Dénombrement

1 Cardinal d'un ensemble fini.

1.1 Cardinal d'un ensemble, d'une partie.

Définition 1 (point de vue naïf)**.**

Soit E un ensemble non vide. Il est dit fini s'il a un nombre fini d'éléments.

Ce nombre est appelé **cardinal** de E et noté $|E|$, ou $\#E$, ou $\mathrm{Card}(E)$.

On pose que l'ensemble vide est fini et que son cardinal est 0.

Par exemple, $\mathrm{Card}\left(\{\bigstar, \blacktriangledown, \square\}\right) = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathbb{U}_n| = n$.

Si a et b sont deux entiers relatifs avec $a \leq b$, $\mathrm{Card}(\llbracket a, b \rrbracket) =$.

Proposition 2 (La partie et le tout)**.**

Soit E un ensemble fini et A une partie de E.

- Toute partie A de E est un ensemble fini et $|A| \leq |E|$.
- Si A et B sont des parties de E, alors

$$A = B \iff \begin{cases} A \subset B \\ |A| = |B| \end{cases}$$

Ce résultat est admis, faute de définition suffisamment solide pour les ensembles finis et leurs cardinaux. Le slogan derrière l'implication $\Longleftarrow$: *si la partie est aussi grande que le tout, alors elle est égale au tout.*

1.2 Cardinal et réunion.

La proposition suivante est admise sans démonstration. Après, promis, on se met au travail.

Proposition 3 (Réunion de parties disjointes)**.**

Soit E un ensemble fini et A et B deux parties de E disjointes ($A \cap B = \emptyset$) ; alors la partie $A \cup B$ est finie et a pour cardinal

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $A_1, \dots A_n$ n parties d'un ensemble fini E, deux à deux disjointes, alors, leur réunion est un ensemble fini de cardinal

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|.$$

Dans le cas où les ensembles ci-dessus sont de même cardinal, on reformule ainsi :

« Le cardinal de la réunion de n ensembles disjoints, tous de cardinal p, est de cardinal np. »

L'énoncé précédent est appelé *principe du berger* : dans un troupeau de n brebis, il y a $4n$ pattes de brebis.

Proposition 4 (Cardinal du complémentaire)**.**

Soit E un ensemble fini et soient A et B deux parties de E . Alors

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|.$$

Notamment, le complémentaire de A dans E a pour cardinal $\left|\overline{A}\right| = |E \setminus A| = |E| - |A|$.

Proposition 5 (Réunion de parties quelconques)**.**

Soit E un ensemble fini et A et B deux parties de E. La partie finie $A \cup B$ a pour cardinal

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Exemple 6.

Compter tous les couples d'entiers (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$ tels que $i \geq j$.

Exemple 7 (Formule du crible pour trois parties)**.**

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble fini. Justifier que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

1.3 Cardinal et produit cartésien.

Rappel : si $A_1, \dots, A_p$ sont p ensembles, leur *produit cartésien*, ensemble de p-**uplets**, est défini par

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p = \{(a_1, \ldots, a_p), \quad a_1 \in A_1, \ldots, a_p \in A_p\}.$$

Proposition 8 (Cardinal d'un produit cartésien)**.**

• Soient A et B deux ensembles finis. Leur produit cartésien $A \times B = \{(x, y)\ x \in A, y \in B\}$ est un ensemble fini, de cardinal

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

• Plus généralement, si $A_1, A_2, \ldots A_p$ sont p ensembles finis ($p \in \mathbb{N}^*$). Alors

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots A_p| = \prod_{k=1}^{p} |A_k|.$$

Voici une explication *moins rigoureuse* que la preuve, qui décrit la **construction** d'un p-uplet de ce produit cartésien. Pour se donner un élément $(a_1, \ldots, a_p)$ de $A_1 \times A_2 \times \ldots A_p$, il faut

1. Choisir $a_1 \quad \longrightarrow n_1$ choix
2. Pour chaque valeur de a_1, on a n_2 choix pour $a_2 \quad \longrightarrow n_1 \times n_2$ choix pour (a_1, a_2)
3. En itérant, pour $k \in [\![2, p]\!]$, pour chaque $k-1$-uplet $(a_1, \ldots, a_{k-1})$, on a n_k choix pour a_k
   $\longrightarrow n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ choix pour $(a_1, \ldots, a_k)$

Bilan : $n_1 \cdot n_2 \cdots n_p$ constructions possibles (non rigoureux car l'écriture de produits n'est pas justifiée).

1.4 Cardinal et applications entre ensembles finis.

Dans les trois énoncés ci-dessous, E et F sont deux ensembles finis et non vides.

Proposition 9.

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Alors,

1. Si f est injective, alors $|E| \leq |F|$.
2. Si f est surjective, alors $|E| \geq |F|$.

Proposition 10 (Caractérisation de la bijectivité à l'aide du cardinal)**.**

Soit E et F deux ensembles finis et une application $f : E \to F$. Alors

1) f est bijective $\iff \begin{cases} f \text{ est injective} \\ |E| = |F|. \end{cases}$ 2) f est bijective $\iff \begin{cases} f \text{ est surjective} \\ |E| = |F|. \end{cases}$

Proposition 11 (Compter les applications de E dans F)**.**

L'ensemble des applications de E vers F, noté F^E est un ensemble fini et son cardinal est

$$\left|F^E\right| = |F|^{|E|}.$$

2 Listes et combinaisons.

Lorsqu'on voudra dénombrer (ou *compter*) des objets, on essaiera de modéliser la situation à l'aide d'objets mathématiques connus, appartenant à des ensembles dont on connaît le cardinal. Les objets qui seront utilisés sont essentiellement de deux types : les p-uplets, et les parties à p éléments. Avant de passer aux résultats de dénombrement proprement dit, on fait ci-dessous quelques rappels, et on introduit les mots *listes* et *combinaisons*, utilisés en combinatoire.

Définition 12 (*vocabulaire spécifique au dénombrement*).

Soit E un ensemble et p un entier naturel nul.

Un élément de E^p, c-à-d un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E peut être appelé **p-liste** de E.

Dans un p-uplet, $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p, certaines coordonnées peuvent être égales. De plus, l'ordre d'écriture des coordonnées est primordial. Ainsi,

$$(1, 2, 3, 3, 2) \text{ est un 5-uplet de } \mathbb{N} \text{ (une } \textit{5-liste}\text{), différent de } (1, 2, 2, 3, 3).$$

Définition 13 (*vocabulaire spécifique au dénombrement*).

Soit E un ensemble et p un entier naturel.

Une partie de E à p éléments $\{x_1, \dots, x_p\}$ pourra être appelée **p-combinaison** de E.

L'ensemble $\{1, 2, 4, 4\}$ est égal à l'ensemble $\{1, 2, 4\}$. C'est donc une 3-combinaison de $\mathbb{N}$.

Lorsqu'on écrira que $\{x_1, \dots, x_p\}$ est une p-combinaison de E, p sera alors le cardinal de E : pour une telle écriture, les x_i sont forcément deux à deux distincts.

Dans l'écriture $\{x_1, \dots, x_p\}$, l'ordre d'écriture des x_i n'a aucune importance :

$$\{1, 2, 3\} \text{ et } \{3, 2, 1\} \text{ sont la même 3-combinaison.}$$

2.1 p-uplets d'un ensemble fini.

Proposition 14 (Compter les p-uplets d'éléments de E).

Soit E un ensemble fini de cardinal n et un entier naturel non nul p.

Le nombre de p-uplets d'éléments de E est n^p.

Soit E un ensemble. On s'intéresse dans ce paragraphe aux p-uplets d'éléments de E *distincts deux à deux*. Ainsi, un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est un tel p-uplet si

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!] \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$$

Ces p-uplets (ou p-listes) particuliers sont parfois désignés comme des **p-arrangements** de E. Ainsi, la liste $(1, 5, 3)$ est un 3-arrangement de $\mathbb{N}$, $(1, 5, 5)$ n'en est pas un.

Proposition 15 (Compter les p-uplets d'éléments distincts).

Soit E un ensemble fini de cardinal n et un entier naturel non nul p.

Le nombre de p-uplets d'éléments de E deux à deux distincts est

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si} \quad p \leq n \\ 0 & \text{si} \quad p > n. \end{cases}$$

Si besoin : une proposition de notation pour l'ensemble des p-arrangements d'un ensemble E : $\mathcal{A}_p(E)$.
Le résultat principal de la proposition ci-dessus peut alors se récrire ainsi :

$$\text{si } E \text{ est un ensemble fini de cardinal } n \text{, et } p \in [\![0, n]\!] \text{, alors } \boxed{|\mathcal{A}_p(E)| = \frac{n!}{(n-p)!}}.$$

Corollaire 16 (Compter les injections, les bijections).

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. On suppose $p \leq n$.

Le nombre d'applications injectives allant de E dans F est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Il existe donc $n!$ bijections définies entre deux ensembles de même cardinal n.

En particulier, si E est un ensemble fini de cardinal n, son groupe symétrique (le groupe de ses permutations) est de cardinal $n!$

2.2 Parties d'un ensemble fini.

Proposition 17 (Compter les parties d'un ensemble fini).

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties de E vaut 2^n.

Le résultat peut se récrire ainsi : si E est un ensemble fini, $\boxed{|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}}$.

Rappel : On avait défini le coefficient binomial $\dbinom{n}{p}$ comme le quotient $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (cas non dégénérés) et prouvé que c'est un entier. Il est temps de comprendre pourquoi il se lit « p parmi n ».

Proposition 18 (Compter les parties à p éléments d'un ensemble fini).

Soient E un ensemble fini de cardinal n, et p un entier naturel.

Le nombre de parties de E ayant p éléments est $\dbinom{n}{p}$.

Si besoin : une proposition de notation pour l'ensemble des parties à p éléments d'un ensemble E : $\mathcal{P}_p(E)$.

Le résultat principal de la proposition ci-dessus peut se récrire ainsi :

$$\text{si } E \text{ est un ensemble fini de cardinal } n, \text{ et } p \in \mathbb{N}, \text{ alors } \boxed{|\mathcal{P}_p(E)| = \binom{n}{p}}.$$

On donne pour finir une preuve combinatoire des formules ci-dessous.

Proposition 19.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall p \in \mathbb{N} \ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}^* \ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}, \qquad \forall p \in \mathbb{N} \ \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

(symétrie) (formule *sans nom*) (formule de Pascal)

Et pourquoi ne pas aussi poser un regard combinatoire sur la formule du binôme... qui devient alors (presque) une évidence : pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Écrire un terme du développement, c'est choisir a ou b dans chacune des n *boîtes*.
La question est de savoir, pour k donné, combien de fois on va trouver $a^k b^{n-k}$ en développant tout ?
Réponse : il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k fois le terme a (et donc $n-k$ fois b)...

Et si on augmente le nombre de termes, à quoi ressemble la formule du *multinôme de Newton ?* Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_p$ des nombres complexes, on a

$$(a_1 + \ldots, a_p)^n = \sum_{k_1 + \cdots k_p = n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_p} a_1^{k_1} \cdots a_p^{k_p}$$

Que vaut le *coefficient multinomial* $\binom{n}{k_1,\ldots,k_p}$ pour un p-uplet $(k_1, \ldots, k_p)$ d'entiers naturels qui somment à n ?
Choisir un tel p-uplet, c'est

1. Choisir k_1 $\longrightarrow \binom{n}{k_1}$ choix
2. Pour chaque valeur de k_1, on a $\binom{n-k_1}{k_2}$ choix pour k_2 $\longrightarrow \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2}$ choix pour (k_1, k_2)
3. Itérons , pour chaque $p-1$-uplet $(k_1, \ldots, k_{p-1})$, on a $\binom{n-(k_1+\cdots+k_{p-1})}{k_p}$ choix pour k_p
$\longrightarrow \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{n-(k_1+\cdots+k_{p-1})}{k_p}$ choix pour $(k_1, \ldots, k_p)$

Évidemment, il faudrait justifier correctement ce qui précède et notamment l'écriture de produits avec celle d'union, de principes des bergers, etc... On se contentera ici de ce qui est écrit. On a finalement

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_p} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \times \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-(k_1+k_2))!} \cdots \frac{(n-(k_1+\cdots+k_{p-1}))!}{k_p!(n-n)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_p!}.$$

Exercices

$\boxed{\textbf{18.1}}$ **[♦◇◇]**
A Reuste-sur-Linuxe, charmant village francilien, il y a 52 célibataires : 20 femmes et 32 hommes.
Combien de nouveaux couples hétérosexuels peuvent être formés dans le village ? De couples homosexuels ?

$\boxed{\textbf{18.2}}$ **[♦◇◇]** Soit $n \geq 2$. On suppose que n couples se rencontrent et se serrent la main. Chaque personne serre la main de tous les autres sauf celle de son conjoint. Combien y-a-t il de poignées de main échangées ?

$\boxed{\textbf{18.3}}$ **[♦◇◇]** A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres de 1 à 9. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres. Par exemple $A2023$.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien y a-t-il de codes
   (a) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   (c) pour lesquels les quatres chiffres sont différents ?

$\boxed{\textbf{18.4}}$ **[♦♦◇]** Mes voisins font la fête et c'est l'heure de trinquer. J'entends 78 tintements de verres.
Combien sont-ils ?

$\boxed{\textbf{18.5}}$ **[♦♦◇]** Combien d'anagrammes ont les mots $MATHS$, $COLLE$, et $ABRACADABRA$?

$\boxed{\textbf{18.6}}$ **[♦◇◇]** Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler le nombre de parties de E.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, rappeler combien il existe de parties de E ayant k éléments.
3. Sait-on retrouver le résultat de la question 1 en connaissant celui de la question 2 ?

$\boxed{\textbf{18.7}}$ **[♦♦◇]** Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien existe-t-il de couples (A, x) avec A une partie de E et x un élément de E ?
2. Combien existe-t-il de couples (A, x) avec A une partie de E et x un élément de A ?

$\boxed{\textbf{18.8}}$ **[♦◇◇]** Soit $n \geq 1$. En développant $(1-1)^n$, démontrer qu'un ensemble E de cardinal n a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

$\boxed{\textbf{18.9}}$ **[♦♦♦]** 112eme et dernier exercice de la banque CCINP.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

18.10 **[♦◇◇]** Le principe des tiroirs.

« Lorsqu'on range des chaussettes dans des tiroirs,
s'il y a (strictement) plus de chaussettes que de tiroirs,
alors au moins un tiroir contiendra plus de deux chaussettes. »

Démontrer cette assertion en utilisant le cours. On pourra utiliser une application bien choisie...

18.11 **[♦♦◇]** Soit E un ensemble non vide et n son cardinal.
Exprimer en fonction de n les sommes

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} 1, \qquad \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} |X|, \qquad \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} |X\cap Y|, \qquad \sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} |X\cup Y|.$$

18.12 **[♦♦◇]** On dispose de 8 professeurs, à répartir dans 4 écoles.
Combien de répartitions sont possibles ?
Et combien si on impose deux professeurs par école ?

18.13 **[♦♦◇]** *Pas beaucoup de dénombrement mais le fait que l'ensemble est fini est essentiel.*
Soit G un groupe fini de cardinal pair. On travaille en notation multiplicative et on note e le neutre du groupe. On souhaite prouver l'existence d'un élément x de G tel que $x^2 = e$ et tel que $x \neq e$. On définit l'ensemble

$$E = \left\{x \in G \mid x^2 \neq e\right\}.$$

1. On définit sur E la relation $\sim$ par

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x \sim y \iff \left(x = y \;\text{ ou }\; x = y^{-1}\right).$$

   Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Conclure.

18.14 **[♦♦♦]** Formule de Vandermonde
Soient $(p,q,n) \in \mathbb{N}^3$. Proposer une démonstration combinatoire de l'identité ci-dessous.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

18.15 **[♦♦♦]** Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

18.16 **[♦♦♦]** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de solutions dans $\{0,1\}^n$ à l'équation

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n = p$$

18.17 **[♦♦♦]** Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

18.18 **[♦♦♦]** Soit E un ensemble à n éléments, où n est un entier supérieur à 2.
Combien existe-t-il de fonctions $f : E \to E$ telles que $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f)) = n-1$?
