Exercice.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{P}_n : « \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \tfrac{n(n+1)}{2} ».$$

• *Initialisation.* D'une part, $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = (-1) \cdot 1^2 = -1$.
D'autre part, $(-1)^1 \frac{1(1+1)}{2} = -1$. $\mathcal{P}_1$ est vraie.

• *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'égalité $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1^2) \qquad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &= (-1)^n (n+1)\left(\frac{n}{2} - (n+1)\right) \\ &= (-1)^n (n+1) \cdot (-1)(n+2) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

ce qui montre $\mathcal{P}_{n+1}$.

• *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, l'égalité $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Ici, on reconnaît la forme « $u_{k+1} - u_k$ » : le télescopage est immédiat

$$\begin{aligned}U_n = \sum_{k=0}^{2n}\left(\cos\left((k+1)\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{n}\right)\right) &= \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{n}\right) - \cos(0) \\ &= \cos(2\pi + \tfrac{\pi}{n}) - \cos(0) \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{n}) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 1\end{aligned}$$

(b) On commence par séparer la somme en deux sommes « télescopables » :

$$\begin{aligned}V_n &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\lim S_n = 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim T_n = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

3. L'écriture en double somme fait apparaître des progressions géométriques de raison 2 et $\frac{1}{2}$.

$$\sum_{0\le i,j\le n} 2^{i-j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^i 2^{-j} = \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}(2^{-1})^j\right) = \ldots \boxed{= \frac{(2^{n+1}-1)^2}{2^n}}.$$

$$\sum_{0\le j\le i\le n} 2^{i-j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 2^{i-j} \underset{k=i-j}{=} \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} 2^k = \ldots = 2\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1} - (n+1) \boxed{= 2^{n+2} - n - 3}.$$

4. (a) La formule du binôme permet de calculer

$$A_p + B_p = \sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k} 1^k 1^{2p+1-k} = (1+1)^{2p+1} = 2^{2p+1}.$$

(b) Pour tout k entier, on a par symétrie des coefficients binomiaux $\binom{2p+1}{k} = \binom{2p+1}{2p+1-k}$. En posant $j = 2p+1-k$, on calcule

$$B_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1}\binom{2p+1}{k} = \sum_{k=p+1}^{2p+1}\binom{2p+1}{2p+1-k} = \sum_{j=0}^{p}\binom{2p+1}{j} = A_p.$$

(c) D'après (a) et (b), on a $A_p + B_p = 2F_p = 2^{2p+1}$, d'où $\boxed{A_p = 2^{2p}}$.

Problème. Transformation d'Abel.

1. Linéarité de la somme et changement d'indice sont les deux ingrédients de ce qui va suivre.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k(v_{k+1}-v_k) &= \sum_{k=1}^{n} u_k v_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} u_{j-1}v_j - \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \quad (j=k+1) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} u_{k-1}v_k - \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}v_k - u_{1-1}v_1 + u_n v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \\ &= u_n v_{n+1} - u_0 v_1 - \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})v_k\end{aligned}$$

2. Dans le cas où $u_k = v_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'égalité de la question 1 donne

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1-k) = n(n+1) - 0\cdot 1 - \sum_{k=1}^{n}(k-(k-1))k.$$

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. On a obtenu que $S_n = n(n+1) - S_n$.

Ceci donne $2S_n = n(n+1)$: on retrouve bien la formule $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

3. Dans le cas où $u_k = k^2$ et $v_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'égalité de la question 1 donne

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot(k+1-k) = n^2(n+1) - 0\cdot 1 - \sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)k.$$

Notons $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. On a obtenu ci-dessus que $T_n = n^2(n+1) - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)k$. On obtient donc, en développant

$$T_n = n^2(n+1) - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = n^2(n+1) - 2T_n + \frac{n(n+1)}{2}.$$

On peut alors isoler T_n :

$$3T_n = n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

En divisant par 3, on retrouve la factorisation $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

4. Suivons l'indication de l'énoncé : cela fait apparaître une forme $u_k(v_{k+1}-v_k)$, et il n'y a plus qu'à utiliser l'identité de la question 1 :

$$\begin{aligned}(q-1)\sum_{k=1}^{n} kq^k &= \sum_{k=1}^{n} k\left(q^{k+1}-q^k\right) \\ &= nq^{n+1} - 0\cdot q - \sum_{k=1}^{n}(k-(k-1))q^k \quad (\textit{Abel}) \\ &= nq^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} q^k\end{aligned}$$

On connaît $\sum_{k=1}^{n} q^k = q\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = q\sum_{j=0}^{n-1} q^j = q\frac{q^n-1}{q-1}$.
Quelques petits calculs supplémentaires et une division par $q-1$ qui est non nul amènent

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q}{(q-1)^2}\left(nq^{n+1}-(n+1)q^n+1\right)}.$$

Dans le TD du cours sur les sommes, une autre approche, à base de dérivation, vous est proposée.