Chapitre 35

Intégrales sur un segment

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$

Définition 1: Fonction continue par morceaux sur un intervalle.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Exemple 2: $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

La fonction $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Expliquer.

Preuve :

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Notons $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cap]a, b[$.
Cet ensemble est finito : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a < \frac{1}{n} < b \iff \frac{1}{b} < n < \frac{1}{a} \iff \lfloor \frac{1}{b} \rfloor + 1 \leq n \leq \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$.
S contient donc au plus $\lfloor \frac{1}{a} \rfloor - \lfloor \frac{1}{b} \rfloor$ points.
Notons $n = |S|$ puis $S = \{a_1, ..., a_n\}$, avec $a_1 < a_2 < ... < a_n$.
Posons $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1})$ avec $a_0 := a$ et $a_{n+1} := b$.
Soit $i \in [\![0,]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est constante, elle y est donc continue et prolongeable par continuité aux bords. Ainsi, $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
Remarque: En posant $f(0) := 0$, ça ne marche plus car $f_{|[0,b]}$ n'est pas cpm sur $[0, b]$.

1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux entre deux bornes

Définition 3

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ou plus simplement $\int_a^b f$ le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_{[a,b]} f \text{ si } a < b, \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_{[b,a]} f \text{ si } a > b.$$

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont continues par morceaux sur I.
Pour $a, b \in I$, on pose :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la partie réelle de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle, idem pour la partie imaginaire.

Preuve :

Pour prouver la continuité par morceaux de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à partir de celle de f, on introduit une subdivision adaptée à f $\sigma = (a_0, ..., a_n)$ et on prouve qu'elle est adaptée à sa partie réelle et à sa partie imaginaire. On peut utiliser :

$$\forall x \in I \ \mathrm{Re}(f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \text{ et } \mathrm{Im}(f(x)) = \frac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}).$$

En effet, ces relations donnent que pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, les restrictions de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à $]a_i, a_{i+1}[$ y sont continues, et prolongeables par continuité sur les bords.

1.3 Relation de Chasles.

Proposition 5: Relation de Chasles

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $a, b, c \in I$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Preuve :

La relation a été établie dans le cours de construction pour une fonction à valeurs réelles dans le cas où $a < c < b$.

• cas $a < b < c$:

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_{[a,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

• cas $b = c < a$:

D'une part $\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$, d'autre part : $\int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f = -\int_[b, a] f$.

Les autres cas sont similaires.

1.4 Linéarité.

Proposition 6: Linéarité de l'intégrale.

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et $a, b \in I$. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Preuve :

On l'a prouvé pour $a < b$ et f, g à valeurs réelles. Il faut le vérifier dans les autres cas.

1.5 Intégrales et inégalités.

Proposition 7: Positivité

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$ où le segment $[a,b]$ est tel que $\boxed{a \leq b}$.
Si f est positive sur $[a,b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un nombre positif.
Si f est négative sur $[a,b]$, alors cette intégrale est un nombre négatif.

Preuve :

On l'a déjà prouvé.

Proposition 8: Intégrale nulle d'une fonction positive et continue

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $\boxed{a < b}$, continue et positive sur $[a,b]$.
Si $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[a,b]$.
Par contraposée, si $\exists c \in [a,b]$ $f(c) > 0$, alors $\int_a^b f > 0$.

Preuve :

Il y a aussi la preuve suivante dans **L'Exercice 79** de la banque CCINP :
On suppose f continue et positive sur $[a,b]$ et $\int_a^b f = 0$.
Posons $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ définie sur $[a,b]$, f étant continue sur $[a,b]$, F est une primitive de f sur $[a,b]$ d'après le TFA (prouvé plus loin).
Donc $\forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x) \geq 0$, ainsi F est croissante sur $[a,b]$.
Or, $F(b) = \int_a^b f = 0$, de plus, $F(a) = \int_a^a f = 0$.
Par croissance, $\forall x \in [a,b],\ F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ donc $F(x) = 0$.
Donc F est constante sur $[a,b]$, on a $a < b$ donc $\forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x) = 0$.

Remarque: Pourquoi continue et pas continue par morceaux ?

Soit $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$, son intégrale est nulle, mais f ne l'est pas.

Proposition 9: Croissance

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ avec $\boxed{a \leq b}$.

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Preuve :

On a :

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f)$$

Comme $g-f$ est continue par morceaux et positive, on a $\int_a^b (g-f) \geq 0$ donc $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Proposition 10: Inégalité de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ avec $\boxed{a \leq b}$.
Si f est minorée par un réel m et majorée par M sur $[a,b]$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a),\ \text{Lorsque } a < b,\ \text{on a } m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Preuve :

On a $\forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M$.
La fonction f, $x \mapsto m$, $x \mapsto M$ sont continues par morceaux.
Par croissance :

$$\int_a^b m\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b M\mathrm{d}t$$

Donc

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M(b-a)$$

Proposition 11: Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, avec $\boxed{a \leq b}$.

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Preuve :

⊚ **Cas réel:** Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$.
On a $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$, or $f, -f$ et $|f|$ sont cpm sur $[a,b]$.
Par croissance de l'intégrale $(a \leq b)$: $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ et $-\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$.
Donc $\max(\int_a^b f, -\int_a^b f) \leq \int_a^b |f|$ et alors $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
⊚ **Cas complexe:** admis.

1.6 Quelques exercices de cours.

Exemple 12

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I_a = \int_a^{a^2} \ln^3(x)\mathrm{d}x$. Existence et signe de I_a.

Preuve :

Existence: $\ln^3$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
1er cas: Supposons $a \geq 1$, alors $a \leq a^2$ et $\forall x \in [a, a^2]\ \ln^3(x) \geq 0$, par positivité, $\int_a^{a^2} \ln^3 \geq 0$.
2eme cas: Supposons $a \in]0,1[$, alors $a^2 \leq a$ et $\forall x \in [a^2, a]\ \ln^3(x) \leq 0$, par positivité, $\int_{a^2}^a \ln^3 \leq 0$ donc $\int_a^{a^2} \ln^3 \geq 0$.
Ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ I_a \geq 0$

Exemple 13

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$ continue telle que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$.
Justifier que f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

Preuve :

1er cas: Supposons que f change de signe sur $[a, b]$, alors d'après le TVI, f s'annule sur $[a, b]$ puisque f est continue.
2eme cas: Supposons que f ne change pas de signe sur $[a, b]$. On a que $a < b$, que f est continue et monotone sur $[a, b]$, et d'intégrale nulle. Par théorème, $\forall x \in [a, b],\ f(x) = 0$.

Exemple 14: Un exercice : suite définie par une intégrale.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}, I_n := \int_1^e (\ln(x))^n \mathrm{d}x$.

1. Prouver que (I_n) est convergente.
2. Prouver que la limite vaut 0 à l'aide d'une IPP.
3. Donner un équivalent de I_n.

Preuve :

$\boxed{1.}$ **Monotonie:** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e \underbrace{(\ln(x))^n}_{\geq 0} \underbrace{(\ln(x) - 1)}_{\leq 0} \mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto (\ln(x))^n(\ln(x) - 1)$ est continue sur $[1, e]$ on a $1 \leq e$ et la fonction est négative.
Par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et donc (I_n) est décroissante.
Convergence: Par positivité, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$, donc I_n est décroissante et minorée par 0 donc elle converge d'après le TLM.
$\boxed{2.}$ Une IPP pour trouver une relation de récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e (\ln(x))^n \mathrm{d}x \\ &= [x(\ln(x))^n]_1^e - \int_1^e \cancel{x} n \frac{1}{\cancel{x}} (\ln(x))^{n-1} \mathrm{d}x \\ &= e - nI_{n-1} \end{aligned}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*\ I_n = \frac{1}{n+1}(e - I_{n+1})$. Notons $l = \lim I_n$, qui existe d'après $\boxed{1.}$.
Alors $I_n = \frac{1}{n+1}(e - I_{n+1}) \to 0$ car $e - I_{n+1} \to e - l$.
$\boxed{3.}$ On a $nI_n = \frac{n}{n+1}(e - I_{n+1}) \to e$ donc $I_n \sim \frac{e}{n}$.

Exemple 15: Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t \to 0.$$

Remarque: Le lemme est vrai pour f continue sur $[a, b]$, mais difficile à démontrer.

Preuve :

Idée : IPP. Soit $n \in \mathbb{N}$. f et $\frac{1}{in}e^{int}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ donc :

$$\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t = \left[f(t) \cdot \frac{1}{in}e^{int}\right]_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot \frac{1}{in}e^{int}\mathrm{d}t$$

Alors

$$|I_n| = \left|...\right| \leq \left|[...]_a^b\right| + \left|\int_a^b ...\right|$$

D'une part : $\left|\left[f(t)\frac{1}{in}e^{int}\right]_a^b\right| = \frac{1}{n}\left|f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}\right| \leq \frac{1}{n}(|f(b)| + |f(a)|)$.
D'autre part : $\left|\int_a^b f'(t)\frac{1}{in}e^{int}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$.
Par majoration, $|I_n| = O(\frac{1}{n})$ donc $I_n \to 0$.

Théorème 16: Théorème fondamental de l'analyse

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soit $a \in I$. La fonction

$$E : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de dérivée $F' = f$.

Preuve :

Soit $x_0 \in I$. Montrons que $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \to f(x_0)$
Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$.

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right) - f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, $\exists \eta > 0 \forall x \in I \cap]x_0-\eta, x_0+\eta[\ |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
Supposons que $|x - x_0| \leq \eta$. Alors $[\min(x_0,x), \max(x_0,x)] \subset I \cap]x_0-\eta, x_0+\eta[$.
Par croissance :

$$\int_{\min}^{\max} \left|f(t) - f(x_0)\right|\mathrm{d}t \leq \int_{\min}^{\max} \varepsilon\mathrm{d}t = \varepsilon(\max - \min) = \varepsilon|x-x_0|.$$

Ainsi, $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\varepsilon|x-x_0| = \varepsilon$