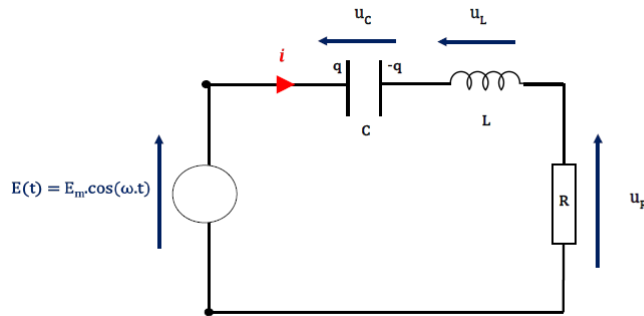


# Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

12

1	Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 2.	2
2	Résolution de l'équation homogène.	3
3	Équation générale : obtenir une solution particulière.	6
3.1	Trouver une solution à vue. . . . .	6
3.2	Principe de superposition. . . . .	6
3.3	Obtenir une solution pour des seconds membres particuliers. . . . .	7
4	Synthèse.	8
	Exercices	9

## Introduction



Oscillateur harmonique amorti, soumis à une excitation périodique.

On considère, branchés en série, une résistance  $R$ , un condensateur de capacité  $C$ , une bobine d'inductance  $L$ , et un générateur de tension sinusoïdale. Soit  $q$  la charge aux bornes du condensateur ; on a  $i = \frac{dq}{dt}$ . Exprimons toutes les tensions en fonction de  $q$  :  $u_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$ ,  $u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$  et  $u_C = \frac{q}{C}$ . En appliquant la loi des mailles, on obtient  $\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = E_m \cos(\omega t)$ , que l'on récrit

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \cos(\omega t) \quad (\varphi)$$

où  $\lambda = \frac{R}{2L}$  et  $\omega_0 = (\sqrt{LC})^{-1}$ . Le paramètre  $\lambda$ , on le verra, est un facteur d'*amortissement*, homogène à l'inverse d'un temps. Le paramètre  $\omega_0$  est appelé *pulsation propre* de l'oscillateur dans le cas d'un amortissement négligeable ( $\lambda = 0$ ) et en l'absence d'excitation ( $U_0 = 0$ ),  $q$  sera sinusoïdal de pulsation  $\omega_0$ . L'équation  $(\varphi)$  modélise aussi bien des oscillateurs mécaniques, et elle sera étudiée et utilisée en physique et en SII.

Dans ce cours, on s'intéresse aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 de la forme

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (E),$$

où  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  (les coefficients sont *constants*, ce ne sont pas des fonctions) et où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  appartient à une classe de fonctions utile pour les applications.

## 1 Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 2.

### Définition 1.

Soient  $a, b \in \mathbb{K}$  deux constantes et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (E)$$

On appelle **solution** de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  toute fonction  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ , deux fois dérivable, et telle que  $\forall x \in \mathbb{R} \ y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$ .

On appelle **équation homogène** associée à  $(E)$  l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (E_0).$$

Ci-dessous,  $S$  et  $S_0$  désignent respectivement les ensembles de solutions de  $(E)$  et  $(E_0)$ .

### Proposition 2 (Structure de $S_0$ ).

$S_0$  contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires.

**Preuve.** Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de  $(E_0)$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires de  $\mathbb{K}$ . Par définition,  $y_1$  et  $y_2$  sont donc deux fois dérivables et il en va de même de  $\lambda y_1 + \mu y_2$ . On a donc

$$\begin{aligned} & (\lambda y_1 + \mu y_2)'' + a(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= (\lambda y_1'' + \mu y_2'') + a(\lambda y_1' + \mu y_2') + b(\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \underbrace{\lambda(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0 \text{ car } y_1 \in S_0} + \underbrace{\mu(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{=0 \text{ car } y_2 \in S_0} \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

On a donc montré que  $(\lambda y_1 + \mu y_2) \in S_0$ . □

### Proposition 3 (Lien entre $S$ et $S_0$ ).

Si  $S$  est non vide, alors, en considérant  $z_p \in S$  (une « solution particulière » de l'équation), on a

$$S = \{z_p + y, \quad y \in S_0\}.$$

**Preuve.** Soit  $z$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} z \in S &\iff z'' + az' + bz = f \\ &\iff z'' + az' + bz = z_p'' + az_p' + bz_p \\ &\iff (z - z_p)'' + a(z - z_p)' + b(z - z_p) = 0 \\ &\iff z - z_p \in S_0 \\ &\iff \exists y \in S_0 \quad z - z_p = y. \end{aligned} \quad \square$$

**Remarque.** Tout ce qui précède reste valable, sans changer la preuve, lorsque  $a$  et  $b$  sont des fonctions.

Pour connaître *toutes* les solutions de  $(E)$ , il suffit donc de

- connaître *toutes* les solutions de  $(E_0)$   $\longrightarrow$  partie 2 du cours
- connaître *une* solution de  $(E)$   $\longrightarrow$  partie 3 (dans des cas particuliers)

## 2 Résolution de l'équation homogène.

Dans ce paragraphe, on souhaite déterminer  $S_0$ , ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (E_0)$$

Commençons par chercher des solutions à l'équation, de la forme  $u : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{rx} \end{cases}$ , où  $r \in \mathbb{C}$ .

La fonction  $u$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :  $u' = ru$  et  $u'' = r^2u$ . On a donc

$$u'' + au' + bu = (r^2 + ar + b)u \quad \text{et donc} \quad u \in S_0 \iff r^2 + ar + b = 0.$$

Ceci motive la définition suivante.

### Définition 4.

On appelle **équation caractéristique** associée à  $(E_0)$  l'équation

$$x^2 + ax + b = 0,$$

où  $a$  et  $b$  sont les coefficients constants de  $(E_0)$ .

**Remarque.** On rappelle qu'une telle équation a deux racines  $r_1$  et  $r_2$ , avec  $r_1 + r_2 = -a$ .  
On a  $r_1 = r_2$  (racine « double ») si et seulement si elles valent toutes les deux  $-a/2$ .

### Lemme 5 (Des solutions de $E_0$ ).

Soit l'équation caractéristique  $x^2 + ax + b = 0$  associée à  $(E_0)$  et  $r$  une racine de cette équation.

- la fonction  $x \mapsto e^{rx}$  est solution de  $(E_0)$ .
- Si  $r$  est une racine double,  $x \mapsto xe^{rx}$  est solution de  $(E_0)$ .

### Théorème 6 (Solutions complexes de l'équation homogène).

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  et  $(E_0)$  l'équation  $y'' + ay' + by = 0$ .

Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique  $x^2 + ax + b = 0$ .

On note  $S_0^{\mathbb{C}}$  l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  à valeurs complexes.

- Si  $\Delta \neq 0$ , l'équation caractéristique a deux racines distinctes dans  $\mathbb{C}$ , disons  $r_1$  et  $r_2$ , et

$$S_0^{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

- Si  $\Delta = 0$ , l'équation caractéristique a une racine double dans  $\mathbb{C}$ , disons  $r$ , et

$$S_0^{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda x e^{rx} + \mu e^{rx}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

**Preuve.** Pour  $r_1, r_2, r \in \mathbb{C}$ , on note

$$\Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2) = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\} \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}^{\mathbb{C}}(r) = \{x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Partie 1. "Les inclusions  $\supset$ ".

- Si  $\Delta \neq 0$ , alors, l'équation caractéristique a deux racines distinctes que l'on note  $r_1$  et  $r_2$ . D'après le Lemme 5, les fonctions  $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$  et  $y_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$  sont solutions de  $(E_0)$ . D'après la proposition ?? toutes les combinaisons linéaires de la forme  $\lambda y_1 + \mu y_2$  sont encore des solutions de  $(E_0)$ . Ceci montre que  $S_0^{\mathbb{C}} \supset \Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2)$ .
- Si  $\Delta = 0$ . Alors, l'équation caractéristique a une racine double que l'on note  $r$ . D'après le Lemme 5, les fonctions  $y_1 : x \mapsto x e^{rx}$  et  $y_2 : x \mapsto e^{rx}$  sont solutions de  $(E_0)$ . D'après la proposition ?? toutes les combinaisons linéaires de la forme  $(\lambda y_1 + \mu y_2) : x \mapsto \lambda x e^{rx} + \mu e^{rx}$  sont encore des solutions de  $(E_0)$ . Ceci montre que  $S_0^{\mathbb{C}} \supset \tilde{\Gamma}^{\mathbb{C}}(r)$ .

Partie 2. "Les inclusions  $\subset$ ".

Soit  $y \in S_0^{\mathbb{C}}$  une solution de  $(E_0)$  à coefficients complexes. Soit  $r$  une solution complexe de l'équation caractéristique ; on définit la fonction  $z : x \mapsto e^{-rx} y(x)$ . La fonction  $z$  est deux fois dérivable par produit. Notons  $u : x \mapsto e^{rx}$ . On a

$$\begin{aligned} y &= uz, \\ y' &= u'z + uz', \\ y'' &= u''z + u'z' + u'z' + uz''. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, les équivalences sont inutiles, et seules les implications directes nous servent. On a tout de même conservé les équivalences car si on cherchait à écrire une preuve plus courte, on pourrait les utiliser pour se dispenser de la partie 1.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\iff y'' + ay' + by = 0 \\ &\iff (u''z + u'z' + u'z' + uz'') + a(u'z + uz') + buz = 0 \\ &\iff uz'' + (2 \underbrace{u'}_{=ru} + au)z' + (\underbrace{u'' + au' + bu}_{=0 \text{ car } u \in S_0^{\mathbb{C}}})z = 0 \\ &\iff uz'' + u(2r + a)z' = 0 \end{aligned}$$

Rappelons que pour tout  $x$  réel,  $u(x) = e^{rx} \neq 0$  (ce nombre complexe étant de module non nul...) On peut alors diviser par  $u$  pour obtenir

$$y \text{ est solution de } (E_0) \iff z' \text{ est solution de } Y' + (2r + a)Y \stackrel{(*)}{=} 0.$$

On a supposé  $y$  est solution de  $(E_0)$ . En résolvant  $(*)$ , on en déduit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) = \lambda e^{-(2r+a)x}.$$

- Si  $\Delta = 0$ , alors  $r$  est racine double et  $2r + a = 0$ . On a donc que  $z'$  est constante égale à  $\lambda$  donc il existe  $\mu$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \lambda x + \mu,$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = e^{rx} z(x) = (\lambda x + \mu) e^{rx}.$$

On a bien montré ici que  $y \in \tilde{\Gamma}^{\mathbb{C}}(r)$ .

- Si  $\Delta \neq 0$ , alors, l'équation caractéristique a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ . Mettons que  $r = r_2$ . Alors,  $r_1 = -r - a$ , et comme  $r_1 \neq r_2$ , on a  $2r + a \neq 0$ . Connaissant  $z'$ , on connaît  $z$  : il existe une constante  $\mu$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = -\frac{\lambda}{2r + a} e^{-(2r+a)x} + \mu,$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = e^{rx} z(x) = \underbrace{-\frac{\lambda}{2r + a} e^{(-\cancel{r}-a+\cancel{r})x}}_{:=\tilde{\lambda}} + \mu e^{rx} = \tilde{\lambda} e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}.$$

On a bien montré ici que  $y \in \Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2)$ .

□

**Théorème 7** (Solutions réelles de l'équation homogène).

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $(E_0)$  l'équation  $y'' + ay' + by = 0$ . Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique  $x^2 + ax + b = 0$ . Notons  $S_0^{\mathbb{R}}$  l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  à valeurs réelles.

- Si  $\Delta > 0$ , l'équation caractéristique a deux racines *réelles* distinctes, disons  $r_1$  et  $r_2$  et

$$S_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Si  $\Delta = 0$ , l'équation caractéristique a une racine double dans  $\mathbb{R}$ , disons  $r$  et

$$S_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda t e^{rt} + \mu e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Si  $\Delta < 0$ , l'équation caractéristique a deux racines *complexes conjuguées*.

On les note  $r_1 = \gamma + i\omega$  et  $r_2 = \gamma - i\omega$ , avec  $(\gamma, \omega) \in \mathbb{R}^2$ . On a alors

$$S_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto e^{\gamma t} (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On peut aussi écrire  $S_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto A e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}.$

**Remarque.** Une idée clé : toute solution à valeurs réelles de  $(E_0)$  est a fortiori une solution à valeurs complexes de cette même équation. Ceci peut s'énoncer à l'aide de l'inclusion :

$$S_0^{\mathbb{R}} \subset S_0^{\mathbb{C}}.$$

**Preuve.** du cas  $\Delta < 0$ . L'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées  $r_1 = \gamma + i\omega$  et  $r_2 = \gamma - i\omega$ , avec  $(\gamma, \omega) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $y \in S_0^{\mathbb{R}}$ . A fortiori,  $y \in S_0^{\mathbb{C}}$ . D'après le théorème 6, il existe donc deux nombres **complexes**  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad (*)$$

On laisse ici les calculs au lecteur : puisque  $y$  est à valeurs réelles on a en particulier  $\overline{y(0)} = y(0)$  et  $\overline{y'(0)} = y'(0)$ . En se rappelant que  $r_2 = \overline{r_1}$ , ceci conduit au système

$$\begin{cases} (\lambda - \overline{\mu}) + (\mu - \overline{\lambda}) = 0 & (L_1) \\ r_1(\lambda - \overline{\mu}) + \overline{r_1}(\mu - \overline{\lambda}) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

L'opération  $L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1$  amène que  $\boxed{\mu = \overline{\lambda}}$ . On a donc, en revenant à (\*),

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{\gamma t} (\overline{\lambda} e^{i\omega t} + \lambda e^{-i\omega t}) = e^{\gamma t} \cdot 2\operatorname{Re}(\lambda e^{i\omega t}).$$

Écrivons  $\lambda$  sous forme géométrique :  $\lambda = r e^{i\varphi}$ . On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = 2e^{\gamma t} \operatorname{Re}(e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = 2r e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi),$$

ce qui est bien de la forme donnée par le théorème, en posant  $A = 2r$ . On vient de montrer l'inclusion

$$S_0^{\mathbb{R}} \subset \{t \mapsto A e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On peut aussi écrire

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = 2r e^{\gamma t} (\cos(\varphi) \cos(\omega t) - \sin(\varphi) \sin(\omega t)),$$

ce qui montre l'inclusion

$$S_0^{\mathbb{R}} \subset \{t \mapsto e^{\gamma t} (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Les inclusions réciproques sont plus simples. □

**Exemple 8.**

Pour chacune des équations ci-dessous, on écrit l'ensemble des solutions réelles :

$$1) \ y'' - 2y' - 3y = 0; \quad 2) \ y'' - 6y' + 9y = 0; \quad 3) \ y'' + y' + y = 0.$$

**Exemple** (L'équation  $y'' + \omega^2 y = 0$  : oscillateur harmonique non amorti).

Soit, pour  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$  l'équation  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $x^2 + \omega^2 = 0$ , qui a pour racines  $i\omega$  et  $-i\omega$  (partie réelle nulle : pas d'amortissement).

L'ensemble des solutions est  $S_0 = \{t \mapsto \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

### 3 Équation générale : obtenir une solution particulière.

Il s'agit ici de trouver *une* solution de l'équation

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (E)$$

#### 3.1 Trouver une solution à vue.

Lorsque le second membre  $f$  est une fonction constante, l'équation a une solution constante (cas particulier courant en physique). Plus précisément, si  $a, b, c \in \mathbb{K}$  avec  $b \neq 0$ ,

L'équation  $y'' + ay' + by = c$  a pour solution particulière la fonction constante  $z_p : x \mapsto \frac{c}{b}$ .

Plus généralement, lorsque  $b$  sera une fonction polynomiale de degré  $n$ , on pourra chercher une solution polynomiale de degré  $n$ .

#### 3.2 Principe de superposition.

Comme pour les ED linéaires d'ordre 1, on a un principe de superposition lorsque le second membre se présente comme somme de deux fonctions.

**Proposition 9** (Principe de superposition).

Soient  $a, b \in \mathbb{K}$ . Si

·  $y_1$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + ay' + by = f_1(x)$  ( $E_1$ ),

·  $y_2$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + ay' + by = f_2(x)$  ( $E_2$ ),

alors  $y_1 + y_2$  est solution sur  $I$  de l'équation  $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$  ( $E_3$ ).

**Preuve.** Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions, respectivement de ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ). Elles sont par définition deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $y_1 + y_2$  l'est donc aussi. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)''(x) + a(y_1 + y_2)'(x) + b(y_1 + y_2)(x) &= \underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=f_1(x) \text{ car } y_1 \text{ sol. de } E_1} + \underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{=f_2(x) \text{ car } y_2 \text{ sol. de } E_2} \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Les deux « paquets », l'un dépendant de  $y_1$ , l'autre de  $y_2$  ont pu être formés en tirant parti de la linéarité de l'équation.  $\square$

### 3.3 Obtenir une solution pour des seconds membres particuliers.

En première année, on limite l'étude des équations non-homogènes à des exemples importants pour les applications : on considère dans ce qui suit des seconds membres de la forme

$$x \mapsto Ae^{\alpha x}, \text{ avec } (A, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad t \mapsto A \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad t \mapsto A \sin(\omega t), \text{ avec } (A, \omega) \in \mathbb{R}^2.$$

#### Proposition 10.

Soient  $a, b, A, \alpha \in \mathbb{K}$ . L'équation

$$y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x}$$

admet une solution particulière de la forme

- $x \mapsto Be^{\alpha x}$  si  $\alpha$  n'est pas racine de l'équation caractéristique,
- $x \mapsto Bxe^{\alpha x}$  si  $\alpha$  est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $x \mapsto Bx^2e^{\alpha x}$  si  $\alpha$  est racine double de l'équation caractéristique,

où  $B$  est une constante (de  $\mathbb{K}$ ) à déterminer.

**Preuve.** On va chercher une solution particulière de la forme

$$y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x},$$

où  $z$  est une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  à déterminer. Notons  $u : x \mapsto e^{\alpha x}$ . La fonction  $u$  est deux fois dérivable : on a  $u' = \alpha u$  et  $u'' = \alpha^2 u$ . La fonction  $y$  est deux fois dérivable comme produit :

$$\begin{aligned} y &= zu, \\ y' &= zu' + z'u = (\alpha z + z')u, \\ y'' &= zu'' + z'u' + z'u' + z''u = (\alpha^2 z + 2\alpha z' + z'')u \end{aligned}$$

On a,  $u$  ne s'annulant pas,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\iff y'' + ay' + by = Au \\ &\iff (\alpha^2 z + 2\alpha z' + z'')u + a(\alpha z + z')u + bz'u = Au \\ &\iff z'' + (2\alpha + a)z' + (\alpha^2 + a\alpha + b)z = A \end{aligned} \quad (*)$$

- Si  $\alpha$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, il suffit de prendre  $z$  constante égale à  $B := A/(\alpha^2 + a\alpha + b)$  pour satisfaire (\*). Cela donne bien une solution particulière du type  $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Be^{\alpha x}$ .
- Si  $\alpha$  est racine simple de l'équation caractéristique, on a  $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$  et  $2\alpha + a \neq 0$ . Il faut donc choisir  $z$  telle que

$$z'' + (2\alpha + a)z' = A. \quad (*)$$

On prend  $z'$  constante égale à  $B := A/(2\alpha + a)$  et pour cela on choisit  $z : x \mapsto Bx$ . Cela donne bien une solution particulière du type  $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Bxe^{\alpha x}$ .

- Si  $\alpha$  est racine double de l'équation caractéristique, on a  $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$  et  $2\alpha + a = 0$ . Il faut donc choisir  $z$  telle que

$$z'' = A, \quad (*)$$

ce que l'on fait en prenant  $z : x \mapsto \frac{A}{2}x^2$ . Cela donne bien une solution particulière du type  $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Bx^2e^{\alpha x}$  (en posant  $B = A/2$ ). On remarque que si  $a, b, \alpha$  et  $A$  sont des nombres réels, dans les trois cas,  $B$  est réel.  $\square$

Cas particulier important pour les applications : celui où le second membre est de la forme  $t \mapsto A \cos(\omega t)$ , ou  $t \mapsto A \sin(\omega t)$ . Physiquement, il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique excité périodiquement. On va voir que l'on peut se ramener à une équation du type de celles de la proposition 10.

### Méthode.

Soient  $a, b, A \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $(E)$  une équation du type

$$y'' + ay' + by = A \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad y'' + ay' + by = A \sin(\omega t).$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) \quad \text{et} \quad \sin(\omega t) = \operatorname{Im}(e^{i\omega t}).$$

On sait trouver une solution particulière de l'équation auxiliaire complexe

$$y'' + ay' + by = Ae^{i\omega t} \quad (E_{\mathbb{C}}).$$

Reste à sélectionner la partie réelle ou la partie imaginaire pour obtenir une solution de  $(E)$ .

- Si  $i\omega$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, on obtiendra une solution particulière de  $(E_{\mathbb{C}})$  de la forme  $t \mapsto Be^{i\omega t}$  avec  $B \in \mathbb{C}$ . En sélectionnant la partie réelle/imaginaire, on obtient une solution du type

$$z : t \mapsto \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- Si  $i\omega$  est racine de l'équation caractéristique, alors son conjugué aussi et l'équation caractéristique est  $(x + i\omega)(x - i\omega) = x^2 + \omega^2$ . L'équation complexe associée à  $(E)$  est de la forme

$$y'' + \omega^2 y = Ae^{i\omega t}$$

C'est celle d'un oscillateur harmonique non amorti excité à sa pulsation propre. On obtiendra une solution particulière de  $(E_{\mathbb{C}})$  de la forme  $t \mapsto Bte^{i\omega t}$  avec  $B \in \mathbb{C}$ .

En sélectionnant la partie réelle/imaginaire, on obtient une solution du type

$$z : t \mapsto t(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Le facteur  $t$  dans traduit que le système entre en *résonance* (vidéo). Voir l'exercice 8.4.

## 4 Synthèse.

### Méthode (Conseils pour la résolution des EDL2 à coefficients constants).

- Résoudre l'équation homogène  $(E_0)$  associée. Pour cela, commencer par poser l'équation caractéristique.
- Rechercher une solution particulière de  $(E)$  avec second membre. Le cours nous apprend à le faire lorsque ce dernier est de la forme  $Ae^{\alpha x}$ . Il va falloir discuter selon que  $\alpha$  est racine ou pas de l'EC.
- Si le second membre est de la forme  $A \cos(\omega t)$  ou  $A \sin(\omega t)$ , on se ramène à un second membre exponentiel en posant une équation auxiliaire complexe.
- Exprimer l'ensemble des solutions de  $(E)$  à l'aide de la solution particulière et des solutions de  $(E_0)$ .
- Conditions initiales. La notion de problème de Cauchy n'a pas été définie pour des EDL2. On vérifiera dans la pratique que pour une équation  $(E)$  donnée, il existe une unique solution de  $(E)$  satisfaisant une condition initiale du type  $(y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = v_0)$ .



## Exercices

---

**12.1** [◆◆◆] Résoudre le problème de Cauchy ci-dessous :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

---

**12.2** [◆◆◆] Résoudre :

$$y'' - y' - 2y = 2\operatorname{ch}(x).$$

---

**12.3** [◆◆◆] Résoudre :

$$y'' + 2y' + y = \cos(2t) \quad (E).$$

---

**12.4** [◆◆◆] Résonance... ou pas

1. Excitation à une pulsation quelconque. Résoudre

$$y'' + 4y = \cos t.$$

2. Excitation à la pulsation propre : résonance. Résoudre

$$y'' + 4y = \cos(2t).$$

---

**12.5** [◆◆◆] Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Résoudre l'équation différentielle

$$2y'' + \alpha y' + \alpha y = 0.$$

On discutera la réponse en fonction du paramètre  $\alpha$ , bien entendu.

---

**12.6** [◆◆◆] Soit  $a \in \mathbb{R}$ . En discutant selon la valeur de  $a$ , résoudre

$$y'' - 2ay' + (1 + a^2)y = \sin x.$$

---

**12.7** [◆◆◆] On considère l'équation différentielle à coefficients *non constants* ci-dessous :

$$(E) \quad t^2 y'' + 4ty' + (2 + t^2)y = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Soient  $y$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $z : t \mapsto t^2 y(t)$ .

- Justifier que  $y$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $z$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Démontrer que  $y$  est solution de l'équation si et seulement si  $z$  est solution d'une équation différentielle très simple que l'on précisera.
- Donner l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

---

**12.8** [◆◆◆] Trouver toutes les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\pi - x).$$

---