Corrigé du DS 7 Version A

Exercice 1.

1. (a) On a
$$S_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = M \right\}.$$

   (b) La matrice nulle est symétrique. On prouve ensuite facilement que $S_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, en s'appuyant sur la linéarité de la transposition (cours sur les matrices).

2. On a
$$S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \{aA + bB + cC,\ a,b,c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(A,B,C),$$
avec $A = E_{1,1}$, $B = E_{1,2} + E_{2,1}$ et $C = E_{2,2}$ en utilisant la notation standard pour la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
La famille (A,B,C) engendre $S_2(\mathbb{R})$ et elle est libre : si $aA + bB + cC = 0_{2,2}$, alors il suffit de lire les coefficients pour voir que les trois réels a,b,c sont nuls.
C'est donc une <u>base</u> de $S_2(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\dim S_2(\mathbb{R}) = 3}$.

3. Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On a
$$M \in S_n(\mathbb{R}) \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ \ m_{i,j} = m_{j,i}.$$
Ainsi, si $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors
$$M = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i<j} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i>j} m_{i,j} E_{j,i},$$
$$M = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_{i,i} (E_{i,i} + E_{i,i}) + \sum_{i<j} m_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}).$$
Ceci démontre que la famille
$$\mathcal{F} = (E_{i,j} + E_{j,i}, 1 \le i \le j)$$
engendre $S_n(\mathbb{R})$. Elle est libre (on s'en convainc en considérant une combinaison linéaire nulle et en lisant les coefficients). C'est donc une <u>base</u> de $S_n(\mathbb{R})$. Calculons le cardinal de cette base : il vaut
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercice 2.

1. • L'inclusion $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ est claire : si $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in E})$, donc $y \in \mathrm{Im}(g)$.
Réciproquement, considérons $y \in \mathrm{Im}(g)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. D'après l'hypothèse, $x = f \circ g(x)$, d'où
$$y = g\left(f \circ g(x)\right) = g \circ f(\underbrace{g(x)}_{\in E}).$$
• L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ est claire : si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_E$. Appliquons g : $g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Alors $g(f(x)) = 0_E$. Composons par f :
$$f(g(f(x))) = f(0_E) = 0_E.$$
Or, d'après l'hypothèse, $f(g(f(x))) = f \circ g(f(x)) = \mathrm{id}_E(f(x)) = f(x)$. On en déduit que $f(x) = 0_E$ donc que $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
• Par double-inclusion,
$$\boxed{\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)}.$$

2. L'application $g \circ f$ est un endomorphisme de E ; vérifions qu'il est idempotent :
$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{id}_E \circ f = g \circ f.$$
On en déduit que $g \circ f$ est un projecteur et donc $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f)$ sont supplémentaires. Ainsi, en utilisant la question 1,
$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(f)}.$$

Exercice 3. (fait en cours)

1. Par définition de p on a $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc

$$\boxed{\text{il existe } x \in E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0_E}.$$

2. On commence par constater que pour tout $k \geq p$:

$$u^k(x) = u^{k-p}\left(u^p(x)\right) = u(0_E) = 0_E.$$

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E.$$

On applique u^{p-1} (linéaire) :

$$\lambda_0 u^{p-1}(x) + 0_E + \cdots + 0_E = 0_E,$$

donc $\lambda_0 = 0$ car $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Il reste alors

$$\lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E.$$

de même, on applique u^{p-2} pour trouver $\lambda_1 = 0$. De proche en proche on obtient par ce procédé :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0.$$

$$\boxed{\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right) \text{ est libre.}}$$

3. Nous savons que dans un espace de dimension finie égale à n, le cardinal d'une famille libre est inférieur à n. Dans la question 2, on a exhibé une famille libre de p vecteurs. On en déduit que $p \leq n$. Ainsi, $u^n = u^{n-p} \circ u^p = 0$: $\boxed{u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}}$.

Exercice 4.

1. Commençons par vérifier que f prend bien ses valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\deg(f(P)) = \deg(XP' - P) \leq \max(\deg(XP'), \deg(P)).$$

Or, $\deg(XP') = \deg(X) + \deg(P') \leq 1 + (n-1) = n$. On a bien $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On prend maintenant deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et deux réels λ et μ. On calcule

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= X(\lambda P + \mu Q)' - n(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda(P' - nP) + \mu(\lambda Q' - nQ) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q), \end{aligned}$$

ce qui montre que f est linéaire. On a bien montré que

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

2. Commençons par écrire que l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, d'après une propriété du cours, est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$:

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\right).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $f(X^k) = (k-n)X^k$. On ne manque pas de remarquer que $f(X^n) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc $X^n \in \operatorname{Ker}(f)$. En ôtant le dernier vecteur, nul, de notre famille génératrice, on conserve une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$:

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(-n, (1-n)X, (2-n)X^2, \ldots, -X^{n-1}\right) = \operatorname{Vect}(1, X, \cdots, X^{n-1}).$$

Cette dernière famille est libre car sous-famille d'une famille libre. C'est une base de $\operatorname{Im}(f)$, or c'est aussi une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$: on a

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}.$$

3. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$. La formule du rang amène

$$\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = \dim\left(\operatorname{Ker}(f)\right) + \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right),$$

ce qui amène ici

$$\dim\left(\operatorname{Ker}(f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) - \dim\left(\mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = (n+1) - n = 1.$$

L'espace vectoriel $\operatorname{Ker}(f)$ est donc une droite. Le polynôme X^n appartient au noyau. Il constitue à lui seul, comme vecteur non nul, une base de cette droite (un « vecteur directeur » de la droite) :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(X^n)}.$$

Exercice 5.

1. On a $\boxed{\dim H_1 = \dim H_2 = n-1}$.
2. L'inclusion $H_1 \subset H_1 + H_2 \subset E$ amène par passage aux dimensions
$$n-1 \leq \dim(H_1+H_2) \leq n.$$
Supposons que $\dim(H_1+H_2) = n-1$. Alors, avec l'inclusion $H_1 \subset H_1+H_2$ et l'égalité des dimensions, on obtient $H_1 = H_1 + H_2$.
Ceci conduit à $H_2 \subset H_1$ puis à $H_2 = H_1$ par égalité des dimensions. On a obtenu une contradiction.
$$\dim(H_1+H_2) = n \quad \text{donc} \quad \boxed{H_1 + H_2 = E}.$$
3. La question précédente donne que $H_1 + H_2$ est de dimension n. D'après la formule de Grassmann,
$$\dim H_1 \cap H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1+H_2) = (n-1)+(n-1)-n \boxed{= n-2}$$
4.
   - La famille (x_1, x_2) est libre. Pour le montrer, considérons $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E$. Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2$, ce qui donne $x_1 \in H_2$ (contradiction).
   On vient de montrer que $\lambda_1 = 0$, et on montre de même que $\lambda_2 = 0$.
   La famille (x_1, x_2), libre, est de rang 2 : $\underline{\dim \operatorname{Vect}(x_1, x_2) = 2}$.
   En utilisant le résultat de la question précédente,
   $$\dim H_1 \cap H_2 + \dim \operatorname{Vect}(x_1, x_2) = (n-2) + 2 = \dim E.$$
   - Montrons que $(H_1 \cap H_2) \cap \operatorname{Vect}(x_1, x_2) = \{0_E\}$.
   Soit y un vecteur dans l'intersection.
   Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.
   Si $\lambda_1 \neq 0$, on a $x_1 = \frac{1}{\lambda_1} y - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2$.
   Puisque $y \in H_2$, ceci donne $x_1 \in H_2$, ce qui n'est pas.
   On vient de montrer que $\lambda_1 = 0$, et on montre de même que $\lambda_2 = 0$.
   On a donc $y = 0_E$, CQFD.

   On a prouvé que
$$(H_1 \cap H_2) \cap \operatorname{Vect}(x_1, x_2) = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim H_1 \cap H_2 + \dim \operatorname{Vect}(x_1, x_2) = \dim E.$$
On en déduit
$$\boxed{(H_1 \cap H_2) \oplus \operatorname{Vect}(x_1, x_2) = E}.$$

Exercice 6.

1. Cours.
2. (a) On sait que $e^t \underset{0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2)$. Pour $t \neq 0$, on a donc
$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)} = \frac{1}{1 + \frac{t}{2} + o(t)}$$
Nous savons aussi que $\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u)$. Ainsi, par substitution avec une fonction qui tend vers 0, on a bien
$$\boxed{f(t) = 1 - \frac{t}{2} + o(t)}$$
(b) Le développement à l'ordre 0 donne que $f(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$.
On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = 1}$.
L'existence d'un DL en 0 l'ordre 1 est équivalente à la dérivabilité en 0.
On a donc que f est dérivable en 0 et que $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}}$.

Problème.

Partie I - Préliminaires

1. D est une application de $\mathbb{R}[X]$ vers lui-même.

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad D(\lambda P + \mu Q) = \lambda P' + \mu Q' = \lambda D(P) + \mu D(Q).$$

$$\boxed{D \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])}$$

Par ailleurs, si $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, en posant $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} \in \mathbb{R}[X]$ on obtient $D(P) = Q$.

$$\boxed{D \text{ est surjectif.}}$$

2. (a) Puisque $\deg P = n$, on sait que $\deg P^{(k)} = n - k$ pour $0 \leq k \leq n$. La famille considérée est donc une famille de polynômes non nuls, à degrés deux à deux distincts : elle est libre.

(b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(P^{(k)}) = n-k \leq n$. Donc $\mathcal{B}_P$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par conséquent, $\mathcal{B}_P$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Par caractérisation des bases d'un espace vectoriel de dimension finie :

$$\boxed{\mathcal{B}_P \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}.$$

Partie II - Sous-espaces stables par D

3. *si les degrés des polynômes de F sont bornés*

On suppose que $F \neq \{0\}$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$F \subset \mathbb{R}_N[X].$$

(a) • L'ensemble $\{\deg P \mid P \in F,\ P \neq 0\}$ est une partie non vide ($F \neq \{0\}$) et majorée (par N) de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément que l'on note n.

• Soit $P \in F$ tel que $\deg P = n$ (il en existe par définition de n).
Puisque $P \in F$ et F est stable par D, on sait que $P' = D(P) \in F$, $P'' = D(P') \in F$, ..., $P^{(n)} \in F$. La famille $\mathcal{B}_P$ est bien une famille de vecteurs de F.

(b) • Par définition de n : $\boxed{F \subset \mathbb{R}_n[X]}$.

• On sait que $\mathcal{B}_P$ est une famille de vecteurs de F. Donc $\mathrm{Vect}\mathcal{B}_P \subset F$.
Or $\mathcal{B}_P$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, d'après 1. En particulier $\mathrm{Vect}\mathcal{B}_P = \mathbb{R}_n[X]$.
Il reste $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \subset F}$.

4. *si les degrés des polynômes de F ne sont pas bornés*

On suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $P \in F$ tel que $\deg P > N$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $P \in F$ tel que $\deg P = n > N$.
Comme à la question précédente : $\mathrm{Vect}\mathcal{B}_P = \mathbb{R}_n[X] \subset F$. Puisque $\mathbb{R}_N[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ il vient

$$\mathbb{R}_N[X] \subset F.$$

Par conséquent

$$\mathbb{R}[X] = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_N[X] \subset F.$$

L'inclusion réciproque est connue.

$$\boxed{F = \mathbb{R}[X]}$$

5. *conclusion*

D'après les deux questions précédentes, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par D alors

— ou bien $\boxed{F = \{0\}}$;

— ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{F = \mathbb{R}_n[X]}$:

— ou bien $\boxed{F = \mathbb{R}[X]}$.

Réciproquement, ces sous-espaces sont bien stables par D.