Équations Algébriques
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Etienne pour les exercices 9.25 et 9.26

Exercices.

Soit $z \in \mathbb{C}$.
$\Re(z)$ est la partie réelle de z.
$\Im(z)$ est la partie imaginaire de z.

Exercice 10.17 [♦◊◊]

1. Calculer les racines carrées du nombre $-8i$.
On donnera ces nombres sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

Notons δ une racine de $-8i$:

$$\delta = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2 - 2i$$

2. Le discriminant Δ vaut $-8i$. Ses racines carrées sont donc $2-2i$ et $-2+2i$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{3-i, 1+i\}$.

□

Exercice 10.18 [♦◊◊]

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calcul de

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z \quad \text{et} \quad \prod_{z\in\mathbb{U}_n} z$$

On a :

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Et :

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

□

Exercice 10.19 [♦♦◊]

Donner une expression du périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$.
Que conjecture-t-on sur la limite lorsque $n \to +\infty$? Essayer de prouver votre conjecture.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}}||e^{-\frac{\pi}{n}} - e^{\frac{\pi}{n}}| = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Et, puisque $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi$$

□

Exercice 10.20 [♦◊◊]

Soit $\omega \in \mathbb{U}_7$, une racine 7e de l'unité différente de 1.
1. Justifier que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6=0$.
2. Calculer le nombre $\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

1. On a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N}, n>2, \sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = 0$ dans le 10.18.
2. On a :

$$\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{2+2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5}{\omega^6}=-\frac{2\omega^6}{\omega^6}=-2$$

□

Exercice 10.21 [♦♦◊]

1. Quand dit-on qu'un nombre réel θ est un argument d'un nombre complexe z ?
2. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Donner le module et un argument de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$.
3. Établir l'égalité

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1| = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

1. θ est un argument de $z \neq 0$ ssi $z=|z|e^{i\theta}$.
2. On a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1 = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{\pi(2k+n)}{2n}}$$

Ainsi son module est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et l'un de ses arguments est $\frac{\pi(2k+n)}{2n}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1| &= \sum_{k=0}^{n-1}|e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1| = \sum_{k=0}^{n-1}|e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 2\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

Or, $\forall k\in[\![0,n-1]\!], \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\geq 0$. Ainsi (formule du cours) :

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1| &= 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\frac{\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\end{aligned}$$

□

Exercice 10.22 [♦♦♢]

Soit θ un nombre réel appartenant à $]0,\pi[$. Résoudre l'équation

$$z^2 - 2e^{i\theta}z + 2ie^{i\theta}\sin\theta = 0.$$

On écrira les solutions sous forme algébrique <u>et</u> sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4e^{2i\theta} - 8ie^{i\theta}\sin\theta = 4e^{i\theta}\left(\cos\theta + i\sin\theta - 2i\sin\theta\right)\\ &= 4e^{i\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) = 4e^{i\theta}e^{-i\theta}\\ &= 4\end{aligned}$$

On a alors :

$$x_1 = e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$
$$x_2 = e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

□

Exercice 10.23 [♦♦♢]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 2\cos(\theta)z^n + 1 = 0$.

1. $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta) \leq 0$.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2\cos(\theta) + i\sqrt{4\sin^2(\theta)}}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}\\ x_2 &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta}\end{aligned}$$

2. Posons $z' = z^n$.
On sait que z' est solution de $z'^2 - 2\cos(\theta)z' + 1 = 0$.
Ainsi, $z'_1 = e^{i\theta}$ et $z'_2 = e^{-i\theta}$.
On en déduit :

$$z_1 = {z'_1}^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{i\theta}{n}}$$
$$z_2 = {z'_2}^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{i\theta}{n}}$$

□

Exercice 10.24 [♦♦♢]

Résoudre.

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+1=0.$$

Posons $\omega=\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$. On a : $\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$.
On a alors $\omega\in\mathbb{U}_4\setminus\{1\}$.
Ainsi, $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=i$ ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-1$ ou $\left(\frac{z+i}{z-1}\right)=-i$.
1. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=i \iff z+i=iz+1 \iff z(1-i)=1-i \iff z=1$.
2. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-1 \iff z+i=i-z \iff z=-z \iff z=0$.
3. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-i \iff z+i=-1-zi \iff z(1+i)=-1-i \iff z=-\frac{1+i}{1+i}=-1$

L'ensemble des solutions est donc : $\{-1,0,1\}$.

□

Exercice 10.25 [♦♦♦]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n=z^n$.
Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
z^n=(z+1)^n &\iff \left(1+\frac{1}{z}\right)^n=1\\
&\iff (1+\frac{1}{z})\in\mathbb{U}_n\\
&\iff \exists k\in[\![1,n-1]\!] \mid 1+\frac{1}{z}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}\\
&\iff \frac{1}{z}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1\\
&\iff z=\frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}\\
&\iff z=\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})}\\
&\iff z=\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})-i\sin(\frac{k\pi}{n})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})}\\
&\iff z=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\tan(\frac{k\pi}{n})}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\tan(\frac{k\pi}{n})}\,|\,k\in[\![1,n-1]\!]\}$.

□

Exercice 10.26 [♦♦♦]

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = -1 \\ uv = 1 \end{cases}$$

On peut prendre un couple dans $(C^*)^2$ car le système impose que les membres soient non nuls. Soit $(u,v) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Soit $(r,\rho) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\theta,\pi) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u = re^{i\theta}$ et $v = \rho e^{i\varphi}$

$$\begin{aligned}
(u,v) \text{ est solution } &\iff \begin{cases} u^2 + v^2 = -1 \\ uv = 1 \end{cases} \\
&\iff u^2 \text{ et } v^2 \text{ racines de } X^2 + X + 1 \\
&\iff (u^2, v^2) \in \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\} \\
&\iff \begin{cases} u^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ v^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{3}[\pi] \\ \rho = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{3}[\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ (e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}), (e^{i\frac{5\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}), (e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}), (e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}) \right\}$$

□

Exercice 10.27 [♦♦♦]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = (1+z)^n = 1$.
Montrer que n est un multiple de 6 et que $z^3 = 1$.

Analyse.

On a $z^n = (1+z)^n = 1$. Ainsi, $|z| = |1+z| = 1$ et $z \in \mathbb{U}$.

Puisque $|z| = |1+z|$ et que $\Im(z) = \Im(1+z)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = \sqrt{\Re(z+1)^2 + \Im(z+1)^2}\\
\Longrightarrow &\Re(z)^2 = \Re(z+1)^2\\
\Longrightarrow &\Re(z)^2 = (1+\Re(z))^2\\
\Longrightarrow &\Re(z) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\exists \theta \in \mathbb{R} \mid z = e^{i\theta}$, et : $\Re\left(e^{i\theta}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$.

On obtient que $\theta \in \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ainsi, $z \in \{e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$ et $z^3 = 1$.

On a $z^n \in \{e^{i\frac{2n\pi}{3}}, e^{i\frac{4n\pi}{3}}\}$, or $z^n = 1$ donc $\frac{2n\pi}{3} \equiv 0[2\pi]$ et $\frac{4n\pi}{3} \equiv 0[2\pi]$.

Ainsi, $n \equiv 0[3]$ et $2n \equiv 0[3]$. n est donc multiple de 6.

Synthèse.

On a $z \in \{e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$.

On a que $z^3 = 1$.

De plus, $z^n \in \{e^{i4k\pi}, e^{i8k\pi}\}$, or $e^{i4k\pi} = e^{i8k\pi} = 1$. Ainsi, $z^n = 1$.

Enfin, $(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}})^n = (2e^{i\frac{\pi}{3}}\cos(\frac{\pi}{3}))^{6k} = (64e^{2i\pi}\frac{1}{64})^k = 1$.

Et : $(1 + e^{i\frac{4\pi}{3}})^n = (2e^{i\frac{2\pi}{3}}\cos(\frac{2\pi}{3}))^{6k} = (64e^{4i\pi}\frac{1}{64})^k = 1$.

□