

Chapitre 5

Ensembles

1 Ensembles et opérations.

1.1 Notations.

Définition 1: Naive

- Un **ensemble** non vide  $E$  est une collection d'objets  $x$  appelés **éléments**.
- On dit d'un élément  $x$  de  $E$  qu'il **appartient** à  $E$ , ce qui se note  $x \in E$   
Si l'objet  $x$  n'est pas un élément de l'ensemble  $E$ , on peut noter  $x \notin E$
- On pose qu'il existe un ensemble n'ayant pas d'éléments et que cet ensemble est unique.  
On l'appelle **ensemble vide** et on note  $\emptyset$ . Pour tout objet  $x$ , l'assertion  $x \in \emptyset$  est fausse.
- Signe  $\ll = \gg$ . Si  $x$  et  $y$  deux éléments d'un ensemble  $E$ , on notera  $x = y$  si on veut exprimer que  $x$  et  $y$  sont un seul et même élément de  $E$ .

Exemple 2: Ensembles de nombres

1.  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels :  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ;  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs.
2.  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\}$
3.  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres réels.  $\mathbb{R}_+^*$  celui des réels strictement positifs. On a  $\mathbb{R}_+^* = ]0, \infty[$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'ensemble des entiers compris entre 1 et  $n$  s'écrit

$$\{1, 2, \dots, n\}$$

,  
ou bien  $\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$ . Cet intervalle d'entiers pourra aussi être noté  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Exemple 3

Écrire de deux façons l'ensemble des couples de réels opposés.

**Preuve :**

En **extension**:  $\{(x, -x), x \in \mathbb{R}_+\}$   
En **compréhension**:  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = -b\}$

Méthode: Démontrer qu'un ensemble est vide

Le raisonnement par l'absurde peut être utile : on suppose que l'ensemble n'est pas vide, on prend un élément de l'ensemble, et on cherche une contradiction.

1.2 Inclusion.

Définition 4

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. On dit que  $A$  est **inclus** dans  $B$ , ce que l'on note  $A \subset B$ , si tout élément de  $A$  est un élément de  $B$  :

$$\forall x \in A \quad x \in B$$

Méthode

Pour prouver une inclusion  $A \subset B$ ,

1. On considère un élément de  $A$  ("Soit  $x \in A$ ")
2. puis on prouve qu'il est dans  $B$  (on devra conclure avec "donc  $x \in B$ ")

Exemple 5

Justifier que  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  puis que  $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$

Preuve :

Soit  $x \in \mathbb{Z}$ , on peut écrire  $x$  comme  $\frac{x}{1}$  avec  $x \in \mathbb{Z}$  et  $1 \in \mathbb{N}$

Ainsi on a donc  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$