Colles, semaine 24 (22/04→26/04)

Séries à termes positifs

Le cours sur les séries est presque terminé mais le théorème sur les séries alternées attendra le retour des vacances : on se contentera cette semaine des séries à termes positifs.

Le premier réflexe des étudiants doit être (si le télescopage ne permet pas exceptionnellement le calcul des sommes partielles) de **comparer** le terme général de la série à celui d'une **série usuelle**. Possible sinon : la comparaison série-intégrale.

Le mot *comparer* est désormais compris au sens large : inégalités, équivalent, petit et grand O. Cette colle est donc aussi l'occasion de pratiquer les DL et le calcul d'équivalents (cf DM).

Les *séries usuelles* sont de deux types : les séries géométriques et les séries de Riemann.
Le cas des séries de Bertrand a été traité, mais seulement en tant qu'exemple.

Questions de cours.

- Théorème de convergence des séries géométriques.
- Convergence de la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ (cours) ou $\sum \dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$ (TD) ou $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ (DM) *(comparaison à une série de Riemann).*
- Calcul d'un équivalent pour $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ *(par comparaison série-intégrale).*
- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et sa somme vaut $-\ln(2)$ *(travail sur la somme partielle, tri pair-impair).*

Savoir-faire importants.

- Savoir prouver une comparaison du type $u_n = o(v_n)$, où $u_n = O(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$.
- La comparaison avec $\frac{1}{n^2}$ (*la clásica*) ne marche pas toujours mais souvent.
- Connaître précisément le critère de convergence pour les séries géométriques et les séries de Riemann.
- Savoir mettre en oeuvre une comparaison série-intégrale.

À venir en semaine 25 : Séries (fin). Représentation matricielle des applications linéaires.