, et que $u_0 \in J$, alors $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in X'$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n \leq 0$: (u_n) est *décroissante*.

Méthode (Monotonie des suites définies à partir de $u_{n+1} = f(u_n)$: cas où f est croissante)**.**

Si f est croissante, sur I, alors (u_n) est **monotone**. Plus précisément, il est clair que les propriétés « $u_n \leq u_{n+1}$ », ainsi que « $u_n \geq u_{n+1}$ » sont héréditaires. Ainsi,

· Si $u_0 \leq u_1$, on peut montrer par récurrence que (u_n) est croissante.
· Si $u_0 \geq u_1$, on peut montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

Méthode (Oscillations dans le cas où f est décroissante)**.**

Si f est décroissante sur I alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie contraire. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}),$$

où $f \circ f$ est une fonction *croissante*. Par décroissance de f, si $u_0 \leq u_1$, alors $u_1 \geq u_2$ et inversement.

Proposition 42.

Soit $f : X \to X$ et u une suite satisfaisant $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers une limite ℓ, que $\ell \in X$ et que f est continue en ℓ, alors ℓ est un *point fixe* de f, c'est à dire que $\boxed{f(\ell) = \ell}$

Exemple 43.

Étude de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in [-2, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}. \end{cases}$

Exemple 44.

Étude de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \leq 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}. \end{cases}$

Exercices

Avant de parler de convergence.

$\boxed{\textbf{13.1}}$ **[♦◇◇]** Une suite croissante est une fonction croissante sur $\mathbb{N}$.
Démontrer que le titre de l'exercice dit vrai, c'est-à-dire, pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équivalence entre

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
2. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \leq p \implies u_n \leq u_p$.

$\boxed{\textbf{13.2}}$ **[♦♦◇]** Soit a un réel supérieur à 1 et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$.
Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de a.

$\boxed{\textbf{13.3}}$ **[♦◇◇]** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1}$$

Prouver que la suite (u_n) est bornée.

$\boxed{\textbf{13.4}}$ **[♦◇◇]** Soit $\alpha \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha(1-\alpha) \\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha(1-\alpha) \end{cases}$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de α et n.
2. Donner $\lim u_n$.

$\boxed{\textbf{13.5}}$ **[♦♦◇]** Soit θ un réel.

1. Donner la forme du terme général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$
2. Supposons dans cette question que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Donner sous forme factorisée le terme général de l'unique suite (u_n) satisfaisant la relation ci-dessus et telle que $u_0 = u_1 = 1$.

$\boxed{\textbf{13.6}}$ **[♦♦◇]** Soit (u_n), définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = 3u_n + 2^n \quad (*). \end{cases}$.

1. Prouver qu'il existe une suite (a_n) géométrique de raison 2 qui satisfait la relation de récurrence $(*)$.
2. Donner le terme général de (u_n).

$\boxed{\textbf{13.7}}$ **[♦♦◇]** Étudier la suite (u_n), définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 > 0; u_1 > 0 \\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$.

Encadrement.

$\boxed{\textbf{13.8}}$ **[♦◇◇]** Soit $a > 1$. Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = (\lfloor a^n \rfloor)^{1/n}$.
Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.

$\boxed{\textbf{13.9}}$ **[♦♦◇]** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

$\boxed{\textbf{13.10}}$ **[♦♦♦]** Étudier la convergence de la suite de terme général $\dfrac{1! + 2! + \ldots + n!}{n!}$.

Monotonie.

$\boxed{\textbf{13.11}}$ **[♦◇◇]** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\arctan(x))^n \, dx$. Justifier que (I_n) est une suite convergente.

$\boxed{\textbf{13.12}}$ **[♦◇◇]** Soit α un réel de $]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha^k)$.

1. Justifier brièvement que $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x \leq e^x$.
2. Démontrer que (u_n) est une suite convergente, et que $\lim u_n \leq \exp(\frac{\alpha}{1-\alpha})$.

$\boxed{\textbf{13.13}}$ **[♦◇◇]** Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{ et } \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

$\boxed{\textbf{13.14}}$ **[♦♦◇]** Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 > v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune. En examinant la suite $(u_n v_n)$, exprimer cette limite en fonction de u_0 et v_0.

$\boxed{\textbf{13.15}}$ **[♦♦◇]** Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{ et } \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. Pour chacune des deux suites u et v, faire un pronostic : convergente ou divergente ?
2. Justifier que pour tout entier k supérieur à 2, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
   En déduire que la suite (v_n) est majorée puis qu'elle converge vers une limite finie.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq 1/2$.
   (b) Démontrer par l'absurde que (u_n) tend vers $+\infty$.

$\boxed{\textbf{13.16}}$ **[♦♦♦]** Soit la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}.$$

où a_n est la $n$ème décimale de π. Étudier la convergence de (u_n).

Modes de définition particulier d'une suite

$\boxed{\textbf{13.17}}$ **[♦♦◇]** Étudier la suite u définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2). \end{cases}$

$\boxed{\textbf{13.18}}$ **[♦♦♦]**
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 3$. Prouver que (x_n) converge et déterminer sa limite.
