

Fonctions usuelles
Corrigé

DARVOUX Théo
Septembre 2023

Exercices.

| | |
|--------------------------------|---|
| Vocabulaire sur les fonctions. | 2 |
| Exercice 4.1 | 2 |
| Exercice 4.2 | 2 |
| Étude de fonctions. | 3 |
| Exercice 4.3 | 3 |
| Exercice 4.4 | 3 |
| Exercice 4.5 | 4 |
| Exercice 4.6 | 4 |
| Exercice 4.7 | 5 |
| Exercice 4.8 | 6 |
| Exercice 4.9 | 6 |

Exercice 4.1 [◆◆◆]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x - 2 \in \mathbb{R} \\ f(x - 2) = f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 3 \in \mathbb{R} \\ f(x + 3) = f(x) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x - 2 + 3 \in \mathbb{R} \\ f(x - 2 + 3) = f(x - 2) = f(x) \end{cases}$$

□

Exercice 4.2 [◆◆◆]

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et f une solution du problème.

On remarque que $f : x \mapsto x$ est solution du problème.

Supposons $f(x) > x$, on a : $f(f(x)) > f(x)$ par croissance de f . Or $f(f(x)) = x$ donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.

Supposons $f(x) < x$, on a : $f(f(x)) < f(x)$ par croissance de f . Or $f(f(x)) = x$ donc $x < f(x)$, ce qui est absurde.

Ainsi, la seule fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} solution est $f : x \mapsto x$.

Exercice 4.3 [◆◆◆] S'entraîner tout seul à dériver.

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée.

$$\begin{aligned} A : x \mapsto x^\pi, \quad B : x \mapsto \pi^x, \quad C : x \mapsto \cos(5x), \quad D : x \mapsto \text{th}(\text{ch}(x)), \\ E : x \mapsto \ln(1 + x^3), \quad F : x \mapsto \cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right), \quad G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}, \quad H : x \mapsto \sin|x+1|. \end{aligned}$$

$$G' : x \mapsto -\frac{3}{2}(3x-1)^{3/2}$$

$$\bullet A' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi x^{\pi-1} \end{cases}$$

$$\bullet D' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(\text{ch}(x))} \end{cases}$$

$$\bullet H'_- : \begin{cases}]-\infty, -1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\cos(-x-1) \end{cases}$$

$$\bullet B' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\pi)\pi^x \end{cases}$$

$$\bullet E' : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x^2}{1+x^3} \end{cases}$$

$$\bullet H'_+ : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x+1) \end{cases}$$

$$\bullet C' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -5\sin(5x) \end{cases}$$

$$\bullet F' : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}} \end{cases}$$

Exercice 4.4 [◆◆◆]

Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x \ln(x)}.$$

On a :

$$f : x \mapsto e^{x \ln^2(x)}$$

Donc :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x)(\ln(x) + 2)e^{x \ln^2(x)} \end{cases}$$

Son tableau de variations est donc :

| | | | | | | |
|---------|---|-------------|---|---|---|-----------|
| x | 0 | e^{-2} | | | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + |
| f | 1 | e^{4/e^2} | | | 1 | $+\infty$ |

Exercice 4.5 [◆◆◆]

1. Démontrer que

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. À l'aide du théorème des gendarmes, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

3. Retrouver ce résultat en faisant apparaître un taux d'accroissement.

1. Posons :

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \qquad g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

Elles sont dérivables et tout et tout :

$$f' : x \mapsto -\frac{x}{(1+x)^2} \qquad g' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$$

| | | | | | |
|---------|----|-----------|---|-----------|-----------|
| x | -1 | 0 | | | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| f | | $-\infty$ | 0 | $-\infty$ | |

| | | | | | |
|---------|----|-----------|---|-----------|-----------|
| x | -1 | 0 | | | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | |
| g | | $-\infty$ | 0 | $-\infty$ | |

L'inégalité est donc vérifiée car ces fonctions prennent des valeurs négatives.

2. Soit $x \in]-1, +\infty[$. On a :

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

3. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

□

Exercice 4.6 [◆◆◇]

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

Posons :

$$f : x \mapsto x - \sin x \qquad g : x \mapsto x - \sin x - \frac{x^3}{6}$$

Ces fonctions sont dérivables sur \mathbb{R}_+ :

$$f' : x \mapsto 1 - \cos x \qquad g' : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$$

La première inégalité est triviale car $\cos x \leq 1$, ainsi $x - \sin x \geq 0$.

On a :

$$g'' : x \mapsto \sin x - x$$

Et donc :

| | | |
|----------|---|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $g''(x)$ | 0 | — |
| $g'(x)$ | 0 | $-\infty$ |
| g | 0 | $-\infty$ |

Ainsi, g prend des valeurs négatives sur \mathbb{R}_+ , donc : $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.

□

Exercice 4.7 [◆◆◆]

Faire une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)$$

⊙ Soit $x \in]-1, 1[$.

On a :

$$f : x \mapsto \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

⊙ Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

On a :

$$f : x \mapsto \ln \left(-\frac{1+x}{1-x} \right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}.$$

Ainsi,

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
|---------|--------------|-----------|----------------------|-----------|
| $f'(x)$ | - | | + | - |
| f | 0 \searrow | $-\infty$ | $+\infty$ \nearrow | 0 |

Pour les limites :

$$f : x \mapsto \ln \left(\left| \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} \right| \right)$$

Exercice 4.8 [◆◆◆]

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in]0, 1[\qquad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in]0, 1[$.

On a :

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x \ln x} e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}$$

Posons :

$$f : x \mapsto e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)} \qquad f' : x \mapsto \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}$$

| x | 0 | 0.5 | 1 |
|---------|---------------------|---------------|--------------------|
| $f'(x)$ | | - | + |
| f | 1 \longrightarrow | $\frac{1}{2}$ | 1 \longleftarrow |

□

Exercice 4.9 [◆◆◆]

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.

2. Prouver que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. On a :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$$

| | | |
|---------|---|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | |
| f | 0 | 1 |

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

On applique f , fonction croissante sur \mathbb{R}_+ , ce qui ne change pas les inégalités:

$$\begin{aligned} \frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \end{aligned}$$

□