

1 Définition et calculs directs.	1
1.1 Définition.	1
1.2 Fonctions composées.	3
1.3 Inverse de trinôme.	4
1.4 Primitive d'une fonction $t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t)$	5
2 Calcul intégral et primitives.	6
2.1 Propriétés de l'intégrale.	6
2.2 Intégrales et primitives d'une fonction continue.	7
2.3 Intégration par parties.	8
2.4 Changement de variable.	9
Exercices	10

Ce cours a deux parties. Dans la première, on explique que primitiver, c'est dériver à l'envers. On s'entraîne donc à voir une fonction comme la dérivée d'une fonction usuelle (1.1), ou d'une composée de fonctions usuelles (1.2). Dans le cas où on ne reconnaît rien, la seconde partie nous propose un lien entre les primitives des fonctions continues et leurs intégrales (2.2). On donnera deux outils fondamentaux pour calculer ces intégrales : l'intégration par parties (2.3) et le changement de variable (2.4).

1 Définition et calculs directs.

1.1 Définition.

Définition 1.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit qu'une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur I si elle est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Par exemple on a $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{2} + 3$ sont des primitives de $x \mapsto x$ sur \mathbb{R} .

On va prouver que si F et G sont deux primitives de f sur I , alors elles sont égales sur I à une constante additive près.

Proposition 2 (Ensemble des primitives d'une même fonction sur un intervalle).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{P}_f l'ensemble des primitives de f sur I , dont on suppose ici qu'il est non vide. Soit F une primitive de f , alors

$$\mathcal{P}_f = \{F + c, c \in C_I\},$$

où C_I est l'ensemble des fonctions constantes sur I .

Proposition 3 (Primitives usuelles).

Fonction	Paramètre	Une primitive	Intervalle déf.
$x \mapsto x^n$	$n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^p$	$p \in \mathbb{Z}, p < -1,$	$x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$x \mapsto x^\alpha$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \frac{1}{x}$		$x \mapsto \ln x $	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$x \mapsto \sqrt{x}$		$x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2}$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$		$x \mapsto 2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*

Fonction	Une primitive	Intervalle déf.
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto -\ln \cos x $	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$x \mapsto \operatorname{sh} x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$x \mapsto \operatorname{ch} x$	\mathbb{R}
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x \ln(x) - x$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$] -1, 1[$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	\mathbb{R}

Fonction	Paramètre	Une primitive	Intervalle déf.
$x \mapsto e^{\lambda x}$	$\lambda \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	\mathbb{R}

Proposition 4.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soient F et G des primitives respectivement des fonctions f et g sur I , et deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

la fonction $\alpha F + \beta G$ est une primitive de la fonction $\alpha f + \beta g$ sur I .

Exemple 5.

Soit une fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

La fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ en est une primitive.

1.2 Fonctions composées.**Proposition 6** (Primitive et composée).

Soient deux fonctions $u : I \rightarrow J$, dérivable sur I , et $F : J \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur J . Alors, la fonction

$F \circ u$ est une primitive de $u' \times F' \circ u$ sur I .

En particulier, si F est une primitive de f sur \mathbb{R} , pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{a} F(ax + b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax + b)$.

Soit $u : I \rightarrow J$ une fonction dérivable sur I . Voici une liste de cas particuliers de la proposition 6 où F est une fonction usuelle dérivable sur l'intervalle J qui n'est pas précisé ici (on fait confiance au lecteur !)

Fonction	Une primitive
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$
$u'u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$)	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$
$u'e^u$	e^u

Fonction	Une primitive
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

Exemple 7.

Calculer pour chacune des fonctions ci-dessous une primitive (on précisera sur quel intervalle).

$$x \mapsto \sin(3x) \quad x \mapsto \cos x \sin x \quad x \mapsto x e^{x^2} \quad x \mapsto \tan x \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.3 Inverse de trinôme.

Soient a, b, c dans \mathbb{R} avec $a \neq 0$. Il s'agit ici de proposer une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

Trois cas se présentent.

- Le trinôme a une racine double γ .
On peut écrire

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - \gamma)^2}.$$

En voici une primitive :

$$F : x \mapsto -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x - \gamma} \quad x \in]-\infty, \gamma[\text{ ou }]\gamma, +\infty[.$$

- Le trinôme possède deux racines distinctes α et β . On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples, c'est-à-dire trouver deux constantes A et B (voir méthode de calcul plus bas) telles que

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

On connaît $\boxed{\frac{1}{x - \alpha} = \frac{d}{dx} \ln|x - \alpha|}.$

$$F : x \mapsto A \ln|x - \alpha| + B \ln|x - \beta| \quad x \in]-\infty, \alpha[\text{ ou }]\alpha, \beta[\text{ ou }]\beta, +\infty[.$$

Comme on le verra dans la méthode de calcul, on a toujours $B = -A$, ce qui permet d'écrire la primitive sous la forme $x \mapsto A \ln \left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right|$.

- Le trinôme n'a pas de racines réelles. On sait alors mettre le trinôme sous forme canonique : il existe deux constantes A et B telles que

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a((x + A)^2 + B^2)}.$$

On connaît $\boxed{\frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right)}.$ On a donc la primitive :

$$F : x \mapsto \frac{1}{aB} \arctan \left(\frac{x + A}{B} \right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Méthode.

Soient α et β deux réels distincts. Il existe deux constantes A et B réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\} \quad \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

Cette écriture est appelée **décomposition en éléments simples**.

On donne en classe deux méthodes pour trouver A et B (qui sont opposés).

Méthode.

Mise sous forme canonique : pour $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$ax^2 + bx + c = a \underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)}_{\text{début de } (x + \frac{b}{2a})^2} = a \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

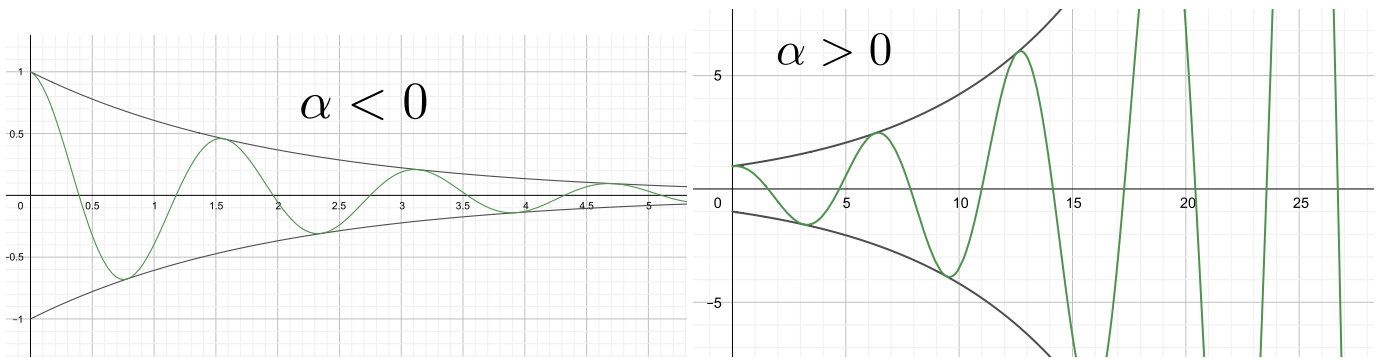
Exemple 8.

Calculer une primitive des fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

1.4 Primitive d'une fonction $t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On veut calculer une primitive pour chacune des deux fonctions

$$f : t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad g : t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^*.$$



Méthode : passer dans \mathbb{C} . Pour t réel, on a

$$e^{\alpha t} \cos(\omega t) = e^{\alpha t} \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(e^{(\alpha+i\omega)t}) \quad \text{et} \quad e^{\alpha t} \sin(\omega t) = e^{\alpha t} \operatorname{Im}(e^{i\omega t}) = \operatorname{Im}(e^{(\alpha+i\omega)t}).$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{\alpha + i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}$ est une primitive de $t \mapsto e^{(\alpha+i\omega)t}$ sur \mathbb{R} . On peut alors calculer

$$\begin{cases} F(t) &:= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}\right) \underset{\text{calcul}}{=} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)). \\ G(t) &:= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}\right) \underset{\text{calcul}}{=} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)). \end{cases}$$

La fonction F est une primitive de f et la fonction G est une primitive de g .

Exemple 9.

Calculer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto e^{3x} \cos(2x)$.

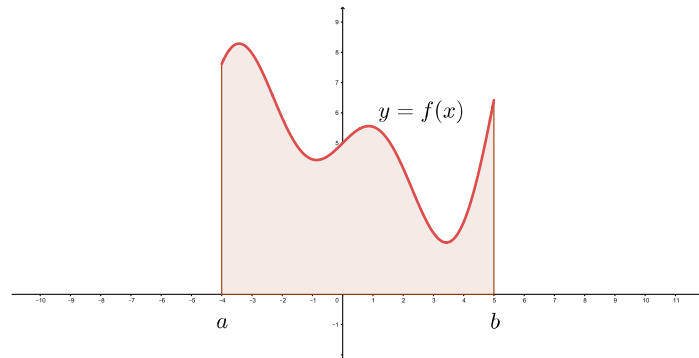
2 Calcul intégral et primitives.

2.1 Propriétés de l'intégrale.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I . Pour une telle fonction, la construction de l'intégrale de Riemann au second semestre donnera un sens au nombre $\boxed{\int_a^b f(t)dt}$.

Rappelons brièvement quelques propriétés entrevues au lycée ; elles seront démontrées en fin d'année.

0. Intégrale d'une constante. Si f est constante égale à C sur I , alors $\int_a^b Cdx = C(b-a)$.
1. Positivité. Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$) alors $\int_a^b f(t)dt$ est un nombre positif. Il représente l'aire sous la courbe de f entre a et b :



2. Croissance. Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$) et telles que $\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
3. Relation de Chasles. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, par définition, $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$. Notamment, $\int_a^a f(t)dt = 0$.
Si maintenant a, b, c sont trois points d'un intervalle I sur lequel f est continue, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

4. Linéarité. Si f et g sont deux fonctions continues sur I et que a et b sont deux réels de I , alors

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

En combinant les opérations somme et multiplication par un scalaire, on forme des combinaisons linéaires de fonctions. Pour λ, μ deux réels, alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

5. Inégalité triangulaire. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$) alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

2.2 Intégrales et primitives d'une fonction continue.

Le théorème suivant énonce que sous certaines conditions, la dérivation et l'intégration, deux opérations fondamentales en analyse, sont réciproques l'une de l'autre. Ce théorème sera démontré au second semestre dans le cours d'intégration.

Théorème 10 (Théorème fondamental de l'analyse).

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , a un élément de I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . La fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur I (c'est la primitive de f qui s'annule en a .)

Corollaire 11.

Si une fonction est continue sur un intervalle I , elle y admet des primitives.

Exemple 12.

Exprimer à l'aide du symbole intégrale une primitive de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et de $g : x \mapsto \ln^2(x)$.

Proposition 13 (Calculer une intégrale grâce à une primitive).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Rappel : pour une fonction F définie sur $[a, b]$, on note $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 14.

$$\text{Calcul de } I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t^3 dt \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^3 t dt \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx.$$

Exemple 15.

Domaine de définition et variations de $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

Notation.

Le lien qui vient d'être fait entre primitives et intégrale amène certain·e·s auteur·e·s à utiliser la notation

$$\int^x f(t)dt$$

pour désigner *une* primitive de f . Exemple : $\int^x \sin t dt = -\cos x$.

Avantage : évite d'introduire une nouvelle lettre pour désigner la primitive.

Inconvénient : peut amener à des confusions entre nombres et fonctions.

2.3 Intégration par parties.

Pour les intégrales, l'intégration par parties (souvent abrégée en "IPP") est le pendant de la formule de dérivée d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{i.e.} \quad u'v = (uv)' - uv'.$$

Faisons des hypothèses qui nous permettent d'écrire l'intégrale des fonctions ci-dessus. Pour assurer que des fonctions du type $u'v$ ou uv' sont *continues*, on va choisir u et v parmi les fonctions dérivables **dont la dérivée est continue**, ce qui motive la définition suivante.

Définition 16.

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **de classe \mathcal{C}^1** sur un intervalle I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I .

Théorème 17 (Intégration par parties).

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I et $a, b \in I$. On a

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Exemple 18.

Calculer les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ et $\int_0^{\pi} \operatorname{ch}(x) \sin(x) dx$ (double IPP pour cette dernière).

Exemple 19.

Calculer des primitives pour les fonctions :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x) \text{ et } g : x \mapsto \arctan(x).$$

2.4 Changement de variable.

Théorème 20 (Changement de variable).

Soit $\varphi : I \rightarrow J$, de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur J . Pour tous $a, b \in I$, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Les physiciens ont un moyen pour se souvenir de la formule : ils posent $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{cases}$

En remplaçant formellement, on a bien

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

et il n'y a plus qu'à écrire les bonnes bornes.

Exemple 21 (Appliquer la formule "dans les deux sens").

1. En posant $x = \sin t$, calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$.
2. À l'aide du changement de variable de votre choix, calculer $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$.

Exemple 22.

1. Calcul d'une primitive de $\frac{1}{\operatorname{ch}}$ sur \mathbb{R} .
2. Calcul d'une primitive de $\frac{1}{\sin}$ sur $]0, \pi[$ en posant $u = \cos x$.

Corollaire 23 (Intégrale d'une fonction paire, d'une fonction impaire).

Soit a un réel positif et f une fonction continue sur $[-a, a]$.

$$\text{Si } f \text{ est paire, } \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt. \quad \text{Si } f \text{ est impaire, } \int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

Corollaire 24.

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et T périodique, avec T un réel strictement positif.

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Exercices

8.1 [◆◆◆] Donner les primitives des fonctions suivantes (on précisera l'intervalle que l'on considère).

$$\begin{aligned} a : x \mapsto \cos x e^{\sin x} ; \quad b : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x} ; \quad c : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} ; \quad d : x \mapsto \frac{1}{3x+1} ; \\ e : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} ; \quad f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} ; \quad g : x \mapsto \sqrt{3x+1} ; \quad h : x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

8.2 [◆◆◆] [Issu du cahier de calcul]

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1. Sans chercher à les calculer, donner le signe des intégrales suivantes.

$$\int_{-2}^3 e^{-x^2} dx; \quad \int_5^{-3} |\sin x| dx; \quad \int_1^a \ln^7(x) dx \quad (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

2. En vous ramenant à des aires, calculer de tête

$$\int_1^3 7 dx; \quad \int_0^7 3x dx; \quad \int_{-2}^1 |x| dx.$$

8.3 [◆◆◆] Calculer les intégrales ci-dessous :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 x\sqrt{x} dx, \quad I_2 = \int_{-1}^1 2^x dx \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln^3(t)}{t} dt \quad I_4 = \int_0^1 \frac{x}{2x^2+3} dx, \quad I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2+3} dx, \\ I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \quad I_7 = \int_0^\pi |\cos x| dx \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx, \quad I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx. \end{aligned}$$

8.4 [◆◆◆] Calculer le nombre $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

1. À l'aide d'une IPP.
 2. À l'aide du changement de variable $x = t^2$.
-

8.5 [◆◆◆] Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}} dt \quad \text{en posant } t = u^2.$$

8.6 [◆◆◆] Calculer

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1} dt \quad \text{en posant } u = t^5.$$

8.7 [◆◆◆] En posant le changement de variable $u = \tan(x)$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx.$$

8.8 [◆◆◆] On pose

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

1. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, prouver que $C = S$.
 2. Calculer $C + S$, en déduire la valeur commune de ces deux intégrales.
-

8.9 [◆◆◆] On considère les deux intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1 + \sin(2t)}} dt \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1 + \sin(2t)}} dt$$

1. A l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - t$ calculer $I + J$.
 2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ montrer que $I = J$.
 3. En déduire I et J .
-

8.10 [◆◆◆] Que vaut

$$\int_{-666}^{666} \ln \left(\frac{1 + e^{\arctan(x)}}{1 + e^{-\arctan(x)}} \right) dx ?$$

8.11 [◆◆◆] Le but de cet exercice est de calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

1. Justifier que l'équation $\text{sh}(x) = 1$ possède une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α . Exprimer α à l'aide de la fonction \ln .
 2. Calculer J en posant $x = \text{sh}(t)$. On exprimera le résultat en fonction de α .
 3. À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une équation reliant I et J .
 4. En déduire une expression de I en fonction de α .
-

8.12 [◆◆◆] Calculer $\int_0^1 \arctan(x^{1/3}) dx$ en posant d'abord $x = t^3$.

8.13 [◆◆◆] Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$ en posant $x = \frac{\pi}{4} - u$.

8.14 [◆◆◆] Les intégrales de Wallis : attention, grand classique !

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le nombre

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

2. Démontrer les égalités suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

8.15 [◆◆◆] Pour tous entiers naturels p et q , on note

$$I(p, q) := \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
Avec un changement de variable, démontrer que $I(p, q) = I(q, p)$.
2. À l'aide de l'intégration par parties, démontrer

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad (p+1)I(p, q+1) = (q+1)I(p+1, q).$$

3. (a) Calculer $I(p, 0)$, pour un entier p donné.
(b) Démontrer enfin que

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

8.16 [◆◆◆] Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que $J_n = 2I_n + nI_{n-1}$ est indépendant de n . Déterminer sa valeur.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis, en utilisant la question **2.**, démontrer l'encadrement

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.
-

8.17 [◆◆◆] Calculer, pour tout entier naturel n , le nombre $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.
