Ensembles et applications
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 5.1 [♦◊◊]

Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Établir que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \qquad \text{et} \qquad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

On a :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

□

Exercice 5.2 [♦◊◊]

Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble E, telles que

$$E = A \cup B \cup C, \qquad A \cap D \subset B, \qquad B \cap D \subset C, \qquad C \cap D \subset A.$$

Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.
Soit $x \in D$, on sait que $x \in E$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$.
⊚ Si $x \in A$, alors $x \in A \cap D$, donc $x \in B$.
⊚ Si $x \in B$, alors $x \in B \cap D$, donc $x \in C$.
⊚ Si $x \in C$, alors $x \in C \cap D$, donc $x \in A$.
On en déduit que $x \in A \cap B \cap C$.
Ainsi, $D \subset A \cap B \cap C$.

□

Exercice 5.3 [♦♦◊]

Démontrer que

$$\mathbb{R} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\right\}.$$

On note $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\right\}$
⊚ Montrons que $\mathbb{R} \subset A$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
∘ Si $x \leq 0$, On pose $a = 1$ et $b = x - 1$, ainsi $x = a + b$ donc $x \in A$.
∘ Si $x > 0$, On pose $a = x + 1$ et $b = -1$, ainsi $x = a + b$ donc $x \in A$.
Dans tous les cas $x \in A$, on en conclut que $\mathbb{R} \subset A$.
⊚ Montrons que $A \subset \mathbb{R}$.
Soit $x \in A$, alors il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $x = a + b$.
Or $a + b \in \mathbb{R}$, donc $x \in \mathbb{R}$. On en conclut que $A \subset \mathbb{R}$.

□

Exercice 5.4 [♦♦◊]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n parties de E telles que

$$A_n = E \qquad \text{et} \qquad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n.$$

On pose $B_1 = A_1$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, on pose $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.
Prouver que $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un recouvrement disjoint de E.

Soit $x \in E$. Alors $x \in A_n$. Il existe alors k le plus petit entier tel que $x \in A_k$. Ainsi, $x \in B_k$ puisque $x \in A_k \wedge x \notin A_{k-1}$ par définition de k.
On en déduit que tout élément de E appartient à au moins un (B_k).

Montrons maintenant que tout élément de E appartient aussi au plus à un B_k.
Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$ et $x \in B_i$ et $x \in B_j$.
Or, puisque $x \in B_j$ et $i < j$, $x \notin A_i$. De plus, puisque $x \in B_i$, $x \in A_i$ ce qui est absurde.
Ainsi, tout élément de E appartient au plus à un (B_k).

$(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est donc un recouvrement disjoint de E.

□

Exercice 5.5 [♦♦◇]

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Démontrer que

$$B \subset A \iff (\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)).$$

Supposons $B \subset A$.
Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
On a :

$$(A \cap X) \cup B = (A \cup B) \cap (X \cup B) = A \cap (X \cup B)$$

Supposons $(\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B))$.
On a $B \in \mathcal{P}(E)$, donc :

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup B = A \cap (B \cup B) &\iff (A \cup B) \cap B = A \cap B \\ &\iff (A \cup B) = A \\ &\iff B \subset A\end{aligned}$$

□

Exercice 5.6 [♦♦♦]

Expliciter les ensembles

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

A est l'ensemble vide, puisque l'intersection est commutative, on peut prendre $n = 1$ et $n = 10$, par exemple, et remarquer que leur intersection est nulle, ce qui se propage à toutes les intersections.

Montrons que B est l'ensemble $]0, 1]$ par double inclusion.
⊚ Montrons que $B \subset]0, 1]$.
Soit $x \in B$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$. Ainsi, $0 < x \leq 1$. Donc $x \in]0, 1]$.
⊚ Montrons que $]0, 1] \subset B$.
Soit $x \in]0, 1]$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 \geq \frac{1}{x} \geq n$. Donc que $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$.
Ainsi $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ et donc $x \in B$.
On en conclut que $B =]0, 1]$. □

Exercice 5.7 [♦♦♦] Différence symétrique

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E, on définit

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que la réunion définissant $A\Delta B$ est disjointe.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Montrer que $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.
4. Simplifier $A\Delta E$, $A\Delta\varnothing$, $A\Delta A$, $A\Delta\overline{A}$.
5. (*) Résoudre l'équation $A\Delta X = \varnothing$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Considérons l'intersection :

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A})\\ &= A \cap (B \cap \overline{B}) \cap \overline{A}\\ &= \varnothing\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\\ &= \overline{A} \cap (A \cup B) \cup (A \cup B) \cap \overline{B}\\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\\ &= A\Delta B\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A)\\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})\\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B)\\ &= A\Delta B\end{aligned}$$

4. On a :
   - $A\Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = E \cap \overline{A}$.
   - $A\Delta\varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing = A$.
   - $A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \varnothing$.
   - $A\Delta\overline{A} = (A \cup \overline{A}) \setminus (A \cap \overline{A}) = E \setminus \varnothing = E$

5. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\begin{aligned}& A\Delta X = \varnothing\\ \Longleftrightarrow\ & (A \setminus X) \cup (X \setminus A) = \varnothing\\ \Longleftrightarrow\ & A \setminus X = \varnothing \text{ et } X \setminus A = \varnothing\\ \Longleftrightarrow\ & X \subseteq A \text{ et } A \subseteq X\\ \Longleftrightarrow\ & X = A\end{aligned}$$

□