8 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Introduction : Notion d'équation différentielle.

En physique, en chimie, en économie... on étudie parfois l'évolution, au sein d'un système, d'une quantité d'intérêt Q, dépendant d'un paramètre t (par exemple le temps). On va donc être amené à s'interroger sur la *fonction* $Q : t \mapsto Q(t)$. Les contraintes s'exerçant sur le système sont traduites à travers des équations, qui peuvent faire intervenir Q mais aussi ses dérivées successives.

Considérons trois exemples issus de la physique.

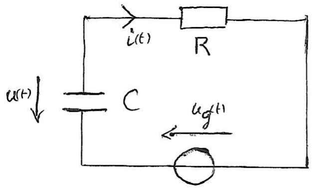

FIGURE 1 – Circuit RC série.

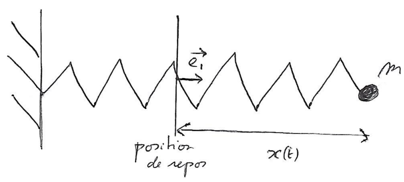

FIGURE 2 – Ressort

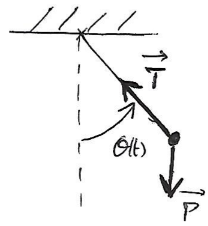

FIGURE 3 – Pendule

Exemple 1. Circuit RC série.

Soient une résistance R et un condensateur de capacité C branchés en série à un générateur de tension sinusoïdal imposant à ses bornes une tension $u_g(t) = U_0 \sin(\omega t)$. On étudie la tension u aux bornes du condensateur. Si on note i le courant traversant le circuit, la loi des mailles amène $u_g = u + Ri$. Or, on a $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. D'où, pour $t \geq 0$,

$$RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + u(t) = U_0 \sin(\omega t) \tag{1}$$

Exemple 2. Masse attachée à un ressort.
Soit une masse m, attachée à un ressort ayant un coefficient de rappel k. La masse se déplace sur une surface

plane, avec un coefficient de frottement fluide λ. On étudie la position x de la masse au cours du temps. Notons $\overrightarrow{a}$ son accélération. Le principe fondamental de la dynamique donne

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_{rappel} + \overrightarrow{F}_{frott}.$$

En dehors du poids $\overrightarrow{P}$ et de la réaction normale du support $\overrightarrow{N}$, la masse est soumise à la force de rappel $\overrightarrow{F}_{rappel} = -kx(t)\overrightarrow{e_1}$, et à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F}_{frott} = -\lambda\overrightarrow{v} = -\lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_1}$. Son accélération est $\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_1}$. Ainsi, en projetant l'égalité vectorielle sur $\overrightarrow{e_1}$, on obtient pour tout $t \geq 0$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + kx(t) = 0. \tag{2}$$

Exemple 3. Pendule simple, sans frottement.
Une masse attachée à un fil non élastique, et non pesant, de longueur ℓ. La force de tension $\overrightarrow{T}$, orthogonale au vecteur vitesse, ne travaille pas, contrairement au poids $\overrightarrow{P}$. On étudie l'angle $\theta(t)$ entre la position à l'instant t et celle de repos. En dérivant une expression de l'énergie mécanique, constante ici, on peut obtenir la relation suivante, pour $t \geq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{g}{\ell}\sin\left(\theta(t)\right) = 0, \tag{3}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

Les relations (1), (2) et (3) sont des **équations différentielles**. Le plus haut degré de dérivation mis en jeu dans l'équation est appelé **ordre** de l'équation. L'équation (1) est d'ordre 1 car seule la première dérivée y figure. Les équations (2) et (3) sont, elles, d'ordre 2.

On dit d'une équation différentielle qu'elle est **linéaire** si elle se présente sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)}(t) = b(t),$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et b sont des fonctions. Les équations (1) et (2) sont linéaires, ce qui n'est pas le cas pour (3) à cause du sinus.

*

Dans ce cours on résout les équations de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$. On se restreint donc à l'étude de (certaines) équations différentielles linéaires d'ordre 1.

1 Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 1.

Définition 1.

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues sur I. On considère l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

- On dit que $y : I \to \mathbb{K}$ est **solution** de (E) sur I si elle est dérivable sur I et si $\forall x \in I \; y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
- La fonction b est souvent appelée **second membre** de l'équation.
- On appelle **équation homogène** associée à (E) (ou équation "sans second membre") l'équation différentielle
$$y' + a(x)y = 0 \qquad (E_0)$$

Dans tout ce qui suit, sauf précision du contraire, (E) et (E_0) désignent les équations ci-dessus.
La proposition suivante découle de la linéarité de l'équation.

Proposition 2 (Lien entre S et S_0)**.**

Si z_1 et z_2 deux solutions de (E) sur I, alors la fonction $(z_1 - z_2)$ est solution sur I de l'équation homogène (E_0).
Par conséquent, si S et S_0 désignent respectivement les ensembles des solutions de (E) et de (E_0), et si $z \in S$ (z est une solution particulière de l'équation) alors

$$S = \{z + y, \quad y \in S_0\}.$$

Pour connaître *toutes* les solutions de (E), il suffit donc de

- connaître *toutes* les solutions de (E_0) $\longrightarrow$ partie 2 du cours.
- connaître *une* solution de (E) $\longrightarrow$ partie 3 du cours.

Proposition 3 (Structure de S_0)**.**

L'ensemble S_0 contient la fonction nulle et il est stable par combinaison linéaire.

Précisons le second point : si y_1 et y_2 deux solutions de (E_0) sur I, λ, μ sont deux scalaires de $\mathbb{K}$, alors $(\lambda y_1 + \mu y_2)$ est une solution de (E_0) sur I.

Remarque. Plus tard dans l'année, la proposition précédente s'énoncera en écrivant que S_0 est un *sous-espace vectoriel* dans l'espace des fonctions dérivables. Dans le cas des ED linéaires d'ordre 1, le prochain paragraphe va montrer que ce sous espace est de *dimension* 1 : c'est une *droite* vectorielle.

2 Résolution de l'équation homogène.

On va donner *toutes* les solutions de

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (E_0)$$

sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Cas particulier (instructif) : le cas où a est une fonction constante (égale à $a \in \mathbb{K}$). On montre que les solutions de $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-ax}$, où λ est une constante quelconque de $\mathbb{K}$.

Dans le cas général d'une fonction $a : I \to \mathbb{C}$, le résultat ci-dessus est généralisé par le théorème suivant.

Théorème 4.

Soit (E_0) l'équation $y' + a(x)y = 0$, où a est une fonction continue sur I.
Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) sur I est

$$S_0 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

On dit aussi que $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est la **solution générale** de (E_0).

Remarque. L'ensemble ci-dessus est une droite : les solutions de (E_0) sont les multiples d'une même solution : $x \mapsto e^{-A(x)}$, que l'on peut voir comme le vecteur directeur de la droite.

Exemple. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + x^2 y = 0$ sont les fonctions de l'ensemble $\left\{ x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^3}{3}}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

3 Équation générale : obtenir une solution particulière.

Il s'agit ici de trouver *une* solution de l'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

3.1 Principe de superposition.

Lorsque le second membre se présente comme somme de deux fonctions, la proposition suivante, qui découle de la linéarité de l'équation, peut être utile.

Proposition 5 (Principe de superposition)**.**

Soient a, b_1, b_2 trois fonctions continues sur I. Si

- y_1 est solution sur I de $y' + a(x)y = b_1(x) \quad (E_1)$,
- y_2 est solution sur I de $y' + a(x)y = b_2(x) \quad (E_2)$,

alors $y_1 + y_2$ est solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x) \quad (E_3)$.

Exemple. Trouver une solution de l'équation $y' + 2y = 1 + e^x$.

3.2 Méthode générale : variation de la constante.

L'idée est de chercher une solution de (E) de la forme $z : x \mapsto \lambda(x)u(x)$, où u est une solution (non nulle) de l'équation homogène (E_0) et λ une fonction dérivable de notre choix. Il nous faut comprendre comment $\boxed{\textit{choisir}}$ la fonction λ pour que la fonction z soit solution de (E). On a

$$\begin{aligned} z' + az &= (\lambda u)' + a(\lambda u) \\ &= \lambda' u + \lambda u' + \lambda a u \\ &= \lambda' u + \underbrace{\lambda\left(u' + au\right)}_{=0}, \end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière ligne que u est solution de (E_0). Ainsi,

$$\begin{array}{cccc} z \text{ est solution de } (E) & \iff & z' + az = b & \text{sur } I \\ & \iff & \lambda' u = b & \text{sur } I. \end{array}$$

Lorsque u s'écrit sous la forme $u = e^{-A}$, où A est une primitive de a, on a

$$z \text{ est solution de } (E) \quad \iff \quad \lambda' = be^{A} \quad \text{sur } I.$$

Notre fonction z sera donc solution si et seulement si λ est choisie parmi les primitives de be^A.

Exemple. Résolution de $y' + 2xy = \cos(x)e^{-x^2}$.

4 Synthèse.

Théorème 6 (de synthèse)**.**

Soient $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. L'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

a des solutions. Si z est une telle solution (« particulière ») et A une primitive de a sur I, alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \left\{x \mapsto z(x) + \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{K}\right\}.$$

Preuve.
- La fonction a est continue sur l'intervalle I. Elle y admet donc des primitives (conséquence du TFA). Si A est l'une d'entre elles, $u : x \mapsto e^{-A(x)}$ est solution de l'équation homogène associée.
- Posons $z = \lambda u$, où λ est une fonction définie sur I. En expliquant la méthode de variation de la constante, on a prouvé que si λ est une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$, alors z est une solution de (E). Une telle primitive existe-t-elle ? Oui car $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ est continue, comme produit et composée.
- D'après la proposition 2, l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{z + y, \quad y \in S_0\} \underset{\text{Th4}}{=} \left\{x \mapsto z(x) + \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{K}\right\}.$$

. $\square$

Définition 7.

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale (valeur imposée en un point)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

Théorème 8 (de Cauchy-Lipschitz, cas linéaire)**.**

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$ admet une unique solution sur I.

Preuve. D'après le théorème précédent, l'équation différentielle admet des solutions. On en fixe une que l'on note z. Si A une primitive fixée de a sur I, alors les solutions sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto z(x) + \lambda e^{-A(x)}.$$

Parmi ces fonctions, on veut distinguer celles qui satisfont la condition initiale. On écrit donc

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 &\iff z(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 \\ &\iff \lambda = e^{A(x_0)} \left(y_0 - z(x_0) \right). \end{aligned}$$

Il existe donc une unique valeur pour λ pour laquelle $y(x_0) = y_0$; notons-la λ_0. Le problème de Cauchy possède une unique solution : la fonction $y = z + \lambda_0 e^{-A}$. $\square$