Khôlles

M7, T1, T2, T3, T4, T5, I1

Chapitres.

M7 — Mécanique du solide

Question 1

Énoncer le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe pour un solide en rotation.

Solution :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à son axe (O_z) est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M_i} \text{ soit } J_z\dot{\omega} = \sum_i M_i$$

Question 2

Énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe et montrer qu'il est équivalent à la loi du moment cinétique scalaire.

Solution :

TEC : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i$ et $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega^2$ et $\mathcal{P}_i = \vec{M_i}\dot{\theta}$.
TMCS : $\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M_i}$ et $L_z = J_z\omega$ et $J\dot{\omega} = \sum_i \vec{M_i}$.

Question 3

Établir l'équation du mouvement du pendule pesant avec le TEC.

Solution :

Système : {Pendule de masse m}.
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : $\vec{p} = m\vec{g}$, $M_z(\vec{p}) = -d\sin\theta mg$ donc $\mathcal{P}(\vec{p}) = M_z(\vec{p}).\dot{\theta} = -lmg\dot{\theta}\sin\theta$.
$\vec{R}$ la réaction du pivot, qui est idéal : $M_z(\vec{R}) = 0$ donc $\mathcal{P}(\vec{R}) = 0$.
Étude cinématique : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$.
TEC: $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{p}) + \cancel{\mathcal{P}(\vec{R})} \Longrightarrow J\ddot{\theta}\dot{\theta} = -lmg\dot{\theta}\sin\theta \Longrightarrow J\ddot{\theta} + lmg\sin\theta = 0$.

Question 4

Établir l'équation du mouvement du pendule pesant avec le TMC.

Solution :

Système : {Pendule de masse m}.
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : $\vec{p} = m\vec{g}$, $M_z(\vec{p}) = -d\sin\theta mg$ Et $M_z(\vec{R}) = 0$ car c'est une liaison pivot idéale.
Etude cinématique : $\vec{OM} = l\vec{e_r}$, $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$
Ainsi, $L_z = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{e_r} \wedge ml\dot{\theta}\vec{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{e_z}$ et $\frac{dL_z}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e_z}$.
TMC : $\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M_i} \Longrightarrow ml^2\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

T1 — Thermodynamique

Question 5

Présenter le modèle du gaz parfait et d'une phase condensée incompressible et indilatable et énoncer leurs équations d'état.

Solution :

Dans le modèle du **gaz parfait**, on considère des particules :
– Ponctuelles : petites devant la distance les séparant.
– Sans intéractions : trajectoires rectilignes, sans chocs, hormis avec les parois.
Son équation d'état est $PV = nRT$, avec $R = 8.314 J.K^{-1}mol^{-1}$ la constante des GP.

Dans le modèle d'une **phase condensée**, on suppose que le volume est constant :
– Incompressible : insensible aux contraintes mécaniques (pression).
– Indilatable : insensible aux contraintes thermiques.
Son équation d'état est $V = cste$.

Question 6

Donner la définition de la capacité thermique à volume constant et de ses équivalents molaires et massiques.

Solution :

On définit la capacité thermique à volume constant par $C_v = \frac{dU}{dT}$.
Ses équivalent molaires et massiques sont respectivement $C_{v,m} = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$ et $c_v = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}$.
Interprétation Physique: C_v est la quantité d'énergie nécessaire pour augmenter la température du système de 1K.

Question 7

Retrouver l'expression de la capacité thermique à volume constant pour un GP monoatomique.

Solution :

Pour un tel gaz, on sait que $U = \frac{3}{2}nRT$ donc $C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}nR$.

Question 8

Rappeler la capacité thermique massique de l'eau.

Solution :

On a $c_{v,eau} = 4.18 kJ.K^{-1}.kg^{-1}$.

T2 – Premier Principe

Question 9

Définir le vocabulaire usuel des transformations thermodynamiques.

Solution :

Vocabulaire :

Définition

On appelle **transformation thermodynamique** l'évolution d'un système entre deux états d'équilibre à la suite d'une perturbation. On la qualifie de :

- **isochore**, si le volume du système ne varie pas : $V = cste$ (isoV) ;
- **isobare**, si la pression du système ne varie pas : $P = cste$ (isoP) ;
- **monobare**, si la pression extérieure ne varie pas : $P_{ext} = cste$ (monoP) ;
- **isotherme**, si la température du système ne varie pas : $T = cste$ (isoT) ;
- **monotherme**, si la température extérieure ne varie pas : $T_{ext} = cste$ (monoT) ;
- **réversible** si la transformation est lente et que les pressions et températures du système et de l'extérieur sont à tout instant égales.

Le préfixe « iso » fait référence à une caractéristique du **système**, tandis que le préfixe « mono » se rapporte à une caractéristique de l'**extérieur**.

Question 10

Énoncer le premier principe en explicitant tous ses termes.

Solution :

Premier Principe: $\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_p + \Delta U = W_{nc} + Q$.
Ici, W_{nc} est la somme des travaux des forces non-conservatives, et Q est la somme des transferts thermiques.

Question 11

Définir l'enthalpie d'un système et donner ses propriétés. Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique aux états initial et final.

Solution :

L'enthalpie est définie par $H = U + PV$.
Propriétés: H est une fonction d'état extensive et additive.
Bilan d'enthalpie: $\Delta H + \Delta\mathcal{E}_c = W_u + Q$ où W_u est le travail autre que celui des forces de pression.

Question 12

Dans le cas d'un gaz parfait, exprimer C_p et C_v à partir du coefficient isentropique γ et de la relation de Mayer.

Solution :

Par définition, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.
Relation de Mayer: $C_{p,m} - C_{v,m} = R$.
Alors $C_p - C_v = nR \Rightarrow C_p = nR + C_v \Rightarrow \gamma = \frac{nR+C_v}{C_v} \Rightarrow C_v(\gamma-1) = nR \Rightarrow C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$.
On retrouve alors facilement C_p avec la relation de Mayer.

Question 13

Définir la résistance thermique d'un matériau en introduisant les grandeurs utilisées avec un schéma.

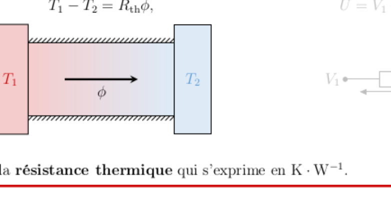
Solution :

Définition :

Définition

En régime permanent, le **flux thermique** à travers un système est relié à la différence de température à laquelle il est soumis par la loi

$$T_1 - T_2 = R_{th}\phi, \qquad U = V_1 - V_2 = RI$$



où R_{th} est la **résistance thermique** qui s'exprime en $K \cdot W^{-1}$.

T3 — Deuxième Principe

Question 14

Énoncer complètement le second principe : propriétés de l'entropie, bilan d'entropie et expliciter les différents termes.

Solution :

L'entropie S est une fonction d'état extensive et additive.
Deuxième principe:

$$\Delta S = S_{créée} + S_{éch}$$

Où est $S_{créée}$ est l'entropie créée par le système et $S_{éch}$ est l'entropie échangée avec l'extérieur.
On a $S_{éch} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ au contact des thermostats de températures T_i.
Si $S_{créée} = 0$, la transformation est réversible, sinon elle est irréversible.

Question 15

Citer et établir la loi de Laplace pour un gaz parfait et ses conditions d'application.
On rappelle l'entropie d'un gaz parfait :

$$S(P,V) = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{P}{P_0} + \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{V}{V_0} + S_0.$$

Solution :

Conditions: on considère un gaz parfait, subissant une transformation adiabatique réversible.
Loi de Laplace: $PV^\gamma = cste$.
Les conditions adiabatique et réversible assurent que $\Delta S = 0$.
De plus, $\Delta S = S(P_2,V_2) - S(P_1,V_1) = ... = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{P_2V_2^\gamma}{P_1V_1^\gamma}$ donc $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$.

Question 16

Application 4 – Égalisation des températures de deux systèmes

Dans une enceinte calorifugée, on met en contact thermique deux systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ constitués chacun d'un gaz parfait, de températures respectives T_1 et T_2 et de capacités thermiques à pression constante respectives C_{p1} et C_{p2}. La transformation est isobare.

1. Déterminer la température finale des deux systèmes.
2. Exprimer l'entropie créée lors de la transformation.

Solution :

$\boxed{1.}$ Système : $\{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2\}$.
Premier principe : $\Delta U = \Delta U_{\mathcal{S}_1} + \Delta U_{\mathcal{S}_2} = C_{p1}(T_f - T_1) + C_{p2}(T_f - T_2) = 0$ car adiabatique.
Ainsi, $T_f = \frac{C_{p1}T_1 + C_{p2}T_2}{C_{p1}+C_{p2}}$.
$\boxed{2.}$ Deuxième principe : $\Delta S = \Delta S_{\mathcal{S}_1} + \Delta S_{\mathcal{S}_2} = S_{créée} + \cancel{S_{éch}}$.
On peut alors calculer ΔS avec les formules des entropies des gaz parfaits (rappelées par le colleur).

Question 17

Application 8 – Détente de Joule – Gay-Lussac

« L'appareil à deux globes » est constitué de deux ballons en verre de même volume $V_0 \approx 14$ L, reliés entre eux par une tubulure de laiton munie d'un robinet. L'un des ballons peut être relié à une machine pneumatique permettant d'y faire le vide, ou à une réserve de gaz.

On suppose la demi-enceinte de droite initialement vide et le gaz dans la demi-enceinte de gauche à la température T_0. Lorsque l'on ouvre le robinet, le gaz se répand très rapidement dans le vide.

1. Justifier que l'on peut approximer la transformation du gaz comme étant adiabatique et sans travail échangé.
2. Exprimer le volume et la température finale du gaz V_f et T_f en fonction des valeurs initiales V_0 et T_0.
3. Déterminer l'entropie créée au cours de la transformation. Interpréter.

Solution :

Système : {gaz + vide}
$\boxed{1.}$ La transformation est adiabatique car rapide devant les transferts. Elle est isochore donc $W = 0$.
$\boxed{2.}$ Premier principe: $\Delta U = \cancel{W} + Q = mc(T_f - T_0) = 0$ donc $T_f = T_0$ et $V_f = 2V_0$.
$\boxed{3.}$ Deuxième principe : $\Delta S = \Delta S_{GP} + \cancel{\Delta S_{vide}} = S(T_0, 2V_0) - S(T_0, V_0) = nR\ln(2)$.
L'entropie échangée est nulle car adiabatique. Donc $\Delta S = S_{créée} = nR\ln 2 \Longrightarrow$ irréversible.

Question 18

Application 9 – Chauffage par effet Joule

On considère une masse m d'eau de capacité thermique massique c, initialement à la température $T_i = 20\,°C$, dans un calorimètre dont on néglige la valeur en eau. On plonge une résistance $R = 5\,\Omega$ (de capacité thermique négligeable), parcourue par un courant d'intensité $I = 1$ A pendant $\tau = 1$ min dans l'eau.

1. Établir l'expression de la température finale T_f. Faire l'application numérique.
2. Exprimer l'entropie créée. Conclure.
3. Que devient cette expression en supposant $T_f \approx T_i$, c'est-à-dire si $RI^2\tau \ll mcT_i$? Faire l'application numérique.

Donnée : on rappelle que l'entropie massique d'une phase condensée est donnée par

$$s(t) = c\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0,$$

où s_0 est l'entropie massique à la température T_0 et c la capacité thermique massique.

Solution :

Système : {Eau + Résistance + Calorimètre}
$\boxed{1.}$ Travail électrique : $W = RI^2\tau$.
On a $\Delta H = W + \cancel{Q} = mc(T_f - T_i)$ donc $T_f = T_i + \frac{RI^2\tau}{mc}$.
$\boxed{2.}$ $\Delta S = \Delta S_{eau} + \cancel{\Delta S_{calo}} + \cancel{\Delta S_R} = mc\ln\frac{T_f}{T_i}$.
Adiabatique : $S_{éch} = 0$ donc $S_{créée} = mc\ln\frac{T_f}{T_i}$ donc irréversible.
$\boxed{3.}$ $S_{créée} = mc\ln(1 + \frac{RI^2\tau}{mcT_i}) \sim \frac{RI^2\tau}{T_i} > 0$.

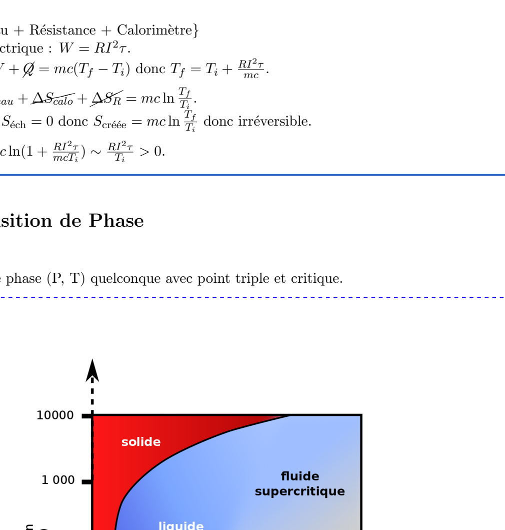
T4 — Transition de Phase

Question 19

Diagramme de phase (P, T) quelconque avec point triple et critique.

Solution :

C'est :

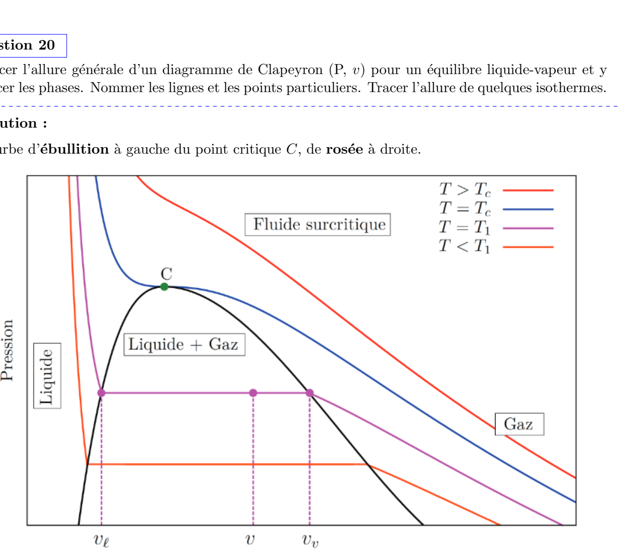


Question 20

Tracer l'allure générale d'un diagramme de Clapeyron (P, v) pour un équilibre liquide-vapeur et y placer les phases. Nommer les lignes et les points particuliers. Tracer l'allure de quelques isothermes.

Solution :

Courbe d'**ébullition** à gauche du point critique C, de **rosée** à droite.



Question 21

Théorème des moments, quelle interprétation graphique dans le diagramme de Clapeyron ?

Solution :

On a :

$$w_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l} \qquad \text{et} \qquad w_l = \frac{v - v_v}{v_l - v_v}$$

C'est la position de v par rapport à v_l et v_v.
Comment s'en rappeler ? On regarde les cas limites: si $v = v_v$ alors $w_l = 0$, et si $v = v_l$ alors $w_v = 0$.

T5 — Machine Thermique

Question 22

Donner le sens réel des échanges d'énergies dans un moteur, un réfrigérateur et une pompe à chaleur.

Solution :

- **Moteur:** $W < 0$, $Q_c > 0$ et $Q_f < 0$.
- **Réfrigérateur:** $W > 0$, $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$.
- **Pompe à chaleur:** $W > 0$, $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$.

Question 23

Citer quelques ordres de grandeurs de machines thermiques actuelles.

Solution :

- **Moteur:** $\eta \sim 40\%$.
- **Réfrigérateur:** ~ 2 (frigo) et ~ 8 (congélateur).
- **Pompe à chaleur:** $e \sim 4$.

Question 24

Définir le rendement ou l'efficacité d'une machine thermique en fonction des énergies échangées au cours du cycle et établir la formulation associée au théorème de Carnot.

Solution :

Ils sont définis par $\left|\frac{\mathcal{E}_{utile}}{\mathcal{E}_{coûteuse}}\right|$
Rendement de Carnot:
On a $\eta = \left|\frac{W}{Q_c}\right| = -\frac{W}{Q_c}$.
Premier principe : $-W = Q_c + Q_f \Longrightarrow \eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$.
Deuxième principe : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 \Longrightarrow \frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$.
Alors $\eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_c} = \eta_C$.
Efficacité de Carnot (réfrigérateur):
De la même manière :
On a $e = \left|\frac{Q_f}{W}\right| = \frac{Q_f}{W}$.
Premier principe : $W = -Q_c - Q_f \Longrightarrow e = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f}$.
Deuxième principe : $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \Longrightarrow \frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f}$.
Alors $e = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{-\frac{Q_c}{Q_f} - 1} \leq \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = e_C$.
Efficacité de Carnot (pompe à chaleur):
De la même manière :
On a $e = \left|\frac{Q_c}{W}\right| = -\frac{Q_c}{W}$.
Premier principe : $W = -Q_c - Q_f \Longrightarrow e = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f}$.
Deuxième principe : $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \Longrightarrow \frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$.
Alors $e = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = e_C$.
Interprétation physique: Pour 1 joule fournies par W, on peut extraire e joules de chaleur.

I1 — Champ Magnétique

Question 25

Représenter les lignes de champ au voisinage d'une spire, d'une bobine longue et d'un aimant.

Solution :

On a :

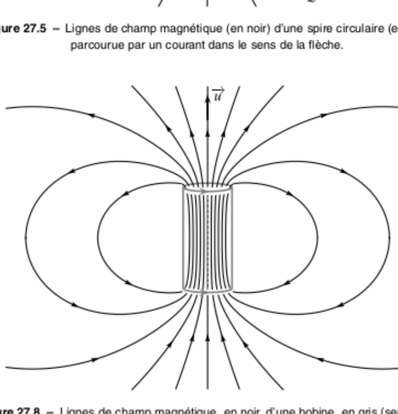


Figure 27.5 – Lignes de champ magnétique (en noir) d'une spire circulaire (en gris) parcourue par un courant dans le sens de la flèche.

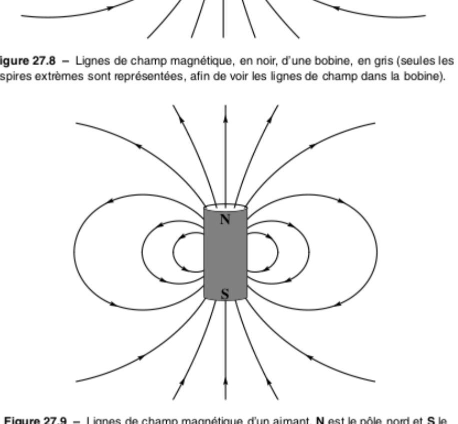


Figure 27.8 – Lignes de champ magnétique, en noir, d'une bobine, en gris (seules les spires extrèmes sont représentées, afin de voir les lignes de champ dans la bobine).

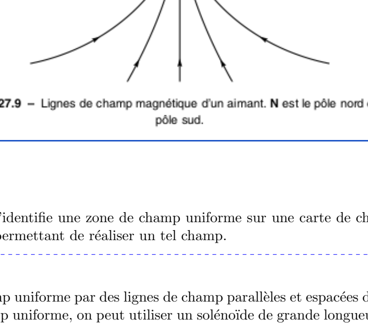


Figure 27.9 – Lignes de champ magnétique d'un aimant. **N** est le pôle nord et **S** le pôle sud.

Question 26

Expliquer comment s'identifie une zone de champ uniforme sur une carte de champ magnétique et décrire un dispositif permettant de réaliser un tel champ.

Solution :

On reconnaît un champ uniforme par des lignes de champ parallèles et espacées de manière régulière.
Pour réaliser un champ uniforme, on peut utiliser un solénoïde de grande longueur devant son rayon.

Question 27

En s'appuyant sur un schéma, donner l'expression de la force de Laplace qui s'exerce sur un élément de fil conducteur de longueur dl.

Solution :

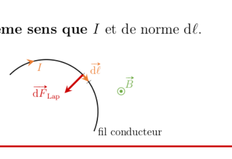
Cours :

Définition

Un élément de fil de longueur $d\ell$, parcouru par un courant d'intensité I, subit de la part d'un champ magnétique **extérieur** $\vec{B}$ la **force de Laplace** élémentaire $\vec{dF}_{Lap}$:

$$\vec{dF}_{Lap} = I\vec{d\ell} \wedge \vec{B},$$

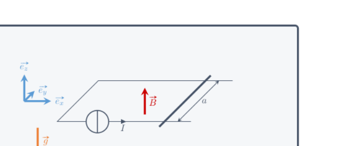
où $\vec{d\ell}$ est tangent au fil, de **même sens que** I et de norme $d\ell$.



Question 28

Application 4 – Rail de Laplace

On considère le circuit représenté ci-contre, constitué d'un barreau métallique de masse m, libre de glisser sans frottement le long de deux rails parallèles séparés d'une distance a. Le circuit est fermé par une source idéale de courant qui impose un courant d'intensité $I > 0$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{e_z}$, où $B > 0$.



https://youtu.be/58MmOpSm4LY

1. Exprimer la force de Laplace $\vec{F}_{Lap}$ qui s'exerce sur le barreau métallique. Reproduire le schéma et représenter $\vec{F}_{Lap}$.
2. ~~Établir l'équation différentielle du mouvement. Quel type de mouvement observe-t-on ?~~
3. Exprimer la puissance de la force de Laplace $\mathcal{P}_{Lap}$. Commenter.

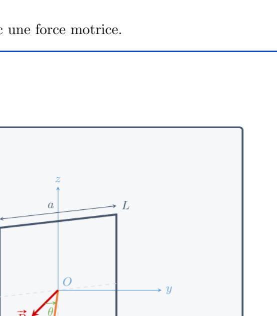
Solution :

$\boxed{1.}$ $\vec{F_{Lap}} = Ia\vec{e_y} \wedge B\vec{e_z} = aIB\vec{e_x}$.
$\boxed{3.}$ $\mathcal{P}_{Lap} = \vec{F_{Lap}} \cdot \vec{v} = aIB\vec{e_x} \cdot \dot{x}\vec{e_x} = aIB\dot{x} > 0$, c'est donc une force motrice.

Question 29

Application 5 – Couple magnétique

On considère une spire rectangulaire de largeur a et de hauteur b, parcourue par un courant d'intensité $I > 0$, en rotation autour de l'axe (Oz), axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux des côtés LM et KN, et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe $\vec{B} = B\vec{e_x}$ $(B > 0)$. On note $\vec{n}$ le vecteur normal à la spire, orienté par le sens du courant I, et α l'angle entre (Ox) et $\vec{n}$.



1. Montrer que la résultante des forces de Laplace qui s'appliquent sur cette spire est nulle.
2. Faire un schéma de la spire, vue du dessus.
3. Donner la direction des forces de Laplace qui s'exercent sur les segments LM et NK. Que peut-on dire de leur moment par rapport à l'axe (Oz) ?
4. Exprimer les forces de Laplace qui s'exercent sur les segments KL et MN. Les représenter sur le schéma précédent.
5. En déduire l'expression du couple Γ_{Lap}, moment des forces de Laplace qui s'exercent sur la spire par rapport à l'axe (Oz).
6. ~~Rappeler l'expression du moment magnétique $\vec{\mu}$ de la spire et exprimer Γ_{Lap} en fonction de $\vec{\mu}$ et $\vec{B}$.~~
7. ~~Décrire qualitativement l'effet du champ magnétique sur le moment magnétique de la spire.~~

Solution :

$\boxed{1.}$ $\vec{F_{Lap}} = I(\vec{ML} + \vec{LK} + \vec{KN} + \vec{NM}) \wedge \vec{B} = I\vec{0} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.
$\boxed{2.}$ Photo à rajouter.
$\boxed{3.}$ Forces de Laplace:
⊚ $\vec{F_{LM}} = I\vec{LM} \wedge \vec{B}$, dirigé selon $+\vec{e_z}$
⊚ $\vec{F_{NK}} = I\vec{NK} \wedge \vec{B}$, dirigé selon -$\vec{e_z}$
Ces deux forces sont colinéaires à (O_z) donc de moment nul par rapport à cet axe.
$\boxed{4.}$ Forces de Laplace:
⊚ $\vec{F_{KL}} = I\vec{KL} \wedge \vec{B} = Ib\vec{e_z} \wedge B\vec{e_x} = IbB\vec{e_y}$.
⊚ $\vec{F_{MN}} = I\vec{MN} \wedge \vec{B} = I(-b\vec{e_z}) \wedge B\vec{e_x} = -IbB\vec{e_y}$.
$\boxed{5.}$ $\Gamma_{Lap} = \mathcal{M}_z(\vec{F_{KL}}) + \mathcal{M}_z(\vec{F_{MN}}) = -abIB\sin\theta$ par bras de levier.