les maths en tête

ANALYSE

3e édition

Xavier GOURDON

ellipses

les maths
en tête

ANALYSE

les maths en tête

ANALYSE

3e édition

Xavier GOURDON

Ancien élève de l'école polytechnique

ellipses

Du même auteur chez le même éditeur

Algèbre, Les maths en tête, 2e édition, 304 pages.

ISBN 9782340-038561

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos de la troisième édition

Près de ving-cinq ans après la première édition et douze ans après la seconde édition, cette troisième édition contient de nouveaux exercices et problèmes, ainsi que des extensions d'exercices. Ces ajouts sont toujours réalisés au travers de thèmes riches pour l'étudiant, soit parce que les résultats démontrés sont classiques, soit parce que l'esprit de leur résolution est intéressant par la méthode qu'il permet d'acquérir. On trouve aussi quelques corrections de coquilles, qui restaient présentes malgré le soin porté aux retouches de la deuxième édition.

xavier.gourdon_livres@yahoo.fr

Avant-propos de la deuxième édition

Plus de dix ans après la sortie de la première édition, cet ouvrage est encore largement utilisé pour la préparation des concours (grandes écoles, agrégation). Les retours de mes lecteurs (grâce à internet notamment) sont nombreux et m'ont encouragé à réaliser cette deuxième édition. Cette dernière contient des corrections de coquilles, quelques retouches et améliorations de preuves et solutions, ainsi que quelques exercices et problèmes supplémentaires dans l'esprit de l'édition précédente. Par ailleurs, le chapitre intégration a été largement revu pour être plus conforme au programme des classes préparatoires scientifiques. Enfin, une nouvelle annexe (annexe C) propose une démonstration du théorème des nombres premiers accessible à partir du programme des classes préparatoires.

J'espère que les améliorations de cette deuxième édition seront utiles à mes lecteurs pour la préparation de leur concours. Je tiens à remercier chaleureusement ceux qui m'ont aidé, directement ou indirectement, et en particulier les internautes dont les commentaires ont été nombreux.

Avant-propos de la première édition

Cet ouvrage propose aux étudiants des classes de mathématiques spéciales (programme M') des rappels et des compléments de cours complets, ainsi que des exercices et des problèmes corrigés. Il pourra également intéresser les élèves préparant l'agrégation.

L'ouvrage est orienté dans le même esprit que le tome Algèbre : le lien étroit qui existe entre le cours et les exercices est mis en avant. En effet, une bonne compréhension du cours passe nécessairement par la résolution d'exercices, et réciproquement, il est illusoire de s'attaquer à des exercices difficiles sans avoir une compréhension profonde du cours. Dans cet esprit, de multiples remarques ponctuent les parties de cours, mettant en avant ses subtilités, et faisant le lien avec les exercices qui suivent.

Les parties de cours ne sont pas un substitut au cours du professeur, mais plutôt un résumé exhaustif qui l'éclaire d'une façon différente. Les compléments sont des résultats très classiques qui ne figurent pas au programme mais dont la connaissance est utile et parfois indispensable pour mener à bien un exercice ou un problème. Les résultats présentés sont démontrés lorsqu'ils sont à la limite du programme ou lorsqu'ils constituent un point important dont la démonstration met en place des techniques instructives que l'étudiant doit connaître et savoir maîtriser.

À la fin de chaque section, on trouve une liste d'exercices de difficultés progressives, classiques ou parfois originaux, qui constituent une illustration du cours qui les précède. Je me suis efforcé à chaque fois de passer en revue tous les problèmes qui tournent autour du thème de l'exercice. Les nombreuses références au cours sont là pour inviter le lecteur à s'y reporter, le but étant de savoir et de comprendre précisément les résultats que l'on utilise.

Une liste de problèmes ponctue la fin de chaque chapitre, ces problèmes étant des exercices plus longs, plus difficiles ou plus originaux que les précédents et faisant appel à l'ensemble du cours du chapitre. À la fin de certains chapitres, on trouve des sujets d'étude introduisant des théories élégantes dans le thème du chapitre. Deux annexes présentent des curiosités mathématiques liées au programme d'analyse.

Les résultats du cours ou les exercices les plus importants sont indiqués par une flèche dans la marge de gauche.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé, Georges Papadopoulo, Bertrand Saint-Aubin et Alexia Stéfanou pour la relecture de certains chapitres, Bénédicte Herbinet à qui je dois une élégante solution, Philippe Flajolet pour sa contribution aux énoncés de quelques problèmes. Ce travail a pu se concrétiser grâce au PROJET ALGORITHMES qui m'a permis de donner à l'ouvrage sa version typographique actuelle et à la collection ELLIPSES qui l'a accueilli, et je les en remercie.

Je serais reconnaissant à ceux de mes lecteurs qui me feront parvenir leurs remarques sur cette première édition.

Xavier Gourdon

Table des matières

CHAPITRE 1

Topologie sur les espaces métriques et les espaces vectoriels normés

La naissance de la topologie est directement liée à l'étude des ensembles de nombres réels. Un premier signe fut certainement la définition de la notion de point d'accumulation par Weierstrass vers 1860 (qui démontra que tout ensemble de nombres réels infini borné admet au moins un point d'accumulation, résultat admis auparavant).

Ce point de vue un peu étroit tomba ensuite en désuétude. Ce n'est qu'en 1906, à force d'étudier des ensembles de plus en plus abstraits, qu'apparut la notion de distance, introduite par Fréchet. La notion d'espace topologique général ne naquit qu'en 1914 grâce à Hausdorff qui définit la notion de voisinage.

Le développement des espaces vectoriels normés (en particulier de dimensions infinies) est d'abord dû à Hilbert ; Banach compléta largement cette théorie dans les années 1930.

La notion d'ensemble compact, en germe dès 1900, se développa avec Borel et Lebesgue grâce aux considérations liées à la théorie de la mesure.

La théorie générale des espaces topologiques n'étant pas au programme des classes de mathématiques spéciales, nous nous limiterons à l'étude des espaces métriques. Les curieux trouveront cependant leur compte dans les différentes remarques des parties de cours.

En annexe, sont présentés sous forme de problèmes et d'exercices :
— Le théorème de Baire et quelques applications (annexe A).
— Quelques résultats sur les espaces de Hilbert (annexe B).
Ces curiosités ne sont pas au programme de mathématiques spéciales, mais elles constituent de forts jolies théories qui nous sont accessibles.

1. Généralités

1.1. Normes et Distances

Normes.

DÉFINITION 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une *norme* sur E est une application $E \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \|x\|$ telle que

(i) On a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(iii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*).

Muni d'une norme, E est appelé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *normé* (en abrégé e.v.n).

Exemple 1. — $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

— Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a les normes classiques suivantes

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}, \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Plus généralement, pour tout $\alpha \geq 1$, $\|x\|_\alpha = (\sum_i |x_i|^\alpha)^{1/\alpha}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (voir la conséquence de l'inégalité de Minkowsky, page 98).

— L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées d'un ensemble X dans un e.v.n E est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ (cette norme s'appelle *norme de la convergence uniforme.*)

Remarque 1. Lorsque seules les propriétés (ii) et (iii) de la définition sont vérifiées, on dit que $\| \cdot \|$ est une *semi-norme.*

Distances.

Définition 2. Soit E un ensemble. On appelle *distance* sur E toute application $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

(i) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

(ii) Pour tout x, $y \in E$, $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ (*symétrie*).

(iii) Pour tout x, y, $z \in E$, $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ (*inégalité triangulaire*).

Muni d'une distance, E est appelé *espace métrique.*

Exemple 2. — Si E est un e.v.n, $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E, qui fait de l'e.v.n E un espace métrique. Sauf mention contraire, c'est cette distance que l'on choisit toujours dans un e.v.n.

— Sur tout ensemble E, la distance d définie par

$$\mathrm{d}(x, y) = 0 \text{ si } x = y, \qquad \mathrm{d}(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y$$

est appelée *distance discrète* sur E. L'espace métrique (E, d) est alors appelé *espace discret.*

Diamètre d'une partie, distance entre deux parties.

Définition 3. Soit (E, d) un espace métrique. Si $A \subset E$, $A \neq \varnothing$, on appelle *diamètre* de A l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \mathrm{d}(x, y).$$

On dit que A est *bornée* si $A = \varnothing$ ou si $\delta(A) < +\infty$.

Définition 4. Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E, d). On appelle distance de A à B le réel

$$\mathrm{d}(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \mathrm{d}(x, y).$$

Lorsque x est un élément de E, on appelle distance de x à A le réel

$$\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(\{x\}, A) = \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x, y).$$

Remarque 2. Attention ! Avec cette définition, l'application $\mathrm{d} : (\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\})^2 \quad (A, B) \to \mathrm{d}(A, B)$ n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ (on peut avoir $\mathrm{d}(A, B) = 0$ avec $A \neq B$).

Boules et sphères.

DÉFINITION 5. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$ et pour tout $\rho > 0$, on appelle

— *boule ouverte* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{B}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) < \rho\}$,
— *boule fermée* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{B_f}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) \leq \rho\}$,
— *sphère* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{S}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) = \rho\}$.

Lorsque E est un espace vectoriel normé (muni de la distance issue de la norme) et que $x = 0$, $\rho = 1$, on parle de boule *unité* ouverte, boule *unité* fermée et de sphère *unité*.

PROPOSITION 1. *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E, et $x \in E$. L'ensemble A est borné si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset \mathrm{B}(x, r)$.*

1.2. Topologie d'un espace métrique

Sauf mention contraire, dans toute cette sous-partie, (E, d) désigne un espace métrique.

Ouverts.

DÉFINITION 6. Une partie Ω de E est dite *ouverte* (ou Ω un *ouvert*) si $\Omega = \varnothing$ ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \quad \text{tel que} \quad \mathrm{B}(x, \rho) \subset \Omega.$$

L'ensemble des parties ouvertes de E s'appelle *topologie* de E.

Exemple 3. Une boule ouverte est un ouvert. En particulier, dans $\mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$), les intervalles ouverts $]\alpha, \beta[$ sont des ouverts.

PROPOSITION 2. *(i) Les parties $\varnothing$ et E sont des ouverts.*

(ii) Une réunion d'ouverts est un ouvert.

(iii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Remarque 3. Attention, une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\cap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\}$ n'est pas ouvert.

Fermés.

DÉFINITION 7. Une partie F de E est dite *fermée* (ou F un *fermé*) si $E \setminus F$ est ouvert.

Exemple 4. Une boule fermée est un fermé. En particulier, un singleton $\{x\} = \mathrm{B_f}(x, 0)$ est un fermé. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés $[\alpha, \beta]$ sont des fermés.

PROPOSITION 3. *(i) Les parties $\varnothing$ et E sont des fermés.*

(ii) Une intersection de fermés est un fermé.

(iii) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Remarque 4. Attention, une réunion infinie de fermés peut ne pas être fermée. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} [1/n, 1 - 1/n] =]0, 1[$ n'est pas un fermé.

Voisinages.

DÉFINITION 8. On appelle *voisinage* d'un élément x de E toute partie V de E contenant un ouvert contenant x. L'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$.

Exemple 5. Un ouvert contenant x est un voisinage de x, une boule fermée de centre x de rayon $\rho > 0$ est un voisinage de x.

Remarque 5. Une réunion (resp. une intersection finie) de voisinages de x est un voisinage de x.

Commentaire sur les espaces topologiques généraux.

Un *espace topologique* général E est défini comme étant un ensemble muni d'une partie de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont appelés des ouverts et vérifient les axiomes (i), (ii) et (iii) de la proposition 2. On définit alors les fermés comme à la définition 7 et les voisinages comme à la définition 8.

Toutes les notions de cette partie 1.2 peuvent être étendues aux espaces topologiques.

Il existe pour les espaces topologiques généraux une notion importante appelée la séparation. Un espace topologique E est dit *séparé* si pour tous éléments $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \varnothing$. On voit facilement que tout espace métrique est séparé.

Adhérence.

DÉFINITION 9. L'*adhérence* d'une partie A de E, notée $\overline{A}$, est le plus petit ensemble fermé contenant A.

Remarque 6. — L'ensemble $\overline{A}$ existe, c'est l'intersection des fermés contenant A.
— Une partie A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

PROPOSITION 4. *Soit A une partie de E. Un élément x de E est dans $\overline{A}$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \quad \mathrm{d}(a, x) < \varepsilon$.

(ii) Pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.

(iii) $\mathrm{d}(x, A) = 0$.

Exemple 6. — Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de tout intervalle ouvert borné $]\alpha, \beta[$ est $[\alpha, \beta]$.
— Dans un e.v.n, on a $\overline{\mathrm{B}(0,1)} = \mathrm{B_f}(0,1)$, propriété fausse dans un espace métrique général (voir l'exercice 1).
— Si A est fermé, on a
$$x \in A \iff x \in \overline{A} \iff \mathrm{d}(x, A) = 0.$$

DÉFINITION 10. Une partie A de E est dite *dense* dans E si $\overline{A} = E$.

Exemple 7. En utilisant la proposition précédente, on voit facilement qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la distance usuelle) si et seulement si
$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b), \qquad]a, b[\, \cap A \neq \varnothing.$$
Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Intérieur.

DÉFINITION 11. L'*intérieur* d'une partie A de E, noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A.

Remarque 7. — L'intérieur de A existe : c'est la réunion des ouverts contenus dans A.
— Une partie A de E est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.
— Pour toute partie A de E, $\overset{\circ}{A} = E \smallsetminus \overline{(E \smallsetminus A)}$ et $\overline{A} = E \smallsetminus \overset{\circ}{\overbrace{(E \smallsetminus A)}}$.

PROPOSITION 5. *Soit A une partie de E et x un élément de A. On a $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée.*

(i) A est un voisinage de x.

(ii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset A$.

Exemple 8. Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur de $[\alpha, \beta]$ est $]\alpha, \beta[$; l'intérieur de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, est $\varnothing$.

Frontière.

DÉFINITION 12. La *frontière* d'une partie A de E est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. On la note $\mathrm{Fr}(A)$ (ou encore ∂A).

Point d'accumulation, point isolé.

DÉFINITION 13. Soit A une partie de E.
- — On dit que $a \in E$ est un *point d'accumulation* de A si pour tout voisinage V de a, $V \cap A \neq \varnothing$ et $V \cap A \neq \{a\}$, ce qui s'écrit encore
$$(\forall \varepsilon > 0), \qquad \mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ et } \neq \{a\}.$$
- — On dit que $a \in A$ est un *point isolé* de A s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$, ce qui s'écrit encore
$$(\exists \varepsilon > 0), \qquad \mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}.$$

Remarque 8. Si a est un point d'accumulation de A, alors $a \in \overline{A}$ et de plus pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{B}(a, \varepsilon)$ contient une infinité de points de A.

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}$, 0 est point d'accumulation de l'ensemble $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Topologie induite dans un espace métrique. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Une manière bien naturelle de faire de A un espace métrique est de le munir de la restriction de la distance d de E à $A \times A$. Ainsi, (A, d) est un espace métrique dont la topologie est appelée *topologie induite* par (E, d). La proposition suivante permet de caractériser les ouverts, fermés et voisinages de A par rapport à ceux de E.

PROPOSITION 6. *Soit A une partie de E.*
- — *Les ouverts de A sont les ensembles de la forme $\Omega \cap A$, Ω étant un ouvert de E.*
- — *Les fermés de A sont les ensembles de la forme $F \cap A$, où F est un fermé de E.*
- — *Si $a \in A$, les voisinages de a dans A sont les ensembles de la forme $V \cap A$, V étant un voisinage de a dans E.*

Exemple 10. L'ensemble $[0, 1[$ est un ouvert de $A = [0, 2]$ (on peut écrire par exemple $[0, 1[\, = \,]-1, 1[\cap A$).

1.3. Continuité

Applications continues.

DÉFINITION 14. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et $f : E \to E'$ une application. On dit que f est *continue* en $a \in E$ si pour tout voisinage W de $f(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W$. Lorsque f est continue en tout point de E, on dit que f est *continue sur E*.

PROPOSITION 7. *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et soit $f : E \to E'$ une application. Alors f est continue en $a \in E$ si et seulement si*
$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E), \qquad (\mathrm{d}(a, x) < \alpha \Longrightarrow \mathrm{d}'(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

PROPOSITION 8. *Soient (E, d), (E', d'), (E'', d'') trois espaces métriques, et deux applications $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$. Si f est continue en $a \in E$ et g continue en $f(a)$, alors l'application $g \circ f : E \to E''$ est continue en a.*

PROPOSITION 9. *Soit $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ une application. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est continue sur E.

(ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E.

(iii) L'image réciproque par f de tout fermé de E' est un fermé de E.

Remarque 9. Lorsque l'image de tout ouvert par f est un ouvert, on dit que f est une application *ouverte*. Une application continue n'est pas forcément ouverte (considérer par exemple une fonction constante sur $\mathbb{R}$). De même, l'image d'un fermé par une application continue n'est pas forcément fermée. Par exemple,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

est continue et $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ n'est pas fermé.

Homéomorphismes.

Définition 15. Soit une application $F : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$. On dit que f est un *homéomorphisme* si f est bijective, continue, et si f^{-1} est continue.

Remarque 10. Une application peut être continue et bijective sans que l'application réciproque ne soit continue. Par exemple, l'application identité f de $(\mathbb{R}, \mathrm{d_{dis}})$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ ($\mathrm{d_{dis}}$ désignant la distance discrète sur $\mathbb{R}$, d la distance usuelle) est continue mais f^{-1} n'est pas continue. (Cependant, on sait que si $f : (\mathbb{R}, \mathrm{d}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d})$ est continue et bijective, alors f^{-1} est continue. Sous certaines hypothèses de compacité, il est également possible de conclure à la continuité de l'application réciproque — voir la proposition 14 page 31.)

Définition 16. Deux distances d et d' sur E sont dites *topologiquement équivalentes* si elles définissent la même topologie (*i. e.* si les ouverts de (E, d) sont des ouverts de (E, d') et réciproquement).

Proposition 10. *Deux distances d et d' sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité de (E, d) sur (E, d') est un homéomorphisme.*

Remarque 11. Si d et d' sont topologiquement équivalentes, les espaces métriques (E, d) et (E, d') possèdent les mêmes propriétés topologiques (en effet, les ouverts de ces deux espaces métriques coïncident, et il en est donc de même pour les fermés et les voisinages).

Normes et distances équivalentes.

Définition 17.
— Deux normes N_1 et N_2 sur un même e.v E sont dites *équivalentes* s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $a\,N_1(x) \leq N_2(x) \leq b\,N_1(x)$.
— Deux distances d_1 et d_2 sur E sont dites *équivalentes* s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $x, y \in E$, $a\,\mathrm{d}_1(x, y) \leq \mathrm{d}_2(x, y) \leq b\,\mathrm{d}_1(x, y)$.

Remarque 12.
— Deux normes équivalentes induisent deux distances équivalentes.
— Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. Ainsi, les résultats de nature topologiques sont indépendant du choix de l'une ou l'autre des distances.
— On verra plus loin (voir le théorème 3 page 50) que sur un e.v de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Applications uniformément continues.

Définition 18. Une application $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ est dite *uniformément continue* sur E si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E), \qquad (\mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \mathrm{d}'(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Remarque 13.
— Une fonction uniformément continue est continue ; la nuance entre ces deux notions est qu'une fonction *uniformément* continue vérifie $\mathrm{d}'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous les couples (x, y) tels que $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$, α étant indépendant de x, alors que pour une fonction continue, α dépend de x. L'uniformité de cet $\alpha > 0$ pour une

fonction uniformément continue f en fait une fonction souple d'emploi. Du coup, certains théorèmes sont vrais pour les fonctions uniformément continues mais pas pour les fonctions continues. Nous verrons cependant que toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue (voir le théorème 2 page 31).

— Attention ! L'uniforme continuité n'est pas une notion topologique. Autrement dit, la seule définition de la topologie de E et E' ne suffit pas à définir l'uniforme continuité. En particulier, une fonction uniformément continue vis-à-vis d'une certaine distance ne l'est pas forcément vis-à-vis d'une distance *topologiquement* équivalente. Par contre, une fonction uniformément continue de (E, d_1) dans (E', d'_1), lorsqu'elle est regardée comme une fonction de (E, d_2) dans (E', d'_2), reste uniformément continue lorsque les distances $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ et $\mathrm{d}'_1, \mathrm{d}'_2$ sont équivalentes, ou lorsqu'elles sont uniformément équivalentes (voir la définition qui suit).

Exemple 11. — Une fonction $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ *lipschitzienne*, c'est-à-dire vérifiant

$$(\exists k > 0, \forall x, y \in E), \qquad \mathrm{d}'(f(x), f(y)) \leq k\, \mathrm{d}(x, y),$$

est uniformément continue.

— La fonction $f : \ ]0, 1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 1/x$ est continue mais n'est pas uniformément continue.

La fin de la remarque précédente motive la définition suivante.

Définition 19. Deux distances d et d$'$ sur E sont dites *uniformément équivalentes* si l'application identité est uniformément continue de (E, d) dans (E, d') et de (E, d') dans (E, d).

Remarque 14. Deux distances équivalentes sont uniformément équivalentes. Deux distances uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes.

1.4. Produit d'espaces métriques

On se donne un nombre fini n d'espaces métriques $(E_1, \mathrm{d}_1), \ldots, (E_n, \mathrm{d}_n)$ et on pose $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. On veut faire de E un espace métrique. Un moyen naturel est de construire une distance d sur E à partir des distances d_i. Par exemple si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$, $\mathrm{d}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i)$ définit une distance sur E. Cette distance est appelée *distance produit* sur E. Sauf mention contraire, c'est cette distance que nous utiliserons sur un produit d'espaces métriques.

Remarque 15. — En posant

$$\mathrm{d}'(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}''(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i)^2},$$

on a également affaire à des distances sur E. Ces distances sont équivalentes à la distance produit d, car

$$\forall x, y \in E, \qquad \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}''(x, y) \leq \mathrm{d}'(x, y) \leq n\, \mathrm{d}(x, y).$$

Il est donc indifférent de travailler avec l'une ou l'autre de ces distances. C'est parce que la distance produit est plus souple d'utilisation que nous l'avons choisie.

— Au sens de la distance produit d, la boule ouverte de centre $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de rayon $r > 0$ vérifie

$$\mathrm{B}(a, r) = \mathrm{B}(a_1, r) \times \cdots \times \mathrm{B}(a_n, r).$$

Proposition 11. *Si $O_1, \ldots, O_n$ sont des ouverts de $E_1, \ldots, E_n$, le produit $O_1 \times \cdots \times O_n$ est un ouvert de E appelé* ouvert élémentaire.

Un ouvert de E n'est en général pas un ouvert élémentaire.

PROPOSITION 12. *La projection d'indice i, définie par*

$$\mathrm{Pr}_i \ : E = E_1 \times \cdots \times E_n \to E_i \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

est une application continue et ouverte (une application est dite ouverte si l'image de tout ouvert par cette application est un ouvert).

PROPOSITION 13. *Une application*

$$f : \ (F, \delta) \to E_1 \times \cdots \times E_n \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)).$$

est continue en $a \in F$ si et seulement si pour tout i, $f_i = \mathrm{Pr}_i \circ f$ est continue en a.

PROPOSITION 14. *Soit une application $f : \ E = E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Pour tout i, on note*

$$f_i : \ E_i \to F \quad x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

(f_i est appelée application partielle *d'indice i au point a). Si f est continue en a, alors pour tout i, l'application partielle f_i est continue en a_i.*

Remarque 16. Attention ! La réciproque de ce dernier résultat est fausse. En d'autres termes, il se peut que tous les f_i soient continues en a_i sans que f soit continue en a. Par exemple, considérons l'application $f : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \neq (0,0), \ f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Les applications partielles en $(0,0)$ sont nulles, donc continues, et pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$ (sinon, l'application $\varphi : \ x \mapsto f(x,x)$ serait continue — composée d'applications continues — ce qui est faux puisque $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = 1/2$ dès que $x \neq 0$).

Continuité de la distance.

PROPOSITION 15. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors l'application distance $\mathrm{d} \ : E \times E \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport 2, en particulier continue.*

Conséquence : Soit $a \in E$ et $r > 0$. L'application $\varphi : \ E \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \mathrm{d}(a,x)$ est continue d'après les deux dernières propositions. On en déduit que $\mathrm{B_f}(a,r) = \varphi^{-1}([0,r])$ et $\mathrm{S}(a,r) = \varphi^{-1}(\{r\})$ (sphère de centre a de rayon r), images réciproques de fermés par une application continue, sont des fermés de E. On retrouve de même qu'une boule ouverte est un ouvert.

Continuité des opérations dans un e.v.n.

PROPOSITION 16. *Soit E un e.v.n sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les applications*

$$E \times E \to E \quad (x,y) \mapsto x + y \quad \textit{et} \quad \mathbb{K} \times E \to E \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

sont continues.

Algèbre normée.

DÉFINITION 20. On dit qu'une norme $\| \cdot \|$ sur une $\mathbb{K}$-algèbre A (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une *norme d'algèbre* si $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pour tout $(x,y) \in A^2$. Munie d'une telle norme, A est appelée *algèbre normée.* L'application $A \times A \to A \quad (x,y) \mapsto xy$ est alors continue.

PROPOSITION 17. *Soit A un $\mathbb{K}$-e.v.n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f, g : \ (E, \mathrm{d}) \to A$ deux applications continues en $a \in E$. Alors les applications $f + g$, λf (pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé) sont continues en a. Si A est une algèbre normée, l'application fg est continue en a.*

1.5. Limites

DÉFINITION 21. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et une application $f: D \subset E \to F$. Soient $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$, $\ell \in F$. On dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* a *selon* A, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$, si pour tout voisinage W de ℓ, il existe un voisinage V de a tel que $f(A \cap V) \subset W$. Ceci s'écrit aussi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \mathrm{d}(a,x) < \alpha, \quad \text{on a} \quad \delta(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Remarque 17. Si ℓ existe, ℓ est unique et on a $\ell \in \overline{f(A)}$; ℓ est alors appelée la *limite de* f *en* a *selon* A.

Exemple 12. — *Limite usuelle.* Si a est point d'accumulation de D, si $A = D \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}}$ est encore noté $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}}$.

— *Limite à gauche.* Soit f une fonction de la variable réelle $x \in I$, et $a \in \overline{I}$. Lorsque $A = \,]-\infty, a[\, \cap I$, la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, si elle existe, est encore notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ (ou $\lim_{x \to a^-} f(x)$, ou encore $f(a-)$) et appelée limite à gauche de f en a. On définit de même $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ (encore notée $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $f(a+)$) la limite à droite de f en a.

— *Limite en* $+\infty$. On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (cet ensemble est appelé $\mathbb{R}$ *achevé*). Sur $\overline{\mathbb{R}}$, on définit

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(+\infty) = 1, \varphi(-\infty) = -1.$$

On vérifie facilement que $\mathrm{d}(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$. Cette distance fait de $\overline{\mathbb{R}}$ un espace métrique et nous autorise à parler de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. Lorsqu'une fonction de la variable réelle f est définie sur $]c, +\infty[$, il est évidemment très lourd de caractériser la limite de f en $+\infty$ grâce à la distance d sur $\overline{\mathbb{R}}$. On montre facilement que $f(x)$ tend vers ℓ en $+\infty$ si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists C > c, \forall x > C), \qquad \mathrm{d}(f(x), \ell) < \varepsilon,$$

et on note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. On caractériserait de même la limite en $-\infty$. Noter que l'on peut de la même manière caractériser la limite d'une suite $\mathbb{N} \to (E, \mathrm{d})$ en $+\infty$.

— *Limite infinie.* Lorsqu'une fonction f est à valeurs réelles, il est possible de caractériser simplement les limites infinies de f. Par exemple, f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a selon A si et seulement si

$$(\forall C > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A), \qquad (\mathrm{d}(a,x) < \alpha \Longrightarrow f(x) > C).$$

On note alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = +\infty$.

— Le lecteur pourra de même caractériser simplement une limite infinie prise à l'infini.

Composition des limites.

PROPOSITION 18. *Soient* $f: D_1 \subset (E, \mathrm{d}) \to (F, \mathrm{d}')$ *et* $g: D_2 \subset (F, \mathrm{d}') \to (G, \mathrm{d}'')$ *telles que* $f(D_1) \subset D_2$. *Soient* $A \subset D_1$, $a \in \overline{A}$; $B \subset D_2$ *et* $b \in \overline{B}$. *On suppose que*

$$f(A) \subset B, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \to b \\ y \in B}} g(y) = c.$$

Alors l'application composée $h = g \circ f$ *vérifie* $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} h(x) = c$.

PROPOSITION 19. *Soient* $f, g: D \subset (E, \mathrm{d}) \to F$, *où* F *est un* $\mathbb{K}$ *e.v.n* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$). *Soient* $A \subset D$ *et* $a \in \overline{A}$. *On suppose* $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x) = \ell'$. *Alors, lorsque* x *tend vers* a *selon* A, *(i)* $(f+g)(x)$ *tend vers* $\ell+\ell'$*,*

(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $(\lambda f)(x)$ *tend vers* $\lambda\ell$*,*

(iii) $\|f(x)\|$ *tend vers* $\|\ell\|$*,*

(iv) si F *est une algèbre normée,* $(fg)(x)$ *tend vers* $\ell\ell'$*,*

(v) si $F=\mathbb{R}$ *et si* $f(x) \leq g(x)$ *sur un voisinage de* a *dans* A*,* $\ell \leq \ell'$*,*

(vi) si $F=\mathbb{R}$*, si pour une fonction* $h : D \to \mathbb{R}$ *on a* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *dans un voisinage de* a *dans* A *et si* $\ell=\ell'$*, alors* $h(x)$ *tend vers* ℓ*.*

Limite et continuité en un point.

Proposition 20. *Soient* $f : D \subset (E,\mathrm{d}) \to (F,\mathrm{d}')$ *et* $a \in D$ *un point d'accumulation de* D*. L'application* f *est continue en* a *si et seulement si* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=f(a)$*.*

Remarque 18. Lorsque f n'est pas définie en a et lorsque $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=\ell$, la fonction g définie sur $D\cup\{a\}$ par $g(x)=f(x)$ sur D et $g(a)=\ell$ est continue en a et est appelée *prolongement par continuité* de f en a.

Définition 22. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to (E,\mathrm{d})$ et $a \in \mathring{D}$. On dit que
— f est *continue à droite* en a si $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$,
— f est *continue à gauche* en a si $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$.
On dit que f présente une discontinuité de *première espèce* en a si $\ell_g=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ et $\ell_d=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ existent, et si $\ell_g \neq \ell_d$.

1.6. Exercices

Exercice 1. Soit (E,d) un espace métrique.
a) Soit $a\in E$ et $r>0$. Montrer que $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subset \mathrm{B_f}(a,r)$. Peut-on affirmer, dans le cas général, que $\overline{\mathrm{B}(a,r)}=\mathrm{B_f}(a,r)$?
b) Si E est un $\mathbb{R}$-e.v.n, montrer que $\overline{\mathrm{B}(0,1)}=\mathrm{B_f}(0,1)$.

Solution. **a)** On a $\mathrm{B}(a,r)\subset \mathrm{B_f}(a,r)$. Comme $\mathrm{B_f}(a,r)$ est fermé et que $\overline{\mathrm{B}(a,r)}$ est le plus petit fermé contenant $\mathrm{B}(a,r)$, on en déduit $\overline{\mathrm{B}(a,r)}\subset \mathrm{B_f}(a,r)$.

L'égalité n'a pas lieu dans le cas général, comme nous allons le vérifier sur un contre-exemple. Si E est muni de sa distance discrète d (définie par $\mathrm{d}(x,y)=0$ si $x=y$, $=1$ si $x\neq y$), on a $\mathrm{B}(a,1)=\{a\}$, fermé, et $\mathrm{B_f}(a,1)=E$. Ainsi, dès que E possède plus d'un élément, $\overline{\mathrm{B}(a,1)}=\{a\}\neq E=\mathrm{B_f}(a,1)$.

b) D'après la question précédente, il suffit de montrer l'inclusion $\mathrm{B_f}(0,1)\subset\overline{\mathrm{B}(0,1)}$. Soit $x\in \mathrm{B_f}(0,1)$. Si $\|x\|<1$, alors $x\in \mathrm{B}(0,1)\subset\overline{\mathrm{B}(0,1)}$ et c'est terminé. Sinon $\|x\|=1$, et alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $y\in\mathrm{B}(0,1)$ tel que $\|x-y\|<\varepsilon$ (prendre par exemple $y=(1-\varepsilon/2)x$). En d'autres termes, $x\in\overline{\mathrm{B}(0,1)}$ d'après la proposition 4, d'où le résultat.

Exercice 2. Soit $A\subset\mathbb{R}$ tel que tout point de A est isolé dans A. Montrer que A est au plus dénombrable.

Solution. Nous allons associer à chaque élément de A un rationnel de manière injective. Tout élément $a\in A$ est isolé dans A, donc

$$\exists r_a>0, \qquad]a-r_a, a+r_a[\,\cap A=\{a\}. \tag{$*$}$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q_a\in\mathbb{Q}$ tel que $q_a\in\,]a-r_a/2, a+r_a/2[$.

Montrons maintenant que l'application $\varphi: A \to \mathbb{Q} \quad a \mapsto q_a$ est injective. Si $q_a = q_b = q$, avec $a, b \in A$, alors $|q-a| < r_a/2$ (car $q = q_a$ est choisi dans $]a - r_a/2, a + r_a/2[$), de même, $|q-b| < r_b/2$, donc

$$|a-b| = |(q-b)-(q-a)| \le |q-b| + |q-a| < \frac{r_a + r_b}{2}. \qquad (**)$$

L'un des réels r_a, r_b est plus grand que l'autre, par exemple $r_a \ge r_b$. L'inégalité (**) entraîne $|a-b| < r_a$, ce qui d'après (*) implique $b = a$ car $b \in A$.

Finalement, nous avons construit une application injective $\varphi: A \to \mathbb{Q}$, et comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on en déduit que A est au plus dénombrable.

Remarque. Le raisonnement effectué dans la démonstration reste valable pour $A \subset \mathbb{R}^n$, en utilisant le fait que $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable.

Exercice 3. Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad |f(x)| \le \alpha x + \beta.$$

Solution. L'application f étant uniformément continue, on a l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, |x-y| \le \eta, \qquad |f(x) - f(y)| \le 1. \qquad (*)$$

Maintenant, fixons $x \in \mathbb{R}^+$ et notons $n = [x/\eta]$ (partie entière de x/η). On a $n\eta \le x < (n+1)\eta$, donc

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left| f(x) - f(n\eta) + \sum_{k=0}^{n-1} \Big[f((k+1)\eta) - f(k\eta) \Big] \right| \\ &\le |f(x) - f(n\eta)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f((k+1)\eta) - f(k\eta)| \le 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1 + n \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$|f(x)| \le |f(0)| + 1 + n \le |f(0)| + 1 + \frac{x}{\eta} = \beta + \alpha x$$

avec $\beta = |f(0)| + 1$ et $\alpha = 1/\eta$. Les réels α et β sont indépendants du choix de x, donc ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique.

1/ Soit $A \subset E$. Montrer que l'application $E \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est continue sur E (on rappelle que $\mathrm{d}(x, A) = \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x, y)$).

2/ Soient A et B deux fermés disjoints de E.
a) Montrer qu'il existe $f: E \to \mathbb{R}$ continue, $0 \le f \le 1$, telle que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.
b) En déduire l'existence de deux ouverts U et V de E, disjoints, tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Solution. **1/** On va montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne. Fixons $(x_1, x_2) \in E^2$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall y \in A, \qquad \mathrm{d}(x_1, A) \le \mathrm{d}(x_1, y) \le \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, y).$$

L'inégalité $\mathrm{d}(x_1, A) \le \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, y)$ étant vrai pour tout $y \in A$, on en déduit $\mathrm{d}(x_1, A) \le \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, A)$. Autrement dit, $\mathrm{d}(x_1, A) - \mathrm{d}(x_2, A) \le \mathrm{d}(x_1, x_2)$. On montrerait de même $\mathrm{d}(x_2, A) - \mathrm{d}(x_1, A) \le \mathrm{d}(x_1, x_2)$, ce qui prouve $|\mathrm{d}(x_1, A) - \mathrm{d}(x_2, A)| \le \mathrm{d}(x_1, x_2)$.

L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ étant lipschitzienne, elle est uniformément continue sur E (voir l'exemple 11), donc continue sur E.

2/a) Rappelons que lorsque F est fermé, on a $\mathrm{d}(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

Ceci étant, définissons $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}(x, A)}{\mathrm{d}(x, A) + \mathrm{d}(x, B)}$.

— L'application f est bien définie, car si $\mathrm{d}(x, A) + \mathrm{d}(x, B) = 0$, alors $\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(x, B) = 0$, donc $x \in A$ et $x \in B$ (A et B sont fermés), ce qui est impossible à réaliser puisque $A \cap B = \varnothing$.

— On a $f(x) = 0$ si et seulement si $\mathrm{d}(x, A) = 0$, *i. e.* $x \in A$.

— On a $f(x) = 1$ si et seulement si $\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(x, A) + \mathrm{d}(x, B)$, *i. e.* $\mathrm{d}(x, B) = 0$ ou encore $x \in B$.

— L'application f est continue d'après a) et comme composée d'applications continues.

— Enfin, il est clair que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in E$.

b) Si f est la fonction exhibée à la question précédente, on a

$$A \subset U = f^{-1}(\,]-\infty, 1/2[\,) \quad \text{et} \quad B \subset V = f^{-1}(\,]1/2, +\infty[\,),$$

et U et V sont ouverts par continuité de f (voir la proposition 9), disjoints par construction.

Remarque. Il est possible de répondre à la question 2/b) sans utiliser le résultat de la question 2/a).

Exercice 5. Soit (E, d) un espace métrique.

a) Soit A un ouvert de E et $B \subset E$. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. A-t-on l'égalité dans le cas général ?

b) Soit $A \in E$. On dit que A est localement fermé si

$$\forall x \in A, \exists V \text{ voisinage de } x \text{ tel que } V \cap A \text{ est un fermé de } V.$$

Montrer que A est localement fermé si et seulement si A est l'intersection d'un ouvert de E et d'un fermé de E.

Solution. **a)** Soit $x \in A \cap \overline{B}$. On a $x \in A$. Comme est ouvert, A est un voisinage de x. On en déduit que pour tout voisinage V de x, $V \cap A$ est un voisinage de x. De plus $x \in \overline{B}$, donc $(V \cap A) \cap B = V \cap (A \cap B) \neq 0$, et ceci pour tout voisinage V de x. On en déduit $x \in \overline{A \cap B}$, donc $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

On n'a pas toujours l'égalité. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, si A est l'ouvert $]0, 2[$ et si $B = [1, 3]$, on a $A \cap \overline{B} = [1, 2[$ et $\overline{A \cap B} = [1, 2]$.

b) La condition suffisante parait plus simple. Commençons donc par cela.
Condition suffisante. Supposons $A = \Omega \cap F$, où Ω est un ouvert de E et F un fermé de E. Soit $x \in A$. On a $x \in \Omega$, ouvert, donc Ω est un voisinage de x. Il vérifie $\Omega \cap A = \Omega \cap (\Omega \cap F) = \Omega \cap F$, c'est donc un fermé de Ω. Finalement, A est localement fermé.
Condition nécessaire. Soit A localement fermé. Pour tout $x \in A$, nous allons montrer qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $V_x \cap A$ est un fermé de V_x. Par hypothèse sur A, il existe un voisinage U_x de x tel que $U_x \cap A$ est un fermé de U_x. On peut donc écrire $U_x \cap A = U_x \cap F$ où F est un fermé de E. Soit $V_x = \overset{\circ}{U_x}$. C'est un ouvert contenant x et on a $V_x \cap A = V_x \cap U_x \cap A = V_x \cap F$, donc $V_x \cap A$ est un fermé de V_x.

Posons maintenant $\Omega = \cup_{x \in A} V_x$, ouvert de E (réunion d'ouverts). Nous allons prouver que $A = \Omega \cap \overline{A}$, ce qui montrera le résultat.

– On a $A \subset \Omega$ et $A \subset \overline{A}$, donc $A \subset \Omega \cap \overline{A}$.

– Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in \Omega \cap \overline{A}$. Comme $x \in \Omega$, il existe $y \in A$ tel que $x \in V_y$. On a aussi $x \in \overline{A}$, donc

$$x \in V_y \cap \overline{A} \subset \overline{V_y \cap A} \quad \text{d'après a).} \tag{$*$}$$

Supposons $x \notin A$. Alors $x \in W = V_y \setminus (V_y \cap A)$, ouvert de V_y (car $V_y \cap A$ est un fermé de V_y). Comme V_y est ouvert, W est même un ouvert de E. Or $(V_y \cap A) \cap W = \varnothing$, c'est-à-dire $V_y \cap A \subset E \setminus W$, et comme $E \setminus W$ est un fermé de E, $\overline{V_y \cap A} \subset E \setminus W$. Autrement dit, $\overline{V_y \cap A} \cap W = \varnothing$, donc $x \notin \overline{V_y \cap A}$, ce qui est contradictoire avec (*). Finalement, $x \in A$ et le résultat.

Remarque. Nous n'avons pas utilisé la métrique de E ; ce résultat reste donc vrai, avec la même démonstration, pour un espace topologique E.

2. Suites dans un espace métrique

2.1. Généralités

DÉFINITION 1. Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit que (x_n) *converge vers* $\ell \in E$ si pour tout voisinage V de ℓ dans E, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$, ou de manière équivalente si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}), \qquad (n \geq N \Longrightarrow \mathrm{d}(x_n, \ell) < \varepsilon).$$

Si ℓ existe, ℓ est unique est s'appelle *limite* de (x_n). On note alors $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Remarque 1. — Toute suite convergente est bornée.
- — On rappelle qu'une suite *extraite* (ou *sous-suite*) d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $y_n = x_{\varphi(n)}$, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Si (x_n) converge vers ℓ, toute sous-suite de (x_n) converge vers ℓ.
- — La notion de convergence d'une suite est topologique, autrement dit, elle ne dépend que de la topologie de E.

DÉFINITION 2. Soit (x_n) une suite d'un espace métrique (E, d). On dit que $a \in E$ est *valeur d'adhérence* de (x_n) si

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p), \qquad \mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon.$$

PROPOSITION 1. *Soit (x_n) une suite de (E, d), soit $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) a est valeur d'adhérence de (x_n).

(ii) Il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers a.

(iii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{A_p}$ où $A_p = \{x_n,\ n \geq p\}$.

(iv) a est point d'accumulation de $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ou a est point de répétition de (x_n) (i. e. *l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid\ x_n = a\}$ est infini*).

L'ensemble des valeurs d'adhérences de (x_n) est donc égal à $\cap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$, donc fermé.

Remarque 2. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, ℓ est l'unique valeur d'adhérence de (x_n).

2.2. Caractérisation de l'adhérence, des fermés, de la continuité

PROPOSITION 2. *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Un élément $x \in E$ est dans $\overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite de points de A qui converge vers x.*

PROPOSITION 3. *Une partie F d'un espace métrique (E, d) est fermée si et seulement si toute suite de points de F convergente converge vers un élément de F.*

PROPOSITION 4. *Une application* $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ *est continue en* $a \in E$ *si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de* E *tendant vers* a*, la suite* $(f(x_n))$ *converge vers* $f(a)$*.*

PROPOSITION 5. *Soient une application* $f : D \subset (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$*,* A *une partie de* D *et* $a \in \overline{A}$*. On a* $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$ *si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de points de* A *qui converge vers* a*, la suite* $(f(x_n))$ *converge vers* ℓ*.*

Conséquence : Les propriétés de la proposition 19 de la partie 1.5 (page 15) restent vraies pour des suites convergentes d'un $\mathbb{K}$-e.v.n E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

2.3. Suites de Cauchy et espaces complets

DÉFINITION 3. Soient (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de points de E. On dit que (x_n) est une suite *de Cauchy* (ou que la suite (x_n) vérifie le *critère de Cauchy*) si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}), \qquad \forall p > N, \forall q > N, \quad \mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Remarque 3. — Une suite convergente est de Cauchy.
- — Une suite de Cauchy est bornée.
- — Attention ! La notion de suite de Cauchy n'est pas topologique (*i. e.* elle ne peut pas être définie à partir des ouverts de E). Cependant, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 6. *Soient* d *et* d' *deux distances uniformément équivalentes de* E*. Une suite* (x_n) *est de Cauchy dans* (E, d) *si et seulement si c'est une suite de Cauchy dans* (E, d')*. Le résultat reste vrai en particulier lorsque* d *et* d' *sont équivalentes.*

DÉFINITION 4. On dit qu'un espace métrique (E, d) est *complet* si toute suite de Cauchy de E converge.

Un espace vectoriel normé complet s'appelle un *espace de Banach*.

Exemple 1. — Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont complets.
- — L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. Par exemple, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, une suite de points de $\mathbb{Q}$ tendant vers α est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. On verra cependant (voir l'exercice 6) que tout espace métrique peut se plonger dans un espace complet.

Propriétés des espaces complets.

PROPOSITION 7. — *Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.*
- — *Toute partie fermée d'un espace complet est complète.*

PROPOSITION 8. *Soient* $(E_1, \mathrm{d}_1), \ldots, (E_n, \mathrm{d}_n)$ *des espaces métriques. L'espace métrique* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *est complet (au sens de la distance produit) si et seulement si pour tout* i*, l'espace métrique* (E_i, d_i) *est complet.*

PROPOSITION 9. *Soit* (E, d) *un espace complet et* (F_n) *une suite décroissante de fermés non vides de* E*, telle que* $\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$ *(où* $\delta(F_n)$ *désigne le diamètre de* F_n*). Alors il existe* $x \in E$ *tel que* $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$*.*

Démonstration. Notons $\Gamma = \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

L'ensemble Γ est non vide. En effet, choisissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ un point x_n dans F_n. Le fait que $\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$ entraîne que la suite (x_n) est de Cauchy (si $\varepsilon > 0$, si N est choisi tel que $\delta(F_N) < \varepsilon$, alors pour tout $p, q > N$, $\mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon$ car $x_p, x_q \in F_N$), donc converge dans E puisque E est complet. Comme les F_p sont fermés et que $x_n \in F_p$ lorsque $n \geq p$, la limite ℓ de (x_n) appartient à F_p pour tout p, donc à Γ. Ainsi, $\Gamma \neq \varnothing$.

Le fait que $(\delta(F_n))$ tende vers 0 montre que Γ a au plus un élément, d'où le résultat. □

→ THÉORÈME 0 (DU POINT FIXE). *Soit* (E, d) *un espace métrique complet, et une application* $f : E \to E$ *telle que*

$$\exists k \in \,]0,1[\,, \forall (x,y) \in E^2, \qquad \mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq k\,\mathrm{d}(x,y)$$

(on dit alors que f *est* k*-contractante). Alors* f *admet un unique point fixe,* i. e. *il existe un unique* $x \in E$ *tel que* $f(x) = x$.

Démonstration. Existence. Fixons $x_0 \in E$. On définit la suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$. Une récurrence immédiate donne $\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) \leq k^n\,\mathrm{d}(x_1, x_0)$ pour tout entier naturel n. Ainsi, lorsque $p < q$

$$\mathrm{d}(x_p, x_q) \leq \mathrm{d}(x_p, x_{p+1}) + \cdots + \mathrm{d}(x_{q-1}, x_q) \leq (k^p + \cdots + k^{q-1})\,\mathrm{d}(x_1, x_0) \leq \frac{k^p}{1-k}\,\mathrm{d}(x_1, x_0),$$

ce qui prouve que la suite (x_n) est de Cauchy. Comme E est complet, (x_n) converge. Notons x sa limite. Par continuité de f (f est continue car k-lipschitzienne), on a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Le point x est donc un point fixe de f.

Unicité. Supposons $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Alors

$$0 \leq \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq k\,\mathrm{d}(x,y),$$

et comme $k < 1$, ceci n'est possible que si $\mathrm{d}(x,y) = 0$, *i. e.* $x = y$. □

Remarque 4. Attention Le théorème est faux si l'on suppose seulement $\mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x,y)$ pour tout $x \neq y$. Cependant, dans un compact, une telle condition suffit à montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe (voir l'exercice 4 page 34).

Critère de Cauchy pour les fonctions. à l'aide de la proposition 5, on montre facilement le résultat qui suit.

PROPOSITION 10. *Soit* (E, d) *un espace métrique et* (F, δ) *un espace métrique complet. Soit une application* $f : D \subset E \to F$*, soient* $A \subset E$ *et* $a \in \overline{A}$*. La fonction* f *admet une limite lorsque* x *tend vers* a *selon* A *si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in A^2), \qquad (\mathrm{d}(a,x) < \alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(a,y) < \alpha) \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2.4. Exercices

→ EXERCICE 1. Soit X un ensemble. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On norme $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ en posant

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \qquad \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Muni de cette norme, montrer que $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Solution. Rappelons qu'un espace de Banach est un e.v.n complet. La preuve de la complétude d'un espace métrique est hyper-classique. On procède comme suit :

(i) On considère une suite de Cauchy, et on construit sa limite éventuelle,

(ii) on vérifie qu'elle appartient à l'ensemble de départ,

(iii) on montre que la suite de Cauchy converge bien vers cette limite éventuelle.

(i) Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Fixons $x \in X$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, l'inégalité $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|$ implique que la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, $(f_p(x))$ converge. Notons $f(x)$ sa limite.

(ii) L'application $f : X \to \mathbb{R}$ ainsi construite vérifie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$. Montrons que f est bornée. La suite (f_n) étant de Cauchy, elle est bornée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\| \leq M$ pour tout n. Si $x \in X$, on a donc $|f_n(x)| \leq M$ pour tout n, donc en passant à la limite $|f(x)| \leq M$. Ceci étant vrai pour tout x, f est bien bornée, *i. e.* $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

(iii) Montrons maintenant que (f_n) tend vers f dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N > 0$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $\|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$. Ainsi, si on fixe un élément x quelconque de X, on a

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \qquad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\| < \varepsilon.$$

En fixant p dans l'assertion précédente et en faisant tendre q vers l'infini, on en déduit l'inégalité $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, on a $\|f_p - f\| \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $p \geq N$, donc (f_p) converge vers f.

Finalement, toute suite de Cauchy (f_n) de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ converge, donc $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est complet.

Exercice 2. On munit l'espace $]0, +\infty[$ de la distance $\delta(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$.

a) Montrer que δ est bien une distance sur $]0, +\infty[$.
b) Montrer que cette distance définit sur $]0, +\infty[$ la même topologie que la topologie usuelle.
c) Montrer que l'espace métrique $(\,]0, +\infty[\,, \delta)$ n'est pas complet.
d) On restreint la distance δ à l'espace $]0, 1]$. Montrer que $(\,]0, 1], \delta)$ est complet.

Solution. **a)** C'est bien une distance car :

(i) $\delta(x, y) = 0$ si et seulement si $1/x = 1/y$, *i. e.* $x = y$.

(ii) $\forall (x, y) \in \,]0, +\infty[^2$, $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.

(iii) $\forall (x, y, z) \in \,]0, +\infty[^3$,

$$\delta(x, z) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| = \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

b) Notons d la distance usuelle sur les nombres réels ($\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$). Rappelons le fait suivant : dire que les deux espaces métriques $(\,]0, +\infty[, \delta)$ et $(\,]0, +\infty[, \mathrm{d})$ définissent la même topologie, c'est dire qu'ils ont les mêmes ouverts. La proposition 10 de la page 12 affirme que ceci équivaut au fait que l'application identité $\mathrm{Id}_{]0,+\infty[} : (\,]0, +\infty[, \mathrm{d}) \to (\,]0, +\infty[, \delta)$ est un homéomorphisme. Pour prouver ce dernier point, nous allons utiliser le fait que cette application est la composée de

$$\varphi : (\,]0, +\infty[, \mathrm{d}) \to (\,]0, +\infty[, \mathrm{d}) \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \psi : (\,]0, +\infty[, \mathrm{d}) \to (\,]0, +\infty[, \delta) \quad x \mapsto \frac{1}{x},$$

et que φ et ψ sont des homéomorphismes.

L'application φ est continue (c'est classique puisque d est la distance usuelle), elle est bijective, et $\varphi^{-1} = \varphi$ est aussi continue. On a donc bien affaire à un homéomorphisme.

L'application ψ vérifie

$$\forall (x, y) \in \,]0, +\infty[^2, \qquad \delta(\psi(x), \psi(y)) = \left|\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\psi(y)}\right| = |x - y| = \mathrm{d}(x, y),$$

c'est donc une isométrie, donc un homéomorphisme. D'où le résultat.

Remarque. On aurait pu également prouver le résultat "à la main", en montrant qu'un ouvert de $(\,]0, +\infty[, \mathrm{d})$ est un ouvert de $(\,]0, +\infty[, \delta)$ et réciproquement.

c) Dans $(\,]0, +\infty[, \delta)$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = n$ est de Cauchy car $\delta(u_p, u_q) = |1/p - 1/q|$ tend vers 0 lorsque p et q tendent vers $+\infty$. Il est clair que cette suite ne converge pas dans $(\,]0, +\infty[, \mathrm{d})$ (elle n'est pas bornée), donc elle ne converge pas dans $(\,]0, +\infty[, \delta)$ puisque ces deux espaces métriques définissent la même topologie (la notion de convergence est topologique). Ainsi, $(\,]0, +\infty[, \delta)$ n'est pas complet.

d) On applique la méthode utilisée dans la solution de l'exercice précédent pour prouver la complétude souhaitée. Considérons une suite (u_n) de Cauchy dans $(\,]0, 1], \delta)$. Pour tout p, q, on

a
$$\delta(u_p,u_q)=\left|\frac{1}{u_p}-\frac{1}{u_q}\right|=\left|\frac{u_p-u_q}{u_pu_q}\right|\geq|u_p-u_q|,$$
ce qui montre que (u_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{R},\mathrm{d})$. Ce dernier étant complet, (u_n) converge dans $(\mathbb{R},\mathrm{d})$. Soit u sa limite dans cet espace métrique.

La limite u est forcément dans l'adhérence de $]0,1]$ dans $(\mathbb{R},\mathrm{d})$, qui est $[0,1]$. Si $u=0$, alors $\delta(1,u_n)=|1-1/u_n|$ tend vers $+\infty$, donc la suite (u_n) n'est pas bornée dans $(\,]0,1],\delta)$, ce qui est impossible car c'est une suite de Cauchy de cet espace. Ainsi, $u\neq 0$, donc $u\in\,]0,1]$. Comme $(\,]0,1],\mathrm{d})$ et $(\,]0,1],\delta)$ possèdent la même topologie (c'est la topologie induite par $(\,]0,+\infty[,\mathrm{d})$ ou $(\,]0,+\infty[,\delta)$ — qui possèdent la même topologie — sur $]0,1]$), on en déduit que (u_n) converge vers u dans $(\,]0,1],\delta)$.

On a prouvé que toute suite de Cauchy de $(\,]0,1],\delta)$ converge, donc $(\,]0,1],\delta)$ est complet.

Exercice 3 (Deux résultats de point fixe). **1/** Soit (E,d) un espace métrique complet et une application $f:\ E\to E$. On suppose l'existence d'un entier naturel non nul r tel que l'application f^r (composée r fois de f) est k-contractante ($0<k<1$). Montrer que f admet un unique point fixe.

2/ (Point fixe à paramètre). Soient (X,δ) et (E,d) deux espaces métriques, (E,d) étant complet. On considère une application
$$F:\ X\times E\to E\quad(\lambda,x)\mapsto F(\lambda,x),$$
continue, et k-contractante en la seconde variable, *i. e.*
$$\exists k\in\,]0,1[,\forall\lambda\in X,\forall(x,y)\in E^2,\qquad \mathrm{d}(F(\lambda,x),F(\lambda,y))\leq k\,\mathrm{d}(x,y).$$
Montrer que pour tout $\lambda\in X$, l'application $F(\lambda,\cdot):\ x\mapsto F(\lambda,x)$ admet un unique point fixe, que l'on note x_λ. Montrer ensuite que l'application $X\to E\quad\lambda\mapsto x_\lambda$ est continue.

Solution. **1/** Comme E est complet et que $f^r:\ E\to E$ est k-contractante, f^r a un unique point fixe $x\in E$ (voir le théorème du point fixe). De l'égalité $f^r(x)=x$ on tire $f(f^r(x))=f(x)=f^r(f(x))$, ce qui montre que $f(x)$ est un point fixe de f^r. Comme x est l'unique point fixe de f^r, on a forcément $f(x)=x$.

Maintenant, x est le seul point fixe de f car l'égalité $f(y)=y$ entraîne $f^r(y)=y$ donc $y=x$ car x est le seul point fixe de f^r.

2/ Pour tout $\lambda\in X$, l'application $F(\lambda,\cdot):\ E\to E$ est k-contractante, donc admet un unique point fixe x_λ car E est complet.

Montrons que l'application $\lambda\mapsto x_\lambda$ est continue. Si $\lambda,\lambda'\in X$, on a
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(x_\lambda,x_{\lambda'})=\mathrm{d}(F(\lambda,x_\lambda),F(\lambda',x_{\lambda'}))&\leq\mathrm{d}(F(\lambda,x_\lambda),F(\lambda,x_{\lambda'}))+\mathrm{d}(F(\lambda,x_{\lambda'}),F(\lambda',x_{\lambda'}))\\&\leq k\,\mathrm{d}(x_\lambda,x_{\lambda'})+\mathrm{d}(F(\lambda,x_{\lambda'}),F(\lambda',x_{\lambda'}))\end{aligned}$$
donc
$$\mathrm{d}(x_\lambda,x_{\lambda'})\leq\frac{1}{1-k}\,\mathrm{d}(F(\lambda,x_{\lambda'}),F(\lambda',x_{\lambda'})).$$
La continuité de F au point $(\lambda',x_{\lambda'})$ permet maintenant d'affirmer $\lim_{\lambda\to\lambda'}x_\lambda=x_{\lambda'}$, d'où le résultat.

Exercice 4 (Deux résultats de prolongement). Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, A une partie de E dense dans E.

a) Si une application $f: (A, \mathrm{d}) \to (F, \delta)$ est continue et si

$$\forall x \in E \setminus A, \qquad \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y) \quad \text{existe},$$

montrer qu'il existe une unique fonction $g: E \to F$, continue, telle que la restriction $g_{|A}$ de g à A soit égale à f.
b) On suppose cette fois ci que (F, δ) est complet. Soit $f: (A, \mathrm{d}) \to (F, \delta)$ une application uniformément continue. Montrer l'existence d'une unique fonction $g: E \to F$ uniformément continue, telle que $g_{|A} = f$.

Solution. **a)** Définissons $g: E \to F$ de la manière suivante :

$$\forall x \in A, \quad g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \setminus A, \quad g(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y).$$

Montrons que g est continue sur E. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de E tendant vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{\substack{y \to x_n \\ y \in A}} f(y) = g(x_n)$. On en déduit facilement

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in A), \qquad \mathrm{d}(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(g(x_n), f(y_n)) < \frac{1}{n}.$$

La relation $\mathrm{d}(x, y_n) \leq \mathrm{d}(x, x_n) + \mathrm{d}(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} + \mathrm{d}(x, x_n)$ montre que

$$\lim_{n \to \infty} y_n = x, \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \to \infty} f(y_n) = g(x). \tag{$*$}$$

Maintenant, les inégalités

$$\delta(g(x_n), g(x)) \leq \delta(g(x_n), f(y_n)) + \delta(f(y_n), g(x)) \leq \frac{1}{n} + \delta(f(y_n), g(x))$$

montrent avec (*) que $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(x)$. Ceci étant vrai pour tout suite (x_n) de E tendant vers x, on en conclut que g est continue en x, et ceci pour tout $x \in E$.

Unicité. Soient g et $h: E \to F$ deux applications continues telles que $g_{|A} = h_{|A}$.

— Par hypothèse, $g(x) = h(x)$ pour tout $x \in A$.

— Soit $x \in E \setminus A$. Comme A est dense dans E, il existe une suite (x_n) de points de A tendant vers x. Comme g et h sont continues, on a

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n), \quad \text{de même} \quad h(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n),$$

ce qui suffit pour conclure $g(x) = h(x)$.

b) L'idée est de se ramener au cas précédent puis de prouver que la fonction g obtenue est bien uniformément continue.

Soit $x_0 \in E \setminus A$. Montrons que $\lim_{\substack{y \to x_0 \\ y \in A}} f(y)$ existe. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur A,

$$(\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2), \qquad \mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

En particulier, si $x, y \in A$ vérifient $\mathrm{d}(x, x_0) < \alpha/2$ et $\mathrm{d}(y, x_0) < \alpha/2$, on a $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$ donc $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Comme (F, δ) est complet, d'après le critère de Cauchy pour les fonctions (voir la proposition 10), on en déduit que $\lim_{\substack{y \to x_0 \\ y \in A}} f(y)$ existe.

D'après le résultat de la question précédente, la fonction g définie sur E par

$$\forall x \in A, \quad g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \setminus A, \quad g(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$$

est continue sur E. Nous allons prouver qu'elle est uniformément continue sur E. Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, f est uniformément continue sur A, donc

$$(\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2), \qquad \mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Donnons nous $(x, y) \in E^2$ avec $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$. Comme A est dense dans E, il existe deux suites (x_n) et (y_n) de points de A tendant respectivement vers x et y. La distance étant continue, on a $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}(x_n, y_n) = \mathrm{d}(x, y) < \alpha$, ce qui montre l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{d}(x_n, y_n) < \alpha$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $\delta(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\delta(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout couple $(x, y) \in E^2$ tel que $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$, la fonction g est donc uniformément continue sur E.

L'unicité découle de l'unicité de la question précédente car une fonction uniformément continue est continue.

EXERCICE 5. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques. On suppose que (E, d) est complet. Soient $f : E \to F$ continue et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre $\delta(E_n)$ tend vers 0. Montrer que

$$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n).$$

Solution. Comme E est complet, il existe $x_0 \in E$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \{x_0\}$ (voir la proposition 9). On en déduit $f(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \{f(x_0)\}$. Il nous faut donc prouver $\cap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) = \{f(x_0)\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in E_n$ donc $\{f(x_0)\} \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n)$.

Montrons l'inclusion réciproque. L'application f est continue en x_0, donc pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$. Or pour tout n, $E_n \subset \mathrm{B_f}(x_0, \delta(E_n))$ (car $x_0 \in E_n$), et comme $\delta(E_n)$ tend vers 0,

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad E_n \subset \mathrm{B_f}(x_0, \delta(E_n)) \subset U, \quad \text{donc} \quad f(E_n) \subset f(U) \subset V.$$

Ainsi, $\cap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) \subset V$, et ceci pour tout voisinage V de $f(x_0)$. Ceci suffit pour conclure à l'inclusion $\cap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) \subset \{f(x_0)\}$, d'où le résultat.

Remarque. Rappelons qu'en général l'égalité $f(\cap_{i\in I} X_i) = \cap_{i\in I} f(X_i)$ est fausse. Par contre, l'inclusion $f(\cap_{i\in I} X_i) \subset \cap_{i\in I} f(X_i)$ a toujours lieu.

EXERCICE 6 (COMPLÉTÉ D'UN ESPACE MÉTRIQUE). Soit (E, d) un espace métrique. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. Le but de l'exercice est de plonger (E, d) dans un espace complet dont la distance prolonge celle de E.

1/ a) Soient $U = (u_n)$ et $V = (v_n) \in \mathcal{C}$. Montrer que la suite $(\mathrm{d}(u_n, v_n))$ converge. On note $\delta(U, V)$ sa limite.
b) Montrer que δ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.

2/ On considère la relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ définie par $(U \sim V) \iff (\delta(U, V) = 0)$. On note $\hat{E}$ l'espace quotient $\mathcal{C}/\!\sim$ et $\hat{U}$ la classe d'équivalence dans $\hat{E}$ de $U \in \mathcal{C}$.
a) Quelle est la classe d'une suite convergente dans E ?
b) Montrer que si $U \sim U'$ et $V \sim V'$, alors $\delta(U, V) = \delta(U', V')$. Lorsque $\hat{U}, \hat{V} \in \hat{E}$, le réel $\delta(U, V)$ est donc indépendant du choix des représentants U et V de $\hat{U}$ et $\hat{V}$. On le note $\delta(\hat{U}, \hat{V})$.
c) Ainsi définie, montrer que δ est une distance sur $\hat{E}$.
d) Montrer qu'il existe une injection naturelle $i : E \to \hat{E}$, isométrique, et que $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$.

3/ Montrer que $\hat{E}$ est complet.

4/ Soient (E_1, d_1), (E_2, d_2) deux espaces métriques complets tels qu'il existe une isométrie i_1 (resp. i_2) de E dans E_1 (resp. dans E_2), avec $i_1(E)$ (resp. $i_2(E)$) dense dans E_1 (resp. dans E_2). Montrer l'existence d'une unique isométrie φ de E_1 dans E_2, bijective, et vérifiant $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$.

Solution. **1/ a)** Comme $\mathbb{R}$ est complet, il suffit de montrer que la suite $(\mathrm{d}(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{d}(u_p, v_p) \leq \mathrm{d}(u_p, u_q) + \mathrm{d}(u_q, v_q) + \mathrm{d}(v_q, v_p)$$

donc

$$\mathrm{d}(u_p, v_p) - \mathrm{d}(u_q, v_q) \leq \mathrm{d}(u_p, u_q) + \mathrm{d}(v_p, v_q).$$

On obtient de même $\mathrm{d}(u_q, v_q) - \mathrm{d}(u_p, v_p) \leq \mathrm{d}(u_p, u_q) + \mathrm{d}(v_p, v_q)$, d'où

$$|\mathrm{d}(u_q, v_q) - \mathrm{d}(u_p, v_p)| \leq \mathrm{d}(u_p, u_q) + \mathrm{d}(v_p, v_q).$$

Les suites U et V étant de Cauchy, on en déduit que la suite $(\mathrm{d}(u_n, v_n))$ est de Cauchy.
b) C'est immédiat par passage à la limite, les propriétés de symétrie et d'inégalité triangulaires étant vraies pour d.

2/ a) Soit $U = (u_n)$ une suite de E convergeant vers $\alpha \in E$. Toute suite convergente est de Cauchy, donc $U \in \mathcal{C}$. Soit $V = (v_n) \in \mathcal{C}$. On a

$$U \sim V \iff \delta(U, V) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(u_n, v_n) = 0.$$

Les inégalités

$$\mathrm{d}(\alpha, v_n) \leq \mathrm{d}(\alpha, u_n) + \mathrm{d}(u_n, v_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(u_n, v_n) \leq \mathrm{d}(u_n, \alpha) + \mathrm{d}(\alpha, v_n)$$

montrent que $U \sim V$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\alpha, v_n) = 0$. Finalement, la classe de U est l'ensemble des suites qui convergent vers α.
b) Si $U \sim U'$ et $V \sim V'$, comme δ satisfait l'inégalité triangulaire, on a

$$\delta(U, V) \leq \delta(U, U') + \delta(U', V') + \delta(V', V) = \delta(U', V'),$$

de même $\delta(U', V') \leq \delta(U, V)$. Donc $\delta(U, V) = \delta(U', V')$.
c) Après le résultat de la question 1/b), il reste à prouver $\delta(\hat{U}, \hat{V}) = 0$ si et seulement si $\hat{U} = \hat{V}$. Ceci est vrai par construction de la relation d'équivalence $\sim$.
d) Pour tout $\alpha \in E$, on note $(\alpha) \in \mathcal{C}$ la suite constante égale à α. Soit $i : \ E \to \hat{E} \quad \alpha \mapsto \widehat{(\alpha)}$. On a

$$\delta(i(\alpha), i(\beta)) = \delta((\alpha), (\beta)) = \mathrm{d}(\alpha, \beta),$$

c'est-à-dire i est isométrique, et c'est donc une injection.

Montrons que $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$. Soit $\hat{U} \in \hat{E}$, avec $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Nous allons prouver que $\hat{U}$ est la limite de la suite $(i(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) est de Cauchy, de sorte qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $\mathrm{d}(u_p, u_q) < \varepsilon$. En fixant $p \geq N$, on en déduit

$$\delta(\hat{U}, i(u_p)) = \delta(U, (u_p)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(u_n, u_p) \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $p \geq N$, on en déduit $\lim_{p\to\infty} i(u_p) = \hat{U}$. Ainsi, on a montré que tout élément $\hat{U}$ de $\hat{E}$ est limite de points de $i(E)$, d'où le résultat.

3/ Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\hat{E}$. Comme $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un point x_n de E tel que $\delta(\alpha_n, i(x_n)) < 1/n$. L'inégalité

$$\mathrm{d}(x_p, x_q) = \delta(i(x_p), i(x_q)) \leq \delta(i(x_p), \alpha_p) + \delta(\alpha_p, \alpha_q) + \delta(\alpha_q, i(x_q)) \leq \delta(\alpha_p, \alpha_q) + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

montre que la suite (x_n) est de Cauchy dans E. Notons α la suite $(\widehat{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\hat{E}$.

Montrons que (α_n) converge vers α. Comme $\delta(\alpha_n, \alpha) \leq \delta(\alpha_n, i(x_n)) + \delta(i(x_n), \alpha) \leq \frac{1}{n} + \delta(i(x_n), \alpha)$, il suffit de prouver que $\lim_{n\to\infty} \delta(i(x_n), \alpha) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) étant de Cauchy dans E,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \qquad \mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon,$$

donc si on fixe $n \geq N$,

$$\delta(i(x_n), \alpha) = \lim_{p\to\infty} \mathrm{d}(x_n, x_p) \leq \varepsilon,$$

et ceci pour tout $n \geq N$, d'où le résultat.

4/ Définissons φ sur $i_1(E)$ en posant $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$. L'application φ restreinte à $i_1(E)$ est isométrique car

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \mathrm{d}_2(\varphi(i_1(x)), \varphi(i_1(y))) = \mathrm{d}_2(i_2(x), i_2(y)) = \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}_1(i_1(x), i_1(y)).$$

Ainsi, φ est uniformément continue sur $i_1(E)$. Comme $i_1(E)$ est dense dans E_1 et que E_2 est complet, il existe (voir l'exercice 4) un prolongement de φ sur E_1, encore noté φ, qui est uniformément continu sur E_1. De plus φ est isométrique sur $i_1(E)$, et comme $i_1(E)$ est dense dans E_1 et que φ est continue, φ est isométrique sur E_1 tout entier. En particulier, φ est injective.

Il nous reste à montrer que φ est surjective. Soit $\beta \in E_2$. Comme $i_2(E)$ est dense dans E_2, il existe une suite $(\beta_n) = (i_2(x_n))$ de $i_2(E)$ qui converge vers β. De plus pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{d}_1(i_1(x_p), i_1(x_q)) = \mathrm{d}(x_p, x_q) = \mathrm{d}_2(i_2(x_p), i_2(x_q)) = \mathrm{d}_2(\beta_p, \beta_q)$$

la suite $(i_1(x_n))$ est donc de Cauchy dans E_1. Comme E_1 est complet, elle converge. Soit α sa limite. Comme φ est continue,

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \varphi(i_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} i_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta,$$

d'où la surjectivité.

L'application φ est unique d'après l'unicité du prolongement continue sur E_1 (voir l'exercice 4).

Remarque. Par abus, on identifie souvent E et $i(E)$ dans $\hat{E}$. Ainsi, $\hat{E}$ est un espace complet dans lequel E est plongé, et sa métrique prolonge celle de E.

– La partie 4/ montre que $\hat{E}$ est unique à une isométrie bijective près. On l'appelle le *complété* de E.

– On procède de manière similaire pour définir $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$). La différence est que, $\mathbb{R}$ "n'existant pas encore", on ne peut pas définir $\delta(U,V)$ pour $U, V \in \mathcal{C}$. On peut par contre définir la classe d'équivalence $U \sim V \iff \lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$. La notion de limite peut en effet être définie si l'on reste uniquement sur $\mathbb{Q}$ (il suffit de prendre les ε et les α dans $\mathbb{Q}$).

3. Espaces compacts

3.1. Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 1. Un espace métrique (E, d) est dit *compact* si de tout recouvrement de E par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, si $E = \cup_{i\in I} O_i$ avec O_i ouvert pour tout i, il existe $J \subset I$, J fini, tel que $E = \cup_{i\in J} O_i$.

Exemple 1. — Tout espace métrique fini est compact.

— L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas compact (on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\ ]-n, n[$).

Remarque 1. La notion de compacité peut être définie dans un espace topologique général. Si E est un espace topologique, E est dit compact s'il est séparé (voir la page 10) et s'il satisfait les propriétés de la définition 1. Les propositions 2, 3, 4 et 5 de cette partie 3.1 restent vraies pour les compacts d'un espace topologique. Mais attention ! La propriété de Bolzano-Weierstrass (voir la partie 3.2) n'est vraie que dans les espaces métriques.

Proposition 1. *Un espace métrique compact est borné.*

Démonstration. C'est immédiat car si E est compact, si $x_0 \in E$, en extrayant du recouvrement $E = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}(x_0, n)$ un sous-recouvrement fini, on s'aperçoit que E est borné. □

Aspect dual de la propriété de Borel-Lebesgue. En passant au complémentaire de la définition 1, on obtient facilement le résultat qui suit.

PROPOSITION 2. *Un espace métrique* (E, d) *est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de* E*, on peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide.*

Une conséquence immédiate est la suivante.

PROPOSITION 3. *Si* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact* E*, alors* $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Remarque 2. Nous avons vu plus haut (voir la proposition 9 page 20) que ce dernier résultat reste vrai dans un espace complet pourvu que $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$. Si cette dernière condition n'est pas vérifiée, le résultat est faux dans un espace complet (par exemple, $\cap_{n\in\mathbb{N}}[n, +\infty[= \varnothing$).

Parties compactes. Les propriétés des ouverts d'une topologie induite entraînent une caractérisation simple des parties compactes.

PROPOSITION 4. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Une partie* A *de* E *est compacte si et seulement si de tout recouvrement de* A *par des ouverts de* E *(*$A \subset \cup_{i\in I} O_i$ *avec* O_i *ouvert de* E *pour tout* i*), il en existe un sous-recouvrement fini (*$\exists J \subset I$*,* J *fini, tel que* $A \subset \cup_{i\in J} O_i$*).*

On en déduit facilement :

PROPOSITION 5. *Une réunion finie de parties compactes est compacte.*

PROPOSITION 6. *Une intersection de compacts est compacte.*

3.2. Propriété de Bolzano-Weierstrass

La compacité d'un espace métrique peut être caractérisée par la propriété dite de Bolzano-Weierstrass, *a priori* totalement différente, mais parfois beaucoup plus souple d'utilisation.

→ THÉORÈME 1 (DE BOLZANO-WEIERSTRASS). *Un espace métrique* (E, d) *est compact si et seulement si de toute suite de points de* E*, on peut en extraire une sous-suite convergente dans* E*.*

Démonstration. La condition nécessaire se montre facilement, la condition suffisante est plus délicate.

Condition nécessaire. (*Borel-Lebesgue* $\Longrightarrow$ *Bolzano-Weierstrass*). Nous allons en donner deux preuves.

Première preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $A_p = \{x_n,\ n \geq p\}$. La suite $(\overline{A_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides, donc (voir la proposition 3) $\cap_{p\in\mathbb{N}}\overline{A_p} \neq \varnothing$. Choisissons $x \in \cap_{p\in\mathbb{N}}\overline{A_p}$. On construit une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) comme suit.

— On choisit $x_{\varphi(0)} \in A_0$.

— L'élément $x_{\varphi(n)}$ étant construit, on prend $x_{\varphi(n+1)} \in A_{n+1}$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $\mathrm{d}(x_{\varphi(n+1)}, x) < 1/2^{n+1}$ (c'est possible car $x \in \overline{A_{n+1}}$).

Ainsi construite, $(x_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de (x_n) qui converge vers x.

Seconde preuve. Soit (x_n) une suite de E. Si cette suite ne prend qu'un nombre de valeurs fini, on peut en extraire une sous-suite constante donc convergente. Sinon, $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est infini. Nous allons prouver que A a au moins un point d'accumulation. Supposons le contraire, de sorte que pour tout $x \in E$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r_x) \cap A$ est fini. Du recouvrement $\cup_{x\in E}\mathrm{B}(x, r_x)$ de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En termes mathématiques, ceci s'écrit

$$\exists J \subset E,\ J \text{ fini}, \quad \text{avec} \quad E = \cup_{x\in J}\mathrm{B}(x, r_x).$$

Ainsi, $A = \cup_{x \in J}(\mathrm{B}(x, r_x) \cap A)$, réunion finie d'ensembles finis, est fini, ce qui est contradictoire.

L'ensemble A admet donc au moins un point d'accumulation $x \in E$. Ainsi, x est valeur d'adhérence de la suite (x_n), donc il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x.

Condition suffisante. (*Bolzano-Weierstrass* $\Longrightarrow$ *Borel-Lebesgue*). Nous montrons deux lemmes.
Précompacité (ou ε-recouvrement). Un espace métrique E est dit *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules (ouvertes) de rayon ε.

Lemme 1. *Tout espace métrique* (E, d) *vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass est précompact.*

En effet. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que l'on ne puisse pas trouver un sous-recouvrement fini de E par des boules de rayon ε.
- Soit $x_0 \in E$. Alors $\mathrm{B}(x_0, \varepsilon) \neq E$.
- Donc il existe $x_1 \in E$ tel que $\mathrm{d}(x_0, x_1) \geq \varepsilon$.
- De même, comme $\mathrm{B}(x_0, \varepsilon) \cup \mathrm{B}(x_1, \varepsilon) \neq E$, il existe $x_2 \in E$ tel que $\mathrm{d}(x_0, x_1) \geq \varepsilon$ et $\mathrm{d}(x_0, x_2) \geq \varepsilon$.
- On recommence … $x_0, x_1, \ldots, x_n$ étant construits tels que $\forall i < j \leq n$, $\mathrm{d}(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, on sait que $\cup_{0 \leq i \leq n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon) \neq E$, donc il existe $x_{n+1} \in E$ tel que pour tout i, $0 \leq i \leq n$, $\mathrm{d}(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon$.

On construit ainsi une suite (x_n) de E telle que $\mathrm{d}(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ dès que $i \neq j$. La suite (x_n) n'admet donc aucune sous-suite convergente car aucune sous-suite n'est de Cauchy, d'où la contradiction voulue, d'où notre premier lemme.

Lemme 2. *Soit* (E, d) *un espace métrique vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass, et soit* $(O_i)_{i \in I}$ *un recouvrement de* E *par des ouverts de* E*. Alors :*

$$(\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \exists i \in I), \qquad \mathrm{B}(x, \alpha) \subset O_i.$$

En effet. Raisonnons par l'absurde, en supposant que

$$(\forall \alpha > 0, \exists x \in E, \forall i \in I), \qquad \mathrm{B}(x, \alpha) \not\subset O_i.$$

En particulier,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E, \forall i \in I), \qquad \mathrm{B}\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset O_i.$$

Soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (x_n) qui converge. Notons x sa limite. Il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme O_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, 2r) \subset O_i$. Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \qquad (\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, x) < r \quad \text{et} \quad \varphi(n) > \frac{1}{r}).$$

Alors

$$\forall n \geq N, \forall y \in \mathrm{B}\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right), \qquad \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, x_{\varphi(n)}) + \mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, y) < r + r = 2r,$$

donc pour tout $n \geq N$, $\mathrm{B}(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n)) \subset O_i$, ce qui est absurde. D'où le lemme 2.

Achevons notre raisonnement. Soit (E, d) vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass, soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts de E. D'après le lemme 2,

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \exists i \in I, \qquad \mathrm{B}(x, \alpha) \subset O_i.$$

D'après le lemme 1, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon α, ce qui s'écrit

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \ldots, x_n \in E, \qquad E = \cup_{i=1}^n \mathrm{B}(x_i, \alpha).$$

Or pour tout j, $1 \leq j \leq n$, il existe $i_j \in I$ tel que $\mathrm{B}(x_j, \alpha) \subset O_{i_j}$. On en déduit $E = \cup_{j=1}^n O_{i_j}$, d'où le résultat. □

Il existe d'autres formulations de ce théorème qui sont les suivantes.

→ COROLLAIRE 1. *Un espace métrique* (E, d) *est compact si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée*
— *Toute suite de* E *admet au moins une valeur d'adhérence dans* E.
— *Toute partie infinie de* E *admet au moins un point d'accumulation dans* E.

3.3. Propriétés générales des compacts

PROPOSITION 7. *Soit* (E, d) *un espace métrique.*
— *Si* E *est compact et si* A *est une partie fermée de* E, A *est compacte.*
— *Si* A *est une partie compacte de* E, A *est fermée et bornée.*

PROPOSITION 8. *Un espace compact est complet.*

PROPOSITION 9. *Soit* (E, d) *un espace métrique compact et* (x_n) *une suite de* E *admettant une et une seule valeur d'adhérence* x. *Alors* (x_n) *converge vers* x.

Démonstration. Supposons le contraire. Alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N, \qquad \mathrm{d}(x_n, x) \geq \varepsilon.$$

On peut donc construire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) telle que pour tout n, $\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, x) \geq \varepsilon$. Comme E est compact, on peut extraire de la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ une nouvelle sous-suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ convergente. Si y est sa limite, on a $\mathrm{d}(x, y) \geq \varepsilon$, donc $x \neq y$. Ceci est absurde car y est une valeur d'adhérence de (x_n), d'où le résultat. □

Remarque 3. Ce résultat peut s'avérer parfois bien pratique.

PROPOSITION 10. *Soient* $E_1, \ldots, E_n$ *un nombre fini d'espaces métriques. L'ensemble* $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ *est compact si et seulement si* E_i *est compact pour tout* i.

Remarque 4. Étant données deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans un même compact E, cette proposition montre l'existence d'une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que les *deux suites* $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent (ceci car (x_n, y_n) est une suite dans le compact $E \times E$).

→ PROPOSITION 11. *Les parties compactes de* $\mathbb{R}^n$ *(muni de la distance produit usuelle, avec* $n \in \mathbb{N}^*$*) sont les fermés bornés de* $\mathbb{R}^n$.

Remarque 5. Comme nous le verrons à la partie 5.3, toutes les normes d'un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie sont équivalentes. Ceci nous permettra d'affirmer que le résultat de cette proposition reste vrai dans tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Par contre, il est faux en dimension infinie (voir le théorème de Riesz à l'exercice 9 de la page 56).

→ PROPOSITION 12. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente d'un espace métrique* (E, d), ℓ *sa limite. Alors l'ensemble* $\Gamma = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ *est compact.*

Démonstration. Nous sommes dans un des rares cas ou il est plus facile de montrer la compacité de Γ en prouvant qu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue (la caractérisation par la propriété de Bolzano-Weierstrass donnerait ici une preuve bancale et peu satisfaisante). Cette preuve faisant appel uniquement à la topologie de E montrera qu'en fait le résultat reste vrai dans un espace topologique *séparé* général.

Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de Γ par des ouverts de E. Comme $\ell \in \Gamma$, il existe $i_0 \in I$ tel que $\ell \in O_{i_0}$, et comme O_{i_0} est ouvert et que (x_n) tend vers ℓ,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \qquad x_n \in O_{i_0}.$$

Pour tout $n \leq N$, il existe $j_n \in I$ tel que $x_n \in O_{j_n}$. En notant $J = \{j_n,\ n \leq N\} \cup \{i_0\}$, on s'aperçoit que $\Gamma \subset \cup_{j\in J} O_j$, et comme J est fini, le résultat est prouvé. □

3.4. Compacts et applications continues

PROPOSITION 13. *Soient* (E, d) *un espace métrique compact,* (F, δ) *un espace métrique et une application continue* $f: E \to F$*. Alors* $f(E)$ *est compact.*

Remarque 6. Cette proposition entraîne que l'image par f de tout fermé de E (où E est compact) est un fermé (une application vérifiant cette propriété est dite *fermée*). Ceci est faux en général. En corollaire (et grâce à la proposition 9), on a le résultat qui suit.

PROPOSITION 14. *Soit* $f: (E, \mathrm{d}) \to (F, \delta)$ *une application continue et bijective. Si* (E, d) *est compact, alors* $f^{-1}: F \to E$ *est continue (en d'autres termes,* f *est un homéomorphisme).*

Remarque 7. Pour toute fonction continue et bijective $f : I \to J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, l'application réciproque f^{-1} est continue. Il suffit en effet d'appliquer la proposition précédente à la restriction de f à tout segment (donc compact) de I.

→ PROPOSITION 15. *Soit* $f: (E, \mathrm{d}) \to \mathbb{R}$ *une application continue, où* (E, d) *est compact. Alors* f *est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe* $c, d \in E$ *tels que*

$$f(c) = \inf_{x \in E} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Remarque 8. On verra (voir le théorème 3 page 41) que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue, l'image par f d'un intervalle est un intervalle (c'est le *théorème des valeurs intermédiaires*). Avec cette dernière proposition, on en déduit que l'image par f d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

→ THÉORÈME 2 (DE HEINE). *Soient* (E, d) *et* (F, δ) *deux espaces métriques,* E *étant compact, et* $f: E \to F$ *une application continue. Alors* f *est une application uniformément continue.*

3.5. Exercices

EXERCICE 1. **1/ a)** Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f: E \to F$ une application continue telle que pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est compact. Montrer que f est une application fermée (rappel : une application f est dite *fermée* si l'image de tout fermé par f est un fermé).
b) Existe-t-il des applications continues qui ne sont pas fermées ?

2/ (Application). On fixe un entier naturel non nul n et on note

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}.$$

Montrer que l'ensemble Γ_n des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont toutes les racines sont réelles est un fermé du $\mathbb{R}$-e.v.n $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. **1/ a)** Soit Γ un fermé de E. Soit $(y_n) = (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $f(\Gamma)$ qui converge vers un point $y \in F$. Il s'agit de montrer que $y \in f(\Gamma)$.

L'ensemble $K = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est un compact de F (voir la proposition 12), l'ensemble $f^{-1}(K)$ est donc compact. La suite (x_n) de Γ prenant ses valeurs dans $f^{-1}(K)$, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Notons x sa limite. Comme Γ est fermé, $x = \lim_{n \to \infty} x_{\varphi(n)}$ appartient à Γ, et par continuité de f,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \to \infty} y_{\varphi(n)} = y,$$

donc $y = f(x) \in f(\Gamma)$. L'ensemble $f(\Gamma)$ est donc bien fermé.

b) Il existe des applications continues non fermées. Par exemple, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto e^x$ est continue et pourtant, $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ n'est pas fermé.

2/ Le résultat sera prouvé si on montre que l'application continue

$$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_n[X] \quad (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mapsto (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$$

est fermée, puisque $\Gamma_n = f(\mathbb{R}^n)$. En vertu du résultat de la question 1/ a), il suffit pour cela de prouver que pour tout compact K de $\mathbb{R}_n[X]$, $f^{-1}(K)$ est un compact.

Donnons nous un compact K de $\mathbb{R}_n[X]$. L'ensemble $f^{-1}(K)$ est déjà un fermé puisque K est fermé et que f est continue. Montrons qu'il est borné. Comme K est compact, K est borné, donc il existe $M>0$ tel que

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \in K, \qquad \|P\| = \sup_k |a_k| \le M.$$

Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in f^{-1}(K)$, de sorte que $P = f(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{i=1}^n (X-\lambda_i) \in K$. Écrivons $P = X^n + a_1\,X^{n-1} + \cdots + a_n$. Si λ est une racine de P, nous allons prouver que $|\lambda| \le 1 + \|P\|$. Si $|\lambda| \le 1$, c'est terminé, sinon l'égalité $P(\lambda)=0$ entraîne

$$|\lambda| = \left| a_1 + \frac{a_2}{\lambda} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-2}} + \frac{a_n}{\lambda^{n-1}} \right| \le \|P\| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^k} \right) = \|P\| \frac{1}{1-1/|\lambda|},$$

d'où on tire facilement $|\lambda| \le 1 + \|P\| \le 1 + M$.

Ainsi, nous avons prouvé que si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in f^{-1}(K)$, alors pour tout i, $|\lambda_i| \le 1+M$. En d'autres termes, $f^{-1}(K)$ est borné. L'ensemble $f^{-1}(K)$, fermé borné de $\mathbb{R}^n$, est donc compact, d'où le résultat.

→ Exercice 2 (Un précompact complet est compact). On rappelle qu'un espace métrique est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de cet espace par des boules (ouvertes) de rayon ε.

Montrer qu'un espace métrique précompact et complet est compact.

Solution. Soit (E, d) un tel espace métrique. Soit (x_n) une suite de E. Il s'agit de montrer que l'on peut extraire de (x_n) une sous-suite convergente.

Comme E est précompact, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon 1. Il existe donc une de ces boules, $\mathrm{B}(a_0,1)$, qui contient la valeur x_n pour une infinité d'indices n. On peut donc construire une sous-suite $(x_{\varphi_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de (x_n) telle que pour tout n, $x_{\varphi_0(n)} \in \mathrm{B}(a_0,1)$.

Comme $\mathrm{B}(a_0,1) \subset E$, $\mathrm{B}(a_0,1)$ est précompact. On peut donc recouvrir $\mathrm{B}(a_0,1)$ par un nombre fini de boules de rayon $1/2$. Il existe donc une de ces boules, $B(a_1,1/2)$, telle que $\mathrm{B}(a_0,1) \cap \mathrm{B}(a_1,1/2)$ contienne la valeur $x_{\varphi_0(n)}$ pour une infinité d'indices n. On peut donc construire une sous-suite $(x_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_{\varphi_0(n)})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)} \in \mathrm{B}(a_0,1) \cap \mathrm{B}(a_1,1/2).$$

En procédant par récurrence, on peut ainsi construire, pour tout entier naturel p, une sous-suite $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une boule $\mathrm{B}(a_p,1/2^p)$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)} \in \bigcap_{0\le k\le p} \mathrm{B}(a_k,1/2^k).$$

Simplifions les notations. En notant $\psi_p = \varphi_0 \circ\cdots\circ \varphi_p$ pour tout p, on a construit, pour tout p, une sous-suite $(x_{\psi_p(n)})$ de $(x_{\psi_{p-1}(n)})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{\psi_p(n)} \in \mathrm{B}(a_p,1/2^p).$$

On va maintenant construire une sous-suite de (x_n) par la méthode dite du *procédé diagonal* (à retenir).

— On choisit $x_{\psi(0)} \in \{x_{\psi_0(n)},\ n\in\mathbb{N}\}$.
— On choisit ensuite $x_{\psi(1)} \in \{x_{\psi_1(n)},\ n\in\mathbb{N}\}$ avec $\psi(1) > \psi(0)$.
— ...
— L'indice $\psi(p)$ étant construit, on choisit $x_{\psi(p+1)} \in \{x_{\psi_{p+1}(n)},\ n\in\mathbb{N}\}$ avec $\psi(p+1) > \psi(p)$.

— ...
Ainsi construite, la suite $(x_{\psi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de (x_n). Si maintenant $p \in \mathbb{N}$ et $q \geq p$, on a

$$x_{\psi(q)} \in \{x_{\psi_q(n)},\ n \in \mathbb{N}\} \subset \{x_{\psi_p(n)},\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{B}(a_p, 1/2^p),$$

ce qui prouve que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}\ (p \leq q), \qquad \mathrm{d}(x_{\psi(p),\psi(q)}) \leq \frac{1}{2^{p-1}}.$$

La suite $(x_{\psi(p)})$ est donc de Cauchy, et comme E est complet, elle converge. D'où le résultat.

Remarque. La réciproque est immédiate : un compact est précompact et complet.

Exercice 3 (Distance entre deux parties). **1/** Soit (E, d) un espace métrique.
a) Soient K_1 et K_2 deux compacts de E. Montrer l'existence de $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(K_1, K_2)$ $(= \inf_{\substack{x\in K_1\\ y\in K_2}} \mathrm{d}(x, y))$.
b) Soient K un compact de E et F un fermé de E. Si $K \cap F = \varnothing$, montrer que $\mathrm{d}(K, F) \neq 0$. Ce résultat subsiste t-il si K est seulement supposé fermé ?

2/ Ici, $E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, muni de la métrique usuelle.
a) Soit F un fermé non borné de E et $f:\ F \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in F}} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $f(x) = \inf_{y\in F} f(y)$.
b) Soient K un compact de E et F un fermé de E. Montrer

$$(\exists x \in K, \exists y \in F), \qquad \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(K, F).$$

Ceci reste t-il vrai si E est un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension infinie ?

Solution. **1/ a)** L'application $\mathrm{d}:\ K_1 \times K_2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \mathrm{d}(x, y)$ est continue sur le compact $K_1 \times K_2$, donc elle atteint son minimum sur $K_1 \times K_2$, c'est-à-dire qu'il existe $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tel que $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \min_{(x,y)\in K_1\times K_2} \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(K_1, K_2)$.

Remarque. En remplaçant K_1 par $\{x\}$, on voit qu'en particulier, si K_2 est compact,

$$\exists y \in K_2, \qquad \mathrm{d}(x, K_2) = \mathrm{d}(x, y).$$

b) L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, F)$ est continue (voir l'exercice 4 page 17) sur le compact K, donc

$$\exists x_0 \in K, \qquad \mathrm{d}(x_0, F) = \inf_{x\in K} \mathrm{d}(x, F) = \mathrm{d}(K, F).$$

Si $\mathrm{d}(K, F) = 0$, alors $d(x_0, F) = 0$ donc $x_0 \in F$ car F est fermé. Ceci est absurde car $K \cap F = \varnothing$. Donc $\mathrm{d}(K, F) \neq 0$.

Lorsque K est seulement supposé fermé, le résultat est faux. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, les ensembles $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\}$ sont fermés, disjoints, et pourtant $\mathrm{d}(K, F) = 0$.

2/ a) C'est classique. Fixons $a \in F$ et considérons l'ensemble $\Gamma = \{x \in F \mid f(x) \leq f(a)\}$. Comme f est continue, $\Gamma = f^{-1}(]-\infty, f(a)])$ est un fermé de F, donc de E. Comme $\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in F}} f(x) = +\infty$, Γ est borné. Finalement, Γ est compact (fermé borné de $\mathbb{R}^n$). De plus, $\Gamma \neq \varnothing$ puisque $a \in \Gamma$. Donc il existe $x \in \Gamma$ tel que $f(x) = \inf_{y\in\Gamma} f(y)$. Or, par construction de Γ,

$$\inf_{y\in\Gamma} f(y) = \inf_{y\in F} f(y),$$

donc $f(x) = \inf_{y\in F} f(y)$ avec $x \in F$.

b) L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, F)$ étant continue sur le compact K,

$$\exists x \in K, \qquad \mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in K} \mathrm{d}(y, F) = \mathrm{d}(K, F).$$

De même l'application $F \to \mathbb{R} \quad y \mapsto \mathrm{d}(x, y)$ est continue. Si F est bornée, F est compact (fermé borné de $\mathbb{R}^n$) et le résultat résulte de 1/ a). Sinon F n'est pas borné, et on a alors $\lim_{\substack{\|y\| \to \infty \\ y \in F}} \mathrm{d}(x, y) = +\infty$ ce qui en vertu de la question précédente permet d'affirmer

$$\exists y \in F, \qquad \mathrm{d}(x, y) = \inf_{z \in F} \mathrm{d}(x, z) = \mathrm{d}(x, F) = \mathrm{d}(K, F),$$

d'où le résultat.

Ceci est faux lorsque E est de dimension infinie. Prenons par exemple pour E l'e.v des suites bornées (u_n) de $\mathbb{R}$, normé par $\|(u_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Désignons pour tout n par X_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut $1 + 1/2^n$. L'ensemble $F = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fermé (si $p \neq q$ on a $\|X_p - X_q\| \geq 1$, donc toute suite convergente donc de Cauchy dans F devient stationnaire à partir d'un certain rang, donc converge dans F). Si $K = \{(0)\}$ (ou (0) désigne la suite nulle) il est clair que $\mathrm{d}(K, F) = 1$ et pourtant on a $\mathrm{d}(K, X_n) = 1 + 1/2^n > 1$ pour tout n.

→ EXERCICE 4. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y, \qquad \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x, y). \tag{$*$}$$

a) Montrer que f admet un unique point fixe, que nous noterons α.
b) Soit x_0 un point quelconque de E. On définit la suite (x_n) par récurrence grâce à la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers α.
c) Ces résultats restent-ils vrais si l'on suppose seulement E complet ?

Solution. C'est classique ! C'est une généralisation du théorème du point fixe dans un compact.

a) L'application $E \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \mathrm{d}(x, f(x))$ est continue (composée d'applications continues) sur le compact E, donc

$$\exists \alpha \in E, \qquad \mathrm{d}(\alpha, f(\alpha)) = \inf_{x \in E} \mathrm{d}(x, f(x)).$$

Supposons $\alpha \neq f(\alpha)$. Posons $\beta = f(\alpha)$. D'après (*),

$$\mathrm{d}(\beta, f(\beta)) = \mathrm{d}(f(\alpha), f(\beta)) < \mathrm{d}(\alpha, \beta) = \mathrm{d}(\alpha, f(\alpha)),$$

ce qui contredit la définition de α. On doit donc avoir $\alpha = f(\alpha)$.

Montrons maintenant que α est l'unique point fixe de f. Supposons $\beta = f(\beta)$ avec $\beta \neq \alpha$. On a $\mathrm{d}(f(\alpha), f(\beta)) = \mathrm{d}(\alpha, \beta)$, ce qui est absurde d'après (*) appliqué au couple (α, β).

b) Posons $u_n = \mathrm{d}(\alpha, x_n)$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \alpha$, alors $u_n = u_{n_0} = \alpha$ pour tout $n \geq n_0$ et le résultat est évident. Sinon,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \mathrm{d}(f(\alpha), f(x_n)) < \mathrm{d}(\alpha, x_n) = u_n,$$

c'est-à-dire que la suite (u_n) décroît strictement. Comme elle est minorée par 0, elle converge. Notons ℓ sa limite. Il s'agit de montrer que $\ell = 0$.

Supposons $\ell > 0$. Comme (u_n) décroît, on a $u_n \geq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, (x_n) est une suite du compact E, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Notons β la limite de cette dernière. Alors $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}(\alpha, x_{\varphi(n)}) = \mathrm{d}(\alpha, \beta) = \ell$. De plus, f étant continue, on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = \mathrm{d}(\alpha, f(\beta)).$$

Cette dernière assertion est une absurdité puisque

$$\mathrm{d}(\alpha, f(\beta)) = \mathrm{d}(f(\alpha), f(\beta)) < \mathrm{d}(\alpha, \beta) = \ell \quad \text{et} \quad \forall n, \quad \mathrm{d}(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = \mathrm{d}(\alpha, x_{\varphi(n)+1}) \geq \ell.$$

On doit donc avoir $\ell = 0$, d'où le résultat.

c) Le résultat est faux si E est seulement supposé complet. Par exemple, la fonction

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=1\quad \text{si}\quad x<0,\quad f(x)=x+\frac{1}{1+x}\quad \text{si}\quad x\geq 0,$$

(voir la figure ci contre) est continue, sans point fixe et vérifie l'hypothèse (*) (immédiat par l'inégalité des accroissements finis).

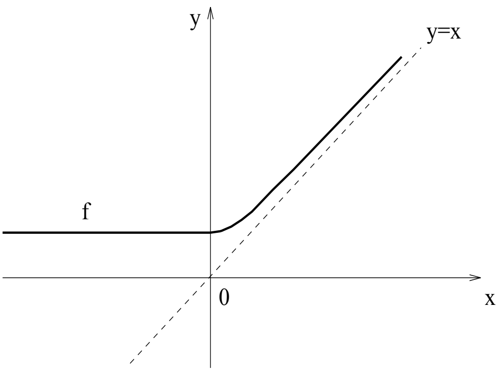


FIGURE 1. Le graphe de l'application sans point fixe f

EXERCICE 5 (ISOMÉTRIES D'UN COMPACT). Soit (E,d) un espace métrique compact et $f:\ E\to E$ une application continue, vérifiant

$$\forall (x,y)\in E^2,\qquad \mathrm{d}(f(x),f(y))\geq \mathrm{d}(x,y). \tag{$*$}$$

a) Montrer que f est une isométrie, c'est-à-dire

$$\forall (x,y)\in E^2,\qquad \mathrm{d}(f(x),f(y))= \mathrm{d}(x,y).$$

b) Montrer que f est bijective.
c) Si f est bijective, montrer que f est encore une isométrie si elle vérifie

$$\forall (x,y)\in E^2,\qquad \mathrm{d}(f(x),f(y))\leq \mathrm{d}(x,y),$$

Solution. **a)** Soient $x,y\in E$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_n=f^n(x)$ et $y_n=f^n(y)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (où f^n désigne la composée n fois de l'application f avec elle même). Nous allons construire deux sous-suites $(x_{\psi(n)})$ et $(y_{\psi(n)})$ qui convergent respectivement vers x et y.

La suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans le compact $E\times E$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)},y_{\varphi(n)})$. Quitte à extraire encore une sous-suite de cette dernière, on peut même supposer

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \varphi(n+2)-\varphi(n+1)>\varphi(n+1)-\varphi(n). \tag{$**$}$$

De l'inégalité (*), on tire

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathrm{d}(x,x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})\leq \mathrm{d}(f^{\varphi(n)}(x),f^{\varphi(n)}(x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}))=\mathrm{d}(x_{\varphi(n)},x_{\varphi(n+1)})$$

et comme $(x_{\varphi(n)})$ converge, on en déduit $\lim_{n\to\infty}x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}=x$. Ainsi, en posant $\psi(n)=\varphi(n+1)-\varphi(n)$, $(x_{\psi(n)})$ est une sous-suite de (x_n) d'après (**), et elle converge vers x. Pour les mêmes raisons, $(y_{\psi(n)})$ est une sous-suite de (y_n) qui converge vers y.

Ceci étant, pour $n\geq 1$, on a d'après (*)

$$\mathrm{d}(x,y)\leq \mathrm{d}(f(x),f(y))\leq \mathrm{d}(x_{\psi(n)},y_{\psi(n)}),$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit $\mathrm{d}(f(x), f(y)) = \mathrm{d}(x, y)$.

b) L'injectivité résulte de l'hypothèse (*). Pour montrer la surjectivité de f, nous donnons deux méthodes.

Première méthode. Cette méthode utilise la solution que nous avons donnée à la question a).

Fixons $x \in E$. Si $x_n = f^n(x)$, nous avons vu plus haut qu'il existe une sous-suite $(x_{\psi(n)})$ de (x_n) qui converge vers x. Autrement dit, $\lim_{n\to\infty} f(x_{\psi(n)-1}) = x$, donc $x \in \overline{f(E)}$. Comme E est compact et que f est continue, $f(E)$ est compact donc fermé. Donc $x \in \overline{f(E)} = f(E)$, et ceci étant vrai pour tout $x \in E$, f est surjective.

Seconde méthode. Raisonnons par l'absurde et supposons $f(E) \neq E$. Comme $f(E)$ est fermé (car compact), $E \setminus f(E)$ est ouvert. De plus $E \setminus f(E) \neq \varnothing$ donc il existe une boule ouverte $\mathrm{B}(x, \rho)$ incluse dans $E \setminus f(E)$. Ainsi, pour tout $y \in f(E)$, $\mathrm{d}(x, y) \geq \rho$. Considérons la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, on a

$$\mathrm{d}(f^p(x), f^q(x)) \geq \mathrm{d}(f^{p-q}(x), x) \geq \rho,$$

donc $(f^n(x))$ n'a aucune sous-suite convergente, ce qui est absurde. On a donc $f(E) = E$.

c) L'application f est bijective et continue (car 1-lipschitzienne) sur un compact, donc $f^{-1} : E \to E$ est continue (voir le théorème 14 page 31) et vérifie d'après les hypothèses

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \mathrm{d}(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \geq \mathrm{d}(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = \mathrm{d}(x, y).$$

L'application f^{-1} vérifie donc les hypothèses de la question a), c'est donc une isométrie. On en déduit que f est une isométrie.

Exercice 6. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application *injective*. Prouver que f est continue si et seulement si pour tout compact K de E, $f(K)$ est compact. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas f injective ?

Solution. La condition nécessaire est immédiate, c'est du cours !

Passons à la condition suffisante. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers x. Il s'agit de montrer que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. L'ensemble $K = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de E (voir la proposition 12 page 30), donc $K' = f(K)$ est compact. Notons g la restriction de f à K. Comme f est injective, g est une bijection de K sur K'. L'application $g^{-1} : K' \to K$ est continue car pour tout fermé F de K, F est compact donc $(g^{-1})^{-1}(F) = g(F)$ est compact, donc fermé. L'ensemble K' étant compact, $(g^{-1})^{-1} = g$ est continue. En particulier, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$, ce qui s'écrit aussi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, d'où le résultat.

Si f n'est pas injective, le résultat est faux. Par exemple, l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \qquad x \mapsto 1 \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

vérifie $f(K)$ est compact pour tout compact K de $\mathbb{R}$, et pourtant f n'est pas continue.

Exercice 7. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$), (E, d) un espace métrique et $f : [a, b] \to E$ une application. On suppose que pour tout $x \in]a, b[$, les limites à gauche $f(x-)$ et à droite $f(x+)$ de f en x existent, et que $f(a+)$ et $f(b-)$ existent.

a) Si $x \in]a, b[$, on note $\omega(f, x) = \max\{\mathrm{d}(f(x-), f(x)), \mathrm{d}(f(x), f(x+))\}$. Soit $\varepsilon > 0$ et

$$A_\varepsilon = \{x \in]a, b[\mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}.$$

Montrer que l'ensemble A_ε est fini.

b) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in]a, b[$ tel que $\omega(f, x) < \varepsilon$. Montrer

$$\exists \alpha > 0, \forall y, z \in]x - \alpha, x + \alpha[\qquad \mathrm{d}(f(y), f(z)) < 2\varepsilon.$$

d) Soit $\varepsilon > 0$ et $]c, d[\subset [a, b]$ tel que $\omega(f, x) < \varepsilon$ sur $]c, d[$. Montrer

$$\exists\alpha > 0, \forall x, y \in]c, d[\,, \mathrm{d}(x, y) < \alpha, \quad \mathrm{d}(f(x), f(y)) < 2\varepsilon.$$

Solution. **a)** Raisonnons par l'absurde et supposons A_ε infini. Comme A_ε est inclus dans le compact I, il en existe un point d'accumulation $x \in I$. Ainsi, il existe une suite (x_n) de points distincts de A_ε qui converge vers x.

S'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_n < x$, on peut, quitte à extraire une sous-suite de (x_n), supposer $x_n < x$ pour tout n. On a $x \in]a, b]$ et d'après les hypothèses, f admet une limite à gauche en x. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in]x - \alpha, x[, \quad \mathrm{d}(f(y), f(x-)) < \varepsilon/3. \qquad (*)$$

Comme (x_n) converge vers x par valeurs inférieures, il existe un entier naturel n, désormais fixé, tel que $x - \alpha < x_n < x$. D'après (*), on a l'inégalité

$$\forall y \in]x - \alpha, x_n[, \quad \mathrm{d}(f(y), f(x_n)) \le \mathrm{d}(f(y), f(x-)) + \mathrm{d}(f(x-), f(x_n)) < 2\varepsilon/3,$$

et en faisant tendre y vers x_n, on en déduit $\mathrm{d}(f(x_n-), f(x_n)) \le 2\varepsilon/3$. De même l'inégalité

$$\forall y \in]x_n, x[, \quad \mathrm{d}(f(x_n), f(y)) \le \mathrm{d}(f(x_n), f(x-)) + \mathrm{d}(f(x-), f(y)) < 2\varepsilon/3,$$

conduit par passage à la limite à $\mathrm{d}(f(x_n), f(x_n+)) \le 2\varepsilon/3$. On a donc $\omega(f, x_n) \le 2\varepsilon/3$. Donc $x_n \notin A_\varepsilon$, ce qui est absurde.

Dans le cas où il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_n > x$, on aboutirait de la même manière à une absurdité en utilisant la continuité à droite de f en x.

L'ensemble A_ε est donc fini.

b) La fonction f est discontinue en $x \in]a, b[$ si et seulement si $\omega(f, x) > 0$. L'ensemble D des points de $]a, b[$ où f est discontinue est donc égal à $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$, réunion dénombrable d'ensembles finis, donc D est au plus dénombrable. En ajoutant éventuellement les points a et b, on en déduit que l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a, b]$ est au plus dénombrable.

c) Posons $\eta = \varepsilon - \omega(f, x) > 0$. Comme f est continue à gauche et à droite en x, il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{d}(f(y), f(x-)) < \eta$ pour $y \in]x - \alpha, x[$ et $\mathrm{d}(f(y), f(x+)) < \eta$ pour $y \in]x, x + \alpha[$. On a alors

$$\forall y \in]x - \alpha, x + \alpha[, \qquad \mathrm{d}(f(y), f(x)) < \varepsilon. \qquad (**)$$

En effet, si $x - \alpha < y < x$ il suffit d'écrire $\mathrm{d}(f(y), f(x)) \le \mathrm{d}(f(y), f(x-)) + \mathrm{d}(f(x-), f(x)) < \eta + \omega(f, x) = \varepsilon$, et le cas $x < y < x + \alpha$ se traite de la même manière. Lorsque $y = x$, le résultat (**) est évident.

On conclue facilement car d'après (**)

$$\forall y, z \in]x - \alpha, x + \alpha[, \quad \mathrm{d}(f(y), f(z)) \le \mathrm{d}(f(y), f(x)) + \mathrm{d}(f(x), f(z)) < 2\varepsilon.$$

d) Supposons le résultat faux. Alors il existe une suite (x_n, y_n) de $]c, d[$ telle que $(x_n - y_n)$ tende vers 0 et telle que $\mathrm{d}(f(x_n), f(y_n)) \ge 2\varepsilon$ pour tout n. La suite (x_n) est à valeur dans le compact $[c, d]$, donc on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ donc la limite x appartient à $[c, d]$. Comme $(x_n - y_n)$ tend vers 0, la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge également vers x.

Plusieurs cas se présentent, selon que la limite x est dans l'intérieur de $[c, d]$ ou au bord.

(i) Le cas $x \in]c, d[$ est absurde car $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ tendent vers x et $\mathrm{d}(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \ge 2\varepsilon$ pour tout n, ce qui est absurde d'après le résultat de la question précédente.

(ii) Si $x = c$, alors comme f est continue à droite en c il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{d}(f(y), f(c+)) < \varepsilon$ pour tout $y \in]c, c + \alpha[$. Comme $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent vers c à droite, il existe n tel que $x_{\varphi(n)}$ et $y_{\varphi(n)}$ appartiennent à $]c, c + \alpha[$, donc $\mathrm{d}(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \le \mathrm{d}(f(x_{\varphi(n)}), f(c+)) + \mathrm{d}(f(c+), f(y_{\varphi(n)})) < 2\varepsilon$, ce qui est absurde car $\mathrm{d}(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \ge 2\varepsilon$.

(iii) Pour le cas $x = d$, on aboutit également à une absurdité en procédant de la même manière, en utilisant la continuité à gauche de f en d.

Ainsi, on a aboutit à une absurdité dans tous les cas, donc le résultat est bien vérifié.

Remarque. Le résultat de cet exercice permet de montrer qu'une fonction f à valeurs dans un e.v.n complet E et vérifiant les hypothèses de l'exercice est une fonction réglée (voir le théorème 4 page 99).

EXERCICE 8. Soit X un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'algèbre des applications continues de X dans $\mathbb{R}$.
a) Soit $\mathfrak{I} \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ un idéal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Montrer

$$\exists s \in X, \forall f \in \mathfrak{I}, \qquad f(s) = 0.$$

b) Caractériser les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ (*i. e.* les idéaux $\mathfrak{I} \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ tels que les seuls idéaux contenant $\mathfrak{I}$ sont $\mathfrak{I}$ et $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$).
c) Déterminer la forme des morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. **a)** Raisonnons par l'absurde. Supposons que

$$\forall s \in X, \exists f_s \in \mathfrak{I}, \qquad f_s(s) \neq 0.$$

Pour tout $s \in X$, comme f_s est continue, il existe un voisinage ouvert Ω_s de s tel que $\forall x \in \Omega_s, f_s(x) \neq 0$.

Les $(\Omega_s)_{s\in X}$ recouvrent le compact X. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $(\Omega_{s_i})_{1\leq i\leq n}$. Comme $\mathfrak{I}$ est un idéal, pour tout i, $f_{s_i}^2 \in \mathfrak{I}$. Or $f_{s_i}^2$ prend des valeurs strictement positives sur Ω_{s_i}. Les $(\Omega_{s_i})_{1\leq i\leq n}$ recouvrant X, la fonction $f = \sum_{i=1}^n f_{s_i}^2$ ne s'annule pas sur X. Comme $\mathfrak{I}$ est un idéal, on a $f \in \mathfrak{I}$, et $1 = (1/f)\cdot f \in \mathfrak{I}$ donc $\mathfrak{I} = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Ceci contredit l'hypothèse $\mathfrak{I} \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Il existe donc $s \in X$ tel que pour tout $f \in \mathfrak{I}$, $f(s) = 0$.

b) Remarquons déjà que pour tout $s \in X$, l'ensemble $\mathfrak{I}_s = \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \mid f(s) = 0\}$ est un idéal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Nous allons montrer que les $\mathfrak{I}_s$ sont les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Pour tout $s \in X$, l'ensemble $\mathfrak{I}_s$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. En effet, $\mathfrak{I}_s \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ et si $\mathfrak{I}$ est un idéal contenant $\mathfrak{I}_s$ et différent de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, alors d'après a), il existe $s' \in X$ tel que $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_{s'}$. On a alors $\mathfrak{I}_s \subset \mathfrak{I}_{s'}$, ce qui n'est possible que si $s = s'$, et donc $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_s$.

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal maximal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. On a $\mathfrak{I} \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ donc d'après a), il existe $s \in X$ tel que $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_s$. Comme $\mathfrak{I}$ est maximal et que $\mathfrak{I}_s \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, on a $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_s$.

c) Soit φ un morphisme d'algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Supposons φ non nulle. L'ensemble $\operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, différent de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ car $\varphi \neq 0$. D'après a), il existe $s \in X$ tel que $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathfrak{I}_s$. La forme linéaire $f \mapsto f(s)$ s'annule donc sur l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$, et l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur un hyperplan formant une droite du dual (voir le tome d'algèbre), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(s) = \lambda\varphi(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ tel que $f(s) \neq 0$. On a

$$\lambda(f^2)(s) = \lambda^2\varphi(f^2) = \lambda^2\varphi(f)^2 = f^2(s),$$

donc $\lambda = 1$. Finalement $\varphi(f) = f(s)$ pour tout f.

En résumé, les morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ sont l'application nulle et les morphismes de la forme $f \mapsto f(s)$, où $s \in X$.

4. Espaces connexes

4.1. Définitions

PROPOSITION 1. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.

(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.

(iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons $E = F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Les ouverts $O_1 = E \smallsetminus F_1$ et $O_2 = E \smallsetminus F_2$ vérifient $O_1 \cup O_2 = \varnothing$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, donc d'après (i), $O_1 = \varnothing$ ou $O_2 = \varnothing$, donc $F_1 = E$ ou $F_2 = E$, et comme $F_1 \cup F_2$ est une partition de E, $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit A une partie ouverte et fermée de E. Alors l'ensemble $B = E \smallsetminus A$ est ouvert et fermé, et comme $E = A \cup B$ avec $A \cap B = \varnothing$, on en déduit d'après (ii) que $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, c'est-à-dire $A = \varnothing$ ou $A = E$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints de E. L'ensemble O_1 est fermé car $O_1 = E \smallsetminus O_2$, donc O_1, ouvert et fermé de E, vérifie $O_1 = \varnothing$ ou $O_1 = E$, d'où (i). □

DÉFINITION 1. Un espace métrique vérifiant l'une des assertions de la proposition précédente est dit *connexe*.

Remarque 1. La notion de connexité est une notion topologique. Tous les résultats de cette partie restent vrais dans un espace topologique général (à l'exception du théorème 5).

Parties connexes. Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On munit A de la distance d induite sur A. On veut savoir à quelle condition A est connexe. Les propriétés de la topologie induite sur A entraînent facilement le résultat qui suit.

PROPOSITION 2. *La partie A de E est connexe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée.*

(i) Si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$, alors

$$(A \cap O_1 = \varnothing \quad \textit{et} \quad A \subset O_2) \quad \textit{ou} \quad (A \cap O_2 = \varnothing \quad \textit{et} \quad A \subset O_1).$$

(ii) Si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $A \cap F_1 \cap F_2 = \varnothing$, alors

$$(A \cap F_1 = \varnothing \quad \textit{et} \quad A \subset F_2) \quad \textit{ou} \quad (A \cap F_2 = \varnothing \quad \textit{et} \quad A \subset F_1).$$

Exemple 1. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ car si on se donne $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Q} \subset\,]-\infty, a[\, \cup\,]a, +\infty[$.

4.2. Propriétés

THÉORÈME 1. *Soit $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ une application continue. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.*

Démonstration. Soit B une partie ouverte et fermée de $f(E)$. Il existe un ouvert O et un fermé F de E' tels que $B = O \cap f(E) = F \cap f(E)$. On a alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(O) = f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(B)$ est fermé et ouvert dans E, et E étant connexe, $f^{-1}(B) = \varnothing$ ou $f^{-1}(B) = E$, c'est-à-dire $B = \varnothing$ ou $B = f(E)$. □

Caractérisation des connexes. On note $D = \{0, 1\}$ muni de la distance discrète δ ($\delta(0,0) = \delta(1,1) = 0$ et $\delta(0,1) = \delta(1,0) = 1$). L'espace métrique (D, δ) n'est pas connexe puisque $D = \{0\} \cup \{1\}$ est réunion de deux fermés disjoints. Grâce à cet espace métrique, nous allons donner une caractérisation commode des connexes.

PROPOSITION 3. *Un espace métrique (E, d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to D$ est constante.*

Démonstration. Condition nécessaire. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe, donc constante car D n'est pas connexe et a deux éléments.

Condition suffisante. Si E n'est pas connexe, on peut écrire $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts non vides disjoints de E. Soit $f : E \to D$ une application définie par $f(x) = 0$ si $x \in O_1$,

$f(x) = 1$ si $x \in O_2$. Elle est continue (l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert), ce qui est contraire aux hypothèses puisqu'elle est non constante. Finalement, E est connexe. $\square$

PROPOSITION 4. *Soit A une partie connexe d'un espace métrique (E, d). Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Démonstration. Soit $f : B \to D = \{0, 1\}$ une application continue. Comme A est connexe, $f_{|A}$ est constante, par exemple $f_{|A} = 0$. Soit $x_0 \in B$. Il existe un voisinage V de x_0 dans B tel que

$$\forall x \in V, \qquad \delta(f(x), f(x_0)) < \frac{1}{2},$$

ce qui montre que pour tout $x \in V$, $f(x) = f(x_0)$. Or $B \subset \overline{A}$, donc $V \cap A \neq \varnothing$. Si on choisit $x_1 \in V \cap A$, on a $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Ainsi, $f = 0$, d'où le résultat d'après la proposition 3. $\square$

Dans le cas général, une réunion de connexes n'est pas connexe (par exemple, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont connexes dans $\mathbb{R}$, mais $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$ n'est pas connexe). On a cependant le résultat qui suit.

PROPOSITION 5. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E, d) telle que*

$$\exists i_0 \in I, \forall i \in I, \qquad C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing.$$

Alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Démonstration. Soit $f : \cup_{i \in I} C_i \to D = \{0, 1\}$ une application continue. Pour tout i, C_i est connexe donc $f_{|C_i}$ est constante. En particulier, $f_{|C_{i_0}}$ est connexe, par exemple $f_{|C_{i_0}} = 0$. Soit $x \in \cup_{i \in I} C_i$ et soit $i \in I$ tel que $x \in C_i$. Comme $C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing$, on peut trouver $x_0 \in C_i \cap C_{i_0}$. On a alors $f(x) = f(x_0) = 0$ car $f_{|C_i}$ est constante. Ainsi, f est constante sur $\cup_{i \in I} C_i$, d'où le résultat d'après la proposition 3. $\square$

Remarque 2. Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de connexes telle que $\cap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$, alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe (si $x \in \cap_{i \in I} C_i$, tous ces connexes ont une intersection non vide avec le connexe $\{x\}$).

Dans le cas dénombrable, on a également le résultat qui suit.

PROPOSITION 6. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes (avec $I = \{0, 1, \dots, p\}$ ou $I = \mathbb{N}$) telle que pour tout $i \in I$, $i \neq 0$, $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$. Alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f : \cup_{i \in I} C_i \to D = \{0, 1\}$ une application continue. Pour tout i, $f_{|C_i}$ est constante, et comme $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$ pour $i \neq 0$, on a $f_{|C_{i-1}} = f_{|C_i}$ pour tout $i \neq 0$. En procédant par récurrence sur i, on en déduit que $f_{|C_i} = f_{|C_0}$ pour tout i. Ainsi, f est constante, d'où le résultat. $\square$

PROPOSITION 7. *Soient $(E_1, \mathrm{d}_1), \dots, (E_n, \mathrm{d}_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout i.*

Démonstration. Condition nécessaire. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et soit $f : E_i \to D = \{0, 1\}$ une application continue. La projection p_i de E sur E_i étant continue, l'application $f \circ p_i : E \to D$ est continue, et comme E est connexe, $f \circ p_i$ est constante. Donc f est constante et E_i est connexe.

Condition suffisante. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n) \in E$ et une application continue $f : E \to D$. L'application $f_1 : E_1 \to D \quad x \mapsto f(x, x_2, \dots, x_n)$ est continue, donc constante car E_1 est connexe. En particulier, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y_1, x_2, \dots, x_n)$. En itérant le procédé sur chacun des connexes $E_2, \dots, E_n$, on obtient $f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$. L'application f est donc constante, donc E est connexe d'après la proposition 3. $\square$

Composantes connexes. Soit (E, d) un espace métrique. On considère sur (E, d) la relation

$$(x \,\mathcal{R}\, y) \iff (\exists C \text{ connexe de } E \text{ tel que } x \in C \text{ et } y \in C).$$

On a affaire à une relation d'équivalence car

— Si $x \,\mathcal{R}\, y$, $y \,\mathcal{R}\, x$ (immédiat).

— Pour tout x, $x \,\mathcal{R}\, x$ car $\{x\}$ est un connexe.

— Si $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$, il existe deux connexes C et C' tels que $x \in C$, $y \in C$ et $y \in C'$, $z \in C'$. On a $C \cap C' \neq \varnothing$ donc d'après la remarque 2, $C \cup C'$ est connexe, et comme $x \in C \cup C'$ et $z \in C \cup C'$, $x \,\mathcal{R}\, z$.

Si $x \in E$, sa classe d'équivalence, notée $\dot{x}$, est la réunion des connexes contenant x. C'est donc un connexe d'après la proposition 5 (en effet, tous les connexes contenant x ont tous une intersection non vide avec le connexe $\{x\}$). L'ensemble $\dot{x}$ s'appelle une *composante connexe* de E.

Les composantes connexes de E forment donc une partition de E. L'espace métrique E est connexe si et seulement s'il n'a qu'une seule composante connexe.

Les composantes connexes de E sont des fermés de E. Considérons en effet une composante connexe $\dot{x}$ de E. La proposition 4 entraîne le fait que $\overline{\dot{x}}$ est connexe, c'est donc un connexe contenant x, donc $\dot{x} \subset \overline{\dot{x}}$ et $\dot{x} = \overline{\dot{x}}$.

Si les composantes connexes de E sont en nombre fini, elles sont ouvertes comme complémentaires d'une réunion finie de fermés de E.

Connexes de $\mathbb{R}$.

→ Théorème 2. *Les parties connexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles de* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Un connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. En effet, si $C \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, il existe $(a, b) \in C^2$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et $x \notin C$. Mais alors $C \subset]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$, donc C n'est pas connexe.

Réciproquement, montrons qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe. C'est un peu plus délicat.

Si I est un singleton, c'est immédiat.

Si $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, considérons une application continue $f : I \to D = \{0, 1\}$. Si f n'est pas constante, il existe $x, y \in I$ vérifiant $a < x < y < b$ tels que $f(x) \neq f(y)$, par exemple $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Considérons l'ensemble

$$\Gamma = \{z \in I \mid z \geq x \text{ et } \forall t \in [x, z], f(t) = 0\}.$$

L'ensemble Γ est non vide car $x \in \Gamma$. De plus, Γ est majoré car pour tout $z \in \Gamma$, $z \leq y$. Soit $c = \sup \Gamma$. Comme f est continue, $f(c) = 0$. De même, f étant continue en c,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall t \in [c, c + \varepsilon], \qquad \delta(f(t), f(c)) < \frac{1}{2},$$

donc pour tout $t \in [c, c + \varepsilon]$, $f(t) = 0$, ce qui montre que $c + \varepsilon \in \Gamma$. Ceci contredit le fait que $c = \sup \Gamma$. Finalement, l'application f est constante et I est connexe d'après la proposition 3.

Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton étant compris entre un intervalle ouvert et son adhérence, on en conclut avec la proposition 4 que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe. □

→ Théorème 3 (des valeurs intermédiaires). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. Le théorème précédent assure la connexité de I, donc $f(I)$ est connexe d'après le théorème 1, c'est donc un intervalle. □

Remarque 3. — Une autre manière d'écrire le résultat est la suivante. Si $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(b) \geq f(a)$) avec $a < b$, alors pour tout γ tel que $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ (resp. $f(b) \leq \gamma \leq f(a)$), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

— Avec la proposition 15, on en conclut que l'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par f est un segment de $\mathbb{R}$.

4.3. Connexité par arcs

DÉFINITION 2. Soit (E, d) un espace métrique. On appelle *chemin* de E toute application $\gamma : [0,1] \to (E, \mathrm{d})$, continue. L'image $\gamma([0,1])$ du chemin s'appelle un *arc*, $\gamma(0)$ l'*origine* de l'arc, $\gamma(1)$ son *extrémité*.

DÉFINITION 3. Soit (E, d) un espace métrique. On dit que E est *connexe par arcs* si pour tout $(a,b) \in E^2$, il existe un arc inclus dans E d'origine a et d'extrémité b.

THÉORÈME 4. *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soient E un espace connexe par arcs et $f : E \to D = \{0,1\}$ une application continue. Soit $(a,b) \in E^2$. Il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'application $f \circ \gamma : [0,1] \to D$ est continue, donc constante car $[0,1]$ est connexe. Donc $(f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1)$, c'est-à-dire $f(a) = f(b)$. L'application f est donc constante, donc E est connexe d'après la proposition 3 □

Remarque 4. — La connexité par arcs est surtout une notion pratique pour montrer qu'un espace est connexe. En termes intuitifs, un espace est connexe par arcs si on peut toujours relier deux de ses points par une courbe continue, ce qui fait du concept de connexité par arcs une notion moins abstraite que la notion de connexité.
- — La réciproque du théorème 4 est fausse (voir l'exercice 5 page 44). Elle est cependant vraie dans un ouvert d'un $\mathbb{R}$-e.v.n (voir le théorème 5).
- — La connexité par arcs est, comme la connexité, une notion topologique.

Connexité par lignes brisées dans un espace vectoriel normé. Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

DÉFINITION 4. Soient $(a,b) \in E^2$. On appelle *segment* d'extrémité a et b l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda)b,\ \lambda \in [0,1]\}$, et on le note $[a,b]$.

DÉFINITION 5. On appelle *ligne brisée* (ou *ligne polygonale*) de E joignant deux points a et b de E tout ensemble de la forme $\cup_{1 \le i \le n}[x_{i-1}, x_i]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = a$ et $x_n = b$ et pour tout i, $x_i \in E$.

DÉFINITION 6. Une partie A de E est dite *connexe par lignes brisées* si pour tout $(a,b) \in A^2$, il existe une ligne brisée incluse dans A joignant a et b.

Remarque 5. Il est clair qu'une ligne brisée est un arc. Une partie de E connexe par lignes brisées est donc connexe par arcs.

Exemple 2. Un $\mathbb{R}$-e.v.n E est connexe par lignes brisées (donc connexe par arcs et connexe) car pour tout $(a,b) \in E^2$, $[a,b] \subset E$.

THÉORÈME 5. *Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n. Une partie ouverte Ω de E est connexe si et seulement si elle est connexe par lignes brisées.*

Démonstration. La condition suffisante découle du théorème 4, une partie connexe par ligne brisée étant connexe par arcs.

Montrons la condition nécessaire. Soit Ω un ouvert connexe non vide de E. Soit $x_0 \in \Omega$ et notons T_{x_0} l'ensemble des points de Ω que l'on peut joindre à x_0 par une ligne brisée contenue dans Ω.
- — On a $T_{x_0} \neq \varnothing$ car $x_0 \in T_{x_0}$.
- — L'ensemble T_{x_0} est ouvert. En effet, si $x \in T_{x_0}$, on a $x \in \Omega$ donc il existe $\rho > 0$ tel que la boule $\mathrm{B}(x,\rho)$ soit incluse dans Ω. Ainsi, pour tout $y \in \mathrm{B}(x,\rho)$, $[x,y] \subset \Omega$ et comme $x \in T_{x_0}$, on en déduit $y \in T_{x_0}$.

— L'ensemble T_{x_0} est fermé dans Ω. En effet, si $x \in \overline{T_{x_0}} \cap \Omega$, il existe une boule $\mathrm{B}(x,\rho)$ incluse dans Ω telle que $\mathrm{B}(x,\rho) \cap T_{x_0} \neq \varnothing$. Si on choisit $y \in \mathrm{B}(x,\rho) \cap T_{x_0}$, on a alors $[y,x] \subset \Omega$, donc $x \in T_{x_0}$.

Finalement, $T_{x_0} \neq \varnothing$ est ouvert et fermé dans le connexe Ω, donc $T_{x_0} = \Omega$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 6. On en déduit avec la remarque 5 que tout ouvert connexe d'un e.v.n est connexe par arcs. Attention, ce dernier résultat n'est plus vrai si on remplace E par un espace métrique quelconque.

4.4. Exercices

Exercice 1. Soient (E,d) un espace métrique, B une partie connexe de E et A une partie de E telle que $B \cap \overset{\circ}{A} \neq \varnothing$ et $B \cap (\overset{\circ}{\overbrace{E\setminus A}}) \neq \varnothing$. Montrer que $B \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$ (où $\mathrm{Fr}(A)$ désigne la frontière de A).

Solution. On note $\complement X = E\setminus X$ le complémentaire de X dans E. Remarquons déjà que

$$E\setminus \mathrm{Fr}(A) = \complement(\overline{A}\setminus \overset{\circ}{A}) = \complement(\overline{A} \cap \complement\overset{\circ}{A}) = (\complement\overline{A}) \cup \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A} \cup (E\setminus\overline{A}) = \overset{\circ}{A} \cup (\overset{\circ}{\overbrace{E\setminus A}}).$$

Ceci étant, supposons $B \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$. Alors $B \subset E\setminus\mathrm{Fr}(A) = \overset{\circ}{A} \cup (\overset{\circ}{\overbrace{E\setminus A}})$. Les ensembles $\overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{E\setminus A}}$ étant deux ouverts disjoints de E, on en déduit, B étant connexe, que $B \cap \overset{\circ}{A} = \varnothing$ ou $B \cap (\overset{\circ}{\overbrace{E\setminus A}}) = \varnothing$, ce qui absurde par hypothèse. Donc $B \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$.

Exercice 2. Soient A et B deux espaces métriques connexes. Soit $X \subset A$, $X \neq A$ et $Y \subset B$, $Y \neq B$. Montrer que $C = (A \times B)\setminus(X \times Y)$ est un connexe de $A \times B$.

Solution. D'après les hypothèses, il existe $a_0 \in A$ tel que $a_0 \notin X$ et $b_0 \in B$ tel que $b_0 \notin Y$.

Soit $f : C \to \{0,1\}$ une application continue. Il s'agit de montrer que f est constante. Soit (a,b) un point de C. Comme $(a,b) \notin X \times Y$, on a $a \notin X$ ou $b \notin Y$, par exemple $a \notin X$. Ainsi, pour tout $y \in B$, $(a,y) \in C$. La restriction de f à $\{a\} \times B$ est continue. Comme $\{a\}$ et B sont connexes, la restriction de f à $\{a\} \times B$ est constante. En particulier, $f(a,b) = f(a,b_0)$. Comme $b_0 \notin Y$, on montrerait de même $f(a,b_0) = f(a_0,b_0)$. Donc $f(a,b) = f(a_0,b_0)$, et ceci pour tout $(a,b) \in C$, donc f est constante. D'après la proposition 3 page 39, C est donc connexe.

Exercice 3. Soit (E,d) un espace métrique connexe et F un fermé de E. On suppose que $\mathrm{Fr}(F)$ est connexe. Montrer que F est connexe. Le résultat subsiste-t-il si F n'est pas supposé fermé ?

Solution. En vertu de la proposition 3 page 39, il suffit de montrer que toute application continue $f : F \to D = \{0,1\}$ est constante. Soit f une telle application. La restriction $f_{|\mathrm{Fr}(F)}$ de f à $\mathrm{Fr}(F) \subset F$ est continue, et comme $\mathrm{Fr}(F)$ est connexe par hypothèse, $f_{|\mathrm{Fr}(F)}$ est constante. Supposons par exemple que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Fr}(F)$. On définit une extension g de f sur E par

$$g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in F, \qquad g(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in E\setminus F.$$

On va montrer que g est continue, il suffit donc de montrer que l'image réciproque de tout fermé de D est fermée dans E. Les fermés de D sont $\varnothing$, D, $\{0\}$ et $\{1\}$. On a

$$g^{-1}(\varnothing) = \varnothing, \qquad g^{-1}(D) = E, \qquad g^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{1\})$$

donc ces images réciproques sont fermées ($f^{-1}(\{1\})$ est fermé dans F car f est continue, donc dans E car F est fermé dans E). Il reste à monter que $g^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E. Partant de

$$g^{-1}(\{0\}) = (E\setminus F) \cup f^{-1}(\{0\}) = (E\setminus \mathring{F}) \cup f^{-1}(\{0\}),$$

(cette dernière égalité est vraie car $E\setminus\mathring{F} = (E\setminus F) \cup \mathrm{Fr}(F)$ et $\mathrm{Fr}(F) \subset f^{-1}(\{0\})$), on voit que $g^{-1}(\{0\})$, union de deux fermés dans E, est fermé dans E.

Finalement on a démontré que $g: \ E \to D$ est continue. Or E est connexe, donc g est constante, donc $f = g_{|F}$ est constante. Ceci conclut à la connexité de F.

Le résultat est faux si F n'est pas supposé fermé. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Fr}(F) = \{0\}$ est connexe et pourtant $F =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas connexe.

Exercice 4. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et on considère $f: \ \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés du cercle unité $\mathbb{U}$ ayant même image par f.

Solution. Il s'agit de prouver l'existence de $z \in \mathbb{U}$ tel que $f(z) = f(-z)$. Considérons l'application

$$g: \ \mathbb{U} \to \mathbb{R} \quad z \mapsto f(z) - f(-z).$$

La continuité de g et le caractère connexe de $\mathbb{U}$ ($\mathbb{U}$ est connexe comme image du connexe $[0, 2\pi]$ par l'application continue $\theta \mapsto e^{i\theta}$) entraîne que $g(\mathbb{U})$ est connexe dans $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Or $g(1) = f(1) - f(-1) = -g(-1)$. L'intervalle $g(\mathbb{U})$ contient donc deux valeurs opposées, donc $0 \in g(\mathbb{U})$. En d'autres termes, il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $g(z) = 0 = f(z) - f(-z)$, d'où le résultat.

Exercice 5. Soit Γ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Gamma = \left[\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}^+)\right] \cup \left[\bigcup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} (\{x\}\times]-\infty, 0[)\right].$$

a) Montrer que Γ est un connexe de $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que Γ n'est pas connexe par arcs.

Solution. **a)** Pour prouver la connexité de Γ, il suffit de montrer que toute fonction continue $f: \ \Gamma \to \{0, 1\}$ est constante.

Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, l'ensemble $\{x\} \times \mathbb{R}^+$ est une demi droite, donc connexe par arc, donc connexe, donc :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{Q}, & f \text{ est constante sur } \{x\} \times \mathbb{R}^+, \qquad \text{de même} \\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, & f \text{ est constante sur } \{x\}\times]-\infty, 0[\end{cases} \tag{$*$}$$

On peut donc définir une application $g: \ \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ comme suit :

— Si $x \in \mathbb{Q}$, $g(x)$ est la valeur prise par f sur $\{x\} \times \mathbb{R}^+$,

— si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $g(x)$ est la valeur prise par f sur $\{x\}\times]-\infty, 0[$.

Si on montre que g est constante. on aura prouvé, en vertu de (*), que f est constante et donc que Γ est connexe.

L'application g est localement constante. En effet.

– Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$. On a $(x_0, 0) \in \Gamma$ et comme f est continue en ce point et que $\{f(x_0, 0)\}$ est un ouvert de $\{0, 1\}$, $f^{-1}(\{f(x_0, 0)\})$ est un ouvert de Γ, de sorte que

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in (]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]-\alpha, \alpha[) \cap \Gamma, \qquad f(x, y) = f(x_0, 0).$$

Donc si $x \in]x_0 - \alpha, x_0, x_0 + \alpha[$, $g(x) = g(x_0)$ (en effet, si x est rationnel, $g(x) = f(x, 0) = f(x_0, 0) = g(x_0)$ et si x est irrationnel, $g(x) = f(x, -\alpha/2) = f(x_0, 0) = g(x_0)$).

– Soit $x_0 \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. Fixons $y_0 < 0$. L'application f étant continue en $(x_0, y_0) \in \Gamma$, on en déduit comme précédemment que

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\, \cap (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}), \qquad f(x, y_0) = f(x_0, y_0) = g(x_0).$$

Grâce à (*), on en déduit

$$\forall x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\, \cap (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}), \qquad f_{|\{x\} \times]-\infty, 0[} = g(x_0).$$

On en tire $g(x) = g(x_0)$ pour tout $x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. (En effet, si x est irrationnel, $g(x) = f_{|\{x\} \times]-\infty, 0[} = g(x_0)$. Si x est rationnel, la densité de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ permet d'affirmer l'existence d'une suite (x_n) de $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\, \cap (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q})$ qui converge vers x, et

$$g(x) = f(x, 0) = \lim_{n \to \infty} f(x_n, -1/n) = g(x_0).)$$

– Ainsi, g est localement constante autour des rationnels et des irrationnels, donc sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et que $\mathbb{R}$ est connexe, on en déduit que g est constante sur $\mathbb{R}$ et le résultat.

b) Raisonnons par l'absurde et supposons Γ connexe par arcs. En particulier, il existe un arc contenu dans Γ qui relie $(0, 0)$ et un point $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \times] - \infty, 0[$. En d'autres termes, il existe une application continue

$$\gamma : \; [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

telle que $\gamma(0) = (x_0, y_0) \in (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \times] - \infty, 0[$, $\gamma(1) = (0, 0)$ et $\forall t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in \Gamma$.

L'application γ_1 étant continue, l'ensemble $\gamma_1^{-1}(\{x_0\})$ est un fermé, non vide car il contient x_0. Donc $\alpha = \sup \gamma_1^{-1}(\{x_0\})$ existe et $\gamma_1(\alpha) = x_0$. On a $\alpha < 1$ car $\gamma_1(1) = 0$. En résumé,

$$\gamma_1(\alpha) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \,]\alpha, 1], \quad \gamma_1(t) \neq x_0. \tag{**}$$

Comme $\gamma_1(\alpha) = x_0$ et que $\gamma(\alpha) \in \Gamma$, on a $\gamma_2(\alpha) < 0$. La continuité de γ_2 assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_2(t) < 0$ pour tout $t \in [\alpha, \alpha + \varepsilon]$, et comme $\gamma(t) \in \Gamma$, on en déduit

$$\forall t \in [\alpha, \alpha + \varepsilon], \quad \gamma_1(t) \notin \mathbb{Q}. \tag{***}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\gamma_1([\alpha, \alpha + \varepsilon])$ est un intervalle, non réduit à un singleton d'après (**). Ceci est absurde d'après (***), d'où le résultat.

Exercice 6 (Espaces bien enchaînés). Soient (E, d) un espace métrique. Soit $\varepsilon > 0$. On dit que E est ε-enchaîné si pour tout $(a, b) \in E^2$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des points $x_0, \ldots, x_n$ de E tels que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $\mathrm{d}(x_i, x_{i-1}) < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On dit que E est bien enchaîné si il est ε-enchaîné pour tout $\varepsilon > 0$.
a) Si E est connexe, montrer que E est bien enchaîné.
b) Si E est compact et si E est bien enchaîné, montrer que E est connexe. Ce résultat reste-t-il vrai si E n'est pas supposé compact ?

Solution. **a)** Soit $\varepsilon > 0$. On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\varepsilon$ sur E par : $x \,\mathcal{R}_\varepsilon\, y$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_n \in E$ tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $\mathrm{d}(x_i, x_{i-1}) < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ (on vérifie facilement que l'on a bien affaire à une relation d'équivalence). Soit $x \in E$. Nous montrons que la classe $\dot{x}$ de x est ouverte et fermée.

La classe $\dot{x}$ est ouverte. En effet, soit $y \in \dot{x}$. Pour tout $z \in \mathrm{B}(y, \varepsilon)$, on a $y \,\mathcal{R}_\varepsilon z$ donc $z \in \dot{y} = \dot{x}$. Ainsi, $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \subset \dot{x}$, et ceci pour tout $y \in \dot{x}$, donc $\dot{x}$ est ouvert.

La classe $\dot{x}$ est également fermée car c'est le complémentaire de l'ouvert $\cup_{y \notin \dot{x}} \dot{y}$.

Ainsi, $\dot{x}$, ouverte et fermée dans le connexe E, est égale à E. Ceci montre que E est ε-enchaîné pour tout $\varepsilon > 0$, d'où le résultat.

b) Raisonnons par l'absurde en supposant E non connexe. On peut écrire $E = F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés non vides disjoints. Un fermé dans un compact est compact, donc F_1 et F_2 sont compacts. Il existe donc $a_1 \in F_1$ et $a_2 \in F_2$ tels que $\mathrm{d}(a_1, a_2) = \mathrm{d}(F_1, F_2)$ (voir l'exercice 3 page 33). Comme $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $a_1 \neq a_2$ donc $\varepsilon = \mathrm{d}(a_1, a_2) > 0$, de sorte que $\mathrm{d}(x, y) \geq \varepsilon$ pour tout $(x, y) \in F_1 \times F_2$. Comme E est bien enchaîné, on peut trouver une chaîne $(x_0, \ldots, x_n) \in E^{n+1}$ telle que $x_0 \in F_1$, $x_n = y_0 \in F_2$, et $\mathrm{d}(x_i, x_{i-1}) < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Il existe un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_{i-1} \in F_1$ et $x_i \in F_2$ (ceci car $x_0 \in F_1$ et $x_n \in F_2$), et alors $\mathrm{d}(x_{i-1}, x_i) \geq \mathrm{d}(F_1, F_2) = \varepsilon$, ce qui est absurde. L'espace métrique E est donc connexe.

Si E n'est pas supposé compact, le résultat est faux. Par exemple $\mathbb{Q}$ (muni de la métrique $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$) est bien enchaîné (car dense dans $\mathbb{R}$) mais non connexe.

EXERCICE 7. Soit (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}(u_n, u_{n+1}) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

Solution. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $A_p = \{u_n,\ n \geq p\}$. On sait que l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de (u_n) est égal à $\cap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$. C'est donc un fermé, et comme E est compact, Γ est compact.

Supposons Γ non connexe, de sorte que l'on peut écrire $\Gamma = A \cup B$ où A et B sont deux fermés non vides disjoints de Γ. Comme Γ et compact, A et B sont même compacts et donc (voir l'exercice 3 page 33) $\alpha = \mathrm{d}(A, B) > 0$ puisque A et B sont disjoints. Notons

$$A' = \left\{x \in E \mid \mathrm{d}(x, A) < \frac{\alpha}{3}\right\} = \bigcup_{x \in A} \mathrm{B}\left(x, \frac{\alpha}{3}\right) \quad \text{et} \quad B' = \left\{x \in E \mid \mathrm{d}(x, B) < \frac{\alpha}{3}\right\}.$$

Les ensembles A' et B' sont ouverts donc $K = E \setminus (A' \cup B')$ est fermé dans le compact E, donc compact. Nous allons montrer que (u_n) admet au moins une valeur d'adhérence dans K, ce qui sera une absurdité car $\Gamma \cap K = \varnothing$.

Par hypothèse, $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}(u_n, u_{n+1}) = 0$ donc

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \qquad \mathrm{d}(u_n, u_{n+1}) < \frac{\alpha}{3}. \tag{$*$}$$

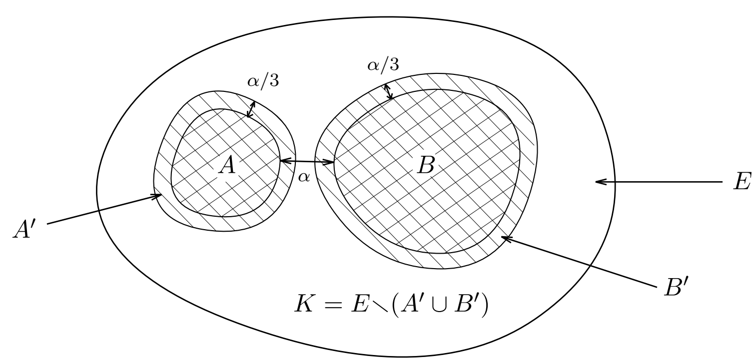


FIGURE 2. Les compacts A, B, E et $K = E \setminus (A' \cup B')$

Soit N un entier quelconque supérieur à N_0. Donnons nous $x_0 \in A$. Le point x_0 est valeur d'adhérence de (u_n) donc il existe $n_1 > N$ tel que $\mathrm{d}(x_0, u_{n_1}) < \alpha/3$, donc $u_{n_1} \in A'$. Si $y_0 \in B$, y_0 est aussi valeur d'adhérence de (u_n) donc il existe $n_2 > n_1$ tel que $\mathrm{d}(y_0, u_{n_2}) < \alpha/3$, de sorte que $u_{n_2} \in B'$. Notons maintenant n_0 le premier entier supérieur à n_1 tel que $u_{n_0} \notin A'$ (un tel entier existe car $u_{n_2} \notin A'$). On a $u_{n_0 - 1} \in A'$, donc d'après (*)

$$\mathrm{d}(u_{n_0}, B) \geq \mathrm{d}(u_{n_0-1}, B) - \mathrm{d}(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \geq \mathrm{d}(A, B) - \mathrm{d}(u_{n_0-1}, A) - \mathrm{d}(u_{n_0-1}, u_{n_0}) > \frac{\alpha}{3},$$

ce qui prouve que $u_{n_0} \notin B'$. Comme de plus $u_{n_0} \notin A'$, on a $u_{n_0} \in K$.

Résumons. Nous venons de montrer que pour tout $N \geq N_0$, il existe $n_0 \geq N$ tel que $u_{n_0} \in K$. On peut donc construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui prend ses valeurs dans K. Comme

K est compact, $(u_{\varphi(n)})$ admet au moins une valeur d'adhérence dans K, donc (u_n) admet au moins une valeur d'adhérence dans K. Ceci est impossible car $\Gamma \cap K = \varnothing$. L'ensemble Γ est donc connexe.

EXERCICE 8 ($\mathbb{R}$ ET $\mathbb{R}^2$ NE SONT PAS HOMÉOMORPHES). Il est bien connu que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont deux ensembles équipotents, autrement dit il existe une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'une telle bijection ne peut pas être un homéomorphisme.

Solution. Supposons l'existence d'un homéomorphisme f de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe (car trivialement connexe par arcs), et f^{-1} étant continue, $f^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ est un connexe de $\mathbb{R}$. Or f étant une bijection,

$$f^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{f^{-1}(0)\} =]-\infty, f^{-1}(0)[\cup]f^{-1}(0), +\infty[$$

n'est pas connexe. Ceci est absurde, d'où le résultat.

EXERCICE 9 (THÉORÈME DE DARBOUX, PREUVE TOPOLOGIQUE). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ (mais pas forcément de classe $\mathcal{C}^1$). Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. En considérant l'ensemble

$$\Gamma = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y},\ (x, y) \in I^2 \text{ et } x < y \right\},$$

montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Solution. Notons A l'ensemble $\{(x, y) \in I^2,\ x < y\}$. Cet ensemble est connexe (il est même convexe). L'application

$$F :\ A \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

est continue, donc $f(A) = \Gamma$, image continue d'un connexe, est connexe.

On a $f'(I) \subset \overline{\Gamma}$. En effet, si $x \in I$ et si (x_n) est une suite de I qui tend vers x telle que $x_n > x$ pour tout n, on a $f'(x) = \lim_{n\to\infty} F(x, x_n)$.

D'après le théorème des accroissements finis, on a $\Gamma \subset f'(I)$. Finalement, $\Gamma \subset f'(I) \subset \overline{\Gamma}$, donc $f'(I)$ est connexe d'après la proposition 4. Les connexes de $\mathbb{R}$ étant les intervalles, on en déduit le résultat.

Remarque. Ce résultat est prouvé avec des moyens différents à l'exercice 4 page 80.

5. Espaces vectoriels normés (e.v.n)

Cette section propose une étude générale des espaces vectoriels normés. L'étude particulière de la topologie des espaces de matrices est traitée à la partie 4.3 du tome Algèbre.

5.1. Rappels

On rappelle qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est normé s'il est muni d'une norme $\|\,.\,\|$. En notant $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$, on fait de E un espace métrique. Sauf mention contraire, c'est toujours cette distance qui est utilisée dans un e.v.n. On dit qu'un e.v.n est un espace de Banach s'il est complet.

Deux normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ sur E sont dite équivalentes si

$$\exists a > 0, \exists b > 0, \forall x \in E, \qquad a\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\,\|x\|_1.$$

Deux normes équivalentes définissent des distances équivalentes. Sur un plan topologique, et lorsque l'on travaille avec des suites de Cauchy, il est indifférent de prendre l'une ou l'autre de ces normes.

L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, et $z \mapsto |z|$ une norme sur $\mathbb{C}$. Plus généralement, pour tout $\alpha \geq 1$, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$),

$$\|x\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

définit une norme sur $\mathbb{K}^n$ (voir la conséquence de l'inégalité de Minkowsky, page 98), de même que $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$.

Dans un e.v.n, les opérations $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues. La norme est également une fonction continue.

Si V est un s.e.v. de l'e.v.n E, alors son adhérence $\overline{V}$ est un s.e.v de E. En particulier, un hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E.

5.2. Continuité des applications linéaires

Dans toute cette sous-partie, E et F désignent deux $\mathbb{K}$-e.v.n (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Les assertions qui suivent sont équivalentes.*

(i) f est continue sur E ;

(ii) f est continue en 0 ;

(iii) f est bornée sur la boule unité fermée $\mathrm{B_f}(0, 1)$ de E ;

(iv) f est bornée sur la sphère unité $\mathrm{S}(0, 1)$ de E ;

(v) il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$;

(vi) f est lipschitzienne ;

(vii) f est uniformément continue sur E.

Remarque 1. — Dans la pratique, on utilise souvent les assertions (iv) et (v).

— De même, on montre qu'une application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F est continue si et seulement si

$$\exists M > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \qquad \|f(x)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

Définition 1. L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}_c(E, F)$. On norme $\mathcal{L}_c(E, F)$ en posant

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad |\!|\!| f |\!|\!| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|,$$

ce qui fait de $\mathcal{L}_c(E, F)$ un e.v normé.

Remarque 2. Le réel $|\!|\!| f |\!|\!|$ est le plus petit réel positif M tel que $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ pour tout $x \in E$. En particulier, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq |\!|\!| f |\!|\!| \cdot \|x\|$. Sauf mention contraire, c'est la norme $x \mapsto |\!|\!| f |\!|\!|$ qui est choisie sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Proposition 1. *Soient E, F et G trois e.v.n, soient $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|\!|\!| g \circ f |\!|\!| \leq |\!|\!| g |\!|\!| \cdot |\!|\!| f |\!|\!|$.*

En particulier, la norme $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$ sur $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}_c(E, E)$ en fait une algèbre normée (voir plus bas).

→ Théorème 2. *Si F est un espace de Banach, l'e.v.n $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E, F)$.

On construit la limite éventuelle de (f_n). Fixons un élément quelconque x de E. On a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \qquad \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq |\!|\!| f_p - f_q |\!|\!| \cdot \|x\|,$$

donc la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans F, et comme F est complet, elle converge. On note $f(x)$ sa limite. On définit ainsi une application f de E dans F.

On vérifie que $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. L'application f est linéaire car si $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} [\lambda f_n(x) + \mu f_n(y)] = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Elle est continue. En effet, (f_n) étant de Cauchy, elle est bornée donc il existe $M > 0$ tel que $|\!|\!| f_n |\!|\!| \leq M$ pour tout n. Si $x \in E$ est fixé, on a donc $\|f_n(x)\| \leq M \|x\|$ pour tout n, donc à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient $\|f(x)\| \leq M\|x\|$. Ainsi, f est bien continue.

Il nous reste à prouver que (f_n) converge vers f au sens de la norme $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $|\!|\!| f_p - f_q |\!|\!| \leq \varepsilon$. En fixant $x \in E$, on a donc

$$\forall p, q \geq N, \qquad \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq |\!|\!| f_p - f_q |\!|\!| \cdot \|x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

En fixant $p \geq N$ et en faisant tendre q vers l'infini, on obtient $\|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$. Ceci est vrai pour tout $x \in E$, on a donc $|\!|\!| f_p - f |\!|\!| \leq \varepsilon$, et ceci pour tout $p \geq N$, d'où le résultat. □

Remarque 3. Il faut savoir refaire cette démonstration. Retenez en particulier les trois étapes principales (faites l'exercice 1 page 21 qui est du même type).

Formes linéaires continues. Si E est un $\mathbb{K}$-e.v.n (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), l'e.v.n $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ (ensemble des formes linéaires continues sur E) est un s.e.v du dual E^* de E. On le note souvent E' et on l'appelle *dual topologique* de E. Comme $\mathbb{K}$ est complet, E' est un espace de Banach d'après le théorème 2. Dans un espace de Hilbert, E' et E sont isomorphes (voir l'annexe B, question 3/ a) du problème 1 page 427).

Une forme linéaire f sur E est continue si et seulement si son noyau $\operatorname{Ker} f$ est un fermé de E (voir l'exercice 7 page 55).

L'algèbre normée $\mathcal{L}_c(E)$. On rappelle qu'une algèbre normée A est une algèbre (*i. e.* un e.v muni d'une loi de produit interne, distributive par rapport à l'addition, vérifiant $(\lambda u)v = \lambda(uv) = u(\lambda v)$ pour tout $u, v \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$) munie d'une norme $\| \,.\, \|$ vérifiant $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ pour tout $u, v \in A$. Ceci assure la continuité de l'application $(u, v) \mapsto uv$.

D'après la proposition 1, l'algèbre $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}_c(E, E)$, munie de la norme $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$, est une algèbre normée. Si de plus E est un espace de Banach, $\mathcal{L}_c(E)$ est un espace de Banach d'après le théorème 2. Une conséquence importante est la suivante. Toute série $\sum u_n$ de $\mathcal{L}_c(E)$ absolument convergente (*i. e.* telle que $\sum |\!|\!| u_n |\!|\!|$ converge) est convergente (en effet, la suite associée est de Cauchy).

Une application importante.

PROPOSITION 2. *Soient E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|\!|\!| u |\!|\!| < 1$. Alors $\operatorname{Id} - u$ est inversible, son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.*

Démonstration. La série $\sum u^n$ converge absolument car $|\!|\!| u^n |\!|\!| \leq |\!|\!| u |\!|\!|^n$ et $|\!|\!| u |\!|\!| < 1$. Or

$$(\operatorname{Id} - u)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n - \sum_{n=1}^{+\infty} u^n = \operatorname{Id},$$

de même $(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n)(\operatorname{Id} - u) = \operatorname{Id}$, d'où le résultat. □

Remarque 4. — On note $\mathcal{G}\ell_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles u continus et tels que u^{-1} est continu (en fait, si E est un espace de Banach et si u est inversible et continu, u^{-1} est toujours continu — c'est le théorème de Banach, voir l'annexe A, exercice 6 page 423). Si E est un espace de Banach, la proposition

précédente permet de montrer que $\mathcal{G}\ell_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$ (voir l'exercice 4 page 52).
- — De manière générale, pour toute série entière $\sum_n a_n z^n$ (avec $a_n \in \mathbb{R}$ ou $a_n \in \mathbb{C}$) de rayon de convergence $R > 0$, on peut définir la série entière d'endomorphisme $\sum_n a_n u^n$ dès que $\|\!|u|\!\| < R$ pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$ avec E un espace de Banach. Par exemple, l'exponentielle d'un endomorphisme continu $u \in \mathcal{L}_c(E)$, est défini par la série $\exp(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n/n!$ (voir le tome Algèbre, partie 4.3). On peut aussi utiliser les séries entières d'endomorphisme pour démontrer des résultats intéressant. Par exemple, on prouve l'existence, dès que $\|\!|u|\!\| < 1$, d'un endomorphisme continu $v \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $v^2 = 1 + u$; il suffit de choisir $v = \sum_n a_n u^n$ où les (a_n) sont les coefficients de la série entière $\sqrt{1+z} = \sum_n a_n z^n$.

5.3. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Comme nous allons le voir, en dimension finie, “tout est continu”. Les notions de la sous-partie précédente présentent donc moins d'intérêt en dimension finie.

→ Théorème 3. *Dans un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x = \sum_i x_i\, e_i$, $N_0(x) = \sup_i |x_i|$ définit une norme sur E.

Montrons que toutes les normes sur E sont équivalentes à N_0. Soit N une norme sur E. En désignant par a le réel $\sum_i N(e_i)$, on a pour tout $x = \sum_i x_i\, e_i \in E$

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, N(e_i) \leq a\, N_0(x). \qquad (*)$$

Munissons $\mathbb{K}^n$ de la norme produit $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_i |x_i|$. L'application $\varphi :\ (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_\infty) \to (E, N_0)\quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_i x_i\, e_i$ est une isométrie, donc $S = \{x \in E \mid N_0(x) = 1\}$ est un compact de (E, N_0) (image de la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ — qui est compacte car fermée bornée dans $\mathbb{K}^n$ — par φ qui est continue car isométrique). D'après (*), on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq a\, N_0(x-y)$, donc $N :\ (E, N_0) \to \mathbb{R}$ est continue. Comme S est un compact de (E, N_0), on en déduit $b = \inf_{N_0(x)=1} N(x) \neq 0$. Ainsi,

$$\forall x \in E, x \neq 0, \qquad N(x) = N_0(x) \cdot N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right) \geq b\, N_0(x).$$

Avec (*), on en déduit le théorème. □

Ce théorème est important. Il permet de choisir la norme que l'on veut sur un e.v.n de dimension finie. Voici des corollaires.

Corollaire 1. *Toute application linéaire d'un e.v.n de dimension finie dans un e.v.n (quelconque) est continue.*

Corollaire 2. *Tout e.v.n de dimension finie est complet.*

Corollaire 3. *Tout s.e.v de dimension finie d'un e.v.n est fermé.*

Corollaire 4. *Les parties compactes d'un e.v.n de dimension finie sont les parties fermées bornées.*

Remarque 5. Tous ces corollaires sont faux en dimension infinie. Par exemple :
- — Munissons l'espace vectoriel des polynômes réels $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\sum_i a_i\, X^i\| = \sup_i |a_i|$. L'application linéaire $f :\ \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]\quad P \mapsto P'$ n'est pas continue (en effet, $f(X^n) = n$ et $\|X^n\| = 1$ donc l'assertion (iii) du théorème 1 n'est pas vérifiée).
- — Tout e.v.n à base dénombrable n'est pas complet (voir l'exercice 8).
- — La boule unité fermée d'un e.v.n de dimension infinie n'est pas compacte (théorème de Riesz, voir l'exercice 9).

5.4. Convexes

Les parties convexes jouent un rôle important dans les e.v.n, en particulier dans les espaces de Hilbert (voir l'annexe B, problème 1). Dans toute cette sous-partie, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 2. Soient $A, B \in E$. On appelle *segment* d'extrémités A et B et on note $[A, B]$ l'ensemble $\{\lambda A + (1-\lambda) B,\ \lambda \in [0,1]\}$. Dans un e.v.n, un segment est fermé.

Définition 3. Soit C une partie de E. On dit que C est *convexe* si pour tout $(A, B) \in C^2$, $[A, B] \subset C$.

Remarque 6. — Un s.e.v est convexe.
- — Une partie convexe est connexe par lignes brisées donc connexe. La même remarque vaut pour les parties étoilées définies plus bas.
- — Plus généralement, un convexe peut être défini dans un espace affine.

Définition 4. Une partie A de E est dite *étoilée* s'il existe $P \in A$ tel que $[P, M] \subset A$ pour tout $M \in A$ (on dit alors que A est étoilée par rapport à P). Un tel point P s'appelle un *centre de* A.

Enveloppe convexe.

Définition 5. Soit A une partie de E. Il existe une plus petite partie convexe de E contenant A. On l'appelle *enveloppe convexe* de A et on la note $\mathrm{Conv}(A)$. L'ensemble $\mathrm{Conv}(A)$ est aussi l'ensemble des barycentres des points de A affectés de coefficients positifs, *i. e.* $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des x tels que

$$\exists x_1, \dots, x_n \in A, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i.$$

5.5. Exercices

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-e.v.n et A, B deux parties de A. On note $A + B = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}$.
a) Si A est ouvert (et B quelconque), montrer que $A + B$ est ouvert.
b) Si A est compact et B fermé, montrer que $A + B$ est fermé. Ce résultat subsiste-t-il si A est seulement supposé fermé ?

Solution. **a)** On a $A + B = \cup_{b\in B}(A + \{b\})$. Pour tout $b \in B$, il est clair que $A + \{b\}$ est un ouvert de E (si $\mathrm{B}(x, \rho) \subset A$, $\mathrm{B}(x + b, \rho) \subset A + \{b\}$). Donc $A + B$, réunion d'ouverts, est un ouvert.

b) Soit $(z_n) = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A + B$, convergente dans E vers z, où (x_n) est une suite de A et (y_n) une suite de B. La compacité de A entraîne l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge dans A. Notons $x \in A$ sa limite. Comme $(z_{\varphi(n)})$ converge vers z, $(y_{\varphi(n)}) = (z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)})$ converge vers $z - x$. Comme B est fermé, $y = z - x \in B$. Ainsi, $z = x + y \in A + B$, d'où le résultat.

Si A est seulement supposé fermé, le résultat est faux. Par exemple, dans le plan, les ensembles $A = \{(x, e^x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$ sont fermés et pourtant $A + B = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ n'est pas fermé. On peut donner un autre contre exemple dans $\mathbb{R}$, en considérant les ensembles $\mathbb{Z}$ et $x\mathbb{Z}$ (avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Ces ensembles sont fermés, et $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir l'exercice 5 page 205). Si ce dernier était fermé, il serait égal à $\mathbb{R}$ tout entier, ce qui est impossible puisque $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ est dénombrable et que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Exercice 2. Soit K un compact convexe d'un e.v.n et $f: K \to K$ une application continue telle que
$$\forall (x,y) \in K^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$
Montrer que f admet au moins un point fixe.

Solution. Si f était k-contractante (avec $k < 1$), le résultat serait vrai (théorème du point fixe, page 21). Fixons $a \in K$. La convexité de K nous invite à poser, pour tout entier naturel non nul n
$$f_n: K \to K \quad x \mapsto \frac{1}{n} a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x).$$
L'application f_n est bien à valeurs dans K car K est convexe. D'autre part,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x,y) \in K^2, \qquad \|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|,$$
donc f_n est $(1 - 1/n)$-contractante. Comme K est compact, K est complet, et le théorème du point fixe nous assure l'existence de $x_n \in K$ tel que $f_n(x_n) = x_n$. La suite (x_n) prend ses valeurs dans le compact K, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, dont la limite x appartient à K. Grâce à l'inégalité
$$\|f(x) - f_n(x_n)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_n)\| \leq \frac{1}{n}(\|a\| + \|f(x)\|) + \|x - x_n\|$$
on voit que $(f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(x)$. En passant à la limite dans l'égalité $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$, on en déduit $f(x) = x$, d'où le résultat.

Remarque. Plus généralement, on peut montrer que toute application continue d'un convexe compact dans lui même admet au moins un point fixe (théorème de Brouwer).

Exercice 3. Montrer qu'un e.v.n E est complet si et seulement si toute série $\sum u_n$ absolument convergente (*i. e.* telle que $\sum \|u_n\|$ converge) est convergente.

Solution. Condition nécessaire. Si $\sum \|u_n\|$ converge, alors la suite (S_n) associée à la série $\sum u_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est de Cauchy car
$$\forall p < q, \qquad \|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\|.$$
Comme E est complet, (S_n) converge donc, c'est-à-dire $\sum u_n$ converge.
Condition suffisante. Soit (S_n) une suite de Cauchy de E. D'après le critère de Cauchy,

— $\exists \varphi(0) \in \mathbb{N}, \forall n \geq \varphi(0), \qquad \|S_n - S_{\varphi(0)}\| \leq 1$, de même

— $\exists \varphi(1) > \varphi(0), \forall n \geq \varphi(1), \qquad \|S_n - S_{\varphi(1)}\| \leq \frac{1}{2}$,

— on construit ainsi par récurrence $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ tel que $\forall n \geq \varphi(k), \quad \|S_n - S_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = S_{\varphi(k+1)} - S_{\varphi(k)}$. Par construction, $\|u_k\| \leq 2^{-k}$ donc $\sum u_k$ est absolument convergente, donc convergente. Or $\sum_{k=0}^n u_k = S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(0)}$, donc $(S_{\varphi(n)})$ converge. Une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge, d'où le résultat.

Exercice 4. **1/** Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre normée (*i. e.* une algèbre munie d'une norme $\|\,.\,\|$ vérifiant $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pour tout $(x,y) \in A^2$) unitaire et complète.
a) Si $x \in A$ et si $\|x\| < 1$, si 1 désigne l'élément unité de A, montrer que $1 - x$ est inversible dans A.
b) Montrer que l'ensemble des inversibles de A est un ouvert de A.
c) Soit $\varphi: A \to \mathbb{R}$ un morphisme d'algèbre. Montrer que φ est continue.

2/ Soit E un $\mathbb{R}$-espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$. On appelle *spectre* de u l'ensemble des réels λ tels que $u - \lambda\,\mathrm{Id} \notin \mathcal{G}\ell_c(E)$, où $\mathcal{G}\ell_c(E)$ désigne l'ensemble des $v \in \mathcal{L}_c(E)$ tels que v est inversible et v^{-1} est continu. Montrer que le spectre de u est compact.

Solution. **1/ a)** On ne fait que réécrire la démonstration de la proposition 2 dans le cas plus général d'une algèbre normée. La série $\sum x^n$ converge absolument car $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ et $\|x\| < 1$, et comme A est complet, elle converge. Notons y sa somme. Alors

$$(1-x)y = y - xy = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = 1,$$

de même $y(1-x) = 1$. Donc $(1-x)$ est inversible, son inverse est $y = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

b) Soit $x_0 \in A$ un élément inversible. Si $h \in A$, $\|h\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$, on a $\|x_0^{-1}h\| \leq \|x_0^{-1}\| \cdot \|h\| < 1$. D'après la question précédente, $1 + x_0^{-1}h = 1 - (-x_0^{-1}h)$ est inversible. On en déduit que $x_0 + h = x_0(1 + x_0^{-1}h)$ est inversible (son inverse est $(1 + x_0^{-1}h)^{-1}x_0^{-1}$). La boule de centre x_0 de rayon $1/\|x_0^{-1}\|$ est donc incluse dans l'ensemble des inversibles, d'où le résultat.

c) Si φ est nulle, c'est terminé. Sinon, il existe $x \in A$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. On a alors $\varphi(x) = \varphi(1 \cdot x) = \varphi(1)\varphi(x)$, donc $\varphi(1) = 1$. Montrons maintenant que si $\|x\| = 1$, alors $|\varphi(x)| \leq 1$, ce qui montrera la continuité de φ (un morphisme d'algèbre est linéaire). Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence de $x \in A$, $\|x\| = 1$, tel que $\lambda = \varphi(x)$ vérifie $|\lambda| > 1$. Alors $\|\frac{1}{\lambda}x\| < 1$, donc $1 - \frac{1}{\lambda}x$ est inversible, donc $\lambda \cdot 1 - x$ est inversible. Désignons par y son inverse. On a

$$\varphi\Big((\lambda \cdot 1 - x)\,y\Big) = \varphi(1) = 1 = \varphi(\lambda \cdot 1 - x)\,\varphi(y),$$

ce qui est absurde car $\varphi(\lambda \cdot 1 - x) = \lambda\varphi(1) - \varphi(x) = 0$.

2/ Si $A = \mathcal{L}_c(E)$, A est une algèbre normée complète. D'après 1/b), l'ensemble $\mathcal{G}\ell_c(E)$ des inversibles de A est un ouvert, et l'application $\varphi :\ \lambda \mapsto u - \lambda\,\mathrm{Id}$ étant continue, on en déduit que le spectre S de u est fermé car $S = \varphi^{-1}(A \smallsetminus \mathcal{G}\ell_c(E))$.

Le spectre S est également borné. En effet, $S \subset [-|\!|\!|u|\!|\!|, |\!|\!|u|\!|\!|]$ car si $\lambda > |\!|\!|u|\!|\!|$, on a $|\!|\!|\frac{1}{\lambda}u|\!|\!| < 1$ donc $\mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda}u$ est dans $\mathcal{G}\ell_c(E)$, donc $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est dans $\mathcal{G}\ell_c(E)$.

Finalement, S, fermé borné de $\mathbb{R}$, est compact.

Remarque. - Si E est un espace de Banach et si $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est inversible, alors u^{-1} est forcément continu. Ce résultat est appelé théorème de Banach, il est démontré à l'annexe A, exercice 6 page 423.

– La notion de spectre de $u \in \mathcal{L}_c(E)$ généralise celle des valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie.

Exercice 5. On note ℓ^1 le $\mathbb{R}$-e.v des suites réelles (u_n) telles que $\sum |u_n|$ converge, muni de la norme $\|(u_n)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. On note ℓ^∞ le $\mathbb{R}$-e.v des suites réelles (u_n) bornées, muni de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup_n |u_n|$.

Montrer que le dual topologique $(\ell^1)'$ de ℓ^1 (*i. e.* l'e.v des formes linéaires continues sur ℓ^1) s'identifie à ℓ^∞ à une isométrie bijective près.

Solution. Pour toute suite $k = (k_n)$ de ℓ^∞, on définit l'application

$$\Phi_k :\ \ell^1 \to \mathbb{R} \quad (u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n$$

(la série $\sum k_n u_n$ converge absolument car (k_n) est bornée et $\sum u_n$ converge absolument). Il est clair que Φ_k est une forme linéaire de ℓ^1. Elle est même continue car

$$|\Phi_k[(u_n)]| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |k_n|\,|u_n| \leq \|(k_n)\|_\infty \cdot \|(u_n)\|_1,$$

et de plus cette inégalité montre que $|\!|\!|\Phi_k|\!|\!| \leq \|k\|_\infty$.

On a même $|\!|\!|\Phi_k|\!|\!| = \|k\|_\infty$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, désignons par e_n la suite dont tous les éléments sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1. On a $|\Phi_k(e_n)| = |k_n|$ et $\|e_n\|_1 = 1$, donc $|\!|\!|\Phi_k|\!|\!| \geq |k_n|$ pour tout entier naturel n, d'où on tire $|\!|\!|\Phi_k|\!|\!| \geq \|k\|_\infty$, et donc $|\!|\!|\Phi_k|\!|\!| = \|k\|_\infty$.

L'application linéaire $\Phi:\ \ell^\infty \to (\ell^1)' \quad k = (k_n) \mapsto \Phi_k$ est donc une isométrie, en particulier injective.

Il nous reste à montrer que Φ est surjective. Soit $\varphi \in (\ell^1)'$. Comme φ est continue,

$$\exists M > 0, \forall (u_n) \in \ell^1, \qquad |\varphi[(u_n)]| \leq M \cdot \|(u_n)\|_1.$$

La suite $k = (k_n)$ définie par $k_n = \varphi(e_n)$ est donc une suite de ℓ^∞ et

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \varphi\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\, e_n\right) = \sum_{n=0}^{N} u_n\, \varphi(e_n) = \sum_{n=0}^{N} k_n u_n = \Phi_k\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\, e_n\right).$$

Or la suite $(\sum_{n=0}^{N} u_n\, e_n)_{N\in\mathbb{N}}$ de ℓ^1 converge vers (u_n) dans ℓ^1, et φ et Φ_k étant continues, on en déduit $\varphi[(u_n)] = \Phi_k[(u_n)]$. Ceci est vrai pour tout $(u_n) \in \ell^1$, donc $\varphi = \Phi_k$, d'où le résultat.

Exercice 6 (Convexes, théorème de Carathéodory et application). **1/** Soit E un e.v.n et C un convexe de E. Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.

2/a) (Théorème de Carathéodory.) Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $x \in E$ le barycentre de p vecteurs $x_1, \ldots, x_p \in E$ affectés de coefficients positifs (*i. e.* $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+, \sum_i \lambda_i = 1$ avec $x = \sum_i \lambda_i\, x_i$). Montrer qu'il existe $I \subset \{1, \ldots, p\}$ tel que $\operatorname{Card} I \leq n+1$ et tel que x soit barycentre des $(x_i)_{i\in I}$ affectés de coefficients positifs.

b) (Application.) Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie et A une partie compacte de E. Montrer que $\operatorname{Conv}(A)$, l'enveloppe convexe de A, est compacte.

Solution. **1/** L'adhérence $\overline{C}$ de C est convexe. En effet. Donnons nous deux points x et y de $\overline{C}$ et un réel $\lambda \in [0,1]$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de C qui convergent respectivement vers x et y. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda\, x_n + (1-\lambda) y_n \in C$, et en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, on en déduit que $\lambda\, x + (1-\lambda) y$, limite de points de C, appartient à $\overline{C}$.

Montrons que l'intérieur $\overset{\circ}{C}$ de C est convexe. Soient x et $y \in \overset{\circ}{C}$. Il existe $\rho > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,\rho) \subset C$ et $\mathrm{B}(y,\rho) \subset C$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| < \rho$, on a $[\lambda\, x + (1-\lambda) y] + h = \lambda\,(x+h) + (1-\lambda)(y+h) \in C$, donc $\mathrm{B}(\lambda\, x + (1-\lambda) y, \rho) \subset C$. Ceci prouve que $\lambda\, x + (1-\lambda) y \in \overset{\circ}{C}$, d'où le résultat.

2/ a) Soit Γ l'ensemble des parties J de $\{1, \ldots, p\}$ telles que x est barycentre des $(x_i)_{i\in J}$ affectés de coefficients positifs. Notons $q = \inf\{\operatorname{Card} J,\ J \in \Gamma\}$. Il s'agit de montrer $q \leq n+1$.

Supposons $q \geq n+2$. Par construction de q, il existe une partie J de $\{1, \ldots, p\}$ de cardinal q telle que x soit barycentre des $(x_i)_{i\in J}$ affectés de coefficients positifs :

$$x = \sum_{i\in J} \lambda_i\, x_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i\in J} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in J, \lambda_i \geq 0.$$

Comme E est de dimension n, les $q \geq n+2$ éléments $(x_i)_{i\in J}$ sont affinements liés, c'est-à-dire qu'il existe une famille $(\mu_i)_{i\in J}$ d'éléments non tous nuls tels que

$$\sum_{i\in J} \mu_i\, x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i\in J} \mu_i = 0$$

(si $i_0 \in J$, écrire par exemple que les $q-1 \geq n+1$ vecteurs $(x_i - x_{i_0})_{i\in J\setminus\{i_0\}}$ sont liés). Soit $\alpha = \inf_{\mu_i>0} \lambda_i/\mu_i$, de sorte que $\lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$ pour tout $i \in J$ (remarquons qu'il existe bien $i \in J$ tel que $\mu_i > 0$ car les μ_i sont non tous nuls et leur somme est nulle). On a

$$x = \sum_{i\in J}(\lambda_i - \alpha\mu_i)x_i, \quad \text{avec} \quad \forall i \in J, \lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i\in J}(\lambda_i - \alpha\mu_i) = \sum_{i\in J}\lambda_i = 1,$$

et par définition de α, il existe $i_0 \in J$ tel que $\lambda_{i_0} - \alpha\mu_{i_0} = 0$. Ainsi, x est barycentre des points $(x_i)_{i\in J\setminus\{i_0\}}$ affectés de coefficients positifs. Ceci est absurde par définition de q, d'où le résultat.

b) Notons $\Delta = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1 \text{ et } \forall i, \lambda_i \geq 0\}$. Cet ensemble, fermé du compact $[0,1]^{n+1}$ est compact. On considère l'application

$$\varphi: \ \Delta \times A^{n+1} \to E \quad ((\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}), x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\, x_i.$$

Comme $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres des points de A affectés de coefficients positifs, on a d'après le théorème de Carathéodory $\mathrm{Conv}(A) = \varphi(\Delta \times A^{n+1})$. Or $\Delta \times A^{n+1}$ est compact (produit de compacts) et φ est continue, donc $\mathrm{Conv}(A)$ est compact.

EXERCICE 7. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n et $\varphi: \ E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

1/ Montrer que φ est continue si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi$ est un fermé de E.

2/ a) Soit F un s.e.v de E. Montrer que l'application

$$N: \ E/F \to \mathbb{R} \quad \dot{x} \mapsto \inf_{y\in\dot{x}} \|y\|$$

est une semi-norme sur l'espace quotient E/F. Que dire si F est fermé ?

b) En utilisant la question précédente, retrouver le résultat de la question 1/.

Solution. **1/** Si φ est continue, $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'image réciproque par φ du fermé $\{0\}$ donc fermé.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker}\varphi$ fermé. Si φ n'est pas continue, φ n'est pas bornée sur la sphère unité. Il existe donc une suite (x_n) de E telle que

$$\text{(i)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \|x_n\| = 1 \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| = +\infty.$$

Fixons $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 1$. Pour tout n, posons $u_n = u - \dfrac{x_n}{\varphi(x_n)}$. On a $\varphi(u_n) = \varphi(u) - \dfrac{1}{\varphi(x_n)}\varphi(x_n) = 0$, donc $u_n \in \operatorname{Ker}\varphi$. D'après (i) et (ii), (u_n) converge vers u, et $\operatorname{Ker}\varphi$ étant fermé, $u \in \operatorname{Ker}\varphi$. Ceci est absurde car $\varphi(u) = 1$. Ainsi, φ est continue.

2/ a) Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons que la classe $\dot{x}$ de x est $\dot{x} = x + F$. De l'égalité $\dot{\overbrace{\lambda x}} = \lambda\,\dot{x}$, on tire $N(\lambda\,\dot{x}) = |\lambda| N(\dot{x})$.

Il nous reste à montrer que N vérifie l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in E$. On a

$$\forall u, v \in F, \qquad N(\dot{\overbrace{x+y}}) \leq \|(x+y) + (u+v)\| \leq \|x+u\| + \|y+v\|,$$

ce qui en passant aux inf à droite donne $N(\dot{\overbrace{x+y}}) \leq N(\dot{x}) + N(\dot{y})$.

Ainsi, N est une semi-norme. Comme $\dot{x} = x + F$ pour tout x, $N(\dot{x}) = \inf_{y\in F}\|x - y\|$ est la distance de x à F. Si F est fermé, on a donc $N(\dot{x}) = 0$ si et seulement si $x \in F$, c'est-à-dire $\dot{x} = 0$. Finalement, si F est fermé, N est une norme sur $E\setminus F$.

b) Soit $\varphi: \ E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé. Si φ est nulle, il est clair que φ est continue. Sinon $\varphi(E) = \mathbb{R}$. Considérons la factorisation canonique de φ suivante

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "s"'] & \mathbb{R} \\ E/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

On a $\varphi = \psi \circ s$ où s est la surjection canonique de E sur $E/\operatorname{Ker}\varphi$ et $\psi : \ E/\operatorname{Ker}\varphi \to \mathbb{R}$ est linéaire.

— L'application ψ est continue (c'est une application linéaire sur des espaces de dimension finie).

— La surjection s de $(E, \|\,.\,\|)$ dans $(E/\operatorname{Ker}\varphi, N)$ est continue (où N est la norme définie plus haut avec $F = \operatorname{Ker}\varphi$, fermé), car $N(\dot{x} - \dot{y}) = N(\overset{\cdot}{\overbrace{x - y}}) \leq \|x - y\|$.

On en déduit que $\varphi = \psi \circ s$ est continue.

Remarque. La méthode utilisée au 2/ b) se généralise aisément pour montrer qu'une application linéaire *de rang fini* est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 8. Démontrer qu'un espace vectoriel normé E qui admet une base dénombrable n'est jamais complet.

Solution. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E. Quitte à normaliser les e_n, on peut supposer $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons construire une série $\sum \lambda_n\, e_n$ absolument convergente à partir d'une suite (λ_n) particulière, et nous allons prouver que $\sum \lambda_n\, e_n$ ne converge pas (intuitivement, si une telle série convergeait, sa somme serait combinaison linéaire *infinie* de (e_n), ce qui est impossible dans un espace vectoriel par définition d'une base).

Notons $F_0 = \{0\}$ et $F_n = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. A partir de $\lambda_1 = 1/3$, on définit (λ_n) par

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(\lambda_n\, e_n, F_{n-1}) = \frac{1}{3} \inf_{x\in F_{n-1}} \|\lambda_n\, e_n - x\|.$$

Comme F_n est fermé (s.e.v de dimension finie), on sait que $\mathrm{d}(x, F_n) = 0$ si et seulement si $x \in F_n$. Par récurrence, on en déduit $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin, l'inégalité

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(\lambda_n\, e_n, F_{n-1}) \leq \frac{1}{3}\|\lambda_n\, e_n\| = \frac{\lambda_n}{3},$$

assure la majoration $\lambda_n \leq 1/3^n$ pour tout n.

La série $\sum \lambda_n\, e_n$ converge donc absolument. Si E est supposé complet, elle converge donc. Notons x sa limite. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de E, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in F_n$. Ainsi, $y = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k\, e_k = x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, e_k \in F_n$, donc

$$3\lambda_{n+2} = \mathrm{d}(\lambda_{n+1}\, e_{n+1}, F_n) \leq \|\lambda_{n+1}\, e_{n+1} - y\| \leq \sum_{k=n+2}^{\infty} \lambda_k \leq \lambda_{n+2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}\lambda_{n+2},$$

ce qui est absurde car $\lambda_{n+2} \neq 0$. L'espace métrique E n'est donc pas complet.

Remarque. Ce résultat est aussi une conséquence immédiate du théorème de Baire (voir l'annexe A, exercice 1).

Exercice 9 (Théorème de Riesz). Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension infinie. Montrer que la boule unité fermée de E ne peut pas être incluse dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon 1. Qu'en conclure ?

Solution. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $\mathrm{B_f}(0, 1) \subset \cup_{1\leq i\leq n} \mathrm{B}(x_i, 1)$. Notons $F = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Comme E est de dimension infinie, il existe $x \in E$ tel que $x \notin F$. Comme F est un s.e.v de dimension finie, il existe $y \in F$ tel que $\|x-y\| = \mathrm{d}(x,F)$ (voir l'exercice 3 page 33). Soit $x_0 = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. On a $\mathrm{d}(x_0,F) \leq \|x_0\| = 1$ et

$$\forall z \in F, \qquad \|x_0 - z\| = \frac{1}{\|x-y\|}\Big\|x - (y + \|x-y\|\, z)\Big\| \geq \frac{\mathrm{d}(x,F)}{\|x-y\|} = 1,$$

donc $\mathrm{d}(x_0,F) = 1$.

Or $x_0 \in \mathrm{B_f}(0,1)$, donc il existe i tel que $x_0 \in \mathrm{B}(x_i,1)$, de sorte que $\mathrm{d}(x_0,x_i) < 1$, ce qui est absurde car $1 = \mathrm{d}(x_0,F) \leq \mathrm{d}(x_0,x_i)$.

Finalement, nous avons démontré que $\mathrm{B_f}(0,1)$ n'est pas précompact, en particulier non compact.

6. Problèmes

Problème 1. Soient E et F deux espaces métriques, K un espace métrique compact. Soit $f :\ E \times K \to F \quad (\lambda,x) \mapsto f(\lambda,x)$ une application continue. Pour tout $y \in F$, on note $E_y = \{\lambda \in E \mid \exists x \in K, f(\lambda,x) = y\}$.

a) Montrer que E_y est un fermé de E.

b) Fixons $y \in E$. On suppose que

$$\forall \lambda \in E_y, \exists! x \in K, \qquad f(\lambda,x) = y,$$

et on note $x = \varphi(\lambda)$. Montrer que l'application $\varphi :\ E_y \to K$ ainsi définie est continue.

Solution. **a)** L'ensemble $F_y = f^{-1}(\{y\})$ est fermé par continuité de f, et on remarque que $E_y = \{\lambda \in E \mid \exists x \in K, (\lambda,x) \in F_y\}$. Considérons une suite (λ_n) de E_y qui converge vers $\lambda \in E$. Il s'agit de montrer que $\lambda \in E_y$. Pour tout n, il existe $x_n \in K$ tel que $(\lambda_n,x_n) \in F_y$. Comme K est compact, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un point $x \in K$. La suite $(\lambda_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)})$ converge vers (λ,x) et comme F_y est fermé on en déduit $(\lambda,x) \in F_y$, donc $\lambda \in E_y$.

b) Soit (λ_n) une suite de E_y qui tend vers $\lambda \in E_y$. Il s'agit de montrer que la suite $(\varphi(\lambda_n))$ converge vers $\varphi(\lambda)$.

Notons $x_n = \varphi(\lambda_n)$, et considérons une valeur d'adhérence $a \in K$ de (x_n), limite d'une sous-suite $(x_{\psi(n)})$ de (x_n). Par continuité de f, $f(\lambda,a) = \lim_{n\to\infty} f(\lambda_{\psi(n)}, x_{\psi(n)}) = y$ donc $a = \varphi(\lambda)$. Ceci prouve que la seule valeur d'adhérence de (x_n) est $\varphi(\lambda)$. Comme (x_n) prend ses valeurs dans un compact, on en déduit que (x_n) converge vers $\varphi(\lambda)$ (voir la proposition 9 page 30), c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \varphi(\lambda_n) = \varphi(\lambda)$.

Problème 2. Soit (E,d) un espace métrique et $f :\ E \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe un compact K de E tel que la restriction de f à K, $f_{|K}$, soit injective et tel que

$$\forall x \in K, \exists \varepsilon > 0, \qquad f_{|\mathrm{B}(x,\varepsilon)} \quad \text{est injective.}$$

Montrer qu'il existe un ouvert Ω contenant K tel que $f_{|\Omega}$ est injective.

Solution. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un tel ouvert n'existe pas. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$O_n = \left\{x \in E \mid \mathrm{d}(x,K) < \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{x \in K} \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

est un ouvert contenant K, donc

$$\exists (x_n,y_n) \in O_n^2, \qquad (x_n \neq y_n \quad \text{et} \quad f(x_n) = f(y_n)).$$

Pour tout n, $x_n \in O_n$ donc il existe $x'_n \in K$ tel que $\mathrm{d}(x_n, x'_n) < 1/n$. De même, il existe pour tout n un point y'_n de K tel que $\mathrm{d}(y_n, y'_n) < 1/n$.

La suite $[(x'_n, y'_n)]_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend ses valeurs dans le compact K^2. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $[(x'_{\varphi(n)}, y'_{\varphi(n)})]$ dont nous noterons $(x, y) \in K^2$ la limite. Les inégalités

$$\mathrm{d}(x_n, x) \le \mathrm{d}(x_n, x'_n) + \mathrm{d}(x'_n, x) < \frac{1}{n} + \mathrm{d}(x'_n, x) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(y_n, y) < \frac{1}{n} + \mathrm{d}(y'_n, y)$$

montrent que les suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ tendent respectivement vers x et y. Comme f est continue et que pour tout n, $f(x_{\varphi(n)}) = f(y_{\varphi(n)})$, on a $f(x) = f(y)$ et comme $f_{|K}$ est injective, $x = y$. De plus, il existe par hypothèse un $\varepsilon > 0$ tel que $f_{|\mathrm{B}(x,\varepsilon)}$ soit injective. Ceci est contradictoire car il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{\varphi(N)}$ et $y_{\varphi(N)}$ appartiennent à $\mathrm{B}(x, \varepsilon)$, et de plus $f(x_{\varphi(N)}) = f(y_{\varphi(N)})$ avec $x_{\varphi(N)} \neq y_{\varphi(n)}$ par construction.

Il existe donc un ouvert Ω contenant K tel que $f_{|\Omega}$ soit injective.

Problème 3. Soit (E, d) un espace métrique.
a) On suppose que toute application continue de E dans E admet un point fixe. Montrer que E est connexe.
b) On suppose E connexe et compact. Peut-on affirmer que toute application continue de E dans E admet un point fixe ?

Solution. **a)** Raisonnons par l'absurde en supposant E non connexe. On peut trouver deux ouverts disjoints non vides A et B tels que $E = A \cup B$. Fixons $a \in A$ et $b \in B$. Définissons $f : E \to E$ par

$$f(x) = b \quad \text{si} \quad x \in A, \qquad f(x) = a \quad \text{si} \quad x \in B.$$

L'application f est continue puisque l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert (si $X \subset E$, $f^{-1}(X)$ est égal soit à $\varnothing$, E, A ou B), sans point fixe par construction. Ceci est contraire aux hypothèses, donc E est nécessairement connexe.

b) Non ! Par exemple, la partie du plan $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est compacte, connexe (car connexe par arcs), et l'application $f : E \to E \quad x \mapsto -x$ est continue et sans point fixe.

Problème 4. Soit K un fermé de $[0, 1]^2$. On suppose que

$$\forall x \in [0, 1], \quad K_x = \{y \in [0, 1] \mid (x, y) \in K\} \quad \text{est un intervalle non vide.}$$

a) Montrer que K est connexe.
b) Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $x \in K_x$.

Solution. **a)** En vertu de la proposition 3 de la page 39, il suffit de montrer que toute application continue de K dans $\{0, 1\}$ est constante. Soit f une telle application.

Pour tout $x \in [0, 1]$, l'application $f(x, \cdot) : K_x \to \{0, 1\} \quad y \mapsto f(x, y)$ est continue, et K_x étant connexe (c'est un intervalle), on en déduit que $f(x, \cdot)$ est constante. Notons $g(x)$ cette constante. Si on montre que l'application ainsi définie $g : [0, 1] \to \{0, 1\}$ est constante, on aura prouvé que f est constante.

Comme $[0, 1]$ est connexe, il suffit de prouver que g est localement constante pour montrer qu'elle est constante. Supposons que ce ne soit pas le cas, de sorte qu'il existe $x \in [0, 1]$ et une suite (x_n) de $[0, 1]$ qui tend vers x telle que $g(x_n) \neq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons par exemple $g(x) = 0$ et $g(x_n) = 1$ pour tout n. Pour tout n, K_{x_n} est non vide donc il existe $y_n \in K_{x_n}$. L'ensemble K, fermé du compact $[0, 1]^2$ est compact. On peut donc extraire de la suite $[(x_n, y_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ de K une sous-suite convergente $[(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})]$. On a $x = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$, et notons y la limite de $(y_{\varphi(n)})$. Comme f est continue sur K,

$$g(x) = f(x, y) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} g(x_{\varphi(n)}).$$

Ceci est impossible puisque $g(x) = 0$ et $g(x_{\varphi(n)}) = 1$ pour tout n.

L'application est donc localement constante sur $[0,1]$, donc continue sur $[0,1]$. Comme $[0,1]$ est connexe, g est constante, donc f est constante et le résultat est prouvé.

b) Soit $\varphi : \ K \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto x - y$. Comme K est connexe et que φ est continue, $\varphi(K)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. L'ensemble K_0 est non vide, il existe donc $y \in [0,1]$ tel que $(0,y) \in K$, donc $\varphi(0,y) = -y \leq 0$. De même, il existe $y \in [0,1]$ tel que $(1,y) \in K$, donc $\varphi(1,y) = y \geq 0$. Comme $\varphi(K)$ est un intervalle, on en déduit l'existence de $(x,y) \in K$ tel que $\varphi(x,y) = 0$, c'est-à-dire $x = y$, ou encore $x \in K_x$.

PROBLÈME 5. Soit $f : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Un point x_0 de $\mathbb{R}^n$ étant donné, on définit la suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose que (x_n) admet une et une seule valeur d'adhérence. Montrer que la suite (x_n) converge.

Solution. Il suffit de montrer que la suite (x_n) est bornée, car elle prendra alors ses valeurs dans un compact (les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés) et on conclura grâce à la proposition 9 de la page 30.

Raisonnons par l'absurde et supposons (x_n) non bornée. Notons a l'unique valeur d'adhérence de (x_n), et notons K le compact $\mathrm{B_f}(a,1)$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Comme a est valeur d'adhérence de (x_n), il existe $n_0 \geq N$ tel que $x_{n_0} \in K$. De plus, (x_n) n'est pas bornée donc il existe $n > n_0$ tel que $x_n \notin K$. Ceci prouve qu'il existe un entier $m \geq n_0$ tel que $x_m \in K$ et $x_{m+1} \notin K$. On a aussi $x_{m+1} = f(x_m) \in f(K)$, donc $x_{m+1} \in f(K) \smallsetminus K$. En résumé, nous venons de montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists m \geq N, \qquad x_m \in f(K) \smallsetminus K.$$

Ceci montre qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) prenant ses valeurs dans $f(K) \smallsetminus K$, en particulier dans $f(K)$. L'ensemble $f(K)$ est compact (image d'un compact par une application continue), on peut donc extraire de $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ qui converge. Notons b sa limite. Pour tout n, $x_{\varphi(n)} \notin K$ donc $\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, a) \geq 1$, on a donc $\mathrm{d}(b,a) \geq 1$. Ceci est contraire aux hypothèses car b est une valeur d'adhérence de (x_n) différente de a. La suite (x_n) converge donc vers a.

PROBLÈME 6. Soit G un groupe. On suppose que G est muni d'une distance, et que l'application $\varphi : \ G \times G \to G \quad (x,y) \mapsto xy^{-1}$ est continue (on parle de groupe topologique).
a) On désigne par e l'élément neutre de G et par C la composante connexe de G contenant $\{e\}$. Montrer que C est un sous-groupe de G.
b) On suppose G connexe. Soit H un sous-groupe ouvert de G. Montrer que $H = G$.

Solution. **a)** En vertu d'un résultat classique d'algèbre, il suffit de montrer que $\varphi(C \times C)$ est inclus dans C. Comme C est connexe, $C \times C$ est connexe. De plus, φ est continue, donc $\varphi(C \times C)$ est connexe. Or $e \in \varphi(C \times C)$ (par exemple $e = \varphi(e,e)$). L'ensemble $\varphi(C \times C)$ est donc un connexe contenant e. Par définition de C, on a donc $\varphi(C \times C) \subset C$, d'où le résultat.

b) Considérons la relation d'équivalence $x \,\mathcal{R}\, y \iff xy^{-1} \in H$. Les classes d'équivalence sont de la forme Hx avec $x \in G$. Pour $y \in G$, l'application $\psi : \ G \to G \quad x \mapsto xy^{-1}$ étant continue, $Hy = \psi^{-1}(H)$ est ouvert. Ainsi, $G \smallsetminus H = \cup_{y \notin H} Hy$, réunion d'ouverts est ouvert, et donc H est fermé. Ainsi, H est ouvert et fermé dans le connexe G, donc $H = G$.

PROBLÈME 7 (POINTS FIXES DE FONCTIONS RÉELLES À VARIABLE RÉELLE).
a) Soit $f : \ [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. Montrer que f a au moins un point fixe.

b) Montrer qu'une application continue $f:\ [0,1]\to[0,1]$ a au moins un point fixe.
c) Soit f et $g:\ [0,1]\to[0,1]$ deux applications continues, telles que $f\circ g=g\circ f$. Montrer qu'il existe $a\in[0,1]$ tel que $f(a)=g(a)$.
d) Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue telle que $f\circ f$ admette un point fixe. Montrer que f admet un point fixe. Généraliser.

Solution. **a)** Soit $A=\{x\in[0,1],x\leq f(x)\}$. L'ensemble A est non vide car $0\in A$. Soit $a=\sup A$. Pour tout $x\in A$ on a $x\leq f(x)\leq f(a)$ car f est croissante, donc $f(a)$ est un majorant de A donc $a\leq f(a)$. Comme f est croissante, ceci entraîne $f(a)\leq f(f(a))$ donc $f(a)\in A$ par définition de A, donc $f(a)\leq a$ par définition de a. Donc $f(a)=a$.

b) Il suffit de considérer l'application $g\ :x\mapsto f(x)-x$. On a $g(0)=f(0)\geq 0$ et $g(1)=f(1)-1\leq 0$, donc g change de signe, et comme g est continue elle s'annule au moins en un point a. On a alors $f(a)=a$.
c) L'ensemble E des points fixes de f est non vide d'après la question précédente. Si $x\in E$ alors $f(g(x))=g(f(x))=g(x)$ donc $g(x)\in E$. Autrement dit, $g(E)\subset E$. Donc si $m=\inf E$ et $M=\sup E$, on a $g(m)\geq m=f(m)$ et $g(M)\leq M=f(M)$, donc la fonction continue $g-f$ change de signe sur $[0,1]$ donc elle s'annule en un moins un point a, qui vérifie $f(a)=g(a)$.
d) Si f n'admet pas de point fixe, alors la fonction continue $x\mapsto f(x)-x$ ne s'annule jamais, elle garde donc un signe constant, par exemple $f(x)-x>0$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout réel x on a $f(x)>x$ donc $f(f(x))>f(x)>x$, ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse de point fixe de $f\circ f$. On généralise aisément : si la composée n fois de f avec elle même admet un point fixe, alors f admet un point fixe.

PROBLÈME 8. Soit $f:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue vérifiant $f(0)=f(1)$.
a) Montrer qu'il existe $x\in[0,1/2]$ tel que $f(x)=f(x+1/2)$.
b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, montrer qu'il existe $x\in[0,1-1/n]$ tel que $f(x)=f(x+1/n)$.
c) Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\forall\beta\in]0,\alpha],\exists x\in[0,1-\alpha],f(x)=f(x+\beta)$.
d) Montrer qu'il existe une fonction continue $f:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f(1)$ et vérifiant $f(x)\neq f(x+2/5)$ pour tout $x\in[0,3/5]$.

Solution. **a)** Il suffit de considérer l'application $g:\ [0,1/2]\to\mathbb{R}\quad x\mapsto f(x)-f(x+1/2)$. On a $g(0)=-g(1/2)$ donc g change de signe, et comme elle est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence de $x\in[0,1/2]$ tel que $g(x)=0$, ce qui entraîne $f(x)=f(x+1/2)$.

b) Raisonnons par l'absurde et supposons $f(x)\neq f(x+1/n)$ pour tout $x\in[0,1-1/n]$. Ceci signifie que l'application continue $g(x)=f(x)-f(x+1/n)$ ne s'annule jamais, donc g garde un signe constant non nul, par exemple $g>0$. On en déduit $f(x)>f(x+1/n)$ pour tout $x\in[0,1-1/n]$ donc $f(0)>f(1/n)>f(2/n)>\cdots>f(n/n)=f(1)$, ce qui est absurde.

c) Si f est constante, le résultat est évident, sinon l'intuition nous suggère de nous placer autour d'un extremum de f. Comme f n'est pas constante, il existe x tel que $f(x)\neq f(0)$, par exemple $f(x)>f(0)$. Comme f est continue sur le compact $[0,1]$ elle atteint son maximum donc il existe $c\in]0,1[$ tel que $f(c)=\max_{t\in[0,1]}f(t)$. Choisissons $\alpha=\min(c,1-c)$. Considérons $\beta\in]0,\alpha]$ et construisons la fonction $g(x)=f(x)-f(x+\beta)$, définie sur $[0,1-\beta]$. Si $\alpha=c$, on a $g(\alpha-\beta)=f(c-\beta)-f(c)\leq 0$ et $g(\alpha)=f(c)-f(c+\beta)\geq 0$, donc g change de signe et comme elle est continue, elle s'annule au moins en un point, ce qui entraîne bien l'existence de $x\in[0,1-\beta]$ tel que $f(x)=f(x+\beta)$. Le raisonnement est similaire si $\alpha=1-c$ à partir des inégalités $g(1-\alpha-\beta)=f(c-\beta)-f(c)\leq 0$ et $g(1-\alpha)=f(c)-f(c+\beta)\geq 0$.

d). Soit f une telle fonction. La fonction continue $f(x)-f(x+2/5)$ ne s'annule pas donc garde un signe constant non nul, par exemple positif. Donc on a toujours $f(x)>f(x+2/5)$. La fonction f doit donc nécessairement vérifier $f(0)>f(2/5)>f(4/5)$ et $f(1/5)>f(3/5)>f(1)$.
Ceci suggère de construire f telle que $f(0)=0$, $f(2/5)=-1$, $f(4/5)=-2$ et $f(1/5)=2$,

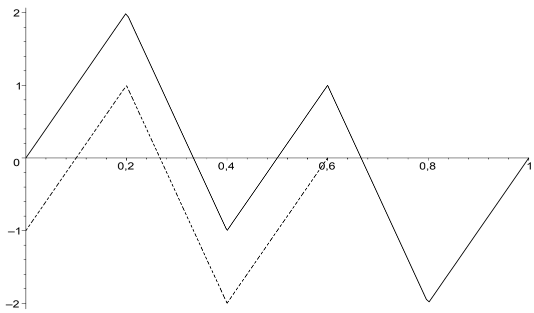


FIGURE 3. Le graphe de l'application f telle que $f(x+2/5) \neq f(x)$, et en pointillé, le graphe de l'application $x \mapsto f(x+2/5)$

$f(3/5) = 1$ et $f(1) = 0$, puis on interpole linéairement f sur chaque intervalle $[i/5, (i+1)/5]$. Ainsi construite, on vérifie facilement que $f(x) > f(x+2/5)$ pour tout $x \in [0, 3/5]$ (voir la figure ci-contre).

PROBLÈME 9 (DISTANCE DE HAUSDORFF). Soit (E, d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées bornées non vides de E. Pour $A, B \in \mathcal{F}$, on pose

$$\lambda(A,B) = \sup_{x\in A} \mathrm{d}(x,B) \quad \text{et} \quad \Delta(A,B) = \sup\{\lambda(A,B), \lambda(B,A)\}.$$

a) Montrer que Δ est une distance sur $\mathcal{F}$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ qui contiennent au moins n éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathcal{F}_n$ est un ouvert de $\mathcal{F}$.
c) On suppose E compact. Montrer qu'une suite de Cauchy $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathcal{F}, \Delta)$ telle que $Y_{n+1} \subset Y_n$ pour tout n converge vers $Y = \cap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. En déduire que $(\mathcal{F}, \Delta)$ est complet.
d) Si E est compact, montrer que $\mathcal{F}$ est compact (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2 de la page 32).

Solution. **a)** Il est clair que Δ est symétrique.

Si $\lambda(A,B) = 0$ avec $A, B \in \mathcal{F}$, alors pour tout $x \in A$, $\mathrm{d}(x,B) = 0$ et B étant fermé, $x \in B$. On en déduit $A \subset B$. Maintenant, si $\Delta(A,B) = 0$, alors $\lambda(A,B) = \lambda(B,A) = 0$ donc $A \subset B$ et $B \subset A$ donc $A = B$. Réciproquement si $A = B$ on a bien sûr $\Delta(A,B) = 0$.

Il nous reste à montrer que Δ vérifie l'inégalité triangulaire. Donnons nous A, B et $C \in \mathcal{F}$.

— On a $\forall (x,y,z) \in A \times B \times C, \qquad \mathrm{d}(x,C) \leq \mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.
— En ne retenant que le premier et le dernier terme dans les inégalités précédentes, on obtient, en passant à la borne inférieure sur les $z \in C$ $\mathrm{d}(x,C) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,C)$.
— Comme $\mathrm{d}(y,C) \leq \lambda(B,C)$, on a $\mathrm{d}(x,C) \leq \mathrm{d}(x,y) + \lambda(B,C)$.
— En prenant la borne inférieure sur les $y \in B$, on obtient $\mathrm{d}(x,C) \leq \mathrm{d}(x,B) + \lambda(B,C)$.
— Comme $\mathrm{d}(x,B) \leq \lambda(A,B)$, $\mathrm{d}(x,C) \leq \lambda(A,B) + \lambda(B,C)$.
— Il ne reste plus qu'à prendre la borne supérieure sur les $x \in A$, ce qui donne $\lambda(A,C) \leq \lambda(A,B) + \lambda(B,C)$.
— On a de même $\lambda(C,A) \leq \lambda(C,B) + \lambda(B,A)$.
— Ceci suffit pour conclure $\Delta(A,C) \leq \Delta(A,B) + \Delta(B,C)$.

b) Soit $F \in \mathcal{F}_n$. Il existe n éléments distincts $x_1, \ldots, x_n$ dans F. Soit $\varepsilon = \inf_{i\neq j} \mathrm{d}(x_i, x_j) > 0$. Soit $G \in \mathcal{F}$ tel que $\Delta(F,G) < \varepsilon/2$. Alors $\lambda(F,G) < \varepsilon/2$, donc pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{d}(x_i, G) < \varepsilon/2$, de sorte qu'il existe $y_i \in G$ tel que $\mathrm{d}(x_i, y_i) < \varepsilon/2$. Les points $y_1, \ldots, y_n$ sont distincts (si $y_i = y_j$, alors $\mathrm{d}(x_i, x_j) \leq \mathrm{d}(x_i, y_i) + \mathrm{d}(y_j, x_j) < \varepsilon$, donc $i = j$ par définition de ε), donc $G \in \mathcal{F}_n$. La boule ouverte de centre F de rayon $\varepsilon/2$ est donc incluse dans $\mathcal{F}_n$, donc $\mathcal{F}_n$ est ouvert.

c) Les Y_n sont fermés dans le compact E donc compact, et l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vides étant non vide, on en déduit $Y = \cap_n Y_n \in \mathcal{F}$.

Donnons nous maintenant $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, la suite (Y_n) est de Cauchy dans $(\mathcal{F}, \Delta)$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $\Delta(Y_p, Y_q) < \varepsilon$. Nous allons montrer que $\Delta(Y, Y_n) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Fixons $n \geq N$. Pour tout $p \geq n$, $\lambda(Y_n, Y_p) \leq \Delta(Y_n, Y_p) < \varepsilon$. Donnons nous $x \in Y_n$. On a $\mathrm{d}(x, Y_p) < \varepsilon$, donc

$$\forall p \geq n, \exists x_p \in Y_p, \qquad \mathrm{d}(x, x_p) < \varepsilon.$$

La suite (x_p) prend ses valeurs dans le compact E, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(p)})$, dont nous noterons ℓ la limite. Pour tout $p \geq n$, $\ell \in Y_p$ car pour tout $m \geq p$, $x_m \in Y_p$ et Y_p est fermé. Ainsi, $\ell \in \cap_{p \geq n} Y_p = Y$. Par ailleurs, pour tout p, $\mathrm{d}(x, x_{\varphi(p)}) < \varepsilon$ donc $\mathrm{d}(x, \ell) \leq \varepsilon$. Comme $\ell \in Y$, on en déduit $\mathrm{d}(x, Y) \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $x \in Y_n$, on en déduit $\lambda(Y_n, Y) \leq \varepsilon$. Or $Y \subset Y_n$, donc $\lambda(Y, Y_n) = 0$, donc $\Delta(Y_n, Y) \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $n \geq N$, on en déduit que (Y_n) converge vers Y.

Montrons maintenant que l'espace métrique $(\mathcal{F}, \Delta)$ est complet. Soit (Y_n) une suite de Cauchy de cet espace. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \overline{\cup_{p \geq n} Y_p}$. La suite (X_n) ainsi définie est une suite décroissante de $(\mathcal{F}, \Delta)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $\Delta(Y_p, Y_q) < \varepsilon$. Soit $n \geq N$. Si $x \in \cup_{p \geq n} Y_p$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in Y_p$, donc $\mathrm{d}(x, Y_n) \leq \lambda(Y_p, Y_n) < \varepsilon$. On en déduit que pour tout $x \in \overline{\cup_{p \geq n} Y_p}$, $\mathrm{d}(x, Y_n) \leq \varepsilon$, donc $\lambda(X_n, Y_n) \leq \varepsilon$. Comme $X_n \subset Y_n$, on a $\lambda(Y_n, X_n) = 0$. Finalement, nous venons de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \qquad \Delta(X_n, Y_n) < \varepsilon. \tag{$*$}$$

On en déduit maintenant aisément que la suite (X_n) vérifie le critère de Cauchy. C'est de plus une suite décroissante de fermés non vides, donc d'après ce que l'on a vu précédemment, (X_n) converge vers $X = \cap_{n \in \mathbb{N}} X_n$. La relation (*) montre alors que (Y_n) converge vers X.

d) Nous venons de voir que $(\mathcal{F}, \Delta)$ est complet. En vertu du résultat de l'exercice 2 de la page 32, il suffit, pour prouver la compacité de cet espace métrique, de montrer qu'il est précompact (*i. e.* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ε qui recouvrent $\mathcal{F}$).

Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble E est compact donc précompact, donc il existe une famille finie de boules $(\mathrm{B}(x_i, \varepsilon))_{1 \leq i \leq n}$ qui recouvre $\mathcal{F}$. Notons Γ l'ensemble des parties non vides de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Nous allons montrer que $\mathcal{F} \subset \cup_{F \in \Gamma} \mathrm{B}_\Delta(F, \varepsilon)$, où pour tout $F \in \Gamma$, $\mathrm{B}_\Delta(F, \varepsilon)$ désigne la boule fermée de centre F de rayon ε dans $(\mathcal{F}, \Delta)$.

Soit $A \in \mathcal{F}$. Notons $F = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n, \mathrm{d}(x_i, A) < \varepsilon\}$. Comme la famille $(\mathrm{B}(x_i, \varepsilon))_{1 \leq i \leq n}$ recouvre E, F est non vide donc $F \in \Gamma$. Pour tout $x \in F$, $\mathrm{d}(x, A) < \varepsilon$ donc $\lambda(F, A) < \varepsilon$.

Soit $x \in A$. La famille $(\mathrm{B}(x_i, \varepsilon))_{1 \leq i \leq n}$ recouvrant E, il existe x_i $(1 \leq i \leq n)$ tel que $\mathrm{d}(x, x_i) < \varepsilon$. On a donc $x_i \in F$ et $\mathrm{d}(x, F) \leq \mathrm{d}(x, x_i) < \varepsilon$, et ceci pour tout $x \in A$, donc $\lambda(A, F) \leq \varepsilon$. On en déduit $\Delta(A, F) \leq \varepsilon$, donc $A \in \mathrm{B}_\Delta(F, \varepsilon)$.

Nous venons de montrer que $\mathcal{F} \subset \cup_{F \in \Gamma} \mathrm{B}_\Delta(F, \varepsilon)$, et comme Γ est fini, on en déduit le résultat.

Problème 10 (Oscillation d'une fonction). Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et une application $f : E \to F$. Pour tout $x_0 \in E$, on note

$$\omega(f, x_0) = \inf_{\rho > 0} \left[\sup_{x, y \in \mathrm{B}(x_0, \rho)} \delta(f(x), f(y)) \right] \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

(oscillation de f en x_0), où $\mathrm{B}(x_0, \rho)$ désigne la boule ouverte dans (E, d) de centre x_0 de rayon ρ.

a) Montrer que f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si $\omega(f, x_0) = 0$.

b) Pour tout $\varepsilon \geq 0$, montrer que l'ensemble

$$A_\varepsilon = \{x \in E \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$$

est un fermé de E. L'application $x \mapsto \omega(f,x)$ est elle continue ?
c) Montrer que l'ensemble des points où f est continue est le complémentaire de l'ensemble $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$.
d) On suppose ici E compact et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\omega(f,x) < \varepsilon$ pour tout $x \in E$. Montrer

$$\exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in E^2, \mathrm{d}(x,y) < \alpha, \qquad \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Solution. **a)** Supposons f continue en $x_0 \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists \rho > 0, \forall y \in \mathrm{B}(x_0,\rho), \qquad \delta(f(x_0), f(y)) < \varepsilon,$$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}(x_0,\rho)^2, \qquad \delta(f(x), f(y)) \le \delta(f(x), f(x_0)) + \delta(f(x_0) + f(y)) < 2\varepsilon,$$

d'où

$$\omega(f,x_0) \le \sup_{x,y\in \mathrm{B}(x_0,\rho)} \delta(f(x), f(y)) \le 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\omega(f,x_0) = 0$.

Réciproquement, si $\omega(f,x_0) = 0$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \qquad \sup_{x,y\in \mathrm{B}(x_0,\rho)} \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

en particulier

$$\forall x \in E, \mathrm{d}(x_0,x) < \rho, \qquad \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ce qui montre la continuité de f en x_0.

b) Montrons que $B_\varepsilon = E \setminus A_\varepsilon = \{x \in E \mid \omega(f,x) < \varepsilon\}$ est ouvert. Soit $x_0 \in B_\varepsilon$. On a $\omega(f,x_0) < \varepsilon$ donc il existe $\rho > 0$ tel que $\sup_{x,y\in\mathrm{B}(x_0,\rho)} \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Considérons maintenant $x_1 \in \mathrm{B}(x_0,\rho)$, et $r = \rho - \mathrm{d}(x_0,x_1)$. On a $\mathrm{B}(x_1,r) \subset \mathrm{B}(x_0,\rho)$ donc $\omega(f,x_1) \le \sup_{x,y\in\mathrm{B}(x_1,r)} \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$, donc $x_1 \in B_\varepsilon$. Ainsi, B_ε est ouvert.

L'application $x_0 \mapsto \omega(f,x_0)$ n'est pas forcément continue. Par exemple, la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle partout sauf en 0 où elle vaut 1, vérifie $\omega(f,x) = f(x)$.

c) C'est immédiat car

$$(f \text{ est continue en } x_0) \iff (\omega(f,x_0) = 0) \iff (\forall n \in \mathbb{N}^*, \omega(f,x_0) < \frac{1}{n})$$
$$\iff (\forall n \in \mathbb{N}^*, x_0 \notin A_{1/n}) \iff (x_0 \notin \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}).$$

d) Supposons le contraire. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n,y_n) \in E^2, \qquad \mathrm{d}(x_n,y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(f(x_n), f(y_n)) \ge \varepsilon.$$

La suite (x_n,y_n) prend ses valeurs dans le compact E^2, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ dont nous noterons (x,y) la limite. On a $x = y$ car pour tout n, $\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) < 1/\varphi(n)$. Or $\omega(f,x) < \varepsilon$ donc

$$\exists \rho > 0, \forall (z,z') \in \mathrm{B}(x,\rho)^2, \qquad \delta(f(z), f(z')) < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Comme $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent vers x, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in \mathrm{B}(x,\rho)^2$. Ceci est absurde d'après (*) car par hypothèse, $\delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \ge \varepsilon$.

Remarque. Le résultat de la partie d) généralise le théorème de Heine, et est de nature proche du résultat de la question d) de l'exercice 7 page 36.

Problème 11 (Parties négligeables de $\mathbb{R}$, ensemble triadique de Cantor).
1/ Pour tout intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert borné $I =]a,b[$, on note $\ell(I) = b - a$. Une partie

A de $\mathbb{R}$ est dite *négligeable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille au plus dénombrable $(I_n)_{n\in J}$ d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ telle que

$$\text{(i)}\quad A \subset \cup_{n\in J} I_n. \qquad \text{(ii)}\quad \sum \ell(I_n) \quad \text{converge et} \quad \sum_{n\in J} \ell(I_n) \le \varepsilon.$$

a) Montrer qu'une réunion au plus dénombrable de parties négligeables est négligeable.
b) Montrer que $\mathbb{Q}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}$.
c) Si A est une partie négligeable de $\mathbb{R}$, montrer que A est d'intérieur vide.
d) L'ensemble $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ est-il négligeable ?

2/ (Ensemble triadique de Cantor.) Soit $I = [0, 1]$. On construit une suite de parties $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I par récurrence, comme suit.
— On prend $K_0 = I$.
— K_n étant une réunion finie de segments disjoints : $K_n = \cup_k [a_k, b_k]$, on construit

$$K_{n+1} = \bigcup_k \left(\left[a_k, a_k + \frac{b_k - a_k}{3}\right] \cup \left[a_k + 2\frac{b_k - a_k}{3}, b_k\right] \right).$$

On pose alors $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (ensemble triadique de Cantor).
a) Montrer que K est négligeable.
b) Soit $x \in [0, 1[$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le développement en base 3 de x pour que $x \in K$.
c) Montrer que K est un fermé, d'intérieur vide, sans point isolé, et qu'il a la puissance du continu.

Solution. **1/** Remarquons tout d'abord que la convergence et la somme d'une série à termes positifs ne dépend pas de l'ordre de sommation (voir le théorème 8 page 216), ce qui donne un sens à $\sum_{n\in J} \ell(I_n)$.

a) Soit $(A_j)_{j\in J}$ une famille au plus dénombrable de parties négligeables (avec $J \subset \mathbb{N}$). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \in J$, on peut écrire $A_j \subset \cup_{n\in K_j} I_{n,j}$ où les $I_{n,j}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ ouverts bornés, K_j est au plus dénombrable et où

$$\sum_{n\in K_j} \ell(I_{n,j}) < \varepsilon/2^{j+1}.$$

Notons $\Gamma = \cup_{j\in J}\{j\} \times K_j$. L'ensemble Γ est au plus dénombrable (réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables), et on a $\bigcup_{j\in J} A_j \subset \bigcup_{(j,n)\in\Gamma} I_{n,j}$ avec

$$\sum_{(j,n)\in\Gamma} \ell(I_{n,j}) = \sum_{j\in J} \left[\sum_{n\in K_j} \ell(I_{n,j}) \right] \le \sum_{j\in J} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \le \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \varepsilon.$$

Ainsi, $A = \cup_{j\in J} A_j$ est négligeable.

b) Un singleton $\{x_0\}$ est négligeable car pour tout $\varepsilon > 0$, $\{x_0\} \subset\,]x_0 - \varepsilon/2, x_0 + \varepsilon/2[$. Donc $\mathbb{Q}$, réunion dénombrable de singletons, est négligeable d'après a).

c) Soit A une partie négligeable de $\mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que A n'est pas d'intérieur vide. Alors il existe un segment $I = [a, b]$ inclus dans A tel que $a < b$. Comme A est négligeable, il existe une famille au plus dénombrable $(I_n)_{n\in J}$ d'intervalles ouverts bornés qui recouvre A, tel que $\sum_{n\in J} \ell(I_n) < b - a$. Cette famille recouvre aussi le compact $[a, b]$, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $(I_{n_i})_{1\le i\le p}$ qui vérifie

$$\sum_{i=1}^{p} \ell(I_{n_i}) \le \sum_{n\in J} \ell(I_n) < b - a.$$

Ceci est impossible, car comme $[a,b] \subset \cup_{1\le i\le n} I_{n_i}$, on a $\chi_{[a,b]} \le \sum_{i=1}^{p} \chi_{I_{n_i}}$ (où χ_P désigne la fonction caractéristique de P), donc

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]} = b-a \le \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{p} \chi_{I_{n_i}} = \sum_{i=1}^{p} \ell(I_{n_i}).$$

d) Non ! S'il était négligeable, alors $\mathbb{R} = (\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ serait négligeable (d'après a) et b)), ce qui est absurde d'après c) car l'intérieur de $\mathbb{R}$ est non vide.

2/ a) On voit facilement (par récurrence sur n) que K_n est la réunion de 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n}.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $(2/3)^N < \varepsilon/2$. Comme on l'a vu, on peut écrire $K_N = \cup_{1\le n\le 2^N} [a_n, b_n]$ avec $b_n - a_n = 3^{-N}$ pour tout n. En posant $I_n = \left]a_n - \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^N}, b_n + \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^N}\right[$, on a $K \subset K_N \subset \cup_{1\le n\le 2^N} I_n$, et

$$\sum_{n=1}^{2^N} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{2^N} \left[(b_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{2\cdot 2^N}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^N + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

d'où le résultat.

b) Une récurrence facile donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \bigcup_{\varepsilon_1\in\{0,2\},\cdots,\varepsilon_n\in\{0,2\}} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{3^k}, \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{3^k}\right]. \qquad (*)$$

Ceci étant, soit $x \in [0,1[$. Considérons son développement en base 3 : $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k/3^k$, avec $\alpha_k \in \{0,1,2\}$, la suite (α_k) n'étant pas stationnaire à 2 à partir d'un certain rang (propriété des développements tri-adiques). Si les ε_k sont dans $\{0,2\}$, on a l'équivalence

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{3^k} \le x < \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{3^k} \quad\iff\quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad \alpha_k = \varepsilon_k,$$

et compte tenu du fait que les réels de $[0,1[$ de la forme $1/3^n + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k/3^k$ (avec $\varepsilon_k \in \{0,2\}$) sont aussi ceux de la forme

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{3^k} \quad \text{avec} \quad p \le n, \qquad \beta_k \in \{0,2\} \quad \text{pour} \quad 1 \le k \le p-1, \quad \text{et} \quad \beta_p = 1,$$

on en déduit grâce à (*) que

$$(x \in K) \iff (\forall n, x \in K_n) \iff (\forall k, \alpha_k \in \{0,2\} \quad \text{ou} \quad \exists p \in \mathbb{N}, x = \sum_{k=1}^{p} \frac{\varepsilon_k}{3^k} + \frac{1}{3^{p+1}}, \varepsilon_k \in \{0,2\}).$$

En d'autres termes, $x \in K$ si et seulement si tous les termes (α_k) du développement de x en base 3 sont dans $\{0,2\}$ ou s'il existe un entier naturel p tel que $\alpha_k \in \{0,2\}$ pour $k \le p$, $\alpha_{p+1} = 1$ et $\alpha_k = 0$ pour $k > p+1$.

c) L'ensemble K est une intersection de fermés, c'est donc un fermé.

Il est d'intérieur vide car négligeable. On pouvait aussi remarquer, grâce à la question précédente, que pour tout $x \in K$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \ge N$ tel que $x + 1/3^n \notin K$.

Aucun point de K n'est isolé dans K. En effet, deux cas se présentent.

— Si le développement en base 3 de $x \in K$ est de la forme $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k/3^k$ avec $\alpha_k \in \{0,2\}$ pour tout k, alors la suite (α_k) n'étant jamais stationnaire à 2 à partir d'un certain rang, on s'aperçoit que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \ge N, \qquad x + \frac{2}{3^n} \in K.$$

— Si x est de la forme $\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k/3^k + 1/3^{p+1}$ avec $\varepsilon_k \in \{0,2\}$, alors pour tout $n \geq p+1$,

$$x - \frac{1}{3^n} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\varepsilon_k}{3^k} + \sum_{k=p+1}^{n-1} \frac{2}{3^k} \in K.$$

L'ensemble K a la puissance du continu. En effet, l'application φ de $[0,1[$ dans K qui à tout x dont le développement *di*-adique est $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k/2^k$ associe $\varphi(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k/3^k$ est injective.

Remarque. A la question 2/ b), on aurait pu montrer que $x \in K$ si et seulement s'il existe une suite $(\alpha_k) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k/3^k$. Mais les écritures de cette forme ne sont pas forcément un développement en base 3, car dans un tel développement, la suite des termes du développement ne peut pas être stationnaire à 2 à partir d'un certain rang (cette contrainte permet d'avoir l'unicité de l'écriture triadique).

– L'ensemble de Cantor possède des propriétés intéressantes qui sont des contre-exemples à beaucoup de fausses intuitions.

– Dans la théorie de la mesure de Lebesgue, les ensembles négligeables sont les ensembles de mesure nulle.

– Dans la même veine, signalons l'*escalier de Cantor-Lebesgue*, introduite par Lebesgue, qui est le graphe d'une fonction continue $\psi : [0,1] \to [0,1]$, vérifiant $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = 1$, dérivable presque partout (c'est-à-dire sur le complémentaire d'une partie négligeable) et de dérivée presque partout nulle. On l'appelle aussi parfois *escalier du diable* car il est continu, a presque partout une tangente horizontale, et pourtant il monte. Cette fonction peut être définie sur l'ensemble triadique de Cantor K par $\psi(\sum_k 2\beta_k/3^k) = \sum_k \beta_k/2^k$ (avec $\beta_k \in \{0,1\}$), et elle est localement constante sur le complémentaire de K.

PROBLÈME 12 (THÉORÈME DE PROLONGEMENT DE TIETZE-URYSOHN). Soient (E, d) un espace métrique, A un fermé de E, et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Montrer l'existence d'une fonction $g : E \to \mathbb{R}$, continue, telle que $g_{|A} = f$ et

$$\sup_{x\in E} g(x) = \sup_{y\in A} f(y) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in E} g(x) = \inf_{y\in A} f(y).$$

(Indication. Se ramener au cas où $\inf_{y\in A} f(y) = 1$, $\sup_{y\in A} f(y) = 2$, et prendre $g = f$ sur A et $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{d}(x,A)} \inf_{y\in A}[f(y)\mathrm{d}(x,y)]$ si $x \notin A$.)

Solution. Si f est constante, le résultat est évident, sinon en remplaçant f par $\alpha f + \beta$ avec $\alpha \neq 0$ et β des réels bien choisis, on peut supposer $\inf_{y\in A} f(y) = 1$ et $\sup_{y\in A} f(y) = 2$. Suivons l'indication et construisons la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et

$$\forall x \in E\smallsetminus A, \qquad g(x) = \frac{h(x)}{\mathrm{d}(x,A)}, \qquad \text{avec} \qquad h(x) = \inf_{y\in A}(f(y)\mathrm{d}(x,y)) \qquad (*)$$

(cette dernière expression est bien définie, car A étant fermé, on a $\mathrm{d}(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in A$).

Les inégalités $1 \leq f(x) \leq 2$ pour tout $x \in A$ montrent que $1 \leq g(x) \leq 2$ pour tout $x \in E$. Comme $g_{|A} = f$, on a même $\inf_{x\in E} g(x) = 1$ et $\sup_{x\in E} g(x) = 2$.

Il nous reste à montrer la continuité de g en tout point x_0 de E. Nous allons traiter les cas $x_0 \in \mathring{A}$, puis $x_0 \in E\smallsetminus A$, puis $x_0 \in \mathrm{Fr}(A)$.

(i) Si $x_0 \in \mathring{A}$, comme $g_{|A} = f$ et que f est continue sur A, g est continue en x_0.

(ii) Supposons $x_0 \in E \smallsetminus A$. Sur l'ouvert $E \smallsetminus A$, l'application g prend la forme (*), et comme $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est continue (voir l'exercice 3, page 33), il nous suffit de montrer que h est continue en x_0. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0, r) \subset E \smallsetminus A$. Pour tout $x \in \mathrm{B}(x_0, r)$, pour tout $y \in A$,

$$h(x_0) \leq f(y)\,\mathrm{d}(x_0, y) \leq f(y)(\mathrm{d}(x_0, x) + \mathrm{d}(x, y)) \leq 2\mathrm{d}(x_0, x) + f(y)\,\mathrm{d}(x, y),$$

et ceci étant vrai pour tout $y \in A$, on en déduit, en ne considérant que les termes des extrémités et en prenant la borne inférieure sur les $y \in A$, que $h(x_0) \leq h(x) + 2\mathrm{d}(x_0, x)$. De même, $h(x) \leq h(x_0) + 2\mathrm{d}(x, x_0)$, donc finalement, $|h(x_0) - h(x)| \leq 2\mathrm{d}(x_0, x)$, ce qui prouve la continuité de h en $x_0 \in E \smallsetminus A$.

(iii) Il reste le cas où $x_0 \in \mathrm{Fr}(A)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en $x_0 \in A$,

$$\exists r > 0, \forall y \in A \cap \mathrm{B}(x_0, r), \qquad |f(y) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Si $x \in E \smallsetminus A$ et $\mathrm{d}(x_0, x) \leq r/4$, on a, en notant $C = A \cap \mathrm{B}(x_0, r)$:

$$\forall y \in A \smallsetminus C, \qquad \mathrm{d}(x, y) \geq \mathrm{d}(x_0, y) - \mathrm{d}(x_0, x) \geq \frac{3r}{4},$$

donc $\inf_{y \in A \smallsetminus C} f(y)\mathrm{d}(x, y) \geq 3r/4$. D'autre part, $f(x_0)\mathrm{d}(x_0, x) \leq 2\mathrm{d}(x_0, x) \leq r/2$, donc

$$\inf_{y \in A} f(y)\mathrm{d}(x, y) = \inf_{y \in C} f(y)\mathrm{d}(x, y),$$

et comme $f(x_0) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon$ pour tout $y \in C$, on en déduit

$$(f(x_0) - \varepsilon)\mathrm{d}(x, A) \leq \inf_{y \in A}(f(y)\mathrm{d}(x, y)) \leq (f(x_0) + \varepsilon)\mathrm{d}(x, A),$$

donc $g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon$ pour tout $x \in E \smallsetminus A$ tel que $\mathrm{d}(x_0, x) \leq r/4$. Ceci reste vrai si $x \in A$ et $\mathrm{d}(x, x_0) \leq r/4$ car c'est vrai pour f. Ainsi, g est continue en $x_0 \in \mathrm{Fr}(A)$, d'où le résultat.

Problème 13 (Continuité des racines de polynômes). On norme $\mathbb{C}[X]$ en posant $\|a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.

1/ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire et $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $|\lambda| \leq \|P\|$.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \in \mathbb{C}[X]$. Soit $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes unitaires de degré n qui tend vers P.

a) Montrer que pour toute racine λ de P, il existe une suite de nombres complexes (α_m) telle que pour tout m, α_m est racine de P_m et telle que $\lim_{m \to \infty} \alpha_m = \lambda$.

b) Montrer que l'on peut écrire

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad P_m = (X - \lambda_{1,m}) \cdots (X - \lambda_{n,m})$$

avec pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lim_{m \to \infty} \lambda_{i,m} = \lambda_i$.

Solution. **1/** Écrivons $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$, où $n = \deg(P)$. On a $\|P\| = |a_0| + \cdots + |a_{n-1}| + 1 \geq 1$, donc si $|\lambda| \leq 1$, c'est terminé. Sinon $|\lambda| > 1$, et l'égalité $P(\lambda) = 0$ entraîne

$$\lambda = -a_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{\lambda} - \cdots - \frac{a_1}{\lambda^{n-2}} - \frac{a_0}{\lambda^{n-1}}$$

de sorte que $|\lambda| \leq |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < \|P\|$, d'où le résultat.

2/ a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, notons $(\alpha_{i,m})_{1 \leq i \leq n}$ les racines de P_m (sans tenir compte pour l'instant de la numérotation). Il s'agit de montrer que $\min_{1 \leq i \leq n} |\alpha_{i,m} - \lambda|$ tend vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m \geq N, \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad |\alpha_{i,m} - \lambda| < \varepsilon.$$

Supposons le résultat faux, de sorte que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists m \geq N, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad |\alpha_{i,m} - \lambda| \geq \varepsilon.$$

On peut alors extraire de la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}} = (\alpha_{1,m}, \dots, \alpha_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(\alpha_{\varphi(m)})$ telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall i, \qquad |\alpha_{i,\varphi(m)} - \lambda| \geq \varepsilon. \tag{**}$$

Comme la suite (P_m) converge, elle est bornée. Notons M un majorant de $(\|P_m\|)$. La suite $(\alpha_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est à valeur dans le compact K^n, où $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq M\}$ (d'après 1/). On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(\alpha_{\varphi\circ\psi(m)})$ dont nous noterons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la limite. Alors

$$P = \lim_{m\to\infty} P_{\varphi\circ\psi(m)} = \lim_{m\to\infty} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(X - \alpha_{i,\varphi\circ\psi(m)}\right)\right] = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i),$$

donc les α_i sont les racines de P, donc il existe k tel que $\alpha_k = \lambda$. Or d'après (**), pour tout m, $|\alpha_k - \alpha_{k,\varphi\circ\psi(m)}| \geq \varepsilon$. Ceci est contradictoire car $(\alpha_{k,\varphi\circ\psi(m)})$ tend vers α_k. D'où le résultat.

b) Nous allons procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n. Considérons la racine λ_n de P. D'après la question précédente, on peut écrire $P_m = (X - \alpha_m)Q_m$ pour tout m, où (α_m) converge vers λ_n. Notons Q le polynôme de degré $n-1$ tel que $P = (X - \lambda_n)Q$. En écrivant chacun des polynômes Q_m comme le quotient de la division euclidienne de P_m par $(X - \alpha_m)$, on s'aperçoit que les coefficients de Q_m s'expriment comme un polynôme en les coefficients de P_m et en α_m. Comme (α_m) tend vers λ et que (P_m) tend vers P, on en déduit que (Q_m) tend vers Q. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut donc écrire $Q_m = (X - \lambda_{1,m}) \cdots (X - \lambda_{n-1,m})$ pour tout m, avec pour tout i $\lim_{m\to\infty} \lambda_{i,m} = \lambda_i$. Finalement, on a $P_m = (X - \lambda_{1,m}) \cdots (X - \lambda_{n-1,m})(X - \alpha_m)$ pour tout m et

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \lim_{m\to\infty} \lambda_{i,m} = \lambda_i \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lambda_n,$$

ce qui est précisément ce que l'on voulait montrer.

Remarque. On aurait pu répondre à la question 2/ a) sans utiliser la question 1/, en utilisant le résultat suivant.

> LEMME 1. *Soit $F \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et $\gamma \in \mathbb{C}$. Alors il existe une racine α de F telle que $|\alpha - \gamma| \leq |F(\gamma)|^{1/n}$.*

Le lemme se démontre en notant $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de F et en les supposant ordonnées de sorte que $|\gamma - \alpha_1| \leq |\gamma - \alpha_i|$ pour tout i. Alors on a $|\gamma - \alpha_1|^n \leq \prod_{i=1}^{n} |\gamma - \alpha_i| = |F(\gamma)|$ d'où le résultat.

Le fait que (P_m) tende vers P entraîne que $P_m(\lambda)$ tend vers $P(\lambda) = 0$. Le lemme nous assure pour tout m l'existence d'une racine α_m de P_m telle que $|\lambda - \alpha_m| \leq |P_m(\lambda)|^{1/n}$. Comme $(P_m(\lambda))$ tend vers 0, on en déduit que (α_m) tend vers λ, ce qui répond à la question 2/ a).

PROBLÈME 14 (THÉORÈME D'ASCOLI). Soit (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques compacts. On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y. Muni de la distance de la convergence uniforme $\Delta(f, g) = \sup_{x\in X} \delta(f(x), g(x))$, l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ est un espace métrique.

Soit A une partie de $\mathcal{C}(X, Y)$. On dit que A est *équicontinue* si

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0;\ \forall f \in F, \forall y \in X, \qquad d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

1/ Montrer que si A est équicontinue, alors A est *uniformément équicontinue*, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0;\ \forall f \in A, \forall x, y \in X, \qquad d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2/ (Théorème d'Ascoli) Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est *relativement compacte* (i.e son adhérence est compacte) dans $\mathcal{C}(X, Y)$.

(ii) A est équicontinue.
(Pour montrer (ii) $\Rightarrow$ (i), on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2 page 32 qui dit que tout précompact complet est compact).

Solution. **1/** Soit $\varepsilon > 0$. Comme A est équicontinue, pour tout $x \in X$ il existe $\eta_x > 0$ tel que

$$\forall f \in F, \forall y \in X; \qquad d(x,y) < 2\eta_x \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On peut extraire du recouvrement d'ouverts $\cup_{x\in X}\mathrm{B}(x,\eta_x)$ du compact X, un recouvrement fini. Autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des éléments $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $X \subset \cup_{1\le i\le n}\mathrm{B}(x_i, \eta_{x_i})$. Soit $\eta = \min_{1\le i\le n} \eta_{x_i}$. On a $\eta > 0$. Soit $x, y \in X$ tels que $d(x,y) < \eta$. Soit i tel que $d(x, x_i) < \eta_{x_i}$. On a

$$\begin{aligned} d(x,x_i) < \eta_{x_i} < 2\eta_{x_i} &\quad \text{donc} \quad \delta(f(x), f(x_i)) < \varepsilon \\ d(y,x_i) \le d(y,x) + d(x,x_i) < \eta + \eta_{x_i} \le 2\eta_{x_i} &\quad \text{donc} \quad \delta(f(y), f(x_i)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit $\delta(f(x), f(y)) \le \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(y)) < 2\varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $x, y \in X$ tels que $d(x,y) < \eta$, donc A est bien uniformément équicontinue.

2/ Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme A est relativement compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules centrées dans A de rayon ε, c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists f_1, \dots, f_n \in A, \qquad A \subset \cup_{1\le i\le n} \mathrm{B}(f_i, \varepsilon). \tag{$*$}$$

Chaque fonction f_i est continue en x donc

$$\forall i, \exists \eta_i > 0; \quad \forall y \in K, \qquad d(x,y) < \eta_i \Rightarrow \delta(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Choisissons $\eta = \inf_{1\le i\le n} \eta_i$. Soit $f \in A$. D'après (*) , il existe i tel que $f \in \mathrm{B}(f_i, \varepsilon)$. Avec ce choix de $\eta > 0$, on a démontré (ii) car pour tous $y \in K$ tel que $d(x,y) < \eta$, on a l'inégalité

$$\delta(f(x), f(y)) \le \delta(f(x), f_i(x)) + \delta(f_i(x), f_i(y)) + \delta(f_i(y), f(y)) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

- Montrons maintenant (ii) $\Rightarrow$ (i). Suivons l'indication et démontrons que $\overline{A}$ est précompact et complet. Montrons d'abord que $\overline{A}$ est précompact. Pour cela il suffit de montrer que A est précompact. Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'on peut recouvrir A par un recouvrement fini de boules de rayon 4ε. Pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que

$$\forall f \in F, \forall y \in X, \qquad d(x,y) < \eta_x \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Du recouvrement d'ouverts $\cup_{x\in X}\mathrm{B}(x,\eta_x)$ de X on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\cup_{1\le i\le n}\mathrm{B}(x_i, \eta_{x_i})$, avec les $x_i \in X$. Comme Y est compact on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$, autrement dit il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_m \in Y$ tels que $Y \subset \cup_{1\le j\le m}\mathrm{B}(z_j, \varepsilon)$. Pour tout n-uplet $J = (j_1, \dots, j_n)$ de $\{1, \dots, m\}^n$, on note

$$B_J = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid \forall i = 1, \dots, n, \forall x \in B(x_i, \eta_{x_i}),\ \delta(f(x), z_{j_i}) < 2\varepsilon\}.$$

Pour tout $J = (j_1, \dots, j_n)$, B_J est inclus dans une boule de rayon 4ε. En effet, choisissons arbitrairement $f_J \in B_J$. Soit $f \in B_J$. Pour tout $x \in X$, il existe i tel que $x \in \mathrm{B}(x_i, \eta_{x_i})$ donc $\delta(f(x), z_{j_i}) < 2\varepsilon$ et $\delta(f_J(x), z_{j_i}) < 2\varepsilon$. Donc $\delta(f(x), f_J(x)) \le \delta(f(z), z_{j_i}) + \delta(z_{j_i}, f_J(z)) < 4\varepsilon$. Ainsi, $\Delta(f, f_J) < 4\varepsilon$ (le sup d'une fonction continue est atteint sur un compact donc l'inégalité reste stricte) donc $B_J \subset \mathrm{B}(f_J, 4\varepsilon)$. Par ailleurs, les B_J recouvrent bien A. En effet, soit $f \in A$. Pour tout i, soit j_i tel que $f(x_i) \in \mathrm{B}(z_{j_i}, \varepsilon)$. On a

$$\forall x \in B(x_i, \eta_{x_i}), \qquad \delta(f(x), z_{j_i}) \le \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), z_{j_i}) < 2\varepsilon.$$

En notant $J = (j_1, \dots, j_n)$, on en déduit que $f \in B_J$.

Il nous reste à montrer que $\overline{A}$ est complet. Tout fermé dans un complet est complet, il nous suffit donc de prouver que $\mathcal{C}(X,Y)$ est complet. Pour cela, on considère une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in N}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$ on a $\delta(f_p(x), f_q(x)) \le \Delta(f_p, f_q)$, donc la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy. Cette suite est à valeur dans le compact Y, donc complet, donc elle converge. En désignant par $f(x)$ sa limite, on défini une fonction f de X dans Y. Comme f est la limite uniforme des fonctions continues f_n, elle est donc continue. Ainsi (f_n) converge vers $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.

Remarque. - Le résultat de la question 1/ peut être vu comme une généralisation du théorème de Heine. Nous ne l'avons pas utilisé pour la solution de la question 2/.

– Le résultat de la question 2/ est une version faible du théorème d'Ascoli. Dans sa version plus générale, le compact Y est remplacé par un espace métrique quelconque et la condition d'équicontinuité est complétée par une autre condition (dite de ponctuelle relative compacité).

– On peut aussi prouver le résultat de la question sans faire appel à la propriété "tout précompact complet est compact" , en démontrant que de toute suite (f_n) de A, on peut en extraire une sous-suite convergente, en construisant cette sous-suite par un procédé diagonal (comme pour l'exercice 2 page 32).

– Le théorème d'Ascoli a de multiple conséquences, comme la compacité de certains opérateurs ou l'existence de solutions dans certaines équations différentielles.

CHAPITRE 2

Fonctions d'une variable réelle

Jusqu'au dix-septième siècle, la notion de fonction n'était pas dégagée de façon explicite. Le mot *fonction* semble avoir été utilisé pour la première fois par Leibniz en 1692, pour désigner les grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques. Pour Euler, une fonction était une expression construite au moyen des opérations algébriques élémentaires, des opérations transcendantes (exponentielle, logarithmes, fonctions circulaires), et d'opérations telles que formation de séries, de produits infinis, de suites. C'est finalement Dirichlet qui en introduisant une fonction discontinue partout (la fonction caractéristique des irrationnels), définit explicitement la notion de fonction comme nous la connaissons aujourd'hui.

Le concept de dérivée, quant à lui, déjà en germe au début du dix-septième siècle dans divers domaines, fut unifié par Newton et Leibniz. Alors que Leibniz utilisait la notation $(\frac{dy}{dx})$, Lagrange évacuait les infiniments petits et introduisit la notation f'. C'est enfin Cauchy qui définit la dérivée à partir du concept de limite.

Rolle énonça en 1691 le théorème auquel son nom est resté attaché, dans le cas des polynômes, en s'appuyant sur l'intuition géométrique. Lagrange, à la fin du dix-huitième siècle, prit un point de vue totalement différent, fondé sur des considérations purement analytiques. Il montra qu'une fonction dont la dérivée est positive est croissante, et en déduisit la formule des accroissements finis. Lagrange souligna par ailleurs que pour appliquer correctement la formule de Taylor (qui était jusque là utilisée abusivement), il convient de considérer une somme partielle et d'évaluer le reste, et donne le premier une version correcte de cette formule. On pensait alors que toute fonction était égale à sa série de Taylor, et Cauchy exhiba le contre-exemple $x \mapsto \exp(-1/x^2)$.

1. Fonctions dérivables

1.1. Dérivabilité

Définition 1. Soient E un $\mathbb{R}$-e.v.n, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to E$ une application et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \in I \setminus \{a\}}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

existe. Lorsqu'elle existe, cette limite est notée $f'(a)$ (ou $\frac{df}{dx}(a)$).

On dit que f est *dérivable à gauche* (resp. *à droite*) en a si la limite

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t < a \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \qquad \left(\text{resp. } \lim_{\substack{t \to a \\ t > a \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}\right)$$

existe. On la note alors $f'_{\mathrm{g}}(a)$ (resp. $f'_{\mathrm{d}}(a)$).

Remarque 1. — Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche, dérivable à droite en a et $f'_{\mathrm{g}}(a) = f'_{\mathrm{d}}(a)$.

— Si f est dérivable en a, f est continue en a.

— Sur l'ensemble D des points où f est dérivable, on peut définir l'application $a \mapsto f'(a)$ appelée *application dérivée* de f et notée f'.

— L'application f est dérivable en a si et seulement si

$$\exists \ell \in E, \quad f(x) = f(a) + (x-a)\ell + o(x-a) \qquad (x \to a).$$

On a alors $\ell = f'(a)$.

— Une fonction dérivée n'est pas forcément continue. Considérons par exemple

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0, \quad 0 \mapsto 0.$$

Si $x \neq 0$, f est dérivable en x et on a $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. En 0, comme $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ pour tout x, on a

$$-x \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq x \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0,$$

en d'autres termes, $f'(0)$ existe et vaut 0. Cependant, on voit que $f'(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0.

— Nous verrons cependant qu'une fonction dérivée vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux, voir l'exercice 4 page 80) et est continue sur un ensemble dense (voir l'exercice 2 page 419). Par contre, il existe des fonctions dérivées discontinues sur un ensemble dense (voir l'exercice 9 page 244).

— Une fonction dérivée, même bornée, n'est pas nécessairement Riemann-intégrable.

Par récurrence, on peut définir la fonction dérivée n-ième (lorsqu'elle existe) par

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \ldots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \ldots.$$

Une application $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si $f^{(n)}$ existe sur I et y est continue. On note parfois $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux applications de I dans E (où E est un $\mathbb{R}$-e.v.n), dérivables en $a \in I$. Alors*

(i) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

(ii) Si E est une $\mathbb{R}$-algèbre normée, le produit fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) Si $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si $g(a) \neq 0$, le rapport f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Conséquence : En procédant par récurrence, on en déduit que la somme, le produit, le rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 2 (Formule de Leibniz). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux applications de I dans une $\mathbb{R}$-algèbre normée E et $a \in I$ tel que $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent. Alors le produit fg est n fois dérivable en a et*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a),$$

où par convention $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$.

Proposition 3. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$-e.v.n, $f : J \to E$ et $g : I \to J$ deux applications, et $a \in I$ tel que f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. L'application composée $f \circ g$ est dérivable en a et on a*

$$(f \circ g)'(a) = g'(a) \cdot (f' \circ g)(a).$$

Conséquence : On en déduit que la composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (procéder par récurrence sur n).

Homéomorphismes dérivables. Les lettres I et J désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 2. Soient $f : I \to J$ une bijection et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est un $\mathcal{C}^n$-*difféomorphisme* si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 4. *Soit f une bijection de I dans J, dérivable en $a \in I$. L'application f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et on a*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Conséquence : Une fonction surjective f de I dans J est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme si et seulement si f et de classe $\mathcal{C}^n$ et vérifie $f'(a) \neq 0$ pour tout $a \in I$ (l'injectivité découle du théorème de Rolle).

1.2. Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau qui suit donne la dérivée des fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$
$x^r (r \in \mathbb{R})$	rx^{r-1}
$x^s (s \in \mathbb{C})$	sx^{s-1}
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{th}\, x$	$1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\mathrm{argch}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{argsh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{argth}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

1.3. Résultats relatifs à la dérivabilité pour les fonctions à valeurs réelles

Dans toute cette partie, $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

Proposition 5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f admet un extremum relatif en $c \in \overset{\circ}{I}$ et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$.*

Théorème 1 (de Rolle). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

(i) f *est continue sur* $[a, b]$.

(ii) f *est dérivable sur* $]a, b[$.

(iii) $f(a) = f(b)$.

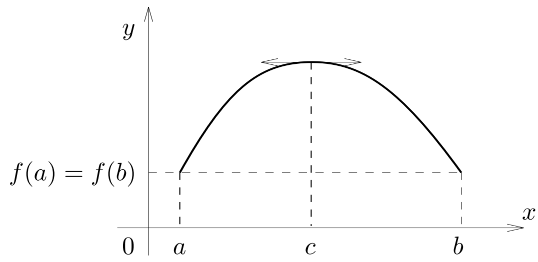


FIGURE 1. Une illustration du théorème de Rolle.

Alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si f est constante sur $[a,b]$, le résultat est évident. Sinon, il existe $x_0 \in \,]a,b[$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$, par exemple $f(x_0) > f(a)$. Comme $[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et que f est continue, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Or $f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$, donc $c \in \,]a,b[$, donc $f(c)$ étant un extremum de f, on a $f'(c) = 0$ d'après la proposition 5. □

→ THÉORÈME 2 (DES ACCROISSEMENTS FINIS). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors*

$$\exists c \in]a,b[, \qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

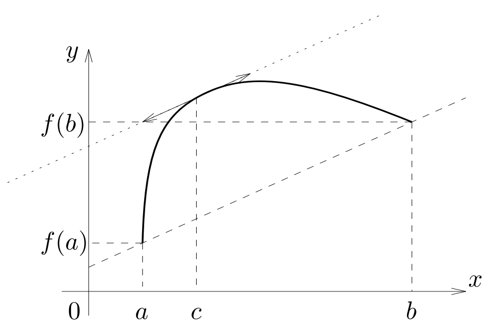


FIGURE 2. Une illustration du théorème des accroissements finis.

Démonstration. Posons $A = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $\varphi : [a,b] \to f(x) - A(x-a)$. On a $\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. On en déduit $f'(c) = A$, d'où le résultat. □

Conséquence : Une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \,]a,b[$. Elle est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \,]a,b[$.

Remarque 2. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux lorsque f est à valeurs dans un $\mathbb{R}$-e.v.n. Par exemple, l'application $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{it}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ et pourtant pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f'(t) = ie^{it}$ n'est jamais nul.

THÉORÈME 3 (DES ACCROISSEMENTS FINIS GÉNÉRALISÉS). *Soient f, g deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Alors*

$$\exists c \in \,]a,b[, \qquad \big(f(b)-f(a)\big)\, g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)\, f'(c).$$

Si $g'(c) \neq 0$ et $g(a) \neq g(b)$, cette égalité s'écrit aussi $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à l'application

$$[a,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto [f(b)-f(a)]\,[g(x)-g(a)] - [g(b)-g(a)]\,[f(x)-f(a)],$$

qui est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et s'annule en a et en b. $\square$

Conséquence : (RÈGLE DE L'HOSPITAL) Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $\ell = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)/g'(x)$ existe, alors $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)/g(x) = \ell$.

Remarque 3. La réciproque de la règle de L'Hospital est fausse. Autrement dit, on peut avoir $f(a) = g(a) = 0$ et $f(x)/g(x)$ peut converger lorsque $x \to a$ ($x \neq a$), sans que $f'(x)/g'(x)$ converge lorsque $x \to a$ ($x \neq a$).

$\longrightarrow$ THÉORÈME 4 (FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE). *Soit $f :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors*

$$\exists c \in\ ]a,b[, \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)}_{\textit{reste de Lagrange}}.$$

Démonstration. Considérons l'application

$$\varphi :\ [a,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!}\, f^{(n)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

la constante A étant choisie telle que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Cette application est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et

$$\forall x \in\ ]a,b[, \qquad \varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(x) + A\,\frac{(b-x)^n}{n!},$$

donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui s'écrit $A = f^{(n+1)}(c)$, d'où le résultat car $\varphi(a) = 0$. $\square$

Remarque 4. — Avec $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.

— Lorsque 0 appartient à l'intervalle de définition I de f, on a, sous les mêmes hypothèses,

$$\forall x \in I, \exists \theta \in\ ]0,1[, \qquad f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\theta x).$$

Cette relation s'appelle formule de Maclaurin (avec reste de Lagrange).

1.4. Résultats relatifs à la dérivabilité pour les fonctions à valeurs dans un e.v.n

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-e.v normé.

Lorsque les applications sont à valeurs dans un $\mathbb{R}$-e.v.n, les formules de Taylor du paragraphe précédent ne sont plus vraies (voir par exemple la remarque 2). Par contre, il existe des résultats analogues faisant intervenir des inégalités. Le théorème qui suit est une inégalité fondamentale dont nous nous servirons beaucoup.

THÉORÈME 5. *Soient $F :\ [a,b] \to E$ et $g :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Si pour tout $t \in\ ]a,b[$, on a $\|F'(t)\| \leq g'(t)$, alors $\|F(b) - F(a)\| \leq g(b) - g(a)$.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\|F'(t)\| < g'(t)$ pour tout $t \in]a,b[$. Pour tout $x \in\ ]a,b[$, on a $\lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} \left\|\frac{F(t)-F(x)}{t-x}\right\| - \frac{g(t)-g(x)}{t-x} < 0$, donc

$$\forall x \in\ ]a,b[, \exists y > x, \forall t \in\ ]x,y[, \qquad \left\|\frac{F(t)-F(x)}{t-x}\right\| < \frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$

de sorte que

$$\forall x \in \left]a,b\right[, \exists y > x, \forall t \in [x,y], \qquad \|F(t)-F(x)\| \leq g(t)-g(x). \tag{$*$}$$

Soit $[\alpha,\beta] \subset \left]a,b\right[$ et montrons

$$\|F(\beta)-F(\alpha)\| \leq g(\beta)-g(\alpha). \tag{$**$}$$

Soit $\Gamma = \{\theta \in \left]\alpha,\beta\right],\ \forall t \in [\alpha,\theta], \|F(t)-F(\alpha)\| \leq g(t)-g(\alpha)\}$. D'après (*), Γ est non vide. Soit $\gamma = \sup\Gamma$. Montrons $\gamma = \beta$, ce qui prouvera (**). Par continuité de F et g, on a $\|F(\gamma)-F(\alpha)\| \leq g(\gamma)-g(\alpha)$. Si $\gamma < \beta$, d'après (*),

$$\exists \delta \in \left]\gamma,\beta\right], \forall t \in [\gamma,\delta], \qquad \|F(t)-F(\gamma)\| \leq g(t)-g(\gamma),$$

donc

$$\forall t \in [\gamma,\delta], \qquad \|F(t)-F(\alpha)\| \leq \|F(t)-F(\gamma)\| + \|F(\gamma)-F(\alpha)\| \leq g(t)-g(\alpha).$$

Ceci montre que $\delta \in \Gamma$, ce qui est absurde car $\delta > \gamma = \sup\Gamma$.

L'assertion (**) est donc prouvée. En faisant tendre α vers a puis β vers b, on en déduit, en vertu de la continuité de F et g, l'inégalité $\|F(b)-F(a)\| \leq g(b)-g(a)$.

– Ramenons nous au cas général. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $g_\varepsilon(t) = g(t)+\varepsilon t$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\|F'(t)\| < g_\varepsilon(t)$ sur $\left]a,b\right[$, donc d'après ce que l'on vient de prouver, $\|F(b)-F(a)\| \leq g_\varepsilon(b)-g_\varepsilon(a)$, d'où le résultat en faisant tendre ε vers 0. □

Remarque 5. Lorsque F et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, le résultat s'obtient facilement par intégration, en écrivant $\|F(b)-F(a)\| = \|\int_a^b F'\| \leq \int_a^b \|F'\| \leq \int_a^b g' = g(b)-g(a)$.

Théorème 6 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $F:\ [a,b] \to E$ une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $\left]a,b\right[$. S'il existe $M > 0$ tel que $\|F'(t)\| \leq M$ pour tout $t \in \left]a,b\right[$, alors $\|F(b)-F(a)\| \leq M(b-a)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $g(t) = M\,t$. □

Remarque 6. Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, cette inégalité s'obtient directement à partir de l'égalité des accroissements, sans utiliser le théorème précédent.

Une conséquence importante de l'inégalité des accroissements finis est la suivante.

→ Proposition 6. *Soit $F:\ \left[a,b\right[\to E$ une application continue, dérivable sur $\left]a,b\right[$ et telle que $\ell = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F'(t)$ existe. Alors F est dérivable en a et $F'(a) = \ell$.*

Démonstration. Quitte à changer F en $F(t) - t\,\ell$ on peut supposer $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $c \in \left]a,b\right[$ tel que $\|F'(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \left]a,c\right[$. L'inégalité des accroissements finis entraîne

$$\forall t \in \left]a,c\right[, \qquad \left\|\frac{F(t)-F(a)}{t-a}\right\| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant possible pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $[F(t)-F(a)]/(t-a)$ converge vers 0 lorsque t tend vers a, d'où le résultat. □

Remarque 7. En plus de l'existence de $F'(a)$, la proposition montre que la fonction dérivée F' est continue en a.

Théorème 7 (Inégalité de Taylor-Lagrange). *Soit $F:\ [a,b] \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, $n+1$ fois dérivable sur $\left]a,b\right[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \left]a,b\right[$, $\|F^{(n+1)}(t)\| \leq M$. Alors*

$$\left\|F(b)-F(a)-(b-a)F'(a)-\cdots-\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)\right\| \leq M\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 5 aux fonctions

$$G(x) = F(b) - F(x) - (b-x)F'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!} F^{(n)}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = -M\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

→ THÉORÈME 8 (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG). *Soient $n \in \mathbb{N}$ et F une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E, de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $a \in I$ tel que $F^{(n+1)}(a)$ existe. Alors, lorsque $h \to 0$ on a*

$$F(a+h) = F(a) + h\,F'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, la formule $F(a+h) = F(a) + h\,F'(a) + o(h)$ résulte de la définition de $F'(a)$. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, ce qui entraîne (en l'appliquant à F')

$$G(h) = F'(a+h) - F'(a) - hF''(a) - \cdots - \frac{h^n}{n!}F^{(n+1)}(a) = o(h^n),$$

et montrons le au rang n. La fonction G est la dérivée de l'application

$$H(h) = F(a+h) - F(a) - hF'(a) - \cdots - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a),$$

et il s'agit de montrer que $H(h) = o(h^{n+1})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|h| < \alpha$, $|G(h)| < \varepsilon|h|^n$. Si $g(h) = \varepsilon h^{n+1}/(n+1)$, on a donc

$$\forall h, 0 < h < \alpha, \qquad \|H'(h)\| < g'(h).$$

En appliquant le théorème 5 entre les points 0 et h, on en déduit

$$\forall h, 0 \le h < \alpha, \qquad \|H(h)\| = \|H(h) - H(0)\| \le g(x) - g(0) = \varepsilon\frac{h^{n+1}}{n+1}.$$

On procéderait de même pour $-\alpha < h \le 0$, d'où le résultat. □

Citons enfin une dernière formule de Taylor, qui rend parfois de précieux services car elle donne beaucoup d'informations sur le terme de reste. L'e.v.n E doit être ici un espace de Banach pour assurer l'existence de l'intégrale (voir la définition 4 page 124).

→ THÉORÈME 9 (FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL). *Soient $n \in \mathbb{N}$ et une application $F : [a,b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, où E est un $\mathbb{R}$-espace de Banach. Alors*

$$F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,F^{(n+1)}(t)\,dt.$$

La preuve est immédiate par récurrence sur n.

1.5. Exercices

EXERCICE 1. Démontrer les inégalités suivantes.

a) $\forall x \ge 0, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \le \log(1+x) \le x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}.$

b) $\forall x \ge 0, \quad x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}.$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}.$

Solution. **a)** D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $f : x \mapsto \log(1+x)$:

$$\forall x \geq 0, \exists \theta \in]0,1[, \qquad \log(1+x) = f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(\theta x). \qquad (*)$$

Comme

$$f(x) = \log(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

on a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ et $0 \leq f'''(\theta x) \leq 2$, ce qui en remplaçant dans (*) donne le résultat demandé.

b) On procède de la même manière : on considère le développement de Taylor-Lagrange de $x \mapsto \sin x$ à l'ordre 3 pour prouver l'inégalité de gauche, à l'ordre 5 pour celle de droite.

c) Pareil en développant à l'ordre 2 puis à l'ordre 4.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable en 0 et nulle en 0. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n\ell} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Solution. Le principe est le suivant. Lorsque n est grand, chacun des termes k/n^2 pour $0 \leq k \leq n\ell$ est petit, donc au premier ordre, on a l'approximation $f(\frac{k}{n^2}) \approx f'(0)\frac{k}{n^2}$, de sorte que $S_n \approx \frac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=0}^{n\ell} k \approx \ell^2/2f'(0)$. Nous allons mettre rigoureusement en forme cette idée.

L'application f est dérivable en 0, donc $f(x) = f(0) + x\,f'(0) + o(x) = x\,f'(0) + o(x)$. Ainsi, si on se donne $\varepsilon > 0$,

$$\exists \eta > 0, \forall x \in \ [0,\eta[, \qquad |f(x) - xf'(0)| \leq \varepsilon x.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ell/N < \eta$. Pour tout $n \geq N$ et pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n\ell$, on a

$$0 \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{n\ell}{n^2} = \frac{\ell}{n} \leq \frac{\ell}{N} < \eta,$$

donc

$$\forall n \geq N, \forall k, 0 \leq k \leq n\ell, \qquad \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leq \varepsilon \frac{k}{n^2},$$

de sorte que

$$\forall n \geq N, \qquad \left| \sum_{k=0}^{n\ell} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\sum_{k=0}^{n\ell}\frac{k}{n^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{n\ell} \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{k}{n^2} \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n\ell} \frac{k}{n^2}. \qquad (*)$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n\ell} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\frac{n\ell(n\ell+1)}{2} = \frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell}{2n},$$

donc (*) s'écrit aussi

$$\forall n \geq N, \qquad \left| S_n - f'(0)\frac{\ell^2}{2} - f'(0)\frac{\ell^2}{2n} \right| \leq \varepsilon\left(\frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^2}{2n}\right) \leq \ell^2\varepsilon.$$

On a donc

$$\left| S_n - f'(0)\frac{\ell^2}{2} \right| \leq \left| S_n - f'(0)\frac{\ell^2}{2} - f'(0)\frac{\ell^2}{2n} \right| + \left| f'(0)\frac{\ell^2}{2n} \right| \leq \ell^2\varepsilon + \frac{|f'(0)|\ell^2}{2n}.$$

Si on choisit $N_1 \geq N$ tel que $|f'(0)|/(2N_1) < \varepsilon$, on a donc $|S_n - f'(0)\ell^2/2| < 2\ell^2\varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$, ce qui prouve que (S_n) converge et tend vers $f'(0)\ell^2/2$.

EXERCICE 3. **a)** Soit l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Démontrer qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-1, 1],\ \varphi(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 2,\ \varphi(x) = 0.$$

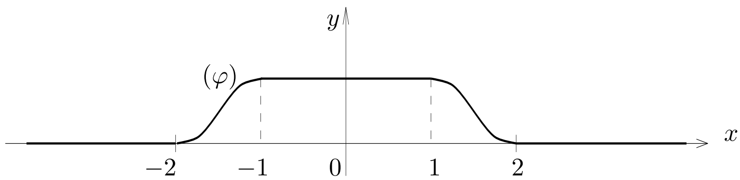


FIGURE 3. Le graphe de la fonction φ.

Solution. **a)** Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Il nous reste donc à prouver l'existence de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Commençons par montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x > 0, \qquad f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n\left(\frac{1}{x}\right). \tag{$*$}$$

Pour $n = 0$ c'est vrai avec $P_0 = 1$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$ et montrons le au rang n. Il suffit d'écrire

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-1/x} P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\, e^{-1/x} P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-1/x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $P_n(X) = X^2 P_{n-1}(X) - X^2 P'_{n-1}(X)$.

On déduit de (*) que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or pour $x < 0$, $f^{(n)}(x) = 0$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f^{(n)}(x) = 0.$$

En utilisant maintenant la proposition 6 page 76 par récurrence sur n, on en déduit que $f^{(n)}(0)$ existe pour tout n et $f^{(n)}(0) = 0$. Finalement, f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Nous allons donner deux manières de construire une telle fonction.
Première méthode. Considérons l'application

$$g: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{f(f(1) - f(x))}{f(f(1))}.$$

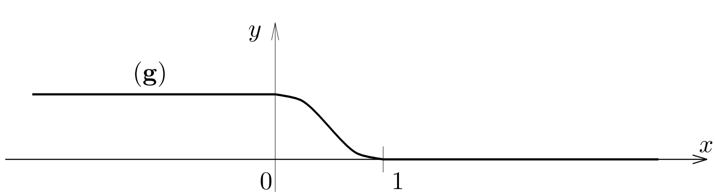


FIGURE 4. Le graphe de la fonction g.

L'application g, composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} &\forall x \leq 0, && g(x) = \frac{f(f(1) - 0)}{f(f(1))} = 1 \\ &\forall x \geq 1, && f(1) - f(x) \leq 0 \Longrightarrow f(f(1) - f(x)) = 0 \Longrightarrow g(x) = 0. \end{aligned}$$

On voit maintenant facilement que l'application $\varphi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad x\mapsto g(x-1)g(-x-1)$ convient.
Seconde méthode. L'application $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad x\mapsto f(x+1)f(-x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\,]-1,1[,\quad g(x)>0,\qquad \forall x\in\mathbb{R},|x|\geq 1,\quad g(x)=0.$$

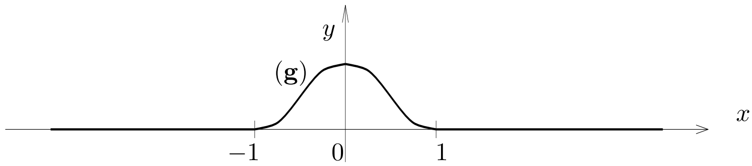


FIGURE 5. Le graphe de la fonction g (seconde méthode).

On pose maintenant $h:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad x\mapsto \frac{1}{K}\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$, où $K=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$. Cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $h(x)=0$ pour $x\leq -1$ et $h(x)=1$ pour $x\geq 1$. On termine en choisissant pour φ l'application

$$\varphi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad x\mapsto h(2x+3)h(-2x+3).$$

EXERCICE 4 (THÉORÈME DE DARBOUX). Par commodité de notation, on désigne par (t,u) l'intervalle $[t,u]$ si $t\leq u$, l'intervalle $[u,t]$ si $u<t$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:\ I\to\mathbb{R}$ une application dérivable sur I. On veut montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que $f'(I)$ est un intervalle.

On se donne $(a,b)\in I^2$ tel que $a<b$ et $y\in(f'(a),f'(b))$. Il s'agit donc de montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f'(c)=y$. Nous proposons deux méthodes pour obtenir ce résultat.

1/ (Première méthode.) On considère les deux applications

$$\varphi:\ [a,b]\to\mathbb{R}\qquad \varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad\text{si } x\neq a,\qquad \varphi(a)=f'(a)$$
$$\psi:\ [a,b]\to\mathbb{R}\qquad \psi(x)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\quad\text{si } x\neq b,\qquad \psi(b)=f'(b).$$

Montrer que $y\in\varphi([a,b])\cup\psi([a,b])$. En déduire l'existence de $c\in[a,b]$ tel que $y=f'(c)$.

2/ (Seconde méthode.) **a)** Soit $g:\ I\to\mathbb{R}$ une application vérifiant $g'(a)\geq 0$ et $g'(b)\leq 0$. Montrer l'existence de $c\in[a,b]$ tel que $g'(c)=0$.
b) En déduire qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f'(c)=y$.

Solution. **1/** L'application φ est clairement continue sur $]a,b]$, et elle est continue en a par définition de $f'(a)$. Elle est donc continue sur $[a,b]$, ce qui avec le théorème des valeurs intermédiaires entraîne

$$(\varphi(a),\varphi(b))=\left(f'(a),\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\subset\varphi([a,b]).$$

De même,

$$(\psi(a),\psi(b))=\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a},f'(b)\right)\subset\psi([a,b]).$$

On en déduit

$$(f'(a),f'(b))\subset\left(f'(a),\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\cup\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a},f'(b)\right)\subset\varphi([a,b])\cup\psi([a,b]).$$

Or $y\in(f'(a),f'(b))$, donc $y\in\varphi([a,b])\cup\psi([a,b])$.

Si $y\in\varphi([a,b])$, deux cas se présentent.

(i) Soit $y = f'(a)$, et alors c'est terminé avec $c = a$.

(ii) Soit $\exists x \in \,]a,b]$, $\quad y = \varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \,]a,x[\subset [a,b]$ tel que $y = f'(c)$.

On procéderait de même si $y \in \psi([a,b])$, d'où le résultat.

2/ a) Si $g'(a) = 0$ ou $g'(b) = 0$, c'est évident avec $c = a$ ou $c = b$. Sinon $g'(a) > 0$ et $g'(b) < 0$. Considérons le développement de Taylor-Young de g à l'ordre 1 au voisinage de a

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + o(x-a) = g(a) + (x-a)(g'(a) + \varepsilon(x-a)), \qquad \varepsilon(x-a) = o(1).$$

Il existe $\eta > 0$ tel que $\varepsilon(x-a) < g'(a)/2$ sur $[a, a+\eta]$, donc $g(x) \geq g(a) + (x-a)g'(a)/2 > g(a)$ sur $]a, a+\eta]$. On démontrerait de même l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que $g(x) > g(b)$ sur $[b-\alpha, b[$.

L'application g est continue sur le compact $[a,b]$, donc il existe $c \in [a,b]$ vérifiant $g(c) = \sup_{x\in[a,b]} g(x)$. D'après ce que l'on vient de voir, on a $c \neq a$ et $c \neq b$. Donc $c \in \,]a,b[$, et on en déduit que $g'(c) = 0$, d'où le résultat.

b) Considérons l'application $g : \ I \to \mathbb{R} \quad x \mapsto yx - f(x)$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f'(b) \geq f'(a)$. Comme $y \in [f'(a), f'(b)]$, on a $g'(a) = y - f'(a) \geq 0$ et $g'(b) = y - f'(b) \leq 0$. Le résultat de la question précédente entraîne alors l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc $y - f'(c) = 0$, donc $y = f'(c)$.

Remarque. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, ce théorème résulte tout simplement du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction dérivée f'. Mais une fonction dérivée n'est pas forcément continue (voir la remarque 1 page 71).

– Une démonstration de nature plus topologique de ce théorème fait l'objet de l'exercice 9 page 47.

– La réciproque du théorème de Darboux est fausse : une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas forcément une fonction dérivée.

EXERCICE 5 (FORMULE DE SIMPSON). **a)** Soit $\alpha > 0$ et $g : \ [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ une application impaire 5 fois dérivable sur $[-\alpha, \alpha]$. Montrer

$$\exists \theta \in \,]0, \alpha[, \qquad g(\alpha) = \frac{\alpha}{3}(g'(\alpha) + 2g'(0)) - \frac{\alpha^5}{180} g^{(5)}(\theta).$$

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^5$ sur $[a,b]$. Montrer

$$\exists \theta \in \,]a,b[, \qquad f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\theta).$$

c) (Application.) Soit $f : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^4$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = b$ telle que $x_i = a + i\frac{b-a}{2n}$ pour tout i. Si $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$, montrer

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{6n}\Big[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(b)\Big] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{n^4} \cdot \frac{M}{2880}.$$

Solution. **a)** On considère l'application

$$\varphi : \ [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto g(t) - \frac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \frac{A\,t^5}{180},$$

la constante A étant choisie telle que $\varphi(\alpha)=0$. L'application φ est trois fois dérivable et on a

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{2}{3}g'(t)-\frac{2}{3}g'(0)-\frac{t}{3}g''(t)+\frac{t^4}{36}A,\\ \varphi''(t)&=\frac{1}{3}g''(t)-\frac{t}{3}g'''(t)+\frac{t^3}{9}A,\\ \varphi'''(t)&=-\frac{t}{3}g^{(4)}(t)+\frac{t^2}{3}A.\end{aligned}$$

Comme $\varphi(0)=\varphi(\alpha)=0$ le théorème de Rolle nous assure l'existence de $\alpha_1\in\,]0,\alpha[$ tel que $\varphi'(\alpha_1)=0$.

De même, l'égalité $\varphi'(0)=\varphi'(\alpha_1)=0$ entraîne l'existence de $\alpha_2\in\,]0,\alpha_1[$ tel que $\varphi''(\alpha_2)=0$.

Comme g est impaire, g'' est impaire donc $g''(0)=0$, donc $\varphi''(0)=\varphi''(\alpha_2)=0$, de sorte qu'il existe $\alpha_3\in\,]0,\alpha_2[$ tel que $\varphi'''(\alpha_3)=0$.

Finalement, on a trouvé $\alpha_3\in\,]0,\alpha[$ tel que

$$A=\frac{1}{\alpha_3}g^{(4)}(\alpha_3)=\frac{g^{(4)}(\alpha_3)-g^{(4)}(0)}{\alpha_3-0}$$

(on a $g^{(4)}(0)=0$ car g est impaire), et d'après le théorème des accroissements finis appliqué à $g^{(4)}$, on en déduit l'existence de $\theta\in\,]0,\alpha_3[\,\subset\,]0,\alpha[$ tel que $A=g^{(5)}(\theta)$. Le résultat est ainsi prouvé car $\varphi(\alpha)=0$.

b) On pose $\alpha=\frac{b-a}{2}$ et $g:\ [-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}\quad x\mapsto f(x+\frac{a+b}{2})-f(-x+\frac{a+b}{2})$. Ainsi définie, g est impaire, et après avoir appliqué à g le résultat de la question précédente, on obtient

$$\exists\theta\in\left]0,\frac{b-a}{2}\right[,\qquad \begin{aligned}f(b)-f(a)=&\frac{b-a}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\ &-\frac{(b-a)^5}{180\cdot 2^5}\left[f^{(5)}\left(\theta+\frac{a+b}{2}\right)+f^{(5)}\left(-\theta+\frac{a+b}{2}\right)\right].\end{aligned}\qquad (*)$$

L'application f étant de classe $\mathcal{C}^5$, $f^{(5)}$ est continue donc vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, donc $f^{(5)}(]a,b[)$ est un intervalle. Comme

$$f^{(5)}\left(\theta+\frac{a+b}{2}\right)\in f^{(5)}(]a,b[)\quad\text{et}\quad f^{(5)}\left(-\theta+\frac{a+b}{2}\right)\in f^{(5)}(]a,b[),$$

on en déduit

$$\frac{1}{2}\left[f^{(5)}\left(\theta+\frac{a+b}{2}\right)+f^{(5)}\left(-\theta+\frac{a+b}{2}\right)\right]\in f^{(5)}(]a,b[),$$

donc

$$\exists\theta'\in\,]a,b[,\qquad \frac{1}{2}\left[f^{(5)}\left(\theta+\frac{a+b}{2}\right)+f^{(5)}\left(-\theta+\frac{a+b}{2}\right)\right]=f^{(5)}(\theta'),$$

d'où le résultat avec (*).

c) En appliquant le résultat de la question précédente à une primitive F de f sur $[x_{2i-2},x_{2i}]$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, on obtient l'existence de $\theta_i\in\,]x_{2i-2},x_{2i}[$ tel que

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}f(t)\,dt-\frac{b-a}{6n}(f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i}))=\frac{(x_{2i}-x_{2i-2})^5}{2880}f^{(5)}(\theta_i),$$

donc

$$\left|\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}f(t)\,dt-\frac{b-a}{6n}(f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i}))\right|\leq\frac{(b-a)^5}{2880n^5}M.$$

Il ne reste plus qu'à sommer cette relation sur i et à utiliser l'inégalité triangulaire pour en déduire le résultat.

Remarque. Le résultat de la question b) reste vrai si f est seulement supposée 5 fois dérivable. En effet, le caractère continue de $f^{(5)}$ a été utilisé pour montrer que $f^{(5)}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et on sait d'après le théorème de Darboux (voir l'exercice 4) que ceci est vérifié pour toute fonction dérivée.

EXERCICE 6. Soient $m \geq 2$ un entier, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^m$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n < m$. On suppose qu'il existe un entier k, $n < k \leq m$, tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. D'après l'égalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta_x \in]0,1[, \qquad f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta_x x).$$

Montrer l'existence et donner la valeur de $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \theta_x$.

Solution. Les hypothèses vérifiées par f entraînent l'existence d'un plus petit entier $p > n$ tel que $f^{(p)}(0) \neq 0$. La formule de Taylor-Young appliquée à f à l'ordre p donne, lorsque $x \to 0$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + o(x^p),$$

donc

$$\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta_x x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + o(x^p),$$

donc lorsque $x \to 0$, $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(\theta_x x) - f^{(n)}(0) = x^{p-n} \frac{n!}{p!} f^{(p)}(0) + o(x^{p-n}) \sim x^{p-n} \frac{n!}{p!} f^{(p)}(0). \qquad (*)$$

L'égalité de Taylor-Young appliquée à $f^{(n)}$ donne, lorsque $x \to 0$, $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(\theta_x x) - f^{(n)}(0) = \frac{(\theta_x x)^{p-n}}{(p-n)!} f^{(p)}(0) + o(x^{p-n}) \sim \frac{(\theta_x x)^{p-n}}{(p-n)!} f^{(p)}(0).$$

Avec (*), on en déduit

$$\frac{(\theta_x x)^{p-n}}{(p-n)!} \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\sim} \frac{x^{p-n} n!}{p!} \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \theta_x = \left(\frac{(p-n)!n!}{p!} \right)^{1/(p-n)} = \left(C_p^n \right)^{-1/(p-n)}.$$

→ EXERCICE 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \geq 2$. On suppose qu'il existe des réels $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$, tels que $f(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

a) Montrer

$$\forall x \in [a,b], \exists u \in [a,b], \qquad f(x) = \frac{f^{(n)}(u)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

b) Soit $M = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n)}(t)|$. Montrer que

$$\forall x \in [a,b], \qquad |f(x)| \leq \frac{M}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|.$$

c) Montrer que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad |f'(x_i)| \leq \frac{M}{n!} \prod_{j \neq i} |x_i - x_j|.$$

d) Plus généralement, montrer que

$$\forall x \in [a,b], \qquad |f'(x)| \leq \frac{M}{n!} \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} |x - x_j| \right).$$

Que dire si $n = 2$, $a = x_1$ et $b = x_2$?

Solution. **a)** S'il existe i tel que $x = x_i$, c'est terminé. Sinon, on considère l'application

$$\varphi_x : \ [a,b] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto f(t) - A\prod_{i=1}^{n}(t - x_i),$$

où la constante A est choisie telle que $\varphi_x(x) = 0$. Cette application est de classe $\mathcal{C}^n$ et s'annule (au moins) en $n+1$ points distincts (x et les $(x_i)_{1\le i\le n}$). En appliquant le théorème de Rolle, on en déduit que φ'_x s'annule en n points distincts. En l'appliquant ensuite à φ'_x, on en déduit en φ''_x s'annule en $n-1$ points distincts. En poursuivant ainsi, on s'aperçoit que $\varphi_x^{(n)}$ s'annule en au moins un point u. On en déduit $\varphi_x^{(n)}(u) = 0 = f^{(n)}(u) - An!$, donc $A = f^{(n)}(u)/n!$, et comme $\varphi_x(x) = 0$, on en déduit le résultat.

b) C'est une conséquence immédiate du résultat de la question précédente.

c) D'après la question précédente, pour tout $x \neq x_i$ on a

$$\left|\frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}\right| = \left|\frac{f(x)}{x - x_i}\right| \le \frac{M}{n!}\prod_{j\neq i}|x - x_j|,$$

d'où le résultat en faisant tendre x vers x_i.

d) S'il existe i tel que $x = x_i$, c'est terminé d'après la question précédente. Sinon, nous allons construire une application qui s'annule en n points dont x et lui appliquer le résultat de la question c). Posons

$$\psi_x : \ [a,b] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto f(t) - f(x)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{t - x_i}{x - x_i}\right).$$

Cette application s'annule aux n points $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et x, donc en lui appliquant c) au point x, on en déduit

$$|\psi'_x(x)| \le \frac{M}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}|x - x_i|$$

(car $\psi_x^{(n)} = f^{(n)}$, donc $|\psi_x^{(n)}(x)| \le M$ pour tout x). Ceci s'écrit aussi

$$\left|f'(x) - \frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{\substack{j\neq i\\ j\neq n}}(x - x_j)\right)\right| \le \frac{M}{n!}\prod_{i\neq n}|x - x_i|$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\le \frac{|f(x)|}{\prod_{i=1}^{n-1}|x - x_i|}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{\substack{j\neq i\\ j\neq n}}|x - x_j|\right)\right] + \frac{M}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}|x - x_i| \\ &\le \frac{M}{n!}|x - x_n|\sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{\substack{j\neq i\\ j\neq n}}|x - x_j|\right) + \frac{M}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}|x - x_i| = \frac{M}{n!}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}|x - x_j|\right).\end{aligned}$$

Lorsque $n = 2$, $x_1 = a$ et $x_2 = b$, ceci s'écrit

$$|f'(x)| \le \frac{M}{2}[(x - a) + (b - x)] = M\frac{b - a}{2}.$$

EXERCICE 8. Soient $n \ge 2$ un entier et $f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$. Pour tout entier k, $0 \le k \le n$, on note $M_k = \sup_{t\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(t)| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On suppose que M_0 et M_n ont des valeurs finies.

a) Montrer que pour tout entier k, $0 < k < n$, M_k a une valeur finie.

b) Montrer que si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f^{(n)}(t) = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} f^{(k)}(t) = 0$ pour tout entier k tel que $0 < k < n$.
c) Montrer que pour tout entier m, $1 \le m \le n$, et pour tout entier k, $0 \le k \le m$,

$$M_k \le 2^{k(m-k)/2} M_0^{1-k/m} M_m^{k/m}.$$

(Indication. On pourra commencer par montrer que $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$.)

Solution. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$, il existe d'après le théorème de Taylor-Lagrange $\theta_{i,x} \in]0,i[$ tel que

$$f(x+i) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} i^k \,\frac{f^{(k)}(x)}{k!} + i^n\,\frac{f^{(n)}(x+\theta_{i,x})}{n!},$$

ce qui, en posant

$$X_i(x) = f(x+i) - f(x) - \frac{i^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta_{i,x}) \quad \text{et} \quad Y_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

s'écrit $X_i(x) = \sum_{k=1}^{n-1} i^k Y_k(x)$. En notant $X(x)$ (resp. $Y(x)$) le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n-1}$ dont les composantes sont les $X_i(x)$ (resp. $Y_i(x)$), ceci s'écrit matriciellement $X(x) = M\,Y(x)$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1) & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a $\det(M) = \text{Vandermonde}(1,2,\dots,n-1) \ne 0$, donc M est inversible. L'application linéaire $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ $\;X \mapsto M^{-1}X$ est continue (on est en dimension finie) donc il existe $A > 0$ tel que $\|M^{-1}X\| \le A\|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^{n-1}$. Les hypothèses sur f entraînent que $x \mapsto X(x)$ est bornée, et comme $\|Y(x)\| = \|M^{-1}X(x)\| \le A\|X(x)\|$, on en déduit que $x \mapsto Y(x)$ est bornée, ce qu'il fallait démontrer.

b) Comme $\lim_{x\to+\infty} \|X(x)\| = 0$, et que $\|Y(x)\| \le A\|X(x)\|$, on en déduit $\lim_{x\to+\infty} \|Y(x)\| = 0$.

c) Comme indiqué, nous commençons par montrer

$$M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}. \qquad (**)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h > 0$,

$$\begin{cases} \exists \theta_1 \in]0,1[\quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2} f''(x+\theta_1 h) \\ \exists \theta_2 \in]0,1[\quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \dfrac{h^2}{2} f''(x-\theta_2 h) \end{cases}$$

Ceci entraîne

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}[f''(x-\theta_2 h) - f''(x+\theta_1 h)],$$

donc

$$|f'(x)| \le \frac{2M_0}{2h} + \frac{h}{4} 2M_2 = \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2.$$

Ceci est vrai pour tout $h > 0$. On va donc choisir h tel que $\frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$ soit minimal. Une rapide étude de la fonction $\psi :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$ montre qu'elle atteint son minimum pour $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, point en lequel elle vaut $\sqrt{2M_0M_2}$. Cette majoration étant vraie pour tout x, on en déduit (**).

Montrons maintenant le résultat demandé. Nous procédons par récurrence sur m. Si $m = 1$, c'est évident, et le cas $m = 2$ est une conséquence de (**). Supposons le résultat vrai jusqu'au rang m et montrons le au rang $m+1$. En appliquant (**) à $f^{(m-1)}$, on obtient $M_m \leq \sqrt{2M_{m-1}M_{m+1}}$. Or $M_{m-1} \leq 2^{(m-1)/2} M_0^{1/m} M_m^{(m-1)/m}$, donc

$$M_m^2 \leq 2M_{m-1}M_{m+1} \leq 2^{(m+1)/2} M_0^{1/m} M_m^{(m-1)/m} M_{m+1}.$$

Si $M_m = 0$, alors f est polynomiale de degré $< m$ et la propriété est trivialement vérifiée au rang $m+1$. Sinon la dernière inégalité entraîne

$$M_m^{1+1/m} \leq 2^{(m+1)/2} M_0^{1/m} M_{m+1}. \tag{***}$$

Soit k, $0 \leq k \leq m+1$. Si $k = m+1$, le résultat est évident, sinon d'après l'hypothèse de récurrence,

$$M_k \leq 2^{k(m-k)/2} M_0^{1-k/m} M_m^{k/m},$$

et en élevant (***) à la puissance $k/(m+1)$ puis en remplaçant dans cette dernière inégalité, on obtient

$$M_k \leq 2^{k(m+1-k)/2} M_0^{1-k/(m+1)} M_{m+1}^{k/m+1},$$

d'où le résultat.

EXERCICE 9 (UNE FONCTION CONTINUE, NULLE PART DÉRIVABLE). On note Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, dont la restriction à $[-1/2, 1/2]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$. Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$

est continue mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\Delta(x)| \leq 1/2$ donc la série de fonctions $\sum \frac{1}{2^p}\Delta(2^p x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et comme Δ est continue, f est aussi continue.

Montrons maintenant que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. Comme f est 1-périodique, il suffit de montrer que f n'est dérivable en aucun point de $[0, 1[$. Soit $x_0 \in [0, 1[$. On considère l'écriture diadique de x_0 : $x_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$, où $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ pour tout k. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \quad \text{et} \quad x''_n = x'_n + \frac{1}{2^n}.$$

Les suites (x'_n) et (x''_n) tendent vers x_0. Lorsque $p \geq n$, les nombres $2^p x'_n$ et $2^p x''_n$ sont des entiers, donc $\Delta(2^p x'_n) = \Delta(2^p x''_n) = 0$. Maintenant, si $p < n$, on a

$$2^p x'_n = N + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \quad \text{où} \quad N = \sum_{k=1}^{p} 2^{p-k}\, \varepsilon_k \quad \text{est un entier,}$$

donc

$$\Delta(2^p x'_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}\right), \quad \text{et de même} \quad \Delta(2^p x''_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}}\right). \tag{*}$$

Si $\varepsilon_{p+1} = 0$, l'encadrement

$$0 \leq \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \leq \sum_{k=p+2}^{n} \frac{1}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} = \frac{1}{2}$$

montre que dans (*), les valeurs de Δ sont prises sur un intervalle où Δ croit, et étant donnée la forme de Δ, on en déduit finalement

$$\text{si} \quad \varepsilon_{p+1} = 0, \qquad \Delta(2^p x_n'') - \Delta(2^p x_n') = 2^p(x_n'' - x_n') = \frac{1}{2^{n-p}}.$$

On montrerait de même

$$\text{si} \quad \varepsilon_{p+1} = 1, \qquad \Delta(2^p x_n'') - \Delta(2^p x_n') = -\frac{1}{2^{n-p}}.$$

En résumé, on a $\Delta(2^p x_n'') - \Delta(2^p x_n') = (-1)^{\varepsilon_{p+1}}/2^{n-p}$ pour $0 \leq p < n$, donc finalement

$$f(x_n'') - f(x_n') = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^n} \quad \text{ou encore} \quad \frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_{p+1}},$$

ce qui montre que la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{f(x_n'')-f(x_n')}{x_n''-x_n'}$ ne converge pas. Si maintenant f est dérivable en x_0, on a

$$f(x_n') - f(x_0) = (x_n' - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon_n'] \quad \text{et} \quad f(x_n'') - f(x_0) = (x_n'' - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon_n'']$$

où les suites (ε_n') et (ε_n'') tendent vers 0. Par différence, on a

$$f(x_n'') - f(x_n') = (x_n'' - x_n')f'(x_0) + (x_0 - x_n')\varepsilon_n' + (x_n'' - x_0)\varepsilon_n'',$$

et comme $x_n' \leq x_0 \leq x_n''$, ceci entraîne

$$|f(x_n'') - f(x_n') - (x_n'' - x_n')f'(x_0)| \leq (x_n'' - x_n')(\varepsilon_n' + \varepsilon_n'') \quad \text{donc} \quad |y_n - f'(x_0)| \leq \varepsilon_n' + \varepsilon_n'',$$

donc (y_n) converge vers $f'(x_0)$, ce qui est contradictoire. Donc f n'est pas dérivable en x_0, d'où le résultat.

Remarque. Une méthode non constructive de la preuve de l'existence d'une fonction continue jamais dérivable est donnée à l'exercice 4 page 421.

2. Développements limités et développements asymptotiques

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-e.v.n.

2.1. Relations de comparaison

Soit X un espace métrique. On considère deux applications f, g de $D \subset X$ dans E et x_0 un point d'accumulation de D.

— On dit que f est *dominée* par g au voisinage de x_0 si

$$\exists C > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V \cap D, \qquad \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$$

(où $\mathcal{V}(x_0)$ désigne l'ensemble des voisinages de x_0). On note alors $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$ (lire "grand o", notation de Landau) ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\preccurlyeq} g(x)$ (notation de Hardy).

— On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V \cap D, \qquad \|f(x)\| \leq \varepsilon\|g(x)\|.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$ (lire "petit o", notation de Landau) ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\prec\!\!\prec} g(x)$ (notation de Hardy).

— On dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de x_0 si $f(x) - g(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$, et on écrit alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Remarque 8. — Il faut prendre garde au fait que les notations de Landau sont des abus. Lorsqu'on écrit $f(x) = O(g(x))$ par exemple, il n'y a pas à proprement parler d'égalité (si $f_1(x) = O(g(x))$ et $f_2(x) = O(g(x))$, on ne peut pas dire $f_1(x) = f_2(x)$) — une notation correcte serait $f(x) \in O(g(x))$. Cependant, l'usage est bien établi et cette notation est très commode, c'est pourquoi on l'utilise beaucoup.
— Dans la pratique, on utilisera souvent cette notation pour des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de l'infini, ou pour des suites réelles ou complexes (u_n) lorsque $n \to +\infty$.
— Attention ! La relation $\sim$ se manie avec précaution. En particulier, elle n'est pas compatible avec l'addition, par exemple

$$x + 2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x + 1, \quad -x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x \quad \text{et pourtant} \quad 2 \underset{x\to+\infty}{\not\sim} 1.$$

Par contre, l'équivalence est compatible avec le produit et la puissance (si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, $f_1g_1 \sim g_1g_2$; si $f \sim g$, $f^\alpha \sim g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).

2.2. Développements asymptotiques

Échelle de comparaison.

Définition 3. Soit X un espace métrique et $x_0 \in X$. On appelle *échelle de comparaison* un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de x_0 dans X sauf éventuellement en x_0, et vérifiant la propriété suivante : si $f, g \in \mathcal{E}$, alors $f = g$ ou bien $f = o(g)$ ou bien $g = o(f)$.

Exemple 1. Au voisinage de $+\infty$ pour les fonctions de la variable réelle, les échelles de comparaison les plus courantes sont les suivantes :
— celles constituées des fonctions du type x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$),
— plus généralement celles constituées des fonctions du type $x^\alpha(\log x)^\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
— plus généralement celles constituées des fonctions du type $x^\alpha(\log x)^\beta e^{cx^\gamma}$ ($\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$).

De même, au voisinage de 0, une échelle de comparaison courante est celle contenant les fonctions du type $x^\alpha \log^\beta x$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Développements asymptotiques.

Définition 4. Soit X un espace métrique. Soient $f : D \subset X \to E$ une application, x_0 un point d'accumulation de D dans X et k un entier naturel non nul. On appelle *développement asymptotique* à k termes de f par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ au voisinage de x_0 toute expression de la forme

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_kf_k$$

vérifiant

(i) $c_1, \ldots, c_k \in E$ sont des constantes multiplicatives,
(ii) $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{E}$ avec pour tout i, $f_{i+1}(x) \underset{x\to x_0}{=} o(f_i(x))$,
(iii) $f(x) \underset{x\to x_0}{=} c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_kf_k(x) + o(f_k(x))$.

Lorsque qu'un tel développement par rapport à $\mathcal{E}$ existe pour f, il est unique. On a en particulier $f(x) \sim c_1f_1(x)$, et on dit que c_1f_1 est la *partie principale* (ou l'*équivalent*) de f au voisinage de x_0.

L'unicité découle facilement des propriétés vérifiées par une échelle de comparaison.

Remarque 9. Lorsque l'on ne précise pas l'échelle de comparaison par rapport à laquelle on veut un développement asymptotique, c'est en général une des échelles usuelles décrites dans l'exemple 1.

Exemple 2. On peut démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le développement asymptotique suivant, lorsque $x \to +\infty$:

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(k-1)!\,x}{\log^k x} + o\left(\frac{x}{\log^k x}\right).$$

(voir l'exercice 8 page 173).

2.3. Développements limités

Dans la suite de cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

Définition 5. Soit $f : I \to E$ une application, et supposons $0 \in I$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f admet un *développement limité d'ordre* n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in E$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n).$$

Remarque 10.

— Une définition équivalente est $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

— On pourrait de même définir les développements limités au voisinage d'un point quelconque a de $\overline{I}$ (en développant avec des termes de la forme $\alpha\,(x-a)^k$ — ou $1/x^k$, $k \in \mathbb{N}$, lorsque $a = \pm\infty$). Nous avons choisi de nous limiter à $a = 0$ pour alléger les notations.

— Un développement limité est aussi un développement asymptotique par rapport à l'échelle de comparaison constituée des fonctions de la forme x^n ($n \in \mathbb{N}$).

Il découle de l'unicité d'un développement asymptotique le résultat suivant.

Proposition 7. *Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, il est unique.*

Proposition 8. *Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de* 0

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n),$$

alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Remarque 11. Attention ! Même lorsque $n \geq 2$, l'existence d'un développement limité d'ordre n n'assure pas l'existence de $f''(0)$. Par exemple, la fonction f définie par

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 1,$$

n'est pas deux fois dérivable en 0, et pourtant elle vérifie $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0.

Proposition 9. *Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\to E$ une application admettant au voisinage de 0 un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n).$$

— *Si f est paire, tous les termes a_k d'indices k impairs sont nuls.*
— *Si f est impaire, tous les termes a_k d'indices k pairs sont nuls.*

Condition suffisante de l'existence d'un développement limité. La formule de Taylor-Young entraîne immédiatement le résultat suivant.

→ Proposition 10. *Si $f : I \to E$ est une application n fois dérivable en 0, alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n suivant :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o(x^n).$$

2.4. Opérations sur les développements limités

Intégration terme à terme.

PROPOSITION 11. *Soit $f : I \to E$ (avec $0 \in I$) une application dérivable sur I telle qu'au voisinage de* 0

$$f'(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n).$$

Alors l'application f admet au voisinage de 0 *le développement limité d'ordre $n+1$ suivant*

$$f(x) = f(0) + a_0\,x + \frac{a_1}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Dérivation d'un développement de Taylor.

PROPOSITION 12. *Soit $f : I \to E$ (avec $0 \in I$) une application $n \geq 2$ fois dérivable en* 0*. Si au voisinage de* 0*, on a*

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n),$$

alors au voisinage de 0*,*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2\,x + \cdots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Remarque 12. Sans l'hypothèse d'existence de $f^{(n)}(0)$, le résultat est faux. Considérez par exemple l'application f introduite à la remarque 11 : f admet un développement limité d'ordre 2 et pourtant, $f'(x)$ qui existe sur un voisinage de 0, n'admet pas de développement limité au voisinage de 0 (f' n'a pas de limite en 0).

Somme, produit, quotient de développements limités.

PROPOSITION 13. *Soient f et $g : I \to E$ (avec $0 \in I$) deux applications admettant au voisinage de* 0 *un développement limité d'ordre n :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n), \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n),$$

où P_n et Q_n sont deux fonctions polynomiales de degré $\leq n$. Alors

- *la somme $f+g$ admet un développement limité d'ordre n donné par $(f+g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + o(x^n)$,*
- *Si E est une algèbre normée, le produit fg admet un développement limité d'ordre n donné par $(fg)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le reste de la division euclidienne de P_nQ_n par X^{n+1} : $P_nQ_n = R_n + X^{n+1}S_n$ avec $\deg(R_n) \leq n$,*
- *Si $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$, et si $g(0) = Q(0) \neq 0$, le quotient f/g admet un développement limité d'ordre n donné par $(f/g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le quotient de la division selon les puissances croissantes de P_n par Q_n à l'ordre n.*

Développement limité d'une fonction composée.

PROPOSITION 14. *Soient $g : I \to \mathbb{R}$ (avec $0 \in I$) une application admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de* 0*, et $f : J \to E$ (où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $g(I) \subset J$) une application admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de $g_0 = g(0)$. On écrit, au voisinage de* 0*,*

$$g(x) = g_0 + P_n(x) + o(x^n) \quad \textit{et} \quad f(g_0 + t) = Q_n(t) + o(t^n),$$

où P_n et Q_n sont deux polynômes de degré $\leq n$ avec $P_n(0) = 0$. Alors la fonction composée $f \circ g$ admet au voisinage de 0 *un développement limité d'ordre n : $f \circ g(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le reste de la division euclidienne de $P_n \circ Q_n$ par X^{n+1} ($P_n \circ Q_n = R_n + X^{n+1}S_n$, $\deg(R_n) \leq n$).*

2.5. Développements limités usuels au voisinage de 0

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir facilement les développements limités suivants, lorsque $x \to 0$.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

En intégrant respectivement les développements limités de $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (qui sont connus grâce aux formules précédentes), on obtient

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{argth} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{argsh} x &= x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

Enfin, le développement limité de la fonction $x \mapsto \tan x$ peut être effectué grâce à la proposition 13. Les calculs sont un peu lourds dès que l'on veut dépasser l'ordre 4, c'est pourquoi il est bon de connaître ses premiers termes :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8).$$

Remarque 13. Celui de $\tan x$ mis à part, il n'est pas nécessaire d'apprendre par cœur ces développement limités. Il faut par contre savoir les retrouver rapidement.

2.6. Formes indéterminées

Beaucoup d'exercices exigent de connaître les développements limités pour trouver la limite d'une forme indéterminée. Par exemple, nous allons montrer l'existence et donner la valeur de $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$. Les développements limités usuels donnent

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad \tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3},$$

et on en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$.

2.7. Exercices

Exercice 1. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes

$$\textbf{a)}\quad x \mapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{1/2} \qquad \textbf{b)}\quad x \mapsto \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\textbf{c)}\quad x \mapsto (1+2x)^{1/(1+x)} \qquad \textbf{d)}\quad x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\textbf{e)}\quad x \mapsto e^{\sinh x} - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Solution. **a)** Le développement limité $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$ entraîne

$$\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{1/2} = \left[1 + \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)\right]^{1/2} = \sqrt{2}\left[1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right]^{1/2},$$

ce qui, par composition des développements limités est égal à

$$\sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + o(x^4)\right] = \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{158}x^4 + o(x^4)\right].$$

b)

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^4)$$
$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).$$

c) En procédant de même, on trouve

$$(1+2x)^{1/(1+x)} = \exp\left(\frac{\log(1+2x)}{1+x}\right) = 1 + 2x - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4 + o(x^4).$$

d) Cette fois, on commence par développer $\sin x$ et $\sinh x$ à l'ordre 7, ce qui entraîne

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{1}{x^2}\left[\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6)\right)^{-2} - \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{7!} + o(x^6)\right)^{-2}\right].$$

En utilisant le développement limité $(1+u)^{-2} = 1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + 5u^4 + o(u^4)$ on trouve, après calculs

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{2}{3} + \frac{4}{189}x^4 + o(x^4).$$

e) On commence par calculer le développement de $\varphi(x) = \log\left|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right|$. Le moyen le plus simple est certainement de remarquer que

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

puis d'intégrer ce développement limité, ce qui donne

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Maintenant, après calculs

$$e^{\sinh x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4),$$

et finalement

$$e^{\sinh x} - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 2. Calculer le développement limité

a) à l'ordre 4, au voisinage de 1, de l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{-1+\log x}}$,

b) à l'ordre 4, au voisinage de $+\infty$, de l'application $x \mapsto (x^3 + x)^{1/3} - (x^3 - x)^{1/3}$,

c) à l'ordre 3, au voisinage de $\pi/6$, de $x \mapsto \log(2 \sin x)$.

Solution. **a)** Posons $t = x - 1$. La relation

$$x^{\frac{1}{-1+\log x}} = \exp\left(\frac{\log(1+t)}{-1 + \log(1+t)}\right) = \exp\left(1 + \frac{1}{-1 + \log(1+t)}\right),$$

permet, à partir du développement limité de $\log(1 + t)$ et par composition de développements limités, de montrer

$$x^{\frac{1}{-1+\log x}} = 1 - (x-1) + \frac{(x-1)^4}{12} + o[(x-1)^4].$$

b) On écrit

$$(x^3 + x)^{1/3} - (x^3 - x)^{1/3} = x\left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/3}\right],$$

et le développement limité de $(1 \pm x^{-2})^{1/3}$ en $1/x$ donne, après calculs

$$(x^3 + x)^{1/3} - (x^3 - x)^{1/3} = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

c) On commence par écrire

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos t + \sin t \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,$$

puis on calcule le développement limité de $\sin t$ et $\cos t$ en $t = 0$, et après composition de développements limités, on trouve

$$\log(2\sin x) = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3\right].$$

Exercice 3. Donner la limite, lorsque x tend vers 0^+, des expressions suivantes

$$\textbf{a)}\quad \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x} \qquad \textbf{b)}\quad \frac{x^{x^x}\log x}{x^x - 1}$$

c) $\dfrac{(1+x)^{\log x/x}-x}{x\,(x^x-1)}$ **d)** $(\cos x)^{\cot x^2}$ **e)** $\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

Solution. Tout le problème, dans ce type d'exercices, est de sentir à l'avance jusqu'à quel ordre on va devoir développer pour obtenir le résultat.

a) On développe jusqu'à l'ordre 3

$$e^{\sin x}-e^{\tan x}=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\sim-\frac{x^3}{2},\qquad \sin x-\tan x=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\sim-\frac{x^3}{2},$$

donc l'expression proposée est équivalente à 1, donc a pour limite 1 lorsque $x\to 0^+$.

b) Comme $x\log x=o(1)$, on a

$$x^{x^x}=x^{\exp(x\log x)}=x^{1+x\log x+o(x\log x)}=x\cdot\exp\left(\log x(x\log x+o(x\log x))\right)\sim x$$

et

$$x^x-1=e^{x\log x}-1\sim x\log x,$$

et on en déduit facilement que la limite recherchée est 1.

c) On écrit

$$\begin{aligned}(1+x)^{\log x/x}&=\exp\left(\log(1+x)\frac{\log x}{x}\right)=\exp\left((x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\frac{\log x}{x}\right)\\&=\exp\left(\log x-\frac{x}{2}\log x+o(x\log x)\right)=x\cdot\exp\left(-\frac{x}{2}\log x+o(x\log x)\right)\\&=x\cdot\left(1-\frac{x}{2}\log x+o(x\log x)\right)=x-\frac{x^2}{2}\log x+o(x^2\log x)\end{aligned}$$

ce qui montre que le numérateur de l'expression est équivalent à $-x^2\log x/2$ lorsque $x\to 0^+$. Le dénominateur vérifie

$$x(x^x-1)=x(e^{x\log x}-1)\sim x\cdot x\log x=x^2\log x,$$

et finalement, la limite recherchée est égale à $-1/2$.

d) Lorsque $u\to 0^+$, on a

$$\cot u=\frac{1}{\tan u}=\frac{1}{u+o(u)}=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1+o(1)}=\frac{1}{u}+o\left(\frac{1}{u}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}(\cos x)^{\cot x^2}&=\exp\left[\left(\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right]\\&=\exp\left[\left(\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right]=\exp\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right),\end{aligned}$$

ce qui montre que la limite recherchée est $1/\sqrt{e}$.

e) Il y a une astuce à connaître. Posons $y=\arccos(1-x)$. On a $1-x=\cos y$ donc $x=1-\cos y=2\sin^2(y/2)$, d'où $\sin y/2=\sqrt{x/2}$ et finalement $y=2\arcsin\sqrt{x/2}$. Cette relation permet de calculer un nombre de termes quelconque du développement asymptotique de $\arccos(1-x)$ lorsque $x\to 0^+$ (un autre moyen de faire est de calculer un développement asymptotique de la dérivée de $\arccos(1-x)$ — qui a une forme suffisamment explicite — puis de l'intégrer). En particulier,

$$\arccos(1-x)\sim 2\sqrt{\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\,x,$$

et on en déduit que la limite recherchée est $\sqrt{2}$.

Exercice 4. Donner la limite, lorsque $x \to +\infty$, des expressions suivantes :

$$\textbf{a)}\quad \left[\left(\frac{\log(x+1)}{\log x}\right)^x - 1\right]\log x \qquad \textbf{b)}\quad \left[e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{1/x}.$$

Solution. **a)** On écrit

$$\frac{\log(x+1)}{\log x} = \frac{\log x + \log(1+\frac{1}{x})}{\log x} = 1 + \frac{1}{x\log x} + o\left(\frac{1}{x\log x}\right),$$

donc

$$\left[\left(\frac{\log(x+1)}{\log x}\right)^x - 1\right]\log x = \left[\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x\log x}+o\left(\frac{1}{x\log x}\right)\right)\right)-1\right]\log x$$
$$= \left[\exp\left(\frac{x}{x\log x}+o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)-1\right]\log x = \left[1+\frac{1}{\log x}+o\left(\frac{1}{\log x}\right)-1\right]\log x = 1+o(1),$$

et la limite recherchée est 1.

b) Le développement limité

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e\left(1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

montre que

$$e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{e}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc l'expression proposée est égale à

$$\left(\frac{e}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/x} = \exp\left[\frac{1}{x}\log\left(\frac{e}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = e^{o(1)}$$

et sa limite est donc 1 lorsque $x \to +\infty$.

3. Fonctions convexes, fonctions réglées

3.1. Fonctions convexes

Dans toute cette sous-partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

Définition 1. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \qquad f[(1-\lambda)a+\lambda b] \le (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b). \tag{$*$}$$

Elle est dite *concave* si $-f$ est convexe.

Remarque 1.
- Lorsque l'inégalité (*) est stricte pour tout $\lambda \in]0,1[$ (lorsque $a \neq b$) on dit que f est *strictement convexe*.
- La fonction f est convexe si et seulement si l'ensemble $\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \ge f(x)\}$ est convexe.
- L'inégalité (*) exprime le fait que tous les points du segment $[(a,f(a)),(b,f(b))]$ sont au dessus du graphe de f.

Proposition 1. *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, l'application*

$$g_{x_0} : I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto g_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

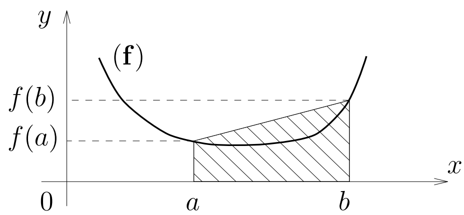


FIGURE 6. Entre a et b, les points du graphe de la fonction convexe f se trouvent en dessous de la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

est croissante.

Conséquence : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et si $a, b, c \in I$, avec $a < b < c$, on a (en appliquant la proposition précédente à g_a puis à g_c) l'inégalité suivante entre les taux de variation (voir aussi la figure ci-contre)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

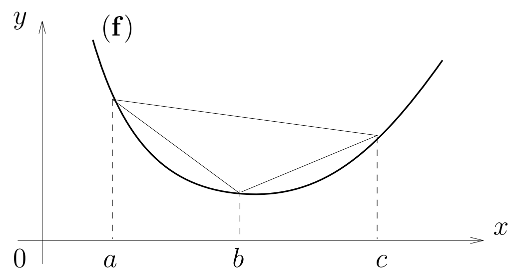


FIGURE 7. La propriété de croissance de la pente des cordes pour une fonction convexe f.

La proposition précédente entraîne aussi le résultat qui suit.

PROPOSITION 2. *Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ possède en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\mathring{I}$ (pas forcément aux bornes de I). De plus, les applications f'_{g} et f'_{d} sont croissantes sur $\mathring{I}$ et $f'_{\mathrm{g}}(x) \leq f'_{\mathrm{d}}(x)$ pour tout $x \in \mathring{I}$.*

THÉORÈME 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f est convexe.

(ii) f' est croissante.

(iii) La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.

COROLLAIRE 1. *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

PROPOSITION 3. *Soit une application $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in I, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0, \quad f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

Inégalités classiques. THÉORÈME 1 (INÉGALITÉ ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE). *Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels positifs. On a*

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Démonstration. Cela provient de la concavité de la fonction logarithme. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -\log x$. Cette application est deux fois dérivable et $f''(x) = 1/x^2 > 0$ pour tout $x > 0$. C'est donc une fonction convexe, ce qui entraîne

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

d'après la proposition 3, c'est-à-dire

$$\log\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \log\left[(x_1 \cdots x_n)^{1/n}\right],$$

et la fonction logarithme étant croissante, on en déduit le théorème. □

THÉORÈME 2 (INÉGALITÉ DE HÖLDER). *Soient deux nombres réels $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous nombres réels positifs $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ on a*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Démonstration. La concavité de la fonction logarithme entraîne

$$\forall x, y > 0, \quad \frac{\log x}{p} + \frac{\log y}{q} \leq \log\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \quad \text{donc} \quad x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q},$$

inégalité qui reste vraie lorsque x ou y est nul. En choisissant

$$x = \frac{a_i^p}{\sum_j a_j^p} \quad \text{et} \quad y = \frac{b_i^q}{\sum_j b_j^q},$$

(on peut supposer qu'au moins l'un des a_i et l'un des b_j sont non nuls, sinon l'inégalité de Hölder est immédiate) on tire

$$\frac{a_i}{(\sum_j a_j^p)^{1/p}} \cdot \frac{b_i}{(\sum_j b_j^q)^{1/q}} \leq \frac{a_i^p}{p(\sum_j a_j^p)} + \frac{b_i^q}{q(\sum_j b_j^q)},$$

puis en sommant sur i

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{(\sum_j a_j^p)^{1/p} (\sum_j b_j^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

d'où l'inégalité désirée. □

Remarque 2. Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Schwarz.

THÉORÈME 3 (INÉGALITÉ DE MINKOWSKY). *Soient $p \geq 1$ un nombre réel et $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ des nombres réels positifs. Alors*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=i}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=i}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

Démonstration. Si $p = 1$, c'est évident. Sinon, on pose $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. D'après l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

et

$$\sum_{i=1}^n y_i(x_i+y_i)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^{q(p-1)}\right)^{1/q},$$

ce qui par sommation entraîne (sachant que $q(p-1)=p$)

$$\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p \le \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}\right] \left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/q}$$

donc

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right]^{1-1/q} \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p},$$

(on peut supposer que les x_i et y_j sont non tous nuls — sinon l'inégalité est évidente — ce qui autorise à simplifier) d'où le résultat car $1-1/q = 1/p$. □

Conséquence : Pour tout $p \ge 1$, considérons la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

L'inégalité de Minkowsky entraîne que N vérifie l'inégalité triangulaire. On en déduit facilement que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$. On la note souvent $\|\,.\,\|_p$. Remarquons aussi que

$$\sup_i |x_i| = \|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|(x_1,\dots,x_n)\|_p.$$

3.2. Fonctions réglées

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace de Banach, et $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

DÉFINITION 2. Une application $\varphi : [a,b] \to E$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que pour tout i, φ soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$.

DÉFINITION 3. Une application $f : [a,b] \to E$ est dite *réglée* si elle est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions en escalier. En d'autres termes, f est réglée si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ est escalier telle que $\|f(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$.

PROPOSITION 4. *Une fonction réglée sur $[a,b]$ est bornée.*

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction réglée. Il existe une fonction en escalier φ telle que $\|f(x) - \varphi(x)\| < 1$ pour tout $x \in [a,b]$. Comme φ est en escalier, φ est bornée. Soit M un majorant de $\|\varphi\|$ sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, $\|f(x)\| < 1 + \|\varphi(x)\| \le 1 + M$, ce qui prouve le résultat. □

DÉFINITION 4. Une application $f : [a,b] \to E$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle *ouvert* $]x_{i-1}, x_i[$ soit prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$.

Remarque 3. — La condition "prolongeable en une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$" est importante ; elle équivaut à dire que la limite à droite (resp. à gauche) de $f(x)$ lorsque x tend vers x_{i-1} (resp. vers x_i) existe.
— L'ensemble $\mathcal{C}_m([a,b],E)$ des fonctions à valeurs dans E et continues par morceaux sur $[a,b]$ est un espace vectoriel. Si E est une algèbre, $\mathcal{C}_m([a,b],E)$ est une algèbre.

PROPOSITION 5. *Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est réglée.*

Démonstration. On montre d'abord le résultat pour une fonction continue $f : [a, b] \to E$. Comme $[a, b]$ est compact, f est uniformément continue sur $[a, b]$ d'après le théorème de Heine. Ainsi, si on se donne $\varepsilon > 0$,

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \alpha, \qquad \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Considérons une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que $x_i - x_{i-1} < \alpha$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et construisons une application $\varphi : [a, b] \to E$ de la manière suivante :

$$\forall i, \quad \varphi(x_i) = f(x_i) \qquad \text{et} \qquad \forall i, \forall x \in\,]x_{i-1}, x_i[, \quad \varphi(x) = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

Cette fonction est en escalier et elle vérifie $\|f(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$ d'après (*). La fonction f est donc réglée.

Considérons maintenant le cas d'une fonction continue par morceaux pour une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Soit $\varepsilon > 0$. La restriction f_i de f sur $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction continue f_i sur $[x_{i-1}, x_i]$, donc on peut trouver une fonction en escalier φ_i vérifiant $\|f_i - \varphi_i\| < \varepsilon$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. La fonction φ construite sur $[a, b]$ par $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$ et $\varphi(x_i) = f(x_i)$ est en escalier et par construction, $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ sur $[a, b]$ tout entier. Ainsi f est une fonction réglée. □

DÉFINITION 5. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une application $f : I \to E$. On dit que f présente une *discontinuité de première espèce* en un point $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ si f n'est pas continue en x_0 et si $f(x_0-)$ (limite à gauche de f en x_0) et $f(x_0+)$ (limite à droite de f en x_0) existent. La définition s'étend aux bornes de I lorsque I y est fermé en ne considérant que l'existence de $f(x_0+)$ ou $f(x_0-)$ selon le cas.

Remarque 4. Il est équivalent de dire que $f(x_0+)$ et $f(x_0-)$ existent et que les valeurs $f(x_0-), f(x_0+), f(x_0)$ ne sont pas toutes identiques.

THÉORÈME 4. *Une application $f : [a, b] \to E$ est réglée si et seulement si tout point de discontinuité de f est de première espèce. L'ensemble des points de discontinuité de f est alors au plus dénombrable.*

Démonstration. Condition nécessaire. Soit $x_0 < b$ un point de discontinuité de f. Soit $\varepsilon > 0$ et soit φ une fonction en escalier telle que $\|f(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. Il existe $\alpha > 0$ tel que φ soit constante sur $]x_0, x_0 + \alpha[$, ce qui entraîne

$$\forall x, y \in\,]x_0, x_0 + \alpha[, \quad \|f(x) - f(y)\| \le \|f(x) - \varphi(x)\| + \|\varphi(x) - \varphi(y)\| + \|\varphi(y) - f(y)\| < 2\varepsilon.$$

L'espace vectoriel E étant complet, on en déduit d'après le critère de Cauchy pour les fonctions que $f(x_0+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existe. On montrerait de même que $f(x_0-)$ existe pour $x_0 > a$.
Condition suffisante. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in]a, b[$ on pose $\omega(f, x) = \max(\|f(x-) - f(x)\|, \|f(x) - f(x+)\|)$. D'après le résultat de la question a) de l'exercice 7 page 36, l'ensemble $A_\varepsilon = \{x \in]a, b[, \omega(f, x) \ge \varepsilon\}$ est fini. Il existe donc une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que $\omega(f, x) < \varepsilon$ sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$, et d'après le résultat de la question d) du même exercice, on peut donc trouver pour tout i un $\alpha_i > 0$ tel que

$$\forall x, y \in]x_i, x_{i+1}[, |x - y| < \alpha_i, \qquad \|f(x) - f(y)\| < 2\varepsilon. \qquad (*)$$

Pour tout i, considérons une subdivision $x_i = y_{i,0} < y_{i,1} < \cdots < y_{i,n_i} = x_{i+1}$ de $[x_i, x_{i+1}]$ telle que $y_{i,j+1} - y_{i,j} < \alpha_i$ pour tout j. On construit la fonction en escalier φ_i sur $[x_i, x_{i+1}]$ en posant

$$\forall j, \quad \varphi_i(y_{i,j}) = f(y_{i,j}), \qquad \forall j, \forall x \in]y_{i,j}, y_{i,j+1}[, \quad \varphi_i(x) = f\left(\frac{y_{i,j} + y_{i,j+1}}{2}\right).$$

D'après (*), on a $\|f - \varphi_i\| < 2\varepsilon$ sur $[x_i, x_{i+1}]$. La fonction φ construite sur $[a, b]$ par $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$ et $\varphi(x_i) = f(x_i)$ est en escalier et vérifie $\|f - \varphi\| < 2\varepsilon$ sur $[a, b]$ tout entier. Ainsi f est une fonction réglée.

Ensemble des points de discontinuité de f. L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable d'après le résultat de la question b) de l'exercice 7 page 36. □

Conséquence : Une application $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone est réglée. En effet, supposons par exemple f croissante. Si $x_0 \in]a,b]$, alors $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x < x_0$, et comme f est croissante, $f(x_0-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ existe. De même, $f(x_0+)$ existe pour tout $x_0 \in [a,b[$. Ainsi, tout point de discontinuité de f est forcément de première espèce, donc f est réglée.

3.3. Exercices

Exercice 1. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante. Le résultat reste t-il valable si on suppose seulement f définie, convexe et majorée sur $\mathbb{R}^+$?

Solution. Supposons f non constante, de sorte qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, avec $f(x) \neq f(y)$.

— Si $f(x) < f(y)$, la convexité de f entraîne

$$\forall z > y, \quad \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = a \quad \text{ou encore} \quad f(z) \geq f(y) + a(z-y).$$

Comme $f(y) > f(x)$, on a $a > 0$ et donc $\lim_{z \to +\infty} f(z) = +\infty$ ce qui est contraire aux hypothèses.

— Si $f(x) > f(y)$, on montrerait de même que $\lim_{z \to -\infty} f(z) = +\infty$, d'où l'absurdité.

L'application f est donc constante.

Le résultat est faux lorsque les hypothèses ne sont vraies que sur $\mathbb{R}^+$, comme le montre l'exemple de la fonction $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Exercice 2. Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

a) Montrer que $\ell = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe.

b) On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \ell x$ existe.

Solution. **a)** Comme f est convexe, la fonction $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est croissante. Donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ existe, et cette limite n'est autre que ℓ. On a d'ailleurs $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (on peut avoir $\ell = +\infty$ comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$).

b) L'application $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) - \ell x$ est convexe (somme de deux fonctions convexes), et elle vérifie $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.

Montrons que g est décroissante. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$. Comme g est convexe, la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ est croissante. Or $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$. Donc pour tout $x \neq a$, $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \leq 0$. En appliquant ceci à $x = b$, on en déduit $g(b) \leq g(a)$.

Une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ admet toujours une limite en $+\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \ell x$ existe. Cette limite appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (elle peut valoir $-\infty$ comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto -\log(1+x)$).

Exercice 3 (Critère pratique de convexité d'une fonction). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'application $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) + \mu x$ est bornée sur $[a,b]$ et atteint sa borne supérieure en a ou en b.

Solution. *Condition nécessaire.* Soit $[a,b]$ un segment inclus dans I et $\mu \in \mathbb{R}$. L'application $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) + \mu x$ est convexe sur $[a,b]$ car c'est la somme de deux fonctions convexes. L'un des réels $\varphi(a), \varphi(b)$ est donc la borne supérieure de φ car si $M = \sup\{\varphi(a), \varphi(b)\}$,

$$\forall \lambda \in [0,1], \qquad \varphi(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq +\lambda\varphi(a) + (1-\lambda)\varphi(b) \leq \lambda M + (1-\lambda)M = M.$$

Condition suffisante. Soit $[a,b]$ un sous-intervalle fermé de I. On choisit μ de sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$, c'est-à-dire que l'on considère l'application

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x.$$

Ainsi on a bien $\varphi(a) = \varphi(b)$. Par hypothèse on a

$$\forall \lambda \in [0,1], \qquad \varphi(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \varphi(a) = \varphi(b)$$

et en remplaçant φ par son expression en fonction de f, on vérifie facilement que ceci s'écrit aussi

$$\forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Ceci étant vrai pour tout $[a,b] \subset I$, on en déduit que f est convexe.

Remarque. Ce critère rend parfois des services pour démontrer la convexité d'une fonction (voir les deux exercices qui suivent).

EXERCICE 4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x \in I, \forall h > 0 \text{ vérifiant } (x-h, x+h) \in I^2, \qquad 2h\, f(x) \leq \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

Solution. *Condition nécessaire.* Soit $x \in I$ et $h > 0$ tel que $(x-h, x+h) \in I^2$. On a

$$\forall t \in [0,h], \qquad f(x) = f\left(\frac{(x-t)+(x+t)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x-t) + f(x+t)\right),$$

et en intégrant cette inégalité pour $t \in [0,h]$ on obtient

$$\int_x^{x+h} f(x)\, dt \leq \frac{1}{2}\left[\int_{x-h}^{x} f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt\right]$$

d'où le résultat.

Condition suffisante. Utilisons le critère de l'exercice 3. Si f n'était pas convexe, il existerait un sous-intervalle fermé $[a,b]$ de I et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que l'application $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) + \mu x$ n'admet pas son maximum en a ou en b. L'application φ étant continue, il existe $c \in [a,b]$ tel que $\varphi(c) = \sup_{x \in [a,b]} \varphi(x)$, et par construction, on a $\varphi(c) > \varphi(a)$ et $\varphi(c) > \varphi(b)$. Soit $h = \inf\{b-c, c-a\}$. La continuité de φ entraîne

$$\int_{c-h}^{c+h} \varphi(t)\, dt < \int_{c-h}^{c+h} \varphi(c)\, dt = 2h\varphi(c),$$

et en remplaçant φ par son expression en fonction de f, on obtient

$$\int_{c-h}^{c+h} f(t)\, dt < 2hf(c).$$

Ceci est contraire aux hypothèses. La fonction f est donc convexe.

EXERCICE 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ une application continue.
a) Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \forall \varepsilon > 0, \exists h \in]0, \varepsilon[, \qquad f(x) \leq \frac{1}{2}[f(x+h) + f(x-h)].$$

(on pourra utiliser le résultat de l'exercice 3).
b) Montrer que f est convexe si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \qquad \lim_{\substack{\ell \to 0 \\ \ell > 0}} \sup_{|h| \leq \ell} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0$$

c) Montrer que f est affine si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = 0,$$

Solution. **a)** La condition nécessaire est évidente. Pour montrer la condition suffisante, nous allons utiliser le critère donné dans l'exercice 3.

Soit $[a, b] \subset I$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On vérifie immédiatement que l'application $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) + \mu x$ vérifie les mêmes hypothèses que f. Il s'agit de montrer que φ atteint son maximum sur $[a, b]$ en a ou en b. Comme φ est continue sur le compact $[a, b]$, φ est bornée et atteint ses bornes. Si on désigne par M son maximum, l'ensemble $\Gamma = \varphi^{-1}(\{M\})$ est donc non vide. Soit $c = \inf \Gamma$. La continuité de φ entraîne que Γ est fermé, donc $c \in \Gamma$, donc $\varphi(c) = M$. Si $a < c < b$, alors par hypothèse

$$\exists h > 0, \qquad (a < c - h < c < c + h < b \quad \text{et} \quad \varphi(c) \leq \frac{1}{2}[\varphi(c-h) + \varphi(c+h)]).$$

Comme $\varphi(c) = \sup_{x \in [a,b]} \varphi(x)$, cette dernière inégalité entraîne $\varphi(c-h) = \varphi(c+h) = \varphi(c) = M$, ce qui est contradictoire avec la définition de c. Donc $c = a$ ou $c = b$ et le résultat est prouvé.

b) Pour tout $\alpha > 0$, on définit l'application $f_\alpha: I \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) + \alpha x^2$. On a

$$\forall x \in I, \forall h > 0, \qquad \frac{f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) - 2f_\alpha(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + 2\alpha,$$

et donc en vertu des hypothèses vérifiées par f,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \overset{\circ}{I}, \exists h \in]0, \varepsilon[, \qquad \frac{f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) - 2f_\alpha(x)}{h^2} \geq \alpha > 0,$$

ce qui entraîne

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \overset{\circ}{I}, \exists h \in]0, \varepsilon[, \qquad f_\alpha(x) \leq \frac{1}{2}[f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h)],$$

ce qui prouve la convexité de f_α d'après le résultat de la question précédente.

Ainsi l'application f, limite simple de fonctions convexes (les applications f_α lorsque $\alpha \to 0+$) est convexe.

c) L'application f vérifie les hypothèses de la question précédente donc est convexe. Ceci est vrai également pour $-f$ donc f est concave. Une fonction convexe et concave est forcément affine, d'où le résultat.

Remarque. Un corollaire du résultat de la question a) est le suivant.

> *Si f est continue sur I et vérifie $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$ pour tout $(x, y) \in I^2$, alors f est convexe.*

Ceci peut être démontré directement, en procédant comme suit :

— On se donne x et $y \in I$.

— On montre par récurrence sur n que pour tout entier k compris entre 0 et 2^n, on a $f\left(\dfrac{kx+(2^n-k)y}{2^n}\right) \leq \dfrac{kf(x)+(2^n-k)f(y)}{2^n}$.

— En utilisant la continuité de f et la densité des nombres de la forme $k/2^n$ ($k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), on prouve que $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ pour tout $\lambda \in [0,1]$.

Exercice 6 (Fonctions logarithmiquement convexes). On dit qu'une fonction f à valeurs dans $]0,+\infty[$ est *logarithmiquement convexe* si la fonction $\log f$ est convexe.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:\ I \to \mathbb{R}^{+*}$ une application.

a) Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.

b) Montrer que f est logarithmiquement convexe si et seulement si l'application $I \to \mathbb{R}^{+*}\quad x \mapsto f(x)\,c^x$ est convexe pour tout $c > 0$.

c) Montrer que si f et $g:\ I \to \mathbb{R}^{+*}$ sont logarithmiquement convexes, alors $f+g$ aussi.

Solution. **a)** Soient $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$\log[f(\lambda a+(1-\lambda)b)] \leq \lambda \log f(a)+(1-\lambda)\log f(b) \leq \log[(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)]$$

(la première inégalité résulte des hypothèses et la seconde résulte de la concavité de l'application logarithme). En ne considérant maintenant les membres extrêmes de ces inégalités, on en déduit, en vertu du caractère croissant de la fonction logarithme $f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$, d'où le résultat.

b) *Condition nécessaire.* Pour tout $c > 0$, l'application $x \mapsto \log f(x)+x\log c$ est convexe (somme de deux fonctions convexes), autrement dit $x \mapsto \log(f(x)c^x)$ est convexe. D'après la question précédente, ceci entraîne la convexité de $x \mapsto f(x)c^x$.

Condition suffisante. Soient $(a,b) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. D'après les hypothèses, on a

$$\forall c > 0, \qquad f(\lambda a+(1-\lambda)b)\,c^{\lambda a+(1-\lambda)b} \leq \lambda f(a)\,c^a+(1-\lambda)f(b)\,c^b.$$

Ceci s'écrit aussi

$$\forall c > 0, \quad f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)\,c^{(1-\lambda)(a-b)}+(1-\lambda)f(b)\,c^{\lambda(b-a)} = \lambda f(a)\,\alpha^{(1-\lambda)}+(1-\lambda)f(b)\,\alpha^{-\lambda}, \tag{$*$}$$

où on a posé $\alpha = c^{a-b}$. L'idée est maintenant de minimiser le terme de droite de cette dernière équation pour avoir la majoration la plus fine possible du membre de gauche. Les paramètres a, b, λ étant fixés, une étude de la fonction $\alpha \mapsto \lambda f(a)\alpha^{(1-\lambda)}+(1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda}$ montre qu'elle atteint son minimum sur $\mathbb{R}^{+*}$ en $\alpha = f(b)/f(a)$, valeur en laquelle elle vaut précisément $f(a)^\lambda f(b)^{1-\lambda}$. En remplaçant dans (*) avec cette valeur de α, on en déduit

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq f(a)^\lambda f(b)^{1-\lambda}.$$

En prenant le logarithme, on en déduit alors la convexité de $\log f$.

c) Il suffit d'utiliser le résultat de la question précédente (sans laquelle le résultat serait difficile à prouver), en montrant que pour tout $c > 0$, l'application $x \mapsto (f(x)+g(x))c^x$ est convexe. Ceci est immédiat car toujours d'après le résultat de la question précédente, les fonctions $x \mapsto f(x)\,c^x$ et $x \mapsto g(x)\,c^x$ sont convexes pour tout $c > 0$.

4. Problèmes

Problème 1. Soit $f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue en 0 vérifiant

$$\exists k \in\ ]0,1[, \qquad \ell = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(kx)}{x} \quad \text{existe.}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de ℓ et de k.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses,

$$\exists \eta > 0, \forall t \in]0, \eta], \qquad \left| \frac{f(kt) - f(t)}{t} - \ell \right| < \varepsilon.$$

Ainsi, si $x \in]0, \eta]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{f(k^n x) - f(k(k^n x))}{k^n x} - \ell \right| \leq \varepsilon \quad \text{ou encore} \quad \left| \frac{f(k^n x) - f(k^{n+1} x)}{x} - k^n \ell \right| \leq k^n \varepsilon$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{f(x) - f(k^n x)}{x} - \left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i \right) \ell \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{f(k^i x) - f(k^{i+1} x)}{x} - k^i \ell \right| \leq \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i \right),$$

ce qui en faisant tendre n vers $+\infty$ entraîne, en vertu de la continuité de f en 0

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{\ell}{1-k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{1-k}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in]0, \eta]$, on en déduit la dérivabilité de f en 0 et $f'(0) = \dfrac{\ell}{1-k}$.

Problème 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$. Montrer

$$\exists c \in]0, 1], \qquad f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

Solution. Commençons par donner l'idée de la preuve. L'égalité $f'(c) = f(c)/c$ exprime le

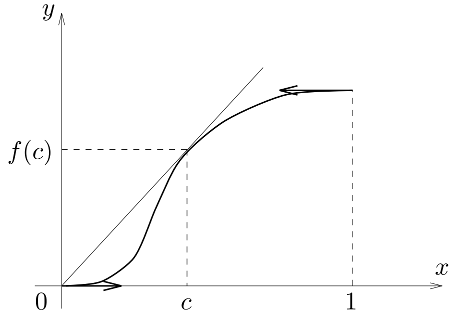


Figure 8. à l'abscisse c, la tangente du graphe de f passe par l'origine.

fait que la droite passant par l'origine et le point $(c, f(c))$ est tangente au graphe de f (voir la figure ci-contre). En regardant la figure, on s'aperçoit d'ailleurs que le point correspondant est un extremum relatif de la fonction "pente" $x \mapsto f(x)/x$.

Cette remarque nous invite à considérer l'application

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad g(0) = f'(0) = 0,$$

qui est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$, avec

$$\forall x \in]0,1], \qquad g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}. \qquad (*)$$

Si $f(1) = 0$ le résultat est évident en prenant $c = 1$. Sinon, nous allons prouver que g admet un extremum en point intérieur à $[0,1]$. Quitte à considérer $-g$, on peut supposer $g(1) > 0$. Soit

$c \in [0,1]$ tel que $g(c) = \sup_{x\in[0,1]} g(x)$ (un tel point c existe car g est continue sur le compact $[0,1]$). On a $c \neq 1$ sinon on aurait $g'(1) = \lim_{x\to 1} \dfrac{g(1)-g(x)}{1-x} \geq 0$, ce qui est absurde vu que $g'(1) = -f(1) < 0$. On a aussi $c \neq 0$ car $g(c) \geq g(1) > 0 = g(0)$. Ainsi, c est un point intérieur à $[0,1]$ où g atteint son maximum, donc $g'(c) = 0$, ce qui donne $f'(c) = f(c)/c$ grâce à l'expression (*).

Problème 3 (e n'est pas algébrique d'ordre 2). Montrer que e n'est pas algébrique d'ordre 2, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver trois entiers a, b, c non tous nuls tels que $ae^2 + be + c = 0$. (Indication : raisonnez par l'absurde en considérant le développement de Taylor de la fonction $f(x) = ae^x + ce^{-x}$).

Solution. La preuve est en quelque sorte une généralisation de la démonstration de l'irrationalité de e à partir de son expression en terme d'une série. Supposons $ae^2 + be + c = 0$, où a, b, c sont trois entiers non tous nuls. En désignant par f la fonction $f: x \mapsto ae^x + ce^{-x}$, ceci entraîne que $f(1)$ est entier. Nous allons prouver que cette dernière assertion est absurde.

L'égalité de Taylor-Lagrange appliquée à f entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \theta_n \in \,]0,1[, \qquad f(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!}.$$

Or pour tout entier naturel k, $f^{(k)}(x) = ae^x + (-1)^k ce^{-x}$, en particulier $f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c$ est entier. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} = (n-1)!f(1) - (n-1)!f(0) - \frac{(n-1)!}{1!}f'(0) - \cdots - \frac{(n-1)!}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

La majoration $|f^{(n)}(\theta_n)| = |ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n}| \leq |a|e + |c|$ montre que $f^{(n)}(\theta_n)$ est bornée, donc $f^{(n)}(\theta_n)/n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'après (*), ce terme est toujours entier, il est donc nul à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \qquad f^{(n)}(\theta_n) = ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n} = 0.$$

On en conclut que pour tout $n \geq N$, a et $(-1)^n c$ sont de signe opposés, ce qui n'est possible que si $a = c = 0$, et donc $b = 0$. Ceci est en contradiction avec les hypothèses de l'énoncé, d'où le résultat.

Remarque. On en déduit en particulier que e est irrationnel. En fait, e est même un nombre transcendant (voir le tome Algèbre).

Problème 4 (Zéros d'un polynôme lacunaire). Soit $P = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels.
a) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $p < n$, tel que $a_{n-1} = \ldots = a_{n-p} = 0$ et $a_{n-p-1} \neq 0$ (on dit que P présente une *lacune* de longueur p). Si p est pair, montrer que, comptées avec leur ordre de multiplicité, P admet au plus $n-p$ racines réelles ; si p est impair et $a_{n-p-1} > 0$, montrer que P admet au plus $n-p-1$ racines réelles ; si p est impair et $a_{n-p-1} < 0$, montrer que P admet au plus $n-p+1$ racines réelles.
b) Étudier le cas plus général où p coefficients consécutifs a_i de P sont nuls, c'est-à-dire $a_m = a_{m+1} = \ldots = a_{m+p-1} = 0$ et $a_{m-1} \neq 0$, $a_{m+p} \neq 0$.

Solution. **a)** Tout repose sur le principe suivant : si un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ a r racines réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité), alors son polynôme dérivé Q' a au moins $r-1$ racines réelles. En effet, si $u_1 < \cdots < u_k$ sont les racines réelles d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$

d'ordre de multiplicité respectifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, alors pour tout $i \in \{1 \ldots, k-1\}$, Q' a au moins une racine réelle v_i dans l'intervalle $]u_i, u_{i+1}[$ d'après le théorème de Rolle. De plus, si $\alpha_i \geq 2$, alors u_i est une racine de Q' d'ordre de multiplicité $\alpha_i - 1$. Finalement, nous avons exhibé $(k-1) + \sum_i (\alpha_i - 1) = (\sum_i \alpha_i) - 1$ racines de Q', ce qui prouve notre remarque.

Maintenant, notons r le nombre de racines réelles de P (comptées avec leur ordre de multiplicité). Nous venons de voir que P' a au moins $r-1$ racines réelles, et en itérant le procédé, on s'aperçoit que $P^{(n-p-1)}$ a au moins $r-(n-p-1) = r-n+p+1$ racines réelles. Comme $a_{n-1} = \ldots = a_{n-p} = 0$, on a

$$P^{(n-p-1)} = n(n-1)\ldots(p+2)X^{p+1} + (n-p-1)!\, a_{n-p-1}. \qquad (*)$$

Si p est pair, la forme de ce dernier polynôme montre qu'il a exactement une racine réelle, et comme nous avons montré qu'il en a au moins $r-n+p+1$, on a $r-n+p+1 \leq 1$, c'est-à-dire $r \leq n-p$. Si p est impair et $a_{p+1} > 0$, le polynôme (*) n'a aucune racine réelle, donc $r-n+p+1 \leq 0$, c'est-à-dire $r \leq n-p-1$. Si p est impair et $a_{p+1} < 0$, (*) a exactement deux racines réelles donc $r-n+p+1 \leq 2$, c'est-à-dire $r \leq n-p+1$.

b) Remarquons tout d'abord que pour tout polynôme Q de degré d, dont le terme constant est non nul, le polynôme $Q^* = X^d Q(1/X)$ (appelé polynôme *réciproque* de Q) a le même nombre de racines réelles que Q : en effet, si $Q = \prod_{i=1}^k (X-u_i)^{\alpha_i}$ est la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$, on a $Q^* = \prod_{i=1}^k (1-u_i\, X)^{\alpha_i}$ (les racines de Q^* sont les inverses des racines de Q, avec le même ordre de multiplicité).

Ceci étant, notons $Q = P^{(m-1)}$. On a

$$Q = n(n-1)\ldots(n-m-2)\, X^{n-m+1} + \cdots + (m+p)\cdots(p+2)a_{m+p}\, X^{p+1} + (m-1)!\, a_{m-1},$$

le polynôme réciproque de Q est

$$Q^* = (m-1)! a_{m-1}\, X^{n-m+1} + (m+p)\cdots(p+2)a_{m+p}\, X^{n-m-p} + \cdots + n(n-1)\cdots(n-m-2).$$

D'après la question précédente, Q^* a au plus $(n-m+1)-p$ racines réelles si p est pair, au plus $(n-m+1)-p-1$ si p est impair et $a_{m+p}a_{m-1} > 0$, au plus $(n-m+1)-p+1$ si p est impair et $a_{m+p}a_{m-1} < 0$. Le nombre de racines réelles de Q est égal au nombre de racines réelles de Q^*, donc ceci vaut pour $P^{(m-1)}$. On en déduit, d'après le principe général énoncé plus haut, que P a au plus $m-1+[(n-m+1)-p] = n-p$ racines réelles si p est pair, au plus $m-1+[(n-m+1)-p]-1 = n-p-1$ si p est impair et $a_{m+p}a_{m-1} > 0$, au plus $n-p+1$ si p est impair et $a_{m+p}a_{m-1} < 0$.

PROBLÈME 5. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Démontrer l'existence d'une suite (x_n) strictement croissante à valeurs positives telle que $f^{(n)}(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. Nous allons construire cette suite par récurrence. Commençons par $n = 1$. La fonction f étant nulle à l'origine et tendant vers 0 en $+\infty$, elle n'est pas strictement monotone. Ainsi, la fonction dérivée f' prend des valeurs positives et négatives, ce qui entraîne qu'elle s'annule en au moins un point $x_1 \in \mathbb{R}^+$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires et en vertu de la continuité de f'. Ainsi, nous avons construit $x_1 \geq 0$ tel que $f'(x_1) = 0$.

Pour passer du rang $n \geq 1$ au rang $n+1$, on généralise la technique utilisée pour $n = 1$. Supposons x_n construit et montrons l'existence de $x_{n+1} > x_n$ tel que $f^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ pour tout $x > x_n$. La continuité de $f^{(n+1)}$ entraîne que $f^{(n+1)}$ garde un signe constant sur $]x_n, +\infty[$, par exemple strictement positif (quitte à changer f en $-f$). Ainsi, $f^{(n)}$ est une fonction strictement croissante sur $[x_n, +\infty]$.

Fixons un réel $a > x_n$. D'après l'égalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall x \geq a, \exists y \in [a, x], \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(y),$$

ce qui entraîne, en vertu du caractère croissant de $f^{(n)}$ sur $[x_n, +\infty[$ et du fait que $\alpha = f^{(n)}(a) > f^{(n)}(x_n) = 0$

$$\forall x \geq a, \quad f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \alpha \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Le terme de droite de cette dernière expression diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, il en est donc de même pour $f(x)$, ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi, il existe bien un réel $x_{n+1} > x_n$ tel que $f^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$ et le résultat est prouvé.

Problème 6. Soit une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g^2(x) = g \circ g(x) = 2g(x) - x.$$

a) Montrer que g est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer la forme de g. (Indication : on pourra exprimer $g^n = g \circ g \circ \cdots$ en fonction de g pour tout entier naturel n).

Solution. **a)** L'injectivité de g est immédiate puisque

$$g(x) = g(y) \Longrightarrow g^2(x) = g^2(y) \Longrightarrow x = 2g(x) - g^2(x) = 2g(y) - g^2(y) = y.$$

Montrons la surjectivité de g. Une application injective et continue sur $\mathbb{R}$ est strictement monotone, donc g est strictement monotone (c'est classique par le théorème des valeurs intermédiaires). L'application $g \circ g$ est strictement croissante (composée de deux fonctions de même monotonie) donc $g = (g^2(x) + x)/2$ est strictement croissante. Le caractère croissant de g^2 entraîne d'ailleurs

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \frac{g^2(x) + x}{2} \geq \frac{g^2(0) + x}{2} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

On montrerait de même que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$. Tout ceci permet de conclure que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Par récurrence sur n on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g^n(x) = ng(x) - (n-1)x. \qquad (*)$$

En effet, la relation est vraie pour $n = 1$; pour passer du rang n au rang $n+1$ on part de la relation (*) dans laquelle on remplace x par $g(x)$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{n+1}(x) = ng^2(x) - (n-1)g(x) = n(2g(x) - x) - (n-1)g(x) = (n+1)g(x) - nx.$$

On peut récrire la relation (*) sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{g^n(x) - g^n(0)}{n} = g(x) - g(0) - x + \frac{x}{n}.$$

Comme g est croissante, g^n également donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) - g(0) - x + \frac{x}{n} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0, \quad g(x) - g(0) - x + \frac{x}{n} \leq 0.$$

En fixant x puis en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) - g(0) - x \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0, \quad g(x) - g(0) - x \leq 0. \qquad (**)$$

Nous avons démontré à la question précédente que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque g^{-1} est continue et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^2[g^{-2}(x)] = 2g[g^{-2}(x)] - g^{-2}(x) \quad \text{ou encore} \quad g^{-2}(x) = 2g^{-1}(x) - x.$$

Autrement dit, g^{-1} vérifie les mêmes hypothèses que g. On en conclut que (**) est vrai pour g^{-1}, ce qui s'écrit

$$\forall x \geq 0, \quad g^{-1}(x) - g^{-1}(0) - x \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0, \quad g^{-1}(x) - g^{-1}(0) - x \leq 0.$$

En utilisant la relation $g^{-1}(x) = 2x - g(x)$ (qui découle de $g^2 = 2g - \mathrm{Id}$ après composition à droite par g^{-1}), on en déduit

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) - g(0) - x \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0, \quad g(x) - g(0) - x \geq 0. \qquad (***)$$

Avec (**), on en conclut que $g(x) = x + g(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction de la forme $g : x \mapsto x + K$ vérifie les hypothèses de l'énoncé.

Problème 7 (Dérivée selon Schwarz). Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que pour tout $x \in I$, la limite

$$f^S(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

existe (on dit que f est *dérivable selon Schwarz*, ou encore *pseudo-dérivable*, et $f^S(x)$ est appelé la *dérivée symétrique* de f en x).

a) Montrer que si $f^S \geq 0$, alors f est croissante (on commencera par le cas $f^S \geq \alpha > 0$).

b) Montrer que si f^S est continue en $a \in I$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = f^S(a)$.

Solution. **a)** Suivons l'indication et supposons d'abord $f^S \geq \alpha > 0$ sur I. On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas croissante, ce qui implique l'existence de $a, b \in I$, $a < b$, tels que $f(a) > f(b)$. L'idée est de déterminer une abscisse c tel que $f(c+h) \leq f(c-h)$ pour des valeurs de h tendant vers 0.

On choisit y tel que $f(b) < y < f(a)$ et on considère l'ouvert $O = \{x \in]a, b[\mid f(x) > y\}$. Comme $f(a) > y$ et que f est continue, O est non vide. Donc $c = \sup O$ est bien défini et $c > a$. On a $c < b$, puisque sur un voisinage de b, $f(x) < y$. Par définition de c, on a $f(x) \leq y$ dès que $x \in [c, b[$. Comme $c = \sup O$, il existe une suite (h_n) de valeurs > 0 tendant vers 0 telle que les $c - h_n \in O$ pour tout n, et donc telle que $f(c - h_n) > y$. Lorsque n est suffisamment grand on a $c + h_n < b$ donc $f(c + h_n) \leq y$. Ainsi, on a $(f(c+h_n) - f(c-h_n))/(2h_n) \leq 0$, et par passage à la limite lorsque $n \to \infty$ on en déduit $f^S(c) \leq 0$, ce qui est contradictoire. On a donc bien démontré que f est croissante sur I.

Passons maintenant au cas où on a simplement $f^S \geq 0$. Pour tout $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto f(x) + \alpha x$ est dérivable selon Schwarz sur I et on a $f_\alpha^S(x) = f^S(x) + \alpha \geq \alpha$, donc d'après ce qu'on vient de montrer, f_α est croissante. Ceci implique, pour tout $a, b \in I$ tels que $a < b$, l'inégalité $f_\alpha(a) \leq f_\alpha(b)$, et ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$ on obtient $f(a) \leq f(b)$. Donc f est bien croissante.

b) Nous allons commencer par montrer un résultat intermédiaire, qui est l'équivalent de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions dérivables selon Schwarz. Supposons qu'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ et $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in J$; $M_1 \leq f^S(x) \leq M_2$. Alors

$$\forall \alpha, \beta \in J ; \alpha < \beta, \quad (\beta - \alpha) M_1 \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq (\beta - \alpha) M_2. \qquad (*)$$

On montre la première inégalité en appliquant le résultat de la question précédente à la fonction $g(x) = f(x) - M_1 x$. La fonction g est continue et dérivable selon Schwarz sur J, et $g^S = f^S - M_1 \geq 0$ sur J donc g est croissante sur J, ce qui implique $g(\beta) \geq g(\alpha)$, prouvant ainsi la première inégalité. On montre la seconde inégalité de la même manière en considérant la fonction $h(x) = M_2 x - f(x)$.

Prouvons maintenant la dérivabilité de f en a. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de f^S en a implique l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, \qquad f^S(a) - \varepsilon \leq f^S(x) \leq f^S(a) + \varepsilon.$$

On en déduit, avec le résultat (*), que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\,, x \neq a, \qquad f^S(a) - \varepsilon \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f^S(a) + \varepsilon.$$

L'existence d'un tel $\eta > 0$ est possible pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve que f est bien dérivable en a, et on a $f'(a) = f^S(a)$.

PROBLÈME 8. On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ bijectives de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ telles que $f' = f^{-1}$.
a) Trouver un élément f de E de la forme $x \mapsto \alpha x^\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
b) Si $f \in E$, déterminer la limite en 0 de f et de f^{-1}.
c) Montrer que si $f \in E$, alors f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.
d) Montrer que toute fonction $f \in E$ admet un unique point fixe.
e) Soit f et g deux élément de E. Montrer que f et g admettent le même point fixe.

Solution. **a)** Si $f(x) = \alpha x^\beta$, alors $f'(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}$ et $f^{-1}(x) = (x/\alpha)^{1/\beta} = (1/\alpha)^{1/\beta}x^{1/\beta}$. Remarquons que $f > 0$ donc $\alpha = f(1) > 0$. On a également $f' = f^{-1} > 0$, donc $f'(1) = \alpha\beta > 0$ ce qui entraîne $\beta > 0$.

On aura $f' = f^{-1}$ si $\alpha\beta = (1/\alpha)^{1/\beta}$ et si $\beta - 1 = 1/\beta$. La dernière équation s'écrit aussi $\beta^2 - \beta - 1 = 0$, dont $\beta = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule solution positive. L'autre équation admet la solution $\alpha = \varphi^{-\varphi/(\varphi+1)}$ (comme $\varphi + 1 = \varphi^2$ on a l'expression plus simple $\alpha = \varphi^{-1/\varphi}$). Ainsi choisis, α et β répondent bien au problème.

b) Si $f \in E$ alors $f^{-1} > 0$ donc $f' = f^{-1}$ est positive. Donc f est croissante, et donc $f(x)$ converge forcément vers $\ell = \inf_{x>0} f(x)$ lorsque $x \to 0$ $(x > 0)$. Comme f est positive, on a $\ell \geq 0$. Par ailleurs, $f(x) \geq \ell$ pour tout $x > 0$, et comme f est une bijection dans $]0,+\infty[$ on en déduit nécessairement $\ell = 0$. On montrerait de même que $\lim_{x\to 0, x>0} f^{-1}(x) = 0$ (on peut également obtenir ce dernier résultat en prolongeant f en une fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\tilde{f}(0) = 0$. L'application $\tilde{f}$ est continue et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$; sa fonction réciproque est continue, en particulier en $x = 0$ ou elle vaut $\tilde{f}^{-1}(0) = 0$).

c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que f est un $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme. Pour $n = 1$, on sait par hypothèse que f est $\mathcal{C}^1$. Or $f^{-1} > 0$, donc $f' = f^{-1}$ ne s'annule pas. On en déduit, d'après la proposition 4 page 73 sur les homéomorphismes dérivables, que f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons maintenant $n \geq 1$ et que f est un $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme (hypothèse de récurrence). Alors $f' = f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^n$, donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et là encore, la proposition sur les homéomorphismes dérivables implique que f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

d) Comme $f' = f^{-1}$, on a $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x) = 0$. Ainsi, le prolongement $\tilde{f}$ par continuité de f en 0, défini en 0 par $\tilde{f}(0) = 0$, est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = 0$ (voir la proposition 6 page 76). Ceci montre que $f(x) = o(x)$ lorsque $x \to 0$ $(x > 0)$. En particulier, il existe $a > 0$ tel que $f(a) < a/2$, donc $f(a) - a < 0$.

Par ailleurs, f^{-1} étant croissante on a $f'(x) = f^{-1}(x) \geq f^{-1}(\alpha) = 2$ pour $x \geq \alpha = f(2)$. Lorsque $x \geq \alpha$, l'égalité des accroissements finis entraîne $f(x) - f(\alpha) \geq 2(x - \alpha)$, d'où on déduit $f(x) - x \geq f(\alpha) + x - 2\alpha$. Ainsi, $b = 2\alpha$ vérifie $f(b) - b > 0$.

Ainsi, nous avons montré que la fonction continue $f(x) - x$ change de signe sur $[a, b]$, elle s'annule donc en un point c de cet intervalle, qui est un point fixe de f.

Montrons que le point fixe de f est unique. Un dessin nous suggère d'utiliser la convexité de f. Si f admet deux points fixes c et d (avec $0 < c < d$), alors f étant convexe ($f' = f^{-1}$ est croissante), elle vérifie $f(x) \geq f(c) + (x-c)f'(c) = c + (x-c)f'(c)$ pour tout $x > 0$. En faisant tendre x vers 0 on en déduit $0 \geq c(1 - f'(c))$, donc $f'(c) \geq 1$. On a même $f'(c) > 1$ car si $f'(c) = 1$, alors $f(x) \geq c + (x-c)f'(c) = x$, ce qui est incompatible avec $f(x) = o(x)$ lorsque $x \to 0$. Ceci implique $f(d) \geq c + (d-c)f'(c) > d$ donc d ne peut pas être un deuxième point fixe de f.

e) Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1. *Soit $f \in E$ et $\lambda > 0$ le point fixe de f. Alors on a $f(x) < x$ pour $0 < x < \lambda$ et $f(x) > x$ pour $x > \lambda$.*

En effet, f n'a que le seul point fixe λ, donc $f(x) - x$ garde un signe constant non nul sur $]0, \lambda[$, et comme $f(x) = o(x)$ lorsque $x \to 0$, $f(x) - x$ est forcément négatif sur cet intervalle. De même, $f(x) - x$ garde un signe constant non nul pour $x > \lambda$. Nous avons vu plus haut qu'il existe $\mu > 0$ tel que $f(\mu) - \mu > 0$. On a donc forcément $\mu > \lambda$, et finalement le signe de $f(x) - x$ est strictement positif sur $]\lambda, +\infty[$.

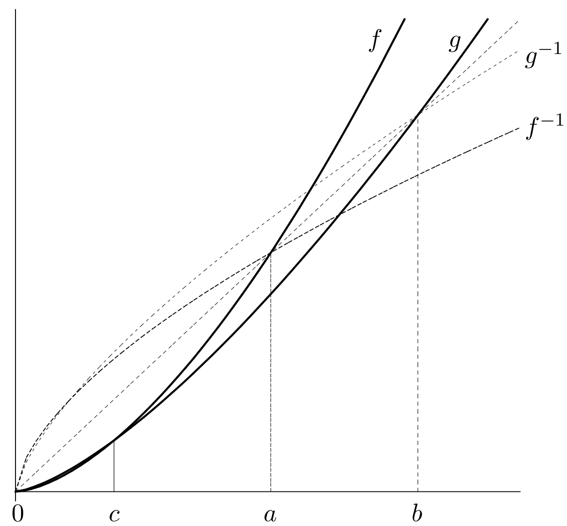


FIGURE 9. Le graphe des applications f et g et leurs fonctions inverses

Raisonnons maintenant par l'absurde et supposons l'existence de $f, g \in E$ tels que $f(a) = a$ et $g(b) = b$ avec $a \neq b$, par exemple $a < b$ (voir la figure ci-contre). D'après le lemme, on a $g(x) < x$ sur $]0, b[$, en particulier $g(a) < a = f(a)$. Toujours d'après le lemme, on a $x \leq f(x)$ pour $x \in [a, b]$, et finalement $g(x) < x \leq f(x)$ pour $x \in [a, b[$. Soit c le plus petit réel positif tel que $g(x) < f(x)$ sur l'intervalle $]c, b[$ (on a $0 \leq c < a$).

Montrons maintenant que $g^{-1} > f^{-1}$ sur $]c, b[$ (on le voit sur la figure). Tout d'abord, on remarque que $]c, b[\subset f(]c, b[)$ car d'après le lemme, $f(c) < c$ et $f(b) > b$. Ceci entraîne $f^{-1}(]c, b[) \subset]c, b[$. On montre aussi facilement que $g^{-1}(]c, b[) \subset]c, b[$. Considérons maintenant $c < y < b$. Comme $x = f^{-1}(y) \in]c, b[$, on a $g(x) < f(x)$. Ceci s'écrit aussi $g(f^{-1}(y)) < y$, c'est-à-dire $g(f^{-1}(y)) < g(g^{-1}(y))$ et comme g est strictement croissante, on a nécessairement $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$.

Terminons la démonstration. Comme $g' = g^{-1}$ et $f' = f^{-1}$, ce que nous venons de montrer s'écrit $g' > f'$ sur $]c, b[$, donc $g - f$ est strictement croissante sur $]c, b[$. En particulier, $\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} g(x) - f(x) < g(b) - f(b) \leq 0$. Ceci entraîne $c > 0$ (car $g(x) - f(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to 0$), donc $g(c) - f(c) < 0$, ce qui est incompatible avec la définition de c.

Ainsi, toutes les fonctions f de E ont le même point fixe λ. C'est donc celui de la fonction $F(x) = \varphi^{-1/\varphi} x^{\varphi}$ que nous avons construite dans la question a). On calcule ce point fixe en résolvant l'équation $F(\lambda) = \lambda$:

$$F(\lambda) = \lambda \iff \varphi^{-1/\varphi} \lambda^{\varphi - 1} = 1 \iff \lambda = \varphi^{1/(\varphi(\varphi-1))}$$

et comme $\varphi^2 - \varphi = 1$, on trouve que le point fixe des applications de E est le nombre d'or $\lambda = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Problème 9 (Théorème de Sarkowski). Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction continue.
a) Pour tout segment K inclus dans $f(I)$, montrer qu'il existe un segment J inclus dans I tel que $K = f(J)$.
b) Si S_1 et S_2 sont deux segments de I tels que $S_2 \subset f(S_1)$ on note $S_1 \to S_2$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ segments $I_0, \dots, I_{n-1}$ de I tels que $I_0 \to I_1 \to \dots I_{n-1} \to I_0$. Montrer que la fonction $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ admet un point fixe x_0 tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$.
c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $1 \leq k \leq n-1$, on dit que x est un point n-périodique. S'il existe un point 3-périodique pour f, montrer qu'il existe des points n-périodiques pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. **a)** Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $K = [\alpha, \beta]$. L'hypothèse $K \subset f(I)$ implique l'existence de $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Si $\alpha = \beta$ le résultat est immédiat, en choisissant $J = \{a\}$. Dans le cas $\alpha < \beta$, on a $a \neq b$.

Commençons par le cas $a < b$. L'idée est de déterminer des antécédents de α et β, de sorte qu'entre les deux, il n'y ait pas d'autres antécédents de α et β. On considère l'ensemble $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) = \beta\}$, fermé non vide (il contient b) et minoré par a. On peut donc définir $v = \inf A$, et on a $f(v) = \beta$. L'ensemble $B = \{x \in [a, v] \mid f(x) = \alpha\}$ est aussi un fermé non vide (il contient a) et majoré par v. On peut donc définir $u = \sup B$, et on a $f(u) = \alpha$ et $u < v$. Le segment $J = [u, v]$ vérifie bien $f(J) = K$: comme $f(u) = \alpha$ et $f(v) = \beta$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $K \subset f(J)$. On a bien l'égalité sinon il existerait $w \in J$ tel que $f(w) \notin K$. Si $f(w) > \beta$, alors par continuité de f il existerait $x \in [u, w[$ (donc $x < v$) tel que $f(x) = \beta$ ce qui est en contradiction avec la définition de v ; si $f(w) < \alpha$ alors il existerait $x \in]w, v]$ (donc $x > u$) tel que $f(x) = \alpha$ ce qui est en contradiction avec la définition de u.

On traite le cas $a > b$ de la même manière en prenant cette fois $u = \sup\{x \in [b, a] \mid f(x) = \beta\}$ puis $v = \inf\{x \in [u, a] \mid f(x) = \alpha\}$.

b) On commence par le cas $n = 1$.Supposons $I_0 \subset f(I_0)$ et notons $I_0 = [\alpha, \beta]$. Il existe $a, b \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(a) \leq \alpha$ et $f(b) \geq \beta$. Ainsi la fonction $g(x) = f(x) - x$ vérifie $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$. Cette fonction est continue et change de signe sur I_0, il existe donc $x_0 \in I_0$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.

Traitons maintenant le cas $n = 2$, en supposant que $I_0 \to I_1 \to I_0$. On a $I_1 \subset f(I_0)$ donc le résultat de la question précédente assure l'existence d'un segment $J \subset I_0$ tel que $I_1 = f(J)$. Comme $I_0 \subset f(I_1)$, on en déduit $J \subset I_0 \subset f^2(J)$. Le cas $n = 1$ appliqué à la fonction f^2 montre l'existence d'un point fixe $x_0 \in J$ de f^2. On a bien $x_0 \in I_0$ et $f(x_0) \in f(J) = I_1$, nous avons donc démontré le cas $n = 2$.

Voyons maintenant le cas général $n \geq 3$. Comme $I_1 \subset f(I_0)$ il existe un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. On a alors $I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$, donc il existe un segment $J_2 \subset J_1$ tel que $f^2(J_2) = I_2$. On construit ainsi des segments $J_3, \dots, J_{n-1}$ tels que $J_{n-1} \subset \dots \subset J_2 \subset J_1 \subset I_0$ et $f^k(J_k) = I_k$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Comme $I_0 \subset I_{n-1} = f^n(J_{n-1})$, il existe un segment $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $f^n(J_n) = I_0$. On a $J_n \subset I_0 = f^n(J_n)$, et donc f^n admet un point fixe $x_0 \in J_n \subset I_0$. Par construction on a $f^k(x_0) \in I_k$ pour $k = 1, \dots, n-1$.

c) Notons a un point 3-périodique de f, et $b = f(a)$, $c = f^2(a)$. Tous les points a, b et c sont 3-periodiques donc quitte à remplacer a par b ou c, on peut supposer $a < b$ et $a < c$.

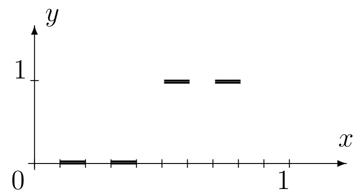
- Supposons $b < c$, de sorte que $a < b < c$. Soit $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Comme $b = f(a)$ et $c = f(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $I_1 \subset f(I_0)$, c'est-à-dire $I_0 \to I_1$. De même, $f(b) = c$ et $f(c) = a$ donc $[a, c] \subset f(I_1)$ ce qui implique $I_1 \to I_0$ et $I_1 \to I_1$. La propriété $I_1 \to I_1$ entraîne l'existence d'un point fixe de f dans I_1. On a $I_0 \to I_1 \to I_0$ et ceci entraîne l'existence d'un point fixe $x_2 \in I_0$ de f^2 tel que $f(x_2) \in I_1$. On a bien $x_2 \neq f(x_2)$ (car $x_2 \in I_0$ et $f(x_2) \in I_1$, donc $x_2 \leq b \leq f(x_2)$ donc si $x_2 = f(x_2)$ on aurait $x_2 = b$ ce qui est impossible puisque b est un point 3-périodique de f). Ainsi, x_2 est un point 2-périodique de f. Pour $n \geq 4$, le cycle $I_0 \to I_1 \to I_1 \to \dots \to I_1 \to I_0$, où l'intervalle I_1 figure $n-1$ fois, montre l'existence d'un point fixe $x_n \in I_0$ de f^n tel que $f^k(x_n) \in I_1$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Ici aussi, on a $x_n \leq b \leq f^k(x_n)$ pour $k = 1, \dots, n-1$ et on ne peut pas avoir $x_n = b$ (sinon $f^2(x_n) = a$ ce qui est impossible car $f^2(x_n) \geq b$) donc x_n est bien un point n-périodique de f.

- Le cas $a < c < b$ se traite de la même manière en posant $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. On a ici $I_1 \to I_0$, $I_0 \to I_1$ et $I_0 \to I_0$. En échangeant le rôle de I_0 et I_1 dans le raisonnement précédent on démontre également l'existence d'un point n-périodique de f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

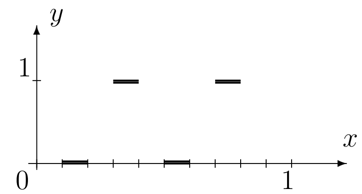
Problème 10 (Courbe de Péano — remplissant un carré). On se donne deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, à valeurs dans $[0, 1]$, 1-périodiques et vérifiant :

$$\begin{cases} \forall t \in \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right], & f(t) = g(t) = 0 \\ \forall t \in \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right], & f(t) = 0,\ g(t) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall t \in \left[\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right], & f(t) = 1,\ g(t) = 0 \\ \forall t \in \left[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right], & f(t) = g(t) = 1 \end{cases}$$

(voir la figure ci-dessous).



$x \mapsto f(x)$



$x \mapsto g(x)$

De telles fonctions f et g existent bien, il suffit par exemple de relier les extrémités des segments en gras sur la figure par des segments de droite.

On considère ensuite les fonctions

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(10^{n-1}t)}{2^n}, \qquad \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(10^{n-1}t)}{2^n}$$

et

$$F : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\alpha(t), \beta(t)).$$

a) Montrer l'existence et la continuité de F.
b) Montrer que F est une surjection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^2$ (autrement dit, le graphe de F remplit totalement le carré $[0, 1]^2$).
c) Existe-t-il une fonction $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant la propriété de la question b) ?
d) Existe-t-il une fonction $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ continue et bijective de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^2$?

Solution. **a)** La fonction f est à valeurs dans $[0, 1]$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left| \frac{f(10^{n-1}t)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, la série de fonction $\sum_{n \geq 1} f(10^{n-1}t)/2^n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence et la continuité de α. On procéderait de même pour β.

b) Commençons par considérer $t \in [0, 1[$, et écrivons sa décomposition décimale :

$$t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{10^n}, \qquad (t_n \in \{0, 1, \dots, 9\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*)$$

de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 10^{n-1}t = N_n + \frac{t_n}{10} + R_n \quad \text{avec} \quad N_n \in \mathbb{N} \text{ et } R_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{t_i}{10^{i+1-n}} \in \left[0, \frac{1}{10}\right[,$$

(cette dernière assertion est vraie car les t_n ne sont jamais stationnaires à 9 à partir d'un certain rang) donc, les fonctions f et g étant 1-périodiques,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} 2^{-n}f(10^{n-1}t) &= 2^{-n}f\left(\frac{t_n}{10} + R_n\right) \\ 2^{-n}g(10^{n-1}t) &= 2^{-n}g\left(\frac{t_n}{10} + R_n\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad R_n \in \left[0, \frac{1}{10}\right[. \qquad (*)$$

Ceci étant, donnons nous $(x, y) \in [0, 1]^2$ et écrivons la décomposition diadique de x et y :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^k}, \qquad y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y_k}{2^k}, \qquad (x_k, y_k \in \{0, 1\}).$$

Si $x = 1$ on choisit $x_k = 1$ pour tout k, de même pour y. Nous allons construire $t \in [0, 1[$ à partir de sa décomposition décimale pour avoir $f(10^{k-1}t) = x_k$ et $g(10^{k-1}t) = y_k$ pour tout k, ce qui montrera que $F(t) = (x, y)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

— si $(x_k, y_k) = (0, 0)$, on choisit $t_k = 1$;
— si $(x_k, y_k) = (0, 1)$, on choisit $t_k = 3$;
— si $(x_k, y_k) = (1, 0)$, on choisit $t_k = 5$;
— si $(x_k, y_k) = (1, 1)$, on choisit $t_k = 7$.

L'écriture $t = \sum_{n=1}^{+\infty} t_k/10^k$ est bien un développement décimal, et t vérifie la propriété requise d'après (*) et d'après la forme des fonctions f et g. Nous venons donc de prouver que $[0, 1]^2 \subset F([0, 1])$. L'inclusion réciproque est immédiate, donc finalement, $F([0, 1]) = [0, 1]^2$.

c) Non ! Raisonnons par l'absurde en supposant qu'une telle fonction existe. Nous allons recouvrir $F([0, 1])$ par une surface dont l'aire est inférieure à celle du carré $[0, 1]^2$, d'où découlera l'absurdité désirée.

On note $M = \sup_{t \in [0,1]} \|F'(t)\|$ (où $\|\,.\,\|$ désigne la norme du sup : $\|(x, y)\| = \sup\{|x|, |y|\}$). On considère un entier naturel non nul quelconque n et la subdivision $0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$ de $[0, 1]$. Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n - 1$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \qquad \left\| F(t) - F\left(\frac{k + \frac{1}{2}}{n}\right) \right\| \leq M \left| t - \frac{k + \frac{1}{2}}{n} \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

Ainsi, $F([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])$ est inclus dans le carré de centre $F\left(\dfrac{k + \frac{1}{2}}{n}\right)$ de demi-côté $\frac{M}{2n}$, que nous noterons $C_{n,k}$. On a donc

$$F([0, 1]) = \bigcup_{k=0}^{n-1} F\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} C_{n,k} = S_n.$$

L'aire $\mathcal{A}(S_n)$ de S_n est inférieure à la somme des aires des carrés $C_{n,k}$, ce qui s'écrit

$$\mathcal{A}(S_n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}(C_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{M}{n}\right)^2 = \frac{M^2}{n}.$$

On choisit maintenant n tel que $n > M^2$. Alors $\mathcal{A}(S_n) < 1$, donc $[0, 1]^2 \not\subset S_n$, et comme $F([0, 1]) \subset S_n$ on en déduit $[0, 1]^2 \not\subset F([0, 1])$. Ceci est impossible, d'où le résultat.

d) C'est dans un cadre légèrement différent la même chose que l'exercice 8 page 47. On raisonne par l'absurde en supposant qu'une telle bijection $F : [0, 1] \to [0, 1]^2$ existe. L'application F est continue sur un compact, son application réciproque $F^{-1} : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ est donc continue (voir la proposition 14 page 31). Donnons nous un point quelconque c dans $]0, 1[$. L'ensemble

$[0,1]^2 \setminus \{F(c)\}$ est connexe (car connexe par arcs comme on le vérifie facilement), donc F^{-1} étant continue, $F^{-1}\big([0,1]^2 \setminus \{F(c)\}\big)$ est connexe. On a affaire à une bijection, donc

$$F^{-1}([0,1]^2 \setminus \{F(c)\}) = F^{-1}([0,1]^2) \setminus \{c\} = [0,1] \setminus \{c\} = [0,c[\, \cup\,]c,1],$$

qui n'est pas connexe ! Ceci est absurde, d'où le résultat.

Problème 11 (Fonction de Weierstrass). On définit une application $f :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{q} \quad \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1), \qquad f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

(fonction introduite par Weierstrass).
a) Déterminer l'ensemble des points où f est continue.
b) Montrer que f est une fonction réglée.

Solution. **a)** Nous allons montrer que cette étrange fonction est discontinue en tout point rationnel et continue en tout point irrationnel.

Soit $x \in [0,1]$ un rationnel et supposons (on raisonne par l'absurde) que f soit continue en x. Comme les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) de points irrationnels de $[0,1]$ qui converge vers x. On a alors $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, ce qui est impossible car $f(x) \neq 0$ et $f(x_n) = 0$ pour tout n. Ainsi, f est discontinue en tout point rationnel de $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$ un irrationnel. Nous allons montrer la continuité de f en x. Donnons nous $\varepsilon > 0$ et fixons un entier naturel non nul N tel que $1/N < \varepsilon$. L'ensemble Γ des rationnels de $[0,1]$ qui peuvent s'écrire sous la forme p/q avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $q < N$ est fini. Comme de plus $x \notin \Gamma$, le réel $\alpha = \inf_{y\in\Gamma} |x-y|$ est non nul. Considérons maintenant un élément quelconque $y \in [0,1]$ tel que $|x-y| < \alpha$. Si y est irrationnel, on a $f(y) = 0$ donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si $y = p/q$ est rationnel, on a $q \geq N$ car $y \notin \Gamma$ par construction de α, donc $|f(x) - f(y)| = 1/q < \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall y \in [0,1], |x-y| < \alpha, \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve bien la continuité de f en x.

b) Il s'agit de construire une suite de fonctions en escaliers $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers f. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_n :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = f(x) & \text{si} \quad \exists (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1, q \leq n, \quad x = p/q, \\ \varphi_n(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout n, φ_n est nulle partout sauf en un nombre fini de points, c'est donc une fonction en escalier. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in [0,1], \qquad |f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

En effet,
— si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\varphi_n(x) = f(x) = 0$,
— si $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$ et $q \leq n$, on a $\varphi_n(x) = f(x)$,
— si $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$ et $q > n$, on a $\varphi_n(x) = 0$ et $f(x) = 1/q < 1/n$.
Ainsi, la suite de fonctions en escaliers (φ_n) converge uniformément vers f, donc f est une fonction réglée.

Remarque. Comme f est réglée, elle vérifie les assertions du théorème 4 de la page 99, ce qui entraîne que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable. Ceci est en accord avec le résultat de la question a).

– On peut prouver (en utilisant le théorème de Baire décrit dans l'annexe A) qu'il n'existe pas de fonction continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Problème 12 (Fonctions positivement homogènes). La lettre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $f:\ E \to \mathbb{R}$ est dite positivement homogène de degré α (avec $\alpha > 0$) si

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \qquad f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Une application $g:\ E \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0,1], \qquad g(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y).$$

On rappelle qu'une semi-norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés d'une norme sauf la propriété $(N(x) = 0 \iff x = 0)$ (voir la remarque 1 page 8). On s'intéressera ici aux fonctions positivement homogènes de degré 1.

1/ Soit $f:\ E \to \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré 1.
a) Montrer que f est convexe sur E si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x+y) \le f(x) + f(y).$$

b) Si f est à valeurs positives, montrer que f est convexe sur E si et seulement si l'ensemble $C = \{x \in E \mid f(x) \le 1\}$ est convexe.
c) Si f est convexe, à valeurs positives et si elle est paire, montrer que f est une semi-norme.
d) On suppose ici que E est de dimension finie. Soit Ω un ouvert borné non vide de E. Montrer qu'il existe une norme N sur E telle que $\Omega = \mathrm{B}_N(0,1) = \{x \in E \mid N(x) < 1\}$ si et seulement si Ω est convexe et admet 0 comme centre de symétrie.

2/ (Étude de normes particulières.) Soit un réel $\alpha \ge 1$. Montrer, sans utiliser l'inégalité de Minkowsky, que l'application

$$N_\alpha:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (|x_1|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha)^{1/\alpha}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Solution. **1/ a)** *Condition nécessaire.* Si f est convexe sur E, alors

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \frac{1}{2} f(x+y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \quad \text{donc} \quad f(x+y) \le f(x) + f(y).$$

Condition suffisante. Il suffit d'écrire que pour $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le f(\lambda x) + f((1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

b) *Condition nécessaire.* Si f est convexe, alors pour tout $(x,y) \in C^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \le \lambda + (1-\lambda) = 1, \quad \text{donc} \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Condition suffisante. C'est un peu plus délicat. Soit $(x,y) \in E^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\frac{x}{f(x)+\varepsilon}, \frac{y}{f(y)+\varepsilon} \in C \quad \text{car} \quad f\left(\frac{x}{f(x)+\varepsilon}\right) = \frac{1}{f(x)+\varepsilon} f(x) < 1 \quad (\text{de même pour } y)$$

(le paramètre ε a été introduit pour éviter de diviser par 0) donc C étant convexe par hypothèse,

$$\forall \lambda \in [0,1], \qquad f\left(\frac{\lambda x}{f(x)+\varepsilon} + \frac{(1-\lambda)y}{f(y)+\varepsilon}\right) \le 1. \tag{$*$}$$

Si on choisit λ tel que

$$\frac{\lambda}{f(x)+\varepsilon} = \frac{(1-\lambda)}{f(y)+\varepsilon} \qquad \left(\text{c'est-à-dire } \lambda = \frac{f(x)+\varepsilon}{f(x)+f(y)+2\varepsilon} \in [0,1]\right),$$

on obtient en remplaçant dans (*)

$$f\left(\frac{x+y}{f(x)+f(y)+2\varepsilon}\right) \le 1 \qquad \text{donc} \qquad f(x+y) \le f(x) + f(y) + 2\varepsilon.$$

Ceci dernier résultat est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. On en conclut maintenant avec a) que f est convexe.

c) Comme f est convexe, l'inégalité triangulaire est vérifiée d'après le résultat de la question a). Il faut maintenant montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$. Si $\lambda \geq 0$, ceci résulte du fait que f est positivement homogène de degré 1. Si $\lambda < 0$, ceci est une conséquence de l'hypothèse de parité vérifiée par f car

$$f(\lambda x) = f((-\lambda)x) = (-\lambda) f(x) = |\lambda| f(x).$$

d) *Condition nécessaire.* Une norme est une fonction positivement homogène de degré 1, est convexe d'après a) car elle vérifie l'inégalité triangulaire, et est de plus à valeurs positives. On en conclut grâce à b) que $C = \overline{\mathrm{B}_N(0,1)}$ est convexe. L'intérieur d'un convexe est convexe, donc $\overset{\circ}{C} = \Omega$ est convexe. La symétrie de Ω par rapport à 0 est immédiate puisque

$$\forall x \in \Omega, \qquad N(-x) = N(x) < 1 \quad \text{donc} \quad -x \in \Omega.$$

Condition suffisante. Commençons par définir N. On pose $N(0) = 0$. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Nous allons définir $N(x)$ comme étant égal à $1/\mu_x$, où $\mu_x > 0$ est tel que $\mu_x x$ appartient à la frontière de Ω (ceci car $N(\mu_x x) = 1$) — voir la figure ci-contre.

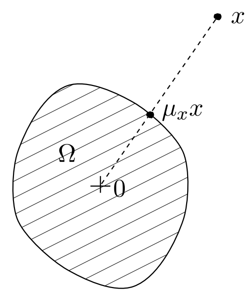


FIGURE 10. L'ensemble Ω et la construction de μ_x pour un x donné.

On pose $\Gamma_x = \{\lambda > 0 \mid \lambda x \in \overline{\Omega}\}$. Comme Ω est ouvert et contient 0 (il est non vide, symétrique par rapport à 0 et convexe), Γ_x est non vide. De plus, Ω est borné donc Γ_x est majoré. Ainsi, $\mu_x = \sup \Gamma_x$ est bien défini, et on pose $N(x) = 1/\mu_x$. Remarquons que $\overline{\Omega}$ étant fermé, on a $\mu_x \in \Gamma_x$.

Ainsi construite, on vérifie facilement que N est positivement homogène de degré 1, paire et vérifie $N(x) = 0 \iff x = 0$. Par ailleurs,

$$N(x) \leq 1 \iff \mu_x \geq 1 \iff 1 \in \Gamma_x \iff x \in \overline{\Omega},$$

donc $C = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\} = \overline{\Omega}$ est convexe. En utilisant le résultat de la question c), on en déduit que N est une norme.

2/ Soit $\alpha \geq 1$. Il est immédiat que l'application N_α est positivement homogène de degré 1, positive et paire, et vérifie $N_\alpha(x) = 0 \iff x = 0$. Pour prouver que c'est une norme, il suffit de vérifier, en vertu du résultat de la question 1/c), que l'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid N_\alpha(x) \leq 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha \leq 1\}$$

est convexe. Pour prouver ceci, on remarque que l'application $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^\alpha$ est convexe (elle est dérivable et sa fonction dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ est croissante), ce qui entraîne pour $x, y \in C$

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad |\lambda x_i + (1-\lambda) y_i|^\alpha \leq (\lambda |x_i| + (1-\lambda)|y_i|)^\alpha \leq \lambda |x_i|^\alpha + (1-\lambda)|y_i|^\alpha,$$

donc par sommation sur $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n |\lambda x_i + (1-\lambda) y_i|^\alpha \leq \lambda \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha \right) + (1-\lambda) \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^\alpha \right) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

En d'autres termes, $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$. Ainsi, C est convexe et le résultat est prouvé.

PROBLÈME 13 (MOYENNES). Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f un homéomorphisme de I dans J. Soient $(x_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ n couples de $I \times \mathbb{R}^{+*}$. On dit que $y \in I$ est la moyenne selon f de $(x_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ si

$$f(y) = \frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \quad \text{ou encore} \quad y = f^{-1}\left(\frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right).$$

(Par exemple, si $\alpha_i = 1$ pour tout i, la moyenne selon $f(x) = x$ est la moyenne arithmétique, la moyenne selon $f(x) = \log x$ est la moyenne géométrique, la moyenne selon $f(x) = 1/x$ est la moyenne harmonique.)

a) Soient I, J, K trois intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$, $g : I \to K$ deux homéomorphismes. On dit que la moyenne selon f est inférieure à la moyenne selon g si pour toute famille finie de couples $(x_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ de $I \times \mathbb{R}^{+*}$, la moyenne selon f de cette famille est inférieure à la moyenne selon g de cette famille. Si f est croissante, montrer que la moyenne selon f est inférieure à la moyenne selon g si et seulement si $h = f \circ g^{-1}$ est concave. Que dire si f est décroissante ?

b) (Application.) Rappelons que pour tout $\alpha \ge 1$, l'application

$$N_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (|x_1|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha)^{1/\alpha}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ (voir par exemple la question 2/ du problème précédent). Soient α, β deux nombres réels tels que $1 \le \alpha \le \beta$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad N_\beta(x) \le N_\alpha(x) \le n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}} N_\beta(x).$$

Solution. **a)** Soit $(x_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de $I \times \mathbb{R}^{+*}$, y sa moyenne selon f, z sa moyenne selon g. La fonction f étant croissante, on a

$$(y \le z) \quad \iff \quad (f(y) \le f(z)).$$

Pour tout i, posons $z_i = g(x_i)$, de sorte que $f(x_i) = f \circ g^{-1}(z_i) = h(z_i)$. On a

$$f(y) = \frac{\alpha_1 h(z_1) + \cdots + \alpha_n h(z_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \quad \text{et} \quad f(z) = h\left(\frac{\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right).$$

Ces deux expressions montrent que $f(y) \le f(z)$ si et seulement si l'inégalité caractérisant la concavité de h est vérifiée pour la famille $(z_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$. On en conclut facilement que la moyenne selon f est inférieure à la moyenne selon g si et seulement si $h = f \circ g^{-1}$ est concave.

Si f est décroissante, la fonction $-f$ est croissante. La moyenne selon f étant la même que la moyenne selon $-f$ (revoir les définitions), on en conclut que la moyenne selon f est inférieure à la moyenne selon g si et seulement si $(-f) \circ g^{-1}$ est concave, c'est-à-dire $f \circ g^{-1}$ est convexe.

b) Démontrons $N_\beta \le N_\alpha$. Lorsque $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $N_\alpha(x) = 1$, on a $|x_i| \le 1$ pour tout i et comme $\alpha \le \beta$ ceci entraîne $|x_i|^\beta \le |x_i|^\alpha$ pour tout i, donc

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^\beta \le \sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha = 1,$$

et donc $N_\beta(x) \le 1$. Traitons le cas général. Si $x = 0$, l'inégalité est triviale, sinon, en notant $\lambda = 1/N_\alpha(x)$, on a

$$N_\alpha(\lambda x) = 1 \quad \text{donc} \quad N_\beta(x) = \frac{1}{\lambda} N_\beta(\lambda x) \le \frac{1}{\lambda} = N_\alpha(x).$$

Démontrons maintenant l'inégalité $N_\alpha \le n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}} N_\beta$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On remarque que

$$\frac{N_\alpha(x)}{n^{1/\alpha}} = \left(\frac{|x_1|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

est la moyenne de la famille $(|x_i|, 1)_{1\le i\le n}$ selon la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $\; x \mapsto x^\alpha$. De même, $N_\beta(x)/n^{1/\beta}$ est la moyenne de cette même famille selon $g : x \mapsto x^\beta$. Comme $f \circ g^{-1} = x^{\alpha/\beta}$

est une fonction concave (la fonction dérivée $x \mapsto (\alpha/\beta)x^{\alpha/\beta-1}$ est décroissante car $\alpha \leq \beta$), et que f est croissante, le résultat de la question précédente entraîne que la moyenne selon f est inférieure à la moyenne selon g, en particulier

$$\frac{N_\alpha(x)}{n^{1/\alpha}} \leq \frac{N_\beta(x)}{n^{1/\beta}},$$

d'où l'inégalité désirée.

Remarque. La dernière inégalité est une égalité pour $x = (1, \dots, 1)$, on ne peut donc pas remplacer $n^{1/\alpha-1/\beta}$ par une constante plus petite. Remarquez d'ailleurs qu'il aurait été difficile de prouver cette inégalité sans utiliser le résultat de la question a).

PROBLÈME 14 (FONCTIONS À VARIATION BORNÉE). Pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on note $\mathrm{sub}([a, b])$ l'ensemble des subdivisions σ de $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Soit une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pour toute subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$, on note

$$\mathrm{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\mathrm{Var}_\sigma(f) \leq M$ pour toute subdivision σ de $[a, b]$ (on dit alors que f est à *variation bornée*) et on pose

$$\bigvee_a^b f = \sup_{\sigma \in \mathrm{sub}([a,b])} \mathrm{Var}_\sigma(f).$$

1/ a) Soit $I = [c, d]$ un segment inclus dans $[a, b]$. Montrer que la restriction $f_{|I}$ de f à I est à variation bornée. On peut ainsi définir

$$\bigvee_c^d f = \sup_{\sigma \in \mathrm{sub}([c,d])} \mathrm{Var}_\sigma(f_{|I}).$$

b) Si $a \leq x < y < z \leq b$, montrer la relation de Chasles $\bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f = \bigvee_x^z f$.
c) Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que g est à variation bornée et que

$$\bigvee_a^b g = \int_a^b |g'(t)|\, dt.$$

2/ On considère une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
a) Montrer que f est à variation bornée si et seulement s'il existe deux fonctions croissantes $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $f = g - h$.
b) Montrer que si f est à variation bornée, f est une fonction réglée.

3/ (Un exemple de fonction continue qui n'est pas à variation bornée.) Montrer que l'application

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

n'est pas à variation bornée bien qu'elle soit continue.

Solution. **1/ a)** Soit $\sigma : c = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = d$ une subdivision de $[c, d]$. Alors $\sigma' : a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ est une subdivision de $[a, b]$ et donc

$$\mathrm{Var}_\sigma(f_{|I}) \leq \mathrm{Var}_{\sigma'}(f) \leq M.$$

Cette majoration étant valable pour tout $\sigma \in \mathrm{sub}([c, d])$, on en déduit que $f_{|I}$ est à variation bornée.

b) On considère deux subdivisions

$$\sigma_1 : x = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = y \in \mathrm{sub}([x,y]) \qquad \sigma_2 : y = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = z \in \mathrm{sub}([y,z]).$$

En les concaténant, on obtient une subdivision $\sigma :\ x = x_0 < \cdots < x_p = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = z$ de $[x,z]$. Ainsi

$$\mathrm{Var}_{\sigma_1}(f) + \mathrm{Var}_{\sigma_2}(f) = \mathrm{Var}_\sigma(f) \leq \bigvee_x^z f.$$

Cette majoration étant valable pour tout $\sigma_1 \in \mathrm{sub}([x,y])$ et $\sigma_2 \in \mathrm{sub}([y,z])$, on en déduit

$$\bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f \leq \bigvee_x^z f. \tag{$*$}$$

Considérons maintenant une subdivision σ de $[x,z]$. En lui ajoutant le point y (s'il ne fait pas déjà parti de σ), on obtient une subdivision σ' de $[x,z]$ qui vérifie $\mathrm{Var}_\sigma(f) \leq \mathrm{Var}_{\sigma'}(f)$. On peut noter σ' sous la forme

$$\sigma' :\ x = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = y = y_0 < \cdots < y_q = z.$$

Considérons alors les subdivisions

$$\sigma_1 :\ x = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = y \in \mathrm{sub}([x,y]) \qquad \sigma_2 :\ y = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = z \in \mathrm{sub}([y,z]).$$

On a

$$\mathrm{Var}_\sigma(f) \leq \mathrm{Var}_{\sigma'}(f) = \mathrm{Var}_{\sigma_1}(f) + \mathrm{Var}_{\sigma_2}(f) \leq \bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f.$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision σ de $[x,z]$, on en déduit $\bigvee_x^z f \leq \bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f$, d'où le résultat avec (*).

c) Soit $\sigma :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. Pour tout i, on a

$$|g(x_{i+1}) - g(x_i)| = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(t)\,dt \right| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |g'(t)|\,dt$$

donc par sommation sur i, $\mathrm{Var}_\sigma(g) \leq \int_a^b |g'(t)|\,dt$. Ceci étant vrai pour tout $\sigma \in \mathrm{sub}([a,b])$ on en déduit que g est à variation bornée et que

$$\bigvee_a^b g \leq \int_a^b |g'(t)|\,dt. \tag{$**$}$$

Il nous faut maintenant prouver l'inégalité réciproque. Si $\sigma :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$, on peut écrire pour tout i, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = (x_{i+1} - x_i) g'(\theta_i) \quad \text{avec} \quad \theta_i \in]x_i, x_{i+1}[,$$

de sorte que

$$\mathrm{Var}_\sigma(g) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)|g'(\theta_i)| \quad \text{avec} \quad \forall i, \theta_i \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Cette dernière expression est une somme de Riemann relative à la subdivision σ pour la fonction $|g'|$. En faisant tendre le pas de σ vers 0, on voit donc que $\mathrm{Var}_\sigma(g)$ tend vers $\int_a^b |g'(t)|\,dt$, d'où $\int_a^b |g'(t)|\,dt \leq \bigvee_a^b g$. On en déduit avec (**) le résultat.

2/ a) *Condition suffisante.* Une fonction croissante $\varphi :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée car pour toute subdivision $\sigma :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$,

$$\mathrm{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = f(b) - f(a).$$

La différence de deux fonctions à variation bornée étant à variation bornée (c'est immédiat), on en déduit que $f = g - h$ est à variation bornée.

Condition nécessaire. Soit $g :\ [a,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \bigvee_a^x f$. D'après le résultat de la question 1/ b), g est une fonction croissante. Posons $h = g - f$. La fonction h est croissante car

$$\forall x < y, \quad h(y) - h(x) = \bigvee_x^y f - [f(y) - f(x)] \geq 0 \quad \text{car} \quad |f(x) - f(y)| \leq \bigvee_x^y f$$

(cette dernière assertion est vraie car $\sigma :\ x < y$ est une subdivision de $[x, y]$). Ainsi, $f = g - h$ est la différence de deux fonctions croissantes.

b) D'après la question précédente, on peut écrire $f = g - h$ où g et h sont deux fonctions croissantes. Une fonction monotone est réglée (voir la conséquence du théorème 4 page 99), donc f, différence de deux fonctions réglées, est une fonction réglée.

3/ Considérons pour tout entier $n \geq 2$ la subdivision de $[0, 1]$ définie par

$$\sigma_n :\ 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} < \cdots < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1.$$

Pour tout k on a $f(\frac{1}{k\pi}) = \cos(k\pi)/(k\pi) = (-1)^k/(k\pi)$ donc

$$\mathrm{Var}_{\sigma_n}(f) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left| f\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right) - f\left(\frac{1}{k\pi}\right) \right| = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k+1}.$$

La série $\sum_k \frac{1}{k+1}$ diverge, donc l'ensemble $(\mathrm{Var}_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{sub}([0,1])}$ n'est pas majoré, ce qui prouve que f n'est pas à variation bornée.

Problème 15 (Fonctions presque-périodiques). Soit E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans E. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x)\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \quad \text{et} \quad \forall \tau \in \mathbb{R},\ f_\tau :\ \mathbb{R} \to E \quad x \mapsto f(x + \tau).$$

On dit que $f \in \mathcal{F}$ est *presque-périodique* si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Lambda > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [\alpha, \alpha + \Lambda[, \qquad \|f - f_\tau\|_\infty < \varepsilon. \qquad (*)$$

On note $\mathcal{P}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ constitué des fonctions presque-périodiques.
a) Donner une classe de fonctions classique incluse dans $\mathcal{P}$.
b) Si $f \in \mathcal{P}$, montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
c) On note $\mathcal{B}$ le s.e.v de $\mathcal{F}$ constitué des fonctions continues et bornées, et on munit $\mathcal{B}$ de la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Pour tout $f \in \mathcal{B}$, on note $A(f) = \{f_a,\ a \in \mathbb{R}\}$. Si $f \in \mathcal{B}$, montrer l'équivalence

$$(f \in \mathcal{P}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A(f) \text{ est précompact dans } \mathcal{B}).$$

(La précompacité est définie dans la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass, page 29).
d) Soient $f, g \in \mathcal{P}$. Montrer que $f + g \in \mathcal{P}$ et $fg \in \mathcal{P}$ si E est une algèbre normée.
e) Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie fermée de $\mathcal{B}$.

Solution. **a)** Il est clair que la classe des fonctions continues périodiques est incluse dans $\mathcal{P}$ (il suffit, dans (*), de choisir Λ égal à la période).

b) Une fonction presque-périodique f est bornée. En effet, en choisissant $\varepsilon = 1$ dans (*) et en considérant le Λ correspondant, on a pour tout nombre réel x

$$\exists y \in [x - \Lambda, x[, \qquad \|f - f_y\|_\infty < 1$$

donc $\|f(x - y) - f(x)\| < 1$ ce qui entraîne

$$\|f(x)\| < 1 + \|f(x - y)\| \leq 1 + \sup_{t \in [0,\Lambda]} \|f(t)\| \quad \text{car} \quad x - y \in [0, \Lambda],$$

et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'où le caractère borné de f.

Montrons maintenant qu'une fonction presque-périodique f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et considérons le Λ correspondant dans (*). La fonction f étant continue sur le compact $[0, \Lambda + 1]$, elle y est uniformément continue donc

$$\exists \eta \in]0, 1[, \forall x, x' \in [0, \Lambda + 1], |x - x'| < \eta, \qquad \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon.$$

Considérons alors deux réels x, x' tels que $|x - x'| < \eta$, avec $x \leq x'$. La fonction f étant presque périodique,

$$\exists \tau \in [x - \Lambda, x[, \qquad \|f - f_\tau\|_\infty < \varepsilon.$$

Ceci entraîne

$$\|f(x - \tau) - f(x)\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f(x' - \tau) - f(x')\| < \varepsilon,$$

donc comme $x - \tau$ et $x' - \tau$ appartiennent à $[0, \Lambda + 1]$,

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \|f(x) - f(x - \tau)\| + \|f(x - \tau) - f(x' - \tau)\| + \|f(x' - \tau) - f(x')\| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout couple (x, x') de réels tel que $|x - x'| < \eta$, d'où l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$.

c) *Condition nécessaire.* Soit $f \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$ et le Λ correspondant dans (*). Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, on voit que

$$\exists (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in [0, \Lambda]^n, \forall y_0 \in [0, \Lambda], \exists i, \qquad \|f_{y_0} - f_{\eta_i}\|_\infty < \varepsilon. \tag{**}$$

Maintenant, soit $y \in \mathbb{R}$. D'après (*), il existe $\tau \in [-y, -y + \Lambda[$ tel que $\|f - f_\tau\|_\infty < \varepsilon$. Ceci s'écrit aussi $\|f_y - f_\rho\|_\infty < \varepsilon$ avec $\rho = \tau + y \in [0, \Lambda[$. D'après (**), il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\|f_\rho - f_{\eta_i}\|_\infty < \varepsilon$, et on en déduit

$$\|f_y - f_{\eta_i}\|_\infty \leq \|f_y - f_\rho\|_\infty + \|f_\rho - f_{\eta_i}\|_\infty < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

En d'autres termes on a $A(f) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(f_{\eta_i}, 2\varepsilon)$, d'où la précompacité de $A(f)$ dans $\mathcal{B}$.

Condition suffisante. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe une famille finie $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$ de $A(f)$ telle que

$$A(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(f_{a_i}, \varepsilon). \tag{***}$$

Posons $\Lambda = 1 + 2\mu$ où $\mu = \sup\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$ et considérons maintenant un réel quelconque α. D'après (***),

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \|f_{\alpha + \mu} - f_{a_i}\|_\infty < \varepsilon \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \|f_{\alpha + \mu - a_i} - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout réel α, nous avons trouvé $y \in [\alpha, \alpha + \Lambda[$ (ici $y = \alpha + \mu - a_i$) tel que $\|f_y - f\|_\infty < \varepsilon$. Ceci suffit pour montrer que f est presque-périodique.

d) D'après la question précédente, $A(f)$ et $A(g)$ sont précompacts. Ainsi, si on considère $\varepsilon > 0$, il existe deux familles finies $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq m}$ de $A(f)$ et $(g_{b_j})_{1 \leq j \leq n}$ de $A(g)$ telles que

$$A(f) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}(f_{a_i}, \varepsilon) \quad \text{et} \quad A(g) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}(g_{b_j}, \varepsilon).$$

On en conclut

$$A(f + g) \subset A(f) + A(g) \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \mathrm{B}(f_{a_i} + g_{b_j}, 2\varepsilon),$$

donc $A(f + g)$ est précompact, donc $f + g \in \mathcal{P}$ d'après la question précédente.

Supposons maintenant que E soit une algèbre normée. Comme f et g sont bornées, $M = \|f\|_\infty$ et $N = \|g\|_\infty$ sont finis. Soient $a \in \mathbb{R}$ et i, j tels que $\|f_a - f_{a_i}\|_\infty < \varepsilon$ et $\|g_a - g_{b_j}\|_\infty < \varepsilon$. L'inégalité

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \|f_a g_a(x) - f_{a_i} g_{b_j}(x)\| &\leq \|f_a g_a(x) - f_{a_i} g_a(x)\| + \|f_{a_i} g_a(x) - f_{a_i} g_{b_j}(x)\| \\ &\leq \|f_a(x) - f_{a_i}(x)\| \cdot \|g_a(x)\| + \|f_{a_i}(x)\| \cdot \|g_a(x) - g_{b_j}(x)\| \leq N\varepsilon + M\varepsilon \end{aligned}$$

montre que

$$A(fg) \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \mathrm{B}(f_{a_i} g_{b_j}, (M + N)\varepsilon),$$

donc comme précédemment $A(fg)$ est précompact, donc $fg \in \mathcal{P}$.

e) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{P}$ qui converge vers $f \in \mathcal{B}$. Montrons que $f \in \mathcal{P}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_N\|_\infty < \varepsilon$. Comme f_N est presque-périodique,

$$\exists \Lambda > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [\alpha, \alpha + \Lambda[, \qquad \|(f_N) - (f_N)_\tau\|_\infty < \varepsilon$$

donc

$$\|f - f_\tau\|_\infty \leq \|f - f_N\|_\infty + \|(f_N) - (f_N)_\tau\|_\infty + \|(f_N)_\tau - f_\tau\|_\infty < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

ce qui suffit pour prouver que $f \in \mathcal{P}$.

Remarque. Les fonctions presque périodiques ont été introduites par Bohr au début du vingtième siècle, dans le cadre de l'étude des séries de Dirichlet $\sum a_n/n^s$, et généralisent les séries de Fourier. On peut montrer que pour toute fonction presque périodique f, la limite $M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ existe (on l'appelle *valeur moyenne* de f). Une fonction complexe f est presque périodique si et seulement si on peut écrire

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n t}, \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R},$$

où la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ (la condition suffisante de ce résultat est une conséquence des résultats démontrés dans ce problème), et on a l'équivalent de l'inégalité de Bessel $\sum |a_n|^2 \leq M(f^2)$. Un exemple typique de fonction presque périodique est $t \mapsto \zeta(\sigma + it)$ (avec $\sigma > 1$ donné). Ceci entraîne par exemple que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $T > 0$, il existe $t > T$ tel que $\zeta(\sigma) - \varepsilon < |\zeta(\sigma + it)| \leq \zeta(\sigma)$.

CHAPITRE 3

Intégration

La théorie de l'intégration naquit avec la recherche du calcul de l'aire d'une surface. Archimède savait déjà évaluer l'aire d'une surface délimitée par une parabole et une droite. Ses calculs furent repris au neuvième siècle par les savants arabes. Dès 1636, Pierre de Fermat carra les courbes $x \mapsto ax^m$ où m est un entier naturel.

Au cours de la seconde moitié du XVII$^{\text{e}}$ siècle, Newton et Leibniz fondèrent le calcul infinitésimal. Newton calcula l'aire d'une courbe $y = f(x)$ en inversant les opérations de dérivation (aujourd'hui on dirait : en utilisant la notion de primitive). A l'inverse, Leibniz interpréta les aires comme des sommes de rectangles infinitésimaux.

En 1823, Cauchy rassembla leur résultats et donna le premier une définition précise de l'intégrale. C'est surtout Riemann qui, en 1854, développa la théorie de l'intégration. Il définit son intégrale à l'aide des fameuses "sommes de Riemann".

Enfin, Lebesgue, dans sa thèse de 1902, présenta des idées révolutionnaires sur le concept d'intégrale. Il éclaira bien des difficultés des discussions du XIX$^{\text{e}}$ siècle, et fournit un cadre général simplifié à de nombreux théorèmes, alors que la théorie de Riemann multipliait les hypothèses et les conditions restrictives.

L'intégrale de Lebesgue n'est pas au programme des classes préparatoires scientifiques, et nous étudierons ici l'intégrale de fonctions continues par morceaux.

1. Intégrale sur un segment de $\mathbb{R}$

Nous traiterons directement le cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach (c'est-à-dire un e.v.n complet), la théorie étant presque identique à celle des fonctions à valeurs réelles. Dans cette section, la lettre E désigne un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

1.1. Définition de l'intégrale sur un segment de $\mathbb{R}$

Intégrale des fonctions en escalier.

Définition 1. On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute partie finie de $[a, b]$ contenant a et b. Si σ est une subdivision de $[a, b]$, on peut écrire $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. C'est en général la notation employée pour désigner une subdivision.

On appelle *pas* (ou *module*) de la subdivision σ et on note $|\sigma|$ le réel $\sup_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$.

Définition 2. Une application $\varphi : [a, b] \to E$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision de $[a, b]$

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, φ soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. Une telle subdivision σ est dite alors *bien adaptée* à φ.

Définition 3 (Intégrale d'une fonction en escalier). Soit $\varphi : [a, b] \to E$ une fonction en escalier. Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ bien adaptée à φ, de sorte que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $c_i \in E$ telle que $\varphi(x) = c_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. La valeur

$$I(\sigma, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i$$

est indépendante de la subdivision σ adaptée à φ. On la note alors $I(\varphi)$ ou encore $\int_{[a,b]} \varphi$ ou $\int_a^b \varphi(x)\, dx$, et on l'appelle *intégrale* de φ.

Remarque 1. — Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments contenus dans $[a, b]$.
— L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], E)$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un $\mathbb{K}$-e.v, et l'application $\mathcal{E} \to E \quad \varphi \mapsto I(\varphi)$ est linéaire.
— Pour toute fonction en escalier φ, $\|\varphi\|$ est une fonction en escalier et $\|I(\varphi)\| \leq I(\|\varphi\|)$.
— Si φ et ψ sont en escalier, à valeurs réelles, et si $\varphi \leq \psi$, alors $I(\varphi) \leq I(\psi)$.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Bien qu'on puisse définir l'intégrale de classes de fonctions beaucoup plus générales, nous nous limiterons à l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dont la définition se trouve page 98.

→ DÉFINITION 4 (INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX). Soit une fonction $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux. Alors tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction en escalier $\varphi_n : [a, b] \to E$ telle que $\|f - \varphi_n\| < 1/n$ sur $[a, b]$. La suite (u_n) définie par $u_n = \int_a^b \varphi_n(t)\, dt$ est alors une suite de Cauchy dans E, donc convergente. Sa limite ne dépend pas du choix des fonctions en escaliers φ_n, on la note $\int_a^b f(t)\, dt$ (ou encore $\int_{[a,b]} f$) et on l'appelle *intégrale* de f.

Démonstration. Comme f est continue par morceaux, c'est une fonction réglée, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe bien une fonction en escalier φ_n vérifiant $\|f - \varphi_n\| < 1/n$ sur $[a, b]$ (voir la proposition 5 page 99). La suite (u_n) vérifie bien le critère de Cauchy car d'après la remarque 1, et comme $\|\varphi_p - \varphi_q\| \leq \|\varphi_p - f\| + \|f - \varphi_q\| \leq 1/p + 1/q$, on a

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq n \qquad \|u_p - u_q\| = \|I(\varphi_p - \varphi_q)\| \leq I(\|\varphi_p - \varphi_q\|) \leq I(2/n) = 2(b - a)/n.$$

Comme E est complet par hypothèse (c'est un espace de Banach), la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

Unicité de la limite. Soit (ψ_n) une autre suite de fonctions en escalier vérifiant $\|f - \psi_n\| < 1/n$ sur $[a, b]$. On note ℓ' la limite de $v_n = I(\psi_n)$. L'inégalité

$$\|\psi_n - \varphi_n\| \leq \|\psi_n - f\| + \|f - \varphi_n\| \leq 2/n$$

entraîne

$$\forall n, \qquad \|v_n - u_n\| = \|I(\psi_n - \varphi_n)\| \leq I(\|\psi_n - \varphi_n\|) \leq I(2/n) = 2(b - a)/n$$

donc $\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\| = 0$. Donc $\ell' = \ell$. □

Remarque 2. — Lorsque f est à valeurs réelles, on peut définir

$$I^-(f) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E} \\ \varphi \leq f}} I(\varphi) \quad \text{et} \quad I^+(f) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \psi \geq f}} I(\psi),$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque f est continue par morceaux, on a $I^-(f) = I^+(f)$, et cette valeur commune est un moyen équivalent de définir l'intégrale de f. La définition 4 permet de ne pas se limiter au cadre où $E = \mathbb{R}$ et donne une définition intrinsèque de l'intégrale sur tout e.v.n complet, en particulier sur $\mathbb{C}$ et sur tout e.v de dimension finie (voir la remarque 3).

— Lorsque f et g sont deux fonctions continues par morceaux qui diffèrent seulement en un nombre fini de points, leurs intégrales sont identiques.
— L'intégrale d'une fonction en escalier donnée par la définition 4 est cohérente avec celle donnée dans la définition 3.
— Lorsque $a > b$, on définit $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
— La définition précédente s'étend facilement pour définir l'intégrale d'une fonction réglée. On peut de manière plus générale définir les fonctions *Riemann-intégrables*, qui sont les fonctions f telles que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ et μ en escalier telles que $\|f - \varphi\| < \mu$ et $I(\mu) < \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, les valeurs $I(\varphi)$ convergent vers une valeur unique appelée intégrale de Riemann de f. Toute fonction continue par morceaux, toute fonction réglée, est Riemann-intégrable.

Proposition 1. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v.n de dimension finie (toujours avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f : [a, b] \to E$ une application. On peut écrire $f = \sum_{i=1}^n f_i\,e_i$ où pour tout i, l'application f_i prend ses valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application f est continue par morceaux si et seulement si chacune des applications f_i est continue par morceaux et on a alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)\,dx \right) e_i.$$

Remarque 3. — En particulier, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v dont $(1, i)$ est une base. L'application $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $f = f_1 + i f_2$ (où f_1, f_2 sont à valeurs réelles) et on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i\left(\int_a^b f_2(x)\,dx\right)$.
— On peut définir l'intégrale d'une fonction f à valeurs dans un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie E à partir de l'intégrale des fonctions à valeurs réelles, en procédant comme suit : on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, on écrit $f = \sum_{i=1}^n f_i\,e_i$ où les f_i sont à valeurs réelles, et on pose $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)\,dx\right) e_i$. Il faut ensuite vérifier que cette définition ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. L'avantage de la définition que nous avons adoptée (voir définition 4) est qu'elle est *intrinsèque* (*i. e* elle ne privilégie pas de base).

1.2. Propriétés des intégrales

Nous commençons par donner pêle-mêle les propriétés les plus élémentaires.
— *Relation de Chasles.* Soit $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux et $c \in]a, b[$. On a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
— *Linéarité de l'intégrale.* L'ensemble $\mathcal{C}_m([a, b], E)$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un $\mathbb{K}$-e.v et l'application $\mathcal{C}_m([a, b]) \to E \quad \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)\,dx$ est linéaire.
— *Positivité de l'intégrale.* Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ (le cas de l'inégalité stricte est plus délicat ; voir la proposition 4).
— Si $\|\,.\,\|$ est une norme sur E, alors $\|\int_a^b f(x)\,dx\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,dx$.

Proposition 3. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans E qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue par morceaux f. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Remarque 4. Le théorème de convergence dominée (voir théorème 3 page 151) offre un cadre beaucoup plus commode pour obtenir la convergence d'intégrales d'une suite de fonctions, et c'est ce dernier que l'on utilise le plus souvent.

PROPOSITION 4. *Soient f et g : $[a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Si $f \geq g$ sur $[a,b]$ et s'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > g(c)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration. On pose $\gamma = f(c) - g(c) > 0$. La continuité de $f - g$ en c entraîne l'existence d'un segment non réduit à un singleton $[\alpha, \beta]$ contenant c tel que $f(t) \geq g(t) + \gamma/2$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Ainsi,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta \left(g(x) + \frac{\gamma}{2}\right)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx + \frac{(\beta-\alpha)\gamma}{2} > \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

Comme $f \geq g$ sur $[a,b]$, on a par ailleurs

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx \geq \int_a^\alpha g(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_\beta^b f(x)\,dx \geq \int_\beta^b g(x)\,dx.$$

On en déduit facilement le résultat avec la relation de Chasles. □

Normes et intégrales.

THÉORÈME 1 (INÉGALITÉ DE SCHWARZ). *Soient f, g : $[a,b] \to \mathbb{C}$ deux applications continues par morceaux. Alors*

$$\left|\int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right).$$

Si f et g sont continues et f non identiquement nulle, cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = \alpha f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration. Désignons par $\mathcal{C}_m([a,b])$ l'algèbre des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, et considérons la forme hermitienne positive $\Phi : \mathcal{C}_m([a,b]) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto \int_a^b \overline{f(x)}f(x)\,dx$, dont la forme polaire est

$$\varphi : \mathcal{C}_m([a,b])^2 \to \mathbb{C} \quad (f,g) \mapsto \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,dx$$

(voir le tome Algèbre). L'inégalité de Schwarz appliquée à φ donne

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_m([a,b]), \qquad |\varphi(f,g)|^2 \leq \Phi(f)\Phi(g),$$

d'où la première assertion du théorème. La restriction de Φ à l'e.v des fonctions continues sur $[a,b]$ est définie, et on sait alors que l'inégalité de Schwarz est une égalité si et seulement si f et g forment une famille liée, d'où la seconde assertion du théorème. □

Conséquence : Sur l'e.v $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a,b]$, les applications

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\,dt, \qquad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}, \qquad N_\infty(f) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

sont des normes. L'inégalité de Schwarz entraîne que N_2 vérifie bien l'inégalité triangulaire ; la nullité de $N_1(f)$ ou $N_2(f)$ entraîne bien celle de f d'après la proposition 4.

(i) La norme N_1 s'appelle *norme de la convergence en moyenne.*

(ii) La norme N_2 s'appelle *norme de la convergence en moyenne quadratique.*

(iii) La norme N_∞ (encore notée $\|\cdot\|_\infty$) s'appelle *norme de la convergence uniforme.*

Ces normes vérifient les inégalités

$$N_1(f) \leq \sqrt{b-a}\; N_2(f) \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Étude de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

→ THÉORÈME 2. *Soit* $f: [a,b] \to E$ *une fonction continue par morceaux sur* $[a,b]$. *Alors l'application* $F: [a,b] \to E \quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et continue sur* $[a,b]$. *De plus,* F *est dérivable à gauche et à droite en tout point* x *de* I, *et on a* $F'_g(x) = \lim_{\substack{t\to x \\ t<x}} f(t)$ *et* $F'_d(x) = \lim_{\substack{t\to x \\ t>x}} f(t)$. *En particulier, si* f *est continue sur* $[a,b]$ *alors* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *et* $F'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$.

COROLLAIRE 1. *Toute application continue* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *admet au moins une primitive* F, *et pour toute primitive* F *de* f, *on a* $\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

C'est ce dernier résultat qui amène à rechercher des primitives d'une fonction pour calculer son intégrale. Ce problème sera étudié plus particulièrement dans la partie 2 de ce chapitre. En l'appliquant à $f = uv' + u'v$ dont la primitive est $F = uv$, on obtient le résultat qui suit.

→ THÉORÈME 3 (INTÉGRATION PAR PARTIES). *Soient* $u, v: [a,b] \to \mathbb{C}$ *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$. *Alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u \cdot v\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Citons enfin un dernier résultat, particulièrement utilisé lors de calculs de primitives.

→ THÉORÈME 4 (CHANGEMENT DE VARIABLE). *Soit* $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $f: I \subset \mathbb{R} \to E$ *une application continue par morceaux telle que* $\varphi([a,b]) \subset I$ *(où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*). Alors*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

Conséquence : En conjuguant le théorème du changement de variable avec la relation de Chasles, on obtient les résultats qui suivent.

- Soit f une application $f: [-a,a] \to E$ une continue par morceaux. Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
- Soit $f: \mathbb{R} \to E$ une application continue par morceaux et T-périodique. Alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Première et seconde formule de la moyenne.

THÉORÈME 5 (PREMIÈRE FORMULE DE LA MOYENNE). *Soit* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $g: [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue par morceaux et positive. Alors*

$$\exists c \in [a,b], \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration. Posons $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. On a

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Si $\int_a^b g = 0$, l'inégalité précédente montre que $\int_a^b fg = 0$ et le résultat est évident. Sinon, on a $m \le (\int_a^b fg)/(\int_a^b g) \le M$ et on conclut en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue f. □

Remarque 5. Attention, la fonction g doit être positive.

Théorème 6 (Seconde formule de la moyenne). *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction positive décroissante de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt.$$

Démonstration. L'application $G : [a,b] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \int_a^t g(x)\,dx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $[a,b]$. Ceci assure l'existence des réels

$$m = \inf_{t\in[a,b]} G(t) \quad \text{et} \quad M = \sup_{t\in[a,b]} G(t).$$

Montrons $mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq Mf(a)$, ce qui prouvera le résultat en appliquant à G le théorème des valeurs intermédiaires. En intégrant par parties, on a

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \Big[G(t)f(t)\Big]_a^b - \int_a^b G(t)f'(t)\,dt = G(b)f(b) - \int_a^b G(t)f'(t)\,dt.$$

Or $mf(b) \leq G(b)f(b) \leq Mf(b)$ et

$$m\big(f(a)-f(b)\big) = -m\int_a^b f'(t)\,dt \leq -\int_a^b G(t)f'(t)\,dt \leq -M\int_a^b f'(t)\,dt = M\big(f(a)-f(b)\big),$$

donc finalement $mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq Mf(a)$. Ceci prouve le résultat en vertu de la continuité de G. □

Remarque 6. — Cette formule n'est pas au programme des classes préparatoires mais elle peut rendre de précieux services (par exemple pour démontrer la convergence de certaines intégrales semi-convergentes comme $\int_1^{+\infty} \sin(t)/t\,dt$; voir également la règle d'Abel formulée dans le théorème 5). Il faut savoir refaire sa démonstration qui est simple.
— Ce résultat reste vrai si on suppose uniquement f continue (voir l'exercice 8 page 135), et même si f et g sont uniquement supposées Riemann-intégrables.

1.3. Sommes de Riemann

Sommes de Riemann.

Notation. Soient $f : [a,b] \to E$ une application bornée, $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ et $\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n réels telle que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Le couple (σ,ξ) s'appelle une *subdivision pointée.*

On appelle *somme de Riemann* de la fonction f pour la subdivision pointée (σ,ξ) la grandeur notée $S(f,\sigma,\xi)$ définie par

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

On rappelle que le *pas* de σ est le réel $\sup_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$, noté $|\sigma|$.

→ Théorème 7. *Soit une application* $f : [a,b] \to E$ *continue par morceaux. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour toute subdivision pointée* (σ,ξ) *de* $[a,b]$ *vérifiant* $|\sigma| < \alpha$*, on ait*

$$\left\|\int_a^b f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi)\right\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Nous allons prouver le résultat en trois étapes.
Étape 1. Supposons que f soit de la forme $f = \chi_{[c,d]}\cdot e$, où $\chi_{[c,d]}$ est la fonction caractéristique

d'un segment $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ et $e \in E$. Soit (σ,ξ) une subdivision pointée de $[a,b]$. Écrivons

$$\sigma : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad \xi = (\xi_i)_{1\le i\le n}.$$

On remarque que

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)\,dx \quad \text{donc} \quad \left\| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right\| \le \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(\xi_i) - f(x))\,dx \right\|.$$

Parmi les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$, il y en a au plus deux sur lesquels f ne soit pas constante. On en conclut facilement

$$\left\| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right\| \le 2|\sigma| \cdot \|e\|,$$

d'où le résultat.

Étape 2. Supposons que f soit une fonction en escalier. On peut écrire f comme une somme finie de fonctions du type de celles traitées dans l'étape 1, et le résultat s'obtient ensuite facilement par linéarité de l'intégrale et de l'application $f \mapsto S(f,\sigma,\xi)$.

Étape 3. Traitons maintenant le cas général. Soit $f : \ [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux. Soient $\varepsilon > 0$ et une fonction en escalier φ telle que $\|f - \varphi\| \le \varepsilon$ sur $[a,b]$. L'étape précédente nous assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision pointée (σ,ξ) vérifiant $|\sigma| < \alpha$, on ait

$$\left\| S(\varphi,\sigma,\xi) - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right\| < \varepsilon,$$

Ainsi, pour une telle subdivision pointée (σ,ξ), on a

$$\begin{aligned}
&\left\| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right\| \\
&\quad \le \|S(f,\sigma,\xi) - S(\varphi,\sigma,\xi)\| + \left\| S(\varphi,\sigma,\xi) - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right\| + \left\| \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right\| \\
&\quad \le S(\|f-\varphi\|,\sigma,\xi) + \varepsilon + \int_a^b \|\varphi(x) - f(x)\|\,dx \\
&\quad \le (b-a)\varepsilon + \varepsilon + (b-a)\varepsilon = (1 + 2(b-a))\varepsilon.
\end{aligned}$$

d'où le théorème. □

Conséquence : Soit $f : \ [a,b] \to E$ une application continue par morceaux. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple 1. En appliquant ce dernier résultat à $f : \ [0,1] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto 1/(1+t)$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \Big[\log(1+t)\Big]_0^1 = \log 2.$$

Remarque 7. - Le théorème 7 est également vrai sur les fonctions Riemann-intégrables. Réciproquement, si E est un e.v.n de dimension finie, on peut même montrer qu'une fonction est Riemann-intégrable si et seulement si ses sommes de Riemann “convergent” lorsque le pas des subdivisions tend vers 0.

– Sous certaines hypothèses de régularité sur f, il est possible de donner un développement asymptotique de $\frac{b-a}{n} \sum_i f(a + i\frac{b-a}{n}) - \int_a^b f(x)\,dx$. Ceci est un problème classique qu'il est bon de savoir résoudre (voir l'exercice 6 et le sujet d'étude 3 page 321).

– Attention, le résultat de ce théorème n'est pas vrai pour les fonctions intégrables ou les intégrales généralisées, sauf sous certaines hypothèses (voir l'exercice 5 page 156 qui est classique).

1.4. Exercices

→ Exercice 1 (Intégrales de Wallis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

a) Donner une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1} \right]^2 = \pi,$$

puis montrer que lorsque $n \to +\infty$, $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Solution. **a)** En intégrant par parties, on a

$$\forall n \geq 2, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, \sin x \, dx = \Big[-\sin^{n-1} x \, \cos x \Big]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, \cos^2 x \, dx$$
$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \quad \text{d'où} \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Comme $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = 1$, on en déduit

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2} \, \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1}. \tag{$*$}$$

b) En remarquant que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leq \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x,$$

on tire, par intégration

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1} \quad \text{donc} \quad 1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p},$$

la dernière égalité étant une conséquence de (*). Par conséquent

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$$

et on en déduit la formule de Wallis avec la formule (*).

De la formule de Wallis, on déduit

$$\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} \sim \frac{1}{\sqrt{p\pi}}$$

donc grâce à (*), on tire

$$I_{2p} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} \sim I_{2p} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

On en déduit l'équivalent demandé.

Exercice 2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et continue sur $[a,b]$.
a) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f(t)^n \, dt \right)^{1/n} = M \quad \text{où} \quad M = \sup_{t \in [a,b]} f(t).$$

b) Soit $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue prenant des valeurs strictement positives sur $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n g(t)\, dt \right)^{1/n} = M \quad \text{où} \quad M = \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Solution. **a)** L'inégalité $f(t)^n \leq M^n$ pour tout $t \in [a,b]$ entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left(\int_a^b f(t)^n\, dt \right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b M^n \right)^{1/n} = (b-a)^{1/n} M. \tag{$*$}$$

Par ailleurs, f étant continue sur le compact $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un segment $[\alpha, \beta]$ contenant c, non réduit à un singleton, tel que

$$\forall t \in [\alpha,\beta], \qquad f(t) \geq M - \varepsilon.$$

Ceci entraîne

$$\left(\int_a^b f(t)^n\, dt \right)^{1/n} \geq \left(\int_\alpha^\beta f(t)^n\, dt \right)^{1/n} \geq \left(\int_\alpha^\beta (M-\varepsilon)^n\, dt \right)^{1/n} = (\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon). \tag{$**$}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \mu^{1/n} = 0$ pour tout réel $\mu > 0$, on tire de (*) et (**)

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \qquad M - 2\varepsilon \leq \left(\int_a^b f(t)^n\, dt \right)^{1/n} \leq M + \varepsilon.$$

Ceci étant possible pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit le résultat.

b) La fonction g étant continue sur un compact, elle est bornée et atteint ses bornes. On en conclut que les réels

$$k = \inf_{t\in[a,b]} g(t) \quad \text{et} \quad K = \sup_{t\in[a,b]} g(t)$$

existent et sont strictement positifs. Par ailleurs, le fait que $kf(t)^n \leq g(t)f(t)^n \leq Kf(t)^n$ pour tout $t \in [a,b]$ montre que

$$k^{1/n} \left(\int_a^b f(t)^n\, dt \right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b f(t)^n g(t)\, dt \right)^{1/n} \leq K^{1/n} \left(\int_a^b f(t)^n\, dt \right)^{1/n}.$$

On conclut avec la question précédente et avec les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} k^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} K^{1/n} = 1$.

Exercice 3. Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $M = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

a) Montrer

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M. \tag{$*$}$$

b) Dans quels cas l'inégalité (*) est elle une égalité ?

Solution. **a)** Le problème est symétrique par rapport à $c = (a+b)/2$. On écrit

$$\forall t \in [a,c], \qquad |f(t)| = \left| \int_a^t f'(x)\, dx \right| \leq \int_a^t |f'(x)|\, dx \leq M(t-a)$$

et

$$\forall t \in [c,b], \qquad |f(t)| = \left| \int_t^b f'(x)\, dx \right| \leq \int_t^b |f'(x)|\, dx \leq M(b-t),$$

ce qui entraîne

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \leq M\left[\int_a^c (t-a)\,dt + \int_c^b (b-t)\,dt\right] = \frac{(b-a)^2}{4}\,M.$$

b) Les fonctions en présence étant continues, l'égalité se produira si et seulement si chacune des inégalités précédentes est une égalité. On a donc

$$\forall t \in [a,c], \quad |f(t)| = M(t-a) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [c,b], \quad |f(t)| = M(b-t),$$

ce qui entraîne

$$\forall t \in [a,c], \quad f(t)^2 = M^2(t-a)^2 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [c,b], \quad f(t)^2 = M^2(b-t)^2. \tag{$**$}$$

La fonction f^2 est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est donc dérivable en $c = (a+b)/2$. Les formules (**) donnent successivement $(f^2)'(c) = 2M^2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ et $(f^2)'(c) = -2M^2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, ce qui n'est possible que si $M = 0$. Donc $f = f(a) = 0$. Réciproquement, la fonction nulle est bien solution.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien et $f : [a,b] \to E$ une fonction continue. On suppose que

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| = \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

Montrer qu'il existe $e \in E$ de norme 1 tel que $f(t) = \|f(t)\| \cdot e$ pour tout $t \in [a,b]$.

Solution. Si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, les hypothèses et la continuité de f entraînent que f est identiquement nulle, et le résultat est évident. Sinon, on pose

$$e_1 = \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|} \quad \text{de sorte que} \quad \int_a^b f(t)\,dt = \left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| e_1.$$

Le vecteur e_1 est de norme 1. On le complète en une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de E. On peut écrire $f = f_1e_1 + \cdots + f_ne_n$ où pour tout i, f_i est une fonction continue à valeurs réelles. On a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i = \left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| e_1 = \left(\int_a^b \|f(t)\|\,dt\right) e_1,$$

donc en extrayant la composante le long du vecteur e_1

$$\int_a^b f_1(t)\,dt = \int_a^b \|f(t)\|\,dt. \tag{$*$}$$

Comme $f_1(t) \leq \|f(t)\| = (f_1(t)^2 + \cdots + f_n(t)^2)^{1/2}$ et que chacune de ces fonctions sont continues, l'égalité (*) entraîne

$$\forall t \in [a,b], \qquad f_1(t) = \|f(t)\| = (f_1(t)^2 + \cdots + f_n(t)^2)^{1/2}. \tag{$**$}$$

Donc $f_2(t) = \ldots = f_n(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$, d'où

$$\forall t \in [a,b], \qquad f(t) = f_1(t)e_1 = \|f(t)\|e_1,$$

la dernière égalité étant encore une conséquence de (**).

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $0 \leq f'(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)^3\,dx \leq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

Solution. On considère les fonctions

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \int_0^t f^3(x)\,dx \quad \text{et} \quad \psi : [0,1] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^2.$$

Il s'agit de montrer $\varphi(1) \leq \psi(1)$. Les fonctions φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, ceci sera prouvé si on montre $\varphi'(x) \leq \psi'(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x)^3 \leq 2f(x) \int_0^x f(t)\,dt.$$

Comme $f \geq 0$ ($f(0) = 0$ et f' est positive), ceci sera prouvé si on montre

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x)^2 \leq 2 \int_0^x f(t)\,dt.$$

Chacune de ces deux fonctions étant dérivable et nulle en 0, ce dernier point sera obtenu si on prouve que la dérivée de la première est inférieure à celle de la seconde sur $[0,1]$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in [0,1], \qquad 2f(x)f'(x) \leq 2f(x).$$

Ce dernier point est bien réalisé car f est positive et $f' \leq 1$ par hypothèse. D'où le résultat.

Remarque. L'égalité se produit lorsque $f(x) = x$ ou lorsque f est la fonction nulle.

EXERCICE 6. **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

converge et calculer sa limite ℓ.
b) Donner un équivalent de $\ell - u_n$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution. **a)** En considérant la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Autrement dit, u_n est une somme de Riemann de f pour une subdivision de pas $1/n$. On en déduit avec le théorème 7 que (u_n) converge et que

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

b) C'est classique. On procède comme suit. On considère une primitive F de f, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ell = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{n} \left(F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F'\left(\frac{k}{n}\right),$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell - u_n = \sum_{k=1}^{n} \left[F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall k \in \{1\,\ldots,n\}, \exists x_k \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[, \qquad F\left(\frac{k-1}{n}\right) = F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}F''(x_k),$$

et comme $F'' = f'$ ceci entraîne

$$\ell - u_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{-1}{2n^2}F''(x_k)\right] = -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(x_k).$$

On a encore affaire à une somme de Riemann ; le théorème 7 donne

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)=\int_0^1 f'(t)\,dt=f(1)-f(0)=-\frac{1}{2},$$

donc $\ell-u_n\sim\dfrac{1}{4n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque. On a montré, de manière plus générale, que pour toute fonction $f:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n}\big(f(1)-f(0)\big)+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Lorsque la fonction f possède de bonnes propriétés de régularité, il est possible de poursuivre ce développement asymptotique (voir le sujet d'étude 3 page 321 sur la formule d'Euler-Maclaurin).

Exercice 7 (Inégalité de Young). Soit $f:\ \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0)=0$.

a) Pour tout $x>0$, montrer

$$\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt=xf(x).$$

b) En déduire que

$$\forall a,b>0,\qquad \int_0^a f(t)\,dt+\int_0^b f^{-1}(t)\,dt\geq ab,$$

et que l'égalité se produit si et seulement si $b=f(a)$.

Solution. **a)** Cette égalité a une interprétation géométrique simple comme le montre la figure ci contre.

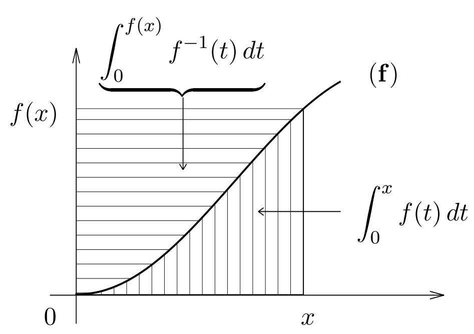


Figure 1. L'aire $xf(x)$ du rectangle est la somme des surfaces des régions délimitées par ce rectangle et le graphe de f.

On considère l'application

$$g:\ \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\quad x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt-xf(x).$$

Cette application est dérivable, et

$$\forall x\geq 0,\qquad g'(x)=f(x)+f'(x)f^{-1}(f(x))-\big(f(x)+xf'(x)\big)=0.$$

Donc g est constante, et comme $g(0) = 0$ on en déduit que g est nulle, d'où le résultat.

b) On fixe $b > 0$ et on considère l'application

$$\varphi : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad a \mapsto \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx - ab.$$

Cette application est dérivable, et $\varphi'(a) = f(a) - b$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Comme f est strictement croissante, on a donc

$$\forall a < f^{-1}(b),\ \varphi'(a) < 0 \quad \text{et} \quad \forall a > f^{-1}(b),\ \varphi'(a) > 0.$$

Comme $\varphi(f^{-1}(b)) = 0$ d'après la question précédente, on déduit de tout ceci que

$$\forall a < f^{-1}(b),\ \varphi(a) > 0, \qquad \varphi(f^{-1}(b)) = 0, \qquad \forall a > f^{-1}(b),\ \varphi(a) > 0.$$

On a donc démontré l'inégalité désirée, et l'égalité se produit si et seulement si $a = f^{-1}(b)$, c'est-à-dire $b = f(a)$, d'où le résultat.

Exercice 8. Démontrer que la seconde formule de la moyenne (théorème 6 page 128) reste vraie si l'on suppose uniquement f continue. Autrement dit, montrer que si $f : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, et si $g : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a) \int_a^c g(t)\,dt.$$

(on utilisera une transformation d'Abel à partir d'une expression approchant une somme de Riemann)

Solution. Nous démarrons comme dans la preuve du théorème 6. On considère l'application $G : \ [a, b] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \int_a^t g(x)\,dx$, continue sur $[a, b]$, ce qui assure l'existence des réels

$$m = \inf_{t \in [a,b]} G(t) \quad \text{et} \quad M = \sup_{t \in [a,b]} G(t).$$

On va montrer $mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq Mf(a)$, ce qui prouvera le résultat en appliquant à G le théorème des valeurs intermédiaires.

L'idée est de remplacer l'intégration par parties utilisée dans la preuve du théorème 6 par une transformation d'Abel à partir d'une somme de Riemann. Par comparaison avec la formule

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = G(b)f(b) - G(a)f(a) - \int_a^b f'(t)G(t),$$

(valide uniquement lorsque f est $\mathcal{C}^1$) on va écrire, pour une subdivision σ de pas suffisamment petit, avec $\sigma : \ a = a_0 < \cdots < a_n = b$, une transformation d'Abel de la somme

$$I(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)(G(a_{i+1}) - G(a_i)),$$

ce qui donne

$$I(\sigma) = G(a_n)f(a_{n-1}) - G(a_0)f(a_0) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(a_{i-1}) - f(a_i))G(a_i).$$

Comme $G(a_n)f(a_{n-1}) - G(a_0)f(a_0) = G(b)f(a_{n-1})$, cette dernière identité entraîne, compte tenu de la décroissante de la fonction f

$$G(b)f(a_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(a_{i-1}) - f(a_i))m \leq I(\sigma) \leq G(b)f(a_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(a_{i-1}) - f(a_i))M,$$

c'est-à-dire

$$G(b)f(a_{n-1}) + m(f(a_0) - f(a_{n-1})) \leq I(\sigma) \leq G(b)f(a_{n-1}) + M(f(a_0) - f(a_{n-1}))$$

et comme $f(a_{n-1}) \geq 0$ on en déduit

$$mf(a) \leq I(\sigma) \leq Mf(a). \tag{$*$}$$

Maintenant nous allons approcher $I(\sigma)$ par une somme de Riemann de $\int_a^b fg$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est continue sur un segment, elle y uniformément continue d'après le théorème de Heine, donc il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - y| < \alpha$, alors $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Ensuite, le théorème sur les sommes de Riemann nous assure qu'on peut choisir la subdivision (σ) de pas $|\sigma| < \alpha$ telle que $|S(\sigma) - \int_a^b fg| < \varepsilon$, où

$$S(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i) g(a_i).$$

On écrit maintenant

$$|I(\sigma) - S(\sigma)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)|G(a_{i+1}) - G(a_i) - (a_{i+1} - a_i)g(a_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (g(t) - g(a_i))\, dt \right|$$

et le pas de la subdivision étant $|\sigma| < \alpha$, on a $|g(t) - g(a_i)| < \varepsilon$ pour $t \in [a_i, a_{i+1}]$ donc l'inégalité précédente entraîne

$$|I(\sigma) - S(\sigma)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)(a_{i+1} - a_i)\varepsilon \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(a)(a_{i+1} - a_i)\varepsilon = (b - a)f(a)\varepsilon.$$

On en déduit

$$\left| I(\sigma) - \int_a^b f(t)g(t)\, dt \right| \leq |I(\sigma) - S(\sigma)| + \left| S(\sigma) - \int_a^b f(t)g(t)\, dt \right| \leq (b - a)f(a)\varepsilon + \varepsilon,$$

et finalement, avec (*) on a

$$mf(a) - (b - a)f(a)\varepsilon - \varepsilon \leq \int_a^b f(t)g(t)\, dt \leq Mf(a) + (b - a)f(a)\varepsilon + \varepsilon.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit bien $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(b)$, d'où le résultat.

Remarque. - On aurait également pu se ramener au cas du théorème 6 page 128 en construisant une suite de fonctions (f_n) décroissantes positives de classe $\mathcal{C}^1$, qui converge uniformément vers f.

– On peut démontrer que la seconde formule de la moyenne est encore vraie si on suppose seulement f et g Riemann-intégrables.

2. Calcul de primitives

La formule $\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$ (pour f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) nous amène à calculer les primitives d'une fonction continue pour calculer son intégrale.

Lorsque F est une primitive de f, on note $\int f(t)\, dt = F(t) + k$. Cette notation signifie que l'ensemble des primitives de f est constitué des fonctions de la forme $t \mapsto F(t) + k$ où k est une constante. Cette écriture peut même être valable sur plusieurs intervalles. Par exemple, écrire $\int dt/t = \log|t| + k$ signifie que sur $\mathbb{R}^{+*}$, les primitives de $t \mapsto 1/t$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \log t + k$, et que sur $\mathbb{R}^{-*}$ elles sont de la forme $t \mapsto \log(-t) + k$. Il faut alors se garder d'écrire $\int_{-1}^1 dt/t = \Big[\log|t|\Big]_{-1}^1$, ce qui n'aurait aucun sens.

2.1. Primitives élémentaires

Dans le tableau suivant, $F(x)$ désigne une primitive de $f(x)$.

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$a^x,\ a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\log a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$
$\operatorname{cotan} x$	$\log\lvert\sin x\rvert$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\log(\operatorname{ch} x)$

$f(x)$	$F(x)$
$\coth x$	$\log(\operatorname{sh} x)$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\coth x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a > 0$	$\arcsin \frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\log(x+\sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}},\ a \neq 0$	$\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}},\ a \neq 0$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+b}},\ b \neq 0$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2+b}\rvert$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{1}{x^2+a^2},\ a \neq 0$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\frac{1}{a^2-x^2},\ a \neq 0$	$\frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$

Remarque. On peut aussi exprimer les primitives de $t \mapsto 1/\sqrt{t^2+1}$ sous la forme $t \mapsto \operatorname{argsh} t + k$, car on a l'égalité bien connue

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \log(t+\sqrt{t^2+1}) = \operatorname{argsh}(t).$$

De même, lorsque $t > 1$, on peut aussi exprimer les primitives de $t \mapsto 1/\sqrt{t^2-1}$ sous la forme $t \mapsto \operatorname{argch} t + k$. Cette expression n'est plus valable lorsque $t < -1$ car la fonction argch n'est définie que sur $[1, +\infty[$.

2.2. Primitives des fractions rationnelles

Soit F une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$. Pour calculer $\int F$, on commence par décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$. On est ainsi ramené à calculer les primitives de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)^h} \quad (h \in \mathbb{N}^*) \quad \text{et} \quad \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h} \quad (c^2-4d<0,\ h \in \mathbb{N}^*).$$

– La première primitive se calcule facilement grâce à l'expression

$$\int \frac{dx}{(x-a)^h} = \begin{cases} \frac{1}{(1-h)(x-a)^{h-1}} + k & \text{si} \quad h \neq 1 \\ \log\lvert x-a\rvert + k & \text{si} \quad h = 1 \end{cases}.$$

– Quant à la seconde, on commence par écrire

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h} \quad \text{sous la forme} \quad \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^h} + \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^h}.$$

— La primitive du premier terme dans le membre de droite est donnée par

$$\int \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^h}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{(1-h)[(x-p)^2+q^2]^{h-1}} + k & \text{si} \quad h \geq 2, \\ \alpha \log[(x-p)^2+q^2] + k & \text{si} \quad h = 1 \end{cases}.$$

— Pour celle du second terme, on commence par effectuer le changement de variable $t = x - p$, ce qui ramène le calcul à celui de $I_h = \int (t^2+q^2)^{-h}\,dt$. Ensuite, deux techniques sont à notre disposition.

— *Première technique.* On effectue le changement de variable

$$t = q\tan\theta, \ \left(\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \text{de sorte que} \quad dt = q(1+\tan^2\theta)\,d\theta,$$

donc

$$I_h = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^h} = \frac{1}{q^{2h-1}} \int \frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{h-1}} = \frac{1}{q^{2h-1}} \int \cos^{2h-2}\theta\,d\theta.$$

Le calcul de cette dernière primitive est traité dans la section suivante. Après l'avoir calculée, on remplace θ par $\arctan(t/q)$ puis t par $x - p$ et le tour est joué.

— *Seconde technique.* On procède par intégration par parties. Pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, on écrit

$$I_h = \frac{t}{(t^2+q^2)^h} + 2h \int \frac{t^2}{(t^2+q^2)^{h+1}} = \frac{t}{(t^2+q^2)^h} + 2hI_h - 2hq^2 I_{h+1},$$

ce qui entraîne

$$2hq^2 I_{h+1} = (2h-1)I_h + \frac{t}{(t^2+q^2)^h}. \tag{$*$}$$

Cette dernière relation permet de calculer I_{h+1} connaissant I_h. Le calcul de I_1 est immédiat car

$$\int \frac{dt}{t^2+q^2} = \frac{1}{q}\arctan\frac{x}{q}.$$

Remarquez que pour ramener le calcul de I_n à celui de I_{n-1}, c'est I_{n-1} qu'il faut intégrer par parties.

Exemple 1. On veut calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}\,dx$. On commence par écrire

$$\frac{1-x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]^2}.$$

La primitive du premier terme du membre de droite se calcule de manière immédiate, car

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+x+1} + k.$$

Pour celle du second terme, on utilise la relation (*) qui donne

$$2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \int \frac{dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}},$$

d'où

$$\int \frac{dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right).$$

(On pourrait aussi procéder en effectuant le changement de variable $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\theta$). Finalement, on a

$$\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k.$$

2.3. Primitives des fonctions en sinus et cosinus

Polynômes en sinus et cosinus. On veut calculer les primitives $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, où $m, n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent :

— *L'un des entiers m ou n est impair* (par exemple $n = 2p+1$). On a alors

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x\,dx.$$

En effectuant ensuite le changement de variable $t = \sin x$, on se ramène à la primitive $\int t^m (1-t^2)^p\,dt$ qui est facile à calculer.

— *Les entiers m et n sont pairs.* On linéarise, en exprimant $\sin^m x \cos^n x$ comme combinaison linéaire de fonctions de la forme $\cos kx$ et $\sin kx$. Par exemple, pour calculer une primitive de $\cos^4 x$, on écrit

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{d'où}$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + 4\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + 3\right) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8},$$

d'où on déduit facilement la primitive recherchée.

Fractions rationnelles en sinus et cosinus. On veut calculer une primitive d'une fonction de la forme $R(\sin x, \cos x)$ où R est une fraction rationnelle en deux variables.

On s'en sort toujours en effectuant le changement de variable $t = \tan(x/2)$. Comme $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$, le calcul se ramène à celui de $\displaystyle\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$, c'est-à-dire à celui d'une primitive d'une fraction rationnelle. En procédant de la sorte, on trouve les primitives suivantes, qu'il faut retenir :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Cette méthode est souvent fastidieuse car elle amène à calculer des primitives de fractions rationnelles dont le dénominateur est de degré élevé. On commence en général par essayer d'effectuer l'un des changements de variable $t = \sin x$, $t = \cos x$ ou $t = \tan x$ qui simplifie *parfois* les calculs. On peut à ce sujet utiliser la *règle de Bioche* présentée ci dessous :

— si $R(\sin x, \cos x)\,dx$ reste inchangé en changeant x en $\pi - x$, on pose $t = \sin x$;
— si $R(\sin x, \cos x)\,dx$ reste inchangé en changeant x en $-x$, on pose $t = \cos x$;
— si $R(\sin x, \cos x)\,dx$ reste inchangé en changeant x en $\pi + x$, on pose $t = \tan x$.

N'oubliez pas que le terme dx doit faire parti de l'expression invariante !

Exemple 2. On veut calculer $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$. Le terme sous le signe $\int$ reste invariant en changeant x en $-x$ (il faut prendre en compte le dx), on pose donc $t = \cos x$. On a $dt = -\sin x\,dx$, donc le calcul se ramène à celui de la primitive

$$\int \frac{1-t^2}{1+t^2}(-dt) = \int \left(1 - \frac{2}{1+t^2}\right) dt = t - 2\arctan t + k.$$

Il reste à remplacer t par $\cos x$, ce qui donne
$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \cos x - 2\arctan(\cos x) + k.$$

2.4. Primitives des fractions rationnelles en e^x

Pour calculer la primitive une fonction de la forme $R(e^x)$ où R est une fraction rationnelle, on s'en sort toujours en posant $t = e^x$; on se ramène alors au calcul de $\int R(t)/t\,dt$, primitive d'une fraction rationnelle.

Fractions rationnelles en sinus et cosinus hyperbolique. Pour calculer une primitive de $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ où R est une fraction rationnelle en deux variables, trois méthodes sont utilisables. On peut

— faire le changement de variable $t = \operatorname{th}(x/2)$, ce qui ramène le calcul à celui de
$$\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2\,dt}{1-t^2}$$
(technique à éviter si possible),

— tout exprimer en fonction de e^x,

— effectuer un éventuel changement de variable $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x$ ou $t = \operatorname{th} x$ en procédant par analogie avec $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

La première et/ou la seconde de ces méthodes donne les primitives classiques suivantes
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\arctan(e^x) + k \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\right) + k = \log\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + k'.$$

2.5. Intégrales abéliennes

a). On veut calculer les primitives de la forme $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ avec $ad - bc \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, où R est une fraction rationnelle en deux variables. On effectue le changement de variables
$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \text{de sorte que} \quad x = g(t) = \frac{dt^n - b}{a - t^n c} \quad \text{et} \quad dx = g'(t)\,dt.$$
On se ramène ainsi à calculer $\int R(g(t), t)g'(t)\,dt$, primitive d'une fraction rationnelle.

Exemple 3. On cherche à calculer
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}.$$
On remarque que la fonction sous le signe $\int$ est une fraction en $\sqrt[6]{1+x}$. On pose donc $t = \sqrt[6]{1+x}$, de sorte que $t^6 = 1 + x$ donc $6t^5\,dt = dx$, et le calcul est ramené à celui de
$$\int \frac{6t^5}{t^3 - t^2}\,dt.$$

b). On veut calculer les primitives de la forme $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ avec $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, où R est une fraction rationnelle en deux variables. On traite plusieurs cas selon le signe de a et de $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac > 0$, plusieurs cas se présentent.

— Si $a < 0$, on écrit $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ sous la forme $y = \sqrt{-a}\,\sqrt{q^2 - (x-p)^2}$, puis on effectue le changement de variable $x - p = q\cos\theta$ (y devient $q\sqrt{-a}\,\sin\theta$). On se ramène alors au calcul de primitives de fractions rationnelles en sinus et cosinus.

Exemple 4. Pour calculer $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, on fait le changement de variable $x = \cos\theta$ de sorte que $dx = -\sin\theta\,d\theta$, ce qui ramène le calcul à celui de

$$\int -\sin^2\theta\,d\theta = \int \frac{\cos(2\theta)-1}{2}\,d\theta = \frac{\sin(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2} + k = \frac{\sin\theta\cos\theta-\theta}{2}.$$

Donc

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}-\arccos x}{2} + k.$$

— Si $a > 0$, on écrit $y = \sqrt{ax^2+bx+x}$ sous la forme $y = \sqrt{a}\,\sqrt{(x-p)^2-q^2}$, puis on effectue le changement de variable $x - p = q\varepsilon \operatorname{ch} t$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ (y devient $q\sqrt{a}\,\operatorname{sh} t$). On se ramène à calculer les primitives d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus hyperbolique.

— Quel que soit le signe de a, une autre méthode est d'écrire $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont deux nombres réels distincts, puis

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-\alpha|\sqrt{a\left(\frac{x-\beta}{x-\alpha}\right)}$$

et on se ramène aux primitives traitées dans la partie a).

Si $b^2 - 4ac < 0$, alors ax^2+bx+c a le signe de a, on doit donc avoir $a > 0$. On écrit $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ sous la forme $y = \sqrt{a}\sqrt{q^2+(x-p)^2}$, puis on fait le changement de variable $x - p = q\operatorname{sh} t$ (y devient $q\sqrt{a}\operatorname{ch} t$).

Remarque 1. Lorsque $a > 0$, on peut également faire le changement de variable

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t \quad (\text{resp. } -x\sqrt{a}+t).$$

L'idée sous-jacente est la paramétrisation de la partie d'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ par une droite D parallèle à une asymptote de $\mathcal{H}$ (D coupe $\mathcal{H}$ en un point unique). Ce type de droite a pour équation $y = x\sqrt{a}+t$ ou $y = -x\sqrt{a}+t$, $t \in \mathbb{R}$.

Astuces de calcul.

— Les primitives de la forme $\int \sqrt{ax^2+bx+c}$ peuvent se calculer en intégrant par parties.

Exemple 5. On veut calculer $\int \sqrt{t^2-1}\,dt$. En intégrant par parties, on a

$$\int \sqrt{t^2-1}\,dt = t\sqrt{t^2-1} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = t\sqrt{t^2-1} - \int \frac{(t^2-1)+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt,$$

d'où

$$2\int \sqrt{t^2-1}\,dt = t\sqrt{t^2-1} - \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = t\sqrt{t^2-1} - \log|t+\sqrt{t^2-1}| + k.$$

— Le calcul des primitives de fonctions de la forme $R(x, \sqrt{\alpha x+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta})$ où R est une fraction rationnelle en trois variables se ramène, après le changement de variable $t = \sqrt{\gamma x+\delta}$, à un calcul de primitives de la forme $\int F(t, \sqrt{at^2+bt+c})$ où F est une fraction rationnelle.

— Le calcul des primitives $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^n\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ est considérablement simplifié en effectuant le changement de variable $t = 1/(x+a)$.

2.6. Produit d'un polynôme et d'une exponentielle

Les primitives $\int P(x)e^{rx}\,dx$ où P est un polynôme et r un nombre complexe non nul s'écrivent sous la forme $Q(x)e^{rx}+k$ où Q est un polynôme ayant même degré que P et k une constante. On trouve les coefficients de Q par identification dans l'expression $rQ+Q'=P$.

Les primitives $\int P(x)e^{rx}\cos mx\,dx$ ou $\int P(x)e^{rx}\sin mx\,dx$ $(r,m\in\mathbb{R},\ P$ polynôme) s'obtiennent en les écrivant comme les parties réelles et imaginaires de $\int P(x)e^{(r+im)x}\,dx$.

2.7. Exercices

Exercice 1. Calculer les primitives des fonctions suivantes

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{x^4-x^2-2}\qquad \textbf{b)}\ \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\qquad \textbf{c)}\ \frac{x^2}{x^6-1}\qquad \textbf{d)}\ \frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

Solution. **a)** On décompose en éléments simples

$$\frac{1}{x^4-x^2-2}=\frac{1}{(x^2-2)(x^2+1)}=\frac{1}{3(x^2-2)}-\frac{1}{3(x^2+1)},$$

et on en déduit

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2-2}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\log\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{3}\arctan x+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

b) On a

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{(x^2+1)^2},$$

donc

$$\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Pour calculer la primitive du second membre de cette dernière égalité, on fait le changement de variable $x=\tan\theta$, $-\pi/2<\theta<\pi/2$. On a $dx=(1+\tan^2\theta)\,d\theta$ et

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{d\theta}{1+\tan^2\theta}=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta&=\frac{\sin(2\theta)}{4}+\frac{\theta}{2}+k\\&=\frac{2x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+k.\end{aligned}$$

Finalement

$$\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

c) Il y a une petite astuce de calcul. On pose $t=x^3$, de sorte que $dt=3x^2\,dx$ et

$$\int\frac{x^2}{x^6-1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{6}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\frac{1}{6}\log\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|.$$

d) La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle considérée est

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

donc

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

Exercice 2. Calculer les primitives des fonctions suivantes

$$\textbf{a)}\quad \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x} \qquad \textbf{b)}\quad \frac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$$
$$\textbf{c)}\quad \frac{1}{\sin x + \cos x + 2} \qquad \textbf{d)}\quad \frac{1}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}.$$

Solution. **a)** Il y a invariance de l'expression intégrée par le changement de variable $x \to \pi - x$. La règle de Bioche nous invite à effectuer le changement de variable $t = \sin x$. On a

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x}\,dx = \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x + 2\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}} = \frac{dt}{t^2 + 2\dfrac{t^2}{1-t^2}} = \frac{(1-t^2)\,dt}{3t^2 - t^4}.$$

De plus

$$\frac{X-1}{X(X-3)} = \frac{1}{3X} + \frac{2}{3(X-3)} \quad \text{donc} \quad \frac{t^2-1}{t^2(t^2-3)} = \frac{1}{3t^2} + \frac{2}{3(t^2-3)},$$

d'où

$$\int \frac{(1-t^2)\,dt}{3t^2-t^4} = -\frac{1}{3t} + \frac{1}{6\sqrt{3}}\log\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|$$

et finalement

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x} = -\frac{1}{3\sin x} + \frac{1}{6\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sin x - \sqrt{3}}{\sin x + \sqrt{3}}\right|.$$

b) L'expression intégrée est invariante par le changement de variable $x \to x + \pi$. La règle de Bioche nous invite à faire le changement de variable $t = \tan x$. On a alors $dt = dx/(\cos^2 x)$ et

$$\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{\tan x}{1+\tan^3 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{t}{1+t^3}\,dt.$$

Maintenant, la décomposition en éléments simples

$$\frac{t}{1+t^3} = \frac{t}{(1+t)(1-t+t^2)} = -\frac{1}{3(t+1)} + \frac{t+1}{3(t^2-t+1)}$$

entraîne

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{1+t^3}\,dt &= \int\left(-\frac{1}{3(t+1)} + \frac{1}{6}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)dt\\ &= -\frac{1}{3}\log|1+t| + \frac{1}{6}\cdot\log(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

donc

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx = -\frac{1}{3}\log|1+\tan x| + \frac{1}{6}\log\left(\tan x^2 - \tan x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}}\right)$$

c) On commence par écrire $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$, puis on fait le changement de variable $t = x + \pi/4$. On se ramène ainsi à évaluer la primitive

$$\int \frac{dt}{\sqrt{2}\sin t + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sin t + \sqrt{2}}.$$

Pour évaluer cette dernière primitive, on effectue le changement de variable $u = \tan(t/2)$ de sorte que $dt = 2du/(1+u^2)$ et

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sin t + \sqrt{2}} = \int \frac{du}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} = \int \frac{du}{\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u + 1) + k.$$

Finalement, on a

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2} = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+1\right) + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

d) On a

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x(1+\operatorname{th}^2 x) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}}.$$

On fait donc le changement de variable $t = \operatorname{th} x$. On a $dt = dx/\operatorname{ch}^2 x$ et

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + k,$$

donc

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} = \log\left(\operatorname{th} x + \sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}\right) + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Calculer les primitives des fonctions suivantes

$$\textbf{a)}\ \ x\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \qquad \textbf{b)}\ \ \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \qquad \textbf{c)}\ \ \sqrt{-x^2+4x+10}$$

$$\textbf{d)}\ \ \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2x}} \qquad \textbf{e)}\ \ \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

Solution. Il y a en général plusieurs moyens de calculer les primitives de chaque fonction présentée. Nous nous limiterons à un seul type de résolution.

a) On fait le changement de variable

$$t = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \quad \text{ou encore} \quad x = \frac{2+t^2}{1-t^2}\,; \quad \text{on a alors} \quad dx = \frac{6t}{(1-t^2)^2}\,dt$$

et

$$\int x\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\,dx = \int \frac{2+t^2}{1-t^2}\cdot t\cdot\frac{6t}{(1-t^2)^2}\,dt = \int \frac{6t^2(2+t^2)}{(1-t^2)^3}\,dt.$$

De la décomposition en éléments simples

$$\frac{6t^2(2+t^2)}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{t+1} - \frac{3}{t-1} - \frac{21}{(t+1)^2} - \frac{21}{(t-1)^2} + \frac{18}{(t+1)^3} - \frac{18}{(t-1)^3}\right),$$

on déduit

$$\int \frac{6t^2(2+t^2)}{(1-t^2)^3}\,dt = \frac{1}{8}\left(3\log|t+1| - 3\log|t-1| + \frac{21}{t+1} + \frac{21}{t-1} - \frac{9}{(t+1)^2} + \frac{9}{(t-1)^2}\right) + k$$

Pour obtenir les primitives de la fonction proposée, il suffit ensuite de remplacer t par $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$. Si on simplifie au mieux l'expression, on parvient finalement à

$$\int x\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\,dx = \left(\frac{2x-5}{4}\right)\sqrt{x^2-x-2} + \frac{3}{8}\log\left(2\sqrt{x^2-x-2}+2x-1\right) + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

b) Il faut utiliser l'une des astuces décrites à la page 141 : on fait le changement de variable $t = 1/(x+1)$. Après calculs, on est ramené à la primitive

$$\varepsilon\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\varepsilon\log\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ a le signe de t. On en déduit le résultat en remplaçant t par $1/(x+1)$.

c) On résout le problème en intégrant par parties. On a

$$\int \sqrt{-x^2+4x+10}\,dx = x\sqrt{-x^2+4x+10} + \int \frac{x^2-2x}{\sqrt{-x^2+4x+10}}\,dx.$$

Or

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{-x^2+4x+10}}\,dx &= -\int \frac{-x^2+4x+10}{\sqrt{-x^2+4x+10}}\,dx + \int \frac{2x+10}{\sqrt{-x^2+4x+10}}\,dx\\ &= -\int \sqrt{-x^2+4x+10}\,dx + \int \frac{2x+10}{\sqrt{-x^2+4x+12}}\,dx\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}2\int \sqrt{-x^2+4x+10}\,dx &= x\sqrt{-x^2+4x+10} - \int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x+10}}\,dx + 14\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+10}}\\ &= x\sqrt{-x^2+4x+12} - 2\sqrt{-x^2+4x+10} + 14\arcsin\left(\frac{x-2}{\sqrt{14}}\right) + k, \qquad k\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

d) On pose $\sqrt{x^2+2x} = -x+t$, de sorte que

$$x = \frac{t^2}{2(t+1)} \quad \text{et} \quad dx = \frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\,dt.$$

On se ramène ainsi à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{t+2}{(t+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2} &= \frac{1}{2}\log|t+1| - \frac{1}{2(t+1)} + k\\ &= \frac{1}{2}\log\left|1+x+\sqrt{x^2+2x}\right| - \frac{1}{2(1+x+\sqrt{x^2+2x})} + k, \qquad k\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

e) On fait d'abord le changement de variable $t = 1/x$, ce qui ramène le calcul à celui de

$$-\int \frac{dt}{t\sqrt[3]{1+t^3}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^3\sqrt[3]{1+t^3}},$$

puis on pose $u = t^3$, nous ramenant à

$$-\frac{1}{3}\int \frac{du}{u\sqrt[3]{1+u}}.$$

On pose ensuite $v = \sqrt[3]{1+u}$, ce qui donne

$$-\int \frac{v}{v^3-1}\,dv.$$

On décompose la dernière intégrande en éléments simples

$$\frac{v}{v^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{v-1} - \frac{v-1}{v^2+v+1}\right)$$

et après un calcul classique, on trouve

$$-\int \frac{v}{v^3-1}\,dv = -\frac{1}{3}\log(v-1) + \frac{1}{6}\log(v^2+v+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) + k, \qquad k\in\mathbb{R}.$$

Il reste alors à remplacer v par $\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}$ et c'est terminé.

Exercice 4. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x}.$$

Solution. On commence par rechercher une primitive de la fonction $x \mapsto 1/(3+\sin x)$. Pour cela, posons

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x \in \Big[\frac{\pi}{2}, \pi\Big[\quad \text{ou} \quad x \in \Big]\pi, \frac{3\pi}{2}\Big], \qquad \text{de sorte que} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

On trouve, après calculs,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x} = \int \frac{2\,dt}{3t^2+2t+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{3t+1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{3\tan(x/2)+1}{2\sqrt{2}}\right).$$

La fonction $F : \ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{3\tan(x/2)+1}{2\sqrt{2}}\right)$ est donc une primitive de $x \mapsto 1/(3+\sin x)$, mais seulement sur chacun des intervalles $[\pi/2, \pi[$ et $]\pi, 3\pi/2]$. Il faut donc se garder décrire $I = F(3\pi/3) - F(\pi/2)$, ce qui n'aurait aucun sens. On va résoudre le problème en écrivant

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{3+\sin x} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x}.$$

On a

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{3+\sin x} = \lim_{\substack{X\to\pi \\ X<\pi}} \int_{\pi/2}^{X} \frac{dx}{3+\sin x} = \lim_{\substack{X\to\pi \\ X<\pi}} F(X) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\arctan\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

de même

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x} = \lim_{\substack{X\to\pi \\ X>\pi}} \int_{X}^{3\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x} = \lim_{\substack{X\to\pi \\ X>\pi}} F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(X) = -\frac{\arctan(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Compte tenu de la classique relation $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour $x > 0$, on en déduit

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\arctan\sqrt{2} + \arctan(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 5. Donner une relation de récurrence permettant de calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{a)} \quad I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx, \qquad \textbf{b)} \quad I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x}, \qquad \textbf{c)} \quad I_n = \int_1^{e} \log^n x\,dx.$$

Solution. **a)** Il suffit de remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

Cette relation permet de calculer I_n sachant que

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad I_1 = \Big[-\log(\cos x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\log 2}{2}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n x} \frac{dx}{\cos^2 x} &= \left[\frac{1}{\cos^n x} \tan x\right]_0^{\pi/4} - n\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} \tan x\,dx \\ &= (\sqrt{2})^n - n\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2} x}\,dx = (\sqrt{2})^n - n(I_{n+2} - I_n) \end{aligned}$$

donc

$$(n+1)I_{n+2} = (\sqrt{2})^n + nI_n \quad \text{ou encore} \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n,$$

d'où un moyen de calculer chaque I_n, sachant que

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad I_1 = \left[\log\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\pi/4} = \log\left(\tan\frac{3\pi}{8}\right).$$

c) En intégrant par parties, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \Big[x \log^n x\Big]_1^e - n \int_1^e \log^{n-1} x \, dx = e - nI_{n-1}.$$

Cette relation de récurrence permet de calculer chaque terme I_n, sachant que $I_0 = e - 1$.

3. Intégrale sur un intervalle quelconque

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont notées a et b : $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et E désigne un $\mathbb{K}$-espace e.v.n complet (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

3.1. Définition d'une fonction intégrable

DÉFINITION 1. Une fonction est dite continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment J inclus dans I.

Fonctions positives intégrables.

→ DÉFINITION 2 (FONCTION POSITIVE INTÉGRABLE). Soit f une fonction positive et continue par morceaux sur I. On dit que f est *intégrable* (ou *sommable*) sur I si il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout segment $J \subset I$, on a $\int_J f \leq M$. On note alors

$$\int_I f = \sup_{J \subset I} \int_J f.$$

PROPOSITION 1. *Soit f positive et continue par morceaux sur I. Alors f est intégrable si et seulement s'il existe une suite croissante de segments $J_n = [a_n, b_n]$ inclus dans I telle que $\cup_n J_n = I$ et telle que la suite $\int_{J_n} f$ soit bornée. Dans ce cas, pour toute suite (J_n) de ce type on a*

$$\int_I f = \sup_n \int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)\, dt.$$

Exemple 1 (Exemples fondamentaux). — Cas $b = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$.

- — Pour $a > 0$, $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- — $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et seulement si $\lambda > 0$.

— Cas a et b finis.

- — La fonction $t \mapsto 1/(b-t)^\alpha$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- — De même, $t \mapsto 1/(t-a)^\alpha$ est intégrable sur $]a, b]$ et seulement si $\alpha < 1$.

Fonctions intégrables à valeurs quelconques.

→ DÉFINITION 3 (FONCTION INTÉGRABLE). Une fonction $f : I \to E$ continue par morceaux est dite *intégrable* (ou *sommable*) sur I si $\|f\|$ est intégrable sur I. Dans ce cas, pour toute suite croissante (J_n) de segments inclus dans I telle que $\cup_n J_n = I$, la limite de $(\int_{J_n} f)$ existe et ne dépend pas du choix de la suite (J_n). Cette limite s'appelle l'intégrale de f et est notée $\int_I f$.

Démonstration. Notons $J_n = [a_n, b_n]$, de sorte que la suite (a_n) est décroissante et tend vers a, et (b_n) est croissante et tend vers b. Montrons d'abord que la suite $u_n = \int_{J_n} f$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\|f\|$ est intégrable sur I, la suite $(U_n) = (\int_{J_n} \|f\|)$ converge donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $|U_p - U_q| < \varepsilon$. Ceci entraîne, pour $p, q \geq N$ (et $p < q$),

$$\|u_p - u_q\| = \left\| \int_{[a_q,a_p]} f + \int_{[b_p,b_q]} f \right\| \leq \int_{[a_q,a_p]} \|f\| + \int_{[b_p,b_q]} \|f\| = U_q - U_p < \varepsilon.$$

Finalement, (u_n) est bien une suite de Cauchy dans l'e.v.n complet E, donc elle converge. Notons ℓ sa limite.

Unicité de la limite. Soit (K_n) une autre suite d'intervalles vérifiant les mêmes hypothèses que (J_n), et notons ℓ' la limite de la suite $v_n = \int_{K_n} f$. Construisons la suite de segments $L_n = J_n \cup K_n = [c_n, d_n]$, qui est bien croissante et vérifie $\cup_n L_n = I$, et notons ℓ'' la limite de la suite $w_n = \int_{L_n} f$. Notons $W_n = \int_{L_n} \|f\|$. Comme $J_n \subset L_n$ on a

$$\|w_n - u_n\| = \left\| \int_{[c_n,a_n]} f + \int_{[b_n,d_n]} f \right\| \leq \int_{[c_n,a_n]} \|f\| + \int_{[b_n,d_n]} \|f\| = W_n - U_n,$$

et comme (U_n) et (W_n) ont même limite (c'est $\int_I \|f\|$), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} w_n - u_n = 0$. Donc $\ell'' = \ell$. On montrerait de même que $\ell'' = \ell'$, on a donc bien démontré que $\ell = \ell'$. □

Remarque 1. — Si f est à valeurs réelles, une définition équivalente à la précédente est $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$, où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. La définition 3 que nous proposons permet de ne pas se limiter au cadre où $E = \mathbb{R}$ et donne une définition intrinsèque de l'intégrale sur tout e.v.n complet, en particulier sur $\mathbb{C}$ et sur tout e.v de dimension finie (voir également la remarque 2 page 124).

— La proposition 1 page 125 se généralise aisément ici : Une fonction continue par morceaux $f : I \to \mathbb{C}$ est intégrable sur I si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont, et on a $\int_I f = \int_I \Re(f) + i \int_I \Im(f)$. De même, considérons un e.v.n E de dimension finie dont (e_i) est une base, et une fonction continue par morceaux $f : I \to E$ qui s'écrit $f = \sum_i f_i e_i$ (avec $f_i \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$). Alors f est intégrable sur I si et seulement si les f_i sont intégrables sur I, et on a $\int_I f = \sum_i (\int_I f_i) e_i$.

— Si f est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, alors f est bien intégrable au sens de la définition précédente, et la définition de son intégrale est bien égale à celle de la définition 4 page 124, et de plus on a $\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b[} f$.

— De manière générale, f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I, et on a $\int_I f = \int_{\overset{\circ}{I}} f$. Ceci permet d'utiliser la notation $\int_a^b f(t)\,dt = \int_I f$. Si $a > b$, on définit $\int_a^b = -\int_b^a$.

— Les propriétés élémentaires des intégrales sur un segment (linéarité, positivité, relation de Chasles, ...) restent vraies pour les fonctions intégrables. On a notamment $\| \int_I f\| \leq \int_I \|f\|$.

Critères d'intégrabilité.

PROPOSITION 2. *Soit $I = [a, b[$ et $f : I \to E$ une fonction continue par morceaux sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est intégrable sur* $[a, b[$

(ii) $x \mapsto \int_a^x \|f(t)\|\,dt$ *est bornée sur* $[a, b[$

(iii) $\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \int_a^x \|f(t)\|\,dt$ *existe*

(iv) $\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \int_x^b \|f(t)\|\,dt = 0$

(v) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in I$ *tel que* $\forall x, y \in [A, b[$ $(x < y)$, $\int_x^y \|f(t)\|dt < \varepsilon$ *(critère de Cauchy)*

Proposition 3. *Soit $f: I \to E$ une fonction continue par morceaux et soit $c \in \overset{\circ}{I}$. Soit $I_g = I \cap]-\infty, c]$ et $I_d = I \cap [c, +\infty[$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur I_g et intégrable sur I_d, et on a $\int_I f = \int_{I_g} f + \int_{I_d} f$.*

Proposition 4. *Soient $f: I \to E$ et $\varphi: I \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux.*

(i) Si $\|f\| \leq \varphi$ sur I et si φ est intégrable, alors f est intégrable et on a $\| \int_I f\| \leq \int_I \varphi$.

(ii) Si f est à valeurs positives et non intégrable, et si $f \leq \varphi$, alors φ est non intégrable.

Proposition 5. *Soient $f: [a, b[\to E$ et $g: [a, b[\to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux.*

(i) Si $f(x) = O(g(x))$ lorsque $x \to b$ et si g est intégrable, alors f est intégrable.

(ii) Si $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to b$ (et f à valeurs réelles), alors f est intégrable si et seulement si g est intégrable.

On utilise souvent les propositions précédentes pour comparer les fonctions que l'on intègre avec les fonctions de comparaison introduites dans l'exemple 1. Par exemple

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0 \quad \text{donc} \quad e^{-t^2} = O(t^{-2}) \quad (t \to +\infty),$$

et comme $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit avec l'assertion (i) de la proposition 5 que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On peut également utiliser des comparaisons avec les intégrales de Bertrand (proposition 6).

Intégrales de Bertrand. En plus des exemples fondamentaux de l'exemple 1 les intégrales de Bertrand fournissent d'autres fonctions de comparaison qui permettent parfois, à l'aide des propositions précédentes, de décider de la convergence d'une intégrale.

Proposition 6 (Intégrales de Bertrand). *Soient α et β des nombres réels. Alors*

$$\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \log^\beta t} \quad \textit{est intégrable sur } [e, +\infty[\right) \iff ((\alpha > 1) \quad \textit{ou} \quad (\alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1))$$

et

$$\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\log t|^\beta} \quad \textit{est intégrable sur }]0, 1/e]\right) \iff ((\alpha < 1) \quad \textit{ou} \quad (\alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1)).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord la première partie de la proposition.

— Si $\alpha > 1$, on écrit $\alpha = 1 + 2h$ avec $h > 0$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^h \log^\beta t} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{t^\alpha \log^\beta} = \frac{1}{t^{1+h}} \frac{1}{t^h \log^\beta t} = O\left(\frac{1}{t^{1+h}}\right)$$

donc $t \mapsto t^{-\alpha} \log^{-\beta} t \, dt$ est intégrable sur $[e, +\infty[$.

— Si $\alpha = 1$, deux cas se présentent.

— Si $\beta > 1$, comme

$$\forall X > e, \qquad \int_e^X \frac{dt}{t \log^\beta t} = \left[\frac{\log^{1-\beta} t}{1 - \beta}\right]_e^X = \frac{\log^{1-\beta} X - 1}{1 - \beta},$$

on en conclut que la fonction est bien intégrable sur $[e, +\infty[$.

— Si $\beta \leq 1$, on écrit

$$\forall X > e, \qquad \int_e^X \frac{dt}{t \log^\beta t} \geq \int_e^X \frac{dt}{t \log t} = \Big[\log(\log t)\Big]_e^X = \log\log X,$$

ce qui prouve que la fonction n'est pas intégrable.

— Si $\alpha < 1$, on écrit $\alpha = 1 - 2h$ avec $h > 0$. On a pour tout $\beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^h}{\log^\beta t} = +\infty \qquad \text{donc} \qquad \exists A \geq e, \forall t > A, \quad \frac{1}{t^\alpha \log^\beta t} = \frac{t^h}{\log^\beta t}\,\frac{1}{t^{1-h}} \geq \frac{1}{t^{1-h}},$$

ce qui montre que la fonction n'est pas intégrable car $t \mapsto 1/t^{1-h}$ n'est pas intégrable sur $[A, +\infty[$.

La seconde partie de la proposition se déduit de la première par le changement de variable $u = 1/t$ grâce au théorème du changement de variable (théorème 1). □

3.2. Propriétés des intégrales de fonctions intégrables

Comme pour les intégrales sur un segment de $\mathbb{R}$, les intégrales des fonctions intégrables possèdent les propriétés qui suivent.

Théorème 1 (Changement de variable). *Soit $f :\ J \to E$ une fonction continue par morceaux sur J, et $\varphi :\ I \to J$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est intégrable sur J si et seulement si $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ l'est sur I. De plus, en notant a et b les extremités de l'intervalle I et $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ les limites de φ en a et b, on a*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Théorème 2 (Inégalité de Schwarz). *Soient $f, g :\ I \to \mathbb{K}$ deux applications continues par morceaux et telles que f^2 et g^2 sont intégrables sur I. Alors fg est intégrable sur I et on a*

$$\left|\int_I \overline{f} g\right|^2 \leq \left(\int_I |f|^2\right) \cdot \left(\int_I |g|^2\right).$$

Conséquence : On en déduit en particulier que si f^2 et g^2 sont intégrables, alors $f + g$ est également de carré intégrable.

Convergence en moyenne, convergence quadratique.

Proposition 7 (Norme de la convergence en moyenne). *L'ensemble $\mathcal{L}_c^1(I, E)$ des fonctions* continues *de I dans E et intégrables sur I est un espace vectoriel. L'application*

$$N_1 :\ \mathcal{L}_c^1(I, E) \to \mathbb{R}^+ \quad f \mapsto \int_I \|f\|$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c^1(I, E)$, appelée norme de la convergence en moyenne.

Proposition 8 (Norme de la convergence en moyenne quadratique). *L'ensemble $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des fonctions* continues *de I dans $\mathbb{K}$ de carré intégrable (*i.e.* f^2 intégrable) sur I est un espace vectoriel. L'application*

$$\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})^2 \to \mathbb{K}, \quad (f, g) \mapsto \int_I \overline{f} g$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$ qui fait de $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$ un espace préhilbertien. La norme associée est l'application

$$N_2 :\ \mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+ \quad f \mapsto \sqrt{\int_I |f|^2}$$

appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Théorème de convergence dominée. Voici maintenant le théorème le plus important du chapitre. Il correspond à une version aménagée, au niveau des classes préparatoire, du théorème plus général de convergence dominée dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Il est puissant et très commode à utiliser, là où des approches fondées sur la convergence uniforme sont souvent plus fastidieuses.

→ THÉORÈME 3 (CONVERGENCE DOMINÉE). *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans E, vérifiant les conditions suivantes*

(i) Il existe une fonction positive φ, continue par morceaux, intégrable *sur I telle que $\|f_n\| \leq \varphi$ pour tout n* (Hypothèse de domination).

(ii) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to E$ continue par morceaux,

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

La preuve de ce résultat est hors programme des classes préparatoires. On en trouvera deux démonstrations différentes dans les problèmes 20 page 194 et 21 page 196.

3.3. Intégrale généralisée

DÉFINITION 4. Soient $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et $f : [a,b[\to E$ une fonction continue par morceaux. Si $\ell = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie, on dit que l'intégrale *généralisée* (ou *impropre*) $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge* (ou qu'elle est *convergente*) et on pose $\int_a^b f(t)\,dt = \ell$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge* (ou qu'elle est *divergente*).

Remarque 2. — Si f est intégrable sur $[a,b[$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ converge (on dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est *absolument convergente*), et la valeur de l'intégrale donnée par la définition précédente est identique à celle de la définition 3 page 147. La réciproque est fausse ; les intégrales généralisées qui convergent mais ne convergent pas absolument sont appelées *intégrales semi-convergentes.*
- — Si f est positive, f est intégrable si et seulement si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
- — Lorsque f est continue par morceaux sur $]a,b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$, on définirait de même $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int_x^b f(t)\,dt$ lorsque cette limite existe.
- — Pour tout $c \in [a,b[$, les intégrales $\int_c^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.
- — Les propriétés élémentaires vérifiées par les fonctions intégrables restent vraies pour les intégrales généralisées (linéarité, positivité, relation de Chasles, ...).

DÉFINITION 5. Soient $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et $f :]a,b[\to E$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$. Si

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \int_x^y f(t)\,dt$$

existe, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et on note $\int_a^b f(t)\,dt = \ell$. Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

Remarque 3. — Cette définition est cohérente avec la précédente : si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ (on ferme en a) et si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge au sens de la première définition, alors cette même intégrale converge au sens de la seconde définition.

— Pour tout $c \in \,]a,b[$ on a l'équivalence
$$\left(\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge}\right) \iff \left(\int_a^c f(t)\,dt \text{ converge et } \int_c^b f(t)\,dt \text{ converge}\right).$$
Cette équivalence nous permet de nous limiter à l'étude de la convergence des intégrales généralisées du type de celles introduites dans la définition 4.

— En particulier, si $f\ :\mathbb{R}\to E$ est continue par morceaux, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si chacune des deux intégrales $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Ceci n'est pas équivalent à dire que la limite $\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ existe (la condition est nécessaire mais pas suffisante comme le montre le contre-exemple de la fonction $f(t)=t$).

Citons enfin le théorème qui suit, qui rend parfois quelques services.

Théorème 4. *Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f:\ [a,+\infty[\to E$ une fonction* uniformément *continue sur $[a,+\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors* $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. L'uniforme continuité de f entraîne
$$\exists\eta>0,\forall x,y\geq a,|x-y|<\eta,\qquad \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon,$$
et la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ entraîne
$$\exists A>a,\forall x,y\geq A,\qquad \left\|\int_x^y f(t)\,dt\right\|\leq\varepsilon\eta.$$
Considérons maintenant $x>A$. On a
$$\begin{aligned}\eta\|f(x)\| = \left\|\int_x^{x+\eta} f(x)\,dt\right\| &\leq \left\|\int_x^{x+\eta}\big(f(x)-f(t)\big)\,dt\right\| + \left\|\int_x^{x+\eta} f(t)\,dt\right\|\\ &\leq \int_x^{x+\eta}\varepsilon\,dt+\varepsilon\eta = 2\varepsilon\eta,\end{aligned}$$
donc $\|f(x)\|\leq 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $x>A$, on en déduit le résultat. □

Remarque 4. Le théorème est faux si f est seulement supposée continue (pour un contre-exemple, voir le troisième alinéa de la remarque 6 — on peut également construire un contre-exemple d'une fonction continue *positive non bornée* dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge, en considérant une fonction nulle sauf en certains endroits où elle possède des “pics” de plus en plus grands et de plus en plus étroits lorsque $x\to+\infty$).

3.4. Intégrales semi-convergentes

On appelle ainsi les intégrales qui convergent mais ne convergent pas absolument. Le résultat qui suit permet souvent de montrer la convergence de telles intégrales.

Théorème 5 (Règle d'Abel). *Soient $f:\ [a,b[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\ [a,b[\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$ vérifiant*

(i) f est décroissante et $\lim_{x\to b} f(x)=0$ *(en particulier, f est positive),*

(ii) il existe $M>0$ tel que pour tout $x\in[a,b[$, $\left|\int_a^x g(t)\,dt\right|\leq M$.

Alors $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est convergente.

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. L'hypothèse (i) assure l'existence de $A>0$ tel que $f(A)\leq\varepsilon$. En utilisant la deuxième formule de la moyenne (voir page 128), on a
$$\forall x,y\in\mathbb{R}, a\leq x<y<b, \exists c\in[x,y],\qquad \int_x^y f(t)g(t)\,dt = f(x)\int_x^c g(t)\,dt,$$

ce qui entraîne,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, A \leq x < y, \qquad \left|\int_x^y f(t)g(t)\,dt\right| \leq f(x)\cdot 2M \leq f(A)\cdot 2M \leq 2M\varepsilon,$$

d'où le résultat en vertu du critère de Cauchy. □

Remarque 5. - Ce résultat est une version continue du théorème 7 page 215 sur les séries. Il repose essentiellement sur la deuxième formule de la moyenne (page 128). Cette dernière n'est pas au programme (la règle d'Abel pour les intégrales ne l'est pas non plus), mais nous avions vu que lorsque f est $\mathcal{C}^1$ et g continue, sa preuve s'obtient facilement. La remarque 6 donne un exemple typique de preuve directe.

– En utilisant la proposition 1 page 125, il est clair que ce théorème reste vrai si g est à valeurs dans un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie, en particulier sur $\mathbb{C}$.

Conséquence : On considère la fonction $g : \; [a, +\infty[\to \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{i\lambda t}$ (où $a, \lambda \in \mathbb{R}$). On a

$$\forall x > a, \qquad \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| = \left|\frac{e^{i\lambda x} - e^{i\lambda a}}{\lambda}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}.$$

En appliquant la règle d'Abel, on en déduit que pour toute fonction $f : \; [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante et tendant vers 0 à l'infini, l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}\,dt$$

converge. En particulier, pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{it}/t^\alpha\,dt$ converge.

Remarque 6. — On peut prouver facilement la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt \tag{$*$}$$

pour $\alpha > 0$ sans utiliser la règle d'Abel (qui rappelons le, n'est pas au programme). Il suffit d'intégrer par parties, en écrivant

$$\forall X > 1, \qquad \int_1^X \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{it^\alpha}\right]_1^X + \frac{\alpha}{i}\int_1^X \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\,dt.$$

On remarque ensuite que le terme de gauche dans le membre de droite de cette dernière égalité converge lorsque $X \to +\infty$; quant à son terme de droite, il converge également quand $X \to +\infty$ car l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{it}/t^{\alpha+1}\,dt$ converge absolument. De tout ceci, on en déduit la convergence de l'intégrale (*). En particulier, les parties réelles et imaginaires de cette intégrale convergent, c'est-à-dire que pour tout $\alpha > 0$, on a la convergence des intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,dt.$$

— Lorsque $0 < \alpha \leq 1$, l'intégrale (*) est semi-convergente (elle est convergente mais non absolument convergente). Lorsque $\alpha \leq 0$, elle est divergente.

— Grâce au changement de variable $u = t^2$, on montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ a la même nature que $\int_1^{+\infty} (\sin u)/\sqrt{u}\,du$, donc convergente d'après ce que l'on vient de voir. Ceci est un exemple d'intégrale convergente dont la fonction intégrée ne tend pas vers 0 à l'infini.

— Profitons en ici pour rappeler que si deux fonctions sont équivalentes en l'infini et si elles ne sont pas de signe constant, leurs intégrales ne sont pas forcément de même nature. Par exemple, les fonctions

$$f:\ [1,+\infty[\to\mathbb{C}\quad t\mapsto\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\quad\text{et}\quad g:\ [1,+\infty[\to\mathbb{C}\quad t\mapsto\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t}$$

sont équivalentes en l'infini ; pourtant $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge (on vient de le voir) et $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge (si elle convergeait, $\int_1^{+\infty}\big(g(t)-f(t)\big)\,dt=\int_1^{+\infty} dt/t$ convergerait, ce qui est faux).

3.5. Exercices

EXERCICE 1. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\textbf{a)}\ \int_0^1\frac{\operatorname{ch}t-\cos t}{t^{5/2}}\,dt\qquad\textbf{b)}\ \int_{2/\pi}^{+\infty}\log\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt\qquad\textbf{c)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\,\sin(1/t^2)}{\log(1+t)}\,dt$$

$$\textbf{d)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt,\quad\alpha\in\mathbb{R}\qquad\textbf{e)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\log(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,dt,\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Solution. **a)** La fonction $f:\ t\mapsto(\operatorname{ch}t-\cos t)t^{-5/2}$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se situe donc en 0. Au voisinage de 0, on a

$$\operatorname{ch}t-\cos t=\left(1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)=t^2+o(t^2)\sim t^2,$$

donc $f(t)\sim t^{-1/2}$ lorsque $t\to0^+$. On en déduit (grâce à la proposition 5) que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ est absolument convergente.

b) Ici, la fonction $f:\ t\mapsto\log(\cos(1/t))$ est continue sur $]2/\pi,+\infty[$. Étudions le comportement de cette fonction aux deux bornes de cet intervalle. Lorsque $t\to0^+$,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{\pi}+t\right)&=\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+t\pi/2}\right)\right)=\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\frac{\pi^2}{4}+o(t)\right)\right)\\&=\log\left(\sin\left(\frac{t\pi^2}{4}+o(t)\right)\right)=\log\left(\frac{t\pi^2}{4}+o(t)\right)=\log t+\log\left(\frac{\pi^2}{4}+o(1)\right)\sim\log t,\end{aligned}$$

donc $\int_{2/\pi}^1 f(t)\,dt$ converge absolument. Lorsque $t\to+\infty$,

$$f(t)=\log\left(1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)=-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\sim-\frac{1}{2t^2},$$

ce qui montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge absolument.

L'intégrale proposée est donc absolument convergente.

c) La fonction $f:\ t\mapsto\dfrac{\sqrt{t}\,\sin(1/t^2)}{\log(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$. En 0^+, on a

$$|f(t)|\le\frac{\sqrt{t}}{\log(1+t)}\sim\frac{1}{\sqrt{t}}\quad\text{donc}\quad f(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

ce qui montre que $\int_0^1 f(t)\,dt$ est absolument convergente. En $+\infty$, on a

$$f(t)\sim\frac{\sqrt{t}}{\log t}\,\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t^{3/2}\log t}=O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right),$$

donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente. On en déduit que l'intégrale proposée est absolument convergente.

d) La fonction $f_\alpha : \ t \mapsto t^{-\alpha} \sin t$ est continue sur $]0, +\infty[$. On sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ (voir la remarque 6). Par ailleurs, lorsque $t \to 0^+$ on a $f_\alpha(t) \sim 1/t^{\alpha-1}$, donc $\int_0^1 f_\alpha(t)\, dt$ converge si et seulement si $\alpha < 2$. Finalement, l'intégrale proposée converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$ (elle est semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$ et absolument convergente pour $1 < \alpha < 2$).

e) L'application $f_{\alpha,\beta} : \quad x \mapsto t^{-\beta} \log(1 + t^\alpha)$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0^+, trois cas se produisent :

— Si $\alpha > 0$, on a $f_{\alpha,\beta}(t) \sim t^{\alpha-\beta}$ donc $\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\, dt$ converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

— Si $\alpha = 0$, on a $f_{\alpha,\beta}(t) = (\log 2) t^{-\beta}$ donc l'intégrale converge si et seulement si $\beta < 1$.

— Si $\alpha < 0$, on a $f_{\alpha,\beta}(t) \sim \alpha (\log t) t^{-\beta}$ donc $\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\, dt$ converge si et seulement si $\beta < 1$ (voir les intégrales de Bertrand, proposition 6).

En $+\infty$, on traite également trois cas :

— Si $\alpha > 0$, alors $f_{\alpha,\beta}(t) \sim \alpha (\log t) t^{-\beta}$ donc $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\, dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

— Si $\alpha = 0$, alors $f_{\alpha,\beta}(t) \sim (\log 2) t^{-\beta}$ donc $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\, dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

— Si $\alpha < 0$, alors $f_{\alpha,\beta}(t) \sim t^{\alpha-\beta}$ donc $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\, dt$ converge si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.

De tout ceci, on déduit que $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\, dt$ converge si et seulement si $1 + \alpha < \beta < 1$ ou $1 < \beta < \alpha + 1$.

EXERCICE 2. Soit $f : \ [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. Montrer que pour tout nombre réel $a > 0$, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\, dt$$

converge.

Solution. Il s'agit en fait d'un cas particulier de la règle d'Abel (théorème 5). Nous allons cependant prouver le résultat directement sans faire appel à cette dernière (la preuve est d'ailleurs tout-à-fait représentative de celle de la règle d'Abel dans le cas où f est continue et g est $\mathcal{C}^1$).

On considère l'application $F : \ [1, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_1^x f(t)\, dt$. Par hypothèse, cette application converge lorsque $x \to +\infty$, elle est donc bornée. En intégrant par parties, on a pour tout $a > 0$

$$\forall X > 1, \qquad \int_1^X \frac{f(t)}{t^a}\, dt = \left[\frac{F(t)}{t^a} \right]_1^X + a \int_1^X \frac{F(t)}{t^{1+a}}\, dt.$$

La dernière intégrale converge absolument lorsque $X \to +\infty$ car F est bornée et $a > 0$. Quant au terme entre crochets, il converge également lorsque $X \to +\infty$ toujours parce que F est bornée et $a > 0$. On en déduit le résultat.

EXERCICE 3. Donner la nature des deux intégrales suivantes :

$$\textbf{a)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x} \qquad\qquad \textbf{b)} \quad \int_1^{+\infty} |\sin x|^x\, dx.$$

Solution. **a)** La nature de cette intégrale ne peut pas être décidée en utilisant "les méthodes usuelles" de comparaison avec des fonctions dont la nature de l'intégrale est connue. On s'en sort autrement en utilisant une comparaison série-intégrale. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\, dx \qquad \text{où} \qquad f(x) = \frac{1}{1 + x^4 \sin^2 x}.$$

La fonction f étant positive, la série $\sum u_n$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ ont même nature (en effet, l'égalité $\int_0^{n\pi} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ montre que si l'une est bornée l'autre l'est également). Nous sommes donc ramené à donner la nature de la série $\sum u_n$. Nous allons prouver qu'elle converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+n^4\pi^4\sin^2 t} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+n^4\pi^4\sin^2 t} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+n^4\pi^4\sin^2 t} = 2I_n.$$

La minoration classique $\sin t \geq 2t/\pi$ sur $[0,\pi/2]$ (que l'on peut obtenir, par exemple, en utilisant la concavité de la fonction sinus sur cet intervalle) entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+n^4\pi^4 4t^2/\pi^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+4n^4\pi^2 t^2},$$

ce qui en effectuant le changement de variable $u = 4n^2\pi t$ entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n \leq \frac{1}{4n^2\pi} \int_0^{2n^2\pi^2} \frac{du}{1+u^2} \leq \frac{1}{4n^2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2},$$

autrement dit, $u_n \leq 2I_n = O(1/n^2)$. Ceci suffit pour conclure que la série $\sum u_n$ converge.

b) Ici, comme précédemment, on ne peut pas s'en tirer en utilisant les méthodes usuelles de critère de convergence d'une intégrale. On procède également par comparaison série-intégrale. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x|^x\,dx.$$

La fonction intégrée étant positive, nous avons montré précédemment que l'intégrale et la série $\sum u_n$ avaient même nature. Nous allons montrer cette fois que $\sum u_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n \geq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x|^{4n}\,dx = \int_0^{\pi} \sin^{4n} x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{4n} x\,dx = 2I_n.$$

L'intégrale I_n est une intégrale classique : c'est une intégrale de Wallis, dont on sait (voir l'exercice 1, page 130) qu'elle est équivalente à $\sqrt{\pi/(8n)}$. Donc $\sum I_n$ diverge, et comme $u_n \geq 2I_n$, $\sum u_n$ diverge. L'intégrale proposée diverge donc.

Exercice 4. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $f(x) = o(1/x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est intégrable, le critère de Cauchy s'applique, donc

$$\exists X > 0, \forall x > X, \qquad \int_x^{2x} f(t)\,dt < \varepsilon,$$

et on en déduit, la fonction f étant décroissante,

$$\forall x > X, \qquad xf(2x) = \int_x^{2x} f(2x)\,dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt < \varepsilon.$$

Donc $0 \leq (2x)f(2x) \leq 2\varepsilon$ pour tout $x > X$. Ceci entraîne $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ d'où le résultat.

Remarque. Ce résultat est une version continue de celui de l'exercice 2 page 219.

Exercice 5. **a)** Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

b) (Application.) Montrer que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha} \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Solution. **a)** C'est ultra-classique. Il suffit d'écrire, la fonction f étant croissante, que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \qquad \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\, dt \le \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt,$$

puis de sommer cette relation pour k allant de 1 à n, ce qui donne

$$\int_0^{1-1/n} f(t)\, dt \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{1/n}^{1} f(t)\, dt,$$

d'où le résultat en faisant tendre n vers l'infini puisque chacun des termes extrêmes de ces inégalités tend vers $\int_0^1 f(t)\, dt$.
b) En appliquant le résultat précédent à la fonction $f : x \mapsto x^{\alpha-1}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} = \int_0^1 t^{\alpha-1}\, dt = \frac{1}{\alpha} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha},$$

et on en déduit facilement le résultat.

Exercice 6. Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, T-périodique, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note a et b les extrémités de l'intervalle I, avec $-\infty \le a < b \le +\infty$.
a) Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\, dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \varphi(t)\, dt \right) \cdot \left(\int_a^b f(t)\, dt \right). \tag{$*$}$$

b) (Lemme de Riemann-Lebesgue) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) e^{int}\, dt = 0$.
c) Si I est un segment de $\mathbb{R}$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, montrer $\int_a^b f(t) e^{int}\, dt = O(1/n)$.
d) On suppose $I = \mathbb{R}$. En utilisant le changement de variable $u = t - \pi/n$, obtenir directement (sans utiliser le résultat de la question a)) le lemme de Riemann-Lebesgue (question b)).

Solution. **a)** Posons $K = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\, dt$. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \cdot \big(\varphi(nt) - K\big)\, dt = 0 \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\psi(nt)\, dt = 0 \tag{$**$}$$

avec $\psi = \varphi - K$. Notons que la fonction ψ vérifie $\int_0^T \psi(t)\, dt = 0$. Pour prouver (**), nous allons procéder en trois étapes : d'abord lorsque f est la fonction caractéristique d'un segment inclus dans I, puis lorsque f est en escalier sur un segment de I, puis lorsque f est continue par morceaux et intégrable sur I.

(i) Si f est la fonction caractéristique d'un segment $J = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, on a

$$I_n = \int_a^b f(t)\psi(nt)\, dt = \int_\alpha^\beta \psi(nt)\, dt = \frac{1}{n} \int_{n\alpha}^{n\beta} \psi(t)\, dt.$$

Soit p l'entier naturel tel que $n\alpha + pT \leq n\beta < n\alpha + (p+1)T$ (p est la partie entière de $n(\beta - \alpha)/T$). On peut écrire

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}\left(\int_{n\alpha}^{n\alpha+pT} \psi(t)\,dt + \int_{n\alpha+pT}^{n\beta} \psi(t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(p\int_0^T \psi(t)\,dt + \int_{n\alpha+pT}^{n\beta} \psi(t)\,dt\right) = \frac{1}{n}\int_{n\alpha+pT}^{n\beta} \psi(t)\,dt, \end{aligned}$$

et comme $0 \leq n\beta - (n\alpha + pT) < T$ ceci entraîne

$$|I_n| \leq \frac{1}{n}\int_0^T |\psi(t)|\,dt.$$

On en déduit que (**) est bien vérifié pour f.

(ii) Si f est une fonction en escalier sur un segment inclus dans I, f est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments inclus dans I, on en déduit par linéarité que (**) reste vrai pour f.

(iii) Traitons maintenant le cas où f est continue par morceaux et intégrable sur I. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est intégrable, il existe un segment $J = [c, d]$ inclus dans I tel que $\int_a^c |f(t)|\,dt + \int_d^b |f(t)|\,dt < \varepsilon$. Ensuite, la restriction de f à J étant continue par morceaux, elle est réglée donc il existe une fonction en escalier g telle que $|f - g| < \varepsilon/(d-c)$ sur J. L'étape précédente nous assure l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|\int_c^d g(t)\psi(nt)\,dt| < \varepsilon$. Ainsi, en notant $M = \sup_{t\in[0,T]} |\psi(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t)|$, on a, pour $n \geq N$

$$\left|\int_c^d f(t)\psi(nt)\,dt\right| \leq \int_c^d |f(t) - g(t)| \cdot |\psi(nt)|\,dt + \left|\int_c^d g(t)\psi(nt)\,dt\right| \leq M\varepsilon + \varepsilon.$$

Ceci entraîne que lorsque $n \geq N$,

$$\left|\int_a^b f(t)\psi(nt)\,dt\right| \leq M\int_a^c |f(t)|\,dt + \left|\int_c^d f(t)\psi(nt)\,dt\right| + M\int_d^b |f(t)|\,dt \leq 2M\varepsilon + \varepsilon.$$

Ceci termine la solution de la question a).

b) C'est une conséquence directe du résultat de la question précédente, car $t \mapsto e^{it}$ est 2π-périodique et $\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt = 0$.

c) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $I = [a, b]$, on procède en intégrant par parties :

$$I_n = \int_a^b f(t)e^{int}\,dt = \left[f(t)\frac{e^{int}}{in}\right]_a^b - \frac{1}{in}\int_a^b f'(t)e^{int}\,dt \tag{***}$$

donc

$$|I_n| \leq \frac{1}{n}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right),$$

d'où $I_n = O(1/n)$.

d) Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $u = t - \pi/n$ donne

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{int}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + \pi/n)e^{inu+i\pi}\,du = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \pi/n)e^{int}\,dt,$$

d'où on déduit

$$2I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - f(t + \pi/n))e^{int}\,dt. \tag{****}$$

L'intégrande de cette intégrale converge simplement vers 0 lorsque $n \to \infty$, mais son module n'est pas majoré par une fonction intégrable φ indépendamment de n. La convergence de (****) vers 0 s'obtient en écrivant $|I_n| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t + \pi/n)|\,dt$ et en procédant comme dans la solution de la question a) du problème 6 page 180.

Remarque. - Lorsque I est un segment et si f est suffisamment régulière, on peut obtenir un développement asymptotique de I_n en itérant l'intégration par parties dans (***).

– Le résultat de la question c) se généralise aisément lorsqu'on remplace e^{int} par une fonction continue T-périodique φ telle que $\int_0^T \varphi(t)\,dt = 0$.

EXERCICE 7. **a)** Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et est non nulle. Pour tout $t > 0$, prouver la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$$

et donner un équivalent de cette dernière expression lorsque $t \to 0^+$.
b) (Application.) Donner un équivalent, lorsque $x \to 1^-$, de la série entière

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}.$$

Solution. **a)** La fonction f décroît et son intégrale converge, on en déduit que f tend vers 0 à l'infini. En utilisant encore la décroissance de f, on en déduit que f est positive.

Ensuite, on procède comme dans l'exercice 5. La fonction f étant décroissante, on a

$$\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_{nt}^{(n+1)t} f(x)\,dx \leq t f(nt) \leq \int_{(n-1)t}^{nt} f(x)\,dx. \tag{$*$}$$

La dernière inégalité entraîne par sommation

$$\forall t > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad t\sum_{n=1}^{N} f(nt) \leq \int_0^{Nt} f(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} f(x)\,dx,$$

autrement dit, les sommes partielles de la série étudiée sont majorées (lorsque $t > 0$ est fixé). Les termes de la série étant positifs, on en déduit qu'elle converge, et ceci pour tout $t > 0$. Maintenant, par sommation de (*) sur $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\forall t > 0, \qquad \int_t^{+\infty} f(x)\,dx \leq t\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \leq \int_0^{+\infty} f(x)\,dx,$$

et on en déduit que

$$\lim_{t\to 0^+} t\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \sim \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

(cette dernière assertion a bien un sens car l'intégrale est non nulle par hypothèse).

b) En posant $x = e^{-t^2}$, on a

$$\forall x \in \,]0, 1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(nt)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$$

avec $f : u \mapsto e^{-u^2}$. En posant $c = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$, on en déduit grâce au résultat de la question précédente que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{c}{t} = \frac{c}{\sqrt{-\log x}} \sim \frac{c}{\sqrt{1-x}}.$$

Remarque. On peut montrer que $c = \sqrt{\pi}/2$ (voir l'exercice 2 page 167).

Exercice 8. Soit $f :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$$

converge.

a) Soient deux nombres réels strictement positifs a et b. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$$

converge et calculer sa valeur.

b) (Application.) Si $a, b > 0$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt.$$

Solution. **a)** Nous allons en même temps prouver la convergence de l'intégrale et donner sa valeur. Posons

$$g :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{f(at)-f(bt)}{t}.$$

Le changement de variable $x = \alpha t$ montre que pour tout $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \big(f(\alpha t)/t\big)\,dt$ est de même nature que $\int_\alpha^{+\infty} \big(f(t)/t\big)\,dt$, c'est-à-dire convergente. L'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge donc. En définitive, il s'agit pour nous de prouver l'existence et donner la valeur de

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{+\infty} g(t)\,dt.$$

En effectuant les changements de variable $u = at$ et $v = bt$, on trouve respectivement

$$\forall x > 0, \qquad \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,dt = \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(v)}{v}\,dv,$$

d'où on tire

$$\forall x > 0, \qquad \int_x^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

La fonction f étant continue, on a d'après la première formule de la moyenne

$$\forall x > 0, \exists c_x \in\,]ax, bx[, \qquad \int_x^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(c_x) \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = f(c_x) \log \frac{b}{a}.$$

Comme f est continue en 0 et que c_x tend vers 0 avec x, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{+\infty} g(t)\,dt = f(0) \log \frac{b}{a}.$$

Autrement dit, l'intégrale proposée converge et sa valeur est $f(0)\log(b/a)$.

b) Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la fonction $f :\ x \mapsto e^{-x}$ qui vérifie bien les hypothèses requises. En 0, cette fonction prend la valeur 1, donc l'intégrale converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \log \frac{b}{a}.$$

Exercice 9. Soit $f :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, telle que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que lorsque $x \to +\infty$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = o\left(\sqrt{x}\right).$$

Solution. On pense bien sûr à utiliser l'inégalité de Schwarz. En l'utilisant sur le domaine $[0, x]$ on montre seulement que $\int_0^x f(t)\,dt = O(\sqrt{x})$, mais on n'a pas le petit o. On procède autrement.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x_0 > 0$ tel que $\int_{x_0}^{+\infty} f^2(t)\,dt < \varepsilon^2$. Pour tout $x > x_0$, l'inégalité de Schwarz entraîne

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} 1 \cdot f(t)\,dt \leq \left(\int_{x_0}^{x} dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{x_0}^{x} f^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leq (\sqrt{x - x_0})\varepsilon,$$

donc si on choisit $x_1 > x_0$ tel que $\int_0^{x_0} f(t)\,dt \leq \varepsilon\sqrt{x_1}$, on a

$$\forall x > x_1, \qquad \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^{x_0} f(t)\,dt + \varepsilon\sqrt{x - x_0} \leq \varepsilon(\sqrt{x_1} + \sqrt{x}) \leq 2\varepsilon\sqrt{x}.$$

Par ailleurs f est positive donc $\int_0^x f$ également. On en déduit le résultat.

4. Intégrales dépendant d'un paramètre, équivalents d'intégrales

4.1. Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette sous-partie, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, d'extrémités a et b (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), et E désigne un e.v.n complet.

→ THÉORÈME 1 (CONTINUITÉ SOUS LE SIGNE INTÉGRAL). *Soit A un espace métrique et une application*

$$f : \ A \times I \to E \quad (x, t) \mapsto f(x, t)$$

vérifiant les propriétés suivantes

(i) pour tout $x \in A$, l'application $f(x, \cdot) : \ t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I,

(ii) pour tout $t \in I$, l'application $f(\cdot, t) : \ x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A

(iii) il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que $\|f(x, t)\| \leq \varphi(t)$ pour tout $x \in A$ (Hypothèse de domination).

Alors l'application

$$\Phi : \ A \to E \quad x \mapsto \int_a^b f(x, t)\,dt$$

est bien définie, et elle est continue sur A.

Démonstration. L'hypothèse de domination montre que $f(x, \cdot)$ est intégrable pour tout $x \in A$, donc Φ est bien définie. Pour prouver qu'elle est continue en tout point $x \in A$, il suffit de montrer que pour toute suite (x_n) dans A convergeant vers x, on a bien $\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)$. Soit (x_n) une telle suite. La suite de fonctions (f_n) définie par $f_n : \ I \to E \quad t \mapsto f(x_n, t)$ converge simplement vers $t \mapsto f(x, t)$ d'après l'hypothèse (ii). L'hypothèse (iii) nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(x, t)\,dt$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)$. □

→ THÉORÈME 2 (DÉRIVATION SOUS LE SIGNE INTÉGRAL). *Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \ A \times I \to E \quad (x, t) \mapsto f(x, t)$ une application vérifiant les propriétés suivantes*

(i) pour tout $x \in A$, l'application $f(x, \cdot) : \ t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,

(ii) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent.

Alors l'application

$$\Phi : \ A \to E \quad x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* A *et on a*

$$\forall x \in A, \qquad \Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Démonstration. Soit $x \in A$ et (x_n) une suite dans $A \setminus \{x\}$ convergeant vers x. La suite de fonctions (g_n) définie par $g_n : \ I \to E \quad t \mapsto (f(x_n,t) - f(x,t))/(x_n - x)$ converge simplement vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ sur I. La fonction g_n est bien continue par morceaux et intégrable sur I. De plus, comme $\|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\| \leq \varphi(t)$ pour tout $y \in I$, l'inégalité des accroissements finis entraîne que $\|g_n(t)\| \leq \varphi(t)$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui nous assure la convergence de $\int_I g_n$ vers $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$. Comme $\int_I g_n = (\Phi(x_n) - \Phi(x))/(x_n - x)$, nous venons de démontrer que Φ est dérivable en x et que $\Phi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$. La dernière intégrande vérifiant les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégral, on en déduit que Φ' est continue. □

Remarque 1. - Les résultats des deux théorèmes précédents restent vrais lorsque l'hypothèse de domination est vérifiée uniquement sur un voisinage de tout point de A (la continuité, la dérivabilité, sont des propriétés locales). C'est en particulier le cas si $A \subset \mathbb{R}^n$ et si l'hypothèse de domination est vraie sur tout compact K de A.

– Lorsque les intégrales définissant Φ sont semi-convergentes, les théorèmes précédents ne s'appliquent plus. On passe en général par une suite de fonctions $f_n(x) = \int_{K_n} f(x,\cdot)$ où les K_n sont des segments de I qui tendent vers I, puis on prouve des résultats de convergence uniforme pour (f_n) (voir un exemple dans la solution 2/b) de l'exercice 4 page 168).

Dans le cas où I est un segment de $\mathbb{R}$ (et A un intervalle de $\mathbb{R}$), et f continue, l'hypothèse de domination n'est plus nécessaire, comme l'exprime le corollaire suivant.

→ Corollaire 1. *Soit* A *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$. *Soit une application* $f : \ A \times [a,b] \to E \quad (x,t) \mapsto f(x,t)$ *continue sur* $A \times [a,b]$. *Alors l'application*

$$\Phi : \ A \to E \quad x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$$

est continue sur A. *Si de plus,* f *est dérivable par rapport à* x *et si* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est continue sur* $A \times [a,b]$, *alors* Φ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A *et on a* $\Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Démonstration. Soit K un compact de A. On peut appliquer le théorème 1 sur $K \times [a,b]$ (l'hypothèse de domination est vérifiée car f, continue sur le compact $K \times [a,b]$, y est bornée) qui prouve que Φ est continue sur K. Donc Φ est continue sur tout compact de A, donc sur A tout entier. On montre de la même manière les résultats relatifs à la dérivation de Φ. □

Remarque 2. On peut également obtenir ce corollaire sans passer par le théorème de convergence dominée, à partir de l'uniforme continuité de f (et $\frac{\partial f}{\partial x}$) sur $K \times [a,b]$.

La fonction gamma. La fonction gamma est une fonction classique définie par

$$\Gamma : \ ]0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes (démontrées dans le sujet d'étude 1 page 315, plus largement consacré à l'étude de cette fonction)

— La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^n e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

— On a la relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
— En particulier, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
— On a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (le changement de variable $t = u^2$ donne $\Gamma(1/2) = 2I$ avec $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$ et le calcul de I est classique — voir l'exercice 2 page 167).

4.2. Équivalents d'intégrales

Intégration des relations de comparaison. Le théorème qui suit complète le résultat de la proposition 5 de la page 149.

→ Théorème 3. *Soient $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$), E un $\mathbb{R}$-espace de Banach, $f : [a,b[\to E$ et $g : [a,b[\to \mathbb{R}^{+*}$ deux applications continues par morceaux sur $[a,b[$.*

(i) Si l'intégrale $\int_a^b g(t)$ diverge, alors lorsque $x \to b^-$,

— *la relation $f = O(g)$ entraîne* $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = O\left(\int_a^x g(t)\, dt\right)$,

— *la relation $f = o(g)$ entraîne* $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = o\left(\int_a^x g(t)\, dt\right)$,

— *la relation $f \sim g$ entraîne* $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt \sim \int_a^x g(t)\, dt.$

(ii) Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$ converge, alors lorsque $x \to b^-$,

— *la relation $f = O(g)$ entraîne* $\displaystyle\int_x^b f(t)\, dt = O\left(\int_x^b g(t)\, dt\right)$,

— *la relation $f = o(g)$ entraîne* $\displaystyle\int_x^b f(t)\, dt = o\left(\int_x^b g(t)\, dt\right)$,

— *la relation $f \sim g$ entraîne* $\displaystyle\int_x^b f(t)\, dt \sim \int_x^b g(t)\, dt.$

Démonstration. Montrons la première assertion de (i). Si $f = O(g)$, alors

$$\exists c \in]a,b[, \exists M > 0, \forall t \in [c,b[, \qquad \|f(t)\| \leq Mg(t).$$

Ainsi,

$$\forall x \in [c,b[, \qquad \left\|\int_c^x f(t)\, dt\right\| \leq M \int_c^x g(t)\, dt.$$

Or $\int_a^b g(t)\, dt$ diverge, donc il existe $d \in [c,b[$ tel que $\|\int_a^c f(t)\, dt\| \leq \int_a^d g(t)\, dt$. On a donc

$$\forall x \in [d,b[, \qquad \left\|\int_a^x f(t)\, dt\right\| \leq \int_a^d g(t)\, dt + M\int_c^x g(t)\, dt \leq (M+1)\int_a^x g(t)\, dt,$$

d'où le premier résultat.

Prouvons maintenant la seconde assertion de (i). Donnons nous $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses,

$$\exists c \in]a,b[, \forall t \in [c,b[, \qquad \|f(t)\| \leq \varepsilon g(t).$$

Ainsi,

$$\forall x \in [c,b[, \qquad \left\|\int_c^x f(t)\, dt\right\| \leq \varepsilon\int_c^x g(t)\, dt.$$

Or $\int_a^b g(t)\, dt$ diverge, donc il existe $d \in [c,b[$ tel que $\|\int_a^c f(t)\, dt\| \leq \varepsilon\int_a^d g(t)\, dt$. On a donc

$$\forall x \in [d,b[, \qquad \left\|\int_a^x f(t)\, dt\right\| \leq \varepsilon\int_a^d g(t)\, dt + \varepsilon\int_c^x g(t)\, dt \leq 2\varepsilon\int_a^x g(t)\, dt,$$

d'où le second résultat.

Si $f \sim g$ et toujours sous les hypothèses de (i), la troisième assertion se montre en écrivant $f - g = o(g)$ et en utilisant le résultat précédent.

Les assertions de (ii) se montrent de manière analogue (et c'est plus facile). □

Exemple 1. Au voisinage de $+\infty$, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \quad \text{donc} \quad \log x = \int_1^x \frac{dt}{t} = o\left(\int_1^x t^{\alpha-1}\, dt\right) = o(x^\alpha).$$

Méthode de Laplace. Nous allons donner un résultat général sur les équivalents d'intégrales dont l'intégrande dépend d'un paramètre, qui s'applique aux intégrales de la forme

$$I(t) = \int_0^{+\infty} g(x)\, e^{th(x)}\, dx \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

La démarche utilisée s'appelle la *méthode de Laplace*. Elle ne figure pas au programme des classes préparatoires, mais les techniques utilisées sont instructives et permettent de résoudre les nombreux exercices derrière lesquels se cache cette méthode.

Commençons par l'examen d'un cas particulier.

LEMME 1. *Soient $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $c > 0$ et b vérifiant $0 < b \leq +\infty$. Alors lorsque $t \to +\infty$,*

$$J(t) = \int_0^b x^\alpha e^{-tcx^\beta}\, dx \sim \frac{1}{\beta}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta},$$

où la fonction Γ est définie page 162.

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = tcx^\beta$, ce qui donne

$$J(t) = \frac{1}{\beta}(ct)^{-(\alpha+1)/\beta} \int_0^{cb^\beta t} u^{(\alpha+1)/\beta - 1} e^{-u}\, du,$$

d'où le résultat lorsque $t \to +\infty$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette sous-partie.

THÉORÈME 4. *Soient g et $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux applications continues par morceaux vérifiant*

(i) la fonction $x \mapsto g(x)e^{h(x)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$,

(ii) $\exists \delta_0 > 0, \forall \delta \in]0, \delta_0[, \forall x \geq \delta, \quad h(x) \leq h(\delta)$,

(iii) Lorsque $x \to 0^+$, on a

$$g(x) \sim Ax^\alpha \quad (\alpha > -1) \quad \text{et} \quad h(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta) \quad (c > 0, \beta > 0).$$

Alors lorsque $t \to +\infty$, on a

$$I(t) = \int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}\, dx \sim \frac{A}{\beta}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{at}(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

Démonstration. Multipliant par e^{-at}/A, on peut déjà supposer $a = 0$ et $A = 1$. Posons d'abord, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

Nous allons, pour $\varepsilon \in]0, 1[$, montrer successivement

(i) $\exists \delta \in]0, \delta_0[, \exists t_1 > 0$ tels que, pour tout $t \geq t_1$,

$$(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t) \leq \int_0^\delta g(x)e^{th(x)}\, dx \leq (1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t);$$

(ii) $\delta > 0$ et t_1 étant ainsi fixés, déterminer $t_2 > 0$ tel que

$$\forall t \geq t_2, \qquad \int_\delta^{+\infty} |g(x)|\, e^{th(x)}\, dx \leq \varepsilon\varphi(t).$$

On en conclura que pour tout $t \geq \sup\{t_1, t_2\}$, on a

$$\Big((1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta} - \varepsilon\Big)\varphi(t) \leq I(t) \leq \Big((1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta} + \varepsilon\Big)\varphi(t),$$

ce qui, en vertu de la continuité des fonctions de ε qui interviennent, prouvera le théorème.

1. Par hypothèse, il existe $\delta \in \,]0, \delta_0[$ tel que

$$\forall x \in \,]0, \delta]\,, \qquad \begin{cases} (1-\varepsilon)x^\alpha & \leq g(x) \leq & (1+\varepsilon)x^\alpha \\ -c(1+\varepsilon)x^\beta & \leq h(x) \leq & -c(1-\varepsilon)x^\beta \end{cases},$$

donc

$$(1-\varepsilon)\int_0^\delta x^\alpha e^{-c(1+\varepsilon)tx^\beta}\, dx \leq \int_0^\delta g(x)e^{th(x)}\, dx \leq (1+\varepsilon)\int_0^\delta x^\alpha e^{-c(1-\varepsilon)tx^\beta}\, dx. \tag{$*$}$$

Le nombre δ étant fixé, on sait d'après le lemme 1 que les deux membres extrêmes de (*) on respectivement pour équivalent, lorsque $t \to +\infty$

$$\frac{1-\varepsilon}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\big(c(1+\varepsilon)t\big)^{-(\alpha+1)/\beta} = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t)$$

et

$$\frac{1+\varepsilon}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\big(c(1-\varepsilon)t\big)^{-(\alpha+1)/\beta} = (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t).$$

Par définition d'un équivalent, il existe donc $t_1 > 0$ tel que pour tout $t \geq t_1$, on ait

$$(1-\varepsilon)\int_0^\delta x^\alpha e^{-c(1+\varepsilon)tx^\beta}\, dx \geq (1-\varepsilon)\Big[(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t)\Big]$$

et

$$(1+\varepsilon)\int_0^\delta x^\alpha e^{-c(1-\varepsilon)tx^\beta}\, dx \geq (1+\varepsilon)\Big[(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t)\Big].$$

Il est donc clair, d'après (*), que l'on a (i) pour tout $t \geq t_1$.

2. Posons $h(\delta) = -\mu < 0$. D'après les hypothèses, on a $h(x) + \mu \leq 0$ pour tout $x \geq \delta$, donc

$$\forall x \geq \delta, \forall t > 1, \qquad th(x) = (t-1)h(x) + h(x) \leq -(t-1)\mu + h(x)$$

ce qui entraîne la convergence de $\int_\delta^{+\infty} |g(x)|e^{th(x)}\, dx$ et l'inégalité

$$\int_\delta^{+\infty} |g(x)|e^{th(x)}\, dx \leq e^{-(t-1)\mu}\int_\delta^{+\infty} |g(x)|e^{h(x)}\, dx.$$

Or $\mu > 0$, d'où l'existence d'un réel $t_2 > 0$ pour lequel on a (ii). □

Remarque 3. Le cas d'intégrales de la forme $\int_0^b g(x)e^{th(x)}\, dx$ avec $0 < b < +\infty$, lorsque g et h sont continues par morceaux sur $]0, b]$, se ramène au cas du théorème en prolongeant g et h sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 0$ et $h(x) = a - 1$ pour $x > b$.

Le cas typique d'application du théorème précédent fait l'objet du corollaire qui suit.

Corollaire 2. *Soient g et h deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a, b[$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) telles que*

(i) La fonction $x \mapsto g(x)e^{h(x)}$ est intégrable sur $]a, b[$,

(ii) h' ne change de signe qu'en un seul point $c \in \,]a, b[$ où de plus h atteint son maximum et où $g(c) \neq 0$, $h''(c) < 0$.

Alors lorsque $t \to +\infty$, on a

$$\int_a^b g(x)e^{th(x)}\, dx \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) g(c)e^{th(c)}\sqrt{\frac{2}{-th''(c)}}.$$

Démonstration. On coupe l'intégrale en deux : $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$, puis on ramène c à 0 en effectuant un changement de variable affine. On utilise ensuite le théorème précédent. Pour chacun des deux cas, on a ici

$$\alpha = 0, \quad A = g(c), \quad \beta = 2, \quad c = -\frac{h''(c)}{2}, \quad a = h(c),$$

et l'équivalent est le double de celui du théorème précédent (il y a deux intégrales). □

Remarque 4. On peut utiliser la valeur $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ dans le corollaire précédent.

Dans la pratique, l'intégrande n'a pas toujours la forme de celle requise pour appliquer la méthode de Laplace. On effectue souvent un changement de variable pour amener le maximum de la fonction apparaissant dans l'exponentielle à une abscisse fixe puis on applique le corollaire précédent. C'est cette technique qui est utilisée dans l'exemple qui suit.

Exemple 2. On veut trouver le comportement asymptotique, lorsque $x \to +\infty$, de

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{x \log t - t}\, dt.$$

Comme il est dit plus haut, on cherche l'abscisse t du maximum de la fonction $h(t) = x \log t - t$ (c'est ce maximum qui va dicter le comportement de Γ en $+\infty$). On a $h'(t) = x/t - 1$, le maximum est donc atteint en $t = x$. Pour se ramener au cas où h atteint son maximum en une abscisse indépendante de x, on effectue le changement de variable $u = t/x$. On trouve

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\log u - u)}\, du.$$

La fonction $u \mapsto \log u - u$ atteint son maximum en $u = 1$, et on peut appliquer le corollaire, qui donne

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-x} \sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2} e^{-x}.$$

Ce résultat est connu sous le nom de *formule de Stirling*. Elle généralise celle obtenue dans l'exercice 3 page 219 pour x entier (car $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Remarque 5. Dans les exercices qui suivent, on utilisera tels quels les résultats concernant la méthode de Laplace. Néanmoins, le jour du concours, il faut être capable de tout redémontrer (en appliquant directement aux fonctions concernées les démonstrations précédentes).

4.3. Exercices

→ Exercice 1. On considère une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t)^n\, dt = 0.$$

Solution. C'est classique. On procède comme suit.

Comme f est strictement croissante sur $[0,1]$, on a $0 = f(0) \le f(x) < f(1) = 1$ pour $0 \le x < 1$. Ainsi, la suite de fonctions (f^n) converge simplement vers la fonction φ définie par $\varphi(t) = 0$ pour $t \in [0,1[$ et $\varphi(1) = 1$. Par ailleurs, on a la majoration $0 \le f^n \le 1$ indépendante de n. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui assure la converge de $\int_0^1 f(t)^n\, dt$ vers $\int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0$.

Exercice 2 (Intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$). Le but de l'exercice est de donner deux méthodes pour calculer l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

1/ (*Première méthode.*) Exprimer l'application

$$g:\ [0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,dt$$

en fonction de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. En déduire I.

2/ (*Seconde méthode.*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,\sqrt{n}]$, montrer

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \le e^{-t^2} \le \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

En déduire I en utilisant les intégrales de Wallis.

Solution. **1/** La fonction

$$[0,+\infty[\times[0,1] \quad (x,t) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$$

admet une dérivée partielle par rapport à x continue. On en déduit (théorème de dérivabilité sous le signe intégral, et plus précisément le corollaire 1 page 162) que g est dérivable et que

$$\forall x \ge 0, \qquad g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\,dt,$$

ce qui, après le changement de variable $u = tx$ donne

$$g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -2f'(x)f(x) \quad \text{avec} \quad f:\ x \mapsto \int_0^x e^{-u^2}\,du.$$

En intégrant, on en déduit

$$\forall x \ge 0, \qquad g(x)-g(0) = -\big(f^2(x)-f^2(0)\big) \quad \text{donc} \quad g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x). \tag{$*$}$$

Les inégalités

$$0 \le g(x) \le e^{-x^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{entraînent} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

et la fonction f étant positive, on en déduit avec (*) que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad \text{ce qui s'écrit} \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2/ La fonction logarithme est concave, elle se trouve donc en dessous de sa tangente en 1, ce qui s'écrit $\log(1+x) \le x$ pour $x > -1$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall t \in\ [0,\sqrt{n}[, \qquad \log\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \le -\frac{t^2}{n} \quad \text{et} \quad \log\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \le \frac{t^2}{n}.$$

En multipliant respectivement par n et $-n$ puis en prenant l'exponentielle, on en déduit

$$\forall t \in\ [0,\sqrt{n}[, \quad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \le e^{-t^2} \le \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \le \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos u$ dans le membre de gauche et $t = \sqrt{n}\operatorname{cotan} u$ dans le membre de droite, cette dernière assertion s'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\, du \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \le \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\, du. \qquad (**)$$

Les intégrales de Wallis vérifient l'équivalent (voir l'exercice 1 page 130)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n u\, du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Ceci montre que les deux termes extrêmes de (**) tendent vers $\sqrt{\pi}/2$ lorsque $n \to +\infty$, et on en déduit en faisant tendre n vers l'infini dans (**) que

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Remarque. Il existe d'autres moyens de calculer cette intégrale (voir l'exemple 2 page 355 par exemple).

EXERCICE 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ nulle en 0. Montrer que l'application

$$g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} f(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Solution. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour x fixé, le changement de variable $t = \lambda x$ fournit

$$f(x) = x\int_0^1 f'(\lambda x)\, d\lambda \quad \text{donc} \quad g(x) = \int_0^1 f'(\lambda x)\, d\lambda.$$

La fonction f' étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit en appliquant par récurrence le théorème de dérivation sous le signe intégral, que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque. Ce résultat est un cas particulier du lemme d'Hadamard lorsque $n = 1$ (voir l'exercice 4 page 331).

EXERCICE 4. **1/** Calculer, pour tout $x \ge 0$, la valeur de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt.$$

2/ a) Soit $\alpha > 0$. Calculer, pour tout $x \ge 0$, la valeur de

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} t^{\alpha-1}\, dt$$

(on exprimera I en fonction de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$).
b) En déduire, pour tout $\alpha \in\,]0,1[$, la valeur de

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{it}\, dt.$$

3/ Pour tout $x \geq 0$, calculer

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2i\pi tx}\, dt.$$

Solution. L'idée est de trouver une équation différentielle vérifiée par chacune de ces intégrales puis de la résoudre pour exprimer explicitement l'intégrale correspondante.

1/ L'intégrande est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ (elle est égale à $x+o(1)$ lorsque $t \to 0$). La dérivée de l'intégrande par rapport à x est $e^{-t}\cos xt$, dont la valeur absolue est majorée indépendamment de x par e^{-t}, intégrable sur $]0, +\infty[$. En vertu du théorème de dérivation sous le signe intégral, on en déduit que I est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad I'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos xt\, dt = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-t+ixt}\, dt\right) = \Re\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad I(x) = I(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$$

2/ a) En procédant comme dans la solution de la question précédente, on montre que I est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad I'(x) = i\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}t^{\alpha}\, dt.$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\forall x \geq 0, \qquad I(x) = \left[e^{(-1+ix)t}\cdot\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right]_0^{+\infty} - \left(\frac{-1+ix}{\alpha}\right)\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}t^{\alpha}\, dt = -\frac{i+x}{\alpha}\, I'(x).$$

Cette équation différentielle vérifiée par I s'intègre, compte tenu du fait que

$$\int \frac{dx}{i+x} = \int \frac{x-i}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) - i\arctan x + k, \qquad k \in \mathbb{C},$$

et on tire

$$\exists C \in \mathbb{C}, \qquad I(x) = C\exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}\log(x^2+1) - i\arctan x\right)\right] = C(x^2+1)^{-\alpha/2}e^{i\alpha\arctan x}.$$

Or $I(0) = C = \Gamma(\alpha)$, donc finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad I(x) = \Gamma(\alpha)(x^2+1)^{-\alpha/2}e^{i\alpha\arctan x}.$$

b) Le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale définissant $I(x)$ donne

$$\forall x > 0, \qquad I(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-u/x}e^{iu}u^{\alpha-1}\, du.$$

Lorsque $x \to +\infty$, on a $e^{-u/x} \to 1$ et on s'attend à ce que la dernière intégrale tende vers $J(x)$. C'est ce dernier point que nous montrons maintenant. On ne peut pas ici utiliser directement le théorème de continuité sous le signe intégral sur tout le domaine d'intégration. Définissons la fonction

$$\widetilde{I}: \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} \quad y \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-uy}e^{iu}u^{\alpha-1}\, du.$$

Pour $y > 0$, l'existence de $\widetilde{I}(y)$ est immédiate. Pour $y = 0$, son existence est une conséquence de la règle d'Abel (voir le théorème 5 page 152). Pour montrer la continuité de $\widetilde{I}$ en 0, on va montrer que $\widetilde{I}$ est limite uniforme de fonctions continues. On considère la suite de fonctions $(\widetilde{I}_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall y \geq 0, \qquad \widetilde{I}_n(y) = \int_{1/n}^{n} e^{-uy}e^{iu}u^{\alpha-1}\, du.$$

La seconde formule de la moyenne donne

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall y\geq 0, \forall X>n, \exists a,b\geq n,$$
$$\int_n^X e^{-uy}e^{iu}u^{\alpha-1}\,du = e^{-ny}\left(\int_n^a \cos u\, u^{\alpha-1}\,du + i\int_n^b \sin u\, u^{\alpha-1}\,du\right)$$

donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $y\geq 0$,

$$\left|\widetilde{I}_n(y)-\widetilde{I}(y)\right| \leq \int_0^{1/n} u^{\alpha-1}\,du + \sup_{t\geq n}\left|\int_n^t \cos u\, u^{\alpha-1}\,du\right| + \sup_{t\geq n}\left|\int_n^t \sin u\, u^{\alpha-1}\,du\right|,$$

et on en déduit que $(\widetilde{I}_n)$ converge uniformément vers $\widetilde{I}$ sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de continuité sous le signe intégral assure la continuité de $\widetilde{I}_n$ en 0 pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc $\widetilde{I}$, limite uniforme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, est continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, $\widetilde{I}$ est continue en 0^+ ce qui s'écrit aussi

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha I(x) = J(\alpha),$$

et d'après le résultat de la question précédente on en déduit

$$J(\alpha)=\Gamma(\alpha)e^{i\alpha\pi/2}.$$

3/ En procédant comme dans la solution de la question 1/, on montre que I est dérivable et que

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, \qquad I'(x) = 2i\pi\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}e^{2i\pi tx}\,dt.$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\forall x\geq 0, \qquad I(x) = \left[\frac{1}{2i\pi x}e^{-t^2}e^{2i\pi xt}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2i\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty} 2te^{-t^2}e^{2i\pi xt}\,dt = \frac{1}{i\pi x}\frac{1}{2i\pi}I'(x).$$

En résolvant cette équation différentielle vérifiée par I, on trouve

$$\forall x\geq 0, \qquad I(x) = I(0)e^{-\pi^2x^2}.$$

La constante $I(0)$ est calculable : elle vaut $\sqrt{\pi}$ (voir l'exercice 2).

Exercice 5. Pour tout $t>0$, on pose

$$I(t)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx.$$

Donner un équivalent de $I(t)$ lorsque t tend vers 0^+.

Solution. La convergence de l'intégrale donnant $I(t)$ pour tout $t>0$ est immédiate. Pour trouver son équivalent lorsque $t\to 0^+$ il est commode de commencer par effectuer le changement de variable $u=tx$ (ceci pour localiser la zone qui contribue au terme dominant de l'intégrale), ce qui donne

$$\forall t>0, \qquad I(t)=\int_t^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt[3]{u^3+t^3}}\,du.$$

Lorsque $t\to 0^+$, la contribution prépondérante de l'intégrale se produit lorsque u est proche de t. Dans cette zone, l'intégrande se comporte comme $(u^3+t^3)^{-1/3}$. Lorsque u est proche de 0 mais grand par rapport à t, la contribution de ce terme reste significative, et il est alors bien approché par $1/u$. On s'attend par conséquent à ce que $I(t)$ soit équivalent à $\int_t^1 du/u = -\log t$. C'est ce que nous allons montrer rigoureusement dans les lignes qui suivent.

Pour tout $t>0$, on écrit

$$I(t)-\int_t^1\frac{du}{u} = \underbrace{\int_t^1\left(\frac{1}{(u^3+t^3)^{1/3}}-\frac{1}{u}\right)du}_{I_1(t)} + \underbrace{\int_t^1\frac{e^{-u}-1}{(u^3+t^3)^{1/3}}\,du}_{I_2(t)} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{(u^3+t^3)^{1/3}}\,du}_{I_3(t)}. \quad (*)$$

Nous allons prouver que les intégrales $I_1(t)$, $I_2(t)$ et $I_3(t)$ du second membre de cette égalité sont bornées lorsque $t \to 0^+$. Pour les deux dernières c'est facile car il suffit d'écrire (compte tenu de la classique inégalité $1 - e^{-u} \le u$)

$$|I_2(t)| \le \int_t^1 \frac{u}{(u^3+t^3)^{1/3}}\,du \le \int_t^1 du \le 1 \qquad \text{et} \qquad |I_3(t)| \le \int_1^{+\infty} e^{-u}\,du = 1.$$

Pour l'intégrale $I_1(t)$ on écrit

$$\forall t > 0, \qquad |I_1(t)| = \int_t^1 \frac{1}{u}\left(1 - \left(1 + \frac{t}{u}\right)^{-1/3}\right) du,$$

et compte tenu du fait que $1-(1+x)^{-1/3} \le x/3$ pour tout $x \ge 0$ (inégalité que l'on obtient par exemple en utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto (1+x)^{-1/3}$), on a

$$\forall t > 0, \qquad |I_1(t)| \le \int_t^1 \frac{1}{u}\,\frac{t}{3u}\,du = \frac{t}{3}\int_t^1 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi nous avons montré $I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) = O(1)$ lorsque $t \to 0^+$, donc grâce à (*) on en déduit

$$I(t) + \log t = O(1) \quad \text{donc} \quad I(t) = -\log t + O(1) \sim -\log t \quad \text{lorsque} \quad t \to 0^+.$$

EXERCICE 6. **1/** Donner un équivalent, lorsque $t \to +\infty$ de

$$\textbf{a)}\quad I(t) = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha x} t^x\,dx \quad (\alpha > 0) \qquad\qquad \textbf{b)}\quad I(t) = \int_0^{\pi} (\sin x) x^t\,dx$$

(on pourra utiliser le théorème 4 page 164 sur la méthode de Laplace).

2/ Donner un équivalent, lorsque $t \to 0^+$, de

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - tx\right) dx \quad (0 < \alpha < 1).$$

Solution. **1/ a)** On ne peut pas appliquer tel que le théorème 4 car dans l'expression $t^x = e^{(\log t)x}$, la fonction dans l'exponentielle est croissante en x. On procède comme il est indiqué dans le commentaire du corollaire 2.

On écrit $x^{-\alpha x} t^x = \exp(f(x))$ où $f(x) = \log t \cdot x - \alpha x \log x$. Comme $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to +\infty$, l'intégrale $I(t)$ converge. Cherchons l'abscisse x du maximum de f. On a

$$f'(x) = \log t - \alpha(1 + \log x)$$

donc le maximum de f est atteint au point $x = t^{1/\alpha}/e$. Pour le ramener à une abscisse fixe, on effectue le changement de variable $x = ut^{1/\alpha}/e$. On obtient

$$I(t) = s\int_0^{+\infty} e^{sh(u)}\,du \quad \text{où} \quad s = \frac{t^{1/\alpha}}{e} \quad \text{et} \quad h(u) = \alpha u(1 - \log u).$$

La fonction h admet un unique maximum en $u = 1$, et on a $h(1) = \alpha$, $h''(1) = -\alpha$. On peut donc appliquer le corollaire 2 à cette dernière intégrale, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} e^{sh(u)}\,du \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{\alpha s}\sqrt{\frac{2}{\alpha s}}.$$

Donc, compte tenu de l'expression de s en fonction de t et du fait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, on trouve

$$I(t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}}\, t^{1/(2\alpha)} \exp\left(\frac{\alpha t^{1/\alpha}}{e}\right).$$

b) Pour se ramener aux hypothèses usuelles d'application de la méthode de Laplace, on commence par effectuer le changement de variable $u = \pi - x$, ce qui donne

$$I(t) = \int_0^{\pi} (\sin u)(\pi - u)^t \, du = \int_0^{\pi} g(u) e^{th(u)} \, du$$

avec $g(u) = \sin u \sim u$ et $h(u) = \log(\pi - u) = \log \pi - \frac{u}{\pi} + o(u)$ $(u \to 0^+)$. On peut donc appliquer le théorème 4 qui donne

$$I(t) \sim \Gamma(2)\, \pi^t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{-2} = \frac{\pi^{t+2}}{t^2}.$$

2/ On ne peut pas appliquer telle quelle la méthode de Laplace car l'intégrale est étudiée lorsque le paramètre t tend vers 0^+. Pour se ramener à un paramètre qui tend vers $+\infty$, on effectue le changement de variable $u = tx$, qui donne

$$I(t) = \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{u^\alpha}{\alpha t^\alpha} - u\right) du.$$

La fonction $f(u) = \dfrac{u^\alpha}{\alpha t^\alpha} - u$ prend son maximum pour $u = t^{\alpha/(\alpha-1)}$, ce qui nous amène à effectuer le changement de variable $u = v\, t^{\alpha/(\alpha-1)}$. On trouve

$$I(t) = \frac{s}{t} \int_0^{+\infty} e^{sh(v)} \, dv, \quad \text{où} \quad s = t^{\alpha/(\alpha-1)} \quad \text{et} \quad h(v) = \frac{v^\alpha}{\alpha} - v.$$

La fonction h admet un maximum unique qu'elle atteint en $v = 1$. De plus,

$$h(1) = \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \text{et} \quad h''(1) = \alpha - 1.$$

En appliquant le corollaire 2, on obtient donc

$$\int_0^{+\infty} e^{sh(v)} \, dv \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{(1-\alpha)s/\alpha} \sqrt{\frac{2}{(1-\alpha)s}} \qquad (s \to +\infty).$$

Or $s = t^{-\alpha/(1-\alpha)}$ et $0 < \alpha < 1$. Lorsque $t \to 0^+$, on a donc $s \to +\infty$, et finalement

$$I(t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{1-\alpha}}\, t^{\frac{\alpha-2}{2(1-\alpha)}} \exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\, t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right), \qquad (t \to 0^+).$$

Exercice 7. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de l'infini et que lorsque $x \to +\infty$, on a

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \sim \frac{\mu}{x}, \qquad \mu \neq 0, \mu \neq -1.$$

Montrer que

$$\text{si } \mu > -1, \qquad \int_a^{+\infty} g(t)\, dt \quad \text{diverge} \quad \text{et} \quad \int_a^x g(t)\, dt \sim \frac{xg(x)}{\mu+1} \qquad (x \to +\infty)$$

$$\text{si } \mu < -1, \qquad \int_a^{+\infty} g(t)\, dt \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} g(t)\, dt \sim -\frac{xg(x)}{\mu+1} \qquad (x \to +\infty).$$

Solution. On traite d'abord le cas $\mu > -1$. Le théorème 3 (page 163) sur les équivalents de primitives entraîne

$$\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}\, dt \sim \mu \int_a^x \frac{dt}{t} \quad \text{autrement dit} \quad \log g(x) \sim \mu \log x.$$

En particulier,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > a, \forall x \geq X, \qquad \log g(x) \geq (\mu - \varepsilon) \log x \quad \text{ou encore} \quad g(x) \geq x^{\mu-\varepsilon}.$$

En choisissant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\mu - \varepsilon > -1$, on en déduit que $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge. Par ailleurs, en intégrant par parties, on a

$$\int_a^x g(t)\,dt = \Big[tg(t)\Big]_a^x - \int_a^x tg'(t)\,dt \quad \text{donc} \quad \int_a^x \big(g(t) + tg'(t)\big)\,dt = xg(x) - ag(a).$$

Or

$$g(t) + tg'(t) = g(t)\left(1 + t\,\frac{g'(t)}{g(t)}\right) \sim g(t)(1+\mu),$$

donc en vertu du théorème 3, on a

$$xg(x) - ag(a) = \int_a^x \big(g(t) + tg'(t)\big)\,dt \sim (\mu + 1)\int_a^x g(t)\,dt.$$

On en déduit le résultat.

Le cas $\mu < -1$ se traite de la même manière.

Exercice 8. On considère le *logarithme intégral*, qui est l'application définie par

$$\forall x \geq 2, \qquad \mathrm{Li}\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner un développement asymptotique de $\mathrm{Li}\,(x)$ à n termes lorsque $x \to +\infty$.

Solution. En intégrant une fois par parties, on a

$$\forall x \geq 2, \qquad \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \left[\frac{t}{\log t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}.$$

En itérant le procédé, on tombe au bout de $n-1$ étapes sur la relation

$$\mathrm{Li}\,(x) = \left[\frac{t}{\log t}\right]_2^x + 1!\left[\frac{t}{\log^2 t}\right]_2^x + 2!\left[\frac{t}{\log^3 t}\right]_2^x + \cdots + (n-1)!\left[\frac{t}{\log^n t}\right]_2^x + n!\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t}. \quad (*)$$

Nous cherchons à obtenir un équivalent de la dernière primitive. Le logarithme est une fonction qui varie très peu (en poussant, on peut dire que $\log x$ est presque une constante vers l'infini), et on s'attend à ce que $\int_2^x \log^{-(n+1)} t\,dt \sim x/\log^{n+1} x$. Pour prouver ceci, on écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\log^{n+1} t}\right) = \frac{1}{\log^{n+1} t} - \frac{(n+1)}{\log^{n+2} t} \sim \frac{1}{\log^{n+1} t}, \qquad (t \to +\infty).$$

Le théorème 3 nous autorise à intégrer cet équivalent. En d'autres termes, lorsque $x \to +\infty$ on a

$$\left[\frac{x}{\log^{n+1} x}\right]_2^x = \int_2^x \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\log^{n+1} t}\right)dt \sim \int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} \quad \text{donc} \quad \int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} \sim \frac{x}{\log^{n+1} x}.$$

Avec (*), on en déduit finalement

$$\mathrm{Li}\,(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \frac{2!\,x}{\log^3 x} + \cdots + \frac{n!\,x}{\log^{n+1} x} + o\left(\frac{x}{\log^{n+1} x}\right).$$

Remarque. Tous les termes de ce développement asymptotique tendent vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 9. Donner un équivalent, lorsque $t \to +\infty$, de

$$I(t) = \int_0^1 \cos x\; e^{it\,\mathrm{ch}\,x}\,dx.$$

Solution. Commençons par analyser intuitivement la situation. Lorsque t est grand, $x \mapsto e^{it \operatorname{ch} x}$ tourne très vite autour de l'origine dans $\mathbb{C}$, ce qui a pour effet de rendre l'intégrale petite. Mais lorsque x est proche de 0, l'application $x \mapsto \operatorname{ch} x$ varie peu (sa dérivée est nulle en 0), et cette rotation est très ralentie (on dit que la *phase* $t \operatorname{ch} x$ est *stationnaire*). La partie de l'intégrale correspondant à ce voisinage apporte donc une contribution prépondérante. Pour cette raison, on va travailler au voisinage de 0.

Le développement limité

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0^+$$

nous invite à écrire $\operatorname{ch} x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2(x/2)$ et d'effectuer le changement de variable $u = \operatorname{sh}(x/2)$ dans l'intégrale. On trouve

$$I(t) = 2e^{it} J(t), \quad \text{où} \quad J(t) = \int_0^\alpha g(u) e^{2itu^2}\, du \quad \text{avec} \quad \alpha = \operatorname{sh} \frac{1}{2}, \quad g(u) = \frac{\cos(2 \operatorname{argsh} u)}{\sqrt{1+u^2}}.$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g(0) = 1$. Nous allons montrer, comme on s'y attend suite à la discussion que nous avons eu plus haut, que

$$J(t) \sim \int_0^\alpha e^{2itu^2}\, du \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

Le changement de variable $v = 2tu^2$ fournit

$$\int_0^\alpha e^{2itu^2}\, du = \frac{1}{2\sqrt{2t}} \int_0^{2t\alpha^2} \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}}\, dv \sim \frac{K}{2\sqrt{2t}} \quad \text{avec} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}}\, dv. \qquad (*).$$

Par ailleurs, on a

$$J(t) - \int_0^\alpha e^{2itu^2}\, du = \int_0^\alpha g_1(u) e^{2itu^2}\, du \quad \text{avec} \quad g_1(u) = g(u) - 1. \qquad (**)$$

La fonction g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle est nulle en 0, on peut en déduire facilement que $u \mapsto g_1(u)/u$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$ (cette dernière est même de classe $\mathcal{C}^\infty$, voir l'exercice 3 page 168). On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha g_1(u) e^{2itu^2}\, du &= \frac{1}{4it} \int_0^\alpha \left(\frac{g_1(u)}{u}\right) \frac{d}{du}\left(e^{2itu^2}\right) du \\ &= \frac{1}{4it}\left[\frac{g_1(u)}{u} e^{2itu^2}\right]_0^\alpha - \frac{1}{4it}\int_0^\alpha \frac{d}{du}\left[\frac{g_1(u)}{u}\right] e^{2itu^2}\, du,\end{aligned}$$

ce qui montre, avec (**)

$$J(t) - \int_0^\alpha e^{2itu^2}\, du = O\left(\frac{1}{t}\right), \qquad (t \to +\infty).$$

Avec (*) on en déduit

$$I(t) = 2e^{it} J(t) \sim \frac{K e^{it}}{\sqrt{2t}} \quad \text{avec} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}}\, dv.$$

Remarque. On a $K = \Gamma(1/2)\, e^{i\pi/4} = \sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4}$ (voir la question 2/b) de l'exercice 4).
– Il existe une technique générale appelée la *méthode de la phase stationnaire* qui permet de donner un équivalent des intégrales de la forme $\int_a^b g(x) e^{ith(x)}\, dx$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 10. Soit $a > 0$. Donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^a)(2 + x^a) \cdots (n + x^a)}.$$

Solution. Pour n fixé, l'intégrande de I_n est équivalente à x^{-na} lorsque $x \to +\infty$, ce qui montre que I_n existe dès que $n > 1/a$.

En effectuant le changement de variable $t = x^a$, on voit que

$$I_n = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \, dt}{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)} = \frac{1}{a} J_n \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1}{a} - 1.$$

On s'est ainsi ramené à rechercher un équivalent de J_n lorsque $n \to +\infty$. On sent intuitivement que c'est la partie correspondant aux valeurs de x proches de 0 qui va donner une contribution prépondérante à l'intégrale. Ceci nous amène à rechercher un équivalent de

$$K_n = \int_0^1 \frac{t^\alpha \, dt}{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}.$$

Cette dernière intégrale a des bornes d'intégrations finies, ce qui nous simplifiera la tache dans la suite du calcul. Nous prouverons ultérieurement que l'on a bien $K_n \sim J_n$.

Poursuivons. On écrit

$$K_n = \frac{L_n}{n!}, \qquad L_n = \int_0^1 \frac{t^\alpha \, dt}{(1+t)(1+t/2)\cdots(1+t/n)},$$

nous ramenant ainsi à trouver un équivalent de L_n. Commençons par donner l'idée. On va écrire

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{t}{k}\right) = \exp\left[\sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{t}{k}\right)\right] \simeq \exp\left[\sum_{k=1}^n \frac{t}{k}\right] \simeq \exp(t \log n).$$

Il s'agit de rendre rigoureuse cette affirmation. On part de l'inégalité classique

$$\forall u \geq 0, \quad |\log(1+u) - u| \leq \frac{u^2}{2}$$

(conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $t \mapsto \log(1+t)$ sur $[0,u]$ à l'ordre 2). Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|\sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{t}{k}\right) - t\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)\right| \leq \frac{t^2}{2}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right) \leq Kt^2 \quad \text{avec} \quad K = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}. \qquad (*)$$

Il est classique que $\sum_{k=1}^n 1/k = \log n + u_n$ où (u_n) est une suite qui tend vers la constante d'Euler γ. La suite (u_n) est en particulier bornée, et si on désigne par M un majorant de $|u_n|$, l'assertion (*) entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \qquad \left|\sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{t}{k}\right) - t\log n\right| \leq t\,|u_n| + Kt^2 \leq (M+K)t = L\,t,$$

inégalité que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \qquad t\,(\log n - L) \leq \sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{t}{k}\right) \leq t\,(\log n + L).$$

En prenant l'exponentielle, ceci s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \qquad e^{t(\log n - L)} \leq \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{t}{k}\right) \leq e^{t(\log n + L)}$$

donc finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 t^\alpha e^{-t(\log n + L)}\, dt \leq L_n \leq \int_0^1 t^\alpha e^{-t(\log n - L)}\, dt. \qquad (**)$$

Or, de manière générale on a

$$\int_0^1 t^\alpha e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} \int_0^\lambda t^\alpha e^{-t}\, dt \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}, \qquad \lambda \to +\infty.$$

Ainsi, les termes extrêmes des inégalités (**) sont tout deux équivalents à

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\log n)^{\alpha+1}} \tag{***}$$

(car $\log n - L \sim \log n$ et $\log n + L \sim \log n$ lorsque $n \to +\infty$). On en déduit d'après (**) que (***) est un équivalent de L_n, donc finalement

$$K_n = \frac{1}{n!} L_n \sim \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\log n)^{\alpha+1}}, \qquad n \to +\infty. \tag{****}$$

Pour achever notre calcul, il reste à montrer que $J_n \sim K_n$. Pour cela, on écrit d'abord

$$J_n - K_n = \int_1^{+\infty} \frac{f_N(t)\,dt}{(N+t)\cdots(n+t)}, \qquad f_N(t) = \frac{t^\alpha}{(1+t)(2+t)\cdots(N-1+t)}$$

Fixons un entier $N > \alpha + 2$, de sorte que f_N est intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour $n > N$ on a

$$0 \le J_n - K_n \le \int_1^{+\infty} \frac{f_N(t)\,dt}{(N+1)\cdots(n+1)} = \frac{(N!) \int_1^{+\infty} f_N(t)\,dt}{(n+1)!} = O\left(\frac{1}{(n+1)!}\right).$$

Avec (****), on en déduit que $J_n \sim K_n$. Finalement, compte tenu du fait que $\alpha = 1/a - 1$, on a montré

$$I_n = \frac{1}{a} J_n \sim \frac{1}{a} \frac{1}{n!} \frac{1}{(\log n)^{1/a}} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right).$$

Remarque. On peut utiliser la formule de Stirling pour exprimer l'équivalent obtenu sous une forme ne faisant pas intervenir de factorielle.

5. Problèmes

PROBLÈME 1. Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$. Montrer les deux inégalités suivantes et caractériser l'égalité.

a) $$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2\,dx$$

b) $$\int_a^b |f'(x) f(x)|\,dx \le \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

Solution. **a)** L'inégalité de Schwarz entraîne

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)|^2 = \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|^2 \le \left(\int_a^x |f'(t)|^2\,dt\right) \cdot \left(\int_a^x 1\,dt\right) \le (x-a) \int_a^b |f'(t)|^2\,dt \quad (*)$$

d'où l'inégalité désirée en intégrant (*) sur $[a, b]$.

Les fonctions en présence étant continues, l'égalité se produira si et seulement si chacune des inégalités précédentes est une égalité. En particulier, s'il y a égalité, la dernière inégalité de (*) doit être une égalité, ce qui entraîne

$$\forall x \in\,]a, b], \qquad \int_a^x |f'(t)|\,dt = \int_a^b |f'(t)|\,dt.$$

Comme $|f'|$ est continue, ceci entraîne que f' est nulle sur $]a, b]$ donc sur $[a, b]$ par continuité. La fonction f est donc constante, et comme $f(a) = 0$, f est nulle. Réciproquement, si f est nulle, il y a bien égalité.

b) On pose

$$\forall x \in [a, b], \qquad u(x) = \int_a^x |f'(t)|\,dt.$$

La fonction u vérifie

$$\forall x \in [a,b], \qquad |f(x)| = \left| \int_a^x f'(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)|\,dt = u(x).$$

En particulier,

$$\int_a^b |f'(x)f(x)|\,dx \leq \int_a^b |f'(x)|\,u(x)\,dx = \int_a^b u'(x)u(x)\,dx = \left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(x)|\,dt\right)^2.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left(\int_a^b |f'(x)|\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b 1\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b |f'(x)|^2\,dt\right) = (b-a)\int_a^b |f'(x)|^2\,dt, \qquad (**)$$

d'où l'inégalité désirée.

S'il y a égalité, alors l'inégalité de Schwarz (**) est une égalité, donc les fonctions $t \mapsto f'(t)$ et $t \mapsto 1$ sont liées, autrement dit f' est constante et f est affine. Réciproquement, si f est affine, chacune des inégalités précédente est une égalité. Finalement, l'inégalité b) est une égalité si et seulement si f est affine (et toujours $f(a) = 0$).

PROBLÈME 2. On considère l'application

$$F:\ [0,1[\,\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Montrer l'existence de $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ et calculer cette limite. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,dt.$$

Solution. On ne sait pas exprimer une primitive de $t \mapsto 1/\log t$ avec des fonctions usuelles (en fait, on ne peut pas !). Cependant, lorsque t est voisin de 1, $1/\log t$ est proche de $1/(t\log t)$ dont on connaît une primitive. C'est cette idée que nous mettons en forme. Pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\forall t \in [x^2, x], \qquad \frac{x^2}{t\log t} \leq \frac{1}{\log t} \leq \frac{x}{t\log t},$$

donc par intégration

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\log t} \leq F(x) \leq x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\log t}.$$

Sachant que

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\log t} = \Big[\log(\log t)\Big]_x^{x^2} = \log 2,$$

on a donc $x^2 \log 2 \leq F(x) \leq x\log 2$ pour tout $x \in]0,1[$. On en déduit $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \log 2$ et $F(0) = 0$.

Donnons maintenant la valeur de I. La fonction F est dérivable sur $]0,1[$ et on a

$$\forall x \in]0,1[\,, \qquad F'(x) = \frac{2x}{\log(x^2)} - \frac{1}{\log x} = \frac{x-1}{\log x}.$$

Donc

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,dt = \int_0^1 F'(t)\,dt = \lim_{x\to 1^-} F(x) - F(0) = \log 2.$$

Problème 3 (Intégrale de Dirichlet). Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx.$$

Solution. La convergence de l'intégrale est immédiate (en 0, $\log(\sin x) = \log(x + o(x)) = \log x + \log(1+o(1)) \sim \log x$). On ne sait pas exprimer de primitive de l'intégrande de I avec des fonctions usuelles (c'est d'ailleurs là que réside tout l'intérêt de l'exercice).

Pour calculer I, on utilise la formule $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$ qui entraîne

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/2} \log 2\, dx + \int_0^{\pi/2} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^{\pi/2} \log\left(\cos\frac{x}{2}\right) dx \\ = \frac{\pi \log 2}{2} + 2\int_0^{\pi/4} \log(\sin x)\, dx + 2\int_0^{\pi/4} \log(\cos x)\, dx. \qquad (*) \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = \pi/2 - x$ montre que

$$\int_0^{\pi/4} \log(\cos x)\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx.$$

L'assertion (*) s'écrit donc $I = \dfrac{\pi \log 2}{2} + 2I$, donc finalement $I = -\dfrac{\pi\log 2}{2}$.

Remarque. On peut aussi calculer I en l'écrivant sous la forme $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log(1-\cos^2 x)\, dx$ et en développant le logarithme en série au voisinage de 1.

Problème 4. Pour tout $a \in\ ]-1, +\infty[$, calculer

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x}\, dx.$$

Solution. L'intégrande n'admet pas de primitive exprimable avec les fonctions usuelles. L'idée est de dériver F par rapport à a et de remarquer qu'ainsi, on se ramène à une intégrale que l'on sait calculer.

Lorsque $a \in\ ]-1, +\infty[$, l'intégrande est continue sur $[0, \pi/2[$ et elle est prolongeable par continuité en $\pi/2$ car au voisinage de ce point

$$\frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x} = \frac{a\cos x + o(\cos x)}{\cos x} = a + o(1).$$

Ainsi prolongée, la fonction $f :\ (a,x) \mapsto \log(1 + a\cos x)/\cos x$ admet une dérivée partielle par rapport à a qui est continue sur $]-1, +\infty[\ \times [0, \pi/2]$ et qui vaut $(1 + a\cos x)^{-1}$. Le théorème de dérivation sous le signe intégral permet donc d'affirmer que F est dérivable et que

$$\forall a > -1, \qquad F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a\cos x}.$$

On calcule cette dernière intégrale en effectuant le changement de variable $u = \tan(t/2)$, ce qui donne

$$\forall a > -1, \qquad F'(a) = 2\int_0^1 \frac{du}{(1+a) + (1-a)u^2}.$$

On traite ensuite deux cas selon la position de a par rapport à 1.

— Si $a \in\ ]-1, 1[$, on peut écrire $a = \cos 2\theta$ avec $\theta \in\ ]0, \pi/2[$. On a alors

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{du}{\cos^2\theta + u^2 \sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}\int_0^1 \frac{du}{1 + u^2\tan^2\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}\int_0^{\tan\theta} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{2\theta}{\sin 2\theta},$$

et finalement
$$\forall a \in\,]-1,1[, \qquad F'(a) = \frac{\arccos a}{\sqrt{1-a^2}}. \tag{$*$}$$
— Si $a > 1$, on écrit $a = \operatorname{ch} 2\theta$ avec $\theta > 0$, de sorte que
$$F'(a) = \int_0^1 \frac{du}{\operatorname{ch}^2\theta - u^2 \operatorname{sh}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta}\int_0^1 \frac{du}{1-u^2\operatorname{th}^2\theta} = \frac{2}{\operatorname{sh} 2\theta}\int_0^{\operatorname{th}\theta} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{2\theta}{\operatorname{sh} 2\theta}.$$
Donc
$$\forall a > 1, \qquad F'(a) = \frac{\operatorname{argch} a}{\sqrt{a^2-1}}. \tag{$**$}$$
Ceci étant, on tire grâce à (*) que pour $a \in\,]-1,1[$,
$$F(a) = F(0) + \int_0^a F'(x)\,dx = \int_0^a \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[-\frac{(\arccos x)^2}{2}\right]_0^a = \frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arccos a)^2}{2}.$$
La fonction F étant continue en $a = 1$, cette expression permet de montrer que
$$F(1) = \lim_{a\to 1^-} F(a) = \frac{\pi^2}{8}.$$
On a maintenant avec (**)
$$\forall a > 1, \qquad F(a) = F(1) + \int_1^a \frac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{(\operatorname{argch} a)^2}{2}.$$

Remarque. On peut également résoudre cet exercice en utilisant une inversion de sommations dans les intégrales doubles. On écrit
$$\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \int_0^a \frac{dt}{1+t\cos x} \quad \text{donc} \quad F(a) = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a \frac{dt}{1+t\cos x}\right)dx,$$
puis on applique le théorème de Fubini qui nous autorise à inverser les sommations :
$$F(a) = \int_0^a \left(\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+t\cos x}\right)dt,$$
et on poursuit comme plus haut.

Ceci est un fait général : on peut prouver l'interversion de sommation dans les intégrales doubles grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral. Considérons en effet une fonction continue $f:\ [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$. On définit l'application
$$F:\ [c,d] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_a^b \left(\int_c^x f(t,u)\,dt\right)du.$$
En appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on voit que F est dérivable et que
$$\forall x \in [c,d], \qquad F'(x) = \int_a^b f(x,u)\,du.$$
On en déduit
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t,u)\,dt\right)du = F(d) = F(c) + \int_c^d F'(x)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,u)\,du\right)dx.$$

PROBLÈME 5. Soit $f:\ [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, nulle en 0. On pose
$$I_0 = \int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx, \quad I_1 = \int_0^{+\infty} f'(x)^2\,dx, \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} f''(x)^2\,dx.$$
Montrer que si f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, alors $(f')^2$ également et $I_1^2 \le I_0 I_2$.

Solution. Nous allons utiliser l'inégalité de Schwarz. Commençons par montrer la convergence de l'intégrale I_1. On intègre par parties, en écrivant, pour tout $X > 0$,

$$\int_0^X f'(x)^2\,dx = \Big[f(x)f'(x)\Big]_0^X - \int_0^X f(x)f''(x)\,dx = f(X)f'(X) - \int_0^X f(x)f''(x)\,dx. \qquad (*)$$

L'inégalité de Schwarz nous assure que la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que de plus

$$\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)|\,dx \le \left(\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^{+\infty} f''(x)^2\,dx\right)^{1/2} = I_0^{1/2}\,I_2^{1/2}. \qquad (**)$$

L'égalité (*) entraîne donc le fait que $\int_0^X f'(x)^2\,dx - f(X)f'(X)$ converge lorsque $X \to +\infty$. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(x)^2\,dx$ diverge, alors $f(X)f'(X) \to +\infty$ lorsque $X \to +\infty$, donc $f^2(X) = 2\int_0^X f(x)f'(x)\,dx$ tend vers $+\infty$, ce qui est impossible car f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par hypothèse. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(x)^2\,dx$ converge donc, et alors (*) montre que $f(X)f'(X)$ converge lorsque $X \to +\infty$. Notons $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x)$. Si $\ell \neq 0$, on a d'après le théorème 3 page 163 (dernière assertion de (i)),

$$f^2(X) = 2\int_0^X f(x)f'(x)\,dx \sim 2\ell X \qquad (X \to +\infty),$$

ce qui est impossible car f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Finalement, on a $f(X)f'(X) \to 0$ lorsque $X \to +\infty$. En faisant $X \to +\infty$ dans (*), on obtient

$$\int_0^{+\infty} f'(x)^2\,dx = -\int_0^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx,$$

d'où le résultat avec (**).

Problème 6. Soit une fonction $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)|\,dt.$$

a) Montrer que $\lim_{a\to 0} I(a) = 0$.
b) Montrer l'existence et donner la valeur de $\lim_{a\to+\infty} I(a)$.

Solution. **a)** On ne peut pas ici appliquer le théorème de convergence dominée car il est impossible d'obtenir une majoration du type $|f(t+a) - f(t)| \le \varphi(t)$ indépendamment de a. Pour contourner le problème, on se donne $\varepsilon > 0$ et on considère $A > 0$ tel que

$$\int_{|t|\ge A} |f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\,dt + \int_A^{+\infty} |f(t)|\,dt < \varepsilon.$$

On pose $B = A + 1$. Pour tout nombre réel a tel que $|a| < 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{|t|\ge B} |f(t+a) - f(t)|\,dt &\le \int_{|t|\ge B} |f(t+a)|\,dt + \int_{|t|\ge B} |f(t)|\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{-B+a} |f(t)|\,dt + \int_{B+a}^{+\infty} |f(t)|\,dt + \int_{|t|\ge B} |f(t)|\,dt \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

car $-B + a < -A$ et $B + a > A$. Ceci entraîne

$$I(a) = \int_{|t|\le B} |f(t+a)-f(t)|\,dt + \int_{|t|\ge B} |f(t+a)-f(t)|\,dt \le \int_{-B}^{B} |f(t+a)-f(t)|\,dt + 2\varepsilon. \qquad (*)$$

Lorsque $a \to 0$, l'intégrale $\int_{-B}^{B} |f(t+a) - f(t)|\, dt$ tend vers 0 car le domaine d'intégration est un segment de $\mathbb{R}$ et la fonction $|f(t+a) - f(t)|$ est continue par rapport à a et nulle lorsque $a = 0$. Ainsi

$$\exists \alpha > 0, (\alpha < 1), \forall a \in [-\alpha, \alpha], \qquad \int_{-B}^{B} |f(t+a) - f(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Avec l'inégalité (*) ceci entraîne $\forall a \in [-\alpha, \alpha]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)|\, dt \leq 3\varepsilon$, d'où le résultat.

b) Lorsque f est une fonction à support compact (*i. e.* nulle en dehors d'un compact) on voit facilement que la limite recherchée existe et vaut $2\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$. C'est ce que nous allons prouver dans le cas général.

On commence par symétriser le problème. Le changement de variable $u = t + a/2$ montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(u + \frac{a}{2}\right) - f\left(u - \frac{a}{2}\right)\right|\, du$ Ainsi, on est ramené à prouver l'existence et donner la valeur de

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t-a)|\, dt. \qquad (**)$$

On note f_a la fonction $t \mapsto f(t+a)$. On va montrer que la contribution de l'intégrale précédente pour $t \geq 0$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} |f|$. On écrit, pour $a > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^+} |f_a - f_{-a}| - \int_{\mathbb{R}} |f| = \int_{\mathbb{R}^+} |f_a - f_{-a}| - \int_{\mathbb{R}} |f_{-a}| = \int_{\mathbb{R}^+} (|f_a - f_{-a}| - |f_{-a}|) + \int_{\mathbb{R}^-} |f_{-a}|.$$

Avec l'inégalité $\big||f_a - f_{-a}| - |f_{-a}|\big| \leq |f_a|$ on en déduit

$$\left| \int_{\mathbb{R}^+} |f_a - f_{-a}| - \int_{\mathbb{R}} |f| \right| \leq \int_{\mathbb{R}^+} |f_a| + \int_{\mathbb{R}^-} |f_{-a}| = \int_{|t| \geq a} |f(t)|\, dt.$$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, ceci entraîne que $\int_{\mathbb{R}^+} |f_a - f_{-a}|$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} |f|$. On montrerait de même que $\int_{\mathbb{R}^-} |f_a - f_{-a}|$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} |f|$, et par sommation on a finalement démontré que (**) converge vers $2\int_{\mathbb{R}} |f|$ lorsque $a \to +\infty$.

PROBLÈME 7. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$, telle que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Solution. Nous allons montrer que f tend vers 0 en $+\infty$, ce qui montrera le résultat. D'après le théorème 4 page 152, comme $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, il suffit de montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soient deux nombres réels x et y tels que $0 \leq x < y$. L'inégalité de Schwarz entraîne

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t)\, dt \right| \leq \left(\int_x^y \left(f'(t)\right)^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_x^y 1\, dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^+} (f')^2 \right) \sqrt{y - x}.$$

Ceci entraîne que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

PROBLÈME 8. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. On suppose que la fonction

$$F : [1, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$$

vérifie $F(x) \sim x$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que $f(x) \sim x$ lorsque $x \to +\infty$.

Solution. Soit $\delta \in]0, 1[$. D'après les hypothèses,

$$\exists x_0 > 1, \forall x \geq x_0, \qquad (1 - \delta)x \leq \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt \leq (1 + \delta)x.$$

Ceci entraîne pour tout $\varepsilon \in \,]0,1[$

$$\forall x \geq x_1, \qquad \int_x^{x+\varepsilon x} \frac{f(t)}{t}\,dt \leq (1+\delta)(1+\varepsilon)x - (1-\delta)x = (\varepsilon + 2\delta + \delta\varepsilon)x,$$

et comme f est croissante

$$\forall x \geq x_1, \qquad \varepsilon x\,\frac{f(x)}{x(1+\varepsilon)} \leq \int_x^{x+\varepsilon x} \frac{f(t)}{t}\,dt \leq (\varepsilon + 2\delta + \delta\varepsilon)x \quad \text{donc} \quad f(x) \leq \frac{\varepsilon + 2\delta + \delta\varepsilon}{\varepsilon}(1+\varepsilon)x.$$

En choisissant $\varepsilon = \sqrt{\delta}$, on en déduit

$$\forall x \geq x_1, \qquad f(x) \leq (1 + 2\sqrt{\delta} + \delta)(1+\sqrt{\delta})x = (1+\sqrt{\delta})^3 x.$$

En d'autres termes, nous venons de montrer

$$\forall \alpha > 0, \exists x_1 > 1, \forall x \geq x_1, \qquad f(x) \leq x(1+\alpha).$$

On montrerait de même

$$\forall \alpha > 0, \exists x_2 > 1, \forall x \geq x_2, \qquad f(x) \geq x(1-\alpha).$$

On en déduit $f(x) \sim x$ lorsque $x \to +\infty$.

Problème 9. On désigne par E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $f \in E$, on note

$$I(f) = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{dt}{f(t)}\right)$$

et on note $\Gamma = I(E) = \{I(f),\ f \in E\}$.
a) Déterminer $m = \inf \Gamma$. Pour quelles fonctions de E a-t-on $I(f) = m$?
b) Déterminer $\sup \Gamma$.

Solution. **a)** Soit $f \in E$. D'après l'inégalité de Schwarz

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\,\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{dt}{f(t)}\right) = I(f), \tag{$*$}$$

ce qui montre que $I(f) \geq 1$. L'image de la fonction constante égale à 1 par I est égal à 1, on a donc $m = 1$. Les fonctions f de E étant continues, l'inégalité de Schwarz (*) se produira si et seulement si $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$ sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si

$$\exists \lambda > 0, \forall x \in [0,1], \qquad \sqrt{f(x)} = \frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}} \quad \text{ou encore} \quad f(x) = \lambda.$$

Les fonctions f telles que $I(f) = 1$ sont donc les fonctions constantes de E.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est possible de construire une fonction f_n de E telle que

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \qquad f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \qquad f(x) = n$$

(on peut prendre par exemple une fonction définie comme telle sur $[0,1/3] \cup [2/3,1]$ et affine sur $[1/3, 2/3]$). On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I(f_n) \geq \frac{n}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{9},$$

donc $\sup \Gamma = +\infty$.

Remarque. On peut également traiter la question a) en écrivant

$$2I(f) = \iint_{[0,1]^2} \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right) dx\,dy,$$

(on obtient cette expression en appliquant le théorème de Fubini) puis en remarquant que $f(x)/f(y)+f(y)/f(x) \geq 2$ (en posant $\alpha = f(x)/f(y)$, on a $\alpha+1/\alpha = 2+(\alpha-1)^2/\alpha \geq 2$).

PROBLÈME 10. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, on pose

$$I(\rho) = \int_0^\pi \log(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\, d\theta.$$

a) Comparer $I(\rho)$ et $I(\rho^2)$. En déduire la valeur de $I(\rho)$.
b) Retrouver la valeur de $I(\rho)$ en utilisant les sommes de Riemann.

Solution. L'égalité $1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2 = (1-\rho\cos\theta)^2 + \rho^2\sin^2\theta = |1-\rho e^{i\theta}|^2$ montre que $I(\rho)$ existe pour tout $\rho \notin \{-1,1\}$.

a) Le changement de variable $\psi = \pi - \theta$ montre que la fonction $\rho \mapsto I(\rho)$ est paire. Donc si $\rho \notin \{-1,1\}$,

$$2I(\rho) = I(\rho) + I(-\rho) = \int_0^\pi \log\left(|1-\rho e^{i\theta}|^2 |1+\rho e^{i\theta}|^2\right) d\theta.$$

Comme $(1-\rho e^{i\theta})(1+\rho e^{i\theta}) = 1 - \rho^2 e^{2i\theta}$ ceci entraîne

$$2I(\rho) = \int_0^\pi \log(|1-\rho^2 e^{2i\theta}|^2)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log(|1-\rho^2 e^{i\theta}|^2)\, d\theta.$$

Le changement de variable $\varphi = \theta - \pi$ donne

$$\int_\pi^{2\pi} \log(|1-\rho^2 e^{i\theta}|^2)\, d\theta = \int_0^\pi \log(|1+\rho^2 e^{i\varphi}|)\, d\varphi = I(-\rho^2) = I(\rho^2),$$

on a donc montré $2I(\rho) = \frac{1}{2}(I(\rho^2) + I(\rho^2)) = I(\rho^2)$. On en conclut facilement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I(\rho) = \frac{1}{2^n} I\left(\rho^{2^n}\right). \qquad (*)$$

— Si $|\rho| < 1$, la continuité de I en 0 entraîne $I(\rho) = 0$ (il suffit de faire $n \to +\infty$ dans (*)).
— Si $|\rho| > 1$, c'est un peu plus délicat. On commence par montrer $I(\rho) \sim 2\pi\log\rho$ lorsque $\rho \to +\infty$. On a

$$\forall\theta \in [0,\pi], \qquad \rho^2\left(1 - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right) \leq 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2 \leq \rho^2\left(1 + \frac{2}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)$$

donc par intégration

$$2\pi\log\rho + \pi\log\left(1 - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right) \leq I(\rho) \leq 2\pi\log\rho + \pi\log\left(1 + \frac{2}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right),$$

ce qui entraîne bien $I(\rho) \sim 2\pi\log\rho$ lorsque $\rho \to +\infty$. En particulier, si on fixe $\rho > 1$, on a, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$

$$I(\rho^{2^n}) \sim 2^{n+1}\pi\log\rho,$$

et on en déduit en faisant tendre n vers l'infini dans (*) que $I(\rho) = 2\pi\log\rho$. Si $\rho < -1$, on a $I(\rho) = I(-\rho)$. Finalement, on a montré

$$\forall\rho \in \mathbb{R}, |\rho| > 1, \qquad I(\rho) = 2\pi\log|\rho|.$$

b) Soit $\rho \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. En appliquant le théorème sur les sommes de Riemann, on a

$$I(\rho) = \lim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{\pi}{n}\log\left[\prod_{k=1}^n \left(1 - 2\rho\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \rho^2\right)\right].$$

Or

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \rho^2 - 2\rho\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 = (\rho - \omega_k)(\rho - \omega_{-k}), \qquad (\omega_k = e^{ik\pi/n}),$$

et comme $\prod_{k=-n}^{n-1}(X-\omega_k) = X^{2n}-1$ (les $2n$ nombres complexes ω_k pour $-n \leq k < n$ sont des racines distinctes du polynôme $X^{2n}-1$), on en déduit

$$\prod_{k=1}^{n}(\rho-\omega_k)(\rho-\omega_{-k}) = \left(\prod_{k=-n}^{n-1}(\rho-\omega_k)\right)\frac{\rho-\omega_n}{\rho-\omega_0} = (\rho^{2n}-1)\,\frac{\rho+1}{\rho-1}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{\pi}{n}\log\left(\frac{(\rho^{2n}-1)(\rho+1)}{\rho-1}\right). \tag{$**$}$$

— Si $|\rho| < 1$, on a facilement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après (**), donc $I(\rho) = 0$.

— Si $|\rho| > 1$, on transforme (**) en

$$u_n = 2\pi\log|\rho| + \frac{\pi}{n}\log\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\left(1-\frac{1}{\rho^{2n}}\right)\right),$$

ce qui entraîne $I(\rho) = \lim_{n\to+\infty} u_n = 2\pi\log|\rho|$.

Remarque. On peut montrer que les intégrales $I(1)$ et $I(-1)$ existent et qu'elles sont nulles.

Problème 11. **a)** Soit $f :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que

$$\lim_{\substack{q\to 1\\ q<1}} I(q) = \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{où} \quad \forall q \in\ ]0,1[, \quad I(q) = (1-q)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n).$$

b) En utilisant le résultat de la question précédente, calculer

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,dt.$$

Solution. **a)** Pour tout $q \in\ ]0,1[$, $I(q)$ est bien définie car f est bornée et on peut écrire

$$I(q) = \sum_{n=0}^{+\infty}(q^n - q^{n+1})f(q^n).$$

Cette expression peut s'apparenter à une somme de Riemann infinie pour la subdivision infinie $1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$. Le théorème 7 page 128 sur les sommes de Riemann ne s'applique que pour des subdivisions finies, nous allons donc nous y ramener. Soit $\varepsilon > 0$ On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma :\ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0,1]$ vérifiant $|\sigma| < \alpha$, on ait

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Soit q tel que $1-\alpha < q < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^N < \alpha$. Pour tout $n \geq N$, la subdivision

$$\sigma_n :\ 0 < q^n < q^{n-1} < \cdots < q < 1$$

vérifie $|\sigma_n| < \alpha$ (on a $q^i - q^{i+1} = q^i(1-q) \leq 1-q < \alpha$ pour tout i et $q^n - 0 \leq q^N < \alpha$), donc

$$\left|(1-q)f(1) + (q-q^2)f(q) + \cdots + (q^{n-1}-q^n)f(q^{n-1}) + (q^n - 0)f(q^n) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $n \geq N$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit

$$\left|\sum_{i=0}^{+\infty}(q^i - q^{i+1})f(q^i) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout q vérifiant $1-\alpha < q < 1$, on a $|I(q) - \int_0^1 f(t)\,dt| \leq \varepsilon$. D'où le résultat.

b) Ici, la valeur correspondante de $I(q)$ pour la fonction intégrée est

$$\forall q \in \,]0,1[, \qquad I(q) = (1-q)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \frac{q^n-1}{n\log q} = \frac{q-1}{\log q}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^n}{n} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{2n}}{n}\right),$$

et le développement en série entière du logarithme fournit

$$\forall q \in \,]0,1[, \qquad I(q) = \frac{q-1}{\log q}\big(-\log(1-q) + \log(1-q^2)\big) = \frac{q-1}{\log q}\log(1+q).$$

Comme $\log q \sim q-1$ lorsque $q \to 1$, cette formule entraîne $\lim_{q\to 1^-} I(q) = \log 2$, et finalement on a $\int_0^1 (t-1)/\log t \, dt = \log 2$ d'après la question précédente.

Remarque. La valeur de cette dernière intégrale est calculée avec une méthode différente dans le problème 2 page 177.

Problème 12 (Preuve du théorème de d'Alembert). **1/** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs complexes, 2π-périodique et ne s'annulant pas. On définit

$$I(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\, d\theta.$$

En s'appuyant sur la fonction $\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\, d\theta\right)$, montrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.

2/ Soit P un polynôme complexe non constant. Pour tout $r > 0$. On pose $f_{P,r}(t) = P(re^{it})$.
a) (Théorème de d'Alembert). Pour P fixé, en étudiant la fonction $r \mapsto I(f_{P,r})$ pour $r > 0$, prouver que P a au moins une racine complexe.
b) Calculer la valeur de $I(f_{P,r})$ en fonction de r et des zéros de P.

Solution. **1/** La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et elle vérifie $\varphi'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}\varphi(t)$, elle est donc solution de l'équation différentielle $y' - \frac{f'}{f}y = 0$. Comme f est solution de cette équation différentielle et que l'espace de ses solutions est de dimension 1, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \lambda f$. Comme f est 2π-périodique c'est aussi le cas de φ, en particulier $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$ ce qui entraîne $\int_0^{2\pi} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\, d\theta \in 2i\pi\mathbb{Z}$ donc $I(f) \in \mathbb{Z}$.

2/a) Raisonnons par l'absurde et supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Alors la fonction

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, \qquad r \mapsto I(f_{P,r}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})re^{i\theta}}{P(re^{i\theta})}\, d\theta \tag{$*$}$$

est définie sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. En vertu de la continuité de la fonction intégrée par rapport à r, le théorème de continuité sous le signe intégral montre que g est continue. Hors elle est à valeur dans $\mathbb{Z}$ d'après le résultat de la question précédente, elle est donc constante. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est identiquement nulle. Regardons maintenant ce qui se passe lorsque $r \to +\infty$. Soit n le degré de P et a son coefficient dominant. Lorsque $|z| \to +\infty$, on a $P(z) \sim az^n$ et $P'(z) \sim naz^{n-1}$, donc $zP'(z)/P(z)$ converge vers n. Ainsi, lorsque $r \to +\infty$, l'intégrande de (*) converge vers n. De plus cette intégrale est bornée indépendamment de r (car $zP'(z)/P(z)$ a une limite finie lorsque $|z| \to +\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{C}$), donc d'après le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\lim_{r\to+\infty}\frac{P'(re^{i\theta})re^{i\theta}}{P(re^{i\theta})}\right)d\theta = n,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que g est identiquement nulle. Ainsi, le polynôme complexe P doit nécéssairement s'annuler sur $\mathbb{C}$.

b) Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les zéros de P, éventuellement avec leur multiplicité, de sorte que $P(z) = a(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$. On a

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z}{z-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{zP_k'(z)}{P_k(z)}, \qquad \text{où} \qquad P_k(z) = z - \alpha_k. \tag{$**$}$$

Si aucune racine de P ne se trouve sur le cercle $|z| = r$, la valeur $I(f_{P,r})$ est bien définie et l'identité (**) montre que $I(f_{P,r}) = \sum_{k=1}^{n} I(f_{P_k,r})$. De la même manière que ce que l'on a vu pour P précédemment, pour tout k, la valeur $r \mapsto I(f_{P_k,r})$ est une fonction continue de r sur les intervalles où elle est définie, donc sur l'intervalle $[0, |\alpha_k|[$ et sur l'intervalle $]|\alpha_k|, +\infty[$. De plus elle est à valeur dans $\mathbb{Z}$, donc constante sur chacun de ces intervalles. En particulier, si $r < |\alpha_k|$ on a $I(f_{P_k,r}) = I(f_{P_k,0}) = 0$, et si $r > |\alpha_k|$, alors de la même manière que précédemment on a $I(f_{P_k,r}) = \lim_{t\to+\infty} I(f_{P_k,t}) = \deg(P_k) = 1$. En conclusion, la valeur $I(f_{P,r})$ est définie lorsque qu'aucune des racines de P n'est sur le cercle $|z| = r$, et égale au nombre de racines de P (comptées avec leur ordre du multiplicité) dans le disque $|z| < r$.

Remarque. - La valeur $I(f)$ est appelée *indice de la courbe* f sur $[0, 2\pi]$. On peut montrer (c'est une conséquence du *théorème du relèvement*) qu'on peut écrire $f(\theta) = \rho(\theta)e^{i\varphi(\theta)}$, où $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\rho = |f|$ et φ représente l'argument de f obtenu par continuité. Comme f est 2π-périodique, $\varphi(0) \equiv \varphi(2\pi) \pmod{2\pi}$ donc $\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On peut montrer facilement que $k = I(f)$; ainsi $I(f)$ représente le nombre de tours autour de 0, effectués dans le sens trigonométrique, que fait la courbe fermée f restreinte à $[0, 2\pi]$.

– Le calcul de l'intégrale correspondant à $I(f_{P_k,r})$ peut aussi se faire directement, à partir d'une primitive de l'intégrande ou en la développant en série. La méthode que nous avons présentée est plus élégante dans le cadre du problème.

– Deux autres preuves du théorème de d'Alembert (encore appelé *théorème fondamental de l'algèbre*) sont proposées dans le tome Algèbre.

PROBLÈME 13. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+t) - f(x)}{t^2}\,dt$ converge.

Solution. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \neq 0$, l'équivalent $(f(x+t) - f(x))/t^2 \sim_{t\to 0} f'(x)/t$ montre que cette fonction ne serait pas intégrable sur $[0, 1]$, ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi, si f est dérivable, sa dérivée s'annule sur $\mathbb{R}$ donc f est nécéssairement une fonction constante.

Montrons que ce résultat reste vrai si f est seulement supposée continue. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons f non constante. L'idée est de déterminer un x tel que au voisinage de $t = 0^+$, on puisse écrire $|f(x+t) - f(x)| \geq \alpha t$ avec $\alpha > 0$. Comme f est non constante, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tels que $f(a) \neq f(b)$. Quitte à considérer la fonction $f - f(a)$, on peut supposer $f(a) = 0$. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(b) > 0$. Quitte à considérer $t \mapsto f(a + (b-a)t)$ on peut supposer que $a = 0$ et $b = 1$. En résumé, on peut supposer que $0 = f(0) < f(1)$. Considérons la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto f(1)/3 + tf(1)/3$, et notons $A = \{t \in [0, 1] \mid f(t) \leq \varphi(t)\}$. L'ensemble A est non vide puisque $0 = f(0) < \varphi(0) = f(1)/3$, donc $0 \in A$. Par ailleurs $1 \notin A$ car $f(1) > \varphi(1) = 2f(1)/3$. On peut donc définir $c = \sup A$, et on a $c < 1$ par continuité de f et φ. Comme A est fermé on a $c \in A$ donc $f(c) \leq \varphi(c)$. Si on avait $f(c) < \varphi(c)$, alors par continuité de f et φ on pourrait trouver $d \in]c, 1]$ tel que $f(d) < \varphi(d)$, ce qui est en contradiction avec la définition de c. Donc $f(c) = \varphi(c)$. De plus, par définition de c on a $f(t) > \varphi(t)$ pour tout $t \in]c, 1]$. On en déduit que

$$\forall t \in]c, 1], \qquad f(t) - f(c) > \varphi(t) - \varphi(c) = (t-c)f(1)/3.$$

Ainsi on a $[f(c+t)-f(c)]/t^2 > \alpha/t$ pour $t \in]0,1-c]$ avec $\alpha = f(1)/3 > 0$, donc l'intégrale $\int_0^1 [f(c+t)-f(c)]/t^2\,dt$ diverge. Ceci est contraire aux hypothèses, on en déduit que f est une fonction constante.

Réciproquement, il est évident que toute fonction constante f vérifie les propriétés de l'énoncé.

PROBLÈME 14. Soit f une application définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Calculer

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \left(\int_0^1 f^\alpha(t)\,dt\right)^{1/\alpha}.$$

Solution. On note

$$F:\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R} \quad \alpha \mapsto \int_0^1 f^\alpha(t)\,dt.$$

La fonction $\varphi:\ \mathbb{R}^+ \times [0,1] \to \mathbb{R} \quad (\alpha,t) \mapsto f^\alpha(t)$ est continue, dérivable par rapport à α et

$$\forall (\alpha,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1], \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha,t) = \log f(t) \cdot f^\alpha(t)$$

est continue sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$. Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall \alpha \geq 0, \qquad F'(\alpha) = \int_0^1 \log f(t) \cdot f^\alpha(t)\,dt, \quad \text{en particulier} \quad F'(0) = \int_0^1 \log f(t)\,dt.$$

Or $F(0) = 1$, donc lorsque $\alpha \to 0^+$,

$$F(\alpha)^{1/\alpha} = \exp\left(\frac{\log F(\alpha)}{\alpha}\right) = \exp\left(\frac{\log(1+\alpha F'(0)+o(\alpha))}{\alpha}\right) = \exp(F'(0)+o(1)).$$

Finalement, la limite recherchée vaut

$$\exp(F'(0)) = \exp\left(\int_0^1 \log f(t)\,dt\right).$$

Remarque. On a déjà calculé la limite de la même fonction lorsque le paramètre α tend vers $+\infty$ (voir l'exercice 2 page 130).

PROBLÈME 15 (IRRATIONALITÉ DE π^2). **a)** Soit $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme à coefficients entiers. On considère la fonction polynôme

$$h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x^n g(x)}{n!}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $h^{(k)}(0)$ est entier.
b) On suppose que π^2 est rationnel, de sorte qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi^2 = a/b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$I_n = \pi\, a^n \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x)\,dx, \quad \text{où} \quad f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Montrer que I_n est un entier. Conclure.

Solution. **a)** Écrivons $g(x) = \sum_{k=0}^p a_k\, x^k$. On a

$$h(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^p a_k\, x^{k+n}, \qquad (a_k \in \mathbb{Z}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\text{- si } 0 \le k \le n-1, && h^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}\\
&\text{- si } n \le k \le n+p, && h^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}\, a_{k-n} = k(k-1)\cdots(n+1)\, a_{k-n} \in \mathbb{Z}\\
&\text{- si } n+p < k, && h^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

b) En intégrant deux fois par parties, on trouve

$$\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{f_n(1) - f_n(0)}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f_n''(x)\sin(\pi x)\,dx,$$

puis en itérant, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{f_n(1)-f_n(0)}{\pi} - \frac{f_n''(1)-f_n''(0)}{\pi^3} + \cdots\\
\cdots + (-1)^n \frac{f_n^{(2n)}(1) - f_n^{(2n)}(0)}{\pi^{2n+1}} + (-1)^{n+1}\int_0^1 f_n^{(2n+2)}(x)\sin(\pi x)\,dx.
\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est nulle car f_n est une fonction polynôme de degré $2n$, donc finalement

$$I_n = a^n\left(f_n(1) - f_n(0) - \frac{f_n''(1)-f_n''(0)}{\pi^2} + \cdots + (-1)^n\frac{f_n^{(2n)}(1)-f_n^{(2n)}(0)}{\pi^{2n}}\right).$$

D'après le résultat de la question a), on a $f_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier k, et comme $f_n(1-x) = f_n(x)$ on a aussi $f_n^{(2k)}(1) \in \mathbb{Z}$. Ceci entraîne, pour tout entier k, $0 \le k \le n$

$$a^n\,\frac{f_n^{(2k)}(1) - f_n^{(2k)}(0)}{\pi^{2k}} = a^n\,\frac{b^k}{a^k}\left(f_n^{(2k)}(1) - f_n^{(2k)}(0)\right) = a^{n-k}b^k\left(f_n^{(2k)}(1) - f_n^{(2k)}(0)\right) \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $I_n \in \mathbb{Z}$. Or $0 < I_n < \pi a^n/n!$ et comme $a^n/n!$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (c'est classique, on sait même que la série entière $\sum z^n/n!$ a un rayon de convergence infini), il existe un entier n pour lequel $\pi a^n/n! < 1$. Ceci entraîne $0 < I_n < 1$, ce qui est impossible puisqu'on a montré que I_n était entier.

Le nombre réel π^2 est donc irrationnel (ce qui entraîne que π est irrationnel).

Remarque. On peut montrer que π est transcendant (voir une preuve dans le tome Algèbre), mais c'est beaucoup plus difficile.

Problème 16 (Moyenne arithmético-géométrique). Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

1/ On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

2/a) On note $M(a,b)$ la limite commune des ces deux suites (on l'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*). Montrer que

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a,b)} = T(a,b), \quad \text{où} \quad T(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \tag{$*$}$$

(on pourra montrer que $T(a,b) = T((a+b)/2, \sqrt{ab})$ en effectuant le changement de variable $t = b\tan\theta$ puis le changement de variable $u = \frac{1}{2}(t - ab/t)$).

b) (*Constante de Gauss.*) Montrer que

$$\frac{1}{M(\sqrt{2},1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Solution. **1/** Il est commode de supposer que $a \geq b$, on se ramène facilement à ce cas car les valeurs de u_1 et v_1 ne changent pas si on intervertit a et b. Une récurrence immédiate montre que toutes les valeurs des termes des suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives. On remarque ensuite que $v_n \leq u_n$: pour $n = 0$ c'est vrai car $a \geq b$, et lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ ceci découle de

$$u_n - v_n = \frac{1}{2}\big(u_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} + v_{n-1}\big) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}}\big)^2 \geq 0.$$

La suite (u_n) décroît, la suite (v_n) croît, car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \geq 1.$$

Finalement, nous avons montré

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_0 \leq v_1 \leq \cdots \leq v_n \leq u_n \leq \cdots \leq u_1 \leq u_0.$$

La suite décroissante (u_n) est minorée par l'un quelconque des termes de (v_n), elle est donc convergente. De même, (v_n) est croissante et majorée par l'un quelconque des termes de (u_n), donc convergente. Enfin, on montre facilement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n - v_n \leq (a-b)/2^n. \tag{$**$}$$

En effet, ceci est vrai pour $n = 0$, et si on suppose la propriété vraie pour n on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}\big(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\big)^2 = \frac{1}{2}\frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}\big(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\big) \leq \frac{u_n - v_n}{2}.$$

L'encadrement (**) prouve que les limites de (u_n) et (v_n) sont égales. Nous aurions pu montrer l'égalité des limites en procédant par continuité : en notant U et V les limites respectives de (u_n) et (v_n), on a par continuité $U = (U+V)/2$ et $V = \sqrt{UV}$, donc $U = V$. Néanmoins (**) est plus intéréssant car il indique une convergence rapide de (u_n) et (v_n) vers leur limite commune. Notons que nous avons prouvé que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

2/a) Comme indiqué, on effectue d'abord le changement de variable $t = b\tan\theta$. On obtient

$$T(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}. \tag{$***$}$$

On effectue maintenant le changement de variable $u = (t - ab/t)/2$. Les calculs ne sont pas si faciles à obtenir. En notant $c = (a+b)/2$ et $d = \sqrt{ab}$, on écrit

$$\begin{aligned} u^2 + c^2 &= \frac{(t^2-ab)^2}{4t^2} + \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{t^4 + (a^2+b^2)t^2 + a^2b^2}{4t^2} = \frac{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}{4t^2} \\ u^2 + d^2 &= \frac{(t^2-ab)^2}{4t^2} + \big(\sqrt{ab}\big)^2 = \frac{t^4 + 2abt^2 + a^2b^2}{4t^2} = \frac{(t^2+ab)^2}{4t^2}. \end{aligned}$$

Comme $du = (t^2+ab)/(2t^2)\,dt$, on en déduit

$$T(c,d) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2+c^2)(u^2+d^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{4t^2}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}\frac{1}{t^2+ab}\frac{t^2+ab}{2t^2}\,dt,$$

la première égalité provenant de la parité de la fonction intégrée. Dans la dernière intégrale, après simplification, on reconnait l'intégrande de l'intégrale (***), on en déduit $T(c,d) = T(a,b)$.

Prouvons maintenant l'identité (*). L'égalité $T(a,b) = T(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab})$, entraîne $T(u_n, v_n) = T(u_{n+1}, v_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $T(a,b) = T(u_0, v_0) = T(u_n, v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction $T(a,b)$ est l'intégrale d'une fonction continue en (a,b), intégrée sur le segment $[0, \pi/2]$, elle est donc continue en (a,b). On peut maintenant passer à la limite dans l'égalité $T(a,b) = T(u_n, v_n)$, ce qui donne $T(a,b) = T(M(a,b), M(a,b))$. On en déduit le résultat car

$$T(M(a,b), M(a,b)) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{M(a,b)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{M(a,b)}.$$

b) En effectuant le changement de variable $t = \cos\theta$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta + \sin^2\theta}}.$$

La dernière intégrale est $T(\sqrt{2}, 1)$, on en déduit le résultat grâce à l'identité (*).

Remarque. L'identité (*) a été prouvée par Gauss. L'intégrale de (*) se ramène à *l'intégrale elliptique de première espèce* $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\theta)^{-1/2}\, d\theta = T(1, \sqrt{1-k^2})$.

- La valeur $G = 1/M(\sqrt{2}, 1)$ est appelée *constante de Gauss*. L'intégrale $\int_0^1 dt/\sqrt{1-t^4}$ correspond à la longueur d'un arc de *lemniscate* qui est la courbe définie par l'équation $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$. Les suites (u_n) et (v_n) convergent très rapidement (la convergence est quadratique, dans le cas de $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$ on a $|M(a,b) - u_n| \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n}$), et Gauss calcula les premières valeurs de (u_n) et (v_n) pour obtenir 11 décimales de G.

- Ces résultats obtenus par Gauss ont introduit la théorie des intégrales et des fonctions elliptiques, qui joue un rôle important en théorie des nombres.

Problème 17. On considère, pour $\beta > 0$ l'intégrale

$$I_\beta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que la fonction $x \mapsto I_\beta(x)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie

$$I_\beta(x) - I''_\beta(x) = \frac{\beta}{\beta^2 + x^2}.$$

b) Démontrer l'identité

$$I_\beta(x) = \frac{e^x F_\beta(x) + e^{-x} F_\beta(-x)}{2}, \quad \text{avec} \quad F_\beta(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\beta e^{-t}}{\beta^2 + t^2}\, dt.$$

c) En déduire les valeurs

$$C(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}, \qquad S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\, dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\frac{\pi}{2} e^{x} & (x < 0) \end{cases}$$

Solution. **a)** $I_\beta(x)$ est bien définie car son intégrande est majorée en valeur absolue par $e^{-\beta t}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Notons $f(x,t)$ l'intégrande de $I_\beta(x)$. Sa dérivée partielle par rapport à x est $\partial f/\partial x = -t\sin(xt)/(1+t^2) e^{-\beta t}$, donc $|\partial f/\partial x|$ est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-\beta t}$, donc I_β est bien dérivable et

$$I'_\beta(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t}\, dt.$$

On montre de même que I'_β est dérivable et que

$$I''_\beta(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t}\,dt.$$

La relation souhaitée s'obtient maintenant facilement :

$$I_\beta(x) - I''_\beta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t}\,dt = \int_0^{+\infty} \Re(e^{(ix-\beta)t})\,dt = \Re\left(\frac{1}{\beta - ix}\right) = \frac{\beta}{\beta^2+x^2}.$$

b) Notons $J_\beta(x) = \frac{1}{2}(e^x F_\beta(x) + e^{-x}F_\beta(-x))$. Nous allons montrer que J_β vérifie la même équation différentielle que I_β. Partant de l'égalité

$$e^x F'_\beta(x) = -\frac{\beta}{\beta^2+x^2}$$

(qui entraîne en particulier que $e^x F'_\beta(x)$ est paire) on obtient par dérivations successives

$$\begin{aligned} 2J'_\beta(x) &= e^x F_\beta(x) - e^{-x}F_\beta(-x) + e^x F'_\beta(x) - e^{-x}F'_\beta(-x) = e^x F_\beta(x) - e^{-x}F_\beta(-x), \\ 2J''_\beta(x) &= e^x F_\beta(x) + e^{-x}F_\beta(-x) + e^x F'_\beta(x) + e^{-x}F'_\beta(-x) = 2J_\beta(x) - \frac{2\beta}{\beta^2+x^2}. \end{aligned}$$

En divisant par 2 cette dernière égalité, on voit que J_β est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire vérifiée par I_β. La différence $K_\beta = I_\beta - J_\beta$ vérifie l'équation linéaire d'ordre deux $K''_\beta - K_\beta = 0$, donc $K_\beta(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a

$$I_\beta(x) = J_\beta(x) + K_\beta(x) = J_\beta(x) + \lambda e^x + \mu e^{-x}.$$

Or les fonctions $I_\beta(x)$ et $J_\beta(x)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ (on a $|I_\beta(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,dt$ et $|e^x F_\beta(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \beta/(\beta^2+t^2)\,dt$), on a donc forcément $\lambda = \mu = 0$ d'où le résultat.

c) Il est immédiat que I_β est également définie pour $\beta = 0$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction

$$f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad (\beta,t) \mapsto \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,e^{-\beta t}$$

est continue et $|f(\beta,\cdot)|$ est majorée par la fonction intégrable $t \mapsto 1/(1+t^2)$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée, ce qui montre que la fonction $\beta \mapsto I_\beta(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier

$$C(x) = I_0(x) = \lim_{\substack{\beta\to 0\\ \beta>0}} I_\beta(x).$$

Utilisons maintenant l'expression de I_β obtenue à la question précédente, en faisant tendre β vers 0 en considérant la suite $(1/n)_{n>0}$. Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ un changement de variable donne

$$F_{1/n}(x) = \int_{nx}^{+\infty} \frac{e^{-t/n}}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt, \qquad f_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}/(1+t^2) & \text{si } t \geq nx, \\ 0 & \text{si } t < nx. \end{cases}$$

On a la majoration $|f_n(t)| \leq e^{-x}/(1+t^2)$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x > 0$, la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, et lorsque $x < 0$, (f_n) converge simplement vers $t \mapsto 1/(1+t^2)$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to\infty} F_{1/n}(x) = 0 \quad (x>0), \qquad \lim_{n\to\infty} F_{1/n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi \quad (x<0).$$

A partir de la relation établie dans la question précédente, on en déduit lorsque $x > 0$

$$C(x) = \lim_{n\to\infty} I_{1/n}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x \lim_{n\to\infty} F_{1/n}(x) + e^{-x}\lim_{n\to\infty} F_{1/n}(-x)\right) = \frac{\pi}{2}e^{-x}.$$

Par parité on obtient $C(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ pour $x < 0$. La valeur de $C(0) = \pi/2$ est immédiate.

Pour calculer $S(x)$, le principe est maintenant de dériver l'expression précédente, mais c'est délicat car l'intégrande dérivée n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Supposons $x > 0$ et commençons par montrer que l'intégrale impropre $S(x)$ converge. En effet, une intégration par parties donne

$$S_T(x) = \int_0^T \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,dt = \left[-\frac{\cos(xt)}{x}\,\frac{t}{1+t^2}\right]_0^T + \int_0^T \frac{\cos(xt)}{x}\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Le premier terme de la dernière somme converge lorsque $T \to +\infty$, et le dernier également puisque son intégrande est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale $S(x)$ converge donc pour tout $x > 0$. Considérons maintenant la suite de fonction (C_n) définie par $C_n(x) = \int_0^n \cos(xt)/(1+t^2)\,dt$ (qui converge simplement vers $C(x)$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n est dérivable, et $C_n'(x) = S_n(x)$. En intégrant par parties, on a

$$S_n(x) - S(x) = \int_n^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,dt = \frac{\cos(xn)}{x}\,\frac{n}{1+n^2} + \int_n^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x}\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

donc on a la majoration, pour $a > 0$ fixé

$$\forall x \geq a, \qquad |C_n'(x) - S(x)| = |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{an} + \int_n^{+\infty} \frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Le terme à droite de la dernière inégalité tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, on en déduit que la suite de fonctions (C_n') converge uniformément vers S sur $[a, +\infty[$. Donc C est bien dérivable sur $[a, +\infty[$ et $C'(x) = S(x)$ pour $x \geq a$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que C est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $C' = S$ sur cet intervalle. A partir de la forme close $C(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ on en déduit $S(x) = C'(x) = -\frac{\pi}{2}e^{-x}$. Le résultat pour $x < 0$ s'en déduit car S est une fonction impaire, et pour $x = 0$ car l'intégrande de S est nulle dans ce cas.

Problème 18 (Théorème des résidus, version faible). On considère une fraction rationnelle R à coefficients complexes, intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et $a_1, \dots, a_n$ la liste des pôles de R ($a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$). Pour tout k, on note $\mathrm{Res}_R(a_k)$ le coefficient de $1/(X - a_k)$ dans l'écriture de R en éléments simples.
a) Montrer

$$\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_R(a_k) = 0.$$

b) Montrer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\,dt = 2i\pi \sum_{a_k \in \mathcal{P}^+} \mathrm{Res}_R(a_k).$$

Solution. **a)** On peut écrire $R = P/Q$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Comme R est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. Pour tout k, $1 \leq k \leq n$, notons α_k l'ordre de multiplicité du pôle a_k. On peut écrire

$$R(X) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,\ell}}{(X - a_k)^\ell} \right) \qquad A_{k,\ell} \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad A_{k,1} = \mathrm{Res}_R(a_k).$$

Comme $R = P/Q$ avec $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, on a

$$0 = \lim_{t \to +\infty} tR(t) = \lim_{t \to +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,\ell}\, t}{(t - a_k)^\ell} \right) = \sum_{k=1}^n A_{k,1} = \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_R(a_k).$$

b) La fonction R est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc aucun de ses pôles a_k n'est réel. De plus, pour tout k, on a

$$\forall \ell \geq 2, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t - a_k)^\ell} = \left[\frac{1}{(1-\ell)(t - a_k)^{\ell-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

donc

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_{k,1}}{t - a_k} \right) dt. \tag{$*$}$$

On ne peut pas à ce stade intervertir les signes de sommation. On va s'en sortir en montrant que $\int_{-T}^{T} dt/(t-a_k)$ converge lorsque $T \to \infty$. Pour tout k, écrivons $a_k = x_k + iy_k$ avec $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ (et $y_k \neq 0$ puisque $a_k \notin \mathbb{R}$). La primitive suivante

$$\int \frac{dt}{t-a_k} = \int \frac{(t-x_k)+iy_k}{(t-x_k)^2+y_k^2}\,dt = \frac{1}{2}\log\left((t-x_k)^2+y_k^2\right) + i\arctan\left(\frac{t-x_k}{y_k}\right) + K,$$

permet d'affirmer

$$\int_{-T}^{T} \frac{dt}{t-a_k} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{(T-x_k)^2+y_k^2}{(T+x_k)^2+y_k^2}\right) + i\left[\arctan\frac{T-x_k}{y_k} + \arctan\frac{T+x_k}{y_k}\right]$$

d'ou on déduit

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}\frac{dt}{t-a_k} = \begin{cases} i\pi & \text{si } y_k > 0, \\ -i\pi & \text{si } y_k < 0. \end{cases}$$

Donc d'après (*) on a

$$I = \sum_{k=1}^{n} A_{k,1}\left(\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}\frac{dt}{t-a_k}\right) = i\pi\left(\sum_{y_k>0}\operatorname{Res}_R(a_k) - \sum_{y_k<0}\operatorname{Res}_R(a_k)\right).$$

D'après la question a), on a $\sum_{y_k<0}\operatorname{Res}_R(a_k) = -\sum_{y_k>0}\operatorname{Res}_R(a_k)$, donc finalement

$$I = 2i\pi\sum_{y_k>0}\operatorname{Res}_R(a_k) = 2i\pi\sum_{a_k\in\mathcal{P}^+}\operatorname{Res}_R(a_k).$$

Remarque. Ce résultat est en fait une conséquence du théorème des résidus. Ce dernier s'applique dans le cadre beaucoup plus général de la théorie des *fonctions analytiques.*

PROBLÈME 19. **a)** En utilisant le résultat du problème précédent, calculer, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n < m$, l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\,dx.$$

b) En déduire, pour tout $\alpha > 1$, la valeur de

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

Solution. **a)** L'intégrande est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur ne s'annule par sur $\mathbb{R}$ et à l'infini, elle est équivalente à $x^{2(n-m)}$ et $n-m \leq -1$. En vue d'appliquer le résultat du problème précédent, recherchons les résidus de l'intégrande. Son dénominateur s'écrit

$$X^{2m}+1 = \prod_{k=0}^{2m-1}(X-\xi_k), \qquad \xi_k = \exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2m}\right) = \alpha^{2k+1} \quad \text{avec} \quad \alpha = \exp\left(\frac{i\pi}{2m}\right)$$

donc tous les pôles sont simples, et on a la décomposition en éléments simples

$$R(X) = \frac{X^{2n}}{X^{2m}+1} = \sum_{k=0}^{2m-1}\frac{A_k}{X-\xi_k} \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{\xi_k^{2n}}{2m\xi_k^{2m-1}} = -\frac{\xi_k^{2n+1}}{2m} = -\frac{\alpha^{(2n+1)(2k+1)}}{2m},$$

autrement dit, on a $2m$ résidus A_k associés aux pôles ξ_k qui sont les valeurs

$$A_k = -\frac{\beta^{2k+1}}{2m}, \qquad \beta = \alpha^{2n+1} = \exp\left(\frac{(2n+1)i\pi}{2m}\right).$$

Comme les résidus de R dont les parties imaginaires sont strictement positives sont les A_k pour $0 \le k \le m-1$, le résultat du problème précédent entraîne

$$I = 2i\pi \sum_{k=0}^{m-1} A_k = -\frac{2i\pi}{2m} \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{2k+1} = -\frac{i\pi\beta}{m} \frac{1-\beta^{2m}}{1-\beta^2} = \frac{i\pi}{m} \frac{2}{\beta - 1/\beta} = \frac{\pi}{m \sin\left(\frac{2n+1}{2m}\pi\right)}.$$

b) Nous allons exploiter l'idée suivante : si α est de la forme $2m/(2n+1)$, le changement de variable $u = t^{1/(2n+1)}$ nous ramène à une intégrale du type de a).

La fonction $f_\alpha : t \mapsto 1/(1+t^\alpha)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $\alpha > 1$. Si $a > 1$, l'application $\alpha \mapsto J(\alpha)$ est continue sur $[a, +\infty[$ (on a $f_\alpha \le f_a$ pour $\alpha \ge a$ donc l'hypothèse de domination est vérifiée). Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, J est continue sur $]1, +\infty[$.

Fixons maintenant $\alpha > 1$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver deux suites d'entiers (p_n) et (q_n) tendant chacune vers l'infini, telles que (p_n/q_n) converge vers α. Comme $q_n \to +\infty$, la suite $(2p_n/(2q_n+1))$ converge aussi vers α. Le fait que $\alpha > 1$ assure l'existence d'un rang à partir duquel $p_n > q_n$.

Lorsque $p > q$ sont deux entiers naturels, le changement de variable $u = t^{1/(2q+1)}$ donne

$$J\left(\frac{2p}{2q+1}\right) = (2q+1)\int_0^{+\infty} \frac{u^{2q}\,du}{1+u^{2p}} = \frac{2q+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2q}\,du}{1+u^{2p}} = \pi\left(\frac{2p}{2q+1}\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2p}{2q+1}}\right)\right)^{-1}.$$

Ainsi, la fonction J étant continue en α, on a

$$J(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} J\left(\frac{2p_n}{2q_n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \pi\left(\frac{2p_n}{2q_n+1}\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2p_n}{2q_n+1}}\right)\right)^{-1} = \frac{\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}.$$

Problème 20 (Une preuve du théorème de convergence dominée). On note $\mathcal{C}_m(I,F)$ l'e.v. des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans F.

1/ Soit $S = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_m(S,\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions continues f_- et f_+ dans de S dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f_- \le f \le f_+ \quad \text{et} \quad \left(\int_S f_+\right) - \varepsilon < \int_S f < \left(\int_S f_-\right) + \varepsilon.$$

2/ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un e.v.n complet. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_m(I,E)$, telle que u_n est intégrable sur I pour tout n, et telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I,E)$ sur I. On suppose que $\sum_n \int_I \|u_n\|$ converge.

a) Soit $S = [a,b]$ un segment inclus dans I. Montrer que $\int_S \|f\| \le \sum_{n=0}^\infty \int_S \|u_n\|$ (commencer par le cas où f et les u_n sont continues, en appliquant à $\|f\|$ et $\|u_n\|$ un argument similaire à celui utilisé pour la preuve du premier théorème de Dini, puis adapter le raisonnement).

b) Montrer que f est intégrable sur I et que

$$\int_I \|f\| \le \sum_{n=0}^\infty \int_I \|u_n\| \qquad \text{et} \qquad \int_I f = \sum_{n=0}^\infty \int_I u_n.$$

3/ Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ convergeant simplement vers la fonction nulle sur I, et telle qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$, intégrable sur I, vérifiant $f_n \le \varphi$ pour tout n.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \ge n$, on pose $f_{n,p} = \max(f_n, f_{n+1}, \dots, f_p)$. Montrer qu'il existe $p_n \ge n$ tel que $p_n \ge p_{n-1}$ et $|\int_I f_{n,p} - \int_I f_{n,p_n}| < 2^{-n}$ pour tout $p \ge p_n$.

b) On pose $g_n = f_{n,p_n}$. Montrer que $|g_{n+1} - g_n| \le 2(f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}) + g_n - g_{n+1}$.

c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = 0$.
4/ Démontrer le théorème de convergence dominée (page 151).

Solution. **1/** Si f est continue c'est évident. Sinon, notons $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les points de discontinuité de f. Soient deux réels m et M tels que $m < \inf_{x\in S} f(x)$ et $M > \sup_{x\in S} f(x)$.

Soit $\alpha > 0$ avec $\alpha < \frac{1}{2}\min(x_{i+1} - x_i)$. Considérons la fonction continue φ_- définie sur S par

$$\varphi_-(x) = m + (M-m)\frac{|x-x_i|}{\alpha}, \quad \text{si} \quad x \in J_i = [x_i - \alpha, x_i + \alpha] \cap S, \qquad \varphi_-(x) = M \quad \text{ailleurs.}$$

L'application $f_- = \min(f, \varphi_-)$ vérifie $f_- \leq f$ par construction et est continue, car

— si x n'est pas l'un des x_i, f est continue en x donc $f_- = \frac{1}{2}(f + \varphi_- - |f - \varphi_-|)$ l'est aussi ;

— pour tout i, $f_-(x_i) = m$ donc $f_- = \varphi_-$ sur un voisinage de x_i, donc f_- est continue en x_i.

Lorsque x n'est pas dans l'un des J_i, on a $f_-(x) = f(x)$ car $f(x) < M = \varphi_-(x)$. On a donc

$$\int_S (f - f_-) = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} (f - f_-) \leq \sum_{i=1}^n \int_{J_i} (M-m) \leq 2\alpha n(M-m)$$

En choisissant $\alpha \leq \varepsilon/(2(M-m)n)$, on a donc $\int_S (f - f_-) < \varepsilon$. On construit de manière analogue $f_+ = \max(\varphi_+, f)$ avec $\varphi_+ = M - (M-m)|x - x_i|/\alpha$ sur J_i et $\varphi_+ = m$ ailleurs.

2/ a) Comme indiqué, nous allons commencer par le cas où f et les u_n sont continues. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n, considérons l'ensemble

$$F_n = \left\{ x \in S \;:\; \|f(x)\| \geq \varepsilon + \sum_{k=0}^n \|u_k(x)\| \right\}$$

La suite (F_n) est une suite décroissante de fermés de S (donc compacts). On a $\cap_{n\geq 0} F_n = \varnothing$ car pour tout $x \in S$, il existe n tel que $\|f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x)\| < \varepsilon$, ce qui entraîne $x \notin F_n$. Une suite décroissante de compacts non vide est non vide, donc il existe forcément n tel que $F_n = \varnothing$, autrement dit $\|f\| < \varepsilon + \sum_{k=0}^n \|u_k\|$ sur S. Ceci entraîne

$$\int_S \|f\| \leq (b-a)\varepsilon + \sum_{k=0}^n \int_S \|u_k\| \leq (b-a)\varepsilon + \sum_{k=0}^\infty \int_S \|u_k\|.$$

Cette dernière majoration est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ donc on a bien le résultat attendu.

Traitons maintenant le cas général. Soit $\varepsilon > 0$. D'après 1/, il existe une fonction continue g sur S et une suite (v_n) de fonctions continues sur S telles que

$$g \leq \|f\| \quad \text{avec} \int_S \|f\| < \varepsilon + \int_S g, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leq v_n \quad \text{avec} \int_S v_n \leq \frac{\varepsilon}{2^n} + \int_S \|u_n\|.$$

On note $G_n = \{x \in S \;:\; g(x) \geq \varepsilon + \sum_{k=0}^n v_k(x)\}$, de sorte que (G_n) est une suite décroissante de compacts. Leur intersection est vide (car $\|f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x)\| < \varepsilon$ entraîne $g(x) < \varepsilon + \sum_{k=0}^n v_k(x)$), donc il existe n avec $G_n = \varnothing$. Ceci entraîne $g < \varepsilon + \sum_{k=0}^n v_k$ sur S, donc

$$\int_S \|f\| \leq \varepsilon + \int_S g \leq (1+b-a)\varepsilon + \sum_{k=0}^n \int_S v_k \leq (3+b-a)\varepsilon + \sum_{k=0}^n \int_S \|u_k\| \leq (3+b-a)\varepsilon + \sum_{k=0}^\infty \int_S \|u_k\|.$$

On conclut comme précédemment.

b) Comme $\int_S \|u_k\| \leq \int_I \|u_k\|$, le résultat précédent entraîne la majoration

$$\int_S \|f\| \leq \sum_{k=0}^\infty \int_I \|u_k\|,$$

et ceci pour tout segment S de I. Par définition, f est donc intégrable sur I et on a $\int_I \|f\| \leq \sum_{k=0}^\infty \int_I \|u_k\|$. En appliquant ce même résultat à $f - \sum_{k=0}^n u_k$ on obtient

$$\int_I \left\| f - \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^\infty \int_I \|u_k\|,$$

donc $(\int_I \|f - \sum_{k=0}^n u_k\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Comme $\| \int_I f - \sum_{k=0}^n \int_I u_k\| \leq \int_I \|f - \sum_{k=0}^n u_k\|$, on en déduit $\lim_{n\to\infty} \int_I f = \sum_{n=0}^\infty \int_I u_n$.

3/ a) Fixons n. Remarquons que les $f_{n,p}$ sont dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ (le maximum de deux fonctions a et b de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ s'écrit $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ donc est dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$) et intégrables car $f_{n,p} \leq \varphi$. La suite $(f_{n,p})_p$ est croissante, donc la suite $(I_{n,p})_p$ définie par $I_{n,p} = \int_I f_{n,p}$ est croissante. Comme elle est majorée par $\int_I \varphi$, elle converge, donc c'est une suite de Cauchy, donc il existe p_n tel que $|I_{n,p} - I_{n,q}| < 2^{-n}$ pour $p, q \geq p_n$. On peut choisir p_n aussi grand que voulu, d'où le résultat.

b) Si $g_{n+1} - g_n < 0$, c'est immédiat car $f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n} \geq 0$. Sinon il suffit de remarquer que $g_{n+1} - g_n = f_{n+1,p_{n+1}} - f_{n,p_n} \leq f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}$.

c) Posons $u_n = g_n - g_{n+1}$. L'inégalité précédente entraîne

$$\int_I |u_n| \leq 2|I_{n,p_{n+1}} - I_{n,p_n}| + \int_I g_n - \int_I g_{n+1} \leq 2^{1-n} + \int_I g_n - \int_I g_{n+1},$$

par sommation on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^p \int_I |u_n| \leq \sum_{n=0}^p 2^{1-n} + \int_I g_0 - \int_I g_{p+1} \leq 4 + \int_I g_0.$$

Par ailleurs, la suite de fonctions (g_n) converge simplement vers 0, donc on a $\sum_{k\geq n} u_k = g_n$. Finalement nous avons montré que la série de fonctions $\sum_{k\geq n} u_k$ vérifie les hypothèses de la partie 2/ du problème, donc

$$0 \leq \int_I f_n \leq \int_I g_n = \int_I \left(\sum_{k\geq n} u_k\right) = \sum_{k\geq n} \int_I u_k.$$

Le dernier terme est le reste d'une série absolument convergente, d'où $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = 0$.

4/ Reprenons les notations du théorème de convergence dominée, page 151. On a $\|f\| \leq \varphi$ donc f est bien intégrable. Ensuite, il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la suite $(\|f_n - f\|)$, majorée par la fonction intégrable 2φ, et qui converge simplement vers la fonction nulle. Donc $(\int_I \|f_n - f\|)$ tend vers 0, et comme $\| \int_I f_n - \int_I f\| \leq \int_I \|f_n - f\|$, ceci termine la preuve du théorème de convergence dominée.

PROBLÈME 21 (DEUXIÈME PREUVE DU THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE).
Quelques définitions et remarques.

— Une partie bornée E de $\mathbb{R}$ est dite *élémentaire* si E est réunion finie d'intervalles bornés, *i. e.* si χ_E (fonction caractéristique de E) est une fonction en escalier. On peut alors définir la *mesure* de E par $m(E) = \int_\mathbb{R} \chi_E(t)\,dt$. De même, si f est continue par morceaux sur $[a,b] \supset E$, on définit $\int_E f = \int_a^b f(t)\chi_E(t)\,dt$.

— Si E et F sont deux parties élémentaires disjointes et f une fonction réelle continue par morceaux, on a facilement $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$; si $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in E$, alors $|\int_E f| \leq K\,m(E)$.

— Il est également clair que si E est élémentaire, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble H, borné, fermé et élémentaire, tel que $H \subset E$ et $m(H) > m(E) - \varepsilon$.

a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ telle que $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \varnothing$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\alpha_n = \sup \Gamma_n \quad \text{où} \quad \Gamma_n = \{m(E),\ E \text{ élémentaire et } E \subset A_n\}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

b) Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans un e.v.n complet A, continue par morceaux, convergeant simplement vers une fonction $f : [a,b] \to A$ continue par morceaux, et uniformément bornée, c'est-à-dire

$$\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,b], \qquad \|f_n(x)\| \leq K.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

c) En déduire une preuve du théorème de convergence dominée (page 151).

Solution. **a)** Toute partie élémentaire incluse dans A_{n+1} est incluse dans A_n, donc $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$, donc $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$. Autrement dit, la suite (α_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge. On note ℓ sa limite.

Il s'agit de montrer $\ell = 0$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant $\ell > 0$. On fixe un nombre réel δ tel que $0 < \delta < \ell$. Pour tout n, il existe une partie $E_n \subset A_n$ élémentaire et fermée, telle que $m(E_n) > \alpha_n - \delta/2^n$. Pour tout n, l'ensemble

$$H_n = \bigcap_{i=1}^{n} E_n$$

est élémentaire et fermé, et la suite (H_n) est une suite décroissante de fermés. Si on montre que H_n est non vide pour tout n, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} H_n$ sera non vide (suite décroissante de compacts non vides), ce qui sera en contradiction avec le fait que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} H_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \varnothing,$$

et on en conclura le résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons une partie élémentaire $E \subset A_n$ telle que $m(E) > \delta$. On a

$$E \smallsetminus H_n = \bigcup_{i=1}^{n} (E \smallsetminus E_i) \quad \text{donc} \quad m(E \smallsetminus H_n) \leq \sum_{i=1}^{n} m(E \smallsetminus E_i). \tag{$*$}$$

Or pour tout i, $1 \leq i \leq n$,

$$m(E \smallsetminus E_i) + m(E_i) = m(E \cup E_i) \leq \alpha_i \quad \text{donc} \quad m(E \smallsetminus E_i) \leq \alpha_i - m(E_i) \leq \frac{\delta}{2^i},$$

ce qui d'après (*) entraîne

$$m(E \smallsetminus H_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{2^i} < \delta.$$

Ceci entraîne $H_n \neq \varnothing$ car $m(E) > \delta$ par construction. D'où le résultat.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n = \|f - f_n\|$. On aura prouvé le résultat si on montre

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt = 0. \tag{$**$}$$

La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers 0, et on a $0 \leq g_n \leq 2K$ sur $[a,b]$.

Ceci étant, considérons $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \{x \in [a,b] \mid \exists i \geq n,\ g_i(x) \geq \varepsilon\}.$$

La suite (A_n) est décroissante et on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$. D'après le résultat de la question a), on peut donc trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que tout $n \geq N$ et pour toute partie élémentaire $E \subset A_n$, $m(E) < \varepsilon$. Soit $n \geq N$, et soit s une fonction en escalier telle que $s \leq g_n$.

On pose $E = \{x \in [a,b] \mid s(x) \geq \varepsilon\}$ et $F = [a,b] \smallsetminus E$. Les ensembles E et F sont élémentaires (car s est en escalier). Comme $E \subset A_n$, on a $m(E) < \varepsilon$ donc

$$\int_a^b s(t)\,dt = \int_E s + \int_F s \leq \int_E 2K + \int_F \varepsilon \leq 2Km(E) + (b-a)\varepsilon \leq M\varepsilon, \qquad M = 2K + (b-a).$$

Ceci étant vrai pour toute fonction en escalier s inférieure à la fonction continue par morceaux g_n, on en déduit $\int_a^b g_n(t)\,dt \leq M\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $n \geq N$, on en déduit (**).

c) On reprend les notations du théorème de convergence dominée page 151. Soit $\varepsilon > 0$, et soit un segment $J = [a, b]$ inclus dans I tel que $\int_{I \setminus J} \varphi = \int_I \varphi - \int_J \varphi < \varepsilon$. D'après le résultat de la question précédente appliqué au segment J (que l'on peut bien appliquer car φ est bornée sur cet intervalle) il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\| \int_J f_n - \int_J f \| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$ on a

$$\left\| \int_I f_n - \int_I f \right\| \leq \left\| \int_I f_n - \int_J f_n \right\| + \left\| \int_J f_n - \int_J f \right\| + \left\| \int_J f - \int_I f \right\| \leq \int_{I \setminus J} \varphi + \varepsilon + \int_{I \setminus J} \varphi \leq 3\varepsilon,$$

d'où le résultat.

Remarque. On adapte facilement cette démonstration dans les cas où les f_n et f sont seulement supposées Riemann-intégrables.

CHAPITRE 4

Suites et séries

La notion de suite et de limite naquit avec la *méthode d'exhaustion*, technique utilisée par les mathématiciens grecs de l'Antiquité pour le calcul de longueurs, d'aires et de volumes. C'est ainsi qu'Archimède approximait l'aire d'un cercle en y inscrivant une suite de polygones réguliers.

Jusqu'au début du dix-neuvième siècle, le concept de convergence revêtait deux formes : numérique et formelle. La conception formelle reposait sur des règles formelles permettant de sommer des séries divergentes (Euler en fit beaucoup usage), et occulta au cours du dix-huitième siècle la conception numérique (qui correspond à celle d'aujourd'hui). Les dysfonctionnements du point de vue formel dans le domaine des séries entières et des séries trigonométriques provoquèrent au début du dix-neuvième siècle le développement d'un point de vue purement numérique, marqué par les travaux de Gauss (1813), Fourier (1807) et Bolzano (1817), puis Cauchy dans son *cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821). Les problèmes de convergence furent approfondis par Abel, Dirichlet, Liouville, Riemann et Weierstrass. Abel, en exhibant la série de fonctions $\sum(-1)^{n-1}\sin(nx)/n$, attira l'attention de ses contemporains sur le fait qu'une limite simple d'une série de fonctions continues n'est pas forcément continue, résultat que l'on croyait vrai auparavant. C'est Weierstrass qui donna à la définition de limite sa forme actuelle. Il reprit aussi la notion de convergence uniforme introduite par son maître Gudermann en 1838, et en donna une définition claire et précise dans un article écrit en 1841. Il énonça et démontra correctement les théorèmes sur la continuité, dérivabilité et intégrabilité de la somme d'une série de fonctions. La notion de convergence normale fut, elle, introduite par Baire en 1908.

1. Suites numériques

1.1. Rappels sur les suites

Nous avons déjà abordé la notion de suite au cours du chapitre de topologie sur les espaces métriques. Rappelons en les grandes lignes.

- On appelle *suite* à valeurs dans un ensemble E toute application u de $\mathbb{N}$ dans E. Le terme $u(n)$ est appelé le n-ième terme de la suite et on le note u_n. La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Une suite (u_n) à valeurs dans un espace métrique (E, d) est dite *convergente* s'il existe $\ell \in E$ tel que
$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \qquad \mathrm{d}(u_n, \ell) \leq \varepsilon.$$
Dans ce cas, il existe une seule valeur ℓ vérifiant cette propriété, et on dit que ℓ est la *limite* de (u_n) ou que (u_n) *converge* vers ℓ. On note alors $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
- On appelle *sous-suite* (ou *suite extraite*) de (u_n) toute suite (v_n) de la forme $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Avec ces définitions, on a les propriétés qui suivent.

- Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et possède la même limite.

— Une suite (u_n) à valeurs dans un espace métrique est dite *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que $\mathrm{d}(u_0, u_n) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Toute suite convergente est bornée.
— Si (u_n) est une suite bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, on peut en extraire une sous-suite convergente (voir la proposition 11 page 30).
— Une suite (u_n) à valeurs dans un espace métrique (E, d) est dite *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \qquad \mathrm{d}(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy, toute suite de Cauchy est bornée. Si E est complet, toute suite de Cauchy converge. En particulier, toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$ converge.

Suites réelles.
— Une suite réelle (u_n) est dite *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite croissante et majorée converge.
— Les inégalités *larges* sont conservées par passage à la limite.
— Si trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \leq u_n \leq w_n$$

et si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.
— Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0.$$

Dans ce cas, (u_n) et (v_n) sont convergentes et convergent vers la même limite.

1.2. Suites récurrentes

DÉFINITION 1. Soient (E, d) un espace métrique et h un entier naturel non nul. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite *récurrente d'ordre h* si on peut écrire

$$\forall n \geq h, \qquad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-h}) \tag{$*$}$$

où f est une application de E^h dans E.

Les premières valeurs $u_0, \ldots, u_{h-1}$ de (u_n) étant données, la relation (*) permet de calculer de manière itérative tous les autres termes de la suite. Le plus souvent, les suites récurrentes que nous traiterons seront d'ordre 1.

La proposition suivante permet souvent de calculer la limite d'une suite *récurrente* si on sait par ailleurs qu'elle converge.

PROPOSITION 1. *Soit* (E, d) *un espace métrique et* (u_n) *une suite récurrente d'ordre* $h \in \mathbb{N}^*$ *vérifiant*

$$\forall n \geq h, \qquad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-h})$$

où $f : E^h \to E$ *est une application. Si la suite* (u_n) *converge vers une limite* ℓ *et si l'application* f *est continue au point* $(\ell, \ldots, \ell)$*, alors on a*

$$\ell = f(\ell, \ell, \ldots, \ell).$$

La preuve est simple, il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ dans la relation (*) et d'utiliser la continuité de f au point $(\ell, \ldots, \ell)$.

***Monotonie des suites réelles récurrentes d'ordre* 1.** Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Considérons une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

— Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0$ (immédiat par récurrence).

— Si f est décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. On en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, et leur sens de monotonie est opposé (ceci car le signe de $u_2 - u_0$ est l'opposé du signe de $u_3 - u_1 = f(u_2) - f(u_0)$).

1.3. Quelques familles de suites classiques

Suites arithmétiques. On appelle ainsi les suites (u_n) à valeurs dans un e.v E vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$ où $a \in E$. On a alors $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on dit que (u_n) est une suite arithmétique de *raison* a.

Suites géométriques. Ce sont les suites à valeurs réelles (ou complexes) vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = q\, u_n$. On a alors $u_n = q^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on dit que (u_n) est une suite géométrique de *raison* q. Si $|q| > 1$, la suite (u_n) diverge ; si $|q| < 1$, elle converge et a pour limite 0 ; si $q = 1$, elle est constante.

Suites arithmético-géométriques. Ce sont les suites à valeurs réelles (ou complexes) vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = q\, u_n + a$. Lorsque $q = 1$ on a affaire à une suite arithmétique, et si $q \neq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n(u_0 - r) + r \qquad \text{avec} \qquad r = \frac{a}{1-q}.$$

Récurrences homographiques. On dit qu'une suite (u_n) (réelle ou complexe) vérifie une *récurrence homographique* si elle vérifie une relation de récurrence du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = h(u_n) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0. \tag{$*$}$$

Une telle suite est définie pour tout n si et seulement si aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur de h. La proposition qui suit permet d'exprimer explicitement u_n.

PROPOSITION 2. *Soit (u_n) une suite complexe vérifiant (*). On considère l'équation*

$$h(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad cx^2 - (a-d)x - b = 0. \tag{E}$$

— *Si (E) admet deux racines distinctes α, β alors on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{où} \quad k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}.$$

— *Si (E) admet une racine double α, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + k\,n \quad \text{où} \quad k = \frac{c}{a - \alpha c}.$$

Démonstration. Dans le premier cas, il suffit de remarquer que

$$\frac{h(x) - \alpha}{h(x) - \beta} = k\,\frac{x - \alpha}{x - \beta},$$

ce que le lecteur vérifiera facilement. Dans le second cas, il suffit de remarquer

$$\frac{1}{h(x) - \alpha} = \frac{1}{x - \alpha} + k.$$

□

Remarque 1. Ces formules permettent de décider s'il existe un entier n qui annule le dénominateur de h, en quel cas les termes ultérieurs de la suite ne sont pas définis.

– On peut montrer que si (E) a deux racines distinctes, la valeur k est aussi égale à $k = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$; lorsque (E) a une racine double, on a l'égalité $k = \frac{2c}{a+d}$.

Récurrences linéaires à coefficients constants. On dit qu'une suite (u_n) à valeurs complexes vérifie une *récurrence linéaire (homogène) d'ordre h* à coefficients constants si

$$\forall n \geq h, \qquad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_h u_{n-h} \qquad (a_1, \ldots, a_h \in \mathbb{C}). \qquad (*)$$

La proposition qui suit permet de calculer explicitement le terme général d'une telle suite.

Proposition 3. *L'équation*

$$x^h - a_1 x^{h-1} - \cdots - a_h = 0 \qquad (E)$$

s'appelle équation caractéristique *de la récurrence (*). Si on note $r_1, \ldots, r_q$ ses racines et $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ leur ordre de multiplicité respectifs, alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant (*) est l'ensemble des suites de la forme*

$$u_n = P_1(n)\, r_1^n + \cdots + P_q(n)\, r_q^n, \qquad (**)$$

où pour tout i, P_i est un polynôme vérifiant $\deg(P_i) < \alpha_i$.

Une preuve de ce résultat fait l'objet du problème 5 page 285. Dans la pratique, si on se donne une suite (u_n) vérifiant (*), les coefficients des polynômes P_i correspondant dans (**) sont déterminés à partir des h premiers termes $u_0, \ldots, u_{h-1}$ de la suite.

Remarque 2. On rencontre souvent des récurrences linéaires à coefficients constants d'ordre 2 :

$$u_0, u_1, \qquad \forall n \geq 2, \quad u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}. \qquad (***)$$

L'équation caractéristique correspondante est

$$x^2 - ax - b = 0, \qquad (E)$$

et dans ce cas, la proposition précédente s'énonce comme suit.

— Si (E) possède deux racines distinctes x_1, x_2, les suites vérifiant (***) sont celles de la forme

$$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n. \qquad (****)$$

Les coefficients λ et μ sont déterminés à partir des équations $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda x_1 + \mu x_2$.

— Si (E) possède une racine double x, les suites vérifiant (***) sont celles de la forme

$$u_n = (\lambda n + \mu) x^n.$$

On détermine λ et μ grâce aux équations $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)x$.

Lorsque a et b sont réels et que le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$ de (E) est strictement négatif, l'expression (****) fait intervenir des nombres complexes. Dans ce cas, on peut en donner une expression ne faisant intervenir que des nombres réels en écrivant les racines de (E) sont la forme $\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta}$, de sorte que (****) se met sous la forme

$$u_n = \rho^n(\gamma \cos(n\theta) + \delta \sin(n\theta)).$$

1.4. Exercices

Exercice 1. Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}.$$

Solution. Pour que la suite (u_n) soit bien définie, il faut avoir $u_n \geq 0$ pour tout n, ce qui sera vérifié si et seulement si $0 \leq u_n < 4$ pour tout n.

Ceci étant, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f : [0, 4[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{2 - \sqrt{x}}.$$

La monotonie de (u_n) est dictée par le signe de $g(x) = f(x) - x$; un calcul simple montre que

$$\forall x \in [0,4[, \qquad g(x) = f(x) - x = \frac{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{2-\sqrt{x}},$$

d'où le tableau suivant, donnant le comportement de f et le signe de g :

x	0		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous avons vu que forcément, $u_0 \in [0,4[$ pour que la suite (u_n) soit définie. Pour étudier (u_n), nous traitons plusieurs cas selon la position de u_0 par rapport aux points fixes de f.

(i) $u_0 \in [0,1[$. Le tableau montre que $[0,1[$ est stable par f, on a donc $u_n \in [0,1[$ pour tout n. Par ailleurs, g est positive sur cet intervalle, donc la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée (par 1), elle converge. Sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. Comme de plus $\ell \in [0,1]$ car la suite prend ses valeurs dans $[0,1[$, on a forcément $\ell = 1$. En résumé, (u_n) tend vers 1 en croissant.

(ii) $u_0 = 1$. Alors la suite (u_n) est stationnaire à 1.

(iii) $u_0 \in]1,(3+\sqrt{5})/2[$. Comme l'intervalle $]1,(3+\sqrt{5})/2[$ est stable par f, tous les éléments de la suite appartiennent à cet intervalle. Comme g y est négative, (u_n) décroît. De plus, (u_n) est minorée (par 1), on en déduit qu'elle converge. Sa limite ℓ vérifie $g(\ell) = 0$ et $1 \le \ell < (3+\sqrt{5})/2$, donc $\ell = 1$. En résumé, (u_n) tend vers 1 en décroissant.

(iv) $u_0 = (3+\sqrt{5})/2$. Alors la suite (u_n) est stationnaire à $(3+\sqrt{5})/2$.

(v) $u_0 > (3+\sqrt{5})/2$. Alors la suite (u_n) est croissante (g est positive sur $](3+\sqrt{5})/2, 4[$) ; si elle était majorée par 4, elle convergerait vers un réel $\ell > (3+\sqrt{5})/2$ point fixe de f, ce qui n'est pas possible. Ainsi, il existe n tel que $u_n > 4$ et la suite (u_n) n'est pas définie.

→ Exercice 2 (Moyenne de Césaro). Soit $(a_n)_{n\ge1}$ une suite complexe convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite $(b_n)_{n\ge1}$ définie par

$$\forall n \ge 1, \qquad b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

converge vers ℓ.

Solution. Donnons nous $\varepsilon > 0$. La suite (a_n) converge vers ℓ donc

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, \qquad |a_n - \ell| \le \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n > N$,

$$\begin{aligned} \forall n > N, \qquad |a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n\ell| &\le |a_1 + \cdots + a_N - N\ell| + |a_{N+1} + \cdots + a_n - (N-n)\ell| \\ &\le |a_1 + \cdots + a_N - N\ell| + |a_{N+1} - \ell| + \cdots + |a_n - \ell| \le K + (n-N)\varepsilon \le K + n\varepsilon, \end{aligned}$$

où $K = |a_1 + \cdots + a_N - N\ell|$, ce qui entraîne

$$\forall n > N, \qquad |b_n - \ell| = \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \ell \right| \le \frac{K}{n} + \varepsilon.$$

Si on fixe un entier $N_1 > N$ tel que $K/N_1 < \varepsilon$, on a finalement

$$\forall n \ge N_1, \qquad |b_n - \ell| \le \frac{K}{N_1} + \varepsilon \le 2\varepsilon,$$

d'où le résultat.

Remarque. En procédant de la même manière, on peut montrer plus généralement que pour toute suite de réels positifs (ε_n) telle que la série $\sum \varepsilon_n$ diverge, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n}{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n} = \ell.$$

EXERCICE 3. Soit (u_n) une suite définie par

$$u_0 > 0, u_1 > 0, \lambda > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}.$$

Expliciter le n-ième terme u_n de la suite en fonction de n.

Solution. Une récurrence immédiate montre que chaque terme de la suite est positif, donc la suite (u_n) est bien définie. La suite (u_n) est récurrente d'ordre 2, mais elle n'entre pas dans une des familles classiques étudiées dans la partie 1.3. Pour se ramener à une récurrence classique, nous allons considérer la suite (v_n) définie par $v_n = \log u_n$. Elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{2} + \frac{v_n}{2} + \log\lambda. \tag{$*$}$$

Pour rendre homogène cette récurrence linéaire, nous commençons par en rechercher une solution particulière (c'est comme pour les équations différentielles). Aucune suite constante ne convient, on recherche donc une solution particulière (w_n) sous la forme $w_n = \alpha n$. Elle vérifie (*) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha(n+2) = \alpha\left(n + \frac{1}{2}\right) + \log\lambda, \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \alpha = \frac{2}{3}\log\lambda.$$

Ainsi, la suite (w_n) définie par $w_n = (2\log\lambda/3)n$ vérifie (*), ce qui en retranchant à (*) montre que la suite (x_n) définie par $x_n = v_n - w_n$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_n}{2}.$$

On sait résoudre ce type de récurrence. L'équation caractéristique correspondante est

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{dont les solutions sont} \quad r = -\frac{1}{2},\ r = 1.$$

Ainsi, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = a + \left(-\frac{1}{2}\right)^n b \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = x_n + w_n = a + \left(-\frac{1}{2}\right)^n b + \frac{2\log\lambda}{3}\,n,$$

et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \exp(v_n) = A \cdot B^{(-1/2)^n} \cdot \lambda^{2n/3}, \qquad A = e^a, B = e^b.$$

Pour déterminer A et B, on écrit

$$u_0 = AB, \quad u_1 = A \cdot \frac{1}{\sqrt{B}}\lambda^{2/3} \quad \text{d'où on déduit} \quad A = u_0^{1/3}u_1^{2/3}\lambda^{-4/9}, \quad B = u_0^{2/3}u_1^{-2/3}\lambda^{4/9}.$$

Finalement, nous avons montré

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0^{1/3}u_1^{2/3}\lambda^{-4/9}\left(\frac{u_0\lambda^{2/3}}{u_1}\right)^{(2/3)(-1/2)^n} \lambda^{2n/3}.$$

Remarque. Retenez le procédé qui consiste à rechercher une solution particulière pour résoudre des récurrences linéaires non homogènes du type (*).

EXERCICE 4. Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel et (r_n) une suite de nombres rationnels qui converge vers α. Pour tout n, on écrit $r_n = p_n/q_n$ où $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty.$$

Solution. Donnons nous un entier naturel non nul N. Notons Γ l'ensemble des rationnels de la forme a/b qui se trouvent dans l'intervalle $[\alpha-1, \alpha+1]$ et vérifient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $1 \leq b \leq N$. L'ensemble Γ est fini puisque

$$\Gamma = \bigcup_{1\leq q\leq N} \Gamma_q \quad \text{avec} \quad \Gamma_q = \left\{ r \in [\alpha-1, \alpha+1] \mid \exists p \in \mathbb{Z}, r = \frac{p}{q} \right\}$$

et que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, Γ_q est fini (car si $p/q \in \Gamma_q$, on a forcément $(\alpha-1)q \leq p \leq (\alpha+1)q$).

Ceci étant, le nombre α est irrationnel donc n'appartient pas à Γ. Comme Γ est fini, on en déduit que

$$\exists \rho \in \left]0,1\right[, \forall x \in \Gamma, \qquad |x-\alpha| > \rho. \tag{$*$}$$

La suite (r_n) converge vers α, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|r_n - \alpha| < \rho$ pour tout $n \geq n_0$. D'après (*), on a donc $r_n \notin \Gamma$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $q_n > N$ (si $q_n \leq N$, comme $r_n = p_n/q_n \in [\alpha-1, \alpha+1]$, on a $r_n \in \Gamma_{q_n} \subset \Gamma$, impossible). Finalement, nous avons prouvé

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \qquad q_n \geq N.$$

Ceci étant possible pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la suite (q_n) tend vers $+\infty$. Comme $p_n \sim \alpha q_n$, la suite (p_n) tend également vers $+\infty$.

→ EXERCICE 5 (SOUS-GROUPES ADDITIFS DE $\mathbb{R}$). **a)** Soit Λ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $\Lambda \neq \{0\}$. Montrer que Λ vérifie l'une des deux assertions suivantes :

(i) il existe $m > 0$ tel que $\Lambda = m\mathbb{Z}$,

(ii) Λ est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Soient a et b deux nombres réels non nuls. Montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a/b \notin \mathbb{Q}$.

c) Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Montrer que $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a/b \notin \mathbb{Q}$.

d) (Application.) Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sin n$?

Solution. **a)** C'est très classique. Notons $\Lambda^{+*} = \Lambda \cap \mathbb{R}^{+*}$ et $m = \inf \Lambda^{+*}$. Deux cas se présentent.

— Si $m > 0$, alors $m \in \Lambda^{+*}$. En effet, si $m \notin \Lambda^{+*}$, on a par définition de la borne inférieure

$$\exists \alpha, \beta \in \Lambda^{+*}, \qquad m < \alpha < \beta < 2m,$$

donc $0 < \beta - \alpha < m$, et comme Λ est un groupe additif, $\beta - \alpha \in \Lambda^{+*}$, ce qui est absurde car $m = \inf \Lambda^{+*}$.

Comme $m \in \Lambda$ et que Λ est un groupe, on a $m\mathbb{Z} \subset \Lambda$. Nous allons montrer l'inclusion réciproque, ce qui prouvera $m\mathbb{Z} = \Lambda$. Soit $x \in \Lambda$. Si n est la partie entière de x/m, on a $mn \leq x < m(n+1)$, donc $0 \leq x - mn < m$. Comme $x - mn \in \Lambda$, ceci entraîne $x - mn = 0$ car $m = \inf \Lambda^{+*}$, autrement dit $x = mn \in m\mathbb{Z}$. Finalement, on a montré $\Lambda = m\mathbb{Z}$.

— Si $m = 0$, nous allons montrer que Λ est dense dans $\mathbb{R}$. Soient $a < b$ deux nombres réels. Comme $0 = \inf \Lambda^{+*}$, il existe $x \in \Lambda$ tel que $0 < x < b - a$, et alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a < nx < b$. Ainsi, $\left]a, b\right[\cap \Lambda \neq \varnothing$, et ceci pour tout intervalle ouvert $\left]a, b\right[$ de $\mathbb{R}$, d'où la densité de Λ dans $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Condition nécessaire. Supposons $a/b \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers non nuls premiers entre eux p et q tels que $a/b = p/q$. On a donc

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\left(\mathbb{Z} + \frac{a}{b}\mathbb{Z}\right) = b\left(\mathbb{Z} + \frac{p}{q}\mathbb{Z}\right) = \frac{b}{q}(q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}) = \frac{b}{q}\mathbb{Z}$$

(on a $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ car les deux entiers p et q sont premiers entre eux), ce qui entraîne que Λ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Ceci est contraire aux hypothèses, on en déduit $a/b \notin \mathbb{Q}$.
Condition suffisante. Supposons $a/b \notin \mathbb{Q}$ et Λ non dense dans $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda = m\mathbb{Z}$. En particulier $a \in \Lambda$, donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a = mp$. De même, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = mq$. Donc $a/b = p/q \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. L'ensemble Λ est donc dense dans $\mathbb{R}$.

c) *Condition nécessaire.* Supposons $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ dense dans $\mathbb{R}$. Alors il en est de même pour $a\mathbb{N} - b\mathbb{N} \supset a\mathbb{Z} - b\mathbb{Z}$, donc d'après la question précédente, $a/b \notin \mathbb{Q}$.
Condition suffisante. Si $a/b \notin \mathbb{Q}$, pour montrer que $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$, nous allons commencer par montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, \qquad 0 < ap - bq < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Quitte à diminuer $\varepsilon > 0$, on peut supposer $\varepsilon < \inf\{a,b\}$. L'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, donc

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2, \qquad 0 < ap - bq < \varepsilon.$$

Les entiers p et q sont de même signe car $\varepsilon < \inf\{a,b\}$. S'ils sont tous les deux positifs, on a prouvé (*). Sinon, on réutilise la densité de $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ qui entraîne

$$\exists (p',q') \in \mathbb{Z}^2, \qquad 0 < ap' - bq' < \frac{ap - bq}{K} < \frac{\varepsilon}{K}, \qquad K = \sup\{|p|,|q|\}. \tag{$**$}$$

Une nouvelle fois, p' et q' sont de même signe. S'ils sont positifs, on a prouvé (*). Sinon, (**) entraîne

$$0 < (ap - bq) - K(ap' - bq') = a(p - Kp') - b(q - Kq') < \varepsilon. \tag{$***$}$$

L'entier $p - Kp'$ est positif car $p' \leq -1$ donc $p - Kp' \geq p + K \geq 0$; de même $q - Kq' \in \mathbb{N}$, et finalement, (***) entraîne (*).

L'ensemble $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ étant stable par addition, l'assertion (*) entraîne la densité de $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$. De même, $b\mathbb{N} - a\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$, donc $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}^-$, et finalement $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

d) Nous allons montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $[-1,1]$. Il suffit pour cela de prouver que $X = \{\sin n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. Considérons la fonction $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sin x$. On a $f^{-1}(X) = \mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$, et comme $\mathbb{N} - 2\pi\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (car 2π est irrationnel), on en déduit que $f^{-1}(X)$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donnons nous $a, b \in [-1,1]$, $a < b$. Comme $f^{-1}(\,]a,b[\,)$ est ouvert (f est continue), on a

$$f^{-1}(]a,b[\cap X) = f^{-1}(\,]a,b[\,) \cap f^{-1}(X) \neq \varnothing,$$

donc $]a,b[\cap X \neq \varnothing$. Ainsi X est dense dans $[-1,1]$, d'où le résultat.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite telle que

$$u_0 \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}.$$

Prouver que la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$$

est convergente et calculer sa limite.

Solution. Nous traitons plusieurs cas, selon la position de u_0 par rapport à 1.

– $u_0 < 1$. Soit $\theta \in \,]0, \pi/2]$ tel que $u_0 = \cos\theta$. La formule trigonométrique

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos u}{2}} \quad \text{entraîne immédiatement} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

En utilisant maintenant l'identité

$$\forall u \notin \pi\mathbb{Z}, \qquad \cos u = \frac{\sin 2u}{2\sin u},$$

on voit que pour tout entier naturel non nul n,

$$v_n = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\sin\theta}{2\sin(\theta/2)}\cdot\frac{\sin(\theta/2)}{2\sin(\theta/4)}\cdots\frac{\sin(\theta/2^{n-1})}{2\sin(\theta/2^n)} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin(\theta/2^n)},$$

et on en conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sqrt{1-u_0^2}}{\arccos u_0}.$$

– $u_0 = 1$. Dans ce cas, on a $u_n = 1$ pour tout n et tout est trivial.

– $u_0 > 1$. On procède comme dans le cas $u_0 < 1$ en remplaçant les fonctions trigonométriques par les fonctions hyperboliques correspondantes. Si on écrit $u_0 = \operatorname{ch}\theta$, on montre que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\operatorname{sh}\theta}{\theta} = \frac{\sqrt{u_0^2-1}}{\operatorname{argch} u_0}.$$

Remarque. En partant de $u_0 = 0$, la suite (v_n) converge vers $2/\pi$, ce qui s'écrit

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots,$$

formule découverte par François Viète (1540-1603), qu'il obtint en considérant l'aire de polygones réguliers à 2^n côtés.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$u_1 = 1, \qquad \forall n \geq 2, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

Donner un équivalent puis calculer les deux premiers termes du développement asymptotique de (u_n) lorsque $n \to +\infty$.

Solution. Une autre manière de voir les choses est d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots}}}.$$

Dans cette expression, on "intuite" que seul le premier terme $\sqrt{n}$ est prépondérant dans l'expression de (u_n). Nous allons donc montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$. Pour cela, nous commençons par montrer par récurrence $u_n \leq 2\sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, c'est vrai. Pour passer au rang n au rang $n+1$, on écrit

$$u_{n+1}^2 = n + 1 + u_n \leq n + 1 + 2\sqrt{n} = (\sqrt{n}+1)^2 \leq \left(2\sqrt{n+1}\right)^2.$$

Maintenant, il suffit d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}},$$

ce qui entraîne immédiatement $u_n \sim \sqrt{n}$.

Pour calculer le second terme du développement asymptotique de (u_n), on écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} = \sqrt{n + \sqrt{n-1}\,(1+o(1))} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n-1}}{n}\,(1+o(1))}$$
$$= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{n-1}}{n}\,(1+o(1))\right) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,(1+o(1))\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Remarque. En itérant le procédé, on peut en fait calculer un nombre quelconque de termes du développement asymptotique de (u_n).

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive majorée. On dit que $A \subset \mathbb{N}$ est de densité nulle si $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}(A \cap [0,n]) = 0$. Montrer que (i) et (ii) sont équivalents :

(i) La suite (S_n) définie par $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge vers 0.

(ii) Il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ de densité nulle telle que $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\notin A}} u_n = 0$.

Solution. Commençons par prouver que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $\varepsilon > 0$. Soit M un majorant de (u_n) et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < \varepsilon$ pour tout $n > N$ et $n \notin A$. Lorsque $n > N$ on a

$$|S_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{N<k\leq n\\ k\notin A}} u_k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{N<k\leq n\\ k\in A}} u_k < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \varepsilon + M\frac{\mathrm{Card}(A\cap[0,n])}{n}.$$

Lorque $n \to +\infty$ les termes de gauche et de droite de la dernière somme, tendent vers 0. Donc il existe $N' \geq N$ tel que pour $n \geq N'$, ces deux termes soient chacuns inférieurs à ε. On en déduit que $|S_n| < 3\varepsilon$ pour $n \geq N'$, ce qui montre le résultat voulu.

Montrons maintenant (i) $\Longrightarrow$ (ii). La suite (S_n) converge vers 0 donc la suite (α_n) définie par $\alpha_n = \sup_{k\geq n} S_k$ converge également vers 0. On peut se placer dans le cas où la limite de (u_n) n'est pas nulle, sinon il suffit de choisir $A = \varnothing$ et (ii) est prouvé. Dans ce cas on a $\alpha_n > 0$. Définissons $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid u_n \geq \sqrt{\alpha_n}\}$. Lorsque $n \notin A$ on a $0 \leq u_n < \sqrt{\alpha_n}$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\notin A}} u_n = 0$.

Lorsque $k \in A \cap [0,n]$, on a $u_k \geq \sqrt{\alpha_k} \geq \sqrt{\alpha_n}$ ce qui entraîne

$$\mathrm{Card}(A\cap[0,n]) \leq \sum_{\substack{k\in A\\ 1\leq k\leq n}} \frac{u_k}{\sqrt{\alpha_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{Card}(A\cap[0,n])}{n} \leq \frac{S_n}{\sqrt{\alpha_n}} \leq \sqrt{\alpha_n}.$$

On en déduit que A est de densité nulle, et on a bien prouvé (ii).

2. Séries numériques

2.1. Généralités

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel E. On appelle *série* de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

On note cette série $\sum u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n s'appelle le *terme d'indice* n, S_n s'appelle la *somme partielle* d'indice n, de la série $\sum u_n$.

Lorsque E est un e.v.n, on dit que $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite s'appelle la *somme* de la série et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle alors *reste* d'indice n l'élément R_n défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Exemple 1. — *Séries arithmétiques.* Les séries de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} na$ où a est une constante sont toujours divergentes dès que $a \neq 0$. Les sommes partielles de cette séries peuvent s'exprimer de manière explicite grâce à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

— *Séries géométriques.* Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ où q est un nombre complexe, convergent si et seulement si $|q| < 1$. Lorsque $q \neq 1$, les sommes partielles sont données par

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

et si $|q| < 1$, la somme et les restes de la série s'expriment explicitement :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}.$$

Critère de Cauchy pour les séries. Le critère de Cauchy pour les suites s'étend aisément pour les séries et donne le résultat suivant.

PROPOSITION 1. *Une série $\sum u_n$ à valeurs dans un espace de Banach converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \|u_n + \cdots + u_{n+p}\| < \varepsilon.$$

COROLLAIRE 1. *Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque 1. La réciproque de ce corollaire est fausse ; par exemple, la série *harmonique* $\sum 1/n$ diverge (voir la proposition 2).

Séries absolument convergentes. Voyons une autre conséquence importante du critère de Cauchy pour les séries :

THÉORÈME 1. *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace de Banach. Si la série $\sum \|u_n\|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est* absolument convergente*, et dans ce cas, la série $\sum u_n$ est convergente.*

Ainsi, on est souvent ramené à prouver la convergence d'une série à termes positifs. Le but de la partie qui suit est de donner des conditions suffisantes pour assurer la convergence d'une série à termes positifs.

2.2. Séries à termes positifs

Toute suite réelle croissante et majorée converge, et comme conséquence immédiate, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée.*

On en déduit facilement :

THÉORÈME 3. *On considère deux séries réelles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge ; si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.

→ THÉORÈME 4. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs.*

(i) Si $v_n = O(u_n)$ *lorsque* $n \to +\infty$ *et si* $\sum u_n$ *converge, alors* $\sum v_n$ *converge ;*

(ii) si $u_n \sim v_n$ *lorsque* $n \to +\infty$*, alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Remarque 2. Attention, l'assertion (ii) de ce dernier théorème n'est vraie que pour des séries à termes positifs (voir l'exercice 7 page 223 pour un contre-exemple avec des séries à termes non positifs).

→ PROPOSITION 2 (SÉRIES DE RIEMANN). *Soit* α *un nombre réel. La série de Riemann*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Équivalents des sommes partielles et des restes. Le résultat qui suit est crucial dans beaucoup d'exercices. Il complète le théorème 4.

→ THÉORÈME 5. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes* positifs, *telles que* $u_n \sim v_n$ *lorsque* $n \to +\infty$. *Alors*

(i) si $\sum u_n$ *converge,* $\sum v_n$ *converge et les restes vérifient*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k, \quad n \to +\infty\,;$$

(ii) si $\sum u_n$ *diverge,* $\sum v_n$ *diverge et les sommes partielles vérifient*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k, \qquad n \to +\infty.$$

Démonstration. On sait déjà que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature (c'est l'assertion (ii) du théorème 4).

(i). Soit $\varepsilon > 0$. L'équivalence $u_n \sim v_n$ entraîne

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \qquad (1-\varepsilon)u_k \leq v_k \leq (1+\varepsilon)u_k,$$

donc

$$\forall n \geq N, \qquad (1-\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} u_k,$$

d'où (i).

(ii). Soit $\varepsilon > 0$. Comme précédemment, on commence par écrire

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \qquad (1-\varepsilon)u_k \leq v_k \leq (1+\varepsilon)u_k.$$

On en déduit

$$\forall n \geq N, \qquad \sum_{k=0}^{N-1} v_k + (1-\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} v_k + (1+\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} u_k.$$

Comme $\sum u_n$ diverge, chacun des termes extrêmes de ces inégalités sont respectivement équivalents à $(1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $(1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} u_k$ On en déduit

$$\exists N' \geq N, \forall n \geq N', \qquad (1-2\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq (1+2\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} u_k,$$

d'où le résultat. □

Application. Ce dernier résultat permet de donner des développements asymptotiques de certaines suites ou séries. Pour illustrer ce propos, nous allons donner un développement asymptotique à l'ordre 3 des *nombres harmoniques* H_n définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a) On commence par remarquer que lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{n} \sim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Comme $\sum 1/n$ diverge et que les deux séries en présence sont à termes positifs, on peut appliquer la partie (ii) du théorème 5 qui entraîne

$$H_n \sim \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) = \log(n+1),$$

autrement dit $H_n \sim \log n$.

b) Nous avons obtenu le premier terme de notre développement asymptotique. Pour obtenir le suivant, on considère la suite $U_n = H_n - \log n$, et on écrit

$$U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} - \log n + \log(n-1) = \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \qquad (*)$$

donc la série $\sum(U_n - U_{n-1})$ converge. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=2}^{n} (U_k - U_{k-1}) = U_n - U_1,$$

la suite (U_n) converge. Notons γ sa limite, de sorte que

$$H_n = \log n + U_n = \log n + \gamma + o(1).$$

c) Poursuivons. En appliquant la partie (i) du théorème 5, on en déduit un équivalent des restes de $\sum(U_n - U_{n-1})$, ce qui s'écrit

$$\gamma - U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (U_k - U_{k-1}) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Pour obtenir un équivalent de ce dernier terme, on écrit

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \quad \text{donc}$$

$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{1}{n+1} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n}, \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}.$$

Finalement, on a démontré

$$U_n - \gamma \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2n}, \quad \text{donc} \quad H_n = \log n + U_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Remarque 3. — Il est important de retenir ce résultat. Le nombre réel γ est une constante classique appelée *constante d'Euler*. On a $\gamma = 0.577215664\ldots$.

— On aurait pu poursuivre ce développement asymptotique en itérant la méthode. Un développement asymptotique de H_n à un ordre quelconque fait l'objet du sujet d'étude 3 page 321, par la formule d'Euler-Maclaurin.

— Cette méthode est assez générale. On peut l'utiliser par exemple sur la série $\sum \log(n)$ pour obtenir un développement asymptotique de $n!$ à plusieurs termes (voir le commentaire de l'exercice 3 page 219 sur la formule de Stirling).

Comparaison série-intégrale.

PROPOSITION 3. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (U_n) définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n) - \int_0^n f(t)\,dt$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ont même nature.

Démonstration. La décroissance de f entraîne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k).$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt \right) + f(n) \geq f(n) \geq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} - U_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq 0.$$

La suite (U_n) est décroissante et minorée, elle converge donc. □

Remarque 4. Ce résultat reste vrai si f est seulement supposée décroissante à partir d'une certaine abscisse X (reprenez la preuve précédente).

– Si f est $\mathcal{C}^1$ à valeurs complexes et f' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on peut également montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ont même nature (voir l'exercice 12 page 227).

Exemple 2. — On retrouve avec ce résultat celui de la proposition 2 sur les séries de Riemann.

— Si on applique ce résultat à la fonction $f : x \mapsto 1/(1+x)$, on montre que la suite (U_n) définie par

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_0^{n-1} f(t)\,dt = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

converge. En notant γ la limite de (U_n) (c'est la constante d'Euler), on retrouve ainsi le fait que

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1).$$

Séries de Bertrand. On appelle ainsi les séries de la forme

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2. \qquad (*)$$

On a vu (voir la proposition 6 page 149 sur les intégrales de Bertrand) que

$$\left(\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \log^\beta t} \quad \text{converge} \right) \quad \Longleftrightarrow \quad ((\alpha > 1) \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)).$$

Si $\alpha \leq 0$, il est clair que la série de Bertrand (*) diverge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ (on peut dire par exemple que le terme général est supérieur à $1/n$ à partir d'un certain rang). Si $\alpha > 0$, la fonction $f(t) = t^{-\alpha}\log^{-\beta} t$ étant décroissante au voisinage de $+\infty$, on en déduit (voir la remarque précédente) que

$$\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n} \quad \text{converge}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad ((\alpha > 1) \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)).$$

2.3. Quelques recettes

PROPOSITION 4. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs, telles qu'à partir d'un certain rang, on ait $u_{n+1}/u_n \geq v_{n+1}/v_n$. Alors*

(i) si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge ;

(ii) si $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1}/u_n \geq v_{n+1}/v_n$ pour tout $n \geq N$. Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \geq N, \qquad \frac{u_n}{u_N} \geq \frac{v_n}{v_N} \quad \text{ou encore} \quad u_n \geq K v_n \quad \text{avec} \quad K = \frac{u_N}{v_N}.$$

On conclut facilement en appliquant le théorème 3 page 209. □

COROLLAIRE 2. *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs vérifiant*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + a/n + o(1/n)}, \qquad a \in \mathbb{R}, \quad n \to +\infty.$$

Alors si $a > 1$, la série $\sum u_n$ converge ; si $a < 1$, la série diverge.

Démonstration. Supposons $a > 1$, et fixons un nombre réel b tel que $1 < b < a$. Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = n^{-b}$. La série $\sum v_n$ converge et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{(1 + 1/n)^b} = \frac{1}{1 + b/n + o(1/n)}.$$

Comme $b < a$, on en déduit qu'à partir d'un certain rang, $v_{n+1}/v_n \geq u_{n+1}/u_n$, donc $\sum u_n$ converge d'après la proposition précédente.

Si $a < 1$, on montrerait en procédant de la même manière qu'à partir d'un certain rang, $u_{n+1}/u_n \geq v_{n+1}/v_n$ où $v_n = n^{-b}$, b étant fixé tel que $a < b < 1$. Comme $\sum v_n$ diverge, on en déduit toujours avec la proposition précédente que $\sum u_n$ diverge. □

Remarque 5. Si $a = 1$, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série. Considérons par exemple la série de Bertrand $\sum u_n$ avec $u_n = n^{-1}\log^\beta n$. Lorsque $\beta < -1$, $\sum u_n$ converge ; lorsque $\beta \geq -1$, $\sum u_n$ diverge, et on a pour tout β

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}.$$

Règle de Raab-Duhamel. PROPOSITION 5 (RÈGLE DE RAAB-DUHAMEL). *Soit (u_n) une série à termes > 0 telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + a/n + O(1/n^2)} \qquad n \to +\infty.$$

Alors il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda/n^a$ lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que la suite $(n^a u_n)$ converge et a une limite > 0. Pour cela, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = \log(n^a u_n)$. Pour l'étudier, on considère la série $\sum w_n$

où pour tout n, $w_n = v_{n+1} - v_n$. On a

$$w_n = \log\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^a\right] + \log\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = a\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc la série $\sum w_n$ converge. Comme $w_1 + \cdots + w_n = v_{n+1} - v_1$, la suite (v_n) converge. Donc $n^a u_n = \exp(v_n)$ converge vers une limite > 0, d'où le résultat. □

Remarque 6. — Cette règle permet de déterminer la nature de la série $\sum u_n$: elle converge si et seulement si $a > 1$.
— Sans la présence du $O(1/n^2)$, le résultat est faux (nous avons vu à la remarque 5 le cas d'une série convergente $\sum u_n$ pour laquelle $u_{n+1}/u_n = (1 + 1/n + o(1/n))^{-1}$).
— La règle de Raab-Duhamel reste vérifiée lorsqu'on remplace $O(1/n^2)$ par $O(1/n^\alpha)$ avec $\alpha > 1$ (pour s'en persuader, reprendre la preuve dans ce cas).

Règle de d'Alembert, règle de Cauchy.

PROPOSITION 6 (RÈGLE DE D'ALEMBERT). *Soit $\sum u_n$ une série à termes > 0 telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda, \qquad \lambda \in [0, +\infty].$$

Alors
(i) si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge ;
(ii) si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge ;
(iii) si $\lambda = 1^+$ (i. e. *si u_{n+1}/u_n tend vers 1 en restant supérieur à 1*), $\sum u_n$ diverge.

PROPOSITION 7 (RÈGLE DE CAUCHY). *Soit $\sum u_n$ une série à termes > 0 telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda, \qquad \lambda \in [0, +\infty].$$

Alors
(i) si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge ;
(ii) si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge ;
(iii) si $\lambda = 1^+$ (i. e. *si $(u_n)^{1/n}$ tend vers 1 en restant supérieur à 1*), $\sum u_n$ diverge.

Remarque 7. On peut montrer que si $u_{n+1}/u_n \to \lambda$, alors $(u_n)^{1/n} \to \lambda$. La réciproque est fausse (par exemple, la suite $u_n = 2 + (-1)^n$ vérifie $(u_n)^{1/n} \to 1$ mais u_{n+1}/u_n ne converge pas).

2.4. Séries semi-convergentes

On appelle ainsi les séries convergentes mais non absolument convergentes.

Séries alternées. Ce sont les séries réelles $\sum u_n$ dont les termes changent alternativement de signe. Au signe près, on peut les écrire $\sum(-1)^n a_n$ où $a_n \geq 0$ pour tout n.

THÉORÈME 6. *Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers* 0. *Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge, et les restes*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \quad \textit{vérifient} \quad |R_n| \leq a_{n+1}.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. La suite (a_n) étant décroissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{2n} - S_{2n-2} = a_{2n} - a_{2n-1} \leq 0, \qquad S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0.$$

Autrement dit, la suite (S_{2n}) est décroissante, (S_{2n+1}) est croissante. Or $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1}$, donc $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite S. La suite (S_n) converge donc vers S et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

Ceci entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1},$$

de même

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |R_{2n-1}| = |S - S_{2n-1}| \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n},$$

ce qui montre $|R_n| \leq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Transformation d'Abel. La transformation d'Abel est aux séries ce que l'intégration par parties est aux intégrales. Soit une série $\sum u_n$ avec $u_n = \alpha_n v_n$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Effectuer une *transformation d'Abel* sur la série $\sum u_n$ c'est écrire, pour tout n,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (S_k - S_{k-1}) \\ &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n\end{aligned}$$

(on peut comparer cette expression à celle de l'intégration par parties, en disant que $\alpha_{k+1} - \alpha_k$ est la "dérivée" de (α_k) et S_n est une "primitive" de (v_n)). Grâce à cette technique, on montre le résultat suivant. C'est la version pour les séries du théorème 5 de la page 152.

THÉORÈME 7 (RÈGLE D'ABEL). *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans un espace de Banach. On suppose que pour tout n, $u_n = \alpha_n v_n$ où*
- *(α_n) est une suite positive, décroissante et tend vers 0 ;*
- *la série $\sum v_n$ est bornée.*

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration. Pour tout n, notons $S_n = v_0 + \cdots + v_n$. Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $\|S_n\| \leq M$ pour tout n. Une transformation d'Abel sur $\sum u_n$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n. \tag{$*$}$$

La série $\sum_k (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k$ converge absolument car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \|(\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k\| \leq \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) M = (\alpha_0 - \alpha_{n+1}) M \leq \alpha_0 M$$

Par ailleurs, $(\alpha_n S_n)$ tend vers 0 car (S_n) est bornée et (α_n) tend vers 0. On en conclut avec l'expression (*) que la série $\sum u_n$ converge. □

Exemple 3. — En prenant $\alpha_n = a_n$ et $v_n = (-1)^n$, on retrouve le résultat de convergence du théorème 6.

— Une série de la forme $\sum \alpha_n e^{ni\theta}$, où (α_n) est une suite décroissante tendant vers 0 et où $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, converge. En effet, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{ni\theta}\right| = \left|\frac{1 - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|},$$

donc la série converge d'après la règle d'Abel. On en déduit en particulier que la série $\sum e^{ni\theta}/n^\alpha$ converge pour tout $\alpha > 0$.

2.5. Séries commutativement convergentes, produit de Cauchy, séries doubles

Séries commutativement convergentes. On appelle ainsi les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ telles que pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ converge. En particulier, une série commutativement convergente est convergente.

THÉORÈME 8. *Une série $\sum u_n$ à valeurs dans un espace de Banach et absolument convergente est commutativement convergente. De plus, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Démonstration. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \|u_{\varphi(k)}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|,$$

donc $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, donc converge. Montrons l'égalité des sommes des deux séries. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\| < \varepsilon$. Comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\{0, 1, \ldots, N\} \subset \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(N')\}$. On en déduit

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}\right\| &\leq \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n\right\| + \left\|\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N'} u_{\varphi(n)}\right\| + \left\|\sum_{n=0}^{N'} u_{\varphi(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}\right\| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\| + \sum_{n=N'+1}^{+\infty} \|u_{\varphi(n)}\| \leq 3 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en conclut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$. □

Produit de Cauchy.

THÉORÈME 9 (PRODUIT DE CAUCHY). *Soient $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p$ et $\sum_{q\in\mathbb{N}} b_q$ deux séries absolument convergentes à valeurs dans une algèbre normée complète. Alors la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \qquad \text{avec} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

est appelée produit de Cauchy *de $\sum a_p$ et $\sum b_q$, elle est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right). \tag{$*$}$$

Démonstration. La série $\sum c_n$ est absolument convergente d'après la majoration

$$\sum_{n=0}^{N} \|c_n\| \leq \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{p+q=n} \|a_p\| \cdot \|b_q\|\right) \leq \sum_{0\leq p,q\leq N} \|a_p\| \cdot \|b_q\| = \left(\sum_{p=0}^{N} \|a_p\|\right)\left(\sum_{q=0}^{N} \|b_q\|\right) \leq AB$$

avec $A = \sum_{p=0}^{+\infty} \|a_p\|$ et $B = \sum_{q=0}^{+\infty} \|b_q\|$. Pour montrer (*), remarquons maintenant que

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{2n} c_k - \left(\sum_{p=0}^{n} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{n} b_q\right) = \sum_{0\le p+q\le 2n} a_p b_q - \sum_{0\le p,q\le n} a_p b_q = \sum_{\substack{p>n\\ p+q\le 2n}} a_p b_q + \sum_{\substack{q>n\\ p+q\le 2n}} a_p b_q$$

ce qui entraîne

$$\|\Delta_n\| \le \sum_{\substack{n<p\le 2n\\ q<n}} \|a_p\|\cdot\|b_q\| + \sum_{\substack{n<q\le 2n\\ p<n}} \|a_p\|\cdot\|b_q\| = \sum_{p=n+1}^{2n} \|a_p\| \sum_{q=0}^{n-1} \|b_q\| + \sum_{p=0}^{n-1} \|a_p\| \sum_{q=n+1}^{2n} \|b_q\|,$$

donc $\|\Delta_n\| \le B \sum_{p=n+1}^{2n} \|a_p\| + A \sum_{q=n+1}^{2n} \|b_q\|$. Ainsi $\|\Delta_n\|$ converge vers 0, d'où (*). □

Séries doubles. On désigne ainsi les séries de la forme $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$.

THÉORÈME 10. *Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite à double entrée, à valeurs dans un espace de Banach. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(i) Pour tout $q\in\mathbb{N}$, $\sum_p u_{p,q}$ est absolument convergente, et $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{\infty} \|u_{p,q}\|\right)$ converge.

(ii) Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\sum_q u_{p,q}$ est absolument convergente, et $\sum_p \left(\sum_{q=0}^{\infty} \|u_{p,q}\|\right)$ converge.

Dans ces hypothèses, on a de plus

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right). \tag{$*$}$$

Démonstration. Montrons (i) $\implies$ (ii). Notons $A_q = \sum_{p=0}^{+\infty} \|u_{p,q}\|$. Pour p fixé, $\|u_{p,q}\| \le A_q$ et d'après (i), $\sum A_q$ converge, donc $\sum_q \|u_{p,q}\|$ converge. Notons B_p la somme de cette série. On a

$$\forall P\in\mathbb{N},\quad \sum_{p=0}^{P} B_p = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{P} \|u_{p,q}\|\right) \le \sum_{q=0}^{+\infty} A_q.$$

Cette majoration étant indépendante de P, on en conclut que $\sum_p B_p$ converge, d'où (ii). On montre de la même manière que (ii) $\implies$ (i).

Montrons maintenant (*). Notons $a_{n,q} = \sum_{p=0}^{n} u_{p,q}$ et $a_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$. La série $\sum a_q$ converge absolument car $\|a_q\| \le A_q$, donc elle converge. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $Q\in\mathbb{N}$ tel que $\sum_{q>Q} A_q < \varepsilon$. Notons $C_n = \sum_{0\le p,q\le n} u_{p,q}$. Lorsque $n > Q$ on a

$$\sum_{q=0}^{+\infty} a_q - C_n = \sum_{q=0}^{Q}(a_q - a_{n,q}) + \sum_{q=Q+1}^{n} (a_q - a_{n,q}) + \sum_{q=n+1}^{+\infty} a_q. \tag{$**$}$$

Pour $q > Q$, on a $\|a_q - a_{n,q}\| = \|\sum_{p>n} u_{p,q}\| \le A_q$ et comme $\|a_q\| \le A_q$, (**) entraîne

$$\left\|\sum_{q=0}^{+\infty} a_q - C_n\right\| \le \left\|\sum_{q=0}^{Q}(a_q - a_{n,q})\right\| + \sum_{q=Q+1}^{\infty} A_q \le \left\|\sum_{q=0}^{Q}(a_q - a_{n,q})\right\| + \varepsilon.$$

Les suites $(a_{n,q})_n$ pour $0\le q\le Q$ convergent vers a_q donc il existe $N_0 \ge Q$ tel que $\|\sum_{q=0}^{Q}(a_q - a_{n,q})\| < \varepsilon$ dès que $n \ge N_0$. Ainsi, pour $n\ge N_0$ on a $\|\sum_{q=0}^{+\infty} a_q - C_n\| < 2\varepsilon$, donc la suite (C_n) converge vers $\sum_{q=0}^{+\infty} a_q$. On montrerait de même que $\sum b_p$ converge et que (C_n) converge vers $\sum_{p=0}^{+\infty} b_p$ (avec $b_p = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$). Ainsi, on peut bien intervertir les signes de sommation. □

Remarque 8. Les résultats précédents s'inscrivent naturellement dans le cadre de la théorie des *familles sommables*, que nous présentons brièvement. Soit E un espace de Banach, I un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I. On considère une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E.

(1) La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite *sommable* s'il existe $S \in E$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in \mathcal{P}_f(I), \forall J \in \mathcal{P}_f(I), J_0 \subset J, \quad \left\| \sum_{i\in J} u_i - S \right\| < \varepsilon.$$

La grandeur S est alors appelée somme de $(u_i)_{i\in I}$ et notée $\sum_{i\in I} u_i$.

(2) Elle est dite *absolument sommable* si la famille $(\|u_i\|)_{i\in I}$ est sommable. Ceci est équivalent à dire que l'ensemble $\{\sum_{i\in J} \|u_i\|, J \in \mathcal{P}_f(I)\}$ est borné.

Les familles sommables vérifient les propriétés suivantes :

(i) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors l'ensemble $\{i \in I, u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

(ii) Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente si et seulement si la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument sommable.

(iii) Une famille absolument sommable est sommable. La réciproque est vraie si E est de dimension finie mais fausse si E est de dimension infinie.

(iv) Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est commutativement convergente si et seulement si la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

(v) (Associativité) Si $(I_t)_{t\in T}$ est une partition de I, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si pour tout $t \in T$, $(u_i)_{i\in I_t}$ est sommable, de somme s_t, et la famille $(s_t)_{t\in T}$ est sommable.

Les résultats précédents découlent naturellement des propriétés des familles sommables : le théorème 8 est la conséquence de (ii), (iii) et (iv). Pour le théorème sur les produits de Cauchy, la convergence absolue de $\sum c_n$ découle de (v) appliqué à la famille $(\|u_p v_q\|)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ avec la partition $(\{(p,q), p+q=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$, et l'égalité des limites provient de (v) appliqué à la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ et à la même partition. L'équivalence des assertions (i) et (ii) du théorème d'interversion des limites est la conséquence de la propriété d'associativité appliquée à la famille $(\|u_{p,q}\|)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$, et la formule (*) est la conséquence de (iii) et de (v) appliqué aux partitions $(\mathbb{N} \times \{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\{n\} \times \mathbb{N})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$.

2.6. Exercices

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b},$$

où a et b sont deux nombres réels positifs fixés. Donner la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de a et b et calculer sa somme lorsqu'elle converge.

Solution. Pour la convergence de la série, il suffit de remarquer que lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + (b-a)/(n+a)} = \frac{1}{1 + (b-a)/n + O(1/n^2)},$$

donc d'après la règle de Raab-Duhamel, il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda/n^{b-a}$. Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$.

Sommons la série lorsque $b - a > 1$. La relation $(n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$ entraîne

$$\sum_{k=0}^{n} (k+b)u_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+a)u_k \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n+1} (k+b-1)u_k = \sum_{k=0}^{n} (k+a)u_k,$$

ce qui s'écrit

$$(b-a-1)\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + (n+b)u_{n+1} = (b-1)u_0. \tag{$*$}$$

Lorsque $n \to +\infty$, $u_n \sim \lambda/n^{b-a}$ avec $b-a>1$, donc $(n+b)u_{n+1} \to 0$, et en faisant $n \to +\infty$ dans (*), on obtient finalement

$$(b-a-1)\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = (b-1)u_0 = (b-1) \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-a-1}.$$

Exercice 2. Soit (u_n) une suite à termes positifs et décroissante. Si la série $\sum u_n$ converge, montrer que $u_n = o(1/n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. La série $\sum u_n$ converge donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n < \varepsilon$. On en déduit, la suite (u_n) étant décroissante, que

$$\forall p > N, \qquad (p-N)u_p \leq u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n < \varepsilon,$$

donc pour tout $p > 2N$, $(p/2)u_p \leq (p-N)u_p < \varepsilon$. Finalement, nous avons $0 \leq pu_p \leq 2\varepsilon$ pour tout $p > 2N$. Ainsi, (nu_n) tend vers 0, d'où le résultat.

Remarque. Ce résultat est la version discrète de celui de l'exercice 4 page 156.

→ Exercice 3 (Formule de Stirling). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

Donner la nature de la série de terme général $v_n = \log(u_{n+1}/u_n)$. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que

$$n! \sim k\sqrt{n}\, n^n e^{-n} \qquad n \to +\infty. \tag{$*$}$$

Calculer la constante k en utilisant la formule de Wallis (voir l'exercice 1 page 130).

Solution. Estimons v_n lorsque $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} v_n = \log\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} e^{-1}\right] &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Cette expression montre que $\sum v_n$ converge. Comme on a $v_1 + \cdots + v_n = \log u_{n+1} - \log u_1$ pour tout n, la suite $(\log u_n)$ converge. En notant λ sa limite, on voit que (u_n) converge vers $k = e^{\lambda} > 0$, d'où l'équivalent (*).

Il nous reste à calculer la constante k. Comme indiqué dans l'énoncé, nous allons utiliser la formule de Wallis qui est

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right]^2 = \pi.$$

Par ailleurs, en utilisant l'équivalent (*) on a lorsque $p \to +\infty$

$$\frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right]^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right]^2 \sim \frac{2^{4p}}{p}\,\frac{k^4 p^{4p+2} e^{-4p}}{k^2 (2p)^{4p+1} e^{-4p}} = \frac{k^2}{2},$$

donc $\pi = k^2/2$ d'après la formule de Wallis, d'où $k = \sqrt{2\pi}$. Finalement, le résultat obtenu est

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \qquad n \to +\infty.$$

Remarque. Il faut connaître ce résultat et savoir le prouver. A partir de la série $\sum v_n$, en procédant comme on l'a fait page 211 pour donner un développement asymptotique des nombres harmoniques, il est possible de calculer un développement asymptotique de $n!$.

Une version continue de la formule de Stirling est traitée dans l'exemple 2 page 166.

EXERCICE 4. **a)** Montrer l'égalité

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1)=1, \qquad \text{où} \qquad \zeta(k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}.$$

b) Montrer l'égalité

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}=1-\gamma, \qquad \text{où} \qquad \gamma=\lim_{n\to+\infty}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n.$$

Solution. **a)** Il s'agit d'un exercice d'interversion de sommation. Pour tout $k\geq 2$, la série à termes positifs $\sum_{n\geq 2}1/n^k$ est convergente, et sa somme $\zeta(k)-1$ vérifie

$$\zeta(k)-1=\frac{1}{2^k}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\leq\frac{1}{2^k}+\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^k}=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{(k+1)2^k}\leq\frac{1}{2^{k-1}}.$$

La série à termes positifs $\sum_{k\geq 2}(\zeta(k)-1)$ est donc convergente. Les séries en présence étant convergentes et à termes positifs, elles sont absolument convergentes donc on peut donc appliquer le théorème d'interversion de sommation (voir le théorème 10 page 217) qui entraîne

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1)=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\right)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\right)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

d'où le résultat.

b) Remarquons que si $U_n=(\sum_{k=1}^n 1/k)-\log n$, on a

$$\forall n\geq 2,\qquad \delta_n=U_n-U_{n-1}=\frac{1}{n}-\log n+\log(n-1)=\frac{1}{n}+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{kn^k}$$

où le dernier terme est obtenu grâce au développement de $\log(1-1/n)$ en série entière. Ceci assure la convergence de la série $\sum_{k\geq 2}1/(kn^k)$. Par ailleurs, l'égalité

$$\forall N>2,\quad \sum_{n=2}^{N}\delta_n=\sum_{n=2}^{N}(U_n-U_{n-1})=U_N-U_1=U_N-1,$$

associée à la convergence de (U_n) vers la constante d'Euler γ (c'est classique, voir par exemple la page 211 sur les sommes harmoniques), prouve que la série à termes négatifs $\sum_{n\geq 2}\delta_n$ converge, et sa somme est $\gamma-1$. On peut appliquer le théorème d'interversion des limites (les séries sont toutes à termes négatifs et convergentes, donc absolument convergentes) qui entraîne

$$1-\gamma=-\sum_{n=2}^{+\infty}\delta_n=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{kn^k}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{kn^k}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}$$

d'où le résultat.

Exercice 5. Soit $f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

Montrer que la série $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Solution. Soit $A > 0$. Il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \geq N$, $f'(x)/f(x) \leq -A$. Ainsi, si on se donne un entier $n \geq N$, on peut écrire

$$\forall p \geq n, \qquad \log \frac{f(n+p)}{f(n)} = \int_n^{n+p} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \leq \int_n^{n+p} -A\,dx = -pA,$$

de sorte que $f(n+p) \leq f(n)e^{-pA}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction f étant positive, ceci assure la convergence de la série $\sum f(n)$. De plus, notre majoration entraîne

$$\forall n \geq N, \qquad 0 \leq R_{n+1} = \sum_{p=1}^{+\infty} f(n+p) \leq f(n) \sum_{p=1}^{+\infty} e^{-pA} = \frac{e^{-A}}{1-e^{-A}}\, f(n).$$

Comme on peut prendre A aussi grand que l'on veut, nous avons en fait montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \qquad 0 \leq R_{n+1} \leq \varepsilon f(n).$$

Autrement dit, $R_{n+1} = o(f(n))$, donc $R_n = f(n) + R_{n+1} \sim f(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Remarque. Un exemple d'application de ce résultat est la convergence de $\sum e^{-n^2}$ et le fait que $\sum_{p=n}^{+\infty} e^{-p^2} \sim e^{-n^2}$.

Exercice 6. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes > 0.

1/ a) Si $\sum u_n$ diverge, discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}, \qquad \text{où} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

b) On suppose $u_n = o(S_n)$ lorsque $n \to +\infty$. Exprimer en fonction de S_n un équivalent des sommes partielles (resp. des restes) de la série $\sum u_n/S_n^\alpha$ lorsqu'elle diverge (resp. lorsqu'elle converge).

2/ a) Si $\sum u_n$ converge, discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série

$$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}, \qquad \text{où} \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k.$$

b) On suppose $u_n = o(R_n)$ lorsque $n \to +\infty$. Exprimer en fonction de R_n un équivalent des sommes partielles (resp. des restes) de la série $\sum u_n/R_n^\alpha$ lorsqu'elle diverge (resp. lorsqu'elle converge).

Solution. **1/ a)** Ceci dépend de la position de α par rapport à 1, comme on le voit dans le cas où $u_n = 1$ pour tout n (dans ce cas, on a affaire aux séries de Riemann).

— Si $\alpha > 1$, on écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha},$$

et comme $\alpha > 1$, on en conclut que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n/S_n^\alpha$ sont majorées. Si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n/S_n^\alpha$ est donc convergente.

— Si $\alpha \leq 1$, nous allons montrer que la série diverge. Par hypothèse, $\sum u_n$ diverge, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $S_n \geq 1$ pour tout $n \geq N$. On écrit ensuite

$$\forall p \geq N, \forall q > p, \qquad \sum_{n=p+1}^{q} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \geq \sum_{n=p+1}^{q} \frac{u_n}{S_n} \geq \frac{u_{p+1} + \cdots + u_q}{S_q} = \frac{S_q - S_p}{S_q} = 1 - \frac{S_p}{S_q}. \qquad (*)$$

Pour tout $p \geq N$, il existe $q > p$ tel que $S_q \geq 2S_p$. On en déduit avec (*) que

$$\forall p \geq N, \exists q > p, \qquad \sum_{n=p+1}^{q} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{1}{2}.$$

Le critère de Cauchy n'est donc pas vérifié pour la série $\sum u_n/S_n^\alpha$, elle diverge donc.

En résumé, la série $\sum u_n/S_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) On va utiliser une comparaison série-intégrale. On écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}^\alpha} = \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha},$$

et comme $u_n = o(S_n)$, on a $S_{n-1} = S_n - u_n \sim S_n$ lorsque $n \to +\infty$, de sorte que notre encadrement entraîne

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \sim \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}. \qquad (**)$$

(Noter au passage que dans le cas ou $u_n = o(S_n)$, cet équivalent est un autre moyen de parvenir au fait que $\sum u_n/S_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.) Supposons $\alpha \leq 1$. D'après (**) et le théorème 5 page 210, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \sim \sum_{k=1}^{n} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \sim \begin{cases} S_n^{1-\alpha}/(1-\alpha) & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1 \\ \log S_n & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases}.$$

Si maintenant $\alpha > 1$, la série $\sum u_n/S_n^\alpha$ converge et d'après (**) et le théorème 5, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_{S_n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)\, S_n^{\alpha-1}}.$$

2/ a) Comme précédemment, tout dépend de la position de α par rapport à 1.

— Si $\alpha < 1$, on écrit pour tout n

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^\alpha} \leq \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{R_k^\alpha} \leq \int_{R_{n+1}}^{R_0} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \int_0^{R_0} \frac{dt}{t^\alpha}$$

(le dernière intégrale converge bien car $\alpha < 1$). On en déduit que les sommes partielles de la série étudiée sont majorées, la série converge donc.

— Si $\alpha \geq 1$, on commence par fixer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $R_n \leq 1$ pour tout $n \geq N$, puis on écrit

$$\forall p, q \geq N, (q > p), \qquad \sum_{k=p}^{q-1} \frac{u_k}{R_k^\alpha} \geq \sum_{k=p}^{q-1} \frac{u_k}{R_k} \geq \frac{u_p + \cdots + u_{q-1}}{R_p} = \frac{R_p - R_q}{R_p} = 1 - \frac{R_q}{R_q}.$$

L'entier $p \geq N$ étant fixé, il existe $q > p$ tel que $R_q < R_p/2$, et la dernière expression montre alors que notre série ne satisfait pas le critère de Cauchy. Elle diverge donc si $\alpha \geq 1$.

Finalement, nous avons montré que $\sum u_n/R_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

b) En procédant comme dans la solution de la question 1/ b), on montre que sous l'hypothèse $u_n = o(R_n)$,
$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} \sim \int_{R_n}^{R_{n+1}} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
En poursuivant le raisonnement comme nous l'avions fait plus haut, on en déduit
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{R_k^\alpha} \sim \begin{cases} \log(1/R_n) & \text{si} \quad \alpha = 1, \\ \left((\alpha-1)R_n^{\alpha-1}\right)^{-1} & \text{si} \quad \alpha > 1, \end{cases} \qquad \text{et pour } \alpha < 1 \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_n}{R_n^\alpha} \sim \frac{R_n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Exercice 7. **a)** Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ où
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}.$$
b) Discuter en fonction des réels θ, φ la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ où
$$\forall n \geq 2, \qquad u_n = \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{n} + e^{ni\varphi}}.$$
c) Plus généralement, discuter en fonction des paramètres $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ où
$$\forall n \geq 2, \qquad u_n = \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha + e^{ni\varphi}}.$$

Solution. **a)** On a affaire à une série alternée. Attention à ne pas commettre l'erreur d'appliquer directement le théorème 6 page 214, sous prétexte que la suite $(n^\alpha + (-1)^n)$ est "pratiquement" décroissante.

Une bonne manière de procéder est de calculer un développement asymptotique de (u_n) :
$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \frac{1}{1 + (-1)^n n^{-\alpha}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n,$$
$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \quad w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$
La série $\sum v_n$ converge d'après le théorème 6 page 214, et comme $u_n = v_n + w_n$, on en déduit que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ ont même nature. Comme $w_n \sim n^{-2\alpha}$ (et que $w_n \in \mathbb{R}$), on voit finalement que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

b) Comme précédemment, le plus sûr est de calculer un développement asymptotique de (u_n) :
$$u_n = \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1 + e^{ni\varphi}/\sqrt{n}}\right) = v_n + w_n + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \qquad v_n = \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{n}}, \quad w_n = -\frac{e^{ni(\theta+\varphi)}}{n}.$$
Ceci montre que la série $\sum u_n - (v_n + w_n)$ converge, donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum(v_n + w_n)$. A ce stade, on traite plusieurs cas.

(i) Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\theta + \varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors chacune des séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ converge (c'est la plus classique conséquence de la règle d'Abel, voir l'exemple 3 page 215), donc $\sum(v_n + w_n)$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\theta + \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $v_n + w_n \sim 1/\sqrt{n}$, et comme $v_n + w_n \in \mathbb{R}$, $\sum(v_n + w_n)$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

(iii) Si l'un et l'un seulement des réels $\theta, \theta + \varphi$ est un multiple de 2π, alors parmi les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$, l'une est divergente et l'autre convergente (ce dernier point est toujours justifié par la règle d'Abel). On en déduit que $\sum(v_n + w_n)$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

Finalement, nous avons montré que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\theta + \varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

c) On généralise la méthode précédente. L'idée est de calculer un développement asymptotique de (u_n) jusqu'à un terme d'erreur de la forme $O(1/n^a)$ avec $a > 1$.

Si $\alpha > 1$, la série converge absolument donc converge, sinon $0 < \alpha \leq 1$ et on note $p = [1/\alpha] - 1$ ($[1/\alpha]$ est la partie entière de $1/\alpha$), de sorte que $(p+1)\alpha \leq 1 < (p+2)\alpha$. On écrit

$$u_n = \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\frac{1}{1+e^{ni\varphi}n^{-\alpha}} = u_{n,0} + u_{n,1} + \cdots + u_{n,p} + O\left(\frac{1}{n^{(p+2)\alpha}}\right), \qquad u_{n,k} = (-1)^k \frac{e^{ni(\theta+k\varphi)}}{n^{(k+1)\alpha}}.$$

Comme $(p+2)\alpha > 1$, ceci montre que

$$\text{la série } \sum_n u_n \text{ a même nature que la série } \sum_n (u_{n,0} + \cdots + u_{n,p}). \tag{$*$}$$

Deux cas se présentent :

(i) Si pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, $\theta + k\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors chacune des séries $\sum_n u_{n,k}$ converge (pour $0 \leq k \leq p$) d'après la règle d'Abel, donc $\sum u_n$ converge d'après le principe (*).

(ii) Sinon, il existe un plus petit entier k tel que $\theta + k\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\theta + \ell\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$ pour $0 \leq \ell < k$, les séries $\sum_n u_{n,\ell}$ $(0 \leq \ell < k)$ convergent, et on en déduit d'après (*) que $\sum_n u_n$ est de même nature que $\sum_n (u_{n,k} + \cdots + u_{n,p})$. Notons $v_n = u_{n,k} + \cdots + u_{n,p}$. On a

$$u_{n,k} = \frac{(-1)^k}{n^{(k+1)\alpha}} \quad \text{et} \quad u_{n,k+1} + \cdots + u_{n,p} = O\left(\frac{1}{n^{(k+2)\alpha}}\right),$$

donc $v_n \sim (-1)^k / n^{(k+1)\alpha}$. A ce stade, on ne peut conclure directement que $\sum v_n$ diverge car v_n est un nombre complexe. Pour s'en tirer, on va considérer la partie réelle de v_n, en posant $x_n = \Re(v_n)$. Elle vérifie aussi $x_n \sim (-1)^k / n^{(k+1)\alpha}$ et comme x_n est de signe constant et que $(k+1)\alpha \leq 1$, $\sum x_n$ diverge. Donc $\sum v_n$ diverge (une suite complexe converge si et seulement si ses parties réelles et imaginaires convergent), donc $\sum u_n$ diverge.

Finalement, nous avons montré que $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$(\alpha > 1) \quad \text{ou} \quad \left(0 < \alpha \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \leq \left[\frac{1}{\alpha}\right] - 1, \quad \theta + k\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}\right).$$

Exercice 8. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs dont le terme général tend vers 0. On note S_n la somme partielle d'indice n de cette série. Montrer que si la suite $(S_n - nu_n)$ est bornée, alors $\sum u_n$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

Solution. Raisonnons par l'absurde en supposant la série $\sum u_n$ divergente. Alors $S_n \to +\infty$ donc l'estimation $S_n - nu_n = O(1)$ entraîne

$$nu_n = S_n + O(1) \quad \text{donc} \quad \frac{u_n}{S_n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{nS_n}\right) \sim \frac{1}{n}. \tag{$*$}$$

à ce stade, nous allons utiliser une technique classique : on écrit

$$\log\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = -\log\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim \frac{u_n}{S_n} \sim \frac{1}{n}.$$

On en déduit que la série $\sum \log(S_n/S_{n-1})$ diverge, et on peut sommer terme à terme ces équivalents (voir le théorème 5 page 210), ce qui donne

$$\log S_n - \log S_0 = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n$$

(ce dernier équivalent est hyper-classique, voir par exemple page 211), donc $\log S_n \sim \log n$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\log(S_n) \geq (\log n)/2$ pour tout $n \geq N$, et donc $S_n \geq \sqrt{n}$ pour tout $n \geq N$. On injecte cette minoration dans (*), ce qui donne

$$\frac{u_n}{S_n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{nS_n}\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Nous possédons maintenant plus d'information que dans (*). Nous allons en tirer parti pour calculer un développement asymptotique à deux termes de $\log S_n$. On a

$$\frac{1}{n} + \log\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{u_n}{S_n} + O\left(\frac{u_n^2}{S_n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

donc la série $\sum 1/n + \log(S_{n-1}/S_n)$ converge. En notant λ sa somme, on a

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \log S_0 - \log S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \log\left(\frac{S_{k-1}}{S_k}\right)\right) = \lambda + o(1),$$

donc

$$\log S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \log S_0 - \lambda + o(1) = \log n + \gamma + \log S_0 - \lambda + o(1),$$

où γ désigne la constante d'Euler. En passant aux exponentielles, on en déduit

$$S_n \sim Kn, \qquad K = e^{\gamma + \log S_0 - \lambda} > 0.$$

Comme $u_n \sim S_n/n$ d'après (*), on en déduit que la suite (u_n) converge vers la constante non nulle K, ce qui est contraire aux hypothèses. La série $\sum u_n$ converge donc.

La réciproque est fausse. Par exemple, la suite (u_n) définie par

$$u_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{si} \quad n \notin \{2^k,\ k \in \mathbb{N}\} \\ 1/\sqrt{n} & \text{si} \quad n \in \{2^k,\ k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

est convergente mais $(S_n - nu_n)$ n'est pas bornée.

Exercice 9. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Comparer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}.$$

Solution. Si $\sum u_n$ diverge, on ne peut rien conclure quant à la nature de $\sum v_n$. Par exemple

— si $u_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum u_n$ diverge et $v_n = 1/(1+n) \sim 1/n$, donc $\sum v_n$ diverge ;

— si $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum u_n$ diverge et $v_n = 1/(1+n^2) \sim 1/n^2$, donc $\sum v_n$ converge.

Si $\sum u_n$ converge, nous montrons que $\sum v_n$ diverge. Deux cas se présentent :

(i) si $(n^2 u_n)$ ne tend vers pas $+\infty$, alors (v_n) ne tend pas vers 0 donc $\sum v_n$ diverge ;

(ii) si $(n^2 u_n)$ tend vers $+\infty$, alors $v_n \sim 1/(n^2 u_n)$, donc $(u_n v_n)^{1/2} \sim 1/n$, et donc $\sum (u_n v_n)^{1/2}$ diverge. L'inégalité de Schwarz,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{u_n v_n}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right),$$

montre alors que les sommes partielles de $\sum v_n$ divergent vers $+\infty$, donc $\sum v_n$ diverge.

Exercice 10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $\log^{(k)} = \log \circ \cdots \circ \log$ le logarithme itéré k fois, et on note $n_k \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\log^{(k)} n$ est défini et ≥ 1 pour tout $n \geq n_k$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\beta > 0$. Discuter de la convergence de la série

$$\sum_{n \geq n_k} \frac{1}{n \times \log n \times \cdots \times \log^{(k-1)} n \times (\log^{(k)} n)^\beta}$$

en fonction de β, et donner un équivalent de ses sommes partielles lorsqu'elle diverge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le plus grand entier k tel que $\log^{(k)} n \geq 1$. Donner la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n \times \log n \times \log\log n \times \cdots \times \log^{(k_n)} n}$$

et déterminer un équivalent des sommes partielles de cette dernière si elle diverge.

Solution. **a)** Il suffit d'appliquer la proposition 3 sur la comparaison série-intégrale, page 212, à la fonction décroissante $f_{k,\beta} \ : [n_k, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1/(x \times \cdots \times \log^{(k-1)} x \times (\log^{(k)} x)^\beta)$. Traitons d'abord le cas $\beta = 1$. On montre facilement par récurrence sur k qu'une primitive de $f_{k,1}$ est $\log^{(k+1)}$, on en déduit que les sommes partielles de la série divergent car elles vérifient

$$\sum_{p=n_k}^{n} f_{k,1}(p) = \int_{n_k}^{n} f_{k,1}(x)\,dx + O(1) = \log^{(k+1)} n + O(1).$$

Lorsque $\beta \neq 1$, une primitive de la fonction $f_{k,\beta}$ est donnée par $(1-\beta)^{-1}(\log^{(k)} x)^{1-\beta}$, donc

$$\sum_{p=n_k}^{n} f_{k,\beta}(p) = \int_{n_k}^{n} f_{k,\beta}(x)\,dx + O(1) = \frac{(\log^{(k)} n)^{1-\beta}}{1-\beta} + O(1).$$

On en déduit que si $\beta < 1$, la série diverge et ses sommes partielles sont équivalentes à $(\log^{(k)} n)^{1-\beta}/(1-\beta)$. Si $\beta > 1$ l'estimation précédente montre que les sommes partielles sont bornées, et comme la série est à termes positifs elle converge (notons que dans ce cas, on montrerait facilement que les restes de la série sont équivalents à $(\beta-1)^{-1}1/(\log^{(k)} n)^{\beta-1}$).

b) Définissons la suite (e_k) par $e_0 = 1$ et $e_{k+1} = \exp(e_k)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction continue décroissante $g_k \ : \ [e_k, e_{k+1}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1/(x \times \log x \times \cdots \times \log^{(k)} x)$, puis on considère la fonction $g \ : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = g_k(x)$ sur chaque intervalle $x \in [e_k, e_{k+1}[$. L'identité $\log^{(k)}(e_k) = 1$ entraîne $g_{k-1}(e_k) = g_k(e_k)$ donc g est continue, et comme chaque g_k est décroissante on en déduit que g est également décroissante. Par ailleurs, on a $n \in [e_{k_n}, e_{k_n+1}[$ donc $u_n = g(n)$. On peut donc appliquer le résultat la comparaison série-intégrale, qui entraîne

$$\sum_{p=1}^{n} u_p = \int_1^n g(x)\,dx + O(1) = \sum_{j=0}^{k_n-1} I_j + R_n + O(1)$$

avec

$$I_j = \int_{e_j}^{e_{j+1}} g_j(x)\,dx, \qquad R_n = \int_{e_{k_n}}^{n} g_{k_n}(x)\,dx.$$

Nous avons vu plus haut qu'une primitive de g_j est $\log^{(j+1)}$, donc $I_j = \log^{(j+1)} e_{j+1} - \log^{(j+1)} e_j$, et par récurrence sur j on en déduit facilemet $I_j = 1$ (on peut aussi procéder à partir du changement de variable $t = e^x$ dans l'intégrale I_j qui montre que $I_j = I_{j-1}$). On a $0 \leq R_n \leq I_{k_n} = 1$, on en déduit donc $\sum_{p=1}^n u_p = k_n + O(1)$. Ainsi la série diverge et les sommes partielles sont equivalentes à k_n.

EXERCICE 11. **a)** Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \log k/k$. Montrer l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $u_n = (\log^2 n)/2 + C + o(1)$.

b) Démontrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \log n/n$ et utiliser le résultat de la question précédente pour calculer la somme de cette série.

Solution. **a)** Le plus simple est d'appliquer la proposition 3 sur la comparaison série-intégrale, page 212. Ici on a $u_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1)$ avec $f(x) = \log(x+1)/(x+1)$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = (1 - \log(x+1))/(x+1)^2$ donc f est décroissante à partir d'un certain rang. Comme indiqué dans la remarque 4 page 212, le résultat de la proposition 3 reste vérifié, on conclut que $u_n - \int_0^n f(x)\,dx = u_n - \frac{1}{2}\log^2(n+1) = u_n - \frac{1}{2}\log^2 n + o(1)$ converge, d'où le résultat.

On aurait pu aussi procéder comme on l'a fait à la page 211 pour les sommes harmoniques : pour montrer la convergence de $v_n = u_n - (\log^2 n)/2$, on calcule l'estimation $v_n - v_{n-1} = O(\log n/n^2)$, entraînant la convergence de $\sum(v_n - v_{n-1})$ donc celle de la suite (v_n).

b) Notons $a_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \log k/k$. Pour montrer la convergence de $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \log n/n$ il suffit de montrer celle de (a_n) car le terme général de la série converge vers 0, et de plus la somme de la série égale la limite de (a_n). On récrit a_n sous la forme

$$a_n = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\log 2k}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\log k}{k} = H_n \log 2 + u_n - u_{2n}, \qquad \text{avec} \qquad H_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}.$$

En utilisant l'asymptotique des sommes harmoniques $H_n = \log n + \gamma + o(1)$ (où γ est la constante d'Euler, voir la page 211), et celle de (u_n), on en déduit

$$a_n = \log 2\, \log n + \gamma \log 2 + \frac{\log^2 n - \log^2(2n)}{2} + o(1) = \gamma \log 2 - \frac{\log^2 2}{2} + o(1).$$

La série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \log n/n$ converge donc et sa somme est égale à $(\gamma - \frac{1}{2}\log 2)\log 2$.

→ Exercice 12. **1/** Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ converge.
a) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)$ a même nature que la suite $(\int_1^n f(t)\,dt)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) (Application.) Lorsque $\alpha > 1/2$, donner la nature de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}. \tag{$*$}$$

2/ En généralisant la technique précédente, donner la nature de la série (*) lorsque $0 < \alpha \leq 1/2$.

Solution. **1/ a)** Nous allons montrer que la suite (s_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad s_n = \int_1^{n+1} f(t)\,dt - \sum_{p=1}^{n} f(p)$$

est une suite convergente, ce qui montrera le résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \int_n^x f(t)\,dt$ à l'ordre 1, on a

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt \quad \text{donc} \quad \left|f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\right| \leq \int_n^{n+1}|f'(t)|\,dt.$$

Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\big(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\big)$ converge absolument donc converge, c'est-à-dire que (s_n) converge, d'où le résultat.

b) Nous allons appliquer le résultat précédent à la fonction $f(t) = e^{i\sqrt{t}}/t^\alpha$. On a

$$\forall t > 0, \qquad |f'(t)| = \left|\frac{i\,e^{i\sqrt{t}}}{2t^{\alpha+1/2}} - \alpha\frac{e^{i\sqrt{n}}}{t^{1+\alpha}}\right| \leq \frac{1}{2t^{\alpha+1/2}} + \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$$

et comme $\alpha > 1/2$, cette expression montre que $\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ converge. Ainsi, la série étudiée a même nature que la suite $\big(\int_1^n f(t)\,dt\big)$. Nous allons montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, ce qui entraînera la convergence de la série. Le changement de variable $v = u^2$ montre que cette dernière intégrale a même nature que $\int_1^{+\infty} e^{iv}/v^{2\alpha-1}\,dv$, donc convergente car $2\alpha-1>0$ (voir le début de la remarque 6 page 153).

2/ On pose $f(t)=e^{i\sqrt{t}}/t^\alpha$. Ici, la technique précédente ne peut pas s'appliquer car l'intégrale $\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ diverge. On généralise, en appliquant pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ à la fonction $x\mapsto\int_n^x f(t)\,dt$ la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, ce qui donne

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(n)+\frac{f'(n)}{2}+\int_n^{n+1}\frac{(n+1-t)^2}{2}f''(t)\,dt,$$

ce qui entraîne

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \left|\int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n)-\frac{f'(n)}{2}\right|\leq\int_n^{n+1}|f''(t)|\,dt. \qquad (**)$$

Ici, on a

$$\forall t>0,\qquad f''(t)=-\frac{e^{i\sqrt{t}}}{4t^{\alpha+1}}-\left(\alpha+\frac14\right)\frac{ie^{i\sqrt{t}}}{t^{\alpha+3/2}}+\alpha(\alpha+1)\frac{e^{i\sqrt{t}}}{t^{\alpha+2}}=O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right),$$

donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}|f''(t)|\,dt$ converge, donc d'après (**) la série $\sum\big(\int_n^{n+1}f(t)\,dt-f(n)-f'(n)/2\big)$ converge. Or

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad f'(n)=\frac{ie^{i\sqrt{n}}}{2n^{\alpha+1/2}}-\alpha\frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^{1+\alpha}},$$

et en appliquant le résultat de la question précédente, on voit que $\sum f'(n)$ converge. Finalement, la série $\sum\int_n^{n+1}f(t)\,dt-f(n)$ converge, en particulier, la suite $\big(\int_1^n f(t)\,dt\big)$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature. En écrivant

$$\int_1^n f(t)\,dt=\int_1^{\sqrt{n}}\frac{e^{iv}}{v^{2\alpha-1}}\,dv=\left[\frac{e^{iv}}{iv^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{n}}-\frac{1-2\alpha}{i}\int_1^{\sqrt{n}}\frac{e^{iv}}{v^{2\alpha}}\,dv,$$

on s'aperçoit que $\big(\int_1^n f(t)\,dt\big)$ diverge car $\alpha\leq 1/2$. Finalement, nous venons de montrer que la série (*) diverge pour $0<\alpha\leq 1/2$.

Remarque. Cette technique de comparaison série-intégrale trouve une généralisation naturelle avec la *formule d'Euler-Maclaurin* (voir le sujet d'étude 3 page 321).

Exercice 13. Soit (u_n) une suite vérifiant

$$u_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\sin u_n.$$

a) Montrer que (u_n) tend vers 0 puis donner un équivalent de (u_n) lorsque $n\to+\infty$.
b) Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

Solution. Il faut avoir fait au moins une fois dans sa vie ce type d'exercice.
a) L'intervalle $]0,\pi/2]$ est stable par la fonction sinus, donc $u_n\in\,]0,\pi/2]$ pour tout n. De plus, on a $\sin x<x$ sur cet intervalle, donc la suite (u_n) est strictement décroissante. Par ailleurs, elle est minorée par 0, elle converge donc. Sa limite ℓ vérifie $\sin(\ell)=\ell$, donc $\ell=0$.

Donnons maintenant un équivalent de (u_n). On utilise pour cela une jolie astuce (bravo si vous l'avez trouvée), en écrivant

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}&=\frac{1}{\sin^2 u_n}-\frac{1}{u_n^2}=\frac{1}{\big(u_n-u_n^3/6+O(u_n^4)\big)^2}-\frac{1}{u_n^2}\\&=\frac{1}{u_n^2}\left(\frac{1}{1-u_n^2/3+O(u_n^3)}-1\right)=\frac{1}{u_n^2}\left(\frac{u_n^2}{3}+O(u_n^3)\right)=\frac13+O(u_n)\sim\frac13\end{aligned}$$

(on a bien le droit de faire ces développements limités car $u_n \to 0$). Cet équivalent montre que la série $\sum(1/u_{n+1}^2 - 1/u_n^2)$ diverge, et en sommant les équivalents, on obtient (on a le droit, voir le théorème 5 page 210)

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \sim \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3} = \frac{n}{3},$$

autrement dit $1/u_n^2 \sim n/3$ donc $u_n \sim \sqrt{3/n}$.

b) On procède comme plus haut, en cherchant cette fois ci un développement asymptotique à deux termes de $1/u_{n+1}^2 - 1/u_n^2$. On a

$$u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \frac{u_n^5}{120} + o(u_n^5) = u_n\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o(u_n^4)\right)$$

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(1 + \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{15} + o(u_n^4)\right) \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} = \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2) \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{5n}$$

le dernier équivalent provenant du fait que $u_n \sim \sqrt{3/n}$. Comme précédemment, ces expressions sont les termes généraux de séries qui divergent, et on peut sommer les équivalents, ce qui donne

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{n}{3} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{3}\right) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5k} \sim \frac{\log n}{5},$$

et finalement

$$u_n^2 = \left(\frac{n}{3} + \frac{\log n}{5} + o(\log n)\right)^{-1} \quad \text{d'où} \quad u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\,\frac{\log n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log n}{n\sqrt{n}}\right).$$

Remarque. On peut poursuivre le développement asymptotique en itérant la méthode.

– On peut de même donner un équivalent de toute suite récurrente (u_n) qui tend vers 0 et vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction vérifiant $f(x) = x - Ax^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de 0 ($A > 0$, $\alpha > 1$), en calculant un équivalent de $u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 14. Soit Θ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

1/ a) Montrer que la série $\sum 1/(n\Theta(n))$ converge, et donner la majoration la meilleure possible de la somme de cette série par une expression indépendante de Θ.

b) Montrer que la série $\sum \Theta(n)/n^2$ diverge et donner la minoration la meilleure possible des sommes partielles de cette série par une expression indépendante de Θ.

c) Que peut-on dire sur la nature de la série $\sum \Theta(n)/n^3$?

2/ a) (Inégalité de réarrangement). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $(a_i)_{1\le i\le n}$ et $(b_i)_{1\le i\le n}$ tels que $a_1 \le \ldots \le a_n$ et $b_1 \le \ldots \le b_n$. Montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ de $\{1, \ldots, n\}$, on a

$$a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \le a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n. \qquad (*)$$

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive décroissante telle que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que la série $\sum u_n\Theta(n)/n$ diverge.

Solution. **1/ a)** C'est tout simple. On utilise l'inégalité de Schwarz qui entraîne

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\Theta(n)}\right)^2 \le \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\Theta(n)^2}\right). \qquad (*)$$

La série $\sum 1/n^2$ converge, ainsi que $\sum 1/\Theta(n)^2$ d'après le théorème 8 page 216 (et d'ailleurs, les sommes de ces deux séries sont égales). L'inégalité (*) montre donc que les sommes partielles de notre série sont majorées, donc elle converge, et en faisant $N \to +\infty$ dans (*), on obtient

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Theta(n)}\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Theta(n)^2}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Theta(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cette inégalité est la meilleure possible car il y a égalité lorsque Θ est l'identité.

On aurait pu traiter cette question à partir de l'inégalité $ab \leq (a^2+b^2)/2$ appliquée à $a = 1/\Theta(n)$ et $b = 1/n$.

b) La manière la plus immédiate de montrer qu'il y a divergence est certainement de nier le critère de Cauchy, en écrivant

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\Theta(n)}{n^2} \geq \frac{1}{4N^2}\left(\sum_{n=N+1}^{2N} \Theta(n)\right) \geq \frac{1}{4N^2}\left(\sum_{n=1}^{N} n\right) = \frac{N+1}{8N} \geq \frac{1}{8}.$$

Si maintenant on veut une minoration fine des sommes partielles de cette série, on peut utiliser (encore !) l'inégalité de Schwarz qui entraîne, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{\Theta(n)}}{n} \frac{1}{\sqrt{\Theta(n)}}\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\Theta(n)}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\Theta(n)}\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\Theta(n)}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right),$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\Theta(n)}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Cette minoration est optimale car il y a égalité lorsque Θ est l'identité.

c) On ne peut rien dire dans le cas général. Lorsque Θ est l'identité, la série $\sum \Theta(n)/n^3 = \sum 1/n^2$ converge. Mais on peut construire Θ tel que cette série diverge. Par exemple, notons $A = \{(2n)^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \mathbb{N}^* \setminus A$. On note $b_1 < b_2 < b_3 < \dots$ les entiers de B rangés dans l'ordre croissant, et on définit Θ par $\Theta(2n) = (2n)^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Theta(2n+1) = b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Avec ce choix de Θ, on voit que $\sum \Theta(n)/n^3$ diverge car

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{2N} \frac{\Theta(n)}{n^3} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\Theta(2n)}{(2n)^3} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n}.$$

2/ a) C'est un classique. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $n-1$ et montrons l'inégalité (*) pour n. Si $\sigma(n) = n$ c'est évident, car dans ce cas la restriction de σ à $\{1, \dots, n-1\}$ est une permutation de $\{1, \dots, n-1\}$ et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Sinon, on a $k = \sigma^{-1}(n) < n$ et $\ell = \sigma(n) < n$, et on définit la permutation σ' de $\{1, \dots, n-1\}$ par $\sigma'(i) = \sigma(i)$ si $i \neq k$, et $\sigma'(k) = \ell$. On a $(a_n - a_k)(b_n - b_\ell) \geq 0$ donc $a_n b_\ell + a_k b_n - a_k b_\ell \leq a_n b_n$. On en déduit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{\sigma'(i)} + a_n b_\ell + a_k b_n - a_k b_\ell \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{\sigma'(i)} + a_n b_n.$$

Le résultat pour n en découle, car d'apres l'hypothèse de récurrence $\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{\sigma'(i)} \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $b_1 < \dots < b_n$ les valeurs de $\Theta(1), \dots, \Theta(n)$ rangées dans l'ordre croissant. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $b_{\sigma(k)} = \Theta(k)$ pour $k = 1, \dots, n$. Soit $a_k = -u_k/k$. Comme (u_k) est positive et décroissante, (u_k/k) également donc on a $a_1 \leq \dots \leq a_n$. On en déduit, d'après le résultat de la question précédente et après changement de signe, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} b_{\sigma(k)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} b_k$$

et comme $b_{\sigma(k)} = \Theta(k)$ et $b_k \geq k$ ceci implique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \Theta(k) \geq \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On en déduit le résultat car $\sum u_n$ diverge.

Remarque. L'*inégalité de réarrangement* (parfois appelée *inégalité de réordonnement*) est classique. Nous aurions pu l'utiliser pour obtenir les résultats des questions 1/a) et 1/b). Elle entraîne de nombreuses inégalités, comme l'*inégalité de Tchébycheff pour les sommes* : $\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)/n$ dès que $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ et $y_1 \geq \ldots \geq y_n$. On peut aussi utiliser l'inégalité de réarrangement pour démontrer l'inégalité de Schwarz, ou pour démontrer que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique.

3. Suites et séries de fonctions

La notion de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions est cruciale en analyse. Rares sont les problèmes d'analyse au concours dans lesquels n'apparaissent pas la notion de convergence uniforme. En résumé, cette section est certainement la plus importante de tout le cours d'analyse des classes préparatoires scientifiques.

3.1. Définitions

Il existe principalement deux types de convergence pour une suite de fonctions : la convergence “point par point” (convergence simple) et la convergence “globale” (convergence uniforme). La seconde est la plus importante car elle entraîne comme on le verra plus tard des propriétés intéressantes sur la fonction limite.

DÉFINITION 1. Soient X un ensemble, (E, d) un espace métrique, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E.

— On dit que (f_n) converge *simplement* (sur X) vers $f : X \to E$ si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, en d'autres termes si
$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \qquad \mathrm{d}\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon\,;$$
— on dit que (f_n) converge *uniformément* (sur X) vers $f : X \to E$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \qquad \mathrm{d}\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Remarque 1.
— Il est important de saisir complètement la différence entre ces deux notions. Étant donné $\varepsilon > 0$, la valeur de N pour laquelle $\mathrm{d}(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ dépend de x pour la convergence simple, et ne dépend pas de x pour la convergence uniforme.
— La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
— Lorsque les fonctions (f_n) sont à variable et valeurs réelles, la convergence uniforme de (f_n) vers f équivaut à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel le graphe de f_n est “coincé” entre le graphe de $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.

Exemple 1. La suite de fonctions $f_n : [0,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n$ converge simplement vers 0 sur $[0,1[$, mais pas uniformément car pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [0,1[$ tel que $|f_n(x) - 0| \geq 1/2$ (la définition n'est plus vérifiée dès que $\varepsilon < 1/2$).

Par contre, elle converge uniformément vers 0 sur $[0,1/2]$ car pour tout n et pour tout $x \in [0,1/2]$, $|f_n(x) - 0| \leq 2^{-n}$. Plus généralement, elle converge uniformément vers 0 sur $[0,a]$ pour tout $a < 1$.

Ce phénomène est courant. Les intervalles où il y a convergence uniforme sont souvent différents de ceux où il y a convergence simple.

Critère de Cauchy uniforme.

PROPOSITION 1. *Une suite de fonctions d'un ensemble X vers un espace métrique* complet (E, d) *converge uniformément (sur X) si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall x \in X, \qquad \mathrm{d}\big(f_p(x), f_q(x)\big) < \varepsilon.$$

Démonstration. La condition nécessaire est immédiate.

Voyons la condition suffisante. Pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans l'espace complet E donc elle converge, vers une limite que nous notons $f(x)$. On définit ainsi une fonction $f : X \to E$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall x \in X \qquad \mathrm{d}\big(f_p(x), f_q(x)\big) < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Fixons un entier quelconque $p \geq N$ et un $x \in X$ quelconque. En faisant $q \to +\infty$ dans (*), on obtient $\mathrm{d}\big(f_p(x), f(x)\big) \leq \varepsilon$, et comme $p \geq N$ et $x \in X$ étaient arbitraires, on obtient finalement $\mathrm{d}\big(f_p(x), f(x)\big) \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$ et pour tout $x \in X$. Il y a donc convergence uniforme. □

Caractérisation de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions. On peut obtenir une caractérisation agréable de la convergence uniforme si on regarde une suite de fonctions comme une suite de points d'un espace de fonctions.

DÉFINITION 2 (Norme de la convergence uniforme). Soit X un ensemble et E un e.v normé. On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'e.v des applications bornées de X dans E, et pour tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$, la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$$

fait de $\mathcal{B}(X, E)$ un e.v.n. Cette norme est appelée *norme de la convergence uniforme.* Une suite (f_n) de $\mathcal{B}(X, E)$, regardée comme une suite de fonctions de X dans E, converge uniformément (sur X) vers $f \in \mathcal{B}(X, E)$ si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ (*i. e.* si $f_n \to f$ dans l'e.v.n $\mathcal{B}(X, E)$).

Remarque 2. Si (f_n) est une suite de fonction de $\mathcal{B}(X, E)$ et si E est un espace de Banach (*i. e.* un e.v.n complet), la condition suffisante de la proposition 1 s'énonce comme suit : si (f_n) est une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, E)$, alors (f_n) converge vers une fonction $f : X \to E$. Cette fonction f est bornée car la suite (f_n) est bornée dans $\mathcal{B}(X, E)$ (c'est une suite de Cauchy), donc il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$ pour tout n, donc

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n(x)\| \leq M.$$

En fixant $x \in X$ (quelconque) et en faisant $n \to +\infty$, on en déduit que $\|f(x)\| \leq M$, et ceci est vrai pour tout $x \in X$ donc f est bien bornée. Finalement, nous avons $f \in \mathcal{B}(X, E)$. Autrement dit nous venons de montrer que si E est un espace de Banach, alors $\mathcal{B}(X, E)$ est aussi un espace de Banach.

Séries de fonctions, convergence normale. Comme pour les séries numériques, une série de fonctions $\sum g_n$ est définie comme étant la suite de fonctions (f_n) avec $f_n = g_0 + \cdots + g_n$. On en rencontre beaucoup dans la pratique, et on dispose pour ces dernières d'un nouveau type de convergence (convergence normale) qui n'est en fait qu'une condition suffisante commode pour montrer la convergence uniforme.

DÉFINITION 3. Soient X un ensemble et E un espace de Banach (*i. e.* un e.v.n complet). On dit qu'une série de fonctions $\sum g_n$ à termes dans $\mathcal{B}(X, E)$ converge *normalement* si la série $\sum \|g_n\|_\infty$ converge.

Remarque 3. Il est équivalent de dire que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement s'il existe une série à termes positifs $\sum a_n$ convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \qquad \|g_n(x)\| \leq a_n.$$

Exemple 2. La série de fonctions $\sum g_n$ définie par $g_n : \ [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n/n^2$ converge normalement sur $[0,1]$ car $\|g_n\|_\infty = 1/n^2$ donc $\sum \|g_n\|_\infty$ converge.

→ THÉORÈME 1. *Une série de fonctions $\sum g_n$ à valeurs dans un espace de Banach qui converge normalement sur un ensemble X converge uniformément sur X.*

Démonstration. Il suffit de vérifier le critère de Cauchy uniforme (voir la proposition 1), ce qui est immédiat car pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$,

$$\|g_n(x) + \cdots + g_{n+p}(x)\| \leq \|g_n(x)\| + \cdots + \|g_{n+p}(x)\| \leq \|g_n\|_\infty + \cdots + \|g_{n+p}\|_\infty$$

et $\sum \|g_n\|_\infty$ converge.

Une autre solution est de dire que $\sum g_n$ est une série absolument convergente dans $\mathcal{B}(X,E)$ qui est un espace de Banach (voir la remarque 2), donc elle converge dans $\mathcal{B}(X,E)$, donc elle converge uniformément. □

Remarque 4. De même qu'il existe des séries convergentes mais non absolument convergentes, il existe des séries de fonctions uniformément convergentes qui ne sont pas normalement convergentes (voir par exemple la question b) de l'exercice 2 page 236).

3.2. Propriétés des suites de fonctions

Continuité de la fonction limite.

→ THÉORÈME 2. *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et (f_n) une suite de fonctions de E dans F. Si (f_n) converge uniformément sur E vers $f : \ E \to F$ et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in E$, alors f est continue en x_0.*

Démonstration. La démonstration est très classique, il faut savoir la refaire. Soit $\varepsilon > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f, donc

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \qquad \delta\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Or f_n est continue en x_0, donc

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \mathrm{d}(x, x_0) < \alpha, \qquad \delta\big(f_n(x), f_n(x_0)\big) < \varepsilon.$$

On en déduit, pour tout $x \in X$ vérifiant $\mathrm{d}(x, x_0) < \alpha$,

$$\delta\big(f(x), f(x_0)\big) \leq \delta\big(f(x), f_n(x)\big) + \delta\big(f_n(x), f_n(x_0)\big) + \delta\big(f_n(x_0), f(x_0)\big) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

d'où le résultat. □

Intégration d'une suite de fonctions. Donnons maintenant une généralisation de la proposition 3 page 125. La preuve est immédiate, elle est analogue à celle de ce dernier.

→ THÉORÈME 3. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors f est continue et*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Plus généralement, la fonction $F : \ [a,b] \to E \quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est limite uniforme de la suite de fonctions (F_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n : \ [a,b] \to E \quad x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

Remarque. L'égalité $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$ est également vérifiée sous des hypothèses beaucoup moins contraignantes dans le cadre du théorème de convergence dominée (voir le théorème 3 page 151).

– Le résultat se généralise si on suppose seulement les f_n Riemann-intégrables. Dans ce cas, la limite uniforme f est également Riemann-intégrable.

En combinant le théorème précédent avec le théorème 1, on en déduit facilement :

COROLLAIRE 1 (Interversion des signes de sommation). *Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continues d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, qui converge normalement sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b g_n(t)\, dt \right).$$

Dérivabilité et dérivée de la fonction limite.

→ THÉORÈME 4. *Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E. On suppose que*

(i) il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge ;

(ii) la suite de fonctions (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g.

Alors (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f' = g$.

Démonstration. On applique le théorème 3 à la suite de fonctions (f_n'), et on en conclut que $(f_n - f_n(a))$ converge uniformément vers $h : \ x \mapsto \int_a^x g(t)\, dt$ sur $[a, b]$. En particulier, la suite $(f_n(x_0) - f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc d'après (i), $(f_n(a))$ converge, et nous notons ℓ la limite correspondante. On voit facilement que (f_n) converge uniformément vers $f : \ x \mapsto h(x) + \ell$. Cette fonction f vérifie bien les propriétés voulues (en particulier, elle est $\mathcal{C}^1$ car g est continue comme limite uniforme de fonctions continues). □

Remarque 5. — Il n'est pas difficile d'en déduire que si (f_n) est une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ de I dans E (où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$) qui vérifie les hypothèses précédentes sur tout segment de I, alors les mêmes conclusions subsistent (sauf la convergence uniforme de (f_n) sur I tout entier).

— Pour une série de fonctions $\sum g_n$, les g_n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, ce théorème s'énonce comme suit : s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $\sum g_n(x_0)$ converge et si la série de fonctions $\sum g_n'$ converge normalement sur $[a, b]$, alors $\sum g_n$ converge normalement sur $[a, b]$ vers une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et on a $(\sum_{n=0}^{\infty} g_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'$.

— Le théorème 4 reste vrai lorsque les fonctions (f_n) sont seulement supposées dérivables (voir l'exercice 9 page 244).

En utilisant une récurrence fondée sur le théorème précédent, on en déduit le corollaire suivant qui permet de montrer qu'une fonction limite est de classe $\mathcal{C}^p$.

COROLLAIRE 2. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E. On suppose que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers une fonction g_k sur $[a, b]$. Alors la limite uniforme $f = g_0$ de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^p$ et vérifie $f^{(k)} = g_k$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$.*

Remarque 6. Le corollaire précédent s'étend aisément aux séries de fonctions : si les g_n sont $\mathcal{C}^p$ et si $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$ pour $0 \leq k \leq p$, alors $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et $g^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p$.

Exemple 3. Considérons une algèbre normée complète E, un élément $u \in E$, et la fonction

$$e_u : \ \mathbb{R} \to E \quad t \mapsto \exp(tu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u^n.$$

Chaque terme de la série est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la série des dérivées p-ièmes est

$$\sum_{n\geq p} \frac{t^{n-p}}{(n-p)!} u^n.$$

Cette série converge normalement sur tout segment $S = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ (car $\|t^{n-p}u^n/(n-p)!\| \leq \|u\|^p (M\|u\|)^{n-p}/(n-p)!$ où $M = \max\{|a|, |b|\}$). On en déduit que e_u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur S et que sa dérivée p-ième est $e_u^{(p)} = u^p e_u$. Ceci étant vrai pour tout segment S de $\mathbb{R}$, c'est vrai également sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3.3. Complément : le théorème de Weierstrass

Weierstrass démontra le théorème suivant, qui frappa beaucoup ses contemporains.

THÉORÈME 5 (THÉORÈME DE WEIERSTRASS). *Toute fonction continue $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.*

Ce résultat est prouvé dans l'exercice 8 page 242 (preuve par les polynômes de Bernstein) et par une autre méthode dans le problème 23 page 304 (preuve par la convolution). Il est important, car il permet parfois de prouver des résultats sur les fonctions continues en les montrant d'abord pour les fonctions polynômes, puis en concluant par un argument de densité.

Il existe un théorème analogue sur les fonctions continues 2π-périodiques :

THÉORÈME 6. *Toute fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Ce résultat est un avant-goût des séries de Fourier. C'est une conséquence du résultat prouvé dans le problème 25 page 306.

Remarque 7. — Un autre résultat (théorème de Stone-Weierstrass) propose un cadre général englobant ces deux théorèmes.
— Plus généralement, le théorème de Müntz (voir le problème 28 page 310) donne une condition nécessaire et suffisante sur une suite réelle croissante (α_n) pour que $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n})_n$ soit dense (au sens de la norme de la convergence uniforme) dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$.

3.4. Exercices

EXERCICE 1. **a)** Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n], \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x > n$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.
b) Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $f : z \mapsto e^z$.

Solution. **a)** Remarquons déjà qu'il y a convergence simple. Pour montrer la convergence uniforme, nous allons donner deux méthodes.

Première méthode. Nous allons utiliser une technique générale, qui consiste à montrer que le maximum sur $\mathbb{R}^+$ de $|f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 en faisant une étude de fonctions. Fixons un entier $n > 1$ et posons $\varphi : [0, n] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto e^{-x} - f_n(x)$. On a, pour tout $x \in [0, n[$

$$\varphi'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^{-x}\left[\exp\left((n-1)\log\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x\right) - 1\right].$$

Le signe de $\varphi'(x)$ est donc celui de $\psi(x) = (n-1)\log(1-x/n)+x$. On a $\psi'(x) = (1-x)/(n-x)$, on en déduit que ψ croît sur $[0,1]$ et décroît sur $[1,n[$. Comme $\psi(0) = 0$ et que $\psi(x) \to -\infty$ lorsque $x \to n^-$, on en déduit (faites un tableau de variation) l'existence de $\alpha \in]1,n[$ tel que

$$\forall x \in [0,\alpha], \quad \psi(x) \geq 0, \qquad \forall x \in [\alpha, n[\,, \qquad \psi(x) \leq 0.$$

Comme ψ a le signe de φ', φ est croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, n]$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(n) = e^{-n} \geq 0$, on en déduit

$$\forall x \in [0,n], \qquad 0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(\alpha) \quad \text{avec} \quad \varphi'(\alpha) = 0.$$

Il s'agit donc pour nous de majorer $\varphi(\alpha)$. En exploitant le renseignement $\varphi'(\alpha) = 0$, on a

$$\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-1} = e^{-\alpha} \quad \text{donc} \quad \varphi(\alpha) = e^{-\alpha} - \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\alpha}{n}\, e^{-\alpha}. \qquad (*)$$

Un rapide étude de $x \mapsto xe^{-x}$ montre que cette fonction atteint son maximum en $x = 1$, donc est majorée par $1/e$ sur $\mathbb{R}^+$, de sorte que (*) entraîne $\varphi(\alpha) \leq 1/(ne)$. Sur $[n, +\infty[$, on a $|f_n(x) - f(x)| = |f(x)| \leq |f(n)| = |f_n(n) - f(n)| \leq 1/(ne)$, donc finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{ne},$$

d'où le résultat.

– *Seconde méthode.* Considérons $\varepsilon > 0$, puis $M > 0$ tel que $e^{-M} < \varepsilon$. Nous commençons par approcher $\log f_n$ par $-x$ sur $[0, M]$. D'après la formule de Taylor-Lagrange,

$$\forall u \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \exists \theta \in]0,1[, \qquad \log(1-u) = -u + \frac{u^2}{2}\,\frac{1}{(1-\theta u)^2},$$

donc $|\log(1-u) + u| \leq 2u^2$ lorsque $u \in [0, 1/2]$. On en déduit

$$\forall n \geq 2M, \forall x \in [0, M], \qquad \left| n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x \right| \leq \frac{2M^2}{n},$$

donc $(\log f_n)$ converge uniformément vers $x \mapsto -x$ sur $[0, M]$. La fonction exponentielle étant 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^-$ (immédiat par l'inégalité des accroissements finis), on en déduit en prenant l'exponentielle que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, M]$. En particulier,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in [0, M], \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (**)$$

Or $e^{-M} < \varepsilon$, donc $|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x} \leq e^{-M} < \varepsilon$ sur $[M, +\infty[$, donc finalement l'inégalité (**) est vraie sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, d'où le résultat.

b) Ici, les techniques précédentes ne peuvent plus s'appliquer.

Soit C un compact de $\mathbb{C}$ et soit $M > 0$ tel que $|z| \leq M$ pour tout $z \in C$. L'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \leq n, \qquad C_n^k \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

entraîne

$$\forall z \in C, \qquad \left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k} \right| |z|^k + \sum_{k>n} \left| \frac{z^k}{k!} \right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k} \right) M^k + \sum_{k>n} \frac{M^k}{k!} = e^M - \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n$$

et comme $(1 + M/n)^n \to e^M$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit le résultat.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application

$$u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction

continue f mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que la série de fonctions $\sum(-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, mais que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.

Solution. **a)** La convergence simple est immédiate car pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, $\sum x/(n^2+x^2)$ converge (ceci car $x/(n^2+x^2) \sim x/n^2$ lorsque $n \to +\infty$).

En revanche, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. En effet, la minoration

$$\forall x > 0, \forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2+n^2} \geq \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2+(2p)^2} = \frac{px}{x^2+4p^2} \tag{$*$}$$

entraîne

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists x > 0, \qquad \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2+n^2} \geq \frac{1}{5} \qquad \text{(prendre } x = p \text{ dans (*))},$$

autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ ne vérifie pas le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Ceci montre qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Pour montrer la continuité de la limite simple f de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$, il aurait été commode que la convergence soit uniforme sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, mais ce n'est pas le cas. Pour contourner le problème, on va montrer que f est continue sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$, ce qui entraînera la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Fixons donc un réel positif quelconque M. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, M], \qquad |u_n(x)| \leq \frac{M}{n^2},$$

et comme la série $\sum M/n^2$ converge, $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, M]$. Ainsi f, limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0, M]$, est continue sur $[0, M]$. D'où le résultat.

b) Si on fixe $x \geq 0$, $\sum(-1)^n u_n(x)$ est une série numérique alternée dont la valeur absolue du terme général décroît ; la série converge donc (on le savait déjà, car on a montré plus haut qu'elle converge absolument), et de plus les restes sont majorés en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme qui les compose (voir le théorème 6 page 214), donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{x^2+n^2} \right| \leq \frac{x}{x^2+p^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+p^2}}{x^2+p^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}} \leq \frac{1}{p}.$$

Cette majoration des restes est indépendante de $x \geq 0$, et elle montre que les restes tendent uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \geq 0} u_n(x) \geq u_n(n) = 1/(2n)$ et la série $\sum 1/(2n)$ diverge.

Remarque. Retenez la méthode utilisée pour montrer la continuité de la limite simple de la série de fonctions $\sum u_n$: comme il n'y avait pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, nous avons montré la convergence uniforme sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Cette technique est très classique. On procède aussi souvent ainsi pour montrer la dérivabilité d'une suite de fonctions lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme sur l'intervalle de départ tout entier.

Exercice 3. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes (P_n) ?

Solution. Premier réflexe : f est continue. Mais il y a bien mieux, et nous allons montrer que f est une fonction polynôme. Le critère de Cauchy uniforme entraîne

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |P_n(x) - P_N(x)| \leq 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $P_N - P_n$ est une fonction polynôme *bornée* sur $\mathbb{R}$, donc constante. Autrement dit, pour tout $n \geq N$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = P_N + \alpha_n$. La suite $(P_n(0))$ converge, donc la suite $(\alpha_n)_{n \geq N} = (P_n(0) - P_N(0))_{n \geq N}$ aussi. Notons α la limite de (α_n). On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \lim_{n \to +\infty} P_N(x) + \alpha_n = P_N(x) + \alpha,$$

donc $f = P_N + \alpha$ est une fonction polynôme.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \cos^n x \cdot \sin x.$$

a) Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$.
b) On considère la suite de fonctions (g_n) définie par $g_n = (n+1)f_n$. Montrer que sur tout intervalle de la forme $[\delta, \pi/2]$ avec $0 < \delta < \pi/2$, (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite $(\int_0^{\pi/2} g_n(t)\, dt)_n$ ne tend pas vers 0.

Solution. **a)** On pourrait résoudre l'exercice en essayant de majorer directement le maximum de $|f_n|$ sur $[0, \pi/2]$ en effectuant une étude de fonction, mais nous allons donner une méthode différente qui est plus générale et qui a son intérêt.

Analysons la situation. On a $\cos^n x \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ uniformément lorsque x est dans $[0, \pi/2]$ et n'est pas dans un voisinage de 0. Au voisinage de 0, la fonction sinus est petite. Pour tirer parti de ces deux informations on procède comme suit.

Un nombre réel $\varepsilon > 0$ étant donné, on considère $\delta > 0$ (et $\delta < \pi/2$) tel que $|\sin x| < \varepsilon$ sur $[0, \delta]$ (ceci est possible par continuité de la fonction sinus qui est nulle en 0). Sur le reste de l'intervalle, on a

$$\forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n(x)| \leq (\cos \delta)^n,$$

et comme $(\cos \delta)^n$ tend vers 0 (car $|\cos \delta| < 1$), on en déduit

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], \qquad |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Comme $|\sin x| < \varepsilon$ sur $[0, \delta]$, on a aussi $|f_n(x)| < \varepsilon$ sur $[0, \delta]$ pour tout n, donc finalement

$$\forall n \geq N, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad |f_n(x)| < \varepsilon.$$

b) La convergence uniforme de (g_n) vers 0 sur $[\delta, \pi/2]$ est une conséquence de l'inégalité

$$\forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |g_n(x)| \leq (n+1)\cos^n x \leq (n+1)\cos^n \delta$$

et du fait que $(n+1)\cos^n \delta \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ (ceci car $|\cos \delta| < 1$).

Comme $\int_0^{\pi/2} g_n(x)\, dx = \big[-\cos^{n+1} x\big]_0^{\pi/2} = 1$, il est clair que la suite des intégrales de g_n ne tend pas vers 0.

Remarque. La dernière question de l'exercice est un contre-exemple qui montre que le théorème de convergence dominée (page 151) est faux lorsque la condition de domination n'est pas satisfaite.

Exercice 5 (Théorèmes de Dini). **a)** Soit (f_n) une suite *croissante* de fonctions réelles *continues* et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f *continue* sur I, montrer que la convergence est uniforme.
b) Soit (f_n) une suite de *fonctions croissantes* réelles, continues et définies sur un segment

$I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f *continue* sur I, montrer que la convergence est uniforme.

Solution. **a)** Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n, considérons l'ensemble

$$F_n = \{x \in I \mid f(x) \geq f_n(x) + \varepsilon\}.$$

La suite (F_n) est une suite décroissante de fermés de I (donc compacts). On a $\cap_{n \geq 0} F_n = \varnothing$ car pour tout $x \in I$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ donc il existe n tel que $f(x) < \varepsilon + f_n(x)$, ce qui entraîne $x \notin F_n$. Une suite décroissante de compacts non vide est non vide, donc il existe N tel que $F_N = \varnothing$, autrement dit $f < \varepsilon + f_n$ sur I pour $n \geq N$. Comme la suite (f_n) est croissante, on a également $f_n \leq f$, donc finalement $f_n \leq f < \varepsilon + f_n$ pour $n \geq N$ d'où le résultat.

b) Tout d'abord, la fonction f est limite simple de fonctions croissantes, elle est donc croissante. Donnons nous $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact I, donc d'après le théorème de Heine

$$\exists \eta > 0, \forall (x, x') \in I^2, |x - x'| < \eta, \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

On considère ensuite une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de I de pas $< \eta$, c'est-à-dire telle que $x_{i+1} - x_i < \eta$ pour tout i. Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$, la suite $(f_n(x_i))$ tend vers $f(x_i)$, on en déduit (les i étant en nombre fini)

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall i \in \{0, \ldots, p\}, \qquad |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Ceci étant, considérons $x \in I$. Il existe $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$, et les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f étant croissantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n(x_i) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{i+1}) \quad \text{et} \quad f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1}),$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i). \tag{$*$}$$

Or pour tout $n \geq N$,

$$|f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| < 2\varepsilon,$$

de même $|f(x_i) - f_n(x_{i+1})| < 2\varepsilon$. On en déduit avec (*) que $|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$, et ceci pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in I$, d'où le résultat.

EXERCICE 6. **a)** Soit (f_n) une suite de fonctions d'un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un $\mathbb{R}$-e.v.n E. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que toutes les fonctions f_n soient K-lipschitziennes. Si (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to E$, montrer que la convergence est uniforme.
b) Soit (f_n) une suite de fonctions convexes de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ (où $]a, b[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$) qui converge simplement vers une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Montrer que sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, la suite (f_n) converge uniformément vers f. La convergence est-elle uniforme sur $]a, b[$ tout entier ?

Solution. **a)** La technique ressemble assez à celles utilisées dans l'exercice précédent. Remarquons tout d'abord que f, limite simple de fonctions K-lipschitziennes, est K-lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $< \varepsilon$ (*i. e.* $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$ pour tout i). Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$, la suite $(f_n(x_i))$ converge vers $f(x_i)$ donc (les i sont en nombre finis)

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall i \in \{0, 1, \ldots, p\}, \qquad \|f_n(x_i) - f(x_i)\| < \varepsilon.$$

Si maintenant on considère $x \in I$, il existe i tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$ donc les fonctions en présence étant toutes K-lipschitziennes, on a pour tout $n \geq N$

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f(x)\| &\leq \|f_n(x) - f_n(x_i)\| + \|f_n(x_i) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(x)\| \\ &\leq K(x - x_i) + \varepsilon + K(x - x_i) \leq (2K + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in I$ et pour tout $n \geq N$, on en déduit le résultat.

b) L'idée est de se ramener à la question précédente. Soit $I = [\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Fixons α', β' tels que $a < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < b$. Les suites

$$\left(\frac{f_n(\alpha') - f_n(\alpha)}{\alpha' - \alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f_n(\beta) - f_n(\beta')}{\beta - \beta'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent (conséquence de la convergence simple de (f_n)), elles sont donc bornées. Désignons par $K > 0$ un majorant de la valeur absolue des termes de ces suites. Chaque fonction f_n étant convexe, on en déduit pour tout n

$$\forall (x, y) \in [\alpha, \beta]^2, \qquad -K \leq \frac{f_n(\alpha') - f_n(\alpha)}{\alpha' - \alpha} \leq \frac{f_n(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f_n(\beta) - f_n(\beta')}{\beta - \beta'} \leq K,$$

donc $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|$. Ainsi, toutes les fonctions f_n sont K-lipschitziennes sur $[\alpha, \beta]$, et on conclut en utilisant le résultat de la question précédente.

Il n'y a pas en général convergence uniforme sur $]a, b[$ tout entier, comme le montre le contre-exemple classique de la suite de fonctions convexes (f_n) définies par $f_n :]0, 1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n$ qui converge simplement vers 0 sur $]0, 1[$ mais pas uniformément.

EXERCICE 7 (PHÉNOMÈNE DE RUNGE). Soit $\alpha > 0$ et f_α la fonction

$$f_\alpha \ : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x^2 + \alpha^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les $2n$ points équirépartis dans $[-1, 1]$ définis par $a_k = (2k + 1)/(2n)$ pour $-n \leq k \leq n - 1$. On note P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $< 2n$ déterminé par les conditions $P_n(a_k) = f_\alpha(a_k)$ pour $-n \leq k \leq n - 1$. On veut montrer que la suite de fonctions polynômes (P_n) ne converge pas forcément uniformément vers f_α sur $[-1, 1]$ (c'est le *phénomène de Runge*).

a) Montrer la formule

$$f_\alpha(x) - P_n(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(\alpha i)}, \qquad \text{avec} \qquad \omega_n(x) = \prod_{k=-n}^{n-1} (x - a_k).$$

b) En déduire le premier terme du développement asymptotique de $\log |f_\alpha(1) - P_n(1)|$ lorsque $n \to \infty$.

c) Montrer que si $\alpha > 0$ est suffisamment petit, la suite de fonctions (P_n) ne converge pas uniformément vers f_α.

Solution. **a)** Il est classique que le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n existe et s'écrit sous la forme (voir le tome Algèbre)

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{f_\alpha(a_k)\omega_n(x)}{(x - a_k)\omega_n'(a_k)}. \tag{$*$}$$

La clé est maintenant d'utiliser la décomposition en éléments simples de la fraction $f_\alpha(x)/\omega_n(x)$. Cette dernière n'a que des pôles simples, qui sont αi, $-\alpha i$ et les $(a_k)_{-n\leq k\leq n-1}$, on peut donc écrire sa décomposition en éléments simples (voir le tome Algèbre) sous la forme

$$\frac{f_\alpha(x)}{\omega_n(x)} = \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{f_\alpha(a_k)}{(x - a_k)\omega_n'(a_k)} + \frac{1}{\omega_n(-i\alpha)} \frac{i}{2\alpha(x + i\alpha)} - \frac{1}{\omega_n(i\alpha)} \frac{i}{2\alpha(x - i\alpha)}. \tag{$**$}$$

La relation de symétrie autour de zéro $a_{-j} = -a_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq n$ donne

$$\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - a_{-j}) \prod_{j=1}^{n} (x - a_{j-1}) = \prod_{j=1}^{n} (x + a_{j-1})(x - a_{j-1}) = \prod_{j=0}^{n-1} (x^2 - a_j^2)$$

donc la fonction polynôme $\omega_n(x)$ est paire, ce qui fournit $\omega_n(-i\alpha) = \omega_n(i\alpha)$. Avec (*) et (**), on en déduit l'égalité $f_\alpha(x)/\omega_n(x) = P_n(x)/\omega_n(x) + 1/(x^2+\alpha^2)/\omega_n(i\alpha)$, d'où le résultat.
b) L'expression de $\omega_n(x)$ que nous avions obtenu précédemment donne

$$\frac{\omega_n(1)}{\omega_n(i\alpha)} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1-a_j^2}{-\alpha^2 - a_j^2} \right) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1-a_j^2}{\alpha^2 + a_j^2} \right)$$

D'après le résultat obtenu à la question précédente, on a donc

$$\log|f_\alpha(1) - P_n(1)| = \log \frac{1}{1+\alpha^2} + \sum_{j=0}^{n-1} \log \frac{1-a_j^2}{\alpha^2 + a_j^2}. \qquad (***)$$

Le dernier terme du membre droit est, au facteur $1/n$ près, une somme de Riemann de la fonction $\varphi_\alpha(t) = \log \frac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}$ pour une subdivision de $[0,1]$; nous sommes ici en présence d'une intégrale généralisée et on ne peut donc pas appliquer le théorème 7 page 128. On va procéder comme à l'exercice 5 page 156. Notons d'abord que l'intégrale généralisée $I(\alpha) = \int_0^1 \varphi_\alpha(t)\,dt$ converge (on l'obtient facilement en écrivant $\varphi_\alpha(t) = \log(1-t) + \log \frac{1+t}{\alpha^2+t^2}$). Maintenant, on remarque que φ_α est décroissante sur $]0,1]$ (composition de la fonction décroissante $t \mapsto (1-t^2)/(\alpha^2+t^2)$ par la fonction log qui est croissante), donc $\int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi_\alpha(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\varphi_\alpha(a_j) \leq \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi_\alpha(t)\,dt$, ce qui, par sommation pour $1 \leq j \leq n-2$ donne

$$I(\alpha) + o(1) = \int_{3/(2n)}^{1-1/(2n)} \varphi_\alpha(t)\,dt \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-2} \varphi_\alpha(a_j) \leq \int_{1/(2n)}^{1-3/(2n)} \varphi_\alpha(t)\,dt = I(\alpha) + o(1).$$

Donc $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_\alpha(a_j) = nI(\alpha) + o(n)$ (on a bien $\varphi_\alpha(a_0) + \varphi_\alpha(a_{n-1}) = o(n)$). Avec (***), on en déduit finalement, lorsque $n \to \infty$,

$$\log|f_\alpha(1) - P_n(1)| = \log \frac{1}{1+\alpha^2} + n(I(\alpha) + o(1)), \quad \text{avec} \quad I(\alpha) = \int_0^1 \log \frac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\,dt.$$

c) Nous allons montrer que I est définie et continue en 0. Lorsque $\alpha \in [0,1]$ et $0 < t \leq 1$, on a

$$\alpha^2 + t^2 \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha^2+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{donc} \quad |\log(\alpha^2+t^2)| \leq \max\left(\log 2, \log \frac{1}{t^2}\right) \leq \log \frac{2}{t^2}.$$

Comme la fonction $t \mapsto \log(2/t^2)$ est intégrable sur $]0,1]$, l'hypothèse de domination est vérifiée donc la fonction $\alpha \mapsto \int_0^1 \log(\alpha^2+t^2)\,dt$ est bien définie et continue pour $\alpha \in [0,1]$. En particulier, I est définie et continue en $\alpha = 0$, et comme $I(0) = 2\log 2 > 0$, on en déduit l'existence de $\alpha_0 > 0$ tel que $I(\alpha) > 0$ pour $0 \leq \alpha < \alpha_0$. D'après le développement asymptotique obtenu à la question précédente, lorsque $0 \leq \alpha < \alpha_0$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \log|f_\alpha(1) - P_n(1)| = +\infty$. Ainsi il n'y a pas convergence simple (et donc pas uniforme) de (P_n) vers f lorsque $0 \leq \alpha < \alpha_0$.

Remarque. On peut obtenir la forme explicite $I(\alpha) = 2\log 2 - \alpha\arctan(1/\alpha) - \log(1+\alpha^2)$. On peut montrer que $I(\alpha) > 0$ pour $\alpha < \alpha_0 \approx 0,5255249$.

– Pour éviter de passer par les sommes de Riemann d'une intégrale généralisée dans b), on aurait pu obtenir le comportement de $\log|\omega_n(1)|$ par la formule de Stirling. Le comportement de $\log|\omega_n(i\alpha)|$ s'obtient directement à partir d'une somme de Riemann d'une fonction définie et continue sur le segment $[0,1]$.

– Ainsi, une suite de polynômes interpolants ne converge pas forcément vers une fonction f à approcher. Cependant, certaines conditions de majoration des dérivées de f permettent de garantir qu'un polynôme interpolant est une bonne approximation (voir question b) de l'exercice 7 page 83).

Exercice 8 (Polynômes d'approximation de Bernstein). On note $I = [0,1]$ et $\mathcal{C}$ l'e.v des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$. On note, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$B_n(f) : \; I \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_n^k(x), \quad \text{avec} \quad b_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

a) Calculer explicitement l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_n^k(x)$, puis en déduire que pour tout $\eta > 0$ et pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k,\,|k/n-x|\geq\eta} b_n^k(x) \leq \frac{1}{n\eta^2}.$$

b) (*Théorème de Bernstein*) Pour tout $f \in \mathcal{C}$, montrer que la suite de fonctions $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. En déduire le théorème de Weierstrass (théorème 5 page 235).
c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathcal{C}$ soit limite uniforme sur $[0,1]$ de fonctions polynômes à coefficients entiers.
d) Si f est une fonction lipschitzienne, montrer que $\|f - B_n(f)\|_\infty = O(n^{-1/2})$.
e) Considérons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x - 1/2|$. Donner un équivalent de $B_n(f)(1/2) - f(1/2)$ lorsque $n \to \infty$ (on pourra utiliser l'égalité $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ et la formule de Stirling).

Solution.
a) En notant par abus $1, x, x^2$ les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_n^k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2x\,\frac{k}{n} + x^2\right) b_n^k(x) = B_n(x^2) - 2xB_n(x) + x^2 B_n(1). \qquad (*)$$

On se ramène ainsi à exprimer $B_n(1)$, $B_n(x)$ et $B_n(x^2)$. Pour cela, on part de l'identité bien connue

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad F(a,b) = \big(a + (1-b)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k (1-b)^{n-k}.$$

On en déduit $B_n(1) = F(1,1) = 1$,

$$B_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, k\, x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x}{n}\,\frac{\partial F}{\partial a}(x,x) = \frac{x}{n}\, n\big(x + (1-x)\big)^{n-1} = x$$

et après un petit calcul

$$B_n(x^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, k^2\, x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x}{n^2}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(a\,\frac{\partial F}{\partial a}\right)(x,x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

En remplaçant ces expressions dans (*), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_n^k(x) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

La seconde partie de la question s'obtient maintenant en écrivant

$$\sum_{k,|k/n-x|\geq\eta} b_n^k(x) \leq \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_n^k(x) = \frac{1}{\eta^2}\,\frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{n\eta^2}. \qquad (**)$$

b) Analysons la situation. On peut voir l'expression donnant $B_n(f)(x)$ comme un barycentre des points $f(k/n)$, dont les coefficients les plus significatifs se trouvent dans la région où k/n est dans un voisinage de x d'après (**). On a donc $B_n(f)(x) \simeq f(x)$.

Précisons. Donnons nous $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact I. Elle est donc bornée de sorte qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ sur I. Elle est aussi uniformément continue d'après le théorème de Heine donc

$$\exists \eta > 0, \forall (x, x') \in I^2, |x - x'| < \eta, \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

On écrit maintenant

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |B_n(f)(x) - f(x)| = |B_n(f)(x) - f(x)B_n(1)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_n^k(x)$$

$$\leq \varepsilon \left(\sum_{k, |k/n - x| < \eta} b_n^k(x) \right) + 2M \left(\sum_{k, |k/n - x| \geq \eta} b_n^k(x) \right) \leq \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{n} b_n^k(x) \right) + \frac{2M}{n\eta^2} = \varepsilon + \frac{2M}{n\eta^2}.$$

Ainsi, si $N \in \mathbb{N}^*$ est choisi tel que $2M/(N\eta^2) < \varepsilon$, on a montré

$$\forall n \geq N, \forall x \in I, \qquad |B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

La suite de fonctions $(B_n(f))$ converge donc uniformément vers f sur $[0,1]$.

Les $B_n(f)$ sont des fonctions polynômes, on vient donc de montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions polynômes sur $[0,1]$. On en déduit facilement par changement de variable affine le théorème de Weierstrass (si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue, on se ramène à $[0,1]$ en considérant $g(x) = f[a + (b-a)x]$).

c) Montrons que $f \in \mathcal{C}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ de fonctions polynômes à coefficients entiers si et seulement si $f(0)$ et $f(1)$ sont des entiers.

La condition est nécessaire : en effet, si f est limite uniforme de fonctions polynômes (P_n) à coefficients entiers, alors $f(0)$ (respectivement $f(1)$) est la limite de la suite d'entiers $(P_n(0))$ (respectivement $(P_n(1))$). Une suite d'entiers convergente a pour limite un nombre entier, donc $f(0)$ et $f(1)$ sont des entiers.

La condition suffisante s'obtient à partir du résultat de la question précédente. Supposons $f(0)$ et $f(1)$ entiers. On considère la suite de polynômes à coefficients entiers $(Z_n(f))$ définie par

$$Z_n(f) \ : [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \right] x^k (1-x)^{n-k},$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t. Pour $x \in [0,1]$, on a

$$B_n(f)(x) - Z_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{\left[f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \right]}{C_n^k} \right) b_n^k(x)$$

(les termes de la somme pour $k = 0$ et $k = n$ sont nuls car $f(0)$ et $f(1)$ sont entiers), et comme $0 \leq f(k/n) - [f(k/n)C_n^k]/C_n^k < 1/C_n^k \leq 1/n$ pour $1 \leq k \leq n-1$ on en déduit

$$0 \leq B_n(f)(x) - Z_n(f)(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} b_n^k(f)(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} b_n^k(f)(x) = \frac{B_n(1)}{n} = \frac{1}{n},$$

et ceci pour tout $x \in [0,1]$. Comme $(B_n(f))$ converge uniformément vers f on en déduit que $(Z_n(f))$ converge uniformément vers f.

d) Considérons une fonction λ-lipschitzienne f sur $[0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon = n^{-1/2}$. Pour $x \in I$, on a

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k, |k/n - x| \leq \varepsilon} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_n^k(x) + \sum_{k, |k/n - x| > \varepsilon} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_n^k(x)$$

$$\leq \sum_{k, |k/n - x| \leq \varepsilon} \lambda \varepsilon b_n^k(x) + \sum_{k, |k/n - x| > \varepsilon} \frac{\lambda}{\varepsilon} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 b_n^k(x)$$

$$\leq \lambda \varepsilon \sum_{k=0}^{n} b_n^k(x) + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 b_n^k(x) = \lambda \varepsilon + \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{x(1-x)}{n} \leq \lambda \varepsilon + \frac{\lambda}{n\varepsilon} = \frac{2\lambda}{\sqrt{n}}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on en déduit le résultat.

e) Soit $u_n = B_n(f)(1/2) - f(1/2) = B_n(f)(1/2)$. L'égalité $b_n^k(1/2) = C_n^k/2^n$ donne

$$u_n = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \le k < n/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{n}\right) C_n^k + \frac{1}{2^n} \sum_{n/2 < k \le n} \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) C_n^k = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \le k < n/2} \left(1 - \frac{2k}{n}\right) C_n^k.$$

où on a utilisé la relation de symétrie $C_n^{n-k} = C_n^k$. Grâce à la relation $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ on en déduit

$$2^n u_n = \sum_{0 \le k < n/2} C_n^k - 2 \sum_{1 \le k < n/2} C_{n-1}^{k-1}.$$

Il reste à utiliser la relation du triangle de Pascal $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ qui entraîne

$$2^n u_n = 1 + \sum_{1 \le k < n/2} (C_n^k - C_{n-1}^{k-1}) - \sum_{1 \le k < n/2} C_{n-1}^{k-1} = \sum_{0 \le k < n/2} C_{n-1}^k - \sum_{1 \le k < n/2} C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^{[(n-1)/2]},$$

où $[(n-1)/2]$ désigne la partie entière de $(n-1)/2$. La formule de Stirling permet facilement d'obtenir l'équivalent $C_{n-1}^{[(n-1)/2]} \sim 2^n/\sqrt{2\pi n}$. Finalement on a obtenu l'équivalent

$$u_n = B_n(f)\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Ainsi, l'estimation obtenue à la question précédente est la meilleure possible dans l'hypothèse d'une fonction lipschitzienne.

Remarque. Le résultat de la question b) de cet exercice est une version constructive du théorème de Weierstrass, mais la convergence est lente, comme le montre le résultat de la question e). Le meilleur approximant polynomial peut s'obtenir par l'algorithme de Remez.

EXERCICE 9 (FONCTION DÉRIVÉE À POINTS DE DISCONTINUITÉS DENSES).

a) (Généralisation du théorème 4 page 234 lorsque les fonctions f_n sont seulement supposées dérivables). Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $I = [0,1]$ dans un espace de Banach E. On suppose que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur I, et qu'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction dérivable f qui vérifie $f' = g$.

b) Exhiber une fonction $f : I = [0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, telle que l'ensemble des points de discontinuité de f' soit dense dans $[0,1]$.

Solution. **a)** Ici, on ne peut pas procéder comme dans la preuve du théorème 4 page 234 car une fonction dérivée n'est pas forcément continue (ni Riemann-intégrable).

Nous montrons d'abord que (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \ge N, \qquad (\,\|f_p(x_0) - f_q(x_0)\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x \in I, \quad \|f_p'(x) - f_q'(x)\| < \varepsilon).$$

Ainsi, on obtient grâce à l'inégalité des accroissements finis que pour tout $p, q \ge N$ et pour tout $x \in I$,

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \le \|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)\| + \|(f_p - f_q)(x_0)\| < \varepsilon|x - x_0| + \varepsilon \le 2\varepsilon.$$

Autrement dit, la suite de fonctions (f_n) à valeurs dans un espace de Banach vérifie le critère de Cauchy uniforme, elle converge donc uniformément vers une fonction f sur I.

Il nous reste à montrer que f est dérivable et que $f' = g$. Fixons $x \in I$ et $\varepsilon > 0$. La suite (f_n') vérifie le critère de Cauchy uniforme donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \qquad \|f_N'(t) - f_{N+p}'(t)\| \le \varepsilon. \qquad (*)$$

En appliquant (*) à $t = x$ et en faisant $p \to +\infty$, on tire $\|f'_N(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$, et par définition de $f'_N(x)$, on en déduit

$$\exists \alpha > 0, \forall t \in I, 0 < |t - x| < \alpha, \qquad \left\| \frac{f_N(t) - f_N(x)}{t - x} - g(x) \right\| \leq 2\varepsilon. \tag{**}$$

Maintenant, l'inégalité des accroissements finis entraîne avec (*)

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \qquad \|(f_N - f_{N+p})(t) - (f_N - f_{N+p})(x)\| \leq \varepsilon |t - x|,$$

et on en déduit en fixant $t \in I$ et en faisant $p \to +\infty$ que

$$\forall t \in I, \qquad \|(f_N - f)(t) - (f_N - f)(x)\| \leq \varepsilon |t - x|. \tag{***}$$

De (**) et (***), on tire, pour tout $t \in I$ tel que $0 < |t - x| < \alpha$,

$$\left\| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - g(x) \right\| \leq \left\| \frac{(f - f_N)(t) - (f - f_N)(x)}{t - x} \right\| + \left\| \frac{f_N(t) - f_N(x)}{t - x} - g(x) \right\| \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

En d'autres termes, nous venons de montrer que la fonction f est dérivable au point x et que $f'(x) = g(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on en déduit le résultat.

b) Nous allons construire une telle fonction f à partir de la fonction

$$\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ et on a $\varphi'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ sur cet ensemble. Or

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad -x^2 \leq \varphi(x) \leq x^2 \quad \text{donc} \quad \forall x \neq 0, \quad -|x| \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \leq |x|,$$

donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$. Ainsi, φ est une fonction dérivable sur $[-1, 1]$ tout entier et φ' est discontinue en 0, continue ailleurs.

L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable, il existe donc une bijection $n \mapsto r_n$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n^2} \varphi(x - r_n).$$

L'expression de φ' montre que φ' est bornée, donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[0, 1]$. Il est clair qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction dérivable f sur $[0, 1]$ qui vérifie $f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$. Nous allons montrer que f répond à la question.

— Pour tout $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, f'_n est continue en x donc f' est continue en x (limite uniforme de fonctions continues en x).

— Pour tout $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = r_N$. Pour tout $n \neq N$, on a $x \neq r_n$ donc f'_n est continue en x, donc $\sum_{n \neq N} f'_n$ est continue en x. Or f'_N est discontinue en x, on en déduit que $f' = f'_N + \sum_{n \neq N} f'_n$ est discontinue en x.

Finalement, nous avons montré que f est dérivable sur $[0, 1]$, discontinue en tout point rationnel, continue en tout point irrationnel. D'où le résultat.

Remarque. On peut montrer que l'ensemble des points de *continuité* d'une fonction dérivée est dense (voir l'exercice 2 page 419).

EXERCICE 10 (THÉORÈME DE HELLY). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Démontrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et une fonction croissante $f : I \to \mathbb{R}$, telle que cette sous-suite converge simplement vers f.

Solution. L'idée est de procéder par densité, en montrant d'abord le résultat sur les rationnels (dénombrables) de I, puis d'utiliser la croissance des fonctions f_n pour étendre sur I tout entier.

Notons $\mathbb{Q}_I = I \cap \mathbb{Q}$ l'ensemble dénombrable des rationnels de I, et notons $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ les éléments de $\mathbb{Q}_I$. On utilise le procédé diagonal, déjà employé dans la solution de l'exercice 2 page 32. De la suite bornée $(f_n(x_0))_n$ on extrait une sous-suite convergente $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))_n$. De la suite bornée $(f_{\varphi_0(n)}(x_1))_n$, on extrait une sous-suite convergente $(f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}(x_1))_n$. En procédant par récurrence, on peut ainsi construire, pour tout entier naturel p, une sous-suite convergente $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$. La fonction $\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\psi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$ est strictement croissante, et pour tout entier naturel p, la suite $(f_{\psi(n)}(x_p))_n$ converge (car $(f_{\psi(n)}(x_p))_{n\geq p}$ est une sous-suite de $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge).

Construisons maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{Q}_I$ par $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_I$. Pour $x < y$, on a $f_{\psi(n)}(x) \leq f_{\psi(n)}(y)$, et en passant à la limite on voit que g est croissante sur $\mathbb{Q}_I$. On étend g sur I tout entier de la manière suivante : pour $x \in I \smallsetminus \mathbb{Q}_I$, on définit

$$g(x) = \sup G_x, \quad \text{avec} \quad G_x = \{g(y) \mid y \in \mathbb{Q}_I, y < x\}$$

(G_x est non vide car I est ouvert, et majoré car g étant croissante, tous les éléments de G_x sont inférieurs à $g(z)$ pour un $z > x$ fixé dans $\mathbb{Q}_I$). Ainsi définie, g est croissante sur I, comme on le vérifie facilement en montrant, $g(x) \leq g(y)$ lorsque $x < y$, d'abord pour $x \in I \smallsetminus \mathbb{Q}_I$ et $y \in \mathbb{Q}_I$, puis pour $x \in \mathbb{Q}_I$ et $y \in I \smallsetminus \mathbb{Q}_I$, puis pour x et y dans $I \smallsetminus \mathbb{Q}_I$.

Montrons que pour x dans l'ensemble $C \subset I$ des points de continuité de g, la suite $(f_{\psi(n)}(x))$ converge vers $g(x)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, comme g est continue en x, il existe a et b dans $\mathbb{Q}_I$ tels que $a < x < b$ et

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon,\ |g(x) - g(b)| < \varepsilon \quad \text{donc} \quad g(b) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon.$$

Les suites $(f_{\psi(n)}(a))_n$ et $(f_{\psi(n)}(b))_n$ convergent vers $g(a)$ et $g(b)$ respectivement, donc il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|f_{\psi(n)}(a) - g(a)| < \varepsilon$ et $|f_{\psi(n)}(b) - g(b)| < \varepsilon$, donc

$$f_{\psi(n)}(b) - 2\varepsilon < g(b) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon < f_{\psi(n)}(a) + 2\varepsilon$$

Comme $f_{\psi(n)}$ est croissante, on en déduit $f_{\psi(n)}(x) - 2\varepsilon < g(x) < f_{\psi(n)}(x) + 2\varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $n \geq N$, donc la suite $(f_{\psi(n)}(x))$ converge bien vers $g(x)$, et ceci pour tout $x \in C$.

Il reste le cas des points de discontinuité $D = I \smallsetminus C$ de g. La fonction g est croissante donc D est au plus dénombrable (car une fonction monotone est réglée et l'ensemble des discontinuités d'une fonction réglée est au plus dénombrable, voir le théorème 4 page 99. On peut aussi obtenir ce résultat directement, en associant à chaque discontinuité x de g un nombre rationnel différent en le choisissant dans $]g(x-), g(x+)[$). En procédant de la même manière que plus haut, on en déduit qu'il existe une sous-suite $(f_{\psi\circ\theta(n)})$ de $(f_{\psi(n)})$ telle que $(f_{\psi\circ\theta(n)}(x))_n$ converge pour tout $x \in D$ (attention, cette limite n'est pas forcément égale à $g(x)$).

Ainsi, pour tout $x \in I$, la suite $(f_{\psi\circ\theta(n)}(x))_n$ converge. La fonction $f\ : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{\psi\circ\theta(n)}(x)$ est croissante, et ceci clos la démonstration.

Exercice 11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^p$ sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$, et qu'il existe p points distincts $x_1, \ldots, x_p$ de $[a,b]$ tels que pour tout i $(1 \leq i \leq p)$, la suite $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f^{(p)} = g$.

Solution. C'est une généralisation du théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions. Notre point de départ est la formule de Taylor avec reste intégral qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \qquad f_n(x) = P_n(x) + I_n(x)$$

avec

$$P_n(x) = f_n(a) + (x-a)f_n'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(a) \quad \text{et} \quad I_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p)}(t)\, dt.$$

Le polynôme P_n est de degré $\leq p-1$, donc il est égal à au polynôme d'interpolation de Lagrange égal à $P_n(x_i)$ sur les points $(x_i)_{1\leq i\leq p}$, ce qui s'écrit

$$\forall x \in [a,b], \quad P_n(x) = \sum_{i=1}^{p} P_n(x_i) f_i(x), \qquad \text{avec} \qquad f_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}.$$

Si h est continue sur $[a,b]$, notons $\|h\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |h(x)|$ la norme de la convergence uniforme. La fonction g est continue, car c'est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Considérons la fonction $I(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} g(t)\,dt$. On a $\|I - I_n\|_\infty \leq \frac{(b-a)^p}{p!} \|f_n^{(p)} - g\|_\infty$ donc (I_n) converge uniformément vers I. Pour tout i, on a $P_n(x_i) = f_n(x_i) - I_n(x_i)$ donc la suite $(P_n(x_i))_n$ converge. Notons y_i sa limite, et notons $P(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i f_i(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange égal à y_i en x_i. Posons $f(x) = P(x) + I(x)$. La formule

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \|P - P_n\|_\infty + \|I - I_n\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{p} |y_i - P_n(x_i)| \cdot \|f_i\|_\infty + \|I - I_n\|_\infty$$

montre que $\|f - f_n\|_\infty$ converge vers 0, donc (f_n) converge uniformément vers f. Une récurrence facile montre que pour $1 \leq k \leq p-1$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ et vérifie

$$\forall x \in [a,b], \qquad f^{(k)}(x) = P^{(k)}(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^{p-k-1}}{(p-k-1)!} g(t)\,dt$$

En particulier, f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et vérifie $f^{(p-1)}(x) = P^{(p-1)}(x) + \int_0^x g(t)\,dt$, donc f est de classe $\mathcal{C}^p$ et $f^{(p)} = g$ (car $\deg(P) \leq p-1$), d'où le résultat.

4. Séries entières

4.1. Définitions

DÉFINITION 1. On appelle *série entière* toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe.

Rayon de convergence. Il est naturel de s'interroger sur le domaine des nombres complexes z pour lesquels une série entière converge.

→ PROPOSITION 1 (LEMME D'ABEL). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors*

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;

(ii) pour tout r, $0 < r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Démonstration. Si M est un majorant de $(|a_n|\,|z_0|^n)$, la preuve est simple à partir de la majoration

$$|a_n z^n| = \left|\frac{z}{z_0}\right|^n |a_n|\,|z_0|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

□

Le lemme d'Abel justifie la définition suivante.

DÉFINITION 2 (Rayon de convergence). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|\,r^n) \text{ est bornée}\}$$

s'appelle *rayon de convergence* de $\sum a_n z^n$. D'après le lemme d'Abel,

— pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
— pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge ;
— pour tout r tel que $0 \leq r < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé *disque de convergence* de la série entière.

Remarque 1. — On peut avoir $R = 0$ ou $R = +\infty$. Si $R = +\infty$, $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et la somme de cette série entière définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ appelée *fonction entière*.
— Sur le cercle $|z| = R$, la série entière peut ou non converger.
— Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

Calcul pratique du rayon de convergence. Il existe quelques recettes qui permettent *parfois* de calculer explicitement le rayon de convergence d'une série entière. Celles ci sont des conséquences directes des règles de d'Alembert et de Cauchy que l'on a vu pour les séries numériques.

Proposition 2 (Règle de d'Alembert). *Si* $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lambda$ *avec* $\lambda \in [0, +\infty]$, *alors le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est* $R = 1/\lambda$ *(en convenant* $1/0 = +\infty$ *et* $1/+\infty = 0$*).*

Proposition 3 (Règle de Cauchy). *Si* $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda$ *avec* $\lambda \in [0, +\infty]$, *alors le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est* $R = 1/\lambda$ *(en convenant* $1/0 = +\infty$ *et* $1/+\infty = 0$*).*

Exemple 1. Grâce à la règle de d'Alembert, on montre facilement que
— la série entière $\sum z^n/n!$ a un rayon de convergence infini ;
— pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence égal à 1 ;
— la série entière $\sum n!\, z^n$ a un rayon de convergence nul.

Remarque 2. — Attention, les règles de d'Alembert ou de Cauchy ne s'appliquent pas toujours (essayez de les appliquer, par exemple, à $\sum z^{2n}$).
— On peut montrer, pour une série entière donnée, que si la règle de d'Alembert s'applique alors la règle de Cauchy s'applique (la réciproque est fausse).
— Dans tous les cas, on montre que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $1/\rho$ avec $\rho = \lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geq n} |a_p|^{1/p})$.

Somme et produit de séries entières. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à $R > 0$ et $R' > 0$. Notons f et g les sommes de ces séries entières sur leur disque de convergence D et D'.

Somme. La série entière $\sum c_n z^n$ définie par $c_n = a_n + b_n$ est appelée somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' de vérifie $R'' \geq \inf\{R, R'\}$ et sur $D \cap D'$, $f + g$ est la somme de la série entière $\sum c_n z^n$.

Produit. La série entière $\sum c_n z^n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

est appelée *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geq \inf\{R, R'\}$ et sur $D \cap D'$, le produit fg est la somme de la série entière $\sum c_n z^n$ (conséquence du théorème 9 page 216 sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).

Remarque 3. On ne peut rien dire de plus en général sur les rayons de convergence de la somme ou du produit de Cauchy de deux séries entières. Par exemple, les séries entières $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont leur rayon de convergence égal à 1 mais la somme a un rayon de convergence infini.

4.2. Propriétés des séries entières

Dans toute cette sous-partie, $\sum a_n z^n$ désigne une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Continuité.

THÉORÈME 1. *L'application* $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur le disque de convergence* $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.

Démonstration. Pour tout $r \in \,]0, R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $|z| \leq r$, sa somme est donc continue sur $|z| \leq r$ (chaque somme partielle est continue), et ceci pour tout $r < R$, d'où le résultat. □

Dérivation.

THÉORÈME 2. *L'application* $f : \;]-R, R[\to \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$. *La série entière* $\sum n a_n z^{n-1}$ *a même rayon de convergence que* $\sum a_n z^n$, *et on a*

$$\forall x \in \,]-R, R[\,, \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration. Notons R' le rayon de convergence de $\sum n a_n z^{n-1}$. Soit r, $0 \leq r < R'$. La suite $(n a_n r^n)$ est bornée, donc $(a_n r^n)$ est bornée donc $r \leq R$. Ceci étant vrai pour tout $r < R'$, on en déduit $R' \leq R$. Maintenant, soit $r < R$. Si on fixe r_0 tel que $r < r_0 < R$, la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée, donc la suite $(n a_n r^n)$ tend vers 0 car $n a_n r^n = n(a_n r_0^n)(r/r_0)^n$ avec $r/r_0 < 1$. On en conclut $r < R'$, et ceci pour tout $r < R$ donc $R \leq R'$. Finalement, on a donc $R = R'$.

La dérivabilité de f et la valeur de f' sont une conséquence du théorème de dérivabilité des suites de fonctions. □

En appliquant ce théorème par récurrence, on obtient le résultat qui suit.

COROLLAIRE 1. *La somme* f *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$. *De plus, pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ *est la somme sur* $]-R, R[$ *d'une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *En outre,*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \quad \textit{donc} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p.$$

Conséquence :

— La série entière $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et si F désigne la somme de cette dernière, on a $F' = f$ sur $]-R, R[$.

— Si g est la somme d'une série entière $\sum b_n z^n$ sur $\{z, |z| < R'\}$ (avec $R' > 0$) et si f et g coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, alors pour tout n, $b_n = g^{(n)}(0)/n! = f^{(n)}(0)/n! = a_n$. Ceci reste valable si f et g coïncident sur un intervalle de la forme $]0, \alpha[$.

Remarque 4 (Dérivation par rapport à la variable complexe). On montre que les fonctions f définies par des séries entières sont *dérivables par rapport à la variable complexe* sur leur disque de convergence D, c'est-à-dire que pour tout $z_0 \in D$, la limite de $\big(f(z_0 + u) - f(z_0)\big)/u$ existe lorsque u tend vers 0 dans $\mathbb{C}$ en restant non nul.

Comme on s'y attend, la dérivée de la restriction $\widetilde{f}$ de f à l'axe réel et celle de f (au sens complexe) coïncident sur $\mathbb{R}$.

La condition de dérivabilité par rapport à la variable complexe est très forte. Il ne suffit pas qu'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ soit différentiable pour qu'elle soit dérivable par rapport à la variable complexe (voir l'exercice 8 page 333), mais la réciproque est vraie. On peut montrer qu'une fonction $g : \;D = \{z, |z| < R\} \to \mathbb{C}$ continûment dérivable par rapport à la variable complexe sur D (on dit alors que g est *holomorphe*) est la somme d'une série entière sur D (voir l'exercice 13 page 265).

Principe des zéros isolés.

THÉORÈME 3. *Soit f la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ sur son disque de convergence. S'il existe une suite (z_p) de nombres complexes non nuls tendant vers 0 telle que $f(z_p) = 0$ pour tout p, alors $a_n = 0$ pour tout n.*

Démonstration. Supposons que l'un des a_n ne soit pas nul, et notons q le plus petit entier naturel tel que $a_q \neq 0$. On peut écrire, sur D,

$$f(z) = z^q g(z) \quad \text{avec} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+q}\, z^n.$$

D'après les hypothèses, $g(z_p) = 0$ pour tout p, et comme g est continue en 0 (c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$), on a

$$a_q = g(0) = \lim_{p\to+\infty} g(z_p) = 0,$$

ce qui est absurde. Donc $a_n = 0$ pour tout n. □

Conséquence : Si les sommes f et g de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifient $f(z_p) = g(z_p)$ pour une suite (z_p) de nombres complexes non nuls tendant vers 0, alors $a_n = b_n$ pour tout n (appliquer le théorème à $f - g$). En particulier, deux séries entières dont les sommes coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ sont égales. On retrouve ainsi le résultat énoncé dans la conséquence du corollaire 1.

Formule de Cauchy. La formule suivante n'est pas au programme des classes de mathématiques spéciales mais elle est d'une importance capitale. On s'en sert souvent dans les exercices et les problèmes.

→ THÉORÈME 4 (FORMULE DE CAUCHY). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Alors*

$$\forall r \in \,]0, R[\,, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2\pi\, r^n\, a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta}\, d\theta.$$

Démonstration. Fixons $r \in \,]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$. Il suffit décrire

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\, r^p\, e^{i(p-n)\theta} \right) d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p\, r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\, d\theta \qquad (*)$$

(on a le droit d'inverser les signes de sommation car la série de fonctions $\sum_p a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$, ceci parce que $\sum |a_p|\, r^p$ converge, le réel r vérifiant $0 \leq r < R$). On conclut à partir de (*) en remarquant que $\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\, d\theta = 0$ si $p \neq n$, $= 2\pi$ si $p = n$. □

Égalité de Parseval. Le résultat qui suit est la version "série entière" du théorème 1 page 270 (en l'appliquant à la série trigonométrique $f(re^{i\theta})$).

THÉORÈME 5. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Alors pour tout $r \in \,]0, R[$, la série $\sum |a_n|^2\, r^{2n}$ converge et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2\, d\theta.$$

4.3. Développement de fonctions en séries entières

Une fonction (de la variable réelle ou complexe) à valeurs complexes définie dans un voisinage de 0 est dite *développable en série entière* sur un voisinage de 0 si sur ce voisinage, f coïncide avec la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

Développement en série entière des fractions rationnelles. Soit F une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si 0 n'est pas un pôle de F, nous voulons développer F en série entière. Après décomposition en éléments simples de F, on se ramène à développer en série entière les fractions de la forme $1/(z-z_0)^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$et $z_0 \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, on a

$$\frac{1}{z-z_0} = -\frac{1}{z_0}\,\frac{1}{1-z/z_0} = -\frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n .$$

Par produit de Cauchy, on voit donc que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $1/(z-z_0)^p$ est développable en série entière. Pour obtenir son développement en série entière, on dérive $(p-1)$ fois $1/(x-z_0)$ sur $]-|z_0|,|z_0|[$, ce qui donne

$$\forall x \in \,]-|z_0|,|z_0|[, \qquad \frac{1}{(x-z_0)^p} = \frac{(-1)^p}{z_0^p(p-1)!}\sum_{n=p-1}^{+\infty}\frac{n!}{(n-p+1)!}\left(\frac{x}{z_0}\right)^{n-p+1},$$

et comme ces deux expressions coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, elles coïncident sur tout le disque de convergence $|z| < |z_0|$ (voir la conséquence du corollaire 1).

Ainsi, toute fraction rationnelle complexe F dont 0 n'est pas un pôle est développable en série entière au voisinage de 0. On peut montrer que le rayon de convergence de cette dernière est égal au plus petit des modules des pôles de F.

Développement en série entière d'une fonction à variable réelle. Soit f une fonction complexe de la variable réelle définie sur un voisinage de 0. Si f est développable en série entière, il existe $\alpha > 0$ tel que sur $]-\alpha,\alpha[$, f coïncide avec la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq \alpha$. Ceci implique que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$ et que $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ pour tout n. Ceci constitue la condition nécessaire de la proposition qui suit.

→ PROPOSITION 4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions (R_n) définie par*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k$$

tende simplement vers 0 sur $]-\alpha,\alpha[$. La série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,z^n \tag{$*$}$$

a alors un rayon de convergence $\geq \alpha$ et f est égale à la somme de cette série entière sur $]-\alpha,\alpha[$.

Démonstration. Pour tout $x \in \,]-\alpha,\alpha[$ la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$ converge vers $f(x)$ car $R_n(x) \to 0$. En particulier, la suite $(f^{(n)}(0)\,x^n/n!)$ tend vers 0, donc est bornée, donc la série entière (*) a un rayon de convergence $\geq |x|$ (voir la définition 2). Ceci étant vrai pour tout $x \in \,]-\alpha,\alpha[$, on en déduit que le rayon de convergence de (*) est $\geq \alpha$. □

Dans la pratique, pour montrer que (R_n) tend simplement vers 0, on peut utiliser la formule de Taylor qui permet d'écrire $R_n(x)$ comme l'une des expressions

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta\, x), \quad (\theta \in]0,1[) \qquad \text{ou} \qquad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

(reste de Lagrange, reste intégral). Le reste intégral donne en général des résultats plus fructueux.

Remarquez que pour montrer que f est développable en série entière, il est inutile de commencer par montrer que $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence non nul. À l'inverse, si on montre que ce rayon de convergence est nul, alors cela montre que f n'est pas développable en série entière.

Remarque 5. La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ peut avoir un rayon de convergence non nul et sa somme peut être différente de f (dans ce cas f n'est pas développable en série entière). Par exemple, la fonction

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (voir l'exercice 3 page 79), et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n. La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a donc un rayon de convergence infini, et pourtant pour tout $\alpha > 0$, f ne coïncide pas avec la somme de cette série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

– La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ peut également avoir un rayon de convergence nul bien que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut montrer par exemple que la fonction

$$\varphi:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt,$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} e^{-t}/(1+xt)^n\, dt$. En particulier $\varphi^{(n)}(0) = (-1)^n n! \Gamma(n+1) = (-1)^n (n!)^2$. La fonction paire $f(x) = \varphi(x^2)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} z^{2n}$ a un rayon de convergence nul. Plus généralement, pour n'importe quelle suite (a_n) (en particulier telle que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence nul) il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(0)/n! = a_n$ (théorème de réalisation de Borel, voir le problème 16 page 295).

Exemple 2. La fonction $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout n. D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[, \qquad R_n(x) = f(x) - \left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

donc $|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} e^{|x|}/(n+1)!$. On en tire $R_n(x) \to 0$, *i. e.* (R_n) tend simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$, et on en déduit grâce à la proposition précédente que $\sum z^n/n!$ a un rayon de convergence infini et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Cette expression nous invite à prolonger la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ tout entier par le biais de la fonction entière $\sum z^n/n!$. Ceci fait l'objet de la sous-partie suivante.

Calcul d'un développement en série entière. Plusieurs méthodes permettent dans la pratique de calculer un développement en série entière.

— On peut procéder directement à partir des développements en série entière des fonctions usuelles (voir plus bas) à l'aide des opérations de somme, produit de Cauchy, dérivation et intégration des séries entières.

— On peut rechercher une équation différentielle satisfaite par la fonction que l'on veut développer en série entière ; on trouve ainsi les coefficients du développement en série entière en procédant par identification sur les coefficients de chaque terme de l'équation différentielle obtenue (voir par exemple l'exercice 3).

Développement en série entière des fonctions usuelles. En procédant comme on l'a fait dans l'exemple 2, on obtient les développements en série entière suivants :

$$\begin{array}{rrcl}
\forall x \in \mathbb{R}, & e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \sin x & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \operatorname{sh} x & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \operatorname{ch} x & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots \\
\forall x \in \,]-1,1[, & (1+x)^\alpha & = & 1 + \dfrac{\alpha}{1!}\,x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + \cdots
\end{array}$$

Le dernier développement est valable pour tout réel α fixé. En particulier, pour tout $x \in \,]-1,1[$,

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \\
\sqrt{1+x} & = & 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2\cdot 4}\,x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,x^n + \cdots \\
\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} & = & 1 - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^2 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,x^n + \cdots
\end{array}$$

En intégrant respectivement les développements en série entière de $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (qui sont connus grâce aux formules précédentes), on obtient

$$\begin{array}{rrcl}
\forall x \in \,]-1,1[, & \log(1+x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \arctan x & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\
\forall x \in \,]-1,1[, & \operatorname{argth} x & = & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\
\forall x \in \,]-1,1[, & \arcsin x & = & x + \dfrac{1}{2\cdot 3}\,x^3 + \cdots + \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n+1)}\,x^{2n+1} + \cdots \\
\forall x \in \,]-1,1[, & \operatorname{argsh} x & = & x - \dfrac{1}{2\cdot 3}\,x^3 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n+1)}\,x^{2n+1} + \cdots
\end{array}$$

Remarque 6. Les fonctions circulaires sont en fait correctement définies à partir des séries entières (voir la partie qui suit).

4.4. Fonctions classiques définies comme sommes de série entières

Fonction exponentielle complexe. La série entière $\sum z^n/n!$ a un rayon de convergence infini. On définit l'*exponentielle complexe* par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Comme l'a vu, cette fonction coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle "classique". Comme sur $\mathbb{R}$, on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Elle permet de définir la puissance complexe d'un nombre $a > 0$, par $a^z = \exp(z \log a)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Les parties paire et impaire de e^z sont les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* définies sur $\mathbb{C}$ par

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Fonctions circulaires. On définit les fonctions circulaires cosinus et sinus sur $\mathbb{C}$ par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Outre les formules trigonométriques usuelles, ces fonctions vérifient

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \cos z + i \sin z = e^{iz}.$$

4.5. Exercices

EXERCICE 1. **a)** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que $a_n > 0$ pour tout n. Discuter en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ le rayon de convergence R' de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$.
b) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R et R'. Que dire du rayon de convergence R'' de la série entière $\sum a_n b_n z^n$? (Cette dernière série entière est appelée *produit de Hadamard* de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.)

Solution. **a)** Les rayons de convergence R et R' vérifient $R = \sup \Gamma$, $R' = \sup \Gamma'$, où

$$\Gamma = \{r \geq 0 \mid \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \quad \text{et} \quad \Gamma' = \{r \geq 0 \mid (a_n^\alpha r^n) \text{ est bornée}\}.$$

Maintenant, nous traitons plusieurs cas selon la position de α par rapport à 0.

— Supposons $\alpha > 0$. L'égalité $a_n^\alpha r^n = (a_n r^{n/\alpha})^\alpha$ montre que la suite $(a_n^\alpha r^n)$ est bornée si et seulement si $(a_n r^{n/\alpha})$ est bornée. Ainsi, $r \in \Gamma'$ si et seulement si $r^{1/\alpha} \in \Gamma$. On en déduit $R' = R^{1/\alpha}$ (avec par convention $(+\infty)^{1/\alpha} = +\infty$).

— Si $\alpha = 0$, $a_n^\alpha = 1$ pour tout n donc $R' = 1$.

— Supposons $\alpha < 0$. Si $r \in]0, R[$, la suite $(a_n r^n)$ tend vers 0, donc la suite $(a_n^\alpha r^{n\alpha})$ tend vers $+\infty$, donc $r^\alpha \notin \Gamma'$. Ceci étant vrai pour tout $r \in]0, R[$, on en déduit que $]R^\alpha, +\infty[\cap \Gamma' = \varnothing$, donc $R' \leq R^\alpha$. On ne peut rien dire de plus en général. Par exemple, si $a_{2n} = 2^{2n}$ et $a_{2n+1} = 2^{-2n}$ pour tout n, on a $R = 1/2$ et $R' = 2^\alpha < R^\alpha$.

b) Pour tout $(r, r') \in [0, R[\times [0, R'[$, les suites $(a_n r^n)$ et $(b_n r'^n)$ sont bornées, donc $(a_n b_n (rr')^n)$ est bornée. On voit donc que pour tout $r'' \in [0, RR'[$, la suite $(a_n b_n r''^n)$ est bornée. Ceci entraîne $R'' \geq RR'$.

On ne peut rien dire de plus en général. Par exemple, les séries entières $\sum z^{2n}$ et $\sum z^{2n+1}$ sont de rayon de convergence 1, et leur produit de Hadamard est nul donc son rayon de convergence est infini.

EXERCICE 2. Après avoir donné leur rayon de convergence R, sommer les séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\, x^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{2n+1}$ (pour $x>0$)

c) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n(n+2)}$ pour $x\in\mathbb{R}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}\cos(n\theta)$.

Solution. **a)** En utilisant la règle de d'Alembert, on voit que le rayon de convergence est $R=1$. Pour sommer la série entière, on part de l'égalité

$$\forall x\in\mathbb{R}, |x|<1, \qquad f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

d'où on déduit par dérivation que si $x\in\mathbb{R}$, $|x|<1$,

$$xf'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^n \quad\text{et}\quad x^2f''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,x^n.$$

Finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|x|<1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\,x^n = x^2f''(x)+xf'(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

Cette formule reste valable pour tout $x\in\mathbb{C}$, $|x|<1$ car on sait qu'une fraction rationnelle est développable en série entière pour la variable complexe, et les coefficients sont déterminés si l'on connaît la somme de la série sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

b) Toujours grâce à la règle de d'Alembert, on trouve $R=1$. On note f la somme de la série entière proposée. On a

$$\forall x\in[0,1[, \qquad g(x)=xf(x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad\text{et}\quad g'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},$$

donc par intégration

$$\forall x\in[0,1[, \qquad g(x)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad\text{d'où}\quad f(x)=\frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right).$$

c) Ici $R=1$ (règle de d'Alembert). Une décomposition en éléments simples fournit

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad \frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

donc en notant $f(x)$ la somme de la série entière proposée sur $]-1,1[$,

$$\forall x\in\,]-1,1[\,, x\neq 0, \qquad f(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)=-\frac{\log(1-x)}{2}-\frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$$=-\frac{\log(1-x)}{2}-\frac{1}{2x^2}\left(-\log(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{\log(1-x)}{2}+\frac{\log(1-x)}{2x^2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}.$$

d) Comme $|\cos(n\theta)/n!|\le 1/n!$, on a $R=+\infty$. Par ailleurs, on a $\cos n\theta=(e^{ni\theta}+e^{-ni\theta})/2$ pour tout n, donc

$$\forall x\in\mathbb{C}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xe^{i\theta})^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xe^{-i\theta})^n}{n!}\right)=\frac{\exp(xe^{i\theta})+\exp(xe^{-i\theta})}{2}.$$

EXERCICE 3. **a)** Développer en série entière la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto (\arcsin x)^2$.
b) Montrer que la fonction

$$f :]0,1[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$$

coïncide sur $]0,1[$ avec la somme d'une série entière, et calculer en les coefficients.

Solution. Tout repose sur la méthode de l'équation différentielle.

a) La fonction arcsinus est développable en série entière sur $]-1,1[$ (c'est du cours), son carré l'est donc également (par un produit de Cauchy). Ainsi, il existe une série entière $\sum a_n x^n$ qui coïncide avec f sur $]-1,1[$. Pour calculer les a_n, on recherche une équation différentielle vérifiée par f. On a

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f'(x) = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{donc} \quad (1-x^2)f'(x)^2 = 4(\arcsin x)^2 = 4f(x),$$

et par dérivation de la dernière égalité

$$2(1-x^2)\, f'(x)f''(x) - 2xf'(x)^2 = 4f'(x) \quad \text{donc} \quad (1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2.$$

En reportant la somme de la série entière dans cette dernière équation, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad (1-x^2)\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2}\right) - x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, x^{n-1}\right) = 2$$

$$\text{donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - n^2 a_n\right] x^n = 2.$$

Cette dernière égalité est vraie sur $]-1,1[$ tout entier, on en déduit par identification des coefficients (on peut, voir la conséquence du corollaire 1 page 249)

$$2a_2 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\, a_n. \tag{$*$}$$

Par ailleurs, $a_0 = f(0) = 0$ et $a_1 = f'(0) = 0$. Avec (*), on trouve finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2n} = \frac{2^{2n-2}\big((n-1)!\big)^2}{n(2n-1)!}.$$

Les coefficients d'indice impair sont nuls, ceci est cohérent car f est paire. Remarquez au passage que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2n}\, z^{2n}$ est égal à 1 (ceci car le rayon de $\sum a_{2n}\, z^n$ est égal à 1 par la règle de d'Alembert).

b) On sait que la fonction impaire arcsinus admet un développement en série entière sur $]-1,1[$ de la forme $\sum a_n\, x^{2n+1}$. Donc

$$\forall x \in]0,1[, \qquad f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(\sqrt{x})^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n,$$

et comme $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ coïncide avec la somme d'une série entière sur $]0,1[$, on en déduit par un produit de Cauchy que c'est aussi le cas pour f.

Il existe donc une série entière $\sum b_n\, x^n$ dont la somme coïncide avec f sur $]0,1[$ (au passage, elle a forcément un rayon de convergence ≥ 1). Recherchons une équation différentielle vérifiée par f. Par dérivation de $x(1-x)f(x)^2 = (\arcsin\sqrt{x})^2$, on tire

$$\forall x \in]0,1[, \qquad 2x(1-x)f'(x)f(x) + (1-2x)f(x)^2 = \frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x),$$

donc

$$\forall x \in]0,1[, \qquad 2x(1-x)f'(x) + (1-2x)f(x) = 1,$$

et finalement

$$\forall x \in]0,1[, \qquad b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[(2n+1)b_n - 2nb_{n-1}\big]\, x^n - 1 = 0.$$

D'après le principe des zéros isolés, tous les coefficients de cette série entière sont nuls, ce qui s'écrit

$$b_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{2n}{2n+1}\, b_{n-1} \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

→ EXERCICE 4. Soient $\sum a_n\, x^n$ et $\sum b_n\, x^n$ deux séries entières de rayon de convergence ≥ 1. On suppose que $b_n > 0$ pour tout n et que la série $\sum b_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

a) S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell,$$

montrer que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n} = \ell.$$

b) Si on suppose simplement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A_0 + \cdots + A_{n-1}}{n} = \ell \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{C},$$

montrer que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \ell$.

c) (Application.) Lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, montrer les équivalents

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^{a^n} \sim -\frac{\log(1-x)}{\log a} \quad (a \in \mathbb{N}, a \geq 2), \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n+1} \sim \frac{1}{2}.$$

Solution. **a)** Supposons tout d'abord $\lim_{n \to \infty} a_n/b_n = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - \ell b_n| < \varepsilon b_n$ pour tout $n \geq n_0$. Pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \ell b_n)\, x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{n_0 - 1} |a_n - \ell b_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n - \ell b_n| x^n \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - \ell b_n| + \varepsilon \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\right). \quad (*)$$

Or $\sum b_n$ est une série à termes positifs divergente, donc $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = +\infty$ (en effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n \geq \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{N} b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{N} b_n$), on en déduit

$$\exists \lambda \in]0,1[, \forall x \in]\lambda, 1[, \qquad \varepsilon \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\right) \geq \sum_{n=0}^{n_0 - 1} |a_n - \ell b_n|,$$

donc d'après (*)

$$\forall x \in]\lambda, 1[, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \ell b_n)\, x^n\right| \leq 2\varepsilon \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n} - \ell\right| \leq 2\varepsilon,$$

d'où le résultat.

Si $A_n/B_n \to \ell$, tout repose sur la remarque suivante, conséquence d'un produit de Cauchy :

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n\, x^n, \qquad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n\, x^n. \qquad (**)$$

L'étude du cas précédent montre que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} B_n\, x^n} = \ell,$$

et on en déduit le résultat avec (**).

b) Un produit de Cauchy donne

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (A_0 + \cdots + A_{n-1})\, x^n = \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

et par ailleurs,

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Comme d'après la question précédente

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (A_0 + \cdots + A_{n-1})\, x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n} = \ell, \quad \text{on en déduit} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \ell.$$

c) Pour la série entière $\sum a_n\, x^n = \sum x^{n^2}$, on a avec les notations précédentes $A_n = 1 + [\sqrt{n}]$ (où la notation $[t]$ désigne la partie entière de t). Or

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\, x^n$$

et d'après la formule de Wallis

$$b_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \qquad n \to +\infty$$

(on peut aussi obtenir ce dernier équivalent en utilisant la formule de Stirling). On en déduit que $\sum b_n$ diverge et que $B_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (sommation d'équivalents, voir le théorème 5 page 210). Un équivalent de cette dernière somme s'obtient facilement par comparaison série-intégrale, en écrivant

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}}, \qquad \text{d'où} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n},$$

et finalement $B_n \sim 2\sqrt{n}/\sqrt{\pi}$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} A_n/B_n = \sqrt{\pi}/2$, et d'après a) on en déduit

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{ce qui s'écrit aussi} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Pour la série entière $\sum a_n\, x^n = \sum x^{a^n}$, on a $A_n = 1 + [\log n/\log a] \sim \log n/\log a$. Or si $b_n = 1/n$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, x^n = -\log(1-x) \quad \text{et} \quad B_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n,$$

donc $A_n/B_n \to 1/\log a$. On en déduit d'après a) que lorsque $x \to 1-$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \sim \frac{1}{\log a} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n = -\frac{\log(1-x)}{\log a}.$$

Pour $\sum a_n\, x^n = \sum (-1)^n x^{4n+1}$, on a $A_{8n+k} = 1$ pour $1 \le k \le 4$ et $A_{8n+k} = 0$ pour $5 \le k < 8$, donc $(A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1})/n \to 1/2$, d'où l'équivalent recherché d'après la question b).

EXERCICE 5 (THÉORÈME DE LIOUVILLE). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est infini. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme de cette série entière.
a) Si la fonction entière f est bornée sur $\mathbb{C}$, montrer que f est constante.
b) Plus généralement, s'il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que f est un polynôme.

Solution. **a)** C'est immédiat si l'on connaît la formule de Cauchy (voir le théorème 4 page 250). En désignant par M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{C}$, on a en effet

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \qquad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-ni\theta}\, d\theta \quad \text{donc} \quad |a_n|\, r^n \leq M.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, la majoration $|a_n| \leq M/r^n$ est vraie pour tout $r > 0$ et on peut donc faire $r \to +\infty$, ce qui entraîne $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où le résultat.

b) Notons $m = \deg(P)$. Si $m = 0$, la réponse a été apportée dans la résolution de la question précédente. Sinon, on pose

$$g(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n z^{n-m},$$

somme d'une série entière de rayon de convergence infini. La fonction g vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad g(z) = \frac{f(z) - a_0 - a_1\, z - \cdots - a_{m-1}\, z^{m-1}}{z^m},$$

et comme $m = \deg(P)$, ceci montre que g est bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier. Comme on l'a vu plus haut, g est donc constante, donc $a_n = 0$ dès que $n > m$, d'où le résultat.

Remarque. On aurait pu aussi résoudre la question a) de l'exercice en utilisant la formule de Parseval au lieu de la formule de Cauchy.

– La considération des valeurs complexes de la variable permet seule de comprendre des phénomènes qui seraient surprenant si on se confinait à la variable réelle. Par exemple, la fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas constante.

– Le théorème de Liouville (question a)) admet une généralisation étonnante, connue sous le nom de *théorème de Picard* : toute fonction entière f qui évite deux valeurs est forcément constante. Autrement dit, s'il existe deux valeurs distinctes a et b de $\mathbb{C}$ telles que $f(z) \neq a$ et $f(z) \neq b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est constante.

EXERCICE 6. Soit Φ la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ dont le rayon de convergence R est non nul.
a) Montrer que la série entière $\sum a_n z^n/n!$ a un rayon de convergence infini.
b) On note φ la somme de la série entière $\sum a_n z^n/n!$. Montrer

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R, \qquad \Phi(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(zx) e^{-x}\, dx.$$

Solution. **a)** Fixons r_0 tel que $0 < r_0 < R$, de sorte que la suite $(a_n\, r_0^n)$ est bornée (elle tend même vers 0). Pour tout $r > 0$, on a $a_n r^n/n! = (a_n r_0^n)(q^n/n!)$ (avec $q = r/r_0$), et comme $(q^n/n!)$ est bornée (le rayon de convergence de la série $\sum z^n/n!$ est infini), on en déduit que la suite $(a_n r^n/n!)$ est bornée.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Commençons par montrer l'existence de l'intégrale. On fixe r tel $|z| < r < R$. La suite $(a_n r^n)$ est bornée, donc si M désigne un majorant de $(|a_n|r^n)$, on a

$$\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\frac{a_n\,(zx)^n}{n!}\right| = |a_n\, r^n|\,\frac{|zx/r|^n}{n!} \leq M\frac{(qx)^n}{n!}, \qquad q = \frac{|z|}{r} < 1, \qquad (*)$$

ce qui par sommation entraîne $|\varphi(xz)| \leq Me^{qx}$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi, $|\varphi(xz)e^{-x}| \leq Me^{(q-1)x}$ pour tout $x \geq 0$ et comme $q < 1$, l'intégrale proposée converge bien.

Il suffit maintenant d'écrire

$$\int_0^{+\infty} \varphi(xz)e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,(xz)^n}{n!}\right)e^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,z^n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,z^n,$$

car $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = \Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons bien le droit d'inverser les signes de sommations car d'après (*) les sommes partielles de la série vérifient la majoration

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n(zx)^n}{n!}e^{-x}\right| \leq M\sum_{n=1}^{N}\frac{(qx)^n}{n!}e^{-x} \leq e^{(q-1)x}$$

et $x \mapsto e^{(q-1)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc l'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée est vérifiée.

Exercice 7. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation

$$\alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_p n_p = n.$$

Donner un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$. (Indication : interpréter S_n comme le coefficient d'une série entière qui s'exprime simplement en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.)

Solution. Considérons la série entière définie par le produit de Cauchy des séries entières

$$\left(\sum_{n_1\in\mathbb{N}} z^{\alpha_1 n_1}\right), \ldots, \left(\sum_{n_p\in\mathbb{N}} z^{\alpha_p n_p}\right).$$

Toute l'astuce est de remarquer que le coefficient de z^n dans ce produit de Cauchy est le nombre de manière de combiner les puissances de z de chaque terme du produit pour que leur somme fasse n. En d'autres termes, on a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n\,z^n = \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty} z^{\alpha_1 n_1}\right)\cdots\left(\sum_{n_p=0}^{+\infty} z^{\alpha_p n_p}\right) = \frac{1}{1-z^{\alpha_1}}\cdots\frac{1}{1-z^{\alpha_p}},$$

et toutes les séries entières correspondantes ont leur rayon de convergence égal à 1. La fonction $F(z)$ est une fraction rationnelle, dont les pôles se trouvent aux racines α_1-ièmes,…,α_p-ièmes de l'unité. Le pôle $z = 1$ est de multiplicité p, et tous les autres pôles ont une multiplicité $< p$ (en effet, si $\omega^{\alpha_1} = \cdots = \omega^{\alpha_p} = 1$ avec $\omega = e^{2ia\pi/b}$ une racine de l'unité et $a \wedge b = 1$, alors b divise $\alpha_1 a, \ldots, \alpha_p a$ donc b divise $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ d'après le théorème de Gauss, donc $b = 1$ car les α_i sont premiers entre eux dans leur ensemble). On peut donc écrire la décomposition en éléments simples de F sous la forme

$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + G(z), \qquad G(z) = \sum_{\omega\in\Pi}\left(\frac{a_{1,\omega}}{\omega - z} + \cdots + \frac{a_{p-1,\omega}}{(\omega - z)^{p-1}}\right), \qquad (*)$$

où Π désigne un sous-ensemble fini des racines de l'unité et les $a_{k,\omega}$ des constantes complexes (notez que $1 \in \Pi$). On trouve la constante A par les techniques usuelles, en écrivant

$$(1-z)^p F(z) = \left(\frac{1}{1 + z + \cdots + z^{\alpha_1 - 1}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1 + z + \cdots + z^{\alpha_p - 1}}\right),$$

ce qui en faisant $z = 1$ dans cette expression fournit $A = (\alpha_1 \cdots \alpha_p)^{-1}$. Maintenant, comme

$$\frac{1}{(\omega - z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!} \, \omega^{-n-k} z^n \tag{$**$}$$

(voir la page 251), on en déduit que si $|\omega| = 1$, le coefficient de z^n dans cette série entière est un $O(n^{k-1})$. Ainsi, d'après (*), le coefficient de z^n dans la série entière définissant $G(z)$ est un $O(n^{p-2})$. On en déduit, avec (*) et (**) que

$$S_n = \frac{A}{(p-1)!} \, (n+p-1)(n+p-2) \cdots (n+1) + O(n^{p-2}) \sim \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \, \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Remarque. En calculant toute la décomposition en éléments simples de $F(z)$, on peut obtenir une formule exacte (mais compliquée) pour S_n. En exercice, vous pourrez calculer exactement le nombre de solutions entières a, b, c de $5a + 3b + 2c = 10000$.

Exercice 8 (Théorème de S.Bernstein sur les séries entières). Soient $a > 0$ et $f : \,]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \,]-a, a[\,, \qquad f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Montrer que f est développable en série entière sur $]-a, a[$. (Indication : commencer par traiter la fonction $F(x) = f(x) + f(-x)$.)

Solution. Il suffit de montrer que pour tout $b \in \,]0, a[$, la fonction f est développable en série entière sur $]-b, b[$ (en effet, les coefficients du développement en série entière sur $]-b, b[$ ne dépendent pas de b). Fixons donc $b \in \,]0, a[$.

Suivons l'indication et commencer par développer la fonction $F : \; x \mapsto f(x) + f(-x)$. Cette fonction est paire donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(2k+1)}(0) = 0$, donc en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, b]$

$$F(x) = F(0) + \frac{x^2}{2!} \, F''(0) + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \, F^{(2n)}(0) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \, F^{(2n+2)}(t) \, dt.$$

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(2k)}(0) = 2f^{(2k)}(0) \geq 0$, donc la formule précédente entraîne $0 \leq R_n(b) \leq F(b)$ pour tout n. Pour montrer que $R_n(x)$ tend vers 0 lorsque $0 \leq x < b$, nous comparons sa valeur à $R_n(b)$ en écrivant

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{2n+1} \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) \, dt \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) \, dt \\ &\leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(b) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b) \end{aligned}$$

(on a utilisé la majoration $(x-t)/(b-t) \leq x/b < 1$ pour tout $t \in [0, x]$, qui provient du caractère décroissant de $t \mapsto \frac{x-t}{b-t}$ sur $[0, x]$). Comme $0 \leq x/b < 1$, on en déduit $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, ce qui s'écrit aussi

$$\forall x \in [0, b[\,, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \, F^{(2n)}(0).$$

La fonction F est paire, ce résultat vaut donc sur $]-b, b[$.

Il nous reste à montrer le résultat pour f. Fixons $x \in \,]-b, b[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$f(x) = f(0) + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \, f^{(2n+1)}(0) + r_n(x) \quad \text{avec} \quad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \, f^{(2n+2)}(t) \, dt.$$

Comme $0 \leq f^{(2n+2)}(t) \leq f^{(2n+2)}(t)+f^{(2n+2)}(-t) = F^{(2n+2)}(t)$ pour tout t, on a $|r_n(x)| \leq R_n(|x|)$ donc $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Ainsi, en notant

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0),$$

nous venons de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}(x) = f(x). \tag{$*$}$$

Or

$$S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2}\frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0) \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = 0,$$

et on en déduit avec (*) que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}(x) = f(x)$. Donc d'après (*), on a $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \left]-b, b\right[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

D'où le résultat.

Remarque. Considérons la fonction $f : \left]-\pi/2, \pi/2\right[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \tan x$. La fonction f' satisfait les hypothèses précédentes comme on le vérifie facilement, et on en déduit que f', donc f, est développable en série entière sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

Exercice 9 (Inverse d'une série entière). Soit $1 + \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul, et S la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Montrer que $1/S$ est développable en série entière autour de l'origine.

Solution. Commençons par montrer le lemme suivant.

Lemme 1. *Une série entière $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement s'il existe $q > 0$ tel que $|u_n| \leq q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

En effet :

Condition nécessaire. Notons r le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$. Soit r' tel que $0 < r' < r$. On a $u_n r'^n \to 0$, donc il existe $M \geq 1$ tel que $|u_n r'^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| \leq M \left(\frac{1}{r'}\right)^n \leq q^n \quad \text{avec} \quad q = \frac{M}{r'}.$$

Condition suffisante. La suite $|u_n(1/q)^n|$ est bornée d'après les hypothèses donc le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$ est supérieur à $1/q$, d'où le résultat.

Résolvons maintenant l'exercice. L'hypothétique développement en série entière $\sum b_n z^n$ vérifie, s'il existe

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1, \tag{$*$}$$

donc par un produit de Cauchy

$$b_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = -a_1 b_{n-1} - \cdots - a_{n-1} b_1 - a_n b_0.$$

Définissons (b_n) comme l'unique suite vérifiant ces récurrences. D'après le lemme précédent, il existe $q > 0$ tel que $|a_n| \leq q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $r = 2q$. On va montrer par récurrence sur n que $|b_n| \leq r^n$ pour tout n. Pour $n = 0$ c'est vrai car $b_0 = 1$, et pour passer du rang $n - 1$ au rang n, on écrit

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \leq \sum_{k=1}^{n} q^k r^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} r^n \leq r^n.$$

Ainsi, $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence non nul d'après le lemme. Les relations vérifiées par (b_n) montrent que sur l'intersection des disques de convergence, l'égalité (*) est bien vérifiée, d'où le résultat.

Remarque. Si S s'annule, on peut montrer que le rayon de convergence du développement en série entière de $1/S$ est égal au plus petit des modules des zéros de S. N'essayez pas de prouver ce résultat, il ne s'obtient de manière naturelle que dans le cadre général des fonctions analytiques (voir la remarque de l'exercice 13 page 265).

Exercice 10 (Théorème d'Abel). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \quad \text{et} \quad \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \quad z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

(voir la figure ci-dessous). Montrer que

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

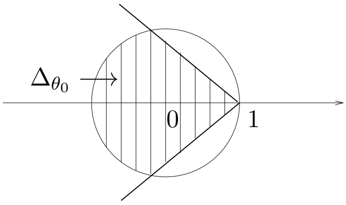


Figure 1. La région Δ_{θ_0}. L'écartement du secteur angulaire est $2\theta_0$.

Solution. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour majorer $|f(z) - S|$, on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout n. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right) - S_n &= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n\,(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n\,(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n\,(z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1) = (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n\, z^n - R_N(z^N - 1),\end{aligned}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$ on en déduit

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n. \tag{$*$}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour tout $n > N$. D'après (*), pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left|\sum_{n=0}^{N} R_n\, z^n\right| + \varepsilon |z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n\right) \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \tag{$**$}$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$, de sorte que $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $|\varphi| \leq \theta_0$. On a $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2$, et lorsque $\rho \leq \cos\theta_0$ on a la majoration

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}\,(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2}\,(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos\varphi - \rho} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}.$$

Si on choisit maintenant $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$, on voit donc que si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leq \inf\{\alpha, \cos\theta_0\}$ la majoration (**) entraîne

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos\theta_0} = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. En appliquant ce résultat à la série $\sum (-1)^n/(2n+1)$, on en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

De même, on montrerait $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n = \log 2$.

– Si la série $\sum a_n$ converge absolument, le résultat est évident (en effet, $\sum a_n z^n$ converge alors normalement sur $|z| \leq 1$, donc est continue sur $|z| \leq 1$, donc en 1).

– La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, on a

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

et pourtant, $\sum(-1)^n$ diverge. Cependant, si $a_n = o(1/n)$ (voir l'exercice suivant) ou mieux, si $a_n = O(1/n)$ (voir le problème 27 page 308), la réciproque est vraie.

Exercice 11 (Théorème taubérien faible). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C}, \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S.$$

Si $a_n = o(1/n)$, montrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \,]0,1[, \qquad S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

et comme $(1-x^k) = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) \leq k(1-x)$ pour $0 < x < 1$, on en déduit

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x) \sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k\,|a_k|}{n} x^k \leq (1-x)Mn + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{n(1-x)},$$

où M désigne un majorant de la suite $(k|a_k|)$ (elle est bien majorée car elle tend vers 0). Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1$. L'inégalité précédente entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{\varepsilon},$$

donc si N_0 est choisi tel que $\sup_{k>N_0} k|a_k| < \varepsilon^2$ (on peut car $ka_k \to 0$), on en déduit

$$\forall n \geq N_0, \qquad \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq M\varepsilon + \varepsilon = (M+1)\varepsilon.$$

D'après les hypothèses, $f(x)$ tend vers S lorsque $x \to 1^-$, donc il existe $N_1 \geq N_0$ tel que $|f(1-\varepsilon/n) - S| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$. Ainsi,

$$\forall n \geq N_1, \qquad |S_n - S| \leq \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| \leq (M+1)\varepsilon + \varepsilon = (M+2)\varepsilon.$$

On en déduit que (S_n) converge vers S, d'où le résultat.

Remarque. Ce résultat est une réciproque partielle du théorème d'Abel (voir l'exercice précédent). Il reste vrai en supposant seulement $a_n = O(1/n)$ (cf. problème 27 page 308).

EXERCICE 12. Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence ≥ 1 telle que $a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est bornée sur le disque unité. Montrer que f est une fonction polynôme.

Solution. Tout découle de l'égalité de Parseval qui entraîne, pour tout $r \in]0,1[$, la convergence de $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ et

$$\forall r \in]0,1[\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2\, r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta.$$

Si M désigne un majorant de $|f|$ sur le disque unité, on en conclut que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall r \in]0,1[\,, \qquad \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leq \frac{M^2}{2\pi}.$$

En faisant $r \to 1^-$, on en déduit $\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \leq M^2/2\pi$, et ceci pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, donc la série $\sum |a_n|^2$ est bornée, donc convergente. On en déduit que (a_n) tend vers 0, et comme les a_n sont entiers, ceci entraîne que tous les a_n sont nuls à partir d'un certain rang. D'où le résultat.

EXERCICE 13. Pour tout $r \in]0,+\infty]$, on note $D(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$. Soit $R \in]0,+\infty]$ et $f :\ D(R) \to \mathbb{C}$ une application dérivable *par rapport à la variable complexe* sur $D(R)$ et telle que $f'(z)$ soit continue sur $D(R)$ (on rappelle que f est dérivable par rapport à la variable complexe en z_0 si $(f(z_0+u) - f(z_0))/u$ converge lorsque $u \in \mathbb{C}$ tend vers 0 en restant non nul ; la limite est alors notée $f'(z_0)$).

1/ a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma :\ I \to D(R)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et calculer $(f \circ \gamma)'$.
b) Soit $r > 0$ et g une fonction définie et continue de $\{z \in \mathbb{C}, |z| = r\}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'application

$$D(r) \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{it})\, e^{it}}{re^{it} - z}\, dt$$

est la somme d'une série entière qui converge sur $D(r)$.

2/ Montrer que

$$\forall r \in]0,R[\,, \forall z \in D(r), \qquad f(z) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})\, e^{it}}{re^{it} - z}\, dt. \qquad (*)$$

En déduire que f est la somme d'une série entière qui converge sur $D(R)$ (Indication : montrer que la fonction $\lambda \mapsto \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\lambda(re^{it}-z))\, e^{it}}{re^{it}-z}\, dt$ est constante sur $[0,1]$).

Solution. **1/ a)** On procède comme pour la dérivation par rapport à la variable réelle. Soit $t \in I$. La fonction f est dérivable par rapport à la variable complexe en $\gamma(t)$, ce qui s'écrit

$$f(\gamma(t) + u) = f(\gamma(t)) + uf'(\gamma(t)) + o(u) \quad \text{lorsque} \quad u \to 0 \ (u \in \mathbb{C}).$$

On en conclut que lorsque v est un nombre réel tendant vers 0

$$\begin{aligned} f(\gamma(t+v)) = f(\gamma(t) + v\,\gamma'(t) + o(v)) &= f(\gamma(t)) + (v\,\gamma'(t) + o(v))f'(\gamma(t)) + o(v) \\ &= f(\gamma(t)) + v\,\gamma'(t) f'(\gamma(t)) + o(v), \end{aligned}$$

donc $f\circ\gamma$ est dérivable en t et $(f\circ\gamma)'(t)=\gamma'(t)f'(\gamma(t))$. On déduit de cette dernière expression que $(f\circ\gamma)'$ est continue, donc $f\circ\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Il suffit d'écrire que pour tout $z\in D(r)$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(re^{it})}{1-z/(re^{it})}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(re^{it})\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{r^n}\,e^{-int}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\left(\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi}g(re^{it})e^{-int}\,dt\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,z^n,\qquad a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}g(re^{it})e^{-int}\,dt\qquad(**)$$

où le coefficient a_n est indépendant de z. On a bien le droit d'échanger les signes de sommation car si $|z|<r$, la série de fonctions $\sum g(re^{it})(z^n/r^n)e^{-int}$ (de la variable t) converge normalement sur $[0,2\pi]$ puisque g est continue, donc bornée, sur le compact $|z|=r$.

2/ Montrons (*). Fixons $r\in\,]0,R[$ et $z\in D(r)$. On considère la fonction

$$\varphi:\ [0,1]\to\mathbb{C}\quad\lambda\mapsto\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\lambda(re^{it}-z))\,e^{it}}{re^{it}-z}\,dt.$$

Il s'agit de montrer que $\varphi(1)=f(z)$. La valeur $\varphi(0)$ est un cas particulier de la formule (**) lorsque $t\mapsto g(re^{it})$ est la fonction constante égale à $f(z)$, donc

$$\varphi(0)=\frac{r}{2\pi}\,f(z)\int_0^{2\pi}\frac{f(z)e^{it}}{re^{it}-z}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{f(z)}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}e^{-int}\,dt\right)z^n=f(z),$$

car $\int_0^{2\pi}e^{-int}\,dt=0$ si $n\neq0$, égal à 2π si $n=0$. Il faut donc montrer $\varphi(0)=\varphi(1)$. D'après la question 1/a), φ est dérivable et

$$\forall\lambda\in[0,1],\qquad\varphi'(\lambda)=\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(z+\lambda(re^{it}-z))\,e^{it}\,dt.\qquad(***)$$

Or, toujours d'après la question a), on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(f(z+\lambda(re^{it}-z)\big)=i\lambda re^{it}f'(z+\lambda(re^{it}-z)),$$

donc d'après (***)

$$\forall\lambda,0<\lambda<1,\qquad\varphi'(\lambda)=\frac{1}{2\pi i\lambda}\Big[f(z+\lambda(re^{it}-z))\Big]_0^{2\pi}=0.$$

Ainsi, φ est constante donc $\varphi(0)=\varphi(1)$, d'où (*).

La fonction f est continue sur $|z|=r$ car elle y est dérivable par rapport à la variable complexe. Grâce à (*) et à 1/b), on en déduit que pour tout $r\in\,]0,R[$, f est la somme d'une série entière $\sum a_n\,z^n$ sur $D(r)$. Or les coefficients a_n ne dépendent pas de r (ce sont les $f^{(n)}(0)/n!$). Ce développement en série entière est donc valable sur $D(R)$ tout entier.

Remarque. (Petite digression sur les fonctions analytiques.) Les séries entières rentrent dans le contexte plus général de l'élégante théorie des fonctions analytiques.

DÉFINITION 1. Une fonction $f:\ \Omega\to\mathbb{C}$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$) est dite *analytique* dans Ω si pour tout $z_0\in\Omega$, il existe un disque ouvert $\Delta:\ |z-z_0|<r$ contenu dans Ω tel que

$$\forall z\in\Delta,\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\,(z-z_0)^n,$$

où le second membre est une série entière en $z-z_0$ convergente dans Δ.

Elle est dite *holomorphe* dans Ω si elle est continûment dérivable par rapport à la variable complexe dans Ω.

Par exemple, la fonction $f: \ z \to 1/z$ est analytique dans $\mathbb{C}^*$. En effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, et pour tout z que $|z - z_0| < |z_0|$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + (z - z_0)/z_0} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z_0}\right)^n (z - z_0)^n.$$

Le résultat de l'exercice montre que toute fonction f holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est analytique sur Ω. En effet, si $z_0 \in \Omega$ et si $r > 0$ est tel que $D(z_0, r)$ (disque ouvert de centre z_0 de rayon r) vérifie $D(z_0, r) \subset \Omega$, la fonction $g: \ D(r) \to \mathbb{C} \quad z \mapsto f(z_0 + z)$ est holomorphe sur $D(r)$ donc g est développable en série entière sur $D(r)$ d'après 2/. Réciproquement, on montre que toute fonction analytique est holomorphe (c'est plus facile).

En particulier, la somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence (résultat non évident *a priori*).

On montre facilement que la composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe. En particulier, si f est la somme d'une série entière qui converge dans un disque $D(r)$ et ne s'y annule pas, alors $1/f$ est holomorphe dans $D(r)$, donc développable en série entière sur $D(r)$ d'après le résultat de l'exercice. On obtient ainsi une version plus forte que celle obtenue à l'exercice 9 page 262, car on a des renseignements sur le rayon de convergence r de l'inverse (r est le plus petit des modules des zéros de f).

5. Séries de Fourier

5.1. Séries trigonométriques

Polynômes trigonométriques.

DÉFINITION 1. On appelle *polynôme trigonométrique* de degré $\leq N$ ($N \in \mathbb{N}$) de la variable réelle x toute fonction de la forme $x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ ($c_n \in \mathbb{C}$).

Compte tenu de la relation $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, il revient au même de dire qu'un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme $x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ où les a_n, b_n sont des nombres complexes reliés aux coefficients c_n par

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad a_m = c_m + c_{-m} \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad b_m = i(c_m - c_{-m}).$$

Remarque 1. Un polynôme trigonométrique $P: \ x \mapsto \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$ est une fonction continue 2π-périodique. On a pour tout n la relation $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x) e^{-inx} \, dx$, qui montre que P est nul si et seulement si $c_n = 0$ pour tout n.

Séries trigonométriques.

DÉFINITION 2. On appelle série trigonométrique une série de fonctions de la variable réelle x de la forme $c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$; on la note $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

Compte tenu de la relation $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, il revient au même de dire qu'une série trigonométrique est une série de fonctions de la forme $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ où les a_n, b_n sont des nombres complexes reliés aux coefficients c_n par les relations vues précédemment.

Remarque 2. La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge si et seulement si la suite de fonctions des sommes partielles $(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx})_N$ converge, et dans ce cas, la somme de la série est notée $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ (*convention de Cauchy*). Avec cette convention, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ peut converger sans que $\lim_{\substack{p \to +\infty \\ q \to -\infty}} \sum_{n=q}^{p} c_n e^{inx}$ existe.

PROPOSITION 1. *Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{-n}|$ *(resp* $\sum |a_n|$ *et* $\sum |b_n|$*) convergent, la série trigonométrique*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \qquad \Big(\textit{resp.} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\Big) \tag{$*$}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$*. Sa somme définit une fonction continue et* 2π*-périodique sur* $\mathbb{R}$*.*

PROPOSITION 2. *Si les suites* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(c_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *(resp.* (a_n) *et* (b_n)*) sont réelles, décroissantes et tendent vers* 0*, alors la série trigonométrique (*) converge simplement sur* $\mathbb{R}\smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$*, et uniformément sur tout intervalle de la forme* $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$ *(avec* $0<\alpha<\pi$ *et* $k\in\mathbb{Z}$*).*

Démonstration. Il suffit de montrer la convergence uniforme sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ pour tout $\alpha>0$ fixé. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $E_n(x)=\sum_{k=0}^n e^{ikx}$. On a

$$\forall x\in[\alpha,2\pi-\alpha], \qquad |E_n(x)| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| \le \frac{2}{|1-e^{ix}|} = \frac{1}{|\sin(x/2)|} \le \frac{1}{\sin(\alpha/2)}. \tag{$**$}$$

Maintenant, une transformation d'Abel fournit

$$\forall x\in[\alpha,2\pi-\alpha], \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) E_k(x) + c_n E_n(x). \tag{$***$}$$

D'après (**) et la décroissance de (c_n), la série $\sum (c_k - c_{k+1})E_k(x)$ converge normalement sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$. Par ailleurs, d'après (**) et le fait que $c_n\to 0$, la suite de fonctions $(c_nE_n(x))$ converge uniformément vers 0. On en conclut avec (***) que

$$\text{la série de fonctions } \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{inx} \text{ converge uniformément sur } [\alpha, 2\pi-\alpha]. \tag{$****$}$$

Par symétrie, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}e^{-inx}$ converge aussi uniformément sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$. On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$. Ceci est vrai pour tout $\alpha\in\,]0,\pi[$, on en conclut qu'il y a convergence simple sur $]0, 2\pi[$.

En prenant respectivement les parties réelles et imaginaires de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{inx}$, on en déduit avec (****) que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cos nx$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \sin nx$ convergent uniformément sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ pour tout $\alpha>0$ dès que (c_n) est une suite réelle décroissante qui tend vers 0. Ainsi, la série $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$ converge uniformément sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ pour tout $\alpha>0$, d'où le résultat. □

Remarque 3. On peut montrer que si une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors $c_n\to 0$ lorsque $|n|\to+\infty$ (théorème de Cantor-Lebesgue, voir la question 2/ du problème 29 page 312). Si de plus la limite simple de cette série est nulle en tout point, alors $c_n=0$ pour tout n (théorème de Cantor, voir la question 3/ du même problème).

5.2. Définition d'une série de Fourier

DÉFINITION 3. Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle *coefficients de Fourier* de f les nombres complexes définis par

$$\forall n\in\mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

On appelle *série de Fourier* associée à f la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \quad \text{ou encore} \quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx).$$

Notez que les coefficients de Fourier vérifient les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

et que les deux dernières séries trigonométriques sont égales, car

$$c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx.$$

Remarque 4. — Les intégrandes étant 2π-périodiques, on peut remplacer l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle de longueur 2π.

— On utilise en général les coefficients $a_n(f), b_n(f)$ lorsque f est à valeurs réelles.
— Si f est paire (resp. impaire), les coefficients $b_n(f)$ (resp. $a_n(f)$) sont nuls.
— Une série trigonométrique qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ est égale à sa série de Fourier.
— Si f est T-périodique, on peut également définir les coefficients de Fourier de f par

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-i\frac{2\pi}{T}nt\right)\,dt,$$
$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\,dt, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\,dt.$$

et avec $\omega = 2\pi/T$, la série de Fourier associée à f est

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{i\omega nx} \quad \text{ou encore} \quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos\omega nx + b_n(f)\sin\omega nx).$$

Dans la suite de cette partie, la période sera toujours $T = 2\pi$ mais les résultats se généralisent aisément par normalisation pour toute période $T > 0$.

L'espace D. Nous aurons besoin de la définition suivante.

DÉFINITION 4. Une application $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ (où $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$) est dite de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux si la restriction de f a tout segment de $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux.

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux admet donc en tout point x une limite à gauche et à droite, que nous notons respectivement $f(x-)$ et $f(x+)$.

Notation. On note D l'e.v des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux, et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

5.3. Convergence en moyenne quadratique

Structure préhilbertienne de D. Sur l'e.v D, l'application

$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt$$

définit un produit scalaire et fait de D un espace préhilbertien complexe, muni de la norme hermitienne $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

En notant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n l'application $x \mapsto e^{inx}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ constitue une famille libre orthonormale de D vis-à-vis du produit scalaire défini précédemment.

PROPOSITION 3. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in D$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n\le k\le n}$ vérifie $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^\perp = D$. La projection orthogonale p_n sur $\mathcal{P}_n$ vérifie*

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k = p_n(f),$$

et de plus

$$\inf_{g\in\mathcal{P}_n} \|f-g\|_2^2 = \|f-s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt - \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2. \qquad (*)$$

Démonstration. Cette proposition est en fait une conséquence directe des résultats généraux sur les espaces préhilbertiens (voir tome Algèbre) appliqués à D. Nous le redémontrons dans notre cas.

On remarque que $c_k(f) = \langle e_k, f\rangle = \langle e_k, s_n\rangle$ si $-n \le k \le n$, donc $\langle e_k, f - s_n\rangle = 0$ pour $-n \le k \le n$. Autrement dit, $f - s_n \in {\mathcal{P}_n}^\perp$. Comme $f = s_n + (f - s_n)$ avec $s_n \in \mathcal{P}_n$ (et que ceci est vrai pour tout $f \in D$), on en déduit $D = \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n^\perp$. Par ailleurs $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_n^\perp = \{0\}$ car si $g = \sum_{-n\le k\le n} \lambda_k e_k \in \mathcal{P}_n^\perp$, alors $\lambda_k = \langle g, e_k\rangle = 0$. Finalement on a bien $D = \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^\perp$.

On a montré que $f = s_n + (f - s_n)$ avec $f - s_n \in \mathcal{P}_n^\perp$, donc $s_n = p_n(f)$. Les éléments s_n et $f - s_n$ sont orthogonaux, donc $\|s_n\|_2^2 + \|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2$, ce qui fournit la dernière égalité de (*). Par ailleurs, pour tout $g \in \mathcal{P}_n$, on a

$$\|f-g\|_2^2 = \|(f-s_n)+(s_n-g)\|_2^2 = \|f-s_n\|_2^2 + \|s_n-g\|_2^2 \ge \|f-s_n\|_2^2,$$

et ceci fournit la première égalité de (*). □

Remarque 5. — On interprète (*) en disant que parmi les polynômes trigonométriques de degré $\le n$, s_n est celui qui se rapproche le plus de f en moyenne quadratique.

— La formule (*) montre que $\sum_{-n}^{n} |c_k(f)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$ pour tout $n > 0$. Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et la somme de cette série vérifie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \qquad \text{(inégalité de Bessel).}$$

En fait, cette inégalité est une égalité (dans ce cas on parle d'*égalité de Parseval*), comme il est énoncé dans le théorème qui suit.

Égalité de Parseval.

→ THÉORÈME 1 (ÉGALITÉ DE PARSEVAL). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$, $\sum |a_n(f)|^2$, $\sum |b_n(f)|^2$ convergent et on a*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt.$$

Démonstration. Quitte à changer la valeur de f en ses discontinuités, on peut supposer $f \in D$ (la valeurs des intégrales faisant intervenir f ne change pas). Il suffit de prouver le résultat sur la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ car les relations liant les $a_n(f), b_n(f)$ aux $c_n(f)$ entraînent $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $|c_0(f)|^2 = |a_0(f)|^2/4$.

La proposition précédente donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt - \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2, \qquad (**)$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'e.v des polynômes trigonométriques.

Si f est continue, on sait (conséquence du théorème de Fejér, voir le problème 25 page 306) qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques (g_n) qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, et donc $\|f-g_n\|_2^2$ tend vers 0, ce qui montre $\inf_{g\in\mathcal{P}}\|f-g\|_2^2=0$, d'où l'égalité de Parseval d'après (**).

Si $f\in D$ n'est pas continue, on peut montrer (c'est facile et peu intéressant) que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $\widetilde{f}\in D$ continue telle que $\|f-\widetilde{f}\|_2<\varepsilon$. Comme on l'a vu précédemment, il existe $g\in\mathcal{P}$ tel que $\|\widetilde{f}-g\|_2<\varepsilon$, donc finalement $\|f-g\|<2\varepsilon$. Ceci est possible pour tout $\varepsilon>0$, donc $\inf_{g\in\mathcal{P}}\|f-g\|_2^2=0$, d'où le résultat d'après (**). □

Remarque 6. — On peut montrer que l'égalité de Parseval reste vraie pour toute fonction f 2π-périodique, continue par morceaux et intégrable sur $]0,2\pi[$.

— Si f est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux, on a $\lim_{|n|\to+\infty}c_n(f)=0$ (conséquence de la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$). On retrouve ainsi le lemme de Lebesgue dans ce cas particulier (voir l'exercice 6 page 157).

— L'égalité de Parseval entraîne qu'une fonction continue 2π-périodique qui a tout ses coefficients de Fourier nuls est nulle.

— Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. D'après l'égalité de Parseval et la proposition 3, on a $\lim_{n\to+\infty}\|f-s_n\|_2=0$ où $s_n=\sum_{-n}^{n}c_k(f)e_k$. On en déduit que si la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors f est égale à sa série de Fourier (sa fonction limite g vérifie $\|f-g\|_2=0$ et g est continue — limite uniforme de fonctions continues — donc $f=g$).

5.4. Le théorème de Jordan-Dirichlet

Le résultat qui suit est le résultat principal sur les séries de Fourier.

Théorème 2 (Jordan-Dirichlet). *Soient $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $t_0\in\mathbb{R}$ tels que la fonction*

$$h\mapsto\frac{f(t_0+h)+f(t_0-h)-f(t_0+)-f(t_0-)}{h}$$

est bornée au voisinage de 0. Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{int_0}$ converge et on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(f)e^{int_0}=\frac{f(t_0+)+f(t_0-)}{2}.$$

Démonstration. Quitte à effectuer une translation $t\mapsto t+t_0$, on peut supposer $t_0=0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $s_n=\sum_{-n}^{n}c_k(f)$. Il s'agit de montrer que la suite (u_n) définie par $u_n=s_n-(f(0+)+f(0-))/2$ tend vers 0.

On a

$$2\pi s_n=\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ipt}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(t)\,dt,\quad\text{où}\quad\forall t\in\mathbb{R},\qquad D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}.\qquad(*)$$

Le polynôme trigonométrique $D_n(t)$ s'appelle *noyau de Dirichlet*, on le rencontre souvent lors de l'étude de séries de Fourier. Il peut être calculé explicitement :

$$\forall t\in\mathbb{R}\smallsetminus2\pi\mathbb{Z},\qquad D_n(t)=e^{-int}\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1}=\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Par ailleurs, D_n est une fonction paire, donc

$$\int_{-\pi}^{0}f(t)D_n(t)\,dt=\int_0^{\pi}f(-t)D_n(t)\,dt\quad\text{d'où}\quad2\pi s_n=\int_0^{\pi}(f(t)+f(-t))\,D_n(t)\,dt.$$

On en déduit finalement
$$2\pi u_n = \int_0^\pi (f(t)+f(-t)-f(0+)-f(0-))\, D_n(t)\, dt = \int_0^\pi g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\, dt,$$
où $g(t) = (f(t)+f(-t)-f(0+)-f(0-))/\sin(t/2)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi]$ et bornée sur un voisinage de 0 d'après les hypothèses. La fonction g est donc intégrable sur $]0,\pi]$ et le lemme de Riemann-Lebesgue (voir l'exercice 6 page 157) entraîne $\lim_{n\to+\infty} 2\pi u_n = 0$, d'où le résultat. □

→ Corollaire 1. *Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en ce point x vers $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$. En particulier, si f est continue en x, la série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$.*

Remarque 7. L'hypothèse $\mathcal{C}^1$ par morceaux est importante. Il existe en effet des fonctions continues dont la série de Fourier diverge (voir l'exercice 4 page 275).

Convergence uniforme de la série de Fourier.

Lemme 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\varphi(t) = f'(t)$ si f est dérivable en t et $\varphi(t) = (f'(t+)+f'(t-))/2$ sinon. Les coefficients de Fourier de φ vérifient $c_n(\varphi) = in\, c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = 2\pi$ une subdivision de $[0,2\pi]$ telle que f soit $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{k-1}, x_k]$ pour tout k. En intégrant par parties, on a pour tout k
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(t)\, e^{-int}\, dt = \Big[f(t)e^{-int}\Big]_{x_{k-1}}^{x_k} + in \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, e^{-int}\, dt,$$
puis la fonction f étant continue, on obtient en sommant cette relation sur k,
$$c_n(\varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, e^{-int}\, dt = \Big[f(t)e^{-int}\Big]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = in\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = in\, c_n(f).$$
□

→ Théorème 3. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. En reprenant les notations du lemme précédent, on a $c_n(\varphi) = inc_n(f)$. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \qquad |c_n(f)| = \left|\frac{c_n(\varphi)}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(\varphi)|^2 + \frac{1}{n^2}\right),$$
et comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2$ converge (voir l'égalité de Parseval), on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge, d'où le résultat avec le corollaire 1. □

5.5. Exercices

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique égale à $1 - x^2/\pi^2$ sur $[-\pi,\pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire les valeurs de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Solution. La fonction f est paire. Les coefficients $b_n = b_n(f)$ sont donc nuls. Par ailleurs,
$$a_0 = a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right)\, dt = \frac{4}{3}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{t^2}{\pi^2}\right)\cos nt\,dt = -\frac{2}{\pi^3}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt = (-1)^{n+1}\,\frac{4}{n^2\pi^2}$$

(après une double intégration par parties).

La fonction f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Sa série de Fourier converge donc simplement (et même uniformément) vers f, ce qui s'écrit

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \qquad f(x) = 1-\frac{x^2}{\pi^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}. \qquad (*)$$

— En faisant $x=\pi$ dans (*), on trouve

$$0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

— En faisant $x=0$ dans (*), on trouve

$$1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

— Enfin l'égalité de Parseval s'écrit

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4\pi^4} = \frac{8}{15} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On désigne par f_α l'application 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \left]-\pi,\pi\right], \qquad f_\alpha(t) = \cos\alpha t.$$

a) Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}, \qquad \operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2-n^2\pi^2}.$$

b) Montrer alors

$$\forall t \in \left]-\pi,\pi\right[, \qquad \sin t = t\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad \left(\text{où} \quad \prod_{n=1}^{\infty} = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\right).$$

c) Montrer

$$\forall t \in \left]-\pi,\pi\right[, t \neq 0, \qquad \frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t-n\pi)^2}.$$

Solution. **a)** L'application f_α est paire donc $b_n(f_\alpha) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n(f_\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha t \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\alpha + n)t + \cos(\alpha - n)t] \, dt$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} \right] = (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

La fonction f_α est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc la série de Fourier de f_α converge simplement (et même uniformément) vers f_α sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad \cos \alpha t = \frac{\sin \alpha t}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nt,$$

ce qui en faisant $t = \pi$ et en divisant par $\sin \alpha\pi$ donne

$$\operatorname{cotan} \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

Ceci est vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$, d'où le résultat en remplaçant α par t/π.

b) Soit $x \in \,]0, \pi[$. On définit $f : [0, x] \to \mathbb{R}$ par $f(t) = \operatorname{cotan} t - 1/t$ si $t \neq 0$, $f(0) = 0$. La formule établie à la question précédente montre que

$$\forall t \in [0, x], \qquad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Comme cette série de fonctions converge normalement sur $[0, x]$, on peut écrire

$$\int_0^x f(t) \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \quad \text{autrement dit} \quad \log \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

En prenant l'exponentielle de part et d'autre de cette dernière égalité, on voit que le produit infini existe bien et que

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

d'où le résultat pour $0 < x < \pi$. Comme les fonctions en présence sont impaires et nulles en 0, on en déduit le résultat pour tout $x \in \,]-\pi, \pi[$.

c) L'égalité

$$\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} = \frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \quad \text{entraîne} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\right) = -\frac{1}{(t - n\pi)^2} - \frac{1}{(t + n\pi)^2}.$$

Ainsi, si on fixe $x \in \,]0, \pi[$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\right)$ converge normalement sur $[0, x]$. En appliquant le théorème de dérivabilité des séries de fonctions, on en conclut que

$$t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \quad \text{est dérivable sur } [0, x] \text{, sa dérivée est} \quad t \mapsto -\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(t - n\pi)^2}.$$

En dérivant l'identité obtenue dans la question a) au point x, on déduit

$$\frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = -\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(x - n\pi)^2}.$$

Ceci vaut pour tout $x \in \,]0, \pi[$. Les fonctions en présence étant paires, cette relation vaut sur $]-\pi, \pi[\, \smallsetminus \{0\}$ d'où le résultat

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Montrer

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \le \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt,$$

et caractériser l'égalité.

Solution. Le coefficient de Fourier $c_0(f)$ est nul car $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. En appliquant l'identité $c_n(f') = in\,c_n(f)$, avec l'égalité de Parseval appliquée aux fonctions f et f', on trouve donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2|c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt, \qquad (*)$$

ce qui prouve l'inégalité voulue.

Il y aura égalité si et seulement si la seule inégalité de (*) est une égalité, c'est-à-dire si et seulement si $|c_n(f)|^2 = n^2|c_n(f)|^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, ce qui équivaut à $c_n(f) = 0$ pour tout n tel que $|n| \ge 2$. Or f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc sa série de Fourier converge (uniformément) vers f. En résumé, l'égalité se produira si et seulement f est de la forme $f(t) = ae^{it} + be^{-it}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 4 (Une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0). **a)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique, telle que

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right].$$

Vérifier l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
b) Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n,\nu} = \int_0^{\pi} \cos nt \,\sin\frac{(2\nu+1)t}{2}\,dt, \qquad \forall q \in \mathbb{N}, \quad s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu}.$$

Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$, montrer que $s_{q,\nu} \ge 0$ pour tout (q,ν), et montrer l'existence d'une constante $B > 0$ telle que $s_{\nu,\nu} > B\log\nu$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$.
c) Montrer que la série de Fourier de f diverge en 0.

Solution. **a)** La série converge normalement sur $[0,\pi]$, f est donc bien définie et continue sur $[0,\pi]$. On la définit sur $[-\pi, 0[$, par $f(x) = f(-x)$. La fonction f est continue sur $[-\pi,\pi]$. De plus $f(-\pi) = f(\pi)$, on en déduit que le prolongement de f en une fonction 2π-périodique f sur $\mathbb{R}$ est continu sur $\mathbb{R}$.

b) Le calcul des $a_{n,\nu}$ est facile, on a

$$\begin{aligned} a_{n,\nu} &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(\frac{2\nu+1}{2}+n\right)t + \sin\left(\frac{2\nu+1}{2}-n\right)t\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu+n+1/2} + \frac{1}{\nu-n+1/2}\right) = \frac{\nu+1/2}{(\nu+1/2)^2-n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $a_{n,\nu} \ge 0$ pour $n \le \nu$, donc $s_{q,\nu} \ge 0$ pour $q \le \nu$.

Pour le cas $q > \nu$, on remarque que les $a_{n,\nu}$, sont, au facteur $2/\pi$ près, les coefficients de Fourier $a_n(g_\nu)$ de la fonction paire $g_\nu(t) = |\sin((\nu+1/2)t)|$. Cette dernière est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge donc vers g_ν. En particulier, on a $a_{0,\nu}/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\nu} = \frac{\pi}{2}g_\nu(0) = 0$, donc la suite $(s_{q,\nu})_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{0,\nu}/2$. Or $a_{n,\nu}$ est positif pour $n \le \nu$, négatif pour $n > \nu$, donc $(s_{q,\nu})_q$ est décroissante à partir de l'indice $q = \nu$. Comme elle converge vers $a_{0,\nu}/2$, on en déduit que $s_{q,\nu} \ge a_{0,\nu}/2 \ge 0$ pour tout $q > \nu$.

Il nous reste à obtenir la minoration de $s_{\nu,\nu}$. On écrit pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$,

$$s_{\nu,\nu} \geq \sum_{n=1}^{\nu} \frac{\nu+1/2}{(\nu+1/2)^2-n^2} \geq \sum_{n=1}^{\nu} \int_{n-1}^{n} \frac{(\nu+1/2)\,dt}{(\nu+1/2)^2-t^2} = \int_0^{\nu} \frac{(\nu+1/2)\,dt}{(\nu+1/2)^2-t^2} = \frac{1}{2}\log(4\nu+3),$$

donc $s_{\nu,\nu} \geq (\log\nu)/2$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$.

c) Comme f est paire, les coefficients de Fourier $b_n(f)$ sont nuls. Par ailleurs, la parité de f entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\int_0^{\pi}\sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{t}{2}\right]\cos nt\,dt,$$

(on a le droit de changer les signes de sommation car la série converge normalement sur $[0,\pi]$), donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}a_{n,2^{p^3}-1}, \quad \text{donc} \quad S_n = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k(f) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}s_{n,2^{p^3}-1}.$$

Comme les $s_{q,\nu}$ sont positifs, et que $s_{\nu,\nu} \geq (\log\nu)/2$, on en déduit

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad S_{2^{p^3}-1} \geq \frac{1}{p^2}s_{2^{p^3}-1,2^{p^3}-1} \geq \frac{1}{2p^2}\log(2^{p^3-1}) = \frac{p^3-1}{2p^2}\log 2.$$

Ceci montre que $S_{2^{p^3}-1} \to +\infty$ lorsque $p \to +\infty$, donc la série $\sum a_n(f)$ diverge. Autrement dit, la série de Fourier de f en 0 diverge.

Remarque. Cet exemple d'une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0 est dû à Fejér. On peut montrer de manière non constructive que de telles fonctions existent à partir du théorème de Banach-Steinhaus (voir l'exercice 8 page 425).

Exercice 5. Montrer que la fonction

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

est bien définie, qu'elle est 2π-périodique et qu'elle est continue. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|nb_n(f)|^2$ converge, mais que pourtant f n'est pas dérivable en 0.

Solution. La série de fonctions $\sum(\sin nx)/n^2$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Chaque somme partielle de la série est 2π-périodique, donc f est 2π-périodique.

Comme la série trigonométrique définissant f converge normalement, f est égale à sa série de Fourier, donc $b_n(f) = 1/n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la série $\sum|nb_n(f)|^2$ converge donc.

Montrons que f n'est pas dérivable en 0. Soit N un entier naturel non nul. L'inégalité de concavité $\sin u \geq 2u/\pi$ sur $[0,\pi/2]$ entraîne

$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2N}\right], \quad \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{nx}\,\frac{1}{n} + \sum_{n>N}\frac{\sin nx}{n^2x} \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n} + \frac{1}{x}\sum_{n>N}\frac{\sin nx}{n^2}. \qquad (*)$$

Par ailleurs, une transformation d'Abel fournit

$$\sum_{n>N}\frac{\sin nx}{n^2} = \sum_{n>N}S_n(x)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad \text{avec} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sin kx,$$

ce qui grâce à la majoration (on utilise le fait que $S_n(x)$ est la partie imaginaire de $\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}$)

$$|S_n(x)| \leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| = \left|\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{1}{(2/\pi)(x/2)} = \frac{\pi}{x},$$

donne
$$\left|\sum_{n>N}\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{\pi}{x}\left(\sum_{n>N}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{x}\,\frac{1}{(N+1)^2}\le\frac{\pi}{x}\,\frac{1}{N^2}.$$
Avec (*) on en déduit
$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2N}\right],\quad \frac{f(x)}{x}\ge\frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)-\frac{\pi}{N^2x^2}.$$
Ainsi, en posant $x_N=\pi/(2N)$, on a $f(x_N)/x_N\ge\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^N\frac{1}{n}-\frac{4}{\pi}$. La suite (x_N) tend vers 0 et comme $\sum\frac{1}{n}$ diverge, $(f(x_N)-f(0))/(x_N-0)=f(x_N)/x_N$ diverge lorsque $N\to+\infty$. D'où la non-dérivabilité de f en 0.

Exercice 6 (Phénomène de Gibbs). On considère le *signal carré* φ, qui est la fonction 2π-périodique, égale à 1 sur $]0,\pi[$, à 0 sur $]\pi,2\pi[$, et qui vaut $1/2$ en ses points de discontinuité.
a) Calculer la série de Fourier de φ, montrer qu'elle converge simplement vers φ et même uniformément sur tout intervalle fermé ne contenant pas les discontinuités de φ.
b) Montrer que les sommes partielles d'indice impair $s_{2n-1}(t)$ de la série de Fourier de φ admettent la représentation intégrale
$$s_{2n-1}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{\sin 2ns}{\sin s}\,ds.$$
c) Calculer les points critiques de s_{2n-1} sur $[0,\pi]$ et la valeur de son maximum.
d) Montrer que ce maximum converge lorsque n tend vers l'infini vers le nombre
$$M=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin s}{s}\,ds,$$
puis conclure (on admet qu'une valeur approximative à 10^{-3} près est $M\approx 1,089$).

Solution. **a)** Le signal carré φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et comme $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x-)+\varphi(x+))$ en ses discontinuités, la série de Fourier de φ converge simplement vers φ. Elle se calcule facilement et on obtient
$$\varphi(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\sin(2\nu-1)t}{2\nu-1},\qquad t\in\mathbb{R}.$$
Les coefficients de Fourier formant une suite décroissante, la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé ne contenant pas les discontinuités de φ d'après la proposition 2 page 268.
b) Partant de la représentation intégrale $\frac{\sin(2\nu-1)t}{2\nu-1}=\int_0^t\cos(2\nu-1)s\,ds$, on peut écrire
$$s_{2n-1}(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\int_0^t C_n(s)\,ds,\qquad C_n(s)=\sum_{k=1}^n\cos(2k-1)s. \tag{$*$}$$
On calcule $C_n(s)$ à partir de la partie réelle d'une somme d'exponentielles complexes,
$$C_n(s)=\Re\left(\sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)s}\right)=\Re\left(e^{is}\frac{e^{i2ns}-1}{e^{2is}-1}\right)=\Re\left(e^{ins}\frac{\sin ns}{\sin s}\right)=\frac{\cos ns\sin ns}{\sin s}=\frac{\sin 2ns}{2\sin s}.$$
On en déduit le résultat en remplaçant cette dernière expression dans (*).
c) La représentation intégrale précédente donne $s'_{2n-1}(t)=\frac{1}{\pi}\sin(2nt)/\sin t$ (et $s'_{2n-1}(0)=2n/\pi$ par continuité), donc s'_{2n-1} s'annule sur $[0,\pi]$ en $t=x_k=k\pi/(2n)$, $0<k\le 2n$. Montrons que son maximum est atteint en x_1. Pour $1\le k\le n$, on a
$$s_{2n-1}(x_{2k})-s_{2n-1}(x_{2k-1})=\frac{1}{\pi}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}}\frac{\sin 2ns}{\sin s}\,ds,$$

et comme l'intégrande est négative sur $[x_{2k-1}, x_{2k}]$ on en déduit $s_{2n-1}(x_{2k}) < s_{2n-1}(x_{2k-1})$. Le maximum est donc atteint sur l'un des $s_{2n-1}(x_{2k-1})$ pour $1 \leq k \leq n$. Maintenant pour $1 \leq k < n$, on a

$$s_{2n-1}(x_{2k+1}) - s_{2n-1}(x_{2k-1}) = \frac{1}{\pi} \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} \sin 2ns \left(\frac{1}{\sin s} - \frac{1}{\sin(s + \frac{\pi}{2n})} \right) ds$$

expression que l'on obtient en découpant en deux l'intégrale $\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} = \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} + \int_{x_{2k}}^{x_{2k+1}}$ et en effectuant le changement de variable $s \mapsto s + \pi/(2n)$ dans la deuxième. La fonction sinus étant croissante sur $[0, \pi]$, et comme $\sin 2ns$ est négatif sur $[x_{2k-1}, x_{2k}]$, la dernière intégrande est négative, donc $s_{2n-1}(x_{2k+1}) < s_{2n-1}(x_{2k-1})$. Finalement, ceci montre que le maximum est atteint en $t = x_1 = \pi/(2n)$ et vaut

$$\sup_{0 \leq t \leq \pi} s_{2n-1}(t) = M_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin 2ns}{\sin s} \, ds.$$

d) Le changement de variable $t = 2ns$ dans l'intégrale précédente donne

$$M_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2n \sin(t/(2n))} \, dt.$$

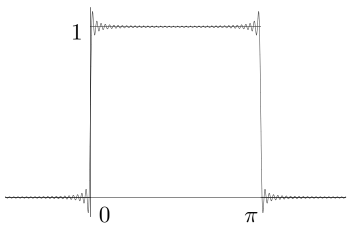
Lorsque $x \to 0$, on a $\sin x \sim x$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $x/(1+\varepsilon) \leq \sin x \leq x/(1-\varepsilon)$ pour $x \in [0, \alpha]$. Ainsi, si $n > \pi/(2\alpha)$ on a $t/(1-\varepsilon) \leq 2n \sin(t/(2n)) \leq t/(1+\varepsilon)$ sur $[0, \pi]$, donc

$$\frac{1}{2} + (1-\varepsilon)\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \leq M_n \leq \frac{1}{2} + (1+\varepsilon)\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

On en déduit que (M_n) converge vers M lorsque $n \to \infty$.

Concluons. Nous venons de montrer que le maximum des sommes partielles s_{2n-1} convergeait vers un nombre $M \approx 1,089$ qui est strictement plus grand que le maximum de φ. Ainsi, les sommes partielles convergent simplement vers le signal carré φ mais pas uniformément.

Remarque. Le graphe ci-contre illustre le phénomène de Gibbs (pour la somme partielle $t \mapsto s_{2n-1}(t)$ avec $n = 40$) de la série de Fourier du signal carré.



– Le phénomène de Gibbs fut observé par Michelson en 1898 lorsqu'il développa un système mécanique capable de tracer la série de Fourier d'un signal. Alors que Michelson soupçonnait un défaut dans la fabrication de sa machine, Gibbs montra l'année suivante que le phénomène était d'origine mathématique.

Exercice 7 (Théorème de S. Bernstein sur les séries de Fourier). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. On suppose que

$$\exists \alpha \in]0, 1[\,, \exists C > 0, \qquad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(u) - f(v)| \leq C|u - v|^{\alpha}$$

(une telle fonction est dite α-höldérienne).

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\rho_n = (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)^{1/2}$. Montrer que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \qquad 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n^2 \sin^2 nh = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 \, dx.$$

b) En déduire, pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, la majoration $\displaystyle\sum_{2^{\nu-1} < n \leq 2^{\nu}} \rho_n \leq \frac{C}{2} \frac{\pi^{\alpha}}{2^{\nu(\alpha - 1/2)}}$.

c) Si $\alpha > 1/2$, montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Solution. **a)** Remarquons déjà que f est continue. Ensuite, fixons $h \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $f_h : x \mapsto f(x+h) - f(x-h)$. Les changements de variable $u = x+h$ et $u = x-h$ conjugués au caractère 2π-périodique des intégrandes entraînent

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)e^{-inx}\,dx = e^{inh}\,c_n(f) \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)e^{-inx}\,dx = e^{-inh}\,c_n(f)$$

et comme $e^{inh} - e^{-inh} = 2i(\sin nh)$, ceci montre que les coefficients de Fourier de f_h vérifient $c_n(f_h) = 2i(\sin nh)c_n(f)$. On conclut en appliquant l'égalité de Parseval à f_h.

b) En appliquant l'égalité précédente à $h = \pi/2^{\nu+1}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2\,dx \le \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (C(2h)^\alpha)^2\,dx = \frac{C^2}{4}\,\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha\nu}}$$

et comme

$$\forall n,\ 2^{\nu-1} < n \le 2^\nu, \quad \sin^2\frac{n\pi}{2^{\nu+1}} \ge \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}, \quad \text{on en déduit} \sum_{2^{\nu-1}<n\le 2^\nu} \rho_n^2 \le 2\,\frac{C^2}{4}\,\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha\nu}}.$$

Il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité de Schwarz, qui entraîne

$$\sum_{2^{\nu-1}<n\le 2^\nu} \rho_n \le \Bigg(\sum_{2^{\nu-1}<n\le 2^\nu} 1\Bigg)^{1/2} \Bigg(\sum_{2^{\nu-1}<n\le 2^\nu} \rho_n^2\Bigg)^{1/2} \le 2^{(\nu-1)/2}\left(\frac{C^2}{2}\,\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha\nu}}\right)^{1/2},$$

d'où le résultat.

c) Si $\alpha > 1/2$, la majoration précédente montre que la série à termes positifs $\sum \rho_n$ converge, et comme $|c_n(f)| \le \rho_{|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge. Ainsi, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on sait alors qu'elle ne peut converger que vers f (voir le dernier alinéa de la remarque 6 page 271).

Exercice 8. Soit (λ_n) une suite positive, décroissante et tendant vers 0.
a) Montrer que la série de fonctions $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$, et que f est continue sur $]0, 2\pi[$.
b) Si $\lambda_n = o(1/n)$ lorsque $n \to +\infty$, montrer que $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
c) Réciproquement, si $\sum \lambda_n \sin(nx)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, montrer que $\lambda_n = o(1/n)$.
d) Plus généralement, si f est continue sur $\mathbb{R}$ montrer que $\lambda_n = o(1/n)$. (Indication. Considérer $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.)

Solution. **a)** On sait d'après la proposition 2 page 268 qu'il y a convergence uniforme sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ pour tout $\alpha \in\,]0, \pi[$. On conclut qu'il y a convergence simple sur $]0, 2\pi[$, et que la fonction limite f est continue sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ pour tout $\alpha > 0$, donc continue sur $]0, 2\pi[$.

Il y a bien convergence simple en 0 (la série est nulle lorsque $x = 0$), il y a donc convergence simple sur $[0, 2\pi[$, donc sur $\mathbb{R}$ car les fonctions en présence sont 2π-périodiques.

b) C'est un peu technique. Comme les fonctions en présence sont 2π-périodiques et impaires, il suffit de prouver la convergence uniforme sur $[0, \pi]$. Le problème est en $x = 0$ car on a vu plus haut qu'il y avait convergence uniforme sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ pour tout $\alpha > 0$.

Commençons par remarquer que

$$\forall x \in\,]0, \pi]\,, \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{n=N}^{+\infty} \lambda_n e^{inx}\right| \le \frac{\pi\lambda_N}{x}. \tag{$*$}$$

En effet, une transformation d'Abel fournit

$$\forall M > N, \quad \sum_{n=N}^{M} \lambda_n e^{inx} = \sum_{n=N}^{M-1} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) E_n(x) + \lambda_M E_M(x) \quad \text{avec} \quad E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$$

et on a la majoration

$$\forall x \in \left]0, \pi\right], \quad |E_n(x)| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = \left| \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(x/2)} \right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}$$

(on a utilisé l'inégalité de concavité $\sin u \geq 2u/\pi$ sur $[0, \pi/2]$). En faisant tendre M vers l'infini on en déduit (*) car (λ_n) est décroissante et tend vers 0.

Ceci étant, considérons $\varepsilon > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_n \leq \varepsilon/n$ pour tout $n \geq N_0$. D'après (*)

$$\forall x \in \left]0, \pi\right], \forall N \geq N_0, \quad |r_N(x)| \leq \frac{\pi \lambda_N}{x} \leq \frac{\pi \varepsilon}{N x} \qquad \text{où} \qquad r_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} \lambda_n \sin(nx).$$

Ainsi, si $N \geq N_0$,

$$\forall x \in \left[\frac{1}{N}, \pi\right], \qquad |r_N(x)| \leq \frac{\pi \varepsilon N}{N} = \pi \varepsilon,$$

et si $x \in \left]0, 1/N\right[$, on a, en notant $K = [1/x]$ la partie entière de $1/x$

$$|r_N(x)| \leq \left| \sum_{n=N}^{K} \lambda_n \sin(nx) \right| + |r_{K+1}(x)| \leq \sum_{n=N}^{K} \frac{\varepsilon}{n} nx + \frac{\pi \varepsilon}{(K+1)x} \leq \varepsilon K x + \pi \varepsilon \leq \varepsilon + \pi \varepsilon$$

(on a utilisé la majoration $|\sin u| \leq |u|$ que l'on montre facilement à partir de l'inégalité des accroissements finis). Ainsi, $|r_N(x)| \leq (1 + \pi)\varepsilon$ pour tout $x \in [0, \pi]$ (en $x = 0$, c'est trivial), et ceci est vrai indépendamment de $N \geq N_0$. On a donc convergence uniforme sur $[0, \pi]$.

c) Notons s_n les sommes partielles de notre série trigonométrique. Si (s_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, alors f est continue, et la suite $(s_n(1/n))$ tend vers 0 (il suffit décrire $|s_n(1/n)| \leq |s_n(1/n) - f(1/n)| + |f(1/n)|$ et de remarquer que les deux termes de droite tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$). La suite (λ_n) étant décroissante, on a par ailleurs

$$s_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \geq \lambda_n \sum_{n/2 < k \leq n} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \geq \lambda_n \frac{n}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\right),$$

donc $0 \leq \lambda_n \leq 2 s_n(1/n)/(n \sin(1/2))$, et comme $s_n(1/n) \to 0$, ceci montre $\lambda_n = o(1/n)$.

d) C'est difficile. Comme indiqué, nous considérons la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Soit $x \in \left]0, \pi\right]$ et $\alpha \in \left]0, x\right[$. La série trigonométrique définissant f converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$ comme on l'a vu plus haut, ce qui entraîne

$$\int_\alpha^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \int_\alpha^x \sin nt\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{n} (\cos n\alpha - \cos nx). \tag{**}$$

Nous allons prouver que cette expression reste valable lorsque $\alpha = 0$.

Pour tout $t \in \left]0, 2\pi\right[$, on note $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\cos nt)/n$ (la série converge simplement sur $\left]0, 2\pi\right[$ car la suite (λ_n/n) est décroissante). Comme la suite (λ_n/n) est décroissante et tend vers 0, on peut appliquer (*) qui entraîne

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \sum_{n \geq N} \frac{\lambda_n}{n} \cos\left(n \frac{\pi}{3N}\right) \right| \leq \frac{\lambda_N}{N} \frac{3N\pi}{\pi} = 3\lambda_N$$

Comme $\cos(n\pi/(3N)) \geq \cos(\pi/3) = 1/2$ pour $1 \leq n \leq N$, on a donc

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad G\left(\frac{\pi}{3N}\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\lambda_n}{n} - 3\lambda_N \qquad \text{donc} \qquad \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\lambda_n}{n} \leq 2G\left(\frac{\pi}{3N}\right) + 6\lambda_N. \tag{***}$$

Comme f est continue en 0, l'égalité (**) montre que $G(\alpha)$ converge lorsque $\alpha \to 0^+$, donc G est bornée au voisinage de 0^+, et (***) montre donc que la série $\sum \lambda_n/n$ est majorée. Cette série converge donc (elle est à termes positifs), donc la série trigonométrique définissant G converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier, ceci montre que $G(\alpha)$ tend vers $\sum \lambda_n/n$ lorsque $\alpha \to 0$, et en faisant tendre α vers 0 dans (*), on obtient

$$\forall x \in \left]0, \pi\right], \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{n}(1 - \cos nx).$$

Les termes de la série de l'expression précédente sont positifs donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad F\left(\frac{\pi}{N}\right) \geq \sum_{N/2<n\leq N} \frac{\lambda_n}{n}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right) \geq \sum_{N/2<n\leq N} \frac{\lambda_n}{n} \geq \frac{N}{2}\,\frac{\lambda_N}{N} = \frac{\lambda_N}{2},$$

autrement dit $0 \leq \lambda_N \leq 2F(\pi/N)$. Comme f est continue et nulle en 0, on a $F(x) = o(x)$ lorsque $x \to 0$ donc $\lambda_N = o(\pi/N) = o(1/N)$ d'où le résultat.

Remarque. Si on suppose f bornée au voisinage de 0, on a $\lambda_n = O(1/n)$ (immédiat à partir de l'inégalité $0 \leq \lambda_N \leq 2F(\pi/N)$ obtenue à la fin de la solution de la question d), et le fait que $F(x) = O(x)$ lorsque $x \to 0$).

6. Problèmes

PROBLÈME 1. Donner un équivalent, lorsque $n \to \infty$, d'une suite réelle (u_n) vérifiant

$$u_0 > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}, \qquad (\alpha > -1).$$

Solution. On remarque déjà que (u_n) diverge vers $+\infty$. En effet, (u_n) est croissante. Si elle était majorée, elle convergerait et sa limite ℓ vérifierait $\ell = \ell + a/\ell^\alpha$, ce qui est absurde. La suite (u_n) est donc croissante et non majorée, donc diverge vers $+\infty$.

Pour rechercher un équivalent de (u_n), on va appliquer une méthode classique (déjà utilisée dans l'exercice 7 page 207). On cherche s'il existe $\beta > 0$ tel que la suite $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)$ converge. Comme $\alpha + 1 > 0$ et que (u_n) diverge vers $+\infty$, on peut écrire

$$u_{n+1}^\beta = \left[u_n\left(1 + \frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right]^\beta = u_n^\beta\left(1 + \frac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right) \quad \text{donc} \quad u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \sim \beta u_n^{\beta-(\alpha+1)}.$$

On choisit $\beta = \alpha + 1$, de sorte que $u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1} \sim \alpha + 1$. En sommant ces équivalents (on peut, voir le théorème 5 page 210), on obtient

$$u_n^{\alpha+1} - u_0^{\alpha+1} = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^{\alpha+1} - u_k^{\alpha+1}) \sim n(\alpha + 1),$$

donc finalement $u_n^{\alpha+1} \sim n(\alpha + 1)$ donc $u_n \sim [n(\alpha + 1)]^{1/(\alpha+1)}$ lorsque $n \to +\infty$.

PROBLÈME 2 (NOMBRE MOYEN DE DIVISEURS D'UN ENTIER). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n. **1/** Donner, lorsque $x \to +\infty$, un équivalent de

$$F(x) = \sum_{1\leq n\leq x} \tau(n).$$

2/ On désigne par γ la constante d'Euler. Lorsque $x \to +\infty$, démontrer que

$$F(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

(on considérera les indices $\leq \sqrt{x}$ dans l'expression de $F(x)$ par une somme double).

Solution. **1/** En remarquant que $\tau(n) = \sum_{m|n} 1$ (on somme 1 sur les entiers m qui divisent n), une inversion de sommation donne
$$F(x) = \sum_{1\le n\le x}\sum_{m|n} 1 = \sum_{1\le m\le x}\sum_{\substack{n\le x\\ m|n}} 1. \qquad (*)$$
Or $\sum_{n\le x, m|n} 1$ est le nombre d'entiers naturels inférieurs à x divisibles par m. Ces éléments sont m, $2m$, $\dots$, $[x/m]m$ (où $[y]$ désigne la partie entière de y), donc au nombre de $[x/m]$. Donc finalement
$$F(x) = \sum_{1\le m\le x}\left[\frac{x}{m}\right].$$
En utilisant l'encadrement $x/m - 1 < [x/m] \le x/m$, en déduit
$$x\left(\sum_{1\le m\le x}\frac{1}{m}\right) - x < F(x) \le x\left(\sum_{1\le m\le x}\frac{1}{m}\right),$$
et comme $\sum_{1\le m\le x} 1/m = \log x + O(1)$ (c'est classique, voir la page 211), on en déduit $F(x) = x\log x + O(x)$, en particulier $F(x) \sim x\log x$.

2/ Pousser l'asymptotique dans le raisonnement précédent ne permet pas d'obtenir le résultat. On effectue le changement de variable $k = n/m$ dans la dernière somme de (*), qui donne
$$F(x) = \sum_{1\le m\le x}\sum_{\substack{1\le k\\ 1\le km\le x}} 1 = \sum_{1\le km\le x} 1. \qquad (**)$$
Comme suggéré, découpons cette dernière somme en fonction de la position de k, m par rapport à $\sqrt{x}$. On peut écrire
$$F(x) = \sum_{\substack{1\le k\le\sqrt{x}\\ 1\le km\le x}} 1 + \sum_{\substack{1\le m\le\sqrt{x}\\ 1\le km\le x}} 1 - \sum_{1\le k,m\le\sqrt{x}} 1 = 2\sum_{\substack{1\le m\le\sqrt{x}\\ 1\le km\le x}} 1 - [\sqrt{x}]^2 = 2\sum_{1\le m\le\sqrt{x}}\left[\frac{x}{m}\right] - [\sqrt{x}]^2.$$
Ici aussi on utilise l'encadrement $y - 1 < [y] \le y$, qui permet d'obtenir, à partir de la dernière expression
$$F(x) = 2\sum_{1\le m\le\sqrt{x}}\frac{x}{m} + O(\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + O(1))^2 = 2x\sum_{1\le m\le\sqrt{x}}\frac{1}{m} - x + O(\sqrt{x}). \qquad (***)$$
L'asymptotique d'ordre 3 des nombres harmoniques (voir page 211) permet d'écrire
$$\sum_{1\le m\le\sqrt{x}}\frac{1}{m} = \log\sqrt{x} + \gamma + O(1/\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log x + \gamma + O(1/\sqrt{x}).$$
on en déduit le résultat en remplaçant ceci dans la dernière expression de (***).

Remarque. On peut interpréter ce résultat en disant qu'un entier n a en moyenne $\log n + 2\gamma - 1$ diviseurs.

La technique utilisée est classique dans ce type d'exercice : on fait apparaître une somme double puis on inverse les signes de sommation. On montre par exemple de la même façon que $\sum_{n\le x}\sigma(n) \sim (\pi^2/12)x^2$ où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n.

L'approche consistant à découper la somme de (**) en considérant les cas où $k, m \le \sqrt{x}$ a été utilisée par Dirichlet et est appelée la *méthode de l'hyperbole*. Elle porte ce nom car géométriquement, elle consiste à regrouper les couples d'entiers naturels non nuls (k, m) situés sous l'hyperbole $km \le x$ en fonction de la position relative de k, m et $\sqrt{x}$. Le problème consistant à déterminer la plus petite constante θ telle que $F(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\theta+o(1)})$ est célèbre et s'appelle le *problème des diviseurs de Dirichlet*. Nous avons montré que $\theta \le 1/2$. En 1903, Voronoï a montré que $\theta \le 1/3$ puis Hardy et Landau ont montré en 1915 que $\theta \ge 1/4$. Il est conjecturé que $\theta = 1/4$ mais le meilleur résultat obtenu jusqu'à présent est dû à Huxley qui a prouvé en 2003 que $\theta \le 131/416 \simeq 0,3149$.

Problème 3 (Deux techniques originales pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$). **1/** Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_m : \left]-\pi, \pi\right[\setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \theta \mapsto \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin^{2m+1}\theta}.$$

a) Écrire f_m sous la forme d'un polynôme P_m en $\operatorname{cotan}^2\theta$.
b) En déduire les racines de P_m et calculer leur somme. Conclure.

2/ a) Montrer que la série de fonctions

$$\sin t + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2n+1} \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \sin^{2n+1} t$$

converge normalement vers $t \mapsto t$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
b) En déduire par intégration la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/(2n+1)^2$, puis celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$.

Solution. **1/ a)** En écrivant que $\sin(2m+1)\theta$ est la partie imaginaire de $(\cos\theta + i\sin\theta)^{2m+1}$, on trouve

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin(2m+1)\theta = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}\theta \, \cos^{2(m-k)}\theta,$$

donc $f_m(\theta) = P_m(\operatorname{cotan}^2\theta)$ avec $P_m(X) = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^{2k+1} (-1)^k X^{m-k}$.

b) L'expression $f_m(\theta) = \sin((2m+1)\theta)/\sin^{2m+1}\theta$ montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le m, \quad f_m\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = 0 \qquad \text{donc} \qquad P_m\left(\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right) = 0.$$

On a ainsi trouvé m racines distinctes du polynôme P_m, et comme $\deg(P_m) = m$, on a trouvé toutes les racines de P_m. La somme des racines de P_m est l'opposé du rapport du coefficient de X^{m-1} par celui de X^m, donc

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{C_{2m+1}^3}{C_{2m+1}^1} = \frac{2m(2m-1)}{6}. \qquad (*)$$

Pour en déduire la valeur de $\sum 1/n^2$, nous allons comparer $\operatorname{cotan}^2 x$ et $1/x^2$. Montrons

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \operatorname{cotan}^2 x \le \frac{1}{x^2} \le 1 + \operatorname{cotan}^2 x. \qquad (**)$$

L'inégalité des accroissements finis donne $\tan x \ge x$ sur $]0, \pi/2[$, d'où la première inégalité de (**). Pour la seconde, on utilise la majoration $\sin x \le x$ sur $]0, \pi/2[$ (qui s'obtient aussi avec l'inégalité des accroissements finis) qui entraîne $1 + \operatorname{cotan}^2 x = 1/\sin^2 x \ge 1/x^2$.

De (*) et (**), on tire

$$\frac{2m(2m-1)}{6} \le \sum_{k=1}^{m} \frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2} \le \frac{2m(2m-1)}{6} + m$$

donc

$$\frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2} \frac{\pi^2}{6} \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \le \frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2} \frac{\pi^2}{6} + \frac{m}{(2m+1)^2} \pi^2.$$

Ceci est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. En faisant $m \to +\infty$, on en déduit $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

2/ a) On sait que la fonction arcsinus est développable en série entière sur $]-1, 1[$, plus précisément

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \qquad \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \, x^{2n+1} \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{1}{2n+1} \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}. \qquad (***)$$

L'idée est ensuite de remplacer x par $\sin t$ dans cette expression.

On pourrait montrer la convergence normale de $\sum u_n\, x^{2n+1}$ sur $[-1,1]$ en utilisant la règle de Raab-Duhamel pour estimer u_n, mais ici, on peut mieux faire. La positivité des u_n entraîne pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, d'après (***)

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad x + \sum_{n=1}^{N} u_n\, x^{2n+1} \leq \arcsin x \leq \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

et en faisant tendre x vers 1 on en déduit $1 + \sum_{n=1}^{N} u_n \leq \pi/2$. Ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, donc $\sum u_n$ est majorée, et comme les termes de cette série sont positifs, $\sum u_n = \sum |u_n|$ converge. Ainsi, $\sum u_n\, x^{2n+1}$ converge normalement sur $[-1,1]$. Sa somme définit donc une fonction continue sur $[-1,1]$. L'égalité (***) vaut sur $]-1,1[$, elle vaut donc sur $[-1,1]$ par continuité.

Finalement, nous avons montré que $x + \sum u_n x^{2n+1}$ converge normalement vers la fonction arcsinus sur $[-1,1]$. On en déduit le résultat demandé en remplaçant x par $\sin t$ ($t \in [-\pi/2, \pi/2]$).

b) La convergence normale de la série de fonctions nous autorise à l'intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\pi/2} t\, dt = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\, dt = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

où nous avons utilisé la valeur de l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\, dt$ (voir l'exercice 1 page 130). Pour en déduire $S = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$, il suffit de séparer les termes d'indices pairs et impairs

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4} \quad \text{d'où} \quad S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problème 4 (Formule sommatoire de Poisson). **a)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ lorsque $|x| \to +\infty$. Après avoir justifié l'existence des sommes infinies, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n)\, e^{2i\pi n x} \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t}\, dt.$$

(formule sommatoire de Poisson).

b) (Application.) Montrer que

$$\forall s > 0, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/s}$$

(on pourra utiliser le résultat établi à la question 3/ de l'exercice 4 page 168).

Solution. **a)** La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $\mathbb{R}$. En effet, si $M > 0$ est tel que $|f(x)| \leq M/x^2$ pour $|x| \geq 1$, il suffit d'écrire pour tout $K > 0$ la majoration

$$\forall x \in [-K, K], \forall n \in \mathbb{Z}, |n| > K+1, \qquad |f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}.$$

En particulier, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note F sa limite simple.

Pour les mêmes raisons, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sur les suites de fonctions qui entraîne que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, F est 1-périodique car si on fixe $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n),$$

et en faisant $N \to +\infty$, on en déduit $F(x+1) = F(x)$.

Les coefficients de Fourier de F sont donnés par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi nt}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi nt}\, dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2i\pi nt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi nt}\, dt = f^*(n)$$

(on a bien le droit d'intervertir les signes de sommation car la série de fonctions définissant F converge uniformément sur $[0,1]$ comme on l'a vu ; par ailleurs, la dernière intégrale converge absolument au vu des conditions de croissance satisfaites par f). Comme de plus F est de classe $\mathcal{C}^1$, sa série de Fourier converge uniformément vers F, d'où la formule sommatoire de Poisson.

b) Soit $\alpha > 0$. Nous appliquons la formule sommatoire de Poisson à la fonction $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$. Les coefficients $f^*(n)$ sont donnés par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi nt}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, e^{-2i\pi nu/\sqrt{\alpha}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$$

(où on a utilisé le résultat de la question 3/ de l'exercice 4 de la page 168). En appliquant la formule sommatoire de Poisson avec $x = 0$, on déduit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}.$$

Ceci est vrai pour tout $\alpha > 0$, et en changeant α en πs, on obtient le résultat désiré.

Remarque. La dernière identité est non-triviale. En considérant la série entière $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$, (fonction thêta de Jacobi) elle s'exprime en écrivant $\sqrt{s}\,\Theta(e^{-s\pi}) = \Theta(e^{-\pi/s})$. Ainsi, le comportement de $\Theta(x)$ en $x = 1$ est relié à son comportement en $x = 0$.

PROBLÈME 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe vérifiant une récurrence linéaire d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$\exists a_1, \dots, a_h \in \mathbb{C}, \forall n \geq h, \qquad u_n = a_1 u_{n-1} + \cdots + a_h u_{n-h}. \tag{$*$}$$

En considérant la série entière $\sum u_n\, z^n$, démontrer la proposition 3 page 202.

Solution. Si la série entière $\sum u_n\, z^n$ a un rayon de convergence non nul (on ne sait pas encore si c'est le cas), la récurrence (*) entraîne, après produit par z^n et sommation sur n (lorsque z est dans le disque de convergence) que sa somme f vérifie

$$f(z) - P_h(z) = a_1\, z[f(z) - P_{h-1}(z)] + \cdots + a_{h-1}\, z^{h-1}[f(z) - P_1(z)] + a_h\, z^h f(z) \tag{$**$}$$

où pour tout k, $1 \leq k \leq h$, $P_k(z) = u_0 + u_1\, z + \cdots + u_{k-1}\, z^{k-1}$. Ceci s'écrit aussi $f(z)Q(z) = P(z)$ où

$$Q(z) = 1 - a_1\, z - \cdots - a_h\, z^h \quad \text{et} \quad P(z) = P_h(z) - a_1\, z P_{h-1}(z) - \cdots - a_{h-1}\, z^{h-1} P_1(z).$$

Ainsi, $f(z) = P(z)/Q(z)$ est une fraction rationnelle. Par ailleurs, 0 n'est pas un pôle de $f(z)$ donc $P(z)/Q(z)$ est développable en une série entière $\sum v_n\, z^n$ dont le rayon de convergence est non nul (voir page 251). Sa somme g vérifie $Q(z)g(z) = P(z)$ sur son disque de convergence, autrement dit g vérifie la même égalité que f dans (**), donc la suite (v_n) vérifie la récurrence (*). Par ailleurs, l'égalité (**) vérifiée par g montre que pour tout k, $0 \leq k < h$, le coefficient de z^k dans $g(z) - P_h(z)$ est nul. Autrement dit, $v_k = u_k$ lorsque $0 \leq k < h$. Finalement, la suite (v_n) vérifie la même récurrence que (u_n) avec les mêmes conditions initiales. Ces suites sont donc égales, ce qui montre finalement que $\sum u_n\, z^n$ a bien un rayon de convergence non nul et que sa somme f vérifie $f(z) = P(z)/Q(z)$ sur son disque de convergence.

On veut maintenant calculer explicitement u_n. Soient $x_1, \dots, x_p$ les racines de l'équation caractéristique de (*), d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, de sorte que

$$R(X) = X^h - a_1 X^{h-1} - \dots - a_h = \prod_{i=1}^{p} (X - x_i)^{\alpha_i} \quad \text{donc} \quad Q(X) = X^h R\left(\frac{1}{X}\right) = \prod_{i=1}^{p} (1 - x_i X)^{\alpha_i}.$$

Le polynôme P vérifie $\deg(P) < h = \deg(Q)$ par construction, on peut donc écrire la décomposition en éléments simples de P/Q sous la forme

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{c_{i,j}}{(X - 1/x_i)^j} \right] \qquad (c_{i,j} \in \mathbb{C}).$$

On en déduit (voir page 251) que le développement en série entière de $f(z) = P(z)/Q(z)$ s'écrit

$$f(z) = \sum_{i=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{(-1)^j c_{i,j}\, x_i^j}{(j-1)!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+j-1)!}{n!} x_i^n\, z^n \right) \right].$$

On tire, en prenant le coefficient de z^n dans cette expression,

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{(-1)^j c_{i,j}\, x_i^j}{(j-1)!} \, (n+j-1) \cdots (n+1) \right] x_i^n,$$

donc $u_n = \sum_{i=1}^{p} T_i(n)\, x_i^n$ où pour tout i, T_i est un polynôme de degré $< \alpha_i$.

En désignant par Γ l'e.v des suites vérifiant cette dernière condition, nous avons prouvé que l'e.v U des suites complexes vérifiant la récurrence linéaire (*) est tel que $U \subset \Gamma$. Nous voulons prouver la condition suffisante, c'est-à-dire $\Gamma \subset U$. Pour cela, on remarque que l'application

$$U \to \mathbb{C}^h \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{h-1})$$

est linéaire (c'est évident) et bijective (une suite vérifiant (*) est uniquement déterminée par ses premiers termes $u_0, \dots, u_{h-1}$). Ainsi, U est de dimension h, et comme Γ est de dimension $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = h$, l'inclusion $U \subset \Gamma$ entraîne $U = \Gamma$.

Nous avons donc démontré la proposition 3 page 202.

Remarque. On démontre en général la proposition 3 page 202 en vérifiant directement que les expressions de la forme $\sum_{i=1}^{p} P_i(n) x_i^n$ (avec P_i un polynôme de degré $< \alpha_i$) sont bien solutions de la récurrence, puis en prouvant que la dimension de l'e.v correspondant est bien égal à celui des suites vérifiant la récurrence (comme dans la solution présentée ici). L'intérêt du problème proposé ici est qu'il permet de découvrir la forme générale de la solution sans la connaître *a priori*.

PROBLÈME 6 (NOMBRES DE PISOT). **a)** Montrer que la série $\sum \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge.
b) Plus généralement, on considère un polynôme P de degré d, unitaire, à coefficients entiers, et on suppose que ses racines $\xi_1, \dots, \xi_d$ vérifient $|\xi_1| > 1$ et $|\xi_k| < 1$ pour tout $k \in \{2, \dots, d\}$ (on dit que ξ_1 est un nombre de Pisot). Montrer que la série $\sum \sin(\pi \xi_1^n)$ converge.

Solution. **a)** Il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier (on s'en convainc en développant chacun des deux termes par la formule du binôme). Ceci entraîne $|\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)| = |\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $|\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)| \leq \pi(2-\sqrt{3})^n$ et que $|2-\sqrt{3}| < 1$, on en déduit que notre série converge absolument, donc converge.

b) Le polynôme P est unitaire à coefficients entiers, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \xi_1^n + \dots + \xi_d^n$ est un entier (S_n s'exprime comme un polynôme à coefficients entiers, symétrique en les ξ_i, donc s'exprime comme un polynôme à coefficients entiers en les fonctions symétriques des racines de P, et ces dernières sont entières donc $S_n \in \mathbb{Z}$. On peut aussi retrouver ce dernier résultat grâce aux formules de Newton — voir le tome Algèbre). Ceci entraîne

$$|\sin(\pi\xi_1^n)| = |\sin(\pi(\xi_2^n + \cdots + \xi_d^n))| \leq \pi|\xi_2^n + \cdots + \xi_d^n| \leq \pi(|\xi_2|^n + \cdots + |\xi_d|^n)$$

et comme $|\xi_k| < 1$ pour $k \geq 2$, on en déduit la convergence de la série proposée.

PROBLÈME 7. **a)** Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, montrer

$$\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, \qquad 1 \leq q \leq N, \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}.$$

b) Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 \sin^2 n}$ (on rappelle que π est un nombre irrationnel, voir le problème 15 page 187).

Solution. **a)** C'est classique. Nous allons utiliser une méthode connue sous le nom de *principe des tiroirs*. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $[x]$ sa partie entière. On considère les nombres $u_k = k\alpha - [k\alpha]$ pour $k = 1, 2, \ldots, N+1$. Chacun des u_k est élément de $[0, 1[$, et pour tout k, il existe un unique $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ tel que $u_k \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$. Autrement dit, nous rangeons les $N+1$ nombres u_k dans les N “boites” $[0, \frac{1}{N}[$, $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}[, \ldots, [\frac{N-1}{N}, 1[$. Il existe donc une boite contenant au moins deux des nombres u_k, ce qui entraîne

$$\exists a, b \in \{1, \ldots, N+1\}, a < b, \qquad |u_b - u_a| < \frac{1}{N},$$

ce qui s'écrit encore $|(b-a)\alpha - ([b\alpha] - [a\alpha])| < 1/N$. En posant $p = [b\alpha] - [a\alpha]$ et $q = b - a$, on a donc $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $1 \leq q \leq N$ et $|q\alpha - p| < 1/N$, d'où le résultat.

b) La question précédente entraîne l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'un couple $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq q_n \leq n$ et $|\pi - p_n/q_n| \leq 1/(nq_n) \leq 1/q_n^2$. La suite de rationnels (p_n/q_n) tend vers le nombre irrationnel π, donc (p_n) et (q_n) tendent vers $+\infty$ (voir l'exercice 4 page 205). Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|p_n - \pi q_n| \leq 1/q_n$ donc

$$\sin^2 p_n = \sin^2(p_n - \pi q_n) \leq (p_n - \pi q_n)^2 \leq 1/q_n^2,$$

donc $p_n^2 \sin^2 p_n \leq p_n^2/q_n^2$, et comme (p_n/q_n) converge, la suite $(p_n^2 \sin^2 p_n)$ est majorée. Donc la suite de terme général $(p_n^2 \sin^2 p_n)^{-1}$ est minorée par une constante > 0. On en déduit que le terme général de la série proposée ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

PROBLÈME 8. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe, avec $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
a) Montrer que la fonction suivante est bien définie

$$S : \ ]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad h \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n g(nh).$$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} S(h) = \frac{g(0)}{2}$.

Solution. **a)** Si on montre que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors g sera positive (car $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$) et la série $\sum(-1)^n g(nh)$ sera convergente pour tout $h > 0$ (série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0), ce qui prouvera le résultat.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$. Comme g est convexe, son graphe à droite de b est au dessus de la corde reliant $(a, g(a))$ à $(b, g(b))$ ce qui s'écrit

$$\forall t > b, \qquad g(t) \geq g(b) + (t-b)\frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Comme $g(t)$ tend vers 0 à l'infini, ceci n'est possible que si $(g(b)-g(a))/(b-a) \leq 0$, donc $g(b) \leq g(a)$. Donc g est bien décroissante.

b) On remarque que $R: \ h \mapsto S(h) - g(0)/2$ vérifie

$$\forall h > 0, \qquad R(h) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n A_n(h) \quad \text{avec} \quad A_n(h) = g(nh) - g((n+1)h).$$

Comme g est décroissante, on a $A_n(h) \geq 0$ pour tout n et pour tout $h > 0$. De plus la convexité de g entraîne

$$\forall h > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad g(nh) = g\left(\frac{(n-1)h + (n+1)h}{2}\right) \leq \frac{g((n-1)h)}{2} + \frac{g((n+1)h)}{2}$$

c'est-à-dire $g(nh) - g((n+1)h) \leq g((n-1)h) - g(nh)$. Autrement dit, la suite $(A_n(h))$ décroît pour tout $h > 0$.

Finalement, $\sum(-1)^n A_n(h)$ apparaît comme une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0. On peut donc écrire (voir le théorème 6 page 214)

$$\forall h > 0, \qquad |2R(h)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n A_n(h)\right| \leq A_0(h) = g(0) - g(h).$$

On en déduit que $R(h)$ tend vers 0 lorsque $h \to 0^+$ (g est continue), donc $S(h) \to g(0)/2$ lorsque $h \to 0^+$.

Problème 9. Donner un équivalent, lorsque $x \to 1^-$, de la fonction

$$f: \ [0,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Solution. L'identité $1 - x^n = (1-x)P_n(x)$ avec $P_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ montre que

$$\forall x \in [0,1[, \qquad g(x) = (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{P_n(x)}.$$

On se ramène ainsi à donner un équivalent de g. Pour n fixé, on a $P_n(x) \to n$ lorsque $x \to 1^-$, ce qui amène à penser que $g(x)$ est équivalent à $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n = -\log(1-x)$. Montrons ce dernier résultat. Compte tenu du fait que, pour $0 \leq x < 1$,

$$0 \leq n - P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1-x^k) = (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} P_k(x) \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} P_n(x) \leq n(1-x)P_n(x),$$

on en déduit, pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 \leq g(x) - h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{n - P_n(x)}{nP_n(x)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{n(1-x)P_n(x)}{nP_n(x)} = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x \leq 1.$$

Ainsi, lorsque $x \to 1^-$, $g(x) = h(x) + O(1) = -\log(1-x) + O(1) \sim -\log(1-x)$, donc $f(x) \sim \log(1-x)/(x-1)$.

Problème 10 (Une série entière semi-convergente sur tout son cercle de convergence). **1/** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites complexes. On pose $\sigma_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que $\sum a_n b_n$ converge dans les cas suivants :

a) (i) (σ_n) est bornée, (ii) $\sum |b_n - b_{n+1}|$ converge, (iii) $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

b) (i) $(\sigma_n/\sqrt{n})$ est bornée, (ii) $\sum |b_n - b_{n+1}|\sqrt{n}$ converge, (iii) $\lim_{n\to+\infty} b_n\sqrt{n} = 0$.

2/ (Application.) Montrer que la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\, z^n$$

(où $[x]$ désigne la partie entière de x) est convergente en tout point de son cercle de convergence $|z| = 1$, mais n'est absolument convergente en aucun point de ce cercle (traiter séparément les cas $z = 1$ et $z \neq 1$).

Solution. **1/** Dans les deux cas, on utilisera la relation suivante, conséquence d'une transformation d'Abel :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n. \tag{$*$}$$

a) Si M désigne un majorant de la suite $(|\sigma_n|)$, on a $|\sigma_n(b_n - b_{n+1})| \leq M|b_n - b_{n+1}|$, donc $\sum \sigma_n(b_n - b_{n+1})$ converge absolument d'après (ii), et comme $|\sigma_n b_n| \leq M|b_n|$ tend vers 0 d'après (iii), on en conclut avec (*) la convergence de $\sum a_k b_k$.

b) Soit M un majorant de $(|\sigma_n/\sqrt{n}|)$, de sorte que $|\sigma_n| \leq M\sqrt{n}$ pour tout n. On a $|\sigma_n(b_n - b_{n+1})| \leq M|b_n - b_{n+1}|\sqrt{n}$ donc $\sum \sigma_n(b_n - b_{n+1})$ converge absolument d'après (ii). Or $|\sigma_n b_n| \leq M|b_n|\sqrt{n}$ tend vers 0 d'après (iii), d'où le résultat avec (*).

2/ Commençons par le cas $z = 1$. D'après la question 1/b) appliquée avec $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}$ et $b_n = 1/n$, la convergence de $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]}/n$ sera assurée si on montre que les sommes partielles σ_n de $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]}$ sont majorées en valeur absolue par un terme de la forme $M\sqrt{n}$. Montrons donc ce point.

Pour tout entier naturel impair p on a

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{[\sqrt{n}]} = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} (-1)^{[\sqrt{n}]} + \sum_{n=(p+1)^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{[\sqrt{n}]} = (-1)^p(2p+1) + (-1)^{p+1}(2p+3) = 2.$$

Donnons nous maintenant $N \in \mathbb{N}^*$ et notons N_0 le plus grand entier tel que $(2N_0+1)^2 \leq N$. On a

$$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{[\sqrt{n}]} = \sum_{k=0}^{N_0-1} \left(\sum_{n=(2k+1)^2}^{(2k+3)^2-1} (-1)^{[\sqrt{n}]} \right) = \sum_{k=0}^{N_0-1} 2 = 2N_0 \leq \sqrt{N} - 1,$$

et comme $(2N_0+1)^2 \leq N < (2N_0+3)^2$,

$$\left| \sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{[\sqrt{n}]} \right| \leq N + 1 - (2N_0+1)^2 \leq (2N_0+3)^2 - (2N_0+1)^2 = 8(N_0+1) \leq 4\sqrt{N} + 4.$$

Ceci montre que $|\sigma_N| \leq (\sqrt{N} - 1) + (4\sqrt{N} + 4) = 5\sqrt{N} + 3 \leq 8\sqrt{N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, d'où le résultat.

Passons maintenant au cas où $|z| = 1$ et $z \neq 1$. On écrit $z = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$, et il s'agit de montrer la convergence de $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} e^{ni\theta}/n$. Pour cela, on va appliquer 1/a) avec $a_n = e^{ni\theta}$ et $b_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}/n$.

(i). La suite (σ_n) est bornée car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sigma_n = \left| \sum_{k=1}^{n} e^{ki\theta} \right| = \left| e^{i\theta} \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

(ii). Pour montrer que $\sum |b_n - b_{n+1}|$ converge, on remarque d'abord

$$\text{si} \quad \exists p \geq 2\,(p \in \mathbb{N}),\ n+1 = p^2 \quad \text{alors} \quad |b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{p^2}$$

$$\text{si} \quad \exists p \in \mathbb{N}^*,\ p^2 \leq n < n+1 < (p+1)^2 \quad \text{alors} \quad |b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

On en déduit

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} |b_n - b_{n+1}| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{p=2}^{[\sqrt{N+1}]} \left(\frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{p^2} \right),$$

et comme les séries $\sum 1/(n(n+1))$, $\sum 1/(p^2-1)$ et $\sum 1/p^2$ convergent, on en déduit que $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est bornée donc converge.

(iii) est trivialement vérifiée.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, la série $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} z^n/n$ converge, mais ne converge pas absolument. En d'autres termes, notre série entière est semi-convergente en tout point de son cercle de convergence.

PROBLÈME 11. **a)** Montrer que la série entière $\sum z^n/(n!)^2$ a un rayon de convergence infini. Soit f sa somme.
b) Pour tout $x > 0$, comparer $f(x)$ et

$$I(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(2\sqrt{x} \sin t)\, dt.$$

c) En déduire, lorsque $x \to +\infty$, un équivalent de $f(x)$.

Solution.
a) C'est facile, car on a l'encadrement $0 \leq 1/(n!)^2 \leq 1/n!$ et la série $\sum z^n/n!$ a un rayon de convergence infini.

b) Fixons $x > 0$. La série de fonctions $\sum (2\sqrt{x} \sin t)^n/n!$ de la variable t converge normalement sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (car $2\sqrt{x} \sin t$ y est bornée) vers la fonction $t \mapsto \exp(2\sqrt{x} \sin t)$, donc on est autorisé à intervertir les signes de sommation en écrivant

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2^n x^{n/2}}{n!} \sin^n t\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{n/2}}{n!} I_n, \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n t\, dt. \qquad (*)$$

Lorsque $n = 2k+1$ est impair, l'intégrande de I_{2k+1} est impaire donc $I_{2k+1} = 0$. Lorsque $n = 2k$ est pair, I_{2k} s'exprime au moyen des intégrales de Wallis (voir l'exercice 1 page 130)

$$I_{2k} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t\, dt = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,\pi,$$

et donc (*) s'écrit

$$I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k} x^k}{(2k)!}\, I_{2k} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k!)^2} = \frac{f(x)}{\pi}.$$

c) Il s'agit de donner un équivalent de l'intégrale $I(x)$ lorsque $x \to +\infty$. On pourrait s'en tirer en appliquant directement la méthode de Laplace (voir le théorème 4 page 164). Comme cette dernière n'est pas au programme de mathématiques spéciales, nous allons nous mettre dans les conditions du concours et en faire abstraction.

Pour simplifier l'intégrande, nous commençons par faire le changement de variable $u = 2\sqrt{x}\sin t$ qui donne

$$\forall x > 0, \qquad I(x) = \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \frac{e^u}{\sqrt{4x - u^2}}\,du.$$

Lorsque x est grand, c'est la partie des u proche de $2\sqrt{x}$ qui contribue le plus à la valeur de l'intégrale. Pour ramener ce maximum à une abscisse fixe, on fait le changement de variable $v = 2\sqrt{x} - u$ qui donne

$$\forall x > 0, \qquad I(x) = \int_0^{4\sqrt{x}} \frac{e^{2\sqrt{x}-v}}{\sqrt{4\sqrt{x}v + v^2}}\,dv = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2x^{1/4}} J(x), \qquad J(x) = \int_0^{4\sqrt{x}} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v + v^2 x^{-1/2}/4}}\,dv.$$

Lorsque $x \to +\infty$, l'intégrande de $J(x)$ tend vers $e^{-v}/\sqrt{v}$, et on s'attend à ce que $J(x)$ converge vers l'intégrale correspondante. Pour prouver ce point, nous utilisons l'inégalité $|(v+a)^{-1/2} - v^{-1/2}| \le a/v^{3/2}$ pour $a \ge 0$ (conséquence de l'inégalité des accroissements finis) qui entraîne

$$\forall x > 0, \qquad \left| J(x) - \int_0^{4\sqrt{x}} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\,dv \right| \le \int_0^{4\sqrt{x}} \frac{v^2}{4\sqrt{x}} \frac{1}{v^{3/2}} e^{-v}\,dv = \frac{1}{4\sqrt{x}} \int_0^{4\sqrt{x}} v^{1/2} e^{-v}\,dv,$$

et comme $\int_0^{+\infty} v^{1/2} e^{-v}\,dv$ converge, on en déduit $J(x) = \int_0^{4\sqrt{x}} e^{-v}/\sqrt{v}\,dv + O\left(1/\sqrt{x}\right)$ donc $J(x)$ converge vers $K = \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{-1/2}\,dv$ lorsque $x \to +\infty$. Or $K = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (voir la question 2/d) du sujet d'étude 1 page 315), donc finalement, lorsque $x \to +\infty$,

$$I(x) = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2x^{1/4}} J(x) \sim \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2x^{1/4}} \sqrt{\pi} \qquad \text{d'où} \qquad f(x) = \frac{I(x)}{\pi} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, x^{-1/4} e^{2\sqrt{x}}.$$

Problème 12. Soit $\alpha > 0$. Donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de

$$P_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha n)^k}{k!}, \qquad \text{et} \qquad R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\alpha n)^k}{k!}.$$

Solution. Remarquons que $P_n(\alpha) + R_n(\alpha) = e^{\alpha n}$.

– **Cas** $\alpha > 1$. On écrit

$$P_n(\alpha) = \frac{(\alpha n)^n}{n!} A_n(\alpha), \qquad \text{avec} \qquad A_n(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{\alpha^k}.$$

On écrit $A_n(\alpha)$ sous la forme

$$A_n(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}(n) \frac{1}{\alpha^k}, \qquad \text{où} \qquad a_k(n) = \prod_{j=1}^{k} (1 - j/n).$$

Chaque $a_k(n)$ converge vers 1 lorsque $n \to +\infty$, ce qui suggère que $A_n(\alpha)$ converge vers $\sum_{k \ge 0} 1/\alpha^k$. Prouvons ce résultat. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $K \in \mathbb{N}$ tel que $1/\alpha^K < \varepsilon$ et $N > K$ tel que $a_K(N) > 1 - \varepsilon$. Pour $0 \le k \le K$ et $n \ge N$, on a $a_k(n) \ge a_K(N) > 1 - \varepsilon$, donc

$$1 + (1-\varepsilon) \frac{1 - 1/\alpha^{K+1}}{1 - 1/\alpha} = 1 + (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\alpha^k} < A_n(\alpha) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha^k}.$$

On en déduit $(1-\varepsilon)^2 \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} < A_n(\alpha) \le \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$, et ceci pour tout $n \ge N$. Donc $A_n(\alpha)$ converge vers $\alpha/(\alpha - 1)$ lorsque $n \to \infty$. Avec la formule de Stirling, on trouve

$$P_n(\alpha) \sim (\alpha n)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{(\alpha e)^n}{\sqrt{2\pi n}} \qquad \text{et} \qquad R_n(\alpha) = e^{\alpha n} - P_n(\alpha) \sim e^{\alpha n}.$$

(on a utilisé l'inégalité $e^{\alpha} \ge \alpha e$, la fonction concave e^x étant au dessus de sa tangente en $x = 1$).

– **Cas** $\alpha < 1$. On écrit

$$R_n(\alpha) = \frac{(\alpha n)^n}{n!} B_n(\alpha), \qquad \text{avec} \qquad B_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{(n+1)\cdots(n+k)} \alpha^k.$$

On écrit $B_n(\alpha)$ sous la forme

$$B_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(n)\alpha^k, \qquad \text{où} \qquad b_k(n) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1+j/n}.$$

On va montrer que $B_n(\alpha)$ converge vers $\sum_{k\geq 1} \alpha^k$. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $K \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^K < \varepsilon$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_K(N) > 1-\varepsilon$. Pour $1 \leq k \leq K$ et $n \geq N$, on a $b_k(n) \geq b_K(N) > 1-\varepsilon$ donc

$$(1-\varepsilon)^2 \frac{\alpha}{1-\alpha} \leq (1-\varepsilon)\frac{\alpha - \alpha^{K+1}}{1-\alpha} = (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{K} \alpha^k \leq B_n(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Donc $B_n(\alpha)$ converge vers $\alpha/(1-\alpha)$. Avec la formule de Stirling , on en déduit

$$R_n(\alpha) \sim (\alpha n)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{(\alpha e)^n}{\sqrt{2\pi n}} \quad \text{et} \quad P_n(\alpha) = e^{\alpha n} - R_n(\alpha) \sim e^{\alpha n}.$$

– **Cas** $\alpha = 1$. C'est plus délicat. On va d'abord estimer $A_n(1) - B_n(1)$; pour cela, on coupe la somme sur k jusqu'a un entier $m = [n^\lambda]$, où $\lambda \in]0,1[$ sera fixé plus tard ($[x]$ désigne la partie entière de x). On écrit

$$A_n(1) - B_n(1) = 2 + \alpha_n + \beta_n, \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \sum_{k=1}^{m} (a_k(n) - b_k(n)), \quad \beta_n = \sum_{k=m+1}^{n-1} a_k(n) - \sum_{k=m+1}^{+\infty} b_k(n).$$

On utilise maintenant la majoration $|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ sur $[-1/2, 1/2]$ (conséquence du developpement de Taylor-Young à l'ordre 2 appliqué à $\log(1+x)$). En notant $s_k(n) = \sum_{j=1}^{k} j/n$, elle entraîne, lorsque $0 \leq k \leq m$ (et n assez grand pour que $m < n/2$, de sorte que $k/n \leq 1/2$)

$$\log a_k(n) = \sum_{j=1}^{k} \log(1 - j/n) = -s_k(n) + x_k(n), \qquad |x_k(n)| \leq 2\sum_{j=1}^{k} (j/n)^2 \leq 2m^3/n^2$$

$$\log b_k(n) = -\sum_{j=1}^{k} \log(1 + j/n) = -s_k(n) + y_k(n), \qquad |y_k(n)| \leq 2\sum_{j=1}^{k} (j/n)^2 \leq 2m^3/n^2.$$

On a $m^3/n^2 \leq n^{3\lambda-2}$, on va donc choisir $\lambda < 2/3$ de sorte que $m^3/n^2 = o(1)$. Ceci assure l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$|a_k(n) - b_k(n)| = a_k(n)\,|1 - \exp(y_k(n) - x_k(n))| \leq M a_k(n)\,|y_k(n) - x_k(n)| \leq 4Mn^{3\lambda-2} a_k(n)$$

donc

$$|\alpha_n| \leq 4Mn^{3\lambda-2} A_n(1).$$

Par ailleurs $a_k(n) \leq b_k(n)$ (car $a_k(n)/b_k(n) = \prod_{1\leq j\leq k}(1 - j^2/n^2) \leq 1$) donc

$$|\beta_n| = \sum_{k=m+1}^{n-1} (b_k(n) - a_k(n)) + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k(n) \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} b_k(n) \leq b_m(n) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+m/n}\right)^k \leq b_m(n)\frac{n}{m}.$$

Or

$$b_m(n) = e^{-s_m(n) + y_m(n)} = O(e^{-s_m(n)}) = O(e^{-m(m+1)/(2n)}) = O(e^{-n^{2\lambda-1}/2}).$$

On choisit $\lambda = \frac{1}{2}(1/2 + 2/3) = 7/12$ de sorte que $2\lambda - 1 > 0$ et $\lambda < 2/3$. Avec ce choix de λ, les estimations précédentes deviennent

$$|\alpha_n| \leq 4Mn^{-1/4} A_n(1) \quad \text{et} \quad |\beta_n| = O(e^{-n^{1/6}/2} n^{5/12}) = o(1).$$

Comme $A_n(1) \geq 1$ on a $\beta_n = o(A_n(1))$, donc $A_n(1) - B_n(1) = 2 + \alpha_n + \beta_n = 2 + o(A_n(1))$. Ceci entraîne $P_n(1) - R_n(1) = (n^n/n!)(A_n(1) - B_n(1)) = 2n^n/n! + o(P_n(1)) = o(e^n)$. Comme $P_n(1) + R_n(1) = e^n$ on en déduit $P_n(1) \sim R_n(1) \sim \frac{1}{2}e^n$.

PROBLÈME 13. Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergence. On suppose que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 0$. Montrer que la suite (a_n) est nulle.

Solution. On va raisonner par l'absurde en supposant que la suite (a_n) n'est pas nulle, de sorte que $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > 0$. Remarquons que (a_n) converge vers 0 (puisque $\sum a_n$ converge) et donc si $k \in \mathbb{N}^*$ et pour n assez grand, $|a_n|^k \le |a_n|$ ce qui prouve que $\sum a_n^k$ converge. Comme (a_n) tend vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| < M/2$ pour $n \ge n_0$, donc il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de a_n qui vérifient $|a_n| \ge M/2$, on en déduit que $I = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n| = M\}$ est non vide. Quitte à diviser tous les termes de la suite (a_n) par M, on peut même supposer que $M = 1$. On va mettre de coté les termes a_n pour $n \notin I$, en montrant que $S_k = \sum_{n\notin I} a_n^k$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$; on fixe $n_1 \ge n_0$ tel que $\sum_{n\ge n_1} |a_n| < \varepsilon$. Soit $q = \sup_{n\notin I, n\le n_1} |a_n|$. Par définition de I, on a $q < 1$. et on écrit

$$|S_k| \le \sum_{n\notin I, n\le n_1} |a_n|^k + \sum_{n\ge n_1} |a_n| \le n_1 q^k + \varepsilon.$$

Comme $q < 1$ on en déduit que $|S_k| < 2\varepsilon$ pour k suffisamment grand. On a donc bien montré que $\lim_{k\to\infty} S_k = 0$. Comme $S_k + \sum_{n\in I} a_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 0$, on en déduit que $\sum_{n\in I} a_n^k$ converge vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. En notant $z_1, \dots, z_p$ les valeurs distinctes de l'ensemble $\{a_n, n \in I\}$ (on a $|z_i| = 1$), et en notant $n_i = \mathrm{Card}\{n \in I \mid a_n = z_i\}$, ceci s'écrit aussi $\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^p n_i z_i^k = 0$. On utilise maintenant le résultat plus général suivant

LEMME 1. *Soit $z_1, \dots, z_p$ des nombres complexes distincts tels que $|z_i| = 1$ pour tout i, et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des nombres complexes tels que $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^p \lambda_i z_i^k = 0$. Alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.*

Prouvons ce résultat intermédiaire par récurrence sur p. Pour $p = 1$ c'est immédiat car $|z_1| = 1$. Supposons le résultat vrai au rang $p - 1$ et montrons le au rang p. Notons $u_k = \sum_{i=1}^p \lambda_i z_i^k$. Comme (u_k) tend vers 0, $u_{k+1} - z_p u_k$ tend également vers 0 lorsque $k \to \infty$. Or $u_{k+1} - z_p u_k = \sum_{i=0}^{p-1} (\lambda_i z_i - \lambda_i z_p) z_i^k$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $0 = \lambda_i z_i - \lambda_i z_p = \lambda_i (z_i - z_p)$ pour tout $i < p$, et comme les z_i sont distincts ceci entraîne $\lambda_i = 0$ pour $i < p$. On a donc $\lim_{k\to\infty} \lambda_p z_p^k = 0$ et comme $|z_p| = 1$ ceci entraîne également $\lambda_p = 0$. On a donc prouvé le lemme.

Le résultat de l'exercice découle du lemme : comme $\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^p n_i z_i^k = 0$, on a forcément les n_i nuls, ce qui est impossible puisque par construction, les n_i sont des entiers naturels non nuls. On a donc aboutit à une contraction, donc la suite (a_n) est nulle.

PROBLÈME 14. **a)** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a_1, \dots, a_n$ des points distincts de $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_k) qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ et telle que pour tout k, P_k prend les mêmes valeurs que f aux points $a_1, \dots, a_n$ (on pourra utiliser le théorème de Weierstrass, voir page 235).

b) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0, 1]$. Existe t-il une suite de polynômes (P_k) qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ et telle que pour tout k, P_k a les mêmes zéros que f sur $[0, 1]$?

Solution. **a)** D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes (Q_k) qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. L'idée est de perturber légèrement les Q_k pour que ceux ci prennent les mêmes valeurs que f sur les points $(a_i)_{1\le i\le n}$. Pour celà on considère les polynômes d'interpolation de Lagrange (voir le tome Algèbre) définis par

$$L_i(x) = \prod_{j\ne i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Ils vérifient $L_i(x_j) = 0$ si $i \ne j$, $L_i(x_i) = 1$. Pour tout k, on définit maintenant $P_k(x) = Q_k(x) + \sum_{i=1}^n (f(a_i) - Q_k(a_i)) L_i(x)$. La fonction P_k est un polynôme qui prend les mêmes valeurs que f sur les points $(a_i)_{1\le i\le n}$, et en utilisant la notation de la norme de la convergence uniforme $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$ pour toute fonction réelle continue g sur $[0,1]$, on a

$$\|f - P_k\|_\infty \le \|f - Q_k\|_\infty + \sum_{i=1}^n |f(a_i) - Q_k(a_i)| \cdot \|L_i\|_\infty \le M\|f - Q_k\|_\infty, \quad M = 1 + \sum_{i=1}^n |\|L_i\|_\infty.$$

Comme $\|f - Q_k\|_\infty$ converge vers 0 on en déduit que $\|f - P_k\|_\infty$ également, d'où le résultat.

b) La réponse est oui ! Si f ne s'annule pas il suffit d'approcher f par une suite de polynômes (P_k) et de remarquer que les P_k ne s'annulent pas sur $[0,1]$ à partir d'un certain rang (dès que $\|P_k - f\|_\infty < \min_{x\in[0,1]} |f(x)|$). Si f s'annule on ne peut pas se contenter d'appliquer le résultat de la question précédentes aux zéros de f, car il faut s'assurer que les P_k n'ont pas d'autres zéros que ceux de f.

On va s'en sortir en approchant f par une suite de fonctions (g_k) qui s'écrivent sous la forme $g_k = Ph_k$, avec P un polynôme fixé qui a les même zéros que f sur $[0,1]$ et les h_k continues ne s'annulant pas sur $[0,1]$, puis en approchant h_k par un polynôme ne s'annulant pas sur $[0,1]$.

Pour cela on va choisir g_k localement polynomiale au voisinage de chaque zéro de f. Plus précisément, notons $a_1, \dots, a_n$ les zéros de f. Pour tout i, notons $m_i = 1$ si f change de signe au voisinage de a_i, $m_i = 2$ sinon. On choisit pour P le polynôme $P = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{m_i}$, de sorte que fP garde un signe constant sur $[0,1]$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\delta > 0$ suffisamment petit tel que les segments $[a_i - \delta, a_i + \delta]$ soient deux à deux disjoints et tels que $|f| < 1/k$ sur ces segments. On définit la fonction g_k par $g_k(x) = f(x)$ lorsque x n'est pas dans l'un des segments $[a_i - \delta, a_i + \delta]$, et sur chacun de ces segments on définit g_k affine sur $[a_i - \delta, a_i - \delta/2]$ et sur $[a_i + \delta/2, a_i + \delta]$ de sorte que

$$\begin{cases} g_k(a_i - \delta) &= f(a_i - \delta), \\ g_k(a_i - \delta/2) &= \varepsilon_i/k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g_k(a_i + \delta/2) &= \varepsilon_i'/k, \\ g_k(a_i + \delta) &= f(a_i + \delta) \end{cases}$$

(où $\varepsilon_i = f(a_i - \delta)/|f(a_i - \delta)| \in \{-1, 1\}$ a le signe de $f(a_i - \delta)$ et $\varepsilon_i' = f(a_i + \delta)/|f(a_i + \delta)| \in \{-1, 1\}$ a le signe de $f(a_i + \delta)$). On définit ensuite, pour tout i

$$\forall x \in]a_i - \delta/2, a_i + \delta/2[, \qquad g_k(x) = \frac{(x - a_i)^{m_i}}{(\delta/2)^{m_i}} \frac{\varepsilon_i'}{k}.$$

Ainsi g est définie sur $[0,1]$, continue sur cet intervalle, a les mêmes zéros que f et de plus $\|f - g_k\|_\infty < 1/k$. On définit maintenant $h_k(x) = g_k(x)/P(x)$ si $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ et $h_k(a_i) = \varepsilon_i'/(k(\delta/2)^{m_i})$. Ainsi définie, h_k est une fonction continue qui ne s'annule pas sur $[0,1]$ et qui verifie $g_k = Ph_k$. Comme on l'a vu au début de la solution de cette question, on peut donc trouver un polynôme Q_k ne s'annulant pas sur $[0,1]$ tel que $\|h_k - Q_k\| \le 1/k$.

$$\|f - PQ_k\|_\infty \le \|f - Ph_k\|_\infty + \|Ph_k - PQ_k\|_\infty \le \|f - g_k\|_\infty + \|P\|_\infty \cdot \|Q_k - h_k\|_\infty \le \frac{1 + \|P\|_\infty}{k}.$$

Ainsi, les $P_k = PQ_k$ sont des polynômes qui convergent uniformément vers f sur $[0,1]$ et qui ont les mêmes zéros que f.

Problème 15. Pour tout entier naturel n, on note $\nu_2(n)$ le nombre de "1" dans l'écriture binaire de n. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\nu_2(n)}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n = \sum_{k=0}^p \varepsilon_k 2^k$ son écriture binaire ($\varepsilon_k \in \{0,1\}$ pour tout k et $\varepsilon_p = 1$). On a $\nu(n) = \sum_{k=0}^p \varepsilon_k \le p + 1$. Par ailleurs, $2^p = \varepsilon_p 2^p \le n$ donc $p \le \log_2 n$, donc finalement $\nu_2(n) \le 1 + \log_2 n$. Comme $1 + \log_2 n = O(\sqrt{n})$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit $\nu_2(n) = O(\sqrt{n})$, donc $\frac{\nu_2(n)}{n(n+1)} = O(n^{-3/2})$. La série à termes positifs $\sum \frac{\nu_2(n)}{n(n+1)}$ est donc convergente.

Pour calculer sa somme S, on remarque que pour tout entier naturel n, $\nu_2(2n) = \nu_2(n)$ et $\nu_2(2n+1) = \nu_2(n) + 1$. En séparant les termes pairs et impairs de la série, ceci entraîne

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu_2(2n)}{2n(2n+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\nu_2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu_2(n)}{2n(2n+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\nu_2(n)+1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_2(n) \left(\frac{1}{2n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\nu_2(n)}{2n(2n+2)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{S}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Il est bien connu que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$ (voir par exemple la remarque de l'exercice 10 page 263), donc finalement, on a $S = S/2 + \log 2$, donc $S = 2\log 2$.

Problème 16 (Théorème de réalisation de Borel). Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe quelconque.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(x) = 1$ pour $x \in [-1,1]$ et $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$ (une fonction de ce type est construite dans l'exercice 3 page 79). On pose $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$, on note M_n un majorant de $|\varphi_n|, |\varphi_n'|, \dots, |\varphi_n^{(n-1)}|$ sur $\mathbb{R}$, et on choisit une suite réelle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\lambda_n \geq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$, tendant vers $+\infty$, et telle que $\sum |a_n| M_n / \lambda_n$ converge.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \varphi(\lambda_n x)$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0)/n! = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. Notons d'abord que M_n existe bien car φ_n est à support compact, et qu'on peut choisir par exemple $\lambda_n = 1 + n^2(1 + |a_n| M_n)$. La fonction f est bien définie en $x = 0$, et pour $x \neq 0$ également car les termes de la série sont nuls à partir d'un certain rang (dès que $|\lambda_n x| > 2$).

Montrons maintenant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n^{p-n} \varphi_n^{(p)}(\lambda_n x). \qquad (*)$$

Pour $p = 0$, l'écriture (*) découle de la définition de φ_n, et la série (*) converge normalement car pour $n \geq 1$, $|a_n \lambda_n^{-n} \varphi_n(\lambda_n x)| \leq |a_n| M_n / \lambda_n$, d'où la continuité de f sur $\mathbb{R}$. Supposons maintenant le résultat vrai au rang p et montrons le au rang $p+1$. La série des termes dérivés de (*) $\sum a_n \lambda_n^{p+1-n} \varphi_n^{(p+1)}(\lambda_n x)$ converge bien normalement car pour $n \geq p+2$, on a la majoration $|a_n \lambda_n^{p+1-n} \varphi_n^{(p+1)}(\lambda_n x)| \leq |a_n| M_n / \lambda_n$. On en déduit que $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc f de classe $\mathcal{C}^{p+1}$) et que la formule (*) est bien vraie au rang $p+1$.

Il suffit maintenant de remarquer que $\varphi_n(x) = x^n$ pour $x \in [-1,1]$ donc $\varphi_p^{(p)}(0) = p!$ et $\varphi_n^{(p)}(0) = 0$ si $n \neq p$. Avec la formule (*), on en déduit que $f^{(p)}(0) = p! a_p$.

Problème 17. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers, avec $a_0 > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \operatorname{ppcm}(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Étudier la nature de la série $\sum 1/b_n$.

Solution. Nous allons montrer que la série converge. La suite (b_n) est croissante. Soit φ la fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{\varphi(n)} = b_{\varphi(n)+1} = \cdots = b_{\varphi(n+1)-1} < b_{\varphi(n+1)}.$$

Comme $b_{\varphi(n)}$ divise $b_{\varphi(n+1)}$, on a $b_{\varphi(n+1)} \geq 2 b_{\varphi(n)}$, donc $b_{\varphi(n)} \geq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} \frac{1}{b_k} = \frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{b_{\varphi(n)}}. \tag{$*$}$$

Si $b_k = b_{k+1}$, cela signifie que $a_{k+1} \mid b_k$. En particulier, les entiers $a_{\varphi(n)+1}, \dots, a_{\varphi(n+1)-1}$ divisent $b_{\varphi(n)}$ pour tout n. Or tout entier N a au plus $2\sqrt{N}$ diviseurs, car l'application

$$\{d \in \mathbb{N}^* \mid d \mid N\} \to \{1, 2, \dots, \sqrt{N}\} \quad d \mapsto \inf\left\{d, \frac{N}{d}\right\}$$

est telle que tout élément de l'image d'arrivée a au plus deux antécédents. Donc $b_{\varphi(n)}$ a au plus $2\sqrt{b_{\varphi(n)}}$ diviseurs, donc $\varphi(n+1) - \varphi(n) \le 2\sqrt{b_{\varphi(n)}}$. On en déduit avec (*) que

$$P_n \le \frac{2}{\sqrt{b_{\varphi(n)}}} \le \frac{2}{2^{n/2}},$$

donc $\sum P_n$ converge, et comme les séries considérées sont à termes positifs, $\sum 1/b_n$ converge.

Problème 18 (Transformation d'Euler). **1/** Soit une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note Δu la suite de terme général $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$. On note $\Delta^0 u = u$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\Delta^p u$ la suite définie par $\Delta^p u = \Delta(\Delta^{p-1} u)$.
a) En désignant par C_p^k le coefficient binomial $p!/(k!(p-k)!)$, montrer que

$$\forall p, n \in \mathbb{N} \qquad (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k \, u_{n+k}.$$

b) On suppose que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge (on ne suppose rien de plus sur (u_n)) et on note S sa somme. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0 = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p \, R_p, \qquad \text{où} \qquad R_p = \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k u_k. \tag{$*$}$$

c) En déduire que la *transformée d'Euler*, définie par la série $\sum_p (-1)^p 2^{-p-1} (\Delta^p u)_0$, est convergente et que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n.$$

2/ a) Appliquer ce résultat à la série $\sum(-1)^n/(n+1)$ en explicitant les termes de la transformée d'Euler correspondante.

b) Faire de même pour la série $\sum(-1)^n/(2n+1)$.

Solution. **1/a)** On procède par récurrence sur p. Pour $p = 0$ c'est immédiat. Supposons le résultat vrai pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons le pour $p+1$. Il suffit d'écrire $(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p u)_{n+1} - (\Delta^p u)_n$

et d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $(\Delta^p u)_{n+1}$ et $(\Delta^p u)_n$, ce qui donne

$$\begin{aligned}(\Delta^{p+1}u)_n &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k\,u_{n+1+k} - \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k\,u_{n+k}\\ &= \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{p+1-k}C_p^{k-1}\,u_{n+k} - \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k\,u_{n+k}\\ &= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+1-k}(C_p^{k-1}+C_p^k)\,u_{n+k} - (-1)^{p-k}u_n + u_{n+1+p}\\ &= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{p+1-k}C_{p+1}^k\,u_{n+k},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité $C_p^{k-1}+C_p^k = C_{p+1}^k$ pour $1 \le k \le p$.

b) Nous allons également procéder par récurrence sur n. Pour $n=0$, compte tenu du fait que $R_0 = S$, on a bien

$$S - \frac{1}{2}(\Delta^0 u)_0 = S - \frac{u_0}{2} = \frac{1}{2}(S+S-u_0) = \frac{1}{2}(R_0+R_1).$$

Supposons maintenant le résultat vrai pour $n-1$ et montrons le pour n. L'identité $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$ pour $1 \le p \le n$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\,R_p &= R_0 + \sum_{p=1}^{n} C_n^p\,R_p + \sum_{p=1}^{n} C_n^{p-1}\,R_p + R_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,R_p + \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,R_{p+1}\\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,(2R_p - (-1)^{p+1}u_{p+1}) = 2\sum_{p=0}^{n} C_n^p\,R_p - \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+1}C_n^p\,u_{p+1}.\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question a), la dernière somme est égale à $(-1)^{n+1}(\Delta^n u)_0$, on a donc

$$(-1)^n(\Delta^n u)_0 = 2\sum_{p=0}^{n} C_n^p\,R_p - \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\,R_p. \tag{**}$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence on peut écrire

$$S - \sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 = S - \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(\Delta^n u)_0 = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p\,R_p - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(\Delta^n u)_0.$$

En remplaçant $(-1)^n(\Delta^n u)_0$ par l'expression à droite de (**), on en déduit l'identité (*), ce qui achève la preuve par récurrence.

c) Compte tenu du résultat de la question précédente, il suffit de prouver que $2^{-n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,R_k$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum(-1)^n u_n$ converge, la suite de ses restes (R_k) converge vers 0. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \ge N$, $|R_k| < \varepsilon$. Comme la suite (R_k) converge vers 0, elle est bornée, donc $\exists M > 0$ tel que $|R_k| \le M$ pour tout k. Pour tout $n \ge N$ on a

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,R_k\right| \le \frac{M}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1} C_n^k + \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=N}^{n} C_n^k \le \frac{M}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1} n^k + \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \le M\frac{Nn^{N-1}}{2^n} + \varepsilon.$$

Comme N est un entier fixé, $Nn^{N-1}/2^n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ donc lorsque n est suffisamment grand, tout ceci est majoré par 2ε. On en déduit le résultat.

2/ a) Dans notre cas, on a $u_n = 1/(n+1)$. La formule de la question 1/a) donne

$$(\Delta^n u)_0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{C_n^k}{k+1} = (-1)^n\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k\right)dx = (-1)^n\int_0^1(1-x)^n\,dx = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On en déduit, d'après l'identité de la transformée d'Euler obtenu à la question 1/c), que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Notons que la première série a pour somme $\log 2$ (c'est classique, voir par exemple la remarque de l'exercice 10 page 263), et l'égalité ci dessus se retrouve en écrivant que $\log 2 = -\log(1-1/2)$ à partir du développement en série entière de $\log(1+x)$.

b) Ici $u_n = 1/(2n+1)$ et on a

$$(\Delta^n u)_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{2k+1} = (-1)^n \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k} \right) dx = (-1)^n \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx.$$

Notons I_n la dernière intégrale. Une intégration par partie donne, lorsque $n \geq 1$,

$$I_n = \left[x\left(1-x^2\right)^n\right]_0^1 + \int_0^1 (2nx^2)\left(1-x^2\right)^{n-1} dx = 2n(I_{n-1} - I_n).$$

On en déduit $I_n = (2n/(2n+1))I_{n-1}$. Compte tenu de la valeur $I_0 = 1$, une récurrence facile donne $I_n = (2 \cdot 4 \cdots (2n))/(3 \cdot 5 \cdots (2n+1))$. L'identité de la transformée d'Euler donne donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}.$$

La somme de la série de gauche est égale à $\pi/4 = \arctan(1)$ (ici aussi, voir la remarque de l'exercice 10 page 263). La formule obtenue permet donc d'obtenir une série convergeant rapidement vers $\pi/4$.

Remarque. La transformée d'Euler est en général utilisée pour accélérer la convergence des séries alternées. Sous certaines hypothèses, on peut démontrer que la convergence est $O(1/2^n)$, comme c'est le cas dans le problème suivant qui généralise la transformée d'Euler sous des conditions particulières de la suite (u_n).

Problème 19 (Accélération de la convergence des séries alternées). Soit w une fonction réelle intégrable sur $]0,1[$. On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_0^1 t^n w(t)\, dt.$$

On se donne une suite de polynômes (P_n) à coefficients réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$ et $P_n(-1) \neq 0$.

1/a) Montrer que

$$S_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(x)}{1+x} w(x)\, dx$$

s'écrit comme une combinaison linéaire des termes $(u_k)_{0 \leq k < n}$ et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de P_n.

b) Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge, et que sa somme S vérifie

$$|S - S_n| \leq \frac{M_n}{|P_n(-1)|} I, \qquad \text{avec} \qquad M_n = \sup_{x \in [0,1]} |P_n(x)|, \quad I = \int_0^1 \frac{|w(t)|}{1+t}\, dt.$$

2/a) On choisit comme suite de polynômes $P_n(x) = (1-x)^n$. Expliciter S_n et donner une majoration de $|S_n - S|$ en fonction de I et n.

b) Répondre à la même question avec la suite de polynômes $P_n(x) = (1-2x)^n$.

c) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\deg P_n = n$ et $P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Avec ce choix de polynômes, majorer $|S - S_n|$.

3/a) Montrer que l'on peut apliquer les processus d'accélération de convergence des questions précédentes aux séries $\sum(-1)^n/(n+1)^s$, où $s>0$, et à la série $\sum(-1)^n(\log n)/n$.
b) En utilisant l'accélération fondée sur les polynômes de la question 2/c) de degré 4, calculer une approximation numérique de $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\log n)/n$ et en déduire une approximation numérique de la constante d'Euler γ (on s'appuiera sur l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\log n)/n = (\gamma-\frac{1}{2}\log 2)\log 2$ établie à l'exercice 11 page 226).

Solution. **1/ a)** Ecrivons P_n sous la forme $P_n(x)=\sum_{k=0}^n a_k(-x)^k$. On a

$$P_n(-1)-P_n(x)=\sum_{k=0}^n a_k\big(1-(-x)^k\big)=(1+x)\sum_{k=1}^n a_k\sum_{j=0}^{k-1}(-x)^j=(1+x)\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j+1}^n a_k\right)(-x)^j.$$

On en déduit l'expression de S_n comme combinaison linéaire des $(u_k)_{0\le k<n}$ en écrivant

$$S_n=\frac{1}{P_n(-1)}\int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j+1}^n a_k\right)(-x)^j w(x)\,dx=\frac{1}{P_n(-1)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\left(\sum_{k=j+1}^n a_k\right)u_j. \qquad (*)$$

b) Compte tenu de la définition des u_n, on a

$$\sum_{k=0}^n(-1)^k u_k=\int_0^1\frac{1+t^{n+1}}{1+t}w(t)\,dt \quad\text{donc}\quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n(-1)^k u_k=\int_0^1\frac{w(t)}{1+t}\,dt,$$

où nous avons utilisé le théorème de convergence dominée, la fonction intégrée dans l'intégrale de gauche étant majorée en valeur absolue par la fonction intégrable $|w|$ indépendamment de n. Ainsi la somme de la série $\sum(-1)^n u_n$ est égale à $S=\int_0^1\frac{w(t)}{1+t}\,dt$. On a maintenant

$$S-S_n=\frac{1}{P_n(-1)}\int_0^1\frac{P_n(x)}{1+x}w(x)\,dx \quad\text{donc}\quad |S-S_n|\le\frac{M_n}{|P_n(-1)|}\int_0^1\frac{|w(x)|}{1+x}\,dx=\frac{M_n}{|P_n(-1)|}I.$$

Notons que si w est positive, on a $I=S$ et la majoration devient $|S-S_n|\le\frac{M_n}{|P_n(-1)|}S$.

2/a) En choisissant $P_n(x)=(1-x)^n$, on a $P_n(-1)=2^n$, $P_n(x)=\sum_{k=0}^n C_n^k(-x)^k$ et $M_n=1$. Avec la formule (*) on en déduit

$$S_n=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\left(\sum_{k=j+1}^n C_n^k\right)u_j, \qquad\text{et}\qquad |S-S_n|\le\frac{I}{2^n}.$$

b) Avec $P_n(x)=(1-2x)^n$, on a $P_n(-1)=3^n$, $P_n(x)=\sum_{k=0}^n 2^kC_n^k(-x)^k$ et $M_n=1$, d'où

$$S_n=\frac{1}{3^n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\left(\sum_{k=j+1}^n 2^kC_n^k\right)u_j \qquad\text{et}\qquad |S-S_n|\le\frac{I}{3^n}.$$

c) L'existence et l'unicité de la suite de polynômes (P_n) découle de l'écriture

$$\cos(2nt)=\Re\left((\cos t+i\sin t)^{2n}\right)=\sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k}(-1)^{n-k}\cos^{2k}t\sin^{2(n-k)}t=P_n(\sin^2 t)$$

avec

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k}(1-x)^k(-x)^{n-k}. \qquad (**).$$

Pour majorer $|S-S_n|$, on remarque déjà que l'égalité $P_n(\sin^2 t)=\cos(2nt)$ entraîne $M_n=1$. Calculons maintenant $P_n(-1)$. L'égalité $P_n(\sin^2 t)=\cos(2nt)$, vraie pour $t\in\mathbb{R}$, l'est aussi pour $t\in\mathbb{C}$ (en effet, on aurait pu démontrer l'identité $\cos(2nt)=P_n(\sin^2 t)$ en partant de $2\cos(2nt)=(\cos t+i\sin t)^{2n}+(\cos t-i\sin t)^{2n}$ qui est vraie pour tout $t\in\mathbb{C}$. On aurait pu aussi le démontrer en notant que $P_n(\sin^2 t)-\cos(2nt)$ est une série entière, nulle sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{C}$ d'après le principe des zéros isolés). En choisissant $t=t_0$ tel que $\sin t_0=i$ on va calculer

$P_n(-1)$. L'équation $\sin t_0 = i$ équivaut à $\frac{e^{it_0}-e^{-it_0}}{2i} = i$, ou encore $(e^{it_0})^2 + 2e^{it_0} - 1 = 0$, vérifiée si on choisit $e^{it_0} = \sqrt{2}-1$, ce qui est le cas avec $t_0 = -i\log(\sqrt{2}-1)$. On a alors

$$P_n(-1) = \cos(2nt_0) = \frac{e^{2int_0} + e^{-2int_0}}{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n} + (\sqrt{2}+1)^{2n}}{2} = \frac{(3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n}{2}.$$

Finalement on obtient la majoration $|S - S_n| \leq 2I/(3+\sqrt{8})^n$.

3/a) On part du résultat classique suivant, obtenu avec le changement de variable $u = nx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx = \frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{s-1}\,du = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

où $\Gamma(s)$ est la valeur de la dernière intégrale. Le changement de variable $t = e^{-x}$ dans la première intégrale, entraîne

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^1 t^{n-1}\log^{s-1}(1/t)\,dt \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{(n+1)^s} = \int_0^1 t^n w_s(t)\,dt, \quad w_s(t) = \frac{\log^{s-1}(1/t)}{\Gamma(s)}.$$

La fonction $w_s(t)$ est intégrable sur $]0,1]$, nous sommes bien dans le cadre des séries de l'exercice donc la convergence de $\sum(-1)^n/(n+1)^s$ peut être accélérée avec les méthodes précédentes.

Passons maintenant à $\sum(-1)^n \log n/n$. En dérivant par rapport à s en $s=1$ l'expression précédente de $1/(n+1)^s$ (la dérivabilité est facile à partir du théorème de dérivation sous le signe intégral des fonctions intégrables), on obtient

$$-\frac{\log(n+1)}{n+1} = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)^2}\int_0^1 t^n\,dt + \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^1 t^n \log\log(1/t)\,dt = \int_0^1 t^n\left(\log\log(1/t) - \Gamma'(1)\right)\,dt.$$

Ainsi nous sommes bien dans le cadre des séries de l'exercice et la convergence de la série alternée $\sum(-1)^n\log(n+1)/(n+1)$ peut être accélérée avec les méthodes précédentes.

b) En utilisant l'expression (**) du polynôme $P_4(x)$ défini dans la question 2/c), on obtient

$$P_4(x) = x^4 - 28(1-x)x^3 + 70(1-x)^2x^2 - 28(1-x)^3x + (1-x)^4 = 1 - 32x + 160x^2 - 256x^3 + 128x^4$$

et $P_4(-1) = 577$. Pour l'accélération de $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\log(n+1)/(n+1)$, on en déduit, compte tenu de l'expression (*),

$$S_4 = \frac{1}{577}\left(-544\frac{\log 2}{2} + 384\frac{\log 3}{3} - 128\frac{\log 4}{4}\right) = \frac{1}{577}(-336\log 2 + 128\log 3) \approx -0,159922\ldots$$

Pour majorer $I = \int_0^1 |\log\log(1/t) - \Gamma'(1)|/(1+t)\,dt$, on commence par majorer $\Gamma'(1)$. On a

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\log t\,dt \quad \text{donc} \quad |\Gamma'(1)| \leq \int_0^1 |\log t|\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}t\,dt = 2.$$

Ensuite le changement de variable $t = e^{-x}$ donne

$$\int_0^1 |\log\log(1/t)|\,dt = \int_0^{+\infty} |\log x|e^{-x}\,dx \leq \int_0^1 |\log t|\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}t\,dt = 2.$$

On déduit de tout ceci la majoration $I \leq 4$. Avec le résultat de la question 2/c) , on a donc

$$|S - S_4| \leq 8/(3+\sqrt{8})^4 \leq 0,007.$$

Donc $S \approx 0,159$ à $0,007$ près. Or $-S = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log n/n = (\gamma - \frac{1}{2}\log 2)\log 2$ donc $\gamma = -S/\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 \approx 0,577$ à $0,007/\log 2 \approx 0,01$ près.

Remarque. - L'accélération de convergence de séries alternées obtenue par le choix de polynômes de la question 2/a) correspond à la transformée d'Euler, rencontrée dans le problème précédent.

– La majoration de l'erreur obtenue en 3/b) est très grossière, car à partir de S_4 on obtient l'approximation $\gamma \approx 0,577292$ ce qui est précis à 8×10^{-5} près.

– La fonction Γ introduite dans la solution de 3/a) est étudiée dans le sujet d'étude 1 page 315. Dans la question 3/d) de ce sujet d'étude on montre que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

– Les polynômes P_n définis dans la question 2/c) vérifient $P_n(x) = T_n(1-2x)$ où les T_n sont les polynômes de Tchébycheff de première espèce (voir le tome Algèbre). On peut montrer qu'ils ont la forme explicite $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n+k} C_{n+k}^{2k} 4^k (-x)^k$, ce qui permet d'expliciter l'expression de S_n avec ce choix de polynômes.

PROBLÈME 20. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1, telle que sa somme f se prolonge en une fonction continue (toujours notée f) sur le disque unité fermé. On suppose que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists \theta > 0, \forall t \in [\alpha, \alpha+\theta], \qquad f(e^{it}) = 0. \tag{$*$}$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Solution. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N\theta > 2\pi$. Considérons la fonction

$$g: \ D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto f(z) f(ze^{i\theta}) \cdots f(ze^{i(N-1)\theta}).$$

D'après (*), g est nulle sur le cercle unité. Or f est la somme d'une série entière sur $\overset{\circ}{D}$, et par un produit de Cauchy on en déduit que g est la somme d'une série entière $\sum b_n z^n$ sur le disque unité ouvert. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Cauchy (voir le théorème 4 page 250) donne

$$\forall r \in]0,1[, \qquad b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{it}) e^{-int}\, dt. \tag{$**$}$$

La fonction $[0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \quad (r,t) \to g(re^{it})$ est continue (car g est continue sur D), et d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, l'intégrale de (**) tend vers $\int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-int}\, dt = 0$ lorsque $r \to 1^-$. On en déduit $b_n = 0$ d'après (**). Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc g est nulle.

En particulier, $g(1/n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La forme de g montre donc qu'il existe k et une infinité d'entiers n pour lesquels $f(e^{ki\theta}/n) = 0$. Comme f, la fonction $z \mapsto f(e^{ik\theta} z)$ est la somme d'une série entière sur le disque unité. D'après le principe de zéros isolés (voir le théorème 3 page 250) on en déduit que $f(e^{ik\theta} z) = 0$ pour tout $z \in D$. La fonction f est donc nulle.

Remarque. On aurait pu utiliser l'égalité de Parseval au lieu de la formule de Cauchy.

PROBLÈME 21 (THÉORÈME DE BIEBERBACH, CAS RÉEL). Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, à coefficients réels, telle que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. On suppose que f est injective sur le domaine $D = \{z \in \mathbb{C} \ : |z| < 1\}$. On veut montrer que $|a_n| \leq n$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que pour tout r tel que $0 < r < 1$, on a

$$\frac{\pi a_n r^n}{2} = \int_0^{\pi} \Im(f(re^{i\theta})) \sin n\theta \, d\theta. \qquad (\Im(u) \text{ désigne la partie imaginaire de } u)$$

b) Lorsque $\theta \in [0, \pi]$, étudier le signe de $\Im(f(re^{i\theta}))$, puis montrer l'inégalité $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|$. En déduire $|a_n| \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Montrer que l'inégalité précédente est la meilleure possible.

Solution. **a)** Soit $r \in]0,1[$. On a $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc $\Im(f(re^{i\theta})) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \sin k\theta$, et comme cette série est normalement convergente, on peut l'intégrer terme à terme ce qui donne

$$\int_0^{\pi} \Im(f(re^{i\theta})) \sin n\theta \, d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{\pi} \sin k\theta \sin n\theta \, d\theta.$$

Il suffit ensuite de remarquer que $\sin k\theta \sin n\theta = \frac{1}{2}(\cos(k-n)\theta - \cos(k+n)\theta)$, et comme $\int_0^\pi \cos p\theta \, d\theta = 0$ si $p \neq 0$, $= \pi$ sinon, on en déduit $\int_0^\pi \sin k\theta \sin n\theta \, d\theta = 0$ si $k \neq n$, $= \pi/2$ si $k = n$, d'où le résultat demandé.

b) On a $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f(z) = \overline{f(z)} = f(\overline{z})$, et comme f est injective, ceci n'est possible que si $z = \overline{z}$, c'est-à-dire $z \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\Im(f(z))$ ne s'annule pas sur le connexe $D^+ = \{z \in D, \Re(z) > 0\}$ et comme l'image d'un connexe par une application continue est un connexe, $\Im(f(z))$ garde un signe constant sur D^+. Comme $f(z) = z + o(z)$ lorsque $z \to 0$, on en déduit que $\Im(f(z)) > 0$ sur un voisinage de 0 dans D^+, donc dans D^+ tout entier.

L'inégalité $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ se montre facilement par récurrence sur n à partir de l'identité $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos\theta + \sin\theta\cos n\theta$.

On utilise maintenant l'identité démontrée dans la question précédente, qui implique

$$|a_n| \leq \frac{2}{\pi r^n}\int_0^\pi |\Im(f(re^{i\theta}))| \cdot |\sin n\theta| \, d\theta \leq \frac{2}{\pi r^n}\int_0^\pi \Im(f(re^{i\theta}))\, n \sin\theta \, d\theta = na_1 = n$$

où nous avons une nouvelle fois utilisé l'identité de a) pour $n = 1$.

c) L'inégalité est bien la meilleure possible, car on vérifie facilement que $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = z/(1-z)^2$ est injective sur D.

Remarque. Le théorème de Bieberbach dans le cas général s'exprime sans la condition que les coefficients a_n soient réels. Il a été annoncé comme une conjecture en 1916 par Ludwig Bieberbach, qui avait démontré uniquement $|a_2| \leq 2$. Après de nombreux résultats partiels, le cas général n'a été démontré qu'en 1984 par Louis de Branges.

Problème 22 (Fonction zêta de Riemann). Pour tout $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

a) Montrer que ζ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives.
b) Montrer que ζ converge en $+\infty$ et que lorsque $s \to 1^+$, $\zeta(s) = 1/(s-1) + \gamma + o(1)$ (où γ désigne la constante d'Euler).
c) On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Montrer la formule (identité due à Euler)

$$\forall s > 1, \qquad \zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-p_n^{-s}}\right) \qquad \left(\prod_{n=1}^{+\infty} = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\right).$$

d) Montrer que la série $\sum 1/p_n$ diverge.

Solution. **a)** Pour démontrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$, il suffit de montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.

Fixons donc $a > 1$. La fonction ζ est limite simple de la série de fonctions $\sum 1/n^s$ sur $]1, +\infty[$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrons que la série des dérivées p-ièmes $\sum(-1)^p \log^p n/n^s$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a, en écrivant $a = 1 + 2h$ $(h > 0)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log^p n}{n^h} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\log^p n}{n^a} = \frac{\log^p n}{n^h}\,\frac{1}{n^{1+h}} = o\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right),$$

donc la série $\sum \log^p n/n^a$ converge. Comme $\log^p n/n^s \leq \log^p n/n^a$ pour tout $s \geq a$, on en déduit que $\sum(-1)^p\log^p n/n^s$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Ainsi (voir le premier alinéa de la remarque 5 page 234), la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et sur cet intervalle, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^p n}{n^s}.$$

b) On commence par une classique comparaison série-intégrale,

$$\forall s > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \quad \text{donc} \quad \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$$

(par sommation sur $n \geq 1$ de la première inégalité). Ceci entraîne $1/(s-1) \leq \zeta(s) \leq 1+1/(s-1)$ pour tout $s > 1$. On en déduit que $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$ lorsque $s \to 1^+$, et comme $1 \leq \zeta(s) \leq 1 + 1/(s-1)$, ζ converge vers 1 en $+\infty$.

Pour obtenir le second terme du développement asymptotique de ζ en $s = 1^+$, il faut raffiner la technique. Comme $1/(s-1) = \int_1^{+\infty} dt/t^s$, on a

$$\forall s > 1, \qquad \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(s) \qquad \text{où} \qquad u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}. \tag{$*$}$$

Or

$$\forall s \in [1,2], \qquad 0 \leq u_n(s) \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = \int_n^{n+1} \frac{s\,dt}{t^{s+1}} \leq 2 \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}.$$

On en conclut que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[1,2]$, donc que sa somme est continue sur $[1,2]$, en particulier en 1^+. On en déduit

$$\lim_{s \to 1^+} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(1) = \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) = \gamma,$$

d'où le résultat.

c) Si $s > 1$, on a $\log(1 - p_n^{-s})^{-1} \sim p_n^{-s} \leq 1/n^{-s}$ lorsque $n \to +\infty$, donc $\sum_n \log(1 - p_n^{-s})^{-1}$ converge, ce qui assure l'existence du produit infini pour tout $s > 1$. L'idée dans ce qui suit repose sur le fait que pour tout k et pour tout $s > 1$, on a $(1 - p_k^{-s})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_k^{-ns}$.

Pour tous les entiers naturels non nuls m et M, pour tout $s > 1$, on a

$$\prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) = \sum_{0 \leq i_1, \ldots, i_m \leq M} \frac{1}{(p_1^{i_1} \cdots p_m^{i_m})^s}. \tag{$**$}$$

Maintenant, donnons nous $N \in \mathbb{N}^*$. Soit p_{m_0} le plus grand nombre premier p_i et M_0 la plus grande des puissances i_k apparaissant dans toutes les décompositions en facteurs premiers des N premiers entiers $1, \ldots, N$. Considérons $m \geq m_0$ et $M \geq M_0$. Tous les entiers compris entre 1 et N se retrouvent dans les entiers $p_1^{i_1} \cdots p_m^{i_m}$ $(0 \leq i_1, \ldots, i_m \leq M)$, donc le dernier terme de (**) est supérieur à $\sum_{n=1}^{N} 1/n^s$. Par ailleurs, les nombres $p_1^{i_1} \cdots p_m^{i_m}$ représentent des entiers distincts (unicité de la décomposition en facteurs premiers), et finalement, (**) montre

$$\forall s > 1, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Cette expression est valable pour tout $m \geq m_0$ et pour tout $M \geq M_0$. En faisant tendre M puis m vers $+\infty$, on en déduit

$$\forall s > 1, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i_k=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right) \leq \zeta(s).$$

Cette expression est valable indépendamment de $N \in \mathbb{N}^*$, on peut donc faire tendre N vers $+\infty$, ce qui fournit l'égalité voulue.

d) Raisonnons par l'absurde. Si $\sum 1/p_n$ converge, l'équivalent $\log[(1-1/p_n)^{-1}] \sim 1/p_n$ montre que $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-1/p_n)^{-1}$ converge. Notons ℓ la valeur de ce produit infini. Pour tout $s>1$,

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-p_n^{-s}}\right) \leq \prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-1/p_n}\right) = \ell,$$

ce qui montre que ζ est majorée sur $]1,+\infty[$. Ceci est impossible puisque l'on a montré $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$ lorsque $s \to 1^+$, d'où le résultat.

Remarque. Le résultat de c) est généralisé au domaine complexe dans l'annexe C, et constitue une des clés permettant de démontrer le théorème des nombres premiers.

– On peut montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1-1/p_k) \sim e^{-\gamma}/\log n$ où γ est la constante d'Euler (formule de Mertens). On en déduit $\sum_{k=1}^{n} 1/p_k \sim \log(\log n)$ lorsque $n \to +\infty$. Cette dernière estimation est aussi une conséquence du théorème des nombres premiers (voir annexe C) puisque ce dernier entraîne $p_n \sim n \log n$.

– A partir du développement en série entière de la fonction $x \mapsto u_n(1+x)$ et de l'expression (*) on peut montrer que pour tout $x>0$ on a le développement en série entière

$$\zeta(1+x) - \frac{1}{x} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \gamma_p}{p!} x^p, \qquad \gamma_p = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\log^p(1)}{1} + \cdots + \frac{\log^p(k)}{k} - \frac{\log^{p+1} k}{p+1}\right).$$

On a $\gamma_0 = \gamma$ et les termes γ_p pour $p \geq 1$ sont des généralisations de la constante d'Euler.

Problème 23 (Preuve du théorème de Weierstrass par la convolution). On note $\mathcal{E}$ l'e.v des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et nulles en dehors d'un compact. On muni $\mathcal{E}$ de la loi de convolution $\star$ en définissant, pour tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$ la *convolée*

$$f \star g : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt.$$

1/ a) Montrer que la loi $\star$ est commutative et distributive par rapport à l'addition.
b) (Séquences de Dirac.) On appelle *séquence de Dirac* (on dit encore *approximation de l'identité*) toute suite (χ_n) de fonctions positives de $\mathcal{E}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t)\,dt = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall \alpha > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq\alpha} \chi_n(t)\,dt = 0$$

($\int_{|t|\geq\alpha}$ signifie $\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty}$). Soit (χ_n) une telle suite et soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que la suite de fonctions $(f \star \chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt \qquad \text{et} \qquad p_n : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} (1-t^2)^n/a_n & \text{si} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que (p_n) est une séquence de Dirac.
b) Soit $f \in \mathcal{E}$, nulle en dehors de $I = [-1/2, 1/2]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f \star p_n$ est une fonction polynôme. Conclure.
c) En déduire le théorème de Weierstrass : si J est un segment de $\mathbb{R}$ et si $f : \ J \to \mathbb{C}$ est continue, alors f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynôme.

Solution. **1/ a)** La distributivité par rapport à l'addition de la loi $\star$ est immédiate. Pour prouver qu'elle est commutative, il suffit d'effectuer le changement de variable $u = x - t$ dans l'intégrale définissant $f \star g$.

b) Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue et nulle en dehors d'un compact, elle est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| < \eta, \qquad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Désignons par M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\int_{|t|\geq \eta} \chi_n(t)\, dt < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t)\, dt = 1$, et que les fonctions χ_n sont positives, on a pour tout $n \geq N$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f \star \chi_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big[f(x-t) - f(x)\big] \chi_n(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_{|t|\geq\eta} |f(x-t) - f(x)|\, \chi_n(t)\, dt + \int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t) - f(x)|\, \chi_n(t)\, dt \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} \chi_n(t)\, dt \leq 2M\varepsilon + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t)\, dt = (2M+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci suffit pour conclure.

2/ a) On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t)\, dt = \int_{-1}^{1} p_n(t)\, dt = 1$ par définition de a_n. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n\, dt = \left[\frac{-(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

donc si $\alpha > 0$ (et $\alpha < 1$),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_{|t|\geq\alpha} p_n(t)\, dt = \frac{2}{a_n}\int_\alpha^1 (1-t^2)^n\, dt \leq \frac{2}{a_n}(1-\alpha^2)^n \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n,$$

et comme $|1-\alpha^2| < 1$, ceci suffit pour conclure que $\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t)\, dt$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

b) Pour montrer que $f \star p_n$ est une fonction polynôme sur I, on commence par écrire

$$\forall x \in I, \qquad (f \star p_n)(x) = (p_n \star f)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} p_n(x-t) f(t)\, dt. \tag{$*$}$$

Lorsque $x \in I$ et $t \in I$, on a $|x-t| \leq 1$ donc $p_n(x-t) = (1-(x-t)^2)^n / a_n$, ce qui en développant s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{2n} q_k(t) x^k$ (où pour tout k, q_k est une fonction polynôme). En remplaçant dans (*), on en déduit

$$\forall x \in I, \qquad (f \star p_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} q_k(t) f(t)\, dt \right) x^k,$$

qui est bien une fonction polynôme sur I.

Maintenant, on sait d'après 1/b) que $(f \star p_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, en particulier sur I. En définitive, nous venons de montrer que f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynôme.

c) Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. En considérant un intervalle plus grand $[c,d]$ avec $c < a$, $b < d$, on prolonge f sur $[c,a]$ (resp. sur $[b,d]$) par une fonction affine prenant la valeur 0 en c et la valeur $f(a)$ en a (resp. la valeur $f(b)$ en b et la valeur 0 en d). On prolonge ensuite f sur $\mathbb{R}$ tout entier en prenant $f(x) = 0$ hors de $[c,d]$. Le prolongement ainsi construit de f est continu sur $\mathbb{R}$, nul en dehors d'un compact, donc $f \in \mathcal{E}$.

On peut ensuite, en effectuant un changement de variable affine, se placer dans le cas où $[c,d] = [-1/2, 1/2]$. La fonction f est alors limite uniforme de fonctions polynôme sur $[c,d]$ d'après la question précédente, en particulier sur $[a,b] \subset [c,d]$.

Remarque. Une autre preuve de ce théorème fait l'objet de l'exercice 8 page 242.

PROBLÈME 24. Dans ce problème, on pourra utiliser le théorème de Weierstrass (voir le problème précédent ou voir page 235).
a) Soit $f:\ [0,1]\to\mathbb{C}$ une fonction continue, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n\,dt=0$. Montrer que f est la fonction nulle.
b) Soit $f:\ \mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt$ existe. Si $I_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que f est la fonction nulle.

Solution. **a)** La propriété vérifiée par f entraîne par linéarité $\int_0^1 f(t)P(t)\,dt=0$ pour toute fonction polynôme P. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynôme (P_n) qui converge uniformément vers $\overline{f}$ sur $[0,1]$. De plus, f est bornée sur $[0,1]$ (continue sur un compact) donc la suite de fonctions (fP_n) converge uniformément vers $f\overline{f}=|f|^2$ sur $[0,1]$. Comme $\int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt=0$ pour tout n, on en déduit

$$\int_0^1 |f(t)|^2\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt=0.$$

La fonction $|f|^2$ est continue est positive, elle est donc nulle sur $[0,1]$ d'où le résultat.

b) Considérons la primitive de f définie par $F:\ x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$. Si $n\in\mathbb{N}^*$, une intégration par parties donne

$$\forall X>0,\quad \int_0^X f(t)e^{-nt}\,dt=\Big[F(t)e^{-nt}\Big]_0^X+n\int_0^X F(t)e^{-nt}\,dt=F(X)e^{-nX}+n\int_0^X F(t)e^{-nt}\,dt.$$

La fonction F est bornée car l'intégrale de f existe sur $\mathbb{R}$, ce qui en particulier entraîne l'existence de l'intégrale $J_n=\int_0^{+\infty} F(t)e^{-nt}\,dt$. Le membre de droite de la formule précédente converge donc lorsque $X\to+\infty$, ce qui assure l'existence de I_n et montre que $I_n=nJ_n$.

Si $I_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a donc $J_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, ce qui en effectuant le changement de variable $u=e^{-t}$ entraîne

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad J_n=\int_0^1 u^{n-1}F(-\log u)\,du=0. \tag{$*$}$$

La fonction continue $]0,1]\to\mathbb{C}\quad u\mapsto F(-\log u)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ car F converge vers $+\infty$ (vers l'intégrale de f). Ainsi, la formule (*) entraîne, d'après la question précédente, que F est la fonction nulle. Comme F est une primitive de la fonction continue f, on en déduit que f est la fonction nulle.

PROBLÈME 25 (THÉORÈME DE FEJÉR). Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on note $e_k:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}\quad x\mapsto e^{ikx}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit les fonctions

$$S_n=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k,\qquad C_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$$

(où les $c_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de f) et

$$\widetilde{S}_n=\sum_{k=-n}^{n} e_k,\qquad \widetilde{C}_n=\frac{\widetilde{S}_0+\cdots+\widetilde{S}_n}{n+1}.$$

a) Vérifier que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{C}_n(t)\,dt=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et montrer que pour tout $\alpha\in\,]0,\pi[$ la suite de fonction $(\widetilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,\pi]\smallsetminus[-\alpha,\alpha]$.
b) En déduire le théorème de Fejér : la suite de fonctions (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Solution. **a)** On a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)\,dt = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_0(t)\,dt = 1$. On en conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S}_n(t)\,dt = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C}_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S}_k(t)\,dt\right) = 1.$$

Pour montrer le résultat demandé sur la convergence uniforme de $\widetilde{C}_n$, on calcule d'abord $\widetilde{S}_n$. On reconnaît le noyau de Dirichlet, son calcul est classique et pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \widetilde{S}_n(x) = e^{-inx}\,\frac{e^{(2n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)},$$

et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} e^{(k+1/2)ix} = e^{ix/2}\,\frac{e^{(n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{(n+1)ix/2}\,\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)},$$

on en déduit, en prenant la partie imaginaire, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \widetilde{C}_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \widetilde{S}_k(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.$$

On en conclut que si $0 < \alpha < \pi$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi], |x| > \alpha, \qquad |\widetilde{C}_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)\sin^2(\alpha/2)}.$$

Ceci suffit pour montrer que $(\widetilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$.

b) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{S}_n(x-t)\,dt,$$

donc $C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{C}_n(x-t)\,dt$. Ainsi C_n s'écrit comme un produit de convolution. Le changement de variable $u = x - t$, conjugué au caractère 2π-périodique des intégrandes, entraîne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\widetilde{C}_n(u)\,du. \tag{$*$}$$

Ceci étant, prouvons la convergence uniforme de (C_n) vers f. On procède comme dans la question 1/b) du problème 23. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue et 2π-périodique, elle est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ce qui entraîne

$$\exists \alpha \in \left]0, \pi\right[, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| < \alpha, \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

En désignant par M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$, la formule (*) montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f(x) - C_n(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\widetilde{C}_n(t)\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha \le |t| \le \pi} 2M\widetilde{C}_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon\,\widetilde{C}_n(t)\,dt \le \frac{2M}{2\pi}\int_{\alpha \le |t| \le \pi} \widetilde{C}_n(t)\,dt + \varepsilon, \end{aligned}$$

et comme $(\widetilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\int_{\alpha \le |t| \le \pi} \widetilde{C}_n(t)\,dt \le \varepsilon$ pour tout $n \ge N$, de sorte que $|f(x) - C_n(x)| \le (M/\pi)\varepsilon + \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \ge N$. D'où le résultat

Remarque. Le théorème de Fejér s'exprime en disant que la série de Fourier de toute fonction continue 2π-périodique converge uniformément *en moyenne de Césaro* vers f. En particulier, toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques sur $\mathbb{R}$.

Problème 26. **a)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \quad \text{où} \quad S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(2\pi\alpha k). \tag{$*$}$$

(Indication. Utiliser le fait que f est limite uniforme de polynômes trigonométriques sur $\mathbb{R}$ — voir le problème précédent.)
b) En déduire que si $\alpha \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$, l'ensemble $\Gamma = \{n\alpha - [n\alpha],\ n \in \mathbb{N}\}$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x pour tout $x \in \mathbb{R}$) est dense dans $[0, 1]$.

Solution. **a)** Prouvons d'abord le résultat lorsque f est une fonction de la forme $e_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto e^{ipx}$ ($p \in \mathbb{Z}$). Si $p \in \mathbb{Z}^*$, on a (compte tenu du fait que $e^{2i\pi\alpha p} \neq 1$ car $\alpha \notin \mathbb{Q}$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(e_p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_p(2\pi\alpha k) = \frac{1}{n}e^{2i\pi\alpha p}\,\frac{1 - e^{2i\pi\alpha pn}}{1 - e^{2i\pi\alpha p}} \quad \text{donc} \quad |S_n(e_p)| \leq \frac{2}{n\,|1 - e^{2i\pi\alpha p}|},$$

ce qui montre que $S_n(e_p)$ tend vers $0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_p(t)\,dt$ lorsque $n \to +\infty$. L'assertion (*) est donc vraie pour $f = e_p$ lorsque $p \in \mathbb{Z}^*$. Elle est trivialement vraie pour e_0.

Finalement, (*) est vraie pour toute les fonctions e_p. Par linéarité, on en déduit qu'elle est vraie pour tout polynôme trigonométrique.

Considérons maintenant une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 2π-périodique. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un polynôme trigonométrique P (voir le problème précédent) tel que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, nous avons montré que (*) était vrai pour P, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|S_n(P) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\,dt| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On en déduit

$$\forall n \geq N, \qquad \left|S_n(f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right|$$
$$\leq |S_n(f) - S_n(P)| + \left|S_n(P) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\,dt\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \big[P(t) - f(t)\big]\,dt\right| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

D'où le résultat.

b) Raisonnons par l'absurde. Si Γ n'était pas dense dans $[0, 1]$, il existerait $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b < 1$, tels que $\Gamma \cap [a, b] = \varnothing$. Il est facile de construire une fonction f positive, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0$ sur $]2\pi a, 2\pi b[$ et $f(x) = 0$ sur $[0, 2\pi a] \cup [2\pi b, 2\pi]$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n\alpha - [n\alpha] \notin [a, b]$, on a $f(2\pi\alpha k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc $S_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ceci est en contradiction avec (*) car la fonction f vérifie $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt > 0$.

Remarque. On retrouve facilement, avec la question b), que $\alpha\mathbb{N} - \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$. C'est en substance le résultat démontré (par des moyens différents) dans la question c) de l'exercice 5 page 205.

Problème 27 (Théorème taubérien fort). Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_n = O(1/n)$ lorsque $n \to +\infty$. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 et que sa somme F vérifie $\lim_{x\to1^-} F(x) = 0$. Notre propos est de montrer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme est nulle.

On note Φ l'ensemble des fonctions $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum a_n\varphi(x^n)$ converge ;
2. $\lim_{x\to1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\varphi(x^n) = 0$.

1/ a) Vérifier que toute fonction polynôme p nulle en 0 est élément de Φ.
b) Soit q une fonction polynôme. Montrer l'existence et déterminer

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n).$$

2/ a) On considère la fonction $g: \ [0,1]\to\mathbb{R} \quad x\mapsto 0$ si $0\le x<1/2$, $x\mapsto 1$ sinon. Pour tout $\varepsilon>0$, montrer qu'il existe deux polynômes p_1 et p_2 vérifiant
(i) $p_1(0)=p_2(0)=0$ et $p_1(1)=p_2(1)=1$;
(ii) $p_1\le g\le p_2$ sur $[0,1]$;
(iii) $\displaystyle\int_0^1 q(x)\,dx<\varepsilon$ avec $q(x)=\dfrac{p_2(x)-p_1(x)}{x(1-x)}$.
b) Montrer que $g\in\Phi$.

3/ En déduire le théorème taubérien d'Hardy-Littlewood : Si (b_n) est une suite réelle vérifiant $b_n=O(1/n)$ et si $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,x^n=\ell$, alors la série $\sum b_n$ converge et sa somme vaut ℓ.

Solution. **1/ a)** Si $p(x)=x^k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$, alors $\sum a_n p(x^n)=\sum a_n(x^k)^n$ converge pour tout $x\in[0,1[$, et de plus

$$\forall x\in[0,1[\,,\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n)=F(x^k)\quad\text{donc}\quad \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n)=0.$$

Par linéarité, on en déduit que ce résultat est vrai pour toute fonction polynôme nulle en 0.

b) Le polynôme q est borné sur $[0,1]$, donc pour tout $x\in[0,1[$, la série $\sum x^n q(x^n)$ converge absolument donc converge.

Si q est le monôme $x\mapsto x^k$ ($k\in\mathbb{N}$), alors

$$\forall x\in[0,1[\,,\qquad (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n)=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(x^{k+1})^n=\frac{1-x}{1-x^{k+1}}=\frac{1}{1+x+\cdots+x^k},$$

donc

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n)=\frac{1}{k+1}=\int_0^1 q(t)\,dt.$$

On en déduit par linéarité que le résultat reste vrai pour tout polynôme q.

2/ a) On considère la fonction $h: \ [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$h(x)=\frac{g(x)-x}{x(1-x)}\quad\text{si}\quad x\in\,]0,1[\,,\qquad h(0)=-1,\quad h(1)=1.$$

Compte tenu de la valeur de g la fonction h vérifie

$$\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[,\quad h(x)=-\frac{1}{1-x},\qquad \forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\quad h(x)=\frac{1}{x}.$$

Soit $\varepsilon>0$. On peut trouver deux fonctions continues s_1 et s_2 vérifiant $s_1\le h\le s_2$, $\int_0^1 s_2(t)-s_1(t)\,dt<\varepsilon$ (on s'en convainc en faisant un dessin : prendre deux fonctions égales à h sur $[0,1]$ sauf sur un petit voisinage de la discontinuité en $x=1/2$ de h, et joindre les extrémités dans la partie manquante par une ligne continue qui reste toujours du même coté du graphe de h et qui reste bornée). Comme s_1 et s_2 sont continues, on peut trouver deux polynômes t_1 et t_2 tels que $|t_1-s_1|<\varepsilon$ et $|t_2-s_2|<\varepsilon$ sur $[0,1]$ (conséquence du théorème de Weierstrass). Ainsi, les polynômes $u_1=t_1-\varepsilon$ et $u_2=t_2+\varepsilon$ vérifient $u_1<s_1\le h\le s_2<u_2$ et $u_2-u_1=t_2-t_1+2\varepsilon\le s_2-s_1+4\varepsilon$ donc

$$\int_0^1(u_2(x)-u_1(x))\,dx\le\int_0^1(s_2(x)-s_1(x)+4\varepsilon)\,dx<5\varepsilon.$$

Comme $g(x) = x + x(1-x)h(x)$ sur $[0,1]$, on en conclut que les polynômes p_1 et p_2 définis par $p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x)$, $p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$ vérifient $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $p_1(1) = p_2(1) = 1$, $p_1 \leq g \leq p_2$ et

$$\text{le polynôme} \quad q(x) = \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} = u_2(x) - u_1(x) \quad \text{vérifie} \quad \int_0^1 q(x)\,dx < 5\varepsilon.$$

D'où le résultat.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et des polynômes p_1, p_2, q vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de la question précédente.

1. La convergence de $\sum a_n g(x^n)$ pour tout $x \in [0,1[$ est immédiate car le terme d'indice n de cette série est nul dès que $x^n < 1/2$.

2. Soit $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $p_1 \leq g \leq p_2$, on a par ailleurs

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|(p_2 - p_1)(x^n)$$
$$\leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \leq M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) \qquad (*)$$

(on a utilisé la majoration $(1-x^n) = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) \leq (1-x)n$). Or $p_1 \in \Phi$ et $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) = \int_0^1 q(t)\,dt < \varepsilon$, on en conclut

$$\exists \lambda \in [0,1[, \forall x \in [\lambda, 1[, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, p_1(x^n)\right| < \varepsilon \quad \text{et} \quad (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) < 2\varepsilon.$$

L'inégalité (*) entraîne donc

$$\forall x \in [\lambda, 1[, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, g(x^n)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, p_1(x^n)\right| + \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(g-p_1)(x^n)\right| < \varepsilon + 2M\varepsilon = (2M+1)\varepsilon.$$

Ceci est possible pour tout $\varepsilon > 0$, donc g vérifie bien la condition 2 des éléments de Φ.

3/ La forme de g montre que

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{[-\log 2/\log x]} a_n,$$

et comme $g \in \Phi$, on en conclut en faisant tendre x vers 1^- que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme est nulle.

Le théorème de Hardy-Littlewood s'en déduit facilement en considérant (a_n) définie par $a_0 = b_0 - \ell$ et $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque. Ce résultat est la version forte du théorème taubérien vu dans l'exercice 11 page 264. La preuve est intéressante car elle fait appel au théorème de Weierstrass là on ne s'y attendait pas *a priori*.

Si les b_n sont positifs, ce résultat est beaucoup plus facile à prouver.

On peut montrer que le théorème Taubérien d'Hardy-Littlewood reste vrai si la suite (nb_n) est seulement minorée (et non pas bornée comme dans le cadre de l'exercice).

Problème 28 (Théorème de Müntz). On note $\mathcal{C}$ l'e.v des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On utilisera, sur $\mathcal{C}$, les deux normes suivantes :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Le but de ce problème est de donner une condition nécessaire et suffisante sur une suite strictement croissante (α_n) à valeurs positives, pour que $\mathrm{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(x^{\alpha_n})$ soit dense dans $\mathcal{C}$ (par abus, x^m désigne la fonction de $\mathcal{C}$ définie par $x \mapsto x^m$ pour $m \geq 0$). On pourra utiliser le théorème de Weierstrass (voir le théorème 5 page 235).

1/ Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes strictement positifs et strictement croissante.
a) Soient $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On note $E_N = \mathrm{Vect}_{1\leq i\leq N}(x^{\alpha_i})$. Exprimer en fonction des α_i et de m, la valeur $\Delta_N(m) = \inf_{f\in E_N} \|x^m - f\|_2$. (Indication. On pourra utiliser les déterminants de Gram — voir le tome Algèbre).
b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la suite (α_n) pour que $\mathrm{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(x^{\alpha_n})$ soit dense dans $\mathcal{C}$ pour la norme $\|\,.\,\|_2$ (théorème de Müntz).

2/ Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, strictement croissante, avec $\alpha_0 = 0$ et vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n > 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α_n) pour que $\mathrm{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(x^{\alpha_n})$ soit dense dans $\mathcal{C}$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$.

Solution. **1/ a)** Munissons $\mathcal{C}$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, dont $\|\,.\,\|_2$ est la norme euclidienne associée. Le nombre réel $\Delta_N(m)$ s'interprète comme la distance (au sens de $\|\,.\,\|_2$) de x^m à $E_N = \mathrm{Vect}_{1\leq i\leq N}(x^{\alpha_i})$. On sait (voir le tome Algèbre) que ceci peut s'exprimer au moyen des déterminants de Gram. Plus précisément, en notant, pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{C}^n$, $G(x_1,\ldots,x_n)$ le déterminant de la matrice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$, on a

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{G(x^{\alpha_1},\ldots,x^{\alpha_N},x^m)}{G(x^{\alpha_1},\ldots,x^{\alpha_N})}. \qquad (*)$$

Ici on a $\langle x^a, x^b\rangle = \frac{1}{a+b+1}$. On trouve dans le tome Algèbre que la valeur d'un déterminant de Cauchy $\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{i,j}$ est donnée par

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\left[\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)\right]\cdot\left[\prod_{1\leq i<j\leq n}(b_i-b_j)\right]}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)}.$$

En particulier, pour toute famille $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ de nombres réels, $G(x^{p_1},\ldots,x^{p_n})$ est un déterminant de Gram car $\langle x^{p_i}, x^{p_j}\rangle = \frac{1}{a_i+b_j}$ avec $a_i = p_i$ et $b_j = p_j+1$, et on a donc

$$G(x^{p_1},\ldots,x^{p_n}) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(p_i-p_j)^2}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(p_i+p_j+1)}.$$

En appliquant cette formule avec $p_1 = \alpha_1$, …, $p_N = \alpha_N$, $p_{N+1} = m$ on obtient

$$G(x^{\alpha_1},\ldots,x^{\alpha_N},x^m) = \frac{\left[\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\right]\cdot\left[\prod_i(\alpha_i-m)^2\right]}{(2m+1)\left[\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)\right]\cdot\left[\prod_i(\alpha_i+m+1)^2\right]}$$

(les indices i et j sont pris entre 1 et N). De même, on trouve

$$G(x^{\alpha_1},\ldots,x^{\alpha_N}) = \frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}{\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)}.$$

On en conclut, avec (*), que

$$\Delta_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{i=1}^N\left|\frac{\alpha_i-m}{\alpha_i+m+1}\right|. \qquad (**)$$

b) On note $E = \mathrm{Vect}(x^{\alpha_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$. Nous allons montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{E} = \mathcal{C}$ (où l'adhérence est prise au sens de la norme $\|\,.\,\|_2$) est que la série $\sum 1/\alpha_n$ diverge.

Condition nécessaire. Il existe bien sûr $m > 0$ tel que $\alpha_n \neq m$ pour tout n. La fonction x^m appartient à $\overline{E} = \mathcal{C}$, donc la suite $(\Delta_N(m))_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, ce qui entraîne, d'après (**)

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right) = 0. \qquad (***)$$

— Si la suite (α_n) est majorée, la série $\sum 1/\alpha_n$ diverge.
— Sinon, (α_n) tend vers $+\infty$. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n > m$ pour tout $n \geq N_0$. Alors, dès que $n \geq N_0$,

$$u_n = \log\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right) = \log\left(1 - \frac{2m+1}{\alpha_n + m + 1}\right) \sim -\frac{2m+1}{\alpha_n} \qquad (n \to +\infty), \qquad (****)$$

et comme d'après (***), $\sum_{n\geq N_0} u_n$ diverge, on en conclut que $\sum 1/\alpha_n$ diverge.

Condition suffisante. Réciproquement, si $\sum 1/\alpha_n$ diverge, montrons $\overline{E} = \mathcal{C}$. Pour cela, en vertu du théorème de Weierstrass, il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x^m \in \overline{E}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que (***) est vérifié.
— Si (α_n) est majorée, c'est évident.
— Sinon, (α_n) tend vers $+\infty$, et l'équivalent (****) montre que $\sum u_n$ diverge vers $-\infty$, et on conclut que (***) est vérifié.

2/ Si $\overline{E} = \mathcal{C}$ au sens de la norme $\|\,.\,\|_\infty$, on vérifie facilement que $\overline{E} = \mathcal{C}$ au sens de la norme $\|\,.\,\|_2$, donc d'après 1/b), $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/\alpha_n$ diverge.

Réciproquement, supposons que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/\alpha_n$ diverge. Comme $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_N > 1$. Quitte à retirer des termes à (α_n), on peut donc supposer $\alpha_1 > 1$. En vertu du théorème de Weierstrass, pour montrer $\overline{E} = \mathcal{C}$, il suffit de montrer que pour toute fonction polynôme P sur $[0,1]$, $P \in \overline{E}$. Soit P une fonction polynôme. Soit $\varepsilon > 0$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\alpha_n - 1)^{-1}$ diverge, donc d'après 1/b), il existe $g \in \mathrm{Vect}_{i\in\mathbb{N}^*}(x^{\alpha_i - 1})$ tel que $\|P' - g\|_2 < \varepsilon$. Soit h la primitive de g sur $[0,1]$ vérifiant $h(0) = P(0)$. On voit facilement que $h \in E$. En posant $Q = h - P$, on a $Q(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0,1]$, $Q(x) = \int_0^x Q'(t)\,dt$, donc d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall x \in [0,1], \qquad |Q(x)| \leq \left(\int_0^x Q'(t)^2\,dt\right)^{1/2} \sqrt{x} \leq \|Q'\|_2 = \|P' - g\|_2 < \varepsilon,$$

donc $\|h - P\|_\infty = \|Q\|_\infty < \varepsilon$. Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé $h \in E$ tel que $\|h - P\|_\infty < \varepsilon$. On en conclut $P \in \overline{E}$, et finalement, $\overline{E} = \mathcal{C}$.

Finalement, on a $\overline{E} = \mathcal{C}$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/\alpha_n$ diverge.

PROBLÈME 29 (THÉORÈME DE CANTOR SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES). **1/** Soit $\sum a_n$ une série à termes complexes, convergente et de somme nulle. On pose

$$U_0 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C} \quad t \mapsto 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C} \quad t \mapsto \left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2.$$

Pour tout $t \neq 0$, montrer que $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n(t)$ existe, puis montrer $\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} S(t) = 0$.

2/ (*Théorème de Cantor-Lebesgue.*) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = 0$. Montrer que $\lim_{|n|\to+\infty} c_n = 0$. (Indication : on se ramènera à montrer que si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\rho_n \cos(nt - \theta_n) \to 0$, alors $\rho_n \to 0$. Ensuite on construira, en supposant $\rho_n \not\to 0$, une suite décroissante (I_k) de segments non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant $\cos(n_k t - \theta_{n_k}) \geq 1/2$ pour tout $t \in I_k$ et pour tout k, avec (n_k) bien choisie.)

3/ (*Théorème de Cantor.*) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx} = 0.$$

a) Montrer que la fonction

$$F:\ x \mapsto c_0\,\frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}}{(in)^2}$$

existe et est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Pour tout fonction continue $G:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on définit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{D}G(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{G(x+h)+G(x-h)-2G(x)}{h^2}$$

lorsque cette limite existe (on rappelle — voir la question c) de l'exercice 5 page 102 — que si pour tout x, $\mathrm{D}G(x)$ existe et est nul, alors G est affine.) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{D}F(x)$ existe et est nul.
c) En déduire $c_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Solution. **1/** La série $\sum a_n$ converge, donc la suite (a_n) tend vers 0. Par ailleurs, $|a_n\,U_n(t)| \le (|a_n|/t^2)\,1/n^2$, donc $S(t)$ existe pour tout $t\neq 0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Une transformation d'Abel donne

$$\forall t\neq 0, \qquad \sum_{n=0}^{N} a_n\,U_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n(U_n(t)-U_{n+1}(t)) + s_N U_N(t),$$

et comme $(s_N U_N(t))$ tend vers 0, on a finalement

$$\forall t\neq 0, \qquad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(U_n(t)-U_{n+1}(t)).$$

Soit $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $|s_n|\le\varepsilon$ pour $n\ge N$, et soit A un majorant de la suite $(|s_n|)$. La formule précédente entraîne la majoration

$$\forall t\neq 0, \quad |S(t)| \le A\sum_{n=0}^{N-1}|U_n(t)-U_{n+1}(t)| + \varepsilon\sum_{n=N}^{+\infty}|U_n(t)-U_{n+1}(t)|. \tag{$*$}$$

On remarque que

$$|U_n(t)-U_{n+1}(t)| = \left|\int_{nt}^{(n+1)t} f(x)\,dx\right| \le \int_{nt}^{(n+1)t} |f(x)|\,dx, \qquad f(x) = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right].$$

La fonction $x\mapsto(\sin x)/x$ est égale à $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, donc prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc f est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'intégrale $\int_0^1|f(x)|\,dx$ existe donc. Par ailleurs, un calcul rapide donne $|f(x)| = O(1/x^2)$ en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}|f(x)|\,dx$ existe bien. Si on note M sa valeur, (*) entraîne

$$\forall t\neq 0, \qquad |S(t)| \le A\sum_{n=0}^{N-1}|U_n(t)-U_{n+1}(t)| + \varepsilon M.$$

Comme pour tout n, $\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} U_n(t) = 1$, la fonction $t\mapsto A\sum_{n=0}^{N-1}|U_n(t)-U_{n+1}(t)|$ tend vers 0 lorsque $t\to 0$, $t\neq 0$, ce qui entraîne l'existence de $\alpha>0$ tel que $|S(t)|<\varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$ pour tout t tel que $0<|t|<\alpha$, d'où le résultat.

2/ On peut écrire $c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}$ sous la forme $(a_n\cos nt + b_n\sin nt) + i(a_n'\cos nt + b_n'\sin nt)$, où $a_n, b_n, a_n', b_n' \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0 (on aura de même $a'_n \to 0$ et $b'_n \to 0$, ce qui montrera que les suites (c_n) et (c_{-n}) tendent vers 0). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on sait que $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = 0$. En posant $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, il existe pour tout n un nombre réel $\theta_n \in [0, 2\pi]$ tel que $a_n \cos nt + b_n \sin nt = \rho_n \cos(nt - \theta_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, nous nous sommes ramené au problème suivant : si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \rho_n \cos(nt - \theta_n) = 0$, il faut montrer que la suite (ρ_n) tend vers 0.

Supposons le contraire. Alors il existe $\delta > 0$ et une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers telle que $\rho_{n_k} \geq \delta$ pour tout k. Quitte à restreindre la suite (n_k), on peut même supposer $n_{k+1} \geq 6n_k$ pour tout k.

Ensuite, on pose

$$I_1 = \left[\frac{1}{n_1}\left(\theta_{n_1} - \frac{\pi}{3}\right), \frac{1}{n_1}\left(\theta_{n_1} + \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

de sorte que pour tout $t \in I_1$, $\cos(n_1 t - \theta_{n_1}) \geq 1/2$. Lorsque t parcourt I_1, $n_2 t - \theta_{n_2}$ parcourt un intervalle de longueur $n_2 \cdot 2\pi/(3n_1) \geq 4\pi$. On peut donc trouver un segment $I_2 \subset I_1$ de longueur $2\pi/(3n_2)$ tel que $\cos(n_2 t - \theta_{n_2}) \geq 1/2$ pour tout $t \in I_2$. En itérant le procédé, on construit ainsi pour tout k un segment $I_k \subset I_{k-1}$ de longueur $2\pi/(3n_k)$ tel que

$$\forall t \in I_k, \qquad \cos(n_k t - \theta_{n_k}) \geq \frac{1}{2}.$$

D'après la proposition 9 page 20, on sait qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\cap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{\xi\}$. Pour tout k, on a $\rho_{n_k} \cos(n_k \xi - \theta_k) \geq \delta/2$, ce qui est absurde car $\lim_{n\to+\infty} \rho_n \cos(n\xi - \theta_n) = 0$. La suite (ρ_n) converge donc vers 0.

3/ a) Pour tout x, on a $\lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N} c_n\, e^{inx} = 0$, donc pour tout x, $\lim_{n\to+\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = 0$. D'après la question précédente, les suites (c_n) et (c_{-n}) convergent donc vers 0. Elles sont donc bornées, et si M désigne un majorant du module de leur terme général, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ la majoration $|c_n/(in)^2| \leq M/n^2$, ce qui assure l'existence et la continuité de F.

b) Un calcul donne immédiatement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right) \left[\frac{\sin(nh/2)}{(nh/2)}\right]^2,$$

donc d'après la question 1/, $\mathrm{D}F(x)$ existe et $\mathrm{D}F(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) On en déduit l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \alpha x + \beta = c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2}\, e^{inx}.$$

Ceci montre que la fonction $x \mapsto \alpha x + \beta - \frac{c_0}{2} x^2$ est 2π-périodique. Donc $\alpha = c_0 = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \beta = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2}\, e^{inx}.$$

Nous avons vu plus haut que la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, la série trigonométrique de l'égalité précédente converge donc normalement sur $\mathbb{R}$. Elle est donc égale à sa série de Fourier, et comme c'est une constante, on en déduit $c_n/(in)^2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Finalement, on a $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque. Ce résultat a été démontré pour la première fois par Cantor en 1871. Cantor a ensuite affaibli les hypothèses, en recherchant des ensembles dit *exceptionnels*, tels que si une série trigonométrique converge vers 0 sauf peut être sur un tel ensemble, alors ses coefficients sont nuls. Ces considérations l'amenèrent peu à peu à construire la théorie des ensembles, en particulier la notion de puissance d'un ensemble (théorie de l'équipotence) que l'on connaît.

7. Sujets d'étude

Sujet d'étude 1 (Intégrales eulériennes : fonction gamma, fonction bêta).

Le but de ce sujet d'étude est d'étudier et de donner quelques propriétés des fonctions *gamma* et *bêta* définies respectivement par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad (x > 0), \qquad \mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \quad (x, y > 0).$$

1/ (Fonction gamma.) **a)** Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que Γ est logarithmiquement convexe (*i. e.* que $\log \Gamma$ est convexe).
c) Montrer

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

d) Donner un équivalent de Γ en 0^+ et tracer l'allure de son graphe.

2/ (Fonction bêta.) **a)** Montrer que B vérifie les équations fonctionnelles

$$\forall x, y > 0, \qquad \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\, \mathrm{B}(x,y).$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$. En exprimant $I_n(x)$ en fonction de la fonction B, en déduire

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

c) Montrer que pour $x, y > 0$ fixés, $\mathrm{B}(x+n+1, y) \sim \Gamma(y)/n^y$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire la formule

$$\forall x, y > 0, \qquad \mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

d) Calculer $\Gamma(1/2)$.

3/ a) Démontrer la *formule de Weierstrass* :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}\right],$$

où γ est la constante d'Euler (le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}$ signifie $\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N}$).
b) Montrer la *formule de duplication*

$$\forall x > 0, \qquad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, \Gamma(2x).$$

c) En utilisant le développement en produit infini de la fonction sinus (voir la question b) de l'exercice 2 page 273) montrer la *formule des compléments*

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

d) Montrer la relation

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(x+n)}.$$

En déduire $\int_0^{+\infty} (\log t) e^{-t}\, dt = -\gamma$.

Solution. **1/ a)** Remarquons tout d'abord que l'intégrale qui définit Γ est bien convergente lorsque $x > 0$. Nous allons démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \qquad \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^p e^{-t} t^{x-1}\, dt. \tag{$*$}$$

On remarque que lorsque x est dans un segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, l'intégrande de (*) vérifie

$$|(\log t)^p e^{-t} t^{x-1}| \leq \varphi_p(t), \qquad \varphi_p(t) = \begin{cases} |\log t|^p\, t^{a-1} & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ (\log t)^p\, e^{-t} t^{b-1} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

et que la fonction φ_p est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque lorsque $t \to 0^+$, on a $\varphi_p(t) = o(t^{a/2-1})$ (car $|\log t|^p t^{a/2} = o(1)$) et $\varphi_p(t) = O(e^{-t/2})$ lorsque $t \to \infty$.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]0,+\infty[$. Nous allons prouver par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que Γ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ et que $\Gamma^{(p)}$ vérifie la relation (*) sur cet intervalle. Comme ceci sera vrai pour tout segment inclus dans $]0,+\infty[$, on aura prouvé le résultat sur $]0,+\infty[$ tout entier.

Pour $p = 0$, il s'agit de montrer que Γ est continue sur $[a,b]$. La majoration $|t^{x-1}e^{-t}| \leq \varphi_0(t)$ avec φ_0 intégrable sur $]0,+\infty[$ assure que l'hypothèse de domination du théorème de continuité sous le signe intégral est bien vérifiée. Comme par ailleurs l'intégrande de Γ est continue, ceci assure la continuité de Γ sur $[a,b]$.

Supposons maintenant l'hypothèse de récurrence vraie au rang p et montrons là au rang $p+1$. L'intégrande de (*) est bien continûment dérivable par rapport à x et sa dérivée est égale à $f_x(t) = (\log t)^{p+1} t^{x-1} e^{-t}$. Grâce à la majoration $|f_x(t)| \leq \varphi_{p+1}(t)$ lorsque $x \in [a,b]$, avec φ_{p+1} intégrable, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral qui nous assure que $\Gamma^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que sa dérivée est égale à $\int_{\mathbb{R}^{+*}} f_x$. Ainsi, l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $p+1$. Ceci termine la preuve que Γ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour montrer la convexité de Γ, il suffit de montrer que Γ'' est positive, ce qui est immédiat car la relation (*) montre que Γ'' a son intégrande positive.

b) Posons $g : \ x \mapsto \log \Gamma(x)$. On a $g'' = (\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2)/\Gamma^2$, il s'agit donc de montrer que $\Gamma'^2 \leq \Gamma\Gamma''$. Pour tout $x > 0$, l'inégalité de Schwarz donne

$$\left(\int_0^{+\infty} \left(t^{(x-1)/2} e^{-t/2}\right) \left(t^{(x-1)/2} \log t\, e^{-t/2}\right) dt \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \cdot \int_0^{+\infty} (\log t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

ce qui est précisément l'inégalité $\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$.

c) Une intégration par parties donne

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = \Big[-t^x e^{-t} \Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x).$$

La seconde formule s'en déduit facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, compte tenu du fait que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$.

d) Lorsque $x \to 0^+$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \sim \Gamma(1) = 1$, autrement dit $\Gamma(x) \sim 1/x$ lorsque $x \to 0^+$.

Le comportement de Γ au voisinage de 0^+ nous donne un premier renseignement sur l'allure de son graphe. Notons que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, ce qui entraîne l'existence d'un point c de $]1,2[$ où Γ' s'annule d'après le théorème de Rolle. Comme Γ est convexe, la fonction Γ croît sur $[c,+\infty[$, et comme $\Gamma(n+1) = n! \to +\infty$, on en déduit que Γ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. De plus, $\Gamma(x+1)/x = \Gamma(x)$, donc $\Gamma(x)/x$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, donc Γ admet une branche parabolique dans la direction verticale en $+\infty$. On en déduit l'allure du graphe de Γ (voir la figure ci-dessous).

2/ a) L'égalité $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$ s'obtient en effectuant le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale définissant $\mathrm{B}(x,y)$.

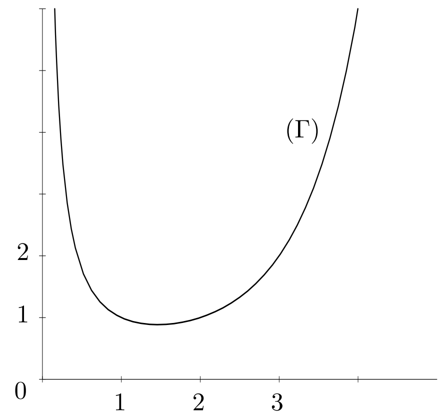


FIGURE 2. Le graphe de la fonction Γ.

Pour la seconde identité, on intègre par parties, en écrivant

$$\mathrm{B}(x+1,y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right]_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 (1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{x}{x+y}\,\mathrm{B}(x,y),$$

ce qui prouve le résultat.

b) Fixons $x > 0$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \quad \text{si } 0 < t \le n, \qquad g_n(t) = 0 \quad \text{si } t > n$$

converge simplement vers $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$. De plus on a la majoration $|g_n(t)| \le e^{-t}t^{x-1}$ (car $(1-t/n)^n \le e^{-t}$ sur $[0,n]$, conséquence de l'inégalité $\log(1-u) \le -u$ qui s'obtient par l'égalité des accroissements finis), et comme $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, le théorème de convergence dominée nous assure de la convergence de $I_n(x) = \int_{\mathbb{R}^+} g_n$ vers $\Gamma(x)$.

Le changement de variable $u = t/n$ dans l'intégrale $I_n(x)$ donne $I_n(x) = n^x\,\mathrm{B}(x, n+1)$. Compte tenu de la seconde identité de la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{B}(x,n+1) = \mathrm{B}(n+1,x) = \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\,\mathrm{B}(1,x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

car $\mathrm{B}(1,x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\,dt = 1/x$. On en déduit le résultat car on a montré que $I_n(x) = n^x\,\mathrm{B}(x,n+1)$ converge vers $\Gamma(x)$ lorsque $n \to +\infty$.

c) On a $\mathrm{B}(x+n+1,y) = \mathrm{B}(y,x+n+1) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x+n}\,dt$, et en effectuant le changement de variable $t = u/n$ dans cette dernière intégrale, on s'aperçoit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{B}(x+n+1,y) = \frac{1}{n^y}\int_0^n u^{y-1}\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{x+n} du.$$

Fixons $x, y > 0$. Pour u fixé, $(1-u/n)^x$ converge vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $h_n(u) = u^{y-1}(1-u/n)^{x+n}$ si $0 < u \le n$, $h_n(u) = 0$ si $u > n$, converge simplement vers $u \mapsto u^{y-1}e^{-u}$. La majoration par une fonction intégrable $|h_n(u)| \le u^{y-1}e^{-u}$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui assure que la dernière intégrale converge vers $\Gamma(y)$ lorsque $n \to +\infty$. On a donc $\mathrm{B}(x+n+1,y) \sim \Gamma(y)/n^y$ lorsque $n \to +\infty$.

Maintenant, compte tenu de la seconde identité prouvée à la question 2/a), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{B}(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n)}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,\mathrm{B}(x+n+1,y),$$

et compte tenu de l'équivalent $z(z+1)\cdots(z+n) \sim n^z n!/\Gamma(z)$ valable pour tout $z>0$ fixé (conséquence de la question précédente), on en déduit, lorsque $n \to +\infty$

$$\mathrm{B}(x,y) \sim \frac{n^{x+y}n!/\Gamma(x+y)}{n^x n!/\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(y)}{n^y} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

d'où le résultat.

d) La formule précédente donne $\mathrm{B}(1/2,1/2) = \Gamma(1/2)^2/\Gamma(1) = \Gamma(1/2)^2$. Le changement de variable $t = \sin^2 u$ dans l'intégrale définissant $\mathrm{B}(1/2,1/2)$ montre que $\mathrm{B}(1/2,1/2) = \pi$. Comme Γ est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ (c'est l'intégrale d'une fonction positive), on en déduit $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

3/ a) Compte tenu de la relation $\log n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma + o(1)$ (voir page 211), on a

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} = xe^{-x\log n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = xe^{\gamma x}e^{o(1)}\prod_{k=1}^{n}e^{-x/k}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right),$$

et ceci converge vers $1/\Gamma(x)$ d'après 2/b), d'où le résultat (remarquez que du même coup on a la convergence du produit infini).

b) Fixons $x>0$. D'après la question 2/b), on a, lorsque $n \to +\infty$,

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \sim \frac{n^{2x+1/2}(n!)^2}{x(x+1/2)\cdots(x+n)(x+n+1/2)} = \frac{2^{2n+2}n^{2x+1/2}(n!)^2}{(2x)(2x+1)\cdots(2x+2n+1)}$$
$$\sim \frac{\Gamma(2x)}{(2n+1)^{2x}(2n+1)!}\,2^{2n+2}n^{2x+1/2}(n!)^2 \sim \frac{\Gamma(2x)2^{2n+2}n^{1/2}(n!)^2}{2^{2x}(2n)!(2n)} = \frac{\Gamma(2x)2^{2n+1-2x}}{n^{1/2}}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Or d'après la formule de Stirling,

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)}{(2n)^{2n}e^{-2n}(4\pi n)^{1/2}} = \frac{(\pi n)^{1/2}}{2^{2n}}$$

(on peut aussi montrer ce résultat avec la formule de Wallis), et on en déduit finalement $\Gamma(x)\Gamma(x+1/2) \sim \Gamma(2x)2^{1-2x}\sqrt{\pi}$, d'où le résultat.

c) Toujours en utilisant 2/b) on a, pour $x \in]0,1[$ fixé et lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} \sim \frac{x(1+x)(1+x/2)\cdots(1+x/n)}{n^x}\cdot\frac{(1-x)(1-x/2)\cdots(1-x/n)(1-x+n)}{n^{1-x}}$$
$$= \frac{x(1-x+n)}{n}(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^n}{n^2}\right) \sim x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

On conclut facilement avec le développement de la fonction sinus en produit infini.

d) La formule de Weierstrass s'écrit aussi

$$\forall x>0, \qquad \log\Gamma(x) = -\log x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]. \qquad (**)$$

En posant $f_n(x) = x/n - \log(1+x/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geq 0$, on a

$$\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+x/n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Ainsi, pour tout $A>0$, on a $|f_n'(x)| \leq \frac{A}{n^2}$ pour tout $x \in [0,A]$, donc la série de fonctions $\sum f_n'(x)$ converge normalement sur $[0,A]$. Comme $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ (conséquence de l'existence de la formule (**)), on en déduit que la somme de cette série est dérivable sur $[0,A]$, et que sa dérivée est donnée par la somme de $\sum f_n'$. Ainsi sur $]0,A]$, la dérivée de $\log\Gamma$ vérifie, d'après la formule (**),

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}.$$

Ceci est vrai sur $]0, A]$ pour tout $A > 0$, donc sur $\mathbb{R}^{+*}$. C'est en particulier vrai pour $x = 1$, ce qui fournit, compte tenu du fait que $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma'(1) = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\gamma - 1 + 1 = -\gamma.$$

Comme $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} (\log t) e^{-t} \, dt$ (voir 1/a)), on en déduit le résultat.

Sujet d'étude 2 (Nombres et polynômes de Bernoulli). On définit la fonction

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \quad \text{qui vérifie} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Comme $f(0) = 1 \neq 0$, on sait (voir l'exercice 9 page 262) que $1/f$ est développable en série entière dans un disque $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < r\}$. Il existe donc une suite (b_n) telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, |z| < r, \qquad \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Les nombres b_n s'appellent les *nombres de Bernoulli*. On constate, par un produit de Cauchy, qu'il existe également une suite de polynômes (B_n) telle que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}^*, |z| < r, \qquad \frac{z e^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$

Les polynômes B_n s'appellent les *polynômes de Bernoulli*.

1/ a) En utilisant les propriétés de la fonction $(z, x) \mapsto z e^{zx}/(e^z - 1)$, montrer

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(1 - x) = (-1)^n B_n(x)$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n' = n B_{n-1}$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$ (iv) $\forall n \geq 2, \quad B_n(0) = B_n(1)$

(v) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 B_n(x) \, dx = 0$ (vi) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2n+1} = 0.$

b) Exprimer les polynômes de Bernoulli en fonction des nombres de Bernoulli. Montrer que $b_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer b_0, b_1, b_2, b_4, b_6.

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\tilde{B}_n$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 1-périodique, qui coïncide avec B_n sur $]0, 1[$ et telle que $\tilde{B}_n(0) = \frac{1}{2}[B_n(0) + B_n(1)]$.
a) En procédant par récurrence, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\tilde{B}_{2k}(x)}{(2k)!} = 2 \cdot (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{(2n\pi)^{2k}}, \qquad \frac{\tilde{B}_{2k-1}(x)}{(2k-1)!} = 2 \cdot (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{(2n\pi)^{2k-1}}.$$

b) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k}$ en fonction de b_{2k}.
c) Donner un équivalent de b_{2k} lorsque $k \to +\infty$.

Solution. **1/ a)** (i). Soit $x \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z| < r$, on a

$$\frac{z e^{z(1-x)}}{e^z - 1} = \frac{(-z) e^{(-z)x}}{e^{-z} - 1} \qquad \text{donc} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(1-x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-z)^n.$$

Deux séries entières dont les sommes coïncident dans un voisinage de 0 ont les mêmes coefficients, on en déduit (i).

(ii). L'idée est de dériver terme à terme l'expression qui définit les polynômes de Bernoulli. Pour montrer que l'on a bien le droit de procéder ainsi, on fixe $\rho \in]0, r[$ et on utilise la formule de Cauchy (voir le théorème 4 page 250) qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2\pi\rho^n \frac{B_n(x)}{n!} = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}, x)e^{-ni\theta}\, d\theta \quad \text{où} \quad f(z,x) = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}.$$

L'intégrande est continûment dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}$, on peut donc dériver sous le signe intégral ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\pi\rho^n \frac{B_n'(x)}{n!} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(\rho e^{i\theta}, x)e^{-ni\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \rho e^{i\theta} f(\rho e^{i\theta}, x)e^{-ni\theta}\, d\theta = 2\pi\rho^n \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!},$$

d'où on déduit $B_n' = nB_{n-1}$.

(iii). On procède de manière analogue à (i). Soit $x \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z| < r$, on a

$$\frac{ze^{z(x+1)}}{e^z - 1} = ze^{zx} + \frac{ze^{zx}}{e^z - 1} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

et on conclut en identifiant les coefficients de z^n de part et d'autre de cette expression.

(iv). C'est une conséquence immédiate de (iii) appliqué à $x = 0$.

(v). C'est une conséquence de (ii) et (iv).

(vi). L'assertion (i) entraîne $B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(1)$, donc d'après (iv), $B_{2n+1}(0) = 0$. Il suffit ensuite de remarquer que $B_k(0) = b_k$ pour tout k par définition des b_k et des $B_k(x)$.

b) Un produit de Cauchy donne, pour tout $x \in \mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < r$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1} e^{zx} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!}\right) z^n$$

donc en identifiant les coefficients de z^n de part et d'autre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{C}, \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k}\, x^k.$$

Comme $B_n(1) = B_n(0) = b_n$ pour tout $n \geq 2$, cette dernière relation entraîne

$$\forall n \geq 2, \qquad \sum_{k=1}^{n} C_n^k b_{n-k} = 0 \quad \text{donc} \quad b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} C_n^k b_{n-k} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k b_k.$$

En procédant par récurrence (sachant que $b_0 = 1/f(0) = 1$) ceci permet d'affirmer que $b_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, cette relation de récurrence permet de calculer les b_k. On trouve $b_0 = 1$, $b_1 = -1/2$, $b_2 = 1/6$, $b_4 = -1/30$, $b_6 = 1/42$.

2/ a) Les $\tilde{B}_p$ sont des fonctions 1-périodiques, continues par morceaux, et égales à la demi-somme de leur limite à gauche et à droite en leurs discontinuités, elles sont donc égales à leurs séries de Fourier. Par commodité, nous calculons les coefficients de Fourier $c_n(\tilde{B}_p)$. Montrons que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad c_0(\tilde{B}_p) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad c_n(\tilde{B}_p) = \frac{p!}{(2\pi ni)^p}. \tag{$*$}$$

La première égalité de (*) est une conséquence de l'assertion (v) établie à la question 1/a).

Pour la seconde, nous procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $p = 1$, on a $B_1(x) = x - 1/2$ d'après la question 1/b), donc une intégration par parties fournit, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(\tilde{B}_1) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi nix}\, dx = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-2\pi nix}}{-2\pi ni}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi ni}\int_0^1 e^{-2\pi nix}\, dx = \frac{1}{2\pi ni}.$$

Supposons maintenant le résultat vrai au rang $p - 1 \geq 1$ et montrons le au rang p. On a $p \geq 2$, donc $B_p(0) = B_p(1)$ et comme de plus $B_p' = pB_{p-1}$, une intégration par parties entraîne

$$c_n(\tilde{B}_p) = \int_0^1 B_p(x)e^{-2\pi nix}\, dx = \frac{1}{2\pi ni}\int_0^1 pB_{p-1}(x)e^{-2\pi nix}\, dx = \frac{p}{2\pi ni} c_n(\tilde{B}_{p-1}) = \frac{p!}{(2\pi ni)^p}.$$

Ainsi, nous avons prouvé (*). Avec les relations liant les coefficients de Fourier $a_n(\tilde{B}_p), b_n(\tilde{B}_p)$ aux $c_n(\tilde{B}_p)$, on en déduit $a_0(\tilde{B}_p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(\tilde{B}_{2k}) = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k)!}{(2n\pi)^{2k}}, \quad b_n(\tilde{B}_{2k}) = 0, \qquad a_n(\tilde{B}_{2k-1}) = 0, \quad b_n(\tilde{B}_{2k-1}) = \frac{(-1)^k 2(2k-1)!}{(2n\pi)^{2k-1}}.$$

On en déduit le résultat car nous avons vu plus haut que les fonctions $\tilde{B}_p$ sont égales à leur série de Fourier.

b) En faisant $x = 0$ dans la première relation établie à la question précédente, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{b_{2k}}{(2k)!} = 2 \cdot (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2k}} \quad \text{donc} \quad \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} b_{2k}}{2(2k)!} (2\pi)^{2k}. \qquad (**)$$

En particulier, on trouve $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$.

c) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall n \geq 2, \qquad \frac{1}{n^{2k}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^{2k}} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2k}} = \frac{1}{2k-1}.$$

On en déduit $1 \leq \zeta(2k) \leq 1 + 1/(2k-1)$, donc $\zeta(2k) \to 1$ lorsque $k \to +\infty$. Grâce à la relation (**), on en déduit

$$b_{2k} \sim (-1)^{k+1} \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \quad \left(\sim (-1)^{k+1} \frac{4\sqrt{\pi}\, k^{2k+1/2}}{(e\pi)^{2k}} \quad \text{en utilisant la formule de Stirling} \right).$$

Remarque. On ne connaît presque rien sur la somme de la série $\sum 1/n^p$ lorsque p est impair (le seul résultat connu à ce jour sur le sujet est que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^3$ est irrationnel — démontré par Apéry en 1978).

– Les nombres de Bernoulli jouent un rôle important et assez mystérieux dans des parties aussi diverses des mathématiques que l'analyse, la théorie des nombres et la topologie différentielle. Citons par exemple l'étonnant théorème de Von Staudt : si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s_n désigne la somme des inverses des nombres premiers p tels que $p - 1$ divise $2n$, alors $s_n + b_{2n}$ est un entier. Le sujet d'étude qui suit propose également une intéressante application des nombres et des polynômes de Bernoulli.

SUJET D'ÉTUDE 3 (FORMULE D'EULER-MACLAURIN). Ce sujet d'étude fait suite au précédent, dont on reprend les notations.

a) Soient $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n$, $r \in \mathbb{N}^*$, et $f : [m, n] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$. Montrer

$$f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n) = \int_m^n f(t)\, dt + \frac{1}{2}[f(m) + f(n)]$$
$$+ \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h}{h!} \left[f^{(h-1)}(n) - f^{(h-1)}(m) \right] + R_r \quad \text{avec} \quad R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\, dt.$$

b) (Application.) Donner, lorsque $n \to +\infty$, un développement asymptotique à un nombre fixé quelconque de termes de $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Solution. **a)** On va procéder par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$. Pour $r = 1$, compte tenu du fait que $B_1(x) = x - 1/2$ sur $]0, 1[$, une intégration par parties donne pour tout entier k, $m \leq k \leq n - 1$,

$$\int_k^{k+1} \tilde{B}_1(t) f'(t)\, dt = \Big[\tilde{B}_1(t) f(t) \Big]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)\, dt = \frac{f(k+1) + f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\, dt,$$

puis en sommant cette relation pour k allant de m à $n-1$, on obtient

$$\int_m^n \tilde{B}_1(t)f'(t)\,dt = f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n) - \frac{f(m)+f(n)}{2} - \int_m^n f(t)\,dt,$$

d'où le résultat pour $r=1$.

Supposons le résultat vrai au rang $r-1 \in \mathbb{N}^*$ et montrons le au rang r. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $m \leq k \leq n-1$. Sur $]k, k+1[$, on a $\tilde{B}_r' = r\tilde{B}_{r-1}$; par ailleurs, pour $r \geq 2$, on a $B_r(0) = B_r(1) = b_r$, donc par définition de $\tilde{B}_r$, $\tilde{B}_r$ est continue sur $[k, k+1]$. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{(r-1)!}\int_k^{k+1} \tilde{B}_{r-1}(t)f^{(r-1)}(t)\,dt &= \frac{1}{r!}\Big[\tilde{B}_r(t)f^{(r-1)}(t)\Big]_k^{k+1} - \frac{1}{r!}\int_k^{k+1}\tilde{B}_r(t)f^{(r)}(t)\,dt \\ &= \frac{b_r}{r!}\Big[f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)\Big] - \frac{1}{r!}\int_k^{k+1}\tilde{B}_r(t)f^{(r)}(t)\,dt,\end{aligned}$$

donc après sommation de ces relations pour k allant de m à $n-1$, puis multiplication par $(-1)^r$,

$$R_{r-1} = \frac{(-1)^r b_r}{r!}\Big[f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)\Big] + R_r.$$

On a toujours $(-1)^r b_r = b_r$ (si $r \geq 2$ est impair on a $b_r = 0$). On en déduit le résultat au rang r.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule précédente à la fonction $f(t) = 1/t$ entre 1 et n. Comme $f^{(h)}(t) = (-1)^h h!/t^{h+1}$, on a

$$\begin{aligned}H_n &= \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sum_{h=2}^{r}\frac{b_h}{h}\left[\frac{(-1)^{h-1}}{n^h} - (-1)^{h-1}\right] + \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_1^n \tilde{B}_r(t)\frac{(-1)^r r!}{t^{r+1}}\,dt \\ &= \log n + \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \sum_{h=2}^{r}\frac{(-1)^h b_h}{h} - \int_1^{+\infty}\tilde{B}_r(t)\,\frac{dt}{t^{r+1}}\right]}_{=\gamma_r} + \frac{1}{2n} + \sum_{h=2}^{r}(-1)^{h-1}\,\frac{b_h}{h}\,\frac{1}{n^h} + \varepsilon_r(n)\end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_r(n) = \int_n^{+\infty}\tilde{B}_r(t)\,\frac{dt}{t^{r+1}} \quad \text{qui vérifie} \quad |\varepsilon_r(n)| \leq M\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{r+1}} = \frac{M}{rn^r} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

(où $M = \sup_{x\in[0,1]}|B_r(t)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\tilde{B}_r(t)|$). On a donc

$$H_n = \log n + \gamma_r + \frac{1}{2n} + \sum_{h=2}^{r-1}\frac{(-1)^{h-1}b_h}{h}\,\frac{1}{n^h} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

et la constante γ_r est indépendante de r car la formule précédente donne

$$\gamma_r = \lim_{n\to+\infty} H_n - \log n = \gamma.$$

CHAPITRE 5

Fonctions de plusieurs variables

L'émergence de la notion de dérivée a joué un rôle important dans la naissance de l'analyse au cours du dix-huitième siècle. Elle s'est accompagnée presque simultanément par la naissance de la différentielle, généralisant naturellement ce qui était connu sur les fonctions d'une seule variable aux fonctions de plusieurs variables.

Les énoncés n'avaient pas toujours la précision qu'on essaie de leur donner aujourd'hui. C'est ainsi que le théorème des fonctions implicites semble avoir été utilisé sans plus de justification. Sa première démonstration semble due à Cauchy en 1839.

C'est dans la thèse de Banach (en 1922) que se trouve la généralisation aux espaces qui portent aujourd'hui son nom.

1. Différentielle, dérivées partielles

1.1. Différentielle

La théorie des fonctions de la variable réelle s'est considérablement développée avec l'introduction de la notion de dérivée. L'expression $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$ s'interprète en disant qu'au voisinage de x, f est approchée par la fonction affine $f(x) + hf'(x)$: on a *linéarisé* f. De la même manière, il est naturel de chercher à linéariser une fonction $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, en étudiant l'existence d'une fonction linéaire $\varphi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(x+h) = f(x) + \varphi(h)$ à $o(h)$ près. Ceci motive la définition suivante.

Définition 1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-e.v.n, U un ouvert de E et $a \in U$. Une application $f:\ U \to F$ est dite *différentiable* en a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(E,F)$ (e.v des applications linéaires et continues de E dans F) telle que

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o\big(\|h\|\big) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0.$$

Si φ existe, φ est unique et s'appelle la *différentielle* de f en a. On la note df_a.

Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est *différentiable* sur U et l'application $df:\ U \mapsto \mathcal{L}_c(E,F) \quad a \mapsto df_a$ est appelée *application différentielle* de f. Si df est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 1. — Une application de la variable réelle f est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a, et on a $df_a:\ h \mapsto f'(a)\,h$. Pour cette raison, on trouve parfois la notation $f'(a)$ pour désigner la différentielle de f en a.

— En dimension quelconque, df_a dépend *a priori* des normes $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$ choisies sur E et F. Cependant, en dimension finie, les normes sont toutes équivalentes et on montre facilement que l'existence et la valeur de df_a ne dépend pas des normes choisies.

— Noter qu'une différentielle df_a doit être continue. En dimension finie, toutes les fonctions linéaires sont continues et le problème de la continuité de la différentielle ne se pose donc pas.

— Enfin, si f est linéaire et continue, l'égalité $f(a+h) = f(a) + f(h)$ montre que f est différentiable sur E et que $df_a = f$ pour tout $a \in E$.

Exemple 1. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (X,Y) \mapsto XY$. Donnons nous une norme d'algèbre $\| \,.\, \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons un point $(X_0, Y_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On a

$$\forall (H,K) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \qquad f(X_0+H, Y_0+K) = f(X_0,Y_0) + (HY_0 + X_0K) + HK. \quad (*)$$

Si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ de la norme produit $\|(H,K)\|_1 = \sup\{\|H\|, \|K\|\}$, on a $\|HK\| \leq \|H\| \cdot \|K\| \leq \|(H,K)\|_1^2$ donc (*) entraîne $f(X_0+H, Y_0+K) = f(X_0,Y_0) + \varphi(H,K) + o(\|(H,K)\|_1)$, où $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (H,K) \mapsto HY_0 + X_0K$ (attention à la non-commutativité des matrices) est linéaire. Comme de plus φ est continue (on est en dimension finie), ceci montre que f est différentiable en (X_0, Y_0) et que $df_{(X_0,Y_0)} = \varphi$.

Proposition 1. *Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.*

Gradient.

Définition 2. Soient E un espace euclidien et $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in U$ (où U est un ouvert de E). Alors $df_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ et il existe un unique vecteur v de E tel que $df_a(h) = v \cdot h$ pour tout $h \in E$. Le vecteur v s'appelle le *gradient* de f en a et est noté $\mathrm{grad}_a f$.

Remarque 2. On peut également définir la notion de gradient lorsque E est un espace hilbertien réel, car la propriété d'existence et d'unicité d'un vecteur v de E tel que $df_a(h) = v \cdot h$ pour tout $h \in E$ reste vraie (voir le théorème de Représentation de Riesz, question 3/ du problème 1 page 427).

Propriétés des différentielles.

Proposition 2. *Soient E et F deux e.v.n et f, g deux applications de U dans F, où U est un ouvert de E, toutes deux différentiables en $a \in U$. Alors*
- *$f + g$ est différentiable en a et $d(f+g)_a = df_a + dg_a$;*
- *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est différentiable en a et $d(\lambda f)_a = \lambda\, df_a$.*

→ Proposition 3. *Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-e.v.n, $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts, et deux applications $f : U \subset E \to F$, $g : V \subset F \to G$ vérifiant $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to G$ est différentiable en a et on a*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Remarque 3.
- Si $E = \mathbb{R}$, cette formule s'écrit aussi $(g \circ f)'(a) = dg_{f(a)}(f'(a))$.
- Si f et $g : U \subset E \to \mathbb{R}$ sont différentiables en a, alors le produit fg l'est aussi et $d(fg)_a = df_a\, g + f\, dg_a$ (appliquer la proposition précédente en remarquant que fg est la composée des applications $\varphi : U \to \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto (f(x), g(x))$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto xy$). Ce résultat reste d'ailleurs valable en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ou plus généralement par toute algèbre normée.

1.2. Dérivées partielles

Dérivée selon un vecteur.

Définition 3. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-e.v.n, U un ouvert de E, et $f : U \subset E \to F$ une application. Soit $a \in U$ et $v \in E$. Si la fonction à variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en $t = 0$, f est dite *dérivable en a selon le vecteur v*. On note alors

$$f'_v(a) = \varphi'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Proposition 4. *Si f est différentiable en un point a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et on a $f'_v(a) = df_a(v)$ pour tout $v \in E$.*

Remarque 4. Attention, la dérivabilité selon tout vecteur en a n'entraîne pas forcément la différentiabilité de f en a. En fait, cela n'entraîne même pas la continuité en a (voir l'exercice 1 page 329).

Dérivées partielles. Nous travaillons maintenant sur $E = \mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 4. Soit une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un e.v.n. Soit $a \in U$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si pour $i \in \{1, \dots, n\}$, f est dérivable en a selon e_i, on dit que f admet une *dérivée partielle* en a d'indice i et on note

$$f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Remarque 5.
— La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est aussi la dérivée de l'application partielle $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ en $t = 0$.
— à plus forte raison que dans la remarque précédente, il se peut que toutes les dérivées partielles de f existent en a sans que f soit différentiable en a, ni même continue en a (voir cependant le théorème qui suit).
— Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application différentiable en $a \in U$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe pour tout i, et on a

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i, \qquad \mathrm{grad}_a f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, e_i,$$

où (dx_i) est la base duale dans $(\mathbb{R}^n)^*$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (conséquence de la proposition 4) — $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire standard.

THÉORÈME 1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$ une application, où U et un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un e.v.n. Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et si elles sont continues en un point a de U, alors f est différentiable en a et on a*

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i.$$

Démonstration. On choisit sur $\mathbb{R}^n$ la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Il s'agit de montrer que l'application $g : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) - \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ vérifie $g(x) - g(a) = o(\|x - a\|)$ au voisinage de a.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, les dérivées partielles de f sont continues en a, donc

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in U, \|a - x\| < \alpha, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad \left\| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\| < \varepsilon.$$

Quitte à diminuer $\alpha > 0$, on peut supposer que $\mathrm{B}(a, \alpha) \subset U$.

Soit $x \in \mathrm{B}(a, \alpha)$. On considère les points

$$y_0 = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad y_k = (x_1, \dots, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

de sorte que $y_0 = a$ et $y_n = x$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la fonction

$$g_k : [a_k, x_k] \to F \quad t \mapsto g(x_1, \dots, x_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

($[a_k, x_k]$ désigne l'intervalle $[x_k, a_k]$ si $x_k < a_k$) vérifie

$$g'_k(t) = \frac{\partial g}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

donc $\|g'_k(t)\| < \varepsilon$ sur $[a_k, x_k]$. On en déduit, avec le théorème 5 page 75, que $\|g_k(x_k) - g_k(a_k)\| \leq \varepsilon\, |x_k - a_k|$. Comme $g_k(a_k) = g(y_{k-1})$ et $g_k(x_k) = g(y_k)$, ceci entraîne

$$\|g(x) - g(a)\| = \left\| \sum_{k=1}^n [g(y_k) - g(y_{k-1})] \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|g(y_k) - g(y_{k-1})\| \leq \varepsilon \left(\sum_{k=1}^n |x_k - a_k| \right) = \varepsilon\, \|x - a\|.$$

On a donc bien $g(x) - g(a) = o(\|x - a\|)$ au voisinage de a, d'où le résultat. □

Remarque 6. Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, est différentiable en 0 mais f' n'est pas continue en 0.

Dérivées partielles d'ordre supérieur. Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur p une dérivée partielle d'ordre p par la relation

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right).$$

Une fonction $f: U \subset \mathbb{R}^n \to F$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$ si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent et sont continues sur U. Le théorème 1 assure la cohérence de cette définition avec la définition 1 pour le cas $\mathcal{C}^1$.

THÉORÈME 2 (SCHWARZ). *Soit une application $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, telle que f admette des dérivées partielles $\partial^2 f/\partial x \partial y$ et $\partial^2 f/\partial y \partial x$ sur U, continues en un point a de U. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

Démonstration. Soient x_0, y_0 les coordonnées de a. Soient $h > 0$ et $k > 0$ tels que $[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + k] \subset U$. On pose

$$\delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

Si on pose $\varphi: x \mapsto f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$, on a $\delta(h, k) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$, et la fonction φ étant dérivable sur $[x_0, x_0 + h]$, le théorème des accroissements finis assure l'existence de $\theta_1 \in]0, 1[$ tel que $\delta(h, k) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h)$, ce qui s'écrit encore

$$\delta(h, k) = h \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0) \right].$$

Maintenant, l'application $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y)$ étant dérivable sur $[y_0, y_0 + k]$, une nouvelle application du théorème des accroissements finis donne l'existence de $\theta_2 \in]0, 1[$ tel que

$$\delta(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k). \qquad (*)$$

En travaillant à partir de la fonction $\psi: y \mapsto f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$, on montrerait de même l'existence de $\theta_3, \theta_4 \in]0, 1[$ tels que

$$\delta(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k). \qquad (**)$$

En égalant (*) et (**) et en faisant tendre h et k vers 0, on en déduit en vertu de la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en a, l'égalité de ces dernières au point a. □

Remarque 7. Sans la condition de continuité en a des dérivées partielles d'ordre 2, ce résultat est faux (voir l'exercice 1 page 329 pour un contre-exemple).

COROLLAIRE 1. *Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) est une application de classe $\mathcal{C}^p$, alors les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p ne dépendent pas de l'ordre de dérivation. On peut donc les écrire toutes sous la forme*

$$\frac{\partial^q f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \quad \textit{où} \quad i_1 + i_2 + \cdots + i_n = q \leq p.$$

Matrice jacobienne, jacobien. On se donne une fonction $f:\ U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$), différentiable en un point a de U, et on désigne par $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_m)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

On peut écrire f sous la forme $f = \sum_{i=1}^m f_i\, e'_i$ où pour tout i, $f_i:\ U \to \mathbb{R}$ est une application différentiable en a, de sorte que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad df_a(e_j) = \sum_{i=1}^m df_{i,a}(e_j)\, e'_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\, e'_i.$$

La matrice de df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est

$$J_a = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

On l'appelle *matrice jacobienne* de f en a. Lorsque $m = n$, J_a est une matrice carrée et son déterminant est appelé *jacobien* de f en a.

Rappelons que la différentielle de la composée de deux fonctions différentiables est la composée des différentielles ; la matrice jacobienne de la composée est donc le produit des matrices jacobiennes. On en déduit en particulier le résultat qui suit :

→ Proposition 5. *Soient deux applications $f:\ U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\varphi:\ V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (où U et V sont ouverts) telles que $\varphi(V) \subset U$. On écrit φ sous la forme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ où $\varphi_i:\ V \to \mathbb{R}$ pour tout i. Soit $a \in V$ tel que φ est différentiable en a et f est différentiable en $\varphi(a)$. Alors l'application $F = f \circ \varphi:\ V \to \mathbb{R}$ est différentiable en a et*

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, \qquad \frac{\partial F}{\partial u_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a).$$

Conséquence : En dimension finie, la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ est de classe $\mathcal{C}^p$. En particulier la somme, le produit (pour des fonctions à valeurs réelles) de fonctions $\mathcal{C}^p$ est $\mathcal{C}^p$.

Remarque 8. — En particulier, si φ est une fonction d'une seule variable réelle, la formule de la proposition précédente s'écrit

$$F'(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)) \cdot \varphi'_i(a).$$

— Il est important de bien maîtriser la formule de la proposition précédente. Vous pourrez vous entraîner à montrer que si $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et si $\varphi:\ \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, l'application $F = f \circ \varphi$ (qui est l'expression de f en coordonnées polaires) est de classe $\mathcal{C}^2$ et le *laplacien* de f vérifie

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

1.3. Formules de Taylor

Accroissements finis.

Théorème 3 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f:\ U \subset E \to F$, où E et F sont deux e.v.n et U un ouvert de E. Soit $(a, b) \in U^2$ tel que le segment $[a, b] = \{ta + (1-t)b,\ t \in [0, 1]\}$ soit inclus dans U. Si f est continue sur $[a, b]$, différentiable en tout point de $]a, b[$ et s'il existe $M > 0$ tel que $\|df_c\| \le M$ pour tout $c \in\ ]a, b[$, alors $\|f(b) - f(a)\| \le M\,\|b - a\|$.*

Démonstration. La fonction $g:\ [0,1]\to F \quad t\mapsto f(a+t(b-a))$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, et

$$\forall t\in\,]0,1[\,,\qquad g'(t)=df_{a+t(b-a)}(b-a)$$

(voir la remarque 8). On a donc $\|g'(t)\|\le M\|b-a\|$ sur $]0,1[$, donc d'après le théorème 5 page 75,

$$\|f(b)-f(a)\|=\|g(1)-g(0)\|\le M\|b-a\|.$$

□

Conséquence :

— Si U est convexe, si f est différentiable sur U et si $\|df_x\|\le M$ pour tout $x\in U$, alors

$$\forall(a,b)\in U^2,\qquad \|f(b)-f(a)\|\le M\|b-a\|.$$

— Si U est un ouvert connexe et $df_x=0$ pour tout $x\in U$, alors f est constante sur U (en effet, U est connexe par lignes brisées — voir le théorème 5 page 42 — et $f(a)=f(b)$ pour tout segment $[a,b]\subset U$).

Remarque 9. Si f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, si $[a,b]\subset U$, si f est continue sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$, alors l'égalité des accroissements finis est valable et s'écrit

$$\exists c\in\,]a,b[\,,\qquad f(b)=f(a)+df_c(b-a).$$

Comme nous l'avons vu dans la remarque 2 page 74, ceci est faux dès que la dimension de l'espace d'arrivée est >1 et on utilise alors l'inégalité des accroissements finis.

Formules de Taylor. *Notation.* Soit $f:\ U\subset\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^p$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^q$) une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Par analogie avec le fait que

$$\forall(a_1,\dots,a_q)\in\mathbb{R}^q,\qquad (a_1+\cdots+a_q)^n=\sum_{i_1+\cdots+i_q=n}\frac{n!}{i_1!\cdots i_q!}\,a_1^{i_1}\cdots a_q^{i_q}$$

on note pour tout $n\in\{1,\dots,k\}$

$$\left[\sum_{i=1}^q h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[n]}=\sum_{i_1+\cdots+i_q=n}\frac{n!}{i_1!\cdots i_q!}\,h_1^{i_1}\cdots h_q^{i_q}\,\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_q^{i_q}}(a).$$

Cette expression s'appelle *puissance symbolique n-ième* de $\sum_{i=1}^q h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. C'est la dérivée n-ième de la fonction de la variable réelle $t\mapsto f(a+th)$ en $t=0$.

A partir de cette notation, nous allons énoncer les formules de Taylor relatives aux fonctions de plusieurs variables. On les démontre en appliquant à la fonction $t\mapsto f(x+th)$ ($t\in[0,1]$) les formules de Taylor vraies pour les fonctions de la variable réelle.

Théorème 4 (Formule de Taylor-Lagrange). *Soit $f:\ U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) une application de classe $\mathcal{C}^p$ sur U et $x\in\mathbb{R}^n$, $h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[x,x+h]=\{x+th,t\in[0,1]\}$ soit inclus dans U. Alors il existe $\theta\in\,]0,1[$ tel que*

$$f(x+h)=f(x)+\left[\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]+\frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[2]}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{(p-1)!}\left[\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[p-1]}+\frac{1}{p!}\left[\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)\right]^{[p]}.$$

Exemple 2. Si $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, il existe $\theta\in\,]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned}f(h,k)&=f(0,0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\\&\quad+\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta h,\theta k)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\theta h,\theta k)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta h,\theta k)\right]+o(\|(h,k)\|^2).\end{aligned}$$

Remarque 10. Attention, comme pour l'égalité des accroissements finis, ceci n'est vrai que pour des fonctions à valeurs réelles. Pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, on peut par contre utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème 5 (Formule de Taylor avec reste intégral). *Soient $f:\ U\subset\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^p$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^q$) une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, $x\in\mathbb{R}^q$ et $h=(h_1,\dots,h_q)\in\mathbb{R}^q$ tels que $[x,x+h]\subset U$. Alors*

$$\begin{aligned}f(x+h)&=f(x)+\left[\sum_{i=1}^q h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]+\frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^q h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[2]}+\cdots\\&\quad\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\left[\sum_{i=1}^q h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[k-1]}+\int_0^1\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\left[\sum_{i=1}^q h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)\right]^{[k]}dt.\end{aligned}$$

Théorème 6 (Formule de Taylor-Young). *Soit $f:\ U\subset\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^p$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^q$) une application de classe $\mathcal{C}^k$ et $x\in U$. Alors lorsque $h=(h_1,\dots,h_q)\in\mathbb{R}^q$ tend vers 0,*

$$f(x+h)=f(x)+\left[\sum_{i=1}^q h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]+\frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^q h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[2]}+\cdots+\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^q h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[k]}+o(\|h\|^k).$$

1.4. Exercices

Exercice 1. **a)** Montrer que la fonction $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=y^2/x$ si $x\neq 0$, $f(0,y)=y$, est dérivable selon tout vecteur au point $(0,0)$, mais n'est pas continue en $(0,0)$.
b) On considère l'application

$$f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad f(x,y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad\text{si}\quad (x,y)\neq(0,0),\qquad f(0,0)=0.$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales (exemple dû à Péano).

Solution. **a)** Soit (a,b) un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Si $a\neq 0$, on a

$$\forall t\in\mathbb{R}^*,\qquad f(ta,tb)-f(0,0)=\frac{t^2b^2}{ta}=\frac{b^2}{a}\,t,$$

ce qui montre que f est dérivable en $(0,0)$ selon le vecteur (a,b) et que $f'_{(a,b)}(0,0)=b^2/a$.

Si $a=0$, on a $f(0,tb)=tb$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc f est dérivable en $(0,0)$ selon le vecteur (a,b) et $f'_{(a,b)}(0,0)=b$.

Cependant, f n'est pas continue en $(0,0)$ car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(1/n^3,1/n)=n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n\to+\infty$, alors que $(1/n^3,1/n)$ tend vers $(0,0)$.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\forall y\neq 0,\qquad \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

En faisant tendre y vers 0, on en déduit si $x \neq 0$ que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ existe et vaut x ; si $x = 0$, on voit de même que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0. Finalement, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en conclut que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.

Maintenant, on en déduit, grâce à la relation d'antisymétrie $f(y,x) = -f(x,y)$ le fait que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut -1. D'où le résultat.

EXERCICE 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (x \neq 0), \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(tx) = tf(x).$$

Montrer que f est linéaire.

Solution. Fixons un vecteur $x \neq 0$ quelconque de $\mathbb{R}^n$. La relation $f(tx) = tf(x)$ pour tout $t > 0$ montre que $f(tx)$ tend vers 0 lorsque $t \to 0$, et comme f est continue en 0 (car elle est différentiable en 0), on en conclut $f(0) = 0$. Maintenant, la différentiabilité de f en 0 entraîne, lorsque $t \to 0^+$,

$$f(tx) = f(0) + df_0(tx) + o(\|tx\|) = t\, df_0(x) + t\varepsilon(t) \quad \text{donc} \quad f(x) = df_0(x) + \varepsilon(t)$$

avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0^+$. En faisant tendre t vers 0, on en déduit $f(x) = df_0(x)$. Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, et est vrai également pour $x = 0$ car nous avons montré $f(0) = 0$. Finalement, $f = df_0$ est linéaire.

EXERCICE 3. **1/** Soient E, F, G des e.v.n et $\varphi : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On suppose que φ est continue, de sorte qu'il existe $C > 0$ tel que $\|\varphi(x,y)\| \leq C\|x\|\,\|y\|$ pour tout $(x,y) \in E \times F$. Montrer que φ est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle $d\varphi$.

2/ (Applications.) **a)** Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer la différentiabilité et calculer la différentielle de l'application produit scalaire $\Phi : E^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto x \cdot y$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application $\varphi_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = M^p$ est différentiable et calculer sa différentielle $d\varphi_p$.

Solution. **1/** Fixons $(x,y) \in E \times F$. Pour tout $(h,k) \in E \times F$, on a

$$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y+k) + \varphi(h, y+k) = \varphi(x,y) + \varphi(x,k) + \varphi(h,y) + \varphi(h,k),$$

donc si $L(h,k) = \varphi(x,k) + \varphi(h,y)$, L est linéaire et

$$\|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) - L(h,k)\| = \|\varphi(h,k)\| \leq C\|h\|\,\|k\| = o(\|(h,k)\|)$$

(en prenant par exemple $\|(h,k)\| = \sup\{\|h\|, \|k\|\}$). Donc φ est différentiable en (x,y) et $d\varphi_{(x,y)} = L$, c'est-à-dire $d\varphi_{(x,y)} \ : (h,k) \mapsto \varphi(x,k) + \varphi(h,y)$.

2/ a) L'application Φ est bilinéaire et continue car d'après l'inégalité de Schwarz, $|\Phi(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$ pour tout $(x,y) \in E^2$. En appliquant le résultat de la question précédente, on en déduit que Φ est différentiable sur E^2 et que $d\Phi_{(x,y)} : \ (h,k) \mapsto x \cdot h + y \cdot k$ pour tout $(x,y) \in E^2$.

b) Notons Ψ l'application bilinéaire continue $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (A,B) \mapsto AB$. D'après la question 1/, Ψ est différentiable et $d\Psi_{(A,B)}(H,K) = HB + AK$ pour tout (A,B).

Ceci étant, montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que φ_p est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie

$$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad d\varphi_{p,M}(H) = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{(p-1)-i}.$$

Pour $p=1$, c'est évident car φ_1 est linéaire. Supposons le résultat vrai au rang p et montrons le au rang $p+1$. On a $\varphi_{p+1}=\varphi_1\varphi_p=\Psi(\varphi_1,\varphi_p)$, donc composée d'applications différentiables, donc φ_{p+1} est différentiable et $d\varphi_{p+1,M}=d\Psi_{\varphi_1(M),\varphi_p(M)}[d\varphi_{1,M},d\varphi_{p,M}]$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} d\varphi_{p+1,M}(H) &= d\varphi_{1,M}(H)\,\varphi_p(M)+\varphi_1(M)\,d\varphi_{p,M}(H) \\ &= HM^p + M\sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{(p-1)-i} = \sum_{i=0}^{p} M^i H M^{p-i}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

EXERCICE 4 (LEMME D'HADAMARD). Soit $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
a) On suppose $f(0)=0$. Montrer que l'on peut écrire

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\,g_i(x_1,\dots,x_n)$$

où pour tout i, $g_i:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Si de plus $df_0=0$, montrer que l'on peut écrire

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} x_ix_j\,h_{i,j}(x_1,\dots,x_n)$$

où pour tout (i,j), $h_{i,j}:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Solution. **a)** On commence par écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, qui s'écrit ici, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$f(x)=\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n x_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\right)dt=\sum_{i=1}^n x_i\,g_i(x)\quad\text{avec}\quad g_i(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt.$$

Il suffit ensuite de remarquer, grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral, que les fonctions g_i ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Si de plus $df_0=0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)=g_i(0)=0$ pour tout i. Comme les fonctions g_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut leur appliquer le résultat précédent qui montre que pour tout i, on peut trouver des fonctions $(h_{i,j})_{1\le j\le n}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $g_i(x)=\sum_{j=1}^n x_jh_{i,j}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. Ainsi,

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad f(x)=\sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n x_jh_{i,j}(x)\right)=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} x_ix_j\,h_{i,j}(x),$$

d'où le résultat.

Remarque. On aurait pu aussi démontrer le résultat de la question b) directement en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2.

EXERCICE 5 (DIFFÉRENTIELLE DE L'INVERSE). **1/ a)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$.Montrer que l'application $\mathrm{Inv}:\ \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})\to\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})\quad M\mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.
b) En calculant les dérivées partielles de Inv au point I_n, calculer la différentielle $D\mathrm{Inv}$ de Inv au point I_n.
c) En déduire la valeur de la différentielle de Inv en tout point de $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.

2/ On veut généraliser le résultat précédent en dimension infinie. Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{G}\ell_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles u de E tels que u et

u^{-1} soient continus. La norme utilisée sur $\mathcal{L}_c(E)$ est $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. On rappelle (voir l'exercice 4 page 52) que $\mathcal{G}\ell_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.
a) Montrer que l'application Inv : $\mathcal{G}\ell_c(E) \to \mathcal{G}\ell_c(E) \quad u \mapsto u^{-1}$ est différentiable au point Id_E et calculer la différentielle de Inv en ce point.
b) Montrer que Inv est différentiable en tout point de $\mathcal{G}\ell_c(E)$ et calculer sa différentielle.

Solution. **1/ a)** Remarquons tout d'abord que $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application déterminant, qui est continue).

Pour tout $M \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$, on a $M^{-1} = (\det M)^{-1}\, {}^t\widetilde{M}$ où $\widetilde{M}$ désigne la comatrice de M. Cette expression montre que les coefficients de M^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de M, ce qui prouve que Inv est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) On désigne par $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($E_{i,j}$ est la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1). En notant les matrices sous la forme $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, calculons

$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{i,j}}(I_n) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[(I_n + tE_{i,j})^{-1} - I_n\right].$$

Si $i = j$, on a

$$\frac{1}{t}[(I_n + tE_{i,i})^{-1} - I_n] = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t+1} - 1\right) E_{i,i} = -\frac{1}{t+1} E_{i,i} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{i,i}}(I_n) = -E_{i,i}.$$

Si $i \neq j$, la matrice $E_{i,j}$ vérifie $E_{i,j}^2 = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_n + tE_{i,j})^{-1} = I_n - tE_{i,j}$ (car $(I_n - tE_{i,j})(I_n + tE_{i,j}) = I_n - t^2E_{i,j}^2 = I_n$), et on en déduit $\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{i,j}}(I_n) = -E_{i,j}$.

En résumé, nous avons montré $\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{i,j}}(I_n) = -E_{i,j}$ pour tout (i,j). On en déduit que la différentielle $D\mathrm{Inv}_{I_n}$ de Inv au point I_n vérifie

$$\forall M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad D\mathrm{Inv}_{I_n}(M) = \sum_{i,j} m_{i,j} \frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial m_{i,j}}(I_n) = -M,$$

d'où le résultat.

c) Soit $M \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$. Lorsque $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tend vers 0, on a $M + H \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ pour H suffisamment petit (car $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est ouvert) et

$$\begin{aligned}\mathrm{Inv}(M+H) = (M+H)^{-1} &= (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} = [I_n + D\mathrm{Inv}_{I_n}(M^{-1}H) + o(\|H\|)]M^{-1} \\ &= [I_n - M^{-1}H + o(\|H\|)]M^{-1} = \mathrm{Inv}(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|)\end{aligned}$$

On en déduit $D\mathrm{Inv}_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2/ a) Pour tout $h \in \mathcal{L}_c(E)$, $\|h\| < 1$, on sait (voir la proposition 2 page 49) que $\mathrm{Id} + h$ est inversible et que $(\mathrm{Id} + h)^{-1} = \mathrm{Id} - h + h^2 - h^3 + \cdots + (-1)^n h^n + \cdots$. Comme $\|\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n h^n\| \le \sum_{n=2}^{+\infty} \|h\|^n = \|h\|^2/(1 - \|h\|)$, on en déduit que lorsque $h \to 0$, $\mathrm{Inv}(\mathrm{Id} + h) = \mathrm{Id} - h + o(\|h\|)$. Ainsi, Inv est différentiable au point Id et $D\mathrm{Inv}_{\mathrm{Id}}(h) = -h$.

b) On procède comme dans la question 1/c). Soit $u \in \mathcal{G}\ell_c(E)$. Comme $\mathcal{G}\ell_c(E)$ est ouvert (voir l'exercice 4 page 52), on a $u + h \in \mathcal{G}\ell_c(E)$ lorsque h est suffisamment petit, et lorsque $h \to 0$,

$$(u+h)^{-1} = (\mathrm{Id} + u^{-1}h)^{-1}\, u^{-1} = (\mathrm{Id} - u^{-1}h + o(\|h\|))\, u^{-1} = u^{-1} - u^{-1}hu^{-1} + o(\|h\|).$$

De plus, l'application linéaire $h \mapsto -u^{-1}hu^{-1}$ est continue car pour tout $h \in \mathcal{L}_c(E)$, $\|u^{-1}hu^{-1}\| \le \|u^{-1}\|\,\|h\|\,\|u^{-1}\|$. En définitive, Inv est différentiable au point u et $D\mathrm{Inv}_u(h) = -u^{-1}hu^{-1}$ pour tout $h \in \mathcal{L}_c(E)$.

Exercice 6 (Différentielle du déterminant). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application déterminant définie par $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad M \mapsto \det M$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle $D\det$.

Solution. Le déterminant d'une matrice est un polynôme en ses coefficients, on en déduit que l'application $M \mapsto \det M$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour calculer $D\det_M$ (différentielle de det au point M), nous allons calculer les dérivées partielles de det au point M. Désignons par $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En notant $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit donc de calculer les $\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(M)$. En désignant par $C = (C_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la comatrice de M (de sorte que $C_{i,j}$ est le cofacteur de l'élément d'indice (i,j) de M), la n-linéarité du déterminant entraîne, pour tout (i,j) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\det(M + tE_{i,j}) = (\det M) + t\, C_{i,j} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(M) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\det(M+tE_{i,j}) - \det M}{t} = C_{i,j}.$$

Ainsi, si $H = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$D\det_M(H) = \sum_{i,j} h_{i,j}\, \frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(M) = \sum_{i,j} h_{i,j} C_{i,j} = \operatorname{tr}({}^tCH).$$

Lorsque M est inversible, on peut obtenir une autre expression de $D\det_M$ en utilisant l'identité ${}^tC = (\det M)M^{-1}$ qui entraîne $D\det_M(H) = (\det M)\operatorname{tr}(M^{-1}H)$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On définit l'application

$$F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad F(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \quad \text{si} \quad x \neq y, \quad F(x,x) = f'(x).$$

a) Montrer que F est continue.
b) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Solution. **a)** Si $x \neq y$, on a

$$F(x,y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y f'(u)\,du = \int_0^1 f'[x+t(y-x)]\,dt, \tag{$*$}$$

égalité qui reste évidemment vraie pour $x = y$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la dernière intégrale de (*) a son intégrande qui est continue en (x,y) sur $\mathbb{R}^2$, donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Notre point de départ est toujours la relation (*). L'intégrande $f'(x+t(y-x))$ est continûment dérivable par rapport à x, on peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral qui montre que F admet une dérivée partielle par rapport à x sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\big(f'[x+t(y-x)]\big)\,dt = \int_0^1 (1-t)f''[x+t(y-x)]\,dt,$$

fonction de (x,y) qui est bien continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, F admet une dérivée partielle par rapport à y continue sur $\mathbb{R}^2$. On en conclut que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque. On peut également résoudre l'exercice sans exprimer F par l'intégrale (*), mais c'est plus difficile.

Exercice 8 (Fonctions holomorphes, fonctions harmoniques). On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité ouvert complexe. Par commodité, on identifie les nombres complexes $x+iy$ avec les couples (x,y) (avec $x, y \in \mathbb{R}$).

1/ Soit $f:\ D \to \mathbb{C}$ une application, et u, v les deux applications définies sur D, à valeurs réelles, telles que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. On dit que f est *holomorphe* sur D si elle est continûment dérivable par rapport à la variable complexe z, c'est-à-dire si

(i) pour tout $z_0 \in D$, $(f(z_0+h) - f(z_0))/h$ converge lorsque $h \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0 (cette limite est notée $f'(z_0)$),

(ii) l'application $z \mapsto f'(z)$ est continue sur D.

a) Montrer que f est holomorphe si et seulement si les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et vérifient les *conditions de Cauchy*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) Si f est holomorphe et si u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ alors montrer que u et v sont *harmoniques*, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

2/ On considère une fonction $u : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique.
a) Montrer que $\partial u/\partial x$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe.
b) Montrer que u est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Solution. **1/ a)** On remarque tout d'abord que les conditions de Cauchy sont équivalentes à l'identité $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Supposons f holomorphe. Soit $z = x + iy \in D$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$). Lorsqu'on fait tendre le nombre réel s vers 0 dans l'expression

$$\frac{f(z+s) - f(z)}{s} = \frac{f(x+s,y) - f(x,y)}{s}$$

le membre de gauche converge vers $f'(z)$, donc celui de droite converge, ce qui montre l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et de plus, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Lorsque cette fois ci, on fait tendre le nombre réel t vers 0 dans l'expression

$$\frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \frac{1}{i}\frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t}$$

on aboutit à l'existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et à l'égalité $f'(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Ainsi, on a montré $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Par ailleurs, f' étant continue, les égalités $\frac{\partial f}{\partial x} = f'$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = if'$, entraînent que les dérivées partielles de f sont bien continues, donc f (et donc u et v) est de classe $\mathcal{C}^1$.

Réciproquement, supposons $f = u + iv$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Soit $z \in D$. L'application f est différentiable en $z = x+iy$ donc la formule de Taylor-Young entraîne, lorsque les nombres réels s et t tendent vers 0

$$f(x+s,y+t) - f(x,y) = s\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + t\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + o(|s+it|).$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ ceci entraîne

$$f(x+s,y+t) - f(x,y) = s\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + it\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + o(|s+it|) = (s+it)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + o(|s+it|).$$

Ceci montre que la limite $(f(z+h) - f(z))/h$ converge vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ lorsque $h = s+it$ tend vers 0. Donc f est dérivable par rapport à la variable complexe z et de plus, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Cette dernière égalité entraîne la continuité de f', donc f est bien holomorphe.

b) Les conditions de Cauchy et l'indépendance des dérivées partielles à l'ordre de dérivation entraînent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Donc u est harmonique. On montrerait de même que v est harmonique.

2/a) On va montrer que $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ est holomorphe. La fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et comme u est harmonique, on peut écrire

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial yx} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ainsi, les conditions de Cauchy sont vérifiées, donc f est bien holomorphe.

b) Il faut en quelque sorte exhiber une primitive de $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Pour tout $z \in D$, on va considérer l'intégrale curviligne de f le long d'un segment joignant 0 à z (c'est possible car le domaine D est une partie étoilée par rapport à 0), en posant

$$g(z) = z\int_0^1 f(tz)\,dt = (x+iy)\int_0^1 f(tx,ty)\,dt.$$

Le théorème de dérivation sous le signe intégral nous assure que g est continûment dérivable par rapport à x et par rapport à y et que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 f(tx,ty)\,dt + (x+iy)\int_0^1 t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\,dt\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= i\int_0^1 f(tx,ty)\,dt + (x+iy)\int_0^1 t\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\,dt.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = (x+iy)\int_0^1 t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + i\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right)dt.$$

et comme $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, on en déduit $\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. Ainsi la fonction g est holomorphe. Calculons sa partie réelle. On a

$$g(z) = (x+iy)\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(tx,ty)\,dt$$

donc

$$\Re(g)(z) = \int_0^1 \left(x\frac{\partial u}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial u}{\partial y}(tx,ty)\right)dt.$$

L'intégrande n'est autre que la dérivée par rapport à t de l'application $t \mapsto u(tx,ty)$, on en déduit $\Re(g)(z) = \big[u(tx,ty)\big]_0^1 = u(x,y) - u(0,0)$. Ainsi, la fonction $h = g + u(0,0)$ est holomorphe (la propriété d'holomorphie ne change pas si on ajoute une constante à g) et sa partie réelle est bien égale à u.

Remarque. Les fonctions holomorphes font aussi l'objet de l'exercice 13 page 265. Dans la remarque à la fin de cet exercice, il est montré qu'une fonction holomorphe est analytique. On en déduit qu'une fonction holomorphe est forcément de classe $\mathcal{C}^\infty$.

– Lorsque le domaine D de définition contient des trous (plus précisément s'il n'est pas *simplement connexe*, c'est-à-dire qu'un lacet dans D n'est pas continûment déformable en un point tout en restant dans D), une fonction harmonique n'est pas forcément la partie réelle d'une fonction holomorphe.

2. Extremums relatifs

Dans toute cette section, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet un extremum relatif en un point a de U et si f est différentiable en a, alors $df_a = 0$ (en d'autres termes, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout i).*

Un point a pour lequel $df_a = 0$ est appelé *point critique* de f. Ce résultat nous dit qu'un extremum relatif est nécessairement un point critique (notez que U doit être *ouvert* : c'est comme dans $\mathbb{R}$, un extremum relatif est un point critique lorsque c'est un point *intérieur* à l'ensemble de définition). La réciproque est fausse dans le cas général. Cependant, moyennant un développement limité de f à l'ordre 2, il est possible d'obtenir une condition suffisante d'existence d'un extremum.

→ THÉORÈME 1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $df_a = 0$, de sorte que d'après la formule de Taylor-Young, $f(a+h) = f(a) + Q(h)/2 + o(\|h\|^2)$, où Q est la forme quadratique*

$$Q(h) = \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[2]} = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{i<j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Alors

(i) si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, Q est une forme quadratique positive (resp. négative) ;

(ii) si Q est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Démonstration. Si f admet un minimum relatif en a, on a, sur un voisinage de 0 pour h,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q(h) + o(\|h\|^2) \geq f(a) \qquad \text{donc} \qquad Q(h) + o(\|h\|^2) \geq 0.$$

Fixons $h \in \mathbb{R}^n$. Lorsque $t \in \mathbb{R}$ tend vers 0, on peut donc écrire

$$Q(th) + o(\|th\|^2) = t^2(Q(h) + o(1)) \geq 0 \qquad \text{donc} \qquad Q(h) + o(1) \geq 0$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit $Q(h) \geq 0$. Ceci est vrai pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, d'où (i).

Si Q est une forme quadratique définie positive, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $Q(h) > 0$. Comme la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte, on en déduit $\alpha = \inf_{\|h\|=1} Q(h) > 0$. Ainsi, lorsque h tend vers 0,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}[Q(h) + o(\|h\|^2)] = \frac{\|h\|^2}{2}\left[Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + o(1)\right] \geq \frac{\|h\|^2}{2}(\alpha + o(1)).$$

Comme $\alpha + o(1) \geq 0$ sur un voisinage de $h = 0$, on en déduit $f(a+h) \geq f(a)$ sur ce voisinage, d'où (ii). □

Remarque 1. — Si la forme quadratique Q est seulement supposée positive (et non pas définie positive), on n'est pas assuré d'avoir un minimum relatif en a. Par exemple, pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3$ en $a = 0$, $Q = 0$ est positive (elle est nulle) et pourtant, f n'admet pas d'extremum en 0.

— Dire que la forme quadratique Q est positive (resp. définie positive), c'est dire que la matrice symétrique $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}$ est positive (resp. définie positive), ou encore que les valeurs propres de A sont ≥ 0 (resp. > 0). La matrice A est appelée *matrice hessienne* de F au point critique a.

Exemple 1. (en dimension 2). Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ s & t \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et supposons $\det A = rt - s^2 > 0$. Alors les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de A (qui sont réelles car A est symétrique) ont même signe (car $\lambda_1\lambda_2 = \det A > 0$). De plus, $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = r + t$, et comme r et t ont même signe (car $\det A = rt - s^2 > 0$ donc $rt > 0$), on en déduit que $\lambda_1 + \lambda_2$ a le signe de r. Ainsi, les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 ont le signe de r.

En résumé, si $\det A > 0$, alors A est définie positive (resp. définie négative) si et seulement si $r > 0$ (resp. $r < 0$). Si $\det A < 0$, on a $\lambda_1\lambda_2 < 0$ donc A n'est ni positive, ni négative.

Maintenant, considérons une fonction $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $df_a = 0$ pour $a \in U$. Posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

Alors d'après le théorème et ce que l'on vient de voir,
— si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum relatif en a ;
— si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum relatif en a ;
— si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas un extremum en a ;
— si $rt - s^2 = 0$, on ne peut conclure.

Extremums liés. On doit parfois maximiser (ou minimiser) une fonction $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sur un sous-ensemble de U de la forme $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$, où les g_i sont des fonctions de U dans $\mathbb{R}$. Pour ce faire, le théorème suivant, démontré à la page 347, rend de précieux services ; il est dû à Lagrange.

THÉORÈME 2. *Soient $f, g_1, \ldots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par Γ l'ensemble $\{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$.*

Si $f_{|\Gamma}$ (restriction de f à Γ) admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_{1,a}, \ldots, dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (appelés multiplicateurs de Lagrange*) tels que*

$$df_a = \lambda_1 dg_{1,a} + \cdots + \lambda_r dg_{r,a}.$$

Remarque 2. — La famille $(dg_{i,a})$ étant libre, les multiplicateurs de Lagrange (λ_i) sont uniques.
— La condition “U ouvert” est essentielle dans le théorème des extremums liés.

2.1. Exercices

EXERCICE 1. Étudier les extremums relatifs puis les extremums absolus de la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Solution. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Commençons par rechercher les extremums relatifs de f. Pour cela, on recherche ses points critiques (x, y), qui vérifient $df_{(x,y)} = 0$, c'est-à-dire

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y) \quad \text{et} \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y).$$

Ce système de deux équations s'écrit aussi

$$\begin{cases} x^3 + y^3 & = 0 \\ x^3 - (x - y) & = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) & = 0 \\ x^3 - x + y & = 0 \end{cases}.$$

Ce système admet la solution triviale $(x, y) = (0, 0)$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2/2 + x^2/2 + y^2/2 > 0$ n'est pas nul, donc le système équivaut dans ce cas à

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ x^3 - 2x & = 0 \end{cases} \quad \text{dont les solutions non nulles sont} \quad (x, y) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$$

Finalement, f a trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
— Au point $(0, 0)$, on voit facilement que la matrice hessienne de f est négative mais non définie négative (on a $r = t = -4$ et $s = 4$). On ne peut donc pas conclure en utilisant le théorème 1 page 336. On s'en sort en remarquant que $f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) < 0$ pour $0 < |x| < 2$. Par ailleurs $f(x, x) = 2x^4 > 0$ pour tout $x \neq 0$. Ainsi, f ne présente ni maximum ni minimum relatif en $(0, 0)$ (on a affaire à un *point col*).

— Au point $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$, on a $r = 20$, $s = 4$ et $t = 20$. Donc $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$. La matrice hessienne de f en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est donc définie positive, donc f admet un minimum relatif en ce point (égal à $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$).

— Le résultat est identique en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ car f vérifie la relation $f(x, y) = f(-x, -y)$.

Ainsi, les seuls extremums relatifs de f sont des minimums, atteints aux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Nous allons prouver, par une technique générale, que ces minimums relatifs sont en fait des minimums absolus (c'est bien sûr faux dans le cas général). Il suffit pour cela de prouver que f admet bien un minimum absolu, car tout minimum absolu est un minimum relatif (et la valeur des deux minimums relatifs est la même dans notre cas).

L'idée est de dire que lorsque $|x|$ et $|y|$ sont grands, $2(x-y)^2$ est petit par rapport à $x^4 + y^4$. Pour cela, on utilise la norme $\|(x, y)\| = \sup\{|x|, |y|\}$ et les inégalités

$$x^4 + y^4 \geq \|(x, y)\|^4, \qquad 2(x - y)^2 \leq 2\big(2\,\|(x, y)\|\big)^2 = 8\,\|(x, y)\|^2$$

qui entraînent $f(x, y) \geq \|(x, y)\|^4 - 8\,\|(x, y)\|^2$. Ainsi, $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y) = +\infty$. On en déduit qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) \geq 0$ dès que $(x, y) \notin K$. La fonction f est continue sur le compact K, donc il existe $(a, b) \in K$ tel que $f(a, b) = \inf_{(x,y) \in K} f(x, y)$. Comme $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, on a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in K$, et donc $f(a, b) \leq -8$. Comme $f(x, y) \geq 0$ pour $(x, y) \notin K$, on a en fait $f(x, y) \geq f(a, b)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$, qui est donc un minimum relatif, donc égal à -8.

Remarque. Pour montrer que f admet bien un minimum absolu égal à -8, on aurait pu montrer directement (en utilisant de bonnes minorations), que $f(x, y) \geq -8$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'avantage de la méthode que nous avons présentée est qu'elle est générale.

EXERCICE 2. On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f_{|S}$ (restriction de f à S) soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|x_0\| < 1$, tel que $df_{x_0} = 0$.

Solution. C'est l'équivalent du théorème de Rolle en dimension n. On procède comme sur $\mathbb{R}$.

La boule unité fermée B de $\mathbb{R}^n$ est compacte, et comme la fonction f est continue (car différentiable), il existe $x_0 \in B$ tel que $f(x_0) = \min_{x \in B} f(x) = m$ et il existe $x_1 \in B$ tel que $f(x_1) = \max_{x \in B} f(x) = M$.

Si $m = M$, alors f est constante sur B, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| < 1$, $df_x = 0$.

Sinon, $m < M$, et comme f est constante sur S, l'un des points x_0, x_1 n'est pas dans S. Supposons par exemple $x_0 \notin S$. Alors $\|x_0\| < 1$, donc f prend sur l'ouvert $\mathring{B}$ son minimum en x_0. Comme de plus f est différentiable en x_0, on en déduit $df_{x_0} = 0$.

EXERCICE 3 (PRINCIPE DU MAXIMUM). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le *laplacien* de f par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

On note D la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{D}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

a) Si $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in D$, montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y)$.

b) Si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in D$ (on dit alors f est *harmonique* sur D), montrer

$$\forall x \in D, \qquad \min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y).$$

Solution. **a)** Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) \geq \max_{\|y\|=1} f(y)$. L'application f est continue sur le compact $\overline{D}$, il existe donc $x \in \overline{D}$ tel que $f(x) = \sup_{y\in\overline{D}} f(y)$. Si $f(x) = f(x_0)$, on choisit $x = x_0$, sinon $f(x) > f(x_0) \geq \sup_{\|y\|=1} f(y)$, donc $x \in D$. Dans tous les cas, x appartient à l'ouvert D. On en déduit (voir le théorème 1 page 336) que $df_x = 0$ et que la matrice hessienne

$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

est négative. En particulier, la trace de A est négative (c'est la somme de ses valeurs propres), ce qui s'écrit $\Delta f(x) \leq 0$. Ceci est contraire aux hypothèses, d'où le résultat.

b) Nous montrons que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$, l'autre inégalité s'en déduisant ensuite en considérant $-f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$. On a $\Delta g = \Delta f + 2n\varepsilon$, ce qui montre que $\Delta g > 0$ sur D. D'après la question précédente, on en déduit, pour tout $x \in D$,

$$g(x) < \max_{\|y\|=1} g(y) \quad \text{donc} \quad f(x) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) < \max_{\|y\|=1} f(y) + \varepsilon\left(\max_{\|y\|=1}\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$. D'où le résultat.

Remarque. Le résultat se généralise aisément sous la forme suivante : si f est continue sur un compact K et harmonique sur l'intérieur de K, alors f atteint son maximum et son minimum sur la frontière de K.

Exercice 4 (Exemples d'applications du théorème des extremums liés).
a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $s > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\quad (x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_1\cdots x_n$, et $\Gamma = \{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = s\}$. Étudier le maximum global de $f_{|\Gamma}$, la restriction de f à Γ. Retrouver ainsi l'inégalité arithmético-géométrique.
b) On se donne un entier $n \geq 2$ et n réels strictement positifs $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. On note

$$\Gamma = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\right\}.$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\quad (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$, déterminer le maximum global de $f_{|\Gamma}$.
c) Soient $a_1,\ldots,a_n$ des réels > 0 tels que $a_1 + \cdots + a_n = 1$ (avec $n \geq 2$). Démontrer que

$$\prod_{i=1}^n a_i(1-a_i) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

Solution. **a)** La fonction f étant continue sur le compact Γ, $f_{|\Gamma}$ admet un maximum global atteint en un point a de Γ. Si on note $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\quad (x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n - s$ et $\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$, alors $a \in \Omega = \gamma \cap (\mathbb{R}^{+*})^n \subset \Gamma$ (car $f(x) = 0$ si l'un des x_i est nul, et $f(x) > 0$ si $x \in \gamma$). Par construction, $f_{|\Omega}$ admet un extremum global en a, et comme Ω est un ouvert de γ, $f_{|\gamma}$ atteint un extremum local en a. De plus, si $a \in \gamma$, alors $dg_a \neq 0$, on peut donc appliquer le théorème des extremums liés qui entraîne l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_a = \lambda dg_a$. On a donc

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda\frac{\partial g}{\partial x_i} = \lambda \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{f(a)}{a_i} = \lambda.$$

Or $f(a) \neq 0$, on en déduit que tous les a_i sont égaux. Comme $\sum_{i=1}^n a_i = s$, on a $a_i = s/n$ pour tout i. La valeur du maximum recherché est donc $(s/n)^n$.

Ceci s'écrit aussi

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^+)^n,\qquad \prod_{i=1}^n x_i \le \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^n \quad\text{c'est-à-dire}\quad \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \le \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

ce qui n'est autre que l'inégalité arithmético-géométrique.

b) La fonction f est continue sur le compact Γ, il existe donc $a\in\Gamma$ tel que $f_{|\Gamma}$ atteigne son maximum global en a.

On note $g:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\quad (x_1,\dots,x_n)\mapsto \sum_i x_i^4/\lambda_i^4-1$, de sorte que $\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^n \mid g(x)=0\}$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $dg_x\neq 0$ pour tout $x\in\Gamma$ (si $dg_x=4\sum_i(x_i^3/\lambda_i^4)\,dx_i=0$, alors $x_i=0$ pour tout i donc $x\notin\Gamma$), on peut appliquer le théorème des extremums liés qui entraîne l'existence de $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $df_a=\mu\,dg_a$. On en conclut

$$\forall i,\quad 2a_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\mu\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)=\mu\,\frac{4a_i^3}{\lambda_i^4}\qquad\text{donc}\qquad a_i\left(1-2\mu\,\frac{a_i^2}{\lambda_i^4}\right)=0.$$

Pour tout i, on en déduit que $a_i=0$ ou $a_i^2=\lambda_i^4/(2\mu)$. Notons I l'ensemble des indices i pour lesquels $a_i\neq 0$. L'ensemble I est non vide car $a\neq 0$ (car $a\in\Gamma$). On a

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^4}{\lambda_i^4}=1=\sum_{i\in I}\frac{a_i^4}{\lambda_i^4}=\sum_{i\in I}\frac{\lambda_i^4}{4\mu^2}\qquad\text{donc}\qquad 4\mu^2=\sum_{i\in I}\lambda_i^4,$$

et on en déduit

$$\forall i\in I,\quad a_i^2=\frac{\lambda_i^4}{2\mu}=\frac{\lambda_i^4}{\sqrt{\sum_{i\in I}\lambda_i^4}}\qquad\text{donc}\qquad f(a)=\sum_i a_i^2=\sqrt{\sum_{i\in I}\lambda_i^4}.$$

Résumons : nous avons montré que $f(a)$ est nécessairement égal à $\sqrt{\sum_{i\in I}\lambda_i^4}$ où I est un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$. Réciproquement, il est immédiat que tout élément de cette forme peut-être atteint (définir les a_i comme précédemment si $i\in I$, $a_i=0$ si $i\notin I$). Comme $f(a)$ est maximal, ceci montre que le maximum de $f_{|\Gamma}$ est atteint lorsque $I=\{1,\dots,n\}$, donc égal à $\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i^4\right)^{1/2}$.

c) Soit $\varphi:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\quad (x_1,\dots,x_n)\mapsto\prod_{i=1}^n x_i(1-x_i)$. Il s'agit d'évaluer le maximum de $\varphi_{|\Gamma}$, où $\Gamma=\{(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^{+*})^n \mid \sum_i x_i=1\}$. La fonction φ étant continue sur le compact $\gamma=\{(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_i x_i=1\}$, il existe $a\in\gamma$ tel que $\varphi(a)=\sup_{x\in\gamma}\varphi(x)$. Si l'un des a_i est nul, alors $\varphi(a)=0$, ce qui contredit la maximalité de $\varphi(a)$. On a donc $a\in\Gamma$.

En d'autres termes, si f désigne la restriction de φ à l'ouvert $(\mathbb{R}^{+*})^n$, nous avons montré l'existence de $a\in\Gamma$ tel que $f(a)=\varphi(a)=\sup_{x\in\Gamma}f(x)$.

Soit g la fonction $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1+\cdots+x_n-1$, de sorte que $\Gamma=\{x\in(\mathbb{R}^{+*})^n \mid g(x)=0\}$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $dg_x\neq 0$ pour tout $x\in\Gamma$, on peut donc appliquer le théorème des extremums liés qui entraîne l'existence de $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $df_a=\lambda\,dg_a$. Ceci entraîne, pour tout i,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}\quad\text{c'est-à-dire}\quad \frac{f(a)}{a_i(1-a_i)}\,(1-2a_i)=\lambda. \tag{$*$}$$

Autrement dit, chaque a_i est solution de l'équation $F(X)=\lambda X^2-\lambda X-2f(a)X+f(a)=0$. Comme l'un au moins des a_i est inférieur à $1/n$ (car $\sum_i a_i=1$), donc inférieur à $1/2$, et que $a_i\in\,]0,1[$, la dernière égalité de (*) montre que $\lambda\ge 0$. Si $\lambda>0$, F est une fonction polynôme de degré 2 qui vérifie $F(0)=f(a)>0$, $F(1)=-f(a)<0$ et $\lim_{X\to+\infty}F(X)=+\infty$, donc F a ses deux racines réelles, l'une dans $]0,1[$, l'autre dans $]1,+\infty[$. Si $\lambda=0$, F est affine donc a au plus une solution dans $]0,1[$. Dans tous les cas, F a donc au plus une solution dans $]0,1[$. Comme tous les a_i sont dans $]0,1[$, et que $F(a_i)=0$ pour tout i, on en déduit que les a_i sont égaux. Leur somme est égal à 1, donc $a_i=1/n$ pour tout i.

Finalement, nous avons montré

$$\max_{x\in\Gamma}f(x)=f(a)=f\left(\frac1n,\dots,\frac1n\right)=\prod_{i=1}^n\frac1n\left(1-\frac1n\right)=\frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

Remarque. On aura pu répondre à la question c) en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux deux produits $\prod_i a_i$ et $\prod_i(1-a_i)$.

EXERCICE 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_2 = (\sum_{i,j} m_{i,j}^2)^{1/2}$, où les $m_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice M. Montrer que le groupe des matrices orthogonales directes $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(M) = 1\}$ de norme minimale.

Solution. On remarque déjà que $\|M\|_2^2 = \operatorname{tr}({}^tMM)$. Il s'agit donc de minimiser $f(M) = \operatorname{tr}({}^tMM)$ sous la contrainte $g(M) = 0$, avec $g(M) = \det(M) - 1$.

L'application f est une forme quadratique et g est une forme multilinéaire sur un e.v de dimension finie, donc f et g sont continues. L'ensemble $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc le minimum de f sur $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ est atteint en un point A de $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ (en effet : dans tout e.v de dimension finie E, la distance d de 0 à un fermé F de E est toujours atteinte, puisqu'elle est atteinte sur le compact K des éléments x de F de norme $\|x\| \leq d+1$, et $\|x\| > d+1$ en dehors de K). La différentielle du déterminant a déjà été calculée dans l'exercice 6 page 332, et donne $dg_A(H) = \operatorname{tr}({}^tCH)$ où C est la comatrice de A. Ainsi, dg_A n'est pas nul, et le théorème des extremums liés nous assure donc l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les différentielles de f et g en A vérifient $df_A = \lambda dg_A$.

Compte tenu de l'expression $f(A+H) = \operatorname{tr}({}^tAA) + 2\operatorname{tr}({}^tAH) + \operatorname{tr}({}^tHH) = f(A) + 2\operatorname{tr}({}^tAH) + \|H\|^2$, on voit que $df_A(H) = 2\operatorname{tr}({}^tAH)$. Par ailleurs, on a vu que $dg_A(H) = \operatorname{tr}({}^tAH)$ donc $2\operatorname{tr}({}^tAH) = \lambda\operatorname{tr}({}^tCH)$ pour toute matrice H, ce qui entraîne $2A = \lambda C$ (en remplaçant H par les matrices $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le (i,j)-ième qui vaut 1, on obtient l'égalité des (i,j)-ièmes coordonnées de $2A$ et λC). Comme A est inversible et que $\det(A) = 1$, sa comatrice s'exprime aussi sous la forme $C = {}^tA^{-1}$, donc on a $2\,{}^tAA = \lambda I_n$. En composant par le déterminant, on en déduit $2^n = \lambda^n$ et comme ${}^tAA$ est une matrice positive, on a forcément $\lambda > 0$ donc $\lambda = 2$. Ainsi, ${}^tAA = I_n$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On a donc démontré que le minimum de f sur $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ était forcément atteint en un point A de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Ce minimum est égal à $\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(I_n) = n$. Réciproquement, tous les éléments M de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ vérifient $f(M) = n$, d'où le résultat.

3. Inversion locale, fonctions implicites

3.1. Inversion locale

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on sait que si $f'(x) \neq 0$ pour tout x, alors f admet un inverse global f^{-1} de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $(f^{-1})'[f(x)] = 1/f'(x)$ pour tout x. Notre objectif est de généraliser ce résultat pour des fonctions de plusieurs variables, ou plus généralement pour des fonctions définies sur un espace de Banach. La condition "$f'(x) \neq 0$" devient ici "df_x est inversible", et la fonction f est alors localement inversible autour de x (et non pas globalement comme dans le cas réel).

→ THÉORÈME 1 (INVERSION LOCALE). *Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a soit un isomorphisme bicontinu de E sur F* (i.e. *df_a^{-1} existe, df_a et df_a^{-1} sont continus*). *Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que*

(i) la restriction $f_{|V}$ de f à V est une bijection de V sur W ;

(ii) l'application inverse $g : W \to V$ est continue ;

(iii) g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in V$, $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.

Démonstration. Pour tout $r > 0$, on note B_r la boule ouverte de centre 0 de rayon r, et $\overline{B}_r$ la boule fermée correspondante. La norme utilisée sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ est $|\!|\!| u |\!|\!| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

Quitte à considérer la fonction $x \mapsto df_a^{-1}[f(a+x) - f(a)]$, on peut supposer $a = 0$, $f(a) = 0$ et $df_0 = df_a = \mathrm{Id}_E$ (et donc $E = F$).

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}_r \subset U$ et $|\!|\!| df_x - df_0 |\!|\!| = |\!|\!| df_x - \mathrm{Id}_E |\!|\!| \leq 1/2$ pour tout $x \in B_r$. Considérons maintenant $x \in B_r$. On a $df_x = \mathrm{Id}_E - u$ avec $|\!|\!| u |\!|\!| = |\!|\!| id_E - df_x |\!|\!| \leq 1/2$ donc (voir la proposition 2 page 49) df_x est un isomorphisme bicontinu qui vérifie $df_x^{-1} = \mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^n + \cdots$, et de plus

$$|\!|\!| df_x^{-1} |\!|\!| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\!|\!| u |\!|\!|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2. \qquad (*)$$

(i). Nous voulons montrer que f a un inverse local. Plus précisément, nous allons prouver que pour tout $y \in B_{r/2}$, il existe un unique $x \in B_r$ vérifiant $f(x) = y$.

Fixons donc $y \in B_{r/2}$ et considérons la fonction $h : \ B_r \to E \quad x \mapsto y + x - f(x)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in B_r$, $|\!|\!| dh_x |\!|\!| = |\!|\!| \mathrm{Id}_E - df_x |\!|\!| \leq 1/2$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x, x') \in \overline{B}_r^2, \qquad \|h(x) - h(x')\| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\|. \qquad (**)$$

En particulier, pour tout $x \in \overline{B}_r$, $\|x - f(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leq \|x\|/2$ donc

$$\forall x \in \overline{B}_r, \qquad \|h(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Ainsi, h est une fonction de $\overline{B}_r$ dans B_r, donc dans $\overline{B}_r$. Comme de plus h vérifie (**), on peut appliquer le théorème du point fixe qui entraîne l'existence et l'unicité de $x \in \overline{B}_r$ tel que $h(x) = x$, et comme h est à valeurs dans B_r, $x \in B_r$. On a donc $f(x) = y$.

Résumons. Nous avons montré, pour tout $y \in B_{r/2}$, l'existence et l'unicité de $x \in B_r$ tel que $f(x) = y$. En notant $V = f^{-1}(B_{r/2}) \cap B_r$ (c'est un ouvert qui est un voisinage de 0 car $f(0) = 0$ et f est continue en 0), ceci s'interprète en disant que $f_{|V} : \ V \to W = B_{r/2}$ est une bijection.

(ii). Notons $g : \ W \to V$ l'application inverse. Désignons par h l'application $h : \ x \mapsto x - f(x)$ (c'est l'application h précédente avec $y = 0$), de sorte que $x = h(x) + f(x)$ pour tout x. Pour montrer que g est continue, il suffit de remarquer que

$$\forall x, x' \in B_r, \qquad \|x - x'\| \leq \|h(x) - h(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|$$

donc $\|x - x'\| \leq 2\|f(x) - f(x')\|$. On en déduit

$$\forall y, y' \in W, \qquad \|g(y) - g(y')\| \leq 2\|f(g(y)) - f(g(y'))\| = 2\|y - y'\|, \qquad (***)$$

autrement dit g est lipschitzienne, donc continue.

(iii). Fixons $x \in V$ et posons $y = f(x) \in W$. Soit w tel que $y + w \in W$. On note $v = g(y + w) - g(y)$. On a $\|v\| \leq 2\|w\|$ d'après (***), et

$$\begin{aligned} \Delta(w) &= g(y + w) - g(y) - df_x^{-1}(w) \\ &= (x + v) - x - df_x^{-1}[f(x + v) - f(x)] = -df_x^{-1}[f(x + v) - f(x) - df_x(v)]. \end{aligned}$$

Or $|\!|\!| df_x^{-1} |\!|\!| \leq 2$ d'après (*), donc

$$\|\Delta(w)\| \leq 2\|f(x + v) - f(x) - df_x(v)\| = 2\|v\|\, \varepsilon(v)$$

avec $\lim_{v \to 0} \varepsilon(v) = 0$, donc

$$\|\Delta(w)\| \leq 4\|w\|\, \varepsilon[g(y + w) - g(y)] = 4\|w\|\, \varepsilon'(w).$$

La fonction g étant continue, on a $\lim_{w \to 0} \varepsilon'(w) = 0$, donc $\|\Delta(w)\| = o(\|w\|)$. La fonction g est donc différentiable en y et $dg_y = df_x^{-1}$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, que la fonction g est continue et que $\mathrm{Inv} : \ u \mapsto u^{-1}$ est continue (Inv est même différentiable d'après l'exercice 5 page 331) l'application $y \mapsto dg_y = df_{g(y)}^{-1}$ est continue comme composée d'applications continues, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$. $\square$

Remarque 1. Ce théorème est bien intuitif : sur un voisinage de a, $f(x)$ et $f(a)+df_a(x-a)$ sont “proches”, et df_a étant inversible, il est donc naturel que f soit inversible sur un voisinage de a.

COROLLAIRE 1. *Soient E et F deux espaces de Banach, et U un ouvert de E. Soit $f: U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in U$, df_x soit inversible et bicontinu. Alors f est une application ouverte, c'est-à-dire que pour tout ouvert $\Omega \subset U$, $f(\Omega)$ est un ouvert de F.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert de U et $x \in \Omega$. D'après le théorème d'inversion locale, on peut trouver un voisinage ouvert $V_x \subset \Omega$ et un voisinage ouvert W_x de $f(x)$ tels que $f_{|V_x}$ soit une bijection de V_x sur W_x. En particulier, $f(V_x) = W_x$. On en déduit que

$$f(\Omega) = f\left(\bigcup_{x\in\Omega} V_x\right) = \bigcup_{x\in\Omega} f(V_x) = \bigcup_{x\in\Omega} W_x$$

est un ouvert de F. □

COROLLAIRE 2 (INVERSION GLOBALE). *Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, et $f: U \to F$ une fonction* injective *et de classe $\mathcal{C}^1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout $x \in U$, df_x est inversible et bicontinu ;

(ii) $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f^{-1}: V \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. $(i) \Longrightarrow (ii)$. D'après le corollaire précédent, que $V = f(U)$ est ouvert. La fonction f est donc une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert V. Soit $x \in U$ et $y = f(x) \in V$. D'après le théorème d'inversion locale, on peut trouver un voisinage ouvert A de x et un voisinage ouvert B de $f(x)$ tels que $f_{|A}: A \to B$ soit bijective et $f_{|A}^{-1}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $(f^{-1})_{|B} = (f_{|A})^{-1}$, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $f(x)$ (ici B), et ceci est vrai pour tout $x \in V$, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Notons $g = f^{-1}$. On a $g \circ f = \mathrm{Id}_U$, donc f et g étant de classe $\mathcal{C}^1$, $dg_{f(x)} \circ df_x = \mathrm{Id}_E$ pour tout $x \in U$. De même, la relation $f \circ g = \mathrm{Id}_V$ entraîne $df_x \circ dg_{f(x)} = \mathrm{Id}_F$ pour tout $x \in U$. On en déduit que pour tout $x \in U$, df_x est inversible, d'inverse $dg_{f(x)}$ donc continu. □

Remarque 2. D'après le théorème de Banach (voir exercice 6 page 423), une application linéaire continue bijective de E dans F a son inverse continu. Dans les résultats précédents, on peut donc remplacer l'hypothèse “df_x est inversible et bicontinu” par “df_x est inversible” (df_x est forcément continu par définition d'une différentielle).

Cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 1. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et une application $f: U \to V$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-*difféomorphisme* ($k \geq 1$), si f est bijective, de classe $\mathcal{C}^k$ et si f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$.

Une autre conséquence du théorème d'inversion locale est la suivante.

COROLLAIRE 3. *Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$). S'il existe $a \in U$ tel que df_a soit inversible (en termes équivalents, si le jacobien de f en a n'est pas nul), alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de V sur W. On a alors $d(f_{|V}^{-1})_{f(x)} = df_x^{-1}$ pour tout $x \in V$.*

Démonstration. L'endomorphisme df_a est inversible, donc bicontinu (on est en dimension finie). Le théorème d'inversion locale assure alors l'existence de deux voisinages ouverts V de a et W de $f(a)$ tels que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de V sur W, et donne $d(f_{|V}^{-1})_{f(x)} = df_x^{-1}$ pour tout $x \in V$. Il nous reste à montrer que $g = f_{|V}^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

En notant $J'_{f(x)}$ (resp. J_x) la matrice jacobienne de $g = f^{-1}_{|V}$ en $f(x)$ (resp. de f en x), l'égalité $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$ s'écrit aussi $J'_{f(x)} = J_x^{-1} = (\det J_x)^{-1}\,{}^t\widetilde{J}_x$, où $\widetilde{J}_x$ désigne la comatrice de J_x. Les dérivées partielles du premier ordre de g au point $f(x)$ s'expriment donc comme des fractions rationnelles en les dérivées partielles du premier ordre de f en x. Ainsi, les fonctions $\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. On conclut par récurrence sur k que les $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, donc g est bien de classe $\mathcal{C}^k$. □

De la même manière que le corollaire 2, on peut montrer le corollaire suivant :

Corollaire 4 (Inversion globale). *Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) une application* injective *et de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout $x \in U$, df_x est inversible ;

(ii) $V = f(U)$ est ouvert et f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V.

Remarque 3. Il se peut que df_x soit inversible pour tout $x \in U$ et que f ne soit pas injective (prendre par exemple $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$).

3.2. Fonctions implicites

Nous commençons par énoncer le théorème des fonctions implicites pour une fonction à variable dans un espace de Banach, avant de passer à la dimension finie. Nous aurons besoin pour cela de la définition qui suit (qui généralise la notion de dérivée partielle).

Définition 2. Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des e.v.n et une application $f: \Omega \subset E = E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, où Ω est un ouvert de E. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$. Pour $1 \leq i \leq n$, la fonction $f_i: x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ est définie sur un voisinage de a_i dans E_i. Si elle est différentiable en a_i, on dit que f admet une différentielle partielle d'indice i, et on appelle *différentielle partielle d'indice i* la différentielle df_{i,a_i}, notée $\partial_i f_{(a_1,\ldots,a_n)}$.

Remarque 4.
— Lorsque $E_i = \mathbb{R}$ pour tout i, $E = \mathbb{R}^n$, les différentielles partielles s'expriment en fonction des dérivées partielles par la relation $\partial_i f_a(h) = h\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
— Il résulte de la définition de la différentielle que si f est différentiable en $a = (a_1, \ldots, a_n)$, alors $\partial_i f_{(a_1,\ldots,a_n)}$ existe pour tout i et de plus

$$\forall h \in E_i, \qquad \partial_i f_{(a_1,\ldots,a_n)}(h) = df_a(0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0),$$

ce qui entraîne

$$\forall (h_1, \ldots, h_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \qquad df_a(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_a(h_i).$$

Théorème 2 (Fonctions implicites). *Soient E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert de E et V un ouvert de F. Soit $f: U \times V \to G \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que pour $(a,b) \in U \times V$, $\partial_2 f_{(a,b)}$ est un isomorphisme bicontinu de F sur G. Alors il existe*

— un voisinage ouvert U' de a (avec $U' \subset U$),

— un voisinage ouvert W de $f(a,b)$,

— un voisinage ouvert Ω de (a,b) (avec $\Omega \subset U \times V$),

— une fonction $\varphi: U' \times W \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$,

vérifiant

— pour tout $x \in U'$, pour tout $z \in W$, il existe une unique solution y de $f(x,y) = z$ avec $(x,y) \in \Omega$, et on a $y = \varphi(x,z)$.

En particulier, $f(x, \varphi(x,z)) = z$ pour tout $(x,z) \in U' \times W$.

Démonstration. Introduisons la fonction

$$F: U \times V \to E \times G \quad (x,y) \mapsto (x, f(x,y)).$$

D'après la règle de composition, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$dF_{(a,b)}(h_1,h_2) = (h_1, df_{(a,b)}(h_1,h_2)) = \big(h_1, \partial_1 f_{(a,b)}(h_1) + \partial_2 f_{(a,b)}(h_2)\big).$$

Ainsi, $dF_{(a,b)}$ est un isomorphisme bicontinu de $E \times F$ sur $E \times G$ — son isomorphisme inverse est donné par $(\ell_1,\ell_2) \mapsto \big(\ell_1, (\partial_2 f_{(a,b)})^{-1}(\ell_1 - \partial_1 f_{(a,b)}(\ell_2))\big)$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale, qui entraîne l'existence d'un voisinage ouvert Ω de (a,b), d'un voisinage ouvert Γ de $(a, f(a,b))$ tels que F soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Γ. Quitte à restreindre Γ, on peut même écrire $\Gamma = U' \times W$ où U' est un voisinage ouvert de a et W un voisinage ouvert de $f(a,b)$.

Comme $F(x,y) = (x, f(x,y))$, le difféomorphisme inverse $F^{-1}: \Gamma = U' \times W \to \Omega$ s'écrit sous la forme $F^{-1}(x,z) = (x, \varphi(x,z))$ où φ est de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit que pour tout $(x,z) \in U' \times W = \Gamma$, il existe un unique y tel que $(x,y) \in \Omega$ et $f(x,y) = z$, et de plus $y = \varphi(x,z)$. D'où le théorème. □

Remarque 5. — Le théorème que nous venons d'énoncer peut sembler obscur. Essayons de l'éclaircir : deux points x et z étant donnés, on recherche y tel que $f(x,y) = z$. A condition de prendre y proche de b (exprimé par la condition $(x,y) \in \Omega$), y existe et est unique, et on peut écrire $y = \varphi(x,z)$ où φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

— On peut calculer la différentielle de φ en différentiant la relation $f(x, \varphi(x,z)) = z$. Après calculs, on trouve

$$d\varphi_{(x,z)}(h_1,h_2) = \partial_2 f_{(x,\varphi(x,z))})^{-1}\big(h_1 - \partial_1 f_{(x,\varphi(x,z))}(h_2)\big).$$

Remarque 6. On utilise souvent le théorème des fonctions implicites lorsque z est fixé, menant ainsi au corollaire suivant :

Sous les hypothèses du théorème, si $c = f(a,b)$, alors il existe un voisinage ouvert U' de a, un voisinage ouvert Ω de (a,b) et une fonction $\psi: U' \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

— pour tout $x \in U'$, $y = \psi(x)$ est l'unique solution de $f(x,y) = c$ telle que $(x,y) \in \Omega$ (avec les notations du théorème, on a $\psi(x) = \varphi(x,c)$). On obtient la différentielle de ψ en calculant la différentielle des deux membres de l'égalité $f(x,\psi(x)) = c$, ce qui donne

$$0 = df_{(x,\psi(x))} \circ (\mathrm{Id}_E, d\psi_x) = \partial_1 f_{(x,\psi(x))} + \partial_2 f_{(x,\psi(x))} \circ d\psi_x,$$

donc $d\psi_x = -\partial_2 f^{-1}_{(x,\psi(x))} \circ \partial_1 f_{(x,\psi(x))}$.

Cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$**.**

COROLLAIRE 5. *Soient $p,q \in \mathbb{N}^*$, A un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et une fonction*

$$f = (f_1,\dots,f_q): A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q \quad (x,y) = (x_1,\dots,x_q; y_1,\dots,y_q) \mapsto f(x,y)$$

de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$). Soit $(a,b) \in A$. On appelle jacobien partiel *de f en (a,b) le réel*

$$\frac{D(f_1,\dots,f_q)}{D(y_1,\dots,y_q)}(a,b) = \det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right]_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq q}}.$$

S'il est non nul en (a,b), alors il existe

— *un voisinage ouvert U' de a, un voisinage ouvert W de $f(a,b)$, un voisinage ouvert Ω de (a,b),*

— *une application $\varphi: U' \times W \to \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^k$,*

vérifiant

— *pour tout $x \in U'$, pour tout $z \in W$, $\varphi(x,z)$ est l'unique solution y de $f(x,y) = z$ telle que $(x,y) \in \Omega$.*

En particulier, on a $f(x,\varphi(x,z)) = z$ pour tout $x \in U'$ et pour tout $z \in W$.

Démonstration. Quitte à restreindre A, on peut supposer $A = U \times V$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $(a,b) \in U \times V$. Ici, $\partial_2 f_{(a,b)}$ a pour matrice $\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right]_{1\le i,j\le q}$, et d'après les hypothèses, le déterminant de cette matrice est non nul, autrement dit, $\partial_2 f_{(a,b)}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^q$ (bien sûr bicontinu puisque l'on est en dimension finie). On peut donc appliquer le théorème précédent. Il reste à démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^k$ ... mais on peut reprendre mot pour mot la démonstration du théorème 2 en remplaçant $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$, d'où le résultat. □

Remarque 7. Là encore, on utilise souvent ce résultat lorsque z est fixé, ce qui mène au corollaire suivant :

sous les même hypothèses, on peut trouver un voisinage ouvert U' de a, un voisinage ouvert Ω de $c = f(a,b)$, et une fonction $\psi : U' \to \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que pour tout $x \in U'$, $y = \psi(x)$ est l'unique solution de $f(x,y) = c$ vérifiant $(x,y) \in \Omega$.

En termes intuitifs, ceci s'énonce en disant que q contraintes (de classe $\mathcal{C}^k$) sur q variables mènent localement à une solution de classe $\mathcal{C}^k$ en les autres variables. Ceci permet, sous de bonnes hypothèses, de voir les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ définis implicitement par $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ comme des nappes paramétrées.

On peut obtenir la matrice jacobienne (resp. les dérivées partielles) de ψ en écrivant que la matrice jacobienne (resp. les dérivées partielles) de $f(x,\psi(x))$ est nulle (resp. sont nulles).

On utilise beaucoup le corollaire énoncé dans la remarque précédente lorsque $p = q = 1$ ou lorsque $p = 2$, $q = 1$. Dans ces cas particuliers, ceci s'énonce comme suit.

Corollaire 6. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (où A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, ($k \ge 1$). Soit $(a,b) \in A$ et supposons*

$$f(a,b) = 0 \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$, l'équation $f(x,y) = 0$ possède une et une seule solution $y = \varphi(x)$ dans l'intervalle $]b-\beta, b+\beta[$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a-\alpha, a+\alpha[$, et on a

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,, \qquad \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

Démonstration. L'existence de $\alpha, \beta > 0$ et de φ sont assurés par le corollaire énoncé dans la remarque précédente. Pour calculer φ', on dérive la relation $f(x,\varphi(x)) = 0$ qui entraîne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) = 0,$$

d'où la valeur de $\varphi'(x)$. □

On démontrerait de même le corollaire suivant

Corollaire 7. *Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (où A est un ouvert de $\mathbb{R}^3$) une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \ge 1$). Soit $(a,b,c) \in A$ et supposons*

$$f(a,b,c) = 0 \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0.$$

Alors il existe $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in]a-\alpha, a+\alpha[\times]b-\beta, b+\beta[$, l'équation en z : $f(x,y,z) = 0$ admette une unique solution $z = \varphi(x,y)$ dans $]c-\gamma, c+\gamma[$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}.$$

Preuve du théorème des extremums liés. Munis du théorème des fonctions implicites, nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème des extremums liés énoncé à la page 337. On utilise les mêmes notations que celles de l'énoncé.

Soit $s = n - r$. Identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On écrit les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $(x, y) = (x_1, \ldots, x_s; y_1, \ldots, y_r)$. Écrivons $a = (\alpha, \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R}^s$ et $\beta \in \mathbb{R}^r$.

Commençons par faire la remarque suivante. On a nécessairement $r \leq n$ car les formes linéaires $dg_{i,a}$ forment une famille libre et la dimension du dual de $\mathbb{R}^n$ est n. Par ailleurs, si $r = n$, le théorème est évident car les $dg_{i,a}$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$. On peut donc supposer $r \leq n - 1$, c'est-à-dire $s \geq 1$.

Les formes linéaires $(dg_{i,a})_{1\leq i\leq r}$ forment une famille libre, la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

est donc de rang r. On peut donc en extraire une sous-matrice $r \times r$ inversible. Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que

$$\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq r} = \frac{D(g_1, \ldots, g_r)}{D(y_1, \ldots, y_r)}(a) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites (plus précisément la remarque 7), on peut donc trouver un voisinage ouvert U' de α dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert Ω de $a = (\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) : U' \to \mathbb{R}^r$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que (en notant $g = (g_1, \ldots, g_r)$)

$$(g(x, y) = 0 \quad \text{avec } x \in U' \text{ et } (x, y) \in \Omega) \iff (y = \varphi(x)).$$

En d'autres termes, sur un voisinage de a, les éléments de $\Gamma = \{z \mid g(z) = 0\}$ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. Posons $h(x) = f(x, \varphi(x))$. La fonction h admet donc un extremum local en $x = \alpha$ (car $(\alpha, \varphi(\alpha)) = a$ et $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$), ce qui entraîne

$$\forall i, 1 \leq i \leq s, \qquad 0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)\,\frac{\partial f}{\partial y_j}(a). \qquad (*).$$

Par ailleurs, en écrivant les dérivées partielles par rapport aux x_i de $g(x, \varphi(x)) = 0$, on tire

$$\forall k, 1 \leq k \leq r, \forall i, 1 \leq i \leq s, \qquad 0 = \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)\,\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a). \qquad (**)$$

Autrement dit, les s premiers vecteurs colonnes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

s'expriment, d'après (*) et (**), linéairement en fonction de ses r derniers vecteurs colonnes. Donc $\operatorname{rg} M \leq r$. Or le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes de M (car $\operatorname{rg} {}^tM = \operatorname{rg} M$), donc les $r + 1$ vecteurs lignes de M forment une famille liée, ce qui entraîne l'existence de réels $\mu_0, \ldots, \mu_r$ non tous nuls tels que $\mu_0\, df_a + \mu_1\, dg_{1,a} + \cdots + \mu_r\, dg_{r,a} = 0$. Comme la famille $(dg_{i,a})_{1\leq i\leq r}$ est libre, on a $\mu_0 \neq 0$, et en posant $\lambda_i = -\mu_i/\mu_0$ pour $1 \leq i \leq r$, on en déduit $df_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, dg_{i,a}$. D'où le théorème.

3.3. Exercices

EXERCICE 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$
a) Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme local.
b) L'application f est-elle un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme global ?

Solution. **a)** La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le jacobien de f en (a,b) est égal à

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ -2b & 2a \end{vmatrix} = 4(a^2+b^2) \neq 0.$$

Donc, d'après le théorème d'inversion locale (corollaire 3), il existe un ouvert U contenant (a,b), un ouvert V contenant $f(a,b)$, tel que la restriction de f à U soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur V. Autrement dit, f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local en (a,b).

b) On remarque que $f(-x,-y) = f(x,y)$, la fonction f n'est donc pas injective, et donc ce n'est pas un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme global.

En fait, en identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, f s'écrit $f(z) = z^2$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. On en conclut que les ensembles $U_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\cos\alpha + y\sin\alpha > 0\}$ sont des ouverts maximaux sur lesquels f est injective. Avec le corollaire 4, on en conclut que f un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de U_α sur $f(U_\alpha) = \mathbb{R}^2 \setminus \{-r(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha),\ r \geq 0\}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque).

Exercice 2. Soit l'application $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \sin y + xy^4 + x^2$.
a) Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi:\ U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que pour tout $x \in U$, $\varphi(x)$ est l'unique solution $y \in V$ de l'équation $f(x,y) = 0$.
b) Donner un développement limité à l'ordre 10 de φ au voisinage de 0.

Solution. **a)** La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle vérifie $f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. On en déduit le résultat en appliquant le théorème des fonctions implicites.

b) On a bien sûr $\varphi(0) = 0$ puisque $f(0,0) = 0$. On pourrait calculer le développement limité de φ en utilisant la relation exprimant φ', puis en la dérivant successivement. Cette technique est cependant fastidieuse puisque l'on veut aller jusqu'à l'ordre 10 !

Nous utilisons une autre technique, classique (et à retenir). On a vu $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi(x) = O(x)$ lorsque $x \to 0$ (puisque φ est dérivable en 0). Maintenant, à partir de la relation $f(x,\varphi(x)) = 0$, l'idée est d'exprimer $\varphi(x)$ en fonction de termes ne faisant intervenir $\varphi(x)$ qu'avec un ordre supérieur. Ici, on a

$$\varphi(x) = (\varphi(x) - \sin\varphi(x)) - x\varphi(x)^4 - x^2 = O(\varphi(x)^3) - x^2 = -x^2 + O(x^3),$$

ce qui nous donne déjà le développement limité à l'ordre 2. Partant maintenant de l'information $\varphi(x) = -x^2 + O(x^3)$, on itère le procédé, ce qui donne

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (\varphi(x) - \sin\varphi(x)) - x\varphi(x)^4 - x^2 = \frac{\varphi(x)^3}{6} + O(\varphi(x)^4) - x^2 \\ &= \frac{(-x^2+O(x^3))^3}{6} + O(x^8) - x^2 = -x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^7).\end{aligned}$$

On obtient le résultat demandé en réinjectant encore une fois,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (\varphi(x) - \sin\varphi(x)) - x\varphi(x)^4 - x^2 \\ &= \frac{\varphi(x)^3}{6} - \frac{\varphi(x)^5}{120} + O(\varphi(x)^7) - x\varphi(x)^4 - x^2 \\ &= -\frac{x^6}{6}\left(1 + \frac{x^4}{6} + O(x^5)\right)^3 + \frac{x^{10}}{120}\left(1+O(x^4)\right)^5 + O(x^{14}) - x^9\left(1+O(x^4)\right)^4 - x^2 \\ &= -x^2 - \frac{x^6}{6} - x^9 - \frac{3x^{10}}{40} + O(x^{11}).\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que l'application $\varphi = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est k-contractante (avec $0 < k < 1$). Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Solution. En vertu du corollaire 4 du théorème d'inversion locale, il suffit de montrer que

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est inversible ;

(ii) f est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

(i). Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \leq k\,\|h\|$, et on en déduit facilement $\|d\varphi_x(h)\| \leq k\,\|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. En d'autres termes, $|\!|\!| d\varphi_x |\!|\!| \leq k < 1$, et donc $df_x = \mathrm{Id} + d\varphi_x$ est inversible d'après la proposition 2 page 49. On peut retrouver ce résultat sans invoquer cette dernière proposition en remarquant que si $df_x(h) = 0$, alors $h + d\varphi_x(h) = 0$ donc $\|d\varphi_x(h)\| = \|h\|$ et comme $\|d\varphi_x(h)\| \leq k\|h\|$ avec $k < 1$ ceci entraîne forcément $h = 0$. Ainsi df_x est un endomorphisme injectif et comme on est en dimension finie, df_x est donc inversible.

(ii). Il nous reste à montrer que f est une bijection. Fixons $y \in \mathbb{R}^n$. On a $f(x) = y$ si et seulement si x est point fixe de l'application $\psi_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad x \mapsto x - f(x) + y = y - \varphi(x)$. Or

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\psi_y(x) - \psi_y(x')\| = \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq k\|x - x'\|,$$

donc ψ_y est k-contractante. D'après le théorème du point fixe, on en déduit qu'il existe un unique point x de $\mathbb{R}^n$ tel que $\psi_y(x) = x$, autrement dit il existe un unique point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien (de dimension finie). On note $\langle\, ,\rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\,.\,\|$ la norme euclidienne associée. Soit $f : E \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in E$, df_x est une isométrie de E (*i. e.* $\|df_x(h)\| = \|h\|$ pour tout $h \in E$).

a) Pour tout $a \in E$, montrer l'existence d'un ouvert U_a contenant a tel que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in U_a^2$.

b) Montrer que

$$\forall (x, y) \in U_a^2, \forall (h, \ell) \in E^2, \qquad \langle df_x(h), df_y(\ell)\rangle = \langle h, \ell\rangle.$$

En déduire $df_x = df_y$ pour tout $(x, y) \in U_a^2$.

c) Montrer que f est une isométrie affine de E sur E.

Solution. **a)** Normons $\mathcal{L}(E)$ avec la norme $|\!|\!| u |\!|\!| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $|\!|\!| df_x |\!|\!| = 1$ pour tout $x \in E$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|. \tag{$*$}$$

Ceci étant, soit $a \in E$. Comme df_a est une isométrie, df_a est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert V_a contenant a tel que $f_{|V_a}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V_a sur $W_a = f(V_a)$. Notons $g : W_a \to V_a$ le difféomorphisme inverse. Pour tout $y = f(x) \in W_a$, $dg_y = (df_x)^{-1}$ est une isométrie, donc $|\!|\!| dg_y |\!|\!| = 1$. Quitte à restreindre V_a en un ouvert plus petit U_a, on peut supposer que $W_a = f(U_a)$ est convexe (prendre par exemple $U_a = g(B)$ où B est une boule ouverte centrée en $f(a)$ incluse dans $f(V_a)$, de sorte que $W_a = f(g(B)) = B$). On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à g sur W_a, ce qui entraîne $\|g(x) - g(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in W_a^2$. On en conclut

$$\forall (x, y) \in U_a^2, \qquad \|x - y\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \leq \|f(x) - f(y)\|.$$

Avec (*), on en déduit $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in U_a^2$.

b) Le résultat de la question précédente s'écrit aussi

$$\forall (x, y) \in U_a^2, \qquad \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle = \langle x - y, x - y\rangle.$$

En différentiant cette égalité par rapport à x selon le vecteur $h \in E$, on obtient

$$\langle df_x(h), f(x) - f(y)\rangle + \langle f(x) - f(y), df_x(h)\rangle = \langle h, x - y\rangle + \langle x - y, h\rangle,$$

et par symétrie du produit scalaire, ceci s'écrit aussi $\langle df_x(h), f(x)-f(y)\rangle = \langle h, x-y\rangle$. Par différentiation de cette dernière égalité par rapport à y selon un vecteur $\ell \in E$, on en déduit $-\langle df_x(h), df_y(\ell)\rangle = -\langle h, \ell\rangle$. Autrement dit nous venons de montrer le premier résultat voulu.

Donnons nous maintenant $x, y \in U_a$ et $h \in E$. On a

$$\|df_x(h) - df_y(h)\|^2 = \|df_x(h)\|^2 - 2\langle df_x(h), df_y(h)\rangle + \|df_y(h)\|^2 = \|h\|^2 - 2\langle h, h\rangle + \|h\|^2 = 0,$$

donc $df_x(h) = df_y(h)$. Ceci étant vrai pour tout $h \in E$, on a donc $df_x = df_y$.

c) D'après le résultat de la question précédente, l'ensemble $\Gamma = \{x \in E \mid df_x = df_0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc Γ est aussi un fermé de $\mathbb{R}^n$. En résumé, Γ est un ouvert et un fermé de E. Or E est connexe (car convexe), donc $\Gamma = E$. En posant $u = df_0$, on a donc $df_x = u$ pour tout $x \in E$. Ainsi la fonction $x \mapsto f(x) - u(x)$ a sa différentielle nulle sur E tout entier, donc c'est une fonction constante. Si on note $\alpha \in E$ sa valeur, on a $f(x) = u(x) + \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $u = df_0$ est une isométrie, on en déduit que f est une isométrie affine.

EXERCICE 5 (FONCTIONS STRICTEMENT MONOTONES). Soit E un espace euclidien (de dimension finie). On note $\langle\, ,\rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\,.\,\|$ la norme euclidienne associée.

Une application $f :\ E \to E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq k\,\|x-y\|^2. \tag{$*$}$$

a) Soit $f :\ E \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f vérifie (*) si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall h \in E, \qquad \langle df_x(h), h\rangle \geq k\,\|h\|^2.$$

b) Si $f :\ E \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si elle est strictement monotone, montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

Solution. **a)** *Condition nécessaire.* Supposons que f vérifie (*). Alors pour tout $x \in E$, pour tout $h \in E$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\langle f(x+th) - f(x), th\rangle \geq kt^2\,\|h\|^2 \qquad \text{ou encore} \qquad \left\langle \frac{f(x+th)-f(x)}{t}, h \right\rangle \geq k\,\|h\|^2,$$

et en faisant tendre t vers 0 on en déduit $\langle df_x(h), h\rangle \geq k\,\|h\|^2$.
Condition suffisante. Supposons $\langle df_x(h), h\rangle \geq k\,\|h\|^2$ pour tout $x, h \in E$. Soient $x, h \in E$. Considérons l'application $\varphi :\ [0,1] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \langle f(x+th), h\rangle$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \langle df_{x+th}(h), h\rangle \geq k\,\|h\|^2$$

donc $\varphi(1) - \varphi(0) \geq k\,\|h\|^2$, c'est-à-dire $\langle f(x+h) - f(x), h\rangle \geq k\,\|h\|^2$, d'où (*).

b) En vertu du corollaire 4 du théorème d'inversion locale, il suffit de montrer

(i) pour tout $x \in E$, df_x est inversible ;

(ii) f est une bijection de E sur E.

(i). Soit $x \in E$. On a $\langle df_x(h), h\rangle \geq k\,\|h\|^2$ pour tout $h \in E$, donc $df_x(h) \neq 0$ pour tout $h \neq 0$. Ainsi, df_x est injective donc bijective (c'est un endomorphisme en dimension finie), d'où (i).

(ii). La relation (*) entraîne l'injectivité de f. Montrons maintenant que f est surjective. Comme E est connexe, on aura prouvé $f(E) = E$ si on montre que $f(E)$ est ouvert et fermé dans E. On sait déjà que $f(E)$ est ouvert d'après (i) (voir le corollaire 1). Pour montrer que $f(E)$ est fermé, nous allons montrer que $f(E)$ est complet. Commençons par remarquer que d'après (*) et d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall x, y \in E, \quad k\,\|x-y\|^2 \leq \|x-y\|\,\|f(x)-f(y)\| \qquad \text{donc} \qquad \|x-y\| \leq \frac{1}{k}\|f(x)-f(y)\|. \tag{$**$}$$

Considérons maintenant une suite de Cauchy $(f(x_n))$ de $f(E)$. D'après (**), on a $\|x_p - x_q\| \leq \|f(x_p) - f(x_q)\|/k$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, donc (x_n) est une suite de Cauchy dans E, donc converge. Si on note x sa limite, on a alors $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$. Ainsi, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x) \in f(E)$, donc $f(E)$ est complet, d'où le résultat.

EXERCICE 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $U_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 < \cdots < \lambda_n\}$, et on note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'e.v des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n-1$. Montrer que l'application

$$\varphi : \ U_n \to \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) - X^n$$

est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme global de l'ouvert U_n sur $\varphi(U_n)$.

Solution. Il est clair que φ est injective, c'est donc une bijection de U_n sur $\varphi(U_n)$.

En vertu du corollaire 4 du théorème d'inversion locale, il suffit maintenant de prouver que la différentielle de φ est inversible en tout point λ de U_n, ce qui équivaut à montrer que les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = d\varphi_\lambda(e_i)$ sont linéairement indépendants.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in U_n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = -\prod_{j \neq i}(X - \lambda_j)$. Si maintenant on suppose $\sum_i \mu_i \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \prod_{j \neq i}(X - \lambda_j) = 0. \tag{$*$}$$

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. En donnant à l'indéterminée X la valeur λ_k dans (*), on obtient $\mu_k \prod_{j \neq k}(\lambda_k - \lambda_j) = 0$, donc $\mu_k = 0$ car les λ_i sont distincts. Ceci étant vrai pour tout k, on en déduit que les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}(\lambda)$ sont linéairement indépendants, et ceci pour tout $\lambda \in U_n$, d'où le résultat.

4. Intégrales multiples, intégrales curvilignes

Alors que pour l'intégrale simple nous nous étions limités aux intégrales de fonctions continues par morceaux (chapitre 3), cette restriction est un handicap majeur pour les intégrales multiples, notamment à cause des domaines d'intégration qui ne sont pas forcément des pavés. Ce problème peut être (inélégamment) contourné pour les intégrales doubles, via le concept de parties simples de $\mathbb{R}^2$, mais ce dernier se prête mal à une généralisation raisonnable pour les intégrales de fonctions de n variables (avec $n \geq 3$).

Ne souhaitant pas nous restreindre aux intégrales doubles, nous avons pris le parti de présenter la théorie de l'intégrale multiple de Riemann (le cadre de l'intégrale de Lebesgue allant clairement au delà du programme des classes préparatoires), en particulier pour définir les domaines *mesurables* (au sens de Riemann), puis nous nous limiterons aux intégrales de fonctions continues sur les domaines mesurables compacts. Le cas particulier de domaines simples dans $\mathbb{R}^2$ est discuté au fil des remarques de cette section. Nous ne donnerons aucune preuve des résultats présentés, cependant nous nous attacherons à donner précisément la définition de l'intégrale multiple de Riemann.

4.1. Définition de l'intégrale multiple de Riemann

DÉFINITION 1. On appelle *pavé* de $\mathbb{R}^n$ tout ensemble du type $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ où pour tout k, I_k est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. On appelle *mesure* n-dimensionnelle de P le réel $\operatorname{mes}(P) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ où pour tout k, λ_k est la longueur de I_k (si $\overline{I_k} = [a, b]$, $\lambda_k = b - a$).

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$, on notera $\chi_A : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de A, définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $= 0$ sinon.

DÉFINITION 2. Une fonction $f : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite en escalier si on peut l'écrire comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de pavés de $\mathbb{R}^n$. Une telle famille de pavés est dite bien adaptée à f. Si $f = \sum_i \lambda_i \chi_{P_i}$ où P_i est un pavé pour tout i, le réel $I(f) = \sum_i \lambda_i \operatorname{mes}(P_i)$ ne dépend pas de la famille de pavés (P_i) bien adaptée à φ et on l'appelle *intégrale* de f.

DÉFINITION 3. Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, à support compact (*i. e.* f est nulle en dehors d'un compact). Soient les deux ensembles

$$E^+ = \{I(v),\ f \leq v \text{ et } v \text{ est en escalier}\} \quad \text{et} \quad E^- = \{I(u),\ u \leq f \text{ et } u \text{ est en escalier}\}.$$

Les ensembles E^+ et E^- sont non vides car f est bornée, donc $I^+ = \inf E^+$ et $I^- = \sup E^-$ existent. On a toujours $I^- \leq I^+$. Si $I^- = I^+$, f est dite *Riemann-intégrable*, et le réel $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = I^- = I^+$ est appelé *intégrale* de f sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1. Lorsque $n = 1$ et que f est continue par morceaux, cette dernière définition de l'intégrale est cohérente avec celle d'une fonction à variable réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, elle est également cohérente avec l'intégrale d'une fonction en escalier définie plus haut.

L'intégrale de f est parfois notée $\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$ (avec n signes d'intégration).

Ensembles mesurables, intégrale sur un ensemble mesurable.

DÉFINITION 4. Une partie bornée A de $\mathbb{R}^n$ est dite *mesurable* si χ_A est Riemann-intégrable. On appelle alors *mesure* de A le réel $\operatorname{mes}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\,dx$.

Remarque 2. Si $n = 2$, A est dite *quarrable*, et $\operatorname{mes}(A)$ est appelé l'*aire* de A. Si $n = 3$, A est dite *cubable*, et $\operatorname{mes}(A)$ est appelé le *volume* de A.

Exemple 1. — Tout pavé de $\mathbb{R}^n$ est mesurable.

— Une partie bornée A de $\mathbb{R}^2$ est dite *élémentaire* si elle admet les deux définitions suivantes

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \psi_1(x) \leq x \leq \psi_2(x)\} \end{aligned}$$

où $[a, b]$ et $[c, d]$ sont deux segments de $\mathbb{R}$ et φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions continues, vérifiant $\varphi_1 < \varphi_2$ sur $]a, b[$ et $\psi_1 < \psi_2$ sur $]c, d[$. Une partie de $\mathbb{R}^2$ est dite *simple* si elle est la réunion finie de parties élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints. Toute partie élémentaire, toute partie simple de $\mathbb{R}^2$, est mesurable.

— Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite négligeable (au sens de Riemann) si A est mesurable et si $\operatorname{mes}(A) = 0$. On peut montrer qu'une partie bornée A de $\mathbb{R}^n$ est mesurable si et seulement si sa frontière $\operatorname{Fr}(A)$ est négligeable. On peut en déduire le résultat suivant :

> Si φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U \subset \mathbb{R}^n$ sur $\varphi(U)$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$), si A est mesurable et si $\overline{A} \subset U$, alors $\varphi(A)$ est mesurable.

Par exemple, tout disque du plan, toute sphère de $\mathbb{R}^n$ est mesurable.

Nous nous limiterons désormais aux cas des fonctions continues sur les ensembles mesurables compacts.

DÉFINITION 5. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable compact et $f: A \to \mathbb{R}$ une application continue. Le prolongement $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{R}^n$ (obtenu en posant $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in A$, $= 0$ sinon) est Riemann-intégrable, et on appelle intégrale de f le réel $\int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,dx$.

Propriétés élémentaires. Les intégrales multiples possèdent les mêmes propriétés que les intégrales simples. Nous désignons par A un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^n$.

(i) *Linéarité.* L'ensemble $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v et l'application $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\quad f \mapsto \int_A f(x)\,dx$ est linéaire.

(ii) *Positivité.* Si $f \geq 0$, alors $\int_A f(x)\,dx \geq 0$; si $f \leq g$, $\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx$.

(iii) On a $|\int_A f(x)\,dx| \leq \int_A |f(x)|\,dx$.

(iv) *Relation de Chasles.* Si A et B sont des compacts mesurables, $A\cup B$ et $A\cap B$ sont des compacts mesurables. Si de plus $\operatorname{mes}(A\cap B)=0$, toute fonction f continue sur $A\cup B$ vérifie $\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$.

Remarque 3. On peut également définir l'intégrale multiple d'une fonction continue f à valeurs dans un e.v E de dimension finie. Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, on écrit $f=\sum f_i e_i$ où les f_i sont à valeurs réelles, et l'intégrale multiple de f est $\int_A f = \sum_i (\int_A f_i) e_i$. Cette définition est indépendante de la base de E choisie. En particulier, si $f=f_1+if_2$ est à valeurs complexes, alors $\int_A f = \int_A f_1 + i(\int_A f_2)$.

4.2. Théorèmes de Fubini

Nous n'énoncerons ce théorème que dans certains cas particuliers qui nous suffiront.

THÉORÈME 1. *Soient P et Q deux pavés compacts de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement. Soit $f:\ P\times Q\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,dx\,dy = \int_P \left(\int_Q f(x,y)\,dy\right)dx = \int_Q \left(\int_P f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Remarque 4. Par applications successives de ce théorème, on obtient facilement, si $P=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$,

$$\int_P f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2}\left[\cdots\left[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n\right]\cdots\right]dx_2\right]dx_1,$$

(égalité qui exprime les intégrales multiples en fonctions d'intégrales simples, ce qui permet de les calculer dans la pratique). Ce dernier terme est parfois noté

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n.$$

L'ordre d'intégration (sur les x_i) est indifférent, et dans la pratique, on s'arrange pour intégrer dans un ordre qui facile les intégrations.

Citons un corollaire important de ce théorème :

COROLLAIRE 1. *Soient P et Q deux pavés compacts de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, et soient $g:\ P\to\mathbb{R}$ et $h:\ Q\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors*

$$\int_{P\times Q} g(x)h(y)\,dx\,dy = \left(\int_P g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_Q h(y)\,dy\right).$$

Le théorème 1 ne permet de calculer des intégrales multiples que sur des pavés. Pour calculer des intégrales multiples sur d'autres ensembles, on utilise les deux théorèmes qui suivent.

Sommation par piles, sommation par tranches.

THÉORÈME 2 (SOMMATION PAR PILES). *Soit B un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^{n-1}$, et deux applications continues $\varphi_1,\varphi_2:\ B\to\mathbb{R}$ telles que $\varphi_1\le\varphi_2$. Alors l'ensemble*

$$A=\{(x,x_n)\in B\times\mathbb{R}\mid \varphi_1(x)\le x_n\le\varphi_2(x)\}$$

est mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et pour toute fonction continue $f:\ A\to\mathbb{R}$, on a

$$\iint_A f(x,x_n)\,dx\,dx_n = \int_B\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,x_n)\,dx_n\right]dx.$$

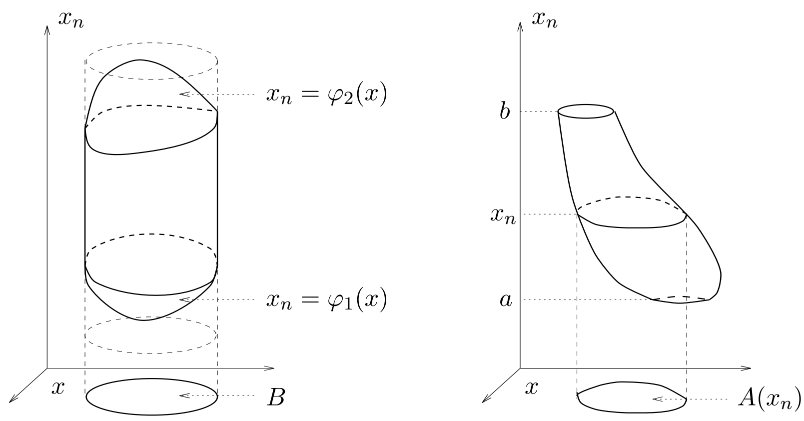


FIGURE 1. à gauche, illustration d'une sommation par piles ; à droite, d'une sommation par tranches.

THÉORÈME 3 (SOMMATION PAR TRANCHES). *Soit A un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $(x, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ vérifiant $(x, x_n) \in A$, on ait $a \leq x_n \leq b$. Si pour tout $x_n \in [a, b]$, l'ensemble $A(x_n) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, x_n) \in A\}$ est mesurable dans $\mathbb{R}^{n-1}$, alors pour toute fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$, on a*

$$\iint_A f(x, x_n)\, dx\, dx_n = \int_a^b \left[\int_{A(x_n)} f(x, x_n)\, dx\right] dx_n.$$

Remarque 5. — Le résultat de ces deux théorèmes reste évidemment vrai si l'on remplace la variable x_n par l'une des autres variables x_i.

— Ainsi, on dispose de deux méthodes pour réduire le calcul d'intégrales multiples. Selon les cas, l'une peut s'avérer plus pratique que l'autre. Si $n = 2$, ces résultats sont équivalents, et peuvent s'exprimer comme suit.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$K = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

où φ_1 et φ_2 sont des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors K est mesurable, et pour toute fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$, on a

$$\iint_K f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

4.3. Théorème du changement de variable

Rappel. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : U \to \mathbb{R}^n \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x \in U$, le jacobien de φ en x est

$$J(\varphi)(x) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \text{également noté} \quad \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}.$$

→ THÉORÈME 4 (DU CHANGEMENT DE VARIABLES). *Soient U un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^n$, et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathring{U}$ sur $\varphi(\mathring{U})$, tel que φ et son jacobien $J(\varphi)$ se* *prolongent continûment sur U. Alors $V = \varphi(U)$ est un compact mesurable et pour toute fonction continue $f : V \to \mathbb{R}$, on a*

$$\int_V f(v)\,dv = \int_U f\big(\varphi(u)\big)\,|J(\varphi)(u)|\,du.$$

Remarque 6. Le résultat du théorème s'écrit aussi sous la forme

$$\int \cdots \int_V f(v_1, \ldots, v_n)\,dv_1 \cdots dv_n = \int \cdots \int_U F(u_1, \ldots, u_n) \left|\frac{D(v_1, \ldots, v_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)}\right| du_1 \cdots du_n,$$

où $F(u_1, \ldots, u_n)$ désigne $f[\varphi(u_1, \ldots, u_n)]$ et où $\frac{D(v_1,\ldots,v_n)}{D(u_1,\ldots,u_n)}$ désigne $\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}{D(u_1,\ldots,u_n)}$.

Voyons maintenant les applications les plus courantes du théorème du changement de variable.

Passage en coordonnées polaires dans le plan. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, où on désigne par $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ les coordonnées polaires et $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ les coordonnées cartésiennes. Si un domaine compact quarrable de $\mathbb{R}^2$ est représenté par D en coordonnées cartésiennes et par Δ en coordonnées polaires, toute fonction continue f sur D vérifie

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

En effet, il suffit d'appliquer le théorème du changement de variable et de remarquer que

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Exemple 2. Comme conséquence de ce résultat, nous allons donner une méthode classique pour calculer l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Pour tout $a > 0$, on note

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}, \quad C_a = [-a, a]^2 \quad \text{et} \quad I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

En passant en coordonnées polaires puis en appliquant le corollaire du théorème de Fubini, on a

$$\forall a > 0, \qquad I_a = \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \left(\int_{[0,a]} e^{-r^2} r\,dr\right)\left(\int_{[0,2\pi]} d\theta\right) = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

En notant $J_a = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, on a (toujours d'après le théorème de Fubini),

$$J_a = \left(\int_{[-a,a]} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{[-a,a]} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Or $D_a \subset C_a \subset D_{\sqrt{2}\,a}$, et la fonction intégrée étant positive, on en déduit $I_a \le J_a \le J_{\sqrt{2}\,a}$, ce qui s'écrit encore

$$\forall a > 0, \qquad \pi(1 - e^{-a^2}) \le \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \pi(1 - e^{-2a^2}).$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on en déduit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Passage en coordonnées cylindriques dans l'espace. Nous nous plaçons dans l'espace $\mathbb{R}^3$, dans lequel on écrit $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ avec $r \ge 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Avec les notations précédentes, on a

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Passage en coordonnées sphériques dans l'espace. On écrit

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\,\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, \qquad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Après calcul du jacobien, on obtient

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)\,r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

4.4. Fonctions intégrables

Comme pour les intégrales simples, on peut définir les fonctions de plusieurs variables intégrables. Nous nous limiterons au cas de fonctions définies sur un produit d'intervalles de $\mathbb{R}^n$. Dans toute cette sous-partie, $I_1, \ldots, I_n$ désignent des intervalles quelconques de $\mathbb{R}$ (non réduits à un singleton) et A la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par $A = I_1 \times \cdots \times I_n$

DÉFINITION 6. Soit $f:\ A = I_1 \times \cdots \times I_n \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On dit que f est intégrable s'il existe $M > 0$ tel que pour tout pavé compact $P \subset A$, on a $\int_P f \leq M$. On appelle alors intégrale de f le nombre réel défini par

$$\int_A f = \sup_{P \subset A} \int_P f.$$

DÉFINITION 7. Une fonction continue $f:\ A \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si $|f|$ est intégrable. Dans ce cas, pour toute suite croissante de pavés compacts (P_k) inclus dans A telle que $\cup_k P_k = A$, la limite de $(\int_{P_k} f)$ existe et ne dépend pas du choix de la suite (P_k). Cette limite s'appelle intégrale de f et est noté $\int_A f$.

Remarque 7. Une moyen équivalent de définir l'intégrale d'une fonction continue réelle intégrable est d'écrire $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$ où $f^+ = \sup\{f, 0\}$ et $f^- = \sup\{-f, 0\}$.

– L'intégrale multiple des fonctions intégrables sur A satisfait les propriétés élémentaires de l'intégrale. L'ensemble $\mathcal{L}^1(A, \mathbb{R})$ des fonctions continues intégrables sur A est un e.v, et l'application $\mathcal{L}^1(A, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto \int_A f$ est linéaire. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(A, \mathbb{R})$ et si $f \leq g$, alors $\int_A f \leq \int_A g$. Enfin, si $f \in \mathcal{L}^1(A, \mathbb{R})$ alors $|\int_A f| \leq \int_A |f|$. Par ailleurs, si g est intégrable et si $|f| \leq g$, alors f est intégrable.

Exprimons, dans le cas particulier des intégrales doubles, la généralisation du théorème de Fubini des fonctions intégrables.

THÉORÈME 5. *Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f:\ I \times I' \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I \times I'$. Si pour tout $x \in I$ l'application $f(x,.)$ est intégrable et si l'application $g:\ x \mapsto \int_{I'} f(x,.)$ est continue par morceaux et intégrable, alors f est intégrable et on a $\iint_{I \times I'} f = \int_I g$. De même, si pour tout $y \in I'$ la fonction $f(.,y)$ est intégrable et si $h:\ y \mapsto \int_I f(.y)$ est continue par morceaux et intégrable, alors f est intégrable et $\iint_{I \times I'} f = \int_{I'} h$. En particulier on a $\int_I(\int_{I'} f(.,y)) = \int_{I'}(\int_I f(x,.))$.*

4.5. Intégrales curvilignes

Rappels sur les arcs paramétrés.

DÉFINITION 8. On appelle *arc paramétré* de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ tout couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:\ I \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. L'ensemble $f(I) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé *support* de l'arc. Un arc paramétré continu est aussi appelé *chemin*.

DÉFINITION 9. On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) de classe $\mathcal{C}^k$ sont $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme θ de J sur I tel que $g = f \circ \theta$.

On définit ainsi une relation d'équivalence sur les arcs paramétrés. Chaque classe est appelée *arc géométrique* de classe $\mathcal{C}^k$, tout représentant de classe un *paramétrage admissible* de l'arc géométrique. Deux paramétrages admissibles d'un même arc géométriques ont même support, on parle donc de *support* d'un arc géométrique.

Remarque 8. L'application θ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

DÉFINITION 10. Deux paramétrages admissibles (I, f) et (J, g) d'un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$ sont dit *de même sens* s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme *croissant* de J sur I tel que $g = f \circ \theta$.

On définit ainsi une relation d'équivalence sur un arc géométrique (dont il y a au plus deux classes d'après la remarque précédente) ; les classes sont appelées *arcs géométriques orientés* de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Formes différentielles de degré 1.

DÉFINITION 11. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *forme différentielle de degré 1* sur Ω toute application α de Ω sur le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$.

On peut écrire la forme différentielle α sous la forme $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)\, dx_i$ pour $x \in \Omega$ (où les a_i sont à valeurs réelles et (dx_i) est la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

S'il existe une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\alpha = d\varphi$, la forme différentielle α de degré 1 est dite *exacte*.

Si α est de classe $\mathcal{C}^1$ (*i. e.* si les a_i sont $\mathcal{C}^1$), α est dite *fermée* si pour tout (i, j), $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$.

Remarque 9. Si une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ est exacte, elle est fermée (conséquence du théorème de Schwarz). La réciproque est vraie lorsque Ω est un ouvert étoilé mais est fausse dans le cas général (voir un contre exemple à l'exemple 3).

Définition d'une intégrale curviligne. On se donne une forme différentielle $\alpha = \sum_i a_i(x)\, dx_i$ de degré 1, définie et continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 12. Soit $\gamma = ([a, b], f)$ (avec $f = (f_1, \dots, f_n)$) un arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont le support est contenu dans Ω. On appelle intégrale curviligne de α le long de γ le réel

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha[f(t)]\, f'(t)\, dt = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n a_i(f(t))\, f_i'(t) \right] dt.$$

Remarque 10. Si $\gamma = ([a, b], f)$ est un chemin continu de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, c'est-à-dire s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que $f_{|[t_{i-1}, t_i]}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on définit de même l'intégrale curviligne de α le long de γ par l'expression

$$\int_\gamma \alpha = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{([t_i, t_{i+1}], f)} \alpha.$$

DÉFINITION 13. Soit Γ^+ un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^1$, orienté, à support dans Ω. Les intégrales curvilignes de α le long des paramétrages admissibles de Γ^+ sont identiques, et leur valeur commune est appelé *intégrale curviligne* de α le long de Γ^+, et notée $\int_{\Gamma^+} \alpha$.

PROPOSITION 1. *Soit $\gamma = ([a, b], f)$ un arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support contenu dans Ω. Si α est une forme exacte, c'est-à-dire $\alpha = d\varphi$ avec $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors*

$$\int_\gamma \alpha = \varphi[f(b)] - \varphi[f(a)].$$

*En particulier, si γ est un lacet (*i.e. *si $f(a) = f(b)$), $\int_\gamma \alpha = 0$.*

Exemple 3. Soit la forme différentielle de degré 1

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (\mathbb{R}^2)^* \quad (x,y) \mapsto \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

On vérifie facilement que l'on a affaire à une forme fermée. Elle n'est cependant pas exacte, car si γ est le lacet $([0,2\pi], f)$ où $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, on trouve $\int_\gamma \alpha = 2\pi \neq 0$, et on conclut avec la proposition précédente.

Théorème de Green-Riemann. Ce théorème permet de calculer certaines intégrales sur un compact K en fonction d'une intégrale curviligne le long de sa frontière ∂K. Intuitivement, le compact K doit avoir sa frontière qui est une courbe orientable et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Nous rendons cette définition plus rigoureuse avec la notion de *compact à bord*.

DÉFINITION 14. Un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ est dit *compact à bord* si

(i) il existe une famille finie $(\gamma_i) = (I_i, f_i)_{1 \le i \le p}$ de chemins fermés, simples (*i. e.* injectifs) et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, dont les supports $\mathcal{C}_i$ sont disjoints, et telle que la frontière ∂K de K soit la réunion des $\mathcal{C}_i$;

(ii) en tout point $a = f_i(t)$ régulier d'un chemin γ_i, il existe un pavé P centré en a tel que

— $P \setminus \partial K$ a deux composantes connexes, l'une notée P_1 constituée de points de $\overset{\circ}{K}$, l'autre de points de $\mathbb{R}^2 \setminus K$;

— pour tout $b \in P$ tel que le vecteur $\vec{ab}$ fasse un angle $+\pi/2$ avec $f_i'(t)$, on a $b \in P_1$.

Pour toute forme différentielle α de degré 1 définie sur un ouvert contenant K, la valeur $\sum_{i=1}^{p} \int_{\gamma_i} \alpha$ est alors indépendante des paramétrages admissibles des arcs géométriques *orientés* γ_i. On la note $\int_{\partial K^+} \alpha$.

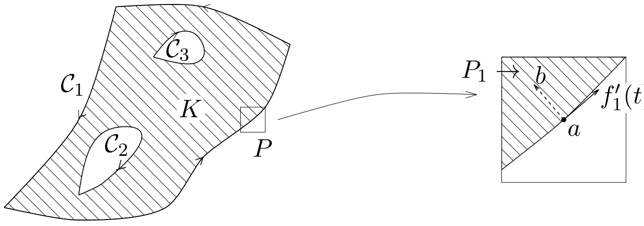


FIGURE 2. Un compact à bord K

Remarque 11. Dans la pratique, on se contente en général de la notion intuitive suivante : la frontière du compact à bord K est réunion finie, disjointe de supports d'arcs géométriques orientés, fermés, simples, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, tels qu'en parcourant cette frontière dans le sens de l'orientation, on ait K constamment à sa gauche.

THÉORÈME 6 (GREEN-RIEMANN). *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord et $\alpha = P\,dx + Q\,dy$ une forme différentielle de degré 1, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant K. Alors K est mesurable et*

$$\int_{\partial K^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dx\,dy.$$

Application. Si K est un compact à bord, son aire $\mathcal{A} = \iint_K dx\,dy$ peut s'exprimer, d'après le théorème de Green-Riemann, comme $\mathcal{A} = \int_{\partial K^+} x\,dy = -\int_{\partial K^+} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+}(x\,dy - y\,dx)$. En désignant par (r,θ) les coordonnées polaires, on a facilement $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$ donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2\,d\theta$.

4.6. Exercices

Exercice 1. Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

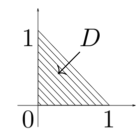
a) $f(x,y) = xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$;

b) $f(x,y) = x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$;

c) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{xy}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x+y \geq 1, x \geq y\}$;

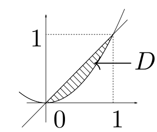
d) $f(x,y) = x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y \geq 0, x^2+y^2 \leq \pi\}$.

Solution.



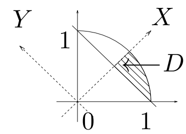
a) On peut écrire $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$, et en appliquant le théorème de Fubini, on a

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy\,dy\right] dx = \int_0^1 x\,\frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{24}.$$



b) On procède de la même manière. Si $x^2 \leq x$, on a forcément $0 \leq x \leq 1$, donc $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$. Le théorème de Fubini donne ensuite

$$\iint x^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} x^2\,dy\right] dx = \int_0^1 (x-x^2)x^2\,dx = \frac{1}{20}.$$

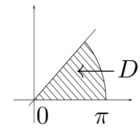


c) La forme de D nous invite à changer de système de coordonnées. On effectue une transformation orthogonale, en écrivant $x = (X-Y)/\sqrt{2}$ et $y = (X+Y)/\sqrt{2}$. Dans ce système de coordonnées, l'ensemble D devient $D' = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2}/2 \leq Y \leq 0,\ \sqrt{2}/2 \leq X \leq \sqrt{1-Y^2}\}$. Le jacobien de la transformation est égal à 1 (transformation orthogonale), donc d'après le théorème du changement de variable

$$I = \iint_D (x^2-y^2)e^{xy}\,dx\,dy = \iint_{D'} (-2XY)e^{(X^2-Y^2)/2}\,dX\,dY,$$

et d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\sqrt{2}/2}^{0} \left[\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{1-Y^2}} (-2XY)\,e^{(X^2-Y^2)/2}\,dX\right] dY \\ &= \int_{-\sqrt{2}/2}^{0} \left[-2Y\exp\left(\frac{1}{2}-Y^2\right) + 2Y\exp\left(\frac{1}{4}-\frac{Y^2}{2}\right)\right] dY = 1 - 2e^{1/4} + e^{1/2}. \end{aligned}$$



d) On va évidemment passer en coordonnées polaires. En polaires, on a $D = \{(r,\theta) \in [0,\pi] \times [0,\pi/4]\}$ donc d'après le théorème du changement de variable

$$I = \iint_D x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy = \iint_{[0,\pi]\times[0,\pi/4]} r(\cos\theta)(\cos r)r\,dr\,d\theta,$$

et d'après le théorème de Fubini

$$I = \left(\int_0^{\pi} r^2\cos r\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta\right) = (-2\pi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\,\pi.$$

EXERCICE 2. Calculer les intégrales triples $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ dans les cas suivants.

a) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \le 1\}$;

b) $f(x,y,z) = |z|$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$;

c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)e^z$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\}$;

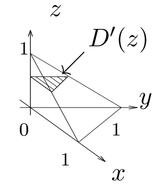
d) $f(x,y,z) = xyz$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

Solution. **a)** Vue la symétrie de D et de l'intégrande par rapport aux plans Oxy, Oxz et Oyz, on a

$$I = 8\iiint_{D'} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \quad \text{où} \quad D' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 1\}.$$

De même, la symétrie de D' et de $x^2+y^2+z^2$ par rapport aux plans $x = y$, $x = z$ et $y = z$ entraîne

$$I = 24\iiint_{D'} z^2\,dx\,dy\,dz.$$

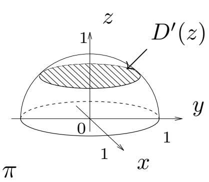


L'intégrande ne dépend plus que de z, nous allons donc effectuer une sommation par tranches. Si $(x,y,z) \in D'$, on a $0 \le z \le 1$, et l'intersection de D' avec le plan horizontal de côte z est $D'(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1-z\}$, par conséquent

$$I = 24\int_0^1 \left[\iint_{D'(z)} z^2\,dx\,dy\right] dz = 24\int_0^1 z^2\left(\frac{(1-z)^2}{2}\right) dz = \frac{2}{5}.$$

b) La symétrie de D et de $z \mapsto |z|$ par rapport au plan Oxy entraîne

$$I = 2\iiint_{D'} z\,dx\,dy\,dz \quad \text{où} \quad D' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\}.$$



L'intégrande ne dépend plus que de z, le plus simple est d'effectuer une sommation par tranches. Pour tout $(x,y,z) \in D'$, on a $0 \le z \le 1$, et l'intersection de D' avec le plan horizontal d'abscisse z est $D'(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1-z^2\}$ (disque de rayon $\sqrt{1-z^2}$). On en déduit

$$I = 2\int_0^1 \left[\iint_{D'(z)} z\,dx\,dy\right] dz = 2\int_0^1 z(\pi(1-z^2))\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

c) L'ensemble D est le pavé $[-1,1]^3$. On a $I = J + K$, où

$$J = \iiint_D (x^2+y^2)e^z\,dx\,dy\,dz \qquad \text{et} \qquad K = \iiint_D z^2e^z\,dx\,dy\,dz.$$

On calcule J en appliquant le théorème de Fubini (voir le corollaire 1), qui entraîne

$$J = \left(\iint_{[-1,1]^2} (x^2+y^2)\,dx\,dy\right)\left(\int_{-1}^1 e^z\,dz\right),$$

et en appliquant une nouvelle fois le théorème de Fubini, on trouve que le premier terme du produit est

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dy\right] dx = \int_{-1}^1 \left(2x^2+\frac{2}{3}\right) dx = \frac{8}{3},$$

donc finalement $J = \frac{8}{3}(e - 1/e)$.

Pour calculer K, on effectue une sommation par tranches (l'intégrande ne dépend que de z), ce qui donne

$$K = \int_{-1}^1 \left[\iint_{[-1,1]^2} z^2e^z\,dx\,dy\right] dz = 4\int_{-1}^1 z^2e^z\,dz = 4\left(e - \frac{5}{6}\right).$$

Finalement, on trouve $I = J + K = \dfrac{20}{3}e - \dfrac{52}{3}\dfrac{1}{e}$.

d) La forme de D nous invite à passer en coordonnées sphériques. Dans ces coordonnées, D est le pavé $[0,1] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$, donc d'après le théorème du changement de variable,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{[0,1]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} (r\cos\theta\cos\varphi)(r\sin\theta\cos\varphi)(r\sin\varphi)r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= \iiint_{[0,1]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} r^5(\cos\theta\sin\theta)(\cos^3\varphi\sin\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi, \end{aligned}$$

et d'après le théorème de Fubini,

$$I = \left(\int_0^1 r^5\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{48}.$$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le compact de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$D_n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}.$$

Pour tout $(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^n$, calculer $I_n(k_1,\dots,k_n) = \int\cdots\int_{D_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\,dx_1\cdots dx_n$.

Solution. En notant $D(x_n) = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i, x_i \geq 0, x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq 1 - x_n\}$, une intégration par tranches fournit

$$I_n(k_1,\dots,k_n) = \int_0^1 x_n^{k_n}\underbrace{\left[\int\cdots\int_{D(x_n)} x_1^{k_1}\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}}\,dx_1\cdots dx_{n-1}\right]}_{=K(x_n)}dx_n. \qquad (*)$$

Pour x_n fixé, le changement de variable $x_i = t_i(1-x_n)$ $(1 \leq i \leq n-1)$ donne, d'après le théorème du changement de variable

$$\begin{aligned} K(x_n) &= (1-x_n)^{k_1+\cdots+k_{n-1}+n-1}\int\cdots\int_{D_{n-1}} t_1^{k_1}\cdots t_{n-1}^{k_{n-1}}\,dt_1\cdots dt_{n-1} \\ &= (1-x_n)^{k_1+\cdots+k_{n-1}+n-1} I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1}). \end{aligned}$$

On en déduit d'après (*)

$$\begin{aligned} I_n(k_1,\dots,k_n) &= I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1})\int_0^1 x_n^{k_n}(1-x_n)^{k_1+\cdots+k_{n-1}+n-1}\,dx_n \\ &= I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1})\,J(k_n, k_1+\cdots+k_{n-1}+n-1) \qquad (**) \end{aligned}$$

où pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $J(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

Calculons $J(p,q)$. Une intégration par parties fournit, si $q \geq 1$,

$$J(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{q}{p+1}J(p+1,q-1).$$

Cette relation de récurrence permet d'affirmer

$$J(p,q) = \frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q)}J(p+q,0) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

D'après (**), on a donc

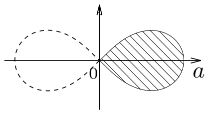
$$I_n(k_1,\dots,k_n) = I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1})\,\frac{k_n!(k_1+\cdots+k_{n-1}+n-1)!}{(k_1+\cdots+k_n+n)!},$$

et comme $I_1(k_1) = 1/(1+k_1)$, on obtient après une récurrence facile

$$I_n(k_1,\dots,k_n) = \frac{k_1!\cdots k_n!}{(k_1+\cdots+k_n+n)!}.$$

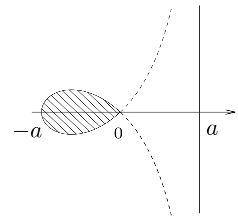
Exercice 4. **a)** Calculer l'aire du compact K délimité par la boucle droite de la lemniscate de Bernoulli, dont l'équation polaire est $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$, $a > 0$.
b) Calculer l'aire du compact K délimité par la boucle de la strophoïde droite, dont l'équation polaire est $r = -a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$.

Solution.



a) Il suffit d'utiliser le théorème de Green-Riemann, plus précisément l'application qui le suit à la page 358, qui exprime l'aire de K par $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2\, d\theta$, ce qui ici donne

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}.$$



b) On utilise comme précédemment, la formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2\, d\theta$. Le tout est de déterminer ∂K^+. Le paramètre r s'annule lorsque $\cos(2\theta) = 0$, donc pour $\theta = \pm\pi/4$. Un paramétrage de la frontière de K est donc $r = -a\cos(2\theta)/\cos\theta$, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$. L'orientation est bien directe, on peut donc écrire

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

et comme $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$,

$$\mathcal{A} = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(4\cos^2\theta - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta = \frac{a^2}{2}\Big[(2\theta + \sin 2\theta) - 4\theta + \tan\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}(4 - \pi).$$

Exercice 5 (Calcul de l'intégrale de Fresnel). Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}\, dx\, dy \quad \text{et} \quad f(t) = \int_0^t e^{ix^2}\, dx.$$

a) Exprimer $F(t)$ de deux manières différentes (l'une en fonction de $f(t)$, l'autre par passage en coordonnées polaires).
b) Pour $T > 0$, on pose $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\, dt$. Montrer que $I(T)$ converge lorsque $T \to +\infty$ et calculer sa limite. En déduire la valeur de l'intégrale de Fresnel

$$\varphi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx.$$

Solution. **a)** La relation $e^{i(x^2+y^2)} = e^{ix^2}\, e^{iy^2}$ entraîne, par application du théorème de Fubini,

$$F(t) = \left(\int_0^t e^{ix^2}\, dx\right)\left(\int_0^t e^{iy^2}\, dy\right) = f(t)^2.$$

Calculons maintenant $F(t)$ de manière différente. Tout d'abord, la symétrie du domaine et de l'intégrande par rapport à la droite $x = y$ permet d'affirmer

$$F(t) = 2\iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

où $\Delta_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq x\}$. L'intégrande s'exprime au moyen de $x^2 + y^2$, on est amené à passer en coordonnées polaires. En polaires, le compact Δ_t est représenté par l'ensemble

$$K_t = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \mid 0 \leq r\cos\theta \leq t \quad \text{et} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right\},$$

et après passage en coordonnées polaires, puis d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}F(t) &= 2\iint_{K_t} e^{ir^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{t/\cos\theta} e^{ir^2}\, r\, dr\right] d\theta\\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{i}\left(\exp\left(i\,\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right)-1\right) d\theta = \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\pi/4}\exp\left(i\,\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta. \qquad (*)\end{aligned}$$

b) La relation (*) permet d'affirmer

$$I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^T\left[\int_0^{\pi/4}\exp\left(i\,\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta\right] dt.$$

Le théorème de Fubini nous autorise à échanger l'ordre des signes d'intégration (puisqu'on a affaire à l'intégrale sur $[0,T]\times[0,\pi/4]$), donc

$$I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\pi/4}\left[\int_0^T \exp\left(i\,\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) dt\right] d\theta = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\pi/4}\cos\theta\, f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right) d\theta. \qquad (***)$$

Or l'intégrale $\varphi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx$ converge (en effectuant le changement de variable $u = x^2$, on remarque que f est de même nature que $\int_0^{+\infty}(e^{iu})u^{-1/2}\,du$, qui converge — voir la remarque 6 page 153), donc la fonction $t\mapsto f(t)$ est bornée en $+\infty$. Avec (***), on en déduit que $I(T)$ converge vers $i\pi/4$ lorsque $T\to+\infty$.

Par ailleurs, la première relation trouvée à la question précédente entraîne, pour tout $T>0$, $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt$. Or la fonction $t\mapsto f^2(t)$ converge vers φ^2 lorsque $t\to+\infty$. On en déduit que $I(T)$ converge vers φ^2 lorsque $T\to+\infty$ (si une fonction ψ converge vers α en $+\infty$, sa *moyenne de Césaro* $\frac{1}{T}\int_0^T\psi$ converge vers α). On en déduit finalement $\varphi^2 = i\pi/4$. On a donc déterminé φ au signe près. Or $s = \Im(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin(x)x^{-1/2}\,dx \geq 0$ car

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad \text{où} \quad u_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin u}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right) du \geq 0,$$

on en déduit facilement $\varphi = e^{i\pi/4}\,\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Remarque. Un autre moyen de calculer φ est d'utiliser le résultat de la question 2/b) de l'exercice 4 page 168.

5. Problèmes

PROBLÈME 1. Déterminer les fonctions $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad (x,y)\mapsto f(x,y)$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \qquad (E)$$

(Indication : on pourra effectuer le changement de variable $u = x+y$, $v = \alpha x - y$, où α est un réel à déterminer).

Solution. Fixons α quelconque et notons $\varphi:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\quad (x,y)\mapsto(u,v) = (x+y,\alpha x - y)$. Si $\alpha\neq -1$, φ est bijective. Plaçons nous dans ce cas. Notons $F = f\circ\varphi^{-1}$ (la fonction F est la fonction f dans les coordonnées u et v). On a donc $f(x,y) = F\circ\varphi(x,y) = F(x+y,\alpha x-y)$ et $F = f\circ\varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \alpha\,\frac{\partial F}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \alpha\,\frac{\partial F}{\partial v}\right) + \alpha\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \alpha\,\frac{\partial F}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\alpha\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \alpha^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \alpha\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (\alpha-1)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} - \alpha\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2},$$

et on en déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \big[2\alpha + 2(\alpha-1) + 6\big]\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + (\alpha^2 - 2\alpha - 3)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'idée est de faire disparaître le terme en $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, pour se ramener à résoudre $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = 0$ (ce qui s'intègre facilement). On va donc choisir α tel que $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 3$ ou $\alpha = -1$. Comme on doit avoir $\alpha \neq -1$ (pour que la transformation soit bijective), on choisit $\alpha = 3$.

L'équation (E) est donc équivalente à $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = 0$, où $f(x,y) = F(x+y, 3x-y)$. Ceci s'écrit aussi $\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial F}{\partial v}\right] = 0$, donc la fonction $\mathcal{C}^1$ $\frac{\partial F}{\partial v}$ est indépendante de u. Il existe donc une fonction $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \varphi(v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Notons ψ une primitive de φ. On a $\frac{\partial(F-\psi)}{\partial v} = 0$, donc la fonction $\mathcal{C}^2$ $F - \psi$ est indépendante de v, de sorte qu'il existe $\theta:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F(u,v) = \psi(v) + \theta(u)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Finalement, nous avons montré que si f vérifie (E), alors il existe deux fonctions $\psi, \theta:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = F(u,v) = F(x+y, 3x-y) = \theta(x+y) + \psi(3x-y).$$

Réciproquement, si f a cette forme, on vérifie facilement qu'elle satisfait l'équation (E).

Problème 2 (Dérivations). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note G_0^∞ l'e.v des fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage de 0 et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit L une application de G_0^∞ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) L est linéaire ;

(ii) pour tout $f, g \in G_0^\infty$, $L(fg) = f(0)L(g) + L(f)g(0)$;

(iii) $L(1) = 0$;

(on dit que L est une *dérivation*). Montrer qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $L(f) = f'_\xi(0) = df_0(\xi)$ pour tout $f \in G_0^\infty$. (Indication : on pourra utiliser le lemme d'Hadamard — voir l'exercice 4 page 331).

Solution. Soit $f \in G_0^\infty$. Comme $f - f(0)$ s'annule en 0, on peut écrire, d'après le lemme d'Hadamard

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), \qquad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i\,\varphi_i(x),$$

où pour tout i, φ_i est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, c'est-à-dire $\varphi_i \in G_0^\infty$. En notant par abus x_i la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, la linéarité et la propriété (iii) de L entraînent

$$L(f) = f(0)L(1) + \sum_{i=1}^n L(x_i\varphi_i) = \sum_{i=1}^n L(x_i\varphi_i).$$

Or, d'après (ii), $L(x_i\varphi_i) = 0\,L(\varphi_i) + L(x_i)\varphi_i(0) = L(x_i)\varphi_i(0)$, et comme $\varphi_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$, on en déduit

$$L(f) = \sum_{i=1}^n L(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

En notant $\xi = (L(x_1), \dots, L(x_n))$, ceci s'écrit aussi $L(f) = f'_\xi(0) = df_0(\xi)$, et ceci pour tout $f \in G_0^\infty$, d'où le résultat.

PROBLÈME 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur f pour que la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $X \mapsto f(\|X\|^2)X$, où $\|X\|$ désigne la norme euclidienne canonique de X sur $\mathbb{R}^n$, soit un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

Solution. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto xf(x^2)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Supposons que F soit un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. En notant $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, on a $F(xe_1) = g(x)e_1$ pour tout réel x. En dérivant par rapport à x on obtient $\partial F/\partial x_1(xe_1) = g'(x)e_1$, donc $g'(x) \neq 0$. Par ailleurs, $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ donc pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(X) = f(\|X^2\|)X = ye_1$. On en déduit que seule la première coordonnée x_1 de X n'est pas nulle, donc $X = x_1e_1$ d'où $f(x_1^2)x_1e_1 = ye_1$, ce qui entraîne $y = g(x_1)$. Ainsi g est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De plus $g' \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que g est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant que g est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et montrons que F est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. Remarquons déjà que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, car $f(0) = g'(0) \neq 0$, et pour $x > 0$, $g(x) \neq g(-x)$ donc $xf(x^2) \neq -xf(x^2)$ ce qui entraîne $f(x^2) \neq 0$. Quitte à changer f par $-f$, on peut même supposer $f > 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Montrons que F est injective. Supposons $F(X) = F(Y)$ pour deux vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Si $X = Y = 0$ on a bien $X = Y$, sinon l'un des deux est non nul, par exemple $X \neq 0$. On a $f(\|X^2\|)X = f(\|Y^2\|)Y$, et comme f ne s'annule pas on a $Y = \lambda X$ avec $\lambda = f(\|X^2\|)/f(\|Y^2\|)$. On en déduit $f(\|X^2\|)X = f(\lambda^2\|X^2\|)\lambda X$. Ceci entraîne $g(\|X\|) = g(\lambda\|X\|)$, d'où $\|X\| = \lambda\|X\|$ par injectivité de g, donc $\lambda = 1$ car $\|X\| \neq 0$, donc $Y = X$.

La fonction F est surjective. En effet, si $Y \in \mathbb{R}^n$, on peut trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \|Y\|$. En notant $\lambda = x/\|Y\|$ on en déduit $F(\lambda Y) = f(x^2)(x/\|Y\|)Y = (g(x)/\|Y\|)Y = Y$.

La fonction F est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et il reste à montrer que la différentielle de F est inversible en tout point X. La matrice jacobienne J_X de F en $X = (x_1, \dots, x_n)$ vérifie $J_X = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $m_{i,j} = 2x_ix_jf'(\|X\|^2)$ si $i \neq j$ et $m_{i,i} = f(\|X^2\|) + 2x_i^2f'(\|X\|^2)$. Autrement dit, $J_X = f(\|X\|^2)I_n + 2f'(\|X\|^2)X{}^tX$. La matrice jacobienne J_X est symétrique et on va montrer qu'elle est définie positive. Pour tout vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a

$$ {}^tVJ_XV = f(\|X\|^2)\,{}^tVV + 2f'(\|X\|^2)\,{}^t({}^tXV)({}^tXV) = f(\|X\|^2)\|V\|^2 + 2f'(\|X\|^2)({}^tXV)^2. \quad (*) $$

Si $f'(\|X\|^2) \geq 0$, alors cette expression est > 0. Sinon $f'(\|X\|^2) < 0$. Comme g' ne s'annule pas, elle garde le signe de $g'(0) = f(0) > 0$, donc $g'(x) = f(x^2) + 2x^2f'(x^2) > 0$. Or d'après l'inégalité de Schwarz on a $({}^tXV)^2 \leq \|X\|^2 \cdot \|V\|^2$, donc d'après (*)

$$ {}^tVJ_XV \geq f(\|X\|^2)\,\|V\|^2 - 2|f'(\|X\|^2)|\,\|X\|^2 \cdot \|V\|^2 = g'(\|X\|)\,\|V^2\| > 0. $$

Ainsi J_X est définie positive, donc inversible. On a donc prouvé que F est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

PROBLÈME 4 (FONCTIONS CONVEXES SUR $\mathbb{R}^n$). On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ standard et de la norme euclidienne associée. Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Une application $J :\ C \to \mathbb{R}$ est dite α-convexe (avec $\alpha \geq 0$) si

$$ \forall x, y \in C, \forall \delta \in [0,1], \quad J[(1-\delta)x + \delta y] \leq (1-\delta)J(x) + \delta J(y) - \frac{\alpha}{2}\delta(1-\delta)\,\|x-y\|^2. \quad (*) $$

Si J est 0-convexe, on dit que J est convexe.

1/ Montrer que toute fonction convexe $J :\ C \to \mathbb{R}$ est continue, et dérivable en tout point de C par rapport à tout vecteur.

2/ Soit $J :\ C \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout $x \in C$, on note $J'(x)$ le gradient de J en x et $J''(x)$ la matrice hessienne de J en x, définie par $J''(x) = \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que J est α-convexe si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

(i) pour tout $(x, y) \in C^2$, $J(y) \geq J(x) + \langle J'(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\,\|y - x\|^2$;

(ii) pour tout $(x,y) \in C^2$, $\langle J'(y) - J'(x), y - x\rangle \geq \alpha\, \|y-x\|^2$;

(iii) pour tout $x \in C$, pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, $\langle J''(x)\, w, w\rangle \geq \alpha\, \|w\|^2$.

3/ (Optimisation dans $\mathbb{R}^n$) Soit $J :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction α-convexe (avec $\alpha > 0$).
a) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} J(x)$.
b) Si (u_n) est une suite minimisante (*i. e.* si $\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = J(x_0)$), montrer que (u_n) converge vers x_0.

Solution. **1/** Soit $x_0 \in C$. Commençons par montrer que J est dérivable selon tout vecteur en x_0. Soit un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$, et l'application de la variable réelle $\varphi :\ t \mapsto J(x_0 + t\xi)$. Cette application est définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, et elle de plus convexe car J est convexe. On sait donc, d'après la théorie des fonctions convexes de la variable réelle, que φ est dérivable à droite en 0, c'est-à-dire que J est dérivable selon le vecteur ξ en x_0.

Prouvons maintenant la continuité de J en x_0 (attention, ce n'est pas parce que J est dérivable selon tout vecteur en x_0 qu'elle y est continue — voir un contre exemple à l'exercice 1 page 329). Quitte à considérer la fonction $J(x+x_0)-J(x_0)$, on peut supposer $x_0 = 0$ et $J(0) = 0$.

La norme sur $\mathbb{R}^n$ utilisée dans la suite de cette question sera $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_i |x_i|$. L'ensemble C est ouvert, donc il existe $\rho > 0$ tel que la boule $\mathrm{B}(0, \rho)$ soit incluse dans C. Quitte à considérer la fonction $J(\rho x/2)$, on peut même supposer $\rho = 2$, de sorte que la boule unité fermée est incluse dans C.

Commençons par montrer que J est majorée sur la sphère unité. Notons (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et considérons $u = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i$ tel que $\|u\| = 1$. Pour tout i, il existe $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ tel que $x_i = |x_i|\, \varepsilon_i$. Comme $\|u\| = \sum_i |x_i| = 1$, on a facilement (comme pour les fonctions convexes à variables réelles)

$$J(u) = J\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\, \varepsilon_i\, e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\, J(\varepsilon_i\, e_i) \leq M \sum_{i=1}^n |x_i| = M, \quad \text{avec} \quad M = \sup_{\substack{1\leq i\leq n\\ \varepsilon\in\{-1,1\}}} J(\varepsilon\, e_i).$$

Achevons la démonstration. Soit $x \in C$, $0 < \|x\| \leq 1$, et soit $u = x/\|x\|$. La fonction $\psi :\ [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad \lambda \mapsto J(\lambda u)$ est une fonction de la variable réelle convexe sur $[-1, 1]$, donc

$$\forall \lambda \in [-1, 1], \lambda \neq 0, \qquad \psi(0) - \psi(-1) \leq \frac{\psi(\lambda) - \psi(0)}{\lambda} \leq \psi(1) - \psi(0),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall \lambda \in [-1, 1], \lambda \neq 0, \qquad -J(-u) \leq \frac{J(\lambda\, u)}{\lambda} \leq J(u) \quad \text{donc} \quad -M \leq \frac{J(\lambda\, u)}{\lambda} \leq M.$$

Ainsi, $|J(x)| = |J(\|x\|\, u)| \leq M\, \|x\|$. Comme $J(0) = 0$, on en déduit la continuité de J en 0.

2/ (J est α-convexe) $\iff$ (i) :

— Supposons J α-convexe. Soient $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ et $\delta \in\,]0,1]$. L'inégalité (*) s'écrit encore
$$\frac{J(x + \delta(y - x)) - J(x)}{\delta} \leq J(y) - J(x) - \frac{\alpha}{2}(1 - \delta)\, \|y - x\|^2,$$
d'où (i) en faisant tendre δ vers 0.

— Inversement, supposons (i) vérifié. Écrivons (i) pour le couple $(y, x + \delta(y - x))$ puis pour le couple $(x, x + \delta(y - x))$, avec $\delta \in [0, 1]$
$$J(y) \geq J(x + \delta(y - x)) + \langle J'(x + \delta(y - x)), (1 - \delta)(y - x)\rangle + \frac{\alpha}{2}(1 - \delta)^2\, \|y - x\|^2,$$
$$J(x) \geq J(x + \delta(y - x)) + \langle J'(x + \delta(y - x)), -\delta(y - x)\rangle + \frac{\alpha}{2}\delta^2\, \|y - x\|^2.$$
En multipliant la première inégalité par δ, la seconde par $1 - \delta$, puis en additionnant, il vient
$$\delta J(y) + (1 - \delta)J(x) \geq J(x + \delta(y - x)) + \frac{\alpha}{2}\delta(1 - \delta)\, \|y - x\|^2,$$
donc J est α-convexe.

$(i) \iff (ii)$.

— Supposons (i) vraie. En écrivant l'inégalité (i) pour le couple (x, y), pour le couple (y, x), puis en additionnant, on obtient (ii).
— Supposons (ii) vérifiée. Si on fixe $(x, y) \in C^2$, la fonction $\varphi : \ [0,1] \to \mathbb{R} \quad \delta \mapsto J(x + \delta(y-x))$ a pour dérivée $\varphi'(\delta) = \langle J'(x + \delta(y-x)), y - x\rangle$ et vérifie donc

$$\forall \delta \in \left]0,1\right], \quad \varphi'(\delta) - \varphi'(0) = \frac{1}{\delta}\langle J'(x + \delta(y-x)) - J'(x), \delta(y-x)\rangle \geq \alpha \,\|y - x\|^2 \delta,$$

(inégalité qui reste évidemment vraie pour $\delta = 0$) d'où (i) car par intégration, on obtient

$$\varphi(1) \geq \int_0^1 \left(\varphi'(0) + \alpha \,\|y-x\|^2 \delta\right)\, d\delta = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\alpha}{2}\,\|y-x\|^2.$$

$(ii) \iff (iii)$.
— Supposons (ii) vérifiée. Soit $w \in \mathbb{R}^n$. Lorsque ρ est un nombre réel non nul suffisamment proche de 0, on a d'après (ii)

$$\langle J'(x + \rho w) - J'(x), \rho w\rangle \geq \alpha \rho^2 \|w\|^2 \quad \text{ou encore} \quad \left\langle \frac{J'(x+\rho w) - J'(x)}{\rho}, w \right\rangle \geq \alpha\,\|w\|^2,$$

d'où (iii) en faisant tendre ρ vers 0 (remarquer que $J''(x)$ est la matrice jacobienne de $x \mapsto J'(x)$).
— Supposons (iii) vérifiée. Fixons $(x, y) \in C^2$, et considérons la fonction $\psi \ : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \langle J'(x + \delta(y-x)), y - x\rangle$. On a

$$\forall \delta \in [0,1], \qquad \psi'(\delta) = \langle J''(x + \delta(y-x))(y-x), y-x\rangle \geq \alpha\,\|y-x\|^2,$$

donc par intégration $\psi(1) - \psi(0) \geq \alpha\,\|y-x\|^2$, d'où (ii).

3/ a) L'inégalité d'α-convexité, appliquée avec $x = 0$ donne

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \delta \in [0,1], \qquad J(\delta y) \leq (1-\delta)J(0) + \delta J(y) - \frac{\alpha}{2}\delta(1-\delta)\,\|y\|^2$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \delta \in \left]0,1\right], \qquad J(y) \geq J(0) + \frac{J(\delta y) - J(0)}{\delta} + \frac{\alpha}{2}(1-\delta)\,\|y\|^2.$$

En appliquant cette dernière inégalité aux y tels que $\|y\| \geq 2$ avec $\delta = 1/\|y\|$, on a

$$J(y) \geq J(0) + \left[J\left(\frac{y}{\|y\|}\right) - J(0)\right]\,\|y\| + \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{1}{\|y\|}\right)\,\|y\|^2 \geq J(0) + K\,\|y\| + \frac{\alpha}{4}\,\|y\|^2,$$

où K est un minorant de $J(u) - J(0)$ sur la sphère unité (K existe car J est continue et la sphère unité est compacte). On en déduit $\lim_{\|y\| \to +\infty} J(y) = +\infty$.

Ainsi, l'ensemble $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid J(x) \leq J(0)\}$ est borné. Or Γ est fermé (J est continue), donc $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est compact. Il existe donc $x_0 \in \Gamma$ tel que $J(x_0) = \inf_{x\in\Gamma} J(x)$ (ceci car J est continue). Par construction de Γ, on a $J(x) \geq J(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, donc $J(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x)$.

b) L'inégalité d'α-convexité donne, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha}{8}\,\|u_n - u_m\|^2 \leq \frac{J(u_n) + J(u_m)}{2} - J\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \leq \frac{J(u_n) + J(u_m)}{2} - J(x_0),$$

et on en conclut que $\lim_{m,n\to+\infty} \frac{\alpha}{8}\,\|u_n - u_m\|^2 = 0$. Donc (u_n) est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{R}^n$ est complet, elle converge. Soit u sa limite. Par continuité de J on a $J(u) = J(x_0)$, et d'après l'inégalité d'α-convexité

$$\frac{\alpha}{8}\,\|u - x_0\|^2 \leq \frac{J(u) + J(x_0)}{2} - J\left(\frac{u + x_0}{2}\right) \leq 0,$$

donc $u = x_0$. D'où le résultat.

Remarque. Les résultats des questions 2/ et 3/ restent vrais dans un espace de Hilbert. Par contre, le résultat de 1/ est faux en dimension infinie.

PROBLÈME 5 (LEMME DE MORSE). **1/** (Préliminaires.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}$ l'e.v des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fixe $A \in \mathcal{S}$ inversible, et on note $\mathcal{F}$ l'e.v $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tUA = AU\}$.
a) Montrer que $\Omega = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{F}$ et que l'application $\varphi : \ \Omega \to \mathcal{S} \quad U \mapsto {}^tUAU$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local en $U = I_n$.
b) Montrer l'existence d'un voisinage ouvert V de A dans $\mathcal{S}$ et d'une application $h : \ V \to \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $h(A) = I_n$ et telle que ${}^th(B)\, A\, h(B) = B$ pour tout $B \in V$.
c) Montrer qu'il existe une application $g \ : V \to \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $B \in V$, ${}^tg(B)\, D\, g(B) = B$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 ou à -1.

2/ (Lemme de Morse.) Soit $f : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle en 0, telle que $df_0 = 0$. On suppose que la matrice hessienne de f en 0 définie par $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)_{1 \le i,j \le n}$ est inversible. Montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ défini sur un voisinage W de 0, et un entier r tels que

$$\forall x \in W, \qquad f(x) = [\varphi_1(x)]^2 + \cdots + [\varphi_r(x)]^2 - [\varphi_{r+1}(x)]^2 - \cdots - [\varphi_n(x)]^2$$

(on utilisera le résultat de la question b) de l'exercice 4 de la page 331).

Solution. **1/ a)** On sait que $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (image réciproque de la fonction déterminant, qui est continue, de l'ouvert $\mathbb{R}^*$), donc $\Omega = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{F}$.

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car les coefficients de $\varphi(U)$ s'expriment comme des polynômes en les coefficients de U.

On a bien sûr $I_n \in \Omega$. Calculons $d\varphi_{I_n}$, la différentielle de φ en I_n. Si $I_n + H \in \Omega$, on a

$$\varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) = {}^tHA + AH + {}^tHAH = {}^tHA + AH + o(\|H\|),$$

donc $d\varphi_{I_n}(H) = {}^tHA + AH$ pour tout $H \in \mathcal{F}$.

Montrons que $d\varphi_{I_n} : \ \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$, ce qui permettra de conclure que φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local en I_n d'après le théorème d'inversion locale.

— La différentielle $d\varphi_{I_n} : \ \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ est injective. En effet, si $d\varphi_{I_n}(H) = {}^tHA + AH = 0$, alors comme ${}^tHA = AH$ (puisque $H \in \mathcal{F}$), on a $AH = 0$, donc $H = 0$ car A est inversible.
— La différentielle $d\varphi_{I_n}$ est surjective. En effet, pour tout $S \in \mathcal{S}$ la matrice $H = \frac{1}{2}A^{-1}S$ est bien dans $\mathcal{F}$ (car comme $A \in \mathcal{S}$, on a ${}^tHA = \frac{1}{2}{}^tS\,{}^tA^{-1}A = \frac{1}{2}S = AH$) et $d\varphi_{I_n}(H) = {}^tHA + AH = 2AH = S$.

b) Il existe donc un voisinage ouvert W de I_n dans Ω, un voisinage ouvert V de $\varphi(I_n) = A$ dans $\mathcal{S}$ tel que $\varphi_{|W}$ soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de W sur V. Si on note $h : \ V \to W$ son difféomorphisme inverse, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ (car $W \subset \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$) et pour tout $B \in V$, $\varphi(h(B)) = B = {}^th(B)\, A\, h(B)$.

c) Notons (p, q) la signature de la forme quadratique $X \mapsto {}^tXAX$ ($X \in \mathbb{R}^n$). On sait que $p+q = n$ (car A est inversible) et que A est congrue à la matrice diagonale D dont les p premiers termes diagonaux sont égaux à 1, les $q = n-p$ derniers égaux à -1, autrement dit, il existe $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tPDP$. On définit maintenant l'application $g : \ V \to \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ par $g(B) = P\,h(B)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle vérifie

$$\forall B \in V, \qquad {}^tg(B)\, D\, g(B) = {}^th(B)\left[{}^tPDP\right] h(B) = {}^th(B)\, A\, h(B) = B.$$

2/ D'après la question b) de l'exercice 4 de la page 331, on peut trouver n^2 fonctions $h_{i,j} : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telles que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j\, h_{i,j}(x).$$

Si on pose $a_{i,j}(x) = \frac{1}{2}[h_{i,j}(x) + h_{j,i}(x)]$ pour tout (i, j), les fonctions $a_{i,j}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, on a $f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j\, a_{i,j}(x)$, et pour tout x, la matrice $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \le i,j \le n}$ est symétrique.

Résumons. Il existe une application $A : \ \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que

— pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $A(X)$ est symétrique et $f(X) = {}^tXA(X)X$;

— $A(0) = H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)_{i,j}$ est inversible.

Soit $(r, n-r)$ la signature de la forme quadratique $X \mapsto {}^tXHX$. D'après 1/c), il existe un voisinage V de $H = A(0)$ dans $\mathcal{S}$ et une fonction $g : \; V \to \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que ${}^tg(B)Dg(B) = B$ pour tout $B \in V$, où D est la matrice diagonale dont les r premiers éléments diagonaux sont égaux à 1 et les $n-r$ derniers égaux à -1.

Comme $X \mapsto A(X)$ est continue, il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $A(X) \in V$ pour tout $X \in W$. On a donc $A(X) = {}^tg[A(X)]\, D\, g[A(X)]$ pour tout $X \in W$, et on en déduit

$$\forall X \in W, \qquad f(X) = {}^tX\, A(X)\, X = {}^t\varphi(X)\, D\, \varphi(X) \quad \text{où} \quad \varphi(X) = g[A(X)]\, X.$$

En notant $\varphi_1(X), \dots, \varphi_n(X)$ les coordonnées de $\varphi(X)$, ceci s'écrit aussi

$$\forall X \in W, \qquad f(X) = \varphi_1(X)^2 + \cdots + \varphi_r(X)^2 - \varphi_{r+1}(X)^2 - \cdots - \varphi_n(X)^2.$$

Ce n'est pas tout-à-fait fini. On a $d\varphi_0 = g[A(0)] \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$, donc quitte à restreindre W, on peut supposer (d'après le théorème d'inversion locale) que φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de W sur $\varphi(W)$. On a bien sûr $\varphi(0) = g[A(0)]\, 0 = 0$.

Problème 6 (Équation de la chaleur).

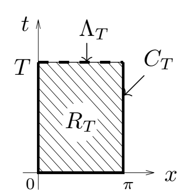
On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ dont les éléments sont notés (x, t). Pour tout $T > 0$, on note

— $R_T =]0, \pi[\times]0, T[$,

— $C_T = (\{0\} \times [0, T]) \cup ([0, \pi] \times \{0\}) \cup (\{\pi\} \times [0, T])$,

— $\Lambda_T =]0, \pi[\times \{T\}$.

de sorte que R_T, C_T et Λ_T soient disjoints et que leur réunion soit le rectangle fermé $\overline{R_T}$.



1/ Soit $\varphi : \; [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$.

a) Montrer l'existence d'une suite réelle (b_n) telle que $\sum |b_n|$ converge et telle que

$$\forall x \in [0, \pi], \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

b) Soit $T_0 > 0$. Construire une fonction Φ continue sur $\overline{R_{T_0}}$ telle que

(i) Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur R_{T_0} et $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ sur R_{T_0} ;

(ii) pour tout $t \in [0, T_0]$, $\Phi(0, t) = \Phi(\pi, t) = 0$;

(iii) pour tout $x \in [0, \pi]$, $\Phi(x, 0) = \varphi(x)$.

2/ On veut montrer qu'il n'existe qu'une seule fonction Φ vérifiant (i), (ii) et (iii). Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur $\overline{R_{T_0}}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur R_{T_0}.

a) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} > 0$ sur R_{T_0}, montrer que f atteint son maximum sur C_{T_0} (on pourra commencer par prouver le résultat sur R_T et C_T pour tout $T \in]0, T_0[$).

b) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0$ sur R_{T_0}, montrer que f atteint son maximum sur C_{T_0}.

c) Si f est nulle sur C_{T_0} et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ sur R_{T_0}, montrer que f est nulle.

d) En déduire que la fonction Φ construite à la question 1/b) est la seule fonction vérifiant (i), (ii) et (iii).

Solution. **1/ a)** On pense évidemment au développement en série de Fourier. Pour cela, on prolonge φ sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante : sur $]-\pi, 0[$ on pose $\tilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x)$, sur $[0, \pi]$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$. On définit ensuite une fonction $\widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$ par $\widehat{\varphi}(x + 2k\pi) = \tilde{\varphi}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \left]-\pi, \pi\right]$. Ainsi construite, la fonction $\widehat{\varphi}$ est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, impaire, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ car $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. On en déduit que ses coefficients de Fourier $a_n(f)$ sont nuls, que ses coefficients de Fourier $b_n = b_n(f)$ sont tels que $\sum |b_n|$ converge (voir le théorème 3 page 272), et que de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx.$$

On en déduit le résultat car $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

b) Remarquons que la fonction $f:\ (x,t) \mapsto (\sin nx)e^{-n^2 t}$ vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. On pose donc

$$\Phi :\ \overline{R_{T_0}} \to \mathbb{R} \quad (x,t) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, (\sin nx)\, e^{-n^2 t}.$$

La série est normalement convergente sur $\overline{R_{T_0}}$, donc Φ est bien définie et continue sur $\overline{R_{T_0}}$. Par ailleurs, les conditions (ii) et (iii) sont vérifiées.

Il nous reste à vérifier (i). Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $a > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} e^{-n^2 a}\, n^p = 0$, donc les séries de fonctions $\sum n^p b_n (\sin nx) e^{-n^2 t}$ et $\sum n^p b_n (\cos nx) e^{-n^2 t}$ convergent normalement pour $(x,t) \in [0,\pi] \times [a, T_0]$. On en déduit facilement, grâce au théorème de dérivation des séries de fonctions que Φ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]0,\pi[\times]a, T_0[$, et ceci pour tout $a > 0$, donc de classe $\mathcal{C}^p$ sur R_{T_0}, et que les dérivées partielles de Φ s'obtiennent en dérivant formellement chacun de ses termes. Comme ceci est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\forall (x,t) \in R_{T_0}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (\sin nx)\, e^{-n^2 t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (\sin nx) e^{-n^2 t}.$$

Ainsi, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ sur R_{T_0}, d'où (i) et le résultat.

2/ a) Montrons d'abord que pour tout $T \in]0, T_0[$, la restriction de f à $\overline{R_T}$ atteint son maximum en un point de C_T (on sait déjà que f atteint son maximum sur $\overline{R_T}$ car $\overline{R_T}$ est compact et f est continue). Raisonnons par l'absurde : si ceci n'est pas vrai, le maximum est atteint en un point (x_0, t_0) de R_T ou de Λ_T.

— Si $(x_0,t_0) \in R_T$, alors comme (x_0,t_0) est un point intérieur à $\overline{R_T}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0) = 0$$

et la forme quadratique

$$x^2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) + 2xt\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x_0,t_0) + t^2\, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x_0,t_0)$$

est négative, en particulier $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) \le 0$. On a donc $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}\right)(x_0,t_0) \le 0$, ce qui est contraire aux hypothèses.

— Si $(x_0,t_0) = (x_0, T) \in \Lambda_T$, alors
  - — $\frac{\partial f}{\partial t}(x_0, T) \ge 0$ puisque $t \mapsto f(x_0,t)$ atteint son maximum en $t = T$;
  - — $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,T) \le 0$ puisque $x \mapsto f(x,T)$ atteint son maximum en $x = x_0$, point intérieur à $[0,\pi]$.

On a donc $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}\right)(x_0,t_0) \le 0$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Nous avons donc montré le premier résultat annoncé (on ne pouvait pas procéder directement avec $T = T_0$ car f n'est pas supposée $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de Λ_{T_0}).

Achevons notre raisonnement. Soit (T_n) une suite croissante de points de $]0, T[$ qui converge vers T. Comme nous venons de le montrer, il existe pour tout n un point (x_n, t_n) de $C_{T_n} \subset C_T$ tel que $f(x_n,t_n) = \sup_{(x,t)\in\overline{R_{T_n}}} f(x,t)$. Comme C_T est compact, on peut extraire de la suite (x_n,t_n) une sous-suite qui converge vers un point (x^*, t^*) de C_T. Quitte à retirer des termes de la suite et à la réindicer, on peut même supposer que (x_n,t_n) converge vers (x^*,t^*). Par continuité de

f, on a $f(x^*,t^*) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n,t_n)$. Maintenant soit $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,T[$. Comme $t < T$, il existe N tel que $t < T_N$, donc

$$\forall n \geq N, \qquad f(x_n,t_n) \geq f(x,t).$$

En faisant $n \to \infty$, on en déduit $f(x^*,t^*) \geq f(x,t)$. Ceci est vrai pour tout $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,T[$. Par continuité de f, on a donc $f(x^*,t^*) \geq f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,T]$, d'où le résultat.

b) La fonction f est continue sur le compact C_{T_0} donc il existe $(x^*,t^*) \in C_{T_0}$ tel que $f(x^*,t^*) = \sup_{(x,t)\in C_{T_0}} f(x,t)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction f_n définie sur $\overline{R_{T_0}}$ par $f_n(x,t) = f(x,t) + x^2/n$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur R_{T_0} et

$$\forall (x,t) \in R_{T_0}, \qquad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \frac{2}{n} \geq \frac{2}{n} > 0.$$

On peut donc appliquer le résultat de la question précédente à f_n qui entraîne l'existence d'un point (x_n,t_n) de C_{T_0} tel que $f_n(x_n,t_n) = \sup_{(x,t)\in\overline{R_{T_0}}} f_n(x,t)$. On a donc

$$f(x^*,t^*) \geq f(x_n,t_n) = f_n(x_n,t_n) - \frac{{x_n}^2}{n} = \sup_{(x,t)\in\overline{R_{T_0}}} f_n(x,t) - \frac{x_n^2}{n} \geq \sup_{(x,t)\in\overline{R_{T_0}}} f(x,t) - \frac{\pi^2}{n}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit, en prenant en compte les deux termes extrêmes des inégalités, que $f(x^*,t^*) \geq \sup_{(x,t)\in\overline{R_{T_0}}} f(x,t)$. Ainsi, f atteint son maximum en $(x^*,t^*) \in C_{T_0}$.

c) La fonction f vérifie les hypothèses de la question précédente, donc son maximum est atteint sur C_{T_0}. Comme f est nulle sur C_{T_0}, on en déduit $f \leq 0$. Le même raisonnement s'applique à $-f$, donc $f \geq 0$. On en déduit que f est la fonction nulle.

d) Supposons trouvée une fonction Φ_1 vérifiant les assertions (i), (ii) et (iii). Alors $f = \Phi - \Phi_1$ satisfait les hypothèses de la question précédente, donc $f = 0$, donc $\Phi = \Phi_1$.

PROBLÈME 7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x (différentielle de f en x) est inversible, et telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.
a) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, montrer que $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
b) Montrer que f est surjective (on utilisera un argument de connexité).
c) Soit y un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $f^{-1}(\{y\})$ est un ensemble fini. On note $m = \mathrm{Card}\,[f^{-1}(\{y\})]$ et on note $x_1, \ldots, x_m$ les éléments de $f^{-1}(\{y\})$.
d) Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de y tel que $f^{-1}(V) \subset \cup_{1\leq i\leq m} \mathrm{B}(x_i,\varepsilon)$ (où $\mathrm{B}(x_i,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x_i de rayon ε).
e) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de y tel que

$$\forall z \in W, \qquad \mathrm{Card}\left[f^{-1}(\{z\})\right] = m.$$

f) En déduire que l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N} \quad z \mapsto \mathrm{Card}\,[f^{-1}(z)]$ est constante.
g) Si $f(0) = 0$ et $f(z) \neq 0$ pour tout $z \neq 0$, montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Solution. **a)** Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Comme K est fermé et que f est continue (car $\mathcal{C}^1$), $f^{-1}(K)$ est fermé. Il reste à montrer que $f^{-1}(K)$ est borné pour montrer sa compacité.

Comme K est compact donc borné, il existe $M > 0$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in K$. Or

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty \quad \text{donc} \quad \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > A, \qquad \|f(x)\| > M.$$

Ainsi, si $x \in f^{-1}(K)$, on a $\|x\| \leq A$, d'où le résultat.

b) On va montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est à la fois ouvert et fermé. Comme $\mathbb{R}^n$ est connexe, on en déduira $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la surjectivité de f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est inversible, donc f est une application ouverte (voir le corollaire 1 page 343). En particulier, $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Enfin, nous avons vu que pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact. On sait alors (ou alors on le retrouve, voir l'exercice 1 page 31) que f est une application fermée. En particulier, $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

c) Commençons par montrer que les points de $f^{-1}(\{y\})$ sont isolés. Soit $x_0 \in f^{-1}(\{y\})$, de sorte que $f(x_0) = y$. Comme df_{x_0} est inversible, on peut appliquer le théorème d'inversion locale qui nous dit que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local autour de x_0. En d'autres termes, il existe un ouvert V contenant x_0 tel que $f_{|V}$ soit une bijection de V sur $f(V)$. En particulier, f est injective sur V, donc pour tout $x \neq x_0$ et $x \in V$, $f(x) \neq f(x_0) = y$, c'est-à-dire $V \cap f^{-1}(\{y\}) = \{x_0\}$.

Or d'après a), $f^{-1}(\{y\})$ est compact. Un compact dont tous les éléments sont des points isolés est un ensemble fini (s'il était infini, il contiendrait un point d'accumulation, qui n'est pas isolé), donc $f^{-1}(\{y\})$ est fini.

d) Raisonnons par l'absurde. Si le résultat était faux, alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad f^{-1}\left(\mathrm{B}\left(y, \frac{1}{2^p}\right)\right) \not\subset \bigcup_{1 \le i \le m} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon).$$

En d'autre termes, il existe pour tout $p \in \mathbb{N}$ un élément z_p vérifiant $\|f(z_p) - y\| \le 1/2^p$ tel que $z_p \notin \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ pour tout i. La suite (z_p) est à valeurs dans le compact $f^{-1}(\mathrm{B_f}(y, 1))$, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(z_{\varphi(p)})$, de limite z. Comme f est continue, et que $\|f(z_p) - y\| \le 1/2^p$ pour tout p, on a $f(z) = y$. Il existe donc i, $1 \le i \le m$, tel que $z = x_i$, et comme $(z_{\varphi(p)})$ converge vers $z = x_i$, il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $z_{\varphi(p)} \in \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ pour tout $p \ge P$. Ceci est impossible par construction des z_p, d'où le résultat.

e) Nous allons nous servir du résultat de la question précédente. Pour cela, il faut choisir correctement $\varepsilon > 0$.

Pour tout i, df_{x_i} est inversible, donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que f soit injective sur $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon_i)$. Si $\varepsilon = \inf_{1 \le i \le m} \varepsilon_i$, on a donc $\varepsilon > 0$ et f est injective sur chaque $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$. Quitte à diminuer $\varepsilon > 0$, on peut supposer que les boules $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ sont disjointes.

D'après la question précédente, on peut trouver un voisinage ouvert V de y tel que $f^{-1}(V) \subset \cup_{1 \le i \le m} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$. Posons alors $W = V \cap \Gamma$, où $\Gamma = \cap_{1 \le i \le m} f(\mathrm{B}(x_i, \varepsilon))$. L'ensemble W est un voisinage ouvert de y (car nous avons montré à la question b) que f est une application ouverte). Par ailleurs,

— pour tout $z \in W$, on a $z \in \Gamma$ donc pour tout i, $1 \le i \le m$, il existe $x_i' \in \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ tel que $z = f(x_i')$. Comme les $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ sont disjoints, on en déduit $\mathrm{Card}\left[f^{-1}(z)\right] \ge m$.

— Pour tout $z \in W$, on a $z \in V$ donc $f^{-1}(\{z\}) \subset f^{-1}(V) \subset \cup_{1 \le i \le m} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$, et comme f est injective sur chaque $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$, on a $\mathrm{Card}\left[f^{-1}(\{z\})\right] \le m$.

On en déduit $\mathrm{Card}\left[f^{-1}(\{z\})\right] = m$ pour tout $z \in W$.

f) D'après la question précédente, l'ensemble $\Gamma_m = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{Card} f^{-1}(\{z\}) = m\}$ est un ouvert. Or f est surjective et $f^{-1}(\{z\})$ est fini pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, donc

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \Gamma_m = \Gamma_{m_0} \bigcup \left[\bigcup_{\substack{m \neq m_0 \\ m > 0}} \Gamma_m\right], \quad \text{où} \quad m_0 = \mathrm{Card} f^{-1}(\{0\}).$$

Ainsi, $\mathbb{R}^n$ est la réunion des deux ouverts Γ_{m_0} et $\cup_{m \neq m_0} \Gamma_m$. Comme $\mathbb{R}^n$ est connexe, que ces ouverts sont disjoints et que $\Gamma_{m_0} \neq \varnothing$ (car $0 \in \Gamma_{m_0}$) on en tire $\Gamma_{m_0} = \mathbb{R}^n$. En d'autres termes, $\mathrm{Card} f^{-1}(\{z\}) = m_0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

g) Les hypothèses s'écrivent aussi $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Donc $m_0 = 1$, donc d'après la question précédente, $\mathrm{Card} f^{-1}(\{z\}) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, f est bijective. On conclut avec le corollaire 4 page 344 (inversion globale) que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

CHAPITRE 6

Équations différentielles

C'EST au début du dix-septième siècle, avec le calcul différentiel et intégral découvert par Leibniz et Newton, qu'apparut la notion d'équation différentielle : divers problèmes de géométrie ou de mécanique conduisaient à des questions équivalentes à l'intégration de systèmes différentiels. A l'époque, on disposait d'une méthode générale d'intégration qui consistait à rechercher le développement en série entière des fonctions inconnues recherchées, les coefficients de ces séries se déterminant à l'aide des équations et des conditions initiales. Mais les mathématiciens de la fin du dix-septième siècle ne se contentèrent pas de ce procédé et cherchèrent à exprimer les solutions à l'aide de "fonctions élémentaires", ou tout au moins à l'aide de primitives portant sur des fonctions données directement par les équations. Ainsi, au début du dix-huitième siècle, les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires, de Bernoulli, de Ricatti, ...) furent découvertes.

L'importance des équations différentielles dans divers domaines (en physique par exemple) amena naturellement cette branche des mathématiques à devenir l'une des plus importantes, notamment grâce à Euler, Lagrange, Laplace.

Jusque là, on admettait sans discussion l'existence de solutions d'équations différentielles, sans chercher d'ordinaire à préciser les domaines où ces solutions étaient définies. C'est Cauchy qui, dans ses cours donnés à l'École Polytechnique, à partir de 1820, aborda le problème de façon rigoureuse. Il montra, sous de bonnes hypothèses, l'existence et l'unicité d'une solution dans un voisinage d'un point donné (d'ailleurs, c'est sans doute la première fois que l'on voit apparaître une étude de caractère local en mathématiques). En 1868, Lipschitz remarqua que ce résultat subsiste sous une hypothèse que l'on appelle depuis lors "condition de Lipschitz".

1. Généralités

1.1. Définitions

Une *équation différentielle* est une équation portant sur les dérivées d'une fonction. Plus précisément :

DÉFINITION 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace de Banach. Soit une application $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times E^n \to E$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times E^n$). On appelle *solution de l'équation différentielle d'ordre n*

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{$*$}$$

toute application $\varphi : I \to E$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), n fois dérivable et vérifiant

(i) pour tout $t \in I$, $\quad (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$;

(ii) pour tout $t \in I$, $\quad F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t)$.

Dans la suite de cette partie, nous utiliserons les notations de cette définition.

Toute équation différentielle peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1. Avec les notations de la définition précédente, si on définit les applications

$$\Phi : \ I \to E^n \quad t \mapsto (\varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$$
$$G : \ \Omega \subset \mathbb{R} \times E^n \to E^n \quad (t, y) = (t, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, F(t, y)),$$

il est équivalent de dire que φ est solution de (*) ou que Φ est solution de $\Phi' = G(t, \Phi)$. On peut donc se limiter à étudier les équations différentielles du premier ordre.

Remarque 1. Nous n'avons considéré ici que les équations différentielles dites *résolues*, *i. e.* celles qui se mettent sous la forme $y^{(n)} = F(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$. De manière plus générale, on peut étudier les équations différentielles *non résolues* d'ordre n qui sont du type $F(t, y, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$. Ces dernières peuvent également se ramener à des équations différentielles non résolues du premier ordre $G(t, Y, Y') = 0$ (en utilisant les mêmes techniques).

Solution maximale.

DÉFINITION 2. Une fonction $\varphi : \ I \to E$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) est dite *solution maximale* de l'équation différentielle $y^{(n)} = F(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$ s'il n'existe pas d'autre solution $\psi : \ J \to E$ de cette équation différentielle telle que $I \subset J$, $I \neq J$ et $\psi = \varphi$ sur I, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.2. Problème de Cauchy, théorème de Cauchy-Lipschitz

Problème de Cauchy. On se donne une équation différentielle

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{$*$}$$

et $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega$. On appelle *problème de Cauchy* de (*) en $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1})$ la recherche d'une fonction $\varphi : \ I \to E$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) solution de (*) et vérifiant $t_0 \in I$, $\varphi(t_0) = x_0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

On dit qu'il y a unicité au problème de Cauchy (*) en $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1})$ s'il existe au moins une solution à ce problème de Cauchy et si pour toutes solutions $\varphi : \ I \to E$ et $\psi : \ J \to E$ à ce problème, les fonctions φ et ψ coïncident sur $I \cap J$.

Lorsque la fonction F vérifient certaines hypothèses, on peut assurer l'unicité au problème de Cauchy. Rappelons que l'on peut se limiter à l'étude des équations différentielles du premier ordre.

Existence et unicité locale d'une solution : théorème de Cauchy-Lipschitz.
Rappel. On dit qu'une application F d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est *localement lipschitzienne en la seconde variable* si pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et $k > 0$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x, x' \in \mathbb{R}^n, (t, x) \in V, (t, x') \in V, \qquad \|F(t, x) - F(t, x')\| \leq k \|x - x'\|.$$

→ THÉORÈME 1 (CAUCHY-LIPSCHITZ). *Soit $F : \ \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : \ I \to \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t, y)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. De plus, il y a unicité pour le problème de Cauchy de cette équation différentielle en (t_0, x_0).*

Démonstration. Existence. Nous aurons besoin de la notion de *cylindre de sécurité*. Un point $(t_0, x_0) \in \Omega$ est fixé. Pour tout $r > 0$, on pose $\mathrm{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ et pour tout $\alpha > 0$, $I_\alpha =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$. Soit V un voisinage compact de (t_0, x_0) dans Ω sur lequel F est k-lipschitzienne en la seconde variable (la compacité de V est une commodité pour que F soit bornée sur V, mais même en dimension infinie, comme F est continue en (t_0, x_0), on peut choisir V telle que F soit bornée sur V). Notons M un majorant de F sur V. On peut choisir $r > 0$ et $\alpha > 0$, désormais fixés, tels que $I_\alpha \times B_r \subset V$ et $\alpha M < r$ (on dit que $I_\alpha \times B_r$ est un *cylindre de sécurité* pour F en (t_0, x_0)).

La fonction F est continue, toute solution est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, une application $\varphi : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ est solution si et seulement si pour tout $t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ et $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(u, \varphi(u))\, du$.

Notons Γ l'ensemble des fonctions continues $\psi : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ telles que $\psi(I_\alpha) \subset B_r$. Pour tout $\psi \in \Gamma$, l'application

$$\widetilde{\psi} : I_\alpha \to \mathbb{R}^n \quad t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t F(u, \psi(u))\, du \qquad (*)$$

vérifie

$$\forall t \in I_\alpha, \qquad \|\widetilde{\psi}(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|F(u, \psi(u))\|\, du \right| \leq \alpha M < r,$$

donc $\widetilde{\psi} \in \Gamma$. On est donc autorisé (et c'est là l'utilité du cylindre de sécurité) à définir la suite de fonctions (ψ_n) par

$$\psi_0 : I_\alpha \to \mathbb{R}^n \quad t \mapsto x_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \psi_{n+1} = \widetilde{\psi_n}.$$

Montrons que pour tout $t \in I_\alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)\| \leq r\, k^n |t - t_0|^n / n!$. Pour $n = 0$, c'est immédiat d'après (*). Pour passer du rang $n - 1$ au rang n, il suffit d'écrire, pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} \|\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(u, \psi_n(u)) - F(u, \psi_{n-1}(u))\|\, du \right| \leq \left| \int_{t_0}^t k\, \|\psi_n(u) - \psi_{n-1}(u)\|\, du \right| \\ &\leq r\, \frac{k^n}{(n-1)!} \left| \int_{t_0}^t |t - t_0|^{n-1}\, dt \right| = r\, \frac{k^n}{n!}\, |t - t_0|^n. \end{aligned}$$

La série de fonctions $\sum(\psi_{n+1} - \psi_n)$ converge donc normalement sur I_α, par conséquent la suite de fonctions (ψ_n) converge uniformément sur I_α. Notons ψ la fonction limite. On a $\psi \in \Gamma$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I_\alpha, \quad \psi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(u, \psi_n(u))\, du,$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$ on en déduit $\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(u, \psi(u))\, du$, c'est-à-dire que ψ est solution au problème de Cauchy en (t_0, x_0) sur l'intervalle I_α.

Unicité. Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ deux solutions au problème de Cauchy en (t_0, x_0). En notant, pour tout $t \in I \cap J$, $M_t = \sup_{u \in (t_0, t)} \|\psi(u) - \varphi(u)\|$, une récurrence sur n donne

$$\forall t \in I \cap J, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|F(u, \varphi(u)) - F(u, \psi(u))\|\, du \right| \leq \frac{|t - t_0|^n}{n!}\, k^n\, M_t.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit $\varphi(t) = \psi(t)$ pour tout $t \in I \cap J$. □

Remarque 2. — L'existence au problème de Cauchy reste vraie si F est seulement supposée continue (théorème de Péano), mais il n'y a plus forcément l'unicité (voir l'exercice 1).

— L'unicité au problème de Cauchy est riche de conséquences (voir les exercices de cette partie).

— Si F est de classe $\mathcal{C}^1$, F est localement lipschitzienne en la seconde variable. C'est souvent ce que l'on rencontre dans la pratique, et le théorème de Cauchy-Lipschitz est alors applicable.

— Pour les équations différentielles d'ordre n (en les ramenant à celles d'ordre 1 par la technique décrite plus haut), le théorème de Cauchy s'exprime ainsi : si $y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ est une équation différentielle d'ordre n et si F est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable $Y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$, alors il y a unicité au problème de Cauchy.

Terminons par le corollaire suivant portant sur les solutions maximales.

COROLLAIRE 1. *Soit* $F:\ \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *(où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$*) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout* $(t_0, x_0) \in \Omega$*, il existe une unique solution maximale* φ *de l'équation différentielle* $y' = F(t, y)$ *prenant la valeur* x_0 *en* t_0 *; cette solution maximale est définie sur un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*.*

1.3. Exercices

EXERCICE 1. Montrer que pour l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y' = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

il n'y a pas unicité au problème de Cauchy.

Solution. Faisons une première remarque : cette équation différentielle ne faisant pas intervenir la variable t, si une fonction $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est solution, il en est de même pour toutes les fonctions $f_c:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad t\mapsto f(t-c)$ $(c\in\mathbb{R})$.

La fonction $\varphi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ pour $x \leq 0$, et $\varphi(x) = x^2/4$ pour $x \geq 0$, est solution comme on le vérifie facilement. Notre remarque précédente montre alors que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\varphi_c:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad t\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq c \\ (t-c)^2/4 & \text{si } t > c \end{cases}$$

est solution. Mais pour $c > 0$, ces fonctions coïncident sur $\mathbb{R}^-$, et pourtant elles ne sont pas identiques. Il n'y a donc pas unicité au problème de Cauchy (le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas car il n'y a pas de caractère lipschitzien).

EXERCICE 2. Soit $F:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On s'intéresse à l'équation différentielle $y'' = F(t, y, y')$. On suppose que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $F(t, 0, 0) = 0$ (en d'autres termes, la fonction nulle est solution). Montrer que toute solution non identiquement nulle a ses zéros isolés.

Solution. C'est classique ! Soit φ une solution non identiquement nulle, et soit t_0 un zéro éventuel de φ.

On a $\varphi'(t_0) \neq 0$. En effet, si $\varphi'(t_0) = 0$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car F est de classe $\mathcal{C}^1$), φ ayant même valeur et même dérivée que la fonction nulle en t_0, φ est la fonction nulle (unicité au problème de Cauchy pour les équations différentielles du second ordre), ce qui est absurde.

On peut écrire, lorsque t tend vers t_0,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi'(t_0) + o(t-t_0) = (t-t_0)\left[\varphi'(t_0) + o(1)\right],$$

et comme $\varphi'(t_0) \neq 0$, le terme $\varphi'(t_0) + o(1)$ est non nul sur un voisinage de t_0, donc sur un voisinage de t_0, φ ne s'annule qu'en t_0.

Les zéros de φ sont donc isolés.

EXERCICE 3. Soit $F:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $f, g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$. On suppose qu'il existe $t_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t) < g(t)$.

Solution. Raisonnons par l'absurde. S'il existe $t_1\in\mathbb{R}$ tel que $f(t_1) \geq g(t_1)$, alors comme f et g sont continues (elles sont même de classe $\mathcal{C}^1$), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = g(u)$. Mais alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car F est de classe $\mathcal{C}^1$) il y a unicité au problème de Cauchy au point u, donc $f = g$. Ceci est absurde car $f(t_0) \neq g(t_0)$, d'où le résultat.

EXERCICE 4. Soit $F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\exists T > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad F(t+T,\,.\,) = F(t,\,.\,). \tag{$*$}$$

Soit $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' = F(t,y)$. Montrer que la suite $(\varphi(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone ou est constante. Dans ce dernier cas, montrer que φ est une solution T-périodique.

Solution. Comme φ est solution, la relation (*) montre que la fonction $\varphi_T:\ t \mapsto \varphi(t+T)$ est aussi une solution. Trois cas se présentent.

(i) Si $\varphi(0) < \varphi(T) = \varphi_T(0)$, alors d'après l'exercice précédent, on a $\varphi(t) < \varphi_T(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en conclut $\varphi(kT) < \varphi_T(kT) = \varphi((k+1)T)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, autrement dit, la suite $(\varphi(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(ii) Si $\varphi(0) > \varphi(T)$, on montrerait en procédant de la même manière que la suite $(\varphi(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(iii) Si $\varphi(0) = \varphi(T) = \varphi_T(0)$, alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui donne l'unicité au problème de Cauchy), $\varphi = \varphi_T$, c'est-à-dire que φ est T-périodique, et en particulier, la suite $(\varphi(kT))$ est constante.

2. Équations différentielles linéaires

Nous nous limiterons à l'étude des équations différentielles linéaires en dimension finie. Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un singleton), et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On identifie les éléments de $\mathbb{K}^n$ et leur écriture sous forme de matrice colonne.

2.1. Généralités

DÉFINITION 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Toute équation différentielle sur $\mathbb{K}^n$ d'ordre p du type

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)\,Y^{(p-1)} + \cdots + A_0(t)\,Y + B(t), \tag{L}$$

où $A_{p-1},\dots,A_0$ sont des fonctions continues de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B:\ I \to \mathbb{K}^n$ une fonction continue quelconque, est appelée équation différentielle *linéaire* d'ordre p.

Lorsque la fonction B est identiquement nulle sur I, l'équation différentielle linéaire (L) est dite *homogène.*

Comme on l'a vu dans la partie précédente, on peut ramener toute équation différentielle d'ordre p à une équation différentielle d'ordre 1. Ici, l'équation différentielle linéaire (L) peut aussi s'écrire

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

(écriture en matrices par blocs). Ainsi, nous avons ramené l'équation différentielle *linéaire* (L) d'ordre p à une équation différentielle *linéaire* d'ordre 1 (l'espace des vecteurs de base passe de $\mathbb{K}^n$ à $\mathbb{K}^{np}$). Pour cette raison, nous nous limiterons à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Remarque 1. Lorsque l'équation différentielle linéaire porte sur des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 2$), on parle aussi de *système différentiel linéaire*. Si $n = 1$, on parle d'équation différentielle linéaire *scalaire*.

Solutions des équations différentielles linéaires. Les solutions maximales des équations différentielles linéaires ont la propriété d'être définies sur tout l'intervalle I où les fonctions de l'équation sont définies. Plus précisément, on a le résultat suivant, dont une preuve est donnée au corollaire 1 page 400.

THÉORÈME 1. *Soit une équation différentielle linéaire*

$$Y' = A(t)\,Y + B(t), \tag{L_1}$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ sont des fonctions continues. Alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $X_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution V de (L_1) définie sur I tout entier, telle que $V(t_0) = X_0$.

Remarque 2. La version de ce théorème pour les équations différentielles linéaires d'ordre p est la suivante : pour tout $t_0 \in I$, pour tout $X_0, \dots, X_{p-1} \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution φ de (L) définie sur I tout entier, telle que $\varphi(t_0) = X_0, \dots, \varphi^{(p-1)}(t_0) = X_{p-1}$.

→ THÉORÈME 2. *Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une fonction continue. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions maximales de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$\frac{dY}{dt} = A(t)\,Y \tag{H}$$

est un s.e.v de dimension n du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ (fonctions $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}^n$).

Démonstration. La forme de (H) montre que $\mathcal{S}_H$ est un s.e.v de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$. Par ailleurs, pour $t_0 \in I$ fixé, l'application $\Phi : \mathcal{S}_H \to \mathbb{K}^n \quad V \mapsto V(t_0)$ est linéaire. C'est même un isomorphisme d'après le théorème précédent, d'où le résultat. □

Remarque 3.
- De ce théorème, on déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (L) : $Y' = A(t)\,Y + B(t)$ est un espace affine de dimension n. En effet, si V_0 est une solution particulière de (L), les solutions de L s'écrivent $V + V_0$, où V décrit les solutions de (H).
- La construction effectuée plus haut pour transformer une équation différentielle linéaire d'ordre p en une équation différentielle linéaire d'ordre 1 montre, avec ce dernier théorème, que les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène sur $\mathbb{K}^n$, d'ordre p, forment un $\mathbb{K}$-e.v de dimension np.

Wronskien. On se donne (H) : $Y' = A(t)\,Y$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^n$, où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

DÉFINITION 2. Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions de (H). On appelle *wronskien* de $V_1, \dots, V_n$ l'application wronskien : $I \to \mathbb{K} \quad t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$.

Remarque 4. Considérons une équation différentielle linéaire homogène *scalaire* d'ordre p

$$y^{(p)} = a_{p-1}(t)\,y^{(p-1)} + \cdots + a_0(t)\,y \tag{H_p}$$

(où les a_i sont des fonctions de I dans $\mathbb{K}$). Nous avons vu plus haut comment transformer (H_p) en une équation différentielle (H_1) d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^p$, et il résulte de la construction que v est une solution de (H_p) si et seulement si $\begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v^{(p-1)} \end{pmatrix}$ est solution de (H_1). On appelle wronskien de p solutions $v_1, \ldots, v_p$ de (H_p) le wronskien de l'équation différentielle (H_1) des solutions $\begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_i^{(p-1)} \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq p)$ de (H_1), en d'autres termes

$$\text{wronskien}(v_1, \ldots, v_p)(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \cdots & v_p(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(p-1)}(t) & v_2^{(p-1)}(t) & \cdots & v_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Par exemple, le wronskien de deux solutions u et v d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : $y'' = p(t)y' + q(t)y$ est $\left|\begin{smallmatrix} u & v \\ u' & v' \end{smallmatrix}\right| = uv' - u'v$.

Nous verrons dans l'exercice 7 page 388 un moyen pratique de calculer le wronskien.

Proposition 1. *Soient $V_1, \ldots, V_n$ des solutions de (H). Le rang des vecteurs $V_1(t), \ldots,$ $V_n(t)$ est indépendant de $t \in I$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'isomorphisme $\Phi : \mathcal{S}_H \to \mathbb{K}^n \quad V \mapsto V(t_0)$ (où $t_0 \in I$ est fixé) — voir la preuve du théorème 2. □

Corollaire 1. *Des solutions $V_1, \ldots, V_n$ de (H) forment une base des solutions de (H) si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que* $\text{wronskien}(V_1, \ldots, V_n)(t_0) \neq 0$*, et dans ce cas on a* $\text{wronskien}(V_1, \ldots, V_n)(t) \neq 0$ *pour tout $t \in I$.*

***Résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{K}$.** Il est facile de résoudre l'équation différentielle linéaire homogène $(H) :\ y' = a(t)\, y$, où $a :\ I \to \mathbb{K}$ est continue. Les solutions (dont on sait d'après le théorème 2 qu'elles forment un $\mathbb{K}$-e.v de dimension 1) sont toutes proportionnelles à $t \mapsto e^{\psi(t)}$, où ψ est une primitive de a sur l'intervalle I.

Pour résoudre ensuite l'équation différentielle linéaire inhomogène $(L) :\ y' = a(t)\, y + b(t)$, où $b :\ I \to \mathbb{K}$ est continue, on applique la méthode de *variation de la constante.* On recherche les solutions sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\, e^{\psi(t)}$ où $\lambda :\ I \to \mathbb{K}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ encore inconnue. Par dérivation, on voit que notre fonction est solution si et seulement si $\lambda'(t)e^{\psi(t)} = b(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à dire que λ est une primitive de $e^{-\psi(t)}b(t)$ sur I (voir des calculs pratiques dans l'exercice 1). Rappelons que la solution générale de (L) est la somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (L).

***Résolution d'un système linéaire d'ordre* 1.** Dans le cas général, il n'existe pas de méthode pratique pour résoudre un système différentiel homogène $(H) :\ Y' = A(t)\, Y$ lorsqu'on est en dimension $n \geq 2$. Cependant, si on connaît n solutions $V_1, \ldots, V_n$ de (H), linéairement indépendantes, on sait que la solution générale de (H) est $\sum_i \lambda_i\, V_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (voir le théorème 2). Connaissant ces solutions, on peut résoudre le système différentiel inhomogène $(L) :\ Y' = A(t)Y + B(t)$ par la méthode de variation des constantes.

On recherche les solutions de (L) sous la forme $V :\ t \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\, V_i(t)$ où les $\lambda_i :\ I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$. Par dérivation, on obtient que V est solution de (L) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)\, V_i(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\, V_i'(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\, A(t)\, V_i(t) + B(t),$$

et comme $V_i' = A(t)\, V_i$, ceci s'écrit aussi

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)\, V_i(t) = B(t).$$

Les V_i étant indépendants, ceci apparaît comme un système de Cramer dont les inconnues sont les $\lambda_i'(t)$. Par résolution puis intégration, on trouve les λ_i (voir l'exercice 1 pour des calculs pratiques).

Regardons en particulier comment mettre en œuvre cette méthode pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 sur $\mathbb{K}$.

Supposons connues deux solutions linéairement indépendantes u et v de (H) : $y'' = a(t)\,y' + b(t)\,y$, et recherchons la solution générale de (L) : $y'' = a(t)\,y' + b(t)\,y + c(t)$. On se ramène d'abord à un système différentiel d'ordre 1 : en posant $Y = \left(\begin{smallmatrix} y \\ y' \end{smallmatrix}\right)$, les équations différentielles (H) et (L) deviennent respectivement (H_1) : $Y' = A(t)\,Y$ et (L_1) : $Y' = A(t)\,Y + C(t)$ où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de trouver les solutions de (L_1). On pose $W(t) = \lambda(t)\,U(t) + \mu(t)\,V(t)$, où $U(t) = \left(\begin{smallmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{smallmatrix}\right)$ et $V(t) = \left(\begin{smallmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{smallmatrix}\right)$. Comme on l'a vu plus haut, W est solution de (L_1) si et seulement si $\lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) = C(t)$ pour tout $t \in I$, donc $t \mapsto \lambda(t)\,u(t) + \mu(t)\,v(t)$ est solution de (L) si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda' u & + & \mu' v & = & 0 \\ \lambda' u' & + & \mu' v' & = & c(t) \end{array} \right. ,$$

relations utiles dans les exercices (voir l'exercice 1).

***Abaissement de l'ordre dans une équation différentielle linéaire sur* $\mathbb{K}$.** On considère une équation différentielle de la forme (L) : $y^{(n)} = a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y$, où les a_i sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Si l'on connaît une solution φ de (L), il est possible d'abaisser l'ordre de (L) en procédant comme suit : on recherche les solutions de (L) sous la forme $f = g\varphi$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ encore inconnue. En remplaçant dans (L), on voit que f est solution si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, g^{(k)} \varphi^{(n-k)} = a_{n-1}(t) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k g^{(k)} \varphi^{(n-1-k)} + \cdots + a_1(t)\,(g\varphi' + g'\varphi) + a_0(t)\,g\varphi,$$

et comme φ est solution de (L), tous les termes contenant g s'éliminent, ce qui entraîne

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k\, g^{(k)} \varphi^{(n-k)} = a_{n-1}(t) \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k g^{(k)} \varphi^{(n-1-k)} + \cdots + a_1(t)\,(g'\varphi).$$

Autrement dit, g' est solution d'une équation différentielle d'ordre $n-1$: nous venons d'abaisser l'ordre de l'équation.

Cette technique est particulièrement sympathique dans le cas des équations du second ordre (L_2) : $y'' = a(t)\,y' + b(t)\,y$. Si on connaît une solution φ, $f = g\varphi$ sera solution de (L_2) si et seulement si $(2g'\varphi' + g''\varphi) = a(t)\,g'\varphi$, équation linéaire d'ordre 1 en g' que l'on sait intégrer, ce qui permet de connaître toutes les solutions de (L_2).

2.2. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Lorsque $A(t)$ est une matrice constante A, il est possible de résoudre l'équation différentielle $Y' = AY$ en utilisant une exponentielle de matrice (voir le tome Algèbre). Rappelons que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n/n!$.

PROPOSITION 2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'équation différentielle (H) : $Y' = AY$ a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$, et la solution prenant une valeur donnée $V_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t = 0$ est V : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad t \mapsto e^{tA}\,V_0$, où $V_0 \in \mathbb{K}^n$.*

Démonstration. La fonction V prend bien la valeur V_0 en 0 car l'exponentielle de la matrice nulle est la matrice identité. Par ailleurs, on peut écrire V sous la forme $V(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(A^n V_0)$. Par les techniques usuelles sur les séries de fonctions, on montre que V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad V'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A^n V_0) = A\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(A^n V_0)\right) = A\,V(t).$$

□

Remarque 5. — En réduisant la matrice A, on peut donc avoir de précieux renseignements sur les solutions de (H).
- — Lorsque l'on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut réduire la matrice A dans $\mathbb{C}$, puis écrire les solutions de (H) sous la forme $\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}$ où φ est une solution complexe de (H).

Un cas particulier intéressant est celui des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre p sur $\mathbb{K}$, à coefficients constants :

$$y^{(p)} + a_1\, y^{(p-1)} + \cdots + a_p\, y = 0. \qquad (E)$$

En se ramenant au cas matriciel, on peut montrer le résultat suivant (dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

On considère le polynôme $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ (appelé polynôme caractéristique de E), puis on le factorise sous la forme $\prod_{i=1}^{k}(X - r_i)^{m_i}$. Les solutions de (E) sont les applications

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t}\, P_i(t),$$

où les P_i sont des polynômes de degré $< m_i$. Ce résultat fait l'objet de l'exercice 4 page 385. Il généralise les résultats connus pour l'ordre 1 et l'ordre 2. Rappelons ceux du deuxième ordre. Soit $(H) :\ y'' + ay' + by = 0$ et $P = X^2 + aX + b$. Alors
- — Si P a deux racines distinctes r_1 et r_2, les solutions de (H) sont les fonctions $t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ (si on est sur $\mathbb{R}$ et si les r_i sont complexes, il faut conjuguer les expressions) ;
- — Si P a une racine double r, les solutions sont les fonctions $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

2.3. Exercices

Exercice 1. Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ (sauf dans la question 2/ b) où on demande les solutions sur $]-\pi/2, \pi/2[$) des équations différentielles suivantes.

1/ (Équations linéaires du premier ordre.)

a) $y' + y = \sin t\,;$ **b**) $(1+t^2)y' = ty + (1+t^2)\,;$ **c**) $(1-t^2)y' + ty = 0.$

2/ (Équations linéaires du second ordre.)

a) $y''+2y'+y = te^t\,;$ **b**) $y''+y = \tan^2 t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)\,;$ **c**) $t^2y''-2y = 3t^2.$

Solution. **1/ a)** On commence par résoudre l'équation homogène associée $(H) :\ y' + y = 0$, dont les solutions sont $t \mapsto \lambda e^{-t}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Pour résoudre $(L) :\ y' + y = \sin t$, on applique la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\, e^{-t}$. Celle ci sera solution de (L) si et seulement si $\lambda'(t)\, e^{-t} = \sin t$, c'est-à-dire $\lambda'(t) = e^t \sin t$, ce qui par intégration équivaut à $\lambda(t) = \mu + e^t(\sin t - \cos t)/2$, où μ est une constante réelle. Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (L) sont les fonctions

$$t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2} + \mu e^{-t}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

b) On procède de la même manière. Ici, l'équation homogène associée est (H) : $(1+t^2)y' = ty$, qui équivaut à $y' = \frac{t}{1+t^2}\, y$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda\sqrt{1+t^2}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Pour résoudre (L) : $y' = \frac{t}{1+t^2}\, y + 1$, on applique la méthode de variation de la constante. La fonction $t \mapsto \lambda(t)\sqrt{1+t^2}$ est solution si et seulement si

$$\lambda'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda(t) = \mu + \log(t + \sqrt{1+t^2}), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (L) sont donc celles de la forme $t \mapsto \mu\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1+t^2}\, \log(t+\sqrt{1+t^2})$ $(\mu \in \mathbb{R})$.

c) On ne peut diviser l'équation par $(1-t^2)$ pour la rendre résolue que si $t \notin \{-1, 1\}$. On a donc affaire à une équation incomplète. Nous allons la résoudre sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ puis “recoller” éventuellement les solutions pour trouver une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On montre facilement que les solutions de (L) : $y' = \frac{t}{t^2-1}\, y$ sont

— sur $]-\infty, -1[$, $t \mapsto \lambda\sqrt{t^2-1}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;
— sur $]-1, 1[$, $t \mapsto \mu\sqrt{1-t^2}$ $(\mu \in \mathbb{R})$;
— sur $]1, +\infty[$, $t \mapsto \nu\sqrt{t^2-1}$ $(\nu \in \mathbb{R})$.

Si $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$, ces solutions ne peuvent, après prolongement, donner une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier (elle ne serait pas dérivable en -1 ou en 1). La seule solution de (L) définie sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction nulle.

2/ a) L'équation homogène associée est (H) : $y'' + 2y' + y = 0$. Son polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$, qui a une racine double en -1. Les solutions de (H) sont donc celles de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Il nous reste à trouver une solution de (L) : $y'' + 2y' + y = te^t$. On pourrait pour cela utiliser la méthode de variation des constantes. Ici, la forme du second membre nous invite à faire plus simple, et à rechercher une solution sous la forme $t \mapsto (at^2 + bt + c)e^t$. En reportant dans (L) et après identification, on trouve $a = 0$, $b = 1/4$, $c = -1/4$.

La solution générale de (L), somme d'une solution particulière de (L) et de la solution générale de (H), est donc

$$t \mapsto \left(\frac{t-1}{4}\right) e^t + (\lambda t + \mu)e^{-t}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $t \mapsto \lambda\cos t + \mu\sin t$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour trouver une solution de (L) : $y'' + y = \tan^2 t$, on applique la méthode de variation des constantes. Une fonction de la forme $t \mapsto \lambda(t)\, \cos t + \mu(t)\, \sin t$ sera solution de (L) si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda'\cos t + \mu'\sin t & = & 0 \\ \lambda'(-\sin t) + \mu'\cos t & = & \tan^2 t \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda'(t) = -\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} \quad \text{et} \quad \mu'(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos t},$$

et par intégration on en déduit

$$\lambda(t) = \alpha - \cos t - \frac{1}{\cos t}, \qquad \mu(t) = \beta - \sin t + \log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right], \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale de (L) est donc

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \alpha\cos t + \beta\sin t - 2 + \sin t\, \log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right], \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

c) Remarquons que les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto 1/t$ sont solutions de (H) : $t^2y'' - 2y = 0$ (attention, ici l'équation est incomplète ; il faut résoudre sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis recoller les solutions par prolongement pour trouver des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier). Sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, ces deux solutions forment une base de l'e.v des solutions de (H).

La méthode de variation des constantes va une fois de plus nous permettre de trouver une solution de (L) : $y'' - 2y/t^2 = 3$. La fonction $t \mapsto \lambda(t)\, t^2 + \mu(t)/t$ sera solution si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda' t^2 & + & \mu'/t & = & 0 \\ 2t\,\lambda' & - & \mu'/t^2 & = & 3 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda' = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad \mu' = -t^2,$$

ce qui équivaut à $\lambda(t) = \alpha + \log|t|$ et $\mu(t) = \beta - t^3/3$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), d'où les solutions de (L) :

$$t \mapsto \alpha_1\, t^2 + \frac{\beta_1}{t} + t^2 \log|t| - \frac{t^2}{3} \quad \text{sur} \quad]-\infty, 0[, \qquad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \alpha_2\, t^2 + \frac{\beta_2}{t} + t^2 \log t - \frac{t^2}{3} \quad \text{sur} \quad]0, +\infty[, \qquad \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour que ces solutions puissent se prolonger pour donner une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut avoir $\beta_1 = \beta_2 = 0$ (pour avoir une limite finie en 0). Dans ce cas, on remarque que le raccord est dérivable en 0, n'est pas deux fois dérivable en 0 (à cause du terme en $t^2 \log|t|$). Il n'y a donc pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Remarque. La méthode utilisée dans la question 2/ a) se généralise comme suit. Soit (L) : $y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = e^{\lambda t} P(t)$ une équation différentielle linéaire, où les a_i et λ sont des constantes et P un polynôme de degré q. Soit χ le polynôme caractéristique $X^n + a_1\, X^{n-1} + \cdots + a_n$, et soit m l'ordre de multiplicité de la racine éventuelle λ de χ (en convenant $m = 0$ si $\chi(\lambda) \neq 0$). Alors l'équation (L) admet une unique solution de la forme $t \mapsto t^m\, e^{\lambda t} Q(t)$, où Q est un polynôme de degré q.

Exercice 2. Déterminer les solutions réelles des systèmes différentiels suivant :

$$\textbf{a)} \quad \begin{cases} x' & = & x & + & z \\ y' & = & -y & - & z \\ z' & = & 2y & + & z \end{cases} \qquad \textbf{b)} \quad \begin{cases} x'' & + & x' & + & 4y' & - & x & - & 3y & = & 0 \\ y'' & & & - & 3y' & + & x & + & 3y & = & 0 \end{cases}$$

Solution. **a)** Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que le système s'écrit $X' = AX$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Pour déterminer les solutions, nous diagonalisons A. On calcule facilement son polynôme caractéristique $P_A = -(X-1)(X^2+1) = -(X-1)(X+i)(X-i)$, et après calculs, les sous-espaces propres sont

$$\operatorname{Ker}(A - I) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Ker}(A - iI) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Ker}(A + iI) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que A se diagonalise dans $\mathbb{C}^3$. On va donc trouver des solutions complexes, puis on déterminera les solutions réelles en prenant les parties réelles et imaginaires.

Soit $\lambda \in \{1, i, -i\}$. Si X : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^3 \quad t \mapsto X(t)$ est solution et vérifie $X(t) \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ pour tout t, on a $X' = AX = \lambda X$, donc $X = e^{\lambda t} X(0)$, où $X(0) \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$. Réciproquement, on vérifie facilement que ainsi définie, X est bien solution. Par linéarité, on en déduit donc que les fonctions

$$t \mapsto \alpha\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\, e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma\, e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C})$$

sont des solutions. L'espace des solutions étant de dimension 3 (voir le théorème 2), on en déduit que ceci est la solution générale (complexe). Pour obtenir la solution réelle générale, on prend les parties réelles et imaginaires. On en conclut facilement que la solution réelle générale est

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \lambda\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

b) Notons (i) la première équation du système et (ii) la seconde. En additionnant (i) et (ii), on obtient $(x' + y')' + (x' + y') = 0$, donc $x' + y'$ est solution de l'équation différentielle $z' + z = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x' + y' = \lambda e^{-t}$. Par intégration, on en déduit l'existence de deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $x + y = \alpha + \beta e^{-t}$. En remplaçant cette égalité dans (ii), on obtient $(iii) :\ y'' - 3y' + 2y = -\alpha - \beta e^{-t}$. L'équation homogène associée est $(iv) :\ y'' - 3y' + 2y = 0$. Son polynôme caractéristique est $(X - 1)(X - 2)$, les solutions de (iv) sont donc de la forme $t \mapsto \gamma e^t + \delta e^{2t}$, avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. On recherche une solution particulière de (iii) sous la forme $t \mapsto a + be^{-t}$. En remplaçant et après identification, on obtient $a = -\beta/2$, $b = -\alpha/6$, et on en déduit que la solution générale de (iii) est

$$t \mapsto -\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6}\, e^{-t} + \gamma e^t + \delta e^{2t}, \qquad \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Or on a vu plus haut que $x = \beta + \alpha e^{-t} - y$, donc la solution générale du système est

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha\, e^{-t} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Remarque. Dans la question a), on aurait aussi pu trouver les solutions en passant par les exponentielles de matrice. D'ailleurs, la méthode que nous avons utilisée ne s'applique plus lorsque la matrice n'est pas diagonalisable.

Dans la question b), la technique que nous avons employée n'est pas toujours applicable : parfois, des transformations linéaires simples sur les équations du système ne permettent pas de le réduire facilement. On peut utiliser une méthode systématique, qui consiste a transformer le système en un système d'ordre 1. Ici, le système b) s'écrit aussi $X'' + AX' + BX = 0$ avec $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, et on le transforme en

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

système que l'on sait désormais résoudre.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions $f :\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui sont dérivables et qui vérifient $(E) :\ f'(t) = f(1/t)$ pour tout $t > 0$.

Solution. Si f vérifie (E), alors f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ (car $f'(t) = f(1/t)$), et en dérivant (E), on voit que

$$\forall t > 0, \qquad f''(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{1/t}\right) = -\frac{f(t)}{t^2},$$

autrement dit, f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(L) :\ t^2 y'' + y = 0$. Ce type d'équation différentielle est classique et s'appelle *équation d'Euler*. On peut la résoudre sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = \pm e^x$, nous ramenant ainsi à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants (voir la remarque à la fin de l'exercice). Ici, nous allons utiliser une technique différente.

On veut résoudre (L) sur $]0, +\infty[$. Nous allons commencer par en rechercher les solutions complexes. La forme de (L) nous invite à rechercher des solutions particulières sous la forme $t \mapsto t^\alpha$, où α est une constante complexe. Ceci sera le cas si et seulement si $t^2(\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha - 2}) + t^\alpha = 0$ pour tout $t > 0$, ce qui équivaut à $\alpha(\alpha - 1) + 1 = 0$. Ainsi, si α est racine du polynôme $P = X(X - 1) + 1 = X^2 - X + 1$, l'application $t \mapsto t^\alpha$ est solution de (L) sur $]0, +\infty[$. Le polynôme P a deux racines distinctes qui sont $\alpha_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{\alpha_1}$, on a donc trouvé deux solutions de (L) qui sont linéairement indépendantes. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène (L) formant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, on en déduit que la solution générale de (L) est

$$t \mapsto a\,t^{\alpha_1} + b\,t^{\alpha_2}, \qquad a, b \in \mathbb{C}. \tag{$*$}$$

Finalement, nous venons de montrer que si f est une solution complexe de (E), elle est de la forme (*). Réciproquement, une fonction de la forme (*) est solution si et seulement si

$$\forall t > 0, \qquad a\alpha_1\,t^{\alpha_1 - 1} + b\alpha_2\,t^{\alpha_2 - 1} = a\,t^{-\alpha_1} + b\,t^{-\alpha_2},$$

ce qui en remplaçant α_1 et α_2 par leurs valeurs s'écrit aussi

$$\forall t > 0, \qquad a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) t^{-1/2 + i\sqrt{3}/2} + b\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) t^{-1/2 - i\sqrt{3}/2} = a\,t^{-1/2 - i\sqrt{3}/2} + b\,t^{-1/2 + i\sqrt{3}/2}.$$

Ceci sera vérifié si et seulement si

$$a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b \quad \text{et} \quad b\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a, \qquad \text{ou encore} \quad a\,e^{i\pi/3} = b \quad \text{et} \quad b\,e^{-i\pi/3} = a.$$

Ces deux équations sont liées, et elles sont équivalentes à l'existence d'un nombre complexe c tel que $a = ce^{-i\pi/6}$ et $b = ce^{i\pi/6}$. Finalement, f est une solution complexe de (E) si et seulement si elle est de la forme

$$t \mapsto c\left(e^{-i\pi/6}\,t^{1/2 + i\sqrt{3}/2} + e^{i\pi/6}\,t^{1/2 - i\sqrt{3}/2}\right) = c\,t^{1/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log t - \frac{\pi}{6}\right), \qquad c \in \mathbb{C}.$$

On en déduit que la solution réelle générale de (E) est la même que la précédente, où la constante c doit être prise dans $\mathbb{R}$.

Remarque. De manière générale, on appelle *équation d'Euler* les équations linéaires homogènes du type

$$t^n\,y^{(n)} + a_1 t^{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t\,y' + a_n\,y = 0, \tag{$**$}$$

où les a_i sont des constantes complexes. En effectuant le changement de variable $t = \varepsilon\,e^x$, $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$, on ramène cette équation à une équation linéaire homogène à coefficients constants d'ordre n que l'on sait résoudre.

La technique que nous avons utilisée dans l'exercice pour résoudre ce type d'équations est de rechercher des solutions particulières sous la forme $t \mapsto t^\alpha$. En remplaçant dans (**), on trouve que ceci donne une solution si et seulement si α est racine d'un certain polynôme P de degré n. Si P a ses n racines distinctes, alors cette méthode nous donne n solutions linéairement indépendantes, et on en déduit toutes les solutions puisque l'espace des solutions est de dimension n. Par contre, si P a une ou plusieurs racines multiples, ceci ne nous donne qu'un nombre $< n$ de solutions indépendantes, et on ne peut donc pas en déduire toutes les solutions par cette méthode. Il faut procéder comme décrit précédemment.

EXERCICE 4 (SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE n À COEFFICIENTS CONSTANTS). Pour tout polynôme complexe $P = \sum_{i=0}^{n} a_i\,X^i$ et pour toute fonction $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$, on note

$$P(D)(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,f^{(i)} = a_n\,f^{(n)} + \cdots + a_1\,f' + a_0\,f$$

(D est l'opérateur de dérivation).

a) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\mathcal{S}_P$ l'espace des solutions de l'équation

différentielle $P(D)(y) = 0$. Si $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{C}[X]$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, montrer que $\mathcal{S}_{P_1 \cdots P_k} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_k}$.
b) Si $P_n(X) = (X - \alpha)^n$, déterminer la forme des solutions de l'équation différentielle $P_n(D)(y) = 0$.
c) En déduire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ $(\deg(P) \geq 1)$, la forme des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$.

Solution. Nous faisons tout de suite la remarque suivante, qui nous sera utile :

$$\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \qquad PQ(D)(y) = P(D)[Q(D)(y)] = Q(D)[P(D)(y)].$$

Remarquons aussi que pour tout polynôme P, toute solution de $P(D)(y) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

a) On regarde D comme l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (e.v des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) qui a tout u associe u'. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Dire que u est solution de l'équation différentielle $P(D)(u) = 0$, c'est dire que $u \in \operatorname{Ker} P(D)$. Autrement dit, $\mathcal{S}_P = \operatorname{Ker} P(D)$.

Maintenant, si les polynômes $P_1, \ldots, P_k$ sont premiers entre eux deux à deux, on a d'après le théorème de décomposition des noyaux (voir le tome Algèbre) $\operatorname{Ker} P_1 \cdots P_k(D) = \operatorname{Ker} P_1(D) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_k(D)$. En d'autres termes, $\mathcal{S}_{P_1 \cdots P_k} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_k}$.

b) L'intuition nous guide et nous fait pressentir que les solutions de $P_n(D)(y) = 0$ sont les fonctions $t \mapsto e^{\alpha t}\, F(t)$ où F est un polynôme complexe de degré $< n$. Montrons donc ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, c'est facile car $P_1(D)(y) = 0$ équivaut à $y' = \alpha y$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda\, e^{\alpha t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n. L'équation $P_n(D)(y) = 0$ s'écrit aussi $P_{n-1}(D)[P_1(D)(y)] = 0$, ce qui équivaut à dire que $P_1(D)(y)$ a la forme $t \mapsto e^{\alpha y}\, F(t)$, où $F \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(F) < n-1$. Or l'équation $y' - \alpha y = e^{\alpha t}\, F(t)$ s'écrit aussi $(ye^{-\alpha t})' = F(t)$, ce qui équivaut à $y = e^{\alpha t} G(t)$ où G est une primitive de F, c'est-à-dire $G \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(G) < n$. On en déduit le résultat au rang n, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $P = \lambda \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^{n_i}$ la décomposition de P en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. D'après le résultat de la question a), on a

$$\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{(X-\alpha_1)^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{(X-\alpha_k)^{n_k}},$$

et comme d'après b), $\mathcal{S}_{(X-\alpha_i)^{n_i}}$ est le s.e.v des fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha_i t} F_i(t)$ avec $F_i \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(F_i) < n_i$, on en déduit que $\mathcal{S}_P$ est l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha_1 t} F_1(t) + \cdots + e^{\alpha_k t} F_k(t)$ où pour tout i, F_i est un polynôme complexe de degré $< n_i$.

Exercice 5. **a)** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \qquad \lim_{t \to +\infty} f'(t) + \alpha f(t) = 0.$$

Si $\Re(\alpha) > 0$, montrer que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
b) Pour tout polynôme complexe $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ de degré $n \geq 1$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$, on pose $P(D)(f) = a_n\, f^{(n)} + \cdots + a_1\, f' + a_0\, f$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur un polynôme complexe P de degré n pour que la propriété suivante soit vraie : pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ vérifiant $\lim_{t \to +\infty} [P(D)(f)](t) = 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Solution. **a)** Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A > 0$ tel que $|f'(t) + \alpha f(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \geq A$. En notant $a = \Re(\alpha)$, on a

$$\forall t \geq A, \qquad \left| \frac{d}{dt}[e^{\alpha t} f(t)] \right| = \left| e^{\alpha t}[f'(t) + \alpha f(t)] \right| = e^{at} \left| f'(t) + \alpha f(t) \right| \leq \varepsilon\, e^{at},$$

ce qui entraîne par intégration

$$\forall t \geq A, \qquad |e^{\alpha t} f(t) - e^{\alpha A} f(A)| \leq \int_A^t \left| \frac{d}{du} \left[e^{\alpha u} f(u) \right] \right| du \leq \int_A^t \varepsilon \, e^{au} \, du = \frac{\varepsilon}{a} \left(e^{at} - e^{aA} \right),$$

donc

$$\forall t \geq A, \qquad |f(t)| \leq e^{a(A-t)} |f(A)| + \frac{\varepsilon}{a} \left(1 - e^{a(A-t)} \right).$$

Comme $a > 0$, on en déduit l'existence de $B > A$ tel que $|f(t)| \leq 2\varepsilon/a$ pour tout $t \geq B$, d'où le résultat.

b) La relation $PQ(D)(f) = P(D)[Q(D)(f)]$ pour tout $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ va nous permettre de montrer que la condition nécessaire est suffisante recherchée est que toutes les racines de P aient une partie réelle strictement négative.
Condition nécessaire. Nous montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, c'est précisément le résultat démontré dans la question précédente. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n. Écrivons $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$, et supposons que toutes les racines α_i de P vérifient $\Re(\alpha_i) < 0$. On peut écrire $P = Q(X - \alpha_n)$, où Q est un polynôme de degré $n-1$ dont toutes les racines ont une partie réelle < 0. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $\lim_{t\to+\infty} P(D)(f)(t) = 0$. On a $P(D)(f) = Q(D)[(D - \alpha_n \operatorname{Id})(f)] = Q(D)(g)$, où $g = f' - \alpha_n f$, et comme $\lim_{t\to+\infty} Q(D)(g)(t) = 0$, on en déduit d'après l'hypothèse de récurrence que $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$. En d'autres termes, $\lim_{t\to+\infty} f'(t) - \alpha_n f(t) = 0$, et d'après la question a), on en déduit que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
Condition suffisante. Supposons que P ait une racine α dont la partie réelle vérifie $\Re(\alpha) \geq 0$. On peut écrire $P = Q(X - \alpha)$, où $Q \in \mathbb{C}[X]$. La fonction $f : t \mapsto e^{\alpha t}$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$, et comme $f' - \alpha f = 0$, on a $P(D)(f) = Q(D)[f' - \alpha f] = 0$. Ainsi, nous avons trouvé une fonction f ne tendant pas vers 0 à l'infini telle que $\lim_{t\to+\infty} P(D)(f) = 0$. Ceci est absurde, donc toutes les racines de P ont nécessairement leur partie réelle < 0.

Exercice 6 (Théorème de Floquet). On considère un système différentiel sur $\mathbb{C}^n$ $(E) : Y' = A(t)\, Y$ où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une fonction continue et T-périodique.
a) Montrer que (E) admet une solution V non nulle telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad V(t+T) = \lambda \, V(t).$$

b) On considère n solutions $V_1, \ldots, V_n$ de (E) linéairement indépendantes. En notant $M(t)$ la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont $V_1(t), \ldots, V_n(t)$, montrer

$$\exists C \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C}), \forall t \in \mathbb{R}, \qquad M(t+T) = M(t)\, C.$$

Solution. **a)** On sait (voir le théorème 2 page 378) que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est un $\mathbb{C}$-e.v de dimension n. Comme A est T-périodique, on voit que pour toute solution V de (E), l'application $V_T : t \mapsto V(t+T)$ est aussi une solution. On construit ainsi une application $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \quad V \mapsto V_T$. Cette application est évidemment un endomorphisme de $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{C}$-e.v de dimension finie, Φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $V \in \mathcal{S}$ est un vecteur propre non nul associé, on a $\Phi(V) = \lambda V$, ce qui s'écrit aussi $V(t+T) = \lambda\, V(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Comme $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension n, $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base de $\mathcal{S}$. Notons $B = (b_{i,j})$ la matrice de l'endomorphisme Φ dans cette base, de sorte que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad V_{i,T} = \sum_{j=1}^n b_{i,j} V_j \qquad \text{ou encore} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad V_i(t+T) = \sum_{j=1}^n b_{i,j} V_j(t).$$

En désignant par $V_{i,k}$ la k-ième composante de V_i, on a donc

$$\forall i, k \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad V_{i,k}(t+T) = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} V_{j,k}(t).$$

Comme $M(t)$ est la matrice dont l'élément d'indice (i,j) est $V_{j,i}(t)$, ceci s'écrit aussi ${}^tM(t+T) = B\,{}^tM(t)$, donc $M(t+T) = M(t)\,{}^tB$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La matrice B étant inversible (car Φ est inversible, puisque si $V_T = 0$, alors $V = 0$ donc $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$), la matrice $C = {}^tB$ est aussi inversible.

EXERCICE 7 (CALCUL DU WRONSKIEN). **a)** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux applications $p, q : I \to \mathbb{C}$ continues. On considère deux solutions u et v de l'équation différentielle $(L) : y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$. Calculer le wronskien de u et v en fonction de sa valeur en un point a de I.
b) On veut étendre ce résultat aux systèmes linéaires. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue. On considère $f_1, \dots, f_n$ n solutions sur I de l'équation différentielle $(S) : Y' = A(t)\,Y$. Calculer le wronskien de $f_1, \dots, f_n$ en fonction de sa valeur en un point a de I.

Solution. **a)** Posons $W(t) = \text{wronskien}(u,v)(t) = (uv' - u'v)(t)$. L'idée est de rechercher une équation différentielle vérifiée par W. Pour tout $t \in I$, on a $W'(t) = (uv'' - u''v)(t)$. En multipliant par u l'égalité $v'' + p(t)\,v' + q(t)\,v = 0$ et par v l'égalité $u'' + p(t)\,u' + q(t)\,u = 0$, puis en retranchant, on obtient $uv'' - u''v + p(t)(uv' - u'v) = 0$. Autrement dit, $W' + p(t)W = 0$. On en déduit en résolvant cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 que

$$\forall t \in I, \qquad W(t) = W(a)\, \exp\left(-\int_a^t p(u)\,du\right).$$

b) On pose $W(t) = \text{wronskien}(f_1, \dots, f_n)(t) = \det(f_1, \dots, f_n)(t)$. Nous allons comme plus haut rechercher une équation différentielle satisfaite par W.

La formule de dérivation d'un déterminant (qui peut s'obtenir facilement à partir de son développement en fonction de ses coefficients — voir le tome Algèbre) entraîne

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \qquad W'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \det(f_1, \dots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \dots, f_n)(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), A(t)f_i(t), f_{i+1}(t), \dots, f_n(t)).\end{aligned}$$

Fixons un élément quelconque t de I. L'application $\Phi_t : (\mathbb{C}^n)^n \to \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi_t(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(v_1, \dots, v_{i-1}, A(t)v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

est une forme n-linéaire antisymétrique, donc alternée, donc proportionnelle à l'application déterminant (voir le tome Algèbre). On peut donc trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi_t(v_1, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_n)$ pour tous vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$. Or, en désignant par $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a facilement

$$\Phi_t(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, \dots, e_{i-1}, A(t)e_i, e_{i+1}, \dots, e_n) = \operatorname{tr} A(t),$$

donc $\operatorname{tr} A(t) = \lambda \det(e_1, \dots, e_n) = \lambda$. On connaît donc Φ_t, et

$$\forall t \in I, \qquad W'(t) = \Phi_t(f_1, \dots, f_n) = \operatorname{tr} A(t) \cdot \det(f_1, \dots, f_n)(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot W(t).$$

On en déduit finalement

$$\forall t \in I, \qquad W(t) = W(a)\, \exp\left(\int_a^t \operatorname{tr} A(u)\, du\right).$$

Remarque. Ce résultat peut être utile, surtout le cas particulier de a) car beaucoup d'exercices portent sur les équations linéaires d'ordre 2.

En transformant les équations différentielles linéaires sur $\mathbb{C}$ d'ordre n en un système différentiel sur $\mathbb{C}^n$, un corollaire du résultat de la question b) est que le wronskien W de n solutions d'une équation différentielle sur $\mathbb{C}$ du type $y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\, y = 0$ vérifie

$$\forall t \in I, \qquad W(t) = W(a)\, \exp\left(-\int_a^t a_1(u)\, du\right).$$

EXERCICE 8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f. Pour tout i, on note N_i le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i et on note $\alpha_i = \dim N_i$ (de sorte que $P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$). Pour tout s.e.v N de $\mathbb{C}^n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $\mathcal{S}_{N,\alpha,\lambda}$ l'e.v des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{\lambda t} P(t)$, où P est un polynôme à coefficients dans N de degré $< \alpha$.

Soit $\mathcal{S}$ l'e.v des solutions de l'équation différentielle $X' = f(X)$. Montrer

$$\mathcal{S} \subset S_{N_1,\alpha_1,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{N_k,\alpha_k,\lambda_k}.$$

Quand peut-on dire que cette inclusion est une égalité ?

Solution. Commençons par donner quelques rappels d'algèbre (voir le tome Algèbre). On a $\mathbb{C}^n = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$, et pour tout i, N_i est stable par f ce qui fait de $f_i = f_{|N_i}$ un endomorphisme de N_i. Pour tout i, on peut aussi écrire f_i sous la forme $f_i = \lambda_i \operatorname{Id}_{N_i} + n_i$, où n_i est nilpotent (et plus précisément $n_i^{\alpha_i} = 0$).

Soit u une solution de $X' = f(X)$. Pour tout i, notons π_i la projection sur N_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} N_j$, puis $u_i = \pi_i(u)$, de sorte que $u = u_1 + \cdots + u_k$ et pour tout i, $u_i' = f_i(u_i)$. Nous allons montrer que pour tout i, $u_i \in \mathcal{S}_{N_i,\alpha_i,\lambda_i}$. Posons $v_i = e^{-\lambda_i t} u_i$. On a

$$v_i' = -\lambda_i v_i + e^{-\lambda_i t} u_i' = -\lambda_i v_i + e^{-\lambda_i t} f_i(u_i) = -\lambda_i v_i + f_i(v_i) = n_i(v_i),$$

et une récurrence immédiate donne ensuite $v_i^{(r)} = n_i^r(v_i)$ (on peut bien dériver autant de fois que l'on veut puisque la relation $v_i' = n_i(v_i)$ entraîne le fait que v_i est de classe $\mathcal{C}^\infty$). Or $n_i^{\alpha_i} = 0$, on a donc $v_i^{(\alpha_i)} = 0$. Autrement dit, $v_i = P$ est un polynôme de degré $< \alpha_i$, à coefficients dans N_i, et comme $u_i = e^{\lambda_i t} v_i$, on en déduit $u_i \in \mathcal{S}_{N_i,\alpha_i,\lambda_i}$.

On a donc montré $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{N_1,\alpha_1,\lambda_1} + \cdots + \mathcal{S}_{N_k,\alpha_k,\lambda_k}$. De plus, il est immédiat que les $\mathcal{S}_{N_i,\alpha_i,\lambda_i}$ sont en somme directe, d'où le premier résultat demandé.

Comme il y a inclusion, il y aura égalité si et seulement si les dimensions des sous-espaces correspondants sont égales, c'est-à-dire $\dim \mathcal{S} = \sum_{i=1}^k \dim \mathcal{S}_{N_i,\alpha_i,\lambda_i}$. Or $\dim S = n = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ et pour tout i, $\dim \mathcal{S}_{N_i,\alpha_i,\lambda_i} = \alpha_i \dim N_i = \alpha_i^2$. Il y aura donc l'égalité si et seulement si $\sum_i \alpha_i = \sum_i \alpha_i^2$, ce qui équivaut à dire $\alpha_i = 1$ pour tout i, ou encore que les valeurs propres de f sont toutes distinctes.

Remarque. Ce résultat reste évidemment vrai, par isomorphisme, pour les systèmes linéaires du type $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dans la pratique, pour résoudre (S) : $X' = AX$, on ne cherche pas directement les sous-espaces N_i. On écrit qu'une solution V s'écrit nécessairement sous la forme $V = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} P_i(t)$, où P_i est un polynôme de degré $< \alpha_i$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, puis on trouve la forme des coefficients des P_i par identification en remplaçant dans (S).

3. Équations différentielles non linéaires

Le but de cette partie est de donner des méthodes pratiques de résolution de certains types d'équations différentielles non linéaires.

Les méthodes qui suivent donnent en général des solutions sur des intervalles distincts qui, mis bout à bout, peuvent donner des solutions sur des intervalles plus grands. Autrement dit, ce qui suit ne donne pas forcément les solutions maximales. Par ailleurs, c'est surtout des recettes qui sont mises en avant, et lors d'une résolution pratique, il faudra prendre garde à les rendre rigoureuses (c'est d'ailleurs parfois un problème difficile).

3.1. Équations incomplètes

On appelle ainsi les équations différentielles dans lesquelles x ou y ne figure pas.

Équations de la forme $F(x, y') = 0$**.** On note $\Gamma = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(X, Y) = 0\}$. Supposons connu un paramétrage de Γ de la forme $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$, où φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et où ψ est continue. L'équation $F(x, y') = 0$ s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \varphi(t) \\ y' &=& \psi(t) \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad dy = \psi(t)\,dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

et le graphe des solutions peut être paramétré par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \varphi(t) \\ y &=& \int_{t_0}^{t} \psi(u)\,\varphi'(u)\,du + y_0 \end{array}\right. .$$

Équations de la forme $F(y, y') = 0$**.** Comme précédemment, on suppose connu un paramétrage de $\Gamma = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(X, Y) = 0\}$ de la forme $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$, où φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et ψ est continue. Pour résoudre $F(y, y') = 0$, on écrit

$$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& \varphi(t) \\ y' &=& \psi(t) \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{lcl} dy &=& \varphi'(t)\,dt \\ dy &=& \psi(t)\,dx \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt,$$

puis on intègre, ce qui donne un paramétrage en t du graphe des solutions.

Remarque 1. Si ψ s'annule en un point t_0, la fonction $t \mapsto \varphi(t_0)$ est solution. Elle peut se raccorder à des solutions dont la dérivée s'annule en t_0.

Équations de la forme $F(y, y', y'') = 0$**.** On cherche des solutions $x \mapsto \varphi(x)$ telles que φ' ne s'annule pas, de sorte que φ soit un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme.

On cherche ensuite à paramétrer le graphe des solutions avec la variable $y = \varphi(x)$. On pose $p = y'$ et on regarde p comme une fonction de y. Comme

$$y' = p \quad \text{et} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = y'\frac{dp}{dy},$$

la fonction p dépendante de y vérifie l'équation différentielle $F(y, p, p\,\frac{dp}{dy}) = 0$, équation du premier ordre en p. Si on sait la résoudre, on écrit $dx = dy/p(y)$ puis par intégration, on en déduit x en fonction de y.

Exemple 1. Pour résoudre l'équation (E) : $y'' + (yy')^3 = 0$, on pose $p = y'$, et on regarde p comme une fonction de y. L'équation (E) devient

$$p\,\frac{dp}{dy} + (yp)^3 = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{dp}{p^2} = -y^3 dy,$$

ce qui par intégration fournit $1/p = y^4/4 + \alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ ce qui entraîne

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^4/4 + \alpha} \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{y^4}{4} + \alpha\right) dy = dx,$$

donc après intégration, $y^5/20 + \alpha y + \beta = x$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Remarque 2. — S'il existe y_0 tel que $F(y_0, 0, 0) = 0$, alors la fonction constante $y = y_0$ est solution, et peut se raccorder avec les solutions trouvées précédemment.
— La technique utilisée peut être généralisée aux équations incomplètes d'ordre n du type $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, pour abaisser d'une unité l'ordre de l'équation.

3.2. Équations homogènes

On appelle ainsi les équations différentielles qui peuvent s'exprimer en fonction de y' et y/x.

Équations homogènes résolues : $y' = f(y/x)$***.*** On pose $t = y/x$, donc $y = tx$ et $f(t)\,dx = dy = x\,dt + t\,dx$. On se ramène donc à $[f(t) - t]\,dx = x\,dt$, que l'on sait intégrer.

Remarque 3. S'il existe t_0 tel que $f(t_0) = t_0$, la fonction $y = t_0\,x$ est solution.

Équations homogènes non résolues : $F(y/x, y') = 0$***.*** On suppose connu un paramétrage $t \mapsto (u(t), v(t))$ de $\Gamma = \{(U, V) \mid F(U, V) = 0\}$, où u est de classe $\mathcal{C}^1$ et v continue. On écrit $y/x = u(t)$ et $y' = v(t)$, donc

$$dy = v(t)\,dx = u'(t)x\,dt + u(t)\,dx \quad \text{d'où} \quad [v(t) - u(t)]\,dx = xu'(t)\,dt.$$

— Sur un intervalle où $u - v$ ne s'annule pas, on écrit $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{u'(t)}{v(t) - u(t)}\,dt$, puis on intègre ;
— s'il existe t_0 tel que $u(t_0) = v(t_0)$, alors $x \mapsto u(t_0)\,x$ est solution.

3.3. Étude d'équations particulières

Équations de Bernoulli. Il s'agit des équations différentielles du type

$$y' = a(t)\,y + b(t)\,y^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1\},$$

où a et b sont deux fonctions continues d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, on a affaire à une équation linéaire, que l'on sait résoudre).

On cherche les solutions qui ne s'annulent pas (si α n'est pas entier, on cherche les solutions > 0). L'équation peut s'écrire

$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(t)\,\frac{1}{y^{\alpha-1}} + b(t) \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{1-\alpha}\,z' = a(t)\,z + b(t), \qquad z = y^{1-\alpha}.$$

On s'est ainsi ramené à une équation linéaire d'ordre 1, que l'on sait résoudre.

Remarque 4. Si $\alpha > 0$, la fonction nulle est solution. Si de plus $\alpha \geq 1$, le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique et montre qu'aucune autre solution ne s'annule ; si $0 < \alpha < 1$, on peut faire des raccords de classe $\mathcal{C}^1$ avec la solution nulle.

Équations de Ricatti. Il s'agit des équations différentielles du type

$$y' = a(t)\,y^2 + b(t)\,y + c(t), \tag{R}$$

où a, b et c sont des fonctions continues d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si on en connaît une solution particulière φ_0, on sait résoudre (R) : on pose $y = \varphi_0 + z$, et en remplaçant dans (R), on obtient

$$z' = [2a(t)\,\varphi_0(t) + b(t)]\,z + a(t)\,z^2, \tag{R'}$$

(qui est une équation de Bernoulli).

Le théorème de Cauchy Lipschitz montre qu'en dehors de la solution nulle, aucune solution de (R') ne s'annule. On peut donc poser $z = 1/u$, et on se ramène à une équation différentielle du premier ordre.

Remarque 5. Ici, il n'y a pas de raccords de solutions à faire.

Équation de Lagrange. Il s'agit des équations différentielles du type

$$y = a(y')\, t + b(y'),$$

où a et b sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

On cherche d'abord les solutions affines. On voit facilement qu'elles sont de la forme $t \mapsto m\, t + b(m)$, avec $a(m) = m$.

On cherche ensuite les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ telle que y'' ne s'annule pas. On recherche à paramétrer le graphe d'une telle solution avec la variable admissible $p = y'$. En dérivant par rapport à t l'égalité $y = a(p)t + b(p)$, on obtient

$$p = \frac{dy}{dt} = a'(p)\, \frac{dp}{dt}\, t + a(p) + b'(p)\, \frac{dp}{dt} \quad \text{donc} \quad [p - a(p)]\frac{dt}{dp} = a'(p)t + b'(p).$$

L'annulation de y'' étant équivalente au fait que $p = a(p)$ (on s'en rend compte en dérivant l'équation initiale), cette dernière équation différentielle est linéaire résolue du premier ordre tant que y'' n'est pas nulle. On sait la résoudre, ce qui fournit la fonction $p \mapsto t(p)$, et on connaît alors $y(p)$ grâce à l'équation initiale. Finalement, un paramétrage du graphe des solutions $\mathcal{C}^2$ dont la dérivée seconde ne s'annule pas est $p \mapsto (t(p), a(p)t(p) + b(p))$.

Il ne reste plus qu'à effectuer des raccords de classe $\mathcal{C}^1$ entre ces dernières solutions et les solutions affines.

Équation de Clairaut. Il s'agit des équations différentielles du type

$$y = y'\, t + b(y'),$$

où b est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Il s'agit d'un cas particulier dégénéré d'équation de Lagrange pour lequel $a(m) = m$ pour tout m.

Les solutions affines sont de la forme $t \mapsto mt + b(m)$, $m \in I$.

L'étude effectuée pour les équations de Lagrange montrent que les solutions $\mathcal{C}^2$ dont la dérivée seconde ne s'annule pas peuvent se paramétrer sous la forme $p \mapsto (t(p), y(t(p)))$ où $t(p) = -b'(p)$ et $y(t(p)) = -pb'(p) + b(p)$.

L'arc ainsi paramétré possède la propriété suivante : les tangentes à cet arc sont aussi solution de l'équation différentielle (autrement dit, l'arc est l'enveloppe des solutions affines).

Toutes les solutions s'obtiennent par raccordement des solutions des deux types.

3.4. Exercices

Exercice 1. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle suivante $(E) :\ xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solution. On a affaire à une équation homogène du premier ordre. Soit y une solution maximale de (E) sur un intervalle I coupant $\mathbb{R}^{+*}$. Alors $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution, on va donc se limiter dans un premier temps à étudier y sur $J = I \cap \mathbb{R}^{+*}$.

Lorsque $x \in J$, on pose $t = y/x$, et l'équation (E) devient $(E') :\ t' = \frac{1}{x}\sqrt{1 + t^2}$. On a donc

$$\frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{dx}{x},$$

ce qui par intégration donne $\operatorname{argsh} t = \log(x/\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Donc

$$\forall x \in J, \qquad t(x) = \operatorname{sh}\left[\log\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{\lambda}{x}\right) \quad \text{donc} \quad y(x) = x\, t(x) = \frac{x^2 - \lambda^2}{2\lambda}.$$

La fonction $x \mapsto (x^2 - \lambda^2)/(2\lambda)$ est aussi solution sur $\mathbb{R}$, et comme la fonction y est une solution maximale, on en déduit $J = \mathbb{R}^{+*}$, puis $K = I \cap \mathbb{R}^{-*} \neq \varnothing$ (mais attention, *a priori*, cela ne veut pas dire que ce soit la seule solution maximale égale à y sur $\mathbb{R}^{+*}$). Par symétrie, on a

$$\exists\mu\in\mathbb{R}, \forall x\in K, \qquad y(x)=\frac{x^2-\mu^2}{2\mu}.$$

Comme précédemment, on en déduit que $K=\mathbb{R}^{-*}$. Ainsi, I est un intervalle vérifiant $I\cap\mathbb{R}^{+*}=\mathbb{R}^{+*}$ et $I\cap\mathbb{R}^{-*}=\mathbb{R}^{-*}$, donc $I=\mathbb{R}$. Comme y est continue, les limites à gauche et à droite de y en 0 coïncident, ce qui entraîne $-\mu/2=-\lambda/2$, donc $\mu=\lambda$.

Finalement, nous avons montré que toutes les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ et qu'elles sont de la forme

$$y:\ x\mapsto\frac{x^2-\lambda^2}{2\lambda}.$$

EXERCICE 2. Déterminer les solutions maximales à valeurs réelles de l'équation différentielle $(R):\ y'+y+y^2+1=0$.

Solution. Il s'agit d'une équation de Ricatti. Cherchons en une solution particulière. La fonction constante $t\mapsto\alpha$ est solution si et seulement si $\alpha^2+\alpha+1=0$, c'est-à-dire $\alpha=j$ ou $\alpha=j^2$ ($j=e^{2i\pi/3}$). Ceci nous amène à commencer à rechercher les solutions complexes de (R).

En posant $z=y-j$ et en remplaçant dans (R), on obtient $z'+(2j+1)z+z^2=0$. On a affaire à une équation résolue. Si z s'annule en un point, alors z' aussi et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, z doit être la fonction nulle. Si z n'est pas la fonction nulle, on en conclut que z ne s'annule pas, et on peut donc écrire l'équation sous la forme $z'/z^2+(2j+1)/z+1=0$, ou encore, en posant $u=1/z$, $-u'+(2j+1)u+1=0$. Comme $2j+1=i\sqrt{3}$, cette équation s'écrit aussi $(L):\ -u'+i\sqrt{3}\,u+1=0$. La fonction constante $t\mapsto i/\sqrt{3}$ est solution, et l'équation homogène associée est $v'=i\sqrt{3}\,v$, dont les solutions sont $v(t)=\lambda\,e^{i\sqrt{3}t}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Finalement, nous avons montré que si z n'est pas la fonction nulle, alors

$$\frac{1}{z}=u=v+i\sqrt{3}=\lambda e^{i\sqrt{3}t}+\frac{i}{\sqrt{3}},\quad\text{donc}\quad y=z+j=\frac{1}{\lambda e^{i\sqrt{3}t}+i/\sqrt{3}}+j.$$

Mais nous voulions les solutions réelles de (E). Pour cela, nous recherchons les $\lambda\in\mathbb{C}$ tels que la partie imaginaire de la fonction précédente soit nulle pour tout t. Ceci se produit si et seulement si, pour tout t,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\Im(j)=\Im\left(\frac{1}{\lambda e^{i\sqrt{3}t}+i/\sqrt{3}}\right)=-\frac{\Im(\lambda e^{i\sqrt{3}t}+i/\sqrt{3})}{|\lambda e^{i\sqrt{3}t}+i/\sqrt{3}|^2},$$

et en notant $I=\Im(\lambda e^{i\sqrt{3}t})$, ceci s'écrit aussi

$$\left(|\lambda|^2+\frac{1}{3}+\frac{2I}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=I+\frac{1}{\sqrt{3}},$$

ce qui équivaut à $|\lambda|^2=1/3$. En posant $\lambda=e^{i\theta}/\sqrt{3}$, $(\theta\in\mathbb{R})$, on voit que les solutions de (R) sont de la forme

$$t\mapsto j+\frac{\sqrt{3}}{e^{i(\sqrt{3}t+\theta)}+i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\cos(\sqrt{3}\,t+\theta)}{1+\sin(\sqrt{3}t+\theta)}.$$

Les solutions maximales sont définies sur des intervalles ouverts de longueur $2\pi/\sqrt{3}$.

EXERCICE 3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(C):\ y=ty'-y'^2/4$.

Solution. Il s'agit d'une équation de Clairaut. On utilise le paramètre $p=y'$. Ainsi, (C) s'écrit $y=tp-p^2/4$, donc $dy=p\,dt=p\,dt+t\,dp-p\,dp/2$, c'est-à-dire $(t-p/2)dp=0$.

— Lorsque $dp=0$, on trouve les solutions affines de (C), qui sont de la forme $t\mapsto mt-m^2/4$ ($m\in\mathbb{R}$).

— Lorsque $t - p/2 = 0$, on trouve la solution $t \mapsto t^2$.
On a ainsi trouvé les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de (C). On obtient maintenant toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ par raccordement entre les solutions des deux types.

4. Quelques compléments

Dans cette section sont présentés les compléments de cours suivant :
- quelques résultats sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 ;
- le lemme de Gronwall ;
- la dépendance des solutions d'une équation différentielles par rapport aux conditions initiales ;
- le principe de majoration *a priori*, résultat qui donne des renseignements sur le comportement des solutions maximales aux extrémités de leurs intervalles de définition.

4.1. Équations différentielles linéaires du second ordre

Les équations différentielles linéaires du second ordre sont les plus simples des équations différentielles linéaires que l'on ne sache pas en général intégrer. Elles interviennent en outre dans de nombreux problèmes de mécanique et de physique. Il parait donc normal de les étudier plus particulièrement.

On désigne par $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \tag{L}$$

où p et q sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et où on étudie les solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Rappel. Les équations différentielles du type (L) sont un cas particulier d'équations différentielles linéaires homogènes, pour lesquels on a les résultats suivants (voir la partie 2.1 de ce chapitre) :
- toute solution maximale de (L) est définie sur I tout entier ;
- l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions maximales de (L) est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension 2. De plus, pour tout $t_0 \in I$, l'application $\mathcal{S} \to \mathbb{K}^2 \quad f \mapsto (f(t_0), f'(t_0))$ est un isomorphisme ;
- tous les éléments $f \in \mathcal{S}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$;

Wronskien. Le wronskien d'un couple de solutions maximales (u, v) de (L), défini par $\operatorname{wronskien}(u, v) = uv' - u'v$ vérifie

$$\forall t_0 \in I, \forall t \in I, \qquad \operatorname{wronskien}(u,v)(t) = \operatorname{wronskien}(u,v)(t_0)\, \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds\right)$$

(voir l'exercice 7 page 388). En particulier, on retrouve le résultat du corollaire 1 page 379. Par ailleurs, si p est identiquement nulle, le wronskien de (u, v) est constant.

Astuces de calcul. On peut toujours ramener (L) au cas où $p = 0$ en procédant comme suit. Posons $y = z \cdot x$, où z et x sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{K}$ encore inconnues. En remplaçant dans (L) on obtient :

$$zx'' + (2z' + pz)x' + (z'' + pz' + qz)x = 0.$$

Il suffit donc de choisir z tel que $2z' + pz = 0$, et le tour est joué (on doit supposer p de classe $\mathcal{C}^1$ pour que z soit $\mathcal{C}^2$).

Si $p = 0$, (L) s'écrit $y'' + qy = 0$, et par produit par y' on a $y''y' + qyy' = 0$, ou encore $\frac{d}{dt}(y'^2) + q(t)\, \frac{d}{dt}(y^2) = 0$. Cette expression peut parfois rendre des services.

Rappelons enfin que la connaissance de deux solutions indépendantes de (L) permet de résoudre (L') : $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = r(t)$ par la méthode de variation des constantes (voir page 380). Si on ne connaît qu'une seule solution particulière de (L), on peut en trouver une autre indépendante grâce à la méthode d'abaissement de l'ordre exposée à la page 380.

Exercices.

Exercice 1. On considère l'équation différentielle (L) : $y'' + q(t)\,y = 0$, où $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} |q(t)|\,dt$ converge.
a) Soit y une solution bornée de (L). Étudier le comportement de y' en $+\infty$.
b) Montrer que (L) admet des solutions non bornées.

Solution. **a)** Comme y est bornée et que $\int_0^{+\infty} |q(t)|\,dt$ converge, on voit que $\int_0^{+\infty} q(t)y(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} y''(t)\,dt$ converge. On en conclut que y' converge en $+\infty$. Notons $\alpha = \lim_{t\to+\infty} y'(t)$. Si $\alpha \neq 0$, $y'(t) \sim \alpha$ en $+\infty$, donc lorsque $x \to +\infty$, $\int_0^x y'(t)\,dt \sim \int_0^x \alpha\,dt = \alpha\,x$, donc $y(x) \sim \alpha x$, ce qui absurde car y est bornée. On en déduit $\alpha = 0$, donc y' tend vers 0 en $+\infty$.

b) Raisonnons par l'absurde en supposant que (L) n'admette que des solutions bornées. Soit (u, v) une base des solutions de (L). On a vu dans la question précédente que u' et v' tendent vers 0 en $+\infty$, donc wronskien$(u, v) = uv' - u'v$ tend vers 0 en $+\infty$. Or la forme de l'équation différentielle (L) montre que le wronskien de u et v est constant (voir plus haut la sous-partie sur le wronskien), et comme sa limite est nulle, il est identiquement nul. Ceci est absurde car comme (u, v) est une base des solutions de (L), on a wronskien$(u, v)(t) \neq 0$ pour tout t.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle (L) : $y'' + q(t)\,y = 0$, où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement négative sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que la seule solution réelle de (L) bornée sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.
b) Montrer qu'une solution non nulle s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Solution. **a)** Soit f une solution de (L) sur $\mathbb{R}$, et posons $z = f^2$. On a

$$z'' = 2ff'' + f'^2 = -2q(t)\,f^2 + f'^2 \geq 0,$$

la fonction z est donc convexe. Deux cas se présentent.

— Si z est constante, f est constante donc nulle.

— Sinon, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z'(t_0) \neq 0$. Comme z est convexe, sa courbe représentative est au dessus de sa tangente en t_0, ce qui s'écrit $z(t) \geq z(t_0) + z'(t_0)\,(t - t_0)$. On en déduit, selon le signe de $z'(t_0)$, que z tend vers $+\infty$ en $-\infty$ ou en $+\infty$. Donc z n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, donc y n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Avec les notations précédentes, si y s'annule en deux points t_1 et t_2 $(t_1 < t_2)$, alors $z = y^2$ aussi. Comme z est convexe et positive, ceci entraîne $z(t) = 0$ sur $[t_1, t_2]$, donc $y(t) = 0$ sur $[t_1, t_2]$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, y est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi, une solution y qui s'annule en deux points est identiquement nulle.

→ Exercice 3 (Théorèmes d'oscillation et de comparaison). **1/** On considère l'équation différentielle (L) : $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$, où p et q sont deux fonctions réelles continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
a) Montrer qu'une solution non nulle f de (L) n'a qu'un nombre fini de zéros dans tout segment de I.
b) Soient f, g deux fonctions qui forment une base des solutions de (L). Soient t_1 et t_2

($t_1 < t_2$) deux zéros consécutifs de f. Montrer qu'il existe un unique point $t_0 \in]t_1, t_2[$ tel que $g(t_0) = 0$.

2/ a) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $r, s : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $r \leq s$ sur I. Soit x une solution non nulle de $(L_1) : x'' + r(t)\,x = 0$, y une solution non nulle de $(L_2) : y'' + s(t)\,y = 0$. Soient t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) deux zéros consécutifs de x. Montrer que si x et y ne sont pas proportionnelles sur $]t_1, t_2[$, il existe $t_0 \in]t_1, t_2[$ tel que $y(t_0) = 0$.
b) Si q est une fonction continue sur I qui vérifie $q(t) \leq \mu^2$ pour tout t (avec $\mu > 0$), montrer que deux zéros consécutifs t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) d'une solution non nulle de $(L) : y'' + q(t)\,y = 0$ vérifient $t_2 - t_1 \geq \pi/\mu$.
c) Si q est une fonction continue sur I qui vérifie $q(t) \geq \lambda^2$ pour tout t (avec $\lambda > 0$), montrer que toute solution de $(L) : y'' + q(t)\,y = 0$ s'annule au moins une fois dans tout intervalle fermé de longueur π/λ.

Solution. **1/ a)** On sait déjà (voir l'exercice 2 page 376), que les zéros de f sont isolés.

Supposons que f ait une infinité de zéros dans un segment $[a, b] \subset I$. Comme $[a, b]$ est compact, il existe un élément $x \in [a, b]$ qui est un point d'accumulation des zéros de f. Par continuité de f, on a $f(x) = 0$, autrement dit x est un zéro de f. Ceci est absurde car x est un point d'accumulation des zéros de f et les zéros de f sont isolés.

b) La fonction f ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$. Quitte à changer f en $-f$, on peut donc supposer $f > 0$ sur $]t_1, t_2[$. Comme $f(t_1) = 0$, on a

$$f'(t_1) = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t > t_1}} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t > t_1}} \frac{f(t)}{t - t_1} \geq 0,$$

et comme $f'(t_1) \neq 0$ (sinon f serait la fonction nulle d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz), on a $f'(t_1) > 0$. On montrerait de même $f'(t_2) < 0$.

Ceci étant, posons $W = fg' - f'g = \text{wronskien}(f, g)$. Comme (f, g) est une base de solutions de (L), W ne s'annule pas, donc garde un signe constant sur $[t_1, t_2]$. Quitte à changer g en $-g$, on peut même supposer $W > 0$ sur $[t_1, t_2]$. On a $W(t_1) = -f'(t_1)g(t_1) > 0$, donc $g(t_1) < 0$, et de même, à partir de $W(t_2) = -f'(t_2)g(t_2) > 0$, on obtient $g(t_2) > 0$. Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure donc l'existence de $t_0 \in]t_1, t_2[$ tel que $g(t_0) = 0$.

Il nous reste à montrer que g ne s'annule qu'une fois dans $]t_1, t_2[$. Supposons que outre le point t_0, g s'annule en un autre point t_0' de $]t_1, t_2[$. En appliquant à f ce que l'on vient de montrer pour g, on en déduit que f s'annule entre t_0 et t_0', ce qui absurde car t_1 et t_2 sont deux zéros consécutifs de f. D'où l'unicité de $t_0 \in]t_1, t_2[$ tel que $g(t_0) = 0$.

2/ a) Supposons que y ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$. Par hypothèse, x ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$, et quitte à changer x en $-x$ et y en $-y$, on peut supposer que x et y prennent des valeurs > 0 sur $]t_1, t_2[$. On généralise maintenant la méthode utilisée dans la question précédente. On pose $W(t) = xy' - x'y$. Comme précédemment, on a $x'(t_1) > 0$ et $x'(t_2) < 0$. Comme $x(t_1) = x(t_2) = 0$, on a donc $W(t_1) \leq 0$ et $W(t_2) \geq 0$.

Par ailleurs, $W' = xy'' - x''y = x(-s(t)y) - y(-r(t)x) = xy(r(t) - s(t)) \leq 0$ sur $[t_1, t_2]$, donc W décroît de $W(t_1) \leq 0$ à $W(t_2) \geq 0$. Autrement dit, W est nulle sur $[t_1, t_2]$. On en conclut que $x'/x = y'/y$ sur $]t_1, t_2[$, donc x et y sont proportionnelles sur $]t_1, t_2[$. D'où le résultat.

b) Soit f une solution non nulle de (L) et t_1, t_2 deux zéros consécutifs de f. Supposons $t_2 - t_1 < \pi/\mu$. Alors il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $g : t \mapsto \sin(\mu t + \varphi)$, ne s'annule pas sur $[t_1, t_2]$. Une telle fonction ne peut pas être proportionnelle à f car $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Comme g est solution de l'équation différentielle $y'' + \mu^2\,y = 0$, le résultat de la question précédente nous dit que g s'annule au moins une fois sur $]t_1, t_2[$, ce qui est absurde. On a donc bien $t_2 - t_1 \geq \pi/\mu$.

c) Soit $[t_1, t_2]$ un segment de longueur π/λ. On peut trouver $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $g : t \mapsto \sin(\lambda t + \varphi)$ s'annule aux points t_1 et t_2. La fonction g est solution de l'équation différentielle $y'' + \lambda^2\,y = 0$. Si f et g sont proportionnelles, alors f s'annule en t_1 et t_2. Sinon d'après 2/a), f doit s'annuler au moins une fois sur $]t_1, t_2[$. Ainsi f s'annule toujours au moins une fois sur le segment $[t_1, t_2]$.

EXERCICE 4. On considère l'équation différentielle (L) : $y'' + q(t)\, y = 0$, où $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On suppose que (L) possède une solution y nulle en a et b et > 0 sur $]a, b[$. Montrer

$$\int_a^b |q(t)|\, dt > \frac{4}{b-a}.$$

Solution. La fonction y est continue sur $[a, b]$, donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $y(c) = \sup_{t \in [a,b]} y(t)$. Comme de plus $y(a) = y(b) = 0$ et que $y > 0$ sur $]a, b[$, on a $c \in]a, b[$. On écrit maintenant, pour tout α, β tels que $a < \alpha < \beta < b$,

$$\int_a^b |q(t)|\, dt = \int_a^b \left| \frac{y''(t)}{y(t)} \right| dt > \frac{1}{y(c)} \int_a^b |y''(t)|\, dt \geq \frac{1}{y(c)} |y'(\beta) - y'(\alpha)|.$$

Or, d'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $\alpha \in]a, c[$ et $\beta \in]c, b[$ tels que

$$\frac{y(c) - y(a)}{c - a} = y'(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{y(b) - y(c)}{c - b} = y'(\beta).$$

On en conclut

$$\int_a^b |q(t)|\, dt > \frac{1}{y(c)} |y'(\beta) - y'(\alpha)| = \frac{1}{y(c)} \left| \frac{y(c) - y(a)}{c - a} - \frac{y(b) - y(c)}{b - c} \right| = \frac{1}{c - a} + \frac{1}{b - c}$$

(car $y(a) = y(b) = 0$). Une rapide étude de la fonction $c \mapsto \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}$ montre qu'elle atteint son minimum pour $c = (a + b)/2$, point en laquelle elle vaut $4/(b - a)$. Donc finalement

$$\int_a^b |q(t)|\, dt > \frac{1}{c - a} + \frac{1}{b - c} \geq \frac{4}{b - a},$$

d'où le résultat.

4.2. Lemme de Gronwall et applications

On a parfois affaire à des inégalités portant sur une fonction et sa dérivée. Ce type de problème peut être résolu grâce au résultat qui suit.

→ THÉORÈME 1 (LEMME DE GRONWALL). *Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a, b], \qquad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s)\, ds. \qquad (*)$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \qquad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du \right) ds.$$

Démonstration. Posons $F(t) = \int_a^t \psi(s) y(s)\, ds$. En multipliant les deux membres de (*) par $\psi(t)$, on obtient $F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t)$, ce qui s'écrit aussi

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)\, ds \right) \qquad \text{avec} \qquad G(t) = F(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)\, ds \right).$$

Comme $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(-\int_a^s \psi(u)\, du \right) ds.$$

Or, d'après (*), $y(t) \leq \varphi(t) + G(t) \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds \right)$, d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci dessus. □

Ce théorème n'est pas au programme des classes de mathématiques spéciales. Il n'est pas nécessaire de connaître le résultat, mais il faut en revanche savoir le retrouver facilement, et se souvenir que le lemme de Gronwall exprime qu'à partir d'une inégalité intégrale portant sur y, on peut en déduire une inégalité sur y.

On utilise parfois le lemme de Gronwall dans le cas particulier suivant.

COROLLAIRE 1. *Soient ψ et y : $[a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues et vérifiant*

$$\exists c \geq 0, \forall t \in [a,b], \qquad y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s) y(s)\, ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \qquad y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right).$$

Démonstration. Il s'agit du lemme de Gronwall dans le cas particulier où φ est la fonction constante égale à c, on a donc pour tout $t \in [a,b]$

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du\right) ds = c - c\left[\exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du\right)\right]_{s=a}^{s=t} = c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right).$$

□

Entraînez vous à démontrer ce corollaire directement, sans utiliser le lemme de Gronwall général.

Citons enfin une application intéressante du lemme de Gronwall, utile dans les majorations d'erreurs sur les solutions d'équations différentielles.

COROLLAIRE 2. *Soit y : $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant*

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta \geq 0, \forall t \in [a,b], \qquad \|y'(t)\| \leq \beta + \alpha \|y(t)\|.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \qquad \|y(t)\| \leq \|y(a)\| e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-a)} - 1\right).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\|y(t)\| \leq \|y(a)\| + \|y(t) - y(a)\| \leq \|y(a)\| + \int_a^t \|y'(t)\|\, dt \leq \|y(a)\| + \beta(t-a) + \alpha \int_a^t \|y(s)\|\, ds,$$

puis on applique le lemme de Gronwall et on conclut en intégrant par parties. □

Exercices.

EXERCICE 1. Soit q : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle (L) : $y'' + q(t)\, y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Solution. On va chercher à utiliser le lemme de Gronwall. Soit y une solution de (L) sur $\mathbb{R}^+$. On a $2y'y'' + 2q(t)yy' = 0$, donc par intégration

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\int_0^t q(s) y(s) y'(s)\, ds = 0,$$

et en intégrant par parties, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad y'(t)^2 + q(t) y(t)^2 = K + \int_0^t q'(s) y(s)^2\, ds, \qquad K = y'(0)^2 + q(0) y(0)^2.$$

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad q(t) y(t)^2 \leq K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} q(s) y^2(s)\, ds.$$

En appliquant le premier corollaire du lemme de Gronwall à la fonction qy^2, on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad q(t)y(t)^2 \leq K \exp\left(\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}\,ds\right) = K\,\frac{q(t)}{q(0)},$$

donc $y(t)^2 \leq K/q(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

Exercice 2. Soit $F : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (t,x) \mapsto F(t,x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et globalement lipschitzienne en x, *i.e*

$$\exists C > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad \|F(t,x) - F(t,y)\| \leq C\,\|x - y\|.$$

On pose $G = F + f$, où $f : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, où $\varepsilon > 0$ est fixé.

On suppose que les deux problèmes différentiels

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y' = G(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admettent respectivement une solution x et y, définies sur un même intervalle $[0,T]$ de $\mathbb{R}$. Montrer

$$\forall t \in [0,T], \qquad \|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\|\,e^{Ct} + \frac{\varepsilon}{C}\left(e^{Ct} - 1\right).$$

Solution. Posons $u = x - y$. Pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned}\|u'(t)\| &= \|x'(t) - y'(t)\| = \|F(t,x(t)) - G(t,y(t))\| = \|F(t,x(t)) - F(t,y(t)) - f(t,y(t))\| \\ &\leq \|F(t,x(t)) - F(t,y(t))\| + \|f(t,y(t))\| \leq C\,\|u(t)\| + \varepsilon,\end{aligned}$$

et il suffit ensuite d'appliquer le second corollaire du lemme de Gronwall.

Remarque. Ce résultat entraîne qu'une petite variation de la vitesse initiale d'un point matériel et une petite variation du champ de forces auquel est soumis ce point entraîne une petite variation de sa trajectoire.

4.3. Principe de majoration *a priori*

Cette partie est consacrée à un résultat appelé *principe de majoration a priori* (ou *théorème de sortie de tout compact*), portant sur le comportement d'une solution maximale d'une équation différentielle aux extrémités de son intervalle de définition. Ce résultat est hors-programme ; il en existe une version faible (voir l'exercice 1 page 401) qui doit être connue et qui suffit à montrer de nombreux résultats portant sur les solutions maximales.

Préliminaires. Soit $F : \ \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) une application continue, localement lipschitzienne en la seconde variable. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un intervalle réel I centré en t_0 et une solution φ de $y' = F(t,y)$ vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$.

Autrement dit, le problème de Cauchy a toujours une solution, définie sur un intervalle centré en t_0. Nous allons voir qu'on peut trouver un voisinage de (t_0, x_0) dans Ω tel que toutes les solutions du problème de Cauchy pour (t,x) dans ce voisinage soient définies sur un *même* intervalle I.

Lemme 1. *Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Il existe un voisinage V de x_0 dans Ω et un intervalle ouvert I centré en t_0 tel que pour tout $(t_1, x) \in I \times V$, il existe une solution φ de $y' = F(t,y)$ définie sur I et vérifiant $\varphi(t_1) = x$.*

Démonstration. Commençons par un rappel. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha > 0$, on pose $I_\alpha(t) =]t-\alpha, t+\alpha[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $r > 0$, on pose $\mathrm{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| < r\}$. Nous avons vu, au cours de la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz page 374 que si $U = I_\alpha(t) \times \mathrm{B}_r(x)$ est un cylindre de sécurité pour F en (t,x), (*i. e.* F est lipschitzienne en la seconde variable sur U et il existe un majorant $M > 0$ de F sur U tel que $\alpha M < r$), alors il existe une solution φ de $y' = F(t,x)$ définie sur $I_\alpha(t)$ et vérifiant $\varphi(t) = x$.

Soit $U \subset \Omega$ un voisinage compact de (t_0, x_0) tel que F soit lipschitzienne en la seconde variable sur U. Notons M un majorant de F sur U, et choisissons $\alpha > 0$ et $r > 0$ tels que $I_\alpha(t_0) \times \mathrm{B}_r(x_0) \subset U$ et $\alpha M < r$ (ainsi $I_\alpha(t_0) \times \mathrm{B}_r(x_0)$ est un cylindre de sécurité pour F en (t_0, x_0)).

Posons $I = I_{\alpha/3}(t_0)$ et $V = \mathrm{B}_{r/3}(x_0)$. Soit $(t_1, x) \in I \times V$. Alors $I_{2\alpha/3}(t_1) \times \mathrm{B}_{2r/3}(x)$ est un cylindre de sécurité pour F en (t_1, x) (en effet, $I_{2\alpha/3}(t_1) \subset I_\alpha(t_0)$, $\mathrm{B}_{2r/3}(x) \subset \mathrm{B}_r(x_0)$, et $(2\alpha/3)M < 2r/3 < r$), donc il existe une solution φ de $y' = F(t,y)$ définie sur $I_{2\alpha/3}(t_1)$ et vérifiant $\varphi(t_1) = x$. Comme $I \subset I_{2\alpha/3}(t_1)$, on en déduit le résultat. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1 (PRINCIPE DE MAJORATION *a priori*). *Soient $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, O un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $F : \ ]a,b[\times O \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Soit $\varphi : \ ]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $y' = F(t,y)$.*

Alors si $\beta < b$ (resp. si $a < \alpha$), pour tout compact $K \subset O$, il existe un voisinage V de β (resp. de α) dans $]\alpha,\beta[$ tel que $\varphi(t) \notin K$ pour tout $t \in V$.

Démonstration. Montrons le résultat au voisinage de β (le problème au voisinage de α de traite de la même manière). Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'un compact $K \subset O$ et d'une suite (β_n) de $]\alpha,\beta[$ convergeant vers β tels que $\varphi(\beta_n) \in K$ pour tout n.

Comme K est compact, on peut extraire de $(\varphi(\beta_n))$ une sous-suite convergente, encore notée $(\varphi(\beta_n))$ (par commodité). Soit x_0 la limite de $(\varphi(\beta_n))$. On a $x_0 \in O$ car $x_0 \in K \subset O$.

D'après le lemme précédent, comme $(\beta, x_0) \in]a,b[\times O$, il existe un voisinage $]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[\times V$ de (β, x_0) dans $]a,b[\times O$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $t_1 \in]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$, pour tout $x \in V$, il existe une solution ψ de $y' = F(t,y)$ définie sur $]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$ et vérifiant $\psi(t_1) = x$.

Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_n \in]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$ et $\varphi(\beta_n) \in V$. Notons ψ la solution définie sur $]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$ de $y' = F(t,y)$ telle que $\psi(\beta_n) = \varphi(\beta_n)$. L'unicité au problème de Cauchy donnée par le théorème de Cauchy Lipschitz montre que $\psi = \varphi$ sur $]\beta-\varepsilon, \beta[$. La fonction définie sur $]\alpha, \beta+\varepsilon[$ par

$$t \mapsto \varphi(t) \quad \text{si } t \in]\alpha,\beta[, \qquad t \mapsto \psi(t) \quad \text{si } t \in [\beta, \beta+\varepsilon[$$

est donc solution de $y' = F(t,y)$ sur $]\alpha, \beta+\varepsilon[$. Ceci est absurde, car φ est une solution maximale sur $]\alpha,\beta[$. D'où le résultat. □

Remarque 1. — Dans le cas $O = \mathbb{R}^n$, ce résultat s'écrit : si $\beta < b$, alors $\lim_{t\to\beta} \|\varphi(t)\| = +\infty$.

- Une fonction localement lipschitzienne $F : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad y \mapsto F(y)$ peut être vue comme une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (en posant $F(t,y) = F(y)$). Le théorème précédent s'énonce alors comme suit : si $\varphi : \ ]a,b[\to \mathbb{R}^n$ est une solution maximale de $y' = F(y)$, et si $b < +\infty$, alors $\lim_{t\to b} \|\varphi(t)\| = +\infty$.
- Il existe une version faible du principe de majoration *a priori* dont la preuve est plus simple et ne repose pas sur le lemme précédent (voir l'exercice 1).

Grâce au principe de majoration *a priori*, nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1 page 378 (la version faible — exercice 1 — permet aussi de le démontrer).

COROLLAIRE 1. *Soit $(L) : \ X' = A(t)\,X + B(t)$ une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{R}^n$, où $A : \ ]a,b[\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : \ ]a,b[\to \mathbb{R}^n$ sont continues.*

Alors les solutions maximales de (L) sont définies sur $]a,b[$.

Démonstration. On définit l'application $F:\ ]a,b[\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\quad (t,X)\mapsto A(t)\,X+B(t)$. Elle est continue sur $]a,b[\times\mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne en X, car $F(t,X)-F(t,Y)=A(t)\,(X-Y)$ et A est continue.

Soit $X:\ ]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}^n$ une solution maximale de (L). Supposons $\beta<b$, et $t_0\in\,]a,b[$ étant fixé, notons $M=\sup_{t\in[t_0,\beta]}\|A(t)\|$ et $N=\sup_{t\in[t_0,\beta]}\|B(t)\|$ (on a muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'algèbre $\|A\|=\sup_{\|X\|=1}\|AX\|$). On a

$$\forall t\in[t_0,\beta[,\qquad \|X'(t)\|\le M\,\|X(t)\|+N,$$

donc d'après le lemme de Gronwall (voir le corollaire 2 page 398), X est bornée au voisinage de β^-. Ceci contredit le principe de majoration *a priori*, donc $\beta=b$. On montrerait de même $\alpha=a$. □

Exercices.

Exercice 1 (Une version faible du principe de majoration *a priori*). On considère $F:\ ]a,b[\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (avec $-\infty\le a<b\le+\infty$) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable.

Soit $\varphi:\ ]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}^n$ une solution maximale de $y'=F(t,y)$. Si $\beta<b$, montrer que φ n'est pas bornée au voisinage de β (sans utiliser, bien sûr, le principe de majoration *a priori*).

Solution. Raisonnons par l'absurde : supposons $\beta<b$ et φ bornée au voisinage de β. Soit $t_0\in\,]\alpha,\beta[$ et soit $M>0$ tel que $\|\varphi(t)\|\le M$ pour tout $t\in[t_0,\beta[$.

Comme F est continue sur le compact $[t_0,\beta]\times\mathrm{B_f}(0,M)$, il existe $K>0$ tel que $\|F(t,x)\|\le K$ pour tout $(t,x)\in[t_0,\beta]\times\mathrm{B_f}(0,M)$, et on a $\|\varphi'(t)\|=\|F(t,\varphi(t))\|\le K$ pour tout $t\in[t_0,\beta[$. Comme de plus φ' est continue, on en déduit que l'intégrale $\int_{t_0}^{\beta}\varphi'(t)\,dt$ converge absolument, donc converge, donc φ converge en β. Notons $x_0=\lim_{t\to\beta}\varphi(t)$. Prolongeons φ par continuité en β en posant $\varphi(\beta)=x_0$. Comme $\varphi'(t)=F(t,\varphi(t))$, on voit que φ' converge en β, donc le prolongement de φ est dérivable en β et $\varphi'(\beta)=F(\beta,\varphi(\beta))$.

Ainsi prolongée, φ est solution de l'équation différentielle $y'=F(t,y)$ sur $]\alpha,\beta]$. Or d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une fonction ψ définie sur un intervalle ouvert I_β centré en β, solution de $y'=F(t,y)$, et vérifiant $\psi(\beta)=x_0=\varphi(\beta)$. Comme φ et ψ coïncident en x_0, l'unicité au problème de Cauchy garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne que $\varphi=\psi$ sur $]\alpha,\beta]\cap I_\beta$. Donc la fonction définie sur $]\alpha,\beta]\cup I_\beta$ par

$$t\mapsto\varphi(t)\quad\text{si } t\in\,]\alpha,\beta],\qquad t\mapsto\psi(t)\quad\text{si } t\in I_\beta\setminus]\alpha,\beta],$$

est solution de $y'=F(t,y)$ sur un intervalle contenant strictement $]\alpha,\beta[$. Ceci est absurde car φ est une solution maximale. D'où le résultat.

Remarque. Ce résultat est plus faible que le principe de majoration *a priori* énoncé à la page 400, car le fait que φ ne soit pas bornée n'entraîne pas forcément $\|\varphi(t)\|\to+\infty$.

Cette version faible permet aussi de montrer le corollaire 1. En fait, elle suffit à montrer beaucoup de conséquences du principe de majoration *a priori*.

Exercice 2. Soit $F:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que le champ de vecteurs F est *complet*, c'est-à-dire que toute solution maximale de l'équation différentielle $X'=F(X)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution. Soit $\varphi:\ ]a,b[\to\mathbb{R}^n$ une solution maximale de $X'=f(X)$. Supposons $b<+\infty$. Alors si $t_0\in\,]a,b[$, en notant M un majorant de F sur $\mathbb{R}^n$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall t\in[t_0,b[,\qquad \|\varphi(t)\|\le\|\varphi(t_0)\|+\|\varphi(t)-\varphi(t_0)\|\le\|\varphi(t_0)\|+M(t-t_0)\le M(b-t_0).$$

Ainsi, φ est bornée au voisinage de b. En appliquant le principe de majoration *a priori* (ou le résultat de l'exercice précédent), on conclut à une absurdité. Donc $b = +\infty$. On montrerait de même $a = -\infty$.

EXERCICE 3. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On considère le système différentiel $(E) : X' = F(X)$. En munissant $\mathbb{R}^n$ de la métrique euclidienne standard, on suppose de plus que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$, $F(X) \cdot X < 0$.

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|X_0\| \leq 1$. Montrer qu'il existe une solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = X_0$ et définie sur un intervalle de la forme $]-\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$, vérifiant $\|\varphi(t)\| < 1$ pour tout $t > 0$.

Solution. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'existence d'une solution maximale φ de (E) définie sur un intervalle de la forme $]-\alpha, \beta[$ $(\alpha, \beta > 0)$ et vérifiant $\varphi(0) = X_0$.

Montrons

$$\exists \eta \in]0, \beta[\,, \forall t \in]0, \eta[\,, \qquad \|\varphi(t)\| < 1. \tag{$*$}$$

Si $\|X_0\| < 1$ c'est évident par continuité de φ en 0. Sinon, $\|X_0\| = 1$, donc $\frac{d}{dt}[\varphi(t) \cdot \varphi(t)]_{t=0} = 2\varphi'(0) \cdot \varphi(0) = 2F(X_0) \cdot X_0 < 0$, c'est-à-dire $\frac{d}{dt}(\|\varphi(t)\|^2)_{t=0} < 0$, d'où (*).

Montrons maintenant que $\|\varphi(t)\| < 1$ pour tout $t \in]0, \beta[$. Notons $\Gamma = \{t_0 \in]0, \beta[\mid \forall t \in]0, t_0[\,, \|\varphi(t)\| < 1\}$. D'après (*), Γ est non vide, donc $\gamma = \sup \Gamma$ existe. Supposons $\gamma < \beta$. Alors on a $\|\varphi(\gamma)\| = 1$ par continuité de φ, et $\frac{d}{dt}[\varphi(t) \cdot \varphi(t)]_{t=\gamma} = 2\varphi'(\gamma) \cdot \varphi(\gamma) = 2F(\varphi(\gamma)) \cdot \varphi(\gamma) < 0$, c'est-à-dire $\frac{d}{dt}(\|\varphi(t)\|^2)_{t=\gamma} < 0$. On en déduit qu'il existe $\delta \in]0, \gamma[$ tel que $\|\varphi(\delta)\| > \|\varphi(\gamma)\| = 1$. Ceci est absurde par définition de γ. On a donc $\gamma = \beta$.

Terminons. La fonction φ est bornée au voisinage de β, donc d'après le principe de majoration *a priori* (ou le résultat de l'exercice 1), on a $\beta = +\infty$. D'où le résultat.

4.4. Dépendance des solutions vis-à-vis des conditions initiales

Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) une application continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que pour tout $(t_0, X_0) \in \Omega$, il existe une solution maximale φ_{t_0,X_0} de $X' = F(t, X)$ définie sur un intervalle ouvert I_{t_0,X_0} contenant t_0 et telle que $\varphi_{t_0,X_0}(t_0) = X_0$. En notant

$$W = \bigcup_{(t_0,X_0)\in\Omega} \{(t_0, X_0)\} \times I_{t_0,X_0} \subset \Omega \times \mathbb{R},$$

on peut ainsi définir une application Φ de W dans $\mathbb{R}^n$ par $\Phi(t_0, X_0; t) = \varphi_{t_0,X_0}(t)$. Ainsi, $\Phi(t_0, X_0; \,.\,)$ est la solution maximale de $X' = F(t, X)$ passant en X_0 au temps t_0.

Un problème nouveau (et intéressant) se pose alors : celui de l'étude de la dépendance de Φ par rapport à ses paramètres. Ce changement de point de vue s'avère d'ailleurs très fécond dans la théorie des équations différentielles.

Dans le cas général, on peut montrer que W est ouvert (cela découle essentiellement du lemme 1 page 399) et que Φ est continue sur W. La démonstration est assez technique. Nous allons démontrer ces résultats dans certains cas particuliers.

Systèmes différentiels linéaires. On considère le système différentiel homogène sur $\mathbb{R}^n$ $(H) : X' = A(t)\,X$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue (et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$).

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Fixons $t_0 \in I$. On sait que pour tout i, il existe une unique solution X_i de (H) définie sur I et telle que $X_i(t_0) = e_i$. Pour tout

$t \in I$, on note $M_{t_0}(t)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $X_i(t)$, de sorte que

$$\frac{d}{dt} M_{t_0} = A(t)\, M_{t_0} \quad \text{et} \quad M_{t_0}(t_0) = I_n.$$

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. La fonction $\varphi : \ t \mapsto M_{t_0}(t)\, X_0$ est donc solution de (H) et vérifie $\varphi(t_0) = X_0$. Avec les notations précédentes, on a donc, pour tout $t \in I$, l'égalité $\varphi_{t_0,X_0}(t) = \Phi(t_0, X_0; t) = M_{t_0}(t) X_0$. La matrice $M_{t_0}(t)$ est souvent notée $R(t, t_0)$.

Définition 1. L'application $I^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (t, t') \mapsto R(t, t')$ est appelée la *résolvante* de (H). Elle vérifie les propriétés suivantes.

— Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, la solution φ_{t_0,X_0} de (H) vérifiant $\varphi_{t_0,X_0}(t_0) = X_0$ s'écrit $\varphi_{t_0,X_0}(t) = R(t, t_0)\, X_0 = \Phi(t_0, X_0; t)$;

— par construction, on a

$$\forall (t, t', t'') \in I^3, \qquad R(t, t') \circ R(t', t'') = R(t, t'') \quad \text{et} \quad \forall t \in I, \qquad R(t, t) = I_n.$$

— pour tout $t_0 \in I$ fixé, on a $\frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t) \circ R(t, t_0)$.

Proposition 1. *Pour tout $(t, t') \in I^2$, on a $R(t, t') \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ et $R(t, t')^{-1} = R(t', t)$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $R(t, t') \circ R(t', t) = R(t, t) = I_n$. □

Proposition 2. *La résolvante R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^2.*

Démonstration. Fixons $t_0 \in I$. Par construction, l'application $t \mapsto R(t, t_0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Maintenant, comme $R(t, t') = R(t, t_0) \circ R(t_0, t') = R(t, t_0) \circ R(t', t_0)^{-1}$, on en conclut que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^2. □

Proposition 3. *L'application $\Phi : \ (t_0, X_0; t) \mapsto \Phi(t_0, X_0; t) = \varphi_{t_0,X_0}(t)$ est continue sur $I \times \mathbb{R}^n \times I$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire $\Phi(t_0, X_0; t) = R(t, t_0)\, X_0$ et d'utiliser la proposition précédente. □

Remarque 1. — Les colonnes de la matrice $R(t, t_0)$ sont des solutions de (H), donc $\det R(t, t_0)$ est un wronskien. En particulier, d'après le résultat de la question b) de l'exercice 7 page 388, on a

$$\det R(t, t_0) = [\det R(t_0, t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds\right) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds\right).$$

— Connaissant $R(t, t_0)$, la méthode de variation des constantes pour résoudre le système différentiel $(L) : \ X' = A(t)\, X + b(t)$ en terme de résolvante s'exprime comme suit : on cherche les solutions φ de (L) sous la forme $\varphi(t) = R(t, t_0)\psi(t)$, où $\psi : \ I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ encore inconnue. La fonction φ est solution de (L) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \frac{d\varphi}{dt}(t) = A(t) \circ R(t, t_0)\psi(t) + R(t, t_0)\left(\frac{d\psi}{dt}(t)\right) = A(t) \circ R(t, t_0)\psi(t) + b(t),$$

ce qui équivaut à $\frac{d\psi}{dt}(t) = R(t, t_0)^{-1}\, b(t) = R(t_0, t) b(t)$. La solution φ de (L) vérifiant $\varphi(t_0) = X_0$, notée φ_{t_0,X_0}, est donc donnée par

$$\varphi_{t_0,X_0}(t) = R(t, t_0)\left[X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, s) b(s)\, ds\right].$$

On en déduit la proposition qui suit.

Proposition 4. *Soit le système différentiel $(L) : \ X' = A(t)\, X + b(t)$, où $A : \ I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b : \ I \to \mathbb{R}^n$ sont continues. Avec les notations précédentes, la fonction $\Phi : \ (t_0, X_0; t) \mapsto \varphi_{t_0,X_0}(t)$ est continue sur $I \times \mathbb{R}^n \times I$.*

Cas des équations différentielles de la forme $X' = F(X)$.

PROPOSITION 5. *Soit* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction localement lipschitzienne. Conformément aux notations précédentes, on note* $t \mapsto \Phi(t_0, X_0; t)$ *la solution maximale* φ *de* $X' = F(X)$ *telle que* $\varphi(t_0) = X_0$.

Soit $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *et notons* $]a, b[$ *l'intervalle de définition de la solution maximale* $t \mapsto \Phi(t_0, X_0; t)$. *Alors pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *la solution maximale* $t \mapsto \Phi(t_0 + \alpha, X_0, t)$ *est définie sur* $]a + \alpha, b + \alpha[$ *et on a*

$$\forall t \in \,]a + \alpha, b + \alpha[\,, \qquad \Phi(t_0 + \alpha, X_0; t) = \Phi(t_0, X_0; t - \alpha).$$

Démonstration. Posons $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^n \quad t \mapsto \Phi(t_0, X_0; t)$ et $\psi :]a+\alpha, b+\alpha[\to \mathbb{R}^n \quad t \mapsto \varphi(t-\alpha)$. On vérifie facilement que $\psi' = F(\psi)$, et comme $\psi(t_0 + \alpha) = \varphi(t_0) = X_0$, on a $\psi(t) = \Phi(t_0 + \alpha, X_0; t)$ pour tout $t \in \,]a + \alpha, b + \alpha[$.

Or ψ est une solution maximale (sinon φ ne serait pas une solution maximale), donc $t \mapsto \Phi(t_0 + \alpha, X_0; t)$ est définie sur $]a + \alpha, b + \alpha[$ et

$$\forall t \in \,]a + \alpha, b + \alpha[\,, \qquad \Phi(t_0 + \alpha, X_0; t) = \psi(t) = \varphi(t - \alpha) = \Phi(t_0, X_0; t - \alpha).$$

□

Dans l'exercice qui suit, on montre la continuité de Φ dans un autre cas particulier.

Exercices.

EXERCICE 1. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et globalement lipschitzienne en la seconde variable, *i. e.*

$$\exists L > 0, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq L \, \|X - Y\|.$$

a) Montrer que les solutions maximales de $X' = F(t, X)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
b) Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, on note $t \mapsto \Phi(t_0, X_0; t)$ la solution sur $\mathbb{R}$ de $X' = F(t, X)$ qui prend la valeur X_0 au point t_0. Montrer que l'application Φ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Solution. **a)** Soit φ une solution maximale de $X' = F(t, X)$ définie sur $]a, b[$. Supposons par exemple $b < +\infty$. Soit $c \in \,]a, b[$. Alors pour tout $t \in [c, b[$,

$$\|\varphi'(t)\| = \|F(t, \varphi(t))\| \leq \|F(t, \varphi(t)) - F(t, 0)\| + \|F(t, 0)\| \leq L \, \|\varphi(t)\| + M,$$

où M est un majorant de $t \mapsto F(t, 0)$ sur le compact $[c, b]$. On en conclut, avec le corollaire 2 du lemme de Gronwall (page 398), que φ est bornée au voisinage de b. Ceci est absurde d'après le principe de majoration *a priori* (ou le résultat de l'exercice 1 page 401). On a donc $b = +\infty$. On montrerait de même $a = -\infty$.

b) On procède en plusieurs étapes.

(i) Fixons d'abord $t_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on note $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \varphi(t_0, X; t)$. On a

$$\forall t, \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\varphi_X'(t) - \varphi_Y'(t)\| = \|F(t, \varphi_X(t)) - F(t, \varphi_Y(t))\| \leq L \, \|\varphi_X(t) - \varphi_Y(t)\|,$$

donc d'après le corollaire 2 du lemme de Gronwall,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|\varphi_X(t) - \varphi_Y(t)\| \leq \|\varphi_X(t_0) - \varphi_Y(t_0)\| \, e^{L\,|t - t_0|},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\Phi(t_0, X; t) - \Phi(t_0, Y; t)\| \leq \|X - Y\| \, e^{L|t - t_0|}. \qquad (*)$$

En écrivant maintenant

$$\begin{aligned} \|\Phi(t_0, X; t) - \Phi(t_0, Y; t')\| &\leq \|\Phi(t_0, X; t) - \Phi(t_0, X; t')\| + \|\Phi(t_0, X; t') - \Phi(t_0, Y, t')\| \\ &\leq \|\Phi(t_0, X; t) - \Phi(t_0, X; t')\| + \|X - Y\| \, e^{L|t' - t_0|}, \end{aligned}$$

on en conclut que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $(X, t) \mapsto \Phi(t_0, X; t)$ est continue.

(ii) Montrons maintenant, pour $t_1 \in \mathbb{R}$ fixé, la continuité de $(t, X) \mapsto \Phi(t, X; t_1)$. Soit $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Pour tout $(t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\Phi(t, X; t_1) = \Phi(t_0, \Phi(t, X; t_0), t_1)$$

(en effet, pour t, X, t_0 fixés, ces deux fonctions de t_1 sont des solutions de $X' = F(t, X)$ qui coïncident en $t_1 = t_0$, elles sont donc égales d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz). On en conclut avec (*) que

$$\|\Phi(t, X; t_1) - \Phi(t_0, X_0; t_1)\| \leq \|\Phi(t, X; t_0) - X_0\| \, e^{L|t_1 - t_0|}.$$

Or $X_0 = \Phi(t_0, X_0; t_0) = \Phi(t, \Phi(t_0, X_0; t); t_0)$, donc toujours d'après (*)

$$\|\Phi(t, X; t_0) - X_0\| \leq \|X - \Phi(t_0, X_0; t)\| \, e^{L|t - t_0|}.$$

On en déduit

$$\|\Phi(t, X; t_1) - \Phi(t_0, X_0; t_1)\| \leq \|X - \Phi(t_0, X_0; t)\| \, e^{L(|t - t_0| + |t_1 - t_0|)}.$$

Ceci entraîne que lorsque $(t, X) \to (t_0, X_0)$, on a $\Phi(t, X; t_1) \to \Phi(t_0, X_0; t_1)$, d'où la continuité voulue.

(iii) Il suffit maintenant d'écrire $\Phi(s, X; t) = \Phi(t_0, \Phi(s, X; t_0); t)$ (pour t_0 fixé), pour conclure que $\Phi : \ (s, X; t) \mapsto \Phi(s, X; t)$ est continue.

Exercice 2. Soit $f : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, globalement lipschitzienne en la seconde variable, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad f(t, 1) > 0, \quad f(t, -1) < 0.$$

Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de $(E) : \ y' = f(t, y)$ vérifiant $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t \geq 0$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent).

Solution. D'après l'exercice précédent, les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus, en notant $t \mapsto \Phi(a, t)$ la solution maximale de (E) prenant la valeur a en $t = 0$, la fonction $\Phi : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue.

Remarquons maintenant le fait suivant. Si $\varphi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (E) et s'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $\varphi(t_0) > 1$, alors $\varphi(t) > 1$ pour tout $t \geq t_0$. En effet, supposons qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $\varphi(t_1) \leq 1$. Alors il existe $u \in \,]t_0, t_1]$ tel que $\varphi(u) = 1$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Autrement dit, le fermé $\varphi^{-1}(\{1\})$ a une intersection non vide avec $]t_0, t_1]$. Notons $t_2 = \inf \varphi^{-1}(\{1\}) \cap [t_0, t_1]$. On a $\varphi(t_2) = 1$ et $t_2 \neq t_0$ (car $\varphi(t_0) > 1$), et $\varphi(t) > 1$ pour tout $t \in \,]t_0, t_2[$, donc $\varphi'(t_2) \leq 0$, ce qui est absurde puisque $\varphi'(t_2) = f(t_2, \varphi(t_2)) = f(t_2, 1) > 0$. On montrerait de même que s'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $\varphi(t_0) < -1$, alors $\varphi(t) < -1$ pour tout $t \geq t_0$.

Ceci étant, notons

$$A^+ = \{y \in [-1, 1] \ | \ \exists t \in \mathbb{R}^+, \Phi(y, t) > 1\} \quad \text{et} \quad A^- = \{y \in [-1, 1] \ | \ \exists t \in \mathbb{R}^+, \Phi(y, t) < -1\}.$$

Comme Φ est continue, on voit facilement que A^+ et A^- sont des ouverts de $[-1, 1]$. Par ailleurs, $A^+ \neq \varnothing$. En effet, si $\varphi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la solution de (E) vérifiant $\varphi(1) = 1$, on ne peut pas avoir $\varphi(0) > 1$ (sinon $\varphi(t) > 1$ sur $\mathbb{R}^+$ d'après le principe énoncé plus haut), et de même, on ne peut pas avoir $\varphi(0) < -1$. Donc $\varphi(0) \in [-1, 1]$, et comme $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = f(1, 1) > 0$, on a $\varphi(t) > 1$ sur un voisinage à droite de 1, d'où $y = \varphi(0) \in A^+$. De même, A^- est non vide.

On a $A^+ \cap A^- = \varnothing$. En effet, raisonnons par l'absurde en supposant que $A^+ \cap A^-$ contienne un élément y. Notons $\varphi : \ t \mapsto \Phi(y, t)$, et soient $t_1, t_2 > 0$ tels que $\varphi(t_1) > 1$ et $\varphi(t_2) < -1$. On a $\varphi(t_1) > 1$ donc $\varphi(t) > 1$ pour tout $t > t_1$ d'après le principe énoncé plus haut, d'où $t_2 < t_1$. On montrerait de même $t_1 < t_2$, ce qui est absurde. Donc $A^+ \cap A^- = \varnothing$.

Comme $[-1, 1]$ est connexe et que A^+ et A^- sont deux ouverts disjoints et non vides de $[-1, 1]$, on ne peut pas avoir $A^+ \cup A^- = [-1, 1]$. Il existe donc $y_0 \in [-1, 1]$ tel que $y_0 \notin A^+ \cup A^-$. On voit alors que la fonction $\varphi = \Phi(y_0, \, . \,)$ vérifie $|\varphi(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Si $|\varphi(t_0)| = 1$ pour un $t_0 \geq 0$, par exemple $\varphi(t_0) = 1$, le fait que $\varphi'(t_0) = f(t_0, 1) > 0$ montre que sur un voisinage à droite de t_0, $\varphi(t) > 1$, donc $y_0 \in A^+$ ce qui est absurde. Finalement, φ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

EXERCICE 3. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et globalement lipschitzienne en la seconde variable. On suppose

$$\exists T > 0, \forall (t, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(t+T, y) = f(t, y).$$

On suppose également que $(E): y' = f(t, y)$ admet une solution définie sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que (E) admet une solution définie sur $\mathbb{R}$ et T-périodique (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 1).

Solution. Les hypothèses de l'énoncé de l'exercice 1 sont satisfaites, donc les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus, si on note $t \mapsto \Phi(y, t)$ la solution maximale de (E) prenant la valeur y en $t = 0$, la fonction $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}^2$.

On sait qu'il existe une solution φ de (E) bornée sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, l'exercice 4 page 377 montre que la suite $(\varphi(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est monotone. De plus φ est bornée, donc cette suite est bornée, donc elle converge. Notons ℓ sa limite.

Remarquons maintenant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\Phi(\varphi(kT), t) = \varphi(kT + t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (en effet, ces fonctions de t sont solutions de (E) et prennent la même valeur en 0). Fixons alors $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\Phi(\varphi(kT), t + T) = \varphi[(k+1)T + t] = \Phi(\varphi[(k+1)T], t),$$

donc en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient, Φ étant continue $\Phi(\ell, t+T) = \Phi(\ell, t)$. Ceci est vrai indépendamment de $t \in \mathbb{R}$. Finalement, la fonction $\psi = \Phi(\ell, \,.\,)$ est une solution T-périodique de (E) sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4. Si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M \geq 0$ si pour tout (i, j), $m_{i,j} \geq 0$. Si $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $Y \geq 0$ si $y_i \geq 0$ pour tout i, et on note $Y > 0$ si $y_i > 0$ pour tout i.

Soit $A: \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue vérifiant $A(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

a) Soit $Y: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ une solution de $Y' = A(t)\, Y$ vérifiant $Y(0) > 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $Y(t) > 0$.

b) Montrer qu'il existe une solution Y de $(L): Y' = -A(t)\, Y$, non nulle, telle que $Y(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Solution. **a)** Notons (y_i) les composantes de Y et $(a_{i,j})$ celles de A et supposons le résultat faux. Alors $c = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \mid \exists i, y_i(t) = 0\}$ existe. Comme Y est continue, il existe i tel que $y_i(c) = 0$, et par ailleurs, $Y(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, c]$. On a donc $y_i'(t) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)\, y_j(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, c]$, donc y_i est croissante sur $[0, c]$, donc $y_i(c) \geq y_i(0) > 0$, ce qui est absurde.

b) Donnons l'idée. Lorsque p est grand, et si X vérifie $X' = A(t)\, X$ avec $X(0) \geq 0$, alors $Y: t \mapsto X(p-t)$ est solution de (L). Comme $X(t) \geq 0$ sur $[0, p]$, on a $Y(t) \geq 0$ sur $[0, p]$. Ensuite, notre but sera de faire tendre p vers $+\infty$ et d'en tirer parti.

Soit $R(t, s)$ la résolvante de (L) (voir la définition 1 page 403), de sorte que pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ fixé, $\frac{dR}{dt}(t, s) = -A(t)\, R(t, s)$ et $R(s, s) = I_n$.

Notons E le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $C_p = R(0, p)\, E$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous notons $Y_p(t) = R(t, 0)\, C_p = R(t, p)\, E$. On a $Y_p(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, p]$. En effet. Considérons l'application $\varphi: [0, p] \to \mathbb{R}^n \quad t \mapsto R(p-t, t)\, E = Y_p(p-t)$. On a

$$\forall t \in [0, p], \qquad \frac{d\varphi}{dt}(t) = -\frac{dR}{dt}(p-t, p)\, E = A(p-t)\, R(p-t, p)\, E = A(p-t)\, \varphi(t),$$

et comme $\varphi(0) = E > 0$, on en déduit d'après la question précédente que $\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, p]$, c'est-à-dire $Y_p(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, p]$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note ensuite $A_p = C_p/\|C_p\|$. La suite (A_p) est à valeurs dans la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ qui est compacte, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(A_{\varphi(p)})$. Notons A sa limite. Posons $Y(t) = R(t,0)\,A = \lim_{p\to+\infty} R(t,0)\,A_{\varphi(p)}$. Alors Y est solution de (L) et on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad R(t,0)\,A_{\varphi(p)} = \frac{1}{\|C_{\varphi(p)}\|}\,Y_{\varphi(p)}(t),$$

donc $R(t,0)\,A_{\varphi(p)} \geq 0$ pour $\varphi(p) > t$. En passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ (avec t fixé), on en déduit $Y(t) \geq 0$, et ceci pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

5. Problèmes

PROBLÈME 1. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle (E) : $y' \log t + 2ty^2 - y/t = 0$. Étant donné $y_0 \in \mathbb{R}$, étudier l'existence de solutions y de (E) définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $y(1) = y_0$.

Solution. L'équation différentielle (E) est résolue sur chacun des intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Nous nous plaçons donc sur l'un de ces intervalles.

La forme de (E) nous invite à poser $y = z\log t$. En remplaçant dans (E), on obtient facilement (E') : $z' + 2tz^2 = 0$. Il s'agit d'une équation de Ricatti. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit qu'en dehors de la solution nulle, aucune solution z de (E') ne s'annule. Ainsi, si z n'est pas la solution nulle, (E') peut s'écrire $z'/z^2 = -2t$, donc par intégration, on a $1/z = -t^2 + c$, où c est une constante réelle. Autrement dit, les solutions de (E') sont celles de la forme $z(t) = (t^2 - c)^{-1}$ ou la fonction nulle.

Ainsi, si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$, en notant $I_1 =]0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$, on a pour tout $k \in \{1,2\}$

$$\exists c_k \in \mathbb{R}, \forall t \in I_k, \qquad y(t) = \frac{\log t}{t^2 - c_k}, \tag{$*$}$$

ou bien y est identiquement nulle sur I_k.

Si y est du type (*) sur I_k, on doit nécessairement avoir $c_1 \geq 1$ ou $c_1 \leq 0$ (pour $k = 1$), et $c_2 \leq 1$ (pour $k = 2$).

(i) De plus, si $c_1 \neq 1$ (resp. $c_2 \neq 1$), on a $y(1) = 0$ et la dérivée à gauche (resp. à droite) de y en 1 est $y'_{\mathrm{g}}(1) = (1 - c_1)^{-1}$ (resp. $y'_{\mathrm{d}}(1) = (1 - c_2)^{-1}$).

(ii) Si $c_1 = 1$ (resp. $c_2 = 1$), on a facilement $y(1) = 1/2$.

Traitons maintenant plusieurs cas selon la forme de y sur I_1.

— Si y est identiquement nulle sur I_1, alors nécessairement y est identiquement nulle sur I_2 (d'après (i) et (ii)), donc y est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

— Si y est du type (*) avec $c_1 \neq 1$, alors nécessairement (d'après (i) et (ii)), y est du type (*) sur I_2 avec $c_2 \neq 1$ et l'égalité des dérivées à gauche et à droite de f en 1 donne $c_1 = c_2$, et vues les conditions imposées à c_1 et c_2, on a nécessairement $c_1 = c_2 \leq 0$.

— Si y est du type (*) avec $c_1 = 1$, alors y est nécessairement du type (*) sur I_2 avec $c_2 = 1$. Dans ce cas, on a $y(t) = \log t/(t^2-1)$ pour tout $t \neq 1$, $y(1) = 1/2$, et on vérifie facilement que y est dérivable en 1.

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de (E) sont

— la fonction nulle ;

— les fonctions de la forme $t \mapsto \log t/(t^2 - c)$, $c \leq 0$;

— la fonction $t \mapsto \log t/(t^2 - 1)$ si $t \neq 1$, $1 \mapsto 1/2$.

Si $y_0 \in \mathbb{R}$ est donné, on en déduit qu'il n'y a de solution y sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $y(1) = y_0$ si et seulement si $y_0 \in \{0, 1/2\}$. Si $y_0 = 0$, il y a une infinité de solutions ; si $y_0 = 1/2$, il n'y a qu'une seule solution.

Problème 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que l'équation différentielle $(E) : y' = f(y)$ admet une solution φ définie sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$.

Solution. Raisonnons par l'absurde, en supposant $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme f est continue, f garde alors un signe constant sur $\mathbb{R}$, par exemple $f(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = f(\varphi(t)) > 0$. Donc φ est strictement croissante. De plus φ est bornée, elle converge donc en $+\infty$. Soit ℓ sa limite. En faisant tendre t vers $+\infty$ dans $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$, on en déduit, par continuité de f, que φ' converge vers $\ell' = f(\ell) > 0$ en $+\infty$. La fonction φ' est continue et vérifie $\varphi'(t) \sim \ell'$, donc par intégration des équivalents, on en déduit que lorsque $t \to +\infty$, $\varphi(t) - \varphi(0) \sim \ell' t$. Ceci est impossible car $\ell' \neq 0$ et φ est bornée sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat.

Problème 3 (Méthode d'Euler-Cauchy pour l'intégration numérique d'une équation différentielle). Soient $T > 0$, $I = [0, T]$, et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose

$$\exists L > 0, \forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^m, \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x - y\|.$$

Soit $y : I \to \mathbb{R}^m$ une solution de l'équation différentielle $(E) : y' = f(t,y)$. On se propose d'approcher numériquement y par la méthode dite d'Euler-Cauchy. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $t_n = nh$. On définit $y_0, y_1, \ldots, y_N$ par récurrence par

$$y_0 = y(0) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n).$$

Pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, on pose $e_n = y(t_n) - y_n$. On se propose de majorer $\|e_n\|$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, y est de classe $\mathcal{C}^2$, et on pose $M = \sup\{\|y''(t)\|,\ t \in I\}$.

a) On pose $\varepsilon_n = [y(t_{n+1}) - y(t_n)] - h\,f(t_n, y(t_n))$. Montrer que pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $\|\varepsilon_n\| \leq Mh^2/2$.

b) En déduire

$$\forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}, \qquad \|e_n\| \leq \frac{Mh}{2L}\,e^{Lt_n}.$$

Solution. **a)** On peut aussi écrire

$$\varepsilon_n = [y(t_{n+1}) - y(t_n)] - hy'(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [y'(t) - y'(t_n)]\,dt,$$

et comme $\|y'(t) - y'(t_n)\| \leq M(t - t_n)$, on en déduit $\|\varepsilon_n\| \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} M(t - t_n)\,dt = Mh^2/2$.

b) On commence par écrire

$$e_{n+1} - e_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - (y_{n+1} - y_n) = \varepsilon_n + h[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)],$$

donc

$$\|e_{n+1} - e_n\| \leq \|\varepsilon_n\| + hL\,\|e_n\| \qquad \text{d'où} \qquad \|e_{n+1}\| \leq (1 + hL)\|e_n\| + \|\varepsilon_n\|.$$

Maintenant, avec les inégalités $1 + hL \leq e^{hL}$ et $\|\varepsilon_n\| \leq Mh^2/2$, on en déduit $\|e_{n+1}\| \leq e^{hL}\|e_n\| + Mh^2/2$, et une récurrence sur n donne

$$\|e_n\| \leq e^{nhL}\,\|e_0\| + \left(1 + e^{hL} + \cdots + e^{(n-1)hL}\right) M\,\frac{h^2}{2}.$$

Comme $e_0 = 0$, ceci s'écrit aussi

$$\|e_n\| \leq \left(1 + e^{hL} + \cdots + e^{(n-1)hL}\right) M\frac{h^2}{2} = \frac{e^{nhL} - 1}{e^{hL} - 1}\,M\,\frac{h^2}{2} \leq \frac{e^{nhL}}{hL}\,M\,\frac{h^2}{2} = e^{Lt_n}\,\frac{Mh}{2L},$$

et c'est terminé.

PROBLÈME 4. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, impaire, strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle $(E): \ x'' + f(x) = 0$ (équation d'un point matériel soumis à un champ de forces contraire à sa position).
a) Montrer que les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$.
b) Soit x une solution de (E) vérifiant les conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$, $x'(0) = 0$. Montrer que x est une fonction périodique et exprimer sa période.

Solution. **a)** Soit x une solution maximale de (E), et soit $]a, b[$ son intervalle de définition. On a $x'x'' + x'f(x) = 0$, donc par intégration, on obtient l'existence d'une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in\,]a, b[\,, \quad \frac{x'(t)^2}{2} + F(x(t)) = K, \qquad \text{où} \quad F(u) = \int_0^u f(t)\, dt. \tag{$*$}$$

(l'interprétation physique de ce résultat est la conservation de l'énergie cinétique ajoutée à l'énergie potentielle). La fonction F, primitive d'une fonction impaire, est paire. Par ailleurs, $F'(t) = f(t) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$, et comme $F(0) = 0$, F est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $\mathbb{R}$.

Donc $x'(t)^2/2 = K - F(x(t)) \leq K$ est majorée, donc x' est bornée. Si $b < +\infty$, on en déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis, que x est bornée au voisinage de b. Le vecteur $V = \left(\begin{smallmatrix} x \\ x' \end{smallmatrix}\right)$ est donc borné au voisinage de b. Par ailleurs, V est solution de l'équation différentielle du premier ordre $X' + g(X) = 0$, où $g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -y \\ f(x) \end{smallmatrix}\right)$, le principe de majoration *a priori* (voir le théorème 1 page 400 ou l'exercice 1 page 401) entraîne que V n'est pas borné au voisinage de b, ce qui est absurde. On a donc $b = +\infty$. On montrerait de même que $a = -\infty$.

b) En faisant $t = 0$ dans (*) on obtient $K = F(x_0)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{x'(t)^2}{2} = F(x_0) - F(x(t)). \tag{$**$}$$

On a $x''(0) = -f(x_0) < 0$, et comme $x'(0) = 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x'(t) < 0$ sur $]0, \varepsilon[$. Ainsi, l'ensemble $\Gamma = \{t > 0 \mid \forall u \in\,]0, t[\,, x'(u) < 0\}$ est non vide. Notons $t_0 = \sup \Gamma$. On a $x'(t) < 0$ pour tout $t \in\,]0, t_0[$, et d'après (**), on a $F(x(t)) < F(x_0)$ pour tout $t \in\,]0, t_0[$. Comme F est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et paire, on en déduit $|x(t)| < x_0$ pour tout $t \in\,]0, t_0[$.

Maintenant, l'équation (**) entraîne

$$\forall t \in\,]0, t_0[\,, \quad \frac{x'(t)}{\sqrt{2(F(x_0) - F(x(t)))}} = -1 \quad \text{donc} \quad t = \int_{x(t)}^{x_0} \frac{du}{\sqrt{2(F(x_0) - F(u))}} \tag{$***$}$$

(l'intégrale est bien convergente car au voisinage de x_0^-, $F(x_0) - F(u) \sim (x_0 - u) f(x_0)$ donc $\sqrt{F(x_0) - F(u)} \sim \sqrt{f(x_0)}\sqrt{x_0 - u}$). Par ailleurs, l'intégrale

$$T_0 = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{du}{\sqrt{2(F(x_0) - F(u))}}$$

converge (la fonction F est paire), et comme son intégrande est positive et que $|x(t)| < x_0$ pour tout $t \in\,]0, t_0[$, (***) entraîne $t < T_0$ pour tout $t \in\,]0, t_0[$, donc $t_0 \leq T_0$. Ainsi, t_0 est fini. Par continuité de x' on a $x'(t_0) = 0$, donc $F(x(t_0)) = F(x_0)$ d'après (**), et comme F est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, ceci entraîne $|x(t_0)| = x_0$. De plus, x est strictement décroissante sur $]0, t_0[$, donc $x(t_0) < x_0$, donc la seule possibilité est $x(t_0) = -x_0$. En faisant maintenant tendre t vers t_0 par valeurs inférieures dans (***), on en déduit $t_0 = T_0$.

Considérons maintenant la fonction $y: \ t \mapsto -x(t + T_0)$. On a $y(0) = -x(t_0) = x_0$, $y'(0) = -x'(t_0) = 0$, et comme f est impaire, y est solution de (E). D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a unicité au problème de Cauchy, et comme x et y ont les mêmes conditions initiales en 0, on a $x = y$ sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes, $x(t) = -x(t + T_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit $x(t) = -x(t + T_0) = x(t + 2T_0)$. Donc x est $2T_0$-périodique. La fonction x n'admet pas de période plus petite, car nous avons montré $x(t) < x(0)$ sur $]0, T_0]$ et sur $]T_0, 2T_0[$, $|x(t)| = |x(t - T_0)| < x(0)$, donc finalement, $x(t) \neq x(0)$ sur $]0, 2T_0[$.

Remarque. On traite de la même manière l'équation du pendule $L\theta'' + g \sin\theta = 0$. Partant d'une vitesse nulle en $\theta = \theta_0$, le pendule a sa période égale à $2\sqrt{L/g} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$.

Problème 5. Déterminer les solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, de l'équation différentielle (E) : $yy'y'' = 0$.

Solution. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable vérifiant $\varphi\varphi'\varphi'' = 0$. On va montrer (on s'en doutait) que $\varphi'' = 0$, c'est-à-dire que φ est une fonction affine.

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons l'existence de $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi''(t_0) \neq 0$. Quitte à considérer la fonction $t \mapsto \varphi(t + t_0)$, on peut même supposer $t_0 = 0$, de sorte que $\varphi''(0) \neq 0$.

Dans un premier temps, nous montrons l'existence d'un $\alpha > 0$ vérifiant $\varphi'(t) \neq 0$ pour tout t tel que $0 < |t| < \alpha$. Si $\varphi'(0) \neq 0$, c'est évident par continuité de φ'. Sinon, $\varphi'(0) = 0$, et il suffit d'écrire $\varphi'(t) = \varphi'(0) + t\varphi''(0) + o(t) = t[\varphi''(0) + o(1)]$ pour conclure.

Ensuite, nous montrons l'existence de $\beta > 0$ vérifiant $\varphi(t) \neq 0$ pour tout t tel que $0 < |t| < \beta$. Si $\varphi(0) \neq 0$, c'est immédiat par continuité de φ. Sinon, $\varphi(0) = 0$. Si $\varphi'(0) \neq 0$, il suffit d'écrire $\varphi(t) = t[\varphi'(0) + o(1)]$, et si $\varphi'(0) = 0$, on écrit $\varphi(t) = \frac{t^2}{2}[\varphi''(0) + o(1)]$ pour conclure.

En posant maintenant $\gamma = \inf\{\alpha, \beta\}$, on a donc $\varphi(t)\varphi'(t) \neq 0$ pour tout t tel que $0 < |t| < \gamma$. Comme φ est solution de (E), on en déduit $\varphi''(t) = 0$ pour tout t vérifiant $0 < |t| < \gamma$.

Pour montrer $\varphi''(0) = 0$, on pourrait maintenant conclure avec le théorème de Darboux. On peut s'en tirer autrement, en procédant comme suit. Comme $\varphi'' = 0$ sur $]0, \gamma[$, φ' est constante sur $]0, \gamma[$. De même, φ' est constante sur $]-\gamma, 0[$. Par continuité de φ' en 0, φ' est donc constante sur $]-\gamma, \gamma[$, donc $\varphi''(0) = 0$. Ceci est contradictoire, d'où le résultat.

Problème 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne de f en x, notée $f'(x)$, est symétrique définie négative.

Montrer que si $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une solution de l'équation différentielle $Y' = f(Y)$, alors $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0$.

Solution. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$. En posant $V : t \mapsto {}^tXf(tX)$, on a $V'(t) = {}^tXf'(tX)X < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car $f'(tX)$ est définie négative). Ainsi V est strictement décroissante. Comme $V(0) = 0$, on en déduit $V(1) = {}^tXf(X) < 0$. En résumé, nous avons montré

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0, \qquad {}^tXf(X) < 0. \tag{$*$}$$

Ceci étant, posons $\alpha : t \mapsto {}^tY(t)Y(t) = \|Y(t)\|^2$. On a

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \alpha'(u) = {}^tY'(u)Y(u) + {}^tY(u)Y'(u) = 2{}^tY(u)Y'(u) = 2{}^tY(u)\,f(Y(u)), \tag{$**$}$$

donc d'après (*), $\alpha'(u) \leq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction α est décroissante. Comme elle est positive, elle admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R}^+$ en $+\infty$. Il s'agit de montrer $\ell = 0$.

Supposons $\ell > 0$. Sur $\mathbb{R}^+$, on a $\ell \leq \alpha(t) = \|Y(t)\|^2 \leq \alpha(0)$, autrement dit, pour $t \geq 0$, $Y(t)$ prend ses valeurs dans le compact $K = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \ell \leq \|X\|^2 \leq \alpha(0)\}$. D'après (*) et comme $\ell > 0$, on a ${}^tXf(X) < 0$ pour tout $X \in K$, et la compacité de K entraîne $\gamma = \sup\{{}^tXf(X),\ X \in K\} < 0$. Ainsi, d'après (**), on a $\alpha'(t) \leq 2\gamma < 0$ pour tout $t \geq 0$, donc $\alpha(t) - \alpha(0) \leq -2\gamma t$, ce qui entraîne $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = -\infty$. Ceci est impossible puisque α est positive. Donc $\ell = 0$, d'où le résultat.

Problème 7 (Résolution d'équations matricielles grâce aux équations différentielles). **1/** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifient $\Re(\lambda_i) < 0$ pour tout i. Si $\|\,.\,\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $K > 0$ tel que $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}$ pour tout $t \geq 0$.

2/ a) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la solution $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle (E) : $Y' = AY + YB$, telle que $Y(0) = C$, où $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice

donnée.
b) On suppose que pour toute valeur propre λ de A ou de B, $\Re(\lambda) < 0$. Montrer que pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AX + XB = C$, puis exprimer X en fonction de A, B et C.

3/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation matricielle ${}^tAS + SA = -C$ admet une solution $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive pour toute matrice symétrique positive C si et seulement si pour toute valeur propre λ de A, on a $\Re(\lambda) < 0$. (Indication. Pour la condition nécessaire, on pourra étudier les variations de la fonction $u \mapsto {}^t(e^{uA}\overline{X})S(e^{uA}X)$, où $X \in \mathbb{C}^n$).

Solution. **1/** On sait que l'on peut écrire $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et N une matrice nilpotente vérifiant $DN = ND$ (voir le tome Algèbre sur la décomposition de Dunford).

Soit $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}D_1P$ où D_1 est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tD_1} est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $e^{t\lambda_i}$. En désignant par $\| \, . \, \|_\infty$ la norme $\|(a_{i,j})\|_\infty = \sup_{i,j} |a_{i,j}|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|e^{tD_1}\|_\infty = \sup_i |e^{t\lambda_i}| = e^{-ct}$, où $c = -\sup_i \Re(\lambda_i) > 0$. Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, on en déduit l'existence de $K_1 > 0$ tel que $\|e^{tD_1}\| \leq K_1 \, e^{-ct}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $e^{tD} = P^{-1}e^{tD_1}P$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|e^{tD}\| \leq K_2 \, e^{-ct} \quad \text{avec} \quad K_2 = \|P^{-1}\| \cdot K_1 \cdot \|P\|.$$

Maintenant, comme N est nilpotente, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad e^{tN} = I_n + tN + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \, N^{n-1},$$

et on en déduit que $\|e^{tN}\| = o(t^n)$ lorsque $t \to +\infty$. Maintenant, D et N commutent, donc $e^{tA} = e^{tD+tN} = e^{tD}e^{tN}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, donc $\|e^{tA}\| \leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\| = o(e^{-ct}t^n)$ lorsque $t \to +\infty$. Comme $t^n = o(e^{ct/2})$, on a $e^{-ct}t^n = o(e^{-ct/2})$ lorsque $t \to +\infty$, donc finalement $\|e^{tA}\| = o(e^{-\alpha t})$ lorsque $t \to +\infty$ avec $\alpha = c/2 > 0$. D'où le résultat.

2/ a) L'équation différentielle correspondante est linéaire à coefficients constant, donc on sait déjà qu'une telle solution X existe et est unique. Or on vérifie facilement que $Y : \ t \mapsto e^{tA}Ce^{tB}$ convient, c'est donc la solution de (E) vérifiant $Y(0) = C$.

b) *Existence.* En désignant par Y la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trouvée précédemment, on a $Y' = AY + YB$ donc par intégration entre 0 et t, on obtient

$$Y(t) - C = A\left(\int_0^t Y(s)\, ds\right) + \left(\int_0^t Y(s)\, ds\right) B. \qquad (*).$$

Par ailleurs, les hypothèses sur les valeurs propres des matrices A et B permettent d'affirmer, grâce au résultat de la question 1/, l'existence de $\alpha > 0$ et $M > 0$ telles que $\|e^{tA}\| \leq Me^{-\alpha t}$ et $\|e^{tB}\| \leq Me^{-\alpha t}$ pour tout $t > 0$. La forme de $Y(t)$ entraîne donc

$$\forall t \geq 0, \qquad \|Y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|C\| \cdot \|e^{tB}\| \leq Ke^{-2\alpha t} \quad \text{avec} \quad K = M^2 \, \|C\|.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} Y(s)\, ds$ converge absolument donc converge, et que $Y(t)$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. En faisant $t \to +\infty$ dans (*), on en déduit

$$C = AX + XB \quad \text{avec} \quad X = -\int_0^{+\infty} Y(s)\, ds = -\int_0^{+\infty} e^{tA}\, C\, e^{tB}\, dt.$$

Unicité. Pour montrer que X ainsi défini est unique, il suffit de montrer que l'application $\Phi : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad X \mapsto AX + XB$ est injective. Nous venons de montrer dans la partie *existence* que Φ est surjective. Comme Φ est un endomorphisme en dimension finie, ceci entraîne l'injectivité de Φ, d'où le résultat.

3/ *Condition nécessaire.* Par hypothèse, il existe une matrice symétrique positive S telle que ${}^tAS + SA = -I_n$. Soit $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur non nul, et considérons l'application

$$V_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \quad u \mapsto {}^t(e^{uA}\overline{X})\, S\, (e^{uA}X).$$

On a

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} V_X'(u) &= {}^t(Ae^{uA}\overline{X})\, S\, (e^{uA}X) + {}^t(e^{uA}\overline{X})\, S\, (Ae^{uA}X) \\ &= {}^t\overline{X}{}^te^{uA}({}^tAS + SA)e^{uA}\, X = -{}^t(e^{uA}\overline{X})(e^{uA}X) < 0 \end{aligned}$$

(le terme ${}^t(e^{uA}\overline{X})(e^{uA}X)$ est le carré de la norme hermitienne de $e^{uA}X$ qui est non nul, car $X \neq 0$ et e^{uA} est inversible — toute exponentielle de matrice est inversible, l'inverse de e^M étant e^{-M}).

Ceci étant, soit λ une valeur propre de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre non nul associé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^nX = \lambda^nX$ donc $e^{uA}X = e^{\lambda u}X$, et en passant au conjugué, $e^{uA}\overline{X} = e^{\overline{\lambda}u}\,\overline{X}$, donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad V_X(u) = {}^t(e^{\overline{\lambda}u}\overline{X})\, S\, (e^{\lambda\, u}X) = e^{(\lambda+\overline{\lambda})u}\, {}^t\overline{X}SX.$$

On en déduit $V_X'(0) = (\lambda + \overline{\lambda})V_X(0) = 2\Re(\lambda)V_X(0)$. Or on a vu plus haut que $V_X'(0) < 0$ et comme S est positive, on a $V_X(0) = {}^t\overline{X}SX \geq 0$. Donc nécessairement $\Re(\lambda) < 0$, et ceci pour toute valeur propre λ de A.

Condition suffisante. Supposons que $\Re(\lambda) < 0$ pour toute valeur propre λ de A. Comme ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres A, la résultat de la question 1/b) s'applique et montre que la matrice $S = \int_0^{+\infty} e^{u{}^tA}\, C\, e^{uA}\, du$ vérifie ${}^tAS + SA = -C$. Pour tout u, la matrice $S(u) = e^{u{}^tA}Ce^{uA}$ est congrue à la matrice C, donc symétrique positive. Comme S est l'intégrale de $S(u)$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que S est symétrique. Par ailleurs, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$${}^tXSX = \int_0^{+\infty} {}^tXS(u)X\, du \geq 0$$

car ${}^tXS(u)X \geq 0$ pour tout u. Finalement, S est symétrique positive et vérifie ${}^tAS + SA = -C$, d'où le résultat.

PROBLÈME 8. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice symétrique $B(t) = {}^tA(t) + A(t)$ est négative. On considère le système différentiel $(L) : \; Y' = A(t)\, Y \;\; (Y \in \mathbb{R}^n)$.

a) Si Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (L) sur $\mathbb{R}$, montrer que ${}^tY_1(t)Y_2(t)$ converge lorsque $t \to +\infty$.

b) Montrer que (L) admet une solution non identiquement nulle Y qui tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s))\, ds = -\infty.$$

(Indication. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 7 page 388).

Solution. **a)** Commençons par remarquer que si Y est une solution de (L), alors la fonction $V : \; t \mapsto \|Y(t)\|^2 = {}^tY(t)\, Y(t)$ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad V'(t) = {}^tY'(t)Y(t) + {}^tY(t)Y'(t) = {}^tY(t)\, B(t)\, Y(t) \leq 0,$$

donc V est décroissante, et comme elle est positive, $V(t) = \|Y(t)\|^2$ converge nécessairement lorsque $t \to +\infty$.

Maintenant, si Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (L), on a ${}^tY_1Y_2 = \frac{1}{2}(\|Y_1+Y_2\|^2 - \|Y_1\|^2 - \|Y_2\|^2)$, donc d'après ce que l'on vient de voir, ${}^tY_1Y_2$ converge en $+\infty$.

b) On sait que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (L) est un espace vectoriel de dimension n. Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une base de $\mathcal{S}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $R(t)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont les $Y_i(t)$, et on note $M(t) = {}^tR(t)R(t)$. Le coefficient d'indice (i, j) de $M(t)$

est ${}^tY_i(t)Y_j(t)$, donc d'après la question précédente, $M(t)$ converge lorsque $t \to +\infty$. Notons $M = \lim_{t\to+\infty} M(t)$.

Comme $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de solutions de $\mathcal{S}$, toute solution de (L) peut s'écrire sous la forme $t \mapsto R(t)\,X_0$, où $X_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur fixé. Comme $\|R(t)X_0\|^2 = {}^t(R(t)X_0)(R(t)X_0) = {}^tX_0M(t)X_0$, on voit donc que l'existence d'une solution non nulle de (L) qui tend vers 0 en $+\infty$ équivaut à l'existence d'un vecteur $X_0 \neq 0$ tel que ${}^tX_0M(t)X_0$ tend vers 0 en $+\infty$. Comme $M(t)$ converge vers M, ceci équivaut aussi à l'existence de $X_0 \neq 0$ tel que ${}^tX_0MX_0 = 0$. Comme M est positive (limite de matrices positives), ceci équivaut à $\det M = 0$, et comme l'application déterminant est continue, ceci équivaut aussi à $\lim_{t\to+\infty} \det M(t) = 0$. Comme $M(t) = {}^tR(t)R(t)$, ceci s'écrit aussi $\lim_{t\to+\infty} \det R(t) = 0$. On conclut facilement puisque d'après la question b) de l'exercice 7 page 388,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \det R(t) = \text{wronskien}(Y_1, \dots, Y_n)(t) = \det R(0) \cdot \exp\left[\int_0^t \operatorname{tr} A(u)\,du\right].$$

Problème 9. Soit $y:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $(L):\ y'' + q(t)y = 0$, où $q:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} t|q(t)|\,dt$ converge.

Montrer que y' converge en $+\infty$.

Solution. La formule de Taylor avec reste intégral donne l'existence de deux constantes réelles a et b telles que

$$\forall t \geq 1, \qquad y(t) = at + b + \int_1^t (t-s)y''(s)\,ds = at + b - \int_1^t (t-s)q(s)y(s)\,ds.$$

Ceci entraîne

$$\forall t \geq 1, \qquad \left|\frac{y(t)}{t}\right| \leq |a| + \frac{|b|}{t} + \int_1^t s\,|q(s)|\,\left|\frac{y(s)}{s}\right|\,ds,$$

donc d'après le lemme de Gronwall (voir le théorème 1 page 397),

$$\forall t \geq 1, \qquad \left|\frac{y(t)}{t}\right| \leq |a| + \frac{|b|}{t} + \int_1^t (|a|s + |b|)\,|q(s)|\,\exp\left(\int_s^t u\,|q(u)|\,du\right)\,ds.$$

Comme $\int_0^{+\infty} t|q(t)|\,dt$ converge, on en déduit facilement que $|y(t)/t|$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

En d'autres termes, $y(t) = O(t)$ au voisinage de $+\infty$. Comme

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad y'(t) = y'(0) + \int_0^t y''(s)\,ds = y'(0) - \int_0^t q(s)y(s)\,ds,$$

on en déduit que $y'(t)$ converge lorsque $t \to +\infty$.

Problème 10. On s'intéresse aux solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$, à valeurs réelles, de l'équation différentielle

$$t^2\,y'' + (a+1)t\,y' + \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0, \tag{L}$$

où $a \geq 1$.

a) Montrer que sur $\mathbb{R}^{+*}$, (L) admet au moins une solution de la forme $t \mapsto t^\alpha\varphi(t)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et où φ est la somme d'une série entière de rayon infini avec $\varphi(0) \neq 0$.

b) Donner le comportement asymptotique en 0^+ de la solution générale sur $\mathbb{R}^{+*}$ de (L). (Indication. Distinguer deux cas, selon que $a^2 - 1$ soit le carré d'un entier ou non.)

c) (Application.) Montrer que l'équation différentielle $(E):\ t^4\,y'' - \frac{2}{3}\,t^3\,y' + (1 + \frac{t^2}{4})\,y = 0$ admet une unique solution f sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui vérifie $f(t) \sim t^{1/6}$ lorsque $t \to +\infty$, et donner un développement asymptotique à trois termes de f en $+\infty$.

Solution. **a)** Nous recherchons une solution f de (L) la forme $t^\alpha\,\varphi(t)$, où $\varphi(t)$ est la somme d'une série entière $\sum u_n\,t^n$ dont le rayon de convergence est infini. Supposons qu'une telle solution f existe ; on aura

$$\forall t>0, \qquad f(t)=t^\alpha\,\varphi(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\,t^{n+\alpha}. \tag{$*$}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et compte tenu de l'expression de la dérivée d'une fonction définie par une série entière, on a, pour tout $t>0$,

$$f'(t)=\alpha t^{\alpha-1}\varphi(t)+t^\alpha\varphi'(t)=\alpha t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\,t^n+t^\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}nu_n\,t^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha+n)u_n\,t^{n+\alpha-1}.$$

En d'autres termes, on peut dériver terme à terme l'expression (*). De même, on montrerait $f''(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\,t^{n+\alpha-2}$. Maintenant, f vérifie l'équation différentielle (L), donc

$$\forall t>0, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)u_n\,t^{n+\alpha}+(a+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha+n)u_n\,t^{n+\alpha}+\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\,t^{n+\alpha}\right)=0.$$

Après division par t^α, nous sommes en présence d'une série entière en t dont la somme est nulle pour tout $t>0$. On en déduit que ses coefficients sont nuls (voir la conséquence du corollaire 1 page 249), ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}
\left[\alpha(\alpha-1)+(a+1)\alpha+\frac{1}{4}\right]u_0&=0\\
\left[(\alpha+1)\alpha+(a+1)(\alpha+1)+\frac{1}{4}\right]u_1&=0\\
\left[(\alpha+2)(\alpha+1)+(a+1)(\alpha+2)+\frac{1}{4}\right]u_2+u_0&=0\\
\cdots\cdots&\\
\left[(\alpha+n)(\alpha+n-1)+(a+1)(\alpha+n)+\frac{1}{4}\right]u_n+u_{n-2}&=0.
\end{aligned}$$

Autrement dit, si P est le polynôme $P=X(X-1)+(a+1)X+1/4=X^2+aX+1/4$, on a

$$P(\alpha)\,u_0=0, \quad P(\alpha+1)\,u_1=0 \quad \text{et} \quad \forall n\geq 2, \qquad P(\alpha+n)\,u_n+u_{n-2}=0. \tag{$**$}$$

Les racines de P sont $\alpha_1=-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-1}$ et $\alpha_2=-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-1}$.

Maintenant, choisissons $\alpha=\alpha_1$, de sorte que $P(\alpha)=0$ et $P(\alpha+n)\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Partant de $u_0=1$, l'unique suite (u_n) vérifiant (**) est donnée par

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_{2n}=\frac{1}{\prod_{k=1}^n P(\alpha+2k)} \quad \text{et} \quad u_{2n+1}=0.$$

La série entière $\sum u_n\,t^n=\sum u_{2n}\,t^{2n}$ a un rayon de convergence infini car $u_{2n}/u_{2n-2}=1/P(\alpha+2n)$ donc $\lim_{n\to+\infty}u_{2n}/u_{2n-2}=0$ (voir la règle de D'Alembert, page 248). De plus, elle vérifie par construction la relation de récurrence (**), donc si φ désigne sa somme, $t\mapsto t^\alpha\varphi(t)$ vérifie l'équation différentielle (L) et $\varphi(0)=u_0=1\neq 0$.

b) Si a^2-1 n'est pas le carré d'un entier, alors les deux racines α_1 et α_2 du polynôme P exhibé plus haut ne diffèrent pas d'un entier (car $\alpha_1-\alpha_2=\sqrt{a^2-1}$), et l'opération effectuée plus haut en remplaçant α par α_1 peut être reprise telle quelle en remplaçant α par α_2 (car $P(\alpha_2)=0$ et $P(\alpha_2+n)\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$). Ainsi, nous avons prouvé l'existence de deux séries entières dont les sommes φ et ψ sont non nulles en 0 et telles que $t\mapsto t^{\alpha_1}\,\varphi(t)$ et $t\mapsto t^{\alpha_2}\,\psi(t)$ sont solutions de (L). Ces deux solutions sont linéairement indépendantes, car si $\lambda\,t^{\alpha_1}\varphi(t)+\mu\,t^{\alpha_2}\psi(t)=0$ pour tout $t>0$, alors $\lambda\,t^{\alpha_1-\alpha_2}\varphi(t)+\mu\,\psi(t)=0$, et en faisant tendre t vers 0^+, on obtient $\mu\psi(0)=\mu=0$ (car $\alpha_2<\alpha_1$), puis on conclut facilement $\lambda=0$. On sait par ailleurs que l'ensemble des solutions de (L) sur $\mathbb{R}^{+*}$ forme un e.v de dimension 2, et on en conclut que la solution générale de (L) est $t\mapsto\lambda\,t^{\alpha_1}\varphi(t)+\mu\,t^{\alpha_2}\psi(t)$. Nous connaissons α_1, α_2, et nous savons donner des relations de récurrence permettant de calculer les coefficients de φ et ψ. Ceci nous permet d'obtenir un développement asymptotique de la solution générale de (L).

Traitons maintenant le cas où $a^2 - 1 = m^2$, avec $m \in \mathbb{N}$. Soit $\Phi : \ t \mapsto t^\alpha \varphi(t)$ la solution de (L) trouvée à la question précédente. Munis de cette solution de (L), nous allons déterminer la solution générale de (L) grâce à la méthode d'abaissement de l'ordre décrite à la page 380 : on cherche la solution générale f de (L) sous la forme $f(t) = g(t)\,\Phi(t)$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ encore inconnue (la fonction Φ est > 0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc ne s'y annule pas, car par construction, tous les coefficients de φ sont strictement positifs on nuls). En remplaçant dans (L), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= t^2(g''\Phi + 2g'\Phi' + g\Phi'') + (a+1)t\,(g'\Phi + g\Phi') + \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)(g\Phi) \\ &= g\left[t^2\,\Phi'' + (a+1)t\,\Phi' + \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\Phi\right] + t\,\left[t\,g''\Phi + g'(2t\Phi' + (a+1)\Phi)\right] \end{aligned}$$

et comme Φ est solution de (L), on voit que $f = g\Phi$ sera solution de (L) si et seulement si g' est solution de l'équation différentielle $(L') : \ t\,y'\Phi + y(2t\Phi' + (a+1)\Phi) = 0$. Les solutions de (L') sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \exp(-F(t))$, où λ est une constante réelle et F une primitive de $2\Phi'/\Phi + (a+1)/t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut prendre pour F la fonction définie par $F(t) = 2\log\Phi + (a+1)\,\log t$, donc finalement, la solution générale de (L') est

$$t \mapsto \lambda\,\frac{1}{\Phi(t)^2}\,t^{-(a+1)} = \lambda\,\frac{t^{-2\alpha_1 - a - 1}}{\varphi(t)^2} = \lambda\,\frac{t^{-m-1}}{\varphi(t)^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{***}$$

La fonction $t \mapsto 1/\varphi(t)^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. On considère son développement limité en 0 jusqu'à un ordre $p \geq m$:

$$\frac{1}{\varphi(t)^2} = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots + a_p\,t^p + o(t^p)$$

(on connaît les coefficients de φ, on peut donc calculer les coefficients du développement limité de $1/\varphi^2$), de sorte qu'un développement asymptotique de (***) en 0^+ à la constante multiplicative λ près est

$$\frac{a_0}{t^{m+1}} + \frac{a_1}{t^m} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{t^2} + \frac{a_m}{t} + a_{m+1} + \cdots + a_p\,t^{p-m-1} + o(t^{p-m-1}).$$

Comme g' est solution de (L'), on en déduit par intégration qu'un développement asymptotique de g est, à une constante multiplicative près,

$$c - \frac{a_0}{m}\,\frac{1}{t^m} - \cdots - \frac{a_{m-1}}{t} + a_m \log t + a_{m+1}\,t + \cdots + \frac{a_p}{p-m}\,t^{p-m} + o(t^{p-m}),$$

où c est une constante réelle. Maintenant, il ne reste plus qu'à écrire que la solution générale de (L) est le produit de g par Φ, pour obtenir un développement asymptotique de la solution générale de (L). (Le point remarquable ici est la présence d'un logarithme dans le développement asymptotique).

c) Pour étudier le comportement asymptotique en $+\infty$, on va effectuer le changement de variable $u = 1/t$ pour se ramener en 0. Posons donc $z(t) = y(1/t)$, de sorte que $y(t) = z(1/t)$. Comme

$$y'(t) = -\frac{1}{t^2}\,z'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{ et } \quad y''(t) = \frac{1}{t^4}\,z''\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{2}{t^3}\,z'\left(\frac{1}{t}\right),$$

on voit que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si

$$\forall t > 0, \qquad 0 = z''\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{8}{3}\,t\,z'\left(\frac{1}{t}\right) + \left(1 + \frac{t^2}{4}\right)z\left(\frac{1}{t}\right).$$

En posant $u = 1/t$, ceci est équivalent à dire que z est solution de l'équation différentielle $(E') : \ u^2\,z'' + \frac{8}{3}\,u\,z' + (u^2 + \frac{1}{4})\,z = 0$. On s'est ramené à une équation différentielle du type précédent avec $a = 5/3$, et il s'agit de montrer qu'il existe une unique solution g de (E') sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $g(u) \sim u^{-1/6}$ au voisinage de 0.

En reprenant les notations précédentes, le polynôme P est ici $P = X(X-1) + \frac{8}{3}X + \frac{1}{4} = X^2 + \frac{5}{3} + \frac{1}{4}$, dont les racines sont $\alpha_1 = -\frac{3}{2}$ et $\alpha_2 = -\frac{1}{6}$. Ces deux racines ne diffèrent pas d'un entier, nous sommes donc dans les conditions du premier cas traité à la question précédente. Nous avions montré qu'une base de solutions de (E') est constitué des fonctions $u \mapsto u^{\alpha_1}\varphi(u)$ et $u \mapsto u^{\alpha_2}\psi(u)$, où φ et ψ sont les sommes de deux séries entières de rayon de convergence infini, non nulles en 0, dont les coefficients sont déterminés grâce à la relation de récurrence (**). Vues les valeurs $\alpha_1 = -3/2$ et $\alpha_2 = -1/6$, on voit qu'il existe une unique solution g de (E') équivalente à $u^{-1/6}$ en 0^+, qui est la fonction $u \mapsto u^{-1/6}\psi(t)$, où $\psi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n u^n$ avec

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{2n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} P(\alpha_2 + k)} \quad \text{et} \quad u_{2n-1} = 0.$$

De menus calculs nous donnent $u_0 = 1$, $u_2 = -3/20$ et $u_4 = 9/1280$, donc $g(u) = u^{-1/6}(1 - \frac{3}{20}u^2 + \frac{9}{1280}u^4 + O(u^6))$. Comme $f(t) = g(1/t)$, on en conclut finalement que lorsque $t \to +\infty$,

$$f(t) = t^{1/6} - \frac{3}{20}t^{-11/6} + \frac{9}{1280}t^{-23/6} + O(t^{-35/6}).$$

Remarque. L'équation $P(\alpha) = 0$ de l'exercice s'appelle *équation indicielle* de l'équation différentielle (L).

Cet exercice est un cas particulier du théorème de Fuchs portant sur les points *singuliers réguliers* d'une équation différentielle linéaire. Dans le cas des équations différentielles du type

$$t^n p_n(t)\, y^{(n)} + t^{n-1} p_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + t\, p_1(t)\, y' + p_0(t)\, y = 0, \tag{E}$$

(0 est *singulier* pour (E) car le terme dominant s'annule en 0) où les $p_i(t)$ sont des polynômes en t et $p_n(0) \neq 0$, ce dernier s'exprime comme suit : si l'équation indicielle de (E), définie par

$$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\, p_n(0) + \cdots + \alpha(\alpha-1)\, p_2(0) + \alpha\, p_1(0) + p_0(0) = 0,$$

est telle que deux de ses racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne diffèrent jamais d'un entier, alors une base des solutions de (E) est constituée de fonctions de la forme $t \mapsto t^{\alpha_i}\varphi_i(t)$, où φ_i est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est non nul, et dont les coefficients peuvent être déterminés par une relation de récurrence obtenue en remplaçant formellement cette solution dans (E). Lorsque certains des α_i diffèrent d'un entier, c'est plus délicat, et on voit apparaître des comportements en $\log t$ en voisinage de 0^+.

Les équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux sont appelées équations *holonomes*. Parmi ce type d'équations, on peut trouver des solutions avec d'autres types de singularités, qui font apparaître des comportements en $(\log t)^k\, t^\alpha\, e^{c\,t^\beta}$ au voisinage de l'origine.

ANNEXE A

Théorème de Baire et applications

Cette annexe présente, sous forme d'une série d'exercices, le théorème de Baire, suivi de plusieurs applications, notamment le théorème de Banach-Steinhaus. Ces notions ne sont pas au programme des classes de mathématiques spéciales, mais elles constituent une fort jolie théorie tout à fait accessible. Certains résultats sont surprenants, comme par exemple

— l'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense (exemple historique dû à Baire lui-même, voir l'exercice 2 page 419) ;

— l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues. Cette "plaie lamentable" dont se détournait Hermite est plus étendue que l'on ne pourrait le penser (voir l'exercice 4 page 421) ;

— un endomorphisme bijectif et continu sur un espace de Banach a son inverse continu (théorème de Banach, voir l'exercice 6 page 423).

Le théorème de Baire

Exercice 0 (Théorème de Baire).

Définition 1. On dit qu'un espace métrique (E, d) est un *espace de Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E, autrement dit si

(i) pour toute suite d'ouverts $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{O_n} = E$, $\qquad \overline{\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = E$.

1/ a) Montrer que cette définition est équivalente à la suivante :

(ii) Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide dans E.

Définition 2. Soient (E, d) un espace de Baire et A une partie de E.

— On dit que A est un *résiduel* si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E.

— On dit que A est *maigre* si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés de E d'intérieurs vides.

b) Montrer qu'une partie A d'un espace de Baire E est maigre si et seulement si $E \setminus A$ est un résiduel.

2/ (*Théorème de Baire.*) Montrer que tout espace métrique complet est un espace de Baire.

3/ (*Un lemme utile dans les applications.*) Soit (E, d) un espace de Baire et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de E telle que $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$. Montrer que l'ouvert $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est dense dans E.

Solution. **1/ a)** (i) $\implies$ (ii). Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieurs vides. Pour tout n, l'ouvert $O_n = E\setminus F_n$ est dense dans E car $\overline{E\setminus F_n} = E\setminus \overset{\circ}{F_n} = E$. Ainsi, d'après (i),

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E\setminus F_n) = E\setminus \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right]$$

est dense dans E, c'est-à-dire : $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

L'implication (ii) $\implies$ (i) se traite de la même manière en considérant les fermés $F_n = E\setminus O_n$.

b) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieurs vides. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $O_n = E\setminus F_n$, ouvert dense dans E. On a

$$(A \subset \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right]) \iff (E\setminus A) \supset E\setminus \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E\setminus F_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n,$$

et on en déduit facilement que A est maigre si et seulement si $E\setminus A$ est un résiduel. (Au passage, remarquons par définition d'un espace de Baire, qu'un ensemble maigre est d'intérieur vide et qu'un résiduel est dense dans E.)

2/ Soit (E, d) un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E. Pour montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E, il faut montrer

$$\forall V \text{ ouvert non vide de } E, \qquad V \cap \left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right] \neq \varnothing.$$

Donnons nous donc un ouvert non vide V de E. Par récurrence, on va construire une suite (B_n) de boules fermées de E telles que

(I) $\forall n\in\mathbb{N}$, B_n est une boule fermée de rayon non nul et inférieur à $1/2^n$.

(II) $B_0 \subset O_0 \cap V$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B_n}$.

L'ouvert O_0 est dense dans E donc $O_0 \cap V \neq \varnothing$. Or $O_0\cap V$ est ouvert, il existe donc une boule ouverte $\mathrm{B}(x_0, r) \subset O_0 \cap V$. Si B_0 est la boule fermée de centre x_0 et de rayon $\inf\{r/2, 1\}$, on a donc $B_0 \subset O_0 \cap V$.

Supposons les boules $B_0, \dots, B_n$ construites et vérifiant (I) et (II). L'ouvert O_{n+1} est dense dans E, donc $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B_n}$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte $\mathrm{B}(x, r)$ incluse dans $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B_n}$. Si B_{n+1} désigne le boule fermée de centre x et de rayon $\inf\{r/2, 1/2^{n+1}\}$ on a donc $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B_n}$. Ainsi, B_{n+1} vérifie (I) et (II).

Par construction, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E dont le diamètre tend vers 0. De plus E est complet, il existe donc $x \in E$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x\}$ (voir la proposition 9 de la page 20). Or $B_0 \subset V$, donc $x \in V$. D'après (II), on a aussi $B_n \subset O_n$ pour tout n, donc $x \in O_n$ pour tout n. Ainsi, $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Finalement, nous avons prouvé que V et $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ ont au moins un point commun, d'où le théorème.

3/ Soit G le fermé $E\setminus(\cup_n \overset{\circ}{F_n})$. Il s'agit de montrer que G est d'intérieur vide.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le fermé $G\cap F_n$ est d'intérieur vide car $\overset{\circ}{\overbrace{G\cap F_n}} \subset G \cap \overset{\circ}{F_n} = \varnothing$, donc (E, d) étant un espace de Baire,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G\cap F_n) = G \cap \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right] = G\cap E = G$$

est d'intérieur vide.

Remarque. On peut également définir un espace de Baire pour un espace topologique général, avec les mêmes définitions. On peut montrer qu'un espace topologique compact est un espace de Baire.

Applications

Les exercices qui suivent sont indépendants les uns des autres, mais il est nécessaire d'avoir fait l'exercice 0 pour les traiter.

Exercice 1 (Un e.v.n à base dénombrable n'est pas complet). Prouver, en utilisant le théorème de Baire, qu'un espace vectoriel normé E admettant une base dénombrable n'est pas complet.

Solution. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de E. Pour tout entier naturel n, on pose $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. Le s.e.v F_n est un fermé (car s.e.v de dimension finie), d'intérieur vide car si une boule ouverte $\mathrm{B}(x, r)$ est incluse dans F_n (avec $r > 0$), alors $x \in F_n$ donc $\mathrm{B}(0, r) = \mathrm{B}(x, r) - \{x\}$ est inclus dans F_n, et F_n étant invariant par homothétie, $E \subset F_n$ ce qui est absurde.

Supposons maintenant E complet. D'après le théorème de Baire, $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans E, ce qui est absurde car $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$. D'où le résultat.

Remarque. Ce même résultat est prouvé sans utiliser le théorème de Baire à l'exercice 8 de la page 56.

Exercice 2 (Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense).
1/ Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On suppose que (E, d) est complet. On considère une suite (f_n) d'applications continues de E dans F, convergeant *simplement* vers une application f de E dans F.
a) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E \mid \forall p \geq n, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Montrer que $\Omega_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans E et que

$$\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon, \exists V \text{ voisinage de } x_0, \forall x \in V, \qquad \delta(f(x_0), f(x)) \leq 3\varepsilon.$$

b) En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est un résiduel.

2/ (*Application.*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Solution. **1/ a)** Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \geq n$, l'ensemble $G_p = \{x \in E \mid \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}$ est fermé (car f_n et f_p sont continues) donc $F_{n,\varepsilon} = \cap_{p\geq n} G_p$ est fermé.

Par hypothèse, la suite (f_n) converge simplement, donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = E$, ce qui entraîne (voir la partie 3/ de l'exercice 0) que

$$\Omega_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$$

est un ouvert dense dans l'espace complet E.

Ceci étant, soit $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$. Comme f_n est continue, il existe un voisinage V de x_0 inclus dans $\overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ tel que

$$\forall x \in V, \qquad \delta(f_n(x_0), f_n(x)) \leq \varepsilon.$$

Or V est inclus dans $F_{n,\varepsilon}$ donc

$$\forall x \in V, \forall p \geq n, \qquad \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon,$$

donc en faisant tendre n vers l'infini (pour x et n fixés) on obtient $\delta(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in V$. Finalement,

$$\forall x \in V, \quad \delta(f(x), f(x_0)) \leq \delta(f(x), f_n(x)) + \delta(f_n(x), f(x)) + \delta(f_n(x_0), f(x_0)) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

b) Posons $R = \cap_{n\in\mathbb{N}^*}\Omega_{1/n}$ et montrons que f est continue en tout point de R. Soit $x_0 \in R$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n \leq \varepsilon/3$. Comme $x_0 \in \Omega_{1/n}$, d'après le résultat de la question précédente, il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \qquad \delta\big(f(x), f(x_0)\big) \leq \frac{3}{n} \leq \varepsilon.$$

Ceci suffit à prouver que f est continue en x_0.

L'ensemble des points de continuité de f contient donc R. C'est donc un résiduel, en particulier dense dans E d'après le théorème de Baire.

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

La suite (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f' sur $\mathbb{R}$. On en déduit d'après 1/b) que l'ensemble des points de continuité de f' est un résiduel, en particulier dense dans $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}$ est complet.

Remarque. On sait qu'il existe des fonctions dérivées discontinues sur un ensemble dense (voir l'exercice 9 page 244).

Exercice 3. **a)** On considère une application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et on suppose que pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En utilisant le théorème de Baire, montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Soit $\Omega \subset\,]0, +\infty[$ un ouvert non borné. Montrer

$$\exists x_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \qquad nx_0 \in \Omega.$$

Retrouver grâce à ce dernier résultat le résultat du a).

Solution. **a)** Soit $\varepsilon > 0$. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$F_n = \{x \geq 0 \mid \forall p \in \mathbb{N}, p \geq n,\ |f(px)| \leq \varepsilon\}.$$

Comme f est continue, F_n est un fermé de $\mathbb{R}^+$, donc de $\mathbb{R}$. L'hypothèse vérifiée par f entraîne $]0, +\infty[\, \subset \cup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$, donc d'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \varnothing$. Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $]\alpha, \beta[\, \subset F_{n_0}$, de sorte que

$$\forall x \in\,]\alpha, \beta[, \forall p \geq n_0, \qquad |f(px)| \leq \varepsilon. \tag{$*$}$$

L'équivalence $\big((p+1)\alpha < p\beta\big) \iff (p > \frac{\alpha}{\beta-\alpha})$ montre que

$$\forall N \in \mathbb{N}, N > \frac{\alpha}{\beta - \alpha}, \qquad \bigcup_{p\geq N}\,]p\alpha, p\beta[\, = \,]N\alpha, +\infty[.$$

Ceci est en particulier vrai pour un entier N fixé supérieur à n_0 et à $\alpha/(\beta - \alpha)$. Donc d'après (*), on a $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq N\alpha$, d'où le résultat.

b) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $\Omega_n = \{x > 0 \mid \exists p \geq n, px \in \Omega\}$. L'ensemble Ω_n est ouvert. Il est même dense dans $\mathbb{R}^+$. En effet, considérons un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ inclus dans $\mathbb{R}^+$. En procédant comme dans la question précédente, on montre que

$$\exists N \geq n, \qquad \bigcup_{p\geq N}\,]p\alpha, p\beta[\, = \,]N\alpha, +\infty[\,.$$

Comme Ω n'est pas borné, on en déduit $\big(\cup_{p\geq N}\,]p\alpha, p\beta[\big) \cap \Omega \neq \varnothing$, donc $]\alpha, \beta[\, \cap\, \Omega_n \neq \varnothing$.

Ainsi Ω_n est un ouvert dense dans $\mathbb{R}^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{R}^+$ est complet, on en déduit d'après le théorème de Baire que $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}\Omega_n$ est dense dans $\mathbb{R}^+$. Ce dernier contient donc au moins un élément $x_0 > 0$, et il est clair qu'un tel réel x_0 répond à la question.

Résolvons maintenant la question a) à partir de ce dernier résultat. Raisonnons par l'absurde. Si a) est faux,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists x > A, \qquad |f(x)| > \varepsilon.$$

Autrement dit, l'ouvert $\Omega = \{x > 0,\ |f(x)| > \varepsilon\}$ est non borné. Donc

$$\exists x_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \quad nx_0 \in \Omega,$$

ce qui s'exprime en disant que la suite $(f(nx_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0. Ceci est absurde, d'où le résultat.

Exercice 4 (Les fonctions continues nulle part dérivables sont denses). On note $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-e.v des fonctions continues de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|$. L'e.v $\mathcal{C}$ est un espace de Banach (car fermé de $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$, complet d'après l'exercice 1 page 21).

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$U_{\varepsilon,n} = \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \forall x \in I, \exists y \in I, 0 < |y-x| < \varepsilon, \quad \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| > n \right\}.$$

a) Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert de $\mathcal{C}$.
b) Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}$ (indication : pour $f \in \mathcal{C}$, pour $\delta > 0$, on considérera la fonction $x \mapsto f(x) + \delta \sin(Nx)$ avec N bien choisi).
c) En déduire que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ nulle part dérivables est un résiduel dans $\mathcal{C}$.

Solution. **a)** Nous allons montrer que le complémentaire $F_{\varepsilon,n}$ de $U_{\varepsilon,n}$ dans $\mathcal{C}$ est fermé. Pour cela, on commence par remarquer que

$$F_{\varepsilon,n} = \{f \in \mathcal{C} \mid \exists x \in I, \forall y \in I, |y-x| < \varepsilon \quad |f(y) - f(x)| \leq n|y-x|\}.$$

On considère ensuite une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $F_{\varepsilon,n}$ qui converge vers $f \in \mathcal{C}$. Il s'agit de montrer que $f \in F_{\varepsilon,n}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $f_p \in F_{\varepsilon,n}$ donc

$$\exists x_p \in I, \forall y \in I, |y - x_p| < \varepsilon, \qquad |f_p(y) - f_p(x_p)| \leq n|y - x_p|.$$

La suite (x_p) prend ses valeurs dans le compact I, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(p)})$, dont nous notons x la limite. Soit $y \in I$ tel que $0 < |y-x| < \varepsilon$. Il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $0 < |y - x_{\varphi(p)}| < \varepsilon$ pour tout $p \geq P$. Ainsi,

$$\forall p \geq P, \qquad |f_{\varphi(p)}(y) - f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})| \leq n|y - x_{\varphi(p)}|. \tag{$*$}$$

Le caractère continu de f conjugué au fait que (f_p) tende vers f au sens de $\|\,.\,\|_\infty$ montre que $\big(f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})\big)$ tend vers $f(x)$. En faisant tendre p vers l'infini dans (*), on en déduit que $|f(y) - f(x)| \leq n|y-x|$. Ceci étant vrai pour tout $y \in I$ tel que $|y-x| < \varepsilon$, on en déduit que $f \in F_{\varepsilon,n}$ et le résultat.

b) Soit $f \in \mathcal{C}$ et $\delta > 0$. Il s'agit de trouver $g \in U_{\varepsilon,n}$ tel que $\|f-g\|_\infty \leq \delta$. On va chercher g sous la forme $f(x) + \delta \sin(Nx)$.

L'uniforme continuité de f sur le compact I est assurée par le théorème de Heine, de sorte que

$$\exists \alpha \in]0, \varepsilon[, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| < \alpha, \qquad |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{4}.$$

On choisit maintenant $N > 2\pi$ tel que $\dfrac{4\pi}{N} < \alpha$ et $\dfrac{\delta N}{8\pi} > n$. Posons $g(x) = f(x) + \delta \sin(Nx)$. Soit $x \in I$. Il est clair que

$$\exists y \in I, \quad 2\pi \leq |Nx - Ny| \leq 4\pi \quad \text{et} \quad |\sin(Nx) - \sin(Ny)| \geq 1.$$

On a en particulier

$$\frac{2\pi}{N} \leq |x-y| \leq \frac{4\pi}{N} \quad \text{donc} \quad |x-y| < \alpha \quad \text{donc} \quad \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| < \frac{\delta}{4} \cdot \frac{N}{2\pi} = \frac{\delta N}{8\pi}.$$

De plus,

$$\left|\frac{\delta \sin(Ny) - \delta \sin(Nx)}{y-x}\right| \geq \frac{\delta}{|y-x|} \geq \frac{\delta N}{4\pi},$$

donc

$$\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| > \frac{\delta N}{4\pi} - \frac{\delta N}{8\pi} = \frac{\delta N}{8\pi} > n, \quad \text{avec} \quad 0 < |y-x| < \alpha < \varepsilon.$$

Donc $g \in U_{\varepsilon,n}$, et comme $\|f-g\|_\infty = \delta$, on en déduit le résultat.

c) Posons $R = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{1/n,n}$. Soit $f \in R$. Pour tout n, $f \in U_{1/n,n}$ donc si on se donne $x \in I$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in I, 0 < |x-x_n| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| > n.$$

Donc (x_n) tend vers x et $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| = +\infty$, ce qui montre que f n'est pas dérivable en x. Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, f est nulle part dérivable.

Ainsi, tout élément de R est nulle part dérivable. Comme R est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans le complet $\mathcal{C}$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ nulle part dérivables est un résiduel, en particulier dense dans $\mathcal{C}$ d'après le théorème de Baire.

Remarque. Une construction explicite d'une application continue nulle part dérivable fait l'objet de l'exercice 9 page 86.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi^{(n)}(x) = 0.$$

On veut montrer que φ est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.

On pose $F_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi^{(n)}(x) = 0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n$ et $F = \mathbb{R} \setminus \Omega$.

a) Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts de $\mathbb{R}$ tendant vers $x \in \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\varphi^{(n_0)}(x_p) = 0$ pour tout p. Montrer que $\varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

b) Montrer que sur toute composante connexe de Ω, φ est polynomiale.

c) Montrer que F n'a aucun point isolé.

d) En supposant $F \neq \varnothing$, obtenir une absurdité. Conclure.

Solution. **a)** Quitte à prendre une sous-suite de (x_p), on peut supposer cette suite strictement monotone, par exemple strictement croissante. Pour tout p, on a $\varphi^{(n_0)}(x_p) = \varphi^{(n_0)}(x_{p+1})$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $y_p \in]x_p, x_{p+1}[$ tel que $\varphi^{(n_0+1)}(y_p)$. Ainsi construite, la suite (y_p) est une suite de points distincts tendant vers x et annulant $\varphi^{(n_0+1)}$. En itérant le procédé, on peut ainsi construire pour tout $n \geq n_0$ une suite de points distincts de $\mathbb{R}$ tendant vers x et annulant $\varphi^{(n)}$. Par continuité de $\varphi^{(n)}$, on en déduit $\varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

b) Soit $]a,b[$ une composante connexe de l'ouvert Ω et soit $[c,d]$ un segment inclus dans $]a,b[$. Soit $x_0 \in]c,d[$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_n$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\varphi^{(n)}$ s'annule sur $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$. On peut donc trouver un polynôme P tel que $\varphi = P$ sur $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$. Ainsi, l'ensemble

$$\Gamma = \{t \in]x_0, d] \mid \forall x \in [x_0, t], \varphi(x) = P(x)\}$$

est non vide, donc $\beta = \sup \Gamma$ existe bien.

Supposons $\beta < d$. Comme $\beta \in]c,d[\subset \Omega$, il existe un voisinage $V =]\beta-\eta, \beta+\eta[$ de β et un polynôme Q tels que $\varphi = Q$ sur V (même raisonnement que précédemment). Donc $P = Q$ sur l'ouvert $V\cap]x_0, \beta[\neq \varnothing$, donc P et Q sont identiques, donc $\beta + \eta \in \Gamma$. Ceci est absurde, donc

$\beta = d$, c'est-à-dire $\varphi = P$ sur $[x_0, d]$. On montrerait de même que $\varphi = P$ sur $[c, x_0]$. Ainsi, $\varphi = P$ sur tout segment de la composante connexe $]a, b[$, donc $\varphi = P$ sur $]a, b[$ tout entier.

c) Raisonnons par l'absurde et supposons que F admette un point isolé x_0, de sorte qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \cap F = \{x_0\}$. On a $]x_0 - \varepsilon, x_0[\, \subset \Omega$ et d'après la question b), il existe un polynôme P tel que $\varphi = P$ sur $]x_0 - \varepsilon, x_0[$. De même, il existe un polynôme Q tel que $\varphi = Q$ sur $]x_0, x_0 + \varepsilon[$. Par continuité des dérivées successives de φ et de P, Q, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0) = Q^{(n)}(x_0)$. La formule de Taylor pour les polynômes en $x = x_0$ montre alors que P et Q sont identiques, donc $\varphi = P$ sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Si $n = \deg(P)$, on a donc $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \subset \overset{\circ}{F}_{n+1} \subset \Omega$. Ceci est absurde car $x_0 \notin \Omega$, d'où le résultat.

d) Supposons le fermé F non vide. Par hypothèse, $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}$, donc $F = \cup_{n\in\mathbb{N}}(F \cap F_n)$. Pour tout n, $F \cap F_n$ est fermé dans F et F est complet (car fermé de $\mathbb{R}$). D'après le théorème de Baire, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de $F \cap F_{n_0}$ (pour la topologie induite par F) soit non vide, c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists a, b \in \mathbb{R}, \qquad]a, b[\, \cap F \neq \varnothing \quad \text{et} \quad]a, b[\, \cap F \subset F_{n_0}. \tag{$*$}$$

Soit $x \in\,]a, b[\, \cap F$. D'après c), on peut trouver une suite de points distincts $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $]a, b[\, \cap F$ tendant vers x. D'après (*), on a $\varphi^{(n_0)}(x_p) = 0$ pour tout p, donc d'après a), $\varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Si maintenant $x \in\,]a, b[\, \cap \Omega$, alors comme $]a, b[\, \cap F \neq \varnothing$, la composante connexe Ω_x de Ω contenant x possède au moins une extrémité x_0 dans $]a, b[$. D'après b), il existe un polynôme P tel que $\varphi = P$ sur Ω_x. Or $x_0 \in F$ donc pour tout $n \geq n_0$, $\varphi^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0) = 0$, ce qui montre que $\deg(P) < n_0$. Donc $\varphi^{(n_0)}(x) = P^{(n_0)}(x) = 0$.

En résumé, on a prouvé $\varphi^{(n_0)}(x) = 0$ pour tout $x \in\,]a, b[$. Donc $]a, b[\, \subset \overset{\circ}{F}_{n_0}$, ce qui est absurde car $]a, b[\, \cap F \neq \varnothing$. Donc $F = \varnothing$, donc $\Omega = \mathbb{R}$, et d'après b), φ est polynomiale sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 6 (Théorème de l'application ouverte ; théorème de Banach). Soient E et F deux espaces de Banach.

1/ *Théorème de l'application ouverte.* Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue et surjective. Pour tout $r > 0$, on note $\mathrm{B}(r) = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$.
a) En utilisant le théorème de Baire, montrer que pour tout $r > 0$, $\overline{T[\mathrm{B}(r)]}$ est un voisinage de 0 dans F.
b) Soit $r > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \mathrm{B}(r/2^n)$. Montrer que $\overline{T(V_1)} \subset T(V_0)$ (indication : si $y_1 \in \overline{T(V_1)}$, construire deux suites (y_n) de F et (x_n) de E telles que $y_n \in T(V_n)$, $x_n \in V_n$ et $y_n - y_{n+1} = T(x_n)$ puis considérer $\sum x_n$)
c) En déduire que T est une application ouverte (*i. e.* pour tout ouvert Ω de E, $T(\Omega)$ est un ouvert de F).

2/ *Théorème de Banach.* Si $T : E \to F$ est une application linéaire continue et bijective, montrer que T^{-1} est continue.

Solution. **1/ a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \overline{T[\mathrm{B}(nr)]}$ est un fermé de F. Comme T est surjective, $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = F$, donc d'après le théorème de Baire, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overset{\circ}{F}_n \neq \varnothing$, *i. e.* il existe une boule ouverte $\mathrm{B}(x, \rho)$ de centre x de rayon $\rho > 0$ incluse dans F_n.

On a alors $\mathrm{B}(0, \rho) \subset F_{2n}$. En effet, donnons nous $y \in \mathrm{B}(x, \rho) \subset F_n$. Il existe deux suites (x_p) et (y_p) de $\mathrm{B}(nr)$ telles que

$$x = \lim_{p\to+\infty} T(x_p) \quad \text{et} \quad y = \lim_{p\to+\infty} T(y_p).$$

Donc $y - x = \lim_{p\to\infty} T(y_p - x_p)$, et comme pour tout p, $y_p - x_p \in \mathrm{B}(2nr)$, on en déduit $y - x \in F_{2n}$. Ceci est vrai pour tout $y \in \mathrm{B}(x, \rho)$ donc $\mathrm{B}(0, \rho) \subset F_{2n}$.

Finalement, on a

$$\mathrm{B}\left(0, \frac{\rho}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\mathrm{B}(0,\rho) \subset \frac{1}{2n}F_{2n} = \overline{T[\mathrm{B}(r)]},$$

d'où le résultat.

b) Soit $y_1 \in \overline{T(V_1)}$. Comme $\overline{T(V_2)}$ est un voisinage de 0 d'après la question précédente, on a

$$\overline{T(V_1)} \subset T(V_1) + \overline{T(V_2)} \qquad \text{donc} \qquad \exists x_1 \in V_1, \exists y_2 \in \overline{T(V_2)}, \quad y_1 - y_2 = T(x_1).$$

En itérant le procédé, on construit ainsi deux suites (y_n) de F et (x_n) de E telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n \in \overline{T(V_n)}, \qquad x_n \in V_n \qquad \text{et} \qquad y_n - y_{n+1} = T(x_n).$$

Pour tout n, $x_n \in V_n$ donc $\|x_n\| < r/2^n$, donc $\sum \|x_n\|$ converge, donc E étant complet, $\sum x_n$ converge. On note $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. En écrivant

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad T\left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right) = \sum_{n=1}^{N} T(x_n) = \sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{N+1}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $T(x) = y_1$ (ceci parce que T est continue et que $y_N \to 0$ lorsque $N \to +\infty$, ce dernier fait étant aussi une conséquence de la continuité de T). Comme pour tout n, $\|x_n\| < r/2^n$, on a $\|x\| < r$. Finalement, $y_1 \in T(V_0)$.

c) En combinant les résultats des deux questions précédentes, on s'aperçoit que $T[\mathrm{B}(r)]$ est un voisinage de 0 pour tout $r > 0$. Donc si U est un voisinage de 0, $T(U)$ est un voisinage de 0.

Considérons maintenant un ouvert Ω de E et $x \in \Omega$. L'ensemble $\Omega - x$ est un voisinage de 0, donc $T(\Omega - x)$ est un voisinage de 0, donc $T(\Omega) = T(\Omega - x) + T(x)$ est un voisinage de $T(x)$, et ceci pour tout $x \in \Omega$, donc $T(\Omega)$ est ouvert.

2/ Soit $U = T^{-1}$. D'après le théorème de l'application ouverte, pour tout ouvert Ω de E, $U^{-1}(\Omega) = T(\Omega)$ est un ouvert de E. L'image réciproque par U de tout ouvert est un ouvert, on en conclut que $U = T^{-1}$ est continue.

Exercice 7 (Théorème de Banach-Steinhaus et conséquences).

Soit E un espace de Banach, F un e.v.n. On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'e.v des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

1/ *Théorème de Banach-Steinhaus.* Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Montrer que ou bien $(|||f|||)_{f\in H}$ est borné, ou bien il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$.

2/ (*Une première conséquence.*) Soit (f_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F, qui converge simplement vers une fonction $f : E \to F$. Montrer que f est une application linéaire et continue.

3/ (*Une autre conséquence.*) Soit E_1 un espace de Banach, E_2 un e.v.n. Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire dont les applications partielles sont continues, c'est-à-dire

— pour tout $x \in E_1$, l'application $B(x,\cdot) : E_2 \to F \quad y \mapsto B(x,y)$ est continue ;

— pour tout $y \in E_2$, l'application $B(\cdot,y) : E_1 \to F \quad x \mapsto B(x,y)$ est continue.

Montrer que B est continue sur $E_1 \times E_2$.

Solution. **1/** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Omega_k = \{x \in E \mid \sup_{f\in H} \|f(x)\| > k\}.$$

L'ensemble Ω_k est ouvert. En effet, si $x_0 \in \Omega_k$, il existe $f \in H$ tel que $\|f(x_0)\| > k$. Comme f est continue, il existe $\rho > 0$ tel que $\|f(x)\| > k$ pour $\|x - x_0\| < \rho$. Donc la boule $B(x_0,\rho)$ est contenue dans Ω_k.

Si chaque Ω_k est dense dans E, alors E étant complet, le théorème de Baire assure que $\cap_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$ est dense dans E, en particulier non vide. Si on choisit $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$, on a alors $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Sinon, il existe un entier k tel que Ω_k ne soit pas dense dans E. En d'autres termes,

$$\exists x_0 \in E, \exists \rho > 0, \qquad \mathrm{B}(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \varnothing,$$

de sorte que pour tout $x \in \mathrm{B}(x_0, \rho)$, $\sup_{f\in H} \|f(x)\| \leq k$. On en déduit

$$\forall x \in \mathrm{B}(0, \rho), \forall f \in H, \qquad \|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leq \|f(x + x_0)\| + \|f(x_0)\| \leq 2k.$$

Par continuité de chaque $f \in H$, cette inégalité reste vraie sur la boule fermée $\mathrm{B_f}(0, \rho)$. Ainsi,

$$\forall f \in H, \forall x \in E, \|x\| = 1, \quad \|f(x)\| = \frac{1}{\rho}\|f(\rho x)\| \leq \frac{2k}{\rho} \qquad \text{donc} \qquad \forall f \in H, \quad |||f||| \leq \frac{2k}{\rho},$$

d'où le résultat.

2/ La fonction f, limite simple de fonctions linéaires, est clairement linéaire.

Il reste à montrer la continuité de f. Appliquons le théorème de Banach-Steinhaus avec $H = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$. La suite (f_n) converge simplement, donc pour tout $x \in E$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\| < +\infty$. D'après la question précédente, ceci entraîne l'existence de $M > 0$ tel que $|||f_n||| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\|x\| = 1$, on a donc $\|f_n(x)\| \leq M$ pour tout n, donc $\|f(x)\| \leq M$. Ceci est vrai pour tout vecteur normé x, donc f est continue.

3/ Considérons l'ensemble

$$H = \{B(\cdot, y),\ \|y\| = 1\} \subset \mathcal{L}_c(E_1, F).$$

D'après les hypothèses, pour tout $x \in E_1$, l'application $y \mapsto B(x, y)$ est continue. Ceci entraîne $\sup_{\|y\|=1} \|B(x, y)\| < +\infty$, autrement dit on a $\sup_{f\in H} \|f(x)\| < +\infty$ pour tout $x \in E_1$. L'e.v.n E_1 est complet, donc d'après le théorème de Banach-Steinhaus,

$$\exists M > 0, \forall y \in E_2, \|y\| = 1, \qquad |||B(\cdot, y)||| \leq M.$$

Autrement dit, pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$ vérifiant $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $\|B(x, y)\| \leq M$. Donc B est continue sur $E_1 \times E_2$ (c'est classique à partir de cette dernière inégalité !)

Exercice 8 (Existence de fonctions continues différentes de leur série de Fourier). On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et continues. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt}\, dt$$

(coefficients de Fourier de f). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application

$$\ell_n :\ \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C} \quad f \mapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$

On muni $\mathcal{C}_{2\pi}$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{-\pi\leq t\leq\pi} |f(t)|$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que ℓ_n est une forme linéaire continue et calculer sa norme $|||\ell_n||| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |\ell_n(f)|$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} |||\ell_n||| = +\infty$. Conclure avec le théorème de Banach-Steinhaus.

Solution. **a)** L'application ℓ_n est clairement une forme linéaire. La relation classique

$$\sum_{p=-n}^{n} e^{ipt} = \frac{\sin[(2n + 1)t/2]}{\sin(t/2)} \qquad \text{entraîne} \quad \forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \ell_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(2n + 1)t/2]}{\sin(t/2)} f(t)\, dt,$$

donc si $\|f\|_\infty = 1$, on a

$$|\ell_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin[(2n + 1)t/2]}{\sin(t/2)}\right| dt. \qquad (*)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit la fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$

$$f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}, \qquad \text{où} \quad D_n(t) = \frac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)}.$$

On a $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ et on montre facilement que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} |\ell_n(f_\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)} \right| dt.$$

Avec (*), on en déduit

$$|||\ell_n||| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)} \right| dt.$$

b) L'inégalité $|\sin(t/2)| \leq |t/2|$ pour tout nombre réel t entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |||\ell_n||| \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin[(2n+1)t/2]}{t/2} \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin u/u|\, du$ diverge (car $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin u/u|\, du \geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin u|\, du = \frac{2}{n\pi}$), on en déduit $\lim_{n\to+\infty} |||\ell_n||| = +\infty$.

Maintenant, $\mathcal{C}_{2\pi}$ est complet (car fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, e.v des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est complet — voir l'exercice 1 page 21), et on peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus qui entraîne l'existence de $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\ell_n(f)| = +\infty$. Autrement dit, la série de Fourier de f en 0 diverge. La fonction f est donc différente de sa série de Fourier. En conclusion, il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

Remarque. Un exemple explicite d'une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0 fait l'objet de l'exercice 4 page 275.

Autres applications

Le lecteur amusé par les applications précédentes du théorème de Baire pourra s'exercer sur les suivantes :

— il n'existe pas de partition dénombrable de $[0, 1]$ en fermés ;

— il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (par contre, il existe des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinues en tout point de $\mathbb{Q}$, voir le problème 11 page 114) ;

— si E_1 et E_2 sont deux espaces métriques complets et si une fonction f définie sur $E_1 \times E_2$ a toutes ses applications partielles continues, alors f est continue sur un ensemble dense.

Remarque sur le théorème de Banach-Steinhaus

Il existe une version plus forte de ce théorème, valable sur des espaces vectoriels appelés espaces de Fréchet. Ce ne sont pas des espaces normés, mais des espaces métriques dont la distance n'est pas issue d'une norme.

ANNEXE B

Espaces de Hilbert

Cette annexe présente, sous forme d'un problème, les résultats généraux relatifs aux espaces de Hilbert. Ce problème est suivi de deux exercices indépendants :

— le premier porte sur la topologie faible dans un espace de Hilbert,

— le second sur les opérateurs compacts et leur théorie spectrale dans les espaces de Hilbert.

Cet appendice suppose connue la théorie des espaces préhilbertiens.

1. Résultats généraux sur les espaces de Hilbert

Problème 1. Nous n'étudierons ici que les espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ (les propriétés des espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$ sont analogues et se montrent de la même manière).

Rappel. Un espace vectoriel est dit *préhilbertien* s'il est muni d'un produit scalaire. S'il est complet pour la norme issue du produit scalaire, on dit que c'est un *espace de Hilbert* (ou hilbertien).

Les e.v de dimension finie sont très maniables, mais beaucoup de leurs propriétés intéressantes ne sont plus vraies en dimension infinie. Les propriétés topologiques des espaces de Hilbert en font des espaces de dimension infinie très souples, comme nous allons le voir.

— Dans tout le problème, H désigne un espace de Hilbert de dimension infinie.

— Le produit scalaire de deux éléments $x, y \in H$ est noté $\langle x, y\rangle$, la norme associée est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

1/ Théorème de projection sur un convexe fermé. Soit $C \subset H$ un convexe fermé.
a) Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe un unique élément $y \in C$ tel que $\|x-y\| = \mathrm{d}(x, C) = \inf_{z\in C} \|x-z\|$.

L'élément y s'appelle la *projection orthogonale* de x sur C, et on note $y = x_C$.

b) Si $x \in H$, montrer que x_C est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall z \in C, \qquad \langle z - x_C, x - x_C\rangle \leq 0.$$

2/ Orthogonal d'un sous-espace. On rappelle que l'orthogonal d'une partie A de H est

$$A^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in A, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

a) Si $A \subset H$, montrer que $A^\perp$ est un s.e.v fermé de H.
b) Soit F un s.e.v fermé de H. Montrer :

(i) $F \oplus F^\perp = H$;

(ii) si $x \in H$, $x_F = p_F(x)$ où p_F est la projection orthogonale sur F ;

(iii) $F = F^{\perp\perp}$.

c) Soit F un s.e.v quelconque de H. Montrer que $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.
d) Montrer qu'un s.e.v F de H est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

3/ Théorème de représentation de Riesz. On note H' le dual topologique de H, *i. e.* l'e.v des formes linéaires de H continues.

a) Pour tout $a \in H$, on note φ_a la forme linéaire $H \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \langle a, x\rangle$. Montrer que l'application $H \to H' \quad a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme.
b) (*Application : adjoint d'un endomorphisme*). Soit $u \in \mathcal{L}_c(H)$ un endomorphisme continu de H. Montrer que

$$\exists! v \in \mathcal{L}_c(E), \forall (x,y) \in H^2, \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle.$$

L'endomorphisme v est appelé *adjoint* de u et est noté u^*. Montrer que $\|u^*\| = \|u\|$ (où $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$).

4/ Bases hilbertiennes.
a) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de H de norme 1, deux à deux orthogonaux. On note $E = \overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}}$. Soit $v \in H$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\lambda_n = \langle v, e_n\rangle$. Montrer que la série $\sum \lambda_n\, e_n$ converge, que sa somme w est la projection orthogonale de v sur E et que

$$\|w\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 \leq \|v\|^2 \qquad \text{(inégalité de Bessel)}.$$

b) On dit que H est *séparable* s'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de H de norme 1, deux à deux orthogonaux, telle que $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dense dans H (on parle alors de *base hilbertienne*).

Montrer que si H est séparable, tout élément v de H s'écrit $v = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\, e_n$ où pour tout n, $\lambda_n = \langle v, e_n\rangle$, et que $\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2$.

Solution. **1/ a)** Posons $\delta = \mathrm{d}(x, C) = \inf_{z\in C} \|x - z\|$. Il existe une suite (y_n) de C telle que $\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = \delta$. En utilisant le fait que H est un espace de Hilbert, nous allons montrer que ceci entraîne la convergence de (y_n). Comme H est complet, il suffit de montrer que (y_n) est de Cauchy.

Comme la norme $\|\,.\,\|$ est issue d'un produit scalaire, elle vérifie l'identité du parallélogramme, donc

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad \|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 + \|y_p - y_q\|^2 = 2\left(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2\right). \qquad (*)$$

Or C est convexe, donc $(y_p + y_q)/2 \in C$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, donc $\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\| \geq \delta$, ou encore $\|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 \geq 4\delta^2$. Avec (*), on en déduit

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad \|y_p - y_q\|^2 \leq 2\left[(\|x - y_p\|^2 - \delta^2) + (\|x - y_q\|^2 - \delta^2)\right],$$

et comme $\|x - y_n\|$ tend vers δ, on voit que (y_n) est bien une suite de Cauchy.

Soit y la limite de (y_n). Comme C est fermé, on a $y \in C$ et $\|x - y\| = \lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = \delta = \mathrm{d}(x, C)$.

Il nous reste à montrer que y est unique. Supposons $\|x - z\| = \delta$ avec $z \in C$, et définissons une suite (y_n) de C par $y_n = y$ si n est pair, $y_n = z$ si n est impair. Cette suite vérifie $\|x - y_n\| = \delta$ pour tout n, en particulier $\|x - y_n\|$ tend vers δ, donc d'après ce que nous avons prouvé plus haut, (y_n) converge. Ceci entraîne $z = y$, d'où l'unicité.

b) Supposons d'abord que pour $y \in C$, on ait

$$\forall z \in C, \qquad \langle z - y, x - y\rangle \leq 0.$$

Alors pour tout $z \in C$,

$$\|z - x\|^2 = \|(z - y) - (x - y)\|^2 = \|z - y\|^2 + \|x - y\|^2 - 2\langle z - y, x - y\rangle \geq \|z - y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|x - y\|^2,$$

donc $\|z - x\| \geq \|y - x\|$ pour tout $z \in C$. De plus $y \in C$, donc $\|y - x\| = \mathrm{d}(x, C)$, et d'après la question précédente, $y = x_C$.

Montrons maintenant que la propriété est vérifiée pour $y = x_C$. Pour tout $z \in C$, on a $\|x - z\|^2 \geq \|x - x_C\|^2$, et en développant $\|x - z\|^2 = \|(x - x_C) - (z - x_C)\|^2$, on obtient donc

$$\forall z \in C, \qquad -2\langle x - x_C, z - x_C\rangle + \|z - x_C\|^2 \geq 0. \qquad (**)$$

Il s'agit de se débarrasser du terme en $\|z - x_C\|^2$. L'idée est que lorsque z est proche de x_C, le terme $\|z - x_C\|^2$ est petit devant l'autre ; on va donc appliquer $(**)$ a un point z qui tend vers x_C. Fixons $z_0 \in C$. Comme C est convexe, on a $z = \lambda z_0 + (1-\lambda)x_C \in C$ pour tout $\lambda \in [0,1]$, donc en appliquant (**) à z, on tire

$$\forall \lambda \in [0,1], \qquad -2\lambda\langle x - x_C, z_0 - x_C\rangle + \lambda^2\|z_0 - x_C\|^2 \geq 0,$$

donc

$$\forall \lambda \in \,]0,1], \qquad -2\langle x - x_C, z_0 - x_C\rangle + \lambda\|z_0 - x_C\|^2 \geq 0,$$

et en faisant tendre λ vers 0 dans cette dernière inégalité, on obtient $-2\langle x - x_C, z_0 - x_C\rangle \geq 0$, et ceci pour tout $z_0 \in C$, d'où le résultat.

2/ a) Le fait que $A^\perp$ soit un s.e.v de H est immédiat. Pour montrer que $A^\perp$ est fermé, on considère une suite (x_n) de $A^\perp$ qui converge vers un point x de H. Pour tout $y \in A$, on a $\langle x_n, y\rangle = 0$, et par continuité du produit scalaire (qui provient de l'inégalité de Schwarz), on en déduit, en faisant $n \to +\infty$, que $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci est vrai pour tout $y \in A$, donc $x \in A^\perp$.

b) Montrons (i). Il est clair que $F \cap F^\perp = \{0\}$, car si $\langle x, x\rangle = 0$, on a $x = 0$. Montrons maintenant $F \oplus F^\perp = H$. Soit $x \in H$. Comme F, s.e.v fermé de H, est un convexe fermé de H, on peut appliquer les résultats de 1/. Donc il existe un unique élément $x_F \in F$ tel que $\|x - x_F\| = \mathrm{d}(x, F)$, et on a

$$\forall z \in F, \qquad \langle z - x_F, x - x_F\rangle \leq 0.$$

Comme F est un s.e.v, il est symétrique par rapport à $x_F \in F$, et cette dernière inégalité est donc une égalité. On en tire

$$\forall z \in F, \qquad \langle z, x - x_F\rangle = \langle z - x_F, x - x_F\rangle - \langle 0 - x_F, x - x_F\rangle = 0,$$

donc $x - x_F \in F^\perp$. En conclusion, on a $x = x_F + (x - x_F)$ avec $x_F \in F$ et $x - x_F \in F^\perp$, donc $x \in F \oplus F^\perp$, et ceci étant vrai pour tout $x \in H$, on a bien $H = F \oplus F^\perp$. Du même coup, nous avons montré que $x_F = p_F(x)$, qui est l'assertion (ii).

Il nous reste à montrer (iii). Il est clair que $F \subset F^{\perp\perp}$, car si $x \in F$, on a $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F^\perp$, donc $x \in F^{\perp\perp}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in F^{\perp\perp}$. Comme $F \oplus F^\perp = H$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_1 + x_2$. Or x est orthogonal à $F^\perp$, donc $\langle x_2, x\rangle = 0 = \langle x_2, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle = \|x_2\|^2$, donc $x_2 = 0$, et finalement $x = x_1 \in F$. On a donc $F^{\perp\perp} \subset F$, d'où (iii).

c) L'ensemble $\overline{F}$ est un s.e.v fermé de H, donc $\overline{F} = (\overline{F})^{\perp\perp}$. Or

$$F \subset \overline{F} \quad \text{donc} \quad (\overline{F})^\perp \subset F^\perp \quad \text{donc} \quad F^{\perp\perp} \subset (\overline{F})^{\perp\perp} = \overline{F}. \tag{***}$$

Par ailleurs, $F \subset F^{\perp\perp}$, et comme un orthogonal est fermé, $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$. Avec (***), on en déduit $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.

d) Comme $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ et que $H = F^\perp \oplus F^{\perp\perp}$ (car $F^\perp$ est un s.e.v fermé), on a $H = F^\perp + \overline{F}$, donc $\overline{F} = H$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

3/ a) Remarquons tout d'abord que φ_a est bien une forme linéaire, et elle est continue d'après l'inégalité de Schwarz.

L'application $H \to H' \quad a \mapsto \varphi_a$ est clairement linéaire. Elle est injective car si $\varphi_a = 0$, alors $0 = \varphi_a(a) = \langle a, a\rangle = \|a\|^2$, donc $a = 0$.

Il nous reste à montrer (c'est plus délicat) qu'elle est surjective. Soit $L \in H'$. Si $L = 0$, $L = \varphi_0$ et c'est terminé. Sinon, $L \neq 0$, et $\operatorname{Ker} L = L^{-1}(\{0\})$ est un s.e.v de H, fermé car L est continue. Donc d'après 2/a), $(\operatorname{Ker} L) \oplus (\operatorname{Ker} L)^\perp = H$. Si L était nulle sur $(\operatorname{Ker} L)^\perp$, alors L serait nulle sur H ce qui est absurde par hypothèse. Donc il existe $a \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$ tel que $L(a) \neq 0$.

Montrons que $(\operatorname{Ker} L)^\perp = \operatorname{Vect}(a)$. Soit $v \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$. On pose

$$w = v - \frac{L(v)}{L(a)}\,a \quad \text{qui vérifie} \quad L(w) = L(v) - L\left(\frac{L(v)}{L(a)}\,a\right) = L(v) - \frac{L(v)}{L(a)}\,L(a) = 0,$$

donc $w \in \operatorname{Ker} L$. Par ailleurs, w est combinaison linéaire de deux éléments de $(\operatorname{Ker} L)^\perp$, donc $w \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$. Finalement, $w \in (\operatorname{Ker} L) \cap (\operatorname{Ker} L)^\perp = \{0\}$ donc $w = 0$, c'est-à-dire $v = \frac{L(v)}{L(a)}\, a \in \operatorname{Vect}(a)$. On a donc bien $(\operatorname{Ker} L)^\perp = \operatorname{Vect}(a)$.

Ceci étant, posons $b = \frac{L(a)}{\|a\|^2}\, a$. Nous allons montrer $\varphi_b = L$.

— Pour tout $x \in \operatorname{Ker} L$, on a $\varphi_b(x) = \frac{L(a)}{\|a\|^2}\, \langle a, x\rangle = 0$ car $a \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$.

— Si $x \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$, donc

$$\varphi_b(x) = \lambda\, \varphi_b(a) = \lambda\, \frac{L(a)}{\|a\|^2}\, \langle a, a\rangle = \lambda L(a) = L(\lambda a) = L(x).$$

Finalement, nous avons montré que L et φ_b coïncident sur les deux espaces supplémentaires $\operatorname{Ker} L$ et $(\operatorname{Ker} L)^\perp$. Donc $L = \varphi_b$, d'où la surjectivité désirée.

b) Soit $y \in H$. L'application $x \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est une forme linéaire continue, donc d'après 3/a),

$$\exists! a_y \in H, \forall x \in H, \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle a_y, x\rangle.$$

L'unicité de a_y entraîne que $y \mapsto a_y$ est linéaire. Notons v l'endomorphisme de H défini par $v(y) = a_y$, de sorte que

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle.$$

L'unicité de a_y entraîne celle de v. Il nous reste à montrer que v est continu. Pour tout $y \in H$, on a

$$\|v(y)\|^2 = \langle v(y), v(y)\rangle = \langle u[v(y)], y\rangle \leq \|u[v(y)]\| \cdot \|y\| \leq |||u||| \cdot \|v(y)\| \cdot \|y\|,$$

donc $\|v(y)\| \leq |||u||| \cdot \|y\|$. Ceci étant vrai pour tout $y \in H$, on en déduit que v est continu et que $|||v||| \leq |||u|||$.

Nous avons donc prouvé l'existence et l'unicité de u^*, et on a $|||u^*||| \leq |||u|||$. De même, $|||u^{**}||| \leq |||u^*|||$. L'unicité de l'adjoint entraîne $u^{**} = u$, donc $|||u||| \leq |||u^*|||$, et finalement, on a $|||u^*||| = |||u|||$.

4/ a) Pour tout n, notons $E_n = \operatorname{Vect}(e_k)_{0 \leq k \leq n}$, s.e.v de dimension finie de H, donc fermé. La projection orthogonale de v sur E_n est $p_{E_n}(v) = \sum_{k=0}^n \lambda_k\, e_k$ (en effet, si $p_{E_n}(v) = \sum_{k=0}^n \mu_k\, e_k$, on a $v - p_{E_n}(v) \in E_n^\perp$, donc pour tout k, $0 \leq k \leq n$, $0 = \langle v - p_{E_n}(v), e_k\rangle = \langle v, e_k\rangle - \mu_k = \lambda_k - \mu_k$).

En particulier, $\|p_{E_n}(v)\|^2 = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2$. Comme $\|p_{E_n}(v)\|^2 \leq \|v\|^2$ (car $\|v\|^2 = \|p_{E_n}(v)\|^2 + \|v - p_{E_n}(v)\|^2$), on en déduit que la série $\sum \lambda_n^2$ converge. Comme $\| \sum_{n=p}^q \lambda_n\, e_n\|^2 = \sum_{n=p}^q \lambda_n^2$, la série $\sum \lambda_n\, e_n$ est de Cauchy, donc elle converge car H est complet. Notons w sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\langle v - w, e_n\rangle = \langle v, e_n\rangle - \langle w, e_n\rangle = \lambda_n - \lambda_n = 0$, donc $v - w \in E^\perp$. Or $w \in E$, donc $w = p_E(v)$.

Comme $w = \lim_{n\to+\infty} p_{E_n}(v)$, on a $\|w\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|p_{E_n}(v)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2$, et $\|w\|^2 = \|p_E(v)\|^2 \leq \|v\|^2$.

b) Il suffit de remarquer que dans ce cas, $E = H$ et $w = P_H(v) = v$.

Remarque. Les résultats des questions de 1/ (resp. de 2/b)) restent vrais dans un espace préhilbertien si C est supposé complet (resp. si F est complet, en particulier s'il est de dimension finie). Les démonstrations sont les mêmes.

S'il existe une famille libre dénombrable de vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\operatorname{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dense dans H, alors H est séparable (appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt). La plupart des espaces de Hilbert dans lesquels on travaille sont séparables.

2. Quelques propriétés des espaces de Hilbert

Les deux exercices qui suivent ont pour but de présenter des propriétés intéressantes des espaces de Hilbert. Ils sont indépendants. Il est nécessaire, pour les traiter, d'avoir pris connaissance des résultats du problème précédent.

EXERCICE 1 (TOPOLOGIE FAIBLE DANS UN ESPACE DE HILBERT). Soit H un espace de Hilbert dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$. Soit (x_n) une suite de points de H,

— on dit que (x_n) converge *fortement* vers $x \in H$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = 0$ (c'est la convergence usuelle) ;

— on dit que (x_n) converge *faiblement* vers $x \in H$ si pour tout $y \in H$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$.

1/ a) Si (x_n) converge faiblement vers x, montrer que x est la seule limite faible possible de (x_n). Si de plus il existe $M > 0$ tel que $\|x_n\| \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\|x\| \le M$.
b) Si (x_n) converge fortement vers x, montrer que (x_n) converge faiblement vers x. La réciproque est-elle vraie ?
c) Si (x_n) converge faiblement vers x et si $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$, montrer que (x_n) converge fortement vers x.

2/ *Compacité faible de la boule unité fermée.* Soit (x_n) une suite bornée de H. On veut montrer qu'il existe une sous-suite de (x_n) qui converge faiblement.
a) Montrer qu'il existe une sous-suite $(y_n) = (x_{\varphi(n)})$ de (x_n) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(\langle y_n, x_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
b) Si E est l'adhérence du s.e.v $\mathrm{Vect}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer

$$\exists! u \in E, \forall v \in E, \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle y_n, v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

c) En déduire que (y_n) converge faiblement vers u.

Solution. **1/ a)** Soit $x' \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x', y\rangle$. Alors pour tout $y \in H$, $\langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x', y\rangle$, donc $\langle x - x', y\rangle = 0$ pour tout $y \in H$. En particulier $\langle x - x', x - x'\rangle = \|x - x'\|^2 = 0$, donc $x = x'$.

Si $\|x_n\| \le M$ pour tout n, alors pour tout n, $|\langle x_n, x\rangle| \le \|x_n\| \cdot \|x\| \le M\,\|x\|$. Comme $(\langle x_n, x\rangle)$ converge vers $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$, on en déduit $\|x\|^2 \le M\,\|x\|$ donc $\|x\| \le M$.

b) C'est évident car pour tout $y \in H$, $|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \le \|x_n - x\| \cdot \|y\|$.

Par contre, la réciproque est fausse. Par exemple, dans un espace de Hilbert séparable dont $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne (par exemple $H = \ell^2$, espace des suites réelles (x_n) telles que $\sum x_n^2 < +\infty$), la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 car si $y \in H$, on a $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle y, e_n\rangle\, e_n$ et $\sum \langle y, e_n\rangle^2$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty} \langle y, e_n\rangle = 0$, Bien sûr, il est clair que (e_n) ne converge pas fortement (si c'était le cas, sa limite forte serait sa limite faible donc 0, ce qui est impossible puisque $\|e_n\| = 1$ pour tout n).

c) Il suffit d'écrire $\|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\langle x, x_n\rangle$.

2/ a) Comme (x_n) est bornée, la suite réelle $(\langle x_n, x_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. On peut donc extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})$ de (x_n) telle que la suite $(\langle x_{\varphi_1(n)}, x_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

De même, la suite réelle $(\langle x_{\varphi_1(n)}, x_2\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, on peut donc extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(x_{\varphi_1(n)})$ telle que la suite $(\langle x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}, x_2\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

En procédant par récurrence, on construit ainsi pour tout k une sous-suite $(x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la suite $(\langle x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}, x_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

On définit alors la suite (y_n) par $y_n = x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n(n)}$ pour tout n (procédé d'extraction diagonal). Pour $n \ge k$, la suite (y_n) est une sous-suite de $(x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc la suite $(\langle y_n, x_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour tout k, la suite $(\langle y_n, x_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Il est donc clair que pour tout $v \in F = \mathrm{Vect}(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, la suite $(\langle y_n, v\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Montrons que cette propriété reste vraie si $v \in E = \overline{F}$. Soit $v \in E$. Soit $\varepsilon > 0$ et $w \in F$ tel que $\|v - w\| < \varepsilon$. La suite $(\langle y_n, w\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Elle est donc de Cauchy, ce qui entraîne

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \ge N, \qquad |\langle y_p, w\rangle - \langle y_q, w\rangle| < \varepsilon.$$

On en déduit

$$\forall p, q \geq N, \qquad |\langle y_p, v\rangle - \langle y_q, v\rangle| \leq |\langle y_p, v - w\rangle| + |\langle y_p, w\rangle - \langle y_q, w\rangle| + |\langle y_q, v - w\rangle| \leq M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon,$$

où M est un majorant de $(\|x_n\|)$ (donc de $(\|y_n\|)$). Donc $(\langle y_n, v\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge car H est complet.

Pour tout $v \in E$, on note $\ell(v)$ la limite de la suite $(\langle y_n, v\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il est clair que l'application $\ell : E \to \mathbb{R}$ ainsi définie est linéaire. Elle est continue car (y_n) est bornée. Le s.e.v E, fermé dans un complet, est complet. Muni du produit scalaire sur H, c'est donc un espace de Hilbert, donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur u de E tel que $\ell(v) = \langle u, v\rangle$ pour tout $v \in E$. Ceci s'écrit aussi

$$\exists! u \in E, \forall v \in E, \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle y_n, v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

c) Comme E est un s.e.v fermé de H, on sait que $E \oplus E^\perp = H$. Soit $v \in H$, et soit $(v_1, v_2) \in E \times E^\perp$ tel que $v = v_1 + v_2$. Pour tout n, on a $y_n \in E$, donc $\langle y_n, v\rangle = \langle y_n, v_1\rangle$. Or $\lim_{n\to+\infty} \langle y_n, v_1\rangle = \langle u, v_1\rangle$ car $v_1 \in E$, et comme $u \in E$, on a $\langle u, v_1\rangle = \langle u, v\rangle$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} \langle y_n, v\rangle = \langle u, v\rangle$, et ceci pour tout $v \in H$, d'où le résultat.

Remarque. A l'aide du théorème de Banach-Steinhaus (voir l'exercice 7 page 424 dans l'annexe A), on montre facilement que si (x_n) converge faiblement, alors (x_n) est bornée (considérer les formes linéaires $f_n : H \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \langle x_n, x\rangle$).

La convergence faible permet de définir la topologie faible sur H (un ensemble est faiblement fermé si toute limite faible de points de cet ensemble reste dans cet ensemble). Si H est séparable, la topologie faible sur la boule unité de H est métrisable (*i. e.* il existe une distance d sur H telle que la topologie induite par d est la topologie faible — prendre pour d la fonction $\mathrm{d}(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |\langle e_n, u - v\rangle|$, où (e_n) est une base hilbertienne). On comprend alors mieux le terme de compacité faible, car dans un espace métrique, la propriété de Bolzano Weierstrass est équivalente à la propriété de Borel-Lebesgue.

Exercice 2 (Opérateurs compacts dans un espace de Hilbert).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace de Banach. On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'e.v des endomorphismes continus de E, muni de la norme $|\!|\!| f |\!|\!| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Un endomorphisme (on dit aussi *opérateur*) f sur E est dit *compact* si $\overline{f(B)}$ est compact (où B désigne la boule unité fermée de E). On note $\mathcal{L}_{\mathrm{comp}}(E)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E.

I. *Généralités.*

1/ a) Montrer $\mathcal{L}_{\mathrm{comp}}(E) \subset \mathcal{L}_c(E)$.

b) Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un opérateur compact ;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir $f(B)$ par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε ;

(iii) pour toute suite (x_n) bornée de E, on peut extraire de la suite $[f(x_n)]$ une sous-suite convergente.

(pour (ii), on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2 page 32).

2/ a) Montrer que $\mathcal{L}_{\mathrm{comp}}(E)$ est un s.e.v fermé de $\mathcal{L}_c(E)$.

b) Si $f \in \mathcal{L}_c(E)$ est de rang fini (*i. e.* si $f(E)$ est de dimension finie), montrer que $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{comp}}(E)$.

II. *Opérateurs compacts dans un espace de Hilbert.* Dorénavant, E désigne un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert.

1/ a) Si $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{comp}}(E)$, montrer que f est limite d'opérateurs continus de rang fini.

b) Si $f \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$, montrer que son adjoint f^* est un opérateur compact.
c) Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de norme 1, deux-à-deux orthogonaux, et si $f \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$, montrer $\lim_{n\to+\infty} f(e_n) = 0$.

2/ *Valeurs propres d'un opérateur compact dans un Hilbert.* Soit $f \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$. On note

$$\Lambda(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \neq 0, \quad f(x) = \lambda\, x\}$$

(ensemble des valeurs propres de f).
a) Si $\lambda \in \Lambda(f)$ et $\lambda \neq 0$, montrer que le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$ correspondant est de dimension finie.
b) Montrer que 0 est le seul point d'accumulation possible de $\Lambda(f)$. En déduire que $\Lambda(f)$ est au plus dénombrable.

III. ***Opérateurs compacts autoadjoints.*** Soit $f \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$ autoadjoint (*i. e* $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$).
1/ a) Montrer qu'il existe une suite (x_n) de vecteurs de E, tous de norme 1, telle que $\lim_{n\to+\infty} |\langle f(x_n), x_n\rangle| = |||f|||$.
b) Si $f \neq 0$, en déduire que f a au moins une valeur propre non nulle.

2/ a) Montrer que deux sous-espaces propres de f pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
b) Soit G le s.e.v engendré (algébriquement) par les vecteurs propres de f associés à des valeurs propres non nulles. En notant $F = \overline{G}$, montrer que $F^\perp = \operatorname{Ker} f$.
c) On suppose que $\Lambda(f)$ n'est pas fini. Montrer qu'il existe une famille orthonormale dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs propres, associés à des valeurs propres non nulles, telle que

$$\forall x \in E, \exists y \in \operatorname{Ker} f, \qquad x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n + y.$$

Que dire si $\Lambda(f)$ est fini ?

Solution. **I. 1/ a)** Soit $f \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$. L'ensemble $\overline{f(B)}$ est compact, donc borné, donc $f(B)$ est borné, donc f est continue, d'où le résultat.

b) Montrons d'abord que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

— *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* est clair car $\overline{f(B)}$ étant compact, on peut toujours, pour tout $\varepsilon > 0$, recouvrir $\overline{f(B)}$ (donc $f(B)$) par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

— *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*. Soit $\varepsilon > 0$. On peut recouvrir $f(B)$ par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/2$: $f(B) \subset \cup_{1\leq i\leq n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon/2)$. Ainsi, $\overline{f(B)} \subset \cup_{1\leq i\leq n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$, et comme ceci est possible pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{f(B)}$ est précompact (voir l'exercice 2 page 32). De plus $\overline{f(B)}$, fermé dans le complet E, est complet. On en déduit que $\overline{f(B)}$ est compact.

Montrons maintenant l'équivalence entre les assertions (i) et (iii).

— *(i)* $\Longrightarrow$ *(iii)*. Soit (x_n) une suite de E, bornée. Soit $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout n. Pour tout n, $x_n/M \in B$, donc la suite $(f(x_n/M))$ est à valeurs dans le compact $\overline{f(B)}$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(f(x_{\varphi(n)}/M))_{n\in\mathbb{N}}$, donc la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite convergente de $(f(x_n))$.

— *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)*. Soit (y_n) une suite de $\overline{f(B)}$. Il s'agit de montrer que l'on peut en extraire une sous-suite convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in B$ tel que $\|f(x_n) - y_n\| < 1/n$. D'après (iii), on peut extraire de $(f(x_n))$ une sous-suite convergente $[f(x_{\varphi(n)})]_{n\in\mathbb{N}}$, et il est alors clair que la sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ est convergente.

2/ a) Montrons que $\mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$ est un s.e.v de $\mathcal{L}_c(E)$.

Si $f \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\overline{(\lambda f)(B)} = \lambda\, \overline{f(B)}$, donc $\lambda f \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$.

Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$. Soit (x_n) une suite bornée de E. On peut extraire de $[f(x_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $[f(x_{\varphi(n)})]_{n\in\mathbb{N}}$. De même, comme $(x_{\varphi(n)})$ est bornée, on peut extraire de $[g(x_{\varphi(n)})]_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $[g(x_{\varphi\circ\psi(n)})]_{n\in\mathbb{N}}$. Les deux suites $[f(x_{\varphi\circ\psi(n)})]_{n\in\mathbb{N}}$ et $[g(x_{\varphi\circ\psi(n)})]_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc convergentes, donc la suite $[(f+g)(x_{\varphi\circ\psi(n)})]_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. D'après l'équivalence $(iii) \iff (i)$ de la question précédente, on en déduit que $f+g$ est un opérateur compact.

Montrons maintenant que $\mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$ est un fermé de $\mathcal{L}_c(E)$. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$ qui converge vers $f \in \mathcal{L}_c(E)$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\!|\!| f_n - f |\!|\!| < \varepsilon/2$. Comme f_n est un opérateur compact, d'après 1/b)(ii), on peut recouvrir $f_n(B)$ par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$. Alors $f(B)$ est recouvert par les boules de même centre et de rayon ε, donc f est compact d'après 1/b)(ii).

b) Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ de rang fini. Comme f est continue, $\overline{f(B)}$ est bornée. Par ailleurs, $f(E)$ est fermé (c'est un sous-espace de dimension finie), donc $\overline{f(B)} \subset f(E)$. Finalement, $\overline{f(B)}$ est un fermé borné de $f(E)$. Comme $f(E)$ est de dimension finie, $\overline{f(B)}$ est donc un compact de $f(E)$, donc de E puisque $f(E)$ est fermé.

II. 1/ a) Soit $\varepsilon > 0$. D'après I.1/b)(ii), il existe un nombre fini de boules de rayon ε recouvrant $f(B)$: $f(B) \subset \cup_{1\leq i\leq n} \mathrm{B}(y_i, \varepsilon)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$ et p_F le projecteur orthogonal sur F.

On a $|\!|\!| f - p_F \circ F |\!|\!| < \varepsilon$. En effet, si $x \in B$, on sait qu'il existe i tel que $\|f(x) - y_i\| < \varepsilon$. De plus, on sait que $\|f(x) - p_F \circ f(x)\| = \inf_{y\in F} \|f(x) - y\|$, et comme $y_i \in F$, on en déduit $\|f(x) - p_F \circ f(x)\| \leq \|f(x) - y_i\| < \varepsilon$.

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un opérateur g continu de rang fini (ici $g = p_F \circ f$ qui est bien de rang fini car F est de dimension finie), tel que $|\!|\!| g - f |\!|\!| < \varepsilon$. D'où le résultat.

b) Remarquons déjà que si $f \in \mathcal{L}_c(E)$ est de rang fini, alors f^* aussi. En effet. La relation $\langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$ pour tout $x, y \in E$ entraîne $f^*(E) \subset (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$. Par ailleurs, la restriction de f à $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ est un isomorphisme de $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ sur $f(E)$, donc $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ est de dimension finie. Donc $f^*(E)$ est de dimension finie.

Ceci étant, soit $f \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$. D'après la question précédente, il existe une suite (f_n) d'opérateurs continus de rang fini qui converge vers f. Or pour tout n, $|\!|\!| f_n^* - f^* |\!|\!| = |\!|\!| (f_n - f)^* |\!|\!| = |\!|\!| f_n - f |\!|\!|$, donc (f_n^*) converge vers f^*. Or tous les f_n^* sont continus et de rang fini, donc compacts (voir I.2/b)), et comme $\mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$ est fermé, on en déduit $f^* \in \mathcal{L}_{\text{comp}}(E)$.

c) Supposons le contraire. Alors il existe $\alpha > 0$ et une sous-suite de (e_n), encore notée (e_n), telle que $\|f(e_n)\| \geq \alpha$ pour tout n. Comme f est compact, il existe une sous-suite $(e_{\varphi(n)})$ de (e_n) telle que $(f(e_{\varphi(n)}))$ converge. Notons x sa limite. On a $\|x\| \geq \alpha$, et

$$\forall y \in E, \qquad \langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f(e_{\varphi(n)}), y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle e_{\varphi(n)}, f^*(y)\rangle,$$

et le dernier membre est nul en vertu de l'inégalité de Bessel (voir le problème 1, question 4/a)). On en déduit $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in E$, donc $x = 0$. Ceci est absurde car $\|x\| \geq \alpha > 0$.

2/ a) Supposons que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id})$ soit de dimension infinie. Alors on peut trouver une suite orthonormale (e_n) de vecteurs de $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id})$ (en partant d'un vecteur e_0 de norme 1, construire les e_n par récurrence). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(e_n) = \lambda\, e_n$, donc $\|f(e_n)\| = \lambda \neq 0$. Ceci est absurde d'après le résultat de la question précédente.

b) Soit (λ_n) une suite de valeurs propres distinctes de f, convergeant vers une valeur λ. Il s'agit de montrer que $\lambda = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note x_n un vecteur propre associé à la valeur propre λ_n. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt permet de construire une suite orthonormale $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $\mathrm{Vect}(y_0, \dots, y_n) = \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_n)$ pour tout n. D'après II.1/c), on a $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 0$. Pour tout n, on a $(f - \lambda_n\, \mathrm{Id})(y_n) \in \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \mathrm{Vect}(y_0, \dots, y_{n-1})$. Donc $\lambda_n\, y_n$ et $(f - \lambda_n\, \mathrm{Id})(y_n)$ sont orthogonaux, et comme $f(y_n) = \lambda_n\, y_n + (f - \lambda_n\, \mathrm{Id})(y_n)$, on en déduit $\|f(y_n)\| \geq |\lambda_n|\, \|y_n\| = |\lambda_n|$. Comme $(f(y_n))$ tend vers 0, on en déduit que (λ_n) tend vers 0. Ainsi, 0 est le seul point d'accumulation possible de $\Lambda(f)$. D'après le théorème de Weierstrass, on en déduit que pour tout n, $\Lambda(f) \cap [1/n, n]$ est fini, donc

$$\Lambda(f) \cap \mathbb{R}^{+*} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\Lambda(f) \cap \left[\frac{1}{n}, n\right]\right)$$

est au plus dénombrable. On montrerait de même que $\mathbb{R}^{-*} \cap \Lambda(f)$ est au plus dénombrable. Donc $\Lambda(f)$ est au plus dénombrable.

III. 1/ a) Montrons déjà

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle f(x), y\rangle| = |\!|\!| f |\!|\!|. \tag{$*$}$$

Si $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $|\langle f(x), y\rangle| \leq \|f(x)\| \, \|y\| \leq |\!|\!| f |\!|\!|$.

Par définition de la norme intrinsèque $|\!|\!| f |\!|\!|$, il existe une suite (x_n) de vecteurs de norme 1 qui vérifie $\lim_{n\to+\infty} \|f(x_n)\| = |\!|\!| f |\!|\!|$. En posant $y_n = f(x_n)/\|f(x_n)\|$ pour tout n, on a $\|y_n\| = 1$ et $\langle f(x_n), y_n\rangle = \|f(x_n)\|$, donc $\lim_{n\to+\infty} \langle f(x_n), y_n\rangle = |\!|\!| f |\!|\!|$, d'où (*).

Ceci étant, posons $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle f(x), x\rangle|$ et montrons $M = |\!|\!| f |\!|\!|$. Tout d'abord, il est clair que pour tout vecteur x de norme 1, $|\langle f(x), x\rangle| \leq \|f(x)\| \, \|x\| = \|f(x)\| \leq |\!|\!| f |\!|\!|$, donc $M \leq |\!|\!| f |\!|\!|$.

Montrons l'inégalité réciproque. Si $\|x\| = \|y\| = 1$, le caractère autoadjoint de f permet d'écrire, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\langle f(x+\varepsilon y), x+\varepsilon y\rangle = \langle f(x), x\rangle + \langle f(y), y\rangle + 2\varepsilon\langle f(x), y\rangle$ donc

$$4\,\langle f(x), y\rangle = \langle f(x+y), x+y\rangle - \langle f(x-y), x-y\rangle$$

ce qui entraîne

$$4\,|\langle f(x), y\rangle| \leq |\langle f(x+y), x+y\rangle| + |\langle f(x-y), x-y\rangle|.$$

Or, par normalisation on a $|\langle f(x+y), x+y\rangle| \leq M\,\|x+y\|^2$ et $|\langle f(x-y), x-y\rangle| \leq M\,\|x-y\|^2$, donc finalement

$$4\,|\langle f(x), y\rangle| \leq M\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4M.$$

Finalement, nous avons montré $|\langle f(x), y\rangle| \leq M$ dès que $\|x\| = \|y\| = 1$. Avec (*), on en déduit $|\!|\!| f |\!|\!| \leq M$.

Nous venons de montrer $|\!|\!| f |\!|\!| = \sup_{\|x\|=1} |\langle f(x), x\rangle|$, on conclut facilement qu'il existe une suite (x_n) de vecteurs normés telle que $\langle f(x_n), x_n\rangle$ converge vers $|\!|\!| f |\!|\!|$.

b) Il est clair que l'on peut trouver une sous-suite de la suite (x_n) construite précédemment, encore notée (x_n), et $\alpha \in \{-1, 1\}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \langle f(x_n), x_n\rangle = \alpha\,|\!|\!| f |\!|\!|$.

Comme f est compact, on peut en extraire de (x_n) une sous-suite, encore notée (x_n), telle que $(f(x_n))$ converge. Soit y sa limite. Posons $\lambda = \alpha\,|\!|\!| f |\!|\!|$. Pour tout n, on a

$$\|f(x_n) - \lambda\,x_n\|^2 = \|f(x_n)\|^2 + \lambda^2\,\|x_n\|^2 - 2\lambda\langle x_n, f(x_n)\rangle \leq 2\lambda^2 - 2\lambda\langle f(x_n), x_n\rangle,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \|f(x_n) - \lambda\,x_n\| = 0$. Comme $y - \lambda\,x_n = (y - f(x_n)) + (f(x_n) - \lambda\,x_n)$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} y - \lambda\,x_n = 0$. De plus $\lambda = \alpha\,|\!|\!| f |\!|\!| \neq 0$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = y/\lambda$, et comme $\|x_n\| = 1$ pour tout n, on a $y \neq 0$.

Le fait que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) - \lambda\,x_n = 0$ permet alors d'affirmer $f(y) = \lambda\,y$, donc λ est valeur propre non nulle de f.

2/ a) C'est comme en dimension finie. Si $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$ avec $\lambda \neq \mu$, alors

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

donc $\langle x, y\rangle = 0$.

b) Montrons que $G^\perp \subset \operatorname{Ker} f$. L'ensemble $G^\perp$ est stable par f. En effet, considérons $x \in G^\perp$. Pour tout vecteur propre y de f associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$, on a $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = 0$, donc par linéarité $\langle f(x), y\rangle$ pour tout $y \in G$, c'est-à-dire $x \in G^\perp$.

La restriction g de f à $G^\perp$ est donc un endomorphisme (qui reste bien sûr compact et autoadjoint) de $G^\perp$, qui est un espace de Hilbert (car fermé dans E). Comme $G \cap G^\perp = \{0\}$, g n'a aucune valeur propre non nulle. Donc d'après III.1/b), $g = 0$, autrement dit, $f(x) = 0$ pour tout $x \in G^\perp$. Donc $G^\perp \subset \operatorname{Ker} f$.

Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, soit y un vecteur propre de f associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$. Alors

$$0 = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \lambda\,\langle x, y\rangle,$$

donc $\langle x, y\rangle = 0$, et par linéarité, $x \in G^\perp$.

Donc $\operatorname{Ker} f = G^\perp$. Or $G^\perp = (\overline{G})^\perp = F^\perp$, d'où le résultat.

c) Si $\Lambda(f)$ n'est pas fini, d'après II.2/b), $\Lambda(f)$ est dénombrable. Notons $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les éléments non nuls de $\Lambda(f)$. Pour tout n, le sous-espace propre $E_{\lambda_n} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_n \operatorname{Id})$ est de dimension finie, et on note $(e_{n,1}, \dots, e_{n,p_n})$ une base orthonormale de E_{λ_n}. Alors $(e_n) = (e_{n,i})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\1\le i\le p_n}}$ est une base orthonormale de G (d'après III.2/a)). Tout élément de $F = \overline{G}$ s'écrit donc sous la forme $x = \sum_0^{+\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n$ et comme $F \oplus F^{\perp} = E$, on en déduit le résultat d'après III.2/b).

Si $\Lambda(f)$ est fini, en notant $\Lambda(f)\smallsetminus\{0\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, $G = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est de dimension finie, donc $F = G$, donc

$$E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} \oplus \operatorname{Ker} f = F \oplus F^{\perp} = E,$$

la somme directe étant orthogonale.

Remarque. Rappelons que la boule unité d'un e.v.n n'est compacte qu'en dimension finie (théorème de Riesz, voir l'exercice 9 page 56). L'opérateur Id_E n'est donc compact qu'en dimension finie.

ANNEXE C

Théorème des nombres premiers

Cette annexe propose une preuve du théorème des nombres premiers, qui exprime que $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers inférieurs à x, vérifie

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to +\infty \qquad \pi(x) = \operatorname{Card}\{p \text{ premier}, p \leq x\}.$$

Ce célèbre résultat, conjecturé à la fin du dix-huitième siècle, résista aux mathématiciens jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle.

La preuve que nous proposons est classique et utilise la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^s$ dans le domaine complexe. Nous utilisons une démonstration qui n'emploie pas la théorie des fonctions analytiques (qui est le cadre standard de cette preuve) et qui nous est donc accessible à partir du programme des classes préparatoires.

La preuve fait l'objet du problème 3. Elle est précédée de deux problèmes qui fournissent les ingrédients nécessaires à la démonstration : on démontre d'abord l'absence de zéro de $\zeta(s)$ sur la ligne $\Re(s) = 1$, puis on montre la formule de Perron, qui nous permet d'exploiter l'expression de $\zeta(s)$ en fonction des nombres premiers.

La dernière partie de cette annexe présente une histoire de la preuve du théorème des nombres premiers.

1. Préliminaires

Problème 1 (Propriétés de la fonction $\zeta(s)$). **1/** (La fonction $\zeta(s)$) On considère la *fonction Zêta de Riemann*, définie pour la variable complexe s par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s \in D = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1\}$$

a) Montrer que cette série est bien définie pour $s \in D$ et que $\zeta(s)$ est continue sur D. Montrer de plus que pour $s = \sigma + it \in D$ $(\sigma, t \in \mathbb{R})$, on a $|\zeta(s)| \leq \sigma/(\sigma - 1)$.
b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = s \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}}\, dx + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2}, \qquad (*)$$

où $\{x\} = x - [x]$ désigne la partie fractionnaire de x.
c) Montrer que $\zeta(s)$ est prolongeable en une fonction continue sur $\overline{D} \setminus \{1\}$, où $\overline{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) \geq 1\}$, et qu'il existe une fonction $\eta(s)$ continue sur $\overline{D}$ tout entier tel que

$$\forall s \in \overline{D} \setminus \{1\}, \quad \zeta(s) = \eta(s) + \frac{1}{s-1}.$$

d) Pour une fonction $s \mapsto f(s)$ de la variable complexe $s = \sigma + i\tau$ $(\sigma, \tau \in \mathbb{R})$, on désigne par $f'(s)$ la dérivée en $x = \sigma$ de la fonction $x \mapsto f(x + i\tau)$ (nous n'aurons pas besoin du cadre, généralement utilisé, de la dérivée par rapport à la variable complexe s de $f(s)$). Montrer que $\zeta'(s)$ existe et est continue sur $\overline{D} \setminus \{1\}$ et que la fonction $\eta'(s)$ est même définie et continue sur $\overline{D}$ tout entier.

2/ a) En désignant par p_k le k-ième nombre premier, montrer l'*identité d'Euler*

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right) \qquad \left(\text{on rappelle que } \prod_{k=1}^{\infty} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \right).$$

b) En déduire que pour tout $s \in D$, on a $\zeta(s) \neq 0$.

c) On considère la série définie pour $s \in D$ par

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^* : n = p^k \text{ avec } p \text{ premier} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

($\Lambda(n)$ s'appelle la fonction de Mangoldt). Montrer l'identité $\zeta(s)Z(s) = -\zeta'(s)$ pour tout $s \in D$.

3/ a) Montrer l'existence de $M_0 > 0$ et de $M_1 > 0$ tels que

$$\forall \sigma \in [1, 2], \forall t \in \mathbb{R}, |t| \geq 2, \qquad |\zeta(\sigma + it)| \leq M_0 \log |t|, \qquad |\zeta'(\sigma + it)| \leq M_1 \log^2 |t|$$

b) Montrer que si $p > 1$,

$$\forall s \in D, \quad s = \sigma + i\tau, \qquad \log |1 - p^{-s}| = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\tau \log p)}{np^{n\sigma}}. \tag{$**$}$$

Après avoir montré $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer ensuite l'inégalité

$$\forall \sigma > 1, \forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + i\tau)|^4 |\zeta(\sigma + 2i\tau)| \geq 1.$$

c) En déduire que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur $\overline{D} \setminus \{1\}$. Montrer ensuite l'existence de $m_0 > 0$ tel que

$$\forall \sigma \in [1, 2], \forall t \in \mathbb{R}, |t| \geq 2, \qquad |\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{m_0}{\log^7 |t|}$$

(considérer séparément les cas $\sigma \geq \sigma_t = 1 + \varepsilon / \log^9 |t|$ et $1 \leq \sigma < \sigma_t$. Pour ce dernier, utiliser 3/b) et l'inégalité $|\zeta(\sigma + it)| \geq |\zeta(\sigma_t + it)| - \int_\sigma^{\sigma_t} |\zeta'(x + it)| \, dx$).

d) Montrer que la fonction $F(s) = \zeta(s) - Z(s)$ est prolongeable en une fonction continue sur $\overline{D}$ tout entier, et qu'il existe $M_F > 0$ et $A > 0$ tels que

$$\forall \sigma, t : 1 \leq \sigma \leq 2, |t| \geq A, \qquad |F(\sigma + it)| \leq M_F \log^9 |t|.$$

Solution. **1/ a)** Pour $\sigma > 1$, notons $D_\sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \sigma\}$. Pour $s \in D_\sigma$ avec $\sigma > 1$, on a $|1/n^s| \leq 1/n^\sigma$, donc la série converge normalement sur D_σ. Ainsi, $\zeta(s)$ est bien définie et continue sur D_σ, et ceci est vrai pour tout $\sigma > 1$ donc $\zeta(s)$ est bien définie et continue sur D. L'inégalité $|\zeta(\sigma + it)| \leq \sigma / (\sigma - 1)$ s'obtient en écrivant

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\sigma} = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma - 1} = \frac{\sigma}{\sigma - 1}.$$

b) Une intégration par parties donne l'égalité, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in D$

$$s \int_n^{n+1} \frac{1/2 - x + n}{x^{s+1}} \, dx = \left[-\frac{1/2 - x + n}{x^s} \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{2(n+1)^s} + \frac{1}{2n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s}.$$

Par sommation pour n allant de N à $+\infty$ on obtient

$$s \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} \, dx = \sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n^s} + \frac{1}{2(n+1)^s} \right) - \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{2N^s} - \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$

c) L'identité précédente utilisée avec $N = 1$ donne

$$\forall s \in D, \qquad \eta(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{2} + s\int_1^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}}\,dx. \tag{***}$$

L'intégrande de la dernière intégrale est continue par rapport à s sur $\overline{D}$ et elle est majorée en valeur absolue sur $\overline{D}$ par $x \mapsto 1/(2x^2)$, intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc l'intégrale est une fonction continue de s sur $\overline{D}$ et $\eta(s)$ est bien prolongeable en une fonction continue sur $\overline{D}$, d'où le résultat.

d) Il suffit de montrer que $\eta'(s)$ existe et est continue sur $\overline{D}$. Soit $s = \sigma + it \in \overline{D}$. Dans l'intégrale de l'expression (***) de $\eta(s)$, l'intégrande $(1/2 - \{x\})/x^{\sigma+1+it}$ est continûment dérivable par rapport à σ, sa dérivée est $-(1/2 - \{x\})\log x/(x^{\sigma+1+it})$ qui est majorée en valeur absolue par $\log x/x^2$ lorsque $s = \sigma + it \in \overline{D}$. Cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$, l'hypothèse de domination est donc vérifiée. On en déduit que $\eta'(s)$ existe et est continue sur $\overline{D}$.

2/ a) On remarque déjà que pour tout k et pour tout $s \in D$, $(1 - p_k^{-s})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_k^{-ns}$.

Fixons $m, M \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $s = \sigma + it \in D$, l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers implique

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s}\right) = \sum_{0 \le i_1, \dots, i_m \le M} \frac{1}{(p_1^{i_1} \cdots p_m^{i_m})^s} = \sum_{n \in \mathcal{F}_{m,M}} \frac{1}{n^s},$$

où $\mathcal{F}_{m,M}$ désigne l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ de la forme $n = p_1^{i_1} \cdots p_m^{i_m}$ avec $0 \le i_k \le M$. Maintenant, donnons nous $N \in \mathbb{N}^*$. Soit p_{m_0} le plus grand nombre premier p_i et M_0 la plus grande des puissances i_k apparaissant dans toutes les décompositions en facteurs premiers des N premiers entiers $1, \dots, N$. Considérons $m \ge m_0$ et $M \ge M_0$. Tous les entiers compris entre 1 et N sont dans $\mathcal{F}_{m,M}$ donc

$$\left|\zeta(s) - \prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s}\right)\right| = \left|\sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \notin \mathcal{F}_{m,M}} \frac{1}{n^s}\right| \le \sum_{n > N} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Cette expression est valable pour tout $M \ge M_0$. En faisant tendre M vers $+\infty$, on en déduit

$$\left|\zeta(s) - \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}\right| = \left|\zeta(s) - \prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i_k=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s}\right)\right| \le \sum_{n > N} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Comme on peut choisir N pour rendre $\sum_{n>N} 1/n^\sigma$ arbitrairement petit pour $\sigma \ge \sigma_0 > 1$ et que l'inégalité précédente vaut pour tout $m \ge m_0$, on en déduit que le produit infini de l'identité d'Euler converge uniformément vers $\zeta(s)$ sur D_{σ_0} dès que $\sigma_0 > 1$. Ceci étant vrai pour tout $\sigma_0 > 1$ on en déduit que l'identité d'Euler vaut sur D tout entier.

b) Fixons $s = \sigma + it \in D$. Remarquons d'abord que $1 - p_k^{-s}$ est non nul pour tout k et que

$$1 - p_k^{-\sigma} \le |1 - p_k^{-s}| \le 1 + p_k^{-\sigma} \quad \text{donc} \quad \log(1 - p_k^{-\sigma}) \le \log|1 - p_k^{-s}| \le \log(1 + p_k^{-\sigma}).$$

On en déduit, lorsque $k \to \infty$, l'estimation $\log|1 - p_k^{-s}| = O(p_k^{-\sigma}) = O(k^{-\sigma})$, donc la série $\sum \log|1 - p_k^{-s}|$ converge. Si on note ℓ sa limite, ceci signifie que $\prod_{k=1}^{+\infty} 1/|1 - p_k^{-s}| = \exp(-\ell)$ est non nul. On en déduit que $\zeta(s) \ne 0$ d'après l'identité d'Euler.

c) Pour $\sigma > 1$ fixé et $s \in D_\sigma$, la majoration $|\Lambda(n)/n^s| \le \log n/n^\sigma$ montre que la série $\sum \Lambda(n)/n^s$ converge normalement sur ce domaine. On peut même écrire

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\log p_k}{(p_k^j)^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p_k^{-s}\log p_k}{1 - p_k^{-s}},$$

et cette dernière série converge normalement vers $Z(s)$ sur D_σ.

On considère maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit fini

$$P_n(s) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

dont la dérivée vérifie

$$P_n'(s) = \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right) \frac{(-p_j^{-s} \log p_j)}{(1 - p_j^{-s})^2} = -P_n(s) \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j^{-s} \log p_j}{1 - p_j^{-s}}.$$

Nous avons vu plus haut que pour $\sigma > 1$ fixé, la série $\sum_j p_j^{-s} \log p_j/(1 - p_j^{-s})$ converge normalement sur D_σ. Comme de plus $P_n(s)$ converge uniformément vers $\zeta(s)$ sur D_σ (voir 2/a)) et que $|\zeta(s)| \le \sigma/(1-\sigma)$ est bornée sur ce domaine, on en déduit que $P_n'(s)$ converge uniformément sur D_σ, donc forcément vers $\zeta'(s)$. En faisant tendre n vers l'infini dans la dernière identité on obtient

$$\zeta'(s) = -\zeta(s) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{p_j^{-s} \log p_j}{1 - p_j^{-s}} = -\zeta(s) Z(s).$$

3/a) Commençons par montrer l'estimation sur $\zeta(\sigma + it)$, pour $1 \le \sigma \le 2$ et $|t| \ge 2$. L'identité (*) entraîne

$$|\zeta(s)| \le \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{1}{n^s} \right| + |s| \int_N^{+\infty} \left| \frac{1}{2x^{s+1}} \right| dx + \left| \frac{N^{1-s}}{s-1} \right| + \left| \frac{N^{-s}}{2} \right|$$

$$\le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + |s| \int_N^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\, dx + \left| \frac{1}{s-1} \right| + \frac{1}{2} \le (1 + \log N) + \frac{|s|}{2N} + 1.$$

En choisissant $N = [|t|] + 1$, on en déduit $|\zeta(\sigma+it)| \le 2 + \log(|t|+1) + 2|t|/2N \le 4 + \log|t|$. Ainsi, on a montré $\zeta(\sigma + it) = O(\log|t|)$ uniformément pour $1 \le \sigma \le 2$ et $|t| \ge 2$, d'où la première estimation.

On s'y prend de manière similaire pour l'estimation de $\zeta'(s)$. On commence par dériver l'identité (*) (nous avions montré que nous pouvions bien dériver sous le signe intégral en 1/d)), ce qui donne, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^s} + \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} (1 - s \log x)\, dx - \frac{N^{1-s} \log N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2} + \frac{N^{-s} \log N}{2}.$$

Lorsque $s = \sigma + it$ avec $1 \le \sigma \le 2$ et $|t| \ge 2$, l'expression précédente donne la majoration

$$|\zeta'(s)| \le \sum_{n=2}^{N} \frac{\log n}{n} + \int_N^{+\infty} \frac{1 + |s| \log x}{2x^2}\, dx + \frac{\log N}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\log N}{2N}$$

$$\le \int_1^N \frac{\log x}{x}\, dx + \frac{1}{2N} + \frac{|s|}{2} \int_N^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\, dx + \log N + \frac{1}{4}.$$

Or $\int_1^N \log x/x\, dx = \frac{1}{2} \log^2 N$ et $\int_N^{+\infty} \log x/x^2\, dx = (1 + \log N)/N$, donc finalement

$$|\zeta'(s)| \le \frac{\log^2 N}{2} + \frac{1}{2N} + \frac{|s|}{2} \frac{1 + \log N}{N} + \log N + \frac{1}{2}.$$

En choisissant $N = [|t|] + 1$, on voit que ceci entraîne $|\zeta'(s)| = O(\log^2 |t|)$ uniformément pour $1 \le \sigma \le 2$.

b) La première identité est tout simplement une conséquence de la définition du logarithme complexe, mais cette notion n'est pas aux programmes des classes préparatoires. On s'en tire autrement. Fixons $\theta \in \mathbb{R}$ et considérons la série entière $f_\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n/n$, dont le rayon de convergence est $R = 1$. Sa dérivée se calcule explicitement

$$\forall x \in \,]-1, 1[, \qquad f_\theta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^{n-1} = \Re\left(\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} \right) = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}.$$

Ainsi, comme $f_\theta(0) = 0$, on a

$$f_\theta(x) = \int_0^x f_\theta'(t)\,dt = \int_0^x \frac{\cos\theta - t}{1 - 2t\cos\theta + t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\log(1 - 2x\cos\theta + x^2) = -\log|1 - xe^{i\theta}|.$$

On en déduit l'identité (**) en choisissant $x = p^{-\sigma}$ et $\theta = \tau\log p$.

Comme $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2$, la première expression est toujours positive pour $\theta \in \mathbb{R}$. Ceci entraîne, lorsque p est un nombre premier et $\sigma > 1$, que l'expression

$$3\log|1 - p^{-\sigma}| + 4\log|1 - p^{-\sigma - i\tau}| + \log|1 - p^{-\sigma-2i\tau}| = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + 4\cos(n\tau\log p) + \cos(2n\tau\log p)}{np^{n\sigma}}$$

est toujours négative, donc $|1-p^{-\sigma}|^3 \cdot |1-p^{-\sigma-i\tau}|^4 \cdot |1-p^{-\sigma-2i\tau}| \le 1$. Compte tenu de l'identité d'Euler (question 2/a)) appliquée à $\zeta(\sigma)$, $\zeta(\sigma + i\tau)$ et $\zeta(\sigma + 2i\tau)$, ceci entraîne bien le résultat attendu.

c) On a déjà démontré que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur D, donc il s'agit ici de montrer que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\Re(s) = 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\zeta(1 + i\tau) = 0$, avec $\tau \ne 0$. La dérivabilité en $\sigma = 1$ de l'application $[1, +\infty[\ \to \mathbb{C}$, $\sigma \mapsto \zeta(\sigma + i\tau)$, établi en 1/d), entraîne $\zeta(\sigma+i\tau) = O(\sigma-1)$ lorsque $\sigma \to 1^+$. Par ailleurs, $\zeta(\sigma) = O(1/(\sigma-1))$ lorsque $\sigma \to 1^+$. Comme de plus $\zeta(\sigma + 2i\tau) = O(1)$, tout ceci entraîne

$$|\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+i\tau)|^4|\zeta(\sigma+2i\tau)| = O((\sigma-1)^{-3}) \times O((\sigma-1)^4) \times O(1) = O(\sigma - 1), \qquad \sigma \to 1^+,$$

donc cette expression peut être rendue arbitrairement proche de 0, ce qui est incompatible avec l'inégalité établie à la question précédente. Donc $\zeta(1 + i\tau)$ ne s'annule jamais.

Donnons maintenant une minoration de $|\zeta(\sigma+it)|$. Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité établie à la question précédente entraîne, lorsque $\sigma_t = 1 + \varepsilon/\log^9|t| \le \sigma \le 2$ et $|t| \ge 2$

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| \le |\zeta(\sigma)|^{3/4}|\zeta(\sigma+2it)|^{1/4} \le \frac{\sigma^{3/4}(M_0\log|2t|)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}} \le \frac{2M_0^{1/4}\log^{1/4}|t|}{(\varepsilon\log^{-9}|t|)^{3/4}} = \frac{\log^7|t|}{A\varepsilon^{3/4}},$$

avec $A = 1/(2M_0^{1/4})$. Lorsque $1 \le \sigma < \sigma_t$ et $|t| \ge 2$, on écrit

$$|\zeta(\sigma+it)| \ge |\zeta(\sigma_t+it)| - \int_\sigma^{\sigma_t} |\zeta'(x+it)|\,dx \ge \frac{A\varepsilon^{3/4}}{\log^7|t|} - (\sigma_t - \sigma)M_1\log^2|t| = \frac{\varepsilon^{3/4}(A - \varepsilon^{1/4}M_1)}{\log^7|t|}.$$

En choisissant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut supposer que $m_0 = \varepsilon^{3/4}(A - \varepsilon^{1/4}M_1)$ est strictement positif. Ainsi choisi, m_0 vérifie $|\zeta(\sigma+it)| > m_0/\log^7|t|$ pour $1 \le \sigma \le 2$ et $|t| \ge 2$.

d) Il est immédiat que F, comme ζ et ζ', est prolongeable en une fonction continue sur $\overline{D}\setminus\{1\}$. Lorsque $s \in \overline{D}\setminus\{1\}$ on a, vu que $Z(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$,

$$F(s) = \eta(s) + \frac{1}{s-1} + \frac{\eta'(s) - \frac{1}{(s-1)^2}}{\eta(s) + \frac{1}{s-1}} = \eta(s) + \frac{\eta(s) + (s-1)\eta'(s)}{1 + (s-1)\eta(s)},$$

et le dernier terme converge lorsque $s \to 1$ (vers $2\eta(1)$) donc F est bien prolongeable en une fonction continue sur $\overline{D}$ tout entier.

La majoration de $|F(s)|$ est immédiate à partir des majorations démontrées précédemment pour $|\zeta(s)|$ et $|\zeta'(s)|$ et de la minoration obtenue pour $|\zeta(s)|$.

Remarque. L'expression (***) permet de définir $\zeta(s)$ pour $\Re(s) > 0$ (sauf en $s = 1$). Dans le cadre des fonctions analytiques (ce qui est le cas pour $\zeta(s)$), ce prolongement est unique. On peut même poursuivre le procédé (l'identité (***) est issue de la formule d'Euler-Maclaurin au premier ordre, que l'on peut utiliser à un ordre supérieur) pour prolonger la fonction $\zeta(s)$ sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ tout entier.

PROBLÈME 2 (FORMULE DE PERRON). **a)** En utilisant le résultat de la question c) du problème 17 page 190, montrer

$$\forall x > 0, \forall \sigma > 0, \qquad P_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\, dt = \begin{cases} 1 & (x > 1) \\ 1/2 & (x = 1) \\ 0 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

b) Montrer que

$$\forall x > 0, \forall \sigma > 0, \qquad Q_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{1+\sigma+it}}{(\sigma+it)(1+\sigma+it)}\, dt = \begin{cases} (x-1) & (x > 1) \\ 0 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

c) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes vérifiant, pour tout $\varepsilon > 0$, $a_n = O(n^\varepsilon)$. On considère la fonction $G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n/n^s$ de la variable complexe s (*série de Dirichlet*). Montrer que G est définie et continue sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$ et que

$$\forall \sigma > 1, \qquad \int_0^x \varphi(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{1+\sigma+it} G(\sigma+it)}{(\sigma+it)(1+\sigma+it)}\, dt, \qquad \text{où} \quad \varphi(y) = \sum_{1 \leq n \leq y} a_n.$$

Solution. **a)** En coupant l'intégrale en deux pour se ramener sur l'intervalle $[0, T]$, on trouve

$$\int_{-T}^{T} \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\, dt = \int_0^T \left(\frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it} + \frac{x^{\sigma-it}}{\sigma-it} \right) dt = x^\sigma \int_0^T \frac{2\sigma \cos(t \log x) + 2t \sin(t \log x)}{\sigma^2 + t^2}\, dt$$
$$= 2x^\sigma \left(\int_0^{\sigma T} \frac{\cos(\sigma u \log x)}{1+u^2}\, du + \int_0^{\sigma T} \frac{u \sin(\sigma u \log x)}{1+u^2}\, du \right)$$

où on a effectué le changement de variable $t = \sigma u$. Lorsque $T \to +\infty$, les deux dernières intégrales convergent respectivement vers les intégrales $C(\sigma \log x)$ et $S(\sigma \log x)$ de la question c) du problème 17 page 190. On en déduit que $P_\sigma(x)$ existe bien et que

$$P_\sigma(x) = \frac{x^\sigma}{\pi} (C(\sigma \log x) + S(\sigma \log x)).$$

Les valeurs de $C(v)$ et $S(v)$ sont connues avec la question c) du problème 17 page 190. Elles entraînent $C(v) + S(v) = \pi e^{-v}$ si $v > 0$, $C(0) + S(0) = \pi/2$ et $C(v) + S(v) = 0$ si $v < 0$. On en déduit que si $x > 1$ alors $\sigma \log x > 0$ donc $P_\sigma(x) = \frac{x^\sigma}{\pi}(\pi e^{-\sigma \log x}) = 1$, si $x = 1$, $P_\sigma(x) = \frac{1}{\pi}(\pi/2) = 1/2$, et si $0 < x < 1$ alors $P_\sigma(x) = 0$.

b) L'idée est de montrer que $Q'_\sigma(x) = P_\sigma(x)$. L'hypothèse de domination n'étant pas vérifiée pour l'intégrande dérivée, on procède autrement. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \frac{x^{1+\sigma+it}}{(1+\sigma+it)(\sigma+it)}\, dt.$$

L'intégrande est continûment dérivable par rapport à x donc $f_n(x)$ est dérivable et

$$f'_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it}\, dt.$$

On intègre par parties en supposant $x > 0$ et $x \neq 1$ ce qui donne

$$f'_n(x) = \frac{x^\sigma}{2i\pi \log x} \left(\frac{x^{in}}{\sigma+in} - \frac{x^{-in}}{\sigma-in} + \int_{-n}^{n} \frac{ix^{it}}{(\sigma+it)^2}\, dt \right).$$

Comme $P_\sigma(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ on en déduit $P_\sigma(x) = \frac{x^\sigma}{2i\pi \log x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ix^{it}}{(\sigma+it)^2}\, dt$, et donc

$$|f'_n(x) - P_\sigma(x)| \leq \left| \frac{x^\sigma}{2\pi \log x} \right| \left(\frac{2}{n} + \int_{-\infty}^{-n} \frac{1}{t^2}\, dt + \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt \right) = \frac{2x^\sigma}{\pi n |\log x|}.$$

Cette inégalité entraîne la convergence uniforme de (f'_n) vers P_σ sur tout segment de la forme $[a, b]$ avec $0 < a < b < 1$ ou $1 < a < b$. On en déduit que Q_σ, limite simple de (f_n), est dérivable sur tout segment de cette forme, donc sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et que $Q'_\sigma = P_\sigma$ sur cet intervalle.

Maintenant on a $Q_\sigma(x) = O(x^{1+\sigma})$ donc $\lim_{x\to 0, x>0} Q_\sigma(x) = 0$ et comme $Q'_\sigma(x) = P_\sigma(x) = 0$ pour $0 < x < 1$, on en déduit $Q_\sigma(x) = 0$ pour $0 < x < 1$. Comme Q_σ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (son intégrande est continue et majorée en valeur absolue par une fonction intégrable lorsque x est dans tout segment inclus dans $]0, +\infty[$), on a aussi $Q_\sigma(1) = 0$. Comme de plus $Q'_\sigma(x) = P_\sigma(x) = 1$ pour $x > 1$, le théorème des accroissements finis entraîne $Q_\sigma(x) = x - 1$ pour $x > 1$.

c) Soit $\delta > 0$. Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M n^{\delta/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc pour tout $s \in D_{1+\delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq 1 + \delta\}$ on a $|a_n/n^s| \leq M/n^{1+\delta/2}$. Ainsi, la série de fonctions $\sum a_n/n^s$ converge normalement sur $D_{1+\delta}$, elle est donc continue (et bornée) sur ce domaine. Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$ on en déduit que $G(s)$ est bien définie et continue sur D.

Montrons la formule de Perron. Soit $\sigma > 1$. Comme $\sum a_n/n^s$ converge normalement sur D_σ, en particulier sur $\Re(s) = \sigma$, on peut inverser les signes de sommation ce qui donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{1+\sigma+it}G(\sigma+it)}{(\sigma+it)(1+\sigma+it)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{1+\sigma+it}a_n/n^{\sigma+it}}{(\sigma+it)(1+\sigma+it)}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n Q_\sigma\left(\frac{x}{n}\right).$$

Compte tenu de la valeur de $Q_\sigma(x)$ obtenue à la question précédente, ceci entraîne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{1+\sigma+it}G(\sigma+it)}{(\sigma+it)(1+\sigma+it)}\,dt = \sum_{1\leq n\leq x}(x-n)a_n. \tag{$*$}$$

Par ailleurs, pour $0 \leq y \leq x$ on peut écrire $\varphi(y) = \sum_{1\leq n\leq x} a_n\,\chi_n(y)$ où $\chi_n(y) = 0$ si $y < n$, $\chi_n(y) = 1$ pour $y \geq n$. Ceci montre que

$$\int_0^x \varphi(y)\,dy = \sum_{1\leq n\leq x}\int_0^x a_n\chi_n(y)\,dy = \sum_{1\leq n\leq x}\int_n^x a_n\,dy = \sum_{1\leq n\leq x}(x-n)a_n.$$

Grâce à l'égalité (*) on en déduit la formule de Perron.

2. Preuve du Théorème des nombres premiers

Nous sommes maintenant armés pour démontrer le théorème des nombres premiers. Dans le problème ci-dessous, on utilisera les résultats établis dans les deux problèmes précédents.

Problème 3 (Théorème des nombres premiers). **1/a)** On considère la fonction $F(s) = Z(s) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\Lambda(n) - 1)/n^s$, que nous avons définie dans le problème 1 page 437. Nous avons vu que F, définie et continue sur D, est prolongeable en une fonction continue sur $\overline{D}$ tout entier. Montrer l'identité

$$\forall x > 1, \qquad \int_0^x (\psi(y) - [y])\,dy = \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(1+it)x^{it}}{(1+it)(2+it)}\,dt, \quad \text{où} \quad \psi(y) = \sum_{1\leq n\leq y}\Lambda(n).$$

b) En déduire $\int_0^x \psi(y) \sim x^2/2$ lorsque $x \to \infty$.
c) Montrer que $\psi(x) \sim x$ lorsque $x \to \infty$.
2/a) Pour alléger les notations, lorsque la lettre p apparaîtra dans un indice ceci signifiera forcément que p est un nombre premier. Montrer que

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p,$$

puis montrer que $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$ (nombre de nombres premiers inférieurs à x) vérifie $\psi(x) \leq \pi(x)\log x \leq 2\psi(x)$.
b) Démontrer que $\pi(x) = \psi(x)/\log x + O(x/\log^2 x)$. En déduire le théorème des nombres premiers : $\pi(x) \sim x/\log x$.

Solution. **1/a)** Nous sommes dans les hypothèses de la formule de Perron établie au problème précédent, on en déduit que pour tout $\sigma > 1$ on a

$$\int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy = \int_0^x \sum_{1\le n\le y} (\Lambda(n) - 1)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\sigma+it)x^{1+\sigma+it}}{(\sigma+it)(1+\sigma+it)}\, dt. \qquad (*)$$

La borne sur $|F(\sigma+it)|$ pour $|t|$ suffisamment grand, établie à la fin du problème 1, entraîne qu'il existe $M > 0$ tel que $|F(\sigma+it) \le M \log^9(2+|t|)$ pour $1 \le \sigma \le 2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $x > 1$ on a

$$\forall \sigma \in [1,2], \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{F(\sigma+it)x^{1+\sigma+it}}{(\sigma+it)(1+\sigma+it)} \right| \le \frac{M \log^9(2+|t|)x^3}{1+t^2}.$$

La dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}$, l'hypothèse de domination est bien vérifiée donc l'intégrale de droite dans (*) est bien une fonction continue de $\sigma \in [1,2]$, en particulier en $\sigma = 1$. L'égalité (*) a donc lieu également lorsque $\sigma = 1$, d'où le résultat.

b) Posons $G(t) = F(1+it) \times (1+it)^{-1} \times (2+it)^{-1}$, fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. La formule établie à la question précédente s'écrit

$$\int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy = x^2 \mathcal{F}_G(\log x), \qquad \mathcal{F}_G(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\alpha t}\, dt.$$

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue (voir l'exercice 6 page 157), on a $\lim_{\alpha\to+\infty} \mathcal{F}_G(\alpha) = 0$, donc ceci entraîne $\int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy = o(x^2)$. Comme $y - 1 < [y] \le y$ on a $\int_0^x (y-1)\, dy \le \int_0^x [y]\, dy \le \int_0^x y\, dy$ d'où on déduit $\int_0^x [y]\, dy = x^2/2 + o(x^2)$, et finalement $\int_0^x \psi(y)\, dy = \int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy + \int_0^x [y]\, dy = x^2/2 + o(x^2)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1/2$). De ce qui précède, on déduit, la fonction ψ étant croissante

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^2(1-\varepsilon)^2}{2} + o(x^2) \le \int_{x(1-\varepsilon)}^x \psi(y)\, dy \le \varepsilon x \psi(x) \le \int_x^{x(1+\varepsilon)} \psi(y)\, dy \le \frac{x^2(1+\varepsilon)^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

d'où, en divisant par εx on tire $(1-\varepsilon/2)x + o(x) \le \psi(x) \le (1+\varepsilon/2)x + o(x)$. Comme on peut avoir les petits $o(x)$ plus petits que $\frac{\varepsilon}{2}x$ en valeur absolue pour x suffisamment grand, ceci entraîne $(1-\varepsilon)x \le \psi(x) \le (1+\varepsilon)x$ pour x assez grand.

2/a) On peut écrire

$$\psi(x) = \sum_{p \le x} \left(\sum_{k\ge1, p^k \le x} \log p \right),$$

et comme le nombre d'entiers $k \ge 1$ tels que $p^k \le x$ est égal à $[\log x/\log p]$, on en déduit la formule voulue pour $\psi(x)$.

Pour tout nombre réel $u \ge 1$, l'inégalité $[u] \le u < [u] + 1 \le 2[u]$ entraîne $[\log x/\log p] \log p \le \log x \le 2[\log x/\log p]$ donc $\psi(x) \le \pi(x) \log x \le 2\psi(x)$.

b) On a déjà montré $0 \le \pi(x)\log x - \psi(x)$, majorons maintenant cette quantité. On a

$$\pi(x)\log x - \psi(x) = \sum_{p\le x} \left(\log x - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \right) = \sum_{p \le \sqrt{x}} \left(\log x - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \right) + \sum_{\sqrt{x} < p \le x} \log\left(\frac{x}{p}\right)$$

car lorsque $\sqrt{x} < p \le x$ on a $1 \le \log x/\log p < 2$ donc $[\log x/\log p] = 1$. Maintenant l'inégalité $\left[\frac{\log x}{\log p}\right] \ge \frac{\log x}{\log p} - 1$ et le fait que $\pi(n) - \pi(n-1) = 1$ si n est premier, $= 0$ sinon, entraîne

$$\pi(x)\log x - \psi(x) \le \sum_{p \le \sqrt{x}} \log p + \sum_{\sqrt{x} < n \le x} (\pi(n) - \pi(n-1)) \log\left(\frac{x}{n}\right),$$

et grâce à une transformation d'Abel sur la dernière somme, on obtient

$$\pi(x)\log x - \psi(x) \le \sqrt{x}\log\sqrt{x} + \sum_{\sqrt{x} < n \le x-1} \pi(n) \left(\log\frac{x}{n} - \log\frac{x}{n+1} \right) + \pi(x) \log\frac{x}{[x]}.$$

Pour $x \geq 1$ on a $\log(x/[x]) < \log(2)$, et on sait que $\pi(x) \leq 2\psi(x)/\log(x) = O(x/\log x)$. Par ailleurs $\log\frac{x}{n} - \log\frac{x}{n+1} = \log\frac{n+1}{n} = \int_n^{n+1} dt/t$, donc tout ceci entraîne

$$\pi(x)\log x - \psi(x) \leq \sum_{\sqrt{x}<n\leq x-1} \pi(n)\int_n^{n+1}\frac{dt}{t} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \leq \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Comme $\pi(x) = O(x/\log x)$, on a $\int_1^x \pi(t)/t\,dt = O(\int_1^x dt/\log t) = O(x/\log x)$ (voir le théorème 3 page 163), donc on a finalement démontré $0 \leq \pi(x)\log x - \psi(x) \leq O(x/\log x)$. Ainsi, on a bien $\pi(x) = \psi(x)/\log(x) + O(x/\log^2 x)$. On en déduit facilement le théorème des nombres premiers car $\psi(x) = x + o(x)$ donc $\pi(x) = x/\log x + o(x/\log x)$.

3. Histoire du Théorème des nombres premiers

L'histoire du théorème des nombres premiers est exemplaire, à bien des égards, du développement des mathématiques.

Les premières considérations relatives à l'ensemble des nombres premiers se trouvent dans les livres d'arithmétique d'Euclide, où il est montré qu'il y a une infinité de nombres premiers. Il faut attendre vingt et un siècle pour qu'un nouveau résultat tangible sur ce sujet apparaisse : en 1737, Euler découvre le développement de la fonction zêta (aux nombres entiers) en produit infini faisant intervenir les nombres premiers, et il en déduit que la somme des inverses des nombres premiers diverge :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = +\infty.$$

Ceci entraîne que l'ensemble des nombres premiers est infini (voir également le problème 22 page 302). Euler venait ainsi de démarrer la théorie analytique des nombres. Il remarque également que les nombres premiers sont infiniment moins nombreux que les entiers, ce qu'on exprime sous la forme $\pi(x) = o(x)$. En 1808, Legendre observe empiriquement l'estimation plus précise

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

puis Gauss, à la même époque, à partir de données statistiques, remarque que l'approximation

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x), \qquad \mathrm{Li}(x) = \int_1^x \frac{dt}{\log t}$$

est meilleure. L'approximation de Gauss n'est pas incompatible avec l'estimation de Legendre, et est effectivement plus précise : par exemple, pour $x = 10^{10}$ on sait que $\pi(x) = 455\,052\,511$, et $x/\log(x) \simeq 455\,743\,003$ et $\mathrm{Li}(x) \simeq 455\,055\,613$.

Jusque là, les estimations proposées restent empiriques. En 1852, Tchébychev démontre que si $\pi(x)/(x/\log(x))$ converge alors sa limite est forcément 1. Il n'obtient donc pas l'équivalent $\pi(x) \sim x/\log x$ mais il démontre que pour x suffisamment grand, on a

$$0,921\frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1,105\frac{x}{\log x}.$$

Une nouvelle étape est franchie en 1859, lorsque Riemann a l'idée géniale de s'intéresser à la fonction $\zeta(s)$ dans le domaine complexe. Il ne parvient pas à démontrer le théorème des nombres premiers mais remarque que la distribution des nombres premiers est étroitement liée aux zéros de $\zeta(s)$ et conjecture l'*hypothèse de Riemann*, qui exprime que les seuls zéros de $\zeta(s)$ dans la bande $0 \leq \Re(s) \leq 1$ sont sur la droite $\Re(s) = 1/2$ (pour rappel, on peut prolonger $\zeta(s)$ au delà de $\Re(s) > 1$, en utilisant par exemple la formule (***) de la solution du problème 1). Cette conjecture n'est toujours pas démontrée ou infirmée et reste aujourd'hui un des problèmes ouverts les plus célèbres des mathématiques. On sait depuis 1901 que si cette hypothèse est vraie, alors l'approximation de $\pi(x)$ par $\mathrm{Li}(x)$ est très précise et vérifie

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{1/2}\log x).$$

Ainsi, l'hypothèse de Riemann est reliée à la régularité de la répartition des nombres premiers.

Dans la continuité des travaux de Riemann, en 1896, Hadamard et La Vallée-Poussin démontrent indépendamment et presque en même temps le théorème des nombres premiers. Leur preuve (de même nature que celle proposée dans cette annexe) repose essentiellement sur la démonstration que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur la droite $\Re(s) = 1$. Cette preuve du théorème des nombres premiers accélère le développement de la *théorie analytique des nombres* dont elle est issue. On a longtemps pensé que le théorème des nombres premiers était profondément lié aux méthodes de l'analyse complexe et qu'il était impossible de le démontrer en dehors de ce cadre. Ces considérations furent rendues caduques lorsqu'en 1949, Erdös et Selberg produisirent la première preuve élémentaire (au sens ou elle n'utilise pas la théorie de l'analyse complexe) du théorème des nombres premiers. Bien qu'élémentaire, la preuve est très difficile. Pour ses travaux, Selberg a obtenu la médaille Fields en 1950 (la médaille Fields a été crée en 1936 après une proposition d'un mathématicien canadien John Fields, pour pallier l'absence de prix Nobel de mathématiques ; elle est décernée tous les quatre ans. Depuis 2003, le prix Abel récompense également les mathématiciens et est décerné annuellement).

L'hypothèse de Riemann. L'hypothèse de Riemann, qui exprime que les seuls zéros de $\zeta(s)$ de la bande $0 \leq \Re(s) \leq 1$ sont sur la droite $\Re(s) = 1/2$ a fait l'objet de nombreuses études. La première avancée fut celle obtenue par Hadamard et La Vallée-Poussin, qui montrèrent que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur $\Re(s) = 1$. En 1900, Hilbert inclut l'hypothèse de Riemann dans sa célèbre liste de 23 problèmes non résolus. En 1914, Hardy montra qu'il y a une infinité de zéros de $\zeta(s)$ sur la *droite critique* $\Re(s) = 1/2$. Selberg prouva en 1932 qu'il y a une proportion non nulle de zéros sur la droite critique. Le meilleur résultat est celui de Conrey qui en 1989 prouva qu'au moins 40,219% des zéros sont sur la droite critique.

De très nombreux mathématiciens, et même parfois les plus éminents d'entre eux, ont proposé une preuve de l'hypothèse de Riemann. Jusqu'à présent (2019), toutes se sont avérées fausses, ou pas dignes d'intérêt pour être étudiées par la communauté des mathématiciens. En 2000, le Clay Mathematics Institute proposa un million de dollars pour qui démontrerait ou infirmerait l'hypothèse de Riemann.

On a également cherché à calculer numériquement les zéros de $\zeta(s)$ pour vérifier qu'ils sont bien sur la droite critique. On sait aujourd'hui que les 10^{13} premiers zéros sont bien sur la droite critique, mais ceci n'apporte rien à la preuve. Il suffirait d'en trouver un en dehors de cette droite pour démontrer qu'elle est fausse !

Index des notations

Les numéros en fin de ligne indiquent les pages où apparaissent les notations correspondantes.

Index

Cette troisième édition rassemble dans un même volume des rappels de cours complets, des compléments de cours, ainsi que 308 exercices et problèmes corrigés, classiques ou originaux, le tout portant sur le programme d'analyse de mathématiques spéciales MP*. Il complète le tome *Algèbre* de la même collection.

L'accent est porté sur la relation cours-exercice, indispensable pour parvenir à une compréhension globale des concepts. Tous les thèmes classiques sont présentés, expliqués, exploités et fournissent ainsi un bagage mathématique solide pour affronter les concours scientifiques. Tout au long de l'ouvrage, de multiples remarques et renvois ponctuent les résultats et permettent à l'étudiant de trouver des points de repère.

Cette nouvelle édition contient des exercices et problèmes supplémentaires dans l'esprit de l'édition précédente.

C'est l'outil idéal de l'élève des classes préparatoires scientifiques pour la révision des concours.

Il pourra également intéresser les candidats à l'agrégation.

www.editions-ellipses.fr

9 782340 038561

Illustration de couverture : *L'École d'Athènes*, Raphaël, Vatican