

Chapitre 5

Stratégies Algorithmiques

Sommaire.

1	Stratégies.	1
2	Exemples.	1

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Stratégies.

Définition 1: Force brute.

idée: Explorer tous les candidats possibles.
contraintes: Univers dénombrable, on sait tester si une entrée est solution.

Définition 2: Backtracking.

idée: Construire une solution pas à pas et revenir sur le dernier choix en cas d'impasse.

Définition 3: Algorithmes gloutons.

idée: Parier sur les maxima locaux.
contraintes: La solution n'est pas toujours optimale.

Définition 4: Programmation dynamique.

Cette méthode est envisageable si :

- Sous-problèmes optimaux**: La solution pour une entrée donnée s'exprime en fonction des solutions pour des entrées strictement plus petites.
- Chevauchement de sous-problèmes**: La solution naïve mène à calculer plusieurs fois les mêmes solutions.

Approche de bas en haut: Calculer les résultats dans l'ordre pour avoir les solutions quand on en a besoin. On peut les garder en mémoire (tableau...)

Mémoïsation: On crée une structure stockant les solutions. Au moment du calcul, on vérifie si la solution a déjà été calculée, sinon on la rajoute.

2 Exemples.

Exemple 5: Rendu de monnaie.

Problème: On dispose d'un nombre illimité de pièces de valeurs $n_1 > n_2 > \dots > n_k$. Comment arriver à une certaine somme S avec le moins de pièces ?

L'algorithme glouton naturel consiste à puiser dans les pièces par ordre décroissant de valeurs sans dépasser S .

Exemple 6: Placement d'activités.

Problème: attribuer des salles pour le plus de cours possibles.
Théorème: Le choix du cours terminant le plus tôt est optimal.

Solution :

Supposons que ce choix mène à la liste de cours (c_1, \dots, c_n) . Montrons par l'absurde qu'on ne peut pas avoir de suite plus longue par récurrence descendante sur la longueur du plus long préfixe commun.

Cas de base: (d_1, \dots, d_n, \dots) avec $d_i = c_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
On peut alors construire $(c_1, \dots, c_n, c_{n+1})$, car d_{n+1} est plaçable : contradiction.

Hérédité: Pour $k < n$, il ne peut pas exister une suite de cours plaçable de longueur $n + 1$ ayant un préfixe commun de longueur au moins $k + 1$ avec (c_1, \dots, c_n) .
Supposons qu'il existe une suite de cours plaçables $(c_1, \dots, c_k, d_{k+1}, \dots, d_{n+1})$, c_{k+1} est plaçable entre c_k et d_{k+1} , ce qui est absurde.

Exemple 7: Distance de Levenshtein

C'est une distance sur l'ensemble des mots d'un dictionnaire. Elle représente le nombre minimal d'opérations élémentaires pour passer d'un mot à un autre : substitution, délétion et insertion.
Soient deux mots u et v . On note $d[i, j]$ la distance de Levenshtein entre le préfixe de longueur i de u et le préfixe de longueur j de v .
On a :

$$d[i, j] = \min \begin{cases} d[i, j - 1] + 1 \\ d[i - 1, j] + 1 \\ d[i - 1, j - 1] + \delta_{u[i] \neq v[j]} \end{cases}$$

De plus, $d[0, j] = j$ et $d[i, 0] = i$.

Complexité de l'algorithme naïf:

$T(m, n) = \alpha + T(m - 1, n) + T(m, n - 1) + T(m - 1, n - 1).$

En simplifiant: $T(m, n) \geq \alpha + 3T(m - 1, n - 1).$

On pose $U(n) = T(n, n) \geq \alpha + 3U(n - 1)$ donc $U(n) \geq \alpha n + 3^n U(0) = \Omega(3^n).$

Complexité de l'algorithme dynamique:

On fait un nombre constant d'opérations pour chaque axe du tableau donc une complexité en $O(mn).$

Exemple 8: Typographie

Hypothèses: Police de longueur fixe, un seul espace entre deux mots.
Entrée: Une suite de n mots de longueurs $l_1, ..., l_n$ et la largeur M de la ligne tels que $\forall i, l_i \leq M$.
Contraintes:

- Aucune ligne ne dépasse : si une ligne contient les mots i à j , on a : $\sum_{k=i}^j l_k - i + j \leq M$
- L'espacement est harmonieux sur l'ensemble des lignes : on minimise la somme cubes des espaces finaux sur chaque ligne, sauf la dernière.

Montrons que la propriété de sous-problèmes optimaux est vérifiée.
Soit une solution optimale sur h lignes, alors la composition est optimale sur les $h - 1$ premières lignes.
Notons $\mathcal{E}(i)$ la somme des cubes des espaces finaux de lignes, sauf la dernière à partir du mot i jusqu'au dernier, en supposant que le mot i est en début de ligne.
© Si on peut écrire tous les mots restants sur une seule ligne, il suffit de le faire :

$$E(i) = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{k=i}^n l_k + n - i \leq M$$

© Sinon, il faut trouver j tel que :

$$E(i) = \min\{(M - (\sum_{k=i}^j l_k + j - i))^3 + E(j + 1) \mid j \in \llbracket 1, n \rrbracket \wedge \sum_{k=i}^j l_k + j - i \leq M\}.$$