Chapitre 26

Espaces de dimension finie

Exercice 1: ♦◊◊

Soit $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.
Montrer que F est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

Solution :

La trace est une forme linéaire sur $M_2(\mathbb{R})$, donc $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(M_2(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) + \dim(\mathrm{Tr}(M_2(\mathbb{R})))$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \dim(F) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathbb{R}) = 3$.

Exercice 2: ♦◊◊

Montrer que (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de $M_2(\mathbb{R})$ avec :

$$M_1 = I_2,\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution :

Montrons que c'est une famille libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que : $\lambda_1 I_2 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = 0$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

En résolvant le systeme. Ainsi, (M_1, M_2, M_3, M_4) est une famille libre.
Or $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, et c'est une famille libre de 4 vecteurs : c'est une base.

Exercice 3: ♦♦◊

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution :

On sait déjà que c'est une famille libre (cf 25.13).
C'est une famille libre de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$, donc c'est une base.

Exercice 4: ♦♦◊

Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Montrer qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.

Solution :

On sait que $(e_1, ..., e_{n-1})$ est une famille libre de E.
Par théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base de E.
Supposons qu'il n'existe pas de j tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.
Alors, pour tout j, $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est liée.
Donc, pour tout j, e'_j est combinaison linéaire de $(e_1, ..., e_{n-1})$.
Donc $\mathcal{B}'$ est combinaison linéaire de $\mathcal{B}$, ce qui est absurde.
Donc il existe un j tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.

Exercice 5: ♦◊◊

Justifier que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1 et un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

Solution :

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1 car $\forall z \in \mathbb{C}, z = z \cdot 1$.
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 car $\forall z \in \mathbb{C}, z = \Re(z) \cdot 1 + \Im(z) \cdot i$ avec $\Re(z), \Im(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 6: ♦♦◊

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X + k)^n = 0$.

1. Montrer que $\forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X + k)^p = 0$.
2. Montrer que $\forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$.
3. Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k) = 0$.
4. Déduire que $((X + k)^n, k \in [\![0, n]\!])$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution :

On pose $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X + k)^n = 0$.
$\boxed{1.}$ On a $P' = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k n (X + k)^{n-1} = n \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X + k)^{n-1} = 0$.
Donc $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X + k)^{n-1} = 0$.
En dérivant n fois, on obtient bien l'égalité pour tout $p \in [\![0, n]\!]$.

$\boxed{2.}$ En évaluant en 0 l'égalité du $\boxed{1.}$, on obtient bien l'égalité.

$\boxed{3.}$ Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On a $P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.
On a $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sum_{p=0}^{n} a_p k^p = \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$.

$\boxed{4.}$ On a montré que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k) = 0$.
Donc, en particulier pour un polynôme ne s'annulant jamais, on a que les λ_k sont nuls.
Donc $((X + k)^n, k \in [\![0, n]\!])$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.
Or, c'est une famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$, donc c'est une base.