Chapitre 7

Forme trigonométrique.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie.

1.1 Paramétrisation du cercle trigonométrique par $\theta \mapsto e^{i\theta}$

Définition 1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1:

$$\mathbb{U} = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| = 1\}.$$

Si on identifie $\mathbb{C}$ avec le plan muni d'un repère orthonormé, alors $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

Définition 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ (« exponentielle de $i\theta$ ») le nombre complexe de module 1 suivant :

$$\boxed{e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Par définition même de $e^{i\theta}$, on a $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$.

Proposition 3: Paramétrisation de $\mathbb{U}$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \; z = e^{i\theta}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{U} = \left\{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Preuve :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\exists \theta \in \mathbb{R} \mid z = e^{i\theta}$. Alors $|z|^2 = |e^{i\theta}|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc $|z| = 1$: $z \in \mathbb{U}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $|z| = 1$, notons M le point d'affixe z, $\exists \theta \in \mathbb{R} \mid M = (\cos\theta, \sin\theta)$, donc $z = \cos\theta + \sin\theta = e^{i\theta}$.

Exemple 4

$$-1 = e^{i\pi}, \qquad 1 = e^{i0} = e^{2i\pi}, \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Le rapport entre les nombres $e^{i\theta}$ qui ont été définis ci-dessus et la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ est à ce stade de l'année encore flou. On se contente pour l'instant de remarquer que ces deux exponentielles partagent la même propriété de morphisme.

Proposition 5: Propriété de morphisme pour e^{i}.

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R} \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}.$$

Par conséquent, pour tout θ, θ' réels,

$$\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}, \quad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}.$$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

Preuve :

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{i\theta}e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = ... = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}$$

On retiendra notamment, que $\forall \omega \in \mathbb{U}$, $\overline{\omega} = \omega^{-1}$.

1.2 Applications à la trigonométrie.

Proposition 6: Formule d'Euler.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Preuve :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a
- $2\cos\theta = 2\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \overline{e^{ei\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$.
- $2i\sin(\theta) = 2i\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$.

Méthode : Linéarisation des puissances de cos et sin. ★

Soient p et q deux entiers naturels. Pour linéariser $(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q$, on peut toujours :
- transformer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par les formules d'Euler;
- développer grâce à la formule du binôme de Newton;
- regrouper les exponentielles conjuguées de $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$;
- reconnaître des termes $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ ($k \in \mathbb{N}$) par les formules d'Euler.

On peut ainsi transformer $(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q$ en une combinaison linéare de termes $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ où $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $(\cos\theta)^4$, $(\sin\theta)^3$ et $(\cos\theta)^3\sin\theta$. Calculer $\int_0^\pi (\cos x)^4 \mathrm{d}x$.

Solution :

$\boxed{1.}$

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left((e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3 e^{-i\theta} + 6(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta})^2 + 4e^{i\theta}(e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4\right) \\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right) = \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4\theta) + 9\cos(2\theta) + 6\right) \\
&= \frac{1}{2^3}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right)
\end{aligned}$$

(...)

$\boxed{4.}$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\cos x)^4 \mathrm{d}x &= \frac{1}{2^3}\int_0^\pi \cos(4x)\mathrm{d}x + \frac{4}{2^3}\int_0^\pi \cos(2x)\mathrm{d}x + \frac{3}{2^3}\int_0^\pi \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^3}\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^\pi + \frac{4}{2^3}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi + \frac{3}{2^3}[x]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2^3}(0-0) + \frac{4}{2^3}(0-0) + \frac{3}{2^3}\pi = \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$

Méthode : Technique de l'angle moitié.

Cette factorisation permet de faire apparaître une formule d'Euler :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Pour factoriser $e^{ia} + e^{ib}$, on peut factoriser par $e^{i\frac{a+b}{2}}$: (angle moyen).

Exemple 8: ★

Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on établit les formules

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Solution :

Puisque $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $e^{i\theta} \neq 1$ et donc:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\
&= e^{i(n/2)\theta} \cdot \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i(n/2)\theta} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

En passant à la partie réelle/imaginaire, on obtient bien les égalités.

Exemple 9: Somme de cos, somme de sin. ★

Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On retrouve les égalités:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \qquad \sin p + \sin q = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Solution :

$\boxed{1.}$

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= \mathrm{Re}(e^{ip}) + \mathrm{Re}(e^{iq}) = \mathrm{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= \mathrm{Im}(e^{ip}) + \mathrm{Im}(e^{iq}) = \mathrm{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

Proposition 10: Formule de Moivre.

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méthode : « Délinéarisation » : exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. ★

On peut toujours

- écrire la formule de Moivre:
$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
- développer par la formule du binôme de Newton;
- identifier les parties réelles et imaginaires.

On exprime ainsi $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. En utilisant la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on poursuit les simplifications.
On obtiendra toujours deux polynômes T_n et U_{n-1} tels que

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = (\sin\theta)U_{n-1}(\cos\theta)$$

Exemple 11

Exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Solution :

$\boxed{1.}$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^3) = \mathrm{Re}(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta)\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= \mathrm{Im}(e^{5i\theta}) = \mathrm{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^5) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\\ &= \sin\theta\left[5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2\right]\\ &= \sin\theta\left[16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1\right]\end{aligned}$$

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

2.1 Exemples et applications.

Proposition 12

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous **forme trigonométrique**:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}, \text{ où } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

— Le nombre r est le module de z,
— On appelle θ un **argument** de z.

Preuve :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, donc $z = |z|e^{i\theta}$.

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique.

Pour mettre un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique, il suffit de mettre son module en facteur. On va peut-être reconnaître un argument classique ($\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, ...$). Sinon, on peut exprimer l'argument à l'aide de la fonction arctan, comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 13: De la forme algébrique à la forme trigonométrique, et réciproquement.

1. Mettre les nombres suivants sous forme trigonométrique.

$$-1, \quad 1-i, \quad \sin\theta + i\cos\theta \ (\theta \in \mathbb{R}), \quad i^{35}$$

Donner la forme trigonométrique de $1+2i$ et expliciter son argument.

2. (a) Donner la forme algébrique de $(\sqrt{3}+i)^{666}$.
   (b) Soit $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Donner la forme algébrique de $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ $-1 = e^{i\pi}$; $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $\sin\theta + i\cos\theta = e^{i\theta}$ et $i^{35} = -i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Et $1+2i = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5} + i\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}} = e^{i\theta} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{donc } \tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{5}{\sqrt{5}} = 2.$$

On a $\cos\theta > 0$ donc $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $\theta = \arctan(2)$ et $1+2i = \sqrt{5}e^{i\arctan(2)}$.

$\boxed{2.a)}$ $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\pi/6}$.
Alors $(\sqrt{3}+i)^{666} = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^{666} = 2^{666}e^{666i\frac{\pi}{6}} = 2^{666}e^{111i\pi} = -2^{666}$.
$\boxed{2.b)}$ $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}+e^{i\theta/2})} = \frac{2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} = i\tan(\theta/2)$.

Exemple 14

Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.

Solution :

Soients $a, b, t \in \mathbb{R}$, on note $z = a+ib$.

$$a\cos(t) + b\sin(t) = a\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + b\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2}(ae^{it} + ae^{-it} + ibe^{it} + ibe^{-it}) = \frac{1}{2}(\overline{z}e^{it} + ze^{-it})$$

Il existe donc $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\varphi}$ où $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

$$a\cos t + b\sin t = \frac{1}{2}(re^{-i\varphi}e^{it} + re^{i\varphi}e^{-it}) = \frac{1}{2}(re^{i(t-\varphi)} + re^{i(t-\varphi)}) = r\cos(t-\varphi).$$

Proposition 15: Égalité de formes trigonométriques : presque-unicité de l'écriture.

$$\forall r, r' \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \theta, \theta' \in \mathbb{R} \quad re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta'[2\pi] \end{cases}$$

Exemple 16: ★

Comme on le verra dans la troisième partie de ce sours, la forme trigonométrique est particulièrement adaptée à la résolution de problèmes « multiplicatifs ».

En guise d'exemple, on résout sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -4|z|$.

Solution :

Soit $z \in \mathbb{Z}$. On sait que 0 est solution, on suppose $z \neq 0$: $\exists (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid z = re^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} z^3 = -4|z| &\iff r^3e^{3i\theta} = 4re^{i\pi} \\ &\iff r^3 = 4r \quad \text{et} \quad 3\theta \equiv \pi[2\pi] \\ &\iff r = 2 \quad \text{et} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

L'équation possède 4 solutions : $0;\ 2e^{i\pi/3};\ -2;\ 2e^{-i\pi/3}$.

Définition 17

Parmi l'infinité d'arguments d'un même nombre complexe non nul, un seul appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle **argument principal** de z et on le note $\arg(z)$.

Proposition 18

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi].$$

2.2 Un peu de géométrie.

On travaille ici dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. On rappelle que si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives a et b, on appelle **affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $b-a$. Il s'agit de l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Proposition 19

Soient A, B, C, D quatres points du plan distincts deux-à-deux, d'affixes respectives a, b, c et d.

$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = \frac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Le nombre $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Corrolaire 20

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux-à-deux d'affixes a, b, c, d.

- $(AB)/\!/(CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$.
- En particulier, A, B, C sont alignés ssi $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
- $(AB)\perp(CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Preuve :

Preuves sur l'autre poly.

3 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

Calculer $(1+i)^2023$.

Solution :

On a :

$$(1+i)^{2023} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2023} = \sqrt{2}^{2023} e^{i\frac{2023\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2023} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 2: ♦♦◊

Soient trois réels x, y, z tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

Solution :

On a :

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \iff e^{-ix} + e^{-iy} + e^{-iz} = 0$$

Et :

$$\begin{aligned} &(e^{ix} + e^{iy} + e^{iz})^2 = e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} + 2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) \\ \iff &e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = -2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) \end{aligned}$$

Or :

$$2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) = 2e^{i(x+y+z)}(e^{-ix} + e^{-iy} + e^{-iz}) = 0$$

Ainsi,

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$$

Exercice 3: ♦◊◊

1. Déterminer les formes algébriques et trigonométriques du nombre

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$$

2. En déduire l'expression de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{7\pi}{12})$ à l'aide de radicaux.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} + i\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\right)$$

$\boxed{2.}$ On a :

$$\begin{cases} \cos(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \\ \sin(\frac{7\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \end{cases} \quad \text{Donc : } \frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

Exercice 4: ⧫◊◊

Soit un réel θ. Linéariser $(\cos\theta)^5$ et $(\sin\theta)^6$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}(\cos\theta)^5 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5\\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5i\theta}+5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}+10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{32}\left(2\cos(5\theta)+10\cos(3\theta)+20\cos(\theta)\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\cos(5\theta)+5\cos(3\theta)+10\cos(\theta)\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}(\sin\theta)^6 &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^6\\ &= -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta}-6e^{4i\theta}+15e^{2i\theta}-20+15e^{-2i\theta}-6e^{-4i\theta}+e^{-6i\theta}\right)\\ &= -\frac{1}{64}\left(2\cos(6\theta)-12\cos(4\theta)+30\cos(2\theta)-20\right)\\ &= \frac{1}{32}\left(10+6\cos(4\theta)-15\cos(2\theta)-\cos(6\theta)\right)\end{aligned}$$

Exercice 5: ⧫⧫◊

1. Soit x un réel. Exprimer $\cos(5x)$ comme un polynome en $\cos(x)$.
2. Montrer que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du trinôme $x \mapsto 16x^2-20x+5$.
3. En déduire l'égalité $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a :

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^5\right)\\ &= \cos^5(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)+5\cos(x)\sin^4(x)\\ &= \cos^5(x)-10\cos^3(x)(1-\cos^2(x))+5\cos(x)(1-2\cos^2(x)+\cos^4(x))\\ &= 16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x)\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Posons $x=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ On a :

$$\begin{aligned}&\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{10}\right)=16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right)-20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right)+5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\\ \iff\ &16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right)-20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+5=0\\ \iff\ &16x^2-20x+5=0\end{aligned}$$

Ainsi $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine de ce trinôme.

$\boxed{3.}$ On a :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{5})}{2}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}&16x^2-20x+5=0\\ \iff\ &x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1+\cos(\frac{\pi}{5})}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ car $\cos(\pi/5)>\cos(\pi/3)=0.5$. On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 6: ⧫⧫◊

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer $S=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$

Solution :

Notons : $S'=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$. On a :

$$S+iS'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k=(1+e^{ix})^n=\left(e^{\frac{ix}{2}}\right)^n\left(e^{-\frac{ix}{2}}+e^{\frac{ix}{2}}\right)^n=e^{\frac{inx}{2}}2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

Donc $S=\mathrm{Re}\left(2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{inx}{2}}\right)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{Re}\left(e^{\frac{inx}{2}}\right)$.
Or, on a :

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{inx}{2}}\right)=\mathrm{Re}\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

En conclusion :

$$S=2^n\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Exercice 7: ♦♦◊

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On note

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

1. Montrer que $D_n(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$.

2. Montrer que $F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$.

Solution :

$\boxed{1.}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{n}\left(e^{ix}\right)^k = e^{-nx}\frac{1-e^{ix(2n+1)}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-inx}-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{e^{ix/2}(e^{-ix(n+1/2)}-e^{ix(n+1/2)})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})} = \frac{-2i\sin(x(n+\frac{1}{2}))}{-2i\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{n\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin((k+\frac{1}{2})x)$$

Calculons la somme des $\sin((k+1/2)x)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\sin((k+\frac{1}{2})x) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix(k+\frac{1}{2})}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ixk}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix\frac{1}{2}}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{i\frac{nx}{2}}(\sin(\frac{nx}{2}))}{e^{i\frac{x}{2}}(\sin(\frac{x}{2}))}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right) = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\end{aligned}$$

Donc :

$$F_n(x) = \frac{1}{n\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{n\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

Exercice 8: ♦♦♦

Soit un quadrilatère $ABCD$ du plan. On construit les points E, F, G, H à l'extérieur du quadrilatère tels que les triangles EBA, FCB, GDC et HAD soient des triangles directs, isocèles et rectangles en E, F, G, H. Démontrer que

$$\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{FH} \qquad \text{et} \qquad EG = FH.$$

Solution :

Pas de solution.

Exercice 9: ♦♦♦

Trouver les nombres complexes d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $1, z^2$ et z^4 sont alignés.

Solution :

C'est évident lorsque $z \in \{0,1\}$. Supposons $z \notin \{0,1\}$.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.
On a :

$$\begin{aligned}1, z^2, z^4 \text{ alignés } &\iff \frac{z^4-1}{z^2-1} \in \mathbb{R} \iff \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{z^2-1} \in \mathbb{R} \\ &\iff z^2+1 \in \mathbb{R} \iff z^2 \in \mathbb{R} \iff r^2e^{2i\theta} = r^2e^{-2i\theta} \\ &\iff e^{2i\theta} = e^{-2i\theta} \iff e^{4i\theta} = 1 \iff \theta = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Donc $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.