$\underset{\mathrm{Corrig\acute{e}}}{\mathbf{Applications}}$

DARVOUX Théo

Décembre 2023

Exercices.	
Images directes, images réciproques	2
Exercice 15.1	2
Exercice 15.2	2

Exercice 15.1 $[\Diamond \Diamond \Diamond]$

```
Soit f: E \to F une application. Soient deux parties A \subset E et B \subset F. Montrer l'égalité f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B)). Procédons par double inclusion. \odot Soit y \in f(A) \cap B. Montrons que y \in f(A \cap f^{-1}(B)). On a y \in f(A) et y \in B. \exists x \in A \mid y = f(x) donc x \in A et x \in f^{-1}(B) car y \in B. Ainsi x \in A \cap f^{-1}(B) et f(x) = y \in f(A \cap f^{-1}(B)) \odot Soit y \in f(A \cap f^{-1}(B)) Montrons que y \in f(A) \cap B. \exists x \in A \cap f^{-1}(B) \mid y = f(x) donc x \in A et x \in f^{-1}(B). Ainsi, f(x) = y \in f(A) et f(x) = y \in B: y \in f(A) \cap B.
```



```
Soit f: E \to F une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.
1. (a) Montrer que A \subset f^{-1}(f(A)).
(b) Montrer que si f est injective, la réciproque est vraie.
2. (a) Montrer que f(f^{-1}(B)) \subset B.
(b) Démontrer que si f est surjective, la réciproque est vraie.
3. Montrer que f(f^{-1}(f(A))) = f(A).
4. Montrer que f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B).
1.
a) Soit x \in A. Montrons que x \in f^{-1}(f(A)).
On a x \in A alors f(x) \in f(A) et x \in f^{-1}(f(A)).
b) On suppose f injective, soit x \in f^{-1}(f(A)).
On applique f: f(x) \in f(A). Par injectivité de f, x \in A.
a) Soit y \in f(f^{-1}(B)).
On a \exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x). Ainsi, f(x) \in B : y \in B.
b) Supposons f surjective, soit y \in B.
On a \exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x) \text{ et } f(x) = y \in f(f^{-1}(B)).
3) Soit y \in f(f^{-1}(f(A))). Montrons que y \in f(A).
On a \exists x \in f^{-1}(f(A)) \mid y = f(x) \text{ et } f(x) \in f(A) \text{ donc } y \in f(A).
Soit y \in f(A). Montrons que y \in f(f^{-1}(f(A))).
On a \exists x \in A \mid y = f(x) alors f(x) \in f(A) et x \in f^{-1}(f(A)). Donc f(x) = y \in f(f^{-1}(f(A))).
4) Soit y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B))). Montrons que y \in f^{-1}(B).
On a f(y) \in f(f^{-1}(B)) alors y \in f^{-1}(B).
Soit y \in f^{-1}(B). Montrons que y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B))).
On a f(y) \in f(f^{-1}(B)) donc y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B))).
```