Chapitre 32

Matrices et applications linéaires

Exercise 1: ♦◊◊

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.

1. Comparer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ puis donner leurs dimensions.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Preuve :

$\boxed{1}$ On sait que $u \neq 0$ donc $\text{rg}(u) \geq 1$
D'autres part, on a : $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ $(u^2 = 0)$
Ainsi on obtient : $\text{rg}(u) \leq \dim \text{Ker}(u)$
D'après le théorème du rang, on obtient : $\text{rg}(u) \leq \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(u)$

$2\text{rg}(u) \leq 3$
$\text{rg}(u) \leq \frac{3}{2}$
Ainsi on a $1 \leq \text{rg}(u) \leq \frac{3}{2}$ et $\text{rg}(u) \in \mathbb{N}$
On en deduis que $\text{rg}(u) = 1$ et avec le théorème du rang que : $\dim \text{Ker}(u) = 2$

$\boxed{2}$ On note (e_1) une base de $\text{Im}(u)$
On l'a complete en (e_1, e_2) afin d'obtenir une base de $\text{Ker}(u)$ ($e_1 \in \text{Ker}(u)$ car $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$)
Posons e_3 tq $e_1 = u(e_3)$ $(e_1 \in \text{Im}(u))$
Montrons que (e_1, e_2, e_3) une famille libre de $\mathbb{R}^3$:

Soit $(\lambda, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$
Supposons $\lambda e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$
$u(\lambda e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = 0$
$\lambda u(e_1) + \beta u(e_2) + \gamma u(e_3) = 0$
$\gamma e_1 = 0$ or $e_1 \neq 0$ donc $\gamma = 0$

Ainsi on a : $\lambda e_1 + \beta e_2 = 0$ or il s'agit d'une base de $\text{Ker}(u)$
En particulier d'une famille libre de $\text{Ker}(u)$ donc aussi d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$

On en deduis que : $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$

$$\begin{cases} (e_1, e_2, e_3) \ \textit{est une famille libre de } \mathbb{R}^3 \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{cases}$$

Par caractérisation des bases en dimensions finis :
(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Ainsi pour finir : $Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \end{array}$