Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce cours $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les lettres n et p des entiers naturels non nuls.
Sauf mention explicite du contraire, les familles de vecteurs manipulées sont finies.

Convention.

Convenons que dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E la famille vide $()$ est libre et qu'elle engendre $\{0_E\}$.

1 Espaces de dimension finie.

1.1 Définition et exemples.

Définition 1.

Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** si il est engendré par une famille finie de vecteurs.
Sinon, on dira que E est de **dimension infinie**.

Exemples.

- L'espace nul $\{0_E\}$ est de dimension finie : la famille vide $()$ en est une base, par convention.
  Attention : (0_E) engendre l'espace nul mais n'est pas une famille libre.
- Les espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, et $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie : on connait pour chacun au moins une base (donc une famille génératrice) :
  - pour $\mathbb{K}^n$, la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$;
  - pour $\mathbb{K}_n[X]$, la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$;
  - pour $M_{n,p}(\mathbb{K})$, la base canonique $(E_{i,j}, i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, p]\!])$.
- L'espace $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie ; on le montre par l'absurde.

1.2 Existence de bases en dimension finie.

Lemme 2 (de la base extraite)**.**

Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre un $\mathbb{K}$-ev E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.

Preuve. On note $\mathcal{G} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille génératrice finie de E, dont on suppose qu'elle contient une sous-famille libre $(x_i)_{i\in I}$. L'idée : faire grossir cette sous-famille en ajoutant un à un m vecteurs de la famille génératrice et en s'assurant à chaque ajout que la famille obtenue demeure une famille libre.

<u>Initialisation.</u> On pose $I_0 = I$. La famille $(x_i)_{i\in I_0}$ est <u>libre</u> (on a ajouté 0 vecteurs).

<u>Hérédité.</u> Supposons qu'on a une famille <u>libre</u> $(x_i)_{i\in I_k}$ avec $k\in[\![0,n]\!]$. Elle a été obtenue en ajoutant k vecteurs à la famille libre $(x_i)_{i\in I_0}$, choisis parmi ceux de la famille génératrice. Deux cas se présentent.

- Premier cas : $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I_k} = E$. Alors, la famille $(x_i)_{i\in I_k}$ est libre et génératrice : c'est une base de E et on peut s'arrêter.
- Second cas : $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I_k} \subsetneq E$. On va ajouter un vecteur à la famille. Nécessairement, l'un des vecteurs de la famille génératrice $\mathcal{G}$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I_k}$, car si cet espace contenait tous les vecteurs de $\mathcal{G}$, alors il contiendrait tous les vecteurs de E puisque $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$. Plus précisément,

$$\exists j \in \{1,\dots,n\}\setminus I_k \quad x_j \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I_k}.$$

  Posons $I_{k+1} = I_k\cup\{j\}$. D'après la caractérisation des familles liées donnée dans le cours précédent, la famille $(x_i)_{i\in I_k}$ étant libre, on est assuré que $(x_i)_{i\in I_{k+1}}$ l'est aussi.

<u>Terminaison.</u> La famille $\mathcal{G}$ est finie : on ne peut donc ajouter qu'un nombre fini de vecteurs m à la sous-famille libre de départ. On a alors obtenu un ensemble $I_m\subset\{1,\dots,n\}$ tel que

$$\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I_m} = E \quad \text{et} \quad (x_i)_{i\in I_m} \text{ est libre.}$$

Il reste à poser $J = I_m$. La famille $(x_j)_{j\in J}$ est libre et génératrice : c'est une base de E. □

Théorème 3 (de la base extraite)**.**

De toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut extraire une base.

Théorème 4 (de la base incomplète)**.**

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base.

Corollaire 5 (Existence des bases en dimension finie)**.**

Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

1.3 Cardinaux des familles de vecteurs en dimension finie

Lemme 6.

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs ($n \in \mathbb{N}$), toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Preuve Lemme 6. L'assertion est claire pour $n = 0$ (n'est-ce pas ?) On va ensuite faire une récurrence sur $\mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion du lemme.

- Initialisation ($n = 1$). Soit E un espace vectoriel engendré par un vecteur x. En bref, deux vecteurs de E vont être colinéaires à x donc colinéaires tous les deux et former une famille liée. Détaillons, en considérant deux vecteurs y_1 et y_2 dans $E = \mathrm{Vect}(x)$. Il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 tels que $y_1 = \lambda_1 x$ et $y_2 = \lambda_2 x$. On a alors
$$\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0_E.$$
Dans le cas où $\lambda_1 \neq 0$, ceci prouve que (y_1, y_2) est liée.
Dans le cas où $\lambda_1 = 0$, on obtient $y_1 = \lambda_1 x = 0_E$, ce qui donne encore que (y_1, y_2) est liée. $\mathcal{P}(1)$ est démontrée.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Pour cela, considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E engendré par $n+1$ vecteurs $(x_1, \dots, x_{n+1})$, ainsi que $n+2$ vecteurs $(y_1, \dots, y_{n+2})$ dans E. On va décomposer chaque y_i sur la famille des x_j : il existe $(\lambda_{i,j}) \in M_{n+2,n+1}(\mathbb{K})$ telle que
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} y_1 & = & \lambda_{1,1}\ x_1 & + & \lambda_{1,2}\ x_2 & + & \cdots & + & \lambda_{1,n+1}\ x_{n+1} \\ y_2 & = & \lambda_{2,1}\ x_1 & + & \lambda_{2,2}\ x_2 & + & \cdots & + & \lambda_{2,n+1}\ x_{n+1} \\ \vdots & & & & & & & & \\ y_{n+2} & = & \lambda_{n+2,1}\ x_1 & + & \lambda_{n,2}\ x_2 & + & \cdots & + & \lambda_{n+2,n+1}\ x_{n+1} \end{array}\right.$$
Pour se ramener à $n+1$ vecteurs décomposés sur n, on va faire des opérations élémentaires sur les lignes.
  - Premier cas : $\lambda_{1,1} = \lambda_{2,1} = \cdots = \lambda_{n+2,1} = 0$.
  Alors, $(y_1, \dots, y_{n+1})$ est une famille de $n+1$ vecteurs de l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(x_2, \dots, x_{n+1})$, engendré par n vecteurs. D'après $\mathcal{P}(n)$, cette famille est liée, ce qui est vrai a fortiori pour $(y_1, \dots, y_{n+2})$.
  - Second cas : l'un des coefficient sur la première colonne est non nul. Quitte à faire un échange, on peut supposer qu'il s'agit de $\lambda_{1,1}$, qui est alors un pivot. Pour $i \in [\![2, n+2]\!]$, l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{1,1}} L_1$ amène
  $$\left\{\begin{array}{ccc} y_2 - \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,1}} y_1 & = & \sum_{j=2}^{n+1} \left(\lambda_{2,j} - \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,1}}\right) x_j \\ \vdots & & \\ y_{n+2} - \frac{\lambda_{n+2,1}}{\lambda_{1,1}} y_1 & = & \sum_{j=2}^{n+1} \left(\lambda_{n+2,j} - \frac{\lambda_{n+2,1}}{\lambda_{1,1}}\right) x_j \end{array}\right.$$
  Pour $k \in [\![2, n+2]\!]$, posons $z_k := y_k - \frac{\lambda_{k,1}}{\lambda_{1,1}} y_1$. Les vecteurs $(z_2, \dots, z_{n+2})$ sont une famille de $n+1$ vecteurs de l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(x_2, \dots, x_{n+1})$, engendré par n vecteurs. D'après $\mathcal{P}(n)$, cette famille est liée : il existe $\mu_2 \dots, \mu_{n+2}$, non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^{n+2} \mu_i z_i = 0_E$. On a donc
  $$\sum_{i=2}^{n+2} \mu_i y_i - \sum_{i=2}^{n+2} \frac{\mu_i \lambda_{i,1}}{\lambda_{1,1}} y_1 = 0_E,$$
  avec les μ_i non tous nuls, ce qui démontre que la famille $(y_1, \dots, y_{n+2})$ est liée.

  Dans les deux cas, notre famille de $n+2$ vecteurs est liée : $\mathcal{P}(n+1)$ est liée. Le principe de récurrence s'applique, ce qui termine la preuve du lemme.

□

Théorème 7.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal.

2 Dimension d'un espace de dimension finie.

2.1 Dimension : définition et exemples.

Nous avons prouvé dans la première partie que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base. On sait aussi désormais que toutes les bases ont même cardinal. La définition suivante a donc un sens.

Définition 8.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On appelle **dimension** de E et on note $\dim(E)$ le cardinal commun de ses bases.

Exemple 9 (Dimensions usuelles)**.**

$\boxed{\dim(\mathbb{K}^n) = n}$ $\boxed{\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1}$ $\boxed{\dim(M_{n,p}(\mathbb{K})) = np}$ $\boxed{\dim(M_n(\mathbb{K})) = n^2}$.

Exemple 10 (Un calcul de dimension)**.**

Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et calculer sa dimension.

Proposition 11.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_m$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Leur produit $E_1 \times \cdots \times E_m$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_m) = \sum_{k=1}^{m} \dim E_k.$$

2.2 Familles de vecteurs et dimension.

Proposition 12 (Cardinal d'une famille et dimension de l'espace)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; on note $n = \dim E$.
Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de cardinal p.

1. Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice, alors $p \geq n$.
   (le cardinal d'une famille génératrice est minoré par la dimension)
2. Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, alors $p \leq n$.
   (le cardinal d'une famille libre est majoré par la dimension)
3. Si $p > n$, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée.

Exemple 13.

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Justifier que la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2})$ est liée.
2. « Toute matrice carrée possède un *polynôme annulateur* non trivial ». Expliquer.

Théorème 14 (Caractérisation des bases en dimension finie)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée n. Soit $\mathcal{B}$ une famille finie de vecteurs de E. Il y a équivalence entre :

1. $\mathcal{B}$ est une base de E ;
2. $\mathcal{B}$ est une famille libre ayant n vecteurs ;
3. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice ayant n vecteurs.

En combinant les deux résultats précédents, on peut déclarer qu'en dimension finie,

— les bases sont exactement les familles libres de cardinal maximal ;
— les bases sont exactement les familles génératrices de cardinal maximal.

Exemple 15.

Soient $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (3, 2, 1)$. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 16 (Condition suffisante pour avoir une base d'un espace de polynômes)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ une famille de polynômes telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \deg P_k = k.$$

Alors $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, dite de **degrés échelonnés**.

Si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \deg P_k = k$, alors c'est une base de $\mathbb{K}[X]$

Dans l'exemple ci-dessous, on constate que la condition sur les degrés échelonnés n'est pas *nécessaire* pour avoir une base d'un espace de polynômes.

Exemple 17 (Polynômes de Lagrange)**.**

Soit $x_1, \dots, x_n$ n scalaires de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $(L_1, \dots, L_n)$ la famille définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad L_i = \pi_i^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (X - x_k) \qquad \text{où } \pi_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k).$$

Démontrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

2.3 Rang d'une famille finie de vecteurs.

Considérons un espace vectoriel E (qu'on ne suppose pas nécessairement de dimension finie) et dans cet espace vectoriel, considérons p vecteurs. Cette famille finie de vecteurs engendre (par définition !) un espace de dimension finie. La dimension de cet espace est inférieure à p, cardinal d'une famille génératrice. On va donner à cette dimension le nom de *rang*.

Définition 18.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **rang** de la famille $(x_1, \dots, x_p)$, noté $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim\left(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)\right).$$

De façon cohérente avec ce qui précède, convenons que le rang de la famille vide () vaut 0.

Proposition 19 (Rang et cardinal d'une famille)**.**

Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs. On a

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p.$$

Le cas d'égalité caractérise les familles finies libres :

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = p \quad \text{ssi} \quad (x_1, \dots, x_p) \text{ est libre.}$$

Corollaire 20 (Caractérisation des bases par le rang)**.**

Dans un espace de dimension n, les bases sont exactement les familles de n vecteurs de rang n.

Méthode (Calcul du rang d'une famille de vecteurs.)**.**

Par élimination de vecteurs superflus dans l'écriture d'un Vect (combinaisons linéaires des autres), on essaie de se ramener à une famille libre, pour laquelle nous savons que son rang est égal à son cardinal.

Exemple 21.

Calculer le rang des familles de vecteurs ci-dessous :

1. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, avec $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (4,5,6)$, $\vec{w} = (7,8,9)$.
2. $(\sin, \exp, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$;
3. $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, avec

$$P_1 = 1, \quad P_2 = X + 1, \quad P_3 = 2X - 3, \quad P_4 = X^2 + 3X + 4, \quad P_5 = 2X^2 + 3.$$

2.4 Le cas des dimensions 1 et 2.

Définition 22.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite** vectorielle.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan** vectoriel.

Remarque. Pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E, et un sous-espace vectoriel F, on dira que F est une "droite vectorielle de E" si F (en tant qu'espace vectoriel) est de dimension 1. On parlera de F comme d'un "plan vectoriel de E" si F est de dimension 2.

Proposition 23 (Description d'un plan, d'une droite vectorielle)**.**

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

$$E \text{ est une droite} \iff \exists x \in E \setminus \{0_E\} \ : \ E = \mathrm{Vect}(x).$$

$$E \text{ est un plan} \iff \exists (x, x') \in E^2 \ \underline{\text{libre}} \ : \ E = \mathrm{Vect}(x, x').$$

Ci-dessous, quelques exemples issus du cours d'analyse.

Exemple 24 (EDL1 homogène)**.**

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On pose $S_0^a = \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \ \mid y' + ay = 0\}$.

L'ensemble S_0^a est une <u>droite vectorielle</u> engendrée par la fonction $u : x \mapsto e^{-A(x)}$ avec A primitive de a :

$$\boxed{S_0^a = \mathrm{Vect}(u)}.$$

Exemple 25 (EDL2 homogène à coeff constants, cas complexe)**.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On pose $S_0^{a,b} = \left\{y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{C}) \ \mid y'' + ay' + by = 0\right\}$.

L'ensemble $S_0^{a,b}$ est un <u>plan vectoriel</u>. On en donne ci-dessous une base.

- Si l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$ a deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors

$$\boxed{S_0^{a,b} = \mathrm{Vect}\,(u, v)}$$

  et (u, v) est une base de $S_0^{a,b}$, où $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$ a une racine double r, alors

$$\boxed{S_0^{a,b} = \mathrm{Vect}\,(\tilde{u}, \tilde{v})}$$

  et $(\tilde{u}, \tilde{v})$ est une base de $S_0^{a,b}$, où $\tilde{u} : x \mapsto e^{rx}$ et $\tilde{v} : x \mapsto xe^{rx}$.

Exemple 26 (SRL2 homogène à coeff constants, cas complexe).

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. On pose $S_0^{a,b} = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ \mid \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$.

L'ensemble $S_0^{a,b}$ est un plan vectoriel. On en donne ci-dessous une base.

- Si l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ a deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors

$$\boxed{S_0^{a,b} = \mathrm{Vect}\,(u, v)}$$

  et (u,v) est une base de $S_0^{a,b}$, où $u = (r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (couple de suites géométriques).
- Si l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ a une racine double r, alors

$$\boxed{S_0^{a,b} = \mathrm{Vect}\,(\tilde{u}, \tilde{v})}$$

  et $(\tilde{u}, \tilde{v})$ est une base de $S_0^{a,b}$, où $\tilde{u} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\tilde{v} = (nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Sous-espaces vectoriels et dimension finie.

3.1 Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 27 (Sous-espace en dimension finie).

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Le sous-espace F est un espace de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
2. Il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si $F = E$.

Corollaire 28 (Caractérisation en dimension finie de l'égalité de deux s.e.v.).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et deux s.e.v. F et G de dimension finie.

$$F = G \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases}$$

Remarque. Ce résultat remplacera parfois avantageusement la caractérisation par double-inclusion !

Exemple 29 (Sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension 2).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.
Ses sous-espaces vectoriels sont de dimension 0, 1 ou 2. Plus précisément,

- le sous-espace vectoriel nul $\{0_E\}$ est l'unique sous-espace vectoriel de dimension 0 ;
- les sous-espaces de dimension 1 sont (par définition) les droites vectorielles de E ;
- E est l'unique sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Exemple 30 (Sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension 3)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3.
Ses sous-espaces vectoriels sont de dimension 0, 1, 2 ou 3. Plus précisément,
- le sous-espace vectoriel nul $\{0_E\}$ est l'unique sous-espace vectoriel de dimension 0 ;
- les sous-espaces de dimension 1 sont (par définition) les droites vectorielles de E ;
- les sous-espaces de dimension 2 sont (par définition) les plans vectoriels de E ;
- E est l'unique sous-espace vectoriel de E de dimension 3.

Théorème 31.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire.

3.2 Somme de sous-espaces de dimension finie.

Proposition 32.

Dans un espace vectoriel donné, si F et G sont deux sous-espaces tous deux de dimension finie, alors leur somme $F+G$ est de dimension finie.

En concaténant deux familles génératrices respectivement de F et G, on obtient une famille génératrice de $F+G$.

Proposition-Définition 33.

Dans un espace vectoriel donné, si F et G sont deux sous-espaces tous deux de dimension finie et en somme directe, alors en concaténant une base de F et une base de G, on obtient une base de $F \oplus G$.

Une telle base est appelée **base adaptée** à la somme directe $F \oplus G$.

Corollaire 34 (Dimension d'une somme directe)**.**

Dans un espace vectoriel E, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie, en somme directe, alors $F \oplus G$ est de dimension finie et

$$\boxed{\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)}.$$

Théorème 35 (Formule de Grassmann)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.
La somme $F+G$ est de dimension finie et

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}.$$

3.3 Supplémentaires en dimension finie.

On a prouvé qu'en dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire. Dans les cas non dégénérés, il y a une infinité de supplémentaires distincts, mais on va voir qu'ils ont tous la même dimension.

Proposition 36 (Dimension d'un supplémentaire)**.**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un même espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\dim(G) = \dim(E) - \dim(F).$$

Théorème 37 (Caractérisation des supplémentaires en dimension finie)**.**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces de E. On a les deux caractérisations suivantes :

1. $E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G &= \{0_E\} \\ \dim(E) &= \dim(F) + \dim(G). \end{cases}$
2. $E = F \oplus G \iff \begin{cases} E &= F + G \\ \dim(E) &= \dim(F) + \dim(G). \end{cases}$

Exemple 38.

Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et D une droite vectorielle non incluse dans P.
Démontrer que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercices

$\boxed{\textbf{26.1}}$ **[♦◇◇]** Ci-dessous, se trouve un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$. Le démontrer et calculer sa dimension :

$$F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(M) = 0\}.$$

$\boxed{\textbf{26.2}}$ **[♦◇◇]** Montrer que la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de $M_2(\mathbb{R})$, avec

$$M_1 = I_2, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{26.3}}$ **[♦♦◇]** Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

$\boxed{\textbf{26.4}}$ **[♦♦◇]** Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.

$\boxed{\textbf{26.5}}$ **[♦◊◊]** $\mathbb{C}$ est-il de dimension 1 ou 2 ?
Justifier que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

$\boxed{\textbf{26.6}}$ **[♦♦◊]** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{0 \le k \le n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0$

1. Montrer que pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^p = 0$
2. Montrer que pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k) = 0$
4. En déduire que $\Big((X+k)^n, k \in [\![0,n]\!]\Big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

$\boxed{\textbf{26.7}}$ **[♦♦◊]** Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de la variable réelle.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E.
2. Déduire de ce qui précède que E n'est pas de dimension finie.

$\boxed{\textbf{26.8}}$ **[♦♦◊]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Justifier l'existence d'un entier p tel que $(I_n, M, M^2 \ldots, M^p)$ est liée.
2. Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.

$\boxed{\textbf{26.9}}$ **[♦◊◊]** Intersection de deux plans vectoriels *(à traiter sans la formule de Grassmann).*

1. Soient deux plans vectoriels non confondus dans un espace vectoriel de dimension 3. Montrer que leur intersection est une droite vectorielle.
2. Donner un exemple en dimension 4 de deux plans vectoriels supplémentaires.

$\boxed{\textbf{26.10}}$ **[♦♦◊]** Intersection de deux hyperplans *(à traiter avec la formule de Grassmann).*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et H_1 et H_2 deux *hyperplans* de E c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels de dimension n–1. On suppose que H_1 et H_2 sont <u>non confondus</u>. Calculer $\dim H_1 \cap H_2$.

$\boxed{\textbf{26.11}}$ **[♦♦◊]** Calculer $\dim S_n(\mathbb{R})$. En déduire $\dim A_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{26.12}}$ **[♦♦◊]** Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = P(2)\}$.

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et justifier que $\dim F \le 3$.
2. Trouver une base de F.

$\boxed{\textbf{26.13}}$ **[♦♦◊]** Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n+1$. Démontrer que

$$\mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus \mathrm{Vect}(P).$$

$\boxed{\textbf{26.14}}$ **[♦♦◊]** CNS sur λ pour que $\mathrm{Vect}((\lambda,\lambda,1))$ et $\mathrm{Vect}((1,\lambda,1),(2,1,1))$ soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{26.15}}$ **[♦♦♦]** Soient F et G deux sev d'un espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que

$$(\dim F+G)^2 + (\dim F \cap G)^2 \ge (\dim F)^2 + (\dim G)^2 \,.$$

Étudier le cas d'égalité.
