

Sommes et Produits

Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Crédits: Étienne pour avoir aidé sur le 1.14 et 1.15

Exercices.

Exercice 1.1	2
Exercice 1.2	3
Exercice 1.3	3
Exercice 1.4	3
Exercice 1.5	4
Exercice 1.6	4
Exercice 1.7	5
Exercice 1.8	5
Exercice 1.9	6
Exercice 1.10	7
Exercice 1.11	7
Exercice 1.12	8
Exercice 1.13	8
Exercice 1.14	9
Exercice 1.15	11

Exercice 1.1 [◆◆◆]

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons \mathcal{P}_n cette proposition.

Montrons que \mathcal{P}_n est vraie pour tout n .

Initialisation.

Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = \frac{(-1)^1(2 \cdot 1 + 1) - 1}{4} = -1$$

\mathcal{P}_1 est donc vérifiée.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \frac{(-1)^n(2n+1) - 1 + 4(-1)^{n+1}(n+1)}{4} \\ &= \frac{(-1)^n(-2n-3) - 1}{4} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3) - 1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1) - 1}{4} \end{aligned}$$

Ce qui est exactement \mathcal{P}_{n+1} .

Conclusion.

Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Exercice 1.2 [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n k(k+1), \quad \sum_{k=n}^{2n} e^{-k}, \quad \sum_{k=0}^{2n} |k-n|.$$

- $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- $\sum_{k=n}^{2n} e^{-k} = \sum_{k=0}^n e^{-k-n} = e^{-n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e}\right)^k = e^{-n} \cdot \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} = \frac{e^{-n}-e^{-2n-1}}{1-e^{-1}}$
- $\sum_{k=0}^{2n} |k-n| = \sum_{k=0}^n (-k+n) + \sum_{k=0}^n (k+n-n) = -\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

Exercice 1.3 [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=-n}^n (k+2), \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

- $\sum_{k=-n}^n (k+2) = \sum_{k=0}^{2n} (k-n+2) = 2(2n+1) = 4n+2$
- $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^n (-1)^{2k} 4k^2 + \sum_{k=1}^n (-1)^{2k-1} (4k^2 - 4k + 1) = n(2n+1)$

Exercice 1.4 *Téléscopages* [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}, \quad \sum_{k=0}^n k \cdot k!.$$

- $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$
- $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$
- $\sum_{k=0}^n k \cdot k! = \sum_{k=0}^n (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$

Exercice 1.5 [◆◆◆]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}), \quad \sum_{k=1}^n (u_{2k+1} - u_{2k-1}).$$

$$\bullet \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2(k+1)} - u_{2(k)}) = u_{2n} - u_0$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n (u_{2k+1} - u_{2k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+1})$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+2}) + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k} - u_{2k+1}) \\ &= u_{2n+1} - u_{2n} - u_{2n-1} + u_0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n (u_{2k+1} - u_{2k-1}) = u_{2n+1} - u_{2n-1}$$

Exercice 1.6 [◆◆◆]

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n kq^{k-1}$.

Que vaut-elle si $q = 1$? Désormais, on supposera $q \neq 1$.

Pour $q = 1$, $S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Soit la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. En la voyant comme la dérivée d'une autre que l'on calculera, calculer S_n .

On remarque que $\sum_{k=1}^n kq^{k-1}$ est la dérivée de $\sum_{k=1}^n q^k$ à une constante près.

Or :

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}$$

Et sa dérivée est :

$$\frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

On en déduit que $S_n = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$.

Exercice 1.7 [◆◆◆]

$0,999\dots = 1$. Expliquer.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$0,999\dots = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9 - \frac{9}{10^n}}{9}.$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9 - \frac{9}{10^n}}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

□

Exercice 1.8 [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : x \mapsto x^n$. On se donne un entier naturel p et un réel x .

Exprimer le nombre $f_n^{(p)}(x)$ à l'aide de factorielles.

- Lorsque $p \leq n$: $\frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$
- Lorsque $p > n$: 0

Exercice 1.9 [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide d'un télescopage, démontrer l'identité :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

On a :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} \stackrel{\text{Pascal}}{=} \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

□

2. Grâce au cas $p = 1$, retrouver l'expression connue de $\sum_{k=1}^n k$.

On a :

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

On retrouve donc bien :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

3. Grâce au cas $p = 2$, retrouver l'expression connue de $\sum_{k=1}^n k^2$.

On a :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^n \frac{k!}{2(k-2)!} = \sum_{k=2}^n \frac{k^2 - k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k$$

Et :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{6(n-2)!} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

On en déduit donc que (*on isole $\sum_{k=2}^n k^2$ du premier résultat.*):

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k^2 &= 2 \left(\frac{n(n+1)(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2n(n+1)(n-1) + 3n(n+1) - 6}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6}{6} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=2}^n k^2 + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

□

Exercice 1.10 [◆◆◇]

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \text{ch}(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ch}(kx)$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \text{ch}(kx) &= \sum_{k=0}^n \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n (e^x)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e^x} \right)^k \right) \\ &= \frac{1 - e^{(n+1)x}}{2 - 2e^x} + \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{2 - 2e^{-x}} \end{aligned}$$

La factorisation est laissée au lecteur ♡♡♡.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ch}(kx) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^x)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-x})^k \\ &\stackrel{\text{Newton}}{=} \frac{1}{2} ((1 + e^x)^n + (1 + e^{-x})^n) \end{aligned}$$

Exercice 1.11 [◆◆◇]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i} &= \sum_{j=0}^n 2^{-j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \\ &= \sum_{j=0}^n 2^{-j} \cdot 2^j \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Exercice 1.12 [◆◆◇]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |i - j| \\ &\stackrel{\text{Chasles}}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j |i - j| + \sum_{i=j+1}^n |i - j| \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j+1}^n (i - j) - \sum_{i=1}^j (i - j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i + \sum_{j=1}^n j^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} i = \frac{n(n^2 - 1)}{6}$$

Et :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{aligned}$$

Exercice 1.13 [◆◆◇]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

Exercice 1.14 [◆◆◆]

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{P}_n cette proposition. Montrons \mathcal{P}_n pour tout n .

Initialisation.

Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^1 \binom{1}{k} \frac{(-1)^0}{k} = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1$$

\mathcal{P}_1 est donc vérifiée.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &\stackrel{HR}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (-1)^{k+1} \\ &\stackrel{Newton}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ce qui est exactement \mathcal{P}_{n+1} .

Conclusion.

Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

□

Exercice 1.15 [◆◆◆]

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\sum_{k=1}^n H_k$ et $\sum_{k=1}^n kH_k$ en fonction de n et H_n .

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n H_k &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{k=p}^n \frac{1}{p} && \text{(Proposition 33 !)} \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sum_{k=p}^n 1 \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{n - p + 1}{p} \\ &= n \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{p-1}{p} \\ &= nH_n + H_n - n \\ &= (n+1)H_n - n\end{aligned}$$

CQFD

On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k H_k &= \sum_{k=1}^n k \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{k}{p} \\
 &= \sum_{p=1}^n \sum_{k=p}^n \frac{k}{p} && \text{(Encore la proposition 33 \(\heartsuit\))} \\
 &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sum_{k=p}^n k \\
 &= \sum_{p=1}^n \frac{(n-p+1)(p+n)}{2p} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{n^2 - p^2 + p + n}{p} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^n \frac{n^2 + n}{p} + \sum_{p=1}^n \frac{p(1-p)}{p} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(n(n+1)H_n + n \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{n(n+1)H_n + n}{2} - \frac{n(n+1)}{4} \\
 &= \frac{2n(n+1)H_n + 2n - n(n+1)}{4} \\
 &= \frac{n(2(n+1)H_n - n + 1)}{4}
 \end{aligned}$$

CQFD