Chapitre 27
Applications linéaires

Exercise 1: ⧫◊◊

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer

$$\mathrm{Ker}((u)) = \mathrm{Ker}((u^2)) \iff \mathrm{Ker}((u)) \cap \mathrm{Im}((u)) = \{0_E\}$$

Preuve :

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}((u)) \cap \mathrm{Im}((u)) = \{0_E\}$.
On a assez facile que : $\mathrm{Ker}((u)) \subset \mathrm{Ker}((u^2))$
Montrons que : $\mathrm{Ker}((u^2)) \subset \mathrm{Ker}((u))$
Soit $x \in \mathrm{Ker}((u^2))$
Posons $y = u(x)$
$u^2(x) = 0$
$u \circ u(x) = 0$
$u(y) = 0$
$y = 0$ $(y \in \mathrm{Ker}((u)) \cap \mathrm{Im}((u)))$
$u(x) = 0$
Ainsi on obtient : $x \in \mathrm{Ker}((u))$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}((u)) = \mathrm{Ker}((u^2))$.
Soit $y \in \mathrm{Ker}((u)) \cap \mathrm{Im}((u))$
$\exists x \in E \mid y = u(x)$
Posons $x \mid y = u(x)$
$u(y) = 0$ $(y \in \mathrm{Ker}((u)))$
$u \circ u(x) = 0$
$u^2(x) = 0$
$u(x) = 0$ $(\mathrm{Ker}((u)) = \mathrm{Ker}((u^2)))$
Ainsi on obtient : $y = 0_E$

Exercise 2: ⧫◊◊

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer

$$\mathrm{Im}((u)) = \mathrm{Im}((u^2)) \iff E = \mathrm{Ker}((u)) + \mathrm{Im}((u))$$

Preuve :

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $E = \mathrm{Ker}((u)) + \mathrm{Im}((u))$.
On a assez facile que : $\mathrm{Im}((u^2)) \subset \mathrm{Im}((u))$
Montrons que : $\mathrm{Im}((u)) \subset \mathrm{Im}((u^2))$
Soit $y \in \mathrm{Im}((u))$
$\exists x \in E \mid y = u(x)$ $(y \in \mathrm{Im}((u)))$
Posons $x \mid y = u(x)$
$\exists (x', \widetilde{x}) \in \mathrm{Ker}((u)) \times E \mid x = x' + u(\widetilde{x})$ $(E = \mathrm{Ker}((u)) + \mathrm{Im}((u)))$
Posons $(x', \widetilde{x}) \in \mathrm{Ker}(u) \times E \mid x = x' + u(\widetilde{x})$
$y = u(x' + u(\widetilde{x}))$
$y = u(x') + u \circ u(\widetilde{x})$
$y = u^2(\widetilde{x})$ $(x' \in \mathrm{Ker}((u)))$
Ainsi on obtient que : $y \in \mathrm{Im}((u^2))$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Im}((u)) = \mathrm{Im}((u^2))$.
On a assez facile que : $\mathrm{Ker}((u)) + \mathrm{Im}((u)) \subset E$
Montrons que : $E = \mathrm{Ker}((u)) + \mathrm{Im}((u))$
Soit $x \in E$ Posons $y \mid y = u(x)$
$\exists \widetilde{x} \in E \mid y = u^2(\widetilde{x})$ $(\mathrm{Im}((u)) = \mathrm{Im}((u^2)))$
Posons $\widetilde{x} \mid y = u^2(\widetilde{x})$
$x = x - u(\widetilde{x}) + u(\widetilde{x})$
$u(x - u(\widetilde{x})) = u(x) - u^2(\widetilde{x}) = 0$
$u(\widetilde{x}) \in \mathrm{Im}((u))$ et $x - u(\widetilde{x}) \in \mathrm{Ker}((u))$
Ainsi on obtient que : $x \in \mathrm{Ker}((u)) + \mathrm{Im}((u))$

Exercise 3: ♦♦♢

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel.

1. Montrer que pour tout $k \geq 0$, on a $\text{Ker}((u^k)) \subset \text{Ker}((u^{k+1}))$.
2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \text{Ker}((u^k)) = \text{Ker}((u^{k+1})) \Rightarrow \text{Ker}((u^{k+1})) = \text{Ker}((u^{k+2}))$$

Preuve :

$\boxed{1.}$
Soient $k \in \mathbb{N}, x \in \text{Ker}((u^k))$
$u^{k+1}(x) = u \circ u^k(x)$
$u^{k+1}(x) = u(0)$ $(x \in \text{Ker}((u^k)))$
$u^{k+1}(x) = 0$
Ainsi on obtient que $x \in \text{Ker}((u^{k+1}))$

$\boxed{2.}$
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\text{Ker}((u^k)) = \text{Ker}((u^{k+1}))$.
On obtient avec Q1 : $\text{Ker}((u^{k+1})) \subset \text{Ker}((u^{k+2}))$ Montrons que : $\text{Ker}((u^{k+2})) \subset \text{Ker}((u^{k+1}))$
Soit $x \in \text{Ker}((u^{k+2}))$
$u^{k+2}(x) = u^{k+1} \circ u(x) = 0$
$u^k \circ u(x) = 0$ $(\text{Ker}((u^k)) = \text{Ker}((u^{k+1})))$
$u^{k+1}(x) = 0$
Ainsi on obtient que : $x \in \text{Ker}((u^{k+1}))$

Exercise 4: ♦♦♦

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Supposons que $p+q$ est projecteur. Montrer que

$$\text{Im}(()p+q) = \text{Im}(()p) \oplus \text{Im}(()q) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(()p+q) = \text{Ker}(()p) \cap \text{Ker}(()q).$$

Preuve :

$\boxed{1.}$
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$.
On a $(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p^2 + q^2 = p + q$ donc $p+q$ est un projecteur.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $p+q$ est un projecteur.
Alors $(p+q)^2 = p + pq + qp + q = p + q$ donc $pq + qp = 0$.
Alors $pq = qp \Longrightarrow pq = p^2 q = -pqp = qp = -qp^2 = qp^2 = qp$.
Donc $pq = qp$, mais aussi $pq = -qp$ donc $pq = qp = 0$.