

Équations Algébriques

Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Etienne pour les exercices 9.25 et 9.26

Exercices.

Exercice 10.17	2
Exercice 10.18	2

Exercice 10.17 [◆◆◆]

1. Calculer les racines carrées du nombre $-8i$.

On donnera ces nombres sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

Notons δ une racine de $-8i$:

$$\delta = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2 - 2i$$

2. Le discriminant Δ vaut $-8i$. Ses racines carrées sont donc $2 - 2i$ et $-2 + 2i$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{3 - i, 1 + i\}$.

□

Exercice 10.18 [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$. Calcul de

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z \quad \text{et} \quad \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z$$

On a :

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Et :

$$\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

□