Corrigé du DM 9

Problème. Série harmonique et série harmonique alternée.

Partie A. Divergence de la série harmonique

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$. La suite (H_n) est donc bien croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculons
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$
On a minoré chacun des termes de la somme par le plus petit d'entre eux !

3. La suite (H_n) étant croissante, le théorème de la limite monotone donne qu'elle est convergente vers une limite finie, ou bien qu'elle diverge vers $+\infty$.
Supposons que (H_n) ne tend pas vers $+\infty$. (H_n) converge donc vers une limite finie ; notons-là ℓ. En passant à la limite dans l'inégalité obtenue en 2, on obtient
$$\ell - \ell \geq 0 \qquad \text{soit} \quad 0 \geq \frac{1}{2}.$$
Ceci étant faux, on en déduit que $\boxed{H_n \to +\infty}$.

Partie B. Vitesse de divergence.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité $\forall x \in [k, k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ vient simplement de la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Intégrons cette inégalité (propriété de croissance de l'intégrale avec $k \leq k+1$). On obtient
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} \mathrm{d}t,$$
ce qui donne bien
$$\frac{1}{k+1} \leq \ [\ln(t)]_k^{k+1} \ \leq \frac{1}{k}.$$
Sommons, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ $(n \geq 2)$
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
Le télescopage, ainsi qu'un changement d'indice à gauche donne
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1) \leq H_{n-1},$$
On a bien obtenu $\boxed{\forall n \geq 2 \quad H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1}}$.

2. *Parlons de stratégie. Il nous faut démontrer l'existence d'une limite, et l'énoncé nous a fait montrer des inégalités... On se dirige donc vers une utilisation du théorème des gendarmes ! Il nous faut encadrer* $\frac{H_n}{\ln(n)}$, on va "croiser les inégalités".

. Soit $n \geq 2$. L'inégalité de la question précédente (à gauche) donne
$$H_n \leq 1 + \ln(n) \qquad \text{soit} \quad \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$
L'inégalité de la question précédente (à droite), écrite pour $n+1$ donne
$$\ln(n+1) \leq H_n \qquad \text{soit} \quad \frac{H_n}{\ln(n)} \geq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}.$$
On a donc l'encadrement
$$\forall n \geq 2 \quad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$
On a $1 + \frac{1}{\ln(n)} \to 1$. De plus,
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1.$$
C'est quand même merveilleux la factorisation par le terme prépondérant...

D'après le théorème d'encadrement, on a bien $\boxed{\frac{H_n}{\ln(n)} \to 1}$.

Partie C. Constante d'Euler.

Intéressons-nous à la monotonie de (u_n). Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

Cette différence est négative, d'après la première inégalité prouvée en partie B : la suite (u_n) est donc décroissante. De plus,

$$u_n = H_n - \ln(n) \geq H_{n-1} - \ln(n) \geq 0,$$

d'après une autre inégalité de la partie B. La suite (u_n) est donc minorée (par 0).
On a prouvé que u est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite finie, que l'énoncé note γ (c'est la fameuse *constante d'Euler*).

La suite u est minorée par 0 et comme elle est décroissante, elle est majorée par son premier terme qui vaut 1 : on a $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq u_n \leq 1$.
Par stabilité des inégalités larges, on obtient en passant à la limite $0 \leq \gamma \leq 1$.

Notons $\varepsilon_n := H_n - \ln(n) - \gamma$. Ce qui précède prouve que $\varepsilon_n \to 0$. On a donc

$$\boxed{H_n \ = \ \ln(n) \ + \ \gamma \ + \ \varepsilon_n} \qquad \text{avec } \varepsilon_n \to 0.$$

Partie D. Une application.

1. On va démontrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Cela suffira à répondre à la question puisque nous savons par théorème que deux suites adjacentes convergent, et ce vers une limite commune.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \geq 0, \end{aligned}$$

   Ceci démontre que (S_{2n}) est décroissante et que (S_{2n+1}) est croissante.

   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \to 0$.

   Ceci achève de prouver que $\underline{(S_{2n}) \text{ et } (S_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant un tri pair-impair, on a

$$\begin{aligned} S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{2j}}{2j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{2j-1}}{2j-1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \\ &= \frac{1}{2}H_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \end{aligned}$$

   Dans la dernière égalité, la somme est celle des termes impairs de H_{2n}. On peut donc faire apparaître H_{2n} en ajoutant les termes d'indice pair : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2j}$, soit $\frac{1}{2}H_n$:

$$S_{2n} = \frac{1}{2}H_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} = \frac{1}{2}H_n + \frac{1}{2}H_n - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \right) = H_n - H_{2n}.$$

3. D'après la question précédente, en utilisant le développement de la partie C,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= H_n - H_{2n} \\ &= (\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n) - (\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}) \\ &= \cancel{\ln(n)} - \cancel{\ln(n)} - \ln(2) + \varepsilon_n - \varepsilon_{2n}. \end{aligned}$$

   Or, $\varepsilon_n \to 0$ et $\varepsilon_{2n} \to 0$. On en déduit que (S_{2n}) a pour limite $-\ln(2)$.

   Elle a aussi pour limite la limite de (S_n), dont elle est extraite, ce qui achève de prouver que

$$\boxed{S_n \to -\ln(2)}.$$