

Chapitre 2

Propriétés de \mathbb{R} .

Sommaire.

1	Une relation d'ordre sur \mathbb{R} .	1
1.1	Relation \leq .	1
1.2	Relation $<$ et opérations algébriques.	1
1.3	Intervalles.	2
2	Valeur absolue.	3
2.1	Valeur absolue.	3
2.2	Valeur absolue et opérations algébriques.	3
2.3	Une notion de distance sur \mathbb{R}	3
3	Entiers.	4
3.1	Entiers naturels, entiers relatifs.	4
3.2	Partie entière d'un réel.	4
4	Rationnels.	5
4.1	Nombres décimaux.	5
4.2	Nombres rationnels.	5
4.3	Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}	6
5	Parties bornées de \mathbb{R} .	6
5.1	Majorants, minorants.	6
5.2	Maximum, minimum.	7
6	Exercices.	7

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

1.1 Relation \leq .

Rappel : \leq est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

- $\forall x \in \mathbb{R} \ x \leq x$ (réflexivité).
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \ (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$ (antisymétrie).
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$ (transitivité).

Rappel : C'est une relation d'ordre totale.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Rappel : Élémentaire mais fondamental.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \leq y \iff y - x \geq 0.$$

Exemple 1: Inégalité arithmético-géométrique.

Établir l'inégalité $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ pour deux réels x et y positifs. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Solution :

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0.$$

Donc $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, avec égalité si $x = y$.

1.2 Relation $<$ et opérations algébriques.

Rappel : \leq et somme.

On peut sommer des inégalités. Pour tous réels x, x', y, y' :

$$\begin{cases} x & \leq & y \\ \text{et} & & \\ x' & \leq & y' \end{cases} \implies x + x' \leq y + y'.$$

Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont des familles finies de nombres réels,

$$(\forall i \in I \quad x_i \leq y_i) \implies \sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i.$$

Proposition 2: Somme nulle de termes positifs.

Soient x_1, \dots, x_n des réels **positifs**, alors

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0.$$

Preuve :

Supposons que les x_i somment à 0 et soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a:

$$\sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ i \neq j}} x_i \geq 0 \quad \text{car les } x_i \text{ sont positifs.}$$

Donc $x_j \leq \sum_{i=1}^n x_i = 0$, ainsi $x_j = 0$ car $0 \leq x_j \leq 0$.

Rappel : \leq et produit.

Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$.

— Si a est un réel **positif**, alors $ax \leq ay$.

— Si a est un réel **négatif**, alors $ax \geq ay$.

On peut multiplier des inégalités dont les membres sont **positifs**. Pour tous réels x, x', y, y' :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ \text{et} \\ 0 \leq x' \leq y' \end{cases} \implies x \times x' \leq y \times y'$$

Rappel : \leq et quotient

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 < x \leq y \implies 0 \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

Exemple 3: Majorer, minorer une somme, un produit, un quotient.

Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$. Encadrer $x - y, (x - y)^2$ et $\frac{xy}{x+y}$.

Solution :

On a $x - y \in \llbracket -1, 4 \rrbracket$, $(x - y)^2 \in \llbracket 0, 16 \rrbracket$ et $\frac{xy}{x+y} \in \left[\frac{1}{4}, 5\right]$

1.3 Intervalles.

Définition 4: Les deux infinis.

On ajoute à l'ensemble \mathbb{R} les deux éléments $+\infty$ et $-\infty$ pour former l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

en prenant la convention que $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq +\infty$ et $-\infty \leq x$.

Définition 5

On appelle **intervalle** de \mathbb{R} une partie de \mathbb{R} ayant l'une des formes décrites ci-dessous:

- Segment $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \text{ et } x \leq b\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- Intervalles ouverts $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x \text{ et } x < b\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- Intervalles semi-ouverts. $[a, b[$ ou bien $]a, b]$.

Remarque: les parties décrites peuvent être vides : $[5, 3] = \emptyset$.

Exemple 6

L'ensemble des réels non nuls \mathbb{R}^* n'est **pas** un intervalle. C'est néanmoins une réunion d'intervalles:

$$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Pour une preuve, on attendra la caractérisation des intervalles comme parties convexes de \mathbb{R} .

2 Valeur absolue.

2.1 Valeur absolue.

Définition 7

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre réel positif donné par

$$\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8: Propriétés élémentaires.

Pour tout réel x , $|x| = \max(x, -x)$, $|-x| = |x|$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$, $-|x| \leq x \leq |x|$ et $|x| = 0 \iff x = 0$.

Preuve :

- 1. Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et $\max(x, -x) = x$; si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$ et $\max(x, -x) = -x$.
- 2. $|-x| = \max(-x, -(-x)) = \max(-x, x) = |x|$
- 3. $x \leq \max(x, -x)$ donc $x \leq |x|$.
- 4. $-x \leq \max(x, -x)$ donc $-x \leq |x|$.
- 5. En combinant les deux précédentes, on a $-|x| \leq x \leq |x|$.
- 6. Si $x = 0$, alors $|x| = 0$. Si $|x| = 0$, on a $-|x| \leq x \leq 0$ donc $x = 0$.

2.2 Valeur absolue et opérations algébriques.

Proposition 9: Valeurs absolues et produits.

- 1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^2 = x^2$ et $|x| = \sqrt{x^2}$.
- 2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|$.
- 3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

Preuve :

- 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x \geq 0$, alors $|x|^2 = x^2$, si $x < 0$, alors $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.
- 2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{y^2} = |x||y|$.
- 3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. $\left| \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{x}{y} \right| \times 1 = \left| \frac{x}{y} \right| \times \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$.

Théorème 10: Inégalité triangulaire. ★

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Preuve :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x + y)^2 \\ &= x^2 + 2|x||y| + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 \\ &= 2(|xy| - xy) \geq 0 \quad \text{car } |xy| \geq xy. \end{aligned}$$

donc $(|x| + |y|)^2 \geq |x + y|^2$ donc $|x| + |y| \geq |x + y|$ par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur \mathbb{R}_+ .

Corrolaire 11

- 1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq |x| + |y|$.
- 2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
- 3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$.

Preuve :

- 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.
- 2. On le verra dans \mathbb{C} .
- 3. Par récurrence sur n , pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ (hérédité):

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|.$$

⚠ On notera que dans la première inégalité, on a écrit un $-$ à gauche, mais il y a toujours un $+$ à droite !

2.3 Une notion de distance sur \mathbb{R}

$|x - y|$ est la [distance] entre x et y .

Proposition 12

$$\forall x, a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{aligned} |x - a| \leq b &\iff x \in [a - b, a + b] \\ |x - a| \geq b &\iff x \geq a + b \text{ ou } x \leq a - b \end{aligned}$$

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}_+ \quad |x| \leq b \iff -b \leq x \leq b.$

3 Entiers.

3.1 Entiers naturels, entiers relatifs.

Définition 13

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ et $\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots\} \cup \{-1, -2, \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Proposition 14

L'ensemble des entiers relatifs est stable par somme, différence et produit.

Preuve :

Le résultat est admis, mais précisons le sens de stable: on a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, \quad p + q \in \mathbb{Z} \text{ et } p - q \in \mathbb{Z} \text{ et } pq \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des entiers naturels quant à lui est stable par somme et produit, mais pas par différence.

Proposition 15

Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} ou \mathbb{Z} admet un plus grand élément.
Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.
Toute partie non vide et minorée de \mathbb{Z} admet un plus petit élément.

3.2 Partie entière d'un réel.

Définition 16

Pour tout nombre réel x , on appelle **partie entière** de x , et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur à x :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Proposition 17: Partie entière et encadrements.

Pour tout nombre réel x ,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

En «croisant» les inégalités, on obtient notamment que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Preuve :

Par définition, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$.
Supposons $x \geq \lfloor x \rfloor + 1$. Alors $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier inférieur à x , et $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x .
Donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq \lfloor x \rfloor$, ce qui est absurde. Donc $x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Proposition 18

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur \mathbb{R} .

Preuve :

Soient $x, y \in \mathbb{R} \mid x \leq y$, alors $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y$, donc $\lfloor x \rfloor \leq y$.
Ainsi, $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à y , donc inférieur à $\lfloor y \rfloor$, le plus grand entier inférieur à y .
On a bien $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$: la fonction est croissante.

Exemple 19: Une propriété simple de la partie entière.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
Ceci a pour conséquence que la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < \lfloor x \rfloor + 2$.
Ainsi, $\lfloor \lfloor x \rfloor + 1 \rfloor \leq \lfloor x + 1 \rfloor < \lfloor \lfloor x \rfloor + 2 \rfloor$.
Donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq \lfloor x + 1 \rfloor < \lfloor x + 2 \rfloor < \lfloor x \rfloor + 2$ (la partie entière d'un entier est cet entier).
Donc $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Lemme 20: Une utilisation de la partie entière en analyse.

L'ensemble \mathbb{R} possède la propriété dite d'Archimède :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid n\varepsilon > x.$$

4 Rationnels.

4.1 Nombres décimaux.

Définition 21

On appelle **nombre décimal** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\frac{p}{10^k}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté \mathbb{D} .

Définition 22: généralisation.

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle **fraction p -adique** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\frac{q}{p^k}$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 23

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre décimal $d_n(x) := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ satisfait l'encadrement

$$d_n(x) \leq x < d_n(x) + 10^{-n}.$$

Les nombres $d_n(x)$ et $d_n(x) + 10^{-n}$ sont appelés respectivement **valeur décimale** par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n} .

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \lfloor 10^n x \rfloor &\leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \\ \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} &\leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \\ d_n(x) &\leq x < d_n(x) + 10^{-n}. \end{aligned}$$

Corrolaire 24: \mathbb{D} est dense dans \mathbb{R} .

Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre décimal.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ a < b \implies \mathbb{D} \cap]a, b[\neq \emptyset.$$

Preuve :

Soient $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$. On pose $m = \frac{a+b}{2}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a < m < d_n(m) + 10^{-n}$.
On pose $\varepsilon = b - m$. Il existe $n \in \mathbb{N} \mid 10^{-n} < \varepsilon$. Alors

$$a < m < d_n(m) + 10^{-n} < d_n(m) + \varepsilon \leq m + (b - m) = b$$

Donc

$$a < \underbrace{d_n(m) + 10^{-n}}_{\in \mathbb{D}} < b.$$

4.2 Nombres rationnels.

Définition 25

Un nombre **rationnel** est un nombre réel qui s'écrit sous la forme d'un quotient d'entiers $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
On note \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels.
On dit d'un nombre de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qu'il est **irrationnel**.

Proposition 26

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Proposition 27

L'ensemble des rationnels est stable par somme, différence, produit, et passage à l'inverse.

Exemple 28

Justifier que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas stable par somme, ni par produit.

Solution :

On a $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$, or $0 \in \mathbb{Q}$.
On a $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$, or $2 \in \mathbb{Q}$.

4.3 Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

Théorème 29: \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel et un nombre irrationnel.
Autrement dit, pour tous a, b réels avec $a < b$,

$$]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ et }]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

Preuve :

Soient $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$.

• On sait déjà que dans $]a, b[$ il existe un décimal: $d_n(\frac{a+b}{2})$, c'est donc un rationnel.

• Puisque $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, il existe un rationnel r entre eux.

Alors $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$, donc $a < r + \sqrt{2} < b$.

Supposons que $r + \sqrt{2}$ soit rationnel, alors $r + \sqrt{2} - r$ l'est aussi par stabilité, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, absurde.

Il existe donc un nombre irrationnel entre a et b .

Corrolaire 30: Écriture séquentielle de la densité de \mathbb{Q} .

Pour tout réel x , il existe une suite (r_n) de rationnels telle que $r_n \rightarrow x$.

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in \mathbb{Q} \cap]x, x + \frac{1}{n}[$ par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, x < y_n < x + \frac{1}{n}$.

Par encadrement, $y_n \rightarrow x$.

5 Parties bornées de \mathbb{R} .

5.1 Majorants, minorants.

Dans tout ce qui suit, A est une partie de \mathbb{R} .

Définition 31: Majorant, minorant.

- On dit que A est **majorée** si il existe $M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, x \leq M$. Dans ce contexte, M est un **majorant** de A .
- On dit que A est **minorée** si il existe $m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, m \leq x$. Dans ce contexte, m est un **minorant** de A .
- On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 32

Donner des majorants et des minorants de $A = [0, 1[$.
Soit $A' = [1, +\infty[$, démontrer que A' n'est pas majorée.

Solution :

A est majorée par 1, mais aussi par $\pi, 666...$ et minorée par $0, -1, ...$

Supposons A' majorée, alors $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, x \leq M$, or $M + 1 \in A'$ donc $M + 1 \leq M$, absurde.

Proposition 33: Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue. ★

Soit A une partie de \mathbb{R} .

$$A \text{ est bornée} \iff \exists \mu \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

Preuve :

\implies Supposons A bornée, alors il existe $M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, x \leq M$ et $m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, m \leq x$.

Alors $\forall x \in A, -|m| \leq x \leq |M|$, donc $|x| \leq \max(|M|, |m|)$.

\impliedby Supposons $\exists \mu \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in A, |x| \leq \mu$. Alors $\forall x \in A, -\mu \leq x \leq \mu$. Donc A est bornée.

5.2 Maximum, minimum.

Définition 34: Maximum, minimum. ★

- S’il existe un élément $a \in A$ tel que $\forall x \in A, x \leq a$, alors cet élément est unique. Il est appelé plus grand élément de A ou encore **maximum** de A et noté $\max(A)$.
- S’il existe un élément $b \in A$ tel que $\forall x \in A, b \leq x$, alors cet élément est unique. Il est appelé plus petit élément de A ou encore **minimum** de A et noté $\min(A)$.

Preuve :

Soient M et M' deux maximums de A , alors $M \leq M'$ et $M' \leq M$ donc $M = M'$, il y a bien unicité.

Exemple 35: ★

La partie $[0, 1[$ admet 0 comme minimum, mais n’a pas de maximum.

Solution :

Supposons que A ait un maximum M .
On a $0 \leq M < 1$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{M+1}{2} < 1$.
Alors $\frac{M+1}{2} \in [0, 1[: \frac{M+1}{2} \leq M$, donc $M + 1 \leq 2M$ donc $1 \leq M$, absurde.

6 Exercices.

Exercice 1: ♦♦♦

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l’inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\ \iff & \frac{a^3 - a^2b + b^3 - ab^2}{ab} \geq 0 \\ \iff & \frac{a^2(a - b) + b^2(b - a)}{ab} \geq 0 \\ \iff & \frac{(a - b)(a^2 - b^2)}{ab} \geq 0 \\ \iff & \frac{(a - b)^2(a + b)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Or $(a - b)^2 \geq 0$, $(a + b) \geq 0$ et $ab \geq 0$.
Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2: ♦♦♦

1. Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$.

Solution :

1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \iff & a + b \leq a + 2\sqrt{ab} + b \\ \iff & 2\sqrt{ab} \geq 0 \\ \iff & \sqrt{ab} \geq 0 \\ \iff & ab \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

Considérons $a \geq b$, alors $|a - b| = a - b$.

$$\begin{aligned} & |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{a - b} \\ \iff & a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b \\ \iff & 2b \leq 2\sqrt{ab} \\ \iff & b^2 \leq ab \\ \iff & b \leq a \end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque $b \geq a$.
Ainsi, $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$.

Exercice 3: ♦♦♦

En utilisant la notion de distance sur \mathbb{R} , écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 3| \leq 6 \text{ et } |x^2 - 1| > 3\}$$

Solution :

On a $x \in [-9, 3]$ et $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ donc $x \in [-9, -2] \cup [2, 3]$.

Exercice 4: ♦♦♦

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. On définit les nombres m, g, h par

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Et on les appelle respectivement moyenne arithmétique, géométrique et harmonique de a et b .
Démontrer l'encadrement

$$a \leq h \leq g \leq m \leq b$$

Solution :

Montrons les inégalités une par une :

- $m \leq b \iff \frac{a+b}{2} - b \leq 0 \iff \frac{a-b}{2} \leq 0 \iff a - b \leq 0 \iff a \leq b$.
 - $g \leq m \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$.
 - $h \leq g \iff \frac{1}{h} \geq \frac{1}{g} \iff \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 0 \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2ab} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2ab} \geq 0$.
 - $a \leq h \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{h} \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \geq 0 \iff \frac{b-a}{2ab} \geq 0 \iff b - a \geq 0 \iff a \leq b$
- Ainsi, $a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

Exercice 5: ♦♦♦

Résoudre l'équation

$$\ln |x| + \ln |x + 1| = 0$$

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

$$\begin{aligned} \ln |x| + \ln |x + 1| &= 0 \\ \iff \ln (|x(x + 1)|) &= 0 \\ \iff |x(x + 1)| &= 1 \end{aligned}$$

Supposons $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
On a :

$$\begin{aligned} |x(x + 1)| &= 1 \\ \iff x(x + 1) &= 1 \\ \iff x^2 + x - 1 &= 0 \\ \iff x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Supposons $x \in]-1, 0[$.

$$\begin{aligned} |x(x + 1)| &= 1 \\ \iff -x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions dans $] -1, 0[$.
L'ensemble des solutions de l'équation est : $\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

Exercice 6: ♦♦♦

Résoudre l'équation

$$|x - 2| = 6 - 2x$$

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Considérons $x \geq 2$

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 6 - 2x \\ \iff x - 2 &= 6 - 2x \\ \iff x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Considérons $x \leq 2$

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 6 - 2x \\ \iff 2 - x &= 6 - 2x \\ \iff x &= 4 \end{aligned}$$

Seul la solution $x = \frac{8}{3}$ convient. Ainsi, l'unique solution à l'équation est $\frac{8}{3}$.

Exercice 7: ♦♦♦

Démontrer l'égalité $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x .
Soient $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Solution :

Notons r la partie fractionnaire de x , ainsi $x = \lfloor x \rfloor + r$.
On a alors $nx = n\lfloor x \rfloor + nr$ et $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nr \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nr \rfloor$.
Conséquemment, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n}$.
Or, $0 \leq \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < 1$ car $0 \leq r < 1$, donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$.
Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$.
Par conséquent, $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 8: ♦♦◇

1. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Soit p un entier supérieur à 2. Que vaut la partie entière de

$$\sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solution :

[1.] Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \iff & 2\sqrt{x(x+1)} - 2x < 1 \\ \iff & (2\sqrt{x(x+1)})^2 < (1+2x)^2 \\ \iff & 4x(x+1) < 4x^2 + 4x + 1 \\ \iff & 4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x < 1 \\ \iff & 0 < 1 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ \iff & 1 < 2\sqrt{(x+1)^2} - 2\sqrt{x(x+1)} \\ \iff & 1 < 2|x+1| - 2\sqrt{x(x+1)} \\ \iff & (2x+1)^2 > (2\sqrt{x(x+1)})^2 \\ \iff & 4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x \\ \iff & 1 > 0 \end{aligned}$$

[2.] Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc, en remplaçant x par $x-1$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1} < \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Ainsi,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{p^2-1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{p^2-1} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ \iff & \sqrt{p^2} - \sqrt{1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{p^2-1} - \sqrt{0} \\ \iff & 2p - 2 < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{p^2-1} \\ \iff & 2p - 2 < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \lfloor 2\sqrt{p^2-1} \rfloor \end{aligned}$$

Or $2p - 2 < 2\sqrt{p^2-1} < 2p$ donc $\lfloor 2\sqrt{p^2-1} \rfloor = 2p - 2$
On en conclut :

$$\lfloor \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \rfloor = 2p - 2$$

Exercice 9: ♦♦♦

Prouver que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

Solution :

Supposons que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que :

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$$

Alors :

$$\begin{aligned} p \ln 3 &= q \ln 2 \\ \iff \ln(3^p) &= \ln(2^q) \\ \iff e^{\ln(3^p)} &= e^{\ln 2^q} \\ \iff 3^p &= 2^q \end{aligned}$$

Or 3^p est toujours impair et 2^q est toujours pair, donc cela est absurde.
Ainsi, $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 10: ♦♦♦

Soient x et y deux rationnels positifs tels que \sqrt{x} et \sqrt{y} soient irrationnels.
Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Solution :

Supposons $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.

On a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= x - y \\ \iff \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \end{aligned}$$

Or $x - y \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ par hypothèse. Donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.
D'autre part,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{x}$$

\sqrt{x} est donc la somme de deux rationnels, et est donc rationnel.
C'est absurde. On en conclut que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Exercice 11: ♦♦♦

Soit l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Cette partie de \mathbb{R} est-elle bornée ? Possède-t-elle un maximum ? Un minimum ?

Solution :

Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = \frac{n^2 - 1}{n} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \\ &= \frac{n^3 - n}{n^3 + n} = \frac{n^3 + n}{n^3 + n} - \frac{2n}{n^3 + n} \\ &= 1 - \frac{2}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{2}{(n+1)^2 + 1} - 1 + \frac{2}{n^2 + 1} \\ &= \frac{2}{n^2 + 1} - \frac{2}{n^2 + 2n + 2} \\ &= \frac{4n + 2}{(n^2)(n^2 + 2n + 2)} \end{aligned}$$

C'est toujours positif : on en déduit que, (u_n) est croissante sur \mathbb{N}^* .
Elle admet donc un minimum en 1, qui est 0.
Elle admet aussi un majorant lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Ainsi, A admet 0 comme minimum, n'a pas de maximum et est majorée par 1.

Exercice 12: ♦♦♦

1. Montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad : \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}.$$

Étudier le cas d'égalité.

2. En déduire que l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \mid (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ et } a+b+c \geq 2 \right\}$$

admet un minimum et le calculer.

Solution :

1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} &\geq 0 \\ \iff \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)} &\geq 0 \\ \iff (a-b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} &= \frac{3a-b}{4} \\ \iff (a-b)^2 &= 0 \\ \iff a &= b \end{aligned}$$

2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^{*3}$ tels que $a+b+c \geq 2$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} &\geq \frac{3a-b}{4} + \frac{3b-c}{4} + \frac{3c-a}{4} \\ &\geq \frac{2a+2b+2c}{4} \\ &\geq \frac{a+b+c}{2} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Or, lorsque $a = b = c = \frac{2}{3}$, on a $a+b+c \geq 2$ et:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = 3 \frac{a}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ainsi, $1 \in E$ et $\forall x \in E, x \geq 1$ donc 1 est minimum de E .