Équations Algébriques
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Etienne pour les exercices 9.25 et 9.26

Exercices.

Exercice 10.17 [♦♢♢]

1. Calculer les racines carrées du nombre $-8i$.
On donnera ces nombres sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

Notons δ une racine de $-8i$:

$$\delta = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2 - 2i$$

2. Le discriminant Δ vaut $-8i$. Ses racines carrées sont donc $2-2i$ et $-2+2i$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{3-i, 1+i\}$.

□

Exercice 10.18 [♦♢♢]

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calcul de

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z \quad \text{et} \quad \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z$$

On a :

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Et :

$$\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

□

Exercice 10.19 [♦♦♢]

Donner une expression du périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$.
Que conjecture-t-on sur la limite lorsque $n \to +\infty$? Essayer de prouver votre conjecture.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}}||e^{-\frac{\pi}{n}} - e^{\frac{\pi}{n}}| = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Et, puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi$$

□

Exercice 10.20 [♦◊◊]

Soit $\omega \in \mathbb{U}_7$, une racine 7e de l'unité différente de 1.
1. Justifier que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6=0$.
2. Calculer le nombre $\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

1. On a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N}, n>2, \sum\limits_{z\in\mathbb{U}_n} z=0$ dans le 10.18.
2. On a :

$$\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{2+2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5}{\omega^6}=-\frac{2\omega^6}{\omega^6}=-2$$

□

Exercice 10.21 [♦♦◊]

1. Quand dit-on qu'un nombre réel θ est un argument d'un nombre complexe z ?
2. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Donner le module et un argument de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$.
3. Établir l'égalité

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1|=\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

1. θ est un argument de $z\neq 0$ ssi $z=|z|e^{i\theta}$.
2. On a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1=2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}}=2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{\pi(2k+n)}{2n}}$$

Ainsi son module est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et l'un de ses arguments est $\frac{\pi(2k+n)}{2n}$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1|&=\sum_{k=0}^{n-1}|e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1|=\sum_{k=0}^{n-1}|e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)|\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|=2\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

Or, $\forall k\in[\![0,n-1]\!], \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\geq 0$. Ainsi (formule du cours) :

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1|=2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)&=2\cdot\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\frac{\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\\&=2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=2\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\\&=\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\end{aligned}$$

□

Exercice 10.22 [♦♦♢]

Soit θ un nombre réel appartenant à $]0, \pi[$. Résoudre l'équation

$$z^2 - 2e^{i\theta} z + 2ie^{i\theta} \sin\theta = 0.$$

On écrira les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4e^{2i\theta} - 8ie^{i\theta}\sin\theta = 4e^{i\theta}\left(\cos\theta + i\sin\theta - 2i\sin\theta\right)\\ &= 4e^{i\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) = 4e^{i\theta}e^{-i\theta}\\ &= 4\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ x_2 &= e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

□

Exercice 10.23 [♦♦♢]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 2\cos(\theta)z^n + 1 = 0$.

1. $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta) \leq 0$.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2\cos(\theta) + i\sqrt{4\sin^2(\theta)}}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}\\ x_2 &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta}\end{aligned}$$

2. Posons $z' = z^n$.
On sait que z' est solution de $z'^2 - 2\cos(\theta)z' + 1 = 0$.
Ainsi, $z'_1 = e^{i\theta}$ et $z'_2 = e^{-i\theta}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}z_1 &= {z'_1}^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{i\theta}{n}}\\ z_2 &= {z'_2}^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{i\theta}{n}}\end{aligned}$$

□

Exercice 10.24 [♦♦♢]

Résoudre.

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0.$$

Posons $\omega = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)$. On a : $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$.
On a alors $\omega \in \mathbb{U}_4 \setminus \{1\}$.
Ainsi, $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = i$ ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = -1$ ou $\left(\frac{z+i}{z-1}\right) = -i$.
1. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = i \iff z+i = iz+1 \iff z(1-i) = 1-i \iff z = 1$.
2. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = -1 \iff z+i = i-z \iff z = -z \iff z = 0$.
3. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = -i \iff z+i = -1-zi \iff z(1+i) = -1-i \iff z = -\frac{1+i}{1+i} = -1$

L'ensemble des solutions est donc : $\{-1, 0, 1\}$.

□

Exercice 10.25 [♦♦♦]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = z^n$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
z^n = (z+1)^n &\iff \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n = 1 \\
&\iff (1 + \frac{1}{z}) \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \mid 1 + \frac{1}{z} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff \frac{1}{z} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 \\
&\iff z = \frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1} \\
&\iff z = \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})} \\
&\iff z = \frac{\cos(\frac{k\pi}{n}) - i\sin(\frac{k\pi}{n})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})} \\
&\iff z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\tan(\frac{k\pi}{n})}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\{-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\tan(\frac{k\pi}{n})} \,|\, k \in [\![1, n-1]\!]\}$.

□

Exercice 10.26 [♦♦♦]

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} u^2+v^2=-1 \\ uv=1 \end{cases}$$

Soit $(u,v)\in(\mathbb{C}^*)^2$. Soit $(r,\rho)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\theta,\pi)\in\mathbb{R}^2$ tels que $u=re^{i\theta}$ et $v=\rho e^{i\varphi}$

$$\begin{aligned}
(u,v) \text{ est solution} \quad &\iff \begin{cases} u^2+v^2=-1 \\ uv=1 \end{cases} \\
&\iff u^2 \text{ et } v^2 \text{ racines de } X^2+X+1 \\
&\iff (u^2,v^2)\in\left\{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\} \\
&\iff \begin{cases} u^2=e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ v^2=e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{2\pi}{3}[\pi] \\ \rho=1 \\ \varphi=\frac{\pi}{3}[\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{(e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{i\frac{4\pi}{3}}),(e^{i\frac{5\pi}{3}},e^{i\frac{\pi}{3}}),(e^{i\frac{\pi}{3}},e^{i\frac{5\pi}{3}}),(e^{i\frac{4\pi}{3}},e^{i\frac{2\pi}{3}})\right\}$$

$\square$