Applications
Corrigé

DARVOUX Théo

Décembre 2023

Exercices.

Exercice 15.1 [♦◊◊]

Soit $f : E \to F$ une application. Soient deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer l'égalité

$$f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B)).$$

Procédons par double inclusion.
⊚ Soit $y \in f(A) \cap B$. Montrons que $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.
On a $y \in f(A)$ et $y \in B$.
$\exists x \in A \mid y = f(x)$ donc $x \in A$ et $x \in f^{-1}(B)$ car $y \in B$.
Ainsi $x \in A \cap f^{-1}(B)$ et $f(x) = y \in f(A \cap f^{-1}(B))$

⊚ Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ Montrons que $y \in f(A) \cap B$.
$\exists x \in A \cap f^{-1}(B) \mid y = f(x)$ donc $x \in A$ et $x \in f^{-1}(B)$.
Ainsi, $f(x) = y \in f(A)$ et $f(x) = y \in B$: $y \in f(A) \cap B$.

□

Exercice 15.2 [♦♦◊]

Soit $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.
1. (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(b) Montrer que si f est injective, la réciproque est vraie.
2. (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
(b) Démontrer que si f est surjective, la réciproque est vraie.
3. Montrer que $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.
4. Montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

1.
a) Soit $x \in A$. Montrons que $x \in f^{-1}(f(A))$.
On a $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$.
b) On suppose f injective, soit $x \in f^{-1}(f(A))$.
On applique f : $f(x) \in f(A)$. Par injectivité de f, $x \in A$.

2.
a) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$.
On a $\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$. Ainsi, $f(x) \in B$: $y \in B$.
b) Supposons f surjective, soit $y \in B$.
On a $\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$ et $f(x) = y \in f(f^{-1}(B))$.

3) Soit $y \in f(f^{-1}(f(A)))$. Montrons que $y \in f(A)$.
On a $\exists x \in f^{-1}(f(A)) \mid y = f(x)$ et $f(x) \in f(A)$ donc $y \in f(A)$.
Soit $y \in f(A)$. Montrons que $y \in f(f^{-1}(f(A)))$.
On a $\exists x \in A \mid y = f(x)$ alors $f(x) \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $f(x) = y \in f(f^{-1}(f(A)))$.

4) Soit $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$. Montrons que $y \in f^{-1}(B)$.
On a $f(y) \in f(f^{-1}(B))$ alors $y \in f^{-1}(B)$.
Soit $y \in f^{-1}(B)$. Montrons que $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
On a $f(y) \in f(f^{-1}(B))$ donc $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.

□

Exercice 15.3 [♦♦♦]

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que

$$f \text{ est injective} \iff [\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$$

⊚ Supposons f injective. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On sait déjà que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Montrons alors que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. On a que $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$.
Ainsi, $\exists x_A \in A \mid y = f(x_A)$ et $\exists x_B \in B \mid y = f(x_B)$.
Or f est injective : $x_A = x_B$, ainsi $x_A \in A \cap B$.
On a enfin que $f(x_A) \in f(A \cap B)$, alors $y \in f(A \cap B)$.

⊚ Supposons $[\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$. Montrons que f est injective.
Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Soient $x, x' \in E$. On suppose que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.
On a que $\{x\}$ et $\{x'\} \in \mathcal{P}(E)$.
Ainsi : $f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$.
Supposons que $x \neq x'$. On a alors : $f(\varnothing) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) : \varnothing = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$.
Or $f(x) = f(x')$ donc $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} \neq \varnothing$. C'est absurde : $x = x'$.
On a bien montré que f est injective.

□

Exercice 15.4 [♦◊◊]

Soient

$$f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z} \\ (n,p) \mapsto (-1)^n p \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{1+ix}{1-ix} \end{cases}$$

Ces fonctions sont-elles injectives ? Surjectives ?

On a que f n'est pas injective : $f(0,1) = f(2,1) = 1$.
Montrons que f est surjective.
Soit $y \in \mathbb{Z}$. Montrons que $\exists (n,p) \in \mathbb{N}^2 \mid f(n,p) = y$.
Si $y \geq 0$, on prend $n = 0$ et $p = |y|$.
Si $y \leq 0$, on prend $n = 1$ et $p = |y|$.

On a que g n'est pas surjective : 0 n'a aucun antécédent par g.
Montrons que g est injective.
Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, supposons $g(x) = g(x')$. Montrons que $x = x'$.
On a :

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\iff \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1+ix'}{1-ix'} \\ &\iff (1+ix)(1-ix') = (1+ix')(1-ix) \\ &\iff 1 - ix' + ix + xx' = 1 - ix + ix' + xx' \\ &\iff 2ix = 2ix' \\ &\iff x = x' \end{aligned}$$

On a bien que g est injective.

□

Exercice 15.5 [♦◊◊]

Dans cet exercice, on admet que π est irrationnel.
Démontrer que $\cos_{|\mathbb{Q}}$ n'est pas injective et que $\sin_{|\mathbb{Q}}$ l'est.

On sait que cos est paire : $\cos_{|\mathbb{Q}}$ l'est aussi.
Alors $\cos_{|\mathbb{Q}}(\frac{1}{2}) = \cos_{|\mathbb{Q}}(-\frac{1}{2})$. Or $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$: $\cos_{|\mathbb{Q}}$ n'est pas injective.

Soient $x, x' \in \mathbb{Q}^2$. Supposons que $\sin_{|\mathbb{Q}}(x) = \sin_{|\mathbb{Q}}(x')$. Montrons que $x = x'$.
On a :

$$\begin{aligned} \sin_{|\mathbb{Q}}(x) = \sin_{|\mathbb{Q}}(x') &\iff x \equiv x'[2\pi] \text{ (2π-périodicité)} \\ &\iff x = x' + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Or, $\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ x' + 2k\pi \notin \mathbb{Q}$. On a alors que $k = 0$:

$$\sin_{|\mathbb{Q}}(x) = \sin_{|\mathbb{Q}}(x') \iff x = x' + 2 \cdot 0\pi \iff x = x'$$

□

Exercice 15.6 [♦♦◊]

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si x} \geq 0 \\ 2x^2 \text{ si x} < 0 \end{cases}$

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}}$ est injective.

1. On a $f(2) = 4$ et $f(-\sqrt{2}) = 4$: f n'est pas injective.
2. Soient $x, x' \in \mathbb{Q}$ tels que $f_{|\mathbb{Q}}(x) = f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x})$. Montrons que $x = \widetilde{x}$.

Cas n°1 : x et $\widetilde{x}$ positifs :

$$f_{|\mathbb{Q}}(x) = f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x}) \iff x^2 = \widetilde{x}^2 \iff x = \widetilde{x}$$

Cas n°2 : x et $\widetilde{x}$ strictement négatifs :

$$f_{|\mathbb{Q}}(x) = f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x}) \iff 2x^2 = 2\widetilde{x}^2 \iff x^2 = \widetilde{x}^2 \iff x = \widetilde{x} \ \text{ car } x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}_-^*$$

Cas n°3 : $x \geq 0$ et $\widetilde{x} < 0$:

$$f_{|\mathbb{Q}}(x) = f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x}) \iff x^2 = 2\widetilde{x}^2 \iff x = -\sqrt{2}\widetilde{x} \iff -\frac{x}{\widetilde{x}} = \sqrt{2}$$

Cela est impossible par stabilité de $\mathbb{Q}$ par la division. Donc $f_{|\mathbb{Q}}(x) \neq f_{|\mathbb{Q}}(\widetilde{x})$.
Le cas où $x < 0$ et $\widetilde{x} \geq 0$ est symétrique.
On a prouvé que $f_{|\mathbb{Q}}$ est injective.

□

Exercice 15.7 [♦◊◊]

Soit $f : E \to E$. Montrer que
1. f est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.
2. f est surjective si et seulement si $f \circ f$ est surjective.

1. Supposons f injective. D'après la proposition 18, $f \circ f$ est injective.
Supposons $f \circ f$ injective. D'après la proposition 19, f est injective.
2. Supposons f surjective. D'après la proposition 23, $f \circ f$ est surjective.
Supposons $f \circ f$ surjective. D'après la proposition 24, f est surjective. □

Exercice 15.8 [♦♦♢]

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application.
On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \mathrm{id}_E$.

⊚ Supposons f injective. Soit $x \in E$.
On a $f \circ f(x) = f(x)$. Par injectivité de f, $f(x) = x$ donc $f = \mathrm{id}_E$.

⊚ Supposons f surjective. Soit $y \in E$.
On a $f \circ f(y) = f(y)$ et $\exists x \in E \mid f(x) = y$ par surjectivité de f.
Donc $f \circ f \circ f(x) = f \circ f(x)$. Alors $f \circ f(x) = f(x)$ et $f(y) = y$: $f = \mathrm{id}_E$.

□

Exercice 15.9 [♦♦♢]

Soit E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que

$$f \text{ est surjective} \iff f \text{ est injective}$$

⊚ Supposons f injective, montrons que f est surjective.
Soit $y \in E$. Par définition de f : $f \circ f \circ f(y) = f(y)$.
Par injectivité de f : $f \circ f(y) = y$.
Donc $f(y)$ est antécédent de y : f est surjective.

⊚ Supposons f surjective, montrons f injective.
Soient $y, y' \in E$ tels que $f(y) = f(y')$. Montrons que $y = y'$.
Par surjectivité de f, $\exists x, x' \in E \mid f(x) = y \ \wedge \ f(x') = y'$.
Ainsi, $f \circ f(x) = f \circ f(x')$.
Appliquons f : $f \circ f \circ f(x) = f \circ f \circ f(x')$.
Alors : $f(x) = f(x')$ et donc $y = y'$.
On a bien prouvé l'injectivité de f.

□

Exercice 15.10 [♦♢♢]

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n + (-1)^n \end{cases}$.
Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même et donner sa réciproque.

Montrons que f est un inverse à gauche et à droite d'elle-même.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(n) = f(n + (-1)^n) &= n + (-1)^n + (-1)^{n+(-1)^n} \\ &= n + (-1)^n(1 + (-1)^{(-1)^n}) \end{aligned}$$

Or $(-1)^n$ est toujours impair : $(-1)^{(-1)^n} = -1$. Ainsi :

$$f \circ f(n) = n + (-1)^n(1 - 1) = n$$

On a bien que f est un inverse à gauche et à droite d'elle même : f est bijective et est sa propre réciproque.

□

Exercice 15.13 [♦♦♦] Théorème de Cantor

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathcal{P}(E))$. Montrer que f n'est pas surjective.
Indication : on pourra considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Montrons que A n'a pas d'antécédent par f.
Supposons qu'il en ait un.
Alors $\exists \alpha \in E \mid A = f(\alpha)$.
⊚ Supposons que $\alpha \in A$. Alors $\alpha \in \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
Donc $\alpha \notin f(\alpha)$ donc $\alpha \notin A$. Absurde.

⊚ Supposons que $\alpha \notin A$. Alors $\alpha \notin \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
Donc $\alpha \in A$. Absurde.

α n'existe pas : A n'a pas d'antécédent par f et f n'est pas surjective.

□