Sommes et Produits
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Crédits: Étienne pour avoir aidé sur le 1.14 et 1.15

Exercices.

Exercice 1.1 [♦◊◊]

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{P}_n$ cette proposition.
Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n.
Initialisation.
Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} = -1$$

$\mathcal{P}_1$ est donc vérifiée.
Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k &= \frac{(-1)^n(2n+1)-1+4(-1)^{n+1}(n+1)}{4} \\ &= \frac{(-1)^n(-2n-3)-1}{4} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)-1}{4}\end{aligned}$$

Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion.
Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Exercice 1.2 [♦◊◊]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1), \quad \sum_{k=n}^{2n} e^{-k}, \quad \sum_{k=0}^{2n} |k-n|.$$

- $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- $\sum\limits_{k=n}^{2n} e^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-k-n} = e^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{1}{e})^k = e^{-n} \cdot \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} = \frac{e^{-n}-e^{-2n-1}}{1-e^{-1}}$
- $\sum\limits_{k=0}^{2n} |k-n| = \sum\limits_{k=0}^{n} (-k+n) + \sum\limits_{k=0}^{n} (k+n-n) = -\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

Exercice 1.3 [♦♦◊]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=-n}^{n} (k+2), \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

- $\sum\limits_{k=-n}^{n} (k+2) = \sum\limits_{k=0}^{2n} (k-n+2) = 2(2n+1) = 4n+2$
- $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{2k} 4k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{2k-1}(4k^2-4k+1) = n(2n+1)$

Exercice 1.4 *Téléscopages* [♦♦◊]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}), \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!.$$

- $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\frac{k+1}{k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$
- $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum\limits_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot k! = \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1-1) \cdot k! = \sum\limits_{k=0}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$

Exercice 1.5 [♦♦◊]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{2k+2}-u_{2k}), \quad \sum_{k=1}^{n}(u_{2k+1}-u_{2k-1}).$$

- $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{2k+2}-u_{2k}) = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{2(k+1)}-u_{2(k)}) = u_{2n}-u_0$
- $\sum_{k=1}^{n}(u_{2k+1}-u_{2k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{2k+3}-u_{2k+1})$
  On a donc :
  $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{2k+3}-u_{2k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1}(u_{2k+2}-u_{2k})$
  $= \sum_{k=0}^{n-1}(u_{2k+3}-u_{2k+2}) + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{2k}-u_{2k+1})$
  $= u_{2n+1}-u_{2n}-u_{2n-1}+u_0$
  On en déduit que :
  $\sum_{k=1}^{n}(u_{2k+1}-u_{2k-1}) = u_{2n+1}-u_{2n-1}$

Exercice 1.6 [♦♦◊]

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^{k-1}$.
Que vaut-elle si $q = 1$? Désormais, on supposera $q \neq 1$.
Pour $q = 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Soit la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. En la voyant comme la dérivée d'une autre que l'on calculera, calculer S_n.
On remarque que $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ est la dérivée de $\sum_{k=1}^{n} q^k$ à une constante près.
Or :

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$$

Et sa dérivée est :

$$\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

On en déduit que $S_n = \frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(1-q)^2}$.

Exercice 1.7 [♦♦◊]

$0,999... = 1$. Expliquer.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$0,999... = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 9\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{10})^k = \frac{9 - \frac{9}{10^n}}{9}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{9 - \frac{9}{10^n}}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

□

Exercice 1.8 [♦♦◊]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : x \mapsto x^n$. On se donne un entier naturel p et un réel x.
Exprimer le nombre $f_n^{(p)}(x)$ à l'aide de factorielles.

- Lorsque $p \leq n$: $\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$
- Lorsque $p > n$: 0

Exercice 1.9 [♦♦◊]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.
1. À l'aide d'un téléscopage, démontrer l'identité :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

On a :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \overset{\text{Pascal}}{=} \sum_{k=p}^{n} (\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

□

2. Grâce au cas $p = 1$, retrouver l'expression connue de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

On retrouve donc bien :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

3. Grâce au cas $p = 2$, retrouver l'expression connue de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

On a :

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k!}{2(k-2)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2 - k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k$$

Et :

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{6(n-2)!} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

On en déduit donc que *(on isole $\sum\limits_{k=2}^{n} k^2$ du premier résultat.)*:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k^2 &= 2\left(\frac{n(n+1)(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2n(n+1)(n-1) + 3n(n+1) - 6}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6}{6}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=2}^{n} k^2 + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

□

Exercice 1.10 [♦♦◊]

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{ch}(kx)$.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e^x}\right)^k\right) \\ &= \frac{1 - e^{(n+1)x}}{2 - 2e^x} + \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{2 - 2e^{-x}}\end{aligned}$$

La factorisation est laissée au lecteur ♡♡♡.

Ensuite, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{ch}(kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{x})^{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{-x})^{k}$$
$$\overset{Newton}{=} \frac{1}{2}\left((1+e^{x})^{n} + (1+e^{-x})^{n}\right)$$

Exercice 1.11 [♦♦♢]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{-j}\binom{j}{i}$$

On a :

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{-j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^{-j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}$$
$$= \sum_{j=0}^{n} 2^{-j}\cdot 2^{j}$$
$$= n+1$$

Exercice 1.12 [♦♦♢]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j| &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |i-j| \\
&\overset{Chasles}{=} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} |i-j| + \sum_{i=j+1}^{n} |i-j| \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j+1}^{n} (i-j) - \sum_{i=1}^{j} (i-j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-j} i - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i + \sum_{j=1}^{n} j^2
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-j} i = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

Et :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 1.13 [♦♦♢]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

Exercice 1.14 [♦♦♦]

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ cette proposition. Montrons $\mathcal{P}_n$ pour tout n.

Initialisation.

Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} \frac{(-1)^0}{k} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1$$

$\mathcal{P}_1$ est donc vérifiée.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&\overset{HR}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^{k+1} \\
&\overset{Newton}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion.

Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

□

Exercice 1.15 [♦♦♦]

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k = \sum\limits_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\sum\limits_{k=1}^{n} H_k$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} kH_k$ en fonction de n et H_n.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{p} && \text{(Proposition 33 !)} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sum_{k=p}^{n} 1 \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{n-p+1}{p} \\
&= n \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{p-1}{p} \\
&= nH_n + H_n - n \\
&= (n+1)H_n - n
\end{aligned}$$

CQFD

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kH_k &= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{k}{p} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n} \frac{k}{p} && \text{(Encore la proposition 33 } \heartsuit\text{)} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sum_{k=p}^{n} k \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{(n-p+1)(p+n)}{2p} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{n^2 - p^2 + p + n}{p} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{n^2+n}{p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{p(1-p)}{p} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(n(n+1)H_n + n \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)H_n + n}{2} - \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{2n(n+1)H_n + 2n - n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(2(n+1)H_n - n + 1)}{4}
\end{aligned}$$

$\mathbb{CQFD}$