Applications
Corrigé

DARVOUX Théo

Décembre 2023

Exercices.

Exercice 15.1 [♦◊◊]

Soit $f : E \to F$ une application. Soient deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer l'égalité

$$f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B)).$$

Procédons par double inclusion.
⊚ Soit $y \in f(A) \cap B$. Montrons que $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.
On a $y \in f(A)$ et $y \in B$.
$\exists x \in A \mid y = f(x)$ donc $x \in A$ et $x \in f^{-1}(B)$ car $y \in B$.
Ainsi $x \in A \cap f^{-1}(B)$ et $f(x) = y \in f(A \cap f^{-1}(B))$

⊚ Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ Montrons que $y \in f(A) \cap B$.
$\exists x \in A \cap f^{-1}(B) \mid y = f(x)$ donc $x \in A$ et $x \in f^{-1}(B)$.
Ainsi, $f(x) = y \in f(A)$ et $f(x) = y \in B$: $y \in f(A) \cap B$.

□

Exercice 15.2 [♦♦◊]

Soit $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.
1. (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(b) Montrer que si f est injective, la réciproque est vraie.
2. (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
(b) Démontrer que si f est surjective, la réciproque est vraie.
3. Montrer que $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.
4. Montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

1.
a) Soit $x \in A$. Montrons que $x \in f^{-1}(f(A))$.
On a $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$.
b) On suppose f injective, soit $x \in f^{-1}(f(A))$.
On applique f : $f(x) \in f(A)$. Par injectivité de f, $x \in A$.

2.
a) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$.
On a $\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$. Ainsi, $f(x) \in B$: $y \in B$.
b) Supposons f surjective, soit $y \in B$.
On a $\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$ et $f(x) = y \in f(f^{-1}(B))$.

3) Soit $y \in f(f^{-1}(f(A)))$. Montrons que $y \in f(A)$.
On a $\exists x \in f^{-1}(f(A)) \mid y = f(x)$ et $f(x) \in f(A)$ donc $y \in f(A)$.
Soit $y \in f(A)$. Montrons que $y \in f(f^{-1}(f(A)))$.
On a $\exists x \in A \mid y = f(x)$ alors $f(x) \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $f(x) = y \in f(f^{-1}(f(A)))$.

4) Soit $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$. Montrons que $y \in f^{-1}(B)$.
On a $f(y) \in f(f^{-1}(B))$ alors $y \in f^{-1}(B)$.
Soit $y \in f^{-1}(B)$. Montrons que $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
On a $f(y) \in f(f^{-1}(B))$ donc $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.

□

Exercice 15.3 [♦♦♦]

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que

$$f \text{ est injective} \iff [\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$$

◎ Supposons f injective. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On sait déjà que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Montrons alors que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. On a que $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$.
Ainsi, $\exists x_A \in A \mid y = f(x_A)$ et $\exists x_B \in B \mid y = f(x_B)$.
Or f est injective : $x_A = x_B$, ainsi $x_A \in A \cap B$.
On a enfin que $f(x_A) \in f(A \cap B)$, alors $y \in f(A \cap B)$.

◎ Supposons $[\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$. Montrons que f est injective.
Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Soient $x, x' \in E$. On suppose que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.
On a que $\{x\}$ et $\{x'\} \in \mathcal{P}(E)$.
Ainsi : $f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$.
Supposons que $x \neq x'$. On a alors : $f(\varnothing) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$: $\varnothing = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$.
Or $f(x) = f(x')$ donc $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} \neq \varnothing$. C'est absurde : $x = x'$.
On a bien montré que f est injective.

□