# Colles, semaine 28 (3/06→7/06)

## *Espaces probabilisés et variables aléatoires*

$\boxed{\textbf{Colleurs, attention !}}$ : les notions d'espérance et de variance d'une variable aléatoire ne sont pas au programme de cette colle. Un petit cours leur sera consacré plus tard : on comprend bien mieux le lien entre variance et covariance lorsqu'on a compris celui entre carré d'une norme et produit scalaire.

**Questions de cours.**

- (*) Un exemple d'utilisation d'un couple $(\Omega, P)$ explicite : le paradoxe des anniversaires.
- Énoncé et preuve de la formule des probabilités totales.
- *Loi : définition théorique.* Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Montrer que $P_X : A \mapsto P(X \in A)$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.
- *Loi : ce qu'on calcule dans la pratique* Soit $X$ une v.a. de loi uniforme sur $\{0, \cdots, 20\}$. Donner la loi de $\lfloor\sqrt{X}\rfloor$.
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes, de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$.
  Pour $1 \leq k \leq n-1$, on note $A_k = \{X_k \neq X_{k+1}\}$.
  Montrer que les événements $(A_k)$ sont deux à deux indépendants.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes, toutes de loi $\mathcal{B}(p)$.
  Montrer que la variable $X_1 + \cdots X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

**Savoir-faire importants.**

- S'abstenir d'écrire des d'horreurs, du genre union de probabilités, etc... Il faut être attentif à la nature des objets : événement, variable aléatoire, probabilité, probabilité d'un événement...
- Ne pas confondre « incompatibles » et « indépendants » !
- Savoir « décomposer » un événement en union, intersection d'événements plus simples.
- Savoir écrire les formules des probabilités composées, la formule de Bayes, et surtout la formule des probabilités totales.
- Savoir justifier qu'un système complet d'événements en est bien un.
- Savoir exploiter l'indépendance d'une famille d'événements, d'une famille de variables aléatoires.
- Dans un calcul de probabilité/loi impliquant plusieurs variables aléatoires, savoir "fixer" la valeur de l'une d'elles grâce aux probabilités totales.

**À venir en semaine 29 :** Espaces préhilbertiens.