Séries

1 Séries.

1.1 Nature d'une série.

Définition 1 (Série, sommes partielles)**.**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle ou complexe. À partir de (u_n), on définit la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$:

$$\forall n \geq n_0 \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée **série** de terme général u_n, et notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou encore $\sum u_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ le nombre S_n est appelé **somme partielle** d'indice n.

Définition 2 (Série convergente, somme)**.**

Une série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite de ses sommes partielles (S_n) converge.
Dans ce cas on appelle **somme** de la série, et on note $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la limite de (S_n) :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

La série $\sum u_n$ est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

La convergence ou la divergence d'une suite/série sera désignée comme sa **nature**.

On prendra garde à ne pas confondre :

- $\sum u_n$ désigne une *série* (c'est à dire une suite),
- $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$, est un *nombre*, défini pour un entier $n \geq n_0$ donné,
- $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$, somme de la série, est un *nombre* qui n'a de sens que si la série $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 3 (Que savons-nous déjà sur ces séries ?).

$$\sum 1, \qquad \sum (-1)^n, \qquad \sum \frac{1}{2^n}, \qquad \sum \frac{1}{n}, \qquad \sum \frac{1}{n^2}.$$

Remarque.

1. Déterminer la nature d'une série et (si elle est convergente) déterminer sa somme, sont deux problèmes distincts. Il arrivera souvent par la suite qu'on soit en mesure de prouver qu'une certaine série converge, et incapable de "calculer" sa somme, c'est-à-dire d'exprimer simplement ce nombre.
2. Une série divergente, c'est une série dont la somme partielle diverge. Cette dernière peut diverger en tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ mais elle peut aussi ne pas avoir de limite du tout.

Lemme 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \text{ssi} \quad \sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge.}$$

Proposition 5 (Linéarité de la somme).

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Proposition 6 (Séries à termes complexes).

Soit $\sum u_n$ une série de terme général complexe. On a

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent.}$$

S'il y a convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Proposition-Définition 7 (Reste)**.**

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série convergente et $(S_n)_{n\geq n_0}$ la suite de ses sommes partielles.

Pour $n \geq n_0$, on appelle **reste** d'indice n et on note R_n le réel

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k \quad \text{de sorte que} \quad S_n + R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

On a

$$S_n \longrightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \qquad \text{et} \qquad \boxed{R_n \longrightarrow 0}.$$

1.2 Liens entre la série et son terme général.

Proposition 8 (Terme général d'une série convergente)**.**

Si une série $\sum u_n$ est convergente, alors son terme général u_n tend vers 0. La réciproque est fausse.

La contraposée de l'implication précédente nous dit qu'une série dont le terme général ne tend pas vers 0 n'a *aucune chance de converger*. On fixe la terminologie ci-dessous.

Définition 9.

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite **grossièrement divergente**.

Exemple 10.

La série $\sum e^{\frac{1}{n}}$ diverge grossièrement. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mais pas grossièrement.

Le télescopage permet d'établir le résultat simple (mais utile !) ci-dessous.

Proposition 11 (Lien suite-série)**.**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

S'il y a convergence,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim u_n - u_{n_0}.$$

Exemple 12.

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

1.3 Une famille de séries usuelles : les séries géométriques.

On appelle **série géométrique** de raison $q \in \mathbb{C}$ la série de terme général q^n.
Leurs sommes partielles étant faciles à calculer, on dispose du critère de convergence ci-dessous.

Proposition 13 (Séries géométriques)**.**

Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\sum q^n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad |q| < 1.$$

Dans le cas où la série converge, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Exemple 14.

Soit $r \in]0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum r^n \cos(n\theta)$ converge et montrer que sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos(\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta)}.$$

2 Outils pour les séries à termes positifs.

Soit une série <u>réelle</u> $\sum u_n$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, on dit que la série est **série à termes positifs**.

2.1 Comparaison des séries à termes positifs.

Proposition 15 (Vive la croissance !)**.**

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels <u>positifs</u> et $(S_n)_{n \geq n_0}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$.

1. La <u>suite</u> $(S_n)_{n \geq n_0}$ est croissante.
2. La <u>série</u> $\sum u_n$ converge si et seulement si la <u>suite</u> $(S_n)_{n \geq n_0}$ de ses sommes partielles est majorée.
3. Si la série $\sum u_n$ converge alors $S_n \leq \displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si la série $\sum u_n$ diverge alors $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition 16 (Comparaison avec $\leq$ ou O).

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes <u>positifs</u> telles que

$$u_n \leq v_n \quad \text{à.p.d.c.r} \qquad \text{ou} \qquad u_n = O(v_n) \qquad \text{ou a fortiori} \qquad u_n = o(v_n)$$

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 17 (Comparaison avec un équivalent).

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes <u>positifs</u> telles que $u_n \sim v_n$. Alors,

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

Exemple 18.

Déterminer la nature des séries ci-dessous :

$$\sum \frac{1}{n^2 \ln(n)}, \qquad \sum \frac{\ln(n)}{n}, \qquad \sum \frac{n^2}{2^n}, \qquad \sum \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sum \tan\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

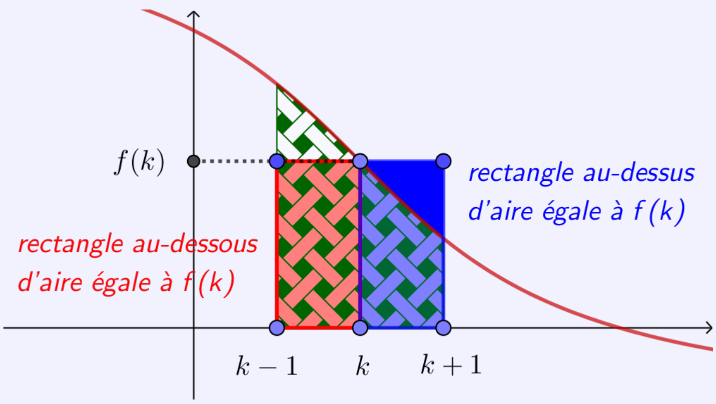
2.2 Comparaison série/intégrale et application aux séries de Riemann.

Dans le cas où f est une fonction continue, positive, et monotone, on sait comparer les sommes partielles de la série $\sum f(n)$ à des intégrales à l'aide de la *méthode des rectangles.*

Lemme 19 (Comparer une somme partielle à des intégrales).

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et <u>décroissante</u>. Alors,

$$\forall k \geq n_0 + 1 \qquad \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$



Un encadrement analogue est possible pour une fonction croissante, on saura l'écrire si besoin.

Méthode (Encadrer une somme partielle)**.**

Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante. On sait que pour $k \geq n_0$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k)$$

et pour tout $k \geq n_0 + 1$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités on obtient pour $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq f(n_0) + \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$

Par la relation de Chasles :

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t.$$

Cette technique permet d'encadrer des sommes partielles, par exemple pour obtenir un équivalent. Elle s'applique aussi pour étudier des restes de séries convergentes.

Théorème 20 (Cas d'une fonction décroissante et positive)**.**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, décroissante et positive.

$$\text{La série } \sum_{n \geq n_0} f(n) \text{ et la suite } \left(\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t \right)_{n \geq n_0} \text{ sont de même nature.}$$

Les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ sont appelées **série de Riemann** ; et seront désormais *usuelles*.

Théorème 21 (Nature d'une série de Riemann)**.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Le cas $\alpha = 1$ apparaît comme un cas critique, le point où la "transition de phase" a lieu :

$$\sum \frac{1}{n} \text{ DV} \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \text{ CV}.$$

Exemple 22 (Comparaison à une série de Riemann : un exemple important).

Démontrer que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ est convergente.

Exemple 23 (Généralisation de l'exemple précédent : séries de Bertrand (HP)).

Soient α et β deux réels. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est appelée **série de Bertrand**.

1. si $\alpha > 1$, elle est convergente ;
2. si $\alpha < 1$, elle est divergente ;
3. si $\alpha = 1$,
   (a) elle est convergente si $\beta > 1$;
   (b) elle est divergente si $\beta \leq 1$.

Exemple 24 (Équivalent pour la somme partielle d'une série de divergente).

À l'aide d'une comparaison série/intégrale,

1. retrouver que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$,
2. démontrer que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$,
3. démontrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

3 Outils pour les séries à termes réels ou complexes.

3.1 Convergence absolue

Dans la définition suivante, $|\cdot|$ désigne, selon le contexte, la valeur absolue ou le module.

Définition 25 (Convergence absolue).

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit qu'il y a **convergence absolue** de la série $\sum u_n$ si la série à terme positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 26.

Pour une série numérique, la convergence absolue implique la convergence.

La réciproque n'est pas vraie : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exemples 27.

Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum \frac{\sin(n)}{2^n}$ convergent absolument donc convergent.

Proposition 28 (Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente)**.**

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors, pour $n_0 \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

Preuve. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Pour $n \geq n_0$, on sait écrire l'inégalité triangulaire pour une somme *finie* de nombres complexes :

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \quad \text{ce qui donne par passage à la limite} \quad \left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k|.$$

La série est absolument convergente, ce qui justifie l'existence de la limite à droite.
D'après le théorème 26, la série $\sum u_n$ converge, ce qui justifie l'existence de la limite à gauche. $\square$

Proposition 29 (Comparaison avec O ou o)**.**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques telles que $u_n = O(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.

C'est vrai a fortiori si $u_n = o(v_n)$.

Exemple 30 (Règle de d'Alembert (comparaison à une série géométrique))**.**

Soit $\sum u_n$ une série complexe dont les termes sont non nuls à.p.d.c.r, et ℓ un nombre réel positif.

1. Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell$ avec $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument (donc converge).
2. Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell$ avec $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Il ne faut pas s'exagérer l'utilité de ce résultat ! Par exemple, pour les séries de Riemann ou les séries de Bertrand, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 et on ne peut rien conclure. Cette règle sera utile principalement en spé dans l'étude des séries entières (les séries de Taylor), dont voici ci-dessous un exemple important.

Proposition 31 (Série exponentielle)**.**

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente.

Admis pour le moment : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

3.2 Séries alternées.

Définition 32.

Une **série alternée** est une série de la forme $\sum (-1)^n u_n$ où (u_n) est une suite de signe constant.

Théorème 33 (Théorème des séries alternées)**.**

Soit (u_n) une suite de signe constant.

$$\boxed{\text{Si la suite } (|u_n|) \text{ converge en décroissant vers } 0, \text{ alors la série } \sum (-1)^n u_n \text{ converge}}.$$

En cas de convergence,

- le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe de son premier terme $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$;
- la somme $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de son premier terme $(-1)^{n_0} u_{n_0}$ et $|S| \leq |u_{n_0}|$.

Exemple 34.

Retrouver que $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente. Démontrer que $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente.

Exemple 35 (Comparaison à une série alternée : une erreur à éviter)**.**

Déterminer **l'erreur** dans le raisonnement ci-dessous, puis proposer une solution satisfaisante.

— On a $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$.

— Or, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, d'après le théorème des séries alternées, qui s'applique puisque $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

— Par comparaison, la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ est convergente.

Exemple 36 (Série de Riemann alternée)**.**

Étudier le type de convergence de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en discutant selon les valeurs de α.

Valeur de N pour laquelle $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une approximation de $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ à 10^{-2} près.

Si $\alpha > 1$, exprimer $\phi(\alpha)$ à l'aide de $\zeta(\alpha)$, où

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \phi(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

Exercices

Séries à termes positifs.

$\boxed{\textbf{31.1}}$ **[♦◇◇]** Donner la nature des séries suivantes.

$$\sum \arccos\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum \arcsin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum \frac{1}{3^n} \quad \sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}, \quad \sum ne^{-n}.$$

$\boxed{\textbf{31.2}}$ **[♦◇◇]** Étudier la convergence de la série $\sum \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

$\boxed{\textbf{31.3}}$ **[♦◇◇]** Étudier la convergence de la série $\sum \ln(n)^{-\ln(n)}$.

$\boxed{\textbf{31.4}}$ **[♦◇◇]** Quelle est la nature de $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$?

$\boxed{\textbf{31.5}}$ **[♦◇◇]** Étudier la convergence de la série $\sum e^{-n^\alpha}$, en discutant selon α (réel).

$\boxed{\textbf{31.6}}$ **[♦◇◇]** Quelle est la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$?
Le résultat hors programme sur les séries de Bertrand, exemple du cours, ne sera pas utilisé ici.

$\boxed{\textbf{31.7}}$ **[♦♦◇]** Quelle est la nature de $\sum \frac{(\lambda n)^n}{n!}$ (à discuter selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

$\boxed{\textbf{31.8}}$ **[♦♦◇]** Soit $a > 1$.
Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{na^{p_n}}$, p_n étant le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n.

$\boxed{\textbf{31.9}}$ **[♦◇◇]** [De l'importance de la positivité dans le théorème de comparaison]
On pose

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.
2. Montrer que l'on a cependant $u_n \sim v_n$.

$\boxed{\textbf{31.10}}$ **[♦♦◇]** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. Démontrer que $\sum u_n$ est convergente et calculer la somme de cette série.

$\boxed{\textbf{31.11}}$ **[♦♦◇]** On considère (u_n) définie par récurrence par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.
2. Montrer que $\sum u_n^2$ est convergente.
3. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ sont divergentes.

31.12 **[♦♦◇]** Soit (u_n) décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Soit S_n la somme partielle de la série au rang n. Calculer $S_{2n} - S_n$.
2. En déduire que $nu_{2n} \to 0$.
3. Montrer que $nu_n \to 0$.
4. Réciproquement, si (u_n) est décroissante et que $nu_n \to 0$, a-t-on que $\sum u_n$ converge ?

31.13 **[♦♦♦]**
Soit (u_n) décroissante de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$s_n = -nu_n + \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On suppose que (s_n) est bornée. Montrer que $\sum u_n$ converge.

31.14 **[♦♦◇]**

1. Soit (u_n) une suites de réels strictement positifs.
Montrer que si $\sqrt[n]{u_n} \to r$, où $r \in [0, 1[$, alors $\sum u_n$ est convergente.
Note : cette implication est appelée critère de Cauchy.
2. Examiner la nature de $\sum \left(\operatorname{ch} \dfrac{a}{n}\right)^{-n^3}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$.

31.15 **[♦♦◇]** Quelle est la partie entière de $\sum\limits_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$?

31.16 **[♦♦◇]** Soit (u_n) une suite <u>décroissante</u> de réels positifs. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
2. Application : déduire le critère de convergence des séries de Riemann de celui des séries géométriques.
3. Application : Discuter, selon les valeurs de α, la convergence de la série dite de Bertrand

$$\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}.$$

31.17 **[♦♦◇]** *Presque Stirling.*
Pour $n \geq 1$, on note $u_n = \ln\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right)$.

1. En exploitant le lien suite-série, démontrer que (u_n) converge.
Indication : on pourra commencer par démontrer que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{12n^2}$.
2. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Comme on le sait, cette constante C vaut $\sqrt{2\pi}$. On peut le démontrer à l'aide des intégrales de Wallis.

31.18 **[♦♦♦]** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^n}{2^k}$.
Montrer que A_n est bien défini et l'exprimer en fonction des $(A_j, 0 \leq j \leq n-1)$.
Calculer A_0 et en déduire que A_n est un entier pair.

Séries de terme général réel ou complexe.

$\boxed{31.19}$ **[♦♦◇]** Soient les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_n = (\sqrt{2}-1)^n\pi; \quad b_n = (\sqrt{2}+1)^n\pi.$$

Examiner la nature des séries $\sum \sin(a_n)$ et $\sum \sin(b_n)$.
Indication : On pourra calculer $(1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n$.

$\boxed{31.20}$ **[♦◇◇]** Soit $u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln(1+\frac{1}{n})\right)$. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

$\boxed{31.21}$ **[♦♦◇]** Convergence et somme de la série de terme général

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

$\boxed{31.22}$ **[♦♦♦]** Convergence et somme de

$$\sum (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$\boxed{31.23}$ **[♦♦◇]** Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Existe-t-il des réels a et b tels que la série de terme général u_n soit convergente ?
2. Dans l'unique cas favorable ($a=-2$, $b=1$), calculer la somme de la série.

$\boxed{31.24}$ **[♦♦◇]** Soit (a_n) une suite de $\mathbb{C}^n$ telle que $\sum |a_n|$ converge. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k).$$

1. Démontrer que (u_n) est bornée.
2. Démontrer que (u_n) converge.

$\boxed{31.25}$ **[♦♦◇]** Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Nature de $\sum u_n$?
2. Nature de $\sum (-1)^n u_n$. *Indication :* Calculer $(-1)^{n+1}u_{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

$\boxed{31.26}$ **[♦♦♦]** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sqrt{k} \quad \text{et} \quad t_n = s_n + s_{n+1}.$$

1. Montrer que $\sum (t_{n+1}-t_n)$ est convergente.
2. En déduire que (t_n) converge vers une limite ℓ strictement négative puis que $s_n \sim (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{2}$.
3. Nature de $\sum \frac{1}{s_n}$.

$\boxed{31.27}$ **[♦♦♦]** Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Convergence et somme de

$$\sum \frac{j^n}{n}.$$
