Chapitre 8

Primitives et intégrales.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Définition et calculs directs.

1.1 Définition.

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur I si elle est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Proposition 2: Ensemble des primitives d'une même fonction sur un intervalle.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{P}_f$ l'ensemble des primitives de f sur I, dont oon suppose ici qu'il est non vide. Soit F une primitive de f, alors

$$\mathcal{P}_f = \{F + c,\ c \in C_I\}$$

où C_I est l'ensemble des fonctions constantes sur I.

Preuve :

$\boxed{\supset}$ Soit $c \in C_I$. $F + c$ est dérivable sur I comme somme, $(F + c)' = F' = f$.
$\boxed{\subset}$ Soit $G \in \mathcal{P}_f$, $(G - F)' = G' - F' = 0$, donc $G - F$ est constante : $\exists c \in C_I \mid G = F + c$.

Proposition 3: Primitives usuelles. ★

Fonction	Paramètre	Une primitive	Intervalle déf.
$x \mapsto x^n$	$n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^p$	$p \in \mathbb{Z}, p < -1,$	$x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto x^\alpha$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$		$x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$		$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

Fonction	Une primitive	Intervalle déf.
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$]-1, 1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$

Proposition 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Soient F et G des primitives respectivements de f et g sur I, et deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

la fonction $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I.

Exemple 5

Soit une fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

La fonction $F : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ en est une primitive.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(k+1)x^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)$.

1.2 Fonctions composées.

Proposition 6: Primitive et composée. ★

Soient deux fonctions $u : I \to J$, dérivable sur I, et $F : J \to \mathbb{R}$, dérivable sur J.
Alors la fonction

$F \circ u$ est une primitive de $u' \times F' \circ u$ sur I.

Fonction	Une primitive
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$
$u'u^\alpha$ $(a \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$
$u'e^u$	e^u

Fonction	Une primitive
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

Exemple 7

Calculer pour chacune des fonctions ci-dessous une primitive (on précisera sur quel intervalle).

$$x \mapsto \sin(3x) \qquad x \mapsto \cos x \sin x \qquad x \mapsto xe^{x^2} \qquad x \mapsto \tan x \qquad x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \qquad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.3 Inverse de trinôme. ★

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On cherche une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.

- Si le trinôme a une racine double γ, on peut écrire
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-\gamma)^2}.$$
Une primitive est:
$$F : x \mapsto -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x-\gamma} \qquad x \in]-\infty, \gamma[\text{ ou }]\gamma, +\infty[.$$
- Si le trinôme a deux racines distinctes α et β:
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$
Une primitive est:
$$F : x \mapsto A \ln|x-\alpha| + B \ln|x-\beta| \qquad x \in]-\infty, \alpha[\text{ ou }]\alpha, \beta[\text{ ou }]\beta, +\infty[.$$
On a toujours $B = -A$, ce qui permet d'écrire la primitive sous la forme $x \mapsto A \ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|$.
- Si le trinôme n'a pas de racine réelle, on met sous forme canonique:
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a((x+A)^2+B^2)}$$
Une primitive est:
$$F : x \mapsto \frac{1}{aB} \arctan\left(\frac{x+A}{B}\right) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Soient α et β deux réels distincts. Il existe deux constantes A et B réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\} \quad \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Cette écriture est appelée **décomposition en éléments simples.**
On donne en classe deux méthodes pour trouver A et B (qui sont opposés).

Méthode

Mise sous forme canonique : pour $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

Exemple 8

Calculer une primitive des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Racines évidentes : -1 et -2. On calcule la décomposition en éléments simples:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Primitive: $x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$.

$\boxed{2.}$ Pas de racines. On met sous forme canonique.

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Primitive: $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)$.

1.4 Primitive d'une fonction $t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ ou $t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\omega t)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, on veut calculer une primitive pour chacune des deux fonctions

$$f : t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad g : t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\omega t) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{R}^*.$$

$\boxed{\text{Méthode}}$: passer dans $\mathbb{C}$. Pour t réel, on a

$$e^{\alpha t}\cos(\omega t) = e^{\alpha t}\mathrm{Re}(e^{i\omega t}) = \mathrm{Re}(e^{\alpha+i\omega}t) \quad \text{et} \quad e^{\alpha t}\sin(\omega t) = e^{\alpha t}\mathrm{Im}(e^{i\omega t}) = \mathrm{Im}(e^{(a+i\omega)t}).$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{\alpha+i\omega}e^{(\alpha+i\omega)t}$ est une primitive de $t \mapsto e^{(\alpha+i\omega)t}$ sur $\mathbb{R}$, on peut alors calculer

$$\begin{cases} F(t) & := & \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha+i\omega}e^{(\alpha+i\omega)t}\right) = ... = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)). \\ G(t) & := & \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\alpha+i\omega}e^{(\alpha+i\omega)t}\right) = ... = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha\sin(\omega t)-\omega\cos(\omega t)). \end{cases}$$

La fonction F est une primitive de f et la fonction G est une primitive de g.

Exemple 9

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{3x}\cos(2x)$.

Solution :

Soit $t \in \mathbb{R}$.
On a $f(t) = \mathrm{Re}\left[e^{(3+2i)t}\right]$.
On note F sa primitive, on a donc $F(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{3+2i}e^{(3+2i)t}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{3-2i}{|3+2i|^2}e^{3t}\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right)\right]$.
On sélectionne la partie réelle : $F(t) = \frac{3}{13}e^{3t}\cos 2t + \frac{2}{13}e^{3t}\sin 2t$

2 Calcul intégral et primitives.

2.1 Propriétés de l'intégrale.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et $a, b \in I$. Pour une telle fonction, la construction de l'intégrale de Riemann au second semestre donnera un sens au nombre $\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$.

Rappelons brièvement quelques propriétés entrevues au lycée ; elles seront démontrées en fin d'année.

1. **Intégrale d'une constante.** Si f est constante égale à C sur I, alors $\int_a^b C\mathrm{d}x = C(b-a)$.
2. **Positivité.** Si f est **continue** et **positive** sur $[a,b]$ $(a \leq b)$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est positif.
3. **Croissance.** Si f et g sont continues sur $[a,b]$ $(a \leq b)$, telle que $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
4. **Relation de Chasles**. Si $a, b, c \in I$, alors $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$.
5. **Linéarité.** Si f et g sont continues sur I, et $a, b \in I$, alors
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$
6. **Inégalité triangulaire.** Si f est continue sur $[a,b]$ avec $a \leq b$, alors
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

2.2 Inégrales et primitives d'une fonction continue.

Le théorème suivant énonce que sous certaines conditions, la dérivation et l'intégration, deux opérations fondamentales en analyse, sont réciproques l'une de l'autre. Ce théorème sera démontré au second semetre dans le cours d'intégration.

Théorème 10: Théorème fondamental de l'analyse. ★

Soit I un intervalle et $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ **continue** sur I. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I. (c'est la primitive de f qui s'annule en a)

Corrolaire 11

Si une fonction est continue sur un intervalle, elle y admet des primitives.

Exemple 12

Exprimer à l'aide sur symbole intégrale une primitive de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et $g : x \mapsto \ln^2(x)$.

Proposition 13: Calculer une intégrale à grâce à une primitive.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) = F(b) - F(a).$$

Rappel : pour une fonction F définie sur $[a,b]$, on note $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 14

Calcul de $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t^3 \mathrm{d}t$, $\quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^3 t \mathrm{d}t$, $\quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\mathrm{d}x$.

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} t^3 \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} - 0 = \frac{1}{64}.\\
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^3 t \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\sin^4(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\sin^4(\frac{\pi}{2}) - 0 = \frac{1}{4}.\\
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(x) - 1\right)\mathrm{d}x = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Exemple 15

Domaine de définition et variations de $L : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

Solution :

On a $1/\ln$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, donc L y est définie. On va dériver L.

• Soit F une primitive de $\frac{1}{\ln}$ sur $]1,+\infty[$ (TFA).

Pour $x \in]1,+\infty[$, $L(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = [F(t)]_x^{x^2} = F(x^2) - F(x)$.

On a L dérivable comme somme et composée, donc: $L'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} \geq 0$

• C'est pareil sur $]0,1[$.

Ainsi, L est croissante sur $]0,1[$, puis sur $]1,+\infty[$ (pas continue en 1).

2.3 Intégration par parties.

Pour les intégrales, l'intégration par parties (souvent abrégée en "IPP") est le pendant de la formule de la dérivée d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{i.e.} \quad u'v = (uv)' - uv'.$$

Définition 16

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

Théorème 17: Intégration par parties. ★

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $a, b \in I$. On a

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve :

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, donc $(uv)' = u'v + uv'$.
Les fonctions u, v, u', v' sont continues sur I, car $u, v \in \mathcal{C}^1$.
Par somme et produit de fonctions continues, $u'v + uv'$ est continue sur I. On intègre entre a et b:

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b \left(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\right)\mathrm{d}t \\ \underset{\text{TFA}}{\Longrightarrow} \quad [uv]_a^b &= \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Exemple 18

Calculer les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} \mathrm{ch}(x)\sin(x)\mathrm{d}x$ (double IPP pour cette dernière).

Solution :

On a:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$J = \int_0^{\pi} \mathrm{ch}(x)\sin(x)\mathrm{d}x = [\mathrm{sh}\sin]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{sh}(x)\cos(x)\mathrm{d}x = 0 - [\mathrm{ch}\cos]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -\mathrm{ch}(x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

Donc $J = 1 + \mathrm{ch}(\pi) - J$ donc $J = \frac{1+\mathrm{ch}(\pi)}{2}$.

Exemple 19

Calculer des primitives pour les fonctions :

$$f \;:\; x \mapsto \sqrt{x}\ln(x) \text{ et } g \;:\; x \mapsto \arctan(x).$$

Solution :

Posons $F : x \mapsto \int_1^x \sqrt{t}\ln t\mathrm{d}t$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t}\ln t = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}$$

Posons $G : x \mapsto \int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule $G(x)$:

$$G(x) = \int_0^x 1\cdot\arctan t\mathrm{d}t = [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = x\arctan x - \left[\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right]_0^x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

2.4 Changement de variable.

Théorème 20: Changement de variable. ★

Soit $\varphi : I \to J$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f : J \to \mathbb{R}$ continue sur J. Pour tous $a, b \in I$, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Preuve :

La fonction f est continue sur J, posons $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$ où $x_0 \in J$, c'est une primitive de f d'après le TFA.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b F'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = [F\circ\varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{x_0}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{\varphi(a)} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(a)}^{x_0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Les physiciens ont un moyen pour se souvenir de la formule : ils posent $\boxed{\begin{cases} x &= \varphi(t) \\ \mathrm{d}x &= \varphi'(t)\mathrm{d}t \end{cases}}$

Exemple 21: Appliquer la formule "dans les deux sens".

1. En posant $x = \sin t$, calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.
2. À l'aide du changement de variable de votre choix, calculer $J = \int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t$.

$\boxed{1.}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ On pose $x = e^t$: $\mathrm{d}x = e^t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}e^t\mathrm{d}t = \int_{e^0}^{e^1} \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^e 1\mathrm{d}x - \int_1^e \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = e - 1 - [\ln|x+1|]_1^e \\ &= e - 1 + \ln\frac{2}{e+1} \end{aligned}$$

Exemple 22

1. Calcul d'une primitive de $\frac{1}{\mathrm{ch}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calcul d'une primitive de $\frac{1}{\sin}$ sur $]0,\pi[$ en posant $u = \cos x$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{e^t+e^{-t}} = \int_0^x \frac{2e^t}{(e^t)^2+1}\mathrm{d}t = \int_1^{e^x} \frac{2}{u^2+1}\mathrm{d}u = [2\arctan]_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{2.}$ Soit $F : x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t$. Soit $x \in]0,\pi[$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{-\sin^2 t}(-\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\cos x} \frac{1}{\cos^2 t - 1}(-\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\cos x} \frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\cos x} \frac{1}{u-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^{\cos x} \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}[\ln|u-1|]_0^{\cos x} - \frac{1}{2}[\ln|u+1|]_0^{\cos x} \\ &= \frac{1}{2}\ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| = \frac{1}{2}\ln\frac{|\cos x - 1|}{|\cos x + 1|} \end{aligned}$$

Corrolaire 23: Intégrale d'une fonction paire, d'une fonction impaire.

Soit a un réel positif et f une fonction continue sur $[-a,a]$.

Si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$. Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Corrolaire 24

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et T périodique, avec T un réel strictement positif.

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

3 Exercices.

Exercice 1: ♦◇◇

Donner les primitives des fonctions suivantes (on précisera l'intervalle que l'on considère).

$$a : x \mapsto \cos x e^{\sin x}; \qquad b : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad c : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}; \qquad d : x \mapsto \frac{1}{3x+1};$$
$$e : x \mapsto \frac{\ln x}{x}; \qquad f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}; \qquad g : x \mapsto \sqrt{3x+1}; \qquad h : x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}.$$

Solution :

On a:

$$A : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\sin x} + c \end{cases} ; \quad B : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\sin x) + c \end{cases} ;$$
$$C : \begin{cases}]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\sqrt{\sin x} + c \end{cases} ; \quad D : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}\ln(3x+1) + c \end{cases} ;$$
$$E : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2 x + c \end{cases} ; \quad F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln x) + c \end{cases} ;$$
$$G : \begin{cases} [-\frac{1}{3}, +\infty] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c \end{cases} ; \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + c \end{cases} .$$

Avec c les constantes d'intégration.

Exercice 2: ♦◇◇

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
1. Sans chercher à les calculer, donner le signe des intégrales suivantes.

$$\int_{-2}^{3} e^{-x^2}\mathrm{d}x; \qquad \int_{5}^{-3} |\sin x|\mathrm{d}x; \qquad \int_{1}^{a} \ln^7(x)\mathrm{d}x (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

2. En vous ramenant à des aires, calculer de tête

$$\int_{1}^{3} 7\mathrm{d}x; \qquad \int_{0}^{7} 3x\mathrm{d}x; \qquad \int_{-2}^{1} |x|\mathrm{d}x.$$

Solution :

$\boxed{1.}$ La première est positive car $-2 < 3$ et la fonction est positive sur $[-2, 3]$e.
La seconde est négative car $5 > -3$ et la fonction est positive sur $[-3, 5]$.
La dernière est positive lorsque $a \geq 1$ et négative lorsque $a \leq 1$ car $\ln^7$ est positive sur $[1, +\infty[$.

$\boxed{2.}$ La première vaut $2 \times 7 = 14$.
La seconde vaut $\frac{7^2 \times 3}{2} = \frac{147}{2}$.
La dernière vaut $\frac{1}{2} + \frac{2\times 2}{2} = 2.5$

Exercice 3: ♦◇◇

Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_{-1}^1 2^x\mathrm{d}x, \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln^3(t)}{t}\mathrm{d}t, \quad I_4 = \int_0^1 \frac{x}{2x^2+3}\mathrm{d}x,$$
$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2+3}\mathrm{d}x, \quad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x, \quad I_7 = \int_0^{\pi} |\cos x|\mathrm{d}x, \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\mathrm{d}x$$
$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\mathrm{d}x.$$

Solution :

On a:

$$I_1 = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad I_2 = \left[\frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}\right]_{-1}^1 = \frac{3}{\ln 4}, \quad I_3 = \left[\frac{\ln^4 t}{4}\right]_1^e = \frac{1}{4},$$
$$I_4 = \left[\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right), \quad I_5 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$
$$I_6 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[-2\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, I_7 = [2\sin x]_0^{\pi} = 2,$$
$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \cos x\sin^2(x)\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3},$$
$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x + \tan x - \tan x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(\tan^2 x + 1)\mathrm{d}x - \frac{\ln 2}{2} = \left[\frac{1}{2}\tan^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1-\ln 2}{2}$$

Exercice 4: ♦◊◊

Calculer le nombre $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
1. À l'aide d'une IPP.
2. À l'aide du changement de variable $x = t^2$.

Solution :

$\boxed{1.}$

$$\int_1^2 \ln x \cdot x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \left[\ln x \cdot 2\sqrt{x}\right]_1^2 - 2\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\ln 2 - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = 2\sqrt{2}(\ln 2 - 2) + 4$$

$\boxed{2.}$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln t^2}{t} 2t\mathrm{d}t = 4\int_1^{\sqrt{2}} \ln(t)\mathrm{d}t = 4\left[t\ln t - t\right]_1^{\sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$$

Exercice 5: ♦◊◊

Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad \text{en posant } t = u^2.$$

Solution :

On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(u^2+1)u} 2u\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = 2\left[\arctan(u)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 6: ♦◊◊

Calculer

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1}\mathrm{d}t \qquad \text{en posant } u = t^5.$$

Solution :

On a :

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\frac{1}{5}t^5}{t^5+1} 5t^4\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{u}{u+1}\mathrm{d}u = \frac{1}{5}\int_0^1 1 - \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \frac{1}{5}\left(1 - \ln 2\right)$$

Exercice 7: ♦♦◊

En posant le changement de variable $u = \tan(x)$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+\cos^2(\arctan(u))} \cdot \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{1+u^2}{(2+u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2+u^2}\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 8: ♦◊◊

On pose

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

1. À l'aide du changement de variable $u=\frac{\pi}{2}-x$, prouver que $C=S$.
2. Calculer $C+S$, en déduire la valeur commune de ces deux intégrales.

Solution :

$\boxed{1.}$ En posant le changement de variable $u=\frac{\pi}{2}-x$, on a :

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}(-\mathrm{d}u)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(u)}{\cos(u)+\sin(u)}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Ainsi, $C=S$.

$\boxed{2.}$ On a :

$$\begin{aligned}C+S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que $C=S=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 9: ♦♦♦

On considère les deux intégrales suivantes

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}\mathrm{d}t \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}\mathrm{d}t$$

1. À l'aide du changement de variable $u=\frac{\pi}{4}-t$ calculer $I+J$.
2. À l'aide du changement de variable $u=\frac{\pi}{2}-t$ montrer que $I=J$.
3. En déduire I et J.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a :

$$\begin{aligned}I+J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(\frac{\pi}{4}-u)+\sin(\frac{\pi}{4}-u)}{\sqrt{1+\cos(2u)}}\mathrm{d}u\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos(u)}{\sqrt{2\cos^2(u)}}\mathrm{d}u=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos(u)}{\sqrt{2}|\cos(u)|}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ On a :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(u)}{\sqrt{1+\sin(\pi-u)}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(u)}{\sqrt{1+\sin(u)}}\mathrm{d}u=J$$

$\boxed{3.}$ On a $2I=2J=I+J=\frac{\pi}{2}$. Donc $I=J=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 10: ♦◊◊

Que vaut

$$\int_{-666}^{666}\ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right)\mathrm{d}x\ ?$$

Solution :

Soit $x\in[-666,666]$.
Par imparité de arctan, on a :

$$\ln\left(\frac{1+e^{\arctan(-x)}}{1+e^{-\arctan(-x)}}\right)=\ln\left(\frac{1+e^{-\arctan(x)}}{1+e^{\arctan(x)}}\right)=-\ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right)$$

Ainsi, $\ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right)$ est impaire. Donc

$$\int_{-666}^{666}\ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right)\mathrm{d}x=0.$$

Exercice 11: ♦♦◊

Le but de cet exercice est de calculer les intégrales

$$I=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que l'équation $\mathrm{sh}(x)=1$ possède une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α. Exprimer α à l'aide de la fonction ln.
2. Calculer J en posant $x=\mathrm{sh}(t)$. On exprimera le résultat en fonction de α.
3. À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une équation reliant I et J.
4. En déduire une expression de I en fonction de α.

Solution :

1. On a :

$$\mathrm{sh}(\alpha)=1 \iff \left(\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\right)=1 \iff e^{\alpha}-2e^{-\alpha}=0 \iff e^{2\alpha}-2e^{\alpha}-1=0$$

Changement de variable : $X=e^{\alpha}$

$$\begin{aligned}
&X^2-2X-1=0\\
&\Delta=(-2)^2-4\cdot(-1)=8\\
&\Delta>0,\text{ donc il y a 2 racines}\\
&X_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2},\quad X_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}\\
&\alpha=\ln(2+\sqrt{2})\quad(\text{Impossible, car }\ \ln(2-\sqrt{2})<0)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha=\ln(2+\sqrt{2})$

2. On a :

$$J=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)}}\cdot\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{ch}(t)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\alpha}1\,\mathrm{d}t=\alpha$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
I=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x&=\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{2}-\int_0^1\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{2}-I+J
\end{aligned}$$

Ainsi, $I=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+J\right)$.

4. Il vient immédiatement que $I=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\alpha\right)$

Exercice 12: ♦♦♦

Calculer $\int_0^1\arctan(x^{1/3})dx$ en posant d'abord $x=t^3$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1\arctan(x^{\frac{1}{3}})\mathrm{d}x=\int_0^1\arctan(t)\cdot 3t^2\mathrm{d}t&=\left[\arctan(t)\cdot t^3\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^3}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1\\
&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2)\\
&=\frac{1}{4}\left(\pi-2+\ln(4)\right)
\end{aligned}$$

Exercice 13: ♦♦♦

Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$ en posant $x=\frac{\pi}{4}-u$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}
I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}\ln 2-I
\end{aligned}$$

On en déduit que $2I=\frac{\pi}{4}\ln 2$. Ainsi, $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

Exercice 14: ♦♦◊ Les intégrales de Wallis. ★

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le nombre

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \quad (\bigstar)$$

2. Démontrer les égalités suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Solution :

$\boxed{1.\bigstar}$ Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n+1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \cancel{\left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)\sin^n(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(1-\sin^2(x))\mathrm{d}x \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}
\end{aligned}$$

Donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, alors $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

Exercice 15: ♦♦◊

Pour tous entiers naturels p et q, on note

$$I(p,q) := \int_0^1 t^p(1-t)^q\mathrm{d}t.$$

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
Avec un changement de variable, démontrer que $I(p,q) = I(q,p)$.
2. À l'aide de l'intégration par parties, démontrer

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad (p+1)I(p,q+1) = (q+1)I(p+1,q).$$

3. (a) Calculer $I(p,0)$ pour un entier p donné.
(b) Démontrer enfin que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Solution :

$\boxed{1.}$ Changement de variable : $u = 1-t$:

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q\mathrm{d}t = -\int_1^0 (1-u)^p u^q\mathrm{d}u = \int_0^1 u^q(1-u)^p\mathrm{d}u$$

$\boxed{2.}$ On a :

$$\begin{aligned}
I(p,q+1) = \int_0^1 t^p(1-t)^{q+1}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}\cdot(1-t)^{q+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1}t^{p+1}\cdot -(q+1)(1-t)^q\mathrm{d}t \\
&= \frac{q+1}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q\mathrm{d}t = \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q)
\end{aligned}$$

Donc on a bien $(p+1)I(p,q+1) = (q+1)I(p+1,q)$.

$\boxed{3.a)}$ On a :

$$I(p,0) = \int_0^1 t^p\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

$\boxed{3.b)}$ Soit $\mathcal{P}_q$ la proposition $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Montrons que $\mathcal{P}_q$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $q = 0$, on a $I(p,q) = \frac{1}{p+1}$ et $\frac{p!q!}{(p+q+1)!} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}$. $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}_q$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{q+1}$.
On a :

$$\begin{aligned}
I(p,q+1) &= \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q) = \frac{q+1}{p+1}\frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!} \\
&= \frac{(p+1)!(q+1)!}{(p+1)(p+q+2)!} = \frac{p!(q+1)!}{(p+(q+1)+1)!}
\end{aligned}$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{q+1}$.
Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_q$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Exercice 16: ♦♦◊

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \mathrm{d}x$.
1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que $J_n = 2I_n + nI_{n-1}$ est indépendant de n. Déterminer sa valeur.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis, en utilisant la question **2.**, démontrer l'encadrement

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a :

$$I_0 = \int_1^e x\,\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{2}.$$
$$I_1 = \int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

$\boxed{2.}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e x\ln^n x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln^n x\right]_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $2I_n = e^2 - nI_{n-1}$.
Ainsi, $J_n = 2I_n + nI_{n-1} = e^2$
$\boxed{3.}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x\ln^{n+1} x\,\mathrm{d}x - \int_1^e x\ln^n x\,\mathrm{d}x = \int_1^e x\ln^n x(\ln x - 1)\,\mathrm{d}x$$

Or, pour $x \in [1,e]$, $\ln x \in [0,1]$ donc $\ln x - 1 \leq 0$. Ainsi, $x\ln^n x(\ln x-1) \leq 0$.
On en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et donc que (I_n) est décroissante.
Montrons que $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$:

$$\begin{aligned} & I_n \leq I_{n-1} \\ \Longleftrightarrow\ & nI_n \leq nI_{n-1} \\ \Longleftrightarrow\ & (n+2)I_n \leq 2I_n + nI_{n-1} \\ \Longleftrightarrow\ & I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \end{aligned}$$

Montrons que $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n$:

$$\begin{aligned} & I_{n+1} \leq I_n \\ \Longleftrightarrow\ & (n+1)I_{n+1} \leq (n+1)I_n \\ \Longleftrightarrow\ & (n+3)I_{n+1} \leq 2I_{n+1} + (n+1)I_n \\ \Longleftrightarrow\ & I_{n+1} \leq \frac{e^2}{n+3} \iff \frac{e^2}{n+3} \leq I_{n+1} \leq I_n \end{aligned}$$

$\boxed{4.}$ On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+3} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+2} = 0$$

Ainsi, d'après le theorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

On a:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n+3} = e^2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n+2} = e^2$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = e^2$$

Exercice 17: ⧫⧫⧫

Calculer, pour tout entier naturel n, le nombre $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)^{3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2}{3}nx^{n-1}(1-x)^{3/2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} - x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n) \end{aligned}$$

On obtient que

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.$$

Calculons I_0 et I_1:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}. \\ I_1 &= \frac{2}{5}I_0 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n}{2n+3}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+3}\cdot\frac{2(n-1)}{2n+1}\cdot ... \cdot I_1 \\ &= \frac{2^{n+1}n!}{\prod_{k=0}^{n} 2k+3} \end{aligned}$$

On peut donc faire une preuve belle, rigoureuse, et **triviale** par récurrence mais j'ai la flemme.