Polynômes
Corrigé

DARVOUX Théo

Mars 2023

Exercices.

Exercice 21.1 [♦♦◊]

On note $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in I, \ \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)).$$

2. Montrer qu'un tel polynôme P_n est unique.
3. Donner pour tout entier n le degré et le coefficient dominant de P_n.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, les coefficients de P_n sont des entiers.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note l'énoncé H_n. Montrons le par récurrence.
C'est vrai pour $n = 0$: $\forall x \in I, \ \tan(x) = X(\tan(x))$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n.
On a $\tan^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2(x))P_n'(\tan(x))$ donc $P_{n+1} = (1 + X^2)P_n'$
Alors H_{n+1} est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}, H_n$ par récurrence.

2. Supposons qu'il en existe un autre, Q_n, on a $\forall x \in I, P_n(\tan x) - Q_n(\tan x) = 0$: rigidité des polynômes.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note H_n: «$\deg(P_n) = n + 1$, $\mathrm{cd}(P_n) = n!$».
C'est vrai pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n.
On a $P_{n+1} = (1 + X^2)P_n'$ donc $\deg(P_{n+1})$ $=\deg(P_n) - 1 + 2 = n + 1$ car $\deg(P_n) \geq 0$.
On a $\mathrm{cd}(P_{n+1})$ $=\mathrm{cd}(P_n')$$=(n + 1)\cdot\mathrm{cd}(P_n) = (n + 1)!$
Alors H_{n+1} est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}, H_n$ par récurrence.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note l'énoncé H_n.
C'est vrai pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n. On note $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les coefficients de P_n, entiers.
On a $P_{n+1} = (1 + X^2)P_n' = (1 + X^2)\sum_{k=0}^{n}(k + 1)\alpha_{k+1}X^k = \sum_{k=0}^{n}(k + 1)\alpha_{k+1}X^k + \sum_{k=2}^{n+2}(k - 1)\alpha_{k-1}X^k$.
Les coefficients de P_{n+1} sont donc des sommes et produits d'entiers, donc sont des entiers.
Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \ H_n$ est vrai.

Exercice 21.3 [♦♦◊]

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $4P = (P')^2$.

Soit P un tel polynôme on suppose P non constant.
On a $\deg(P) = 2 \cdot (\deg(P) - 1)$ donc $\deg(P) = 2\deg(P) - 2$ donc $\deg(P) = 2$.
Alors $\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \mid P = aX^2 + bX + c$.
Donc $4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$ donc $4a^2 = 4a$, $ab = b$ et $b^2 = 4c$.
Alors $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$ et $c = \frac{b^2}{4}$.
Les solutions sont donc dans $\{0\} \cup \{X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \mid b \in \mathbb{R}\}$.