

Propriétés de \mathbb{R}

Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

| | |
|------------------------------|----|
| Inégalités. | 1 |
| Exercice 2.1 | 2 |
| Exercice 2.2 | 3 |
| Exercice 2.3 | 3 |
| Exercice 2.4 | 4 |
| Valeurs absolues. | 4 |
| Exercice 2.5 | 5 |
| Exercice 2.6 | 6 |
| Entiers, rationnels. | 6 |
| Exercice 2.7 | 6 |
| Exercice 2.8 | 7 |
| Exercice 2.9 | 8 |
| Exercice 2.10 | 8 |
| Parties bornées | 8 |
| Exercice 2.11 | 9 |
| Exercice 2.12 | 10 |

Exercice 2.1 [◆◆◆]

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3 - a^2b + b^3 - ab^2}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2(a - b) + b^2(b - a)}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)(a^2 - b^2)}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a + b)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Or $(a - b)^2 \geq 0$, $(a + b) \geq 0$ et $ab \geq 0$.

Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$.

□

Exercice 2.2 [◆◆◆]

1. Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} &\leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \iff a+b &\leq a + 2\sqrt{ab} + b \\ \iff 2\sqrt{ab} &\geq 0 \\ \iff \sqrt{ab} &\geq 0 \\ \iff ab &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. □

2. Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
 Considérons $a \geq b$, alors $|a-b| = a-b$.

$$\begin{aligned} |\sqrt{a} - \sqrt{b}| &\leq \sqrt{a-b} \\ \iff a - 2\sqrt{ab} + b &\leq a-b \\ \iff 2b &\leq 2\sqrt{ab} \\ \iff b^2 &\leq ab \\ \iff b &\leq a \end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque $b \geq a$.
 Ainsi, $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$. □

Exercice 2.3 [◆◆◆] *Manipuler la notion de distance*

En utilisant la notion de distance sur \mathbb{R} , écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \leq 6 \text{ et } |x^2-1| > 3\}$$

On a :

$$x \in [-9, 3] \text{ et } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

Donc :

$$x \in [-9, -2] \cup [2, 3]$$

Exercice 2.4 [◆◆◆] Plusieurs façons de définir une moyenne

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. On définit les nombres m, g, h par

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Et on les appelle respectivement moyenne arithmétique, géométrique et harmonique de a et b .

Démontrer l'encadrement

$$a \leq h \leq g \leq m \leq b$$

Montrons les inégalités une par une :

- $m \leq b \iff \frac{a+b}{2} - b \leq 0 \iff \frac{a-b}{2} \leq 0 \iff a - b \leq 0 \iff a \leq b.$
- $g \leq m \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$
- $h \leq g \iff \frac{1}{h} \geq \frac{1}{g} \iff \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 0 \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2ab} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2ab} \geq 0.$
- $\begin{matrix} a \leq h \\ a \leq b \end{matrix} \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{h} \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \geq 0 \iff \frac{b-a}{2ab} \geq 0 \iff b - a \geq 0 \iff$

Ainsi, $a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

□

Exercice 2.5 [◆◆◆]

Résoudre l'équation

$$\ln |x| + \ln |x + 1| = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

$$\ln |x| + \ln |x + 1| = 0$$

$$\iff \ln (|x(x + 1)|) = 0$$

$$\iff |x(x + 1)| = 1$$

Supposons $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

On a :

$$|x(x + 1)| = 1$$

$$\iff x(x + 1) = 1$$

$$\iff x^2 + x - 1 = 0$$

$$\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Supposons $x \in]-1, 0[$.

$$|x(x + 1)| = 1$$

$$\iff -x^2 - x - 1 = 0$$

Il n'y a donc pas de solutions dans $] -1, 0[$.L'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ **Exercice 2.6** [◆◆◆]

Résoudre l'équation

$$|x - 2| = 6 - 2x$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.Considérons $x \geq 2$

$$|x - 2| = 6 - 2x$$

$$\iff x - 2 = 6 - 2x$$

$$\iff x = \frac{8}{3}$$

Considérons $x \leq 2$

$$|x - 2| = 6 - 2x$$

$$\iff 2 - x = 6 - 2x$$

$$\iff x = 4$$

Seul la solution $x = \frac{8}{3}$ convient. Ainsi, l'unique solution à l'équation est $\frac{8}{3}$.

Exercice 2.7 [◆◆◆]

Démontrer l'égalité $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x .

Soient $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Notons r la partie fractionnaire de x , ainsi $x = \lfloor x \rfloor + r$.

On a alors $nx = n\lfloor x \rfloor + nr$ et $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nr \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nr \rfloor$.

Conséquemment, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n}$.

Or, $0 \leq \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < 1$ car $0 \leq r < 1$, donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$.

Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor < \lfloor x + 1 \rfloor$.

Par conséquent, $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

□

Exercice 2.8 [◆◆◇] mal de crane tier

1. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \iff & 2\sqrt{x(x+1)} - 2x < 1 \\ \iff & (2\sqrt{x(x+1)})^2 < (1+2x)^2 \\ \iff & 4x(x+1) < 4x^2 + 4x + 1 \\ \iff & 4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x < 1 \\ \iff & 0 < 1 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ \iff & 1 < 2\sqrt{(x+1)^2} - 2\sqrt{x(x+1)} \\ \iff & 1 < 2|x+1| - 2\sqrt{x(x+1)} \\ \iff & (2x+1)^2 > (2\sqrt{x(x+1)})^2 \\ \iff & 4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x \\ \iff & 1 > 0 \end{aligned}$$

□

2. Soit p un entier supérieur à 2. Que vaut la partie entière de

$$\sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

On a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc, en remplaçant x par $x-1$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1} < \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Ainsi,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

MAIS ALORS :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p^2-1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &< \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{p^2-1} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{p^2} - \sqrt{1} &< \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{p^2-1} - \sqrt{0} \\ \Leftrightarrow 2p - 2 &< \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{p^2-1} \\ \Leftrightarrow 2p - 2 &< \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < [2\sqrt{p^2-1}] \end{aligned}$$

Or $2p - 2 < 2\sqrt{p^2-1} < 2p$ donc $[2\sqrt{p^2-1}] = 2p - 2$

On en conclut :

$$\left[\sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \right] = 2p - 2$$

Exercice 2.9 [◆◆◆]

Prouver que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

Supposons que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que :

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$$

Alors :

$$\begin{aligned} p \ln 3 &= q \ln 2 \\ \iff \ln(3^p) &= \ln(2^q) \\ \iff e^{\ln(3^p)} &= e^{\ln 2^q} \\ \iff 3^p &= 2^q \end{aligned}$$

Or 3^p est toujours impair et 2^q est toujours pair, donc cela est absurde.

Ainsi, $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. □

Exercice 2.10 [◆◆◆]

Soient x et y deux rationnels positifs tels que

\sqrt{x} et \sqrt{y} soient irrationnels.

Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel. Supposons $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.

On a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= x - y \\ \iff \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \end{aligned}$$

Or $x - y \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ par hypothèse. Donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.

D'autre part,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{x}$$

\sqrt{x} est donc la somme de deux rationnels, et est donc rationnel.

C'est absurde. On en conclut que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel. □

Exercice 2.11 [◆◆◇]

Soit l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Cette partie de \mathbb{R} est-elle bornée ? Possède-t-elle un maximum ? Un minimum ?

Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = \frac{n^2 - 1}{n} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \\ &= \frac{n^3 - n}{n^3 + n} = \frac{n^3 + n}{n^3 + n} - \frac{2n}{n^3 + n} \\ &= 1 - \frac{2}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{2}{(n+1)^2 + 1} - 1 + \frac{2}{n^2 + 1} \\ &= \frac{2}{n^2 + 1} - \frac{2}{n^2 + 2n + 2} \\ &= \frac{4n + 2}{(n^2)(n^2 + 2n + 2)} \end{aligned}$$

C'est toujours positif : on en déduit que, (u_n) est croissante sur \mathbb{N}^* .

Elle admet donc un minimum en 1, qui est 0.

Elle admet aussi un majorant lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Ainsi, A admet 0 comme minimum, n'a pas de maximum et est majorée par 1.

Exercice 2.12 [◆◆◆]

1. Montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad : \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}.$$

Étudier le cas d'égalité.

2. En déduire que l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \mid (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ et } a+b+c \geq 2 \right\}$$

admet un minimum et le calculer.

1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} &\geq 0 \\ \iff \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)} &\geq 0 \\ \iff (a-b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} &= \frac{3a-b}{4} \\ \iff (a-b)^2 &= 0 \\ \iff a &= b \end{aligned}$$

2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^{*3}$ tels que $a+b+c \geq 2$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} &\geq \frac{3a-b}{4} + \frac{3b-c}{4} + \frac{3c-a}{4} \\ &\geq \frac{2a+2b+2c}{4} \\ &\geq \frac{a+b+c}{2} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Or, lorsque $a = b = c = \frac{2}{3}$, on a $a+b+c \geq 2$ et:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = 3 \frac{a}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ainsi, $1 \in E$ et $\forall x \in E, x \geq 1$ donc 1 est minimum de E .