Chapitre 5

Ensembles et applications.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Ensembles et opérations.

1.1 Notations.

Définition 1: Naïve.

- Un **ensemble** non vide E est une collection d'objets x appelés **éléments**.
- On dit d'un élément x de E qu'il **appartient** à E, ce qui se note $x \in E$.
  Si l'objet x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.
- On pose qu'il existe un ensemble n'ayant pas d'éléments et que cet ensemble est unique.
  On l'appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$. Pour tout objet x, l'assertion "$x \in \varnothing$" est fausse.
- Signe « $=$ ». Si x et y sont deux éléments d'un ensemble E, on notera $x = y$ si on veut exprimer que x et y sont un seul et même élement de E.

Exemple 2: Ensembles de nombres.

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$; $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
2. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*\}$.
3. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels strictement positifs. On a $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers compris entre 1 et n s'écrit $[\![1, n]\!]$.

Comment décrire un ensemble non vide ?
On utilise des accolades, ainsi qu'une description de ses éléments, qui peut prendre deux formes.

- En **extension**: les éléments sont présentés sous forme de liste, par exemple $\{1, 2, 3\}$. Signalons que l'ordre n'a pas d'importance : $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$. L'ensemble
$$\{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$$
est l'ensemble des entiers naturels pairs, qu'il faut lire $\{0, 2, 4, ...\}$ en comprenant le sens des points de suspension.
- En **compréhension**: on sélectionne dans un autre ensemble, des éléments possédant une certaine propriété. Par exemple, l'ensemble des entiers pairs se note, en compréhension
$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}\ :\ n = 2p\}$$
Dans la notation en compréhension
$$\{x \in E \mid \mathscr{P}(x) \text{ est vraie}\}$$
on écrit, dans l'ordre et entre accolades
x : l'élément typique, E : l'ensemble de sélection, $\mid$: tel que, $\mathscr{P}(x)$: condition de sélection.

Exemple 3

Écrire de deux façon l'ensemble des couples de réels opposés.

Solution :

On l'écrit:
$$\{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$$

Que dire de l'ensemble vide? Si on imagine les ensembles comme des boîtes, il n'est pas difficile d'imaginer l'ensemble vide: c'est une boîte qui ne contient rien. On conviendra que l'assertion
$$\forall x \in \varnothing\ \mathcal{P}(x)$$

est vraie, quelle que soit l'assertion $\mathcal{P}(x)$ énoncée à l'aide de x. Puisqu'il n'y a pas d'éléments dans l'ensemble vide, on peut dire que tous les éléments de l'ensemble vide sont verts. Ils sont aussi bleus à poils durs.

Méthode : Démontrer qu'un ensemble est vide.

Le raisonnement par l'absurde peut être utile : on suppose que l'ensemble n'est pas vide, on prend un élément de l'ensemble, et on cherche une contradiction.

1.2 Inclusion.

Définition 4

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B, ce que l'on note $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B :

$$\forall x \in A \quad x \in B.$$

On peut faire un lien entre inclusion et implication en écrivant que A est inclus dans B signifie :

$$\forall x \quad x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

ceci en écrivant un $\forall x$ sans préciser où x est pris, ce qui n'est pas très bien mais...

Méthode

Pour prouver une inclusion $A \subset B$

1. On considère un élément de A ("Soit $x \in A$")
2. puis on prouve qu'il est dans B (on devra conclure avec "donc $x \in B$").

Exemple 5

Justifier que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ puis que $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

Solution :

Soit $k \in \mathbb{Z}$, $k = \frac{k}{1}$, donc $k \in \mathbb{Q}$, on a $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
Ainsi, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mais $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

Proposition 6: Transitivité.

Soient A, B, C trois ensembles.

$$(A \subset B \ \text{ et } \ \mathscr{B} \subset C) \Longrightarrow A \subset C.$$

Preuve :

Supposons $A \subset B$ et $B \subset C$.
Soit $x \in A$, alors $x \in B$, alors $x \in C$ donc $A \subset C$.

Théorème 7: Double-inclusion.

Soient A et B deux ensembles. On a

$$A = B \iff A \subset B \ \text{ et } \ B \subset A.$$

Preuve :

On a:

$$A = B \iff (\forall x,\ x \in A \Longrightarrow x \in B) \ \text{ et } \ (\forall x,\ x \in B \Longrightarrow x \in A) \iff A \subset B \ \text{ et } \ B \subset A.$$

Méthode

Pour prouver que $A = B$, on peut prouver les deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exemple 8: Prouver une égalité par double-inclusion.

Soient $A = \mathbb{R}_-$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ y \geq x\}$. Montrer que $A = B$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}_-$, et $y \in \mathbb{R}_+$. On a $x \leq 0$ et $y \geq 0$, donc $x \leq 0 \leq y$ et $x \leq y$. Donc $x \in B$ et $R_- \subset B$.
Soit $x \in B$, on a $x \leq 0$ car $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ y \geq x$. Ainsi, $x \in \mathbb{R}_-$. Donc $B \subset \mathbb{R}_-$.
Donc $A = B$.

1.3 Parties d'un ensemble et opérations.

Définition 9

On appelle **partie** d'un ensemble E tout ensemble A tel que $A \subset E$.
Alternativement, on pourra dire que A est un sous-ensemble de E.

Remarque. Pour tout ensemble E, les ensembles E et $\varnothing$ sont des parties de E.

Définition 10

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On définit l'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$ et leur **réunion** $A \cup B$ par

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \quad \text{et} \quad A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

On appelle **différence** de A et de B, (« A privé de B ») la partie

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

On appelle **complémentaire** de A la partie $E \setminus A$. Cet ensemble pourra être noté $\overline{A}$ ou A^C.

Dans le reste du paragraphe, on allège les énoncés en fixant une fois pour toutes un ensemble E et trois parties A, B, C de E.

Proposition 11: Évidences.

$$\begin{aligned} A \cup A = A \cap A &= A & \overline{\overline{A}} &= A \\ A \cup E = E \cup A &= E & A \cup B &= B \cup A \\ A \cap E = E \cap A &= A & A \cap B &= B \cap A \\ A \cup \varnothing = \varnothing \cup A &= A & A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap \varnothing = \varnothing \cap A &= \varnothing & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \setminus A &= \varnothing & A \cap B \subset A &\subset A \cup B \\ A \setminus \varnothing &= A & & \end{aligned}$$

Proposition 12: Distributivité.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Preuve :

Soit $x \in E$. On a:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ &\iff (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Donc $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Proposition 13: Lien entre différence et complémentaire.

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Preuve :

Soit $x \in E$, $x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B) \iff (x \in A \text{ et } x \in \overline{B}) \iff x \in A \cap \overline{B}$

Proposition 14: Décroissance du passage au complémentaire.

$$A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Preuve :

Supposons $A \subset B$. Soit $x \in \overline{B}$, supposons $x \in A$, alors $x \in B$ car $A \subset B$, absurde.

Proposition 15: Formules de De Morgan.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Preuve :

Soit $x \in E$. On a:

$$x \in \overline{A \cap B} \iff \text{non}(x \in A \text{ et } x \in B) \iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

Donc $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exemple 16

Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Solution :

On a $A \setminus (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Définition 17: Généralisations : Intersection et union d'une famille de parties.

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, indexée par un ensemble I.

- On appelle intersection des A_i, pour i parcourant I l'ensemble ci-dessou:
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \;:\; \forall i \in I,\; x \in A_i\}$$
C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les A_i.
- On appelle union des A_i, pour i parcourant I l'ensemble ci-dessous:
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \;:\; \exists i \in I,\; x \in A_i\}$$
C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins un des A_i.

Exemple 18

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Que valent $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$?

Solution :

Il est clair que $1 \in A_i$ pour tout i, et $A_1 = \{1\}$ donc l'intersection vaut $\{1\}$.
Soit x dans l'union, $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid x \in A_n$ donc $x \in [\frac{1}{n}, 1] \subset]0, 1]$.
Soit $x \in]0, 1]$. En posant $n = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1$, on a $x \in A_n$ donc x est dans l'union.

Définition 19

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, c'est à dire qu'il n'existe pas d'élément commun à A et B, on dit que A et B sont **disjointes**.

Exemple 20

Pour chacune des situations ci-dessous, donner l'exemple de deux ensembles A et B tels que

1. A et B sont distincts mais non disjoints.
2. A et B sont disjoints mais non distincts.
3. A et B sont disjoints et distincts.
4. A et B sont non disjoints et non distincts.

Solution :

$\boxed{1.}$ $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.
$\boxed{2.}$ $\varnothing$ et $\varnothing$.
$\boxed{3.}$ Les rationnels et les irrationnels.
$\boxed{4.}$ $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$.

Définition 21

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ uen famille de parties de E, indexée par un ensemble I. On dit que cette famille est constituée de parties **deux-à-deux disjointes** si
$$\forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Exemple 22: Il ne suffit pas à l'intersection d'être vide !

Donner l'exemple d'un ensemble E et de trois parties A, B, C de E telles que $A \cap B \cap C = \varnothing$ et telles que A, B et C sont **non disjointes deux-à-deux**.

Solution :

$E = \{1\}$, $A = B = E$ et $C = \varnothing$. L'intersection est vide puisque C l'est, mais $A \cap B \neq \varnothing$.

1.4 Cardinal d'un ensemble fini.

On effleure seulement le sujet ici : un chapitre Dénombrement y sera consacré.

Définition 23: point de vue naïf.

Soit E un ensemble non vide. Il est dit fini s'il a un nombre fini d'éléments.
Ce nombre est appelé **cardinal** de E et noté $|E|$. On pose que l'ensemble vide est fini et que son cardinal est 0.
Un ensemble constitué d'un unique élément est appelé **singleton**.
Un ensemble constitué d'exactement deux éléments est appelé une **paire**.

Proposition 24: La partie et le tout.

Soit E un ensemble fini et $A \subset E$.

- Toute partie A de E est finie et $|A| \leq |E|$.
- Si A et B sont des parties de E, alors

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } |A| = |B|$$

1.5 Produit cartésien.

Définition 25

Soient E et F eux ensembles, on appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble:

$$\{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Les éléments de $E \times F$ sont appelés **couples**.

Notation

On note $E^2 = E \times E$. Par exemple, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 26

Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{\Diamond, \heartsuit\}$. Expliciter $E \times F$.

Solution :

$E \times F = \{(1, \Diamond), (1, \heartsuit), (2, \Diamond), (2, \heartsuit), (3, \Diamond), (3, \heartsuit)\}$.

Définition 27

Soient $E_1, ..., E_n$ n ensembles. On appelle produit cartésien de $E_1, ..., E_n$ et on note $E_1 \times ... \times E_n$:

$$\{(x_1, ..., x_n) \mid x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n\}.$$

Les éléments de $E_1 \times ... \times E_n$ sont appelés **n-uplets**.

Proposition 28: Égalité de deux n-uplets.

Soient $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ...y_n)$ deux n-uplets d'un produit cartésien $E_1 \times ... \times E_n$.

$$(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n) \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = y_i.$$

1.6 Ensemble des parties d'un ensemble.

Définition 29

L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Proposition 30: Admis pour le moment.

Si E est un ensemble fini à n éléments, $\mathcal{P}(E)$ est fini et a 2^n éléments.
Si $p \in [\![0, n]\!]$, le nombre de ces parties ayant exactement p éléments est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1.7 Recouvrement disjoint, partition.

Définition 31

Un **recouvrement disjoint** d'un ensemble E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties E telle que

- $E = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ (E est la réunion des A_i)
- $\forall i, j \in I\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ (les A_i sont deux-à-deux disjoints).

Si de surcroît tous les A_i sont non vides, on dit que c'est une **partition** de E.

Exemple 32

Proposer une partition de $]0, +\infty[$ en trois parties.
Proposer une partition de $]0, +\infty[$ en une infinité de parties.

Solution :

$\boxed{1.}$ $]0, +\infty[=]0, 1] \cup]1, 2] \cup]2, +\infty[$.
$\boxed{2.}$ $]0, +\infty[= \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*}]n-1, n]$.

2 Applications entre deux ensembles.

Dans ce qui suit, E, F et G sont trois ensembles.

2.1 Définitions.

Définition 33

Une **application** f de E dans F est un procédé qui à tout élément x de E associe un unique élément dans F, que l'on note $f(x)$. Cet objet est aussi appelé **fonction**, et décrit à l'aide de la notation

$$f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

L'ensemble E est alors appelé **ensemble de départ**, et F **ensemble d'arrivée**.

Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que $y = f(x)$.
On dit que y est l'**image** de x par f, et que x est un **antécédent** de y par f.

Définition 34: Des applications simples à définir.

On appelle application **identité** sur E et on note id_E l'application

$$\mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

Soit $a \in F$; on appelle **application constante** égale à a l'application

$$\begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & a \end{cases}$$

Notation

L'ensemble des fonctions de E dans F est noté F^E ou bien $\mathcal{F}(E, F)$.

Proposition 35: Égalité de deux fonctions.

Deux applications sont égales si et seulement si elles sont égales en tout point:

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{F}(E, F))^2, \quad f = g \iff \forall x \in E,\ f(x) = g(x).$$

2.2 Restriction, prolongement.

Définition 36

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $A \subset E$.
On appelle **restriction** de f à A, et on note $f_{|A}$ l'application

$$f_{|A} : \begin{cases} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

Définition 37

Soit A une partie de E et $g \in \mathcal{F}(A, F)$.
On appelle **prolongement** de g sur E toute application f telle que $f_{|A} = g$.

Exemple 38

Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R};\ x \mapsto 1$. Définir sur $\mathbb{R}$ deux prolongement de g.

Solution :

On peut prolonger g en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 1$ ou $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 42 & \text{sinon} \end{cases}$

2.3 Composition.

Définition 39

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
La **composée** de f par g, notée $f \circ g$ est l'application

$$g \circ f : \begin{cases} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$$

Exemple 40

Soient $f : x \mapsto \ln(x-3)$, $\quad g : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$, $\quad h : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.
Écrire chacune comme la composée de deux fonctions "simples" (en précisant les ensembles de départ et d'arrivée).

Solution :

Notons $\varphi : x \mapsto x-3$, $\psi : x \mapsto x^2-4$.
On a $f = \ln \ \circ \ \varphi$ de $]3,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
On a $g = \sqrt{\cdot} \ \circ \ \psi$ de $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ vers $\mathbb{R}_+$.
On a $h = \sqrt{\cdot} \circ \ln$ de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}_+$.

Exemple 41

1. La composée de deux fonctions monotones de même monotonie est croissante.
2. La composée de deux fonctions monotones, de monotonies contraires, est décroissante.

Proposition 42: L'identité est neutre pour la composition

Si $f \in \mathcal{F}(E,F)$, alors
$$\mathrm{id}_F \circ f = f \quad \text{ et } \quad f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

Proposition 43: Associativité de la composition.

Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to I$, alors
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

2.4 Famille d'éléments d'un ensemble.

Définition 44

Soient E et I deux ensembles.
Une **famille d'éléments de E indexée par** I est une fonction $a : I \to E$.
Pour $i \in I$, on note $a_i = a(i)$. La famille des a est alors notée $a = (a_i)_{i \in I}$.
L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I sera noté E^I.

L'idée : a_i est un élément de E «étiqueté» par une étiquette i prise dans I.

Définition 45

On appelle **suite** d'éléments de E une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$.

Proposition 46: admis

Soit $f : E \to E$ et $a \in E$. Alors il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

3 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Établir que
$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \qquad \text{et} \qquad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

Solution :

On a :
$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \ \cap \overline{B})} = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

D'autre part :
$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

Et :
$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

Exercice 2: ⧫◊◊

Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble E, telles que

$$E = A \cup B \cup C, \qquad A \cap D \subset B, \qquad B \cap D \subset C, \qquad C \cap D \subset A.$$

Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.

Solution :

Soit $x \in D$, on sait que $x \in E$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$.
⊚ Si $x \in A$, alors $x \in A \cap D$, donc $x \in B$.
⊚ Si $x \in B$, alors $x \in B \cap D$, donc $x \in C$.
⊚ Si $x \in C$, alors $x \in C \cap D$, donc $x \in A$.
On en déduit que $x \in A \cap B \cap C$.
Ainsi, $D \subset A \cap B \cap C$.

Exercice 3: ⧫⧫◊

Démontrer que

$$\mathbb{R} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\right\}.$$

Solution :

On note $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\right\}$
⊚ Montrons que $\mathbb{R} \subset A$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
∘ Si $x \leq 0$, On pose $a = 1$ et $b = x - 1$, ainsi $x = a + b$ donc $x \in A$.
∘ Si $x > 0$, On pose $a = x + 1$ et $b = -1$, ainsi $x = a + b$ donc $x \in A$.
Dans tous les cas $x \in A$, on en conclut que $\mathbb{R} \subset A$.
⊚ Montrons que $A \subset \mathbb{R}$.
Soit $x \in A$, alors il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $x = a + b$.
Or $a + b \in \mathbb{R}$, donc $x \in \mathbb{R}$. On en conclut que $A \subset \mathbb{R}$.

Exercice 4: ⧫⧫◊

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n parties de E telles que

$$A_n = E \qquad \text{et} \qquad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n.$$

On pose $B_1 = A_1$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, on pose $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.
Prouver que $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un recouvrement disjoint de E.

Solution :

Soit $x \in E$. Alors $x \in A_n$. Il existe alors k le plus petit entier tel que $x \in A_k$. Ainsi, $x \in B_k$ puisque $x \in A_k \wedge x \notin A_{k-1}$ par définition de k.
On en déduit que tout élément de E appartient à au moins un (B_k).

Montrons maintenant que tout élément de E appartient aussi au plus à un B_k.
Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$ et $x \in B_i$ et $x \in B_j$.
Or, puisque $x \in B_j$ et $i < j$, $x \notin A_i$. De plus, puisque $x \in B_i$, $x \in A_i$ ce qui est absurde.
Ainsi, tout élément de E appartient au plus à un (B_k).

$(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est donc un recouvrement disjoint de E.

Exercice 5: ⧫⧫◊

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Démontrer que

$$B \subset A \iff (\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)).$$

Solution :

Supposons $B \subset A$ et soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a:

$$(A \cap X) \cup B = (A \cup B) \cap (X \cup B) = A \cap (X \cup B)$$

Supposons $(\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B))$.
On a $B \in \mathcal{P}(E)$, donc :

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup B = A \cap (B \cup B) &\iff (A \cup B) \cap B = A \cap B \\ &\iff (A \cup B) = A \\ &\iff B \subset A\end{aligned}$$

Exercice 6: ♦♦♦

Expliciter les ensembles

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

Solution :

A est l'ensemble vide, puisque l'intersection est commutative, on peut prendre $n = 1$ et $n = 10$, par exemple, et remarquer que leur intersection est nulle, ce qui se propage à toutes les intersections.

Montrons que B est l'ensemble $]0, 1]$ par double inclusion.
⊚ Montrons que $B \subset]0, 1]$.
Soit $x \in B$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$. Ainsi, $0 < x \leq 1$. Donc $x \in]0, 1]$.
⊚ Montrons que $]0, 1] \subset B$.
Soit $x \in]0, 1]$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 \geq \frac{1}{x} \geq n$. Donc que $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$.
Ainsi $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ et donc $x \in B$.
On en conclut que $B =]0, 1]$. □

Exercice 7: ♦♦♦ Différence symétrique.

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E, on définit

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que la réunion définissant $A\Delta B$ est disjointe.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Montrer que $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.
4. Simplifier $A\Delta E$, $A\Delta\varnothing$, $A\Delta A$, $A\Delta\overline{A}$.
5. (*) Résoudre l'équation $A\Delta X = \varnothing$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Considérons l'intersection :

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) \\ &= A \cap (B \cap \overline{B}) \cap \overline{A} \\ &= \varnothing\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ On a :

$$\begin{aligned}(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= \overline{A} \cap (A \cup B) \cup (A \cup B) \cap \overline{B} \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A\Delta B\end{aligned}$$

$\boxed{3.}$ On a :

$$(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = A\Delta B$$

$\boxed{4.}$ On a :

- $A\Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = E \cap \overline{A}$.
- $A\Delta\varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing = A$.
- $A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \varnothing$.
- $A\Delta\overline{A} = (A \cup \overline{A}) \setminus (A \cap \overline{A}) = E \setminus \varnothing = E$

$\boxed{5.}$ Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$A\Delta X = \varnothing \iff (A \setminus X) \cup (X \setminus A) = \varnothing \iff A \setminus X = \varnothing \text{ et } X \setminus A = \varnothing \iff X \subseteq A \text{ et } A \subseteq X \iff X = A$$

Exercice 8: ♦♦♦ Paradoxe de Russel.

Supposons qu'il existe un *ensemble de tous les ensembles* et notons le $\mathcal{E}$.
Considérons alors l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes :

$$y = \{x \in \mathcal{E} \mid x \notin x\}.$$

Démontrer que $y \in y \iff y \notin y$.

Solution :

Supposons que $y \in y$. Montrons que $y \notin y$.
On a que $y \in y$. Or tout élément de y n'appartient pas à lui-même.
Ainsi, $y \notin y$.

Supposons que $y \notin y$. Montrons que $y \in y$.
y est un ensemble, donc $y \in \mathcal{E}$. De plus, $y \notin y$ par supposition.
Ce sont les deux conditions nécessaires pour appartenir à y.
Ainsi, $y \in y$.

On a bien montré que $y \in y \iff y \notin y$.
Cela est absurde, ainsi les ensemble $\mathcal{E}$ et y ne peuvent pas exister.
□