Propriétés de $\mathbb{R}$
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 2.1 [♦◊◊]

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\ \iff & \frac{a^3 - a^2 b + b^3 - ab^2}{ab} \geq 0 \\ \iff & \frac{a^2(a-b) + b^2(b-a)}{ab} \geq 0 \\ \iff & \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{ab} \geq 0 \\ \iff & \frac{(a-b)^2(a+b)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Or $(a-b)^2 \geq 0$, $(a+b) \geq 0$ et $ab \geq 0$.
Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.2 [♦◊◊]

1. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \iff & a+b \leq a + 2\sqrt{ab} + b \\ \iff & 2\sqrt{ab} \geq 0 \\ \iff & \sqrt{ab} \geq 0 \\ \iff & ab \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
Considérons $a \geq b$, alors $|a-b| = a-b$.

$$\begin{aligned} & |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{a-b} \\ \iff & a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b \\ \iff & 2b \leq 2\sqrt{ab} \\ \iff & b^2 \leq ab \\ \iff & b \leq a \end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque $b \geq a$.
Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 2.3 [♦◊◊] *Manipuler la notion de distance*

En utilisant la notion de distance sur $\mathbb{R}$, écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ |x+3| \leq 6 \text{ et } |x^2 - 1| > 3\}$$

On a :

$$x \in [-9, 3] \text{ et } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

Donc :

$$x \in [-9, -2] \cup [2, 3]$$

Exercice 2.4 [♦♦♢] *Plusieurs façons de définir une moyenne*

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. On définit les nombres m, g, h par

$$m = \frac{a+b}{2}, \qquad g = \sqrt{ab}, \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Et on les appelle respectivement moyenne arithmétique, géométrique et harmonique de a et b.
Démontrer l'encadrement

$$a \leq h \leq g \leq m \leq b$$

Montrons les inégalités une par une :

- $m \leq b \iff \frac{a+b}{2} - b \leq 0 \iff \frac{a-b}{2} \leq 0 \iff a - b \leq 0 \iff a \leq b$.
- $g \leq m \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$.
- $h \leq g \iff \frac{1}{h} \geq \frac{1}{g} \iff \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 0 \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2ab} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2ab} \geq 0$.
- $a \leq h \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{h} \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \geq 0 \iff \frac{b-a}{2ab} \geq 0 \iff b - a \geq 0 \iff a \leq b$

Ainsi, toutes les inégalités sont vraies et $a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

Exercice 2.5 [♦◊◊]

Résoudre l'équation
$$\ln|x| + \ln|x+1| = 0$$
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
$$\begin{aligned} & \ln|x| + \ln|x+1| = 0 \\ \iff & \ln(|x(x+1|) = 0 \\ \iff & |x(x+1)| = 1 \end{aligned}$$

Supposons $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
On a :
$$\begin{aligned} & |x(x+1)| = 1 \\ \iff & x(x+1) = 1 \\ \iff & x^2 + x - 1 = 0 \\ \iff & x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$
Supposons $x \in]-1, 0[$.
$$\begin{aligned} & |x(x+1)| = 1 \\ \iff & -x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$
Il n'y a donc pas de solutions dans $]-1, 0[$.
L'ensemble des solutions de l'équation est : $\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

Exercice 2.6 [♦◊◊]

Résoudre l'équation
$$|x-2| = 6 - 2x$$
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Considérons $x \geq 2$
$$\begin{aligned} & |x-2| = 6 - 2x \\ \iff & x - 2 = 6 - 2x \\ \iff & x = \frac{8}{3} \end{aligned}$$
Considérons $x \leq 2$
$$\begin{aligned} & |x-2| = 6 - 2x \\ \iff & 2 - x = 6 - 2x \\ \iff & x = 4 \end{aligned}$$

Seul la solution $x = \frac{8}{3}$ convient. Ainsi, l'unique solution à l'équation est $\frac{8}{3}$.

Exercice 2.7 [♦♦♦]

Démontrer l'égalité $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x.

Soient $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Notons r la partie fractionnaire de x, ainsi $x = \lfloor x \rfloor + r$.

On a alors $nx = n\lfloor x \rfloor + nr$ et $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nr \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nr \rfloor$.

Conséquemment, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n}$.

Or, $0 \leq \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < 1$ car $0 \leq r < 1$, donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$.

Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor < \lfloor x + 1 \rfloor$.

Par conséquent, $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2.8 [♦♦♢] mal de crane tier

1. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\iff &2\sqrt{x(x+1)} - 2x < 1 \\
\iff &(2\sqrt{x(x+1)})^2 < (1+2x)^2 \\
\iff &4x(x+1) < 4x^2 + 4x + 1 \\
\iff &4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x < 1 \\
\iff &0 < 1
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\
\iff &1 < 2\sqrt{(x+1)^2} - 2\sqrt{x(x+1)} \\
\iff &1 < 2|x+1| - 2\sqrt{x(x+1)} \\
\iff &(2x+1)^2 > (2\sqrt{x(x+1)})^2 \\
\iff &4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x \\
\iff &1 > 0
\end{aligned}$$

2. Soit p un entier supérieur à 2. Que vaut la partie entière de

$$\sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$
On a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc, en remplaçant x par $x-1$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1} < \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Ainsi,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

MAIS ALORS :

$$\sum_{k=1}^{p^2-1} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{p^2-1} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

$$\iff \sqrt{p^2} - \sqrt{1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{p^2-1} - \sqrt{0}$$

$$\iff 2p-2 < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{p^2-1}$$

$$\iff 2p-2 < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \lfloor 2\sqrt{p^2-1} \rfloor$$

Or $2p-2 < 2\sqrt{p^2-1} < 2p$ donc $\lfloor 2\sqrt{p^2-2} \rfloor = 2p-2$
On en conclut :

$$\lfloor \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \rfloor = 2p-2$$

Exercice 2.9 [♦♦♦]

Prouver que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.
Supposons que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que :

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & p \ln 3 = q \ln 2 \\ \iff & \ln(3^p) = \ln(2^q) \\ \iff & e^{\ln(3^p)} = e^{\ln 2^q} \\ \iff & 3^p = 2^q \end{aligned}$$

Or 3^p est toujours impair et 2^q est toujours pair, donc cela est absurde.
Ainsi, $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 2.10 [♦♦♦]

Soient x et y deux rationnels positifs tels que
$\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.
Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel. Supposons $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.
On a :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y \\ \iff & \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \end{aligned}$$

Or $x - y \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ par hypothèse. Donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.
D'autre part,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{x}$$

$\sqrt{x}$ est donc la somme de deux rationnels, et est donc rationnel.
C'est absurde. On en conclut que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Exercice 2.11 [♦♦♢]

Soit l'ensemble
$$A = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
Cette partie de $\mathbb{R}$ est-elle bornée ? Possède-t-elle un maximum ? Un minimum ?
Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a :
$$\begin{aligned} u_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} &= \frac{n^2 - 1}{n} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \\ &= \frac{n^3 - n}{n^3 + n} = \frac{n^3 + n}{n^3 + n} - \frac{2n}{n^3 + n} \\ &= 1 - \frac{2}{n^2 + 1} \end{aligned}$$
Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{2}{(n+1)^2 + 1} - 1 + \frac{2}{n^2 + 1} \\ &= \frac{2}{n^2 + 1} - \frac{2}{n^2 + 2n + 2} \\ &= \frac{4n + 2}{(n^2)(n^2 + 2n + 2)} \end{aligned}$$
C'est toujours positif : on en déduit que, (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.
Elle admet donc un minimum en 1, qui est 0.
Elle admet aussi un majorant lorsque n tend vers l'infini :
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$
Ainsi, A admet 0 comme minimum, n'a pas de maximum et est majorée par 1.