Chapitre 26

Espaces de dimension finie

Exercice 1: ♦◇◇

Soit $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.
Montrer que F est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

Solution :

La trace est une forme linéaire sur $M_2(\mathbb{R})$, donc $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(M_2(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) + \dim(\mathrm{Tr}(M_2(\mathbb{R})))$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \dim(F) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathbb{R}) = 3$.

Exercice 2: ♦◇◇

Montrer que (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de $M_2(\mathbb{R})$ avec :

$$M_1 = I_2,\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution :

Montrons que c'est une famille libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que : $\lambda_1 I_2 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = 0$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

En résolvant le systeme. Ainsi, (M_1, M_2, M_3, M_4) est une famille libre.
Or $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, et c'est une famille libre de 4 vecteurs : c'est une base.

Exercice 3: ♦♦◇

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution :

On sait déjà que c'est une famille libre (cf 25.13).
C'est une famille libre de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$, donc c'est une base.

Exercice 4: ♦♦◇

Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Montrer qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.

Solution :

On sait que $(e_1, ..., e_{n-1})$ est une famille libre de E.
Par théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base de E.
Supposons qu'il n'existe pas de j tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.
Alors, pour tout j, $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est liée.
Donc, pour tout j, e'_j est combinaison linéaire de $(e_1, ..., e_{n-1})$.
Donc $\mathcal{B}'$ est combinaison linéaire de $\mathcal{B}$, ce qui est absurde.
Donc il existe un j tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.

Exercice 5: ♦◇◇

Justifier que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1 et un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

Solution :

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1 car $\forall z \in \mathbb{C}, z = z \cdot 1$.
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 car $\forall z \in \mathbb{C}, z = \Re(z) \cdot 1 + \Im(z) \cdot i$ avec $\Re(z), \Im(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 6: ♦♦◇

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{0 \le k \le n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^n = 0$.

1. Montrer que $\forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^p = 0$.
2. Montrer que $\forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$.
3. Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{k=0}^n \lambda_k P(k) = 0$.
4. Déduire que $((X + k)^n, k \in [\![0, n]\!])$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution :

On pose $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^n = 0$.
$\boxed{1.}$ On a $P' = \sum_{k=0}^n \lambda_k n (X + k)^{n-1} = n \sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^{n-1} = 0$.
Donc $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^{n-1} = 0$.
En dérivant n fois, on obtient bien l'égalité pour tout $p \in [\![0, n]\!]$.

$\boxed{2.}$ En évaluant en 0 l'égalité du $\boxed{1.}$, on obtient bien l'égalité.

$\boxed{3.}$ Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On a $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$.
On a $\sum_{k=0}^n \lambda_k P(k) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sum_{p=0}^n a_p k^p = \sum_{p=0}^n a_p \sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$.

$\boxed{4.}$ On a montré que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{k=0}^n \lambda_k P(k) = 0$.
Donc, en particulier pour un polynôme ne s'annulant jamais, on a que les λ_k sont nuls.
Donc $((X + k)^n, k \in [\![0, n]\!])$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.
Or, c'est une famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$, donc c'est une base.

Exercice 7: ♦♦◇

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 < ... < a_n \in \mathbb{R}$.
Soient $(\lambda_1, ...\lambda_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0$.
Alors $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f_{a_k} = -\lambda_n f_{a_n}$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f_{a_k - a_n} = -\lambda_n$.
Or $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f_{a_k - a_n}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $\lambda_n = 0$.
En itérant, on obtient que $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.
Donc $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$\boxed{2.}$ Supposons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension finie.
Alors, toute famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de cardinal inférieur ou égal à la dimension de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Or, on a montré que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de cardinal infini.
Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie.