100% ENTRAÎNEMENT

NOUVEAUX PROGRAMMES

MATHS

MPSI/MP2I

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

100% ENTRAÎNEMENT

Collection dirigée par Sylvain Rondy

MATHS

MPSI/MP2I

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

Avant-propos

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques (préparant aux écoles d'ingénieur) et économiques (préparant aux écoles de commerce et de management). L'objectif de cette collection est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficulté progressive, sans rappels de cours excepté dans les corrigés.

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires MPSI et MP2I qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 58 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

- **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.
- **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.
- **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le Vrai/Faux de la fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.
- **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs de cette collection ont compilé cet abondant vivier d'exercices pour que ce livre constitue une aide efficace pour le lecteur, non seulement pendant la première année de classe préparatoire, mais aussi par la suite.

Sylvain Rondy

Sommaire

Premier semestre

Deuxième semestre

1 Modes de raisonnement

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☐ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. Soit $n \geq 0$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par contraposée, que si n^2 est un entier pair alors n aussi.
2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exercice 4 –

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$$

Montrer par récurrence double que :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Exercice 5 –

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence forte, que tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 1$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 2, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 7 –

Soit u la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 6$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (-3n+5)\,3^n$$

Exercice 8 –

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon \implies x = 0$$

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Soit $b > 0$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = bu_n^2$$

Exercice 10 –

Déterminer la (ou les) fonction(s) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle(s) que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est le carré d'un entier, $2n$ ne l'est pas. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Tout entier positif est somme de trois carrés d'entiers naturels. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☒ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. On souhaite montrer que si n^2 est pair, alors n aussi. Supposons donc que n n'est pas pair et montrons que n^2 n'est pas pair. L'entier n est donc impair : il existe un entier $k \geq 0$ tel que $n = 2k+1$. Alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

et $2k^2 + 2k$ est un entier donc n^2 est impair. On a ainsi montré le résultat souhaité par contraposée.

Méthode

Soit P et Q deux propositions mathématiques. Montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie est équivalent à montrer que l'implication non$(Q) \Rightarrow$ non(P) est vraie. Autrement dit, pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que Q est fausse et montrer que P est fausse.

2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Sachant que ce nombre est strictement positif, il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

et sans perte de généralité, on peut supposer que cette fraction est irréductible (autrement dit, p et q sont premiers entre eux). On a alors $q\sqrt{2} = p$ donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est un entier pair donc p aussi d'après la question 1. Ainsi, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$. Alors :

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ce qui implique que $q^2 = 2k^2$. Ainsi, q^2 est pair donc q aussi d'après la question 1. On en déduit que p et q sont tous les deux divisibles par 2 ce qui est absurde car p et q sont supposés premiers entre eux. On vient donc de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Cours

L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Un réel est irrationel si il n'est pas rationnel.

Méthode

Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Exercice 3 –

On a $2^1 = 2 > 1$ donc l'inégalité souhaitée est vraie au rang 1.

Soit $n \geq 1$ tel que $2^n > n$. Montrons que $2^{n+1} > n+1$. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n$$

par hypothèse de récurrence. Or $n \geq 1$ donc $2n = n + n \geq n + 1$. On en déduit que :

$$2^{n+1} > 2n \geq n + 1$$

ce qui montre le résultat souhaité.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Méthode

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer par récurrence une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— On conclut.

Exercice 4 –

On a :

$$\frac{a_0}{0!} = 1 \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{1!} = 1 \leq 1$$

L'inégalité à montrer est donc vraie aux rangs 0 et 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_n}{n!} \leq 1 \quad \text{et} \; \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leq 1$$

Montrons que :

$$a_{n+2} \leq (n+2)!$$

On a par hypothèse de récurrence et sachant que les termes sont positifs :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + (n+1)a_n \\ &\leq (n+1)! + (n+1)n! \\ &\leq 2(n+1)! \\ &\leq (n+2)(n+1)! \\ &\leq (n+2)! \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait prouver.

Par récurrence double, on vient donc de montrer l'inégalité souhaitée :

$$\forall n \geq 0, \; \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Méthode

Pour démontrer par récurrence double une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq 0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq 0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et montre alors que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

— On conclut.

Ce type de raisonnement est particulièrement adapté dans le cas de certaines suites dont un terme dépend des deux précédents. On adapte évidemment le raisonnement si la propriété est définie à partir d'un autre rang que 0.

Exercice 5 –

$2 = \prod_{k=1}^{1} 2$ est bien un produit de nombres premiers (2 est premier).

Soit $n \geq 2$ tel que $2, 3, \ldots, n-1$ vérifient la propriété souhaitée. Distinguons deux cas. Si n est premier, le résultat est évident. Sinon, il existe deux entiers naturels i et j, compris entre 2 et $n-1$ tels que $n = ij$. Par hypothèse de récurrence, i et j s'écrivent comme un produit de nombres premiers donc $n = ij$ aussi.

On vient donc de montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers.

Méthode

Pour démontrer par récurrence forte une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout entier $k \in \{n_0, \ldots, n-1\}$ et montre alors que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

— On conclut.

Exercice 6 –

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$. Ainsi la propriété est vérifiée au rang 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à deux tel que :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Montrons que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

On sait que :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Par hypothèse de récurrence on sait que $0 \leq u_n \leq 1$. Il est clair que :

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

et on a :

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \geq 0$$

car $n \geq 2$. Ainsi, u_n et $1 - \frac{1}{n^2}$ sont deux nombres compris entre 0 et 1. Par produit, u_{n+1} appartient donc lui aussi à $[0, 1]$.

La propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 7 –

On a :

$$(-3 \times 0 + 5)\, 3^0 = 5 = u_0 \quad \text{et} \quad (-3 \times 1 + 5)\, 3^1 = 2 \times 3 = 6 = u_1$$

L'égalité souhaitée est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = (-3n + 5)\, 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (-3(n+1) + 5)\, 3^{n+1} = (-3n + 2)\, 3^{n+1}$$

Montrons que :

$$u_{n+2} = (-3(n+2) + 5)\, 3^{n+2} = (-3n - 1)\, 3^{n+2}$$

Par définition de u, on sait que :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6\,(-3n + 2)\, 3^{n+1} - 9\,(-3n + 5)\, 3^n \\ &= 2\,(-3n + 2)\, 3^{n+2} - (-3n + 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-6n + 4 + 3n - 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-3n - 1)\, 3^{n+2} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

Par récurrence double, on vient donc de montrer que la propriété de l'énoncé est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

> **Cours**
> Ce type de suite est appelé suite récurrente linéaire d'ordre deux. Un résultat du programme permet d'obtenir leur terme général (voir fiche 19).

Exercice 8 –

Raisonnons par contraposée. Soit x un réel non nul.

Montrons l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x^2 > \varepsilon$.

> Non($\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon$) = ($\exists \varepsilon > 0 \mid x^2 > \varepsilon$)

Posons :

$$\varepsilon = \frac{x^2}{2}$$

Sachant que x est non nul, il est clair que $\varepsilon \in \left]0, x^2\right[$ ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 9 –

> Il est toujours utile de calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence. Cela permet de conjecturer le signe, les variations, l'expression du terme général...

On a :

$$u_1 = b u_0^2$$

puis :

$$u_2 = bu_1^2 = b(bu_0^2)^2 = b^3 u_0^4$$

et :

$$u_3 = bu_2^2 = b^7 u_0^8$$

On conjecture alors :

Attention : $u_0^{2^n}$ n'est pas $(u_0^2)^n$

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

On montre cette égalité par récurrence. Elle est vraie au rang 0 car :

$$b^{2^0-1} u_0^{2^0} = b^0 u_0^1 = u_0$$

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

Montrons que :

$$u_{n+1} = b^{2^{n+1}-1} u_0^{2^{n+1}}$$

Par définition de la suite, on a :

$$u_{n+1} = bu_n^2$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b\left(b^{2^n-1} u_0^{2^n}\right)^2 \\ &= bb^{2(2^n-1)} u_0^{2\times 2^n} \\ &= b^{1+2^{n+1}-2} u_0^{2^{n+1}} \\ &= b^{2^{n+1}-1} u_0^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc par principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

Exercice 10 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction solution du problème posé :

On dit que f est solution d'une équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

On en déduit qu'en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x - f(0)) = 1 - x$$

En remplaçant x par $x + f(0)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x - f(0)$$

Pour $x = 0$, on en déduit que $f(0) = 1 - f(0)$ donc $f(0) = \frac{1}{2}$ et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} - x$$

Synthèse. Vérifions que la fonction f obtenue est bien solution. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x - f(y)) &= f(x - \tfrac{1}{2} + y) \\ &= \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2} + y\right) \\ &= 1 - x - y \end{aligned}$$

La seule solution du problème posé est donc $f : x \mapsto \frac{1}{2} - x$.

Méthode

Le raisonnement par analyse-synthèse est très utile pour des problèmes du type :

— Trouver les fonctions telles que ...

— Trouver les suites telles que ...

— Trouver les couples de réels tels que ...

Dans l'analyse, on considère une solution du problème et en utilisant les données de l'énoncé, on essaie de trouver des conditions sur cette solution. Dans la synthèse, on vérifie si les conditions trouvées suffisent (il peut arriver que non : on peut alors tenter de trouver d'autres conditions et il peut arriver qu'aucune solution n'existe).

Exercice 11 –

1. Vrai. Soit $n \geq 1$ s'écrivant comme le carré d'un entier : $n = k^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que $2n$ est aussi le carré d'un entier : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n = p^2$. On en déduit que $p^2 = 2k^2$ donc par stricte positivité de p et k :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{k}$$

ce qui implique que $\sqrt{2}$ est rationnel ce qui est absurde. Ainsi, $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

2. Faux. Il suffit de trouver un contre-exemple. En étudiant les premières valeurs de n, on remarque que la propriété est fausse pour $n = 7$. En effet, si il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$7 = a^2 + b^2 + c^2$$

alors a, b et c appartiennent nécessairement à $\{0, 1, 2\}$ (sinon, la somme est supérieure ou égale à 9). On vérifie alors facilement qu'aucun triplet n'est solution.

Méthode

Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier $n \geq 0$ est fausse, il suffit de donner un contre-exemple concret.

2 Ensembles et applications

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$	☐ Vrai	☐ Faux
2. $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
3. $A \subset B \iff \exists x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$	☐ Vrai	☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Donner l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 3 –

On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = [0, 2]$, $B = [1, 2]$, $C = [1, 3]$. Donner explicitement les ensembles suivants :

— $A \cup B$.

— $A \cup C$.

— $A \cap C$.

— $A \backslash B$.

— $(\mathbb{R} \setminus A) \cap C$.

Exercice 4 –

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = -x$$

1. $f \circ g$ est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si oui, donner son expression.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f \circ g(x) = x$.

Exercice 5 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 1$$

1. Déterminer l'image directe de $[0, 2]$ par f.
2. Déterminer l'image réciproque de $[1, 4]$ par f.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –

Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble telles que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$. Montrer que $A = B$.

Exercice 7 –

Soit X une partie d'un ensemble E. On définit la fonction indicatrice de X, $\mathbf{1}_X : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, de la manière suivante :

$$\forall e \in E,\ \mathbf{1}_X(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in X \\ 0 & \text{si } e \notin X \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E. Exprimer les fonctions indicatrices de $E \setminus A$, $A \cap B$, $A \cup B$ en fonction des fonctions indicatrices de A et B.

Exercice 8 –

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer les assertions suivantes :

1. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(F)^2,\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Soit A, B deux parties d'un ensemble E.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$ admette au moins une solution.
2. Résoudre dans ce cas cette équation.

Exercice 10 –

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ f$.

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$ ☒ Vrai ☐ Faux
2. $A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ x \in B$ ☒ Vrai ☐ Faux
3. $A \subset B \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ x \in B$ ☐ Vrai ☒ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$ ☒ Vrai ☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

— On définit la réunion de A et B, et on note $A \cup B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

— On définit l'intersection de A et B, et on note $A \cap B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$$

— On définit le complémentaire de A dans E, et on note $E \backslash A$, le sous-ensemble de E défini par :

$$E \backslash A = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

On a les propriétés suivantes (distributivité) :

$$\left\{\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right.$$

Exercice 2 –

Notons E cet ensemble. Alors :

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$$

Cours

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est l'ensemble des sous-ensembles de E. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, et l'ensemble E sont des parties de E.

Exercice 3 –

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cup B$ si et seulement si x appartient à A ou x appartient à B. Or B est inclus dans A donc $A \cup B = A = [0, 2]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cup C$ si et seulement si x appartient à A ou x appartient à C.

On en déduit que $A \cup C = [0, 3]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cap C$ si et seulement si x appartient à A et x appartient à C. On en déduit que $A \cap C = [1, 2]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \setminus B$ si x appartient à A mais pas à B donc $A \setminus B = [0, 1[$.

— Pour tout réel x, x appartient à $(\mathbb{R} \setminus A) \cap C$ si et seulement si x n'appartient pas à A et x appartient à C donc si et seulement si $x < 0$ ou $x > 2$ et $x \in [1, 3]$. Ainsi, $(E \setminus A) \cap C =]2, 3]$.

Exercice 4 –

1. On a f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de même pour g donc $f \circ g$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-x) = \ln(1 + e^{-x})$$

Cours

Soit A, B et C trois ensembles $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle *application composée* de f par g et on note $g \circ f$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f & : & A & \longrightarrow & C \\ & & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Dans le cas de deux fonctions, les ensembles d'arrivées ne sont pas forcément précisés. Pour déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$ dans le cas de deux fonctions f et g définies sur A et B, on détermine les éléments $a \in A$ tels que $f(a) \in B$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f \circ g(x) &= \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln(1 + e^x) - \ln(1 + \tfrac{1}{e^x}) \\ &= \ln(1 + e^x) - \ln(\tfrac{e^x+1}{e^x}) \\ &= \ln(1 + e^x) - (\ln(e^x + 1) - \ln(e^x)) \\ &= \ln(e^x) \\ &= x \end{aligned}$$

Exercice 5 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x varie de 0 à 2, alors x^2 prend toutes les valeurs entre 0 et 4 donc $3x^2$ prend toutes valeurs entre 0 et 12 et finalement, $f(x)$ prend toutes les valeurs entre 1 et 13. Ainsi :

$$f([0, 2]) = [1, 13]$$

Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour une partie X de E, on définit l'image directe de X par f, et on note $f(X)$, la partie de F définie par :

$$f(X) = \{f(x),\ x \in X\} = \{y \in F,\ \exists x \in X,\ f(x) = y\}$$

2. Cherchons les réels x tels $f(x) \in [1,4]$. Cela revient à résoudre :

$$1 \leq 3x^2 + 1 \leq 4$$

ou encore :

$$0 \leq 3x^2 \leq 3$$

ce qui est équivalent à $x^2 \in [0,1]$. Ainsi :

$$f^{-1}([1,4]) = [-1,1]$$

Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour une partie Y de F, on définit l'image réciproque de Y par f, et on note $f^{-1}(Y)$, la partie de E définie par :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E, f(x) \in Y\}$$

Exercice 6 –

Montrons le raisonnement par double inclusion. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup C$ donc $x \in B \cup C$ par hypothèse. On en déduit que x appartient à B ou à C. Distinguons deux cas :

— Si x appartient à B, c'est ce que l'on voulait montrer.

— Si x appartient à C alors il appartient à $A \cap C$. Or $A \cap C = B \cap C$ donc x appartient à B.

On vient donc de montrer que pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc A est inclus dans B.

Par un raisonnement analogue (on échange les rôles de A et de B), on montre que B est inclus dans A. Ainsi, $A = B$.

Méthode

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A = B$ est équivalent à montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exercice 7 –

— Soit $x \in E$. Alors $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si et seulement si $x \notin A$ donc si et seulement si $x \in E \setminus A$. Une fonction indicatrice ne prenant que deux valeurs, on a aussi que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si et seulement si $x \notin E \setminus A$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$$

où 1 désigne abusivement la fonction constante égale à 1.

— Soit $x \in E$. Alors x appartient à $A \cap B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_B(x) = 1$ donc (sachant qu'une fonction indicatrice vaut 0 ou 1) si et seulement si $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

— La partie $A \cup B$ de E est l'union disjointe des éléments de A qui ne sont pas dans B, des éléments de B qui ne sont pas dans A et des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. En se basant sur ceci, posons :

$$f = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

Soit $x \in A \cup B$. Distinguons les trois cas précédents. Si $x \in A \setminus B$ alors :

$$f(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 + 0 - 1 \times 0 = 1$$

De même, si $x \in B \setminus A$, on obtient $f(x) = 1$. Pour finir, si $x \in A \cap B$:

$$f(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 \times 1 = 1$$

Si $x \notin A \cup B$ alors il est clair que $f(x) = 0$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$$

Exercice 8 –

1. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \subset B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Or a appartient à A qui est inclus dans B donc a appartient à B. On en déduit que y appartient à $f(B)$. Ainsi, $f(A) \subset f(B)$.
2. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$. Soit $y \in f(A\cap B)$. Il existe $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$. On sait que x appartient à A et x appartient à B donc $y = f(x)$ appartient à $f(A)$ et $f(B)$. Ainsi, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Raisonnons par double inclusion.
   — Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si x appartient à A alors dans ce cas $y = f(x)$ appartient à $f(A)$. Si x n'est pas dans A, il est nécessairement dans B (car $x \in A \cup B$) et de la même manière on montre que y appartient à $f(B)$. Ainsi :

   $$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

   — On sait que $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc d'après la question 1 :

   $$f(A) \subset f(A \cup B) \;\text{ et }\; f(B) \subset f(A \cup B)$$

   On en déduit que :

   $X \subset W$ et $Y \subset W \Longrightarrow X \cup Y \subset W$

   $$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

   Par double inclusion, on vient de montrer que :

   $$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

4. Soit $x \in E$. Alors x appartient à $f^{-1}(A \cup B)$ si et seulement si $f(x)$ appartient à A ou B donc si et seulement si x appartient à $f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B)$. On en déduit le résultat souhaité :

   $$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Exercice 9 –

1. Raisonnons par analyse-synthèse.
   Analyse. Supposons l'existence d'une solution X à l'équation $A \cup X = B$.
   On a alors $A \subset A \cup X = B$ donc A est une partie de B.

   On cherche une condition sur A et B

Synthèse. Supposons que A est une partie de B. Remarquons alors que :

$$A \cup (B \setminus A) = B$$

donc l'équation de l'énoncé a au moins une solution.

Ainsi, l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$ admet une solution si et seulement si $A \subset B$.

2. On suppose que A est une partie de B. Une partie $X \in \mathscr{P}(E)$ est solution de $A \cup X = B$ si et seulement si X est une partie de B telle que $(B \setminus A) \subset X$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathscr{S} = \{X \in \mathscr{P}(E),\ (B \setminus A) \subset X \subset B\}$$

Méthode

Pour ce type d'exercice, un bon dessin permet de conjecturer la condition nécessaire et suffisante.

Exercice 10 –

Soit $x \in [0,1]$. Remarquons que $f(x) \in [0,1]$ donc $f \circ f(x)$ est bien défini. Distinguons deux cas.

— Si $x \in \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x \in \mathbb{Q}$ donc $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x$.

— Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1 - x$. Le réel $1 - x$ n'est pas rationnel (sinon $-x$ le serait donc x aussi ce qui est faux) donc :

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$$

On en déduit que $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

L'application identité d'un ensemble envoie chaque élément sur lui-même

Exercice 11 –

1. Vrai. Raisonnons par double inclusion. Le fait que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ implique que :

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \text{ et } \mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(B)$$

donc :

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

Montrons l'autre inclusion. Soit $X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Alors X est une partie de A et une partie de B donc X est une partie de $A \cap B$. Ainsi :

$$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cap B)$$

On en déduit que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

2. Faux. Donnons un contre exemple en posant $E = \mathbb{R}$, $A = [0,2]$ et $B = [1,3]$.

On a alors $A \cup B = [0,3]$. Le segment $[0,3]$ est donc une partie de $A \cup B$ mais n'est pas une partie de A, ni de B.

3 Injections, surjections, bijections

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) = x^2$$

1. f est injective.	☐ Vrai	☐ Faux
2. f est surjective.	☐ Vrai	☐ Faux
3. f est bijective.	☐ Vrai	☐ Faux
4. g est injective.	☐ Vrai	☐ Faux
5. g est surjective.	☐ Vrai	☐ Faux
6. g est bijective.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \left]e^2, +\infty\right[$ définie par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = e^{2+1/x}$$

1. Montrer que f est une application.
2. Montrer que f est bijective et donner son application réciproque.

Exercice 4 –

Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, f aussi.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g aussi.

3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Pour aller plus loin

Exercice 5 –

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 6 –

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Fixons A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F.

1. On peut toujours définir la restriction de f à une partie de E.	☐ Vrai	☐ Faux
2. La restriction de f à A est injective si f l'est.	☐ Vrai	☐ Faux
3. La co-restriction de f à B est bien définie.	☐ Vrai	☐ Faux
4. Si f est injective, la co-restriction de de f à $f(E)$ est bijective.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. f est injective.	☐ Vrai	☒ Faux
2. f est surjective.	☐ Vrai	☒ Faux
3. f est bijective.	☐ Vrai	☒ Faux
4. g est injective.	☐ Vrai	☒ Faux
5. g est surjective.	☒ Vrai	☐ Faux
6. g est bijective.	☐ Vrai	☒ Faux

Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

— On dit que f est *injective* lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f. Montrer que f est injective est équivalent à vérifier :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

— On dit que f est *surjective* lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

— On dit que f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective ce qui revient à dire que :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$$

Exercice 2 –

Remarquons que $g \circ f : E \to G$ est bien définie.

1. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Par définition, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or g est injective (et $f(x), f(x')$ sont deux éléments de F) donc $f(x) = f(x')$. Or f est injective donc $x = x'$.

On en déduit que $g \circ f$ est injective.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

— Pour montrer que f est injective, on se donne deux éléments quelconques x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.

— Pour montrer que f n'est pas injective, on cherche deux éléments distincts de E ayant la même image par l'application f.

2. Soit $z \in G$. L'application $g : F \to G$ est surjective donc il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Or $f : E \to F$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On en déduit que :

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

On en déduit que $g \circ f$ est surjective.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

— Pour montrer que f est surjective, on fixe un élément de F et on montre qu'il admet un antécédent par f.

— Pour montrer que f n'est pas surjective, on cherche un élément de F n'admettant pas d'antécédent par f.

Exercice 3 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\frac{1}{x}$ existe donc $f(x)$ aussi. De plus, on a :

$$2 + \frac{1}{x} > 2$$

donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$f(x) = \exp\left(2 + \frac{1}{x}\right) > \mathrm{e}^2$$

Ainsi, $f(x)$ appartient à $]\mathrm{e}^2, +\infty[$. On en déduit que f est une application bien définie.

2. Soit $y \in \left]\mathrm{e}^2, +\infty\right[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = y \iff \exp\left(2 + \frac{1}{x}\right) = y \iff 2 + \frac{1}{x} = \ln(y)$$

car $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective. On en déduit que :

$$f(x) = y \iff \frac{1}{x} = \ln(y) - 2$$

Or $y > \mathrm{e}^2$ donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\ln(y) > 2$ donc $\ln(y) - 2 > 0$. Finalement, on a :

$$f(x) = y \iff x = \frac{1}{\ln(y) - 2}$$

D'après le raisonnement suivant, on sait que le réel $\frac{1}{\ln(y)-2}$ est strictement positif. On en déduit que f est bijective et l'application $f^{-1} : \left]\mathrm{e}^2, +\infty\right[\to \mathbb{R}_+^*$ est définie par :

$$\forall y > \mathrm{e}^2,\ f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln(y) - 2}$$

Méthode

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour montrer que f est bijective, on peut suivre la démarche suivante :

— On fixe un élément y de F.

— On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

— On montre qu'il y a une unique solution x (exprimée en fonction de y) sans oublier de vérifier que celle-ci appartient bien à E.

L'application réciproque de f, notée f^{-1}, est l'application définie sur F à valeurs dans E définie de la manière suivante : pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f (autrement dit, c'est l'élément x obtenu précédemment).

Exercice 4 –

1. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Or $g \circ f$ est injective donc $x = x'$. Ainsi, f est injective.
2. Soit $z \in G$. On sait que $g \circ f$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. On en déduit que :
$$g(f(x)) = z$$
et $f(x) \in F$. Ainsi, g est surjective.
3. D'après la question 1, f est injective donc bijective (car surjective).
On peut alors écrire :

La composition d'applications est associative

$$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$$

Ainsi, g est la composée de deux applications injectives donc est injective (exercice 2).
4. D'après la question 2, l'application g est surjective donc bijective (car injective). On peut alors écrire :
$$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$$
Ainsi, f est la composée de deux applications surjectives donc est surjective (exercice 2).

À retenir

Une bijection réciproque est évidemment bijective.

Exercice 5 –

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On résout l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

— Si $m > 0$: dans ce cas, si n est pair, $f(n)$ est toujours différent de m car $f(n) \leq 0$. On cherche donc n impair tel que $f(n) = m$, ou encore :
$$\frac{n+1}{2} = m$$
ce qui est équivalent à $n = 2m - 1$. Remarquons que $2m - 1$ est bien un entier naturel car $m \in \mathbb{N}^*$.

— Si $m \leq 0$: dans ce cas, si n est impair, $f(n)$ est toujours différent de m car $f(n) > 0$. On cherche donc n pair tel que $f(n) = m$, ou encore :
$$-\frac{n}{2} = m$$
ce qui est équivalent à $n = -2m$. Remarquons que $-2m$ est bien un entier naturel car $m \leq 0$.

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$ admet une unique solution. On en déduit que f est bijective.

Exercice 6 –

Supposons f injective. Soit $y \in E$. On a :

$$f \circ f \circ f(y) = f(y)$$

donc :

$$f(f(f(y))) = f(y)$$

Or f est injective donc $f(f(y)) = y$.
On en déduit que f est surjective (pour tout $y \in E$, $f(y)$ est un antécédent de y par f).

Supposons f surjective. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On sait que f est surjective donc $f \circ f$ aussi (composée de deux surjections : voir exercice 2). Il existe donc deux éléments y et z de E tels que :

$$x = f \circ f(y) \quad \text{et} \quad x' = f \circ f(z)$$

Or $f(x) = f(x')$ donc :

$$f \circ f \circ f(y) = f \circ f \circ f(z)$$

et ainsi par hypothèse, $f(y) = f(z)$. En appliquant f, on a :

$$x = f \circ f(y) = f \circ f(z) = x'$$

On en déduit que f est injective.

Exercice 7 –

1. On peut toujours définir la restriction de f à une partie de E.	⊠ Vrai	☐ Faux
2. La restriction de f à A est injective si f l'est.	⊠ Vrai	☐ Faux
3. La co-restriction de f à B est bien définie.	☐ Vrai	⊠ Faux
4. Si f est injective, la co-restriction de de f à $f(E)$ est bijective.	⊠ Vrai	☐ Faux

Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

— Pour toute partie A de E, la restriction de f à A, notée f_A, est l'application de A dans F définie par :

$$\forall x \in A,\ f_A(x) = f(x)$$

— Pour toute partie B de F contenant $f(E)$, la corestriction de f à B, notée f^B, est l'application de E dans B définie par :

$$\forall x \in E,\ f^B(x) = f(x)$$

4 Relations

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. La relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. La relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

On définit la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$:

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ a|b \iff \exists k \in \mathbb{N},\ b = ak$$

Montrer que cela définit sur $\mathbb{N}^*$ une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 3 –

Combien de classes d'équivalence a la relation de congruence modulo $n \geq 1$ sur $\mathbb{Z}$?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n$$

Cette relation est-elle une relation d'ordre ? Une relation d'équivalence ?

Exercice 5 –

1. Étudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$$
2. Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \mathscr{R} y \iff x\,\mathrm{e}^{y} = y\,\mathrm{e}^{x}$$
   a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence d'un réel x.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$. On dit qu'une partie F de E admet un élément maximal si il existe $y \in F$ tel que :

$$\forall f \in F, f \leq y$$

Montrer que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E (pour la relation $\leq$) est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin
On définit la relation d'équivalence suivante sur $\mathbb{Z}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x \mathscr{R} y \iff y - x \text{ est pair}$$

1. $\mathscr{R}$ a une infinité de classes d'équivalence deux à deux distinctes.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $\mathscr{R}$ admet uniquement deux classes d'équivalence distinctes.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. La relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.	☐ Vrai	☒ Faux

Exercice 2 –
Vérifions les différents points.

— Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Alors $a|a$ car $a = a \times 1$. La relation est donc réflexive.

— Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a|b$ et $b|a$. Alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que $b = ak$ et $a = bk'$. Alors :

$$b = ak = bkk'$$

donc $kk' = 1$ (b est non nul) et sachant que k et k' sont des entiers naturels, on en déduit que $k = k' = 1$ donc $a = b$. La relation est donc antisymétrique.

— Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a|b$ et $b|c$. Alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que $b = ak$ et $c = bk'$. Alors :

$$c = bk' = akk'$$

et $kk' \in \mathbb{N}$ donc $a|c$. Ainsi, la relation est transitive.

On en déduit que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

L'ordre n'est pas total car 2 n'est pas divisible par 3 et 3 n'est pas divisible par 2.

Cours

Soit E un ensemble. Une relation binaire de E est une partie de E^2. En notant $\mathscr{R}$ cette relation, on écrit $x \mathscr{R} y$ si (x, y) appartient à $\mathscr{R}$ et on dit que x est en relation avec y.

On dit que :

— $\mathscr{R}$ est réflexive si : $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x$.

— $\mathscr{R}$ est symétrique si : $\forall x, y \in E,\ x \mathscr{R} y \Longrightarrow y \mathscr{R} x$.

— $\mathscr{R}$ est antisymétrique si : $\forall x, y \in E,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x \Longrightarrow x = y$.

— $\mathscr{R}$ est transitive si : $\forall x, y, z \in E,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z \Longrightarrow x \mathscr{R} z$.

— $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

— $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

— Une relation d'ordre $\mathscr{R}$ est dite totale si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathscr{R} y \text{ ou } y \mathscr{R} x$$

Exercice 3 –

Elle en admet n : $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ (tout entier relatif est congru à 0, 1, ..., ou $n-1$ modulo n).

Cours

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On appelle classe d'équivalence d'un élément x de E, et on note $\overline{x}$, la partie de E définie par :

$$\overline{x} = \{y \in E,\ x \mathscr{R} y\}$$

Ces classes d'équivalence forment une partition de E : leur réunion est égale à E et deux classes d'équivalence d'éléments de E sont soit distinctes, soit égales.

Exercice 4 –

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x = x^1$ donc $x \preccurlyeq x$. Ainsi, cette relation est réflexive.

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$. Alors il existe deux entiers naturels n et m tels que $y = x^n$ et $x = y^m$. On a alors :

$$y = x^n = (y^m)^n = y^{nm}$$

On en déduit alors que :

Les termes sont strictement positifs

$$\ln(y) = nm \ln(y)$$

Distinguons deux cas.

Ne pas simplifier par un nombre sans savoir si il est non nul !

— Si $\ln(y) = 0$ alors $y = 1$ et $x = 1^m = 1$ donc $x = y$.

— Si $\ln(y) \neq 0$ alors $nm = 1$. Or n et m sont des entiers naturels donc $n = m = 1$ donc $y = x^1 = x$.

On vient donc de montrer que cette relation est antisymétrique.

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. Alors il existe deux entiers naturels n et m tels que $y = x^n$ et $z = y^m$. On a donc :

$$z = y^m = (x^n)^m = x^{nm}$$

et $nm \in \mathbb{N}$. On en déduit que $x \preccurlyeq z$. Ainsi, cette relation est transitive. C'est donc une relation d'ordre.

Montrons que cette relation n'est pas symétrique en donnant un contre-exemple. Il est clair que $2 \preccurlyeq 4$ car $4 = 2^2$ (et 2 est un entier naturel). Or, 4 n'est pas en relation avec 2 car $2 \neq 4^n$ pour tout entier naturel n. Ainsi, cette relation n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 –

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t} = (1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$$

Le signe de $f'(t)$ est donc le signe de $1 - t$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

2. a) Vérifions les différents points de la définition.

— Pour tout réel x, $x\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$ donc x est en relation avec x. La relation est donc réflexive.

— Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x \mathscr{R} y$ alors $x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x$ donc $y\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^y$ et y est donc en relation avec x. La relation est bien symétrique.

— Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$ alors :

$$x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad y\,\mathrm{e}^z = z\,\mathrm{e}^y$$

On en déduit que :

$$x\,\mathrm{e}^z = x\,\mathrm{e}^y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^z = y\,\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^z = y\,\mathrm{e}^z\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}$$

donc :

$$x\,\mathrm{e}^z = z\,\mathrm{e}^y\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y} = z\,\mathrm{e}^x$$

Ainsi, $x \mathscr{R} z$. La relation est donc transitive.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel y, $x \mathscr{R} y$ si et seulement si $x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x$ ce qui est équivalent à $f(x) = f(y)$. On en déduit que la classe de x est $f^{-1}(\{f(x)\})$.

D'après la question 1, on sait que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus, la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$ (par produit), celle en $+\infty$ est 0 (par croissances comparées) et $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

On distingue alors deux cas (en remarquant que $f(0) = 0$).

— Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Alors $f(x) \leq 0$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la classe de x ne contient qu'un seul élément (qui est x).

— Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, différent de 1. Alors $f(x) \in \left]0, e^{-1}\right[$. La fonction f est négative sur $\mathbb{R}_-$ (donc n'atteint pas la valeur $f(x)$ sur cet intervalle), elle est strictement croissante sur $]0,1[$ et continue sur cet intervalle donc réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]0, e^{-1}[$ et de même réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\left]0, e^{-1}\right[$. On en déduit alors que la classe de x contient deux éléments.

— Si $x = 1$, la classe de x ne contient qu'un seul élément (f n'atteint la valeur e^{-1} qu'en 1).

À retenir

Si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles E et F, on appelle image réciproque d'une partie de Y de E, et on note $f^{-1}(F)$, la partie de E suivante :

$$f^{-1}(F) = \{x \in E,\ f(x) \in F\}$$

Attention : cet ensemble existe toujours, même si f n'est pas bijective.

Exercice 6 –

Supposons que toute partie de E admet un élément maximal. Soit $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de E. L'ensemble $\{u_n,\ n \geq 0\}$ admet par hypothèse un élément maximal (car c'est une partie de E) donc il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n \leq u_{n_0}$$

Or u est croissante donc :

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n_0} \leq u_n$$

Par antisymétrie, on en déduit que :

Attention : la relation est quelconque, ce n'est pas la relation usuelle sur $\mathbb{R}$. Il est important de préciser l'antisymétrie !

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$$

donc u est stationnaire.

Raisonnons par contraposée pour montrer la deuxième implication. Supposons donc l'existence d'une partie F de E n'admettant pas d'élément maximal. Fixons un élément quelconque de F et nommons le u_0. Cet élément n'est pas un élément maximal donc il existe un élément de F, que l'on note u_1 tel que $u_0 \leq u_1$ et $u_0 \neq u_1$. Or cet élément u_1 n'est lui non plus pas un élément maximal de F : il existe donc un élément de F, que l'on note u_2 tel que $u_1 \leq u_2$ et $u_1 \neq u_2$. On construit donc de proche en proche, une suite d'éléments de F (donc de E), croissante et non stationnaire.

À retenir

Ne pas écrire $u_0 < u_1$ dans le raisonnement précédent car $<$ n'est pas défini ici ! La relation proposée n'est à priori pas la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 –

1. Faux. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Si x est pair alors x est en relation avec 0 et si x est impair alors x est en relation avec 1. Il ne peut donc y avoir au plus que deux classes d'équivalences distinctes : celle de 0 et celle de 1.
2. Vrai. Il y en a au plus deux d'après la question précédente et 0 et 1 ne sont pas en relation donc il y en a exactement deux.

5 Sommes et produits

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ☐ Vrai ☐ Faux
3. $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^n - 1$ ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \geq 1$. Donner la valeur des sommes suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Retrouver ensuite le résultat plus simplement en remarquant que pour tout entier k, $1 = 1 + k - k$.

Exercice 4 –

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$$

Exercice 5 –

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 6 –

Calculer les sommes doubles suivantes ($n \geq 1$) :

1. $S_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i - j|$.
2. $S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i, j)$.
3. $S_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la dérivée de $x \mapsto 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, déterminer pour tout réel x la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k$$

Exercice 8 –

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire le produit suivant à l'aide de factorielles :

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$$

Exercice 9 –

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et P_n le produit défini par :

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} \left(1 + a^{2^i}\right)$$

1. Calculer P_n dans le cas où $a = 1$.
2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$. Donner une expression simple de $(1-a)P_n$ puis de P_n en fonction de n et de a.

Pour aller plus loin

Exercice 10 –

Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

Exercice 11 –

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n \geq 1$.

1. $\sum_{k=1}^{n}(4k-2) = \sum_{k=1}^{n}(n+k)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ☒ Vrai ☐ Faux
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ☐ Vrai ☒ Faux
3. $1+2+4+\cdots+2^n = 2^n - 1$ ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (hors-programme à savoir retrouver)
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Exercice 2 –

Cours – **Formule du binôme de Newton**.

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On a :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

et comme $n \geq 1$:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$$

Exercice 3 –

On procède par récurrence.

Pour $n = 1$, on a d'une part :

Initialisation

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, on a ainsi l'égalité souhaitée au rang 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

Hérédité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Montrons que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

On sait que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^n + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité souhaitée.

Ainsi, la propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Donnons maintenant une autre preuve en utilisant l'indication. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k-k}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

par télescopage. On obtient donc le résultat souhaité car :

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Méthode

Une somme télescopique est une somme dont le terme général est de la forme :

$$a_{k+1} - a_k \text{ ou } a_k - a_{k+1} \text{ ou encore } a_k - a_{k-1}$$

En écrivant les deux premiers termes de la somme, on repère la quantité qui ne se simplifie pas (dans l'exemple précédent c'est $\frac{1}{1}$) ce qui nous permet de reconnaitre la quantité restant dans le dernier terme de la somme (on a gardé au début le terme positif, on garde donc à la fin le terme négatif, c'est-à-dire $-\frac{1}{n+1}$).

Exercice 4 –

Procédons par récurrence.

Pour $n = 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{0} k! = 0! = 1 \leq 1! = (0+1)!$$

L'inégalité souhaitée est donc vérifiée au rang 0.

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$$

Montrons que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! \leq (n+2)!$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k! &= \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \\
&\leq (n+1)! + (n+1)! \\
&= 2(n+1)!
\end{aligned}$$

Or $2 \leq n+2$ donc par positivité des termes :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! \leq (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée au rang $n+1$.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La factorielle de n, notée $n!$, est définie par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exercice 5 –

Soit $n \geq 1$. Alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

On repère ici une somme télescopique. On a :

$$S_n = (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln(n))$$

donc par télescopage :

$$S_n = -\ln(1) + \ln(n+1) = \ln(n+1)$$

Exercice 6 –

On découpe la somme double suivant le signe de $i - j$

1. On a :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |i-j| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} |i-j| + \sum_{j=i+1}^{n} |i-j| \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} (i-j) + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i) \right) \end{aligned}$$

car si $j \leq i$, $|i-j| = i-j$ et si $j > i$, $|i-j| = j-i$. On remarque alors par changement d'indice que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, on a :

$$\sum_{j=i+1}^{n} (j-i) = \sum_{j=1}^{n-i} j$$

donc :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{j=1}^{i} 1 - \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=1}^{n-i} j \right)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-i)(n-i+1)
\end{aligned}$$

Or on a pour $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé :

Cela revient à faire le changement d'indice $i' = n - i$

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)(n-i+1) = (n-1)n + (n-2)(n-1) + \cdots + 1 \times 2 + 0 \times 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$$

donc :

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$$

ce qui donne en isolant le dernier terme des deux premières sommes :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} i^2\\
&= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= \frac{n(n-1)(n+1)}{3}
\end{aligned}$$

après simplifications.

2. On a :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)
\end{aligned}$$

car si $j \leq i$, $\min(i,j) = j$ et si $j > i$, $\min(i,j) = i$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-(i+1)+1)i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{2} + \frac{i}{2} + (n-i)i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{i^2}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) i\right)
\end{aligned}$$

On utilise alors les valeurs des sommes usuelles :

$$\begin{aligned} S_2 &= -\frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{2n+1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

3. La sommation se résume avec l'inégalité suivante : $1 \leq i \leq j \leq n$. L'indice j varie donc de 1 à n et pour j fixé, i varie de 1 à j donc :

$$S_3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i$$

donc en utilisant la valeur des sommes usuelles :

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n+1} j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4} \end{aligned}$$

À retenir

Dans le cas où la sommation du deuxième indice d'une somme double dépend du premier indice, il peut être utile de résumer la plage de sommation en une inégalité avant de permuter les symboles de sommation.

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

La fonction f_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

Remarquons que si x est un réel différent de 1 alors :

Somme des termes d'une suite géométrique

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Pour tout réel x différent de 1, on en déduit que :

$$f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1 - x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

En multipliant par x les deux expressions obtenues pour $f_n'(x)$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

Si $x = 1$, on remarque pour finir que :

$$\sum_{k=1}^{n} k1^k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 8 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons P_n ce produit. Alors :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \cdots \times (2n))^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n(1 \times 2 \times \cdots \times n))^2} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$P_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Cours

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ce coefficient est un entier naturel.

Exercice 9 –

1. Si $a = 1$, on a :

$$P_n = \prod_{i=0}^{n}(1 + 1^{2^i}) = \prod_{i=0}^{n}(1 + 1) = \prod_{i=0}^{n} 2 = 2^{n+1}$$

car il y a $n + 1$ facteurs dans le produit.

2. On a :

$$P_n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \times \cdots \times (1 + a^{2^n})$$

donc :

$$(1 - a)P_n = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \times \cdots \times (1 + a^{2^n})$$

Or $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$ (identité remarquable). On a alors :

$$(1 - a)P_n = (1 - a^2)(1 + a^2)(1 + a^4) \times \cdots \times (1 + a^{2^n})$$

Or, de nouveau par identité remarquable, on a $(1 - a^2)(1 + a^2) = 1 - a^4$. Nous obtenons donc une nouvelle simplification :

$$(1 - a)P_n = (1 - a^4)(1 + a^4) \times \cdots \times (1 + a^{2^n})$$

On continue ainsi de suite jusqu'à obtenir :

$$(1 - a)P_n = (1 - a^{2^n})(1 + a^{2^n}) = 1 - (a^{2^n})^2 = 1 - a^{2\times 2^n} = 1 - a^{2^{n+1}}$$

Finalement, comme $a \neq 1$, on a :

$$P_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}$$

Méthode

Pour plus de rigueur, on peut confirmer l'égalité précédente avec un raisonnement par récurrence.

Exercice 10 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x,

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

En évaluant en 1, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

- En intégrant f sur $[0, 1]$ (c'est une fonction continue sur cet intervalle), on obtient maintenant :

$$\int_0^1 (1+x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

On a de plus :

$$\int_0^1 (1+x)^n \mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

- Déterminons la troisième somme (notons la S). On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2n+1-k} \\ &= \binom{2n+1}{2n+1} + \binom{2n+1}{2n} + \cdots + \binom{2n+1}{n+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ &= (1+1)^{2n+1} \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. On en déduit que $2S = 2^{2n+1}$ donc :

$$S = 2^{2n} = 4^n$$

À retenir

Soit $n \geq 0$ et $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On a la propriété de symétrie suivante :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Certaines valeurs usuelles doivent être retrouvées rapidement :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n \text{ et } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 11 –

Notons S cette somme. On a :

$$S = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p}$$

Or on a :

$$\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$$

donc :

$$\begin{aligned} S &= \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} \\ &= \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} \end{aligned}$$

d'après la formule de Pascal. En la réutilisant, on a :

$$S = \binom{p+3}{p+1} + \cdots + \binom{n}{p}$$

De proche en proche, on obtient :

$$S = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Méthode

On pouvait aussi remarquer que :

$$\forall k \in \{p+1, \dots, n\},\ \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$

et utiliser un télescopage.

Cours – Formule de Pascal.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Alors :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

ou encore :

$$\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1}$$

Exercice 12 –

1. Faux. L'égalité est clairement fausse pour $n = 2$.
2. Vrai. On a :

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n} 2(2k-1) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Or on a montré dans l'exercice 8 que :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

On en déduit alors que :

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}$$

De plus, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = (n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (2n)$$

et cette expression permet d'obtenir l'égalité souhaitée.

6 Trigonométrie

Les fonctions cosinus, sinus et tangente sont indispensables en mathématiques et plus généralement en sciences.

— Il est important de savoir retrouver toutes les formules trigonométriques (à l'aide du cercle par exemple ou en revenant aux formules d'addition).

— La périodicité de ces trois fonctions est cruciale pour la résolution d'équations et d'inéquations ou encore pour réduire l'ensemble d'étude d'une fonction.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(p) + \sin(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. La fonction tangente est impaire sur son ensemble de définition.	☐ Vrai	☐ Faux
4. Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) + \cos(2x)$.

Exercice 3 –

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\tan(x) = \sqrt{3}$.

Exercice 4 –

Soit x un réel ne s'écrivant pas sous la forme $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Exprimer $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$ et prouver ce résultat.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 6 –

Résoudre $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{3\pi}{4})$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 –

Résoudre l'inéquation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) \geq 1$ d'inconnue $x \in [0, \pi]$.

Exercice 8 –

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, noté $\mathscr{D}$, de f.
2. Justifier que l'étude de f sur $[0, \pi]$ suffit pour étudier f sur $\mathscr{D}$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et déterminer f'.
4. En déduire les variations de f sur $[0, \pi]$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Résoudre l'équation $\cos(x)^4 + \sin(x)^4 = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 –

Déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\tan(x)^2 \mathrm{d}x$.

Exercice 11 –

Soit x, y, z trois réels tels que :

$$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0$$

Montrer que $\cos(2x - y - z) = 1$.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $\sin(2x) = 2\sin(x)$ est équivalente à $\cos(x) = 1$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ☐ Vrai ☐ Faux
$$\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)^2}$$

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(p) + \sin(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. La fonction tangente est impaire sur son ensemble de définition. ☒ Vrai ☐ Faux
4. Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

Pour tout couple de réels (p,q), on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercice 2 –

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(x) + \cos(2x) = 2\cos\left(\frac{x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-2x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

par parité de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 –

1. On sait que :

Ne pas hésiter à tracer un cercle !

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On souhaite donc résoudre l'équation :

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ce qui est équivalent à :

$$x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

Ainsi, x est solution de l'équation si et seulement si :

$$x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Cours

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$\cos(x) = \cos(a) \iff x = a\ [2\pi] \text{ ou } x = -a\ [2\pi]$$
$$\sin(x) = \sin(a) \iff x = a\ [2\pi] \text{ ou } x = \pi - a\ [2\pi]$$

2. On sait que :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On souhaite donc résoudre l'équation :

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

ce qui est équivalent à :

$$x = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$$

Ainsi, x est solution de l'équation si et seulement si :

$$x \in \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. La fonction tangente est π-périodique sur son ensemble de définition. Résolvons, pour commencer, l'équation pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a :

$$\sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \tan(\tfrac{\pi}{3})$$

Or la fonction tangente est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\frac{\pi}{3}$ est l'unique solution de l'équation sur cet intervalle. Par π-périodicité, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

À retenir

La fonction tangente est π-périodique sur son ensemble de définition.

Exercice 4 –

Posons $t = \tan(\frac{x}{2})$ (qui existe par hypothèse sur x). On a :

Ces formules sont à retrouver rapidement

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Démontrons la première égalité. On a :

$$\sin(x) = \sin(2\tfrac{x}{2}) = 2\sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x}{2})$$

La condition donnée sur x impose que $\cos(\frac{x}{2})$ est non nul donc :

$$\sin(x) = 2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}\cos(\tfrac{x}{2})^2$$

Or on a :

On retrouve l'égalité suivante en connaissant les deux expressions de la dérivée de la fonction tangente

$$\frac{1}{\cos(\frac{x}{2})^2} = 1 + \tan(\tfrac{x}{2})^2 = 1 + t^2$$

On en déduit finalement :

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Montrons maintenant la deuxième égalité. On a :

$$\cos(x) = \cos(2\tfrac{x}{2}) = 2\cos(\tfrac{x}{2})^2 - 1$$

donc :

$$\cos(x) = 2 \times \frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Exercice 5 –

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Il est important de savoir relier $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ avec $\cos(x)$ et $\sin(x)$

$$\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$$

donc :

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$

Ainsi :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ car $\frac{\pi}{8} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

Exercice 6 –

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :

> Pour tout réel $\boldsymbol{a}$, $\sin\left(\boldsymbol{a} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\boldsymbol{a})$

$$\sin(x + \tfrac{3\pi}{4}) = \cos(x + \tfrac{\pi}{4})$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos(2x - \tfrac{\pi}{3}) = \sin(x + \tfrac{3\pi}{4}) &\iff \cos(2x - \tfrac{\pi}{3}) = \cos(x + \tfrac{\pi}{4}) \\ &\iff 2x - \tfrac{\pi}{3} = x + \tfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ 2x - \tfrac{\pi}{3} = -x - \tfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ &\iff x = \tfrac{7\pi}{12}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ x = \tfrac{\pi}{36}\ [\tfrac{2\pi}{3}]\end{aligned}$$

Exercice 7 –

Soit $x \in [0, \pi]$. L'inéquation est équivalente à :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{\sin(x)}{2} \geq \frac{1}{2}$$

ou encore :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) \geq \frac{1}{2}$$

ce qui finalement est équivalent à :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Or, on sait que x appartient à $[0, \pi]$ donc $x - \frac{\pi}{6}$ appartient à $[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$. On en déduit alors que :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Méthode

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ non nul et $x \in \mathbb{R}$. Il est utile dans de très nombreux exercices d'écrire :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = (a^2 + b^2)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\cos(x) + \frac{b}{a^2 + b^2}\sin(x)\right)$$

Posons $t = \frac{a}{a^2+b^2}$. On remarque alors que $t \in [-1, 1]$. Il existe donc un réel θ tel que $\cos(\theta) = t$. On en déduit que :

$$\sin(\theta)^2 = 1 - t^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \ \text{ donc } \ \sin(\theta) = \pm\frac{b}{a^2 + b^2}$$

et quitte à changer θ en $-\theta$, on en déduit finalement que :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = (a^2 + b^2)(\cos(\theta)\cos(x) + \sin(\theta)\sin(x)) = (a^2 + b^2)\cos(\theta - x)$$

Cette expression permet plus facilement d'obtenir le signe, de résoudre une équation...

Exercice 8 –

1. Pour tout réel x, $\cos(x) \geq -1$ donc $2+\cos(x)$ est strictement positif. Ainsi, f est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

2. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques donc f aussi. De plus, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$$
Ainsi, f est impaire sur $\mathbb{R}$. Si on étudie f sur $[0,\pi]$, on obtient son étude sur $[-\pi,\pi]$ par imparité puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

> **À retenir**
> La parité et la périodicité d'une fonction trigonométrique permettent de réduire l'intervalle d'étude de celle-ci.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions qui le sont avec un dénominateur ne s'annulant pas. Pour tout réel x, on a :
$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2+\cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)+\cos(x)^2+\sin(x)^2}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}$$

4. Soit $x \in [0,\pi]$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $2\cos(x)+1$. On a :
$$2\cos(x)+1 \geq 0 \iff \cos(x) \geq -\frac{1}{2} \iff x \in [0, \tfrac{2\pi}{3}]$$
Ainsi, f' est positive sur $[0,\frac{2\pi}{3}]$ et négative sur $[\frac{2\pi}{3},\pi]$. On en déduit que f est croissante sur $[0,\frac{2\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{2\pi}{3},\pi]$.

Exercice 9 –

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos(x)^2+\sin(x)^2 = 1$ donc $(\cos(x)^2+\sin(x)^2)^2 = 1$ ou encore :
$$\cos(x)^4 + 2\cos(x)^2\sin(x)^2 + \sin(x)^4 = 1$$
L'équation à résoudre est donc équivalente à $2\cos(x)^2\sin(x)^2 = 0$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 10 –

On sait que pour tout réel $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$, $\tan'(x) = 1+\tan(x)^2$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \tan(x)-x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et sa dérivée est $x \mapsto \tan(x)^2$. De même, la fonction $x \mapsto x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle donc par intégration par parties, on en déduit que :
$$\int_0^{\pi/4} x\tan(x)^2 \mathrm{d}x = [x(\tan(x)-x)]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(\tan(x)-x)\mathrm{d}x$$
Or on a :
$$-\int_0^{\pi/4}(\tan(x)-x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4}\left(-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+x\right)\mathrm{d}x$$

donc : Il faut savoir retrouver une primitive de la fonction tangente rapidement en l'écrivant comme un quotient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} x\tan(x)^2\mathrm{d}x &= \left[x(\tan(x)-x)+\ln(|\cos(x)|)+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi^2}{32}\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

À retenir

Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée est continue sur I.

Exercice 11 –

On a :

$$\cos(x)+\cos(y) = -\cos(z) \text{ et } \sin(x)+\sin(y) = -\sin(z)$$

ce qui donne en élevant au carré :

$$\begin{cases}\cos(x)^2+2\cos(x)\cos(y)+\cos(y)^2 &= \cos(z)^2\\ \sin(x)^2+2\sin(x)\sin(y)+\sin(y)^2 &= \sin(z)^2\end{cases}$$

En sommant, et en utilisant la relation fondamentale liant le cosinus et le sinus, on en déduit que :

$$2+2(\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)) = 1$$

donc :

$$\cos(x-y) = -\frac{1}{2}$$

De la même manière, on montre que :

$$\cos(x-z) = \cos(y-z) = -\frac{1}{2}$$

Il existe donc deux entiers relatifs k et k' tels que :

$$x-y = \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ et } x-z = \pm\frac{2\pi}{3}+2k'\pi$$

Distinguons maintenant plusieurs cas. Supposons que :

$$x-y = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ et } x-z = \frac{2\pi}{3}+2k'\pi$$

Alors en soustrayant les deux égalités, on a $z-y = 2(k-k')\pi$ ce qui est impossible car $\cos(y-z) = -\frac{1}{2}$.
On obtient de même une absurdité si :

$$x-y = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ et } x-z = -\frac{2\pi}{3}+2k'\pi$$

Supposons maintenant que :

$$x - y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } x - z = -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$$

Alors :

$$2x - y - z = x - y + x - z = 2(k + k')\pi$$

donc $\cos(2x - y - z) = 1$. On obtient le même résultat dans le dernier cas.

Exercice 12 –

1. Faux. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $\sin(2x) = 2\sin(x)$ est équivalente à $2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)$ donc à $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = 1$. En particulier, celle-ci est vraie pour $x = \pi$.

2. Vrai. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$1 + \tan(x/2)^2 = \frac{1}{\cos(x/2)^2}$$

donc :

$$\frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)^2} = 2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cos(x/2)^2 = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin(x)$$

7 Nombres complexes : formes algébrique et trigonométrique

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit z, z' deux nombres complexes ($z' \neq 0$).

1. $|zz'| = |z|\,|z'|$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\Re e\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\Re e(z)}{\Re e(z')}$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. $\Re e(iz) = \Im m(z)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Que vaut $z\overline{z}$?

Exercice 3 –

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme algébrique de $\mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{ib}$ et de $\mathrm{e}^{i(a+b)}$. Que retrouve t-on ainsi ?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2+i)(-3+5i)$.
2. $z_2 = -2i(1+3i)$.
3. $z_3 = \frac{1-5i}{2-i}$

Exercice 5 –

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $z_1 = 2\mathrm{e}^{5i\pi/6}$.
2. $z_2 = -3\mathrm{e}^{-i\pi/3}$.
3. $z_3 = \mathrm{e}^{i\pi/2} + \mathrm{e}^{i\pi}$.

Exercice 6 –

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \sqrt{3} - i$.
2. $z_2 = -3i$.
3. $z_3 = -4 - 4i$.
4. $z_4 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$.

Exercice 7 –

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $z \in \mathbb{C}$:

1. $2i + 3z = i(5 - iz)$.
2. $z^2 = z\overline{z}$.

Exercice 8 –

Soit z un nombre complexe différent de $-i$. Déterminer le module de Z défini par :

$$Z = \frac{\overline{z} - i}{z + i}$$

Exercice 9 –

Linéariser $\cos(x)^3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 –

Écrire, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.

Exercice 11 –

Déterminer les entiers relatifs n tels que $(1 + i)^n$ soit réel.

Exercice 12 –

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

Pour aller plus loin

Exercice 13 –

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$|1 + z| = 1 + |z|$$

Exercice 14 –

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$ les valeurs de :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

Exercice 15 – Le vrai/faux de la fin

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $|e^{i\theta}| = 1$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $|e^{z}| = e^{|z|}$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Le conjugué d'un nombre complexe de module 1 est son inverse. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $|zz'| = |z|\,|z'|$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. $\Re e\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\Re e(z)}{\Re e(z')}$. ☐ Vrai ☒ Faux
4. $\Re e(iz) = \Im m(z)$. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Un nombre complexe z s'écrit d'une manière unique sous la forme $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle cette écriture la forme algébrique de z. Le réel x (respectivement y) est appelé partie réelle (respectivement imaginaire) de z et est noté $\Re e(z)$ (respectivement $\Im m(z)$).

- $i^2 = -1$.
- Le module de z est le réel positif, noté $|z|$, défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Le conjugué de z est le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par $\overline{z} = x - iy$.
- On a les relations suivantes :

$$\Re e(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \Im m(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$$

Exercice 2 –

On a :

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Exercice 3 –

On a :

$$\begin{aligned} e^{ia}e^{ib} &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)) \end{aligned}$$

et :

$$e^{i(a+b)} = \cos(a + b) + i\sin(a + b)$$

donc par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire :

$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

et :

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$$

Cours

Pour tout réel x, e^{ix} est le nombre complexe défini de la manière suivante :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

C'est un nombre complexe de module 1.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)} \text{ et } \overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}$$

Exercice 4 –

1. On a :

$$z_1 = -6 + 10i - 3i - 5 = -11 + 7i$$

La partie réelle de z_1 est donc -11 et sa partie imaginaire 7.

2. On a :

$$z_2 = 6 - 2i$$

La partie réelle de z_2 est donc 6 et sa partie imaginaire -2.

3. On a :

$$z_3 = \frac{(1-5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{7-9i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{9}{5}i$$

La partie réelle de z_3 est donc $\frac{7}{5}$ et sa partie imaginaire $-\frac{9}{5}$.

Méthode

Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient de nombres complexes, on peut multiplier par le conjugué du dénominateur puis utiliser la relation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z\overline{z} = |z|^2$$

Exercice 5 –

1. On a :

$$z_1 = 2(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)) = 2(-\sqrt{3}/2 + i/2) = -\sqrt{3} + i$$

2. On a :

$$z_2 = -3(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) = -3(1/2 - i\sqrt{3}/2) = -3/2 + 3i\sqrt{3}/2$$

3. On a :

$$z_3 = -1 + i$$

Cours

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et où θ est un réel, unique modulo 2π. On appelle cette écriture la forme trigonométrique de z. Le réel θ est appelé argument du nombre complexe z. La forme trigonométrique permet d'obtenir directement la forme algébrique :

$$z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$$

Exercice 6 –

1. On a :

$$|z_1| = \sqrt{3 + (-1)^2} = 2$$

Soit θ un argument de z_2. Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{-1}{2}$$

Alors $\theta = -\frac{\pi}{6}$ est un argument de z_1.

Méthode

Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer un argument !

2. Le module vaut 3 et un argument est $-\frac{\pi}{2}$ car :

$$-3i = -3e^{i\pi/2} = 3e^{-i\pi/2}$$

3. On a :

$$|z_3| = 4|1+i| = 4\sqrt{2}$$

Soit θ un argument de z_3. Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alors $\theta = \frac{5\pi}{4}$ convient.

4. En utilisant les propriétés du module, on a :

$$|z_4| = \frac{|1+i|^8}{|1-i|^8} = \frac{(\sqrt{2})^8}{(\sqrt{2})^8} = 1$$

En utilisant les propriétés de l'argument, on a :

$$\arg(z_4) = 8(\arg(1+i) - \arg(1-i)) = 8(\pi/4 - (-\pi/4)) = 4\pi$$

Un argument de z_4 est donc 0.

Méthode

On pouvait aussi remarquer que $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i$ puis obtenir :

$$z_4 = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^4 = 1$$

Méthode

Soit $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (on suppose z non nul). On détermine la forme trigonométrique du nombre complexe en suivant la démarche suivante :

— On calcule le module de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

— Un argument $\theta \in \mathbb{R}$ est donné par les égalités suivantes :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

L'utilisation d'un cercle trigonométrique permet généralement d'aider à déterminer θ.

Exercice 7 –

1. On a :

$$\begin{aligned} 2i + 3z = i(5 - iz) &\iff 3z - z = 5i - 2i \\ &\iff 2z = 3i \\ &\iff z = \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Alors :

$$\begin{aligned} z^2 = z\overline{z} &\iff (x + iy)^2 = x^2 + y^2 \\ &\iff x^2 - y^2 + i(2xy) = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Par identification, cela est équivalent à :

$$y^2 = 0 \text{ et } 2xy = 0$$

donc équivalent à $y = 0$. Ainsi, les solutions sont exactement les nombres réels.

Exercice 8 –

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Alors :

$$Z = \frac{x - iy - i}{x + iy + i} = \frac{x - i(1 + y)}{x + i(1 + y)}$$

On obtient alors :

$$|Z| = \frac{\sqrt{x^2 + (1 + y)^2}}{\sqrt{x^2 + (1 + y)^2}} = 1$$

Exercice 9 –

Pour tout réel x, on a :

$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{aligned}\cos(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} \\ &= \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}\end{aligned}$$

Cours – Formules d'Euler.

Pour tout réel x, on a :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ces formules, combinées avec la formule du binôme de Newton, permettent de linéariser des expressions trigonométriques de la forme $\cos(x)^3$, $\sin(x)^4$, $\cos(x)^2 \sin(x)^2$ ...

Exercice 10 –

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(3x) = \Re e(e^{3ix})$$

et

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3$$

On utilise alors la formule du binôme :

$$\begin{aligned}e^{3ix} &= \cos(x)^3 + 3i\cos(x)^2\sin(x) + 3i^2\cos(x)\sin(x)^2 + i^3\sin(x)^3 \\ &= \cos(x)^3 + 3i\cos(x)^2\sin(x) - 3\cos(x)\sin(x)^2 - i\sin(x)^3\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x)^3 - 3\cos(x)\sin(x)^2 \\ &= \cos(x)^3 - 3\cos(x)(1 - \cos(x)^2) \\ &= 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)\end{aligned}$$

Cours – Formule de Moivre.

Pour tout réel θ et tout entier $n \geq 0$, on a :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

ou encore :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(\theta)$$

Exercice 11 –

On a :

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n(e^{i\pi/4})^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4} = (\sqrt{2})^n(\cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4))$$

On en déduit que $(1+i)^n$ est un réel si et seulement si $\sin(n\pi/4) = 0$ ou encore si et seulement si n est un multiple de 4.

À retenir

La forme trigonométrique est plus adaptée au calcul de produit ou de puissance de nombres complexes.

Exercice 12 –

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Posons :

$$Z = \frac{1+z}{1-z}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
Z \text{ est imaginaire pur} &\iff Z + \overline{Z} = 0 \\
&\iff \frac{1+z}{1-z} + \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = 0 \\
&\iff \frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = 0 \\
&\iff \frac{(1+z)(1-\overline{z}) + (1+\overline{z})(1-z)}{(1-z)(1-\overline{z})} = 0 \\
&\iff (1+z)(1-\overline{z}) + (1+\overline{z})(1-z) = 0 \\
&\iff 2 - 2z\overline{z} = 0 \\
&\iff 1 - |z|^2 = 0 \\
&\iff |z|^2 = 1 \\
&\iff |z| = 1
\end{aligned}$$

car le module de z est positif.

À retenir

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- z est réel si et seulement si $\Im m(z) = 0$ donc si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\Re e(z) = 0$ donc si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Exercice 13 –

On reconnait le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. On en déduit que l'égalité est vraie si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda 1$ ou $1 = \lambda z$. C'est équivalent au fait que z appartienne à $\mathbb{R}_+$.

> **Cours – Inégalité triangulaire.**
>
> Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :
>
> $$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$
>
> Il y a égalité si et seulement si z et z' sont positivement liés, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel positif λ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$.

Exercice 14 –

1. On a :

$$e^{i\alpha} - 1 = e^{i\alpha} - e^{i0} = e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})$$

On sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Ceci implique que :

$$e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \sin(\alpha/2)$$

> **À retenir**
>
> L'argument précédent est appelé argument de l'angle moitié (on factorise par $e^{i\alpha/2}$ car $\frac{\alpha}{2}$ est la moitié de α).

2. Les deux sommes sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$$

On sait que $x \in]0, 2\pi[$ donc e^{ix} est différent de 1. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

D'après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \frac{2ie^{i(n+1)x/2} \sin((n+1)x/2)}{2ie^{ix/2} \sin(x/2)} \\ &= \frac{e^{inx/2} \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\end{aligned}$$

Par passage à la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sin(nx/2)\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

Exercice 15 –

1. $|e^{i\theta}| = 1$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $|e^{i}| = 1 \neq e^{|i|} = e^{1}$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. Le conjugué d'un nombre complexe de module 1 est son inverse. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition, on a :

$$e^{z} = e^{\Re e(z)} e^{i\Im m(z)}$$

En particulier, le module de e^{z} est $e^{\Re e(z)}$ et un argument est donné par $\Im m(z)$.

8 Nombres complexes : racines carrées, racines *n*-ièmes

Le but de ce chapitre est de savoir résoudre les équations de la forme $z^n = a$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$, et les équations du second degré.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $z^2 = a$ admet exactement deux solutions complexes.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $1 + i$ est la racine quatrième d'un nombre réel.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Les racines carrées de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $3 + i$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $Z_1 = 3 + 4i$.

2. $Z_2 = 8 - 6i$.

Exercice 3 –

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 + z + 1 = 0$.

2. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$.

3. $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$.

Exercice 4 –

Déterminer :

1. Les racines troisièmes de $1 + i$.

2. Les racines quatrièmes de $-1 + i\sqrt{3}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Résoudre l'équation $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 6 –

Résoudre l'équation $z^3 + z^2 - z + 2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7 –

Résoudre l'équation $(z + 1)^3 = z^3$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 –

Déterminer, sous forme algébrique puis sous forme exponentielle, les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Que vaut la somme des racines n-ièmes de l'unité ? Et le produit ?

Exercice 10 –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Résoudre l'équation $(z + 1)^n = (z - 1)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 11 –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Parmi les racines $2n$-ièmes de l'unité, combien sont racines n-ièmes de -1 ?
2. Soit ω une racine n-ième de l'unité. On suppose que pour tout $1 \leq k \leq n - 1$, $\omega^k \neq 1$ (on dit que ω est une *racine primitive* de l'unité). Montrer que ω admet deux racines carrées distinctes et que l'une des deux est racine n-ième de -1.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

1. $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ n > m \Rightarrow \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \{1\}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Les solutions de $z^2 - z + 1 = 0$ sont $-j$ et $-\overline{j}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Vrai uniquement si $a \neq 0$. ☐ Vrai ☒ Faux
2. $(1 + i)^4 = -4$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. $(3 + i)^2 = 8 + 6i$. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

Méthode

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour déterminer les racines carrées de $x + iy$, on peut chercher les réels a et b tels que $(a + ib)^2 = x + iy$. Par identification des parties réelles et imaginaires, cela est équivalent à :

$$a^2 - b^2 = x \text{ et } 2ab = y$$

De plus, l'égalité $(a+ib)^2 = x+iy$ permet d'obtenir le fait que $a^2+b^2 = \sqrt{x^2+y^2}$ (en utilisant le module). On obtient alors facilement les réels a et b possibles sachant que l'égalité $2ab = y$ est utile uniquement pour savoir si a et b sont de même signe ou non.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(a + ib)^2 = Z_1 \Longleftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 3 + 4i$$

ce qui par identification est équivalent à :

$$a^2 - b^2 = 3 \text{ et } 2ab = 4$$

Or si $(a + ib)^2 = Z_1$ alors ces deux nombres complexes ont le même module donc :

$$a^2 + b^2 = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

On en déduit que :

$$(a + ib)^2 = Z_1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a^2 + b^2 & = 5 \\ a^2 - b^2 & = 3 \\ ab & = 2 \end{array}\right.$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir :

$$(a + ib)^2 = Z_1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a^2 & = 4 \\ a^2 - b^2 & = 3 \\ ab & = 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a^2 & = 4 \\ b^2 & = 1 \\ ab & = 2 \end{array}\right.$$

Or, d'après la troisième ligne, a et b sont de même signe donc les solutions du système sont $(2, 1)$ et $(-2, -1)$. On en déduit alors que $2 + i$ et $-2 - i$ sont les racines carrées de Z_1.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(a + ib)^2 = Z_2 \Longleftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 8 - 6i$$

ce qui par identification est équivalent à :

$$a^2 - b^2 = 8 \text{ et } 2ab = -6$$

Or si $(a + ib)^2 = Z_2$ alors $a^2 + b^2 = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ (par passage au module). On en déduit que :

$$(a + ib)^2 = Z_2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a^2 + b^2 & = 10 \\ a^2 - b^2 & = 8 \\ ab & = -3 \end{array}\right.$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir :

$$(a+ib)^2 = Z_2 \iff \begin{cases} a^2 &= 9 \\ a^2 - b^2 &= 8 \\ ab &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 &= 9 \\ b^2 &= 1 \\ ab &= -3 \end{cases}$$

Or, d'après la troisième ligne, a et b sont de signes opposés donc les solutions du système sont $(3,-1)$ et $(-3,1)$. On en déduit alors que $3-i$ et $-3+i$ sont les racines carrées de Z_2.

Exercice 3 –

Cours

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. Considérons l'équation $az^2 + bz + c = 0$, notée (E), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On note Δ le discriminant associé à cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On distingue alors deux cas :

— Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution z_0 définie par $z_0 = -\frac{b}{2a}$. De plus, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

On dit que z_0 est une solution *double*.

— Si $\Delta \neq 0$, il admet donc deux racines carrées $\pm\delta$. L'équation admet alors deux solutions distinctes z_1 et z_2 définies par :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

De plus, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

1. Le discriminant associé vaut $-3 = (\sqrt{3}i)^2$. Les solutions de cette équation sont donc :

$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

ou encore $z_1 = e^{2i\pi/3}$ et $z_2 = e^{-2i\pi/3}$.

On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$

2. Le discriminant associé vaut :

$$\Delta = (-(1+2i))^2 - 4(i-1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$

Alors Δ admet pour racines carrées 1 et -1. Les solutions de cette équation sont donc :

$$z_1 = \frac{1+2i-1}{2} = i \text{ et } z_2 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i$$

3. Le discriminant associé vaut :

$$\Delta = (3i-4)^2 - 4(1-7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i$$

On a obtenu dans l'exercice 2 les racines carrées de Δ : $2+i$ et $-2-i$. On en déduit que les solutions de $z^2+(3i-4)z+1-7i=0$ sont :

$$z_1 = \frac{-(3i-4)-(2+i)}{2} = 1-2i \text{ et } z_1 = \frac{-(3i-4)+(2+i)}{2} = 3-i$$

Exercice 4 –

Cours

Soit $n \geq 1$. Un nombre complexe z est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$. En notant $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, on a :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n},\ k \in \{0,1,\dots,n-1\}\}$$

Cet ensemble contient exactement n éléments. Par cyclicité, on peut aussi écrire :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n},\ k \in \{1,2,\dots,n\}\}$$

1. Le module de $1+i$ est $\sqrt{2}$. On a :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z^3 = 1+i \iff z^3 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \iff z^3 = \left(\sqrt{2}^{1/3}e^{i\pi/12}\right)^3$$

d'après la formule de Moivre. Déterminer les racines troisièmes de $1+i$ revient donc à résoudre :

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2}^{1/3}e^{i\pi/12}}\right)^3 = 1$$

Or les racines troisièmes de l'unité sont 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et $\bar{j}$. Ainsi,

$\mathbb{U}_3 = \{1, j, \bar{j}\}$

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2}^{1/3}e^{i\pi/12}}\right)^3 = 1 \iff \frac{z}{\sqrt{2}^{1/3}e^{i\pi/12}} \in \{1, j, \bar{j}\}$$

On en déduit que les racines troisièmes de $1+i$ sont $z_1 = \sqrt{2}^{1/3}e^{i\pi/12}$,

$$z_2 = \sqrt{2}^{1/3}e^{i\pi/12}e^{2i\pi/3} = \sqrt{2}^{1/3}e^{9i\pi/12} = \sqrt{2}^{1/3}e^{3i\pi/4}$$

et

$$z_3 = \sqrt{2}^{1/3}e^{i\pi/12}e^{-2i\pi/3} = \sqrt{2}^{1/3}e^{-7i\pi/12}$$

2. Le module de $-1+i\sqrt{3}$ est 2. On a :

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{2i\pi/3}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z^4 = -1 + i\sqrt{3} \iff z^4 = 2e^{2i\pi/3} \iff z^4 = \left(2^{1/4}e^{i\pi/6}\right)^4$$

d'après la formule de Moivre. Déterminer les racines quatrièmes de $-1 + i\sqrt{3}$ revient donc à résoudre :

$$\left(\frac{z}{2^{1/4}e^{i\pi/6}}\right)^4 = 1$$

Or les racines quatrièmes de l'unité sont $1, -1, i$ et $-i$. Ainsi :

$\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$

$$\left(\frac{z}{2^{1/4}e^{i\pi/6}}\right)^4 = 1 \iff \frac{z}{\sqrt{2}^{1/3}e^{i\pi/6}} \in \{1, -1, i, -i\}$$

On en déduit que les racines quatrièmes de $-1 + i\sqrt{3}$ sont $z_1 = 2^{1/4}e^{i\pi/6}$, $-z_1$,

$$z_2 = 2^{1/4}ie^{i\pi/6} = 2^{1/4}e^{i\pi/2}e^{i\pi/6} = 2^{1/4}e^{2i\pi/3}$$

et $-z_2$.

Méthode

La méthode associée aux questions précédentes est cruciale. Résoudre une équation du type $z^n = a$ où a est un complexe non nul est toujours possible en se ramenant aux racines n-ièmes de l'unité. Voici les différentes étapes :

1. On détermine la forme trigonométrique de a : $a = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
2. On remarque que $a = (r^{1/n}e^{i\theta/n})^n$ grâce à la formule de Moivre.
3. L'équation se réécrit alors :
$$\left(\frac{z}{r^{1/n}e^{i\theta/n}}\right)^n = 1$$
4. On détermine alors les solutions en utilisant les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 5 –

On remarque que 1 est une solution évidente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^3 - z^2 + z - 1 = z^2(z-1) + z - 1 = (z^2+1)(z-1) = (z-i)(z+i)(z-1)$$

L'équation admet donc pour solutions i, $-i$ et 1.

À retenir

Lors de la résolution d'une équation polynomiale de degré supérieur à deux, chercher une solution évidente permet de se ramener à une équation polynomiale d'un degré plus petit.

Exercice 6 –

On remarque que :

$$(-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 2 = -8 + 4 + 2 + 2 = 0$$

Ainsi, -2 est solution de l'équation. Il existe alors trois nombres complexes a, b et c tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 + z^2 - z + 2 = (z+2)(az^2 + bz + c)$$

ou encore en développant :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 + z^2 - z + 2 = az^3 + (2a+b)z^2 + (c+2b)z + 2c$$

Par identification, on en déduit que $a = 1$, $c = 1$ et $2a + b = 1$ donc $b = -1$. Ainsi, on souhaite résoudre l'équation :

$$(z+2)(z^2 - z + 1) = 0$$

Le discriminant du trinôme vaut -3. Celui-ci admet donc deux racines :

$$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de l'équation est :

$$\mathscr{S} = \left\{-2,\ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Exercice 7 –

Remarquons que 0 n'est pas solution de l'équation. On résout donc l'équation pour $z \in \mathbb{C}^*$:

$$(z+1)^3 = z^3 \iff \left(\frac{z+1}{z}\right)^3 = 1$$

Or les racines troisièmes de l'unité sont 1, j et $\overline{j}$. On en déduit que :

$$(z+1)^3 = z^3 \iff \frac{z+1}{z} \in \{1, j, \overline{j}\}$$

On a :

$$\frac{z+1}{z} = 1 \iff z + 1 = z$$

ce qui est impossible. De plus,

$$\frac{z+1}{z} = j \iff z + 1 = zj \iff z(j-1) = 1 \iff z = \frac{1}{j-1}$$

car $j \neq 1$. De même :

$$\frac{z+1}{z} = \overline{j} \iff z + 1 = z\overline{j} \iff z(\overline{j}-1) = 1 \iff z = \frac{1}{\overline{j}-1}$$

car $\overline{j} \neq 1$. Ainsi, les solutions de l'équation sont $z_1 = \frac{1}{j-1}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

Donnons la forme algébrique de z_1 pour conclure. On a :

$$z_1 = \frac{1}{e^{2i\pi/3} - 1} = \frac{1}{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{2}{-3 + \sqrt{3}i}$$

donc en utilisant le conjugué du dénominateur :

$$z_1 = \frac{2(-3 - \sqrt{3}i)}{12} = \frac{-6 - 2\sqrt{3}i}{12} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

Exercice 8 –

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(a + ib)^2 = Z \iff a^2 - b^2 + 2iab = \sqrt{3} + i$$

ce qui par identification est équivalent à :

$$a^2 - b^2 = \sqrt{3} \text{ et } 2ab = 1$$

Or si $(a + ib)^2 = Z$ alors ces deux nombres complexes ont le même module donc on en déduit que $a^2 + b^2 = \sqrt{3 + 1} = 2$. Ainsi :

$$(a + ib)^2 = Z \iff \begin{cases} a^2 + b^2 & = 2 \\ a^2 - b^2 & = \sqrt{3} \\ 2ab & = 1 \end{cases}$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir :

$$(a + ib)^2 = Z \iff \begin{cases} a^2 + b^2 & = 2 \\ a^2 - b^2 & = \sqrt{3} \\ 2ab & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 & = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ b^2 & = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 2ab & = 1 \end{cases}$$

Or, d'après la troisième ligne, a et b sont de même signe. On en déduit alors que :

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$$

sont les racines carrées de Z.

- Remarquons maintenant que :

$$Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\pi/6}$$

Les racines carrées de Z sont donc $\sqrt{2}e^{i\pi/12}$ et :

$$-\sqrt{2}e^{i\pi/12} = \sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\pi/12} = \sqrt{2}e^{13i\pi/12}$$

- Par unicité, en considérant la seule racine carrée dont la partie réelle est positive, on a :

$$\sqrt{2}e^{i\pi/12} = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$$

donc en considérant la partie réelle :

$$\sqrt{2}\cos(\tfrac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

et ainsi :

$$\cos(\tfrac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$$

Méthode

On dispose de deux méthodes pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe Z :

1. On peut résoudre $(a+ib)^2 = Z$ et obtenir les réels a, b solutions (obtention d'un système de trois équations).
2. On peut écrire la forme trigonométrique de Z : $Z = re^{i\theta}$ et les racines carrées sont alors évidentes : $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

Exercice 9 –

Exercice classique !

Posons $\xi = e^{2i\pi/n}$. Soit S la somme des racines n-ièmes de l'unité. On a :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k$$

Or ξ est différent de 1 (car $n \geq 2$) et $\xi^n = 1$ donc :

$$S = \frac{1-\xi^n}{1-\xi} = 0$$

Notons P le produit des racines n-ièmes de l'unité. On a :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \prod_{k=0}^{n-1} \xi^k$$

donc :

$$P = \xi^{0+1+\cdots+(n-1)} = \xi^{n(n-1)/2} = (\xi^n)^{(n-1)/2} = 1$$

car $\xi^n = 1$.

À retenir

Pour tout nombre complexe q différent de 1, on a :

$$\forall n \geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 10 –

Remarquons pour commencer que 1 n'est pas solution de l'équation ($2^n \neq 0^n$ car $n \geq 1$). Soit $z \in \mathbb{C}$ différent de 1. On a :

$$\begin{aligned}(z+1)^n = (z-1)^n &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\},\ \frac{z+1}{z-1} = e^{2ik\pi/n} \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\},\ z+1 = e^{2ik\pi/n}(z-1) \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\},\ z(1-e^{2ik\pi/n}) = -(e^{2ik\pi/n}+1)\end{aligned}$$

Si $k = 0$ alors le terme de gauche vaut 0 et celui de droite vaut -2 donc l'égalité n'est pas vraie. De plus, si $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $e^{2ik\pi/n} \neq 1$. Ainsi :

D'une manière générale, avant de diviser par une quantité, il faut toujours s'assurer que celle-ci n'est pas nulle

$$\begin{aligned}(z+1)^n = (z-1)^n &\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\},\ z(1-e^{2ik\pi/n}) = -(e^{2ik\pi/n}+1) \\ &\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\},\ z = \frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1}\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que :

On utilise la méthode de l'angle moitié

$$\begin{aligned}\frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1} &= \frac{e^{ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}}\,\frac{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n}} \\ &= \frac{2\cos(k\pi/n)}{2i\sin(k\pi/n)} \\ &= -i\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{-i\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)},\ k \in \{1, \dots, n-1\}\right\}$$

Exercice 11 –

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^{2n} - 1 = 0 \iff (z^n - 1)(z^n + 1) = 0$$
L'ensemble $\mathbb{U}_{2n}$ des racines $2n$-ièmes de l'unité est donc la réunion des racines n-ièmes de l'unité et des racines n-ièmes de -1. Cette union est disjointe car si une racine a est commune alors $a^n = -1$ et $a^n = 1$ ce qui est absurde. Il y a n racines n-ièmes de -1 donc parmi les racines $2n$-ièmes de l'unité, n sont racines de -1.

2. Le complexe ω est différent de 0 car $\omega^n = 1$ donc ses racines carrées sont non nulles et opposées donc elles sont distinctes.

Soit z et $-z$ les deux racines carrées de ω. Alors :

$$z^{2n} = (z^2)^n = \omega^n = 1$$

car ω est une racine n-ième de l'unité. De même, $(-z)^{2n} = 1$. Ainsi, z et $-z$ sont toutes les deux des racines $2n$-ièmes de l'unité. D'après le raisonnement de la question précédente, elles sont donc racines n-ièmes de 1 ou de -1. Supposons par l'absurde qu'elles sont toutes les deux racines n-ième de 1. Alors $z^n = 1$ et $(-z)^n = 1$. Donc :

$$1 = (-z)^n = (-1)^n z^n = (-1)^n$$

et ainsi n est pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$. Alors :

$$\omega^p = (z^2)^p = z^{2p} = z^n = 1$$

et $1 \leq p \leq n-1$ ce qui contredit le fait que ω est une racine primitive. Finalement, l'une des deux est racine n-ième de -1.

Exercice 12 –

1. Faux. Le réel -1 appartient à la fois à $\mathbb{U}_2$ et $\mathbb{U}_4$.

> **À retenir**
>
> Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
>
> — Si n est pair, $\mathbb{U}_n$ contient 1 et -1.
>
> — Si n est impair, $\mathbb{U}_n$ contient 1 mais pas -1.

2. Vrai. On sait que $1 + j + j^2 = 0$ donc $(-j)^2 - (-j) + 1 = 0$ donc $-j$ est bien solution de l'équation proposée. Or celle-ci est à coefficients réels donc par passage au conjugué, $-\overline{j}$ est aussi solution de l'équation (et elle est distincte de la première). L'équation étant de degré 2, nous venons de trouver toutes les solutions.

> **À retenir**
>
> Si un nombre complexe z est solution d'une équation polynomiale à coefficients *réels* alors $\overline{z}$ est aussi solution de cette équation.

9 Nombres complexes : géométrie

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - i| = 2$ est une droite. ☐ Vrai ☐ Faux
2. L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 3i| \leq 3$ est un disque. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit z un nombre complexe différent de 1 et M le point d'affixe z. Donner une interprétation géométrique, relative à M, du module et d'un argument de :

$$Z = \frac{z - i}{z - 1}$$

Exercice 3 –

1. Donner l'écriture complexe de la translation du plan de vecteur $(1, 1)$.
2. Donner l'écriture complexe de la rotation du plan de centre le point $(0, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
3. Donner l'écriture complexe de l'homothétie du plan de centre le point $(1, 0)$ et de rapport 2.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

1. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $|2z - 4i| = |-2z + 4 + 6i|$.
2. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Exercice 5 –

Donner la nature des transformations géométriques suivantes, représentées par leur écriture complexe.

1. $z \mapsto 2z + 1 + i$.
2. $z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Déterminer l'ensemble des points M du plan, d'affixe z, tels que :

$$z + \overline{z} = |z|$$

Exercice 7 –

Soit A, B et C trois points du plan non alignés, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\overline{a}j^2 + \overline{b}j + \overline{c} = 0$.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. $z \mapsto \overline{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $z \mapsto 4i - z$ est l'écriture complexe d'une symétrie centrale. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $z \mapsto z + \overline{z}$ est l'écriture d'une similitude directe. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - i| = 2$ est une droite. ☐ Vrai ☒ Faux
2. L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 3i| \leq 3$ est un disque. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

Soit A, B deux points du plan (distincts) d'affixes z_A et z_B et r un réel positif ou nul.

— L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.

— L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - z_A| \leq r$ est le disque de centre A et de rayon r.

— L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est une droite, plus particulièrement, c'est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 2 –

Soit A et B les points du plan d'affixes 1 et i. Alors :

$$|Z| = \left|\frac{z-i}{z-1}\right| = \frac{MB}{MA} \text{ et } \arg(Z) = \arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \ [2\pi]$$

À retenir

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts du plan, d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :

$$|z_A - z_B| = AB \text{ et } \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right| = \frac{AB}{CD}$$

et :

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA})\ [2\pi]$$

Exercice 3 –

1. Le vecteur $(1, 1)$ a pour affixe $1 + i$ donc l'écriture complexe est $z' = z + 1 + i$.
2. Le point $(0, 1)$ a pour affixe i donc l'écriture complexe est de la forme :

$$z' = i + e^{i\pi/3}(z - i) = e^{i\pi/3}z + i(e^{i\pi/3} - 1)$$

3. Le point $(1, 0)$ a pour affixe 1 donc l'écriture complexe est de la forme :

$$z' = 1 + 2(z - 1) = 2z - 1$$

Cours

Soit u un vecteur du plan d'affixe z_u, C un point du plan d'affixe z_C, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, différent de 1.

— L'écriture complexe de la translation de vecteur u est : $z' = z + z_u$.

— L'écriture complexe de la rotation de centre C et d'angle θ est :

$$z' = z_C + e^{i\theta}(z - z_C)$$

— L'écriture complexe de l'homothétie de centre C et de rapport λ est :

$$z' = z_C + \lambda(z - z_C)$$

Exercice 4 –

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|2z - 4i| = |-2z + 4 + 6i| \iff |z - 2i| = |z - 2 - 3i|$$

L'ensemble des points cherché est donc la médiatrice du segment $[AB]$ où $A = (0, 2)$ et $B = (2, 3)$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \arg(z) - \arg(1 + i) = \arg(z) - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

L'ensemble des points cherchés est donc l'ensemble des points d'affixe $z \neq 0$ tels que :

$$\arg(z) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$$

Notons A le point $(-1, 1)$. L'ensemble des points cherché est donc la demi-droite d'extrémité 0 (exclue) et passant par A.

Cours

Soit z, z' deux nombres complexes non nuls et $n \in \mathbb{N}$.

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$.
- $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

Exercice 5 –

1. On reconnait l'expression d'une similitude directe. Commençons par déterminer son centre dont l'affixe z vérifie :

$$z = 2z + 1 + i \iff z = -1 - i$$

La transformation étudiée est donc l'homothétie de centre $(-1, -1)$ et de rapport 2.

2. On reconnait l'expression d'une similitude directe. Commençons par déterminer son centre dont l'affixe z vérifie :

$$z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i) \iff z = \frac{i - 1}{i} = 1 + i$$

De plus :

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$$

On en déduit que la transformation étudiée est la similitude directe de centre $(1, 1)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Cours

L'écriture complexe d'une similitude directe est $z \mapsto az+b$ où a, b sont deux nombres complexes, avec a non nul.

Si $a = 1$, on reconnait une translation. Sinon, on détermine le centre de cette similitude en résolvant : $z = az + b$.

On précise ensuite le rapport de celle-ci (qui vaut $|a|$) et l'angle (en déterminant un argument de a).

Si a est un réel non nul, on est dans le cas d'une homothétie et si a est un nombre complexe de module 1, on est dans le cas d'une rotation.

Exercice 6 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ solution du problème. Alors :

$$2a = \sqrt{a^2 + b^2}$$

donc a est positif et $4a^2 = a^2 + b^2$ donc $3a^2 = b^2$ ce qui implique que $b = \pm\sqrt{3}a$ car a est positif. On en déduit que (a, b) appartient à la droite D_1 d'équation $y = \sqrt{3}x$ ou à la droite D_2 d'équation $y = -\sqrt{3}x$ et a est positif.

Synthèse. Soit $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ tel que (a, b) appartienne à D_1 ou D_2 avec $a \geq 0$. Alors :

$$z + \overline{z} = 2a \text{ et } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

car $a \geq 0$. L'ensemble des points cherchés est donc l'union de demi-droites d'origine 0 formées par D_1 et D_2, c'est-à-dire les demi-droites d'équations $y = \sqrt{3}x$ et $y = -\sqrt{3}x$ formées des points d'abscisses positives.

Exercice 7 –

ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'écriture complexe de cette rotation est :

$$z' = a + e^{i\pi/3}(z - a) = a - \overline{j}(z - a)$$

Ainsi, ABC est équilatéral direct si et seulement si :

$j = e^{2i\pi/3}$

$$c = a - \overline{j}(b - a) = a(1 + \overline{j}) - \overline{j}b \quad \text{ou encore} \quad a(-1 - \overline{j}) + \overline{j}b + c = 0$$

Or $1 + j + j^2 = 0$ donc cette égalité équivaut à :

$$a\overline{j}^2 + \overline{j}b + c = 0$$

ce qui donne le résultat par conjugaison.

Exercice 8 –

1. $z \mapsto \overline{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.	☒ Vrai	☐ Faux
2. $z \mapsto 4i - z$ est l'écriture complexe d'une symétrie centrale.	☒ Vrai	☐ Faux
3. $z \mapsto z + \overline{z}$ est l'écriture d'une similitude directe.	☐ Vrai	☒ Faux

À retenir

L'écriture complexe d'une symétrie centrale par rapport à un point d'affixe z_0 est :

$$z' - z_0 = z_0 - z$$

10 Inégalités

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|x-y\right| \le |x| - \left|y\right|$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. $\lfloor -1,5 \rfloor = -1$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\le k\le n}$ une famille de réels. Prouver que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor \le \left\lfloor \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rfloor \le \sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor + n - 1$$

Exercice 3 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels tels que :

$$0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \le 1$$

Prouver qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \ne j$ et $\left|x_i - x_j\right| \le \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4 –

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \le n\,|\sin(x)|$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \le x^2 + y^2$.
2. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x+y+z)^2 \le 4x^2 + 4y^2 + 2z^2$.

Exercice 6 –

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-2x^2 + 7x - 5 \geq 0$
2. $|x - 3| + |x + 4| \leq 10$
3. $\sqrt{x - 1} \geq x - 4$

Exercice 7 –

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 1 + x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \dfrac{1}{2x+1} \geq \mathrm{e}^{-(x+1)}$

Exercice 8 –

Soient x et y deux réels strictement positifs. Démontrer que :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. Démontrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 10 –

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Exercice 11 –

Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

Soit x et y deux réels.

1. $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leq \lvert x+y\rvert + \lvert x-y\rvert$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $\lvert x+y\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ si et seulement si x et y sont positifs.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x+y\rfloor \leq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. Si $x \in \mathbb{R}^+$, $\lfloor x\rfloor$ est le nombre d'entiers appartenant à $[0, x]$.	☐ Vrai	☐ Faux
5. $\lvert xy\rvert \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.	☐ Vrai	☐ Faux
6. $\max(x,y) = \frac{x+y+\lvert x-y\rvert}{2}$ et $\min(x,y) = \frac{x+y-\lvert x-y\rvert}{2}$	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

Cours

Pour tout réel x, la partie entière de x, notée $\lfloor x\rfloor$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a donc, pour tout entier n :

$$\lfloor x\rfloor = n \iff n \leq x < n+1$$

1. Il suffit de prendre $x = 0$ et $y = 1$.	☐ Vrai	☒ Faux
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$.	☒ Vrai	☐ Faux
3. Si $x = y = 1,5$ alors $\lfloor x+y\rfloor = 3$ et $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor = 2$.	☐ Vrai	☒ Faux
4. $\lfloor -1,5\rfloor \neq -1$ car $-2 \leq -1,5 < -1$.	☐ Vrai	☒ Faux

Exercice 2 –

À retenir

Quand on cherche à établir une relation (égalité ou inégalité) faisant intervenir la fonction partie entière d'un réel x, on utilise le plus souvent la définition, en commençant par encadrer x entre deux entiers consécutifs.

Par définition de la partie entière, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lfloor x_k\rfloor \leq x_k < \lfloor x_k\rfloor + 1$$

donc, en sommant ces inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k\rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} x_k < \sum_{k=1}^{n} \left(\lfloor x_k\rfloor + 1\right)$$

soit encore, en développant la dernière somme, et celle-ci contenant n termes :

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k\rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} x_k < \sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k\rfloor + n$$

d'où, comme les termes encadrant $\sum_{k=1}^{n} x_k$ sont des entiers :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor \leq \left\lfloor \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor + n - 1}$$

Exercice 3 –

On procède par l'absurde.

Penser que, si x et y sont deux réels, $|x-y|$ est la distance entre x et y…

Supposons que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j,\ |x_i - x_j| > \frac{1}{n}$$

On a alors, en particulier :

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ |x_{i+1} - x_i| > \frac{1}{n}$$

soit encore, comme $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$:

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ x_{i+1} - x_i > \frac{1}{n}$$

En sommant ces n inégalités, on en déduit, par télescopage :

$$x_n - x_0 > 1$$

ce qui est absurde puisque x_0 et x_n appartiennent à $[0,1]$. Il en découle qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 4 –

Cours

Se souvenir que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $|\sin(nx)| \leq n\,|\sin(x)|$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a : $|\sin(0 \times x)| = 0 = 0\,|\sin(x)|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\,x)| &= |\sin(nx + x)| \\ &= |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)| \end{aligned}$$

donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\sin((n+1)\,x)| \leq |\sin(nx)|\,|\cos(x)| + |\cos(nx)|\,|\sin(x)|$$

Or on a :

$$\begin{cases} |\sin(nx)| \geq 0 \\ |\cos(x)| \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} |\sin(x)| \geq 0 \\ |\cos(nx)| \leq 1 \end{cases}$$

donc :

$$|\sin((n+1)\,x)| \leq |\sin(nx)| + |\sin(x)|$$

et alors, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\,x)| &\leq n\,|\sin(x)| + |\sin(x)| \\ &\leq (n+1)\,|\sin(x)| \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

◇ On en déduit finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leq n\,|\sin(x)|$.

Exercice 5 –

Méthode

Ne pas oublier que, pour prouver une inégalité de la forme $a \leq b$, on peut commencer par s'intéresser au signe de la différence $b-a$. Cette méthode s'avère particulièrement utile lorsqu'il est simple de factoriser $b-a$ ou lorsqu'on peut utiliser des identités remarquables pour faire apparaître une somme de termes positifs.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$xy \leq x^2 + y^2 \iff x^2 - xy + y^2 \geq 0$$

Or on peut remarquer que $x \mapsto x^2 - xy + y^2$ est une fonction polynôme de degré 2 (y étant fixé), dont on peut étudier le signe grâce aux racines. Son discriminant est $\Delta = -3y^2$, qui est négatif ou nul, donc cette fonction polynôme est de signe constant sur $\mathbb{R}$; comme son coefficient dominant est strictement positif, on a donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - xy + y^2 \geq 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leq x^2 + y^2}$$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - (x+y+z)^2 &= 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\right) \\ &= 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \end{aligned}$$

Les termes carrés ne posent pas de problème (ils sont positifs). On va donc les utiliser pour « neutraliser » les doubles produits. On commence par les termes contenant z, car le coefficient de z^2 est le plus petit.

On a alors :

$$4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - (x + y + z)^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + \frac{z^2}{2} - 2xz + \frac{z^2}{2} - 2yz$$

soit encore :

$$\begin{aligned}4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - (x + y + z)^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + \frac{z^2}{2} - 2 \times x\sqrt{2} \times \frac{z}{\sqrt{2}} \\ + \frac{z^2}{2} - 2 \times y\sqrt{2} \times \frac{z}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - (x + y + z)^2 &= \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - y\sqrt{2}\right)^2 + x^2 + y^2 - 2xy \\ &= \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - y\sqrt{2}\right)^2 + (x - y)^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x + y + z)^2 \leq 4x^2 + 4y^2 + 2z^2$$

Exercice 6 –

1. L'équation $-2x^2 + 7x - 5 = 0$ est une équation du second degré admettant pour discriminant $\Delta = 9$, donc elle admet exactement deux solutions réelles, qui sont 1 et $\frac{5}{2}$. Le coefficient dominant du trinôme $-2x^2 + 7x - 5$ est strictement négatif, donc on peut conclure :

$$-2x^2 + 7x - 5 \geq 0 \iff x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$$

> **Cours**
> Soit a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ et P la fonction polynôme définie par :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c$$
>
> - Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$) et dans ce cas $P(x)$ est du signe de a sur $]-\infty, r_1[$ et $]r_2, +\infty[$, et du signe de $-a$ sur $]r_1, r_2[$.
> - Si $b^2 - 4ac \leq 0$, alors $P(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On procède par disjonction de cas, en s'intéressant au signe de $x - 3$ et de $x + 4$.

> Pour simplifier la résolution d'une équation ou d'une inéquation faisant intervenir la valeur absolue d'une quantité $f(x)$, il est souvent intéressant de distinguer les cas selon le signe de $f(x)$ pour se ramener à des relations plus simples.

◇ Si x appartient à $[3, +\infty[$, alors $x - 3$ et $x + 4$ sont positifs ou nuls et :

$$\begin{aligned} |x-3| + |x+4| \leq 10 &\iff (x-3) + (x+4) \leq 10 \\ &\iff 2x + 1 \leq 10 \\ &\iff x \leq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

ce qui est vrai si et seulement si $x \in \left[3, \frac{9}{2}\right]$ dans ce cas.

◇ Si x appartient à $[-4, 3[$, alors $x - 3$ est négatif ou nul et $x + 4$ est positif ou nul, donc :

$$\begin{aligned} |x-3| + |x+4| \leq 10 &\iff (3-x) + (x+4) \leq 10 \\ &\iff 7 \leq 10 \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai.

◇ Si x appartient à $]-\infty, -4[$, alors $x - 3$ et $x + 4$ sont négatifs ou nuls et :

$$\begin{aligned} |x-3| + |x+4| \leq 10 &\iff -(x-3) - (x+4) \leq 10 \\ &\iff -2x - 1 \leq 10 \\ &\iff x \geq -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

ce qui est vrai si et seulement si $x \in \left[-\frac{11}{2}, -4\right]$ dans ce cas.

On peut finalement conclure :

$$|x-3| + |x+4| \leq 10 \iff x \in \left[-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x-1}$ est défini si et seulement si x est un réel supérieur ou égal à 1 et, dans ce cas, $\sqrt{x-1}$ est un réel positif. Les réels appartenant à $[1, 4[$ sont donc tous solutions de l'équation $\sqrt{x-1} \geq x - 4$ (car $x - 4$ est négatif dans ce cas).

> **À retenir**
>
> Quand on cherche à résoudre une inéquation faisant intervenir une racine carrée, il est souvent intéressant d'élever au carré pour simplifier. Ne pas oublier cependant que cela n'est possible que si les deux termes de l'inégalité sont positifs.

De plus, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, on a alors, les termes étant tous positifs ou nuls :

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \geq x - 4 &\iff x - 1 \geq (x-4)^2 \\ &\iff x - 1 \geq x^2 - 8x + 16 \\ &\iff x^2 - 9x + 17 \leq 0 \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré $X^2 - 9X + 17$ admet pour discriminant $\Delta = 13$, donc il admet deux racines réelles exactement, qui sont :

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{13}}{2}$$

Comme le coefficient dominant de $X^2 - 9X + 17$ est strictement positif, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - 9x + 17$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs, on peut remarquer que $\sqrt{13}$ est strictement supérieur à 1 (faut-il vraiment dire pourquoi ?) donc que x_1 est strictement inférieur à 4, tandis que x_2 est strictement supérieur à 4, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\sqrt{x-1} \geq x - 4 \iff x \in \left[1, \frac{9 + \sqrt{13}}{2}\right[}$$

Exercice 7 –

Méthode

Quand on veut démontrer une inégalité du type « $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ » où f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut étudier les variations de la fonction $g - f$ sur I.

Attention à la précipitation cependant : il est toujours préférable de commencer par simplifier le plus possible l'inégalité à démontrer *avant* d'étudier une fonction, car l'étude en sera d'autant plus rapide.

1. La fonction $g : x \mapsto e^x - 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x - 1$$

Ne pas oublier de justifier que la fonction f est dérivable avant de calculer f'.

On en déduit le tableau de variations suivant (les limites étant précisées pour le plaisir, puisqu'elles ne sont pas utiles ici) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$

2. • La fonction $\varphi : x \longmapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont, et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{x\,(x+1) - (x+1)^2 + x}{x\,(x+1)^2}\\ &= -\frac{1}{x\,(x+1)^2}\\ &\leq 0\end{aligned}$$

φ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1} \ln(t) = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0$$

Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$$

ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) \geq 0$$

• De même, la fonction $\psi : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont, et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi'(x) &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\\ &= -\frac{(x+1) + x^2 - x\,(x+1)}{x^2\,(x+1)}\\ &= -\frac{1}{x^2\,(x+1)}\\ &\leq 0\end{aligned}$$

ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, de même que précédemment, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$$

ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(x) \geq 0$$

On peut finalement conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

3. Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{2x+1} \geq e^{-(x+1)} \iff 2x+1 \leq e^{x+1} \qquad (10.1)$$

Penser que la dérivée d'un quotient est souvent plus lourde que le quotient initial ; quitte à étudier une fonction pour démontrer l'inégalité, il est donc préférable de commencer par simplifier pour éviter les fractions

On peut maintenant s'intéresser à la fonction $f : x \mapsto e^{x+1} - (2x+1)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = e^{x+1} - 2$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x+1 \geq 1$$

donc, comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^{x+1} \geq e \geq 2$$

On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc que f est croissante sur cet intervalle. Comme $f(0) = e - 1$, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq e - 1 \geq 0$$

Finalement, on obtient, avec (10.1) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1}{2x+1} \geq e^{-(x+1)}$$

Exercice 8 –

Notons tout d'abord que, comme tous les termes de l'inégalité sont positifs et comme la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \iff \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad (10.2)$$

Méthode

Quand on cherche à démontrer une inégalité, on commence déjà par simplifier le plus possible. Par exemple s'il y a une racine carrée et si tous les termes sont positifs, on peut commencer par comparer les carrés.

Nous allons maintenant démontrer séparément chacune des inégalités.

• On a déjà :

Pour montrer que $a \leq b$, il est en général utile de calculer $b - a$ et de chercher à factoriser le plus possible.

$$xy - \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{xy\,(x+y)^2 - 4x^2y^2}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{xy\left[(x+y)^2 - 4xy\right]}{(x+y)^2}$$

et d'après les identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$xy - \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{xy\left[x^2 - 2xy + y^2\right]}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{xy\,(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

d'où, comme x et y sont positifs :

$$xy - \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \geq 0$$

• De même, on a :

$$\frac{(x+y)^2}{4} - xy = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{4}$$
$$= \frac{(x-y)^2}{4}$$
$$\geq 0$$

• On a enfin :

$$\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{2\left(x^2+y^2\right) - (x+y)^2}{4}$$
$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4}$$
$$= \frac{(x-y)^2}{4}$$
$$\geq 0$$

Finalement, on a donc prouvé que :

$$\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

d'où, d'après (10.2) :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

À retenir

Bien travailler cet exercice, très classique. On reconnaîtra ici, dans l'ordre croissant, les moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique des réels x et y.

Exercice 9 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

donc :

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$$

et donc, de nouveau par définition de la partie entière, comme $\lfloor x \rfloor + n$ et $\lfloor x \rfloor + n + 1$ sont deux entiers consécutifs :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour simplifier, on note : $i = \lfloor x \rfloor$ et $j = \lfloor y \rfloor$. On a donc :

$$i \leq x < i + 1 \quad \text{et} \quad j \leq y < j + 1$$

d'où :

$$2i \leq 2x < 2i + 2 \quad \text{et} \quad 2j \leq 2y < 2j + 2$$

Ainsi $\lfloor 2x \rfloor$ est égal à $2i$ ou à $2i + 1$ et $\lfloor 2y \rfloor$ est égal à $2j$ ou à $2j + 1$.

Méthode

Quand on veut comparer des quantités qui ne peuvent prendre qu'un petit nombre de valeurs, il est souvent pertinent de distinguer les cas pour simplifier le raisonnement.

- Si $2i \leq 2x < 2i + 1$ et $2j \leq 2y < 2j + 1$, alors on a :

$$\begin{cases} i + j \leq x + y < i + j + 1 \\ 2i \leq 2x < 2i + 1 \\ 2j \leq 2y < 2j + 1 \end{cases}$$

donc :

$$\lfloor x + y \rfloor = i + j, \quad \lfloor 2x \rfloor = 2i \quad \text{et} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2j$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor &= 2i + 2j \\ &\leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \end{aligned}$$

- Si $2i \leq 2x < 2i + 1$ et $2j + 1 \leq 2y < 2j + 2$, alors :

$$\begin{cases} i + j + \frac{1}{2} \leq x + y < i + j + \frac{3}{2} \\ 2i \leq 2x < 2i + 1 \\ 2j + 1 \leq 2y < 2j + 2 \end{cases}$$

donc :

$$\lfloor x+y \rfloor = i+j+1, \quad \lfloor 2x \rfloor = 2i \quad \text{et} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2j+1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor &= 2i+2j+1 \\ &\leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \end{aligned}$$

- Si $2i+1 \leq 2x < 2i+2$ et $2j \leq 2y < 2j+1$, on obtient de même :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor &= 2i+2j+1 \\ &\leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \end{aligned}$$

- Si $2i+1 \leq 2x < 2i+2$ et $2j+1 \leq 2y < 2j+2$, on a enfin :

$$\begin{cases} i+j+1 \leq x+y < i+j+2 \\ 2i+1 \leq 2x < 2i+2 \\ 2j+1 \leq 2y < 2j+2 \end{cases}$$

donc :

$$\lfloor x+y \rfloor = i+j+1, \quad \lfloor 2x \rfloor = 2i+1 \quad \text{et} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2j+1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor &= 2i+2j+1 \\ &\leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on peut désormais conclure :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 10 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $k = \lfloor x \rfloor$, c'est-à-dire l'entier tel que : $k \leq x < k+1$. On a donc :

$2k \leq 2x < 2k+2$

$\lfloor 2x \rfloor$ est donc égal à $2k$ ou à $2k+1$, donc distinguer les cas est une bonne option.

Deux cas se présentent.

- Si $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[$, alors on a :

$$k \leq k + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < k+1 \quad \text{et} \quad 2k \leq 2x < 2k+1$$

donc :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = k + k = \lfloor 2x \rfloor$$

- Si $x \in \left[k+\frac{1}{2}, k+1\right[$, alors on a :

$$k+1 \leq x + \frac{1}{2} < k + \frac{3}{2} < k+2 \quad \text{et} \quad 2k+1 \leq 2x < 2k+2$$

donc :

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = k+(k+1) = \lfloor 2x\rfloor$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor 2x\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On déduit de la question précédente que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor - \lfloor x\rfloor$$

donc que :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor 2\times\frac{x}{2^{k+1}}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}}\right\rfloor$$

Il en découle :

$$\sum_{k=0}^{n}\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor = \sum_{k=0}^{n}\left(\left\lfloor \frac{x}{2^{k}}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}}\right\rfloor\right)$$

donc, par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n}\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^{0}}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}}\right\rfloor$$

d'où :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n}\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}}\right\rfloor$$

Exercice 11 –

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. Notons déjà que :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \lfloor x\rfloor \le x\le x+\frac{k}{n} < x+1 < \lfloor x\rfloor + 2$$

donc : $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor \in \{\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor+1\}$

Il va donc s'agir dans un premier temps de déterminer les termes de la somme égaux à $\lfloor x\rfloor$ pour pouvoir calculer la somme.

On peut remarquer que :

$$\lfloor x\rfloor < \lfloor x\rfloor+\frac{1}{n} < \lfloor x\rfloor+\frac{2}{n} < \cdots < \lfloor x\rfloor+\frac{n}{n} = \lfloor x\rfloor+1$$

De plus $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor+1$ et $[\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor+1[$ est la réunion disjointe des intervalles $\left[\lfloor x\rfloor+\frac{i}{n}, \lfloor x\rfloor+\frac{i+1}{n}\right[$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, donc il existe un unique entier $i\in[\![0,n-1]\!]$ tel que :

$$\lfloor x\rfloor+\frac{i}{n}\le x<\lfloor x\rfloor+\frac{i+1}{n} \tag{10.3}$$

et on a alors :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \lfloor x \rfloor + \frac{i+k}{n} \leq x + \frac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + \frac{i+k+1}{n}$$

Or on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } \lfloor x \rfloor \leq x + \frac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + 1 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } \lfloor x \rfloor + 1 \leq x + \frac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + 2 \end{cases}$$

Il en découle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leq \frac{i+k}{n} < \frac{i+k+1}{n} \leq 1 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } 1 \leq \frac{i+k}{n} < \frac{i+k+1}{n} \leq 2 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leq k \leq n-i-1 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } n-i \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n-i-1} \lfloor x \rfloor + \sum_{k=n-i}^{n-1} (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= (n-i)\lfloor x \rfloor + i\,(\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= n\lfloor x \rfloor + i \end{aligned}$$

Enfin on a, d'après (10.3) :

$$n\lfloor x \rfloor + i \leq nx < n\lfloor x \rfloor + i + 1$$

donc $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + i$ et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Exercice 12 –

1. Vrai.

> Compte tenu de la question, il est raisonnable de penser à appliquer l'inégalité triangulaire avec $x + y$ et $x - y$ pour se faire une opinion.

On sait, d'après l'inégalité triangulaire, que :

$$\begin{aligned} |x+y| + |x-y| &\geq |(x+y) + (x-y)| \\ &\geq 2\,|x| \end{aligned}$$

mais aussi que :

$$\begin{aligned} |x+y| + |x-y| &\geq |(x+y) - (x-y)| \\ &\geq 2\,|y| \end{aligned}$$

On en déduit, en sommant ces inégalités :

$$2\,|x| + 2\,|y| \leq 2\left[|x+y| + |x-y|\right]$$

2. Faux. Par exemple si $x = y = -2$, on a : $|x + y| = 4 = |x| + |y|$. En fait l'égalité a lieu lorsque x et y sont de même signe, et uniquement dans ce cas :
   - Si x et y sont tous deux positifs ou nuls, $x + y$ l'est aussi et l'égalité est immédiate.
   - Si x et y sont tous deux négatifs ou nuls, alors $x + y$ aussi et on a :
   $$|x + y| = -x - y = |x| + |y|$$
   - Si $x > 0$ et $y < 0$, alors on a :
   $$-x + y < x + y < x - y$$
   donc :
   $$\begin{aligned} |x + y| &< x - y \\ &< |x| + |y| \end{aligned}$$

Cours
On retiendra que, dans l'inégalité triangulaire, il y a égalité si et seulement si les réels sont tous de même signe.

3. Faux. Par exemple, si $x = y = \frac{3}{2}$, on a : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2$ et $\lfloor x + y \rfloor = 3$.
4. Faux. Par exemple, si $x = 3$, $\lfloor x \rfloor = 3$ mais il y a 4 entiers dans $[0, 3]$. En revanche, si x est un réel positif non entier, alors $\lfloor x \rfloor$ est bien le nombre d'entiers appartenant à $[0, x]$.
5. Vrai. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$\begin{aligned} |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} &\iff 2\,|x|\,|y| \leq x^2 + y^2 \\ &\iff x^2 - 2\,|x|\,|y| + y^2 \geq 0 \\ &\iff \left(|x| - |y|\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$
ce qui permet de conclure, cette dernière inégalité étant toujours vraie :
$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}}$$
6. Vrai. Il suffit de distinguer les cas. Ainsi, si $x \leq y$, on a : $|x - y| = y - x$ et alors :
$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x - y|}{2} &= \frac{x + y + y - x}{2} \\ &= y \\ &= \max(x, y) \end{aligned}$$
On procède de même si $x > y$ et dans les deux cas pour la deuxième égalité.

11 Généralités sur les fonctions

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ est $]1, +\infty[$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ alors sa courbe représentative dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

On considère la fonction $f : x \mapsto (1 - x^2) \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. f est-elle paire ? impaire ?

Exercice 3 –

Déterminer les fonctions périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Dans cet exercice, f est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$$

1. Montrer que f est périodique et en déterminer une période.
2. Montrer que f est paire.
3. En déduire l'allure de la courbe représentative de f sur $[-2, 2]$ dans un repère orthonormé.

Exercice 5 –

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est croissante et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et bornée. On définit les fonctions g et h sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t) \quad \text{et} \quad h(x) = \inf_{t\in[0,x]} f(t)$$

1. Prouver que g est croissante sur $[0,1]$.
2. Étudier la monotonie de h.

Exercice 7 –

Soit f et g deux fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On se propose dans cet exercice d'étudier, dans certain cas, la périodicité de $f+g$. Pour cela, on note $T_f > 0$ une période de f et $T_g > 0$ une période de g.

1. Que peut-on dire de $f+g$ si $T_f = T_g$?
2. On suppose, dans cette question, que $\frac{T_f}{T_g}$ est un entier naturel non nul. Justifier que $f+g$ est périodique.
3. On suppose désormais que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(2\pi x)$$

On suppose que $f+g$ est périodique et on note $T>0$ une période de $f+g$.

a) Justifier que g est périodique et donner une période de g.

b) Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(x+T) + \sin(2\pi x + 2\pi T) = \sin(x) + \sin(2\pi x) \\ \sin(x+T) + (2\pi)^2 \sin(2\pi x + 2\pi T) = \sin(x) + (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \end{cases}$$

c) En déduire une contradiction. On rappelle à cet effet que π n'est pas rationnel.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. Le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3+x+1}{x^2-3x+2}$ est $]1,2[$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ln(x^2) = 2\ln(x)$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. La fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique.	☐ Vrai	☐ Faux
4. Si f et g sont majorées, alors $f \times g$ est majorée.	☐ Vrai	☐ Faux
5. Si $I = \mathbb{R}$ et si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - f(4-x)$, alors le graphe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(2,1)$.	☐ Vrai	☐ Faux
6. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Faux car f est aussi définie sur $]-\infty, -1[$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. Faux car elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

Cours

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ centrée en 0.

- On dit que f est paire si : $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est impaire si : $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

1. La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
De plus, la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si x est différent de 1 et $\frac{1+x}{1-x}$ est strictement positif.

On peut faire le tableau de signe suivant :

Évidemment le tableau de signe n'est pas indispensable, et certains pourront étudier le signe « de tête » mais il est préférable d'être vigilant, tant les erreurs sont fréquentes dans ce type de question.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi $\frac{1+x}{1-x}$ est strictement positif si et seulement si x appartient à $]-1, 1[$, ce qui nous permet de conclure que le domaine de définition de f est $]-1, 1[$.

2. On peut déjà remarquer que l'intervalle $]-1, 1[$ est bien centré en 0, donc il est raisonnable de se poser la question de la parité éventuelle de f.

Avant d'étudier la parité d'une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$, il convient de s'assurer que I est centrée en 0, c'est-à-dire que : $\forall x \in I,\ -x \in I$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ f(-x) &= [1-(-x)^2]\ \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\\ &= -(1-x^2)\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\ &= -f(x)\end{aligned}$$

$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

donc f est impaire sur $]-1, 1[$

Exercice 3 –

Cours

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On dit que f est périodique s'il existe $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ x + T \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Cours

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est croissante sur $\mathcal{D}$ si : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est décroissante sur $\mathcal{D}$ si : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est monotone sur $\mathcal{D}$ si f est croissante ou décroissante.

Attention! Une fonction peut n'être ni croissante ni décroissante sur une partie de $\mathbb{R}$; c'est le cas par exemple de la fonction $x \longmapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour déterminer un ensemble d'objets (ici des fonctions) ayant certaines propriétés (ici être périodique et monotone), il est souvent intéressant de raisonner par analyse-synthèse. Il arrive cependant (comme ici) que la réponse puisse se deviner ; dans ce cas il est en général plus simple de raisonner par double implication.

- On peut déjà remarquer que les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sont à la fois périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$.

  Réciproquement, considérons une fonction f périodique et monotone sur $\mathbb{R}$.

  On va chercher à montrer que f est constante.

  Comme f est périodique, il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$

  On va prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$

  On a donc :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ f((n+1)T) = f(nT) \quad \text{et} \quad f(-(n+1)T) = f(-nT)$$

  Ainsi les suites $(f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(-nT))_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes donc on a déjà :

  $$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(nT) = f(0) \tag{11.1}$$

  Soit alors $x \in \mathbb{R}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in [-nT, nT]$ (il suffit de prendre un entier $n > \left|\frac{x}{T}\right|$) et on a alors, comme f est monotone :

  - Si f est croissante, alors $f(-nT) \leq f(x) \leq f(nT)$ et donc, avec (11.1) :

    $$f(0) \leq f(x) \leq f(0)$$

    donc $f(x) = f(0)$.
  - Si f est décroissante, alors $f(nT) \leq f(x) \leq f(-nT)$ et on obtient comme précédemment : $f(x) = f(0)$.

On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$$

donc f est constante.

Finalement, les fonctions périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 –

1. Comme 1 est un entier, on a :

> Rappelons qu'en général $\lfloor x + y \rfloor$ n'est pas égal à $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$; en revanche il y a bien égalité lorsque x ou y est un entier.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1) - \lfloor x + 1 \rfloor &= x - \lfloor x \rfloor \\ &= f(x)\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$$

Ainsi f est 1-périodique.

2. $\mathbb{R}$ est centré en 0 et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) &= (-x - \lfloor -x \rfloor)\,(-x - \lfloor -x \rfloor - 1) \\ &= (x + \lfloor -x \rfloor)\,(x + \lfloor -x \rfloor + 1)\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors.

> Attention à la précipitation ici : il peut être tentant de dire que $\lfloor -x \rfloor$ est égal à $-\lfloor x \rfloor$, mais ce n'est pas toujours vrai. On notera par exemple que $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$ tandis que $-\lfloor 2,5 \rfloor = -2$.

- Si x est un entier alors $-x$ est un entier et on a :

$$x - \lfloor x \rfloor = x - x = 0 \quad \text{et} \quad x + \lfloor -x \rfloor = x - x = 0$$

et

$$f(-x) = 0 = f(x)$$

- Si x n'est pas entier, alors on a :

$$\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$$

donc :

$$-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$$

d'où :

$$\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$$

donc :

$$\begin{aligned}f(-x) &= (x - \lfloor x \rfloor - 1)\,(x - \lfloor x \rfloor) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$$

donc f est paire.

3. On déduit des résultats précédents que pour obtenir la courbe représentative de f sur $[-2, 2]$ dans un repère orthonormé, il suffit de la représenter sur $[0, 1]$, puis de reproduire le graphe sur l'intervalle $[1, 2]$ puis de tracer le symétrique de ce graphe par rapport à l'axe des ordonnées.

Par ailleurs, on peut remarquer que :

$$\forall x \in [0, 1[\,,\ f(x) = x\,(x-1) = x^2 - x$$

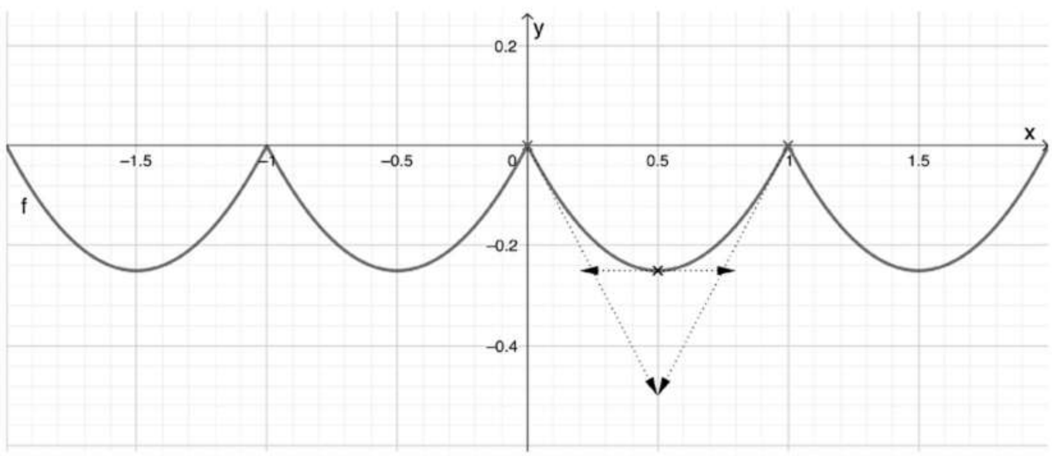
Il en découle que la restriction g de f est dérivable sur $[0, 1]$ (fonction polynôme) et que :

$$\forall x \in [0, 1]\,,\ g'(x) = 2x - 1$$

On en déduit ensuite le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

On obtient ainsi la représentation graphique suivante (en remarquant que la demi-tangente en 0 à droite a pour coefficient directeur $g'(0) = -1$ et que la demi-tangente en 1 à gauche a pour coefficient directeur $g'(1) = 1$:



Méthode

Quand on cherche à représenter l'allure de la représentation graphique d'une fonction f, il est important d'essayer d'être le plus précis possible sur la forme de cette courbe. Pour cela, on s'intéressera en particulier : aux éléments éventuels de symétrie, à la périodicité, aux tangentes ou demi-tangentes aux points remarquables (notamment aux bornes du domaine de définition de f), limites aux bornes, asymptotes éventuelles. Quand cette notion aura été abordée en cours, on pourra aussi étudier la convexité.

Exercice 5 –

Méthode

Quand on veut montrer qu'un objet mathématique (ici la fonction $f : x \longmapsto x$) est l'unique objet ayant une certaine propriété (ici vérifier $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$), il est souvent utile de raisonner par l'absurde.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) \neq x$ et notons $y = f(x)$. On a alors : $f(y) = f \circ f(x) = x$. Comme f est croissante, deux cas se présentent :

- Si $x < y$, alors $f(x) \leq f(y)$, c'est-à-dire : $y \leq x$; il y a donc contradiction dans ce cas.
- Si $y < x$, alors $f(y) \leq f(x)$, c'est-à-dire : $x \leq y$; il y a donc encore contradiction dans ce cas.

Ainsi il y a contradiction dans tous les cas et on peut conclure : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Exercice 6 –

Cours

Soit P une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si P est majorée (*i.e.* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in P$, $x \leq M$), alors P a un plus petit majorant, appelé borne supérieure de P et noté $\sup(P)$; $\sup(P)$ est l'unique réel vérifiant :

$$\forall x \in P,\ x \leq \sup(P) \quad \text{et} \quad \forall M \in \mathbb{R},\ (\forall x \in P,\ x \leq M) \Longrightarrow M \geq \sup(P)$$

Cours

Soit P une partie de $\mathbb{R}$.

- Si P est minorée (*i.e.* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in P$, $x \geq m$), alors P a un plus grand minoré, appelé borne inférieure de P et noté $\inf(P)$; $\inf(P)$ est l'unique réel vérifiant :

$$\forall x \in P,\ x \geq \inf(P) \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{R},\ (\forall x \in P,\ x \geq m) \Longrightarrow m \leq \inf(P)$$

Méthode

Pour étudier les variations sur I d'une fonction f qui n'est pas dérivable (ou que l'on ne sait pas dériver), on utilise la définition : on fixe un couple (x, y) d'éléments de I tel que $x < y$ et on compare $f(x)$ et $f(y)$.

1. Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$ tel que $x < y$. Par définition, $g(y)$ est un majorant de f sur $[0, y]$ donc :

$$\forall t \in [0, y],\ f(t) \leq g(y)$$

et, comme $0 \leq x \leq y$, $[0, x]$ est inclus dans $[0, y]$, d'où :

$$\forall t \in [0, x],\ f(t) \leq g(y)$$

$g(y)$ est donc un majorant de f sur $[0, x]$ donc, comme $g(x)$ est le plus petit majorant de f sur cet intervalle : $g(x) \leq g(y)$.

Ainsi g est croissante sur $[0, 1]$.

2. Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$ tel que $x < y$. Par définition, $h(y)$ est un minorant de f sur $[0, y]$ donc :

$$\forall t \in [0, y],\ f(t) \geq h(y)$$

et, comme $[0, x]$ est inclus dans $[0, y]$:

$$\forall t \in [0, x],\ f(t) \geq h(y)$$

$h(y)$ est donc un minorant de f sur $[0, x]$ donc, comme $h(x)$ est le plus grand minorant de f sur cet intervalle : $h(x) \geq h(y)$.
Ainsi h est décroissante sur $[0, 1]$.

Exercice 7 –

1. Supposons que $T_f = T_g$ et notons plus simplement $T_f = T_g = T$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (f+g)(x+T) &= f(x+T) + g(x+T)\\ &= f(x) + g(x)\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

donc, si $T_f = T_g$, alors $f + g$ est périodique.

2. Comme $\frac{T_f}{T_g}$ est un entier naturel non nul, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $T_f = nT_g$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ g(x + (k+1)\,T_g) &= g((x + kT_g) + T_g)\\ &= g(x + kT_g)\end{aligned}$$

La suite $(g(x + kT_g))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc constante et on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ g(x + kT_g) = g(x)$$

En particulier, nT_g est donc une période de g et, d'après le résultat de la question précédente (en substituant nT_g à T_g), $f + g$ est périodique.

3. **a)** On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) &= \sin(2\pi x + 2\pi)\\ &= \sin(2\pi x)\\ &= g(x)\end{aligned}$$

$2\pi\,(x + T) = 2\pi x + 2\pi T$ donc on choisit $T = 1$ pour utiliser la 2π-périodicité de sin.

donc g est 1-périodique.

b) Comme $f + g$ est T-périodique, on a déjà :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f+g)(x+T) = (f+g)(x)$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+T)+\sin(2\pi x+2\pi T) = \sin(x)+\sin(2\pi x)$$

La première égalité était assez évidente... Pour la deuxième, penser que la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sin(ax)$ est la fonction $x \longmapsto a\cos(ax)$.

À retenir

Penser que, quand on dispose d'une égalité de la forme « $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$ » entre deux fonctions et que l'on cherche à obtenir de nouvelles égalités, on peut toujours procéder ainsi : prendre des valeurs particulières de x, calculer les limites aux bornes de I, dériver (si les fonctions sont dérivables), intégrer (si les fonctions sont continues).

Comme les fonctions en présence sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (car sin, $x \longmapsto 2\pi x+2\pi$ et $x \longmapsto 2\pi x$ le sont), on en déduit, en dérivant cette égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+T) + 2\pi\cos(2\pi x + 2\pi T) = \cos(x) + 2\pi\cos(2\pi x)$$

et en dérivant encore :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\sin(x+T) - (2\pi)^2\sin(2\pi x + 2\pi T) = -\sin(x) - (2\pi)^2\sin(2\pi x)$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+T) + (2\pi)^2\sin(2\pi x + 2\pi T) = \sin(x) + (2\pi)^2\sin(2\pi x)$$

Finalement, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(x+T) + \sin(2\pi x + 2\pi T) = \sin(x) + \sin(2\pi x) \\ \sin(x+T) + (2\pi)^2\sin(2\pi x + 2\pi T) = \sin(x) + (2\pi)^2\sin(2\pi x) \end{cases}$$

c) En prenant $x = 0$, on en déduit, puisque $\sin(0) = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(T) + \sin(2\pi T) = 0 \\ \sin(T) + (2\pi)^2\sin(2\pi T) = 0 \end{cases}$$

soit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(2\pi T) = -\sin(T) \\ \left[1 - 4\pi^2\right]\sin(T) = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\sin(T) = \sin(2\pi T) = 0.$$

On en déduit qu'il existe deux entiers relatifs k et k' tels que :

$$T = k\pi \quad \text{et} \quad 2\pi T = k'\pi$$

ce qui implique que : $k' = 2k\pi$, ce qui est absurde puisque π n'est pas rationnel.

Exercice 8 –

1. Faux. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 3x + 2$ est différent de 0, donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.
2. Faux. Cette égalité n'est vraie que lorsque x appartient à $\mathbb{R}_+^*$. En revanche, on a toujours :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ln(x^2) = 2 \ln |x|$$

3. Vrai. Comme 1 est un entier, on a :

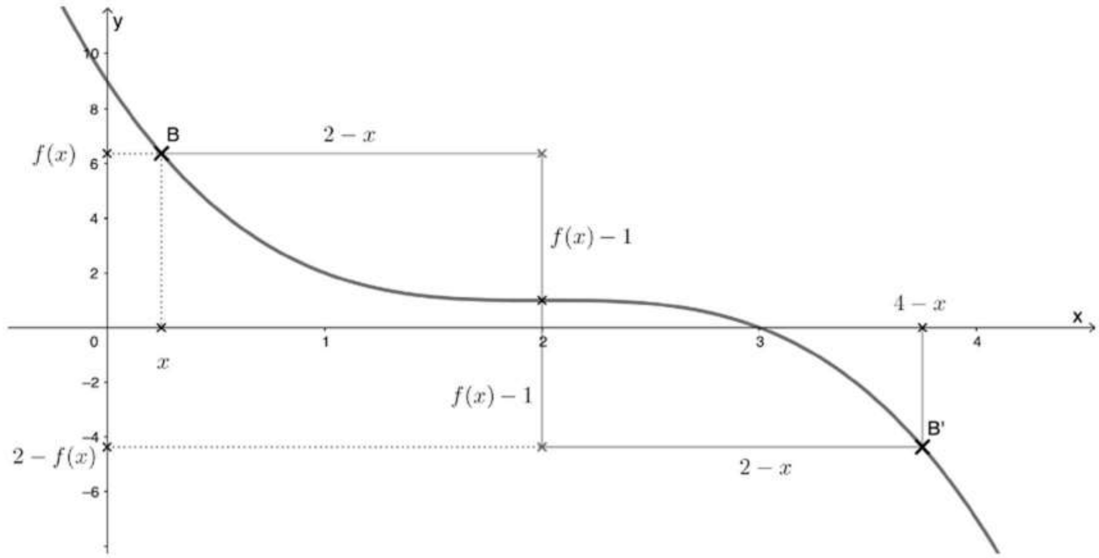
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+1) &= (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= (x+1) - (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= x - \lfloor x \rfloor \\ &= f(x) \end{aligned}$$

4. Faux. Par exemple, si $I = \mathbb{R}_+^*$ et si, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(x) = -\frac{1}{x}$, alors f et g sont majorées (par 0), mais on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x)g(x) = \frac{1}{x^2}$$

donc $f \times g$ n'est pas majorée puisqu'elle tend vers $+\infty$ en 0 à droite. En revanche, si f et g sont majorées et *positives*, alors $f \times g$ est majorée.

5. Vrai. Pour comprendre, un graphique s'impose. Considérons une fonction f symétrique par rapport au point de coordonnées $(2, 1)$, un point B de coordonnées $(x, f(x))$ et notons B' son symétrique par rapport au point de coordonnées $(2, 1)$.



Soit $x \in \mathbb{R}$ et B le point de coordonnées $(x, f(x))$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le symétrique de B par rapport au point de coordonnées $(2, 1)$ est le point B' de coordonnées $(4 - x, 2 - f(x))$ et on a :

$$\begin{aligned} f(4-x) &= 2 - f(4 - (4-x)) \\ &= 2 - f(x) \end{aligned}$$

donc le point B' appartient au graphe de f.

À retenir

On pourra retenir que, si f est une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si (a, b) est un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in I$, $2a - x$ appartient à I, alors le graphe de f dans un repère orthonormé est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b) si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ f(2a - x) = 2b - f(x)$$

ou encore, de façon équivalente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a + x \in I,\ f(a + x) + f(a - x) = 2b$$

6. Vrai. Par définition, on a :

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$$

donc tout élément de $f(\mathbb{R})$ admet au moins un antécédent x dans $\mathbb{R}$ par f et f est donc surjective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. De plus, comme f est strictement croissante, on a :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$$

donc :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ce qui prouve que f est également injective sur $\mathbb{R}$.

Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

12 Fonctions : limite et continuité

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Si f est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+^*$, elle a une limite finie en $+\infty$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si f est décroissante et minorée sur $\mathbb{R}_+^*$, elle a une limite finie en 0 à droite. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 3} = 2$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Calculer les limites des fonctions suivantes au point indiqué :

1. $x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$ en 1.
2. $x \mapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x + 1$ en 0.
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{x-1}$ en $+\infty$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Calculer les limites des fonctions suivantes au point indiqué :

1. $x \mapsto \ln(x) - 2x - \mathrm{e}^x$ en $+\infty$.
2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x^2}}{x - x^2}$ en $+\infty$.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(1 + \mathrm{e}^x)}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 4 –

Dans cet exercice, a désigne un réel et f_a est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = (x - \lfloor x \rfloor)\,(x - \lfloor x \rfloor + a)\,.$$

Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels f_a est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 –

On cherche à déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (*)$$

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

a) Montrer que f est impaire.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels $x_1, \dots, x_n$, que peut-on dire de $f(x_1 + \cdots + x_n)$?

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = n f(1)$.

b) Prouver également que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x f(1)$.

c) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

d) Que peut-on en déduire pour f ?

3. Conclure.

Exercice 6 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Prouver que, si f admet une limite en $+\infty$, alors f est constante.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On suppose que f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que :

$$f([a, b]) \subset g([a, b])$$

On se propose de démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que : $f(c) = g(c)$.

1. Justifier l'existence d'un minimum et d'un maximum m_f et M_f pour f (respectivement m_g et M_g pour g) sur $[a, b]$ puis que :

$$m_g \leq m_f \quad \text{et} \quad M_g \geq M_f.$$

2. On suppose que : $\forall x \in [a, b],\ f(x) \neq g(x)$. Prouver que $f - g$ est de signe constant sur $[a, b]$.

3. Conclure.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. Si f est continue sur $[-2, 2]$ et si $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$, il existe un unique $c \in [-2, 2]$ tel que $f(c) = 0$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $x \mapsto \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Si f est une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$, alors f admet un minimum et un maximum.	☐ Vrai	☐ Faux
4. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et tendant vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, alors f admet un minimum global.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Vrai. C'est une partie du théorème de la limite monotone.
2. Faux. Penser par exemple à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est bien décroissante et minorée sur $\mathbb{R}_+^*$, mais sa limite en 0 à droite est égale à $+\infty$.

> **Cours – Théorème de la limite monotone.**
> Si f est une fonction monotone sur $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, alors f a une limite (finie ou infinie) en a à droite et en b à gauche.
> Plus précisément :
> - si f est croissante et majorée, elle a une limite finie en b à gauche,
> - si f est croissante et *minorée*, elle a une limite finie en a à droite,
> - si f est décroissante et minorée, elle a une limite finie en b à gauche,
> - si f est décroissante et *majorée*, elle a une limite finie en a à droite.

3. Vrai. Pour trouver la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle, il suffit de considérer les termes de plus haut degrés :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$
4. Faux. Il faudrait que ℓ' soient des réels et que ℓ' soit non nul !

Exercice 2 –

1. On a :

> Quand on cherche la limite en un point d'une expression, on commence par chercher la limite de chacun des termes.

$$\lim_{x\to1}(x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to1}(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Il y a donc une indétermination. Cependant on peut remarquer que 1 est racine de $x^2 - 3x + 2$ donc on peut modifier l'expression.

> Quand il y a une forme indéterminée, on essaie de simplifier en factorisant.

Les racines de $x^2 - 3x + 2$ sont 1 et 2 donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\},\ \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

et donc :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2} = -1$$

2. Par définition de la partie entière, on a :

Quand on cherche la limite d'une fonction faisant intervenir une partie entière, on procède presque toujours par encadrement.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \tag{12.1}$$

On étudie maintenant les limites à gauche et à droite en 0.

Ne pas oublier que pour multiplier une inégalité par un réel a, il faut savoir si a est positif ou non.

En multipliant l'inégalité précédente par x ($x > 0$), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2 - 2x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x + 1 \leq 2 - x$$

Or on a :

$$\lim_{x \to 0^+} (2 - 2x) = \lim_{x \to 0^+} (2 - x) = 2$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x + 1 \right) = 2$$

De même, on obtient, à partir de (12.1) :

Penser que, si $x < 0$, alors : $a \leq b \Rightarrow ax \geq bx$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ 1 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1 - x$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ 2 - x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x + 1 \leq 2 - 2x$$

Or on a :

$$\lim_{x \to 0^-} (2 - 2x) = \lim_{x \to 0^-} (2 - x) = 2$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x + 1 \right) = 2$$

Finalement, comme les limites à gauche et à droite sont égales, on peut conclure :

$$\lim_{x\to 0}\left(x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor - x + 1\right) = 2$$

Cours

Soit $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et f, g, h des fonctions définies sur un voisinage V_a de a (éventuellement privé de a) telles que :

$$\forall x \in V_a,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, alors : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

3. Encore une fois, il y a indétermination, mais on peut remarquer que :

> Quand il y a une indétermination faisant intervenir une différence de racines carrées comme $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, penser que l'on peut souvent simplifier en multipliant et divisant par l'expression conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

$$\begin{aligned}\forall x > 1,\ \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x-1} &= \frac{\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}\right]\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right]}{(x-1)\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right]}\\ &= \frac{1-x}{(x-1)\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right]}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\end{aligned}$$

> $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Enfin on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right] = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0$$

donc finalement :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x-1} = 0$$

Exercice 3 –

1. On a :

> Face à une forme indéterminée avec une somme, on pense à factoriser pour pouvoir utiliser les croissances comparées.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) - 2x - e^x = e^x\left[\frac{\ln(x)}{e^x} - 2x\,e^{-x} - 1\right]$$

Or on a, par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{e^x} - 2x\,e^{-x} - 1\right] = -1$$

ce qui nous permet de conclure, comme $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x) - 2x - e^x\right] = -\infty$$

Cours – Croissances comparées.

Se souvenir que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$$

et plus généralement, pour tous réels α et β strictement positifs :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^\alpha \ln^\beta(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{e^{\beta x}} = 0$$

2. On a :

$$\forall x > 1,\ x - x^2 \neq 0$$

et :

$$\begin{aligned}\forall x > 1,\ \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} &= \frac{e^{x^2}}{x^2} \times \frac{e^{x - x^2} - 1}{\frac{1}{x} - 1} \\ &= \frac{e^{x^2}}{x^2} \times \frac{e^{x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right)} - 1}{\frac{1}{x} - 1}\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

donc :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = 0$$

Il en découle :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right)} - 1}{\frac{1}{x} - 1} = 1$$

Enfin on a, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$$

On peut désormais conclure :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} = +\infty$$

3. On a :

Attention à ne pas voir des croissances comparées là où il n'y en a pas !

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x} = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)\right)}{x} = \frac{x+\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)}{x} = 1+\frac{\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)}{x} = 1+\frac{1}{x}\times\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{-x}+1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1}\ln(t) = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}^{-x}+1) = 0$$

et ainsi (sans indétermination) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x} = 1$$

Exercice 4 –

Soit $a \in \mathbb{R}$. Par définition, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in [n, n+1[\,,\ f_a(x) = (x-n)(x-n+a).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la restriction de f_a à $[n, n+1[$ est une fonction polynôme, donc continue sur $[n, n+1[$. La fonction f_a est donc continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et continue à droite en tout n appartenant à $\mathbb{Z}$.

De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in [n-1, n[\,,\ f_a(x) = (x-n+1)(x-n+1+a)$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \lim_{x\to n^-} f_a(x) = 1+a$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{Z}, f_a(n) = 0, f_a$ est donc continue en $n \in \mathbb{Z}$ si, et seulement si, $1+a=0$, donc si et seulement si $a=-1$.

Finalement f_a est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=-1$.

À retenir

Dans les questions portant sur la continuité d'une fonction, attention à la précipitation. S'il faut évidemment étudier la continuité aux points posant problème (ici les entiers relatifs), il ne faut pas oublier de justifier la continuité là où elle ne pose pas de problème.

Exercice 5 –

1. **a)** $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, en prenant $y = -x$ dans la relation $(*)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = f(x) + f(-x) \tag{12.2}$$

De plus, en prenant $x = y = 0$, on obtient : $f(0) = 2f(0)$. On en déduit $f(0) = 0$ et alors, d'après (12.2) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$$

ce qui nous permet de conclure que f est impaire.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de réels. Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{P}(n)$: « $f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ ».

On montre par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

> **Méthode**
>
> Un grand nombre de résultats faisant intervenir une somme $\sum_{k=1}^{n}$ peuvent se prouver par récurrence.

- Pour $n = 1$. Comme $f(x_1) = f(x_1)$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)$$

donc, comme f vérifie $(*)$:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + f(x_{n+1})$$

et d'après $\mathcal{P}(n)$:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

- On peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Méthode

On pouvait également remarquer, en utilisant $(*)$, que (en notant $x_0 = 0$) :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) = f\left(\sum_{i=0}^{k-1} x_i\right) + f(x_k)$$

soit encore :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) - f\left(\sum_{i=0}^{k-1} x_i\right) = f(x_k)$$

puis sommer ces égalités de $k = 1$ à $k = n$, pour obtenir, à l'aide d'un télescopage :

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) - f(0) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

2. **a)** On peut remarquer, en prenant $x_1 = \cdots = x_n$ dans le résultat précédent, que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} f(1)\\ &= n f(1)\end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$ et comme f est impaire, on peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = n f(1)$$

b) Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $x = \frac{p}{q}$. Si p est strictement positif, on a alors, d'après le résultat de la question 1(b) :

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{q}\right) = \sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{1}{q}\right) = p f\left(\frac{1}{q}\right)$$

Supposons maintenant que p soit strictement négatif. Comme $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}f(x) &= -f\left(-\frac{p}{q}\right)\\ &= -f\left(\sum_{k=1}^{-p} \frac{1}{q}\right)\end{aligned}$$

donc, d'après le résultat de la question 1(b) :

$$\begin{aligned}f(x) &= -\sum_{k=1}^{-p} f\left(\frac{1}{q}\right)\\ &= p f\left(\frac{1}{q}\right)\end{aligned}$$

Enfin l'égalité est évidemment vraie si $p = 0$ puisque $f(0) = 0$.
Par ailleurs, encore d'après le résultat de la question 1(b), on a de même :

$$f(1) = f\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{q}\right) = q f\left(\frac{1}{q}\right)$$

d'où :

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} f(1)$$

et alors :

$$f(x) = \frac{p}{q} f(1)$$

Finalement, on a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x f(1)$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right) = x$ donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

À retenir

On se souviendra (et on saura démontrer) que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels, plus précisément que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le résultat précédent et comme f est continue en x, on a :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$$

De plus, d'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} f(1)$$

donc :

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) = x f(1)$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x f(1)$$

3. On a donc montré que, s'il existe une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$, alors il existe un réel a tel que f soit l'application $x \mapsto ax$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* f est une fonction linéaire).
Réciproquement, soient a un réel quelconque et $f : x \mapsto ax$, définie sur $\mathbb{R}$.

Une seule implication a été démontrée, il ne faut pas oublier de démontrer la réciproque !

f est alors continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) &= a(x+y)\\ &= ax + ay\\ &= f(x) + f(y)\end{aligned}$$

donc f vérifie $(*)$, ce qui nous permet de conclure que les applications f continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $(*)$ sont les applications linéaires $x \mapsto ax$.

Exercice 6 –

Supposons que f soit périodique sur $\mathbb{R}$, de période $T > 0$ et admette une limite ℓ en $+\infty$.
Comme f est T-périodique, on a :

Pour montrer que f est constante, il suffit de prouver que $f(x) = \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x + (n+1)T) = f(x + nT + T) = f(x + nT)$$

donc, pour tout réel x, la suite $(f(x+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x + nT) \tag{12.3}$$

De plus, comme $T > 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = \ell$$

et donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (12.3) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ell$$

ce qui prouve d'une part que ℓ est nécessairement finie, et d'autre part que f est constante

Exercice 7 –

1. • f et g sont deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, f et g admettent toutes deux un minimum et un maximum sur $[a,b]$.

Cours – Théorème des bornes atteintes.
Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$, ce qui signifie que f a un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

• Par définition de m_f, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que : $m_f = f(x_0)$. De plus $f([a,b])$ est inclus dans $g([a,b])$, donc $f(x_0)$ appartient à $g([a,b])$, ce qui signifie qu'il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que : $g(x_1) = f(x_0)$. On a alors, comme m_g est le minimum de g sur $[a,b]$:

$$m_g \le g(x_1)$$

d'où :

$$m_g \leq m_f$$

• De même, il existe $x_2 \in [a, b]$ tel que $M_f = f(x_2)$ et il existe $x_3 \in [a, b]$ tel que $g(x_3) = f(x_2)$. On a alors, comme M_g est le maximum de g sur $[a, b]$:

$$M_g \geq g(x_3)$$

d'où :

$$M_g \geq M_f$$

2. Supposons que $f - g$ ne soit pas de signe constant sur $[a, b]$. Il existe alors deux éléments distincts x_1 et x_2 de $[a, b]$ tels que :

$$f(x_1) - g(x_1) < 0 \quad \text{et} \quad f(x_2) - g(x_2) > 0$$

Quitte à échanger les noms, on peut supposer que : $x_1 < x_2$. Comme $f - g$ est continue sur $[x_1, x_2]$ (car f et g le sont) et comme 0 est compris entre $(f - g)(x_1)$ et $(f - g)(x_2)$, on en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $(f - g)(c) = 0$, donc tel que $f(c) = g(c)$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

On en déduit que $f - g$ est de signe constant sur $[a, b]$.

Cours – Théorème des valeurs intermédiaires.

Si f est continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ alors, pour tout c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $d \in [a, b]$ tel que : $f(d) = c$.

3. Supposons encore que :

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \neq g(x)$$

D'après le résultat de la question précédente, $f - g$ est de signe constant (et ne s'annule pas par hypothèse).

Distinguons alors les cas selon le signe de $f - g$.

On va chercher à établir une contradiction avec les inégalités obtenues dans la question 1.

- Supposons que $f - g$ soit strictement positive. On a alors :

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) > g(x)$$

donc, comme M_f est le maximum de f sur $[a, b]$:

$$\forall x \in [a, b],\ M_f \geq f(x) > g(x)$$

et en particulier pour $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = M_g$:

$$M_f > M_g$$

Il y a donc contradiction avec le résultat de la question 1.

- Supposons maintenant que $f - g$ soit strictement négative. On a alors :

$$\forall x \in [a, b],\ m_f \leq f(x) < g(x)$$

et en particulier pour $\beta \in [a, b]$ tel que $g(\beta) = m_g$:

$$m_f < m_g$$

Il y a donc contradiction avec le résultat de la question 1.

Dans tous les cas, il y a donc contradiction, ce qui nous permet de conclure qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 8 –

1. Faux. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'un réel c appartenant à $[-2, 2]$ tel que $f(c) = 0$, mais pas l'unicité.
   Il suffit de considérer la fonction $f : x \mapsto x\,(x-1)\,(x+1)$. Celle-ci est bien continue sur $[-2, 2]$ et on a : $f(-2) = -6$ et $f(2) = 6$, pourtant f s'annule trois fois sur $[-2, 2]$.
   En revanche, si f est continue et strictement monotone sur $[-2, 2]$ avec $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$, il existe bien un unique $c \in [-2, 2]$ tel que $f(c) = 0$.

   Cours – Théorème de la bijection.
   Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (*i.e.* si I est un segment, $f(I)$ est un segment, si I est ouvert, $f(I)$ est ouvert,...).

2. Faux. On peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin(x)|$$

   Or on a :

$$\lim_{x \to 0} |\sin(x)| = 0$$

   donc, d'après le théorème de l'encadrement : $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

3. Vrai. Supposons que f soit continue et périodique sur $\mathbb{R}$ et notons $T > 0$ une période de f. Alors f est continue sur le segment $[0, T]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, f a un minimum et un maximum sur $[0, T]$ et il existe (a, b) appartenant à $[0, T]$ tel que $f(a) = m$ et $f(b) = M$. On a donc :

$$\forall x \in [0, T],\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

   De plus f est T-périodique, donc on a :

$$\forall x \in [0, T],\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(x + nT) = f(x)$$

   On en déduit :

$$\forall x \in [0, T],\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(a) \leq f(x + nT) \leq f(b)$$

soit encore :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in [nT, (n+1)T],\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

4. Vrai. Supposons que f soit continue sur $\mathbb{R}$ et tende vers $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$. Par définition de la limite, on a alors d'une part :

$$\exists A < 0,\ \forall x < A,\ f(x) > f(0)$$

On utilise la définition de la limite en $-\infty$.

et d'autre part :

$$\exists B > 0,\ \forall x > B,\ f(x) > f(0)$$

On utilise la définition de la limite en $+\infty$.

En outre f est continue sur le segment $[A, B]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum sur $[A, B]$, atteint en au moins un point x_0 de $[A, B]$ et on a :

$$\forall x \in [A, B],\ f(x) \geq f(x_0)$$

On en déduit, par définition de A et de B et comme $f(0) \geq f(x_0)$ (car $0 \in [A, B]$) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$$

Ainsi $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

13 Fonctions : dérivation

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. La dérivée de la fonction $x \longmapsto 4x^3 + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto 12x^2 - \frac{1}{x^2}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et si f' est négative, alors f est décroissante sur $\mathcal{D}_f$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 –

Soit a, b, c des réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x + cx^2}{x - 2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeur de a, b, c la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelles valeur de a, b, c la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Prouver que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note encore f la fonction ainsi prolongée.

2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Pour aller plus loin

Exercice 5 –

Soit (a, b) un couple de réels tel que $a < b$ et f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que :

$$\forall x \in [a, b],\ f'(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Prouver que f est une fonction affine sur $[a, b]$.

Exercice 6 –

Dans cet exercice, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$. On suppose que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. Prouver que f est injective sur $[a, b]$.

2. **a)** Soit $(x, y, z) \in [a, b]^3$ tel que $x < y < z$ et $f(x) < f(z)$. On suppose que $f(z) < f(y)$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, aboutir à une contradiction.

On montrerait de même, et on admettra, que l'on aboutit également à une contradiction si on suppose $f(y) < f(x)$. Ainsi on a donc :

$$\forall (x, y, z) \in [a, b]^3,\ \begin{cases} x < y < z \\ f(x) < f(z) \end{cases} \Rightarrow f(x) < f(y) < f(z)$$

b) En déduire que, si $f(a) < f(b)$, alors f est croissante sur $[a, b]$.

Que peut-on dire de f si on suppose $f(a) > f(b)$?

3. Prouver finalement que f' est de signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

1. La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Il existe une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 3. ☐ Vrai ☐ Faux

3. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(1) = 2$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \frac{\sqrt{|x|} - 3}{x - 1}$$

☐ Vrai ☐ Faux

alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

4. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors :

☐ Vrai ☐ Faux

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h} = 2f'(x)$$

5. La composée de fonctions dérivables sur $[0, 1]$ est dérivable sur $[0, 1]$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La dérivée de la fonction $x \longmapsto 4x^3 + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto 12x^2 - \frac{1}{x^2}$ ☒ Vrai ☐ Faux
2. Faux. Par exemple la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$ ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle). ☐ Vrai ☒ Faux
3. Faux, par exemple la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Si f est une fonction dérivable sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ et si f' est négative sur I (respectivement positive sur I), alors f est décroissante sur I (resp. croissante sur I).

Exercice 2 –

Méthode

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on commence par justifier la dérivabilité à l'aide des théorèmes généraux (fonctions usuelles, somme, produit, quotient, composée de fonctions dérivables) puis on étudie les éventuels points à problème (comme dans cet exercice 0 car f n'est pas définie de la même façon à gauche et à droite de 0).

Si l'on veut étudier la dérivabilité de f en $a \in I$, on étudie alors la limite de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ lorsque x tend vers a (éventuellement en étudiant séparément les limites à gauche et à droite); f est dérivable en a si et seulement si cette limite existe et est finie et dans ce cas :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La fonction $x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ (car ce sont des fonctions polynômiales) donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.
De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Ces deux limites étant égales, on en déduit que f est aussi dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

soit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 3 –

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. La fonction $x \mapsto x^2 + ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0.

   On commence par justifier la continuité là où il n'y a pas de problème.

   La fonction $x \mapsto \frac{x+cx^2}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}_-^*$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

   De plus, on a :

   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

   Il reste à étudier la continuité à gauche en 0.

   donc, comme $f(0) = b$, f est continue à gauche en 0 si et seulement si $b = 0$. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 0$.

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. D'après le résultat précédent, pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut que b soit nul.

   Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

   On pose donc $b = 0$. La fonction $x \mapsto x^2 + ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable à droite en 0 et on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2x + a \quad \text{et} \quad f_d'(0) = a$$

   La fonction $x \mapsto \frac{x+cx^2}{x-2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}_-^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Enfin, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 + cx}{x - 2}$$

   Il reste à étudier la dérivabilité à gauche en 0.

   donc :

   $$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

   Ainsi f est dérivable en 0 à gauche et on a : $f_g'(0) = -\frac{1}{2}$. Comme $f_d'(0) = a$, on en déduit que f est dérivable en 0 si et seulement $a = -\frac{1}{2}$.

   Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 0$.

Exercice 4 –

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme produit de fonctions qui le sont.

   De plus, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement, comme $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

donc f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 0$.

Cours

Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f est prolongeable par continuité en a si f n'est pas définie en a et si elle admet une limite finie en a.

Attention, si f est définie en a, elle ne peut pas être prolongeable par continuité !

2. • De même que précédemment, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme produit de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leq |x|$$

et alors, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

donc f est dérivable en 0 et on a : $f'(0) = 0$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

De même que dans la question 1, f' est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme somme et produit de fonctions qui le sont. De plus, on a vu que :

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

donc, comme $f(0) = 0$, f' est continue en 0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 en 0.

Posons alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{2\pi n}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1$$

donc la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne tend pas vers 0 en 0, ce qui nous permet de conclure que f' n'est pas continue en 0.

Cours

Si f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a, alors f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, on a : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exercice 5 –

À retenir

Si (a, c) et (b, d) sont deux couples de réels tels que $a \neq b$, l'unique fonction affine f telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$ est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$$

Considérons la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Méthode

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, pour montrer que $f = g$, on peut montrer que $h = f - g$ est constante sur I et qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $h(c) = 0$.

La fonction $h = g - f$ est dérivable sur $[a, b]$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

donc, par hypothèse sur f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) \leq 0$$

Ainsi h est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall x \in [a, b],\ h(b) \leq h(x) \leq h(a)$$

d'où, comme $h(a) = h(b) = 0$:

$$\forall x \in [a, b],\ h(x) = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

donc f est affine sur $[a, b]$.

Exercice 6 –

1. Soit (x, y) un couple d'éléments de $[a, b]$ tel que $f(x) = f(y)$. Supposons que $x \neq y$. Deux cas se présentent.

- Si $x < y$. Comme f est dérivable sur $[a, b]$, elle est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Comme de plus $f(x) = f(y)$, on en déduit, d'après le théorème de Rolle, qu'il existe $c \in \left]x, y\right[$ tel que $f'(c) = 0$. Or $]x, y[$ est inclus dans $]a, b[$ et f' ne s'annule pas sur $]a, b[$, donc il y a contradiction.
- On obtient de même une contradiction si $y < x$.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Ainsi f est injective sur $[a, b]$.

2. **a)** Comme $f(x) < f(z)$ et $f(z) < f(y)$, on a :

$$f(x) < f(z) < f(y)$$

Or f est continue sur $[x, y]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [x, y]$ tel que :

$$f(\alpha) = f(z)$$

Par ailleurs f est injective donc on a : $\alpha = z$. Or $\alpha \in [x, y]$ et $y < z$, donc il y a une contradiction et on a donc $f(y) \leq f(z)$ d'où, comme f est injective et $y \neq z$: $f(y) < f(z)$.

b) ▶ On suppose que $f(a) < f(b)$. Soit $(u, v) \in \left]a, b\right[^2$ tel que $u < v$. On a donc :

$$a < u < v < b$$

En appliquant le résultat de la question précédente avec $(x, y, z) = (a, u, b)$, on obtient :

$$f(a) < f(u) < f(b)$$

On en déduit alors, en appliquant le résultat de la question précédente avec $(x, y, z) = (u, v, b)$:

$$f(u) < f(v) < f(b)$$

On a donc prouvé en particulier que :

$$\forall (u, v) \in \left]a, b\right[^2,\ u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$$

ce qui permet d'affirmer, f étant continue sur $[a, b]$, que f est strictement croissante sur $[a, b]$.

▶ Si $f(b) < f(a)$, alors, en notant $\varphi = -f$, on a : $\varphi(a) < \varphi(b)$. De plus φ est une fonction dérivable sur $[a, b]$ dont la dérivée, égale à $-f'$, ne s'annule pas sur $[a, b]$. On en déduit, en substituant φ à f dans le raisonnement précédent, que φ est strictement croissante sur $[a, b]$, c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in [a, b]^2,\ u < v \Rightarrow \varphi(u) < \varphi(v)$$

donc, en multipliant par -1 :

$$\forall (u,v) \in [a,b]^2,\ u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

3. D'après le résultat de la question précédente, dans tous les cas f est strictement monotone sur $[a,b]$. Comme f est dérivable sur $[a,b]$, il en découle que f' est de signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 7 –

1. Vrai. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt{x}$$

donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

À retenir

Si l'on sait que le produit $f \times g$ de fonctions dérivables sur I est une fonction dérivable sur I, on se souviendra que $f \times g$ peut être dérivable sur I même si f et g ne le sont pas.

2. Vrai. Il suffit de considérer la fonction $f : x \mapsto |x-3|$. Celle-ci est bien continue sur $\mathbb{R}$, mais on a :

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3-x}{x-3} = -1$$

et :

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

donc, comme les limites à gauche et à droite sont distinctes, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ n'a pas de limite en 3.

3. Faux. On peut remarquer que f n'est pas continue en 1 puisque :

Attention à la (grave) erreur consistant à penser que $f(1) = 2$ implique que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

4. Faux. Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut remarquer que :

On peut faire apparaître des taux d'accroissement.

$$\forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$

De plus, comme f est dérivable en x, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{(x-h)-x} = f'(x)$$

donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f'(x)$$

On en déduit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h} = f'(x) - f'(x) = 0$$

5. Faux. La composée $f \circ g$ de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$ peut ne pas être définie… Par exemple les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ et $g : x \mapsto 2-x$ sont dérivables sur $[0,1]$, mais $f \circ g$ n'est pas définie en 0.

Cours

Si g est dérivable sur I, à valeurs dans J, et si f est dérivable sur J, alors $f \circ g$ est dérivable sur I.

14 Fonctions usuelles

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Dans cet exercice, a, b et y désignent des réels strictement positifs, x un réel quelconque et n un entier naturel.

1. $a^{y^x} = a^{xy}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $a^{-x+\frac{y}{2}} = \dfrac{\sqrt{a^y}}{a^x}$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\ln(4) > 2$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. $\ln\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\ln(a)}$. ☐ Vrai ☐ Faux
5. $\ln\left(\frac{a^2}{b}\right) = \ln(a) - \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. ☐ Vrai ☐ Faux
6. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. ☐ Vrai ☐ Faux
7. $\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux
8. $\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. ☐ Vrai ☐ Faux
9. $\forall t \in\,]-1, 1[\,,\ \mathrm{Arccos}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. ☐ Vrai ☐ Faux
10. La fonction th est paire. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

Exercice 3 –

1. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \geq 1$.
2. Montrer que la fonction ch induit une bijection g de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa réciproque, notée Argch.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

1. Prouver que la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et préciser sa valeur sur chacun de ces intervalles.

2. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x$$

Exercice 5 –

1. Prouver que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \sin(x) \geq x - \frac{x^2}{\pi}$.

2. En déduire que : $\forall x \in [0, \pi], \ \sin(x) \geq x - \frac{x^2}{\pi}$.

Exercice 6 –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Exercice 7 –

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Étudier les variations de f.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –

1. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\sin(\operatorname{Arctan}(x))$?

Exercice 9 –

1. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$$

2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de : $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

1. La fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(2x)$ est impaire sur $[-1, 1]$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. La fonction $x \mapsto \text{Arccos}(\sin(x))$ est impaire.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} = 0$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. La fonction $x \mapsto -x\ln(x) + e^x$ admet un maximum et un minimum sur $]0, \pi]$.	☐ Vrai	☐ Faux
5. $\text{Arctan}(\tan(2\pi)) = 2\pi$.	☐ Vrai	☐ Faux
6. $\forall x \in]-1, 1[, \ \tan(\text{Arccos}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Ne pas confondre a^{y^x} et $(a^y)^x$.	☐ Vrai	☒ Faux
2. $a^{-x+\frac{y}{2}} = \frac{\sqrt{a^y}}{a^x}$.	☒ Vrai	☐ Faux
3. $\ln 4) = 2\ln(2)$ et $2 = 2\ln(e)$ donc $\ln(4) < 2$.	☐ Vrai	☒ Faux
4. Faux car, par exemple si $a = 2$, $\ln\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ et $\sqrt{\ln(a)} \neq 0$.	☐ Vrai	☒ Faux
5. $\ln\left(\frac{a^2}{b}\right) = \ln(a) - \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.	☒ Vrai	☐ Faux
6. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.	☒ Vrai	☐ Faux
7. Faux car, par exemple si $n = 2$, $\cos\left(2\,\frac{\pi}{2}\right) = -1$.	☐ Vrai	☒ Faux
8. $\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.	☒ Vrai	☐ Faux
9. $\forall t \in]-1, 1[, \ \text{Arccos}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.	☒ Vrai	☐ Faux
10. Faux, elle est impaire.	☐ Vrai	☒ Faux

Exercice 2 –

La fonction $x \mapsto x^2 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

> Attention aux justifications dans le cas d'une composée. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en 0.

Dès lors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) &= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 \\ &= \frac{(2x+1) - 2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} \end{aligned}$$

Méthode

Quand on étudie le signe d'une expression de la forme $a - \sqrt{b}$, il est souvent intéressant de multiplier et diviser par l'expression conjuguée $a + \sqrt{b}$ pour simplifier en utilisant l'identité remarquable $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) &= \frac{(2x+1)^2 - 4\left(x^2 + x\right)}{2\sqrt{x^2+x}\left[2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right]} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}\left[2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right]} \\ &> 0\end{aligned}$$

Par ailleurs f est continue en 0 comme somme de fonctions qui le sont, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Cours

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est dérivable sur I et si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) sur I, alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I.
- Si $I = [a, b]$, si f est dérivable sur $]a, b[$ si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I.

Exercice 3 –

Cours

On rappelle que les fonctions ch, sh et th sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

On rappelle également que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

1. On sait que :

On pourrait aussi étudier les variations de la fonction ch.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) &= 1 + \mathrm{sh}^2(x) \\ &\geq 1\end{aligned}$$

donc, comme la fonction ch est positive sur $\mathbb{R}$ et comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \geq 1$$

2. D'après le résultat précédent, la restriction g de ch à $\mathbb{R}^+$ est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.
Soit $y \in [1, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

On cherche à résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$.

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) = y &\iff \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2y \\ &\iff \mathrm{e}^x - 2y + \mathrm{e}^{-x} = 0 \end{aligned}$$

et comme $\mathrm{e}^x \neq 0$:

En posant $X = \mathrm{e}^x$, on obtient une équation du second degré.

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x + 1 = 0$$

De plus l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 4\left(y^2 - 1\right)$ qui est positif ou nul donc :

- Si $y = 1$, $X_1 = 1$ est l'unique solution de l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$; ainsi, on a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) = y &\iff \mathrm{e}^x = X_1 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

- Si $y > 1$, l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$ admet deux solutions réelles, qui sont :

$$X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

  On peut également remarquer que, dans ce cas, on a :

  On sait que $X_1 X_2 = 1$ et $X_1 \geq y > 1$

$$X_2 < 1 < X_1$$

  On a donc, dans ce cas, comme $\mathrm{e}^x \geq 1$ (car $x \geq 0$) :

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff \mathrm{e}^x = X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

  donc, comme la fonction exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

On constate que le cas $y = 1$ rejoint le cas général, ce qui nous permet de conclure, comme $\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ appartient bien à $\mathbb{R}^+$, que ch induit une bijection g de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ et que :

$$\forall y \in [1, +\infty[\,,\ \mathrm{Argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

À retenir

Bien retenir la méthode utilisée ici, très classique. On montrerait de même que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ et que sa réciproque est la fonction Argsh définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \ \mathrm{Argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

On montrerait également de même que la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que sa réciproque est la fonction Argth définie par :

$$\forall y \in]-1,1[, \ \mathrm{Argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Exercice 4 –

1. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et :

Pour montrer qu'une fonction dérivable est constante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que sa dérivée est nulle.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'affirmer, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ étant des intervalles, que f est constante sur chacun de ces intervalles. De plus, on a :

$$f(1) = 2\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1) = 2\mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ce qui nous permet de conclure

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

2.

- La fonction $g : x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+, \ g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

g est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est positive sur $\mathbb{R}^+$, et donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \frac{x}{1+x^2} \leq \mathrm{Arctan}(x)$$

- La fonction $h : x \longmapsto x - \text{Arctan}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+,\ h'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2}{1+x^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

  h est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que h est positive sur $\mathbb{R}^+$, et donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \text{Arctan}(x) \leq x$$

Méthode

On pouvait aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$ en remarquant que :

$$\forall t \in [0, x],\ \frac{1}{1+x^2} \leq \text{Arctan}'(t) \leq 1$$

Exercice 5 –

1. La fonction $f : x \longmapsto \sin(x) - x + \frac{x^2}{\pi}$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}$$

La fonction f' est elle-même dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

Comme le signe de f' n'est pas évident, on peut étudier ses variations pour le trouver.

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f''(x) = -\sin(x) + \frac{2}{\pi}$$

La fonction f'' est donc strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (car sin est strictement croissante sur cet intervalle, mais on pouvait aussi calculer $f^{(3)}$ et remarquer qu'elle est strictement négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Comme f'' est également continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle réalise donc une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right]$. De plus, on a, comme $\frac{2}{\pi} < 1$:

$$f''(0) > 0 \quad \text{et} \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Il en découle que f'' s'annule en un unique élément c de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis on en déduit le tableau de variations et de signes suivant :

x	0		c		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'	0	$\nearrow$		$\searrow$	0
$f'(x)$			$+$		

Finalement, f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $f(0) = 0$, f est donc positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \geq x - \frac{x^2}{\pi}$$

2. On a : On pense à utiliser une formule de trigonométrie

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\ \sin(x) = \sin(\pi - x)$$

donc, d'après le résultat précédent, comme $\pi - x$ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ lorsque x appartient à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\ \sin(x) &\geq (\pi - x) - \frac{(\pi - x)^2}{\pi} \\ &\geq \pi - x - \frac{\pi^2 - 2\pi x + x^2}{\pi} \\ &\geq x - \frac{x^2}{\pi}\end{aligned}$$

Finalement, on a donc bien :

$$\forall x \in [0, \pi],\ \sin(x) \geq x - \frac{x^2}{\pi}$$

Méthode

Penser que, lorsqu'un résultat faisant intervenir les fonctions trigonométriques a été établi sur une partie de $\mathbb{R}$, il est souvent possible d'obtenir de nouveaux résultats sur d'autres parties de $\mathbb{R}$ à l'aide des formules de trigonométries.

Cours

Se souvenir que, pour tout réel x, on a :

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \end{cases}$$

Exercice 6 –

Méthode

Quand on étudie une fonction de la forme $x \longmapsto [g(x)]^x$ (calculs de limites, variations, ...), il est le plus souvent recommandé d'utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et ln en remarquant que, si g est une fonction strictement positive : $[g(x)]^x = \exp(x\ln(g(x)))$.

- La fonction $x \longmapsto 1 + \frac{1}{x}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \exp\left(x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

De plus, on sait que :

On utilise la définition du nombre dérivé.

$$\lim_{t \to 1} \frac{\ln(t) - \ln(1)}{t - 1} = 1$$

donc, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1} = 1$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to +\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

donc, comme la fonction exponentielle est continue en 1 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{e}$$

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\ln(x+1) - x\ln(x)$$

De plus on a :

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x+1) = 0$$

et, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$$

d'où :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

donc, comme la fonction exponentielle est continue en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Cours – Croissances comparées.

Se souvenir que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0$$

Exercice 7 –

1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{2x+1}{2}\,e^{-x^2} = \frac{2x+1}{2x^2} \times x^2\,e^{-x^2}$$

Méthode

Quand on souhaite calculer la limite d'une fonction en un point et qu'il y a une indétermination faisant intervenir des fonctions usuelles, il est fréquent que l'on utilise les croissances comparées.

Attention cependant à la précipitation et à ne pas invoquer les croissances comparées à tort et à travers.

De plus on a, par croissances comparées :

$$\lim_{t \to +\infty} t\,e^{-t} = 0$$

donc, comme $\lim_{x \to +\infty} x^2 = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\,e^{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} x^2\,e^{-x^2} = 0$$

Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{2x^2} = 0$$

On en déduit alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

2. La fonction $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il en découle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont.

De plus on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \mathrm{e}^{-x^2} - 2x\left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= \left(1 - x - 2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

De plus la fonction polynôme $x \longmapsto 1 - x - 2x^2$ admet pour racines -1 et $\frac{1}{2}$ donc, comme son coefficient dominant est égal à -2, elle est positive sur $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ et négative en dehors.

On peut calculer le discriminant, mais aussi remarquer que -1 est racine évidente puisque le produit des racines est égal à $-\frac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	0

Cours

Se souvenir que, si λ et μ sont les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$ (où $a \neq 0$), alors :

$$\lambda + \mu = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \lambda\mu = \frac{c}{a}$$

Exercice 8 –

Cours

Se souvenir que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$.

On rappelle également que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ (vérification immédiate en remplaçant $\tan(x)$ par $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Comme Arctan prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme cos est strictement positive sur cet intervalle, on a :

On transforme l'expression pour faire apparaître $\tan(\mathrm{Arctan}(x))$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\mathrm{Arctan}(x)) &= \sqrt{\cos^2(\mathrm{Arctan}(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\mathrm{Arctan}(x))}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Lorsque f est une fonction numérique réelle, attention à ne pas confondre $f^2(x)$ (qui est égal à $f(x) \times f(x)$) et $f \circ f(x)$ (qui est égal à $f(f(x))$).

2. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(\text{Arctan}(x)) &= 1 - \cos^2(\text{Arctan}(x)) \\ &= 1 - \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Par ailleurs on a :

Attention au signe : $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 \leq \text{Arctan}(x) < \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} < \text{Arctan}(x) \leq 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \begin{cases} \sin(t) \geq 0 & \text{si } 0 \leq t < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin(t) \leq 0 & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < t \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\text{Arctan}(x))$ est du signe de x, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 9 –

1. Notons déjà que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \neq 0$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)} &= \frac{2\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)}{e^{2x}-e^{-2x}} - \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \\ &= \frac{2\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)}{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})} - \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \\ &= \frac{2\left(e^{2x}+e^{-2x}\right) - (e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})} \\ &= \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2\,e^x e^{-x}}{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})} \\ &= \frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})} \\ &= \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{th}(x) = \frac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \mathrm{th}(2^k x) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left[\frac{2}{\mathrm{th}(2^{k+1}x)} - \frac{1}{\mathrm{th}(2^k x)}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{2^{k+1}}{\mathrm{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\mathrm{th}(2^k x)}\right]\end{aligned}$$

et donc, en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \mathrm{th}(2^k x) = \frac{2^n}{\mathrm{th}(2^n x)} - \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$$

Exercice 10 –

1. Faux. La fonction Arcsin n'étant définie que sur $[-1, 1]$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(2x)$ n'est définie que sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, donc ne peut être impaire sur $[-1, 1]$!

En revanche la fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(2x)$ est impaire sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

2. Faux. Il suffit de remarquer que :

$$\mathrm{Arccos}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{Arccos}(1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{Arccos}(-1) = \pi$$

3. Faux. D'une part on ne peut utiliser ici les croissances comparées car il faudrait $\frac{\ln(x)}{x}$ ou $\dfrac{\ln(e^x + 1)}{e^x + 1}$; d'autre part on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\ln(e^x + 1)}{x} &= \frac{\ln\left(e^x\left(1 + e^{-x}\right)\right)}{x} \\ &= \frac{\ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x})}{x} \\ &= 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1, \quad \lim_{t \to 1} \ln(t) = 0$$

d'où, par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

donc, par produit, comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = 0$$

Finalement, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = 1$$

4. Vrai. La fonction $f : x \mapsto -x\ln(x) + e^x$ est continue sur $]0, \pi]$ et on a, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$$

donc, comme $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

On peut donc prolonger f en une fonction continue sur $[0, \pi]$ en posant $f(0) = 0$ et alors, d'après le théorème des bornes atteintes, f est majorée sur $[0, \pi]$, donc sur $]0, \pi]$.

5. Faux. On a :

L'égalité $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\mathrm{Arctan}(\tan(2\pi)) = \mathrm{Arctan}(0) = 0$$

6. Faux. Comme tan est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0, 1[\,,\ \tan(\mathrm{Arccos}(x)) &= \sqrt{1 + \tan^2(\mathrm{Arccos}(x)) - 1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\mathrm{Arccos}(x)} - 1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \\
&= \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}
\end{aligned}$$

et de même, comme tan est négative sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1, 0]\,,\ \tan(\mathrm{Arccos}(x)) &= -\sqrt{1 + \tan^2(\mathrm{Arccos}(x)) - 1} \\
&= -\sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \\
&= -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|} \\
&= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}
\end{aligned}$$

15 Calcul intégral

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $x \longmapsto -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$ est une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $t \longmapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$ est une primitive de $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $t \longmapsto \frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}$ est une primitive de $t \longmapsto \sqrt{1+t}$ sur $\mathbb{R}_+$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. Si f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_2^3 \frac{t^3-3t^2+t+1}{1-t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{10} \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{12}{x^3+x^2-4x-4} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2-4x-4}$.

Exercice 4 –

À l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5 –

1. En effectuant le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

2. En effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{-1/2}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}}$.

3. En effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{-1/2}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\ln^2(t)}}$.

4. a) Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1+\cos(2x) = 2\cos^2(x)$$

   b) En effectuant le changement de variable $t = 2\sin(x)$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 –

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int_0^x f(x-t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Prouver que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter φ'.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. Si f est continue sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = 0$$

2. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. Si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$, alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Il suffit de dériver $x \longmapsto -\dfrac{e^{-x^2}}{2x}$ pour conclure. ☐ Vrai ☒ Faux

2. $t \longmapsto \dfrac{\ln^2(t)}{2}$ est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. ☒ Vrai ☐ Faux

3. Il suffit de dériver $t \longmapsto \dfrac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}$ ou de remarquer que $\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+$. ☒ Vrai ☐ Faux

4. Si f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Méthode

Quand on cherche à calculer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on commence par chercher une primitive de f, en se posant les questions suivantes :

- La fonction f est-elle une fonction usuelle ? On utilise alors les primitives connues des fonctions usuelles.
- La fonction f peut-elle s'écrire sous forme d'une dérivée usuelle ? Penser notamment que l'on sait intégrer les fonctions de la forme $u' \times u^\alpha$ si $\alpha \neq -1$ (en $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$), $\frac{u'}{u}$ (en $\ln|u|$), $u' \times v' \circ u$ (en $v \circ u$).
- Puis-je modifier la forme de f pour me ramener à une des situations précédentes ? On pensera notamment que, parfois, ajouter et retrancher (ou multiplier et diviser) une même quantité permet de se ramener à des situations simples).

- La fonction $t \longmapsto \frac{t^3-3t^2+t+1}{1-t}$ est continue sur $[2,3]$ comme fonction rationnelle bien définie sur cet intervalle.

  Penser à vérifier que la fonction est bien continue avant de calculer une intégrale.

  On remarque que 1 est racine de la fonction polynôme $t \longmapsto t^3 - 3t^2 + t + 1$ donc on peut factoriser et on obtient :

$$\forall t \in [2,3],\ t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t-1)(t^2 - 2t - 1)$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{t^3 - 3t^2 + t + 1}{1-t}\,\mathrm{d}t &= \int_2^3 (-t^2 + 2t + 1)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right]_2^3 \\ &= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_2^3 \frac{t^3 - 3t^2 + t + 1}{1 - t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}$$

- La fonction $t \longmapsto \frac{t}{t+1}$ est continue sur $[0, 1]$ et on a :

On sait intégrer $t \longrightarrow \frac{1}{1+t}$ donc on modifie la forme du numérateur pour simplifier.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t \\
&= [t - \ln|t+1|]_0^1 \\
&= 1 - \ln(2)
\end{aligned}$$

- La fonction $t \longmapsto \tan^2(t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et on a :

On sait que $\tan' = 1 + \tan^2$ donc on modifie la forme de la fonction.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[1 + \tan^2(t) - 1\right]\mathrm{d}t \\
&= [\tan(t) - t]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 1 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

- La fonction $t \longmapsto \lfloor t \rfloor$ est continue par morceaux sur $[0, 10]$ donc l'intégrale $\int_0^{10} \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$ est bien définie et on a, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{9} \int_k^{k+1} \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{9} \int_k^{k+1} k\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Changer la valeur d'une fonction en un point (ici $k+1$) n'affecte pas la valeur de l'intégrale.

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{9} k \\
&= 45
\end{aligned}$$

Cours

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite continue par morceaux s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ vérifiant $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tels que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction f_k de f à $]a_k, a_{k+1}[$ soit continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et se prolonge en une fonction continue $\widetilde{f_k}$ sur $[a_k, a_{k+1}]$. On a dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \widetilde{f_k}(x)\,\mathrm{d}x$$

On se souviendra également que, si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ égales sur $[a, b]$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3 –

1. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1]\,,\ \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2} &= \frac{a\,(x-2)\,(x+2) + b\,(x+1)\,(x+2) + c\,(x+1)\,(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{(a+b+c)\,x^2 + (3b-c)\,x + (-4a+2b-2c)}{x^3+x^2-4x-4}\end{aligned}$$

Par conséquent, pour que l'égalité recherchée soit vérifiée, il suffit d'avoir :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3b-c=0 \\ -4a+2b-2c=12 \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=3b \\ a=-b-3 \end{cases}$$

donc il suffit d'avoir :

$$\begin{cases} -3+c=0 \\ c=3b \\ a=-b-3 \end{cases}$$

donc $(a, b, c) = (-4, 1, 3)$ convient.

À retenir

Il y a en fait unicité du triplet (a, b, c) : on cherche une égalité valable pour tout $x \in [0, 1]$ et on sait que deux fonctions polynômes sont égales sur un intervalle non réduit à un point si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

2. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3+x^2-4x-4}$ est continue sur $[0,1]$ et on a, d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2-4x-4} &= \int_0^1 \frac{1}{12}\left(-\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12}\left[-4\ln|x+1|+\ln|x-2|+3\ln|x+2|\right]_0^1 \\ &= \frac{\ln(3)}{4}-\frac{\ln(4)}{3}\end{aligned}$$

Attention à ne pas oublier la valeur absolue : $x-2$ est négatif sur $[0,1]$.

Exercice 4 –

- Les fonctions $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto -\mathrm{e}^{x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et on a :

$$\forall x \in [0,1],\ u'(x)=1 \quad \text{et} \quad v'(x)=\mathrm{e}^{-x}$$

donc on obtient, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1+\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\ &= 1-2\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

Méthode

Quand on souhaite calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et que l'on ne trouve pas de primitive simple, on essaie en général d'intégrer par parties : pour cela, on écrit f sous forme d'un produit uv'. C'est le cas notamment lorsque f est :

— le produit d'un logarithme et d'une fonction polynôme (dans ce cas u est le logarithme),

— le produit d'une fonction polynôme et d'une exponentielle, d'un cos ou d'un sin (dans ce cas u est la fonction polynôme),

— le produit d'une exponentielle et d'une fonction sin ou cos (dans ce cas le choix de u et de v est le plus souvent indifférent).

- Les fonctions $x \longmapsto \frac{x^2}{2}$ et ln sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,\mathrm{e}]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_1^{e} x\ln(x)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$$

- La fonction Arctan est continue sur $[0,1]$ et on a :

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,dx = \int_0^1 1\times\mathrm{Arctan}(x)\,dx$$

Quand on ne connaît pas de primitive de la fonction et qu'il n'y a pas de produit, on peut intégrer par parties en intégrant la fonction $x \longmapsto 1$.

De plus les fonctions $x \longmapsto x$ et Arctan sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc, par intégration par parties :

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,dx = [x\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

et alors :

On reconnaît dans l'intégrale une expression du type $\frac{u'}{u}$ (à une constante près).

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,dx &= [x\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 - \left[\frac{\ln\left|1+x^2\right|}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

- Les fonctions $u : x \longmapsto -\cos(x)$ et $v : x \longmapsto e^x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(x)\,e^x\,dx &= [-\cos(x)\,e^x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)\,e^x\,dx\\ &= e^{\pi}+1+\int_0^{\pi}\cos(x)e^x\,dx\end{aligned}$$

De plus les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto e^x$ sont également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc, à l'aide d'une seconde intégration par parties, on obtient :

La nouvelle intégrale pose le même problème que celle du début, donc on procède à une nouvelle intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(x)\,e^x\,dx &= e^{\pi}+1+[\sin(x)\,e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(x)\,e^x\,dx\\ &= e^{\pi}+1-\int_0^{\pi}\sin(x)\,e^x\,dx\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,e^x\,dx = \frac{e^{\pi}+1}{2}$$

À retenir

Se souvenir que, quand on souhaite calculer une intégrale à l'aide d'intégrations par parties, il peut arriver que plusieurs intégrations par parties soient nécessaires. C'est le cas notamment lorsqu'on dérive une fonction polynôme (dans ce cas, on fera parfois autant d'intégrations par parties que le degré du polynôme) ou une fonction trigonométrique.
On retiendra également que, dans le cadre du calcul d'une intégrale I, l'intégration par parties peut avoir plusieurs finalités :

— obtenir une nouvelle intégrale facile à calculer (comme dans le cas de la première intégrale),

— obtenir une équation dont I est l'inconnue (comme dans le cas de la dernière intégrale),

— obtenir une relation de récurrence (dans le cas où I dépend d'un entier naturel n).

Exercice 5 –

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est continue sur $[0, 1]$. De plus la fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = e^x$ (si $x = 0$ alors $u = 1$, si $x = 1$ alors $u = e$, et $du = e^x\, dx$) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx &= \int_1^e \frac{du}{1+u}\\ &= [\ln|1+u|]_1^e\\ &= \ln(1+e) - \ln(2)\end{aligned}$$

Méthode

Quand on souhaite calculer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et que les méthodes précédentes (recherche de primitive, intégration par parties) sont infructueuses, on procède le plus souvent à un changement de variable. Il ne faudra alors évidemment pas oublier de vérifier les hypothèses, mais également de modifier les bornes et le dx.
Il n'aura échappé à personne qu'ici le changement de variable n'était pas nécessaire au calcul de l'intégrale puisque $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$; cette question n'avait pour but que la pratique du changement de variable dans un cas simple.

2. La fonction $t \mapsto 1+\ln(t)$ est continue et strictement positive sur $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$ et la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{1+\ln(t)}}$ est donc continue sur $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$.

De plus la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$ ($du = \frac{dt}{t}$), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^{e^{-1/2}} \frac{dt}{t\sqrt{1+\ln(t)}} &= \int_0^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1+u}}\\ &= \left[2\sqrt{1+u}\right]_0^{-\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{2}-2\end{aligned}$$

3. La fonction $t \mapsto 1-\ln^2(t)$ est continue et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$1-\ln^2(t) > 0 \Leftrightarrow \ln^2(t) < 1$$

et donc, comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ et la fonction exponentielle sont strictement croissantes (respectivement sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}1-\ln^2(t) > 0 &\Leftrightarrow |\ln(t)| < 1\\ &\Leftrightarrow e^{-1} < t < e\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vraie lorsque t appartient à $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$, on en déduit que la fonction $t \mapsto 1-\ln^2(t)$ est strictement positive sur $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$. Comme la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, il en découle que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2(t)}}$ est donc continue sur $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$.

De plus la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$ ($du = \frac{dt}{t}$), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^{e^{-1/2}} \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2(t)}} &= \int_0^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= [\operatorname{Arcsin}(t)]_0^{-\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

4. **a)** On sait que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

donc, pour $a = b = x$:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

d'où, comme $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$$

b) La fonction $t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[0,1]$. De plus on a :

$$0 = 2\sin(0) \quad \text{et} \quad 1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Attention, dans le changement de variable proposé ici, l'ancienne variable t est exprimée en fonction de la nouvelle x, donc $[0,1]$ est l'ensemble image et non l'ensemble de départ pour la fonction $x \longmapsto 2\sin(x)$.

Comme la fonction $\varphi : x \longmapsto 2\sin(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et comme $\varphi\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = [0,1]$, on en déduit, en effectuant le changement de variable $t = 2\sin(x)$, $\mathrm{d}t = 2\cos(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2(x)} \times 2\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sqrt{\cos^2(x)}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

donc, comme cos est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$:

Penser que $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\int_0^1 \sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

et d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\,[1+\cos(2x)]\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Méthode

Quand on veut effectuer le changement de variable $t = \varphi(x)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (où f est une fonction continue sur $[a,b]$), on procède en général ainsi :

— on commence par chercher des antécédents α et β à a et b par φ,

— on vérifie ensuite que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et que $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$,

— on en déduit que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Le raisonnement peut être simplifié lorsque la fonction φ est bijective de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$, car on peut alors remarquer que $t = \varphi(x)$ équivaut à $x = \varphi^{-1}(t)$.

Exercice 6 –

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^2}$ est continue sur $[1,2]$.

Il n'y a pas de primitive évidente, donc on procède à une intégration par parties.

Les fonctions $t \mapsto \ln(1+t)$ et $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$ donc, par intégration par parties :

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t)}$$

De plus on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\},\ \frac{1}{t\,(1+t)} = \frac{1+t-1}{t\,(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + [\ln|t| - \ln|1+t|]_1^2\\ &= 3\ln(2) - \frac{3\ln(3)}{2}\end{aligned}$$

Exercice 7 –

Méthode

Penser que l'on ne sait pas, en général, étudier la dérivabilité d'une fonction de la forme

$$x \longmapsto \int_a^b g(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Quand l'intégrande dépend de x, le plus simple est en général de modifier l'intégrale pour que l'intégrande ne dépende plus de x. On pourra pour cela utiliser un changement de variable et/ou la linéarité de l'intégration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x-t)\,\mathrm{e}^t$ est continue sur $[0,x]$. De plus la fonction $t \mapsto x-t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = x-t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, on obtient :

On effectue le changement de variable affine $u = x - t$ pour obtenir un intégrande indépendant de x.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\int_x^0 f(u)\,\mathrm{e}^{x-u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^x f(u)\,\mathrm{e}^{x-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

et par linéarité de l'intégration :

$\mathrm{e}^{x-u} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-u}$

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x f(u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

De plus, comme $g : u \mapsto f(u)\,\mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $G : x \mapsto \int_0^x f(u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ en est une primitive, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il en découle que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et de plus :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \mathrm{e}^x G(x) + \mathrm{e}^x G'(x)\\ &= \mathrm{e}^x \int_0^x f(u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u + \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\\ &= \varphi(x) + f(x)\end{aligned}$$

Exercice 8 –

1. Faux. Il suffit de considérer la fonction $f : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, qui est continue mais n'est pas nulle sur $[0, 1]$ et vérifie pourtant :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2 - x}{2}\right]_0^1 = 0$$

En revanche, si f est une fonction continue **et de signe constant** sur $[0, 1]$, alors :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x) = 0$$

2. Vrai. En effet, la fonction $g : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc admet une primitive G, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = G(x^2) - G(x)$$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) &= 2x\,G'(x^2) - G'(x)\\ &= 2x\,\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^x}{x}\\ &= \frac{2\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^x}{x}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\ln(2)}\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^x}{x}\\ &= \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{x^2 - x + \ln(2)} - 1\right)}{x}\end{aligned}$$

De plus la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - x + \ln(2)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (elle n'a pas de racine réelle et son coefficient dominant est positif) donc, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0$$

3. Faux. Il suffit de considérer les fonctions $f : x \mapsto 0$ et $g : x \mapsto 1$ avec $a = 1$ et $b = 0$, pour remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$$

mais que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = -1$$

En revanche, le résultat est correct si l'on impose $a \leq b$.

Cours – Croissance de l'intégration.

Si (a, b) est un couple de réels tel que $a \leq b$ et si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

16 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle $y' = ay$. On note A une primitive de a sur $\mathbb{R}$.

1. Les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{A(x)}$ où $K \in \mathbb{R}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $K \in \mathbb{R}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Trouver une solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$y' + y = t + 1 + \mathrm{e}^t$$

Exercice 3 –

Résoudre, sans aucun calcul, le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = \arctan(\cos(t^2))y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Résoudre $y' \sin(t) - y\cos(t) + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 5 –

Résoudre $y' + 4y = t^2\mathrm{e}^{-4t}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 –

Résoudre $y' + y = \mathrm{e}^t\cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 –

On considère les deux équations suivantes :

$$(H)\ \ 2xy' - 3y = 0 \qquad \text{et} \qquad (E)\ \ 2xy' - 3y = \sqrt{x}$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –

Résoudre $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 –

Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$$

Exercice 10 –

Montrer que toute solution de $y' + \mathrm{e}^{x^2} y = 0$ admet pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle $y' = ay$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. (E) admet toujours une solution bornée, peu importe la valeur de a.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si $a > 0$, (E) admet une unique solution bornée.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Si $a < 0$, (E) admet une unique solution bornée.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{A(x)}$ où $K \in \mathbb{R}$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. Les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $K \in \mathbb{R}$.	☐ Vrai	☒ Faux

Exercice 2 –

On utilise le principe de superposition. Il est clair que $t \mapsto t$ est solution de $y' + y = t + 1$. De plus, on remarque que $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{2}$ est solution de $y' + y = \mathrm{e}^t$. Ainsi,

$$t \mapsto t + \frac{\mathrm{e}^t}{2}$$

est une solution particulière de $y' + y = t + 1 + \mathrm{e}^t$.

Méthode

Soit a, b_1, b_2 des fonctions continues sur I à valeurs réelles.
Si y_1 (respectivement y_2) est solution de $y' = ay + b_1$ (respectivement $y' = ay + b_2$) alors $y_1 + y_2$ est solution de $y' = ay + b_1 + b_2$.

Exercice 3 –

L'équation différentielle proposée est linéaire, d'ordre 1, homogène et son coefficient est une fonction continue. On en déduit que le problème de Cauchy admet une unique solution. Or la fonction nulle est solution de celui-ci, c'est donc l'unique solution de ce problème de Cauchy.

Cours – Théorème de Cauchy.

Soit $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ deux applications continues. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(t_0) = y_0 \qquad ((t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}) \end{cases}$$

Alors ce problème de Cauchy admet une unique solution

Exercice 4 –

La fonction sinus est strictement positive sur $]0, \pi[$ donc l'équation se réécrit :

$$y' - \frac{\cos(t)}{\sin(t)} y = -\frac{1}{\sin(t)}$$

L'équation considérée est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont le coefficient et le second membre sont des fonctions continues. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, notée $\mathscr{S}_H$, est :

$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(f_h)$$

où $f_h :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in]0, \pi[\,,\ f_h(x) = \mathrm{e}^{\ln(|\sin(x)|)} = \sin(x)$$

Cours

Considérons l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 homogène suivante :

$$y' + ay = 0$$

où $a : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue. Soit A une primitive de a sur I (qui existe car a est continue sur I). Les solutions de cette équation sont les fonctions :

$$y : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$. Autrement dit, l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(\exp(-A))$ qui est défini par :

$$\mathrm{Vect}(\exp(-A)) = \{t \mapsto \lambda \exp(-A(t)),\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

La fonction cosinus est une solution évidente de l'équation avec second membre. On en déduit que les solutions sont de la forme :

$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$

$$x \mapsto \cos(x) + \lambda \sin(x)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cours

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + ay = b$ où $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues. Les solutions de cette équation sont les fonctions :

$$\begin{array}{rccl} y & : & I & \to & \mathbb{K} \\ & & t & \mapsto & f_p(t) + \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et f_p est une solution particulière de l'équation.

Exercice 5 –

L'équation considérée est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont le coefficient et le second membre sont des fonctions continues. L'ensemble des solutions de l'équation homogène, noté $\mathscr{S}_H$, est $\mathrm{Vect}(f_h)$ où $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_h(x) = \mathrm{e}^{-4x}$$

Utilisons la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière. Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k(x)\mathrm{e}^{-4x}$$

La fonction f est dérivable (par produit) et on a pour tout réel x,

$$f'(x) = k'(x)\mathrm{e}^{-4x} + k(x)(-4)\mathrm{e}^{-4x}$$

La fonction f est solution de l'équation considérée si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 4f(x) = x^2\mathrm{e}^{-4x}$$

ou encore si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x)\mathrm{e}^{-4x} + k(x)(-4)\mathrm{e}^{-4x} + 4k(x)\mathrm{e}^{-4x} = x^2\mathrm{e}^{-4x}$$

ce qui est encore équivalent à (sachant que l'exponentielle ne s'annule pas) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = x^2$$

Ainsi, $k : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ convient et $f : x \mapsto \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{-4x}$ est une solution particulière. On en déduit que les solutions de l'équation sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{-4x} + \lambda \mathrm{e}^{-4x} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Méthode

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$(\mathscr{E}) \quad y' + ay = b$$

où $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.
Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions définies sur I de la forme $t \to \lambda \exp \circ(-A)$ où A est une primitive de a sur I.
La méthode de la variation de la constante précise qu'il suffit alors de chercher une solution particulière sous la forme :

$$t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$$

où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable sur I. On injecte cette fonction dans l'équation différentielle pour déterminer λ' puis λ (une seule primitive suffit).

Exercice 6 –

L'équation considérée est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont le coefficient et le second membre sont des fonctions continues. L'ensemble des solutions de l'équation homogène, noté $\mathscr{S}_H$, est :

$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(f_h)$$

où $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_h(t) = e^{-t}$$

Pour obtenir une solution particulière, « complexifions » le problème en considérant cette équation différentielle :

$$y' + y = e^{(1+i)t}$$

Il est facile de voir que :

$$t \mapsto \frac{1}{2+i}\, e^{(1+i)t}$$

en est une solution particulière (pour trouver cette solution, on dérive le second membre et on rectifie avec une constante pour obtenir ce que l'on veut). On cherche maintenant sa partie réelle pour obtenir une solution particulière de notre équation. Pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned}\Re e\left(\frac{1}{2+i}\, e^{(1+i)t}\right) &= \Re e\left(\frac{2-i}{5}\, e^{t}(\cos(t) + i\sin(t))\right) \\ &= \frac{2}{5}\, e^{t}\cos(t) + \frac{1}{5}\, e^{t}\sin(t)\end{aligned}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{2}{5}\, e^{t}\cos(t) + \frac{1}{5}\, e^{t}\sin(t)$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto f(t) + \lambda e^{-t} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Méthode

- Si le second membre est de la forme $\cos(\alpha x)e^{\beta x}$ ou $\sin(\alpha x)e^{\beta x}$, on peut utiliser une fonction à valeurs complexes pour déterminer une solution particulière.
- Il est tout à fait possible ici d'utiliser la méthode de la variation de la constante.

Exercice 7 –

1. L'équation (H) est une équation différentielle linéaire homogène dont le coefficient est une fonction continue que l'on peut normaliser sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' - \frac{3}{2x}y = 0$$

Une primitive de $x \longmapsto -\frac{3}{2x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par :

$$x \longmapsto -\frac{3}{2}\ln(x)$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (H) est $\mathrm{Vect}(f_0)$ où $f_0 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x > 0,\ f_0(x) = \exp(\tfrac{3}{2}\ln(x)) = x^{3/2}$$

2. • Utilisions la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière. Soit $k : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0,\ g(x) = k(x)x^{3/2}$$

La fonction g est dérivable et on a, pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = k'(x)\,x^{3/2} + \frac{3}{2}\,k(x)\sqrt{x}$$

La fonction g est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x > 0,\ 2xg'(x) - 3g(x) = \sqrt{x}$$

si et seulement si :

$$\forall x > 0,\ 2x\,k'(x)\,x^{3/2} + 2x \times \frac{3}{2}k(x)\sqrt{x} - 3k(x)x^{3/2} = \sqrt{x}$$

et finalement si et seulement si :

$$\forall x > 0,\ 2k'(x)x^{5/2} = \sqrt{x}$$

Il suffit de choisir la fonction k telle que :

$$\forall x > 0,\ k'(x) = \frac{1}{2x^2}$$

La fonction $k : x \longmapsto -\frac{1}{2x}$ convient donc une solution particulière $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de (E) est définie par :

$$\forall x > 0,\ g(x) = -\frac{1}{2x}\,x^{3/2} = -\frac{\sqrt{x}}{2}$$

On en déduit que les solutions de (E) sont de la forme $g + \lambda f_0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Déterminons l'ensemble des solutions de (E) sur $[0, +\infty[$ par analyse-synthèse.

  Analyse. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il existe un réel k tel que pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + kx^{3/2}$$

  La fonction f est continue en 0 et :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

  donc $f(0) = 0$. Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + k\sqrt{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

  Ainsi, f n'est pas dérivable en 0 ce qui est absurde.

  Synthèse. L'équation différentielle (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_+$.

Méthode

Supposons que l'on cherche à résoudre une équation différentielle du type :

$$(\mathscr{E}) \ : \ \alpha y' + \beta y = \gamma$$

où α, β et γ trois fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si α s'annule sur I, on suit la méthode suivante :

1. On résout $(\mathscr{E})$ sur les plus grands (au sens de l'inclusion) intervalles $J \subset I$ où a ne s'annule pas.
2. On raisonne ensuite par analyse-synthèse :
   - On suppose l'existence d'une solution y de $(\mathscr{E})$ sur I. On connait son expression en tout point où a ne s'annule pas.
   - Cette solution est continue et dérivable en tout point de I : cela donne des conditions sur y.
   - La synthèse permet d'obtenir l'ensemble des solutions (si il y en a : il peut tout se passer !).

Exercice 8 –

Travaillons sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. En divisant par x (qui n'est pas nul) on se ramène à étudier l'équation

$$(E_+) \qquad y' - \frac{1}{x} y = 0$$

L'équation (E_+) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont le coefficient est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que les solutions de (E_+) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \mapsto \lambda \exp(\ln(x)) = \lambda x$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. On procède de même sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. On se ramène à l'équation :

$$(E_-) \qquad y' - \frac{1}{x}y = 0$$

On en déduit que les solutions de (E_-) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ par :

$$x \mapsto \mu \exp(\ln(-x)) = \mu(-x) = -\mu x$$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

Résolvons maintenant $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ par analyse-synthèse. On note (E) cette équation différentielle.

Analyse. Soit $x \mapsto y(x)$ une solution de (E). Sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ vérifie (E_+) et sa restriction à $\mathbb{R}_-^*$ vérifie (E_-). De ce fait, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$y : x \mapsto \begin{cases} \lambda x & \text{si } x > 0 \\ -\mu x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De plus, par continuité en 0, y s'annule en 0 (en considérant les limites à gauche et à droite en 0 de y). Enfin, y est dérivable en 0 et on a :

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{y(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\mu \quad \text{et} \quad \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{y(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \lambda$$

Donc nécessairement $-\mu = \lambda$ et de ce fait, y est de la forme $x \mapsto \gamma x$ en posant $\gamma = \lambda = -\mu$ (fonctionne aussi pour $x = 0$).

Synthèse. Il est clair que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \gamma x$ sont des solutions de (E).

Exercice 9 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable vérifiant la condition souhaitée. En considérant le couple $(x, y) = (0, 0)$, on a :

$$f(0) = [f(0)]^2$$

donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Fixons $y \in \mathbb{R}$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

Par dérivation (par rapport à x), on a :

$$f'(x + y) = f'(x)f(y)$$

On pose $x = 0$:

$$f'(y) = f'(0)f(y)$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène suivante :

$$z' = f'(0)z$$

Il existe donc un réel K tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) = K\mathrm{e}^{\alpha y}$$

où $\alpha = f'(0)$. Si $f(0) = 0$, on obtient $K = 0$ et si $f(0) = 1$ alors $K = 1$.

Synthèse. Si f est la fonction nulle ou si f est de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, on vérifie facilement que f est solution de notre problème de départ.

Méthode

Il ne faut pas hésiter à considérer des valeurs particulières pour x et y.

Exercice 10 –

On sait qu'une solution de cette équation s'écrit :

$$x \mapsto K \exp\left(-\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)$$

où $K \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $t \geq 0$,

$$\mathrm{e}^{t^2} \geq 1$$

donc par croissance de l'intégration, on a pour tout $x > 0$:

Bornes dans le bon ordre

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t \geq \int_0^x 1\mathrm{d}t = x$$

Par décroissance de $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$0 \leq \exp\left(-\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right) \leq \mathrm{e}^{-x}$$

On obtient le résultat par théorème d'encadrement.

Exercice 11 –

Les solutions sont de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$. La fonction nulle est solution pour toute valeur de a. Si $a > 0$ et $K \neq 0$, les fonctions considérées ont pour limite $\pm\infty$ en $+\infty$ et si $a < 0$ et $K \neq 0$, les fonctions sont clairement bornées (pour tout réel $t \leq 0$, $\mathrm{e}^t \in [0, 1]$ et pour tout réel $x \geq 0$, $ax \leq 0$).

1. (E) admet toujours une solution bornée, peu importe la valeur de a. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Si $a > 0$, (E) admet une unique solution bornée. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Si $a < 0$, (E) admet une unique solution bornée. ☐ Vrai ☒ Faux

17 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Dans ce chapitre, I sera un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

On considère l'équation différentielle (E) d'ordre 2 suivante :

$$y'' - 2y't^2 + y + 1 = 0$$

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

1. (E) est homogène.	☐ Vrai	☐ Faux
2. (E) admet une solution constante évidente.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Pour déterminer $\mathscr{S}$, on résout l'équation caractéristique associée à (E).	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Résoudre les équations différentielles réelles suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

2. $y'' - 2y' + y = 0$.

3. $y'' + y' + y = 0$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Résoudre $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^x$.

Exercice 4 –

Déterminer les solutions réelles de l'équation $y'' - 3y' + 2y = \cos(3x)$.

Exercice 5 –

Résoudre $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{ch}(x)$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –
Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]-1,1[$:

$$(E) \quad (1-x^2)y'' - xy' + 4y = \text{Arccos}(x)$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = \cos(t)$.

Exercice 7 –
Résoudre l'équation suivante :

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + (1-x^2)y = 0$$

On posera $z = (1+x^2)y$.

Exercice 8 –
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin
On note (E) l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) + f(-t) = \mathrm{e}^t$$

1. Le cosinus hyperbolique appartient à (E). ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si f appartient à (E), f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Les fonctions de (E) sont solutions d'une même équation différentielle d'ordre 2. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. (E) est homogène. ☐ Vrai ☒ Faux
2. $t \mapsto -1$ est solution évidente. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Les coefficients ne sont pas constants. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

1. On reconnait une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants et homogène. Son équation caractéristique est $x^2 - 4x + 3 = 0$. Celle-ci admet deux solutions :

1 et 3. On en déduit que les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. On reconnait une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants et homogène. Son équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$. Celle-ci admet une unique solution : 1. On en déduit que les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3. On reconnait une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants et homogène. Son équation caractéristique est $x^2 + x + 1 = 0$.

Celle-ci admet deux solutions complexes conjuguées : $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. On en déduit que les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \mu \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Cours

Soit (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre deux *homogène* définie sur I par :

$$(E) \quad x'' + ax' + bx = 0$$

où a et b sont deux réels. On note (EC), l'équation caractéristique associée à (E) :

$$z^2 + az + b = 0 \text{ où } z \in \mathbb{K}$$

— Si (EC) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ alors $x : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall t \in I,\ x(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$

— Si (EC) admet une racine double r_0 dans $\mathbb{K}$ alors $x : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall t \in I,\ x(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}$$

— Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Si (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ alors $x : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in I,\ x(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t}$$

Exercice 3 –

L'équation considérée est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. D'après l'exercice 2, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

> **Méthode**
>
> Pour obtenir l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants et dont le second membre est une fonction continue, on suit la démarche suivante :
>
> — On résout l'équation homogène associée à l'aide de l'équation caractéristique (on note $\mathscr{S}_H$ son ensemble de solutions).
>
> — On détermine une solution particulière f_p de l'équation.
>
> — Les solutions de l'équation s'écrivent alors $f_p + f$ où $f \in \mathscr{S}_H$.

Sachant que 1 est solution de l'équation caractéristique, et que le second membre est $x \mapsto e^x$, on cherche une solution particulière de l'équation sous la forme :

$$g : x \mapsto axe^x$$

où $a \in \mathbb{R}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = a(x+1)e^x$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = a(x+2)e^x$$

La fonction g est solution de l'équation si et seulement si :

Raisonner par équivalences !

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a(x+2)e^x - 4a(x+1)e^x + 3axe^x = e^x$$

ou encore sachant que l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a(x+2) - 4a(x+1) + 3ax = 1$$

ce qui se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2a = 1$$

Ainsi, $a = -\frac{1}{2}$ convient. On en déduit que les solutions de l'équation considérée sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x} - \frac{xe^x}{2}$$

Méthode

On considère (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre deux de la forme :

$$x'' + ax' + bx = c(t)$$

où a et b sont deux réels et c une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$.

— Si c est de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $(C, \alpha) \in \mathbb{K}^2$ alors on peut déterminer une solution particulière de (E) sous la forme :

1. $t \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha t}$ si α n'est pas solution de (EC).
2. $t \mapsto At\mathrm{e}^{\alpha t}$ si α est une solution « simple » de (EC).
3. $t \mapsto At^2\mathrm{e}^{\alpha t}$ si α est solution « double » de (EC).

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si c est de la forme $t \mapsto C\cos(\alpha t)$ ou $t \mapsto C\sin(\alpha t)$ avec $(C, \alpha) \in \mathbb{K}^2$ alors on détermine une solution particulière de l'équation suivante :

$$x'' + ax' + bx = \mathrm{e}^{i\alpha t}$$

en se ramenant au cas précédent puis on considère la partie réelle ou imaginaire de cette solution particulière.

Exercice 4 –

L'équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et dont le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$. Celle-ci admet deux solutions : 1 et 2. Cherchons une solution particulière en « complexifiant »le problème et en cherchant une solution particulière de :

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3ix}$$

Le nombre $3i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique donc on cherche une solution sous la forme :

$$g : x \mapsto K\mathrm{e}^{3ix}$$

où $K \in \mathbb{C}$. On a pour tout réel x,

$$g'(x) = 3iK\mathrm{e}^{3ix} \quad \text{et} \quad g''(x) = -9K\mathrm{e}^{3ix}$$

La fonction g est solution de l'équation précédente si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -9K\mathrm{e}^{3ix} - 9iK\mathrm{e}^{3ix} + 2K\mathrm{e}^{3ix} = \mathrm{e}^{3ix}$$

ou encore, sachant que e^{3ix} est non nul (il est de module 1), si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -7K - 9iK = 1$$

Remarquons que :

$$-7K - 9iK = 1 \iff K(7 + 9i) = -1 \iff K = -\frac{1}{7 + 9i} = -\frac{7 - 9i}{130}$$

On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\Re e\left(-\frac{7-9i}{130}e^{3ix}\right) = -\frac{7}{130}\cos(3x) - \frac{9}{130}\sin(3x)$$

On en déduit que les solutions de notre équation (de départ) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x} - \frac{7}{130}\cos(3x) - \frac{9}{130}\sin(3x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 –

L'équation (que l'on note (E)) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et second membre continue sur $\mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $x^2 + 3x + 2 = 0$. Celle-ci admet deux solutions : -1 et -2.

Pour tout réel x :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

On détermine alors des solutions particulières aux équations suivantes :

$$y'' + 3y' + 2y = e^{x} \quad \text{et} \quad y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

Pour la première, la fonction $x \mapsto \frac{1}{6}e^{x}$ est solution évidente. Pour la deuxième, sachant que -1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation sous la forme :

$$g : x \mapsto axe^{-x}$$

où $a \in \mathbb{R}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = a(1-x)e^{-x}$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = a(-1-(1-x))e^{x} = a(-2+x)e^{-x}$$

La fonction g est solution de l'équation si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a(-2+x)e^{-x} + 3a(1-x)e^{-x} + 2axe^{-x} = e^{-x}$$

ou encore sachant que l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a(-2+x) + 3a(1-x) + 2ax = 1$$

ce qui se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a = 1$$

Ainsi, $a = 1$ convient. La fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est donc solution de la deuxième équation. Par principe de superposition, on en déduit que :

$$x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}}{6} + xe^{-x}\right)$$

est solution de (E). On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}}{6} + xe^{-x}\right)$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

À retenir

Le principe de superposition s'applique aussi pour les équations différentielles linéaires du second ordre.

Exercice 6 –

Soit $y :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable solution de (E).

Posons pour tout $t \in]0, \pi[$,

On cherche une fonction z tel que $z(t) = y(x)$

$$z(t) = y(\cos(t))$$

La fonction z est deux fois dérivable sur $]-1, 1[$ (par composition). La fonction cosinus est une bijection de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$ donc on a pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$y(x) = z(\text{Arccos}(x))$$

puis :

$$y'(x) = -(1 - x^2)^{-1/2}\, z'(\text{Arccos}(x))$$

et enfin :

$$y''(x) = -x(1 - x^2)^{-3/2}\, z'(\text{Arccos}(x)) + (1 - x^2)^{-1}\, z''(\text{Arccos}(x))$$

Sachant que y est solution de (E), on en déduit que :

$$\begin{aligned}&(1 - x^2)\left[-x(1 - x^2)^{-3/2}\, z'(\text{Arccos}(x)) + (1 - x^2)^{-1}\, z''(\text{Arccos}(x))\right]\\ &+ x(1 - x^2)^{-1/2}\, z'(\text{Arccos}(x)) + 4\, z(\text{Arccos}(x))\\ &= \text{Arccos}(x)\end{aligned}$$

ou encore :

$$-x(1-x^2)^{-1/2}\, z'(\text{Arccos}(x)) + z''(\text{Arccos}(x) + x(1-x^2)^{-1/2}\, z'(\text{Arccos}(x)) + 4\, z(\text{Arccos}(x)) = \text{Arccos}(x)$$

Finalement, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$z''(\text{Arccos}(x)) + 4\, z(\text{Arccos}(x)) = \text{Arccos}(x)$$

Sachant que la fonction cosinus est une bijection de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$, on en déduit que pour tout $t \in]0, \pi[$,

$$z''(t) + 4z(t) = t$$

La fonction $t \longmapsto \frac{t}{4}$ est solution évidente de cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et dont le second membre est une fonction continue. La résolution de l'équation homogène (les deux solutions de l'équation caractéristique sont $-2i$ et $2i$) permet de montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $t \in]0, \pi[$,

$$z(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) + \frac{t}{4}$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on en déduit que :

$$y(x) = z(\text{Arccos}(x)) = \lambda \cos(2\text{Arccos}(x)) + \mu \sin(2\text{Arccos}(x)) + \frac{\text{Arccos}(x)}{4}$$

Or pour $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(2\text{Arccos}(x)) &= \cos(\text{Arccos}(x))^2 - \sin(\text{Arccos}(x))^2\\ &= 2\cos(\text{Arccos}(x))^2 - 1\\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sin(2\text{Arccos}(x)) &= 2\sin(\text{Arccos}(x))\cos(\text{Arccos}(x))\\ &= 2x\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a finalement :

$$y(x) = \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2} + \frac{\text{Arccos}(x)}{4}$$

Réciproquement, les calculs effectués précédemment permettent de vérifier que ces fonctions sont bien solutions.

À retenir

Pour tout réel $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\cos(\text{Arccos}(x)) = x \quad \text{et} \quad \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Exercice 7 –

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = (1 + x^2)y(x)$$

La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{z(x)}{1+x^2}$$

ce qui donne en dérivant :

$$y'(x) = \frac{z'(x)}{1+x^2} - \frac{2xz(x)}{(1+x^2)^2}$$

puis :

$$y''(x) = \frac{z''(x)}{1+x^2} - \frac{2xz'(x)}{(1+x^2)^2} - \left(\frac{2z(x) + 2xz'(x)}{(1+x^2)^2} - 4x\frac{2xz(x)}{(1+x^2)^3}\right)$$

ou encore :

$$y''(x) = \frac{z''(x)}{1+x^2} - \frac{4xz'(x)}{(1+x^2)^2} - \frac{2z(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2z(x)}{(1+x^2)^3}$$

En injectant dans l'équation, on en déduit que y est solution de notre équation si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) - z(x) = 0$$

Ceci est équivalent à :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$$

On en déduit que les solutions de l'équation considérée sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{1 + x^2}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

À retenir

Ce type d'exercice est appelé résolution d'une équation différentielle par changement de fonction.

Exercice 8 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x - t) f(t) \mathrm{d}t = 1$$

On a alors pour tout réel x :

$$f(x) + x \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t = 1$$

Les fonctions f et $t \longmapsto t f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, on en déduit que les fonctions :

$$x \longmapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad x \longmapsto \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t$$

sont de classes $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sont, respectivement, des primitives des deux fonctions f et $t \longmapsto t f(t)$. Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(*) \qquad f(x) = -x \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t + 1$$

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$(**) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x f(x) + x f(x) = -\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

On en déduit que f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f(x)$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux homogène suivante :

$$y'' + y = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation, $x^2 + 1 = 0$, admet i et $-i$ pour racines donc il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$$

Or en reprenant l'égalité $(*)$, on sait que $f(0) = 1$ et l'égalité $(**)$ implique que $f'(0) = 0$. On en déduit que $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, f est la fonction cosinus.

Synthèse. Les fonctions sin et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on en déduit que pour tout réel x, on a :

$$\int_0^x t\cos(t)\mathrm{d}t = x\sin(x) - \int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x) - 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos(x) + x\int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t - \int_0^x t\cos(t)\mathrm{d}t &= \cos(x) + x\int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t - (x\sin(x) + \cos(x) - 1)\\ &= \cos(x) + x\sin(x) - (x\sin(x) + \cos(x) - 1)\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction cosinus est bien solution du problème posé et c'est donc l'unique solution d'après l'analyse.

Exercice 9 –

1. Vrai. Il suffit de faire le calcul.
2. Vrai. Pour tout réel t, on a :
$$f'(t) = -f(-t) + \mathrm{e}^t$$
Ainsi, f' est somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
3. Vrai. Pour tout réel t, on a :
$$f'(t) = -f(-t) + \mathrm{e}^t$$
ce qui donne par dérivation (licite) :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) = f'(-t) + \mathrm{e}^t$$
Or on sait que pour tout réel t :
$$f'(-t) = -f(t) + \mathrm{e}^{-t}$$
ce qui donne au final :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) = -f(t) + \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t$$

18 Études de suites

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Une suite convergente est bornée.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Une suite bornée est convergente.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Il existe des suites divergentes et bornées.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergente, de limite $\ell > 0$. Montrer que :

$$\exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ \frac{3}{4}\ell \leq u_n \leq \frac{5}{4}\ell$$

Exercice 3 –

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont :

1. $\forall n \geq 0,\ u_n = \dfrac{1}{2^n} + n - 1.$

2. $\forall n \geq 2,\ v_n = \dfrac{1}{n^2}\left(1 + \dfrac{1}{\ln(n)}\right)\cdot$

3. $\forall n \geq 0,\ w_n = \dfrac{n^2 - 4n + 3}{n^3 + 1}\cdot$

4. $\forall n \geq 0,\ z_n = \dfrac{\mathrm{e}^n - n^2 + 3}{n^2 + 5}\cdot$

Exercice 4 –

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est donné par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 5 –

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle minorée et $(v_n)_{n\geq 0}$ et une suite réelle divergeant vers $+\infty$. Que peut-on dire du comportement asymptotique de $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Exercice 7 –

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$$

Montrer que $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes. Qu'en déduit-on ?

Exercice 8 –

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 9 –

Soit n un entier naturel et (E_n) l'équation $x + \tan(x) = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Montrer que l'équation (E_n) possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 –

1. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, l'existence d'un unique solution à l'équation $x^n - x - 1 = 0$ sur $]1, +\infty[$. On note cette solution x_n.
2. Déterminer le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

Pour aller plus loin

Exercice 11 –

Soit $\ell > 0$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe (avec des termes non nuls) vérifiant la propriété suivante :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \ell$$

1. Supposons que $\ell < 1$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
2. Le résultat précédent est-il vrai si $\ell = 1$?
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{z^n}{n!}$ où $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 12 –

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $(u_{2n})_{n\geq 0}, (u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 13 –

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x = (x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 1,\ x_{n+1} = x_n + \frac{a}{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}}$$

Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$ puis la limite de la suite de terme général $\dfrac{x_n}{\ln(n)}$.

Exercice 14 –

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$$

Exercice 15 – Le vrai/faux de la fin

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si u est convergente de limite ℓ alors $(u_{n^2})_{n\geq 0}$ aussi.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent alors u est convergente.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Si $(u_{3n})_{n\geq 0}, (u_{3n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n+2})_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite alors u converge elle aussi vers cette limite.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Une suite convergente est bornée. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Une suite bornée est convergente. ☐ Vrai ☒ Faux
3. Il existe des suites divergentes et bornées. ☒ Vrai ☐ Faux

À retenir

La suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est le contre-exemple classique à retenir pour les suites : c'est une suite bornée mais divergente.

Exercice 2 –

Posons $\varepsilon = \frac{\ell}{4} > 0$. Par définition de convergence, il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On en déduit que pour tout entier $n \geq N$:

$$-\frac{\ell}{4} \leq u_n - \ell \leq \frac{\ell}{4}$$

et finalement :

$$\frac{3}{4}\ell \leq u_n \leq \frac{5}{4}\ell$$

Cours

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On dit que u est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Si u est convergente, sa limite est unique.

Exercice 3 –

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$ et ainsi par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

À retenir

Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

2. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$$

donc par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

3. Nous somme face à une forme indéterminée. Retravaillons l'expression du terme général de cette suite. Pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{n^2 - 4n + 3}{n^3 + 1} \\ &= \frac{n^2\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} \\ &= \frac{n^2}{n^3} \times \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}} \end{aligned}$$

Par produit et quotient, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

Méthode

Pour lever une forme indéterminée, on factorise par le (ou les) termes prépondérant(s).

4. Nous somme face à une forme indéterminée. Retravaillons l'expression du terme général de cette suite. Pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{e^n - n^2 + 3}{n^2 + 5} \\ &= \frac{e^n\left(1 - \frac{n^2}{e^n} + \frac{3}{e^n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} \\ &= \frac{e^n}{n^2} \times \frac{1 - \frac{n^2}{e^n} + \frac{3}{e^n}}{1 + \frac{5}{n^2}} \end{aligned}$$

Par théorème des croissances comparées, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^2} = +\infty$$

puis par somme et théorème des croissances comparées, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n^2}{e^n}+\frac{3}{e^n}\right)=1$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n^2}\right)=1$$

Finalement, par produit et quotient on a :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=+\infty$$

Cours – Théorème des croissances comparées.

Pour tout $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n^\alpha}=+\infty.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^\beta}{[\ln(n)]^\alpha}=+\infty.$

Exercice 4 –

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=n+2}^{2(n+1)}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

ou encore :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

Après simplification des termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{1}{2n+1}+\frac{1-2}{2(n+1)}\\
&=\frac{2(n+1)-(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)}\\
&=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}\geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n\geq1}$ est croissante.

Cours

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On dit que :

— $(u_n)_{n\geq 0}$ est *croissante* si : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \geq u_n$.

— $(u_n)_{n\geq 0}$ est *décroissante* si : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \leq u_n$.

— $(u_n)_{n\geq 0}$ est *strictement croissante* si : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} > u_n$.

— $(u_n)_{n\geq 0}$ est *strictement décroissante* si : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} < u_n$.

— $(u_n)_{n\geq 0}$ est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

— $(u_n)_{n\geq 0}$ est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

La définition s'adapte facilement si le premier indice de la suite n'est pas 0.

Exercice 5 –

Cours

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On dit que :

— u est minorée si il existe un réel m tel que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq m$.

— u est majorée si il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq M$.

— u est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Par définition, il existe un réel m tel que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n \geq m$$

Ainsi :

$$\forall n \geq 0,\ u_n + v_n \geq v_n + m$$

Or par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n + m = +\infty$$

donc par comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$$

Cours

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites *réelles*. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

— Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$ alors $(v_n)_{\geq 0}$ aussi.

— Si la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $-\infty$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ aussi.

Exercice 6 –

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \end{aligned}$$

Or on a :

Quantité conjuguée

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$$

donc :

Décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

d'où :

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

et ainsi :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} \geq 2\sqrt{n+1} > 0$$

donc :

Décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

d'où :

$$\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

et ainsi :

$$v_{n+1} - v_n \geq 0$$

La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante.

— Soit $n \geq 1$. Alors :

Quantité conjuguée

$$v_n - u_n = -2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = -2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = -\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$$

On en déduit que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et convergent vers une même limite.

Cours

Deux suites *réelles* $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont dites *adjacentes* lorsque :

- $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante (ou le contraire).
- La suite $(v_n - u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Deux suites adjacentes sont convergentes et elles convergent vers la même limite. De plus, si ℓ est la limite et que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, alors :

$$\forall n \geq 0,\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

À retenir

Si l'on souhaite montrer que deux suites convergent vers la même limite, il est légitime d'essayer de montrer qu'elles sont adjacentes.

Exercice 7 –

Pour tout $n \geq 1$,

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\alpha} = \frac{1}{(2n+2)^\alpha} - \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \leq 0$$

car $2n+2 \geq 2n+1$ et $\alpha > 0$. Ainsi $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est décroissante.

Pour tout $n \geq 1$,

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^\alpha} = -\frac{1}{(2n+3)^\alpha} + \frac{1}{(2n+2)^\alpha} \geq 0$$

car $2n+3 \geq 2n+2$ et $\alpha > 0$. Ainsi $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est croissante. On a :

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\alpha} = -\frac{1}{(2n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Cours

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.
2. u_{2n} et u_{2n+1} tendent vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 –

À retenir

Pour tout réel y :

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

et il faut savoir en déduire :

$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$kx - 1 \leq \lfloor kx \rfloor \leq kx$$

On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n}(kx - 1) \leq \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} kx$$

ou encore :

$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$x \times \frac{n(n+1)}{2} - n \leq \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq x \times \frac{n(n+1)}{2}$$

En divisant par $n^2 > 0$, on obtient finalement :

$$x\,\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq x\,\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

On a (en utilisant les termes de plus haut degré) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[x\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} x\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{x}{2}$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$$

Cours – Théorème d'encadrement.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ trois suites *réelles* et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$.

— Les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ.

Alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

À retenir

Si les termes d'une suite sont définies à l'aide d'une somme, un encadrement permet souvent d'obtenir certaines propriétés (minoration, majoration, convergence ...).

Exercice 9 –

1. Posons $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\,,\ f(x) = x + \tan(x)$$

La fonction f est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et strictement croissante (par somme de deux fonctions qui le sont) sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que f est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur l'intervalle J défini par :

$$J = \left] \lim_{x\to-\pi/2} f(x), \lim_{x\to\pi/2} f(x) \right[= \mathbb{R}$$

Pour tout tout entier $n \geq 0$, $n \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n appartenant à $]-\pi/2, \pi/2[$.

À retenir

Il n'est pas demandé de résoudre l'équation : on pense alors au théorème de la bijection.

2. Soit $n \geq 0$. Par définition, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n + 1$ donc :

$$f(x_n) < f(x_{n+1})$$

La fonction f est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$ donc $x_n < x_{n+1}$. Ainsi, $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. Elle est majorée par $\frac{\pi}{2}$ donc elle converge vers un réel $\ell \in [-\pi/2, \pi/2]$. Sachant que $f(0) = 0$, on a $u_0 = 0$ donc $\ell \in [0, \pi/2]$. Supposons par l'absurde que ℓ est différent de $\frac{\pi}{2}$. On sait que pour tout $n \geq 0$,

$$x_n + \tan(x_n) = n$$

La fonction tangente est continue en ℓ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + \tan(x_n)) = \ell + \tan(\ell) \in \mathbb{R}$$

ce qui est absurde car :

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Ainsi, $\ell = \frac{\pi}{2}$.

À retenir

Une suite définie de la manière précédente est dite implicite. On procède généralement de la manière suivante pour son étude :

— On justifie l'existence de chaque terme à l'aide du théorème de la bijection.

— On étudie les variations de la suite.

— On cherche un majorant ou un minorant de la suite, si cela existe.

Exercice 10 –

1. Soit $n \geq 2$. On pose pour tout réel $x \in I =]1, +\infty[$,

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

La fonction f_n est dérivable sur I (c'est une fonction polynomiale) et pour tout $x > 1$ on a :

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$$

Or si $x > 1$ alors $x^{n-1} > 1$ (par stricte croissance de $x \mapsto x^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+$) ce qui implique :

$$nx^{n-1} \geq n \geq 2$$

donc $f_n'(x) \geq 1 > 0$. Ainsi f_n est strictement croissante sur I. En considérant le terme de plus haut degré, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$$

De plus, $\lim\limits_{x \to 1} f_n(x) = -1$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur I, on a :

$$\lim_{x \to 1} f_n(x) = -1, \quad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$$

et $0 \in]-1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $x_n \in I$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Pour tout réel $x > 1$, $f_{n+1}(x) = x^{n+1} - x - 1$. Ainsi,

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1$$

Or par définition , $f_n(x_n) = x_n^n - x_n - 1 = 0$ ce qui est équivalent à $x_n^n = x_n + 1$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f_{n+1}(x_n) & = & x_n^{n+1} - x_n - 1 \\ & = & x_n^n \times x_n - x_n - 1 \\ & = & (x_n + 1)x_n - x_n - 1 \\ & = & x_n^2 + x_n - x_n - 1 \\ & = & x_n^2 - 1 \end{array}$$

Or $x_n > 1$ donc $x_n^2 > 1^2 = 1$ (par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$) et ainsi $f_{n+1}(x_n) > 0$. On a donc :

$$0 = f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n)$$

et par stricte croissance de f_{n+1} sur I (x_n et x_{n+1} appartiennent à cet intervalle) on a $x_{n+1} < x_n$. Ainsi, $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

> **À retenir**
>
> Pour ce type d'exercice, il est difficile de comparer x_n et x_{n+1} directement. Il est préférable de comparer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$ ou $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.

3. On sait que pour tout entier $n \geq 2$, $x_n > 1$. la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est donc minorée par 1 (et décroissante d'après la question précédente). D'après le théorème de limite monotone, la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est donc convergente vers un réel $\ell \geq 1$ (par passage à la limite avec les inégalités).

Supposons par l'absurde que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ne converge pas vers 1. Elle converge donc vers un réel ℓ strictement plus grand que 1 d'après la question précédente. Or on sait que pour tout $n \geq 2$, $f_n(x_n) = 0$ ce qui est équivalent à :

$$x_n^n = x_n + 1$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + 1) = \ell + 1$$

De plus, $x_n > 0$ pour tout $n \geq 2$ donc :

$$\ln(x_n^n) = n\ln(x_n)$$

Or comme ln est continue en $\ell > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(x_n) = \ln(\ell)$$

De plus, $\ell > 1$ donc $\ln(\ell) > 0$ et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(x_n) = +\infty$$

par produit de limites. Par composition avec la fonction exponentielle, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln(x_n)} = +\infty$$

Ceci est absurde car :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^n = \lim_{n\to+\infty} (x_n + 1) = \ell + 1 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, par l'absurde, on a montré que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

À retenir

Dans le raisonnement précédent, il n'est pas envisageable d'écrire « ℓ^n » : c'est une faute très courante.

Cours

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite *réelle*.

— Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée alors elle converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

— Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

— Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée alors elle converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

— Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Exercice 11 –

1. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq N$,

$$|u_n| \leq |u_N|\, \ell^{n-N}$$

Cette propriété est vraie au rang N car :

$$|u_N|\, \ell^{N-N} = |u_N|$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à N tel que :

$$|u_n| \leq |u_N|\, \ell^{n-N}$$

D'après l'énoncé, et sachant que $|u_n| > 0$, on a :

$$|u_{n+1}| \leq |u_n|\, \ell$$

et d'après l'hypothèse de récurrence (et positivité des termes) :

$$|u_{n+1}| \leq |u_N|\, \ell^{n-N} \times \ell = |u_N|\, \ell^{n+1-N}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. La propriété est donc vraie au rang N et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq N$ donc :

$$0 \leq |u_n| \leq |u_N|\,\ell^{n-N}$$

Sachant que $\ell \in\,]0,1[$, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_N|\,\ell^{n-N} = 0$$

Donc par encadrement, on en déduit que $(|u_n|)_{n\geq 0}$ converge et que sa limite est 0. Ainsi, il en est de même pour $(u_n)_{n\geq 0}$.

2. Non car toute suite constante non nulle vérifie la propriété.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si z est nul alors pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Supposons maintenant que z est non nul. Alors pour tout entier $n \geq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|z|}{n+1}$$

Remarquons que :

$$\frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \iff 2|z| \leq n+1 \iff 2|z|-1 \leq n$$

En posant $N = \max(0, \lfloor 2|z| \rfloor)$, la propriété de la question 1 est vérifiée et ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 12 –

D'après l'énoncé, il existe trois nombres complexes a, b et c tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a,\ \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = b \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{3n} = c$$

Pour tout $n \geq 0$,

$$u_{6n} = u_{2(3n)} = u_{3(2n)}$$

donc $(u_{6n})_{n\geq 0}$ est une suite extraite de $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$. Une suite extraite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite donc par unicité de la limite, on en déduit que $a = c$. Pour tout $n \geq 0$, on a aussi :

$$u_{3(2n+1)} = u_{2(3n+1)+1}$$

donc $(u_{3(2n+1)})_{n\geq 0}$ est une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$. Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que $b = c$. Ainsi, $a = b$ donc les suites extraites d'indices pairs et impairs sont convergentes et convergent vers la même limite. On en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Cours

Si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers un scalaire ℓ ou vers $\pm\infty$, il en est de même pour toute suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 13 –

Une récurrence immédiate permet de montrer que x est bien définie et strictement positive. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a}{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}} > 0$$

On en déduit que x est croissante donc admet une limite (finie ou $+\infty$). Supposons par l'absurde que x admette une limite finie ℓ. Sachant que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{a}{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}} = x_{n+1} - x_n$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}} = \ell - \ell = 0$$

Or x est croissante et strictement positive donc pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_1 \cdots x_n \leq x_n^n$$

donc par croissance de $x \mapsto x^{1/n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leq (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq x_n$$

puis :

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{a}{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}} \geq \frac{a}{x_n} \geq 0$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{x_n} = 0$$

donc x diverge vers $+\infty$: c'est absurde. Ainsi, x admet pour limite $+\infty$.

D'après le raisonnement précédent, on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_{n+1} \geq x_n + \frac{a}{x_n}$$

Sachant que tous les termes sont positifs, on en déduit en élevant au carré que :

$$x_{n+1}^2 \geq x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \geq x_n^2 + 2a$$

puis :

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 \geq 2a$$

Pour tout entier $N \geq 2$, on a alors :

$$\sum_{n=1}^{N-1} (x_{n+1}^2 - x_n^2) \geq \sum_{n=1}^{N-1} 2a$$

ou encore :

$$x_N^2 - x_1^2 \geq 2(N-1)a$$

puis :

$$x_N^2 \geq x_1^2 + 2(N-1)a \geq 2(N-1)a$$

Par croissance de la fonction racine carrée et positivité de x, on en déduit que :

$$x_N \geq \sqrt{2(N-1)a}$$

puis sachant que $\ln(N) > 0$:

$$\frac{x_N}{\ln(N)} \geq \frac{\sqrt{2(N-1)a}}{\ln(N)}$$

Or on a :

Croissances comparées

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sqrt{2(N-1)a}}{\ln(N)} = +\infty$$

donc par comparaison,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{x_N}{\ln(N)} = +\infty$$

Exercice 14 –

On souhaite montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ donc il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N_1$,

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout entier naturel $n \geq N_1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n} |u_k - \ell|
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k-\ell\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell|+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell|+\frac{(n-N_1+1)\varepsilon}{2n}\\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell|+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

car $0 \leq n-N_1+1 \leq n$. Remarquons maintenant que :

$$\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell|$$

ne dépend pas de n d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell| = 0$$

Il existe donc un entier naturel non nul N_2 tel que pour tout entier $n \geq N_2$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k-\ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $n \geq N$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)-\ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a donc montré le résultat souhaité.

À retenir

Le résultat précédent est appelé lemme de Cesàro.

Exercice 15 –

1. Si u est convergente de limite ℓ alors $(u_{n^2})_{n\geq 0}$ aussi.	☒ Vrai	☐ Faux
2. Elles doivent converger vers la même limite.	☐ Vrai	☒ Faux
3. Si $(u_{3n})_{n\geq 0}$, $(u_{3n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n+2})_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite alors u converge elle aussi vers cette limite.	☒ Vrai	☐ Faux

19 Suites usuelles

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison 3.

1. La suite u converge.	☐ Vrai	☐ Faux
2. La suite u diverge vers $+\infty$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $u_{100} = 2 \times 3^{100}$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. $u_1 + \cdots + u_{20} = 3^{20} - 1$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ v_{n+1} = 3v_n + 3^n$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \frac{v_n}{3^n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique.

2. Donner l'expression de u_n puis de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = 3u_n - 2$$

Exercice 4 –

Déterminer le terme général des suites définies de la manière suivante :

1. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

2. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

3. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

Exercice 5 –

Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

Exercice 6 –

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$$

Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Déterminer les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que $v_0 > 0$, $v_1 > 0$ et vérifiant :

$$\forall n \geq 0,\ v_{n+2} = \left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^4$$

Exercice 8 –

Déterminer toutes les fonctions f continues en 1 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle définie par un réel u_0 et : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = 3u_n - 6$.

1. u converge peu importe la valeur de u_0.	☐ Vrai	☐ Faux
2. u diverge peu importe la valeur de u_0.	☐ Vrai	☐ Faux
3. u converge pour une seule valeur fixée de u_0.	☐ Vrai	☐ Faux
4. Si $u_0 = 4$, $u_0 + \cdots + u_{19} = 60 + \frac{1}{2}(3^{20} - 1)$.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La suite u converge.	☐ Vrai	☒ Faux
2. La suite u diverge vers $+\infty$.	☒ Vrai	☐ Faux
3. $u_{100} = 2 \times 3^{100}$.	☐ Vrai	☒ Faux
4. $u_1 + \cdots + u_{20} = 3^{20} - 1$.	☒ Vrai	☐ Faux

Cours

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

— $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p \times q^{n-p}$.

— En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, dont la raison q est différente de 1, vaut :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exercice 2 –

1. Soit $n \geq 0$. Alors :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{v_n}{3^n} = \frac{v_{n+1} - 3v_n}{3^{n+1}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

Méthode

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule la quantité $u_{n+1} - u_n$ (pour $n \geq 0$ *quelconque*) et on montre que cette quantité est constante.

2. On sait que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = u_0 + \frac{n}{3} = \frac{v_0}{3^0} + \frac{n}{3} = 1 + \frac{n}{3}$$

donc :

$$\forall n \geq 0,\ v_n = 3^n u_n = 3^n \left(1 + \frac{n}{3}\right)$$

Cours

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

— $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p)r$.

— En particulier : $\forall n \geq 0,\ u_n = u_0 + nr$.

Si p et n sont deux entiers naturels avec $p \leq n$, alors :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n - p + 1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Exercice 3 –

On résout l'équation $x = 3x - 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

On reconnait une suite arithmético-géométrique

$$x = 3x - 2 \Longleftrightarrow x = 1$$

On a donc pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - 2 \\ 1 &= 3 \times 1 - 2 \end{cases}$$

En soustrayant les égalités, on a alors :

$$u_{n+1} - 1 = 3(u_n - 1)$$

Ainsi $(u_n - 1)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison 3. Pour tout $n \geq 0$, on a alors :

$$u_n - 1 = (u_0 - 1) \times 3^n = 3^n$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = 1 + 3^n$$

Cours

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe deux nombres complexes a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

— Si $a = 1$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique de raison b.

— Si $a \neq 1$ et x est le complexe vérifiant $x = ax+b$, alors la suite $(u_n - x)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison a.

Exercice 4 –

Cours

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est *récurrente linéaire d'ordre 2* lorsqu'il existe deux nombres complexes a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. L'équation caractéristique associée à cette suite est :

$$x^2 - ax - b = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On résout l'équation caractéristique d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ suivante :

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Celle-ci est équivalente à $(x-2)^2 = 0$ donc admet 2 pour unique solution. Il existe donc un couple de réels (λ, μ) tel que pour entier $n \geq 0$,

$$u_n = (\lambda + \mu n)2^n$$

On sait que $u_0 = 1$ donc $\lambda = 1$ et $u_1 = 0$ donc $2(\lambda + \mu) = 0$ donc $\mu = -\lambda = -1$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = (1-n)2^n$$

Méthode

Si l'équation caractéristique admet une unique racine r_0 alors le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donné par $u_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n$ pour tout $n \geq 0$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$.

2. On résout l'équation caractéristique d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ suivante :

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Le trinôme associé a deux racines, 1 et $\frac{1}{2}$, donc il existe un couple de réels (λ, μ) tel que pour entier $n \geq 0$,

$$u_n = \lambda 1^n + \frac{\mu}{2^n} = \lambda + \frac{\mu}{2^n}$$

On sait que $u_0 = 1$ donc $\lambda + \mu = 1$ et $u_1 = -1$ donc $\lambda + \frac{\mu}{2} = -1$ ce qui implique que $\mu = 4$ et $\lambda = -3$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = -3 + \frac{4}{2^n}$$

Méthode

Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 alors le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donné par $u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n$ pour tout $n \geq 0$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$ (suivant que la suite soit à termes réels ou complexes).

3. On résout l'équation caractéristique d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ suivante :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Le trinôme associé à deux racines :

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3} \text{ et } \bar{j}$$

Il existe un couple de réels (λ, μ) tel que pour entier $n \geq 0$,

$$u_n = 1^n(\lambda \cos(2n\pi/3) + \mu \sin(2n\pi/3)) = \lambda \cos(2n\pi/3) + \mu \sin(2n\pi/3)$$

On sait que $u_0 = 0$ donc $\lambda = 0$ et $u_1 = \sqrt{3}$ donc $\mu \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}$ et ainsi $\mu = 2$. Finalement, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_n = 2\sin(2n\pi/3)$$

Méthode

Dans le cas d'une suite réelle $(a, b \in \mathbb{R})$, si l'équation caractéristique admet deux racines conjuguées : $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ alors le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donné par :

$$u_n = r^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

pour tout $n \geq 0$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 –

L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ car pour tout réel $x > 0$, $1 + x > 1$ donc $\ln(1 + x) > 0$. On sait que $u_0 > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et est à termes strictement positifs.

Pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n$$

On sait que :

Inégalité de convexité

$$\forall x > -1,\ \ln(1 + x) \leq x$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. Sachant que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$, on en déduit alors que :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. Elle est minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$. On sait que pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

et par continuité de la fonction logarithme en $1 + \ell \geq 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(1 + u_n) = \ln(1 + \ell)$$

Par unicité de la limite, on en déduit que :

$$\ell = \ln(1 + \ell)$$

Or le seul réel positif vérifiant cette égalité est 0 donc $\ell = 0$ et ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On suppose que I est stable par f (c'est-à-dire $f(I) \subset I$) de telle sorte que la suite soit bien définie et que ses termes appartiennent à I.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq x$, on peut montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq x$, on peut montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
- Si f est croissante sur I, on peut montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

Supposons que f est continue sur I. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément ℓ de I alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 6 –

Pour tout réel $x > 0$, $-x < 0$ donc $e^{-x} < 1$ puis $1 - e^{-x} > 0$. Ainsi, en posant $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$, on a $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$. On vient donc de trouver un intervalle stable par f et a_0 appartient à celui-ci. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et tous ses termes sont strictement positifs.

On sait que :

Inégalité de convexité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$$

donc pour tout $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = 1 - e^{-a_n} \leq 1 - (1 - a_n) = a_n$$

La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Notons $\ell \geq 0$ sa limite. Puisque la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation de récurrence définissant la suite, on obtient :

$$\ell = 1 - e^{-\ell}$$

Or en étudiant la fonction $g : x \longmapsto 1 - e^{-x} - x$, on montre que $g(x) = 0$ n'admet que 0 comme solution et donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

À retenir

L'étude de $x \mapsto f(x)$ et celle de $x \mapsto f(x) - x$ permettent d'obtenir toutes les propriétés importantes de la suite.

Exercice 7 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant la propriété de l'énoncé. Une récurrence (double) immédiate montre que pour tout entier $n \geq 0$, $v_n > 0$.

Posons pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \ln(v_n)$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \ln(v_{n+2}) \\ &= \ln\left(\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^4\right) \\ &= 4\ln(v_{n+1}) - 4\ln(v_n) \\ &= 4u_{n+1} - 4u_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

D'après la question 1 de l'exercice 4, on en déduit qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (\lambda + \mu n)2^n$$

et ainsi :

$$\forall n \geq 0,\ v_n = \exp((\lambda + \mu n)2^n)$$

À retenir

Si les premiers termes de la suite ne sont pas connus, on ne peut pas obtenir λ et μ ce qui donne une infinité de possibilités.

Synthèse. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par :

$$\forall n \geq 0,\ v_n = \exp((\lambda + \mu n)2^n)$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il est clair que $v_0 > 0$ et $v_1 > 0$. La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement positive et pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\exp((\lambda + \mu(n+1))2^{n+1})}{\exp((\lambda + \mu n)2^n)} \\ &= \exp\left((\lambda + \mu(n+1))2^{n+1} - (\lambda + \mu n)2^n\right) \\ &= \exp\left(\lambda(2^{n+1} - 2^n) + \mu(n(2^{n+1} - 2^n) + 2^{n+1}\right) \\ &= \exp\left(\lambda 2^n + \mu(n2^n + 2^{n+1})\right) \\ &= \exp\left((\lambda + \mu(n+2))2^n\right)\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^4 &= \left(\exp\left((\lambda + \mu(n+2))2^n\right)\right)^4 \\ &= \exp\left((\lambda + \mu(n+2))2^n \times 4\right) \\ &= \exp\left((\lambda + \mu(n+2))2^{n+2}\right) \\ &= v_{n+2}\end{aligned}$$

Exercice 8 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction vérifiant la propriété de l'énoncé. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = x \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

D'après l'énoncé, pour tout entier $n \geq 0$,

$$f(u_{n+1}) = f\left(\frac{u_n + 1}{2}\right) = f(u_n)$$

La suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est donc constante et tous ses termes sont égaux à $f(x)$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmético-géométrique, on résout pour $a \in \mathbb{R}$:

$$a = \frac{a+1}{2} \iff 2a = a + 1 \iff a = 1$$

Alors pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n+1}{2} \\ 1 &= \frac{1+1}{2} \end{cases}$$

En soustrayant les deux égalités, on en déduit que :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

La suite $(u_n - 1)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n - 1 = (u_0 - 1) \times \frac{1}{2^n} = \frac{x-1}{2^n}$$

et ainsi :

$$u_n = 1 + \frac{x-1}{2^n}$$

Sachant que pour tout $n \geq 0$, $f(u_n) = f(x)$, on a alors :

$$\forall n \geq 0, f\left(1 + \frac{x-1}{2^n}\right) = f(x)$$

La fonction f est continue en 1 et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x-1}{2^n}\right) = 1$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(1 + \frac{x-1}{2^n}\right) = f(1)$$

et donc par unicité de la limite, $f(x) = f(1)$, et ceci pour tout réel x. Ainsi, f est constante.

Synthèse. Si f est une fonction constante, f vérifie effectivement la propriété de l'énoncé.

L'ensemble des fonctions vérifiant la propriété de l'énoncé est donc l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice 9 –

La méthode usuelle permet d'obtenir :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = 3 + 3^n(u_0 - 3)$$

ce qui implique par linéarité :

$$\sum_{k=0}^{19} u_k = \left(\sum_{k=0}^{19} 3\right) + (u_0 - 3)\sum_{k=0}^{19} 3^k = 20 \times 3 + \frac{3^{20}-1}{3-1} = 60 + \frac{1}{2}(3^{20}-1)$$

1. u converge peu importe la valeur de u_0. ☐ Vrai ☒ Faux
2. u diverge peu importe la valeur de u_0. ☐ Vrai ☒ Faux
3. u converge pour une seule valeur fixée de u_0. ☒ Vrai ☐ Faux
4. Si $u_0 = 4$, $u_0 + \cdots + u_{19} = 60 + \frac{1}{2}(3^{20} - 1)$. ☒ Vrai ☐ Faux

À retenir

Si $q \in \mathbb{C}$ est différent de 1 alors :

$$\forall n \geq 0, 1 + q + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

20 Dérivation : compléments

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si f est une fonction définie sur un intervalle contenant a, f est dérivable en a si et seulement si f a un développement limité à l'ordre 1 en a. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si f est dérivable sur un intervalle I et admet un extremum en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. $\forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ \left|e^x - e^y\right| \leq 3\left|x - y\right|.$ ☐ Vrai ☐ Faux
5. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et si f'' est positive, alors f est concave. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$$

1. Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |3x| \leq 3 + x^2$$
2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f'(x)\right| \leq \frac{8}{9}$$
3. Prouver alors que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{8}{9}\left|x - y\right|$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x + 1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \leq \mathrm{e} \leq \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Exercice 4 –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

On vérifiera que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = X^2\left[P_n(X) - P_n'(X)\right]$$

2. **a)** Déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

3. **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la limite de $f^{(n)}(x)$ quand x tend vers 0^+.

   b) En déduire que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 –

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la dérivée $n^{ème}$ des fonctions suivantes sur un intervalle que l'on précisera :

1. $f : x \mapsto \ln(x)$.
2. $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$.
3. $h : x \mapsto \sin(x)\,\mathrm{e}^x$ (on pourra remarquer que $\sin(x) = \Im m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Soit (a, b) un couple de réels tel que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit dérivable sur $]a, b[$.

On se propose de démontrer qu'il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left[f'(a) + f'(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

Pour cela, on fixe un réel A et on considère la fonction g définie par :

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\left[f'(a) + f'(x)\right] - A\,(x-a)^3$$

1. **a)** Déterminer le réel A de telle sorte que $g(b) = 0$. Dans la suite, on suppose A ainsi fixé.

   b) Que valent $g(a)$ et $g'(a)$?

c) Prouver alors qu'il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que $g''(c) = 0$.

2. Conclure.

Exercice 7 –

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 –

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ f(x) = \frac{e^x}{x+2}$$

1. a) Étudier les variations de f et vérifier que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f.

   b) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0, 1]$.

   c) Prouver que :

$$\forall x \in [0, 1], \ \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$$

2. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Montrer que la suite u est bien définie et que ses termes appartiennent tous à $[0, 1]$.

   b) Prouver, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_n - \alpha\right|$$

   c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   d) Prouver enfin que la suite u converge vers α.

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

1. Si f est définie sur $[a, b]$, dérivable sur $\left]a, b\right[$ et si $f(a) = f(b)$, alors f' s'annule au moins une fois sur $\left]a, b\right[$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ et convexe sur $[0, 1]$, alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$f'(0) \leq f(1) - f(0) \leq f'(1)$$

3. La dérivée f' de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)+2\cos(x)}{\sin^2(x)+2}$ s'annule une infinité de fois. ☐ Vrai ☐ Faux

4. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-1, +\infty\right[$ et : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n}{(1+x)^{n+1}}$$

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. On reconnaît la limite du taux d'accroissement au voisinage de 0 d'une fonction dérivable en 0. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Si f est une fonction définie sur un intervalle contenant a, f est dérivable en a si et seulement si f a un développement limité à l'ordre 1 en a. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Faux si I n'est pas ouvert. Considérer par exemple la fonction $f : x \longmapsto x$ sur $I = [0, 1]$. ☐ Vrai ☒ Faux
4. C'est l'inégalité des accroissements finis, avec : ☒ Vrai ☐ Faux
$$\forall t \in [0,1],\ \left|\exp'(t)\right| = \mathrm{e}^t \leq 3$$
5. Faux : f est convexe. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

1. On a :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3 - |3x| &= |x|^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times |x| + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\\ &= \left(|x| - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\\ &\geq 0\end{aligned}$$
donc :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |3x| \leq 3 + x^2$$
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

Ne pas oublier de justifier que f est dérivable avant de calculer $f'(x)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{2x\left(x^2+3\right) - 2x\left(x^2-1\right)}{(x^2+3)^2}\\ &= \frac{8x}{(x^2+3)^2}\end{aligned}$$
donc :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f'(x)\right| = \frac{|3x|}{x^2+3} \times \frac{\frac{8}{3}}{x^2+3}$$
De plus, d'après le résultat précédent et comme $3 + x^2$ est strictement positif, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \frac{|3x|}{x^2+3} \leq 1$$
Par ailleurs, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \frac{\frac{8}{3}}{x^2+3} \leq \frac{8}{9}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f'(x)\right| \leq \frac{8}{9}$$

3. Comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{8}{9}\left|x - y\right|}$$

> **Cours – Inégalité des accroissements finis.**
>
> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, m, M et k des réels.
>
> - Si, pour tout $t \in I$, $m \leq f'(t) \leq M$, alors :
>
> $$\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y,\ m\left(x - y\right) \leq f(x) - f(y) \leq M\left(x - y\right)$$
>
> - Si, pour tout $t \in I$, $\left|f'(t)\right| \leq k$, alors : $\forall (x,y) \in I^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leq k\left|x - y\right|$.

Exercice 3 –

> **Méthode**
>
> Quand on veut encadrer une expression de la forme $f(b) - f(a)$ ou majorer une expression de la forme $\left|f(b) - f(a)\right|$, on peut le plus souvent utiliser l'inégalité des accroissements finis (en s'assurant au préalable que f est bien une fonction dérivable sur un intervalle contenant a et b).

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction ln est dérivable sur $[x, x+1]$ et on a :

$$\forall t \in [x, x+1],\ \ln'(t) = \frac{1}{t}$$

donc, comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall t \in [x, x+1],\ \frac{1}{x+1} \leq \ln'(t) \leq \frac{1}{x}$$

On en déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\frac{1}{x+1}\left[(x+1) - x\right] \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}\left[(x+1) - x\right]$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

On commence par simplifier l'inégalité à démontrer en utilisant les propriétés de la fonction ln.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \iff x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq 1 \leq (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$\iff x\,[\ln(x+1)-\ln(x)] \leq 1 \leq (x+1)\,[\ln(x+1)-\ln(x)] \quad (20.1)$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\ln(x+1)-\ln(x) \leq \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1)-\ln(x)$$

donc :

$$x\,[\ln(x+1)-\ln(x)] \leq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq (x+1)\,[\ln(x+1)-\ln(x)]$$

donc finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

Exercice 4 –

1.

- La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)f(x)$ » est vraie.

Les questions portant sur les dérivées successives d'une fonction se traitent très souvent par récurrence.

  - ◇ Pour $n = 0$. En posant $P_0 = 1$, on peut remarquer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

Ne pas écrire $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right]f(x)$$

donc, en notant $P_{n+1}(X) = X^2\,[P_n(X) - P_n'(X)]$, P_{n+1} est un polynôme (comme somme et produit de polynômes) et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)f(x)$$

et : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

  - ◇ On peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)f(x)$$

De plus, on a :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = X^2\,[P_n(X) - P_n'(X)]$$

2. **a)** En utilisant la relation de récurrence trouvée précédemment, on obtient :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X^2, \quad P_2(X) = X^4 - 2X^3 \quad \text{et} \quad P_3(X) = X^6 - 6X^5 + 6X^4$$

b) Montrons alors par récurrence que, pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{H}(n)$: « le monôme de plus haut degré de P_n est X^{2n} » est vraie.

◇ Pour $n = 0$. Comme $P_0 = 1$, on peut remarquer que $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie. On a vu que :

$$P_{n+1}(X) = X^2\,[P_n(X) - P_n'(X)]$$

De plus, on sait que le degré de P_n' est strictement inférieur à celui de P_n, donc le monôme de plus haut degré de $P_n - P_n'$ est celui de P_n, c'est-à-dire X^{2n}. Finalement, le monôme de plus haut degré de P_{n+1} est donc X^{2n+2} et : $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$.

◇ On peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le monôme de plus haut degré de P_n est X^{2n}.

3. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = x^{2n} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^{2n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

On modifie l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour pouvoir utiliser les limites usuelles.

D'après le résultat précédent, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{P_n(t)}{t^{2n}} = 1$$

et donc, par composition , comme $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{2n} P_n\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Par ailleurs on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

et, par croissances comparées :

$$\lim_{u \to +\infty} u^{2n}\,\mathrm{e}^{-u} = 0$$

donc :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

Méthode

Le lecteur ayant déjà traité le chapitre sur les comparaisons de fonctions aura sans doute remarqué qu'on pouvait alléger la rédaction en remarquant que :

$$P_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{2n}$$

ce qui donne :

$$f^{(n)}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

b) En particulier, on a donc :

On commence par prolonger f par continuité puis on montrera que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

donc f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant : $f(0) = 0$. En notant g la fonction ainsi prolongée, montrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{H}(n)$: « g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$ » est vraie.

- Comme g est continue sur $\mathbb{R}^+$ par construction, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie. Alors $g^{(n)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\lim_{x\to 0^+} (g^{(n)})'(x) = \lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$$

  D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, $g^{(n)}$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, donc g est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}^+$, donc : $H(n) \Rightarrow H(n+1)$.
- Ainsi, $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut conclure que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Cours – Théorème de la limite de la dérivée.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.

Exercice 5 –

1. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} f^{(1)}(x) = \dfrac{1}{x} \\ f^{(2)}(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{x^3} \end{cases}$$

Le calcul des dérivées successives d'une fonction se fait le plus souvent par récurrence. On calcule les premières dérivées pour conjecturer le cas général.

Montrons alors par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

◇ On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(x) &= -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \times n x^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

◇ On peut maintenant conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

2. Les fonctions $\varphi : x \mapsto x^2 + 1$ et $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a, d'après la formule de Leibniz :

On a un produit de fonctions, donc on pense à la formule de Leibniz.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x)\, \psi^{(n-k)}(x)$$

De plus on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \psi^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } k = 0 \\ 2x & \text{si } k = 1 \\ 2 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x)\, \psi^{(n-k)}(x) \\ &= \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x + 2nx\mathrm{e}^x + n(n-1)\,\mathrm{e}^x \\ &= \left(x^2 + 2nx + n^2 - n + 1\right)\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(1)}(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{e}^x$$

donc le cas $n = 1$ rejoint le cas général et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \left(x^2 + 2nx + n^2 - n + 1\right) e^x$$

Cours – Formule de Leibniz.
Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

3. On peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \Im m(e^{(i+1)x})$$

$\sin(x) = \Im m(e^{ix})$

Or $\varphi : x \mapsto (i + 1)\,x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc la fonction $\psi : x \mapsto e^{(i+1)x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi'(x) = (i + 1)\,e^{(i+1)x}$$

On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ψ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi^{(n)}(x) = (i + 1)^n e^{(i+1)x}$$

Méthode

Se souvenir que l'on peut facilement écrire un nombre complexe de la forme $e^{ia} + e^{ib}$ sous forme $re^{i\theta}$ (plus propice aux calculs de produits, quotients et puissances) : il suffit de mettre en facteur $e^{i\frac{a+b}{2}}$ pour obtenir :

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \psi^{(n)}(x) &= \left(e^{i\frac{\pi}{2}} + 1\right)^n e^{(i+1)x}\\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^n e^{(i+1)x}\end{aligned}$$

On pouvait évidemment aussi calculer puis factoriser $|1 + i|$ pour ensuite remarquer que $\frac{\pi}{4}$ est un argument de $1 + i$.

donc, d'après la formule d'Euler :

$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \psi^{(n)}(x) &= \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{(i+1)x}\\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^{i\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)} e^x\end{aligned}$$

On en déduit finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n)}(x) = \Im m(\psi^{(n)}(x)) = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) e^x$$

Exercice 6 –

1. **a)** On a :

$$g(b) = 0 \iff f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\,[f'(a) + f'(b)] - A\,(b-a)^3 = 0$$
$$\iff A\,(b-a)^3 = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\,[f'(a) + f'(b)]$$

et donc, comme $b - a \neq 0$:

$$A = \frac{1}{(b-a)^3}\left(f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\,[f'(a) + f'(b)]\right)$$

b) • On a déjà :

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{a-a}{2}\,[f'(a) + f'(a)] - A\,(a-a)^3 = 0$$

• f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ donc g est dérivable sur $[a, b]$ comme somme et produit de fonctions qui le sont. De plus on a :

$$\forall x \in [a, b],\ g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}\,[f'(a) + f'(x)] - \frac{x-a}{2} f''(x) - 3A\,(x-a)^2$$

On en déduit :

$$g'(a) = f'(a) - \frac{1}{2}\,[f'(a) + f'(a)] - \frac{a-a}{2} f''(a) - 3A\,(a-a)^2$$
$$= 0$$

c) Par définition de A et d'après les calculs précédents, on a :

On veut montrer qu'une dérivée s'annule au moins une fois, donc on pense au théorème de Rolle.

$$g(a) = g(b)$$

Comme g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on en déduit qu'il existe $d \in \left]a, b\right[$ tel que $g'(d) = 0$.

Il en découle que g' est une fonction continue sur $[a, d]$ et dérivable sur $]a, d[$ (car f est trois fois dérivable sur $]a, b[$) et que $g'(a) = g'(d)$. D'après le théorème de Rolle, on en conclut qu'il existe c appartenant à $\left]a, d\right[$ (et donc à $]a, b[$) tel que $g''(c) = 0$.

2. On a :

$$\forall x \in \left]a, b\right[,\ g''(x) = f''(x) - \frac{f''(x)}{2} - \frac{f''(x)}{2} - \frac{x-a}{2} f^{(3)}(x) - 6A\,(x-a)$$
$$= -\frac{x-a}{2}\left[f^{(3)}(x) + 12A\right]$$

Comme $g''(c) = 0$ et $c - a \neq 0$, on en déduit :

$$A = -\frac{f^{(3)}(c)}{12}$$

Finalement, on a donc :

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\ [f'(a) + f'(x)] + \frac{(x-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

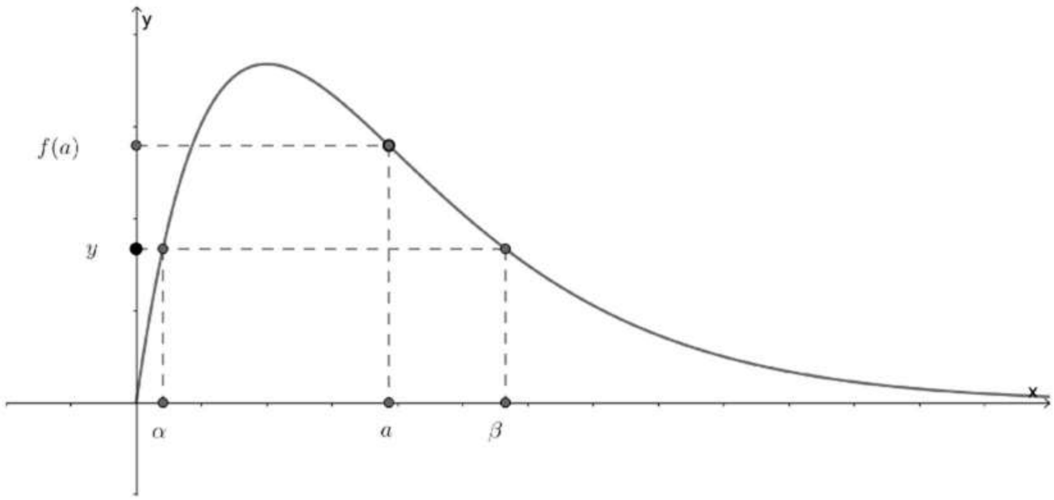
et en particulier, comme $g(b) = 0$:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\ [f'(a) + f'(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

Exercice 7 –

On peut déjà remarquer que, si f est constante nulle, alors f' est constante nulle, donc le résultat est immédiat. On suppose désormais qu'il existe un réel a strictement positif tel que : $f(a) \neq 0$.

On souhaite utiliser le théorème de Rolle ; pour cela on va chercher à montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta)$.



Quitte à substituer $-f$ à f, on suppose désormais que $f(a)$ est strictement positif. En prenant un réel y appartenant à $]0, f(a)[$, on peut alors affirmer grâce au théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $[0, a]$, qu'il existe un réel α appartenant à $]0, a[$ tel que $f(\alpha) = y$.
De plus, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, il existe un réel b strictement supérieur à a tel que :

$$\forall x \geq b,\ f(x) < y$$

Alors y appartient à $]f(b), f(a)[$ donc, de nouveau grâce au théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $[a, b]$, il existe un réel β appartenant à $]a, b[$ tel que $f(\beta) = y$.
Ainsi il existe deux réels positifs distincts α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta)$. Comme f est continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $]\alpha, \beta[$, on en déduit, d'après le théorème de Rolle, qu'il existe un réel c appartenant à $]\alpha, \beta[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 8 –

1. **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle, de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) &= \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2}\\ &= \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que :

$$\forall x \in [0,1],\ f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

d'où :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leq \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{e}{3} \leq 1$$

donc $[0,1]$ est stable par f.

> **Cours**
> Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire si : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.

b) Pour simplifier l'étude, on peut déjà remarquer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = x \iff e^x = x(x+2)$$

De plus, la fonction $g : x \mapsto e^x - x(x+2)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

> On va utiliser le théorème de la bijection.

$$\forall x \in [0,1],\ g'(x) = e^x - 2x - 2$$

g' est elle-même dérivable comme somme de fonctions qui le sont et on a :

> Comme le signe de g' n'est pas évident, on étudie ses variations en calculant g''.

$$\forall x \in [0,1],\ g''(x) = e^x - 2$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $e^{\ln(2)} = 2$, et comme $\ln(2)$ appartient à $[0,1]$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\ln(2)$		1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
g'	-1		$-2\ln(2)$		$e-4$

Comme $\mathrm{e} - 4 < 0$, g' est donc strictement négative sur $[0, 1]$, donc g est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Ainsi, g est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$, avec $g(0) = 1$ et $g(1) = \mathrm{e} - 3$, donc réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[\mathrm{e} - 3, 1]$. Comme 0 appartient à $[\mathrm{e} - 3, 1]$, g s'annule donc exactement une fois sur $[0, 1]$, ce qui nous permet de conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0, 1]$.

Méthode

Se souvenir que, pour démontrer qu'une équation de la forme $f(x) = g(x)$ admet une unique solution sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut prouver que $f - g$ est continue et strictement monotone sur I pour ensuite utiliser le théorème de la bijection. Il est toutefois préférable de toujours commencer par simplifier le plus possible l'équation, afin de faciliter l'étude de fonction.

c) On a vu que :

Partir de $0 \leq x \leq 1$ ne donne rien d'intéressant ici, donc on va étudier les variations de f'.

$$\forall x \in [0, 1],\ f'(x) = \frac{(x+1)\,\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}$$

La fonction f' est dérivable sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0, 1]$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1],\ f''(x) &= \frac{[\mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x](x+2)^2 - 2(x+2)(x+1)\,\mathrm{e}^x}{(x+2)^4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(x^2 + 2x + 2)}{(x+2)^3} \\ &> 0\end{aligned}$$

La fonction f' est donc strictement croissante sur $[0, 1]$, donc :

$$\forall x \in [0, 1],\ f'(0) \leq f'(x) \leq f'(1)$$

Comme $f'(0) = \dfrac{1}{4}$ et $f'(1) = \dfrac{2\mathrm{e}}{9} \leq \dfrac{2}{3}$, on en déduit :

$$\forall x \in [0, 1],\ \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$$

2. **a)** Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et appartient à $[0, 1]$ » est vraie.

La suite est définie par une relation de récurrence, donc on procède par récurrence.

- Par définition, $u_0 = 0$ existe et appartient à $[0, 1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Comme f est définie sur $[0, 1]$, $f(u_n)$ existe et, comme $[0, 1]$ est stable par f, appartient à $[0, 1]$. Ainsi u_{n+1} existe et appartient à $[0, 1]$ donc : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
- On peut finalement conclure que la suite u est bien définie et que tous ses termes appartiennent à $[0, 1]$.

b) Comme $f(\alpha) = \alpha$, on peut déjà remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \alpha\right| = \left|f(u_n) - f(\alpha)\right|$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et α appartiennent à $[0, 1]$. Comme f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ et d'après le résultat de la question 1(c), on a donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f(u_n) - f(\alpha)\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_n - \alpha\right|$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_n - \alpha\right|$$

c) Montrons alors par récurrence que la proposition $\mathcal{H}(n)$: « $\left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|u_0 - \alpha\right|$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ On a :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

donc :

$$\left|u_0 - \alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left|u_0 - \alpha\right|$$

et $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie. D'après le résultat précédent, on a :

$$\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_n - \alpha\right|$$

Comme $\frac{2}{3} \geq 0$, on en déduit, d'après $\mathcal{H}(n)$:

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1} - \alpha\right| &\leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$.

◇ On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

d) Comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

donc, d'après la question précédente et le théorème de l'encadrement : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 9 –

1. Faux. Il faudrait que f soit continue sur $[a, b]$ pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle. On peut par exemple considérer la fonction f définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

f est alors définie sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1)$ mais sa dérivée ne s'annule pas.

2. Vrai. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ et convexe sur $[0, 1]$, alors f' est croissante, donc :

$$\forall x \in [0,1],\ f'(0) \leq f'(x) \leq f'(1)$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à f (qui est bien dérivable sur $[0, 1]$ pour conclure.

3. Vrai. On peut remarquer que f est 2π-périodique. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est continue sur $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, dérivable sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, et telle que $f(2k\pi) = f(2(k+1)\pi)$ donc, d'après le théorème de Rolle, f' s'annule au moins une fois sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Faux. f est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, mais il suffit de regarder le cas $n = 0$ pour voir que le résultat est faux. On pourrait en fait montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, +\infty[\,,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

21 Fonctions convexes

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. La fonction logarithme népérien est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Les fonctions affines sont convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. La fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}$.	☐ Vrai	☐ Faux
5. La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Montrer que, pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 3 –

Énoncer l'inégalité de Jensen. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs, on a :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice 5 –

Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$$

Exercice 6 –

1. Étudier la convexité de $\ln \circ \ln$.

2. Montrer que pour tout $(a, b) \in]1, +\infty[^2$,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est continue sur I.

Exercice 8 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que f est constante ou f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

1. Une fonction convexe sur un intervalle I est dérivable sur I.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Une fonction dérivable sur I est convexe sur I si et seulement si f' est positive.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Une fonction dérivable sur I est convexe sur I si et seulement si f' est croissante.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. La fonction logarithme népérien est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. Les fonctions affines sont convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.	☒ Vrai	☐ Faux
4. La fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}$.	☐ Vrai	☒ Faux
5. La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}$.	☐ Vrai	☒ Faux

Cours

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

— La fonction f est *convexe* sur I si :

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall (x,y) \in I^2,\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

— La fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.

Exercice 2 –

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = e^0(x - 0) + e^0 = x + 1$$

Par convexité, on en déduit que pour tout réel x,

$$e^x \geq x + 1$$

> **Cours**
>
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si la fonction f est convexe sur I alors sa courbe est au dessus de ses tangentes :
>
> $$\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exercice 3 –

> **Cours – Inégalité de Jensen.**
>
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction concave et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et pour tous réels positifs λ_1, ..., λ_n, de somme égale à 1, on a :
>
> $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$
>
> En particulier,
>
> $$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

Ces réels sont positifs et de somme égale à 1 donc d'après l'inégalité de Jensen, on en déduit que :

$$\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n} = \frac{\ln(a_1 \cdots a_n)}{n}$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \exp\left(\frac{\ln(a_1 \cdots a_n)}{n}\right) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

On a donc prouvé l'inégalité souhaitée.

> **À retenir**
>
> Cette inégalité s'appelle l'inégalité arithmético-géométrique : elle précise que la moyenne arithmétique est supérieure ou égale à la moyenne géométrique.

Exercice 4 –

La fonction sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En effet, elle est deux fois dérivable sur cet intervalle et :

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$$

À retenir

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

— La fonction f est convexe (resp. concave) sur I.

— La fonction f'' est positive (resp. négative) sur I.

La tangente à la courbe de la fonction sinus au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = \sin'(0)(x - 0) + \sin(0) = x$$

Par concavité, on en déduit que pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(x) \leq x$$

Toujours par concavité, la courbe de la fonction sinus est située au dessus de la corde joignant $(0, \sin(0)) = (0, 0)$ à $(\frac{\pi}{2}, \sin(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, 1)$. La droite passant par ces deux points passe par l'origine et son coefficient directeur vaut $\frac{2}{\pi}$ donc son équation est $y = \frac{2}{\pi}x$. Ainsi, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$$

On a donc prouvé l'inégalité souhaitée.

Cours

Si f est convexe sur I alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ est « en dessous de ses cordes » (une corde est un segment reliant deux points de la courbe).

Plus précisément : si f est convexe sur I alors pour tout $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$ et $A(x, f(x))$ et $B(y, f(y))$ deux points de $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_f$ est « en dessous » de $[AB]$ sur l'intervalle $[x, y]$.

De même, si f est concave sur I alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ est « au dessus de ses cordes ».

Exercice 5 –

Remarquons qu'il suffit de montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}b^4$$

Cette inégalité est évidente par convexité de $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 –

1. Posons $f = \ln \circ \ln$. Cette fonction est définie sur $]1, +\infty[$. Elle est deux fois dérivable sur cet intervalle par composition et on a pour tout réel $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

et :

$$f''(x) = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2} < 0$$

Ainsi, f est concave sur $]1, +\infty[$.

2. Soit $(a, b) \in\,]1, +\infty[^2$. Par concavité de f, on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

donc :

$$\ln\circ\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln(\ln(a)) + \ln(\ln(b))}{2}$$

donc :

$$\ln\circ\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \ln(\sqrt{\ln(a)\ln(b)})$$

On en déduit que :

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Exercice 7 –

Soit $x_0 \in I$. Il existe deux éléments a et b de I tels que $a < x_0 < b$.

I est ouvert

Pour tout réel $x \in]x_0, b[$, on a par croissance de la fonction taux d'accroissement τ_{x_0} :

$$\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

Or $x - x_0$ est positif donc :

$$(x-x_0)\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leq f(x)-f(x_0) \leq (x-x_0)\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

Or on a :

$$\lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} = 0$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que f est continue à droite en x_0. On obtient de même que f est continue à gauche en x_0. Ainsi, f est continue en x_0.

Cours

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On définit la fonction *taux d'accroissement* en a, $\tau_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

— La fonction f est convexe (resp. concave) sur I.

— Pour tout $a \in I$, τ_a est croissante (resp. décroissante) sur $I \setminus \{a\}$.

Exercice 8 –

Supposons que f n'est pas constante. Il existe alors deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) < f(b)$ (car f est croissante). Pour tout réel $x > b$, on a par convexité de f :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

donc sachant que $x - a$ est strictement positif :

$$(x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a) \leq f(x)$$

Or on sait que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

donc :

$$\lim_{x \to +\infty} (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a) = +\infty$$

Par théorème de comparaison, on en déduit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 9 –

1. Penser à la fonction valeur absolue.	☐ Vrai	☒ Faux
2. $\ln'$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ mais $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. Une fonction dérivable sur I est convexe sur I si et seulement si f' est croissante.	☒ Vrai	☐ Faux

Cours

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

— La fonction f est convexe (resp. concave) sur I.

— La fonction f' est croissante (resp. décroissante) sur I.

22 Divisibilité, PGCD, PPCM

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $36 \wedge 84 = 12$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $36 \wedge 84 = 18$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $36 \vee 84 = 756$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. $36 \vee 84 = 252$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Énoncer et prouver le lemme de Gauss.

Exercice 3 –

1. Déterminer le PGCD de 1650 et 1520.
2. En déduire une relation de Bézout pour 1650 et 1520.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le PGCD de $2n + 4$ et $3n + 3$ appartient à $\{1, 2, 3, 6\}$.

Exercice 5 –

Soit a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

1. Montrer que $a \wedge (a + b) = b \wedge (a + b) = 1$.
2. Montrer que $(a + b) \wedge ab = 1$.

Exercice 6 –

Soit a et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^n - 1$ est premier.

1. Montrer que $a = 2$.
2. Montrer que n est premier.

Exercice 7 –

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes d'inconnue (x, y) :

1. $1520x + 1650y = 17$.
2. $1520x + 1650y = 10$.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation suivante : $(n \wedge m) + (n \vee m) = n + m$.

Exercice 9 –

Montrer qu'il existe 1000 entiers naturels consécutifs qui ne sont pas des nombres premiers.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n, m, k \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $n \mid mk$ alors $n \mid m$ ou $n \mid k$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. m et $3m - 1$ sont premiers entre eux. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si n est impair, n et $n + 2$ sont premiers entre eux. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $36 \wedge 84 = 12$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $36 \wedge 84 = 18$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. $36 \vee 84 = 756$. ☐ Vrai ☒ Faux
4. $36 \vee 84 = 252$. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

Soit (a, b) un couple non nul d'entiers relatifs.

- On appelle PGCD de a et b le plus grand élément (au sens de $\leq$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. On le note $a \wedge b$.
- Pour tout entier relatif non nul d, on a : $d \mid a \text{ et } d \mid b \iff d \mid a \wedge b$.
- $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la division) de l'ensemble des diviseurs positifs à a et b.
- Si $a \wedge b = 1$ alors on dit que a et b sont *premiers entre eux*.
- On appelle PPCM de a et b le plus petit élément (au sens de $\leq$) de l'ensemble des multiples positifs communs à a et b. On le note $a \vee b$.
- Pour tout entier relatif non nul m, on a : $a \mid m \text{ et } b \mid m \iff a \vee b \mid d$.
- $a \wedge b$ est le plus petit élément (au sens de la division) de l'ensemble des multiples communs positifs à a et b.
- On a $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

Exercice 2 –

Cours – Lemme de Gauss.

Soit $(a, b, z) \in \mathbb{Z}^3$. Si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc alors a divise c.

Prouvons ce lemme. D'après le théorème de Bézout, comme a et b sont premiers entre eux, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On a alors $auc + bvc = c$. Or a divise bc donc a divise bvc et a divise auc donc finalement, a divise c.

Cours – Théorème de Bézout.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Si d est le PGCD de a et b alors il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = d$.

La réciproque est vraie si $d = 1$.

Exercice 3 –

1. On utilise l'algorithme d'Euclide.
    - $1650 = 1 \times 1520 + 130$.
    - $1520 = 11 \times 130 + 90$.
    - $130 = 1 \times 90 + 40$.
    - $90 = 2 \times 40 + 10$.
    - $40 = 4 \times 10 + 0$.

   Ainsi, $1650 \wedge 1520 = 10$.
2. On remonte les calculs dans l'algorithme précédent. On a $10 = 90 - 2 \times 40$ donc :
$$10 = 90 - 2 \times (130 - 90) = 3 \times 90 - 2 \times 130$$
   puis :
$$10 = 3 \times (1520 - 11 \times 130) - 2 \times 130 = 3 \times 1520 - 35 \times 130$$
   et finalement :
$$10 = 3 \times 1520 - 35(1650 - 1520) = 38 \times 1520 - 35 \times 1650$$

Méthode

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Voici le principe de l'algorithme d'Euclide :

- Si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors $a \wedge b = b \wedge r$.
- On effectue alors la division euclidienne de b par r et si r_1 est le reste de celle-ci alors $b \wedge r = r \wedge r_1$.
- On continue ainsi de suite jusqu'à trouver un reste nul (ce qui arrivera car on construit une suite strictement décroissante d'entiers naturels).
- Le PGCD de a et b est alors le dernier reste non nul.

En remontant les calculs, on obtient une relation de Bézout, c'est-à-dire une relation de la forme :
$$au + bv = a \wedge b \qquad ((u, v) \in \mathbb{Z}^2)$$

Exercice 4 –

Soit d ce PGCD. Cet entier est donc un diviseur de $2n + 4$ et $3n + 3$ et en particulier :

$$d \mid 3(2n + 4) - 2(3n + 3) = 6$$

Sachant qu'un PGCD est positif, on en déduit que $d \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Exercice 5 –

1. D'après le théorème de Bézout, comme a et b sont premiers entre eux, il existe des entiers relatifs u, v tels que :

$$au + bv = 1$$

On a alors :

$$au + bv + av - av = 1$$

ou encore :

$$a(u - v) + (b + a)v = 1$$

D'après le théorème de Bézout, on en déduit que $a \wedge (a + b) = 1$. Par symétrie, on a aussi $b \wedge (a + b) = 1$.

> **À retenir**
>
> Une relation de la forme :
>
> $$au + bv = d$$
>
> n'implique pas que d est le PGCD de a et b. C'est cependant vrai si $d = 1$.

2. a est premier avec $a + b$ et b est premier avec $a + b$ donc ab est premier avec $a + b$.

> **Cours**
>
> Soit a, b, c trois entiers relatifs non nuls. Si a et b sont premiers avec c alors ab est premier avec c.

Exercice 6 –

1. On a : $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 0,\ x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})}$

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1)$$

Ainsi, $a - 1$ divise $a^n - 1$ qui est premier. Or $a - 1 > 0$ et $a - 1 < a^n - 1$ (car a et n sont supérieurs ou égaux à deux). On en déduit que $a - 1 = 1$ donc $a = 2$.

2. On sait maintenant que $a = 2$. Supposons par l'absurde que n n'est pas premier. Il existe donc deux entiers k et p, compris entre 2 et $n - 1$, tels que $n = kp$. On a :

$$2^n - 1 = 2^{kp} - 1 = (2^k)^p - 1$$

donc :

$$2^n - 1 = (2^k - 1)((2^k)^{p-1} + \cdots + 1)$$

Ainsi, $2^k - 1$ divise $2^n - 1$ qui est premier. Or $2^k - 1 > 0$ et $2^k - 1 < 2^n - 1$ car $k < n$ donc $2^k - 1 = 1$ donc $k = 1$ ce qui est absurde. Ainsi, n est premier.

Exercice 7 –

Dans un exercice précédent, on a montré que $1520 \wedge 1650 = 10$ et :

$$38 \times 1520 - 35 \times 1650 = 10$$

1. On sait que 10 divise 1520 et 10 divise 1650 donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$10 \mid 1520x + 1650y$$

L'équation proposée n'a donc pas de solution (car 10 ne divise pas 17).

2. On sait que $(38, -35)$ est un couple solution de l'équation proposée.

Analyse. Soit (x, y) une solution de l'équation. On a :

$$1520x + 1650y = 10 \text{ et } 1520 \times 38 + 1650 \times (-35) = 10$$

donc par soustraction :

$$1520(x - 38) + 1650(y + 35) = 0$$

puis :

$$1520(x - 38) = -1650(y + 35)$$

et en divisant par 10 :

$$152(x - 38) = -165(y + 35)$$

Or 152 et -165 sont premiers entre eux (car $1520 \wedge 1650 = 10$) donc d'après le lemme de Gauss, on en déduit que :

$$152 \mid y + 35$$

Il existe donc un entier relatif k tel que :

$$y + 35 = 152k$$

Alors $y = 152k - 35$. On réinjecte alors cette expression pour obtenir x :

$$152(x - 38) = -165(152k)$$

donc :

$$x = 38 - 165k$$

Synthèse. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned} 1520(38 - 165k) + 1650(152k - 35) &= 1520 \times 38 + 1650 \times (-35) \\ &= 10 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des couples $(38 - 165k, 152k - 35)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

À retenir

On appelle équations diophantiennes les équations du type précédent.

Exercice 8 –

Posons d le PGCD de n et m. Il existe alors deux entiers naturels n' et m' premiers entre eux tels que $n = dn'$, $m = dm'$.

L'équation se réécrit alors :

$dn' \vee dm' = dn'm'$ car $n' \wedge m' = 1$

$$d + dn'm' = dn' + dm'$$

ce qui équivaut à, d étant non nul :

$$1 + n'm' = n' + m'$$

ou encore à :

On remarque une factorisation

$$(1 - n')(1 - m') = 0$$

ce qui est équivalent à $n' = 1$ ou $m' = 1$. Ainsi, les solutions sont les couples de la forme (d, kd) ou (kd, d) où $k, d \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 –

Posons pour tout entier $k \in \{2, \dots, 1001\}$:

$$a_k = \left(\prod_{j=2}^{1001} j\right) + k = 1001! + k$$

Les 1000 entiers $a_2, \dots, a_{1001}$ sont bien consécutifs.

Soit $k \in \{2, \dots, 1001\}$. Alors k divise $1001!$ et k divise k donc k divise a_k. Or k est supérieur ou égal à deux et strictement plus petit que a_k. Ainsi, a_k n'est pas premier.

Exercice 10 –

1. Faux. 4 divise 2×2.
2. Vrai. $-(3m - 1) + 3 \times m = 1$.
3. Vrai. $n + 2 - n = 2$ donc le PGCD de n et $n + 2$ divise 2 et n est impair.

23 Congruences

Dans ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $10^3 \equiv 1\ [9]$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $a^2 \equiv b^2\ [n] \Rightarrow a \equiv b\ [n]$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Trouver le reste de la division euclidienne de 17^{14} par 6.

Exercice 3 –

1. Énoncer le petit théorème de Fermat.
2. Montrer que $121^{18} \equiv 1\ [7]$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Déterminer les entiers relatifs x tels que $2x^2 - x + 1$ soit divisible par 4.

Exercice 5 –

Montrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$ l'écriture d'un entier non nul en base 10, c'est-à-dire : $a_0, \ldots, a_n$ sont des entiers appartenant à $\{0, \ldots, 9\}$, $a_n \neq 0$, et :

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$$

Déterminer un critère simple de divisibilité par 11.

Exercice 7 –

Soit k et n deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer qu'il existe un entier relatif $x \in \mathbb{Z}$ tel que $kx \equiv 1\,[n]$ si et seulement si k et n sont premiers entre eux.
2. Déterminer tous les entiers relatifs k tels que $7k \equiv 5\,[20]$.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. Le chiffre des unités de 7^{4445} est 3.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Un entier naturel non nul est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres dans sa décomposition en base 10 est divisible par 9.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $10^3 - 1 = 999 = 9 \times 111$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. $3^2 \equiv 2^2\,[5]$ mais 3 n'est pas congru à 2 modulo 5.	☐ Vrai	☒ Faux

Exercice 2 –

Cours

Considérons quatre entiers relatifs a, b, c et d. Voici les propriétés fondamentales liées aux congruences :

1. On dit que a est congru à b modulo n, et on note $a \equiv b\,[n]$, si n divise $a - b$ (ou d'une manière équivalente, si $a - b$ est un multiple de n).
2. Si $a \equiv b\,[n]$ et si $c \equiv d\,[n]$ alors :

$$a + c \equiv b + d\,[n] \text{ et } ac \equiv bd\,[n]$$

3. Si $a \equiv b\,[n]$ alors pour tout entier naturel k :

$$a^k \equiv b^k\,[n]$$

On sait que $17 \equiv -1\,[6]$ donc $17^{14} \equiv (-1)^{14}\,[6]$ ce qui implique finalement que $17^{14} \equiv 1\,[6]$. Or $1 \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ donc 1 est le reste de la division euclidienne de 17^{14} par 6.

À retenir

Soit a, b deux entiers naturels. Si $a \equiv b\,[n]$ et si $b \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ alors b est le reste de la division euclidienne de a par n.

Exercice 3 –

1.

Cours – Petit théorème de Fermat.

Soit p un nombre premier et a un entier relatif. Alors :

$$a^p \equiv a\,[p]$$

De plus, si p ne divise par a alors :

$$a^{p-1} \equiv 1\,[p]$$

2. Le nombre 7 est un nombre premier et il ne divise pas $121 = 11^2$ (11 est premier). D'après le petit théorème de Fermat, on en déduit que : $121^6 \equiv 1\,[7]$ puis $(121^6)^3 \equiv 1^3\,[7]$ ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 4 –

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Distinguons quatre cas.

- Si $x \equiv 0\,[4]$ alors :

$$2x^2 - x + 1 \equiv 2 \times 0^2 - 0 + 1 \equiv 1\,[4]$$

donc 4 ne divise par $2x^2 - x + 1$.

4 divise un entier k si et seulement si $k \equiv 0\,[4]$

- Si $x \equiv 1\,[4]$ alors :

$$2x^2 - x + 1 \equiv 2 \times 1^2 - 1 + 1 \equiv 2\,[4]$$

donc 4 ne divise par $2x^2 - x + 1$.

- Si $x \equiv 2\,[4]$ alors :

$$2x^2 - x + 1 \equiv 2 \times 2^2 - 2 + 1 \equiv 7 \equiv 3\,[4]$$

donc 4 ne divise par $2x^2 - x + 1$.

- Finalement, Si $x \equiv 3\,[4]$ alors :

$$2x^2 - x + 1 \equiv 2 \times 3^2 - 3 + 1 \equiv 16 \equiv 0\,[4]$$

On en déduit que $2x^2 - x + 1$ est divisible par 4 si et seulement si $x \equiv 3\,[4]$.

Méthode

Si l'on souhaite étudier la divisibilité (ou le reste de la division euclidienne) par un entier naturel non nul n, d'un entier $f(x)$ dépendant d'un entier x, on peut distinguer les n cas suivants :

$$x \equiv 0\,[n],\ x \equiv 1\,[n], \dots, x \equiv n-1\,[n]$$

Exercice 5 –

Soit $n \geq 0$. On a $3^{2n+1} = 3 \times 9^n$. Or 9 est congru à 2 modulo 7 donc :

$$3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n \, [7]$$

De même, on a $2^{4n+2} = 2^{3n}2^{n+2} = 8^n \times 2^{n+2}$. Or 8 est congru à 1 modulo 7 donc :

$$2^{4n+2} \equiv 1^n \times 2^{n+2} \equiv 4 \times 2^n \, [7]$$

Finalement :

$$3^{2n+1} + 2^{4n+2} \equiv 3 \times 2^n + 4 \times 2^n \equiv 7 \times 2^n \equiv 0 \, [7]$$

ce qui montre que $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 6 –

On sait que $10 \equiv -1 \, [11]$ donc pour tout entier naturel k, on a :

Exercice classique !

$$10^k \equiv (-1)^k \, [11]$$

On en déduit que :

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \, [11]$$

Ainsi, l'entier $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$ est divisible par 11 si et seulement si $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$ est divisible par 11. Par exemple, 649 est divisible par 11 car $9 - 4 + 6 = 11$ est divisible par 11.

Exercice 7 –

1. D'après le théorème de Bézout, si k et n sont premiers entre eux alors il existe un couple d'entiers relatifs (x, y) tel que $kx + ny = 1$ donc tel que $kx - 1 = -ny$ ce qui implique que n divise $kx - 1$ donc $kx \equiv 1 \, [n]$. Réciproquement, si $kx \equiv 1 \, [n]$, il existe un entier relatif y tel que $kx - 1 = ny$ donc $kx - ny = 1$ et alors d'après le théorème de Bézout, on en déduit que k et n sont premiers entre eux.

   Cours – Théorème de Bézout.

   Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

2. Les entiers 7 et 20 sont premiers entre eux et on connait une relation de Bézout évidente : $3 \times 7 - 20 = 1$ donc $3 \times 7 \equiv 1 \, [20]$. Soit k un entier relatif tel que $7k \equiv 5 \, [20]$. Alors en multipliant par 3, on en déduit que $21k \equiv 15 \, [20]$ donc (comme 21 est congru à 1 modulo 20) :

   $$k \equiv 15 \, [20]$$

   Réciproquement, si $k \equiv 15 \, [20]$ alors :

   $$7k \equiv 105 \equiv 5 \, [20]$$

   L'ensemble des solutions est donc :

   $$\mathscr{S} = \{15 + 20k, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 8 –

1. Faux. On a $7^2 = 49$ donc $7^2 \equiv -1\,[10]$. On en déduit que $7^4 \equiv (-1)^2\,[10]$ donc $7^4 \equiv 1\,[10]$. Ainsi :
$$(7^4)^{1111} \equiv 1^{1111}\,[10]$$
donc $7^{4444} \equiv 1\,[10]$. On en déduit finalement que $7^{4445} \equiv 7\,[10]$. Le chiffre des unités est donc 7.

2. Vrai. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$ l'écriture d'un entier naturel non nul en base 10. Pour tout entier $k \geq 0$, on a $10^k \equiv 1\,[9]$ car $10 \equiv 1\,[9]$. Par somme, on en déduit que :
$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k\,[9]$$
Ainsi, $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$ est divisible par 9 si et seulement si $a_0 + \cdots + a_n$ l'est.

24 Structures algébriques usuelles

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $(\mathbb{R}_+, +)$ est un groupe.	☐ Vrai	☐ Faux
4. $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe.	☐ Vrai	☐ Faux
5. $(\mathbb{U}, +)$ est un groupe.	☐ Vrai	☐ Faux
6. $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –
Soit $*$ la loi de composition interne sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cette loi est-elle commutative ? Associative ? Admet-elle un élément neutre ? Si oui, donner les éléments inversibles.

Exercice 3 –
Soit I un ensemble non vide et $(G, *)$ un groupe. Montrer que l'intersection d'une famille $(H_i)_{i\in I}$ de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.

Exercice 4 –
Soit f un morphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(H, \star)$.

1. Montrer que si G' est un sous-groupe de G alors $f(G')$ est un sous-groupe de H.
2. Montrer que si H' est un sous-groupe de H alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Exercice 5 –
Donner un exemple d'anneau commutatif qui n'est pas un corps.

Exercice 6 –
Posons :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ est un anneau.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 7 –
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^n$$

Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 8 –
Un anneau A est appelé anneau de Boole si pour tout $x \in A$, $x^2 = x$. Soit A un tel anneau.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, $-x = x$.
2. Montrer que A est commutatif.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –
Un sous-groupe H d'un groupe $(G, *)$ est dit distingué si :

$$\forall h \in H, \forall a \in G, a * h * a^{-1} \in H$$

1. Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(G', \star)$ est un sous-groupe distingué de $(G, *)$.
2. Soit H, K deux sous-groupes de $(G, *)$. On pose :

$$HK = \{h * k, (h, k) \in H \times K\}$$

   Montrer que si H est distingué alors HK est un sous-groupe de $(G, *)$.

Exercice 10 –
Que vaut le produit de tous les éléments non nuls d'un corps fini $\mathbb{K}$?

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

1. $\mathbb{U}_4$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}_{16}, \times)$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $\mathbb{U}_4$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}_7, \times)$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $1 - \sqrt{2}$ est inversible dans $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe. ☐ Vrai ☒ Faux
3. $(\mathbb{R}_+, +)$ est un groupe. ☐ Vrai ☒ Faux
4. $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe. ☒ Vrai ☐ Faux
5. $(\mathbb{U}, +)$ est un groupe. ☐ Vrai ☒ Faux
6. $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

On appelle *groupe* tout ensemble G muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre et tel que chaque élément de G soit inversible. Autrement dit :

$$(G, *) \text{ est un groupe} \iff \begin{cases} \forall (x, y, z) \in G^3,\ (x * y) * z = x * (y * z) \\ \exists e \in G,\ \forall x \in G,\ x * e = e * x = e \\ \forall x \in G,\ \exists y \in G,\ x * y = y * x = e \end{cases}$$

Le groupe est dit abélien (ou commutatif) si :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x * y = y * x$$

Exercice 2 –

- La loi est clairement commutative (conséquence de la commutativité de l'addition de réels).
- Montrons l'associativité de cette loi. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$. On a :

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= \sqrt{(x * y)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2})^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (y * z)^2} \\ &= x * (y * z)\end{aligned}$$

- Remarquons que pour tout réel positif x, $\sqrt{x^2} = x$ donc :

$$x * 0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = x$$

  La loi étant commutative, on en déduit que 0 est l'élément neutre de celle-ci.
- Raisonnons par analyse-synthèse pour trouver les éléments inversibles.

Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ un élément inversible. Il existe alors un réel positif y tel que $x * y = 0$. Ainsi :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

donc :

$$x^2 + y^2 = 0$$

Or une somme de réels positifs est nulle si et seulement si ils sont tous nuls donc $x^2 = y^2 = 0$ et ainsi $x = 0$.

Synthèse. 0 est bien inversible (son inverse est 0). C'est donc le seul élément inversible d'après l'analyse.

Cours

Soit E un ensemble non vide. On appelle loi de composition interne sur E toute application $*$ de $E \times E$ dans E.

- On dit que $*$ est commutative si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x * y = y * x$.
- On dit que $*$ est associative pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
- Un élément e de E est appelé élément neutre pour $*$ si pour tout $x \in E$, $e * x = x * e = x$. En cas d'existence, un élément neutre est unique.
- Si E admet un élément neutre e, on dit qu'un élément x de E est inversible si il existe un élément y de E tel que :

$$x * y = y * x = e$$

  Si la loi est associative, un tel élément est unique en cas d'existence et on appelle y, l'inverse de x pour la loi $*$. On le note alors x^{-1} (ou $-x$ dans le cas d'une loi notée additivement).

Exercice 3 –

Vérifions les différents points de la caractérisation (on note e l'élément neutre de G).

- $\bigcap_{i \in I} H_i \subset G$ car pour tout $i \in I$, $H_i \subset G$.
- Pour tout $i \in I$, $e \in H_i$ car H_i est un sous-groupe de G donc :

$$e \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

  ce qui implique que cet ensemble est non vide.
- Soit $x, y \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Pour tout $i \in I$, H_i est un sous-groupe de G donc $xy^{-1} \in H_i$. Ainsi,

$$xy^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

On en déduit que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Méthode

Pour montrer que H est un sous-groupe d'un groupe $(G, *)$, on vérifie les trois points suivants :

- $H \subset G$.
- $H \neq \emptyset$.
- $\forall x, y \in H,\ x * y^{-1} \in H$.

Si H est un sous-groupe de $(G, *)$ alors la loi induite par $*$ sur H donne à $(H, *)$ une structure de groupe.

Exercice 4 –

Cours

Une application $f : G \to H$ est appelée *morphisme de groupes* de $(G, *)$ dans $(H, \star)$ si :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ f(x * y) = f(x) \star f(y)$$

On a alors les deux propriétés suivantes :

- $f(e_G) = e_H$.
- $\forall x \in G,\ [f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$.

1. Soit G' un sous-groupe de G. Vérifions les différents points de la caractérisation.

- $f(G') \subset H$ par définition.
- On sait que $e_H = f(e_G)$ et $e_G \in G'$ donc $e_H \in f(G')$ qui est donc non vide.
- Soit $y_1, y_2 \in f(G')$. Il existe alors $x_1, x_2 \in G'$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On sait que G' est un sous-groupe de G donc $x_1 * x_2^{-1}$ appartient à G'. Ainsi $f(x_1 * x_2^{-1})$ appartient à $f(G')$. Or f est un morphisme de groupe donc :

$$y_1 \star y_2^{-1} = f(x_1) \star [f(x_2)]^{-1} = f(x_1 * x_2^{-1}) \in f(G')$$

Ainsi, $f(G')$ est un sous-groupe de H.

À retenir

En particulier, $f(G)$ est un sous-groupe de H, que l'on appelle image de f et que l'on note $\mathrm{Im}(f)$.

2. Soit H' un sous-groupe de H. Vérifions les différents points de la caractérisation.

- $f^{-1}(H') \subset G$ par définition.
- On sait que $f(e_G) = e_H \in H'$ car H' est un sous-groupe de H. Ainsi, $e_G \in f^{-1}(H')$.
- Soit $x_1, x_2 \in f^{-1}(H')$. Par définition, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ appartiennent à H' qui est un sous-groupe de H donc :

$$f(x_1) \star [f(x_2)]^{-1} \in H'$$

ou encore par propriété d'un morphisme :

$$f(x_1 * x_2^{-1}) \in H'$$

donc $x_1 * x_2^{-1} \in f^{-1}(H')$.

À retenir

En particulier, $f^{-1}(\{e_H\})$ est un sous-groupe de G, appelé noyau de f et noté $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 5 –

L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est bien un anneau commutatif mais ses éléments non nuls ne sont pas tous inversibles pour $\cdot$ (par exemple, 2 n'admet pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$ pour la multiplication).

Cours

Considérons deux lois de compositions internes, $+$ et $\cdot$, sur un ensemble A.
Le triplet $(A, +, \cdot)$ est un *anneau* si :

- $(A, +)$ est un groupe abélien.
- La loi $\cdot$ est associative.
- La loi $\cdot$ est distributive par rapport à $+$:

$$\forall (a, b, c) \in A^3,\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \text{ et } \ (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

- La loi $\cdot$ possède un élément neutre 1_A que l'on appelle l'*unité* de l'anneau :

$$\forall a \in A,\ 1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$$

De plus, on dit qu'il est commutatif si $\cdot$ est commutative.

Le triplet $(A, +, \cdot)$ est un *corps* si :

- $(A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif différent de $\{0\}$.
- Tout élément non nul de A est inversible (pour la loi $\cdot$).

Exercice 6 –

Il suffit de montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$.
- Soit $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Il existe (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{Z}^2$ tels que :

$$x = a + b\sqrt{2} \ \text{ et } \ y = c + d\sqrt{2}$$

  Alors :

$$x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \ \text{ et } \ xy = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$$

  Or $a - c$, $b - d$, $ac + 2bd$ et $ad + bc$ sont des entiers relatifs donc $x - y$ et xy appartiennent à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
- On a $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ et $(1, 0) \in \mathbb{Z}^2$ donc $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Ainsi, $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ donc est un anneau (muni des lois induites).

Cours

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et B une partie de A. Alors B est un sous-anneau de A si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in B^2,\ x - y \in B \text{ et } x \cdot y \in B \\ 1_A \in B \end{cases}$$

Si B est un sous-anneau de $(A, +, \cdot)$ alors $(B, +, \cdot)$ est un anneau. Son élément neutre et son unité sont ceux de $(A, +, \cdot)$.

Exercice 7 –

Il est clair que pour tout réel x non nul, $f(x)$ est non nul. L'application f est donc bien définie.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Alors :

$$f(xy) = (xy)^n = x^n y^n = f(x)f(y)$$

Ainsi, f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 1$ si et seulement si $x = 1$ (ou $x = -1$ dans le cas n pair). Ainsi, si n est impair, le noyau de f contient uniquement 1 et si n est pair, il contient uniquement -1 et 1.

Si n est pair, il est évident que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$ et si n est impair, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$.

À retenir

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^n$$

- Si n est pair, f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$ et induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Si n est impair, f est une fonction impaire et induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 –

1. Soit $x \in A$. On a :

$$(x + x)^2 = x + x$$

ce qui donne en développant (x commute avec x) :

$$x^2 + 2x + x^2 = 2x$$

donc $x^2 + x^2 = 0$ puis $x + x = 0$ ce qui implique que $x = -x$.

Cours

Si a et b sont deux éléments d'un anneau tels que $ab = ba$ alors :

$$\forall n \geq 0,\ (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2. Soit $x, y \in A$. On sait que :

$$(x + y)^2 = x + y$$

donc

$$x^2 + xy + yx + y^2 = x + y$$

donc

$$x + xy + yx + y = x + y$$

donc

$$xy = -yx = yx$$

d'après la question précédente.

Exercice 9 –

1. Soit φ un tel morphisme. On sait que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe de $(G, *)$. Soit $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $a \in G$. Alors :

$$\begin{aligned} f(a * h * a^{-1}) &= f(a) \star f(h) \star f(a^{-1}) \\ &= f(a) \star e_{G'} \star f(a)^{-1} \\ &= f(a) \star f(a)^{-1} \\ &= e_{G'} \end{aligned}$$

Ainsi, $a * h * a^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On en déduit le résultat souhaité.

2. On a $HK \subset G$ (car $(G, *)$ est un groupe). De plus,

$$e = e * e \in HK$$

car H et K sous des sous-groupes de $(G, *)$. Soit $(a, b) \in (HK)^2$. Il existe $h_1, h_2 \in H$ et $k_1, k_2 \in K$ tels que :

$$a = h_1 * k_1 \text{ et } b = h_2 * k_2$$

On a :

Associativité

$$a * b = h_1 * k_1 * h_2 * k_2$$

ou encore :

$$a * b = h_1 * k_1 * h_2 * k_1^{-1} * k_1 * k_2$$

Or H est un sous-groupe distingué de $(G, *)$ et $h_1, h_2 \in H$ donc $k_1 * h_2 * k_1^{-1} \in H$ donc $h_1 * k_1 * h_2 * k_1^{-1} \in H$. De même, K est un sous-groupe de $(G, *)$ donc $k_1 * k_2 \in K$. Ainsi,

$$a * b \in HK$$

Remarquons aussi que :

$$a^{-1} = k_1^{-1} * h_1^{-1} = (k_1^{-1} * h_1^{-1} * k_1) * k_1^{-1} \in HK$$

avec le même type d'arguments. Ainsi, HK est un sous-groupe de $(G, *)$.

Exercice 10 –

On cherche la valeur de :

$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$P = \prod_{x \in \mathbb{K}^*} x$$

Chaque élément non nul x du corps admet un inverse donc si cet inverse est différent de x, le produit des deux vaut 1 (l'unité de $\mathbb{K}$). Par commutativité, on en déduit que les facteurs se simplifient et il ne reste que les éléments qui sont leur propre inverse :

$$P = \prod_{x \in \mathbb{K}^*,\, x = x^{-1}} x$$

Or pour $x \in \mathbb{K}^*$, $x = x^{-1}$ si et seulement si $x^2 = 1$ ou encore si et seulement si $(x-1)(x+1) = 0$. Un corps étant intègre, on en déduit que $x = 1$ ou $x = -1$. Ainsi, le produit précédent contient au maximum deux facteurs. Si il en contient deux, il vaut $1 \times (-1) = -1$ et si il en contient un (dans le cas où $1 = -1$), alors il vaut $1 = -1$.

Cours

Un anneau $(A, +, \cdot)$ est dit *intègre* si :

- Il est commutatif.
- Il est différent de $\{0_A\}$.
- Pour tout $(a, b) \in A^2$, si $a \cdot b = 0_A$ alors $a = 0_A$ ou $b = 0_A$.

Exercice 11 –

1. Vrai. Toutes les propriétés à vérifier sont claires.
2. Faux. Le réel -1 appartient à $\mathbb{U}_4$ mais pas à $\mathbb{U}_7$: $(-1)^7 = -1 \neq 1$.
3. Vrai. On a :
$$(1-\sqrt{2})(-1-\sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 = 1$$
et $-1-\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

25 Calcul matriciel

Dans la suite, n, p et q sont des entiers naturels non nuls et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $(A^T)^T = A$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si A est inversible, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $(AB)^T = A^T B^T$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 + 3A - \mathrm{I}_n = 0_n$$

Montrer que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 3 –

Soit A la matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ telle que $A_{i,j} = \frac{i}{j}$.

1. Calculer A^2.

2. La matrice A est-elle inversible ?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 –

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les puissances de A.

Exercice 6 –

Considérons la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3. En déduire que $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et :

$$\forall n \geq 1, \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 2b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + b_n \end{array} \right.$$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = a_n A + b_n A^2$.
   b) Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
   c) En déduire une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ puis une expression de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   d) En déduire l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M - \mathrm{I}_n$ est nilpotente. Montrer que M est inversible.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –

Soit $n \geq 1$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$|a_{ii}| > \sum_{k\neq i} |a_{ik}|$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 9 –

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Montrer que si A est inversible alors A^{-1} et B commutent.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

1. Il existe $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_2$ et $BA \neq 0_2$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $(A^T)^T = A$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Si A est inversible, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. $(AB)^T = A^T B^T$. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A, notée A^T est la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,p]\!] \times [\![1\,;\,n]\!],\ (A^T)_{i,j} = A_{j,i}$$

Voici trois propriétés importantes liées à la transposée :

— La transposition est linéaire :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$$

— Si A est une matrice carrée inversible, A^T l'est aussi et $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

— Si A et B sont deux matrices pour lesquelles AB existe, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 2 –

On a $A^2 + 3A = \mathrm{I}_n$ ou encore :

Ne pas écrire $A + 3$!

$$A(A + 3\mathrm{I}_n) = (A + 3\mathrm{I}_n)A = \mathrm{I}_n$$

On en déduit que A est inversible et $A^{-1} = A + 3\mathrm{I}_n$.

Cours

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = \mathrm{I}_n$$

  Dans ce cas, une telle matrice B est unique : on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.
- Si on détermine une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = \mathrm{I}_n$ *ou* $BA = \mathrm{I}_n$ alors une propriété du cours permet de conclure que A est inversible et que son inverse est B.

Exercice 3 –

1. Posons $C = A^2$. Alors pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$,

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k} \times \frac{k}{j} = n \times \frac{i}{j} = na_{i,j}$$

Ainsi, $A^2 = nA$.

À retenir

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice AB de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \forall j \in [\![1\,;\,q]\!],\ (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

2. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors $A^2 = nA$ implique (en multipliant par A^{-1}) que $A = n\mathrm{I}_n$ ce qui est faux. Ainsi, A n'est pas inversible.

Exercice 4 –

Par simple calcul, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

On remarque donc une cyclicité. On en déduit que pour tout entier $k \geq 0$, $A^{3k} = (A^3)^k = \mathrm{I}_3$, $A^{3k+1} = AA^{3k} = A$ et $A^{3k+2} = A^2A^{3k} = A^2$.

Méthode

Il est souvent demandé dans les exercices l'expression explicite de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Il existe (au moins) 4 cas où il est facile de donner une expression explicite des puissances d'une matrice.

— Le cas où la matrice est diagonale.

— Le cas où l'on peut conjecturer une expression puis démontrer celle-ci par récurrence.

— Le cas où il y a une cyclicité (par exemple si $A^3 = A$ ou $A^3 = \mathrm{I}$).

— Le cas où A est somme de deux matrices qui commutent : dans ce cas, on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 5 –

On a :

$$A = a\mathrm{I}_2 + bT \quad \text{où} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices I_2 et T commutent donc les matrices aI_2 et bT commutent. D'après la formule du binôme de Newton, on a pour tout entier $n \geq 0$:

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(b^k T^k\right)\left(a^{n-k} I_2^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} T^k$$

Par simple calcul, on a $T^2 = 0_2$ donc pour tout entier $k \geq 2$, $T^k = T^2 T^{k-2} = 0_2$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0} b^0 a^{n-0} T^0 + \binom{n}{1} b^1 a^{n-1} T^1 \\ &= a^n I_2 + nba^{n-1} T \\ &= \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $A^0 = I_2$.

Cours – Formule du binôme de Newton.
Soit A et B deux matrices carrées de même ordre telles que $AB = BA$. Alors :

$$\forall n \geq 0,\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exercice 6 –

1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui implique que $A^3 = A^2 + 2A$.

2. Raisonnons par l'absurde : on suppose que la matrice A est inversible. Il existe alors une matrice carrée d'ordre 3 notée A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$. Or d'après la question précédente, on a $A^3 = A^2 + 2A$. Cela implique que :

$$A^{-1}A^3 = A^{-1}(A^2 + 2A)$$

ou encore :

$$A^2 = A^{-1}A^2 + 2A^{-1}A = A + 2I_3$$

Or

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et cette matrice est différente de A^2. On a donc une absurdité. On a démontré par l'absurde que la matrice A n'était pas inversible.

3. **a)** Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = a_nA + b_nA^2$.

Pour $n = 1$, on a d'une part $A^1 = A$ et d'autre par $a_1A + b_1A^2 = A$ car $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. On a donc $A^1 = a_1A + b_1A^2$ et ainsi, l'égalité souhaitée est vraie au rang 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$A^n = a_nA + b_nA^2$$

Montrons que :

$$A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2$$

On a :

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & A \times (a_nA + b_nA^2) & \text{(hypothèse de récurrence)} \\ & = & a_nA^2 + b_nA^3 & \\ & = & a_nA^2 + b_n(A^2 + 2A) & \text{(d'après la question 1)} \\ & = & (a_n + b_n)A^2 + 2b_nA & \end{array}$$

Or par définition des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a $a_n + b_n = b_{n+1}$ et $2b_n = a_{n+1}$. On a donc :

$$A^{n+1} = b_{n+1}A^2 + a_{n+1}A$$

et l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

L'égalité est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = a_nA + b_nA^2$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

On cherche une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & 2b_{n+1} \\ & = & 2(a_n + b_n) \\ & = & 2a_n + 2b_n \\ & = & 2a_n + a_{n+1} \end{array}$$

ce qui prouve que $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.

c)
- La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 : on commence par résoudre l'équation caractéristique : $x^2 - x - 2 = 0$. On calcule le discriminant associé à ce trinôme (qui vaut 9) et on trouve deux racines distinctes qui sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$. Il existe alors deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$

Pour déterminer λ et μ on utilise les deux premières valeurs de la suite : $a_1 = 1$ et $a_2 = 2b_1 = 0$. Pour $n = 1$, on a alors :

$$a_1 = \lambda(-1)^1 + \mu 2^1 = -\lambda + 2\mu$$

On a ainsi $-\lambda + 2\mu = 1$. Pour $n = 2$, on a :

$$a_2 = \lambda(-1)^2 + \mu 2^2 = \lambda + 4\mu$$

On a ainsi $\lambda + 4\mu = 0$. En ajoutant membre à membre $-\lambda + 2\mu = 1$ et $\lambda + 4\mu = 0$, on obtient $6\mu = 1$ ou encore $\mu = \frac{1}{6}$ et $\lambda = -4\mu = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ d'après la deuxième équation. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$$

- Déterminons maintenant b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé, on a $a_{n+1} = 2b_n$ ce qui nous donne $b_n = \frac{a_{n+1}}{2}$ donc d'après l'expression de a_{n+1} obtenue :

$$b_n = -\frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{6}2^n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$$

d) On sait que pour tout $n \geq 1$, $A^n = a_n A + b_n A^2$. On connaît de plus les expressions de a_n et b_n en fonction de n d'après la question précédente. Ainsi pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = \left(-\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right)A + \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right)A^2$$

Exercice 7 –

À retenir

Une matrice carrée est dite nilpotente si une de ses puissances est nulle.

D'après l'énoncé, il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $(M - \mathrm{I}_n)^k = 0_n$. Les matrices M et I_n commutent donc d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j (-\mathrm{I}_n)^{k-j} = 0_n$$

et ainsi :

$\forall j \geq 0,\ (\mathrm{I}_n)^j = \mathrm{I}_n$

$$(-1)^k \mathrm{I}_n + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M^j = 0_n$$

On a alors :

$$M\left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} M^{j-1}\right) = (-1)^{k+1}\mathrm{I}_n$$

et finalement, en divisant par $(-1)^{k+1}$ et comme $(-1)^{-1-j} = (-1)^{1+j}$, on obtient :

$$M\left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{1+j} M^{j-1}\right) = \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{1+j} \binom{k}{j} M^{j-1}\right) M = \mathrm{I}_n$$

Ainsi, M est inversible et :

$$M^{-1} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{1+j} \binom{k}{j} M^{j-1}$$

Exercice 8 –

Supposons par l'absurde que A ne soit pas inversible. Il existe alors un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, que l'on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tel que $AX = 0$ (0 étant un abus de notation pour le vecteur colonne nul). Il existe un entier naturel $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$|x_j| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Notons que le maximum existe car l'ensemble associé est un ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$. X étant non nul, un des réels x_i ($1 \le i \le n$) est non nul donc $|x_j| > 0$. Sachant que $AX = 0$ on a, d'après la formule du produit matriciel, que pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = 0$$

En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k = 0$$

On a donc :

$$a_{j,j} x_j = -\sum_{k \neq j} a_{j,k} x_k$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors :

$$|a_{j,j}| \times |x_j| = \left| \sum_{k \neq j} a_{j,k} x_k \right| \le \sum_{k \neq j} |a_{j,k}| \times |x_k|$$

Par définition de j, et par positivité de tous les termes, on en déduit que :

$$|a_{j,j}| \times |x_j| \le \sum_{k \neq j} |a_{j,k}| \times |x_j| \le |x_j| \sum_{k \neq j} |a_{j,k}|$$

Or $|x_j|$ est strictement positif donc :

$$|a_{j,j}| \le \sum_{k \neq j} |a_{j,k}|$$

ce qui est absurde au vu de l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi, A est inversible.

Cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est inversible.
- L'équation $AX = 0_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ n'admet que la solution nulle.
- Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution.

Exercice 9 –

On a :

On utilise l'associativité du produit matriciel

$$A^{-1}B = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = \mathrm{I}_n BA^{-1} = BA^{-1}$$

ce qui prouve le résultat.

Exercice 10 –

1. Vrai. Il suffit de poser :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Faux. Si A et B sont deux matrices symétriques (de même ordre) alors :

$$(AB)^T = AB \iff B^T A^T = AB \iff BA = AB$$

La réponse est donc vraie si et seulement si A et B commutent. Elle est fausse dans le cas général. Par exemples les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont symétriques et ne commutent pas.

26 Inversibilité et systèmes linéaires

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

1. peut n'avoir aucune solution.	☐ Vrai	☐ Faux
2. peut avoir une unique solution.	☐ Vrai	☐ Faux
3. peut avoir une infinité de solutions.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Donner l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 2y+3z &= 5 \\ 8z &= 8 \end{cases}$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Résoudre le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x+2y+2z &= 0 \\ 2x-y+3z &= 3 \\ 3x-9y+4z &= 2 \end{cases}$$

Exercice 4 –

Soit P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer sans aucun calcul que P est inversible puis déterminer P^{-1}.

Exercice 5 –
Soit P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère le système suivant :

$$(S_m) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + mz & = & m \\ mx + y + mz & = & 1 \\ mx + my + z & = & m \end{array} \right.$$

1. Montrer que (S_m) admet une unique solution si et seulement si m est différent de -1 et 1.
2. Résoudre, pour tout $m \in \mathbb{R}$, le système (S_m).

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

1. Une matrice carrée dont les coefficients diagonaux sont tous nuls n'est pas inversible. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Permuter deux lignes d'une matrice carrée ne change pas le caractère inversible de cettre matrice. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Permuter deux colonnes d'une matrice carrée ne change pas l'ensemble des solutions du système associé. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. peut n'avoir aucune solution. ☒ Vrai ☐ Faux
2. peut avoir une unique solution. ☒ Vrai ☐ Faux
3. peut avoir une infinité de solutions. ☒ Vrai ☐ Faux

À retenir
Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ dx + ey & = & f \end{array}\right.$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ et (x, y) est l'inconnue. Géométriquement, on reconnait l'intersection de deux droites ce qui justifie bien le vrai/faux précédent (droites confondues, parallèles ...).

Exercice 2 –
Le système est triangulaire, la dernière ligne permet d'obtenir $z = 1$, puis la deuxième $y = 1$ et enfin $x = 1$.

L'unique solution du système est donc $(1, 1, 1)$.

À retenir
Le système précédent est associé à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls : celle-ci est donc inversible.
On sait alors que le système admet une unique solution et $(1, 1, 1)$ est clairement solution. On retrouve donc le résultat précédent.

Exercice 3 –
Résolvons le système (S) à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 2z & = & 0 \\ 2x - y + 3z & = & 3 \\ 3x - 9y + 4z & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 2z & = & 0 \\ -5y - z & = & 3 \\ -15y - 2z & = & 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 2z & = & 0 \\ -5y - z & = & 3 \\ z & = & -7 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - 14 & = & 0 \\ -5y & = & -4 \\ z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + \frac{8}{5} - 14 & = & 0 \\ y & = & \frac{4}{5} \\ z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{62}{5} \\ y & = & \frac{4}{5} \\ z & = & -7 \end{array}\right.$$

Le système admet donc une unique solution qui est $(\frac{62}{5}, \frac{4}{5}, -7)$.

Méthode

Soit (S) un système de n équations à p inconnues. Voici la méthode du pivot de Gauss :

— On multiplie éventuellement certaines lignes par un coefficient non nul ($L_i \leftarrow aL_i$) pour simplifier les équations.

— On échange si besoin la première ligne avec une autre (opération $L_1 \leftrightarrow L_i$) pour que le coefficient de x_1 de la première ligne soit non nul et *le plus simple possible* pour la suite des opérations.

— On effectue une opération du type $L_i \leftarrow L_i - aL_1$ pour les lignes $2, \dots, n$ afin de faire « disparaitre » le terme en x_1 dans ces lignes et se retrouver avec un système du type :

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & \quad (L_1) \\ a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p & = & b_2 & \quad (L_2) \\ & \vdots & & \\ a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p & = & b_n & \quad (L_n) \end{array}\right.$$

— On garde alors la première ligne et on recommence le procédé sur le sous-système constitué des lignes L_2 à L_n et dont les inconnues sont x_2 à x_n (si l'une des lignes L_2 à L_n a un coefficient non nul pour x_2, sinon les inconnues sont x_i à x_n où x_i est la première inconnue dont au moins un coefficient est non nul).

— On continue ainsi jusqu'à obtenir un système échelonné, auquel s'ajoutent éventuellement des équations du type $0 =$ constante.

— Les équations du type $0 = 0$ peuvent être négligées. Si le système comporte une équation du type $c = 0$ où c est une constante non nulle, cela signifie que le système n'a pas de solution.

Exercice 4 –

La matrice P est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont non nuls donc P est inversible.

Soit $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Résolvons le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & b_1 \\ y + 2z & = & b_2 \\ z & = & b_3 \end{array}\right.$$

La résolution est alors évidente : $z = b_3$,

$$y = b_2 - 2z = b_2 - 2b_3$$

et :

$$x = b_1 - 2y - 3z = b_1 - 2b_2 + 4b_3 - 3b_3 = b_1 - 2b_2 + b_3$$

Le système admet une unique solution donc P est inversible et :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode

Pour étudier si une matrice carrée A d'ordre n est inversible, on forme le système de matrice associée A et de second membre une matrice colonne quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On résout ce système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

— Si on obtient un système triangulaire $n \times n$ dont les coefficients diagonaux sont non nuls, alors la matrice A est inversible et la résolution du système fournit A^{-1}.

— Sinon la matrice A n'est pas inversible.

À retenir

Soit A une matrice carrée. Si A est diagonale ou triangulaire (inférieure ou supérieure) alors elle est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exercice 5 –

Soit $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Résolvons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& b_1 \\ -x+2y-z &=& b_2 \\ x+y+z &=& b_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& b_3 \quad (L_1 \longleftrightarrow L_3) \\ -x+2y-z &=& b_2 \\ 2x+y+z &=& b_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& b_3 \\ 3y &=& b_2+b_3 \quad (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \\ -y-z &=& b_1-2b_3 \quad (L_3 \leftarrow L_3-2L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z+y &=& b_3 \\ -z-y &=& b_1-2b_3 \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ y &=& \frac{b_2+b_3}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& b_3-y-z \\ -z &=& b_1-2b_3+y \\ y &=& \frac{b_2+b_3}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& b_3-y-z \\ -z &=& b_1-2b_3+\frac{b_2+b_3}{3} = \frac{3b_1+b_2-5b_3}{3} \\ y &=& \frac{b_2+b_3}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& b_3-\frac{b_2+b_3}{3}-\frac{-3b_1-b_2+5b_3}{3} \\ z &=& \frac{-3b_1-b_2+5b_3}{3} \\ y &=& \frac{b_2+b_3}{3} \end{array}\right.$$

ce qui implique que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & b_1 \\ -x+2y-z & = & b_2 \\ x+y+z & = & b_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3b_3-b_2-b_3+3b_1+b_2-5b_3}{3} = \frac{3b_1-3b_3}{3} \\ z & = & \frac{-3b_1-b_2+5b_3}{3} \\ y & = & \frac{b_2+b_3}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3b_1-3b_3}{3} \\ y & = & \frac{b_2+b_3}{3} \\ z & = & \frac{-3b_1-b_2+5b_3}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi, P est inversible et :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 –

1. On applique la méthode du pivot de Gauss avec les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$.

Le système étudié est donc équivalent à :

Attention à ne pas multiplier une ligne par **0**.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & m \\ (1-m)y+(m-m^2)z & = & 1-m^2 \\ (1-m^2)z & = & m-m^2 \end{array}\right.$$

La matrice associée au système est triangulaire et ses coefficients diagonaux (1, $1-m$ et $1-m^2$) sont différents de 0 si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -1$. Elle est donc inversible si et seulement si m est différent de -1 et 1 ce qui implique que (S_m) admet une unique solution si et seulement si m est différent de -1 et 1.

2. Distinguons trois cas :

— Si $m = 1$, on a :

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi (x, y, z) est solution de (S_1) si et seulement $x = 1 - y - z$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions du système est :

$$\{(1-y-z, y, z),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

— Si $m = -1$, on a :

$$(S_{-1}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & -1 \\ 2y-2z & = & 0 \\ 0 & = & -2 \end{array}\right.$$

Dans le cas, le système n'admet pas de solution.

— Soit $m \in \mathbb{R}$, différent de 1 et -1. On utilise alors le système équivalent sous forme triangulaire.

On obtient alors :

$\boxed{1 = m^2 \neq 0}$

$$z = \frac{m - m^2}{1 - m^2} = \frac{m(1 - m)}{(1 - m)(1 + m)} = \frac{m}{1 + m}$$

puis en utilisant la deuxième ligne :

$$(1 - m)y = 1 - m^2 - (m - m^2)z = (1 - m)(1 + m) - m(1 - m)z$$

donc :

$$y = 1 + m - mz = 1 + m - \frac{m^2}{1 + m}$$

Finalement, en utilisant la première ligne, on a :

$$x = -y - mz + m = -\left(1 + m - \frac{m^2}{1 + m}\right) - m\frac{m}{1 + m} + m$$

ce qui donne :

$$x = -1 + \frac{m^2}{1 + m} - \frac{m^2}{1 + m} = -1$$

Dans ce cas, l'unique solution du système est :

$$\left(-1, 1 + m - \frac{m^2}{1 + m}, \frac{m}{1 + m}\right)$$

Exercice 7 –

1. Une matrice carrée dont les coefficients diagonaux sont tous nuls n'est pas inversible. ☐ Vrai ☒ Faux
2. Permuter deux lignes d'une matrice carrée ne change pas le caractère inversible de cette matrice. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Permuter deux colonnes d'une matrice carrée ne change pas l'ensemble des solutions du système associé. ☐ Vrai ☒ Faux

Pour la première question, il suffit de penser à :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

27 Polynômes

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $\deg(PQ) = \deg(P)\deg(Q)$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. $\deg(P(X^n)) = n \deg(P)$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Effectuer la division euclidienne de $6X^3 - 2X^2 + X + 3$ par $X^2 - X + 1$.

Exercice 4 –

Déterminer, pour $n \geq 1$, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X - 5$.

Exercice 5 –

Pour tout $n \geq 2$, posons :

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

Montrer que $(X-1)^3$ divise P_n.

Exercice 6 –

Montrer que le polynôme $X^3 + X^2 + 1$ admet uniquement des racines simples.

Exercice 7 –

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

Exercice 8 –

Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$.

1. Déterminer le nombre de racines réelles de P. Que peut-on dire des racines complexes non réelles ?
2. On note x_1, x_2 et x_3 les racines de P. Déterminer $x_1 + x_2 + x_3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ et $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Soit :

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$$

Montrer que si ξ est une racine de P alors :

$$|\xi| \leq 1 + \max_{0\leq k\leq n-1} |a_k|$$

Exercice 10 –

Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = (X^2 + X + 1)^n - X^{2n} - X^n - 1$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que B divise A_n.
2. Donner le reste de la division euclidienne de A_n par B.

Exercice 11 –

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1)$$

1. Montrer que si a est racine de P alors $(a + 1)^2 - 1$ et $(a - 1)^2 - 1$ sont aussi des racines de P.
2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.
   a) Vérifier que lorsque a_0 est une racine de P, pour tout entier naturel n le nombre complexe a_n est une racine de P.
   b) Montrer que lorsque a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante de réels positifs.
   c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.
   d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.
   e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$.

3. Déduire des questions précédentes que si a_0 est une racine complexe de P alors $|a_0 + 1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a_0 - 1| = 1$.
4. Montrer que si le degré de P est strictement positif alors P a pour unique racine 0.
5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $P'(a) = 0$ alors $P(a) = 0$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si P est de degré impair, P admet une racine réelle.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Si P a deux racines réelles distinctes, P' en au au moins une.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $(X + 1) + (1 - X)$ est de degré 0.	☐ Vrai	☒ Faux
2. $\deg(PQ) = \deg(P)\deg(Q)$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.	☒ Vrai	☐ Faux
4. $\deg(P(X^n)) = n \deg(P)$.	☒ Vrai	☐ Faux

À retenir

— Le degré du polynôme nul est $-\infty$ par convention.

— On a $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ et égalité si P et Q ont des degrés différents.

Exercice 2 –

Soit $n \geq 0$, P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k$$

Exercice 3 –

On a :

$$\begin{array}{rr|l}
- & 6X^3 - 2X^2 + X + 3 & X^2 - X + 1 \\
 & 6X^3 - 6X^2 + 6X & \hline 6X + 4 \\
\hline
- & 4X^2 - 5X + 3 & \\
 & 4X^2 - 4X + 4 & \\
\hline
 & -X - 1 &
\end{array}$$

Ainsi :

$$6X^3 - 2X^2 + X + 3 = (X^2 - X + 1)(6X + 4) - X - 1$$

Cours – Théorème de division euclidienne.
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec B non nul. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$$

et $\deg(R) < \deg(B)$.

Exercice 4 –
On remarque facilement que :

$$X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$$

D'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$X^n = Q_n(X)(X+1)(X-5) + R_n(X)$$

et tel que $\deg(R_n) < \deg((X+1)(X-2)) = 2$. Ainsi, il existe deux réels a_n et b_n tels que :

$$R_n(X) = a_n X + b$$

On a donc :

$$X^n = Q_n(X)(X+1)(X-5) + a_n X + b_n$$

En évaluant en -1 et en 5, on obtient :

On évalue en les racines de $X^2 - 4X - 5$

$$\begin{cases} -a_n + b_n &= (-1)^n \\ 5a_n + b_n &= 5^n \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ implique que : $6a_n = 5^n - (-1)^n$ donc :

$$a_n = \frac{5^n - (-1)^n}{6}$$

et ainsi en injectant dans L_1 :

$$b_n = (-1)^n + \frac{5^n - (-1)^n}{6} = \frac{5(-1)^n + 5^n}{6}$$

On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$,

$$X^n = Q_n(X)(X+1)(X-5) + \frac{5^n - (-1)^n}{6} X + \frac{5(-1)^n + 5^n}{6}$$

Exercice 5 –
On a :

$$P_n'(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + n + 2$$

et :

$$P_n''(X) = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$$

On remarque donc que $P_n(1) = P_n'(1) = P_n''(1) = 0$. Ainsi, 1 est une racine au moins triple de P_n donc $(X-1)^3$ divise P_n.

Cours

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $(X-\alpha)^k | P$ et $(X-\alpha)^{k+1} \nmid P$.
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Si les conditions sont vérifiées, on dit que k est l'*ordre de multiplicité* de α en tant que racine de P.

Exercice 6 –

Supposons par l'absurde que ce polynôme admette au moins une racine double α. Alors α est racine du polynôme dérivé $3X^2 + 2X$ donc $\alpha = 0$ ou $-\frac{2}{3}$ ce qui est absurde car ce ne sont pas des racines de $X^3 + X^2 + 1$. Ainsi, le polynôme $X^3 + X^2 + 1$ a uniquement des racines simples.

À retenir

Il n'est pas demandé dans ce type d'exercices de déterminer les racines !

Exercice 7 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit P un polynôme solution. Le polynôme P peut être nul. Si il n'est pas nul, notons d son degré (qui est donc un entier naturel). L'égalité :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$$

implique alors que $2d = 2 + d$ donc $d = 2$. Il existe donc trois réels a, b et c tels que :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

On injecte alors dans l'égalité précédente :

$$aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c$$

Par identification, on en déduit que $b = 0$ et $c + a = 0$. Ainsi :

$$P(X) = a(X^2 - 1)$$

Remarquons que $a = 0$ donne le polynôme nul.

Synthèse. Soit $P = a(X^2 - 1)$ où $a \in \mathbb{R}$. Alors :

Identité remarquable

$$\begin{aligned} P(X^2) &= a(X^4 - 1) \\ &= a(X^2-1)(X^2+1) \\ &= (X^2+1)P(X) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$\{a(X^2 - 1),\ a \in \mathbb{R}\}$$

À retenir

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les mêmes coefficients.

Exercice 8 –

1. On a $P'(X) = 3X^2 + 4X + 1 = (3X + 1)(X + 1)$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{23}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction polynomiale associée à P (que l'on note toujours P) est continue et strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ et change de signe sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, P s'annule une unique fois sur cet intervalle.

Sur $]-1, +\infty[$, la fonction P admet pour minimum $\frac{23}{27}$ et donc ne s'annule pas. Ainsi, P admet une unique racine réelle α.

À retenir

Pour déterminer le nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients réels, on peut utiliser une simple étude de fonction.

De plus, les racines de P' ne sont pas racines de P donc α est une racine simple de P. Or le degré de P vaut 3 donc P admet deux autres racines complexes et sachant que P est à coefficients réels, on sait qu'elles sont conjuguées.

Cours

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ aussi.

2. Déterminons maintenant les sommes demandées. On note x_1, x_2, x_3 les racines de P.

— Le polynôme P est unitaire donc $P(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$. Or on a en développant :

$$(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)X - x_1x_2x_3$$

donc par identification,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

Remarquons aussi que $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1$ et $x_1x_2x_3 = -1$.

— Précisons pour commencer que la deuxième somme est bien définie car les racines de P sont non nulles ($P(0) = 1$). On a :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{-1} = -1$$

— Précisons également que 2 n'est pas racine de P donc la troisième somme est bien définie. On a :

$$\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2} = \frac{(x_2-2)(x_3-2) + (x_1-2)(x_3-2) + (x_1-2)(x_2-2)}{(x_1-2)(x_2-2)(x_3-2)}$$

ce qui vaut :

$$\frac{x_2x_3 - 2x_2 - 2x_3 + 4 + x_1x_3 - 2x_1 - 2x_3 + 4 + x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4}{(x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4)(x_3 - 2)}$$

donc en simplifiant :

$$\begin{aligned}\frac{x_1x_2 + x_2x_2 + x_2x_3 - 4(x_1+x_2+x_3) + 12}{x_1x_2x_3 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 4(x_1+x_2+x_3) - 8} &= \frac{1 - 4(-2) + 12}{-1 - 2 \times 1 + 4(-2) - 8} \\ &= -\frac{21}{19}\end{aligned}$$

À retenir

Les relations coefficients-racines se retrouvent facilement pour des polynômes de degré raisonnable. Il est conseillé de refaire le raisonnement à chaque fois.

Exercice 9 –

Si $|\xi| \leq 1$, le résultat est clair car $\max\limits_{0\leq k\leq n-1} |a_k|$ est un réel positif. Supposons maintenant que $|\xi| > 1$.
On sait que ξ est une racine de P donc :

$$a_0 + a_1\xi + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1} + \xi^n = 0$$

ce qui implique que :

$$\xi^n = -a_0 - a_1\xi + \cdots - a_{n-1}\xi^{n-1}$$

donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\xi|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|\xi|^k$$

Notons :

$$M = \max_{0\leq k\leq n-1} |a_k|$$

On a alors :

$$|\xi|^n \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k = M\frac{|\xi|^n - 1}{|\xi| - 1}$$

car $|\xi| \neq 1$. En particulier, on a :

$$|\xi|^n \leq M \frac{|\xi|^n}{|\xi| - 1}$$

En simplifiant par $|\xi|^n \neq 0$, on a :

$$1 \leq \frac{M}{|\xi| - 1}$$

donc par positivité de $|\xi| - 1$:

$$|\xi| - 1 \leq M$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 10 –

1. Supposons que B divise A_n. Sachant que 1 est racine de B alors 1 est racine de A_n donc $A_n(1)$ est nul donc $3^n - 3 = 0$ donc $n = 1$.

   Réciproquement si $n = 1$ alors $A_1(X) = 0$ et B divise bien le polynôme nul. Ainsi, B divise A_n si et seulement si $n = 1$.

   > **À retenir**
   >
   > Si un polynôme P divise un polynôme Q alors toute racine de P est racine de Q.

2. D'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

   $$A_n = BQ_n + R_n$$

   et vérifiant $\deg(R_n) < \deg(B) = 3$. Ainsi, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

   $$R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$$

   Les racines de B sont 1 (racine évidente), i et $-i$ (après factorisation par $X - 1$, c'est évident). A l'aide de l'égalité donnée par le théorème, et en évaluant en 1, i et $-i$, on obtient :

   $$\begin{cases} a_n + b_n + c_n &= 3^n - 3 \\ -a_n + ib_n + c_n &= (-1)^{n+1} - 1 \\ -a_n - ib_n + c_n &= (-1)^{n+1} - 1 \end{cases}$$

   A l'aide des opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, le système est équivalent à :

   $$\begin{cases} a_n + b_n + c_n &= 3^n - 3 \\ (i+1)ib_n + 2c_n &= 3^n + (-1)^{n+1} - 4 \\ -2ib_n &= 0 \end{cases}$$

   En remontant les calculs, on obtient :

   $$R_n(X) = \frac{1}{2}\left((3^n + (-1)^n - 2)X^2 + 3^n + (-1)^{n+1} - 4\right)$$

Exercice 11 –

1. Si a est racine de P alors $P(a) = 0$. D'après $(*)$, on a alors :

$$P((a+1)^2 - 1) = P(a)P(a+2) = 0$$

et

$$P((a-1)^2 - 1) = P(a-2)P(a) = 0$$

donc $(a+1)^2 - 1$ et $(a-1)^2 - 1$ sont racines de P.

2. **a)** Pour tout entier $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = (a_n + 1)^2 - 1$$

Si a_n est racine de P, a_{n+1} aussi d'après la question précédente. Par hypothèse a_0 est une racine. Une récurrence immédiate permet de montrer que pour tout entier $n \geq 0$, a_n est une racine de P.

b) Supposons $a_0 > 0$. Soit $n \geq 0$ tel que $a_n > 0$. Alors :

$$a_n + 1 > 1$$

donc :

Stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$

$$(a_n + 1)^2 > 1$$

ce qui implique que :

$$a_{n+1} = (a_n + 1)^2 - 1 > 0$$

Par principe de récurrence, on en déduit que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs.

Pour tout entier $n \geq 0$,

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 2a_n + 1 - 1 - a_n = a_n^2 + a_n > 0$$

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

c) Supposons par l'absurde que P admette une racine $a_0 > 0$. D'après les questions précédentes, on en déduit que, pour tout $n \geq 0$, a_n est une racine de P et les a_n sont deux à deux distincts car $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. Ainsi, P admet une infinité de racines donc P est nul ce qui est faux. Ainsi, P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

À retenir

Un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

d) Par l'absurde, si -1 est racine de P alors $(-1-1)^2 - 1 = 3$ l'est aussi ce qui est absurde d'après la question précédente. Ainsi, -1 n'est pas racine de P.

e) La propriété est vraie pour $n = 0$ car $2^0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$. Alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 1 &= (a_n + 1)^2 \\ &= ((a_0 + 1)^{2^n})^2 \\ &= (a_0 + 1)^{2^n \times 2} \\ &= (a_0 + 1)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$. Par principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier $n \geq 0$,

$$a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$$

3. On sait que :

$$\forall n \geq 0,\ a_n = (a_0 + 1)^{2^n} - 1$$

Si $|a_0 + 1| \neq 1$ alors la suite de terme général $|a_0 + 1|^{2^n}$ est strictement monotone ($a_0 \neq -1$) donc :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq m \Longrightarrow a_n \neq a_m$$

ce qui implique que P admet une infinité de racines donc P est nul, ce qui est faux. Ainsi, $|a_0 + 1| = 1$.

4. Si le degré de P est strictement positif alors P admet au moins une racine. Supposons que P admette une racine complexe a non nulle. D'après la question précédente, on a :

$$|a + 1| = 1 = |a - 1|$$

On en déduit que le point M d'affixe a appartient aux cercles de centres $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ de rayon 1 donc M est l'origine ce qui implique que $a = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, P admet au moins une racine et aucune racine non nulle donc P a pour unique racine 0.

5. D'après la question précédente, les seules solutions envisageables sont les polynômes constants non nuls et ceux du type cX^d avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $c \neq 0$ (on peut toujours factoriser les polynômes sur $\mathbb{C}$).

Réciproquement, si $P = cX^d$ avec $c \neq 0$ et $d \in \mathbb{N}$, l'égalité :

$$P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1)$$

est équivalente à $c(X^2 - 1)^d = c^2(X^2 - 1)^d$. Celle-ci est vérifiée si et seulement si $c^2 = c$ donc si et seulement si $c = 1$ ($c \neq 0$).

Finalement les solutions de $(*)$ sont les monômes X^d avec $d \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 –

1. Faux. Penser à $X^2 - 1$.

2. Vrai. Il suffit d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires en remarquant que les limites de $x \mapsto P(x)$ en $\pm\infty$ sont opposées.

3. Vrai. C'est une conséquence du théorème de Rolle.

28 Arithmétique des polynômes

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $2X + 2$ est un PGCD de $X + 1$ et $(X + 1)^3$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $(X + 1) \wedge (X + 1)^3 = 2X + 2$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $(X + 1) \wedge (X + 1)^3 = X + 1$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Énoncer et prouver le lemme de Gauss.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Déterminer $A \wedge B$ où $A(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$ et $B(X) = X^2 + 4X + 3$.

Exercice 4 –

Déterminer un PGCD de $A(X) = X^3 - 3X + 2$ et $B(X) = X^2 + 4X + 4$ en utilisant une factorisation.

Pour aller plus loin

Exercice 5 –

Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A et B ne sont pas premiers entre eux.
2. Il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$, non nuls, tels que $AU + BV = 0$, $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.

Exercice 6 –

Soit m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si m divise n, $X^m - 1$ divise $X^n - 1$. Étudier la réciproque.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

1. $(X^5 + 2X^3 + X^2 + 2) \wedge (X^4 + X^3 + 3X^2 + 2X + 2) = X^2 + 2$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $(X^5 + 2X^3 + X^2 + 2) \wedge (X^4 + X^3 + 3X^2 + 2X + 2) = X^2 + 4$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $(X^7 - 9X^4) \wedge (X^4 + X^3) = X - 2$.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $2X + 2$ est un PGCD de $X + 1$ et $(X + 1)^3$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. $(X + 1) \wedge (X + 1)^3 = 2X + 2$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. $(X + 1) \wedge (X + 1)^3 = X + 1$.	☒ Vrai	☐ Faux

Cours

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que A ou B soit non nul.

- On appelle PGCD de A et B tout diviseur commun à A et B de degré maximal. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
- On appelle PPCM de A et B tout multiple commun à A et B de degré minimal. Un seul est unitaire, on le note $A \vee B$.
- Pour tout polynôme D non nul, D divise A et B si et seulement si D divise un PGCD de A et B.
- Pour tout polynôme M non nul, M est un multiple de A et B si et seulement si M est un multiple d'un PPCM de A et B.
- Si A et B sont unitaires alors :

$$AB = (A \wedge B)(A \vee B)$$

- Si $A \wedge B = 1$, on dit que A et B sont *premiers entre eux*.

Exercice 2 –

Cours – **Lemme de Gauss**.

Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$. Si P et Q sont premiers entre eux et si P divise QR alors P divise R.

Prouvons ce résultat. D'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que :

$$PU + QV = 1$$

donc :

$$PUR + QVR = R$$

Or P divise clairement PUR et P divise QR par hypothèse donc divise QVR. Ainsi, P divise R.

Cours – Théorème de Bézout.
Si D est un PGCD de deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ alors il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$D = PU + QV$$

On appelle cette égalité une *relation de Bézout*.

Dans le cas où les polynômes sont premiers entre eux, les assertions suivantes sont en fait équivalentes :

- $P \wedge Q = 1$.
- $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2,\ PU + QV = 1$.

Exercice 3 –
On applique l'algorithme d'Euclide :

- $X^3 + 2X^2 - X - 2 = (X^2 + 4X + 3)(X - 2) + 4X + 4$.
- $X^2 + 4X + 3 = (4X + 4)\left(\frac{X}{4} + \frac{3}{4}\right)$.

Le dernier reste non nul est $4X + 4$ et sachant que l'on souhaite obtenir un PGCD unitaire, on en déduit que :

$$(X^3 + 2X^2 - X - 2) \wedge (X^2 + 4X + 3) = X + 1$$

Méthode
Soit (A, B) un couple de polynômes non nuls tel que $\deg(A) \geq \deg(B)$.

- On pose $R_0 = A$ et $R_1 = B$.
- On définit R_2 comme étant le reste de la division euclidienne de R_0 par R_1.
- On définit R_3 comme étant le reste de la division euclidienne de R_1 par R_2 et ainsi de suite...
- La suite $(R_k)_{k \geq 0}$ créée de cette manière est donc une suite de polynômes dont les degrés décroissent strictement. Il existe alors un rang n tel que R_n soit le polynôme nul.
- Le polynôme R_{n-1} est alors un PGCD de A et B. Il suffit de le diviser par son coefficient dominant pour obtenir $A \wedge B$.

Exercice 4 –

On remarque que 1 est racine évidente de A. De plus $A'(X) = 3X^2 - 3$ donc 1 est racine de A'. Ainsi, 1 est au moins racine double de A et sachant que A est unitaire, il existe un réel λ tel que :

$$A(X) = (X - 1)^2(X - \lambda)$$

En évaluant en 0, on en déduit que $\lambda = -2$. Finalement :

$$A(X) = (X - 1)^2(X + 2)$$

Or $B(X) = (X + 2)^2$. Il est alors clair que $A \wedge B = X + 2$.

À retenir

Factoriser deux polynômes permet d'obtenir un PGCD.

Exercice 5 –

- Supposons que A et B ne sont pas premiers entre eux. Notons $D = A \wedge B$ (dont le degré vaut au moins 1). Il existe alors deux polynômes A_1 et B_1 tels que $A = DA_1$, $B = DB_1$ et vérifiant :

$$1 \leq \deg(A_1) < \deg(A) \text{ et } 1 \leq \deg(B_1) < \deg(B)$$

  On remarque alors facilement que :

$$AB_1 - BA_1 = 0$$

  donc en posant $U = B_1$ et $V = -A_1$, on obtient bien le résultat souhaité (la condition sur les degrés est bien vérifiée).

- Supposons maintenant l'existence de $U, V \in \mathbb{C}[X]$, non nuls, tels que $AU + BV = 0$, $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$. Soit $D = A \wedge B$. Il existe deux polynômes premiers entre eux A_1 et B_1 tels que $A = DA_1$, $B = DB_1$. On sait que $AU = -BV$ donc :

$$DA_1U = -DB_1V$$

  Or D est non nul donc :

$$A_1U = -B_1V$$

  Or A_1 est premier avec B_1 donc A_1 divise V d'après le lemme de Gauss. On en déduit que :

$$\deg(A_1) \leq \deg(V) < \deg(A)$$

  Or $A = DA_1$ donc le degré de D vaut au moins 1 ce qui implique que A et B ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 6 –

- Supposons que m divise n. Il existe donc un entier naturel non nul d tel que $n = md$. Posons $P = X^m$. On a alors :

$$X^n - 1 = X^{md} - 1 = (X^m)^d - 1^d = P^d - 1^d$$

  On en déduit que :

  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

$$X^n - 1 = (P-1)(P^{d-1} + P^{d-2} + \cdots + 1)$$

  donc $P - 1 = X^m - 1$ divise $X^n - 1$.

- Supposons maintenant que $X^m - 1$ divise $X^n - 1$. Les racines de $X^m - 1$ sont donc racines de $X^n - 1$ donc les racines m-ièmes de l'unité sont des racines n-ièmes de l'unité. Or $e^{2i\pi/m}$ est une racine m-ième de l'unité donc :

$$e^{2i\pi n/m} = (e^{2i\pi/m})^n = 1$$

  On en déduit que $\frac{n}{m}$ est un entier relatif donc m divise n.

À retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2ik\pi$$

Exercice 7 –

Il suffit d'appliquer l'algorithme d'Euclide pour les deux premières réponses. Pour la troisième : il est clair que 2 n'est pas racine des deux polynômes donc $X - 2$ n'est pas un diviseur de ceux-ci.

1. $(X^5 + 2X^3 + X^2 + 2) \wedge (X^4 + X^3 + 3X^2 + 2X + 2) = X^2 + 2$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $(X^5 + 2X^3 + X^2 + 2) \wedge (X^4 + X^3 + 3X^2 + 2X + 2) = X^2 + 4$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. $(X^7 - 9X^4) \wedge (X^4 + X^3) = X - 2$. ☐ Vrai ☒ Faux

29 Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Un polynôme de degré 2 est toujours irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Un polynôme de degré 2 peut être irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Un polynôme de degré 2 peut être irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

1. Rappeler, pour $n \geq 1$, la factorisation irréductible de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$.
2. Donner la factorisation irréductible de $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Factoriser $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 –

Factoriser $X^4 + 16$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 –

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $4X^4 + 3X^2 + 1$.
3. Déterminer deux diviseurs non triviaux de 40301.

Exercice 6 –

Soit $P(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$.

1. Déterminer une racine rationnelle de P.
2. Déterminer la factorisation irréductible de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Donner la décomposition de $P(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer la factorisation irréductible de :

$$P(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n$$

dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

On considère $P(X) = X^3 - X + 1$.

1. P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Un polynôme de degré 2 est toujours irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. ☐ Vrai ☒ Faux
2. Un polynôme de degré 2 peut être irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Un polynôme de degré 2 peut être irréductible dans $\mathbb{C}[X]$. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si il est non constant et si ses seuls diviseurs sont 1 et P, à constante multiplicative près. On a les résultats suivants :

— Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

— Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Exercice 2 –

1. On a :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$$

Cours
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1.

2. Remarquons que :

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$X^3 - 1 = X^3 - 1^3 = (X-1)(X^2+X+1)$$

et $X^2 + X + 1$ n'admet que des racines complexes non réelles, ce qui donne le résultat.

Cours
Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1 et/ou de polynômes de degré 2 admettant des racines complexes conjuguées non réelles.

Exercice 3 –

Pour tout nombre complexe z différent de 1, on a :

$$1 + z + z^2 = \frac{1 - z^3}{1 - z}$$

On en déduit que les racines troisièmes de l'unité différentes de 1 sont racines de $1 + X + X^2$:

$\mathbb{U}_3 = \{1, j, \bar{j}\}$

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$$

donc :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - j)(X^2 - \bar{j})$$

Il suffit maintenant de trouver les racines carrées de $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$. Il est évident que $\mathrm{e}^{i\pi/3}$ et $-\mathrm{e}^{i\pi/3}$ sont ces racines. On fait de même pour $\bar{j}$. On en déduit que :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X - \mathrm{e}^{i\pi/3})(X + \mathrm{e}^{i\pi/3})(X - \mathrm{e}^{-i\pi/3})(X + \mathrm{e}^{-i\pi/3})$$

Exercice 4 –

On commence par obtenir la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. On cherche les nombres complexes z tels que $z^4 = -16$, ou encore $z^4 = 16\mathrm{e}^{i\pi}$, ce qui est équivalent à :

$$\left(\frac{z}{2\mathrm{e}^{i\pi/4}}\right)^4 = 1$$

On en déduit que les nombres complexes cherchés sont :

$\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$

$$\pm 2\mathrm{e}^{i\pi/4} \text{ et } \pm 2i\mathrm{e}^{i\pi/4} = \pm 2\mathrm{e}^{3i\pi/4}$$

Ainsi :

$$X^4 + 16 = (X - 2\mathrm{e}^{i\pi/4})(X + 2\mathrm{e}^{i\pi/4})(X - 2\mathrm{e}^{3i\pi/4})(X + 2\mathrm{e}^{3i\pi/4})$$

Posons :

$$z = 2\mathrm{e}^{i\pi/4} \text{ et } \omega = 2\mathrm{e}^{3i\pi/4}$$

Alors :

$$\overline{z} = 2e^{-i\pi/4} = -2e^{3i\pi/4}$$

et :

$$\overline{\omega} = 2e^{-3i\pi/4} = -2e^{i\pi/4}$$

On en déduit que :

$$X^4 + 16 = (X - z)(X - \overline{\omega})(X - \omega)(X - \overline{z})$$

donc en réarrangeant les termes :

$$X^4 + 16 = (X^2 - 2\Re e(z)\, X + |z|^2)(X^2 - 2\Re e(\omega)\, X + |\omega|^2)$$

ce qui donne en simplifiant les calculs :

$$X^4 + 16 = (X^2 - 2\sqrt{2}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{2}X + 4)$$

À retenir

Pour tout nombre complexe z, on a :

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z})\, X + z\overline{z} = X^2 - 2\Re e(z)\, X + |z|^2$$

Exercice 5 –

1. Commençons par étudier le polynôme $4X^2 + 3X + 1$. Son discriminant vaut -7. Il admet donc deux racines complexes :

$$\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{8}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ 4x^4 + 3x^2 + 1 = 4\left(x^2 - \frac{-3 + i\sqrt{7}}{8}\right)\left(x^2 - \frac{-3 - i\sqrt{7}}{8}\right)$$

Résolvons l'équation :

$$(a + ib)^2 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{8}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Celle-ci est équivalente à :

$$a^2 - b^2 = -\frac{3}{8} \text{ et } 2ab = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

Par passage au module, on a a aussi :

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{8}\sqrt{(-3)^2 + 7} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que :

$$(a + ib)^2 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{8} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 & = & \frac{1}{2} \\ a^2 - b^2 & = & -\frac{3}{8} \\ ab & = & \frac{\sqrt{7}}{16} \end{cases}$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir :

$$(a+ib)^2 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{8} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a^2 & = & \frac{1}{16} \\ b^2 & = & \frac{7}{16} \\ ab & = & \frac{\sqrt{7}}{16} \end{array} \right.$$

De plus, a et b doivent être de même signe car $ab > 0$. Cela permet d'obtenir les deux couples solutions. On obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ x^2 - \frac{-3+i\sqrt{7}}{8} = \left(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}\right)$$

En utilisant la conjugaison, on obtient aussi une factorisation de $X^2 - \frac{-3-i\sqrt{7}}{8}$ et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ 4x^4 + 3x^2 + 1 = 4\left(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4}\right)$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4},\ -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4},\ \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4} \text{ et } -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$$

2. Posons :

$$z_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$$

Alors :

$$4X^4 + 3X^2 + 1 = 4(X - z_1)(X + z_1)(X - \overline{z_1})(X + \overline{z_1})$$

donc :

$$4X^4 + 3X^2 + 1 = 4(X^2 - 2\Re e(z_1)\,X + |z_1|^2)(X^2 + 2\Re e(z_1)\,X + |z_1|^2)$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} 4X^4 + 3X^2 + 1 &= 4\left(X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right)\left(X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right) \\ &= (2X^2 - X + 1)(2X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

3. On évalue en 10 l'égalité précédente :

$$40301 = 191 \times 211$$

Exercice 6 –

1. Soit $(p, q) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tel que $p \wedge q = 1$. Si $\frac{p}{q}$ est racine de P alors :

$$2 \times \frac{p^3}{q^3} - \frac{p^2}{q^2} - \frac{p}{q} - 3 = 0$$

donc

$$2p^3 - qp^2 - q^2p - 3q^3 = 0$$

On sait que p divise $2p^3 - qp^2 - q^2p$ donc p divise $3q^3$. Or p et q sont premiers entre eux donc p et q^3 aussi. On en déduit d'après le lemme de Gauss que p divise 3. De la même manière on montre que q divise 2. Ainsi : $p = \pm 1$ ou ± 3 et $q = \pm 1$ ou ± 2. En testant les différents cas, on trouve que $\frac{3}{2}$ est racine de P.

2. D'après la question précédente, $X - \frac{3}{2}$ divise P, donc $2X - 3$ divise P. Par division euclidienne, on obtient :

$$P(X) = (2X - 3)(X^2 + X + 1)$$

donc d'après un raisonnement effectué dans l'exercice 3 :

$$P(X) = (2X - 3)(X - j)(X - \overline{j})$$

Exercice 7 –

Remarquons que :

$$P(X) = X^2(X^2 - 6X + 9) + 9 = X^2(X - 3)^2 + 9$$

donc :

$\forall a, b \in \mathbb{C},\ a^2 + b^2 = a^2 - i^2b^2 = (a - ib)(a + ib)$

$$P(X) = (X(X - 3))^2 - (3i)^2 = (X^2 - 3X - 3i)(X^2 + 3X + 3i)$$

Le polynôme $X^2 - 3X - 3i$ a pour discriminant $9 + 12i$. On détermine alors avec la méthode usuelle ses racines carrées qui sont $\pm(2 + i)\sqrt{3}$. Posons :

$$x_1 = \frac{1}{2}(3 - (2 + i)\sqrt{3}) \text{ et } x_2 = \frac{1}{2}(3 + (2 + i)\sqrt{3})$$

On a alors :

$$X^2 - 3X - 3i = (X - x_1)(X - x_2)$$

Or les racines de $X^2 - 3X + 3i$ sont les conjuguées des racines de $X^2 - 3X - 3i$. On en déduit que :

$$P(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - \overline{x_1})(X - \overline{x_2})$$

On a alors :

$$P(X) = (X^2 - 2\Re e(x_1)\, X + |x_1|^2)(X^2 - 2\Re e(x_2)\, X + |x_2|^2)$$

ce qui donne en simplifiant les calculs :

$$P(X) = \left(X^2 - (3 - 2\sqrt{3})\, X + 6 - 3\sqrt{3}\right)\left(X^2 - (3 + 2\sqrt{3})\, X + 6 + 3\sqrt{3}\right)$$

Exercice 8 –

On résout pour commencer l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$(z + 1)^n = (z - 1)^n$$

Remarquons pour commencer que 1 n'est pas solution de l'équation ($2^n \neq 0^n$ car $n \geq 1$). Soit $z \in \mathbb{C}$ différent de 1. On a :

$$\begin{aligned}(z+1)^n = (z-1)^n &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\},\ \frac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{2ik\pi/n} \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\},\ z+1 = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}(z-1) \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\},\ z(1-\mathrm{e}^{2ik\pi/n}) = -(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}+1)\end{aligned}$$

Si $k = 0$ alors le terme de gauche vaut 0 et celui de droite vaut -2 donc l'égalité n'est pas vraie. De plus, si $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $e^{2ik\pi/n} \neq 1$. Ainsi :

D'une manière générale, avant de diviser par une quantité, il faut toujours s'assurer que celle-ci n'est pas nulle

$$\begin{aligned}(z+1)^n = (z-1)^n &\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\},\ z(1-\mathrm{e}^{2ik\pi/n}) = -(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}+1) \\ &\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\},\ z = \frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}+1}{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}-1}\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que :

On utilise la méthode de l'angle moitié

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}+1}{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}-1} &= \frac{\mathrm{e}^{ik\pi/n}}{\mathrm{e}^{ik\pi/n}}\,\frac{\mathrm{e}^{ik\pi/n}+\mathrm{e}^{-ik\pi/n}}{\mathrm{e}^{ik\pi/n}-\mathrm{e}^{-ik\pi/n}} \\ &= \frac{2\cos(k\pi/n)}{2i\sin(k\pi/n)} \\ &= -i\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{-i\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)},\ k \in \{1, \dots, n-1\}\right\}$$

Il suffit maintenant de déterminer le coefficient dominant de P pour obtenir sa factorisation en produit d'irréductibles. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-1}X^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-(-1)^{n-k})X^k$$

On remarque que le terme d'indice $k = n$ s'annule, ce qui donne :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(1-(-1)^{n-k})X^k$$

Le coefficient dominant de P est donc :

Bien vérifier que le coefficient est non nul !

$$\binom{n}{n-1}(1-(-1)^{n-(n-1)}) = 2n \neq 0$$

On en déduit la factorisation suivante de P :

$$P(X) = 2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}\right)$$

Exercice 9 –

1. Faux. Il est de degré $3 > 2$.
2. Vrai. Supposons par l'absurde que ce polynôme ne soit pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Alors il admet un polynôme diviseur de degré 1 (les diviseurs non triviaux peuvent être de degré 1 ou 2 et P est de degré 3 ce qui ne laisse pas le choix) et donc une racine rationnelle. Soit x une telle racine. Il existe alors deux entiers relatifs, n et m, que l'on peut choisir premiers entre eux, tels que $x = \frac{n}{m}$. On a alors :
$$\frac{n^3}{m^3} - \frac{n}{m} + 1 = 0$$
donc :
$$n^3 - nm^2 + m^3 = 0$$
On en déduit que :
$$m^3 = n(-n^2 + m^2)$$
donc n divise m^3. Or n et m sont premiers entre eux donc d'après le lemme de Gauss, on en déduit que n divise m^2 puis de même, n divise m. Nécessairement, $n = \pm 1$. De même, on obtient que $m = \pm 1$. Ainsi, les seuls racines éventuelles rationnelles de P sont 1 et -1. Or il est clair que $P(1)$ et $P(-1)$ sont non nuls donc on obtient une absurdité. Ainsi, P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

30 Fractions rationnelles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\frac{1}{X(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1}$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\frac{1}{X(X+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X+2}\right)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Donner une forme irréductible de :

$$F(X) = \frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 1}$$

Exercice 3 –

Soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, non nuls et premiers entre eux, tels que $\deg(P) < \deg(Q)$. On pose :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

Soit $a \in \mathbb{K}$ une racine simple de Q. Dans la décomposition en éléments simples de $F(X)$, il y a alors un terme de la forme :

$$\frac{\lambda}{X - a}$$

1. Donner la valeur de λ en fonction de P et Q'.
2. On peut écrire $Q(X) = (X - a)H(X)$ où H est un polynôme tel que $H(a) \neq 0$. Donner la valeur de λ en fonction de P et de H.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Décomposer en éléments simples :

$$F(X) = \frac{1}{(X + 1)(X + 2)(X^2 + 1)}$$

Exercice 5 –

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

2. Déterminer :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 6 –

1. Décomposer en élément simples :

$$\frac{1}{(X-1)^2(X^2-2X+5)}$$

2. Calculer pour $x \in [0,1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2(t^2-2t+5)} \mathrm{d}t$$

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Soit $n \geq 2$. Donner la décomposition en éléments simples de :

$$F(X) = \frac{1}{X^n - 1}$$

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ tel que $\deg(F) \geq 0$. Alors $F \in \mathbb{K}[X]$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Il existe $F \in \mathbb{K}(X)$ tel que $F^2 = X$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $\frac{1}{X(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1}$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. $\frac{1}{X(X+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X+2}\right)$. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

Remarquons que :

$$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) \text{ et } X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$$

Ainsi :

$$F(X) = \frac{X-2}{X+1}$$

et $(X-1) \wedge (X+1) = 1$, ce qui donne le résultat.

Exercice 3 –

1. On a :

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

Prouvons ce résultat. D'après la formule de Taylor, sachant que a est un pôle simple de F et que la fraction est irréductible, on peut écrire :

$$Q(X) = (X-a)Q'(a) + (X-a)^2 R(X)$$

où $R \in \mathbb{K}[X]$ et $Q'(a) \neq 0$. On en déduit alors que :

$$(X-a)F(X) = \frac{(X-a)P(X)}{(X-a)Q'(a) + (X-a)^2 R(X)} = \frac{P(X)}{Q'(a) + (X-a)R(X)}$$

On obtient le résultat par évaluation en a.

À retenir

a est appelé un pôle simple de F.

2. On a :

$$\lambda = \frac{P(a)}{H(a)}$$

Exercice 4 –

D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

On a :

$$(X+1)F(X) = a + \frac{b(X+1)}{X+2} + \frac{(cX+d)(X+1)}{X^2+1}$$

En évaluant en -1, on en déduit que :

$$a = \frac{1}{2}$$

En considérant $(X+2)F(X)$, on obtient de même que :

$$b = -\frac{1}{5}$$

Remarquons aussi que :

$$XF(X) = \frac{X}{(X+1)(X+2)(X^2+1)} = \frac{aX}{X+1} + \frac{bX}{X+2} + \frac{cX^2+dX}{X^2+1}$$

Le calcul de la limite en $+\infty$ implique que :

$$0 = a + b + c$$

donc

$$c = -a - b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = -\frac{3}{10}$$

L'évaluation en 0 permet d'obtenir d :

$$F(0) = a + \frac{b}{2} + d = \frac{1}{2}$$

donc

$$d = \frac{1}{2} - a - \frac{b}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

Finalement :

$$F(X) = \frac{1}{2(X+1)} - \frac{1}{5(X+2)} + \frac{-\frac{3}{10}X + \frac{1}{10}}{X^2+1}$$

Méthode

Pour déterminer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, Il ne faut pas hésiter à :

— Évaluer en certaines valeurs.

— Utiliser des limites en $\pm\infty$.

Exercice 5 –

1. L'existence de ces réels est assurée par le théorème de décomposition en éléments simples. Posons :

$$F(X) = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$$

Alors :

$$XF(X) = \frac{1}{(X+1)(X+2)} = a + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX}{X+2}$$

En évaluant en 0, on obtient :

$$a = \frac{1}{2}$$

En réitérant ce procédé avec $(X+1)F(X)$ et $(X+2)F(X)$, on obtient :

$$b = -1 \text{ et } c = \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+2}$$

2. Soit $N \geq 1$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+2}\right]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{2}\right)$$

par télescopage. On a donc :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

À retenir

La décomposition en éléments simples permet de faire apparaitre des termes télescopiques.

Exercice 6 –

1. Le polynôme $X^2 - 2X + 5$ n'a pas de racines réelles. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe quatre réels a, b, c, d tels que :

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)^2(X^2-2X+5)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2-2X+5}$$

On a :

$$(X-1)^2 F(X) = a(X-1) + b + (X-1)^2 \frac{cX+d}{X^2-2X+5}$$

donc en évaluant en 1, on obtient $b = \frac{1}{4}$. En évaluant en 0 et en 2 la première égalité, on obtient alors :

$$\frac{1}{5} = -a + \frac{1}{4} + \frac{d}{5} \quad \text{et} \quad \frac{1}{5} = a + \frac{1}{4} + \frac{2c+d}{5}$$

ou encore en multipliant par 20 les égalités :

$$-20a + 4d + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 20a + 8c + 4d + 1 = 0$$

De plus, on a :

$$XF(X) = \frac{X}{(X-1)^2(X^2-2X+5)} = \frac{aX}{X-1} + \frac{bX}{(X-1)^2} + \frac{(cX+d)X}{X^2-2X+5}$$

Un argument de passage à la limite en $+\infty$ implique l'égalité suivante :

$$0 = a + c$$

Il suffit donc de résoudre :

$$\begin{cases} -20a + 4d + 1 &= 0 \\ 20a + 8c + 4d + 1 &= 0 \\ a + c &= 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} -20a + 4d + 1 &= 0 \\ 12a + 4d + 1 &= 0 \\ c &= -a \end{cases}$$

Les deux premières lignes impliquent que $a = 0$ donc $c = 0$ puis $d = -\frac{1}{4}$. On obtient donc finalement :

$$\frac{1}{(X-1)^2(X^2-2X+5)} = \frac{1}{4(X-1)^2} - \frac{1}{4(X^2-2X+5)}$$

2. La fonction :

$$t \longmapsto \frac{1}{(t-1)^2(t^2-2t+5)}$$

est continue sur $[0, 1[$. Soit $x \in [0, 1[$. On a :

$$\int_0^x \frac{1}{4(t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{4(t-1)}\right]_0^x = -\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4}$$

Remarquons maintenant que : Mise sous forme canonique

$$X^2 - 2X + 5 = (X-1)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{X-1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{t^2-2t+5}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1/2}{((t-1)/2)^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{t-1}{2}\right)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

L'intégrale à calculer vaut donc :

$$-\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left(\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

À retenir

Il est important de savoir déterminer une primitive d'une fonction de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + ax + b}$$

Il y a trois possibilités :

— Le trinôme a une racine réelle double : il suffit de connaitre une primitive de $\frac{u'}{u^2}$.

— Le trinôme a deux racines réelles : on décompose alors en éléments simples et on se ramène à des expressions de la forme $\frac{u'}{u}$.

— Le trinôme n'a pas de racine réelle : on se ramène à une expression de la forme $\frac{u'}{u^2+1}$.

Exercice 7 –

Les racines de $X^n - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité. On peut donc écrire :

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - e^{2ik\pi/n}}$$

où $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$. Chaque racine n-ième étant une racine simple de $P(X) = X^n - 1$, on en déduit que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\lambda_k = \frac{1}{P'(e^{2ik\pi/n})} = \frac{1}{n(e^{2ik\pi/n})^{n-1}} = \frac{e^{2ik\pi/n}}{n}$$

car $(e^{2ik\pi/n})^n = 1$. Ainsi :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X - e^{2ik\pi/n}}$$

Exercice 8 –

1. Faux. Par exemple : $F(X) = \frac{X^2-1}{X}$.
2. Faux. Supposons par l'absurde que F existe. Alors $2\deg(F) = \deg(F^2) = \deg(X) = 1$ donc le degré de F n'est pas un entier relatif ce qui est absurde.

Cours

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, avec Q non nul. Posons :

$$F = \frac{P}{Q}$$

Le degré de F, est par définition $\deg(P) - \deg(Q)$.

— Le degré d'une fraction rationnelle est indépendant de sa représentation en fraction.

— Le degré est un entier relatif si F est non nulle.

— Si F est nulle, le degré vaut $-\infty$.

31 Comparaisons de fonctions, de suites

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\ln(x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors $u_n \sim \ell$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $\sin(u_n) \sim u_n$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

1. Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1}$.
2. Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(2x) - \tan(x)$.
3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –
Prouver que :

$$\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$$

Exercice 4 –
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Déterminer trois réels a, b, c tels que, lorsque x est au voisinage de 0 :

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \circ(x^2)$$

Exercice 5 –

1. Pour tout $x \in]-1, 1[$, que vaut $\sin(\text{Arccos}(x))$?
2. En déduire que : $\text{Arccos}(x) \underset{x \to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

Exercice 6 –

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une solution α_n et que celle-ci appartient à $]0, 1[$.
2. a) Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
   b) Démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.
   c) Montrer finalement que $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

1. En utilisant la concavité de la fonction ln, établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

2. a) Prouver que la suite u est convergente.
   b) En déduire qu'il existe un réel γ appartenant à $[0, 1]$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to \infty}{=} \ln(n) + \gamma + \circ(1)$$

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} \underset{0}{=} O(x^2)$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \sim v_n$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux
5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\ln(x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Il faudrait $\ell \neq 0$. Contre-exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais $\frac{1}{n}$ n'est pas équivalent à 0 en $+\infty$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. Il faudrait que (u_n) converge vers 0. Contre-exemple : la suite constante égale à 2π. ☐ Vrai ☒ Faux
4. $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Cours

Se souvenir que :

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

1. On sait que :

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

donc :

$$\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

De plus on a :

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

donc :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x}$$

L'équivalence de fonctions est compatibles avec le produit et le quotient.

c'est-à-dire :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} x$$

2. On a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin(2x) - \tan(x) = \sin(2x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$= \frac{\sin(2x)\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)}$$

donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin(2x) - \tan(x) = \frac{\sin(x)\left[2\cos^2(x) - 1\right]}{\cos(x)}$$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

De plus on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2(x)-1}{\cos(x)} = 1 \neq 0$$

donc :

$$\frac{2\cos^2(x)-1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

Par ailleurs on a :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

donc finalement :

$$\sin(2x) - \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

3. On a :

L'équivalence n'est pas compatible avec l'addition, donc on factorise.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ (x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}\left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - 1\right]$$
$$= x^{\frac{1}{x}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - 1\right]$$

Attention, dans l'équivalent usuel de $(1+u)^\alpha - 1$ en 0, α est une constante !

De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - 1$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

donc on a, la fonction $\mapsto u\ln(1+u)$ étant continue en 0 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$$

On en déduit, puisque $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

soit encore, comme $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

Finalement, on peut donc conclure :

$$(x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{\frac{1}{x}-2}$$

Exercice 3 –

Méthode

Pour montrer que deux suites u et v sont équivalentes, on montre en général que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (dans le cas, évidemment, où les termes de la suite v sont tous non nuls à partir d'un certain rang).

On a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}\end{aligned}$$

On va maintenant chercher à établir que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!} = 0$$

Méthode

Attention. S'il est possible ici de justifier facilement que tous les termes de la somme tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on ne peut pas en déduire que la somme tend elle-même vers 0 car le nombre de termes (n en l'occurrence) tend vers $+\infty$.
On se souviendra que, quand on cherche à déterminer la limite d'une somme que l'on ne sait pas simplifier, on procède le plus souvent par encadrement.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{k!}{n!} = \frac{1}{n\,(n-1)\cdots(k+1)}$$

Comme le nombre de termes de la somme est égal à n, on voudrait un majorant négligeable devant n, ce qui n'est pas possible pour le terme $k = n - 1$.

C'est pour cette raison que l'on remarque maintenant que :

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}$$

et que :

Pour encadrer une somme, on commence par encadrer le terme général.

$$\forall n \geq 2,\ \forall k \in [\![0, n-2]\!]\,,\ 0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n\,(n-1)}$$

donc, en sommant ces $n-1$ inégalités :

$$\forall n \geq 2,\ 0 \leq \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 2,\ 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! \leq 1 + \frac{2}{n}$$

Finalement, comme on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$$

on a donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1$$

d'où l'équivalent recherché.

Exercice 4 –

On cherche à déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(a+bx+cx^2)}{x^2} = 0$$

Or on peut déjà remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x)-x}{x^2} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{f(x)-x}{x^2}\right| \leq |x|$$

On a donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2} = 0$$

d'où :

$$f(x) = x + \circ(x^2)$$

Ainsi le triplet $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ convient.

Méthode

On pouvait aussi procéder pas à pas, en remarquant que si les réels a, b, c existent effectivement, alors on doit avoir :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-a}{x} = b \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-a-bx}{x^2} = c$$

Exercice 5 –

1. Soit $x \in\ ]-1,1[$. Comme $\operatorname{Arccos}(x)$ appartient à $]0,\pi[$, $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$ est positif, donc :

On va utiliser le fait que $\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x$ lorsque $x \in\ ]-1,1[$.

$$\begin{aligned}\sin(\operatorname{Arccos}(x)) &= \sqrt{\sin^2(\operatorname{Arccos}(x))}\\ &= \sqrt{1-\cos^2(\operatorname{Arccos}(x))}\\ &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

2. On a :

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{Arccos}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

donc :

$$\operatorname{Arccos}(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos}(x))$$

Par ailleurs, d'après le résultat précédent, on a :

$$\forall x \in\ ]-1,1[,\ \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1+x}\sqrt{1-x}$$

et donc, comme $\lim_{x\to 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2} \neq 0$:

$$\sin(\operatorname{Arccos}(x)) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$$

Finalement, on a donc bien :

$$\operatorname{Arccos}(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$$

Exercice 6 –

1. La fonction f_n est une fonction polynôme dérivable sur $[0,1]$ et on a :

On va utiliser le théorème de la bijection

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) &= nx^{n-1} - n\\ &= n\left(x^{n-1}-1\right)\end{aligned}$$

donc :

$$\forall x \in [0,1[,\ f_n'(x) < 0$$

Ainsi, f_n est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $f_n([0, 1]) = [2 - n, 1]$. Comme $2 - n < 0$ si $n \geq 3$, on en déduit que f_n s'annule exactement une fois sur $[0, 1]$ en un réel α_n appartenant à $]0, 1[$ (car $f_n(0) \neq 0$ et $f_n(1) \neq 0$).

2. **a)** Soit $n \geq 3$.

> **Méthode**
>
> Pour étudier la monotonie d'une suite définie implicitement par une relation de la forme $f_n(\alpha_n) = 0$ où f_n est une fonction strictement monotone, on compare $f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ et $f_{n+1}(\alpha_n)$ (ou $f_n(\alpha_{n+1})$ et $f_n(\alpha_n)$) puis on utilise la monotonie de f_n pour conclure.

On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_n) &= \alpha_n^{n+1} - (n+1)\,\alpha_n + 1 \\ &= \alpha_n^{n+1} - \alpha_n - n\alpha_n + 1 \end{aligned}$$

et donc, comme $\alpha_n^n - n\alpha_n + 1 = 0$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_n) &= \alpha_n^{n+1} - \alpha_n - \alpha_n^n \\ &= \alpha_n^n(\alpha_n - 1) - \alpha_n \end{aligned}$$

et alors, comme $0 < \alpha_n < 1$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_n) &< 0 \\ &< f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \end{aligned}$$

Comme f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et comme α_n et α_{n+1} appartiennent à cet intervalle :

$$\alpha_n > \alpha_{n+1}$$

ce qui nous permet de conclure que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

b) Comme $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et minorée (par 0), elle converge vers une limite ℓ positive ou nulle.

Supposons alors que $\ell > 0$. Comme la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est bornée par 0 et 1, la suite $(\alpha_n^n)_{n\geq 3}$ est bornée (par 0 et 1) et donc, sans indétermination :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = \lim_{n\to+\infty} (\alpha_n^n - n\alpha_n + 1) = -\infty$$

ce qui est absurde et nous permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$$

c) On remarque que :

$$\forall n \geq 3,\ n\alpha_n = 1 + \alpha_n^n$$

et donc, comme $(\alpha_n^n)_{n\geq 3}$ est strictement positive :

$$\forall n \geq 3,\ n\alpha_n = 1 + \exp(n\ln(\alpha_n))$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, on a, comme ln tend vers $-\infty$ en 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(\alpha_n) = -\infty$$

et donc, comme exp tend vers 0 en $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$$

donc finalement :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Exercice 7 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons déjà que :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

> **Cours**
> Se souvenir que, si f est une fonction concave et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors son graphe est « en dessous » de toutes ses tangentes.

De plus la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc son graphe est « en dessous » de ses tangentes. Comme la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$, on a donc :

> L'équation de la tangente en $(a, f(a))$ au graphe d'une fonction dérivable en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$$

d'où, en prenant $x = 1 + \frac{1}{n}$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

et de même, en prenant $x = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ (qui est bien strictement positif) :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

soit encore :

$$\ln(n) - \ln(n+1) \leq -\frac{1}{n+1}$$

d'où :

$$\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$$

On a finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

2. **a)** On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right] - \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right]$$
$$= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)]$$

Comme on cherche à prouver la convergence de la suite u, mais pas à trouver sa limite, on va utiliser le théorème de la limite monotone.

et donc, d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Par conséquent, la suite u est décroissante. Montrons alors qu'elle est minorée. Toujours d'après le résultat de la question 1, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$$

et donc, en sommant ces inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{1=2}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)]$$
$$\geq \ln(n+1) - \ln(1)$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$$

La suite u est donc décroissante et minorée, donc elle converge.

b) Remarquons que l'on cherche à établir l'existence d'un réel $\gamma \in [0, 1]$ tel que :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + \circ(1)$$

ce qui revient à prouver que la suite u converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.
D'après le résultat de la question précédente, la suite u converge vers une limite γ positive ou nulle et on a alors :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + \circ(1)$$

Montrons maintenant que $\gamma \leq 1$ et déterminons pour cela une majoration de la suite u.
Encore d'après le résultat de la question 1, on a :

$$\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

et donc, en sommant ces inégalités :

$$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} [\ln(k) - \ln(k-1)]$$
$$\leq \ln(n)$$

d'où :

$$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n)$$

donc :

$$\forall n \geq 2,\ u_n \leq 1$$

On en déduit que $\gamma \leq 1$, ce qui nous permet de conclure qu'il existe un réel γ appartenant à $[0, 1]$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$$

Cours

Se souvenir que, si u et v sont deux suites réelles, alors :

$$u_n \underset{+\infty}{=} v_n + \circ(1) \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$

Exercice 8 –

1. Faux. On peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Les termes sont tous compris entre 0 et 1 donc on majore par le terme $k = 1$.

ce qui prouve, par encadrement (les termes sont tous positifs) que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \neq 1$$

À retenir

On se souviendra (résultat hors programme) que l'on a en fait :

$$n! = \circ(n^n) \quad \text{et } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

2. Faux. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}}{x^2} = 2x + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}}{x^2} = +\infty$$

Cours

Se souvenir que, si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de 0 et si g ne s'annule pas, alors $f \underset{0}{=} O(g)$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de 0.

3. Faux. Par exemple, $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ ne sont pas équivalents, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

4. Faux. Par exemple, $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} ((n+1) - n) = 1$.

À retenir

On retiendra qu'il n'y a pas de lien en général entre l'équivalence de deux suites (ou de deux fonctions) et la limite de la différence. Tout peut se produire.

5. Vrai. Comme la suite u diverge vers $+\infty$ et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, la suite v diverge aussi vers $+\infty$ et il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > 1 \quad \text{et} \quad v_n > 1$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0,\ \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} &= \frac{\ln(v_n) + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}\end{aligned}$$

On a en outre :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(v_n)} = 0$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1$$

ce qui permet de conclure que : $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

À retenir

On démontrerait plus généralement et on retiendra que, si u et v sont deux suites strictement positives, équivalentes et admettant une limite différente de 1, alors :

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$$

32 Développements limités

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Si $f(x) \underset{0}{=} 3x^2 + 2x^3 + \circ(x^3)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x^2$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si f est une fonction paire et admet un développement limité à l'ordre n, la partie régulière n'est constituée que de monômes de degrés pairs. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\ln(1-x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. Si $f(x) \underset{0}{=} a + bx + \circ(x)$ et $g(x) \underset{0}{=} a' + b'x + \circ(x)$, alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$f(x)g(x) = aa' + \left(a'b + ab'\right)x + bb'x^2 + \circ(x^2)$$

Exercice 2 –

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sqrt[3]{1+x^2} - \cos(x)$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\frac{\sin^2(x)}{1-x}$.

Exercice 3 –

En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{\ln(1+x^3)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]^x$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{2n}\right) + \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 5 –

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Prouver que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note encore g la fonction ainsi prolongée.
2. Prouver que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

On considère la fonction $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Prouver que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f et f^{-1} ont toutes deux un développement limité à l'ordre 4. On note alors :

$$f^{-1}(x) \underset{0}{=} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \circ(x^4)$$

3. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de f puis, en remarquant que $f^{-1}(f(x)) = x$, en déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de f^{-1}.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

1. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x + x^2$ alors $f(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \circ(x^2)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et si $f(x) \underset{0}{=} 3x - 2x^2 + \circ(x^2)$ alors $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$ et $f''(0) = -2$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 alors f est deux fois dérivable en 0. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Si $f(x) \underset{0}{=} 3x^2 + 2x^3 + \circ(x^3)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x^2$. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 et admettant un développement limité à l'ordre n en x_0, de la forme :

$$f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k + \circ((x - x_0)^n)$$

Si $a_p \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a_p (x - x_0)^p$$

2. Si f est une fonction paire et admet un développement limité à l'ordre n, la partie régulière n'est constituée que de monômes de degrés pairs. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Le développement limité à l'ordre 3 en 0 proposé est celui de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ et non de $x \mapsto \ln(1 - x)$. ☐ Vrai ☒ Faux
4. Pour obtenir un développement limité à l'ordre 2 de fg en 0, il faudrait utiliser les développements limités à l'ordre 2 de f et g. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, de la forme :

$$f(x) \underset{0}{=} P_n(x) + \circ(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{0}{=} Q_n(x) + \circ(x^n)$$

fg admet un développement limité à l'ordre n, de la forme $f(x)g(x) \underset{0}{=} T_n(x) + \circ(x^n)$ où T_n est la troncature de P_nQ_n à l'ordre n, c'est-à-dire le polynôme obtenu en ne conservant que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme P_nQ_n.

Exercice 2 –

Cours – Développements limités des fonctions usuelles.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \circ(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$
- $\ln(1 + x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \circ(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \circ(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \circ(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \circ(x^n) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$

Cours – Développements limités des fonctions usuelles.

- $$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \circ(x^n)$$
$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \circ(x^n)$$
- $$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1})$$
- $$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2})$$
- $$\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1})$$
- $$\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2})$$
- $$\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \circ(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2})$$
- $$\tan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \circ(x^4)$$

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est définie sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall x \in\,]-1,1[,\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2}$$

De plus on a :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3) \quad \text{et} \quad \ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$$

donc :

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$$

2. On a :

$$\sqrt[3]{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{u}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{u^2}{2} + \circ(u^2)$$

$\sqrt[3]{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{3}}$.

donc, comme $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$:

$$\sqrt[3]{1+x^2} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{9} + \circ(x^4)$$

De plus on a :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

donc :

$$\sqrt[3]{1+x^2}-\cos(x) \underset{0}{=} \frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{72}x^4 + \circ(x^4)$$

3. On a :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)$$

donc :

$$\sin^2(x) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + \circ(x^4)$$

On obtient la partie régulière en tronquant $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2$ à l'ordre 4.

De plus on a :

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \circ(x^4)$$

d'où :

$$\frac{\sin^2(x)}{1-x} \underset{0}{=} x^2 + x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \circ(x^4)$$

Exercice 3 –

- On sait que :

$$\lim_{x\to 0} x^3 = 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

donc :

$$\ln(1+x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$$

On en déduit :

$$\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{\ln(1+x^3)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}$$

De plus on a :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2) \quad \text{et} \quad \sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

On ne peut additionner les équivalents, donc on cherche un développement limité du numérateur, à l'ordre 3 compte tenu du dénominateur.

d'où :

$$x\cos(x) - \sin(x) \underset{0}{=} -\frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$$

On en déduit :

$$\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{\ln(1+x^3)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{3}$$

donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{\ln(1+x^3)} = -\frac{1}{3}$$

Méthode

Quand on souhaite calculer une limite et qu'il n'est pas possible d'utiliser les limites usuelles ou les équivalents (notamment quand il y a une somme et qu'une factorisation ne donne rien d'utile), il est en général efficace d'utiliser un développement limité.
Dans le cas où l'on utilise les développements limités pour calculer la limite d'un quotient, on commencera toujours par s'intéresser au dénominateur, car c'est lui qui permettra de savoir à quel ordre on doit procéder pour le numérateur.

- On peut déjà remarquer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]=1 \qquad (32.2)$$

La puissance dépendant de x, on souhaite utiliser l'écriture exponentielle; il faut donc au préalable s'intéresser au signe de l'expression.

donc il existe $A>0$ tel que :

$$\forall x>A,\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}>0$$

On a alors :

$$\forall x>A,\ \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]^x=\exp\left(x\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\right)$$

De plus, d'après (32.2), on a :

$\ln(u)\underset{u\to1}{\sim}u-1$

$$x\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$$

Or on sait que :

Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, on utilise les développements limités usuels en 0.

$$\sin(u)\underset{0}{=}u+\circ(u) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+u}\underset{0}{=}1+\frac{u}{2}+\circ(u)$$

donc on a :

$$\sin(u)+\sqrt{1+u}-1\underset{0}{=}\frac{3u}{2}+\circ(u)$$

On en déduit :

$$\sin(u)+\sqrt{1+u}-1\underset{u\to0}{\sim}\frac{3u}{2}$$

et donc, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$:

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{3}{2x}$$

On a donc :

$$x\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{3}{2}$$

et ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{3}{2}$$

On peut maintenant conclure, comme la fonction exponentielle est continue en $\frac{3}{2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]^x=e^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 4 –

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sqrt{n}\left[\sin\left(\frac{1}{2n}\right)+1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right]$$

On factorise pour essayer de trouver un équivalent.

Par ailleurs, on sait que :

Comme on ne peut pas sommer les équivalents usuels, on utilise les développements limités.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

et :

$$\sin(x)\underset{0}{=}x+\circ(x^2)\quad\text{et}\quad\sqrt{1+x}\underset{0}{=}1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\circ(x^2)$$

d'où :

$$\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{2n}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad\text{et}\quad\sqrt{1+\frac{1}{n}}\underset{+\infty}{=}1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et alors :

$$\sin\left(\frac{1}{2n}\right)+1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\underset{+\infty}{=}\frac{1}{8n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement :

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme la série $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente (car $\frac{3}{2}>1$), on peut alors conclure, d'après les critères de comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 5 –

1. g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, comme $f(0)=0$, on peut remarquer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

On en déduit, comme f est dérivable en 0 :

$$\lim_{x\to0}g(x)=f'(0)$$

Cela prouve que l'on peut prolonger g en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $g(0)=f'(0)$.

2. g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

De plus, comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a donc, d'après la formule de Taylor-Young (appliquée en 0 à l'ordre 2 pour f et à l'ordre 1 pour f') :

> On cherche la limite de g' en 0 ; il y a une indétermination et f n'est pas explicitée, donc on utilise la formule de Taylor-Young.

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \circ(x^2) \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{0}{=} f'(0) + f''(0)x + \circ(x)$$

Il en découle, comme $f(0) = 0$:

$$xf'(x) - f(x) \underset{0}{=} \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \circ(x^2)$$

donc :

$$g'(x) \underset{0}{=} \frac{f''(0)}{2} + \circ(1)$$

Finalement, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2}$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, comme g est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et comme g' admet une limite finie en 0, g est donc dérivable en 0 et g' est continue en 0. Finalement g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Cours – Formule de Taylor-Young.

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur un intervalle I non réduit à un point et si $a \in I$, alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

ou, de manière équivalente :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k + \circ(h^n)$$

Exercice 6 –

1. On peut déjà remarquer que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(1 + 2x^2\right) e^{x^2}$$
$$> 0$$

Ainsi f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de la bijection et les limites données précédemment, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. f est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas, donc f^{-1} est également de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$.

Attention, la réciproque d'une fonction dérivable et bijective de I sur J n'est pas toujours dérivable sur J.

Par conséquent f et f^{-1} ont toutes deux un développement limité à l'ordre 4.

3. • On a :

$$e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \circ(u^2)$$

donc, comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$:

$$e^{x^2} \underset{0}{=} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \circ(x^4)$$

d'où :

$$f(x) \underset{0}{=} x + x^3 + \circ(x^4)$$

• On a :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

donc :

$$f^{-1}(f(x)) \underset{0}{=} a + bf(x) + cf^2(x) + df^3(x) + ef^4(x) + \circ(f^4(x))$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + x^3 + \circ(x^4)\\ f^2(x) &= x^2 + 2x^4 + \circ(x^4)\\ f^3(x) &= x^3 + \circ(x^4)\\ f^4(x) &= x^4 + \circ(x^4) \end{aligned}$$

En particulier une fonction négligeable devant $f^4(x)$ en 0 est donc aussi négligeable devant x^4 en 0, donc :

$$f^{-1}(f(x)) \underset{0}{=} a + bx + cx^2 + \left(b + d\right)x^3 + (2c + e)\,x^4 + \circ(x^4)$$

soit encore :

$$x \underset{0}{=} a + bx + cx^2 + \left(b + d\right)x^3 + (2c + e)\,x^4 + \circ(x^4)$$

Par unicité du développement limité à l'ordre 4 de $x \mapsto x$ en 0, on en déduit :

On a aussi $x \underset{0}{=} x + \circ(x^4)$.

$$\begin{cases} a = 0\\ b = 1\\ c = 0\\ b + d = 0\\ 2c + e = 0 \end{cases}$$

donc $(a, b, c, d, e) = (0, 1, 0, -1, 0)$ et :

$$f^{-1}(x) \underset{0}{=} x - x^3 + \circ(x^4)$$

Exercice 7 –

1. Faux. Par exemple, on a :

$$x \underset{x\to 0}{\sim} x + x^2$$

Une fonction polynôme est équivalente en 0 à son monôme de plus bas degré.

Cependant on a :

$$x \underset{0}{=} x + \circ(x^2)$$

et l'unicité du développement limité permet de conclure.

2. Faux. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on a, d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \circ(x^2)$$

donc, par unicité du développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 3 \quad \text{et} \quad f''(0) = -4$$

3. Faux. Considérons par exemple la fonction f définie par $f(0) = 0$ et :

On construit une fonction négligeable devant x^2 (d'où la présence de x^3) mais qui est susceptible de poser des problèmes de dérivabilité en 0 (d'où la présence d'une fonction n'ayant pas de limite en 0).

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{f(x)}{x^2}\right| \leq |x|$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

donc :

$$f(x) = \circ(x^2)$$

Ainsi f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. Cependant, on peut remarquer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f'(x)| \leq 3x^2 + |x|$$

On en déduit, encore d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or on montre comme précédemment que :

$$\lim_{x \to 0} 3x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Comme en outre la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 (car sin n'a pas de limite en $+\infty$), il en découle que $x \longmapsto \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0, et donc que f' n'est pas dérivable en 0.

Cours

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

- f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.
- f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.
- Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0.
- Si $n \geq 2$, il existe des fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en x_0 mais qui ne sont pas n fois dérivables en x_0.

33 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(0) = 2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. On peut multiplier des vecteurs dans un espace vectoriel. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont le degré est inférieur ou égal à n) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 3 –

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non vide et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4 –

Les ensembles suivants sous-ils des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence ?

1. $A = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\geq 0} \text{ bornée}\}$
2. $B = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\geq 0} \text{ géométrique}\}$
3. $C = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est croissante}\}$
4. $D = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1\}$
5. $E = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est paire}\}$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Montrer que les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $F_1 = \{(3a + b, a - b, b + 2c),\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.

Exercice 6 –
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F l'ensemble défini par :

$$F = \left\{f \in E,\ \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 7 –
Montrer que F défini par :

$$F = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \geq 0,\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, C l'ensemble des fonctions croissantes de E et Δ l'ensemble défini par :

$$\Delta = \{f - g,\ (f,g) \in C^2\}$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 9 –
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

1. L'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\text{Vect}((1,1),(3,6)) = \text{Vect}((1,1),(0,3))$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Le polynôme nul n'appartient pas à cette partie de $\mathbb{K}[X]$. ☐ Vrai ☒ Faux
2. On peut multiplier des vecteurs dans un espace vectoriel. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

— $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$.

— Le polynôme nul appartient à $\mathbb{K}_n[X]$.

— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (P,Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$,

Attention, un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas de degré n mais de degré inférieur ou égal à n

$$\lambda P + Q \in \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad \deg(\lambda P + Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(Q)) \leq n$$

donc $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Ainsi, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Méthode

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer les trois points suivants :

1. F est inclus dans E.
2. Le vecteur nul de E appartient à F.
3. Pour tout $(x,y) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \in F$.

Exercice 3 –

— $\bigcap_{i \in I} E_i \subset E$.

— Pour tout $i \in I$, $0_E \in E_i$ (car E_i est un sous-espace vectoriel de E) donc :

$$0_E \in \bigcap_{i \in I} E_i$$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x,y) \in \left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)^2$.

Pour tout $i \in I$, x et y appartiennent à E_i donc $\lambda x + y$ appartient aussi à E_i (car E_i est un sous-espace vectoriel de E) et donc $\lambda x + y$ appartient à $\bigcap_{i \in I} E_i$.

Ainsi, $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4 –

1. Montrons que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   — $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   — La suite nulle est bornée donc appartient à A.
   — Soit $(u,v) \in A^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les suites u et v sont bornées donc il existe deux réels positifs M et N tels que pour tout $n \geq 0$,

   $$|u_n| \leq M \quad \text{et} \quad |v_n| \leq N$$

   Alors pour tout entier naturel n, et d'après l'inégalité triangulaire,

   $$|u_n + \lambda v_n| \leq M + |\lambda| N$$

Ainsi, $u + \lambda v$ est bornée et appartient à A.

On en déduit que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Considérons les deux suites u et v définies par :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = 1 \text{ et } v_n = 2^n$$

Les suites u et v appartiennent à B (elles sont respectivement géométriques de raisons 1 et 2). On a :

$$u_0 + v_0 = 2,\ u_1 + v_1 = 3 \text{ et } u_2 + v_2 = 5$$

Sachant que $3/2 \neq 5/3$, on en déduit que $u + v$ n'appartient pas à B. Ainsi, B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

> **À retenir**
>
> Pour montrer qu'une partie n'est pas stable par combinaison linéaire, il est important de donner un contre-exemple concret.

3. C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car la fonction exponentielle appartient à C mais pas la fonction $x \mapsto -e^x$.

4. D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car la fonction nulle n'appartient pas à D.

5. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

— $E \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

— La fonction nulle est paire sur $\mathbb{R}$.

— Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions f et g sont paires sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x,

$$f(-x) = f(x) \text{ et } g(-x) = g(x)$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$(f + \lambda g)(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = f(x) + \lambda g(x) = (f + \lambda g)(x)$$

La fonction $f + \lambda g$ est donc paire sur $\mathbb{R}$ et appartient alors à E.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

> **À retenir**
>
> L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On montre de même que l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5 –

1. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$(3a + b, a - b, b + 2c) = a(3, 1, 0) + b(1, -1, 1) + c(0, 0, 2)$$

Ainsi :

$$F_1 = \text{Vect}((3,1,0),(1,-1,1),(0,0,2))$$

donc F_1 est un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) \in F_2 \iff x = -y-z \iff (x,y,z) = (-y-z,y,z) \iff (x,y,z) = y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$$

Ainsi,

$$F_2 = \text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$$

donc F_2 est un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle sous-espace généré (ou engendré) par la famille $(x_1, \dots, x_n)$, et on note $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs cette famille :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E. Plus généralement, si A est une partie quelconque de E, $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. C'est aussi dans ce cas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6 –

— $F \subset E$ par définition de F.

— Le vecteur nul de E (la fonction nulle sur $[0,1]$) appartient à F (évident).

— Soit $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g \in F$. On a par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t &= \lambda \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

car $(f,g) \in F^2$. Ainsi $\lambda f + g \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 7 –

Notons θ la suite nulle.

— $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

— Soit $n \geq 0$. Alors par définition de la suite nulle :

$$\theta_{n+3} = 0 = \theta_{n+2} + \theta_{n+1} + \theta_n$$

Ainsi, θ appartient à F.

— Soit $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}(u+\lambda v)_{n+3} &= u_{n+3} + \lambda v_{n+3} \\ &= u_{n+2} + u_{n+1} + u_n + \lambda(v_{n+2} + v_{n+1} + v_n) \quad \text{car } (u, v) \in F^2 \\ &= (u_{n+2} + \lambda v_{n+2}) + (u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + (u_n + \lambda v_n) \\ &= (u+\lambda v)_{n+2} + (u+\lambda v)_{n+1} + (u+\lambda v)_n\end{aligned}$$

Ainsi, $u + \lambda v$ appartient à F.

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 8 –

Notons θ la fonction nulle.

— $\Delta \subset E$.

— On a $\theta = \theta - \theta$ et θ est une fonction croissante de E donc θ appartient à Δ.

— Soit $(f, g) \in \Delta^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe quatre fonctions croissantes de E, f_1, f_2, g_1 et g_2, telles que $f = f_1 - f_2$ et $g = g_1 - g_2$.

Distinguons deux cas :

Premier cas. Supposons que λ est positif. On a :

$$\lambda f + g = \lambda(f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (\lambda f_1 + g_1) - (\lambda f_2 + g_2)$$

La fonction f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$ donc λf_1 aussi car λ est positif et ainsi $\lambda f_1 + g_1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions qui le sont. De même, $\lambda f_2 + g_2$ est aussi croissante sur $\mathbb{R}$. Finalement, $\lambda f + g$ s'écrit bien comme la différence de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ donc $\lambda f + g$ appartient à Δ.

Deuxième cas. Supposons que λ est négatif. On a :

$$\lambda f + g = \lambda(f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (-\lambda f_2 + g_1) - (-\lambda f_1 + g_2)$$

La fonction f_2 est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $-\lambda f_2$ aussi car $-\lambda$ est positif et ainsi $-\lambda f_2 + g_1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions qui le sont. De même, $-\lambda f_1 + g_2$ est aussi croissante sur $\mathbb{R}$. Finalement, $\lambda f + g$ s'écrit bien comme la différence de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ donc $\lambda f + g$ appartient à Δ.

Ainsi, Δ est stable par combinaison linéaire.

On en déduit que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 9 –

Raisonnons par double implication. Exercice classique !

— Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel de E. On procède de même si $G \subset F$.

— Supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Raisonnons par l'absurde en supposant que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Il existe alors un couple de vecteurs $(f, g) \in F \times G$ tel que $f \notin G$ et $g \notin F$. Posons $x = f + g$. Sachant que f appartient à

F, il appartient à $F \cup G$. On obtient de même que g appartient à $F \cup G$. Par hypothèse, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E donc x appartient à $F \cup G$ donc appartient à F ou à G. Si x appartient à F, on a :

$$g = x - f \in F$$

car F est un sous-espace vectoriel de E. C'est absurde car g n'appartient pas à F. On obtient une absurdité du même type si x appartient à G. Ainsi, par l'absurde, on a montré que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 10 –

1. Faux. Si les deux plans sont égaux, l'intersection est alors un plan.
2. Vrai. Il suffit d'utiliser le fait que $(3,6) - 3(1,1) = (0,3)$ et le rappel de cours suivant.

Cours

Soit $n \geq 2$ et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E.
Posons $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ et pour $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$:

$$x = x_n + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

Alors on a $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$.

34 Familles libres, génératrices et bases

Le but de ce chapitre est de savoir étudier la liberté et le caractère générateur d'une famille d'un espace vectoriel. Il est important de connaitre les bases usuelles de tous les espaces vectoriels de référence. Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $((1,1),(1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $(\text{ch}, \text{sh}, \exp)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et (x, y) un couple de vecteurs de E. Sous quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) peut-on dire que les familles (x) et (x, y) sont libres ?

Exercice 3 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que :

$$0 \leq \deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$

On dit que la famille est *étagée en degré* (et qu'elle ne contient pas le polynôme nul). Montrer que cette famille est libre.

Exercice 4 –

Quels sont les bases canoniques des espaces vectoriels de référence ?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?

1. (x_1, x_2) avec $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 1, 1)$.
2. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$.
3. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -2)$.

4. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,1,0)$, $x_2 = (2,1,-3)$ et $x_3 = (1,0,1)$.

Exercice 6 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Montrer que (f, f^2, f^3) est une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 –

Écrire les sous-ensembles suivants comme des sous-espaces vectoriels engendrés puis donner une base de ces espaces :

1. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\}\cdot$
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z + y = 0\}\cdot$
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0 \text{ et } z + y = 0\}\cdot$
4. $D = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}\cdot$

Pour aller plus loin

Exercice 8 –

Déterminer une base de :

$$F = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$$

Exercice 9 –

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = |x - a|$$

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$ deux à deux distincts. Montrer que $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 10 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x)$$

Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est famille libre.

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

1. Il existe une base de $\mathbb{R}_2[X]$ ne contenant que des polynômes de degré 2. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Il existe une infinité de bases de $\mathbb{R}^2$ contenant le vecteur $(1,1)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $((1,1),(1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $(\text{ch}, \text{sh}, \exp)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. ☐ Vrai ☒ Faux

Pour la deuxième question, on peut en effet remarquer que $\exp = \text{ch} + \text{sh}$.

Exercice 2 –

- La famille (x) est libre si et seulement si x est différent du vecteur nul.
- La famille (x, y) est libre si et seulement si les vecteurs x et y sont non colinéaires, c'est-à-dire si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \neq \lambda y$ et $y \neq \lambda x$.

Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

L'exercice précédent donne deux conditions simples pour montrer la liberté d'une famille constituée d'un ou de deux vecteurs. Attention, ces critères ne fonctionnent pas pour des familles contenant au moins trois vecteurs. Une famille (x, y, z) de trois vecteurs peut être liée même si x, y et z sont non colinéaires deux à deux.

Exercice 3 –

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Supposons par l'absurde que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ n'est pas nul. On pose alors :

$$j = \max\{k \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_k \neq 0\}$$

Notons que j existe car c'est le maximum d'une partie finie et non vide de $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{j} \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

ou encore :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k P_k = -\lambda_j P_j$$

Par somme, le polynôme :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k P_k$$

est au plus de degré $\deg(P_{j-1})$ qui est strictement plus petit que $\deg(P_j)$. Nécessairement, on a donc $\lambda_j = 0$ ce qui est absurde au vu de la définition de j.

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ et la famille est donc libre.

À retenir

Le critère précédent est très utile dans les exercices. Par exemple, on peut affirmer que la famille $(1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4 –

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

— Base canonique de $\mathbb{K}^n$: $(e_1, \dots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, …, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

— Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $(E_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ où $E_{i,j}$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients son nuls excepté celui de la i-ième ligne et j-ième colonne qui vaut 1.

— Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

— Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Exercice 5 –

1. Oui car x_1 et x_2 sont non colinéaires.
2. $x_3 = x_2 - x_1$ donc la famille n'est pas libre.
3. On ne repère pas de relation évidente entre ces vecteurs. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = (0, 0, 0)$$

Cela équivaut à :

$$\begin{cases} a + 2b - c &= 0 \\ -a - b + c &= 0 \\ a + 3b - 2c &= 0 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ impliquent :

Toujours préciser les opérations utilisées lors de la résolution d'un système linéaire

$$\begin{cases} a + 2b - c &= 0 \\ b &= 0 \\ b - c &= 0 \end{cases}$$

Il vient alors que $b = 0$ puis $c = 0$ et enfin $a = 0$. La famille étudiée est donc libre.

À retenir

Ne pas trouver de relation évidente ne suffit pas à prouver la liberté. Il faut dans ce cas revenir à la définition.

Méthode

Pour résoudre un système linéaire de manière efficace, la méthode du pivot de Gauss est à privilégier.

4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a(1,1,0) + b(2,1,-3) + c(1,0,1) = (0,0,0)$$

Alors :

$$\begin{cases} a+2b+c &= 0 \\ a+b &= 0 \\ -3b+c &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+2b+c &= 0 \\ -b-c &= 0 \\ -3b+c &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+2b+c &= 0 \\ -b-c &= 0 \\ 4c &= 0 \end{cases}$$

Et ainsi $a = b = c = 0$. La famille (x_1, x_2, x_3) est donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 –

Notons θ la fonction nulle. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$af + bf^2 + cf^3 = \theta$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ae^x + b(e^x)^2 + c(e^x)^3 = 0$$

puis sachant que $e^x \neq 0$,

$$a + be^x + c(e^x)^2 = 0$$

Par passage à la limite quand x tend vers $-\infty$, on obtient $a = 0$. Ainsi, pour tout réel x, on a :

$$be^x + c(e^x)^2 = 0$$

donc en divisant par e^x (qui est non nul) :

$$b + ce^x = 0$$

Par passage à la limite quand x tend vers $-\infty$, on obtient $b = 0$ ce qui implique alors que $c = 0$. Ainsi, la famille (f, f^2, f^3) est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À retenir

Ne pas confondre f^2 et $f \circ f$.

Méthode

Pour montrer la liberté d'une famille de fonctions,

— On peut évaluer pour certaines valeurs de x.

— On peut utiliser des limites particulières.

— On peut utiliser la discontinuité (ou la non dérivabilité) en certaines valeurs de x.

— Si les fonctions sont dérivables sur l'intervalle considéré, on peut dériver avant d'évaluer.

Exercice 7 –

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in A &\iff 2x - y + z = 0\\ &\iff y = 2x + z\\ &\iff (x, y, z) = (x, 2x + z, z)\\ &\iff (x, y, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)\end{aligned}$$

Ainsi $A = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 1, 1))$, donc $(1, 2, 0)$ et $(0, 1, 1)$ forment une famille génératrice de A. De plus, $(1, 2, 0)$ et $(0, 1, 1)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre de A et forment ainsi une base de A.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in B &\iff z + y = 0\\ &\iff z = -y\\ &\iff (x, y, z) = (x, y, -y)\\ &\iff (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1)\end{aligned}$$

Ainsi $B = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$, donc $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, -1)$ forment une famille génératrice de B. De plus, $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, -1)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre de B et forment ainsi une base de B.

3. Remarquons que $C = A \cap B$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in A \cap B &\iff 2x - y + z = 0 \text{ et } z + y = 0\\ &\iff 2x = y - z \text{ et } z = -y\\ &\iff 2x = 2y \text{ et } z = -y\\ &\iff x = y \text{ et } z = -y\\ &\iff (x, y, z) = (y, y, -y)\\ &\iff (x, y, z) = y(1, 1, -1)\end{aligned}$$

Ainsi $A \cap B = \text{Vect}((1, 1, -1))$, donc $(1, 1, -1)$ forme une famille génératrice de $A \cap B$. De plus, $(1, 1, -1)$ est non nul donc forme une famille libre de $A \cap B$ et ainsi forme une base de $A \cap B$.

À retenir

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est aussi un sous-espace vectoriel de E.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que :

$$P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$$

Ainsi $P(0) = a$, $P'(0) = b$, $P'(1) = b + 2c + 3d + 4e$. On a :

$$\begin{aligned}P \in D &\iff a = b = 0 \text{ et } b + 2c + 3d + 4e = 0\\ &\iff a = b = 0 \text{ et } 2c = -3d - 4e\\ &\iff P(X) = (-3d/2 - 2e)X^2 + dX^3 + eX^4 \qquad \text{(par identification)}\\ &\iff P(X) = d(-3X^2/2 + X^3) + e(-2X^2 + X^4)\end{aligned}$$

Ainsi $D = \text{Vect}((-3X^2/2 + X^3, -2X^2 + X^4))$ (donc $-3X^2/2 + X^3$ et $-2X^2 + X^4$ forment une famille génératrice de D). De plus, $-3X^2/2+X^3$ et $-2X^2+X^4$ forment une famille libre (famille de polynômes non nuls étagée en degré) de D donc finalement forment une base de D.

Méthode

Écrire un ensemble comme un sous-espace vectoriel engendré revient souvent à résoudre un système linéaire.

Exercice 8 –

Notons (dans le même ordre), x_1, x_2, x_3 et x_4 les vecteurs engendrant l'espace F. On remarque que :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2x_4$$

Ainsi, x_4 est combinaison linéaire de x_1, x_2 et x_3. On en déduit que :

On peut gagner du temps en cherchant une combinaison linéaire (non triviale) à l'œil

$$F = \text{Vect}(x_1, x_2, x_3)$$

Montrons que (x_1, x_2, x_3) est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (0, 0, 0)$$

Alors on a :

$$(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

Ainsi,

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_1$$

On en déduit que $\lambda_1 = 0$ donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi, (x_1, x_2, x_3) est une base de F.

Exercice 9 –

Notons θ la fonction nulle.

Montrons que $(f_{a_i})_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = \theta$$

Supposons par l'absurde que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ n'est pas nul. Alors l'ensemble :

$$\{k \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_k \neq 0\}$$

est un ensemble fini non vide. Il admet donc un plus petit élément $j \in \{1, \dots, n\}$. Par définition de j, on a :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{j-1} = 0$$

Ainsi,

$$\sum_{k=j}^{n} \lambda_k f_{a_k} = \theta$$

On a donc :

$$\lambda_j f_{a_j} = -\sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k f_{a_k}$$

La fonction f_{a_j} n'est pas dérivable en a_j et λ_j est non nul par définition de j donc $\lambda_j f_{a_j}$ n'est pas dérivable en a_j. Or a_{j+1}, ..., a_n sont tous distincts de a_j donc la fonction

$$-\sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k f_{a_k}$$

est dérivable en a_j : c'est absurde ! Ainsi :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

La famille $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$ est donc une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Méthode

Le raisonnement précédent est assez classique pour étudier la liberté d'une famille de fonctions de cardinal $n \geq 1$. Le point-clé est qu'un ensemble fini et non vide admet un plus petit élément (et un plus grand élément). Il est aussi possible d'effectuer un raisonnement par récurrence : voir l'exercice suivant.

Exercice 10 –

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$$

Montrons par récurrence finie que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \lambda_k = 0$$

Par hypothèse, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0$$

Initialisation : En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$ l'expression au-dessus, on obtient $\lambda_0 = 0$.

Hérédité : Soit j un entier naturel fixé entre 0 et $n-1$ tel que :

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$$

Montrons que $\lambda_{j+1} = 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0$$

donc en divisant par $\cos^{j+1}(x)$ (pour $\cos(x) \neq 0$) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + j\pi,\ j \in \mathbb{Z}\right\},\ \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k \cos^{k-j-1}(x) \sin^{n-k}(x) = 0$$

En prenant la limite de cette expression lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda_{j+1} = 0$.

Attention : on ne peut pas évaluer en $\frac{\pi}{2}$!

La récurrence est donc vérifiée au rang 0 et est héréditaire donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 11 –

1. Vrai. Considérons $\mathscr{B} = (X^2, X^2+X, X^2+X+1)$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par cette famille. Il est clair que X^2 appartient à F. Remarquons aussi que :

$$X = X^2 + X - X^2 \text{ et } 1 = X^2 + X + 1 - (X^2 + X)$$

On en déduit que X et 1 appartiennent aussi à F. Ainsi :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) \subset F \subset \mathbb{R}_2[X]$$

donc $F = \mathbb{R}_2[X]$. On en déduit que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrons sa liberté. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$aX^2 + b(X^2 + X) + c(X^2 + X + 1) = \tilde{0}$$

où $\tilde{0}$ est le polynôme nul. Alors :

$$(a + b + c)X^2 + (b + c)X + c = \tilde{0}$$

Le polynôme précédent étant nul, ses coefficients aussi donc :

$$a + b + c = b + c = c = 0$$

donc $a = b = c = 0$. Ceci montre que $\mathscr{B}$ est une famille libre donc finalement une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

À retenir

Un argument de dimension permet de répondre plus vite à cette question (voir chapitre associé).

2. Vrai. Considérons pour tout réel a non nul, le vecteur $x_a = (a, 0)$ et posons $y = (1, 1)$. Les vecteurs x_a et y sont non colinéaires donc (x_a, y) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Remarquons maintenant que pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \beta}{a}(a, 0) + \beta(1, 1)$$

donc (x_a, y) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, pour tout réel non nul a, (x_a, y) est une base de $\mathbb{R}^2$. On vient donc de trouver une infinité de bases de $\mathbb{R}^2$ contenant le vecteur $(1, 1)$.

Cours

Si l'on dispose d'une base d'un espace vectoriel E, alors en multipliant n'importe quel vecteur de celle-ci par un scalaire non nul, on obtient toujours une base de E.

35 Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces supplémentaires

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\mathrm{Vect}((1,1))$ et $\mathrm{Vect}((1,2))$ sont en somme directe dans $\mathbb{R}^2$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le vecteur $(1,1,1)$ appartient à $\mathrm{Vect}((1,0,1)) + \mathrm{Vect}((1,2,1))$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Montrer que l'ensemble des applications paires et l'ensemble des applications impaires sont des sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Soit $F = \{(x+y, y-2x, x),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,2,3))$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels en somme directe dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 –

Soit F, G les ensembles définis par :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.

Exercice 5 –

Trouver un supplémentaire du sous-espace vectoriel $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = P(1)\}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 –

Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}),\ \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\} \text{ et } G = \{ f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}),\ f \text{ est constante} \}$$

Montrer qu'il sont supplémentaires dans cet espace.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Soient F, F', G, G' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Montrer que :

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. Un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admet une infinité de supplémentaires. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si F, G et H sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E alors : $F + G = F + H \Longrightarrow G = H$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda(1,1) = \mu(1,2) \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $(1,1,1) = \frac{1}{2}((1,0,1) + (1,2,1))$. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Exercice classique !

Notons E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P (respectivement I) l'ensemble des applications de E constitué des applications paires (respectivement des applications impaires). Montrons que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E puis que $E = P \oplus I$.

Commençons par montrer que P est un sous-espace vectoriel de E.

— $P \subset E$.

— P contient l'application nulle.

— Soit $f, g \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$$

Ainsi, $\lambda f + g$ appartient à P.

On en déduit que P est un sous-espace vectoriel de E. De la même manière, on montre I que est un sous-espace vectoriel de E.

Méthode

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E par analyse-synthèse se fait en suivant la démarche suivante :

— Dans l'analyse, on suppose que tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x_F + x_G$ où x_F appartient à F et x_G appartient à G. En utilisant l'appartenance de ces deux vecteurs aux sous-espaces F et G, on obtient l'expression de x_F (ou de x_G) en fonction de x uniquement. L'égalité $x = x_F + x_G$ permet d'obtenir l'autre vecteur en fonction de x. Cette phase d'analyse montre l'*unicité* de la décomposition d'un vecteur de E comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G si *existence*.

— Dans la synthèse, on prouve effectivement l'existence d'une telle décomposition. On fixe x un vecteur de E et on définit x_F et x_G comme précédemment. On montre alors que x_F appartient à F, x_G appartient à G et que $x_F + x_G = x$.

Analyse. Soit $f \in E$. On suppose l'existence d'un couple $(p, i) \in P \times I$ tel que $f = p + i$. Par définition de l'égalité d'applications, cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = p(x) + i(x)$$

et en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

car p est paire et i est impaire. En sommant les deux dernières égalités, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + f(-x) = 2p(x)$$

puis

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

et sachant que $f(x) = p(x) + i(x)$,

$$i(x) = f(x) - p(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Synthèse. Soit $f \in E$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

Retenir cette décomposition classique !

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Il est clair que $f = p + i$. Pour tout réel x, on a :

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$$

L'application p est donc paire sur $\mathbb{R}$. De même, on montre que l'application i est impaire sur $\mathbb{R}$.

On vient donc de montrer que toute application de E s'écrit comme la somme d'une application paire et d'une application impaire et cette décomposition est unique d'après l'analyse.

On en déduit que $E = P \oplus I$.

Exercice 3 –

- G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car c'est un espace engendré par un vecteur. On a de plus :

$$\begin{aligned} F &= \{(x+y, y-2x, x),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,-2,1) + y(1,1,0),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,-2,1),(1,1,0)) \end{aligned}$$

  donc F est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que F et G sont en somme directe dans $\mathbb{R}^3$.

  Il suffit donc de montrer que $F \cap G \subset \{(0,0,0)\}$ (l'autre inclusion est claire car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$). Soit a un élément de $F \cap G$. Par définition, il existe trois réels x, y, λ tels que :

$$a = (x+y, y-2x, x) = \lambda(1,2,3)$$

  Ainsi, $x + y = \lambda$, $y - 2x = 2\lambda$ et $x = 3\lambda$. On en déduit que :

$$y = \lambda - x = -2\lambda \ \text{ et } \ y = 2x + 2\lambda = 8\lambda$$

  On a alors $\lambda = 0$ donc a est le vecteur nul et l'inclusion souhaitée est vérifiée. On en déduit que F et G sont en somme directe dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 –

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x,y,z) \in F \iff x = y - z \iff (x,y,z) = (y-z, y, z) \iff (x,y,z) = y(1,1,0) + z(-1,0,1)$$

   Ainsi $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-1,0,1))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Il nous suffit de montrer que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \alpha(1,1,1)$ et sachant que $x - y + z = 0$, on obtient $\alpha = 0$ puis $(x,y,z) = (0,0,0)$. Ainsi $F \cap G \subset \{(0,0,0)\}$ et l'autre inclusion est vérifiée car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que F et G sont en somme directe.

Exercice 5 –

Un polynôme $P = a + bX + cX^2$ appartient à F si et seulement si $a = a + b + c$ donc si et seulement si $b = -c$. On en déduit que :

$$F = \mathrm{Vect}(1, -X + X^2)$$

Remarquons que tout polynôme $P = a + bX + cX^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit :

$$P = a + c(X^2 - X) + (b+c)X$$

Ainsi,

$$\mathbb{R}_2[X] \subset F + \mathrm{Vect}(X)$$

et l'autre inclusion est claire (une somme de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de celui-ci).

Montrons maintenant que F et $G = \mathrm{Vect}(X)$ sont en somme directe. Soit P un polynôme appartenant à F et G. Alors il existe un réel λ tel que $P = \lambda X$. Or $P(1) = P(0)$ donc $\lambda = 0$ et ainsi P est le polynôme nul. On en déduit que $F \cap G$ ne peut contenir que le polynôme nul (et il le contient bien car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$). Ainsi,

$$F + G = \mathbb{R}_2[X] \text{ et } F + G = F \oplus G$$

donc $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$. On en déduit que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Cours

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E revient à montrer que $E = F + G$ et que F et G sont en somme directe. C'est équivalent à montrer l'assertion suivante :

$$\forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, \ x = x_F + x_G$$

En effet, l'égalité $E = F + G$ montre l'existence d'une telle décomposition et le fait que F et G soient en somme directe montre l'unicité de celle-ci.

Exercice 6 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$. Supposons l'existence de $(f_1, f_2) \in F \times G$, tel que $f = f_1 + f_2$. La fonction f_2 est constante (disons de constante égale à $c \in \mathbb{R}$). On a alors par linéarité de l'intégration :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f_1(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} c\,\mathrm{d}x = 2c$$

car $f_1 \in F$. Ainsi $c = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$. On a donc pour tout $t \in [-1,1]$,

$$f_2(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

et

Il suffit de déterminer f_2 pour déterminer f_1 avec l'égalité $f = f_1 + f_2$

$$f_1(t) = f(t) - f_2(t) = f(t) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

Si cette décomposition existe, elle est donc unique.

Synthèse : Soit $f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$. Posons pour tout $t \in [-1,1]$,

$$f_2(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

et

$$f_1(t) = f(t) - f_2(t) = f(t) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

On a bien $f = f_1 + f_2$. De plus, f_2 est constante donc $f_2 \in G$ et par linéarité de l'intégration :

$$\int_{-1}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} f_2(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - 2 \times \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

donc $f_1 \in F$. Ainsi f est somme d'un élément de F et d'un élément de G et l'unicité de la décomposition provient de l'analyse.

On vient donc de montrer que $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 7 –

On raisonne par double inclusion.

- Soit $x \in F$. On sait que pour tout sous-espace vectoriel H de E, $F \subset F + H$. On en déduit que :

$$x \in F + (G \cap F') \quad \text{et} \quad x \in F + (G \cap G')$$

  donc $x \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$.

- Soit $x \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$. En particulier, $x \in F + (G \cap F')$ donc il existe $(f_1, h_1) \in F \times (G \cap F')$ tel que $x = f_1 + h_1$. De même, il existe $(f_2, h_2) \in F \times (G \cap G')$ tel que $x = f_2 + h_2$.

  On a $f_1 + h_1 = f_2 + h_2$ donc :

$$f_1 - f_2 = h_2 - h_1 \in F \cap G$$

  car f_1 et f_2 appartiennent à F (qui est un sous-espace vectoriel de E) et h_1 et h_2 appartiennent à G (qui est aussi un sous-espace vectoriel de E). Or par hypothèse, $F \cap G = F' \cap G'$ donc :

$$h_2 - h_1 \in F' \cap G'$$

  On peut alors écrire :

$$h_1 = -(h_2 - h_1) + h_2$$

  On sait que $h_2 \in G'$ et $h_2 - h_1 \in G'$ donc $h_1 \in G'$ (car c'est un sous-espace vectoriel de E). On obtient alors que h_1 appartient à $G' \cap (G \cap F') = F \cap G$ (car $F \cap G = F' \cap G'$) donc h_1 appartient en particulier à F. On en déduit que $x = f_1 + h_1$ appartient à F (car c'est un sous-espace vectoriel de E).

- On a montré par double inclusion l'égalité suivante :

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$

Exercice 8 –

1. Vrai. Il suffit de considérer toute droite vectorielle engendrée par un vecteur n'appartenant pas à ce plan vectoriel.
2. Faux. On a :

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,0)) + \mathrm{Vect}((0,1))$$

   mais aussi :

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,0)) + \mathrm{Vect}((1,1))$$

   car $(0,1) = -(1,0) + (1,1)$. Pourtant, $\mathrm{Vect}((1,0)) \neq \mathrm{Vect}((1,1))$.

36 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\mathbb{K}_4[X]$ est de dimension 4. ☐ Vrai ☐ Faux
2. La base canonique de $\mathbb{K}_4[X]$ est $(1, X, X^2, X^3, X^4)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Sans aucun calcul, laquelle de ces familles est candidate pour être une base de $\mathbb{R}^4$?

1. $\mathscr{F}_1 = ((1,2,3,4),(1,1,1,1))$.
2. $\mathscr{F}_2 = ((1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,1,0,0))$.
3. $\mathscr{F}_3 = ((1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,1,0,0),(2,-3,1,2),(7,-1,1,1))$.
4. $\mathscr{F}_4 = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(0,0,1,1),(2,0,0,0))$.

Exercice 3 –

Soit $\mathscr{B} = (x_1, x_2, x_3)$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$x_1 = (1,1,0),\ x_2 = (2,1,-3) \text{ et } x_3 = (1,0,1)$$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 –

Posons :

$$x_1 = (1,1,1),\ x_2 = (1,2,1) \text{ et } x_3 = (3,4,3)$$

Déterminer le rang de (x_1, x_2, x_3).

Exercice 5 –

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Énoncer la formule de Grassmann.
2. Montrer que si $F \cap G = \{0_E\}$:

$$E = F + G \iff \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$$

Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.

Exercice 7 –

Montrer que $\mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0)) = \mathrm{Vect}((2,1,1),(0,-1,1))$.

Exercice 8 –

Soit $F = \{(x+y, y-2x, x) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,2,3))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 –

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en déterminer une base et préciser sa dimension.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ et F sont en somme directe.
3. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[X]$?

Exercice 10 –

Soit $E = \mathscr{F}(]-1,1[, \mathbb{R})$. On considère les fonctions de E définies par :

$$\forall x \in\,]-1,1[\,,\ f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Pour aller plus loin

Exercice 11 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$.

1. Montrer que $((X-a)^k)_{0 \le k \le 2n}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $(X-a)^n(X-b)^n$ dans la base précédente.

Exercice 12 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{K}_n[X]$, S un polynôme de degré $d \in \{1, \dots, n\}$ et F l'ensemble des polynômes de E divisibles par S.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n + 1 - d$.
2. Montrer que $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 13 – Le vrai/faux de la fin

1. Un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admet un nombre fini de supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. L'espace vectoriel E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de dimension finie. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\mathbb{K}_4[X]$ est de dimension 4. ☐ Vrai ☒ Faux
2. La base canonique de $\mathbb{K}_4[X]$ est $(1, X, X^2, X^3, X^4)$. ☒ Vrai ☐ Faux

À retenir

Pour $n \geq 0$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Toute base de $\mathbb{K}_n[X]$ est donc de cardinal $n+1$ et la base canonique de cet espace est $(1, X, \dots, X^n)$.

Exercice 2 –

1. La famille $\mathscr{F}_1$ est de cardinal 2 et $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 : cette famille n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^4$. Les deux vecteurs constituant $\mathscr{F}_1$ sont clairement non colinéaires donc cette famille est libre.
2. La famille $\mathscr{F}_2$ est de cardinal 3 et $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 : cette famille n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^4$. La liberté ne peut pas se vérifier sans revenir à la définition pour une famille de trois vecteurs.
3. La famille $\mathscr{F}_3$ est de cardinal 5 et $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 : cette famille n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^4$. De plus, le cardinal étant strictement plus grand que 4, cette famille ne peut pas être libre. Elle peut par contre être génératrice mais il est impossible de le justifier sans calcul.
4. La famille $\mathscr{F}_4$ est de cardinal 4 et $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 : c'est une candidate pour être une base de $\mathbb{R}^4$. Il suffit pour cela de vérifier si elle est libre.

Cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

- Toute base de E a pour cardinal n.
- Toute famille de E de cardinal strictement plus grand que n est nécessairement liée.
- Toute famille de E de cardinal strictement plus petit que n ne peut pas être génératrice de E.

Exercice 3 –

La famille $\mathscr{B}$ est de cardinal 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$: il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a(1,1,0) + b(2,1,-3) + c(1,0,1) = (0,0,0)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& \left\{\begin{array}{rcl} a+2b+c &=& 0 \\ a+b &=& 0 \\ -3b+c &=& 0 \end{array}\right. \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcl} a+2b+c &=& 0 \\ -b-c &=& 0 \\ -3b+c &=& 0 \end{array}\right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcl} a+2b+c &=& 0 \\ -b-c &=& 0 \\ 4c &=& 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On en déduit que $a = b = c = 0$. La famille (x_1, x_2, x_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Cours

Soit $n \geq 1$ et $\mathscr{F}$ une famille de cardinal n d'un espace vectoriel de dimension n. Les assertions suivantes sont équivalentes :

— $\mathscr{F}$ est libre.

— $\mathscr{F}$ est génératrice.

— $\mathscr{F}$ est une base de E.

Dans la pratique, on commence par comparer le cardinal de la famille et la dimension de l'espace vectoriel. Il suffit ensuite de vérifier la liberté (ou le caractère générateur) pour montrer que la famille étudiée est une base.

Exercice 4 –

On remarque que :

Toujours essayer de trouver rapidement une relation à l'œil

$$x_3 = 2x_1 + x_2$$

donc le rang de (x_1, x_2, x_3) est le rang de (x_1, x_2). Or x_1 et x_2 sont non colinéaires donc (x_1, x_2) est libre. On en déduit que le rang de la famille étudiée vaut 2.

Cours

Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Exercice 5 –

1. On a :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

2. Par hypothèse, et d'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$$

On souhaite donc montrer l'équivalence suivante :

$$E = F + G \iff \dim(E) = \dim(F+G)$$

Or $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie donc ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux si et seulement si ils ont la même dimension, ce qui donne le résultat.

À retenir

Le raisonnement précédent permet de montrer que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \text{ et } F \cap G = \{0_E\}$$

Autrement dit, il suffit de vérifier que F et G sont en somme directe et d'utiliser un argument de dimension. Cela est beaucoup plus simple qu'en dimension infinie ou un raisonnement du type analyse-synthèse est souvent utilisé (mais ici, la décomposition d'un vecteur n'est pas explicite après la vérification des deux hypothèses).

Exercice 6 –

L'espace vectoriel E est de dimension n qui est le cardinal de $\mathscr{B}'$: il suffit de montrer que $\mathscr{B}'$ est libre pour montrer que c'est une base de E. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_k = 0_E$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{j=1}^{k} e_j = 0_E$$

puis :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \lambda_k e_j = 0_E$$

On a $1 \leq j \leq k \leq n$ donc pour j fixé entre 1 et n, k varie de j à n donc :

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \lambda_k \right) e_j = 0_E$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{k=j}^{n} \lambda_k = 0$$

Pour $j = n$, on obtient $\lambda_n = 0$. Pour $j = n-1$, on a $\lambda_{n-1} + \lambda_n = 0$ donc $\lambda_{n-1} = 0$. De proche en proche on obtient que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_j = 0$ et ainsi $\mathscr{B}'$ est une famille libre de E, ce qui donne le résultat souhaité.

Méthode

En fait, le système précédent est un système triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls. Il admet donc une unique solution et le n-uplet nul est clairement solution.

Exercice 7 –

Les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont non colinéaires donc $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 0))$ est un espace vectoriel de dimension 2. Pour les mêmes raisons, $G = \mathrm{Vect}((2, 1, 1), (0, -1, 1))$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Pour montrer que $F = G$, sachant que ces deux espaces ont la même dimension, il suffit de montrer que l'un est inclus dans l'autre. Or on remarque que :

$$(1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (2, 1, 1)$$

donc $(2, 1, 1) \in F$. De même,

$$(1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 1)$$

donc $(0, 1, -1) \in F$. Ainsi :

G est stable par combinaison linéaire

$$G = \mathrm{Vect}((2, 1, 1), (0, -1, 1)) \subset F$$

ce qui donne le résultat d'après les remarques précédentes.

Cours

Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Si F est inclus dans G alors $F = G$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(G)$.

Exercice 8 –

G est un sous-espace vectoriel de dimension 1 car $(1, 2, 3)$ est non nul. De plus, on a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x + y, y - 2x, x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, -2, 1) + y(1, 1, 0),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((1, -2, 1), (1, 1, 0)) \end{aligned}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 car $(1, -2, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre.

On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Montrons que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. L'inclusion $\{(0, 0, 0)\} \subset F \cap G$ est claire car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soit $X \in F \cap G$. Le vecteur X appartient à G donc il existe un réel a tel que :

$$X = a(1, 2, 3)$$

Le vecteur X appartient à F donc il existe deux réels x et y tels que :

$$X = (x + y, y - 2x, x)$$

Ainsi, $x + y = a$, $y - 2x = 2a$ et $x = 3a$.

En utilisant $x = 3a$, on obtient avec les deux premières égalités que $y = -2a$ et $y = 2x + 2a = 8a$. Alors $-2a = 8a$ donc $a = 0$ et finalement $X = (0, 0, 0)$. On en déduit que $F \cap G \subset \{(0, 0, 0)\}$ et ainsi $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$$

F et G sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

À retenir

Pas besoin d'analyse-synthèse si l'on souhaite juste prouver que deux sous-espaces vectoriels, d'un espace de dimension finie, sont supplémentaires.

Exercice 9 –

1. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que :

$$P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$$

On a $P'(X) = b + 2cX + 3dX^2 + 4eX^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
P \in F &\Longleftrightarrow P(0) = 0,\ P'(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow a = 0,\ b = 0 \text{ et } b + 2c + 3d + 4e = 0 \\
&\Longleftrightarrow a = b = 0 \text{ et } c = -\tfrac{3d}{2} - 2e \\
&\Longleftrightarrow P(X) = \left(-\tfrac{3d}{2} - 2e\right) X^2 + dX^3 + eX^4 \\
&\Longleftrightarrow P(X) = d\left(-\tfrac{3}{2}X^2 + X^3\right) + e(-2X^2 + X^4)
\end{aligned}$$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ où :

$$P_1(X) = -\tfrac{3}{2}X^2 + X^3 \quad \text{et} \quad P_2(X) = -2X^2 + X^4$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel et sachant que P_1 et P_2 sont deux polynômes non nuls de degrés différents, ils constituent une famille libre et génératrice de F, donc une base de F (qui est donc de dimension 2).

À retenir

Toute famille de polynômes non nuls, étagée en degrés, est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

2. Notons θ le polynôme nul. On sait que $\{\theta\} \subset F \cap G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$. Soit $P \in F \cap G$. Par définition, on a :

$$P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$$

Sachant que P appartient à G, il existe un triplet de réels (a, b, c) tel que :

$$P(X) = a + bX + c(1 + X + X^2)$$

$P(0) = 0$ donc $a + c = 0$ et $P'(0) = 0$ donc $b + c = 0$. Pour finir, $P'(1) = 0$ donc $b + 3c = 0$. Les deux dernières égalités donnent facilement $b = c = 0$ et la première implique donc que $a = 0$. Ainsi, $P = \theta$ donc $F \cap G \subset \{\theta\}$. Par double inclusion, on a donc montré que $F \cap G = \{\theta\}$ et ainsi, F et G sont en somme directe.

3. F est de dimension 2 d'après la question 1 et G est de dimension 3 car la famille $(1, X, 1+X+X^2)$ qui le génère est libre (famille de polynômes non nuls étagée en degré). Ainsi :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}_4[X])$$

Sachant que F et G sont en somme directe d'après la question précédente, on en déduit que ces espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 10 –

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1+x+1-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2f_3(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1+x-1+x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2f_4(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f_3 et f_4 sont des combinaisons linéaires de f_1 et f_2 donc :

$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$

Montrons que (f_1, f_2) est libre. Notons θ la fonction nulle de $\mathscr{F}(]-1,1[, \mathbb{R})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = \theta$$

Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$,

Attention à bien quantifier !

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0$$

donc :

$$\alpha\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \beta\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0$$

En multipliant par $\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$, on obtient :

$$\alpha(1+x) + \beta(1-x) = 0$$

En faisant tendre x vers 1, on obtient $2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$.

Il est interdit d'évaluer en 1

De même, par passage à la limite quand x tend vers -1, on obtient $\beta = 0$. Ainsi, (f_1, f_2) est libre donc le rang de la famille étudiée vaut 2.

À retenir

Pour étudier le rang d'une famille, on peut commencer par essayer d'exprimer certains vecteurs comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Cela permet de réduire le cardinal de la famille à étudier.

Exercice 11 –

1. La famille $((X-a)^k)_{0\leq k\leq 2n}$ est une famille de polynômes non nuls étagée en degrés : c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. De plus, le cardinal de cette famille est $2n+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ donc cette famille est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. On a :

$$\begin{aligned}(X-a)^n(X-b)^n &= (X-a)^n(X-a+a-b)^n\\ &= (X-a)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}(X-a)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}(X-a)^{n+k}\\ &= \sum_{j=n}^{2n}\binom{n}{j-n}(a-b)^{2n-j}(X-a)^j\end{aligned}$$

On a donc :

$$(X-a)^n(X-b)^n = \sum_{j=0}^{2n}\lambda_j(X-a)^j$$

où

$$\lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < n \\ \binom{n}{j-n}(a-b)^{2n-j} & \text{si } j \geq n \end{cases}$$

Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur x de E s'écrit d'une unique manière comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$:

$$\exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

La famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la famille des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 12 –

1. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $P \in F$. Par définition, il existe un polynôme Q tel que $P = QS$. Or $P \in F \subset E$ donc $\deg(P) \leq n$ et

$$\deg(P) = \deg(QS) = \deg(Q) + \deg(S) = \deg(Q) + d$$

Ainsi, $\deg(Q) = \deg(P) - d \leq n - d$ donc il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-d}$ tels que :

$$Q = a_0 + a_1 X + \dots a_{n-d} X^{n-d}$$

et ainsi :

$$P = QS = a_0 S + a_1 XS + \dots a_{n-d} X^{n-d} S$$

donc :

$$P \in \mathrm{Vect}(S, XS, \dots, X^{n-d} S)$$

Synthèse. Si $P \in \mathrm{Vect}(S, XS, \dots, X^{n-d}S)$, il est clair que P est divisible par S et appartient à F (pour des raisons de degré).

On vient donc de montrer que $F = \mathrm{Vect}(S, XS, \dots, X^{n-d}S)$. Or le polynôme S étant non nul, la famille $(X, XS, \dots, X^{n-d}S)$ est une famille de polynômes non nuls étagée en degré donc est une famille libre et est aussi une famille génératrice de F : c'est donc une base de F. On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de dimension $n + 1 - d$.

2. Proposons deux méthodes en remarquant tout d'abord que :

$$\dim(F) + \dim(\mathbb{K}_{d-1}[X]) = n + 1 - d + d = n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(E)$$

Première méthode. Il suffit de montrer que $F \cap \mathbb{K}_{d-1}[X] = \{\theta\}$ où θ est le polynôme nul.
L'inclusion $\{\theta\} \subset F \cap \mathbb{K}_{d-1}[X]$ est vérifiée car F et $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $P \in F \cap \mathbb{K}_{d-1}[X]$. Par définition, il existe un polynôme Q tel que $P = QS$. Or P est de degré inférieur ou égal à $d - 1$ et S est de degré d. Nécessairement $Q = \theta$ donc $P = \theta$. Finalement, $F \cap \mathbb{K}_{d-1}[X] = \{\theta\}$ et avec l'égalité des dimensions déjà prouvée, on obtient que F et $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ sont supplémentaires dans E.

Deuxième méthode. Il suffit de montrer que $F + \mathbb{K}_{d-1}[X] = E$. L'inclusion $F + \mathbb{K}_{d-1}[X] \subset E$ est vérifiée car F et $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Soit $P \in E$. D'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$P = QS + R$$

et vérifiant $\deg(R) < \deg(S) = d$. Pour des raisons de degré, P et R sont donc dans E donc QS aussi. De plus, QS est divisible par S donc $QS \in F$ et $\deg(R) \leq d - 1$ donc $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$. Ainsi, $P \in F + \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

Finalement, on a montré que $F + \mathbb{K}_{d-1}[X] = E$ et avec l'égalité des dimensions déjà prouvée, on obtient que F et $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ sont supplémentaires dans E.

Cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- F et G sont supplémentaires dans E.
- $\forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$.
- $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
- $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $E = F + G$.
- $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
- La concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

Exercice 13 –

1. Faux. Toute droite vectorielle engendrée par un vecteur n'appartenant pas au plan est un supplémentaire de ce plan.
2. Faux. Notons, pour tout $n \geq 0$, $f_n : x \mapsto x^n$. Pour tout $N \geq 0$, la famille $(f_0, \dots, f_N)$ est une famille libre de fonctions de E (fonctions polynomiales étagée en degré). Si E était de dimension finie, on en déduirait que :

$$\forall N \geq 0,\ N + 1 \leq \dim(E)$$

ce qui est absurde.

37 Applications linéaires

Dans ce chapitre, n, p et q sont des entiers naturels non nuls et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit E, F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

1. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de F. ☐ Vrai ☐ Faux
2. L'application f est injective si et seulement si le noyau de f est l'ensemble vide. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $f(0_E) = 0_F$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau et leur image (et le rang, si cela a un sens). On précisera si c'est un endomorphisme, un isomorphisme ou un automorphisme et on vérifiera si l'application est bien définie (si nécessaire).

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x, y, z)) = (x + 2y + z, y - x, 2x + 4y + z)$$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x, y, z)) = (x + z, x + z, x + y)$$
3. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P - (X + 1)P' + X^2P''$$
4. $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM \ \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
5. $\varphi : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par :
$$\forall f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \varphi(f) = f'$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –
Soit $\varphi : \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X],\ \varphi(P) = (n+1)P - XP'$$

1. Justifier que φ est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. φ est-elle surjective ?

Exercice 4 –
Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{C}$. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

est un isomorphisme.

Exercice 5 –
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f) \iff E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$$

Exercice 6 –
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que :

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P)$ le reste de la division euclidienne de $(X^4-1)P$ par $X^4 - X$. Montrer que φ définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ puis déterminer son noyau et son image.

Exercice 8 –
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

1. On suppose u injectif uniquement dans cette question. Déterminer pour tout $m \geq 1$, $K_m = \operatorname{Ker}(u^m)$ et $I_m = \operatorname{Im}(u^m)$.
2. Montrer que pour tout $m \geq 0$, $K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.
3. On suppose u non injectif. Montrer l'existence d'un entier $p \in \{1, \dots, n\}$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$. Montrer alors que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_p = K_{p+q}$ et $I_p = I_{p+q}$ puis que $E = K_p \oplus I_p$.

Exercice 9 –

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $u^3 = \tilde{0}$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leq \dim(E)$.
2. Montrer que $2\,\mathrm{rg}(u^2) \leq \mathrm{rg}(u)$.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u + v)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(u + v)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de F. ☐ Vrai ☒ Faux
2. L'application f est injective si et seulement si le noyau de f est l'ensemble vide. ☐ Vrai ☒ Faux
3. $f(0_E) = 0_F$. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. On dit que f est *linéaire* si l'une des trois conditions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

1. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
2. $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
3. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et plus simplement $\mathscr{L}(E)$ dans le cas où $E = F$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

— On appelle *image* de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble $f(E)$. C'est un sous-espace vectoriel de F. On a $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\}$.

— On appelle *noyau* de f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\})$. C'est un sous-espace vectoriel de E. On a $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}$.

On a les propriétés cruciales suivantes :

— f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

— f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 2 –

Cours

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On dit que :

— f est un *endomorphisme* si $E = F$.

— f est un *isomorphisme* si f est bijective. Dans ce cas, on dit que E et F sont *isomorphes*.

— f est un *automorphisme* si f est un endomorphisme bijectif. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E : c'est le *groupe linéaire* de E.

— f est une *forme linéaire* si $F = \mathbb{K}$.

1. • Soit $X = (x, y, z), Y = (x', y', z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\lambda X + Y) = f((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'))$$

ce qui vaut par définition :

$$((\lambda x+x')+2(\lambda y+y')+(\lambda z+z'), (\lambda y+y')-(\lambda x+x'), 2(\lambda x+x')+4(\lambda y+y')+(\lambda z+z'))$$

ou encore :

$$(\lambda(x + 2y + z) + (x' + 2y' + z'), \lambda(y - x) + (y' - x'), \lambda(2x + 4y + z) + (2x' + 4y' + z'))$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= \lambda(x + 2y + z, y - x, 2x + 4y + z) + (x' + 2y' + z', y' - x', 2x' + 4y' + z') \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

donc f est linéaire et f est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

• Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur (x, y, z) appartient au noyau de f si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rl} x + 2y + z & = 0 \\ y - x & = 0 \\ 2x + 4y + z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} x + 2y + z & = 0 & \\ 3y + z & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -z & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}\right.$$

ce qui est équivalent à $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$. L'application f est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie donc f est un automorphisme.

Cours – Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de *même dimension* n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f est un isomorphisme.

b) f est injective.

c) f est surjective.

d) Le rang de f est égal à n.

2. • L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (même démarche que dans la question précédente). Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur (x, y, z) appartient au noyau de f si et seulement si :

$$\begin{cases} x + z & = 0 \\ x + y & = 0 \end{cases} \iff z = y = -x \iff (x, y, z) = x(1, -1, -1)$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(x_1)$ où $x_1 = (1, -1, -1)$. Le vecteur x_1 étant non nul, il forme une base du noyau de f donc le noyau est de dimension 1.

• L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie donc d'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$$

On sait que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f((1, 0, 0)), f((0, 1, 0)), f((0, 0, 1)))$$

Or $f((1, 0, 0)) = (1, 1, 1)$, $f((0, 1, 0)) = (0, 0, 1)$ et $f((0, 0, 1)) = (1, 1, 0)$. Les deux premiers vecteurs sont non colinéaires donc forment une famille libre à deux éléments de l'image qui est de dimension 2 donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (0, 0, 1))$$

Cours – Théorème du rang.

Soit E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que E est de *dimension finie*. Alors l'image de f est de dimension finie, on appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ cette dimension et on a :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg(f)}$$

3. • Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $f(P)$ est un polynôme à coefficients réels (comme produit et somme de polynômes à coefficients réels). On a :

$$\begin{aligned} \deg(f(P)) &= \deg(P - (X + 1)P' + X^2P'') \\ &\leq \max(\deg(P), \deg((X + 1)P'), \deg(X^2P'')) \end{aligned}$$

Or le degré de P' est inférieur ou égal à 1 (et celui de P'' inférieur ou égal à 0) donc le degré de $(X + 1)P'$ est inférieur ou égal à 2 et de même pour celui de X^2P''. Ainsi le degré de $f(P)$ est inférieur ou égal à 2 donc $f(P)$ appartient à $\mathbb{R}_2[X]$.

- Montrons la linéarité de f. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a :

On utilise la linéarité de la dérivation

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) - (X+1)(\lambda P + Q)' + X^2(\lambda P + Q)'' \\ &= \lambda P + Q - (X+1)(\lambda P' + Q') + X^2(\lambda P'' + Q'') \\ &= \lambda(P - (X+1)P' + X^2P'') + (Q - (X+1)Q' + X^2Q'') \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire : c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

À retenir

Si P et Q sont deux polynômes, on a :

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

On a égalité *si* le degré de P est différent du degré de Q.

- Déterminons le noyau de f. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$P = aX^2 + bX + c$$

et par simple calcul :

$$f(P) = aX^2 - 2aX + c - b$$

Ainsi, P appartient au noyau de f si et seulement si, par identification, $a = 0$ et $c = b$ donc si et seulement si $P = b(X+1)$. Finalement, on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X+1)$.

- Le noyau de f est de dimension 1 (car $X+1$ est différent du polynôme nul). La dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est 3 donc d'après le théorème du rang, le rang de f vaut $3 - 1 = 2$. De plus, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, -1, X^2 - 2X) = \mathrm{Vect}(1, X^2 - 2X)$$

car 1 et -1 sont colinéaires. Ainsi, $(1, X^2 - 2X)$ est une famille génératrice de l'image de f, de cardinal 2 qui est la dimension de cette image, c'est donc une base de l'image.

Méthode

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$$

En utilisant cette propriété et le théorème du rang, il est simple d'obtenir l'image d'une application linéaire.

4. - Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (par produit de deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$). Pour tout $(M, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et tout réel λ,

$$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$$

- Déterminons le noyau de f. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker}(f) &\iff AM = 0_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\iff \begin{cases} a+2c &= 0 \\ b+2d &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a &= -2c \\ b &= -2d \end{cases} \\
&\iff M = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(M_1, M_2)$$

où

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices M_1 et M_2 étant non colinéaires, on en déduit que (M_1, M_2) est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

- L'application f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et non injectif d'après le raisonnement précédent donc f n'est pas surjectif. D'après le théorème du rang, le rang de f vaut 2. Il suffit de déterminer une famille libre à deux éléments de l'image de f pour en déterminer une base. On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont dans l'image de f par définition et, étant non colinéaires, on en déduit que (M_3, M_4) est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

5. - L'application est linéaire par linéarité de la dérivation. L'application φ n'est pas injective car les fonctions constantes ont toutes la même image : la fonction nulle. L'application φ n'est pas surjective car pour tout $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi(f) = f'$ est continue sur $\mathbb{R}$ et il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ non continues (penser à la fonction valant 1 sur $\mathbb{R}_+$ et 0 sinon).

- Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si f appartient au noyau de φ alors $\varphi(f) = f'$ est la fonction nulle définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et f est donc constante. Réciproquement, toute fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ appartient au noyau de φ. Ainsi, en notant $\tilde{1}$ la fonction constante égale à 1, on a :

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(\tilde{1})$$

- Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $\varphi(f) = f'$ est continue sur $\mathbb{R}$. Réciproquement si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(F) = F' = f$. Ainsi,

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Exercice 3 –

1.
- Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. Alors $\varphi(P)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ (par produit et somme de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$). On a :

$$\begin{aligned}\deg((n+1)P - XP') &\leq \max(\deg(P), \deg(XP')) \\ &\leq \max(\deg(P), 1 + \deg(P')) \\ &\leq \deg(P)\end{aligned}$$

Cet argument n'est pas suffisant pour conclure.

Procédons autrement : il existe $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+2}$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \sum_{k=0}^{n+1} (n+1) a_k X^k - X \sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} \\ &= (n+1)a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} (n+1-k) a_k X^k \\ &= (n+1)a_0 + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) a_k X^k\end{aligned}$$

car le coefficient de X^{n+1} est nul. Ainsi, le degré de P est inférieur ou égal à n. Donc $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ et φ est bien définie.

- Montrons que φ est linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n+1}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a :

On utilise la linéarité de la dérivation

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (n+1)(\lambda P + Q) - X(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda(n+1)P + (n+1)Q - \lambda XP' - XQ' \\ &= \lambda((n+1)P - XP') + (n+1)Q - XQ' \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire.

2. Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. Il existe $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+2}$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$$

On a, en notant θ le polynôme nul, et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = \theta \\ &\iff (n+1)a_0 + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k X^k = \theta \end{aligned}$$

Et ainsi, par identification, $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ si et seulement si $a_0 = \cdots = a_n = 0$ (car pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $(n+1-k) \neq 0$). Finalement P appartient au noyau si et seulement si $P = a_{n+1}X^{n+1}$ donc :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^{n+1})$$

3. La dimension de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ est $n+2$ et celle du noyau de φ est 1 (d'après la question précédente sachant que X^{n+1} n'est pas nul). D'après le théorème du rang, le rang de φ est $n+1$ qui est la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ (l'espace d'arrivée de φ). Ainsi, φ est surjective.

Exercice 4 –

Soit $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(a_0), (\lambda P + Q)(a_1), \ldots, (\lambda P + Q)(a_n)) \\ &= (\lambda P(a_0) + Q(a_0), \lambda P(a_1) + Q(a_1), \ldots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)) \\ &= \lambda(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) + (Q(a_0), Q(a_1), \ldots, Q(a_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire.

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors P appartient au noyau de φ si et seulement si :

$$P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$$

Dans ce cas, P admet $n+1$ racines distinctes et a un degré inférieur ou égal à n donc P est le polynôme nul. On en déduit que :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\tilde{0}\}$$

Ainsi, φ est injective. Or :

$$\dim(\mathbb{C}_n[X]) = \dim(\mathbb{C}^{n+1}) = n+1$$

On en déduit finalement que φ est un isomorphisme.

Exercice 5 –

Raisonnons par double implication.

- Supposons que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$. D'après le théorème du rang, comme E est de dimension finie, on sait que :

  $$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

  Pour montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans E, il suffit alors de montrer que ces espaces sont en somme directe. D'après l'hypothèse, $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$ et grâce au théorème du rang, on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) + \mathrm{rg}(f^2)$$

donc :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$$

Or le noyau de f est inclus dans le noyau de f^2 donc ces espaces sont égaux.

On sait que $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Soit $x \in E$. Supposons que $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe un vecteur y de E tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0_E$ donc $f^2(y) = 0_E$. Ainsi, y appartient au noyau de f^2 qui est égal au noyau de f donc $x = f(y) = 0_E$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_E\}$ et finalement l'égalité souhaitée est prouvée.

- Supposons que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Montrons que le rang de f^2 est égal au rang de f, c'est-à-dire :

$$\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

On sait que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe un vecteur x de E tel que $y = f(x)$. D'après l'hypothèse, il existe un unique couple $(z, w) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = z + w$. Par linéarité de f, on a :

$$y = f(x) = f(z) + f(w) = f(w)$$

Or w est dans l'image de f donc il existe $x_0 \in E$ tel que $w = f(x_0)$. Ainsi,

$$y = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \in \mathrm{Im}(f^2)$$

Finalement, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$ et c'est ce qu'il fallait montrer.

À retenir

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On a les inclusions suivantes à savoir démontrer :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Les preuves sont données dans l'exercice 8 (question 2).

Exercice 6 –

- Montrons pour commencer l'inégalité de droite. Pour tout $x \in E$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$$

Ainsi,

$$\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$$

Les espaces sont de dimension finie donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(f + g)) \le \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g))$$

D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) &= \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) \\ &\leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dim(\mathrm{Im}(f+g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$$

donc :

$$\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

- Montrons l'inégalité de gauche. On a d'après l'inégalité précédente (en substituant $f+g$ à f et $-g$ à g) :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f+g-g) \leq \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(g)$$

Ainsi,

$$\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f+g)$$

De même, on a :

$$\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f+g)$$

Finalement,

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g)$$

À retenir

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors par linéarité de f :

$$\mathrm{Im}(-f) = \{-f(x),\ x \in E\} = \{f(-x),\ x \in E\} = \{f(y),\ y \in E\} = \mathrm{Im}(f)$$

Ainsi, si f est de rang fini, $-f$ aussi et ces deux applications linéaires ont le même rang.

Exercice 7 –

- Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Le reste de la division euclidienne de $(X^4-1)P$ par $X^4 - X$ est un polynôme à coefficients réels de degré strictement inférieur au degré de $X^4 - X$. C'est donc un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
- Montrons que φ est linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de division euclidienne, il existe deux uniques couples (P_1, P_2) et (Q_1, Q_2) de polynômes tels que :

$$(X^4-1)P(X) = P_1(X)(X^4-X) + P_2(X) \text{ et } (X^4-1)Q(X) = Q_1(X)(X^4-X) + Q_2(X)$$

et vérifiant $\deg(P_2(X)) < 4$ et $\deg(Q_2(X)) < 4$. Par définition,

$$\varphi(P) = P_2 \text{ et } \varphi(Q) = Q_2$$

D'après les relations précédentes, on a :

$$(X^4-1)(P(X) + \lambda Q(X)) = (P_1(X) + \lambda Q_1(X))(X^4-X) + (P_2(X) + \lambda Q_2(X))$$

Or on a :

$$\deg(P_2(X) + \lambda Q_2(X)) \leq \max(\deg(P_2(X)), \deg(\lambda Q_2(X)) < 4$$

Par unicité du quotient et du reste de la division euclidienne, on en déduit alors que $P_2(X) + \lambda Q_2(X)$ est le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)(P + \lambda Q)$ par $X^4 - X$. Ainsi,

$$\varphi(P + \lambda Q) = P_2(X) + \lambda Q_2(X) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$$

On vient donc de montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

- Déterminons le noyau de φ. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors P appartient au noyau de φ si et seulement si le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P(X)$ par $(X^4 - X)$ est le polynôme nul. C'est équivalent au fait que $X^4 - X$ divise le polynôme $(X^4 - 1)P(X)$ ou encore à l'existence d'un polynôme Q à coefficients réels tel que :

$$X(X-1)(X-j)(X-j^2)Q(X) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)P(X)$$

Si un tel polynôme Q existe, cela implique que 0, j et j^2 sont des racines de :

$$(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)P(X)$$

et donc de P. Or P est de degré inférieur ou égal à 3 donc il existe un réel λ tel que :

$$P(X) = \lambda X(X-j)(X-j^2) = \lambda X(X^2 + X + 1)$$

Réciproquement si $P(X) = \lambda X(X-j)(X-j^2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned}(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)P(X) &= \lambda(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)X(X-j)(X-j^2)\\ &= X(X-1)(X-j)(X-j^2)Q(X)\end{aligned}$$

avec

$$Q(X) = \lambda(X+1)(X-i)(X+i) = \lambda(X+1)(X^2+1) \in \mathbb{R}[X]$$

Finalement, on a :

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Vect}(X(X^2 + X + 1))$$

- L'espace $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4 et le noyau de φ est de dimension 1 car $X(X^2+X+1)$ est non nul. D'après le théorème du rang, on en déduit que l'image de φ est de dimension 3. Il suffit de trouver trois vecteurs de l'image formant une famille libre pour obtenir une base de l'image. Remarquons que :

$$\begin{cases}(X^4-1) \times 1 = X^4 - X + X - 1\\ (X^4-1) \times X = (X^4 - X) \times X + X^2 - X\\ (X^4-1) \times X^2 = (X^4 - X) \times X^2 + X^3 - X^2\end{cases}$$

et les polynômes $X-1$, X^2-X et X^3-X^2 ont un degré strictement plus petit que 4. Par unicité dans le théorème de division euclidienne, on en déduit que :

$$\varphi(1) = X - 1,\ \varphi(X) = X^2 - X \ \text{ et } \ \varphi(X^3) = X^3 - X^2$$

Les polynômes $X-1$, X^2-X et X^3-X^2 sont non nuls et sont échelonnés en degré donc forment une famille libre à 3 éléments. Cette famille est donc une base de l'image de φ :

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(X-1, X^2-X, X^3-X^2)$$

Exercice 8 –

1. Par hypothèse, u est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie donc u est un automorphisme et par composition, u^m aussi pour tout $m \geq 1$. Ainsi, $K_m = \{0_E\}$ et $I_m = E$.
2. Soit $m \geq 0$.
   - Soit $x \in E$. Si $x \in K_m$ alors $f^m(x) = 0_E$ donc par linéarité de f :

   $$f(f^m(x)) = f(0_E) = 0_E$$

   donc $f^{m+1}(x) = 0_E$ et alors $x \in K_{m+1}$. Ainsi, $K_m \subset K_{m+1}$.
   - Soit $x \in E$. Si $x \in I_{m+1}$ alors il existe $z \in E$ tel que $x = f^{m+1}(z)$ donc $x = f^m(f(z))$ avec $f(z) \in E$ donc $x \in I_m$. Ainsi, $I_{m+1} \subset I_m$.
3. - Supposons par l'absurde que pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $K_p \neq K_{p+1}$. D'après la question précédente, on en déduit que :

   $$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{n+1} \subset E$$

   et chaque inclusion est stricte donc :

   $$\dim(K_1) < \dim(K_2) < \cdots < \dim(K_{n+1})$$

   De plus, u n'est pas injectif donc K_1 n'est pas réduit au vecteur nul et E est de dimension n donc :

   $$0 < \dim(K_1) < \dim(K_2) < \cdots < \dim(K_{n+1}) \leq n$$

   On obtient ainsi $n+1$ entiers distincts compris entre 1 et n ce qui est absurde. Ainsi, il existe un entier $p \in \{1, \dots, n\}$ tel que $K_p = K_{p+1}$.
   - On sait que $I_{p+1} \subset I_p$ et d'après le théorème du rang et le raisonnement précédent :

   $$\begin{aligned}\dim(I_{p+1}) &= n - \dim(K_{p+1}) \\ &= n - \dim(K_p) \\ &= \dim(I_p)\end{aligned}$$

   Ainsi, $I_{p+1} = I_p$.
   - Montrons par récurrence que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_p = K_{p+q}$.
     — La propriété est évidente au rang 0.
     — Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $K_p = K_{p+q}$. Montrons que $K_p = K_{p+q+1}$. On sait déjà que $K_p \subset K_{p+q+1}$. Soit $x \in K_{p+q+1}$. Alors $f^{p+q+1}(x) = 0_E$ donc $f^{p+q}(f(x)) = 0_E$ et ainsi $f(x)$ appartient à K_{p+q} et donc à K_p par hypothèse de récurrence. Ainsi $f^p(f(x)) = 0_E$ donc $f^{p+1}(x) = 0_E$ ce qui implique que x appartient à K_{p+1} qui est égal à K_p par définition de p. On a donc $K_{p+q+1} \subset K_p$ et donc l'égalité.
     — La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc est vraie pour tout $q \geq 0$ par principe de récurrence.

- On sait que pour tout $q \geq 0$, $I_{p+q} \subset I_p$. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(I_p) = \dim(E) - \dim(K_p)$$

et

$$\dim(I_{p+q}) = \dim(E) - \dim(K_{p+q})$$

Or $K_p = K_{p+q}$ d'après le raisonnement précédent donc I_p et I_{p+q} ont la même dimension et $I_{p+q} \subset I_p$ donc ces espaces sont égaux.

- Montrons maintenant que $E = K_p \oplus I_p$. D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(E) = \dim(K_p) + \dim(I_p)$$

Il suffit donc de vérifier que K_p et I_p sont en somme directe. On sait que $\{0_E\} \subset K_p \cap I_p$ car K_p et I_p sont des sous-espaces vectoriels de E. Soit $x \in K_p \cap I_p$. Alors $f^p(x) = 0_E$ et il existe $z \in E$ tel que $x = f^p(z)$. On en déduit que $f^{2p}(z) = 0_E$ donc $z \in K_{2p}$ et d'après le raisonnement précédent, $z \in K_p$. Finalement $x = f^p(z) = 0_E$. Ainsi, $K_p \cap I_p \subset \{0_E\}$ et on a l'égalité par double inclusion.

Exercice 9 –

1. Pour tout $x \in E$,

$$u(u^2(x)) = u^3(x) = 0_E$$

donc $u^2(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$$

L'espace E est de dimension finie donc :

$$\mathrm{rg}(u^2) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u))$$

ce qui implique d'après le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leq \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E)$$

ce qui donne le résultat.

2. Soit $\tilde{u} = u_{\mathrm{Im}(u)} : \mathrm{Im}(u) \to E$. L'image de u est de dimension finie (car E l'est) donc d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(\tilde{u})) + \mathrm{rg}(\tilde{u})$$

Or on a :

$$\mathrm{Ker}(\tilde{u}) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$$

et

$$\mathrm{Im}(\tilde{u}) = \{u(x) \mid x \in \mathrm{Im}(u)\} = \mathrm{Im}(u^2)$$

Ainsi :

$$(*) \quad \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)) + \mathrm{rg}(u^2)$$

Or on a montré que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et on a déjà vu que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$ donc :

$$\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$$

puis

$$\mathrm{rg}(u^2) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u))$$

On obtient alors d'après $(*)$:

$$\dim(\mathrm{Im}(u)) \geq \mathrm{rg}(u^2) + \mathrm{rg}(u^2)$$

ce qui implique finalement le résultat :

$$\mathrm{rg}(u) \geq 2\,\mathrm{rg}(u^2)$$

À retenir

On peut toujours restreindre l'ensemble de définition d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel.

Exercice 10 –

1. Faux. Si $v = -u$ alors :

$$\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(\tilde{0}) = \{0_F\}$$

Il suffit alors de choisir n'importe quel endomorphisme non nul u de E pour obtenir :

$$\{0_F\} \neq \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$$

donc :

$$\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \neq \mathrm{Im}(u + v)$$

2. Faux. On utilise le même type de raisonnement.

38 Projecteurs et symétries

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G.

1. p est un endomorphisme de E.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $p \circ p = \mathrm{Id}_E$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. $\mathrm{Im}(p) = G$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Donner, en le justifiant, le lien entre p et s.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants : $P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\right\}$ et $D = \mathrm{Vect}(w)$ où $w = (1, 0, -1)$. Justifier l'existence de la projection, notée p, sur P parallèlement à D puis donner l'expression de $p((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 –

Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\} \ \text{ et } \ G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$$

1. Donner une base de F et préciser sa dimension.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Donner l'expression de de $p((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4. Soit q la projection sur G parallèlement à F. Donner l'expression de de $q((x,y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Pour aller plus loin

Exercice 5 –

Soit p, q deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
2. p et q sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 6 –

Soit p et q des projecteurs sur un espace vectoriel E. On note $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur de E. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \text{ et } \mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$$

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note P et I respectivement les sous-espaces vectoriels constitués des fonctions paires et impaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. $x \mapsto f(-x)$ est le projeté de f sur P parallèlement à I.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est le projeté de f sur P parallèlement à I.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique de f par rapport à P parallèlement à I.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. p est un endomorphisme de E.	☒ Vrai	☐ Faux
2. $p \circ p = \mathrm{Id}_E$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.	☒ Vrai	☐ Faux
4. $\mathrm{Im}(p) = G$.	☐ Vrai	☒ Faux

Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On pose $p(x) = x_F$. On définit ainsi une application $p : E \to E$ que l'on appelle *projection* sur F parallèlement à G.

Alors p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. De plus $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}) = F$ et $\mathrm{Ker}(p) = G$. En particulier, on a aussi $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

À retenir

La réciproque du point de cours précédent est vraie : si p est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$ alors le noyau et l'image de p sont supplémentaires dans E et p est la projection sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 2 –

Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Par définition, on a $p(x) = x_F$ et $s(x) = x_F - x_G$. Or on sait que $x = x_F + x_G$ donc $x_G = x - x_F$ ce qui implique que :

$$s(x) = x_F - x_G = x_F - (x - x_F) = 2x_F - x = 2p(x) - x$$

Ainsi, $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On pose $s(x) = x_F - x_G$. On définit ainsi une application $s : E \to E$ que l'on appelle *symétrie* par rapport à F parallèlement à G. Alors :

- s est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}$.
- $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.
- En particulier, $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

Réciproquement, si s est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}$ alors $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E et s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 3 –

Montrons que P et D sont supplémentaires en raisonnant par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe $(x_P, x_D) \in P \times D$ tel que $u = x_P + x_D$. Par définition de P, $x_P = (a, b, c)$ où $a + 2b - c = 0$ et par définition de D, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x_D = \alpha(1, 0, -1)$. Ainsi :

$$u - x_D = (x - \alpha, y, z + \alpha) = (a, b, c)$$

donc :

$$x - \alpha + 2y - (z + \alpha) = 0$$

ce qui implique que :

$$\alpha = \frac{x+2y-z}{2}$$

On en déduit que :

$$x_D = \frac{x+2y-z}{2}(1,0,-1)$$

donc :

$$x_P = u - \frac{x+2y-z}{2}(1,0,-1)$$

Ainsi, si la décomposition existe, elle est unique.

Synthèse : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Posons :

$$x_D = \frac{x+2y-z}{2}(1,0,-1) \quad \text{et} \quad x_P = u - x_D$$

On a bien $u = x_D + x_P$. Il est clair que $x_D \in D$. Vérifions que $x_P \in P$. On a :

$$x_P = (x,y,z) - \frac{x+2y-z}{2}(1,0,-1) = \left(x - \frac{x+2y-z}{2}, y, z + \frac{x+2y-z}{2}\right)$$

et :

$$x - \frac{x+2y-z}{2} + 2y - \left(z + \frac{x+2y-z}{2}\right) = 0$$

donc $x_P \in P$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est donc somme d'un élément de D et d'un élément de P et cette décomposition est unique (d'après l'analyse).

Ainsi P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ donc la projection sur P parallèlement à D existe. Le raisonnement nous fournit :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ p((x,y,z)) = \left(x - \frac{x+2y-z}{2}, y, z + \frac{x+2y-z}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x - 2y + z, 2y, x + 2y + z\right)$$

Méthode

Une analyse-synthèse permet de montrer que deux espaces sont supplémentaires et d'obtenir la décomposition d'un vecteur associé à ces sous-espaces. Il est alors facile d'obtenir des expressions de projetés ou de symétriques.

Exercice 4 –

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x,y,z) \in F \iff x = y - z \iff (x,y,z) = (y-z, y, z) \iff (x,y,z) = y(1,1,0) + z(-1,0,1)$$

Ainsi $F = \text{Vect}((1,1,0), (-1,0,1))$ est un sous-espace vectoriel engendré et les vecteurs $(1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ forment une famille génératrice de cet espace. De plus, ces deux vecteurs sont non colinéaires donc forment une famille libre de F et ainsi forment une base de F. La dimension de F est donc 2.

2. On sait que $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$ (car $(1,1,1)$ est non nul). Ainsi :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Il nous suffit alors de montrer que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \alpha(1,1,1)$ et sachant que $x - y + z = 0$, on obtient $\alpha = 0$ puis $(x,y,z) = (0,0,0)$. Ainsi $F \cap G \subset \{(0,0,0)\}$ et l'autre inclusion est vérifiée car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Les espaces F et G sont donc des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

3. D'après la question précédente, F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Soit (x,y,z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Il existe $x_F = (a,b,c) \in F$ et $x_G \in G$ tels que $(x,y,z) = x_F + x_G$. Par définition de G, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x_G = (\alpha,\alpha,\alpha)$. Ainsi :

$$(x,y,z) = (a,b,c) + (\alpha,\alpha,\alpha)$$

Or $x_F \in F$ donc $a - b + c = 0$ et ainsi $(x-\alpha) - (y-\alpha) + (z-\alpha) = 0$ puis finalement :

$$\alpha = x - y + z$$

Ainsi $x_G = (x-y+z)(1,1,1)$ et :

$$x_F = (x,y,z) - x_G = (y-z, -x+2y-z, -x+y)$$

Par définition de la projection sur F parallèlement à G, on a donc :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ p((x,y,z)) = (y-z, -x+2y-z, -x+y)$$

4. D'après la question précédente, on a :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ q((x,y,z)) = (x-y+z)(1,1,1)$$

À retenir

Il est crucial de comprendre que $p + q = \mathrm{Id}$.

Exercice 5 –

Raisonnons par double implication.

1. Supposons que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. Alors :

$$\begin{aligned} p^2 &= (p \circ q) \circ (p \circ q) \\ &= p \circ (q \circ p) \circ q \quad \text{par associativité} \\ &= p \circ q \circ q \quad \text{car } q \circ p = q \\ &= p \circ q \quad \text{car } p \circ q = p \\ &= p \quad \text{car } p \circ q = p \end{aligned}$$

Par un argument symétrique, on montre que $q^2 = q$. Ainsi, p et q sont des projecteurs.

Soit $x \in E$. Si x appartient au noyau de p alors $p(x) = 0_E$ donc par linéarité de q :

$$q(x) = q \circ p(x) = q(p(x)) = q(0_E) = 0_E$$

Donc x appartient au noyau de q. Par un argument symétrique, on montre que si x appartient au noyau de q, il appartient au noyau de p. Ainsi, p et q ont le même noyau.

2. Supposons que p et q sont des projecteurs de même noyau. On sait que :

$$E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(q) \oplus \operatorname{Im}(q)$$

Montrons que $p \circ q = p$. Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(y, z) \in \operatorname{Ker}(q) \oplus \operatorname{Im}(q)$ tel que $x = y + z$. Alors :

$$\begin{aligned} p \circ q(x) &= p \circ q(y+z) \\ &= p(q(y) + q(z)) \quad \text{car } q \in \mathscr{L}(E) \\ &= p(q(z)) \quad \text{car } y \in \operatorname{Ker}(q) \\ &= p(z) \quad \text{car } z \in \operatorname{Im}(q) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} p(x) &= p(y+z) \\ &= p(y) + p(z) \quad \text{car } p \in \mathscr{L}(E) \\ &= p(z) \quad \text{car } y \in \operatorname{Ker}(q) = \operatorname{Ker}(p) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, $p \circ q(x) = p(x)$ donc $p \circ q = p$. Un argument symétrique donne $q \circ p = q$.

Exercice 6 –

1. • Supposons que $p + q$ est un projecteur de E. Alors :

$$(p+q)^2 = p + q$$

donc :

Attention : on ne sait pas encore que $p \circ q = q \circ p$

$$p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$

Or p et q sont des projecteurs donc $p^2 = p$ et $q^2 = q$ donc :

$$p \circ q + q \circ p = \tilde{0}$$

Par composition par p à gauche d'une part, et à droite d'autre part, sachant que $p^2 = p$, on a donc :

$$p \circ q + p \circ q \circ p = \tilde{0} \quad \text{et} \quad p \circ q \circ p + q \circ p = \tilde{0}$$

On en déduit par soustraction que :

$$p \circ q - q \circ p = \tilde{0}$$

Sachant que $p \circ q + q \circ p = \tilde{0}$, on en déduit bien que :

$$p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$$

- Supposons maintenant que $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$. On a :

$$(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$

par hypothèse et sachant que p et q sont des projecteurs de E. Ainsi, $p+q$ est un projecteur de E.

2. On suppose que $p+q$ est un projecteur de E. On a donc $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.

- Commençons par montrer que :

$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$$

Soit $y \in \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$. Alors il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $y = p(x_1) = q(x_2)$. On en déduit que :

$$p(y) = p \circ p(x_1) = p \circ q(x_2)$$

donc comme $p \circ q$ est nul :

$$p(y) = p(x_1) = 0_E$$

Ainsi, $y = 0_E$. On en déduit que $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Im}(q)$ sont en somme directe. Montrons maintenant l'égalité des ensembles par double inclusion. Soit $y \in \operatorname{Im}(p+q)$. Il existe $x \in E$ tel que :

$$y = (p+q)(x) = p(x) + q(x) \in \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$$

donc $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.
Soit $y \in \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$. Il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que :

$$y = p(x_1) + q(x_2)$$

On en déduit par linéarité de p que :

$$p(y) = p \circ p(x_1) + p \circ q(x_2) = p(x_1)$$

De même, on a :

$$q(y) = q \circ p(x_1) + q \circ q(x_2) = q(x_2)$$

Ainsi :

$$y = p(y) + q(y) = (p+q)(y) \in \operatorname{Im}(p+q)$$

Ainsi $\operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(p+q)$. Par double inclusion, on a donc bien montré que :

$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$$

- Montrons maintenant que :

$$\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$. Alors :

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0_E$$

donc $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$. On vient donc de montrer que $\operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q) \subset \operatorname{Ker}(p+q)$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$. Alors :

$$p(x)+q(x)=0_E$$

donc :

$$p(x)=-q(x)$$

puis :

$$p(x)=p\circ p(x)=-p\circ q(x)$$

par linéarité de p. Or $p\circ q=\tilde{0}$ donc $p(x)=0$ donc x appartient au noyau de p. On montre de même que x appartient au noyau de q. Ainsi, on vient de montrer que $\operatorname{Ker}(p+q)$ est inclus dans $\operatorname{Ker}(p)\cap\operatorname{Ker}(q)$ donc par double inclusion :

$$\operatorname{Ker}(p+q)=\operatorname{Ker}(p)\cap\operatorname{Ker}(q)$$

Exercice 7 –

Dans la fiche liée aux espaces supplémentaires, il a été montré que P et I étaient supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et la décomposition de f était de la forme $f=f_P+f_I$ où :

$$f_p : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } f_I : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Remarquons que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_P(x)-f_I(x)=f(-x)$$

On obtient alors facilement les réponses aux vrai/faux.

1. $x \mapsto f(-x)$ est le projeté de f sur P parallèlement à I. ☐ Vrai ☒ Faux
2. $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est le projeté de f sur P parallèlement à I. ☒ Vrai ☐ Faux
3. $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique de f par rapport à P parallèlement à I. ☒ Vrai ☐ Faux

39 Formes linéaires et hyperplans

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Le noyau d'une application linéaire est un hyperplan.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est de dimension 2.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Donner la dimension de l'espace vectoriel :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$$

et un supplémentaire de cet espace.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Soit F la partie de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par :

$$F = \left\{P \in \mathbb{K}_n[X],\ \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x = 0\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner sa dimension.

Exercice 4 –

Soit f une forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, de dimension n, et $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

2. On suppose $f(a) = 1$. Montrer que $p : E \to E$ définie par :

$$\forall x \in E,\ p(x) = f(x)\, a$$

est un projecteur et donner les sous-espaces F et G tels que p soit le projecteur sur F parallèlement à G.

Exercice 5 –

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $L \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ définie par :

$$\forall P \in E,\ L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$$

1. Déterminer l'image de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par L.
2. Déterminer la dimension puis une base du noyau de L.
3. Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$. Montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme P_i de E tel que pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$. *Rappelons que $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker : il vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.*
4. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.
5. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P \in E,\ \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \lambda_0 P(x_0) + \cdots + \lambda_n P(x_n)$$

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que :

$$f((1,1,1)) = 0,\ f((1,0,0)) = 1,\ \text{ et } f((0,0,1)) = 1$$

1. f est définie de manière unique.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Le noyau de f est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. L'équation du noyau de f est $x - 2y + z = 0$.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Le noyau d'une application linéaire est un hyperplan.	☐ Vrai	☒ Faux
2. Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan.	☐ Vrai	☒ Faux
3. Un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est de dimension 2.	☒ Vrai	☐ Faux

Cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et H un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H admet une droite vectorielle comme supplémentaire.
2. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.
3. $\dim(H) = n - 1$.

Quand elles sont vraies, on dit que H est un *hyperplan* de E.

Exercice 2 –

On reconnait l'équation d'un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $(1, 0, 0)$ n'appartient pas à F donc :

$$F \oplus \mathrm{Vect}((1, 0, 0)) = \mathbb{R}^3$$

Méthode

Si H est un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie E et si x est un vecteur de E n'appartenant pas à H, alors H et $\mathrm{Vect}(x)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 3 –

La partie F est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle φ définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \varphi(P) = \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x$$

Elle est bien linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par linéarité de l'intégration et non nulle car $\varphi(1) = 1$. On en déduit directement que F est de dimension n.

À retenir

Quand un ensemble est défini par une seule équation à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut tenter de montrer que c'est un hyperplan.

Exercice 4 –

1. On sait que f est une forme linéaire non nulle ($f(a) \neq 0$) donc son noyau est un hyperplan de E. Or a n'est pas dans cet hyperplan donc $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Vect}(a)$.
2. • L'application p est linéaire car f l'est donc p est un endomorphisme de E. Pour tout $x \in E$, on a :

$$p \circ p(x) = p(f(x)a) = f(x)p(a)$$

car p est linéaire. Ainsi,

$$p \circ p(x) = f(x)f(a)\,a = f(x)\,a = p(x)$$

car $f(a) = 1$.
On en déduit que $p \circ p = p$ donc p est un projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$.

- Pour tout $x \in E$,

$$p(x) = f(x)\, a \in \mathrm{Vect}(a)$$

Donc $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Vect}(a)$. Or p est non nulle ($p(a) = f(a)a = a \neq 0_E$) donc son image est au moins de dimension 1. De plus, $\mathrm{Vect}(a)$ est de dimension 1 donc on en déduit que :

$$F = \mathrm{Vect}(a)$$

- Soit $x \in E$. On a :

$$x \in G \iff p(x) = 0_E \iff f(x)\, a = 0_E \iff f(x) = 0_E$$

car a est non nul. Ainsi,

$$x \in G \iff x \in \mathrm{Ker}(f)$$

et donc $G = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 5 –

Les espaces H_1 et H_2 ont pour dimension $n-1$. On a :

$$H_1 \cap H_2 \subset H_1$$

Ainsi :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \leq \dim(H_1) = n - 1$$

D'après la formule de Grassmann, on sait que $H_1 + H_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

donc :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2)$$

et ainsi :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = 2n - 2 - \dim(H_1 + H_2)$$

$H_1 + H_2$ est un sous-espace vectoriel de E donc au plus de dimension n. Ainsi,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = 2n - 2 - \dim(H_1 + H_2) \geq 2n - 2 - n = n - 2$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$ alors par inclusion et égalité des dimensions, on a :

$$H_1 \cap H_2 = H_1$$

donc $H_1 \subset H_2$ et par égalité des dimensions, on en déduit que $H_1 = H_2$ ce qui est absurde d'après l'énoncé. On en déduit que $\dim(H_1 \cap H_2) \leq n - 2$.
Finalement, on en déduit que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

À retenir

Exercice très classique !

Exercice 6 –

1. Par linéarité de L, on a :

$$L(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{0\leq k \text{ pair}\leq n} \frac{2a_k}{k+1}$$

2. L'application L est une forme linéaire (par linéarité de l'intégration) non nulle ($L(1) = 2$) sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$ donc le noyau de L est un hyperplan de cet espace et est donc de dimension n.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. D'après la question précédente, P appartient au noyau de L si et seulement si :

$$a_0 = -\sum_{2\leq k \text{ pair}\leq n} \frac{2a_k}{k+1}$$

Si n est pair : il existe $p \geq 1$ tel que $n = 2p$. Dans ce cas, l'égalité précédente se réécrit :

$$a_0 = -\frac{2a_2}{3} - \frac{2a_4}{5} - \cdots - \frac{2a_{2p}}{2p+1}$$

Ainsi, P appartient au noyau de L si et seulement si :

$$P(X) = -\frac{2a_2}{3} - \frac{2a_4}{5} - \cdots - \frac{2a_{2p}}{2p+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$$
$$= a_1 X + a_2\left(X^2 - \frac{2}{3}\right) + a_3 X^3 + a_4\left(X^4 - \frac{2}{5}\right) + \cdots + a_{2p}\left(X^{2p} - \frac{2}{2p+1}\right)$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{Vect}\left(X, X^2 - \frac{2}{3}, X^3, X^4 - \frac{2}{5}, \ldots, X^{2p} - \frac{2}{2p+1}\right)$$

La famille engendrant cet espace est de cardinal $n = 2p$ qui est la dimension du noyau donc c'est une base de celui-ci. Dans le cas où $n = 2p+1$, on obtient de même :

$$\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{Vect}\left(X, X^2 - \frac{2}{3}, X^3, X^4 - \frac{2}{5}, \ldots, X^{2p} - \frac{2}{2p+1}, X^{2p+1}\right)$$

ce qui donne une base pour les mêmes raisons.

3. L'application $f : E \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$f(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_n))$$

est une application linéaire car :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![0\,;\,n]\!],\ (\lambda P + Q)(x_i) = \lambda P(x_i) + Q(x_i)$$

Son noyau est réduit au polynôme nul car si un polynôme P de E appartient au noyau de f alors il admet $n+1$ racines distinctes et a un degré inférieur ou égal à n donc il est nul. Ainsi f est une application linéaire injective. Or la dimension de E est égal à la dimension de $\mathbb{R}^{n+1}$ donc f est un isomorphisme. Ainsi tout élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ admet un unique antécédent par f.

On obtient l'existence et l'unicité des polynômes souhaités en appliquant ce résultat à tout élément de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Par exemple, en posant P_0 l'unique antécédent de $(1,0,\dots,0)$ par f, on a bien :

$$f(P_0) = (P_0(x_0), \dots, P_0(x_n)) = (1, 0, \dots 0)$$

et ainsi, $P_0(x_j) = \delta_{0,j}$ pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

4. Cette famille contient $n+1$ éléments, qui est la dimension de E. Il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X) = 0$$

En évaluant, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, en x_k, on obtient (comme $P_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$ et 1 sinon) que :

$$\lambda_k = 0$$

Ainsi, $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre et donc une base de E.

5. Supposons l'existence de $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

Analyse-Synthèse

$$\forall P \in E,\ \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \lambda_0 P(x_0) + \cdots + \lambda_n P(x_n)$$

En particulier, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)\mathrm{d}t = \lambda_0 P_k(x_0) + \cdots + \lambda_n P_k(x_n)$$

donc :

$P_k(x_j) = \delta_{k,j}$

$$\lambda_k = \int_{-1}^{1} P_k(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi, si ce n-uplet existe, il est unique. Posons $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = \lambda_0 P(x_0) + \cdots + \lambda_n P(x_n)$$

où les λ_k sont définis comme précédemment. Alors φ est une forme linéaire sur E et φ et L coïncident sur la base $(P_0, \dots, P_n)$ donc elles sont égales. Ainsi, pour tout $P \in E$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \lambda_0 P(x_0) + \cdots + \lambda_n P(x_n)$$

Exercice 7 –

Les trois vecteurs proposés forment une base de $\mathbb{R}^3$ (famille libre à 3 éléments) donc f est bien définie par l'action sur une base. L'application f est non nulle car $f((1,0,0)) = 1$. Il est clair que :

$$f((1,1,1)) = f((1,0,-1)) = 0$$

et les vecteurs $(1,1,1)$ et $(1,0,-1)$, non colinéaires, appartiennent au plan vectoriel proposé dans la question 3 du vrai/faux. On en déduit les résultats suivants :

1. f est définie de manière unique. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Le noyau de f est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. L'équation du noyau de f est $x - 2y + z = 0$. ☒ Vrai ☐ Faux

40 Matrices et applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p seront des entiers naturels non nuls.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ les bases canoniques de ces deux espaces vectoriels.

1. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Les lignes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ engendrent l'image de f. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Donner la matrice du vecteur $P = 1 + X + 2X^2 - X^3$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Soit $\mathscr{F} = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$. Donner la matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3 –

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \varphi(P) = P - P'$$

1. Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer, de deux manières, l'image de $P = 1 + X + X^2 + X^3$ par φ.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x, y, z)) = (x + y + z, x + y + z, x - y)$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathscr{B}$.

Exercice 5 –
Donner les matrices, dans la base canonique, des endomorphismes suivants de $E = \mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire concernant ces endomorphismes ?

1. $f : E \to E$ définie par :
$$\forall P \in E,\ f(P) = P(X+1)$$
2. $f : E \to E$ définie par :
$$\forall P \in E,\ f(P) = P(X+1) - P(X-1)$$
3. $f : E \to E$ définie par :
$$\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$$

Exercice 6 –
Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que les deux sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans E :
$$F = \mathrm{Vect}((1,-1,1)) \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in E,\ 2x + 4y + z = 0\}$$
2. Déterminer la matrice, dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E, de la projection sur G parallèlement à F.
3. En déduire la matrice, dans la base $\mathscr{B}$, de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –
Soit E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On suppose que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^n = \tilde{0}$ et $f^{n-1} \neq \tilde{0}$. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}$.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f((x,y)) = (x+y, x-y)$$
On considère la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par :
$$\mathscr{B} = ((1,1),(1,0))$$
On note :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

1. inversible. ☐ Vrai ☐ Faux
2. A. ☐ Vrai ☐ Faux
3. B. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. ☐ Vrai ☒ Faux
2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Les lignes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ engendrent l'image de f. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

1. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur x de E s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On appelle *matrice des coordonnées* de x dans la base $\mathscr{B}$, et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, la matrice suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cours

On garde les notations précédentes.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle *matrice de la famille* $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$, et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne (pour $1 \leq j \leq k$) est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_j)$.

Exercice 3 –

1. On a :

- $\varphi(1) = 1$;
- $\varphi(X) = -1 + X$;
- $\varphi(X^2) = -2X + X^2$;
- $\varphi(X^3) = -3X^2 + X^3$.

En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cours

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.
On se donne aussi $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
La matrice de $u \in \mathscr{L}(E, F)$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, est définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Ainsi, pour déterminer cette matrice, il suffit de calculer pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u(e_i) \in F$ et de déterminer ses coordonnées dans la base $\mathscr{C}$.

2. D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(1 + X + X^2 + X^3) &= 1 + X + X^2 + X^3 - (1 + 2X + 3X^2) \\ &= -X - 2X^2 + X^3 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi(P)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui implique que :

$$\varphi(P) = -X - 2X^2 + X^3$$

À retenir

Pour tout $x \in E$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

Exercice 4 –

On a $f((1,0,0)) = (1,1,1)$, $f((0,1,0)) = (1,1,-1)$ et $f((0,0,1)) = (1,1,0)$.
On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 –

Binôme de Newton

1. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned} f(X^k) &= (X+1)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ que nous noterons $\mathscr{B}$ est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls donc elle est inversible. On en déduit que f est un automorphisme de E. En fait, il est facile de remarquer que l'application linéaire $g : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E,\ g(P) = P(X-1)$$

vérifie : $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_E$ Ainsi, $g = f^{-1}$. Or on sait que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right]^{-1}$. Avec le même raisonnement que précédemment (en développant $(X-1)^k$ avec la formule du binôme de Newton), on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cours

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension n que l'on munit de deux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on a l'équivalence suivante :

$$u \text{ est un isomorphisme si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et on a dans ce cas :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F},\mathscr{E}}(u^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)\right)^{-1}$$

2. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On a :

Binôme de Newton

$$\begin{aligned} f(X^k) &= (X+1)^k - (X-1)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (1 - (-1)^{k-i}) X^i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (1 - (-1)^{k-i}) X^i \end{aligned}$$

car pour $i = k$, $1 - (-1)^{k-i} = 0$. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 1-(-1)^n \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & (n-1)(1-(-1)^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La première colonne est nulle et les autres vecteurs colonnes forment une famille libre (la matrice formée des n dernières colonnes en supprimant la dernière ligne est diagonale avec des coefficients diagonaux tous non nuls).

Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de rang n et son noyau est de dimension 1 (d'après le théorème du rang). Alors, f a un noyau de dimension 1 et on a :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1)$$

La dernière ligne de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est nulle donc :

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Par égalité des dimensions, on en déduit que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

À retenir

Le noyau et l'image d'une matrice représentant une application linéaire permettent d'obtenir le noyau et l'image de celle-ci.

3. On a $f(1) = 1$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $f(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. Ainsi, la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux tous non nuls, elle est donc inversible. Ainsi, f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 –

1. Au vu de la question suivante, raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $E = F \oplus G$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$. Il existe alors un vecteur de F, de la forme $\alpha(1, -1, 1)$, et un vecteur $(a, b, c) \in G$ tels que

$$x = \alpha(1, -1, 1) + (a, b, c)$$

Ainsi,

$$(a, b, c) = (x_1 - \alpha, x_2 + \alpha, x_3 - \alpha)$$

Or (a, b, c) appartient à G donc $2a + 4b + c = 0$. Ainsi :

$$2(x_1 - \alpha) + 4(x_2 + \alpha) + x_3 - \alpha = 0$$

ce qui implique que :

$$\alpha = -(2x_1 + 4x_2 + x_3)$$

Synthèse. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Posons :

$$z = \alpha(1, -1, 1) \quad \text{où} \quad \alpha = -(2x_1 + 4x_2 + x_3)$$

et $w = x - z$. Alors z appartient à F (par définition) et $x = z + w$. On a :

$$w = (x_1 - \alpha, x_2 + \alpha, x_3 - \alpha)$$

et :

$$2(x_1-\alpha)+4(x_2+\alpha)+(x_3-\alpha)=2x_1+4x_2+x_3+\alpha=0$$

Ainsi, w appartient à G.

On a donc montré que tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Cette décomposition est unique d'après l'analyse. Ainsi, F et G sont supplémentaires dans E.

À retenir

On peut aussi montrer que F et G sont en somme directe et donner un argument de dimension mais cette méthode ne donne pas la décomposition d'un vecteur, qui sera utile pour la suite.

2. Notons p_G cette projection. D'après la question précédente, en gardant les mêmes notations, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_G(x)=(x_1-\alpha, x_2+\alpha, x_3-\alpha)$$

Ainsi, en notant $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$p_G(e_1)=(1-(-2),-2,-(-2))=(3,-2,2)$$

De même, on obtient :

$$p_G(e_2)=(4,-3,4) \text{ et } p_G(e_3)=(1,-1,2)$$

On obtient ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_G)=\begin{pmatrix}3&4&1\\-2&-3&-1\\2&4&2\end{pmatrix}$$

3. En notant p_F, la projection sur F parallèlement à G et s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G, on sait que :

$$\mathrm{Id}_E=p_F+p_G \text{ et } s_F=p_F-p_G$$

Ainsi :

$$s_F=\mathrm{Id}_E-p_G-p_G=\mathrm{Id}_E-2p_G$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F)=\mathrm{I}_3-2\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_G)=\begin{pmatrix}-5&-8&-2\\4&7&2\\-4&-8&-3\end{pmatrix}$$

Exercice 7 –

1. Montrons que $\mathscr{B}=(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de E.
Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k(x_0)=0_E$$

En composant par f^{n-1}, qui est linéaire, et en utilisant le fait que f^n est l'endomorphisme nul de E, on en déduit que :

$$\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0_E$$

Or par hypothèse $f^{n-1}(x_0)$ n'est pas nul donc $\lambda_0 = 0$. On a ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$$

On réitère alors le procédé avec f^{n-2} et de proche en proche, on obtient ainsi que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\lambda_k = 0$. Ainsi $\mathscr{B}$ est libre et de cardinal n qui est la dimension de E donc $\mathscr{B}$ est une base de E.

2. Sachant que $f^n(x_0) = 0_E$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 –

On a :

$$f((1,1)) = (2,0) = 0(1,1) + 2(1,0)$$

et :

$$f((1,0)) = (1,1) = 1(1,1) + 0(1,0)$$

1. inversible. ☒ Vrai ☐ Faux
2. A. ☐ Vrai ☒ Faux
3. B. ☒ Vrai ☐ Faux

À retenir

Attention à bien exprimer les images des vecteurs de la base de départ dans la base d'arrivée (et pas nécessairement la base canonique).

41 Changement de base

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n sera un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. On note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

1. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id})$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
3. Déterminer $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
4. Soit $x = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Posons :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X+1)P' \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Considérons la famille suivante : $\mathscr{B}' = (1, (X+1), (X+1)^2)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
4. Comment peut-on obtenir les puissances de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$?

Exercice 4 –

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x, y, z)) = (x + y - z, x + 2y + z, y + 2z)$$

1. Écrire la matrice M de f dans la base B.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que la concaténation des bases précédentes constitue une base de $\mathbb{R}^3$. On note B' cette nouvelle base.
4. Déterminer la matrice M' de f dans cette nouvelle base. Quel est le lien entre M et M' ?

Pour aller plus loin

Exercice 5 –

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On suppose que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^n = \tilde{0}$ et $f^{n-1} \neq \tilde{0}$. Montrer l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 – Le vrai/faux de la fin

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, p une projection vectorielle sur E et s une symétrie vectorielle (on suppose ces applications non triviales : non nulles et différentes de $\pm\mathrm{Id}$).

On note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

On peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

1. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id})$.	☐ Vrai	☒ Faux
2. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})$.	☒ Vrai	☐ Faux
3. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.	☒ Vrai	☐ Faux

À retenir

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie. La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est la matrice dont les colonnes sont les matrices des coordonnées des éléments de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 2 –

1. La famille $\mathscr{B}'$ est de cardinal 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_1 + e_2 + e_3) = (0, 0, 0)$$

Alors :

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_2 + \lambda_3 e_3 = (0, 0, 0)$$

Par liberté de (e_1, e_2, e_3), on en déduit que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 = 0$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui donne le résultat souhaité.

2. On a :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On sait que $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$ mais on peut aussi remarquer que :

$$e_1 = e_1,\ e_2 = (e_1 + e_2) - e_1 \text{ et } e_3 = (e_1 + e_2 + e_3) - (e_1 + e_2)$$

Ainsi :

$$P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À retenir

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est inversible d'inverse la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

4. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cours

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E et $x \in E$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$$

Exercice 3 –

1. L'application f est bien définie : si P est dans $\mathbb{R}_2[X]$, P' est dans $\mathbb{R}_1[X]$ et ainsi $f(P)$ appartient bien à $\mathbb{R}_2[X]$. La linéarité est évidente par linéarité de la dérivation et par distributivité. Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On a $f(1) = 0$, $f(X) = X + 1$ et $f(X^2) = 2X + 2X^2$. On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. La famille $\mathscr{B}' = (1, (X+1), (X+1)^2)$ est une famille de polynômes non nuls étagée en degrés et de cardinal 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Par simple calcul, on a : $f(X + 1) = (X + 1)$ et $f((X + 1)^2) = 2(X + 1)^2$. On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Par changement de base, on sait que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\, P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

Par définition de la matrice de passage, on a :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $X = -1 + (X+1)$ et $X^2 = (X+1)^2 - 2(X+1) + 1$ donc :

$$P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'intérêt de changer de base est que dans la base $\mathscr{B}'$, la matrice de f est diagonale ce qui permet d'obtenir facilement la matrice de f^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) = \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right]^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Or, par changement de base, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n)P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

ou encore :

$$\left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right]^n = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right]^n\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

Il suffit alors de terminer le calcul.

Cours – Formule de changement de base.

Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie F, et $u \in L(E,F)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{Id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

ou encore :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\,P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

En particulier, si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont deux bases de E et $u \in L(E)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

Exercice 4 –

1. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. • Déterminons une base du noyau de f. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors (x,y,z) appartient au noyau de f si et seulement si $f((x,y,z)) = (0,0,0)$, ce qui est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ x+2y+z & = & 0 \\ y+2z & = & 0 \end{array}\right.$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme la deuxième ligne en : $y + 2z = 0$.

Ainsi, (x, y, z) appartient au noyau de f si et seulement si :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z \\ y = -2z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((3, -2, 1))$$

Le vecteur $(3, -2, 1)$ étant non nul, il forme une base du noyau de f.

- D'après le théorème du rang, on sait que l'image de f est de dimension 2. On sait de plus que :

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1, 0) \quad \text{et} \quad f((0, 1, 0)) = (1, 2, 1)$$

donc $(1, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'image de f, qui est de dimension 2. On en déduit que $((1, 1, 0), (1, 2, 1))$ est une base de l'image de f.

3. La famille $\mathscr{B}'$ est de cardinal 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1(3, -2, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

On a alors :

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On utilise alors l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes impliquent que $\lambda_1 = 0$ donc $\lambda_3 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$ (avec la première ligne). La famille $\mathscr{B}'$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Le vecteur $(3, -2, 1)$ appartient au noyau de f donc :

$$f((3, -2, 1)) = (0, 0, 0)$$

Par définition de f, on a :

$$f((1, 1, 0)) = (2, 3, 1) = (1, 1, 0) + (1, 2, 1)$$

De même,

$$f((1, 2, 1)) = (2, 6, 4) = -2(1, 1, 0) + 4(1, 2, 1)$$

Ainsi,

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base nous donne l'égalité suivante :

$$M' = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\, M\, P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

À retenir

Pour trouver la décomposition de l'image par f de $(1, 1, 0)$ dans la base $\mathscr{B}'$, il suffit de remarquer que cette image appartient à l'image de f qui est générée par $(1, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$. On trouve ensuite facilement les coefficients (ou alors, on résout un système...).

Exercice 5 –

Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrons que $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de E. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$$

En composant par f^{n-1}, qui est linéaire, et en utilisant le faut que f^n est l'endomorphisme nul de E, on en déduit que $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0_E$. Or par hypothèse $f^{n-1}(x_0)$ n'est pas nul donc $\lambda_0 = 0$. On a ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$$

On réitère alors le procédé avec f^{n-2} et de proche en proche, on obtient que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\lambda_k = 0$. Ainsi $\mathscr{B}$ est libre et de cardinal n qui est la dimension de E donc $\mathscr{B}$ est une base de E. Sachant que $f^n(x_0) = 0_E$, on a bien :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode

Si une base $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ de E vérifie la condition de l'énoncé, on a $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, \dots,$ $f(e_{n-1}) = e_n$ et $f(e_n) = 0_E$. Cela justifie le choix fait dans la correction.

Exercice 6 –

Il suffit de travailler dans une base adaptée aux égalités suivantes :

$$E = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(p) \ \text{ et } \ E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$$

et de remarquer que p n'est pas bijective alors que s l'est.

On peut aussi utiliser le fait que $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

1. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.	☐ Vrai	☒ Faux
4. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.	☒ Vrai	☐ Faux

42 Noyau, image et rang d'une matrice

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p désigneront deux entiers naturels non nuls.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Le rang de I_n est n. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Une matrice qui a un rang nul est la matrice nulle. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Déterminer l'image de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 –

Déterminer le noyau de la matrice A défini par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'image de A à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes.

Exercice 5 –
Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau de A à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

Exercice 6 –
Déterminer, sans gros calcul, le rang de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et une base de son noyau.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 8 –
Déterminer le rang de $A = (i + j + ij)_{1 \le i,j \le n}$ pour $n \ge 2$.

Exercice 9 –
Soit $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 2 telles que $(AB)^2 = AB$. Montrer que $BA = \mathrm{I}_2$.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

1. Le rang d'une somme de deux matrices est égal à la somme des rangs des deux matrices. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le rang d'une somme de deux matrices est inférieur ou égal à la somme des rangs des deux matrices. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Le rang de I_n est n. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Une matrice qui a un rang nul est la matrice nulle. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

L'image d'une matrice A est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. On en déduit ici, comme les colonnes sont toutes multiples de la première, que :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Exercice 3 –

Cours

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le noyau de A, noté $\mathrm{Ker}(A)$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{n,1}\}$$

On résout, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, le système suivant :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Celui-ci se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 0\\ x + 2y + 3z & = & 0\\ x + 2y + 3z & = & 0\end{array}\right.$$

La dernière ligne est inutile, on résout donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 0\\ x + 2y + 3z & = & 0\end{array}\right.$$

On utilise alors l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour obtenir le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 0\\ y + z & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z\\ y & = & -z\end{array}\right.$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{\begin{pmatrix}-z\\-z\\z\end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Méthode

Voici les opérations élémentaires possibles lors de la résolution d'un système linéaire :

— *L'échange de deux lignes*
On permute les lignes L_i et L_j, opération codée $L_i \leftrightarrow L_j$.

— *La multiplication d'une ligne par un scalaire non nul*
On remplace la ligne L_i par a fois la ligne L_i avec $a \neq 0$, opération codée $L_i \leftarrow aL_i$.

— *L'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne*
On ajoute à la ligne L_i, b fois la ligne L_j, avec $i \neq j$, opération codée $L_i \leftarrow L_i + bL_j$.

Exercice 4 –

On effectue les opérations élémentaires suivantes $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ sur la matrice A :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors A et A' ont le même rang et la même image. Les deux premières colonnes de A' sont non colinéaires et la dernière colonne est égale à la deuxième. On en déduit que la matrice A' est de rang 2 (tout comme A) et une base de l'image de A' (donc de A) est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Méthode

Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice conservent le rang et l'image de celle-ci. Attention, si on utilise des opérations élémentaires sur les lignes, seul le rang est conservé.

Exercice 5 –

On effectue les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$ sur la matrice A :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$ sur la matrice A' :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et A'' ont le même noyau. Il suffit donc de résoudre, pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t & = & 0 \\ -y - 2z - 2t & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & -2(-2z - 2t) - 3z - 2t \\ y & = & -2z - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & z + 2t \\ y & = & -2z - 2t \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z + 2t \\ -2z - 2t \\ z \\ t \end{pmatrix}, (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

donc :

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Méthode

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice conservent le noyau de celle-ci. Attention à ne pas utiliser d'opérations élémentaires sur les colonnes pour déterminer le noyau.

Exercice 6 –

Les deux premières colonnes de A sont non colinéaires donc le rang de A est supérieur ou égal à deux. En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A, on remarque que $2C_1 + C_2 = C_3$. Ainsi, C_3 est combinaison linéaire de C_1 et C_2 donc le rang de A est inférieur ou égal à deux. On vient donc de montrer que le rang de A est égal à deux. D'après le théorème du rang, le noyau de A est donc de dimension 1 et la relation obtenue sur les colonnes montre que :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$$

Ce vecteur étant non nul, il forme une base de ce noyau.

Cours – Théorème du rang.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$p = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$$

Exercice 7 –

Distinguons plusieurs cas.

- Si $(x, y) = (0, 0)$, la matrice A est nulle donc son rang est nul.
- Si $x = 0$ et $y \neq 0$. Alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix}$$

  Les vecteurs colonnes de A sont les multiples (non nuls) des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donc le rang de A est égal à 4.

  À retenir

  Le rang d'une famille finie et libre de vecteurs est égal à son cardinal.

- Si x est non nul. L'opération $L_2 \leftarrow xL_2 - yL_1$ implique que :

L'opération est licite car $x \neq 0$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x^2 & 0 & -y^2 \\ 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}\right)$$

L'opération $L_3 \leftarrow x^2L_3 - yL_2$ implique que :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x^2 & 0 & -y^2 \\ 0 & 0 & x^3 & y^3 \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}\right)$$

L'opération $L_4 \leftarrow x^3L_4 - yL_3$ implique que :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 - y^4 \end{pmatrix}\right)$$

Le réel x étant non nul, la matrice A est donc au moins de rang 3 et elle est de rang 4 si et seulement si $x^4 \neq y^4$, c'est à-dire si et seulement si $x \neq y$ et $x \neq -y$.

Méthode

Dans le cas d'une matrice définie à l'aide d'un ou de plusieurs paramètres, il faut généralement :

— Utiliser les opérations élémentaires pour se ramener à une matrice échelonnée.

— Distinguer des cas, en particulier pour ne pas multiplier une ligne et/ou une colonne par un paramètre pouvant être nul.

Exercice 8 –

Notons pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, C_j, la j-ième colonne de A. Alors :

$$C_j = \begin{pmatrix} 1+2j \\ 2+3j \\ 3+4j \\ \vdots \\ n+(n+1)j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}(X_1, X_2)$$

où

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le rang de la matrice A qui est égal à la dimension du sous-espace engendré par ses colonnes, est inférieur ou égal à 2. Or les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires donc le rang de A est supérieur ou égal à 2. Ainsi, le rang de A est égal à 2.

Exercice 9 –

Par hypothèse, on a :

AB est carrée d'ordre 3

$$ABAB - AB = 0_3$$

donc $A(BA - \mathrm{I}_2)B = 0_3$. La matrice B est de rang 2 et l'image de B est incluse dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 2 donc :

$$\mathrm{Im}(B) = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$A(BA - \mathrm{I}_2)(BX) = 0_{3,1}$$

et sachant que $\mathrm{Im}(B) = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que pour tout $Y \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$A(BA - \mathrm{I}_2)Y = 0_{3,1}$$

Ainsi,

$$A(BA - \mathrm{I}_2) = 0_{3,2}$$

On sait aussi que le rang de A vaut 2 et $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème du rang, le noyau de A est réduit au vecteur nul. Or pour tout $Y \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$(BA - \mathrm{I}_2)Y \in \mathrm{Ker}(A)$$

donc :

$$(BA - \mathrm{I}_2)Y = 0_{2,1}$$

On en déduit que $BA - \mathrm{I}_2 = 0_2$ donc $BA = \mathrm{I}_2$.

À retenir

Une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est nulle si et seulement si son noyau est $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, ce qui est équivalent à :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ MX = 0_{n,1}$$

Exercice 10 –

1. Faux. I_n est de rang n et $2\mathrm{I}_n$ aussi.
2. Vrai. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a :

$$(A + B)X = AX + BX \in \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$$

Ainsi $\mathrm{Im}(A + B) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$. On en déduit que :

$$\mathrm{rg}(A + B) \leq \dim(\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B))$$

donc d'après la formule de Grassmann :

$$\mathrm{rg}(A + B) \leq \dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(B)) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$$

43 Matrices semblables et trace

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. La trace d'un produit bien défini de matrices est égal au produit des traces de ces matrices. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Une matrice semblable à la matrice identité est la matrice identité. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f((x, y)) = (x + y, x - y)$$

1. Soit $\mathscr{C} = ((1, 0), (1, 1))$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 –

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité fondamentale suivante :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

2. En déduire que deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.

Exercice 4 –

Soit $n \geq 1$. On considère l'application trace définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Que peut-on dire du noyau de la trace ?
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5 –
Soit $n \geq 3$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (X^2+1)P''(X)$$

1. Montrer que φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la trace de φ.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 7 –

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Soit $n \geq 1$ et $S : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$S((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}a_{j,i}$$

1. Montrer que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $S(AB) = S(BA)$.
2. Montrer que deux matrices semblables ont la même image par S.

Exercice 9 –
Soit $n \geq 1$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

1. Une matrice semblable à une matrice diagonale est diagonale. ☐ Vrai ☐ Faux
2. La trace d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ est bien définie. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Pour $n \geq 2$, la trace de I_n vaut n et celle de I_n^2 aussi et $n^2 \neq n$. ☐ Vrai ☒ Faux
2. Une matrice semblable à la matrice identité est la matrice identité. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. La famille $\mathscr{C}$ a pour cardinal 2, qui est la dimension de $\mathbb{R}^2$. Pour montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Or les deux vecteurs de cette famille sont non colinéaires donc cette famille est bien libre. On en déduit que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   Déterminons la matrice de f dans cette base. On a :

$$f((1,0)) = (1,1) = 0(1,0) + 1(1,1)$$

   et

$$f((1,1)) = (2,0) = 2(1,0) + 0(1,1)$$

   Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

> **À retenir**
> Il faut exprimer $f((1,0))$ et $f((1,1))$ dans la base $\mathscr{C}$ et non dans la base canonique.

2. La première matrice est la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$. Il suffit de montrer que la deuxième matrice est la matrice de f dans une base de $\mathbb{R}^2$ pour montrer que ces deux matrices sont semblables. Considérons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$f((1,0)) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$

   et

$$f((0,1)) = (1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1)$$

   On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   donc les matrices considérées sont bien semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

> **Cours**
> Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si une des deux conditions équivalentes suivantes est vraie :
>
> — A et B sont les matrices d'un même endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n.
>
> — Il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, inversible, telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 3 –

Cours
La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

1. La matrice AB est carrée d'ordre n. On a :

Il est important de savoir déterminer l'expression d'un coefficient d'une matrice produit

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{n}(AB)_{k,k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{k,i}b_{i,k}\\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i}\\ &= \sum_{i=1}^{p}(BA)_{i,i}\\ &= \mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

2. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = PAP^{-1}$. On a (en utilisant la question précédente avec les deux matrices PA et P^{-1}) :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}((PA)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_nA) = \mathrm{Tr}(A)$$

À retenir
Ces deux points de cours sont très importants. Il faut savoir les redémontrer. Le deuxième permet de définir la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n : c'est la trace commune de toute matrice représentant cet endomorphisme dans une base de E.

Exercice 4 –

1. La trace est une forme linéaire non nulle (l'image de I_n par l'application trace vaut n qui est différent de 0) donc son noyau est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$.

   Cours
   Le noyau d'une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension n est un hyperplan de celui-ci : c'est-à-dire, un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

2. On sait que I_n n'appartient pas au noyau de la trace donc par propriété d'un hyperplan, Ker(Tr) et $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

> **Cours**
> Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie et a un vecteur de E n'appartenant pas à H. Alors H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 5 –

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il est évident que $\varphi(P)$ est un polynôme à coefficients réels.

Le degré P'' est inférieur ou égal à $n-2$ donc par produit, on a :

> Le degré d'un produit de polynômes est égal à la somme des degrés de ces deux polynômes

$$\deg(\varphi(P)) = \deg(X^2+1) + \deg(P''(X)) \leq 2 + n - 2 = n$$

Ainsi, $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ donc φ est bien définie.

Montrons que φ est linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + Q) &= (X^2+1)(\lambda P + Q)'' \\
&= (X^2+1)(\lambda P'' + Q'') \\
&= \lambda(X^2+1)P'' + (X^2+1)Q'' \\
&= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)
\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité. On en déduit que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il suffit de déterminer la trace d'une matrice de φ dans une base fixée de $\mathbb{R}_n[X]$. Utilisons la base canonique. On a $\varphi(1) = \varphi(X) = 0$. Pour tout $k \in [\![2\,;\,n]\!]$, on a :

$$\varphi(X^k) = (X^2+1)(k(k-1)X^{k-2}) = k(k-1)X^k + k(k-1)X^{k-2}$$

On en déduit alors que :

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)$$

Déterminons la valeur de cette somme par changement d'indice :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{2n-1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{(n-1)(n-1)}{2} \times \frac{2n+2}{3} \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}
\end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de la trace de φ.

Méthode

La trace d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie E est par définition, la trace de n'importe quelle matrice de f dans une base de E. Si aucune base n'est suggérée dans l'énoncé d'un exercice, il suffit bien souvent d'utiliser la base canonique de l'espace considéré.

Exercice 6 –

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à A (autrement dit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $u : X \mapsto AX$). On cherche $\mathscr{F} = (f_1, f_2)$ une base de $\mathbb{K}^2$ tel que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u)$ ce qui est équivalent à $u(f_1) = 5f_1$ et $u(f_2) = 6f_2$.

On résout pour cela les équations $AX = 5X$ et $AX = 6X$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^2$:

— Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a :

$$AX = 5X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & = & 5x_1 \\ -3x_1 + 8x_2 & = & 5x_2 \end{array} \right. \iff x_1 = x_2$$

— Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a :

$$AX = 6X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & = & 6x_1 \\ -3x_1 + 8x_2 & = & 6x_2 \end{array} \right. \iff 3x_1 = 2x_2$$

Posons donc $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. La famille $\mathscr{F} = (f_1, f_2)$ est libre (vecteurs non colinéaires) dans un espace de dimension 2 donc c'est une base de $\mathbb{K}^2$. Par le raisonnement précédent, on a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u) = B$ et ainsi A et B sont semblables.

Méthode

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour montrer que A et B sont semblables, on peut suivre la démarche suivante :

— On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à f. Autrement dit, l'endomorphisme défini par :

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, f(X) = AX$$

— On cherche une base de $\mathbb{K}^n$ tel que la matrice de f dans celle-ci soit B.

Exercice 7 –

Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. On cherche une base $\mathscr{B}' = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit B.

Analyse. Soit $\mathscr{B}'$ une telle base. En notant abusivement 0 le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, on a alors :

$$f(x_1) = 0,\ f(x_2) = x_1 \quad \text{et} \quad f(x_3) = 0$$

Le vecteur x_1 est dans l'image et le noyau de f. Au vu de la matrice A, on pose :

Im(A) est engendrée par les colonnes de A

$$x_1 = (1, -3, -2)$$

On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f(x_1) = (0, 0, 0)$. De plus, en posant $x_2 = (0, 1, 0)$, on a d'après la matrice A, $f(x_2) = x_1$. Posons $x_3 = (0, 1, 1)$. On a :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f(x_3) = (0, 0, 0)$.

Synthèse. Posons :

$$x_1 = (1, -3, -2),\ x_2 = (0, 1, 0) \ \text{ et } \ x_3 = (0, 1, 1)$$

D'après l'analyse, $f(x_1) = f(x_3) = (0, 0, 0)$ et $f(x_2) = x_1$. Montrons que $\mathscr{B}' = (x_1, x_2, x_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Cette famille est de cardinal 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$: il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Alors on a $a = 0$, $-3a + b + c = 0$ et $-2a + c = 0$. On en déduit donc que $a = 0$ puis $c = 0$ et finalement $b = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a de plus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, les matrices A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans des bases différentes donc sont semblables.

Méthode

Dans ce type de raisonnement, il ne faut pas oublier de vérifier que la base cherchée est effectivement une base de l'espace considéré.

Exercice 8 –

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :

$$\begin{aligned} S(AB) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} (AB)_{i,j}(AB)_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}b_{l,i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}a_{j,l}b_{l,i} \end{aligned}$$

On permute alors les sommes :

$$\begin{aligned} S(AB) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}a_{j,l}b_{l,i}a_{i,k} \\ &= \sum_{1\leq k,l\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{l,i}a_{i,k}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}a_{j,l}\right) \\ &= \sum_{1\leq k,l\leq n} (BA)_{l,k}(BA)_{k,l} \\ &= S(BA) \end{aligned}$$

2. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Alors :

Raisonnement analogue à celui effectué pour la trace

$$\begin{aligned} S(A) &= S((PB)P^{-1}) \\ &= S(P^{-1}(PB)) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= S(\mathrm{I}_n B) \\ &= S(B) \end{aligned}$$

Exercice 9 –

Supposons que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$$

Utilisons les matrices de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(p, r) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Par hypothèse,

$$\mathrm{Tr}(AE_{p,r}) = \mathrm{Tr}(BE_{p,r})$$

Or, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$(AE_{p,r})_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(E_{p,r})_{k,i}$$

et $(E_{p,r})_{k,i}$ vaut 1 si et seulement si $(p, r) = (k, i)$ et vaut 0 sinon. Ainsi,

$$(AE_{p,r})_{i,i} = A_{i,p}\delta_{i,r}$$

où $\delta_{i,r}$ est le symbole de Kronecker. Ainsi,

$\delta_{i,r} = 1$ si $i = r$ et 0 sinon

$$\text{Tr}(AE_{p,r}) = \sum_{i=1}^{n}(AE_{p,r})_{i,i} = A_{r,p}$$

Le raisonnement est analogue pour $BE_{p,r}$ donc on en déduit que :

$$A_{r,p} = B_{r,p}$$

Ceci étant vrai pour tout $(p, r) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$, on en déduit que $A = B$.

À retenir

Si on dispose d'une propriété vérifiée par toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, tester celle-ci sur les matrices de la base canonique permet souvent d'obtenir des résultats plus simples.

Exercice 10 –

1. Faux. Posons :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que P est inversible et :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont semblables mais ne sont pas toutes les deux diagonales.

2. Faux. On peut définir la trace d'un endomorphisme uniquement.

44 Groupe symétrique et déterminants

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Permuter deux lignes d'un déterminant ne change pas la valeur de celui-ci. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Permuter deux colonnes d'un déterminant ne change pas la valeur de celui-ci. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si un déterminant a deux colonnes égales, il est nul. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \geq 1$. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

1. Donner les éléments de S_2.
2. Donner les éléments de S_3.
3. Donner le nombre d'éléments de S_n.

Exercice 3 –

Soit $\sigma \in S_7$ la permutation définie par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles de supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.

Exercice 4 –

Avec très peu de calcul, donner la valeur des déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ et } D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 5 –

Soit $\mathscr{B} = ((1,1,1), (-1,2,1), (1,1,2))$. Calculer le déterminant de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Qu'en déduit-on ?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Donner une forme factorisée de :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 7 –

Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, le déterminant D_n de taille n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

On commencera par calculer D_1 et D_2 puis on trouvera un lien entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n pour $n \geq 1$.

Exercice 8 –

Soit $n \geq 2$ et $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \frac{M + M^T}{2}$$

Donner, sans aucun calcul, le déterminant de f.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Calculer le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ u(M) = M^T$$

Exercice 10 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

Exercice 11 –

Soit $n \geq 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels et a, b deux réels distincts. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que Δ_n est une fonction affine.
2. Donner son expression.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n \geq 2$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose :

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. $V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i)$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. $V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.	☐ Vrai	☐ Faux
5. La matrice associée à $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible si et seulement si les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Cela change le signe d'un déterminant. ☐ Vrai ☒ Faux

2. Cela change le signe d'un déterminant. ☐ Vrai ☒ Faux

3. Si un déterminant a deux colonnes égales, il est nul. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. S_2 contient l'identité et la transposition $(1\,2)$.

> **Cours**
> Une transposition de S_n est une permutation échangeant deux entiers distincts a et b (compris entre 1 et n) et laissant fixe les autres entiers. On la note $(a\,b)$.

2. S_3 contient l'identité ; les transpositions $(1\,2)$, $(1\,3)$, $(2\,3)$; et les cycles $(1\,2\,3)$ et $(1\,3\,2)$.

> **Cours**
> Soit $a_1, \ldots, a_k$ des entiers deux à deux distincts compris entre 1 et n (et $k \geq 2$).
> Le cycle $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)$ est par définition la permutation σ de $\mathscr{S}_n$ définie de la manière suivante :
> $$\forall i \in \{1, \ldots, k-1\},\ \sigma(a_i) = a_{i+1},$$
> $\sigma(a_k) = a_1$ et :
> $$\forall i \in \{1, \ldots, k\} \backslash \{a_1, \ldots, a_k\},\ \sigma(i) = i$$

3. S_n contient $n!$ éléments.

Exercice 3 –

1. On a $\sigma = (1\,2\,5)(3\,6\,4)$.

2. La signature de $(1\,2\,5)$ est 1 et de même pour $(3\,6\,4)$. La signature étant un morphisme de groupes, on en déduit que :
$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1\,2\,5))\,\varepsilon((3\,6\,4)) = 1$$

> **Méthode**
> Pour déterminer la signature d'une permutation, on peut suivre la démarche suivante :
> — On décompose la permutation en produit de cycles de supports disjoints.
> — On détermine la signature de chaque cycle (un cycle de longueur $p \geq 1$ a pour signature $(-1)^{p-1}$).
> — On conclut en utilisant que la signature est un morphisme de groupes.

Exercice 4 –

- On remarque que D_1 est un déterminant triangulaire donc :

$$D_1 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

> **À retenir**
> Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

- La troisième colonne de D_2 est égale à sa première colonne donc $D_2 = 0$.
- Pour D_3, on remarque que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc $D_3 = 0$.

> **Cours**
> Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
> — Si A a deux colonnes égales alors $\det(A) = 0$.
> — Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes de A alors $\det(A) = 0$.
> — Les propriétés précédentes restent vraies pour les lignes car $\det(A) = \det(A^T)$.

Exercice 5 –

On souhaite calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

On utilise les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe alors par rapport à la première colonne :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Ce déterminant est non nul donc la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

— On appelle *déterminant* de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$, et on note $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, le déterminant de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

— $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.

À retenir

Voici les opérations élémentaires associées au calcul d'un déterminant :

- Permuter deux lignes change le signe du déterminant.
- On peut ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne sans modifier la valeur du déterminant.
- Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée donc les opérations précédentes sont valables aussi pour les colonnes.

Exercice 6 –

On remarque que la somme des coefficients sur les colonnes est constante. En utilisant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}$$

puis par linéarité par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

On utilise ensuite les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

donc :

On développe par rapport à la colonne 1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} &= (a+b+c)((a-b)(a-c) + (c-b)^2) \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \end{aligned}$$

Méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on définit la matrice $\Delta_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ comme étant la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de A. Alors :

— On peut développer par rapport à la j-ième colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\Delta_{i,j})$$

— On peut développer par rapport à la i-ième ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\Delta_{i,j})$$

Avant d'utiliser cette formule, il est intéressant d'utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes pour faire apparaitre le plus de coefficients nuls possible.

Exercice 7 –

On a $D_1 = 2$ et

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Déterminons une relation de récurrence.

Soit $n \geq 1$. On développant par rapport à la première colonne, on a :

$$D_{n+2} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdot & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

et en développant par rapport à la première ligne le deuxième déterminant :

$$D_{n+2} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]} = 2D_{n+1} - D_n$$

La suite $(D_n)_{n\geq 1}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

admet pour unique solution 1. Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ D_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n$$

Or $D_1 = 2$ donc $\lambda + \mu = 2$. De même, $D_2 = 3$ donc $\lambda + 2\mu = 3$. La première équation donne $\lambda = 2 - \mu$ ce qui implique grâce à la deuxième :

$$2 - \mu + 2\mu = 3$$

et ainsi $\mu = 1$ puis $\lambda = 1$. Ainsi :

$$\forall n \geq 1,\ D_n = 1 + n$$

Exercice 8 –

Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M)$ est une matrice symétrique. Or, il existe des matrices non symétriques dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car $n \geq 2$. Ainsi, f n'est pas surjective et donc n'est pas bijective. Le déterminant de f est donc nul.

Cours

- Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement si son déterminant est non nul.

Exercice 9 –

On sait que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dans une base adaptée, on en déduit que la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_j \end{pmatrix}$$

où k (respectivement j) est la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$). On en déduit que :

$$\det(u) = (-1)^j = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Toutes les matrices représentant u ont le même déterminant. On définit le *déterminant* de u comme le déterminant d'une de ces matrices.

À retenir

Les dimensions suivantes sont à connaitre :

$$\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 10 –

Les opérations élémentaires (dans cet ordre) $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}$, …, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ permettent d'obtenir un déterminant triangulaire valant $n!$.

Exercice 11 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, on a :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a - \lambda_1 & \cdots & \cdots & a - \lambda_1 \\ b + x & \lambda_2 - b & a - b & \cdots & a - b \\ b + x & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a - b \\ b + x & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n - b \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, $\Delta_n(x)$ est égal à :

$$(\lambda_1 + x)K_1 - (b+x)K_2 + (b+x)K_3 + \cdots + (-1)^{n+1}(b+x)K_n$$

Où K_1, ..., K_n, sont des déterminants de taille $n-1$ ne dépendant pas de x donc constants. Ainsi, Δ_n est une fonction affine car somme de fonctions affines.

2. D'après la question précédente, il existe deux réels p et q tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_n(x) = px + q$$

En reprenant l'expression de départ de Δ_n, on remarque que $\Delta_n(-a)$ et $\Delta_n(-b)$ sont des déterminants triangulaires et sont donc faciles à calculer :

$$\Delta_n(-a) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - b)$$

Les réels $-a$ et $-b$ sont différents donc on obtient la pente facilement :

$$p = \frac{\Delta_n(-a) - \Delta_n(-b)}{-a-(-b)} = \frac{\Delta_n(-a) - \Delta_n(-b)}{b-a}$$

puis $q = \Delta_n(-a) + ap$.

Exercice 12 –

1. $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. $V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n}(a_j - a_i)$. ☐ Vrai ☒ Faux
4. $V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)$. ☒ Vrai ☐ Faux
5. La matrice associée à $V_n(a_1, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement si les scalaires $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts. ☒ Vrai ☐ Faux

À retenir

Le déterminant est appelé déterminant de Vandermonde. Il est important de connaitre parfaitement son expression.

45 Compléments d'intégration et formules de Taylor

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|e^x - 1 - x\right| \leq \dfrac{x^2}{2} e^x$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = e$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. Déterminer la limite $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{2k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(n + 2k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

1. a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1 + x) \leq x$.

   b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

2. Calculer la limite de $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 –

1. Démontrer que :

$$\forall x \in [-1, 0],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\ln(1 - x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{1}{n + 1}$$

2. En déduire que, pour tout $x \in [-1, 0]$, la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge et préciser sa somme.

Exercice 5 –

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer la limite de $\dfrac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}$ lorsque h tend vers 0.

Exercice 6 –

Soit (a, b) un couple de réels $(a < b)$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\,\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

1. Démontrer que :

$$\forall x \in [0, \pi]\,,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

2. En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{t+x}\right) \mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 8 –

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas constante, que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on note : $M_0 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0,\ \begin{cases} |f(x+h) - f(x) - h\,f'(x)| \leq \dfrac{M_2\,h^2}{2} \\[2ex] |f(x-h) - f(x) + h\,f'(x)| \leq \dfrac{M_2\,h^2}{2} \end{cases}$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0,\ |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\,h}{2}$$

3. Prouver finalement que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

1. Si f est continue sur $[0, 1]$ alors : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|(1 + x^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{\ln(1 + x^2)}{n}\right| \leq \frac{M}{n^2}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle sur $[0, x]$ à l'ordre 1. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours – Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in I$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k\right| \leq M \frac{|b - a|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

2. La limite est $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, donc $\mathrm{e} - 1$. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours – Sommes de Riemann.

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b - a}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b - a}{n}\right)$$

Exercice 2 –

Méthode

Quand on cherche la limite (ou un équivalent) d'une somme de la forme $\sum_{k=0}^{n} u(n, k)$ dont le terme général dépend à la fois de k et de n, on peut essayer de faire apparaître une somme de Riemann en exprimant $u(n, k)$ sous la forme $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + 2x)$ est continue sur $[0, 1]$ et on a :

On remarque que c'est une somme de Riemann.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Il s'agit d'une somme de Riemann, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

De plus les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1+2x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(1 + 2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1 + 2x}\,\mathrm{d}x \\
&= [x\ln(1 + 2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + 2x - 1}{1 + 2x}\,\mathrm{d}x \\
&= [x\ln(1 + 2x)]_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right)\mathrm{d}x \\
&= [x\ln(1 + 2x)]_0^1 - \left[x - \frac{\ln(1 + 2x)}{2}\right]_0^1 \\
&= \ln(3) - 1 + \frac{\ln(3)}{2} \\
&= \frac{3\ln(3)}{2} - 1
\end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3\ln(3)}{2} - 1$$

2. On peut remarquer que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \ln(n + 2k) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(n\left(1 + \frac{2k}{n}\right)\right) \\
&= n\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \\
&= n\left[\ln(n) + u_n\right]
\end{aligned}$$

Or la suite u converge, donc u_n est négligeable devant $\ln(n)$ et donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(n + 2k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

Exercice 3 –

1. **a)** La fonction ln est concave et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc son graphe est « en dessous » de ses tangentes.
Or la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$, donc :

$\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x) \leq x - 1$$

et donc, en substituant $1 + x$ à x :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ln(1 + x) \leq x$$

b) La fonction $f : t \mapsto \ln(1 + t)$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à l'ordre 2 entre 0 et x :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f^{(1)}(t) = \frac{1}{1+t}, \quad f^{(2)}(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}, \quad f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

Par ailleurs, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \forall t \in [0, x], \ \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \geq 0$$

donc, par croissance de l'intégration, la fonction en présence étant continue sur $[0, x]$, avec $0 \leq x$:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t \geq 0$$

On peut maintenant conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

Méthode

On pouvait aussi étudier les variations de la fonction $x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ (ce qui est d'ailleurs peut-être plus rapide).

2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![1, n]\!], \ 1 + \frac{k}{n^2} > 0$$

donc :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x = e^{\ln(x)}.$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) \tag{45.1}$$

De plus on a, d'après le résultat de la question précédente avec $x = \frac{k}{n^2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

et donc, en sommant ces inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

soit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n+1}{2n}$$

De plus, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\right) = \frac{1}{2}$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

ce qui nous permet de conclure, avec (45.1), la fonction exponentielle étant continue en $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$$

Méthode

Se souvenir que, pour étudier la nature d'une suite strictement positive dont le terme général est de la forme $u_n = \prod_{k=1}^{n} v_k$, on commence en général par étudier la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis on procède souvent par encadrement.

Exercice 4 –

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1,0]$ et on a, pour tout $x \in [-1,0]$:

> On veut majorer l'écart entre une fonction et une fonction polynôme, donc on pense à utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

$$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{1-x}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{2}{(1-x)^3} \quad \text{et} \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2\times 3}{(1-x)^4}$$

On montre alors par récurrence, que la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in [-1,0],\ f^{(n)}(x) = -\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $0! = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in [-1,0],\ f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x)\\ &= -\left[-\frac{(n-1)!\,(-n)\,(1-x)^{n-1}}{(1-x)^{2n}}\right]\\ &= -\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\end{aligned}$$

  donc : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
- On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1,0],\ f^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

$f^{(n+1)}$ étant continue sur le segment $[x,0]$, elle est bornée sur ce segment. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1,0],\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k\right| \leq \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[x,0]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1,0],\ \left|\ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \sup_{t\in[x,0]} \left(\frac{1}{(1-t)^{n+1}}\right)$$

et comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^{n+1}}$ est croissante sur $[x,0]$ et égale à 1 en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1,0],\ \left|\ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

2. Soit $x \in [-1,0]$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc, d'après le résultat de la question précédente et le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

ce qui nous permet de conclure que, pour tout $x \in [-1, 0]$, la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

À retenir

Bien retenir la méthode utilisée ici, très classique pour calculer des sommes de séries. On pourrait démontrer que ce résultat est encore valable si $x \in [0, 1[$ en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral et en majorant un peu plus finement le reste intégral.

Exercice 5 –

Méthode

Quand on cherche à calculer la limite d'une expression dépendant d'une fonction f non explicitée, il est souvent utile de penser à la formule de Taylor-Young.

Cours – Formule de Taylor-Young.

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I non réduit à un point et si $a \in I$, alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

ou, de manière équivalente :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \circ(h^n)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la formule de Taylor-Young on a :

On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de x.

$$f(x+h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \circ(h^3)$$

donc, en substituant $2h$ (respectivement $3h$) à h ($2h$ et $3h$ tendent bien vers 0 lorsque h tend vers 0) :

$$f(x+2h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(x) + \circ(h^3)$$

$$f(x+3h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) + \frac{27h^3}{6}f^{(3)}(x) + \circ(h^3)$$

On en déduit :

$$f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x) \underset{h\to 0}{=} h^3 f^{(3)}(x) + \circ(h^3)$$

et alors :

$$\frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} \underset{h\to 0}{=} f^{(3)}(x) + \circ(1)$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f^{(3)}(x)$$

Exercice 6 –

Méthode

Pour prouver qu'une suite d'intégrales converge vers 0, le plus simple est en général de procéder par encadrement.

Les fonctions f et $t \mapsto -\frac{\cos(nt)}{n}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ donc, par intégration par parties :

Comme on ne peut pas trouver d'encadrement intéressant (au mieux sin est majoré par 1), on procède à une intégration par parties pour modifier la forme de l'intégrale.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos(nt)}{n} f(t)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\,\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\left[-\cos(nb)f(b) + \cos(na)f(a) + \int_a^b f'(t)\,\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

et alors, d'après l'inégalité triangulaire :

$\frac{1}{n}$ tend vers 0, mais le terme dans le crochet dépend encore de n, donc on majore.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{1}{n}\left[|\cos(nb)|\,|f(b)| + |\cos(na)|\,|f(a)| + \left|\int_a^b f'(t)\,\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right|\right] \\ &\leq \frac{1}{n}\left[|f(b)| + |f(a)| + \left|\int_a^b f'(t)\,\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right|\right]\end{aligned}$$

donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[a, b]$, avec $a \leq b$:

Attention au sens des bornes quand on encadre une intégrale.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{1}{n}\left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,|\cos(nt)|\,\mathrm{d}t\right] \\ &\leq \frac{1}{n}\underbrace{\left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]}_{\text{indépendant de } n}\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right] = 0$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 7 –

1. La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[0,\pi]$ donc, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée entre 0 et x à l'ordre $n \in [\![0,3]\!]$:

Comme on compare une fonction avec des fonctions polynômes, on peut penser à la formule de Taylor avec reste intégral.

$$\forall n \in [\![0,3]\!]\,,\ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\sin^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus on a :

$$\sin' = \cos,\quad \sin^{(2)} = -\sin,\quad \sin^{(3)} = -\cos \quad\text{et}\quad \sin^{(4)} = \sin$$

donc on obtient, pour $n = 1$:

$$\sin(x) = x - \int_0^x (x-t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \tag{45.2}$$

et, pour $n = 3$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\sin(t)\,\mathrm{d}t \tag{45.3}$$

Or on a, comme $x \in [0,\pi]$:

$$\forall t \in [0,x],\ (x-t)\sin(t) \geq 0 \quad\text{et}\quad \frac{(x-t)^3}{6}\sin(t) \geq 0$$

donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0,x]$, avec $0 \leq x$:

$$\int_0^x (x-t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \geq 0 \quad\text{et}\quad \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\sin(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

donc, d'après (45.2) et (45.3) :

$$\forall x \in [0,\pi]\,,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

Méthode

On pouvait aussi étudier les variations des fonctions $x \mapsto x - \sin(x)$ et $\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

2. On peut remarquer que :

Avant d'utiliser le résultat de la question précédente, on s'assure qu'on a le droit de le faire !

$$\forall x \geq 1,\ \forall t \in [0,x],\ 0 \leq \frac{\pi}{t+x} \leq \frac{\pi}{x} \leq \pi$$

donc, d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall x \geq 1,\ \forall t \in [0, x]\,,\ \frac{\pi}{t+x} - \frac{\pi^3}{6\,(t+x)^3} \leq \sin\left(\frac{\pi}{t+x}\right) \leq \frac{\pi}{t+x}$$

On en déduit, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0, x]$, avec $0 \leq x$:

$$\forall x \geq 1,\ \int_0^x \left(\frac{\pi}{t+x} - \frac{\pi^3}{6\,(t+x)^3}\right) \mathrm{d}x \leq \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{\pi}{t+x}\,\mathrm{d}x$$

soit encore :

$$\forall x \geq 1,\ \left[\pi \ln(t+x) + \frac{\pi^3}{12\,(t+x)^2}\right]_0^x \leq \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq [\pi \ln(t+x)]_0^x$$

d'où :

$$\forall x \geq 1,\ \pi \ln(2) + \frac{\pi^3}{48x^2} - \frac{\pi^3}{12x^2} \leq \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq \pi \ln(2)$$

Or on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\pi \ln(2) + \frac{\pi^3}{48x^2} - \frac{\pi^3}{12x^2}\right] = \pi \ln(2)$$

donc finalement, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{t+x}\right) \mathrm{d}t = \pi \ln(2)$$

Exercice 8 –

1. Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on a, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange (entre x et $x+h$ d'une part, entre x et $x-h$ d'autre part) et comme M_2 est un majorant de $|f''|$ sur $\mathbb{R}$:

On reconnaît à l'intérieur de la valeur absolue les premiers termes d'un développement de Taylor.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0,\ \begin{cases} |f(x+h) - f(x) - h\,f'(x)| \leq \dfrac{M_2\,h^2}{2} \\ |f(x-h) - f(x) + h\,f'(x)| \leq \dfrac{M_2\,h^2}{2} \end{cases}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc :

Pour éviter les problèmes de gestion des signes, on réécrit l'inégalité sans valeur absolue.

$$\begin{cases} -\dfrac{M_2\,h^2}{2} \leq f(x+h) - f(x) - h\,f'(x) \leq \dfrac{M_2\,h^2}{2} \\ -\dfrac{M_2\,h^2}{2} \leq f(x-h) - f(x) + h\,f'(x) \leq \dfrac{M_2\,h^2}{2} \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} f(x+h) - f(x) - \dfrac{M_2\,h^2}{2} \leq h\,f'(x) \leq f(x+h) - f(x) + \dfrac{M_2\,h^2}{2} \\ -f(x-h) + f(x) - \dfrac{M_2\,h^2}{2} \leq h\,f'(x) \leq -f(x-h) + f(x) + \dfrac{M_2\,h^2}{2} \end{cases}$$

donc, en sommant ces inégalités :

$$f(x+h) - f(x-h) - M_2 h^2 \leq 2hf'(x) \leq f(x+h) - f(x-h) + M_2 h^2$$

d'où :

$$\left|2hf'(x)\right| \leq \max\left(\left|f(x+h) - f(x-h) - M_2 h^2\right|, \left|f(x+h) - f(x-h) + M_2 h^2\right|\right)$$

Or on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{cases} \left|f(x+h) - f(x-h) - M_2 h^2\right| \leq \left|f(x+h)\right| + \left|f(x-h)\right| + M_2 h^2 \\ \left|f(x+h) - f(x-h) + M_2 h^2\right| \leq \left|f(x+h)\right| + \left|f(x-h)\right| + M_2 h^2 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \left|2hf'(x)\right| &\leq \left|f(x+h)\right| + \left|f(x-h)\right| + M_2 h^2 \\ &\leq 2M_0 + M_2 h^2 \end{aligned}$$

et finalement, en divisant par $2h > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0,\ \left|f'(x)\right| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\,h}{2}$$

3. La fonction $g : h \longmapsto \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\,h}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

Le résultat précédent est valable quel que soit h dans $\mathbb{R}_+^*$ donc on va étudier la fonction pour choisir la valeur de h donnant la meilleure majoration possible.

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(h) &= -\frac{M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2} \\ &= \frac{M_2 h^2 - 2M_0}{2h^2} \end{aligned}$$

Comme M_0 et M_2 sont strictement positifs, on obtient alors le tableau de variations suivant :

h	0		$\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$		$+\infty$
$g'(h)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que la plus petite majoration de $|f'|$ que l'on puisse obtenir avec la question précédente est obtenue pour $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$. De plus, on constate que :

$$\begin{aligned} g\left(\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\right) &= M_0\sqrt{\frac{M_2}{2M_0}} + \frac{M_2}{2}\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} \\ &= \sqrt{2M_0M_2} \end{aligned}$$

et donc, en prenant $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ dans la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 9 –

1. Vrai. Si f est continue sur $[0, 1]$, f est bornée sur $[0, 1]$, donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, 1],\ |t^n f(t)| \leq M t^n$$

et donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0, 1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 M t^n\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{n+1}$$

ce qui permet de conclure avec le théorème de l'encadrement.

2. Faux. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On reconnait une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, continue sur $[0, 1]$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

À retenir

On remarquera en particulier que le fait que tous les termes de la somme tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ ne garantit pas que la somme tende aussi vers 0 car le nombre de termes dans la somme (ici n) tend vers $+\infty$.

3. Vrai. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $f : t \mapsto (1+x^2)^t = \exp\big(t\ln(1+x^2)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 1]$ donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, en notant A un majorant de $|f''|$ sur $[0, 1]$ (qui existe car f'' est continue sur le segment $[0, 1]$) :

$$\forall (a, b) \in [0, 1]^2,\ \big|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\big| \leq \frac{(b-a)^2}{2}A$$

c'est-à-dire :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2,\ \left|(1+x^2)^b - (1+x^2)^a - \big(b-a\big)\ln(1+x^2)(1+x^2)^a\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} A$$

et donc, pour $a = 0$ et $b = \frac{1}{n}$ et en notant $M = \dfrac{A}{2}$ (M est indépendant de n) :

$$\left|(1+x^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{\ln(1+x^2)}{n}\right| \leq \frac{M}{n^2}$$

46 Dénombrement

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit A et B deux ensembles finis.

1. $$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. $$\operatorname{card}(B \setminus A) = \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A)$$ ☐ Vrai ☐ Faux
3. $$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A) \times \operatorname{card}(B)$$ ☐ Vrai ☐ Faux
4. Soit une application $f : A \to B$. ☐ Vrai ☐ Faux
   Si f est injective alors $\operatorname{card}(B) \leq \operatorname{card}(A)$.

Exercice 2 –

On cherche à ranger 4 paires de chaussettes dans une commode possédant 6 tiroirs.
Pour chacun des cas suivants, déterminer le nombre de rangements possibles.

1. Les paires de chaussettes sont distinguables et chaque tiroir peut en contenir plusieurs.
2. Les paires de chaussettes sont distinguables et sont réparties dans 4 tiroirs différents.
3. Les paires de chaussettes sont identiques et sont réparties dans 4 tiroirs différents.
4. Les paires de chaussettes sont identiques et chaque tiroir peut en contenir plusieurs.

Exercice 3 –

Soit n un entier naturel.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.
3. Soit un entier naturel $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Prouver que $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Une classe de 35 élèves est composée de 16 filles et de 19 garçons.

1. De combien de façons peut-on faire entrer les élèves un par un dans la classe ?
2. Il y a une place convoitée par tous les élèves : au premier rang, à côté du radiateur. Sachant que les élèves sont replacés à chaque heure, combien y a-t-il de façons d'occuper cette place pendant les 9 heures de maths de la semaine ?
3. La première rangée est composée de 8 places. Combien y a-t-il de façons de composer cette première rangée avec les élèves de la classe ?
4. Combien y a-t-il de façons de composer cette première rangée avec les élèves de la classe de sorte qu'il y ait autant de filles que de garçons ?
5. Pour créer une association d'élèves, on a besoin d'un bureau composé de 8 élèves. Combien de bureaux peut-on former dans cette classe ?
6. Combien de bureaux de 8 élèves peut-on former dans cette classe avec plus de filles que de garçons ?
7. Combien de bureaux de 8 élèves peut-on former dans cette classe avec au moins 2 filles ?

Exercice 5 –

Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes :
13 hauteurs (2,3,4,5,6,7,8,9,10,V,D,R,As) et 4 couleurs (♡, ♠, ♢, ♣). Une main est constituée de 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. **a)** Combien y a-t-il de brelans (3 cartes de même hauteur et deux cartes de hauteurs différentes et différentes entre elles) ?

   b) Combien y a-t-il de full (un brelan et une paire) ?
3. On considère les ensembles de mains suivants :
   - A est l'ensemble des mains possédant exactement 2 rois,
   - B est l'ensemble des mains possédant exactement 3 ♡.

   a) Déterminer card(A) et card(B).

   b) Déterminer card($A \cap B$), en déduire card($A \cup B$).

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (tous distincts) et $\sigma : \Omega \to \Omega$ une application.
On appelle **point fixe** de σ tout élément $a \in \Omega$ tel que $\sigma(a) = a$.
Pour tout $p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, on note $F(n, p)$ le nombre de bijections de Ω dans Ω ayant exactement p points fixes. Par convention, on pose $F(0, 0) = 1$.

1. Montrer que $F(n, n) = 1$ et $F(n, n-1) = 0$.

2. Soit une bijection $\sigma : \Omega \to \Omega$.
Sachant qu'on choisit $\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_n)$ dans cet ordre, combien a-t-on de choix possibles pour $\sigma(x_1)$? pour $\sigma(x_2)$? … pour $\sigma(x_n)$?
En déduire que le nombre de bijections de Ω dans Ω est $n!$.

3. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} F(n, k) = n!$$

4. Pour tout entier naturel non nul k, on pose $\omega_k = F(k, 0)$ le nombre de **dérangements** d'un ensemble E de cardinal k, c'est à dire le nombre de bijections de E dans E sans aucun point fixe.

   a) Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\},\ F(n, k) = \binom{n}{k}\omega_{n-k}$$

   b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$$

5. Nous allons prouver à l'aide d'une récurrence généralisée que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \omega_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   a) Initialisation : vérifier que la propriété est vraie pour $n = 0$.

   b) Hérédité : on suppose que la propriété est vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
   On doit établir que $\omega_{n+1} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$

      i. Justifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\omega_{n+1-k}}{k!(n+1-k)!} = 1$$

      Puis prouver l'égalité :

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\omega_n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!} - \frac{\omega_{n-k}}{(n-k)!}\right) = 0$$

      ii. Prouver que :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ \frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!} - \frac{\omega_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(-1)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}$$

      iii. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!\,(n+1-k)!}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton puis conclure.

6. On donne le résultat suivant :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire.
En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard, c'est à dire que toutes les répartitions des chapeaux ont la même probabilité.

a) On note p_n la probabilité qu'aucune personne ne reprenne son propre chapeau.
Justifier que :

$$p_n = \frac{\omega_n}{n!}$$

b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$ et conclure.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

Pendant la seconde guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine *Enigma* pour crypter leurs messages. Le logicien britannique Alan Turing, reprenant les travaux du mathématicien polonais Marian Rejewski, a permis de casser le code de cette machine. On estime qu'il a contribué à écourter la guerre de deux années. Lors d'un réglage d'une machine *Enigma* on devait :

- Positionner dans un ordre précis 3 rotors possédant les 26 lettres de l'alphabet choisis parmi 5 rotors différents. Chaque rotor installé devait être placé en position initiale avec une lettre choisie.
- Câbler ensemble 10 paires de lettres qui permutent systématiquement *i.e.* :
  - ◇ on choisit 20 lettres de l'alphabet,
  - ◇ on forme deux groupes de 10 lettres avec les 20 lettres choisies,
  - ◇ on connecte chaque lettre du 1^er^ groupe avec une lettre du 2^nd^ groupe.

1. Il y a 1 054 560 façons de placer 3 rotors dans leur position initiale.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Il y a $\binom{26}{20} \times \binom{20}{10} \times 10!$ façons de câbler 10 paires de lettres.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Il y a en tout $\dfrac{60 \times 26^3 \times 26!}{6!\,10!\,2^{10}}$ configurations possibles.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. On ne sait pas si A et B sont disjoints, il faut soustraire $\mathrm{card}(A \cap B)$.	☐ Vrai	☒ Faux
2. $\mathrm{card}(B \setminus A) = \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(B \cap A)$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. $\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B)$.	☒ Vrai	☐ Faux
4. Si f est injective alors $\mathrm{card}(B) \geq \mathrm{card}(A)$.	☐ Vrai	☒ Faux

Cours

Soit A et B deux ensembles finis.

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
- Soit une application $f : A \to B$.
  - Si f est injective alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.
  - Si f est surjective alors $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$.
  - Si $\text{card}(A) = \text{card}(B)$: f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective.

Exercice 2 –

Cours

Soit $n,\ p$ deux entiers naturels et Ω un ensemble à n éléments.

- Le nombre de p-listes de Ω est : n^p.
- Le nombre de p-listes d'éléments distincts de Ω est : $\mathcal{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
- Le nombre de p-combinaisons d'éléments distincts de Ω est :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

1. Pour la première paire de chaussettes, il y a 6 tiroirs disponibles, pour la deuxième, comme le même tiroir peut recevoir plusieurs paires, il y a 6 tiroirs disponibles et ainsi de suite. Le nombre de rangements possibles est donc 6^4. Cela correspond au nombre de 4-listes pris dans un ensemble à 6 éléments.

> Faisons le parallèle avec des tirages aléatoires de boules numérotées dans une urne.
> - Les paires sont distinguables : 4 tirages successifs d'une boule numérotée.
> - Les paires sont identiques : un tirage simultané de 4 boules.
> - Les tiroirs peuvent recevoir plusieurs paires : les tirages sont avec remise.
> - Les tiroirs reçoivent au plus une paire : les tirages sont sans remise.

2. Pour la première paire de chaussettes, il y a 6 tiroirs disponibles, pour la deuxième, comme le même tiroir ne peut contenir plus d'une paire, il y a 5 tiroirs disponibles et ainsi de suite. Le nombre de rangements possibles est donc $6 \times 5 \times 4 \times 3 = \dfrac{6!}{2!}$.
   Cela correspond au nombre de 4-listes d'éléments distincts pris dans un ensemble à 6 éléments.

3. Il s'agit ici de choisir 4 tiroirs parmi les 6 pour y mettre dans chacun une paire de chaussettes.
   Le nombre de rangements est $\dbinom{6}{4}$.

> Les paires sont identiques, il n'y a donc plus d'ordre. On ne peut plus raisonner en disant « la première, la deuxième,... » car il n'y a ni première, ni deuxième,...

4. Les cinq cas suivants forment une partition de l'ensemble des solutions.

> Ce cas s'apparente à 4 tirages successifs avec remise puis oubli de l'ordre, il n'y a pas d'ordre mais les répétitions sont possibles, cela se traite par disjonction de cas.

- Un tiroir contient les 4 paires : il y a 6 choix de tiroirs.
- Un tiroir contient 3 paires : on choisit les 2 tiroirs parmi les 6 qui auront des chaussettes puis, parmi ces 2 tiroirs, celui qui en contiendra 3 paires : $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1} = 30$ choix.
- Deux tiroirs contiennent 2 paires : on choisit les 2 tiroirs parmi les 6 qui auront des chaussettes : $\binom{6}{2} = 15$ choix.
- Un tiroir contient 2 paires et deux tiroirs contiennent 1 paire : on choisit les 3 tiroirs parmi les 6 qui auront des chaussettes puis, parmi ces 3 tiroirs, celui qui en contiendra 2 paires : $\binom{6}{3} \times \binom{3}{1} = 60$ choix.
- Quatre tiroirs contiennent 1 paire : on choisit les 4 tiroirs parmi les 6 qui auront des chaussettes, c'est la réponse à la question 3 : $\binom{6}{4} = 15$ choix.

Il reste à additionner ces résultats : $6 + 30 + 15 + 60 + 15 = 126$ rangements possibles.

Exercice 3 –

Cours – La formule du binôme de Newton.

$$\forall((x, y), n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N},\ (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

1. On applique la formule du binôme de Newton avec $x = y = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

À retenir

Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors :

$$\text{card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

2.
- Si $n = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 1$.
- Si $n \geq 1$ alors on applique la formule du binôme de Newton avec $x = -1$ et $y = 1$. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1 + 1)^n = 0$$

3. Un simple calcul donne :

$$k\binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

On utilise le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \quad \text{car le terme d'indice 0 est nul}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \quad \text{on pose } l = k-1 :\\
&= n\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l}\\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 4 –

Méthode

Avant de faire ce genre d'exercice, se poser deux questions :

- L'ordre importe-t-il ?
- Peut-il y avoir des répétitions ?

1. L'ordre importe et il n'y a pas de répétition possible. Un résultat est une permutation des 35 élèves de la classe. Il y a 35! choix possibles.

2. L'ordre importe et les répétitions sont possibles (le même élève peut occuper la meilleure place plusieurs fois dans la semaine). Un résultat est une 9-liste de la classe. Il y a 35^9 choix possibles.

3. L'ordre importe et il n'y a pas de répétition possible. Un résultat est un arrangement de 8 élèves de la classe (une 8-liste d'élèves distincts). Il y a :

$$\mathcal{A}_{35}^{8} = \frac{35!}{(35-8)!} = \frac{35!}{27!} = 35 \times 34 \times \cdots \times 28 \quad \text{choix}$$

> Quand l'ordre importe, on peut raisonner cas par cas : combien de choix pour le premier cas ? pour le deuxième cas ? ... pour le dernier cas ?

4. Pour composer la première rangée de telle sorte qu'il y ait autant de filles que de garçons, il faut et il suffit de :

   - choisir les 4 places des filles, il n'y a ni ordre (peu importe quel élève s'assoit pourvu que ce soit une fille) ni répétition (la même fille ne peut occuper deux chaises), il y a $\binom{8}{4}$ choix ;
   - placer 4 filles sur ces 4 places, l'ordre importe alors puisqu'on distingue les élèves, il y a $\mathcal{A}_{16}^{4}$ choix ;
   - placer 4 garçons sur les 4 places restantes, il y a $\mathcal{A}_{19}^{4}$ choix.

   On a donc au total :

$$\binom{8}{4}\mathcal{A}_{16}^{4}\mathcal{A}_{19}^{4} = \frac{8!}{(8-4)!\,4!} \times \frac{16!}{(16-4)!} \times \frac{19!}{(19-4)!} \quad \text{choix}$$

5. Il n'y a ni ordre ni répétition, un résultat est une 8−combinaison de la classe. Il y a :

$$\binom{35}{8} = \frac{35!}{8!\,(35-8)!} = \frac{35!}{8!\,27!} \quad \text{choix}$$

6. Il faut distinguer les cas : soit 5 filles et 3 garçons, soit 6 filles et 2 garçons, soit 7 filles et 1 garçon, soit 8 filles. On considère les ensembles suivants :

- $A = \{$bureaux contenant plus de filles que de garçons$\}$
- $A_k = \{$bureaux contenant k filles et $8-k$ garçons$\}$ avec $0 \leq k \leq 8$.

On a $A = A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8$ union d'ensembles deux à deux disjoints donc :

$$\text{card}(A) = \sum_{k=5}^{8} \text{card}(A_k)$$

De plus pour $k \in \{5, 6, 7, 8, \}$, choisir un bureau contenant k filles et $8-k$ garçons équivaut à choisir k filles parmi 16 et $8-k$ garçons parmi 19. On a donc :

$$\text{card}(A_k) = \binom{16}{k}\binom{19}{8-k}$$

Il y a finalement :

$$\sum_{k=5}^{8} \binom{16}{k}\binom{19}{8-k} \quad \text{choix}$$

7. Par passage au complémentaire, on dénombre les bureaux sans filles et avec exactement une fille, on obtient comme précédemment :

$$\underbrace{\binom{35}{8}}_{\text{card}(\Omega)} - \underbrace{\binom{19}{8}}_{\text{aucune fille}} - \underbrace{\binom{19}{7}\binom{16}{1}}_{\text{une seule fille}} \quad \text{choix}$$

Pensez au complémentaire : lorsqu'on rencontre une expression du type « au moins », « au plus », …, il peut être judicieux d'utiliser : $\text{card}(A) = \text{card}(\Omega) - \text{card}\left(\overline{A}\right)$.

À retenir

- Ordre et répétition : utiliser les p-listes.
- Ordre sans répétition : utiliser les p-listes d'éléments distincts.
- Ni ordre ni répétition : utiliser les p-combinaisons.
- Pas d'ordre et répétition : faire une disjonction de cas.

Exercice 5 –

1. Il n'y a ni ordre ni répétition, une main est une 5-combinaison du paquet de cartes.

Il y a $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ mains possibles.

2. **a)** Exemple de brelan : $V\heartsuit$, $V\spadesuit$, $V\clubsuit$, $7\heartsuit$, $9\spadesuit$.

Pour choisir une main contenant un brelan, il faut et il suffit de :

- choisir 3 hauteurs $(V, 7, 9)$ parmi les 13, il y a $\binom{13}{3}$ choix possibles ;
- choisir la hauteur (ici le valet) parmi les 3 choisies qui va être en triple exemplaire, il y a $\binom{3}{1} = 3$ choix possibles ;
- choisir les couleurs des trois cartes identiques (les valets), il y a $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles ;
- choisir la couleur de la quatrième carte (le 7) , il y a $\binom{4}{1} = 4$ choix possibles ;
- choisir la couleur de la cinquième carte (le 9), il y a $\binom{4}{1} = 4$ choix possibles.

Il y a donc $\binom{13}{3} \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 54\,912$ choix possibles.

b) Exemple de full : $V\heartsuit$, $V\spadesuit$, $V\clubsuit$, $7\heartsuit$, $7\spadesuit$.

Pour choisir une main contenant un full, il faut et il suffit de :

- choisir 2 hauteurs $(V, 7)$ parmi les 13, il y a $\binom{13}{2}$ choix possibles ;
- choisir la hauteur (ici le valet) parmi les 2 choisies qui va être en triple exemplaire, il y a $\binom{2}{1} = 2$ choix possibles ;
- choisir les couleurs des trois cartes identiques (les valets), il y a $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles ;
- choisir la couleur des deux cartes identiques (le 7) , il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

Il y a donc $\binom{13}{2} \times 2 \times 4 \times 6 = 3\,744$ choix possibles.

3. **a)** Pour choisir une main de A, il faut et il suffit de :

- choisir 2 rois parmi les 4, il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles ;
- compléter la main par 3 cartes prises parmi les 48 qui ne sont pas des rois, il y a $\binom{48}{3}$ choix possibles.

Ainsi on a $\text{card}(A) = 6 \times \binom{48}{3} = 103\,776$.

Pour choisir une main de B, il faut et il suffit de :

- choisir 3 ♡ parmi les 13, il y a $\binom{13}{3}$ choix possibles ;
- compléter la main par 2 cartes prises parmi les 39 qui ne sont pas des ♡, il y a $\binom{39}{2}$ choix possibles.

Ainsi on a $\text{card}(B) = \binom{13}{3} \times \binom{39}{2} = 211\,926$.

b) Pour dénombrer $A \cap B$, il faut faire une disjonction de cas en considérant la carte $R♡$.

- Avec $R♡$: on a déjà un roi et un ♡, il faut et il suffit de compléter par un roi choisi parmi les 3 restants, par 2 ♡ choisis parmi les 12 restants puis par 1 carte choisie parmi les 36 cartes qui ne sont ni des rois ni des ♡ ($52 - 13 - 3 = 36$).
  On a donc $\binom{3}{1} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{1} = 7\,128$ choix possibles.
- Sans $R♡$: il faut et il suffit de choisir 2 rois parmi les 3 rois non ♡ et 3 ♡ choisis parmi les 12 restants (car ici, on ne veut pas la carte $R♡$).
  On a donc $\binom{3}{2} \times \binom{12}{3} = 660$ choix possibles.

Ainsi $\text{card}(A \cap B) = 7128 + 660 = 7\,788$ et on a :

$$\begin{aligned}\text{card}(A \cup B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)\\ &= 103776 + 211926 - 7788\\ &= 307\,914\end{aligned}$$

Exercice 6 –

1.

- $F(n, n)$ est le nombre de bijections $\sigma : \Omega \to \Omega$ laissant tous les points de Ω invariants. La seule bijection possible est donc l'identité d'où $F(n, n) = 1$.
- Supposons qu'il existe une bijection $\sigma : \Omega \to \Omega$ laissant tous les points de Ω invariants sauf un que l'on peut noter x_k.

Penser au raisonnement par l'absurde pour prouver que le cardinal d'un ensemble est nul !

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\},\ \sigma(x_i) = x_i$$

L'unique image par σ de x_k n'est pas x_k (x_k n'est pas invariant), on a donc $\sigma(x_k) = x_l$ avec $l \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$. Comme $\sigma(x_l) = x_l$ avec $x_l \neq x_k$ alors x_l a deux antécédents distincts par σ ce qui contredit σ injective. Une telle bijection σ n'existe pas et donc $F(n, n-1) = 0$.

2. Soit une bijection $\sigma : \Omega \to \Omega$.
Il y a n choix possibles pour $\sigma(x_1)$. Par injectivité, il y a ensuite $n - 1$ choix possibles pour $\sigma(x_2)$ et ainsi de suite jusqu'à $\sigma(x_n)$ pour lequel il ne reste plus qu'un élément de Ω.
Pour créer une bijection, on a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$ choix.
Le nombre de bijections de Ω dans Ω est donc $n!$.

3. On note Σ l'ensemble des bijections de $\Omega \to \Omega$ et, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, Σ_k l'ensemble des bijections de $\Omega \to \Omega$ ayant k points fixes.

Soit $\sigma : \Omega \to \Omega$ une bijection, σ a exactement 0 ou 1 ou 2 ou ... ou n points fixes. Ainsi $\left(\Sigma_k\right)_{0 \le k \le n}$ est un ensemble de parties disjointes de Σ dont l'union est Σ. On a donc :

$$\operatorname{card}(\Sigma) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}\left(\Sigma_k\right) = \sum_{k=0}^{n} F(n, k)$$

On ne peut pas parler de partition car $\Sigma_{n-1} = \varnothing$

Comme $\operatorname{card}(\Sigma) = n!$ alors on a :

$$\sum_{k=0}^{n} F(n, k) = n!$$

4. **a)** Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. On a $F(n, k) = \operatorname{card}\left(\Sigma_k\right)$.

Pour construire un élément σ de Σ_k, il faut et il suffit de :

- choisir les k points fixes $y_1, y_2, \dots, y_k$ de Ω, il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles ;
- construire une bijection de $\Omega \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ dans lui-même n'admettant aucun point fixe, il y en a ω_{n-k}.

On a donc :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\},\ F(n, k) = \binom{n}{k} \omega_{n-k}$$

b) Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. $\sum_{k=0}^{n} F(n, k) = n!$ et $F(n, k) = \binom{n}{k} \omega_{n-k}$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega_{n-k} = n!$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \omega_{n-k} = n!$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!\,(n-k)!} = 1$$

5. **a)** Pour $n = 0$, $\omega_0 = F(0, 0) = 1$ par convention.

De plus $0! \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!} = 1$, l'initialisation est bien vérifiée.

b) On suppose que la propriété est vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

On doit établir que $\omega_{n+1} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$.

i. La double égalité prouvée en 4.(b) est valable pour n quelconque donc aussi pour $n + 1$. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\omega_{n+1-k}}{k!(n+1-k)!} = 1$$

Par soustraction on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\omega_{n+1-k}}{k!(n+1-k)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 0$$

Dans la première somme, le terme correspondant à $k = 0$ est : $\dfrac{\omega_{n+1}}{(n+1)!}$

et le terme correspondant à $k = n+1$ est : $\dfrac{\omega_0}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Dans la seconde somme, le terme correspondant à $k = 0$ est : $\dfrac{\omega_n}{n!}$.

En sortant ces trois termes de leur somme respective on obtient :

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\omega_n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!} - \frac{\omega_{n-k}}{k!\,(n-k)!}\right) = 0 \qquad (46.2)$$

ii. Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $1 \leq n+1-k \leq n$ et $0 \leq n-k \leq n$ ce qui nous permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence généralisée :

$$\omega_{n+1-k} = (n+1-k)! \sum_{i=0}^{n+1-k} \frac{(-1)^i}{i!} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!} = \sum_{i=0}^{n+1-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\omega_{n-k} = (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \frac{\omega_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!} - \frac{\omega_{n-k}}{(n-k)!} &= \sum_{i=0}^{n+1-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1-k}}{(n+1-k)!} \quad \text{par télescopage}\end{aligned}$$

iii. Simplifions la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!\,(n+1-k)!} &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}(-1)^{n+1-k} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k} \\ &= \frac{(-1+1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{à l'aide du binôme de Newton} \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc en sortant les termes $k = 0$ et $k = n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

D'où, avec (46.2) :

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\omega_n}{n!} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Donc, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{\omega_n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}\end{aligned}$$

Ceci établit le caractère héréditaire de la propriété et, par principe de récurrence , on peut affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

6. **a)** Comme il y a n chapeaux et n têtes, il y a $n!$ façons de répartir les chapeaux sur les têtes. Le nombre de cas favorables, c'est à dire le nombre de cas où aucune tête ne retrouve son chapeau est le nombre de dérangements ω_n. Ainsi, par équiprobabilité, on a :

$$p_n = \frac{\omega_n}{n!}$$

b) Avec le résultat donné :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} p_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\omega_n}{n!}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\\ &= \frac{1}{\mathrm{e}}\\ &\approx 37\%\end{aligned}$$

Exercice 7 –

1. Vrai. Il y a 1 054 560 façons de placer les 3 rotors.
Une configuration des 3 rotors est une 3-liste d'éléments distincts de l'ensemble des 5 rotors, il y a $\frac{5!}{2!} = 60$ configurations. Les 3 rotors ont 26 positions initiales possibles, une position initiale des 3 rotors est une 3-liste des 26 lettres de l'alphabet, il y a 26^3 positions initiales.
Enfin on a $60 \times 26^3 = 1\,054\,560$ positions de rotors.

2. Faux.

- on choisit 20 lettres de l'alphabet, il y a $\binom{26}{20}$ choix possibles ;
- on forme deux groupes de 10 lettres avec les 20 lettres choisies, il y a $\binom{20}{10}$ choix possibles ;
- on connecte chaque lettre du 1[er] groupe avec une lettre du 2[nd] groupe, il y a 10! choix possibles.

Or, pour chacune des 10 paires de lettres, on a deux cas identiques (A-K et K-A donnent la même configuration), il faut donc diviser le résultat par 2^{10}.

Il y a $\dfrac{\binom{26}{20} \times \binom{20}{10} \times 10!}{2^{10}}$ façons de câbler 10 paires de lettres.

3. Vrai. Soit un total de 158 962 555 217 826 360 000 configurations.

47 Espaces probabilisés finis

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ dont l'univers associé est un ensemble fini Ω.
On considère une probabilité $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ et trois événements A, B et C.

1. La probabilité qu'au moins un des trois événements se réalise est : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$ alors on peut affirmer que A, B et C sont deux à deux incompatibles.	☐ Vrai	☐ Faux
3. $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A \cup \overline{B}\right)$	☐ Vrai	☐ Faux
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$	☐ Vrai	☐ Faux
5. Si (A, B, C) est un système complet d'événements alors : pour $D \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)$	☐ Vrai	☐ Faux
6. Si $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ alors $A \subset B$.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une classe $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les élèves sont numérotés de 1 à n.
Un professeur choisit un élève au hasard pour une interrogation orale. Deux méthodes sont envisagées.

- Méthode 1. Le professeur choisit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}_1)$ tel que :

$$\text{Pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ la probabilité } \mathbb{P}_1(\{x_i\}) = p_i \text{ est proportionnelle à } i.$$

- Méthode 2. Le professeur choisit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}_2)$ tel que :

$$\text{Pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ la probabilité } \mathbb{P}_2(\{x_i\}) = q_i \text{ est proportionnelle à } i^2.$$

1. Calculer la valeur des p_i pour i allant de 1 à n.
2. Calculer la valeur des q_i pour i allant de 1 à n.
3. On nomme pour tout entier naturel $k \in \{1, 2, \dots, n\}, A_k$: « un des k premiers élèves de la liste est interrogé ». Déterminer $\mathbb{P}_1(A_k)$ et $\mathbb{P}_2(A_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
4. Il y a 25 élèves dans la classe, quel est le rang de l'élève qui a la même probabilité d'être interrogé suivant les deux méthodes ?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –
Une urne contient six boules indiscernables au toucher. Il y a une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2 et trois boules numérotées 3. On effectue trois tirages aléatoires avec le protocole concernant les deux premiers tirages suivant :

- Si on tire la boule ①, on la remet dans l'urne avant le deuxième tirage,
- Si on tire une boule ②, on ne la remet pas dans l'urne avant le deuxième tirage,
- Si on tire une boule ③, on ne la remet pas dans l'urne et on enlève une deuxième boule ③ de l'urne avant le deuxième tirage.

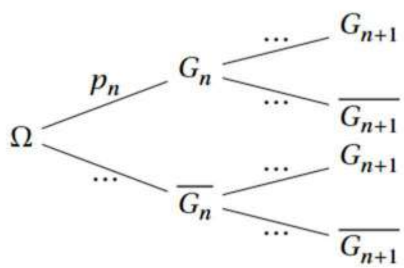
1. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée porte le numéro ③ ?
2. Sachant qu'on a obtenu deux numéros identiques, quelle est la probabilité que ce soit le ③ ?
3. Dans tous les cas, la boule tirée lors du deuxième tirage n'est pas remise dans l'urne avant le troisième tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu ①②③ dans cet ordre ?

Exercice 4 –
Patrick le poulpe pronostique les résultats des matches de football en ouvrant une boîte aux couleurs de l'équipe gagnante. Le taux de réussite est de 85% et l'octopode choisit l'Allemagne dans $77,25\%$ des cas. Pour finir, 75% de ses bons pronostics désignent l'Allemagne.
Un match oppose l'Allemagne à l'Espagne.

1. Sachant que Patrick s'est trompé, quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'Allemagne ?
2. Sachant que Patrick a pronostiqué l'Espagne, quelle est la probabilité de victoire de l'Espagne ?

Exercice 5 –
Un jeu en ligne a deux issues possibles : gagner ou perdre. Soit $p \in [0, 1]$. On suppose que le jeu est réglé de telle sorte que l'internaute conserve son résultat précédent avec la probabilité p et que la première partie est gagnée avec une probabilité de p.
Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n : « l'internaute gagne la $n^{\text{ème}}$ partie » et on note p_n la probabilité de l'événement G_n. En particulier, on a $p_1 = p$ et on admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n > 0$

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$.
3. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \dfrac{1}{2}(2p - 1)^n + \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer la limite de p_n en fonction de la valeur de $p \in [0, 1]$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Une urne $\mathcal{U}$ contient des boules blanches et des boules rouges. Soit $p \in]0,1[$ la proportion de boules blanches. On tire successivement avec remise des boules de l'urne $\mathcal{U}$.

Soit un entier $n \geq 1$, on considère les événements :

- B_n : « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche »,
- R_n : « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge »,
- D_n : « on a eu pour la première fois un doublé blanche-blanche aux $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ tirages » pour $n \geq 2$,
- C_n : « lors des n premiers tirages, on a eu au moins une fois un doublé blanche-blanche », $n \geq 2$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 0$ et pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \mathbb{P}(D_n)$.

On admet que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé modélisant l'expérience.

A. Cas général

1. Exprimer u_2 et u_3 en fonction de p.
2. Prouver que $(R_1, B_1 \cap R_2, D_2)$ est un système complet d'événements.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $u_{n+2} = (1-p)u_{n+1} + p(1-p)u_n$.
4. Démontrer que l'équation caractéristique de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 $(u_n)_{n\geq 1}$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
5. Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de r_1 et de r_2.

B. Applications

1. Dans cette question, on suppose qu'il y a autant de boules blanches que de boules rouges.
   Établir que : $\forall n \geq 1,\ u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right]$.
2. On suppose maintenant que $p = \dfrac{2}{3}$.
   a) Établir que : $\forall n \geq 1,\ u_n = -4\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.
   b) Prouver que pour tout entier $n \geq 2$: $\mathbb{P}(C_n) = \dfrac{1}{9}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + \dfrac{8}{9}\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$.
   c) On considère l'événement C : « On a eu au moins une fois un doublé blanche-blanche ».
   À l'aide de la question précédente, calculer $\mathbb{P}(C)$. Que dire de l'événement C ?
   On utilisera le résultat suivant : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ croissante au sens de l'inclusion ($\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

Lors du jeu télévisé *Let's make a deal*, un candidat se trouve face à trois portes fermées. Une voiture se cache derrière une de ces portes tandis que derrière chacune des deux autres se cache une chèvre. Le jeu, présenté par Monty Hall, se déroule en trois temps :

- Le candidat choisit une porte qui reste close.
- Monty Hall, qui sait depuis le début derrière quelle porte se trouve la voiture, ouvre une des portes qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle dissimulant la voiture.
- Le candidat, qui n'a plus que deux portes fermées devant lui, a alors le choix entre deux stratégies avant d'ouvrir pour de bon une porte :
  - ◇ Stratégie A : conserver la porte qu'il avait choisie initialement,
  - ◇ Stratégie B : changer de porte et ouvrir celle qu'il n'avait pas choisie initialement.

1. Quelle que soit la stratégie choisie par le candidat, la probabilité de gagner la voiture est $\frac{1}{2}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le candidat a intérêt à conserver la porte qu'il avait choisie initialement. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Le candidat a intérêt à changer de porte. ☐ Vrai ☐ Faux
4. On suppose ici que le candidat a choisi initialement la porte ①.
   Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note :
   - V_i : « la voiture est derrière la porte i »
   - O_i : « Monty Hall ouvre la porte i »

   On a :
   $$\mathbb{P}_{O_2}(V_3) = \frac{2}{3}$$
   ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La probabilité qu'au moins un des trois événements se réalise est : ☐ Vrai ☒ Faux

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$$

2. On lance un dé équilibré et on nomme A, B et C les événements suivants : ☐ Vrai ☒ Faux
   - A : « le résultat obtenu est impair. »
   - B : « le résultat obtenu est inférieur ou égal à 3. »
   - C : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 5. »

   On a $A \cap B \cap C = \emptyset$ mais $A \cap B = \{1, 3\} \neq \emptyset$ et $A \cap C = \{5\} \neq \emptyset$.
3. $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\overline{A} \cap B}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A \cup \overline{B}\right)$ ☒ Vrai ☐ Faux
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ☐ Vrai ☒ Faux
5. C'est la formule des probabilités totales. ☒ Vrai ☐ Faux
6. En reprenant l'exemple du dé et les événements A, B et C nommés plus haut : $\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(B)$ mais $C \not\subset B$. ☐ Vrai ☒ Faux

   La propriété est : $[A \subset B] \Rightarrow [\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)]$.

Cours

Soit un univers fini Ω. Une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ si :

- Normalisation : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Additivité : $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Cours

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ une famille d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et plus exactement $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

Exercice 2 –

Cours

- Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ fini.
  Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $\mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i$.
  On a alors pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p_i \in [0, 1]$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
- Réciproquement la donnée de n réels positifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- L'unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ est appelée probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

1. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p_i = \lambda \times i$. Comme $p_i \geq 0$ alors il faut $\lambda \geq 0$. De plus on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 &\iff \lambda \sum_{i=1}^{n} i = 1 \\ &\iff \lambda \times \frac{n(n+1)}{2} = 1 \\ &\iff \lambda = \frac{2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

On a bien $\lambda \geq 0$ donc :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathbb{P}_1(\{x_i\}) = p_i = \frac{2i}{n(n+1)}$$

2. $\exists \mu \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $q_i = \mu \times i^2$. Comme $q_i \geq 0$ alors il faut $\mu \geq 0$. De plus on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} q_i = 1 &\iff \mu \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 \\ &\iff \lambda \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 \\ &\iff \mu = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\end{aligned}$$

On a bien $\mu \geq 0$ donc :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathbb{P}_2(\{x_i\}) = q_i = \frac{6i^2}{n(n+1)(2n+1)}$$

3. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} \{i\}$, union d'événements 2 à 2 incompatibles, par additivité, on a :

$$\mathbb{P}_1(A_k) = \sum_{i=1}^{k} p_i = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} i = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$$

$$\mathbb{P}_2(A_k) = \sum_{i=1}^{k} q_i = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{n(n+1)(2n+1)}$$

4. On résout pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} p_i = q_i &\iff \frac{2i}{n(n+1)} = \frac{6i^2}{n(n+1)(2n+1)} \\ &\iff i = \frac{2n+1}{3} \end{aligned}$$

Si $n = 25$ alors $i = 17$ et $p_i = \dfrac{2 \times 17}{25 \times 26} = \dfrac{17}{325}$.
Le 17ème élève de la classe a 17 chances sur 325 d'être interrogé, quelle que soit la méthode choisie par le professeur.

Exercice 3 –

Notons pour $k \in \{1, 2, 3\}$, U_k (resp. D_k et T_k) l'événement « la $k^{\text{ème}}$ boule est un ① » (resp. ② et ③).

1. La famille (U_1, D_1, T_1) est un système complet d'événements de probabilité non nulle.

> **Cours**
> Un système complet d'événements est une famille d'événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que :
> - $\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (événements 2 à 2 incompatibles),
> - $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

On applique la formule des probabilités totales avec ce système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(U_1)\,\mathbb{P}_{U_1}(T_2) + \mathbb{P}(D_1)\,\mathbb{P}_{D_1}(T_2) + \mathbb{P}(T_1)\,\mathbb{P}_{T_1}(T_2)$$

- Sachant que l'événement U_1 est réalisé, on a remis la boule ① avant le deuxième tirage. Par équiprobabilité on a donc :
$$\mathbb{P}_{U_1}(T_2) = \frac{1}{2}$$
- Sachant que l'événement D_1 est réalisé, on a retiré la boule ② avant le deuxième tirage. Par équiprobabilité on a donc :
$$\mathbb{P}_{D_1}(T_2) = \frac{3}{5}$$
- Sachant que l'événement T_1 est réalisé, on a retiré deux boules ③ avant le deuxième tirage. Par équiprobabilité on a donc :
$$\mathbb{P}_{T_1}(T_2) = \frac{1}{4}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{49}{120} \end{aligned}$$

Cours – Formule des probabilités totales.

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements tel que : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$.
On a alors pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$$

2. Notons A : « les deux tirages amènent le même numéro ».

$$A = (U_1 \cap U_2) \cup (D_1 \cap D_2) \cup (T_1 \cap T_2)$$

Les événements étant deux à deux incompatibles, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(U_1 \cap U_2) + \mathbb{P}(D_1 \cap D_2) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2)\\ &= \mathbb{P}(U_1)\,\mathbb{P}_{U_1}(U_2) + \mathbb{P}(D_1)\,\mathbb{P}_{D_1}(D_2) + \mathbb{P}(T_1)\,\mathbb{P}_{T_1}(T_2)\\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\\ &= \frac{79}{360}\end{aligned}$$

Cours – Probabilités conditionnelles.
Soit $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de A sachant B est : $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(T_1 \cap T_2) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap T_1 \cap T_2)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{1/8}{79/360}\\ &= \frac{45}{79}\end{aligned}$$

3. On utilise la formule des probabilités composées.

Cours – Formule des probabilités composées.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{6} \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(U_1 \cap D_2) = \mathbb{P}(U_1)\,\mathbb{P}_{U_1}(D_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \neq 0$$

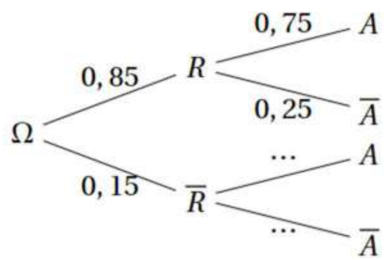
Donc, d'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1 \cap D_2 \cap T_3) &= \mathbb{P}(U_1)\,\mathbb{P}_{U_1}(D_2)\,\mathbb{P}_{U_1 \cap D_2}(T_3)\\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}\\ &= \frac{1}{30}\end{aligned}$$

> Après le deuxième tirage, on n'a pas remis la boule ②, avant le dernier tirage, l'urne contient : ①②③③③.

Exercice 4 –

Notons R : « Patrick a raison » et A : « Patrick a choisi l'Allemagne » et schématisons :



1. On calcule $\mathbb{P}\left(\overline{R}\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{R}\right) &= 1 - \mathbb{P}(R)\\ &= 1 - 0,85\\ &= 0,15 \neq 0\end{aligned}$$

On calcule $\mathbb{P}(R \cap A)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R \cap A) &= \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(A)\\ &= 0,85 \times 0,75\\ &= 0,6375\end{aligned}$$

On cherche à calculer $\mathbb{P}_{\overline{R}}(A) = \dfrac{\mathbb{P}\left(\overline{R} \cap A\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{R}\right)}$.

La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left(R, \overline{R}\right)$ nous donne :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R \cap A) + \mathbb{P}\left(\overline{R} \cap A\right)\\ \iff\ &0,7725 = 0,6375 + \mathbb{P}\left(\overline{R} \cap A\right)\\ \iff\ &\mathbb{P}\left(\overline{R} \cap A\right) = 0,135\end{aligned}$$

Enfin on a :

$$\mathbb{P}_{\overline{R}}(A) = \frac{0,135}{0,15} = 0,9$$

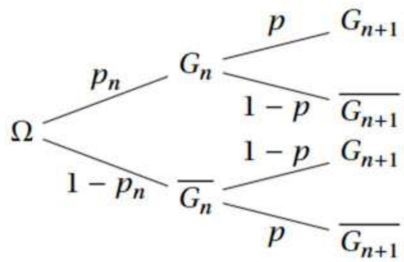
2. $\mathbb{P}_{\overline{A}}(R) = \dfrac{\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap R\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{\mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R\left(\overline{A}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$ avec $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0,7725 = 0,2275$.

$\mathbb{P}_{\overline{A}}(R) = \dfrac{0,85 \times 0,25}{0,2275} \approx 0{,}934$.

Voilà ce qu'il arrive quand un poulpe parie trop souvent sur l'Allemagne.

Exercice 5 –

1. D'après l'énoncé : $\mathbb{P}_{G_n}\left(G_{n+1}\right) = \mathbb{P}_{\overline{G_n}}\left(\overline{G_{n+1}}\right) = p$.



2. Soit n un entier naturel non nul. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left(G_n, \overline{G_n}\right)$ en admettant que $\mathbb{P}(G_n) \neq 0$ et $\mathbb{P}\left(\overline{G_n}\right) \neq 0$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_{n+1}) &= \mathbb{P}(G_n)\,\mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\overline{G_n}\right)\mathbb{P}_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= p_n \times p + (1 - p_n) \times (1 - p) \\ &= p_n \times p + 1 - p - p_n + p_n \times p \\ &= (2p - 1)p_n + 1 - p\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \geq 1,\ p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$$

3.
- Si $p = 1$ alors toutes les parties jouées sont gagnées :

$$\forall n \geq 1,\ p_n = 1 = \frac{1}{2} \times (2 \times 1 - 1)^n + \frac{1}{2}$$

  La relation est donc vraie pour $p = 1$.
- Si $p \neq 1$ la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ est arithmético-géométrique.

Cours – Suite arithmético-géométrique.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

- Si $a = 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$$

- Si $a \neq 1$ alors :
  - On note c l'unique solution de l'équation $x = ax + b$.
  - La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - c$$

  est géométrique de raison a.
  On a alors :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (u_0 - c)a^n + c$$

On résout :

$$\begin{aligned} x = (2p-1)x + 1 - p &\iff x(1 - 2p + 1) = 1 - p \\ &\iff x = \frac{1-p}{2-2p} \quad \text{car } p \neq 1 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $c = \dfrac{1}{2}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = p_n - \frac{1}{2}$$

est géométrique de raison $2p - 1$.

On a enfin :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1,\ p_n &= \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2} \\ &= \left(p - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2p-1}{2} \times (2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence donnait aussi la réponse à cette question.

4. • Si $p = 1$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante, $p_n = 1$ pour tout $n \geq 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$,

• Si $p = 0$, $p_n = \dfrac{1}{2}\left((-1)^n + 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

L'internaute gagne une fois sur deux et la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

• Si $p \in]0,1[$, $|2p-1| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2p-1)^n = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6 –

A. Cas général

1. On a $D_2 = B_1 \cap B_2$ et $D_3 = R_1 \cap B_1 \cap B_2$

> **Cours – Indépendance de deux événements.**
> Deux événements A et B sont indépendants si : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Les tirages étant effectués au hasard et avec remise, par indépendance des tirages, on a :

$$\begin{aligned} u_2 &= \mathbb{P}(D_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2) \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} u_3 &= \mathbb{P}(D_3) \\ &= \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &= \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(B_3) \\ &= p^2(1-p) \end{aligned}$$

2. Notons $A_1 = R_1$, $A_2 = B_1 \cap R_2$ et $A_3 = D_2 = B_1 \cap B_2$.
On a :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = R_1 \cup (B_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap B_2) = R_1 \cup \left(B_1 \cap \underbrace{(R_2 \cup B_2)}_{\Omega}\right) = R_1 \cup B_1 = \Omega$$

De plus :

$$A_1 \cap A_2 = \underbrace{R_1 \cap B_1}_{\emptyset} \cap R_2 = \emptyset, \quad A_1 \cap A_3 = \underbrace{R_1 \cap B_1}_{\emptyset} \cap B_2 = \emptyset$$

Et

$$A_2 \cap A_3 = B_1 \cap R_2 \cap B_1 \cap B_2 = B_1 \cap \underbrace{R_2 \cap B_2}_{\emptyset} = \emptyset$$

Ainsi (A_1, A_2, A_3) est un système complet d'événements.

3. Soit $n \geq 2$.La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements de probabilité non nulle $(R_1, B_1 \cap R_2, D_2)$ nous permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(D_{n+2}) = \underbrace{\mathbb{P}(R_1)}_{1-p}\mathbb{P}_{R_1}(D_{n+2}) + \underbrace{\mathbb{P}(B_1 \cap R_2)}_{p(1-p)}\mathbb{P}_{B_1\cap R_2}(D_{n+2}) + \underbrace{\mathbb{P}(D_2)}_{p^2}\mathbb{P}_{D_2}(D_{n+2})$$

- Sachant que l'événement R_1 est réalisé, on remet les compteurs à zéro après le premier tirage, ainsi, obtenir pour la première fois blanche-blanche lors des $(n+1)^{\text{ème}}$ et $(n+2)^{\text{ème}}$ tirages revient à l'obtenir lors des $n^{\text{ème}}$ et $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage après le premier tirage. Par indépendance, les tirages $2, 3, \dots, n+2$ se déroulant dans les mêmes conditions que les tirages $1, 2, \dots, n+1$, la probabilité de l'événement D_{n+2} sachant R_1 est la même que celle de D_{n+1}. On a donc :
$$\mathbb{P}_{R_1}(D_{n+2}) = \mathbb{P}(D_{n+1})$$
- Sachant que $B_1 \cap R_2$ est réalisé, on remet les compteurs à zéro après le deuxième tirage, ainsi, obtenir pour la première fois blanche-blanche lors des $(n+1)^{\text{ème}}$ et $(n+2)^{\text{ème}}$ tirages revient à l'obtenir lors des $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ tirage après le deuxième tirage. Par indépendance, les tirages $3, 4, \dots, n+2$ se déroulant dans les mêmes conditions que les tirages $1, 2, \dots, n$, la probabilité de l'événement D_{n+2} sachant $B_1 \cap R_2$ est la même que celle de D_n. On a donc :
$$\mathbb{P}_{B_1\cap R_2}(D_{n+2}) = \mathbb{P}(D_n)$$
- $\mathbb{P}_{D_2}(D_{n+2}) = 0$ car sachant que la première fois a eu lieu aux premier et deuxième tirages, il ne peut y avoir de première fois aux $(n+1)^{\text{ème}}$ et $(n+2)^{\text{ème}}$ tirages.

On a donc :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+2} = (1-p)u_{n+1} + p(1-p)u_n$$

On a de plus $(1-p)u_2 + p(1-p)u_1 = (1-p)p^2 = u_3$. La relation est donc vérifiée pour $n = 1$. Ainsi on a :

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+2} = (1-p)u_{n+1} + p(1-p)u_n$$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$(E) : r^2 = (1-p)r + p(1-p)$$

Dont le discriminant est

$$\Delta = (1-p)^2 + 4p(1-p)$$

Comme $p \in]0,1[$, alors le discriminant Δ est strictement positif et l'équation caractéristique (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

5. r_1 et r_2 sont les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

On résout le système :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = p^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \\ \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = p^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \\ \mu r_2(r_2 - r_1) = p^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{p^2}{r_1(r_1 - r_2)} \\ \mu = \dfrac{p^2}{r_2(r_2 - r_1)} \end{cases}$$

B. Applications

1. On suppose qu'il y a autant de boules blanches que de boules rouges. On a donc $p = \dfrac{1}{2}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $u_1 = 0,\ u_2 = \dfrac{1}{4}$ et :

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

Les racines de l'équation caractéristique $r^2 = \dfrac{1}{2}r + \dfrac{1}{4}$ sont $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.
On a donc :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Comme $r_1 - r_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ alors on a :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{p^2}{r_1(r_1 - r_2)} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = \dfrac{2}{5-\sqrt{5}} \\ \mu = \dfrac{p^2}{r_2(r_2 - r_1)} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{5+\sqrt{5}} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Après simplifications, on a finalement :

$$\forall n \geq 1,\quad u_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right]$$

2. On suppose maintenant que $p = \dfrac{2}{3}$.

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $u_1 = 0,\ u_2 = \dfrac{4}{9}$ et :

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$

Les racines de l'équation caractéristique $r^2 = \dfrac{1}{3}r + \dfrac{2}{9}$ sont $r_1 = -\dfrac{1}{3}$ et $r_2 = \dfrac{2}{3}$.
On a donc :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Comme $r_1 - r_2 = -1$ alors on a :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{p^2}{r_1(r_1 - r_2)} = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{-\frac{1}{3} \times (-1)} = \dfrac{4}{3} \\ \mu = \dfrac{p^2}{r_2(r_2 - r_1)} = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{\frac{2}{3} \times 1} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Soit :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = -4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

b) Soit $n \geq 2$. Obtenir, lors des n premiers tirages, au moins une fois blanche-blanche, revient à l'obtenir soit aux tirages 1 et 2, soit aux tirages 2 et 3,..., soit aux tirages $n-1$ et n.

Ainsi pour tout $n \geq 2$, on a $C_n = \bigcup_{k=2}^{n} D_k$ qui est une union d'événements deux à deux incompatibles puisqu'il n'y a qu'une seule première fois. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} D_k\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(D_k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(-4\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\right) \\ &= -4\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

On reconnaît deux sommes de suites géométriques de raisons respectives $-\frac{1}{3} \neq 1$ et $\frac{2}{3} \neq 1$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(C_n) = -4 \times \left(-\frac{1}{27}\right) \times \frac{1-(-1/3)^{n-1}}{1-(-1/3)} + \frac{8}{27} \times \frac{1-(2/3)^{n-1}}{1-(2/3)}$$

Et après simplifications :

$$\forall n \geq 2,\ \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{9}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{8}{9}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

c) On considère l'événement C : « On a eu au moins une fois un doublé blanche-blanche ».
On a $C = \bigcup_{n\geq 2} C_n$. Soit $n \geq 2$. On a :

$$C_n = \bigcup_{k=2}^{n} D_k \subset \bigcup_{k=2}^{n+1} D_k = C_{n+1}$$

La suite d'événements $(C_n)_{n\geq 2}$ est donc croissante au sens de l'inclusion.
Le théorème de la limite monotone nous permet donc d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 2} C_n\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{9}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)+\frac{8}{9}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{9}+\frac{8}{9}\\ &= 1\end{aligned}$$

On est allé un peu plus loin que le programme puisque l'univers est ici infini !

L'événement C est dit presque sûr puisque $\mathbb{P}(C) = 1$.

Exercice 7 –

1. Faux.
2. Faux.
3. Vrai.
4. Vrai. (V_1, V_2, V_3) est un système complet d'événements de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(V_1) = \mathbb{P}(V_2) = \mathbb{P}(V_3) = \frac{1}{3}$$

Le candidat a initialement choisi la porte ①. Trois cas de figure se présentent :

- La voiture est cachée derrière la porte ① que le candidat a désignée. Monty Hall peut indifféremment ouvrir la porte ② ou la porte ③. On a donc :

$$\mathbb{P}_{V_1}(O_2) = \frac{1}{2}$$

- La voiture est cachée derrière la porte ②. Monty Hall ouvre forcément la porte ③. On a donc :

$$\mathbb{P}_{V_2}(O_2) = 0$$

- La voiture est cachée derrière la porte ③. Monty Hall ouvre forcément la porte ②. On a donc :

$$\mathbb{P}_{V_3}(O_2) = 1$$

D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{O_2}(V_3) &= \frac{\mathbb{P}(V_3)\mathbb{P}_{V_3}(O_2)}{\mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(O_2) + \mathbb{P}(V_2)\mathbb{P}_{V_2}(O_2) + \mathbb{P}(V_3)\mathbb{P}_{V_3}(O_2)} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Sachant que Monty Hall a ouvert la porte ②, la probabilité que la voiture soit cachée derrière la porte ③ est $\frac{2}{3}$. Comme la porte initialement choisie par le candidat était la ①, si le joueur change de porte (stratégie B), alors la probabilité de gagner la voiture est $\frac{2}{3}$.
Le résultat aurait été le même en supposant que le candidat avait initialement choisi la porte ② ou la porte ③ : opter pour la stratégie B (changer de porte) double les chances de gagner.

Cours – Formule de Bayes.

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements tel que : $\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$.
On a alors pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ \mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

48 Indépendance d'événements

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Deux événements incompatibles sont indépendants. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Deux événements indépendants sont incompatibles. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Soit A et B deux événements indépendants : ☐ Vrai ☐ Faux
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
4. Soit A et B deux événements indépendants : ☐ Vrai ☐ Faux
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))$$
5. Deux événements de probabilité non nulle peuvent être indépendants et incompatibles. ☐ Vrai ☐ Faux
6. Soit $A,\ B$ et C trois événements mutuellement indépendants : ☐ Vrai ☐ Faux
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$
7. Soit $A,\ B$ et C tels que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ alors $A,\ B$ et C sont des événements mutuellement indépendants. ☐ Vrai ☐ Faux
8. Pour prouver que quatre événements A, B, C et D sont mutuellement indépendants, on doit établir 11 égalités. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Démontrer que si A et B sont des événements indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des événements indépendants.

Exercice 3 –

Étudier l'indépendance des familles d'événements suivantes :

1. On lance un dé tétraédrique (4 faces) équilibré : $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$.
2. On lance un dé octaédrique (8 faces) équilibré : $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 8\}$.
3. On lance un dé octaédrique équilibré : $A = \{1, 4, 6, 8\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 8\}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :

- P_k : « le $k^{\text{ème}}$ lancer donne un pile »,
- F_k : « le $k^{\text{ème}}$ lancer donne un face ».

A. pile-face

Pour tout entier $n \geq 2$, on nomme S_n l'événement « on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $n-1$ et n » et on pose $u_n = \mathbb{P}(S_n)$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Exprimer pour tout entier $n \geq 3$ l'événement S_n comme réunion de $n-1$ événements incompatibles.
3. En déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \frac{n-1}{2^n}$$

B. pile-pile-face

Pour tout entier $k \geq 3$, on nomme T_k l'événement « on obtient pile, pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-2$, $k-1$ et k » et on pose :

$$\forall n \geq 3,\ V_n = \bigcup_{k=3}^{n} T_k$$

Pour tout entier $n \geq 3$, on pose $v_n = \mathbb{P}(V_n)$.

1. Interpréter l'événement V_n pour $n \geq 3$.
2. Justifier que la suite $(v_n)_{n\geq 3}$ est convergente.
3. Déterminer $\mathbb{P}(T_n)$ pour $n \geq 3$.
4. Justifier que les événements T_n, T_{n+1} et T_{n+2} sont deux à deux incompatibles pour $n \geq 3$.
5. Calculer v_3, v_4 et v_5.
6. Prouver que :

$$\forall n \geq 5,\ V_n \cap T_{n+1} = V_{n-2} \cap T_{n+1}$$

   En déduire la valeur de $\mathbb{P}(V_n \cap T_{n+1})$ pour $n \geq 5$.

7. Prouver que :

$$\forall n \geq 5,\ v_{n+1} = \frac{1}{8}(1 - v_{n-2}) + v_n$$

8. On pose $v_1 = v_2 = 0$. Vérifier que la relation précédente est encore vraie pour $n = 3$ et $n = 4$.
9. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$.

Pour aller plus loin

Exercice 5 –

Nous allons démontrer la proposition suivante :

> **Cours**
>
> Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements mutuellement indépendants, alors la famille $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ est aussi formée d'événements mutuellement indépendants.

L'ordre des B_i n'ayant pas d'importance, il suffit de prouver par récurrence sur $k \in \{1, \dots, n\}$ que la famille $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ est formée d'événements mutuellement indépendants avec pour tout $1 \leq i \leq k$, $B_i = \overline{A_i}$ et, pour tout $k + 1 \leq i \leq n$, $B_i = A_i$.

1. Pour l'initialisation, montrer que les événements $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.
2. Conclure.

Exercice 6 – Le vrai/faux de la fin

On lance une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $\alpha \in]0, 1[$.
Si la pièce tombe sur pile, on tire consécutivement et avec remise deux boules d'une urne $\mathcal{U}_1$ contenant une proportion $p \in]0, 1[$ de boules rouges.
Si la pièce tombe sur face, on tire consécutivement et avec remise deux boules d'une urne $\mathcal{U}_2$ contenant une proportion $q \in]0, 1[$ de boules rouges.
On considère les événements :

- U_1 : « la pièce est tombée sur pile »,
- U_2 : « la pièce est tombée sur face »,
- R_1 : « la première boule tirée est rouge »,
- R_2 : « la seconde boule tirée est rouge ».

1. $\mathbb{P}(R_1) = \alpha p + (1 - \alpha)q$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. Les événements U_1 et R_1 sont indépendants. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Les événements $U_1 \cap R_1$ et $U_2 \cap R_2$ sont incompatibles. ☐ Vrai ☐ Faux
4. $\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2)$ ☐ Vrai ☐ Faux
5. $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \dfrac{\alpha p^2 + (1 - \alpha)q^2}{\alpha p + (1 - \alpha)q}$ ☐ Vrai ☐ Faux
6. R_1 et R_2 sont indépendants. ☐ Vrai ☐ Faux
7. R_1 et R_2 sont indépendants si et seulement si $p = q$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Il suffit de considérer A tel que $\mathbb{P}(A) \in \,]0,1[$, A et $\overline{A}$ sont incompatibles. $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \neq 0$ et $\mathbb{P}\left(A \cap \overline{A}\right) = 0$. ☐ Vrai ☒ Faux
2. On lance un dé tétraédrique (4 faces) et on considère les événements, $A = \{1,3\}$ et $B = \{3,4\}$. Par équiprobabilité : ☐ Vrai ☒ Faux

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

   A et B sont indépendants sans être incompatibles puisque $A \cap B = \{3\}$.

3. Voir ci-dessus : A et B sont indépendants sans être incompatibles donc ☐ Vrai ☒ Faux

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

4. A et B indépendants : ☒ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))$$

5. A et B indépendants : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, A et B incompatibles : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. On a donc, si A et B indépendants et incompatibles : $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$ d'où $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$. ☐ Vrai ☒ Faux
6. C'est une condition nécessaire … ☒ Vrai ☐ Faux
7. … mais pas suffisante. ☐ Vrai ☒ Faux
8. Il y a $6 + 4 + 1 = 11$ égalités à établir : ☒ Vrai ☐ Faux
   - Deux par deux : on choisit deux événements R et S parmi $\{A, B, C, D\}$ et on vérifie que $\mathbb{P}(R \cap S) = \mathbb{P}(R)\mathbb{P}(S)$. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ égalités.
   - Trois par trois : on choisit trois événements R, S et T parmi $\{A, B, C, D\}$ et on vérifie que $\mathbb{P}(R \cap S \cap T) = \mathbb{P}(R)\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(T)$. Il y a $\binom{4}{3} = 4$ égalités.
   - quatre par quatre : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$ est la dernière égalité à établir.

Cours

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de $\mathscr{P}(\Omega)$. On dit que les événements A_i sont mutuellement indépendants si :

$$\text{Pour toute partie } J \subset \{1, 2, \dots, n\},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

À retenir

- Ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants !
- L'indépendance d'une famille implique clairement l'indépendance des événements de la famille pris deux par deux. La réciproque est fausse.

Exercice 2 –

A et B sont des événements indépendants donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&= (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)
\end{aligned}$$

Lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des événements indépendants.

Exercice 3 –

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$ et il y a équiprobabilité.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Les événements sont deux à deux indépendants, cependant :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$$

On a ici l'indépendance 2 par 2 mais pas 3 par 3 !

Donc la famille n'est pas mutuellement indépendante.

2. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{5,6,7,8\}$, $C = \{1,3,5,8\}$ et il y a équiprobabilité.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{8\}) = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6,8\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{5,8\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\text{mais } \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{8\}) = \frac{1}{8} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

La famille n'est pas mutuellement indépendante.

> On a ici l'indépendance 3 par 3 mais pas 2 par 2 ! Avec un peu d'intuition, il aurait suffit de s'intéresser à $\mathbb{P}(A \cap C)$ pour gagner du temps.

3. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,4,6,8\}$, $B = \{5,6,7,8\}$, $C = \{1,3,5,8\}$ et il y a équiprobabilité.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{8\}) = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6,8\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{5,8\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{1,8\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

La famille est mutuellement indépendante.

> On a ici l'indépendance 3 par 3 et 2 par 2 d'où l'indépendance mutuelle.

> **À retenir**
>
> Pour prouver l'indépendance d'une famille de n événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, il faut établir l'indépendance des événements pris 2 par 2, 3 par 3, … , $(n-1)$ par $(n-1)$ et n par n.

Exercice 4 –

A. pile-face

1. On a $S_2 = P_1 \cap F_2$ et par indépendance des lancers :

$$u_2 = \mathbb{P}(S_2) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On a $S_3 = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$ donc :

$$\begin{aligned}
u_3 &= \mathbb{P}(S_3) \\
&= \mathbb{P}((P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)) \quad \text{union d'événements incompatibles} \\
&= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3) \\
&= \underbrace{\mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(F_3)}_{1/8} + \underbrace{\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(F_3)}_{1/8} \quad \text{par indépendance des lancers} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2. Pour simplifier l'écriture, nous allons omettre les symboles $\cap$ écrivant par exemple P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$. Soit $n \geq 3$. On a :

$$S_n = P_1P_2 \dots P_{n-1}F_n \cup F_1P_2 \dots P_{n-1}F_n \cup F_1F_2P_3 \dots P_{n-1}F_n \cup \dots \cup F_1F_2 \dots F_{n-2}P_{n-1}F_n$$

On pose $A_0 = P_1P_2 \dots P_{n-2}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n-3\}$:

$$A_k = F_1 \dots F_kP_{k+1} \dots P_{n-2}$$

Et $A_{n-2} = F_1 \dots F_{n-2}$.
On a donc :

$$S_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} (A_k \cap P_{n-1}F_n)$$

Et cette union est formée de $n-1$ événements deux à deux incompatibles.

3. On a donc, par incompatibilité, pour tout entier $n \geq 3$:

$$u_n = \mathbb{P}(S_n) = \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}((A_k \cap P_{n-1}F_n)$$

Les résultats des $n-2$ premiers lancers sont indépendants des résultats des lancers suivants donc les événements A_k, P_{n-1} et F_n sont mutuellement indépendants.
De plus, par indépendance des lancers :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-2\},\ \mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(A_k) \underbrace{\mathbb{P}(P_{n-1})\mathbb{P}(F_n)}_{1/4} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{n-1}{2^n} \end{aligned}$$

La somme de $k = 0$ à $k = n-2$ comporte $n-1$ termes.

B. pile-pile-face

1. Soit $n \geq 3$. V_n est l'événement :
« lors des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la suite pile-pile-face ».

2. Soit $n \geq 3$. On a :

$$V_n = \bigcup_{k=3}^{n} T_k \subset \bigcup_{k=3}^{n+1} T_k = V_{n+1}$$

Donc

$$v_n = \mathbb{P}(V_n) \leq \mathbb{P}(V_{n+1}) = v_{n+1}$$

La suite $(v_n)_{n\geq 3}$ est donc croissante et majorée par 1. La suite $(v_n)_{n\geq 3}$ est convergente.

3. Soit $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n) &= \mathbb{P}(P_{n-2}P_{n-1}F_n)\\ &= \mathbb{P}(P_{n-2})\mathbb{P}(P_{n-1})\mathbb{P}(F_n) \quad \text{par indépendance des lancers}\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

4. Soit $n \geq 3$:

$$T_n = P_{n-2}P_{n-1}F_n, \quad T_{n+1} = P_{n-1}P_nF_{n+1} \quad \text{et} \quad T_{n+2} = P_nP_{n+1}F_{n+2}$$

Le $n^{\text{ème}}$ lancer ne peut amener à la fois un pile et un face donc :

$$T_n \cap T_{n+1} = T_n \cap T_{n+2} = \emptyset$$

Le $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer ne peut amener à la fois un pile et un face donc :

$$T_{n+1} \cap T_{n+2} = \emptyset$$

Les événements T_n, T_{n+1} et T_{n+2} sont donc deux à deux incompatibles.

5.
- $v_3 = \mathbb{P}(T_3) = \dfrac{1}{8}$
- Par incompatibilité de T_3 et T_4 :

$$v_4 = \mathbb{P}(T_3 \cup T_4) = \mathbb{P}(T_3) + \mathbb{P}(T_4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

- Pour finir, comme T_3, T_4 et T_5 sont deux à deux incompatibles :

$$v_5 = \mathbb{P}(T_3 \cup T_4 \cup T_5) = \mathbb{P}(T_3) + \mathbb{P}(T_4) + \mathbb{P}(T_5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

6. Soit $n \geq 5$. $V_n = \displaystyle\bigcup_{k=3}^{n} T_k = \bigcup_{k=3}^{n-2} T_k \cup T_{n-1} \cup T_n = V_{n-2} \cup T_{n-1} \cup T_n$

$$\begin{aligned}V_n \cap T_{n+1} &= (V_{n-2} \cup T_{n-1} \cup T_n) \cap T_{n+1}\\ &= (V_{n-2} \cap T_{n+1}) \cup (\overbrace{T_{n-1} \cap T_{n+1}}^{\emptyset}) \cup (\overbrace{T_n \cap T_{n+1}}^{\emptyset})\\ &= V_{n-2} \cap T_{n+1}\end{aligned}$$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

L'événement V_{n-2} ne dépend que des résultats des $n-2$ premiers lancers de pièce tandis que l'événement T_{n+1} ne dépend que des résultats à partir du $(n-1)^{\text{ème}}$ lancer.

Il aurait été ici inconscient de parier sur l'indépendance des événements V_n et T_{n+1}. La notion d'indépendance n'est pas intuitive !

Par indépendance des lancers, V_{n-2} et T_{n+1} sont indépendants.
On a donc :

$$\mathbb{P}(V_n \cap T_{n+1}) = \mathbb{P}(V_{n-2} \cap T_{n+1}) = \mathbb{P}(V_{n-2})\mathbb{P}(T_{n+1}) = \frac{1}{8}\, v_{n-2}$$

Ainsi : $\forall n \geq 5,\ \mathbb{P}(V_n \cap T_{n+1}) = \dfrac{1}{8}\, v_{n-2}$.

7. Soit $n \geq 5$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \mathbb{P}(V_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(V_n \cup T_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(V_n) + \mathbb{P}(T_{n+1}) - \mathbb{P}(V_n \cap T_{n+1}) \\ &= v_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} v_{n-2} \\ &= v_n + \frac{1}{8}(1 - v_{n-2}) \end{aligned}$$

8. • Pour $n = 4$: $v_4 + \dfrac{1}{8}(1 - v_2) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8} = v_5$

• Pour $n = 3$: $v_3 + \dfrac{1}{8}(1 - v_1) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4} = v_4$

Ainsi :

$$\forall n \geq 3,\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{8}(1 - v_{n-2}) \quad (\star)$$

9. D'après la question 2, la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est convergente.
Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, par passage à la limite dans la relation $(\star)$, on obtient :

$$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$$

Ce qui donne $\ell = 1$. La limite de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est donc 1.

Exercice 5 –

1. On pose $B_1 = \overline{A_1}$ et pour tout $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, $B_j = A_j$.
Soit J une partie de $\{1, \dots, n\}$ ne contenant pas 1 :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(B_j)$$

Soit J une partie de $\{1, \dots, n\}$ contenant 1. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left(A_1, \overline{A_1}\right)$ s'écrit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j\right)\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j\right)\right)$$

$\displaystyle\prod_{j \in J \setminus \{1\}} \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{j \in J \setminus \{1\}} \mathbb{P}(A_j) + \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j\right)\right)$ par indépendance mutuelle des A_i.

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\cap\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{1\}}A_j\right)\right) &= \prod_{j\in J\setminus\{1\}}\mathbb{P}(A_j)-\mathbb{P}(A_1)\prod_{j\in J\setminus\{1\}}\mathbb{P}(A_j)\\ &=(1-\mathbb{P}(A_1))\prod_{j\in J\setminus\{1\}}\mathbb{P}(A_j)\\ &=\mathbb{P}(\overline{A_1})\prod_{j\in J\setminus\{1\}}\mathbb{P}(A_j)\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(B_j)$$

Pour toute partie de $\{1,2,\dots,n\}$, on a donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(B_j)$ ce qui établit que la famille $(B_1,B_2,\dots,B_n)=\left(\overline{A_1},A_2,\dots,A_n\right)$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

2. Pour l'hérédité, on suppose que les événements $\overline{A_1},\overline{A_2},\dots,\overline{A_k},A_{k+1},\dots,A_n$ sont indépendants étant donné un certain entier $k\geq 1$.
En réorganisant nos événements, on a l'indépendance de $A_{k+1},\overline{A_1},\overline{A_2},\dots,\overline{A_k},A_{k+2},\dots,A_n$.
On utilise le résultat précédent en remplaçant A_1 par A_{k+1}.
On aboutit à l'indépendance de $\overline{A_{k+1}},\overline{A_1},\overline{A_2},\dots,\overline{A_k},A_{k+2},\dots,A_n$. On conclut par principe de récurrence.

Exercice 6 –

1. Vrai. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (U_1,U_2) donne :

$$\mathbb{P}(R_1)=\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(R_1)+\mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}_{U_2}(R_1)=\alpha p+(1-\alpha)q$$

2. Faux. $\mathbb{P}(U_1\cap R_1)=\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(R_1)=\alpha p$ tandis que $\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(R_1)=\alpha(\alpha p+(1-\alpha)q)$.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(U_1\cap R_1)=\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(R_1)\\ &\iff \alpha p=\alpha(\alpha p+(1-\alpha)q)\quad\text{or } \alpha\neq 0\\ &\iff p=\alpha p+(1-\alpha)q\\ &\iff (1-\alpha)(p-q)=0\\ &\iff p=q\quad \text{car } 1-\alpha\in\,]0,1[\end{aligned}$$

Les événements U_1 et R_1 ne sont donc pas toujours indépendants.
Ils sont indépendants si et seulement si $p=q$.

3. Vrai. $U_1\cap R_1\cap U_2\cap R_2=\underbrace{U_1\cap U_2}_{\varnothing}\cap R_1\cap R_2=\varnothing$

4. Vrai. Il y a remise, le calcul de $\mathbb{P}(R_2)$ est identique à celui de $\mathbb{P}(R_1)$.

5. Vrai. $\mathbb{P}(R_1) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{R_1}(R_2) &= \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} \\ &= \frac{\alpha p^2 + (1-\alpha)q^2}{\alpha p + (1-\alpha)q}\end{aligned}$$

6. Faux. $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(R_1 \cap R_2) = \alpha p^2 + (1-\alpha)q^2$ tandis que $\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2) = (\alpha p + (1-\alpha)q)^2$.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2) \\ &\iff \alpha p^2 + (1-\alpha)q^2 = (\alpha p + (1-\alpha)q)^2 \\ &\iff \alpha p^2 + (1-\alpha)q^2 = \alpha^2 p^2 + (1-\alpha)^2 q^2 + 2\alpha(1-\alpha)pq \\ &\iff \alpha(1-\alpha)p^2 + (1-\alpha)\alpha q^2 - 2\alpha(1-\alpha)pq = 0 \\ &\iff \alpha(1-\alpha)(p^2 + q^2 - 2pq) = 0 \\ &\iff \alpha(1-\alpha)(p-q)^2 = 0 \\ &\iff p = q \text{ car } \alpha \in]0,1[\end{aligned}$$

Il y a donc indépendance entre R_1 et R_2 si et seulement si $p = q$.

7. Faux. R_1 et R_2 sont indépendants si et seulement si $p = q$, peu importe la valeur de $\alpha \in]0,1[$.

49 Variables aléatoires réelles discrètes finies

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit un entier naturel n et une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ d'image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (rangés dans l'ordre croissant).

1. Soit $x_k \in X(\Omega)$: ☐ Vrai ☐ Faux

$$(X = x_k) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x_k\}$$

2. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$: ☐ Vrai ☐ Faux

La donnée des p_k définit la loi de probabilité de X.

3. Soit $k \in \{2, 3, \dots, n\}$. ☐ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(X < x_k) - \mathbb{P}(X < x_{k-1})$$

4. Soit A un événement : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}_{(X=x_k)}(A)$$

Exercice 2 –

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ dont la loi est donnée ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$1/6$	$1/3$	$1/4$	$1/6$	$1/12$

1. Quelle est l'image $X(\Omega)$?

2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de X.

3. Calculer, à l'aide de la formule de transfert, l'espérance $\mathbb{E}(X^2)$ de X^2.

4. En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de X.

Exercice 3 –

Une urne $\mathcal{U}$ contient six boules indiscernables au toucher :
une boule ①, deux boules ② et trois boules ③.
On effectue une succession de tirages aléatoires sans remise jusqu'à ce que l'urne soit vide.
Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires discrètes suivantes.

1. U est égale au rang du tirage de la boule ①.

2. T est égale au nombre de boules ③ apparues juste avant le quatrième tirage.

3. S est égale au rang du premier tirage d'une boule de numéro supérieur ou égal à celui de la boule précédente.

Exercice 4 –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on lance un dé cubique parfaitement équilibré jusqu'à ce que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :
« on a obtenu un 6 » ou « on a obtenu n fois un résultat différent de 6 ».
On considère la variable aléatoire réelle X_n égale au nombre de lancers effectués.

1. Déterminer pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X_n = k)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $F_n(x)$ où F_n est la fonction de répartition de X_n.

> **Cours**
> La fonction de répartition de X est $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
> $$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\})$$

3. À l'aide de la fonction f définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, déterminer pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, un expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de X_n.

Exercice 5 –

Soit N un entier naturel non nul. On effectue une succession de tirages aléatoires avec remise dans une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N.
On nomme, pour tout entier naturel non nul n :

- X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts qui ont été tirés au cours des n premiers tirages ;
- Z_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $n^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des précédents tirages et prenant la valeur 0 sinon.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser l'image $X_n(\Omega)$, discuter suivant les valeurs de n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer X_n en fonction de certaines variables Z_k. En déduire que :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $k \in X_n(\Omega)$, $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(Z_{n+1} = 1)$.
4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(X_n) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1)$$

5. Prouver par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z_n = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

6. En déduire pour tout entier naturel non nul n une expression de $\mathbb{E}(X_n)$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –
Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire réelle d'image $X(\Omega) \subset \{0, 1, \ldots, n\}$.

1. a) Prouver que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$ pour tout entier k allant de 1 à n.
   b) En déduire :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k)$$

2. Soit N et n deux entiers naturels non nuls. On effectue une succession de n tirages aléatoires avec remise dans une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N.
   On nomme, pour i allant de 1 à n, B_i le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée.
   On considère la variable aléatoire X égale au plus petit nombre obtenu.
   Déterminer la loi de X après avoir justifié que :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, N\},\ (X \geq k) = \bigcap_{i=1}^{n} (B_i \geq k)$$

   Puis déterminer l'espérance de X.

Exercice 7 –
Soit n un entier naturel non nul, une urne contient n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. On tire aléatoirement une boule dans cette urne et on note le numéro k de cette boule.
On enlève ensuite de l'urne toutes les boules de numéros supérieurs ou égaux à k.
On répète ce protocole jusqu'à obtenir la boule ①.
On nomme, pour tout entier naturel non nul n :

- X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule ① ;
- Z_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée.

1. Préciser la loi de probabilité et l'espérance des variables aléatoires réelles X_1 et X_2.
2. Préciser l'image $X_n(\Omega)$.

3. Préciser la valeur de $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et de $\mathbb{P}(X_n = n)$.

4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, montrer que :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{2, \dots, n\}, \ \mathbb{P}_{(Z_n=k)}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{k-1} = j - 1)$$

5. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, montrer que :

$$\forall j \geq 2, \ \mathbb{P}\big(X_n = j\big) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j - 1)$$

6. Si n est supérieur ou égal à 3 et si j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n\mathbb{P}(X_n = j) - (n - 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j)$$

7. En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2, que :

$$\forall j \geq 1, \ \mathbb{P}(X_n = j) = \frac{n-1}{n} \mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \mathbb{P}(X_{n-1} = j - 1)$$

8. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, montrer que :

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \mathbb{E}\left(X_{n-1}\right) + \frac{1}{n}$$

9. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

Soit $p \in \,]0, 1[$. On lance une pièce donnant « *Pile* » avec la probabilité p et « *Face* » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose $p \neq q$.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{\text{ème}}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)^{\text{ème}}$ lancer. On nomme :

- pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus lors des n premiers lancers ;
- pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, Z_k la variable aléatoire égale à 1 si le $k^{\text{ème}}$ lancer est un changement et à 0 sinon.

1.	$\mathbb{P}(X_n = 0) = p^n + q^n$	☐ Vrai ☐ Faux
2.	$\mathbb{P}(X_n = 1) = 2pq\left(pq^{n-1} + qp^{n-1}\right)$	☐ Vrai ☐ Faux
3.	$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1)$	☐ Vrai ☐ Faux
4.	$\mathbb{P}(Z_k = 1) = 2pq$	☐ Vrai ☐ Faux
5.	$\mathbb{E}(X_n) = 2npq$	☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $(X = x_k)$ est un événement. ☒ Vrai ☐ Faux
2. On peut expliciter la loi de X par un tableau ou par une formule. ☒ Vrai ☐ Faux
3. $\forall k \in \{2, 3, \dots, n\}$: ☐ Vrai ☒ Faux

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(X \leq x_k) - \mathbb{P}(X \leq x_{k-1})$$

4. La formule des probabilités totales nous donne : ☒ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}_{(X=x_k)}(A)$$

Exercice 2 –

1. L'image de X est : $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
2. L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X) = -2 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{12} = -\frac{1}{3}$$

3. À l'aide de la formule de transfert, l'espérance de X^2 est :

$$\mathbb{E}(X) = (-2)^2 \times \frac{1}{6} + (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}$$

4. Le théorème de Kœnig Huygens nous permet de calculer la variance de X :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}$$

Cours

Soit un entier naturel non nul n et une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ d'image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
On note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ la variance de X. Alors, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) \qquad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

Cours – Formule de transfert.

Soit un entier naturel non nul n et une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ d'image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
Soit une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $\varphi(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\mathbb{P}(X = x_k)$$

Cours – Théorème de Kœnig Huygens.

Soit un entier naturel non nul n et une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ d'image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
La variance de X est :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Exercice 3 –

Méthode

Avant de faire ce genre d'exercice, s'assurer de bien avoir compris l'expérience. Des schémas peuvent aider à la visualisation. ① ②② ③③③

1. La boule ① peut apparaître à n'importe lequel des 6 tirages donc $U(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on nomme U_k : « la boule ① est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage ».
On a $(U = 1) = U_1$ et pour tout $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $(U = k) = \overline{U_1} \cap \dots \cap \overline{U_{k-1}} \cap U_k$.
Les tirages étant sans remise, il n'y a pas d'indépendance des tirages.
La formule des probabilités composées permet de conclure.
$\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(U_1) = \dfrac{1}{6}$ et, pour tout $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = k) &= \mathbb{P}\left(\overline{U_1} \cap \dots \cap \overline{U_{k-1}} \cap U_k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{U_1}\right) \mathbb{P}_{\overline{U_1}}\left(\overline{U_2}\right) \dots \mathbb{P}_{\overline{U_1} \cap \dots \cap \overline{U_{k-1}}}(U_k) \\
&= \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{6-k+1}{6-k+2} \times \frac{1}{6-k+1} \\
&= \frac{1}{6} \quad \text{par télescopage}
\end{aligned}$$

On peut souvent utiliser un dénombrement au lieu de la formule des probabilités composées.
Il y a 6! tirages possibles.
Pour choisir un tirage favorable à $(U = k)$, on place la boule ① en $k^{\text{ème}}$ position puis on a 5! façons de placer les autres boules.
Ainsi $\mathbb{P}(U = k) = \dfrac{5!}{6!} = \dfrac{1}{6}$.

On a pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{6}$.

2. Il s'agit de 6 tirages successifs avec remise : il y a ordre sans répétition.
Soit Ω l'ensemble des permutations des 6 boules. On a $\text{card}(\Omega) = 6!$. Soit $\omega \in \Omega$.

On nomme A l'ensemble des 3 boules ③ et B l'ensemble des 3 boules ① ou ②.

Pour construire $\omega \in (T = 0)$ il faut et il suffit de :

- choisir une permutation des trois boules de B obtenues lors des 3 premiers tirages, il y a 3! choix possibles ;
- choisir une permutation des trois boules de A obtenues lors des 3 derniers tirages, il y a 3! choix possibles.

On a donc :

$$\mathbb{P}(T = 0) = \frac{3!\,3!}{6!} = \frac{1}{20}$$

Pour construire $\omega \in (T = 1)$ il faut et il suffit de :

- choisir une boule de A, il y a 3 choix possibles ;
- choisir la place de cette boule dans les 3 premiers tirages, il y a 3 choix possibles ;
- choisir les 2 boules de B obtenues dans les 3 premiers tirages, il s'agit d'une 2-liste d'éléments distincts de B, il y a $\mathcal{A}_3^2 = 6$ choix possibles ;
- choisir une permutation des trois boules restantes obtenues lors des 3 derniers tirages, il y a 3! choix possibles.

On a donc :

$$\mathbb{P}(T = 1) = \frac{3 \times 3 \times 6 \times 3!}{6!} = \frac{9}{20}$$

card(A) = card(B) donc les probabilités des événements $(T = 2)$ et $(T = 3)$ s'obtiennent par symétrie en échangeant les rôles de A et de B. On a ainsi :

$$\mathbb{P}(T = 3) = \mathbb{P}(T = 0) = \frac{1}{20} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T = 2) = \mathbb{P}(T = 1) = \frac{9}{20}$$

3. Le numéro d'une boule peut être supérieur ou égal à celui du précédent à partir du deuxième tirage et jusqu'au quatrième tirage puisque la seule série de tirages strictement décroissants est ③②①. L'image de la variable aléatoire S est donc $S(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.
Notons, pour i allant de 1 à 3, N_i le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée.
$(S = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)$, la formule des probabilités composées nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = 4) &= \mathbb{P}\big((N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)\big)\\ &= \mathbb{P}(N_1 = 3)\mathbb{P}_{(N_1=3)}(N_2 = 2)\mathbb{P}_{(N_1=3)\cap(N_2=2)}(N_3 = 1)\\ &= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

$(S = 2) = (N_1 = 1) \cup ((N_1 = 2) \cap (N_2 \in \{2, 3\})) \cup ((N_1 = 3) \cap (N_2 = 3))$
Les événements étant deux à deux incompatibles, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = 2) &= \mathbb{P}(N_1 = 1) + \mathbb{P}((N_1 = 2) \cap (N_2 \in \{2, 3\})) + \mathbb{P}((N_1 = 3) \cap (N_2 = 3))\\ &= \mathbb{P}(N_1 = 1) + \mathbb{P}(N_1 = 2)\mathbb{P}_{(N_1=2)}(N_2 \in \{2, 3\})) + \mathbb{P}(N_1 = 3)\mathbb{P}_{(N_1=3)}(N_2 = 3)\\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5}\\ &= \frac{19}{30}\end{aligned}$$

L'événement $(S = 3)$ se décompose en une réunion événements deux à deux disjoints :

$$((N_1 = 2) \cap (N_2 = 1)) \cup ((N_1 = 3) \cap (N_2 = 1)) \cup ((N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 \in \{2, 3\}))$$

De même :

$$\mathbb{P}(S = 3) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{19}{60}$$

S'il semble préférable de calculer toutes les probabilités puis de vérifier que leur somme égale 1, on peut toutefois s'éviter un long raisonnement en faisant :
$\mathbb{P}(S = 3) = 1 - (\mathbb{P}(S = 4) + \mathbb{P}(S = 2))$

Exercice 4 –

Pour tout entier k compris entre 1 et n, nommons S_k l'événement : « le $k^{\text{ème}}$ lancer amène un 6 ».

1. L'image de X_n est $X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Regardons d'abord les cas extrêmes : $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(S_1) = \dfrac{1}{6}$

$$(X_n = n) = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{S_i} \cap S_n\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}\right) = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{S_i}\right) \cap \underbrace{\left(S_n \cup \overline{S_n}\right)}_{\Omega} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{S_i}$$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

Par la formule des probabilités composées avec $\mathbb{P}\left(\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{n-2}}\right) \neq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = n) &= \mathbb{P}\left(\overline{S_1}\right) \mathbb{P}_{\overline{S_1}}\left(\overline{S_2}\right) \dots \mathbb{P}_{\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{n-2}}}\left(\overline{S_{n-1}}\right) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

On aurait pu aboutir à ce résultat en factorisant : $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{n} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

À retenir

Ne pas tout miser sur l'indépendance des lancers.

Ici on a $\mathbb{P}\left(S_1 \cap \overline{S_2}\right) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}_{S_1}\left(\overline{S_2}\right) = \dfrac{1}{6} \times 0 = 0 \neq \mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}\left(\overline{S_2}\right)$.

Les événements $\left\{S_1, \dots, S_n, \overline{S_1}, \dots, \overline{S_n}\right\}$ ne sont pas mutuellement indépendants.

De même :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\},\ \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}\left(\overline{S_1}\right) \mathbb{P}_{\overline{S_1}}\left(\overline{S_2}\right) \dots \mathbb{P}_{\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}}}(S_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $F_n(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

- Si $x < 1$ alors $F_n(x) = 0$.
- Si $x \in [1, n[$ alors :

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\lfloor x \rfloor}}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\lfloor x \rfloor}\end{aligned}$$

- Si $x \geq n$, $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$ puisque l'image est $X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.

On peut retrouver ce résultat avec le calcul :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}}_{=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}} + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

3. Comme $x \neq 1$ on peut écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} \text{ car le terme en } k = 0 \text{ est nul}\\
&= \left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)'\\
&= \frac{-nx^{n-1}(1 - x) + 1 - x^n}{(1 - x)^2}\\
&= \frac{1 - x^n - nx^{n-1}(1 - x)}{(1 - x)^2}
\end{aligned}$$

L'image est $X_n(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(X = k) + n\mathbb{P}(X = n)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad \text{et comme } x = \frac{5}{6} \neq 1 :\\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{5}{6}\right)}{\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)\right)^2} + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}\\
&= 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Exercice 5 –

1. Si $n \leq N$, lors des n premiers tirages on peut obtenir entre 1 et n numéros distincts.
Si $n > N$, lors des n premiers tirages on peut obtenir entre 1 et N numéros distincts.
L'image de X_n est $X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, \min(n, N)\}$ mais pour la suite, on remarquera que $X_n(\Omega) \subset \{1, 2, \dots, n\}$, au risque d'ajouter des événements de probabilité nulle.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$
Il s'ensuit, par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k)$$
Or pour tout entier k compris entre 1 et n, $Z_k(\Omega) = \{0, 1\}$ donc :
$$\mathbb{E}(Z_k) = 0 \times \mathbb{P}(Z_k = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Z_k = 1) = \mathbb{P}(Z_k = 1)$$
Finalement :
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1)$$

3. Soit $k \in \{1, 2, \dots, \min(n, N)\}$. Sachant que l'événement $(X_n = k)$ est réalisé, on a tiré lors des n premiers tirages exactement k numéros distincts. Il reste donc $N - k$ numéros n'ayant jamais été tirés. Afin que l'événement $(Z_{n+1} = 1)$ se réalise, il faut et il suffit qu'au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, on prélève une boule portant un des $N - k$ numéros jamais choisis.
Ainsi, par équiprobabilité des tirages :
$$\mathbb{P}_{(X_n=k)}(Z_{n+1} = 1) = \frac{N-k}{N} = 1 - \frac{k}{N}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_n(\Omega) \subset \{1, 2, \dots, n\}$ donc la famille $\left(X_n = k\right)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements (certains événements sont vides si $n > N$).

Cours

Si $\left(X_n = k\right)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilité non nulle, alors la formule des probabilités totales permet d'écrire pour tout événement A :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(A)$$

On a ici :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1}=1) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big((X_n=k)\cap(Z_{n+1}=1)\big)\\
&= \sum_{k=1}^{\min(n,N)} \mathbb{P}(X_n=k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(Z_{n+1}=1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n=k)\left(1-\frac{k}{N}\right)\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n=k)}_{1} - \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n=k)}_{\mathbb{E}(X_n)} \quad \text{car } X(\Omega)\subset\{1,2,\dots,n\}\\
&= 1-\frac{1}{N}\mathbb{E}(X_n)\\
&= 1-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Z_k=1)
\end{aligned}$$

La probabilité $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(Z_{n+1}=1)$ n'est définie que si $\mathbb{P}(X_n=k)\neq 0$, il est donc nécessaire de mettre $\min(n,N)$ à la deuxième ligne. Ensuite, dans le cas où $n>N$, si $k>N$, on aura $\mathbb{P}(X_n=k)=0$.

5. Prouvons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z_n=1)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

Initialisation : pour $n=1$, $\mathbb{P}(Z_1=1)=1$ (le premier tirage amène forcément un numéro jamais tiré) et $\left(1-\frac{1}{N}\right)^0=1$, l'initialisation est donc vérifiée.

Hérédité : On suppose que pour un certain entier $n\geq 1$:

$$\forall k\in\{1,2,\dots,n\},\ \mathbb{P}(Z_k=1)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1}=1) &= 1-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Z_k=1)\\
&= 1-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\\
&= 1-\frac{1}{N}\times\frac{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)}\\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le caractère héréditaire de la propriété.

Conclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z_n=1)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

6. On a établi que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(X_n)$, on en déduit que :

$$\mathbb{E}(X_n) = N\left(1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1)\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$

Exercice 6 –

1. **a)** Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$: $(X > k-1) = (X > k) \cup (X = k)$, union de deux événements incompatibles. Il s'ensuit que :

$$\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)$$

On a donc :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$$

b) $X(\Omega) \subset \{0, 1, \dots, n\}$ donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \quad \text{le terme en } k = 0 \text{ est nul}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k)\\
&= \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)\mathbb{P}(X > l) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \quad \text{en posant } l = k-1 \text{ dans la } 1^{\text{ère}} \text{ somme}\\
&= \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)\mathbb{P}(X > l) - \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X > k) \quad \text{car les termes en } k = 0 \text{ et } k = n \text{ sont nuls}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1-k)\mathbb{P}(X > k)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)
\end{aligned}$$

Le décalage d'indice $l = k+1$ donne :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}(X > l-1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k)$$

2. L'image de X est $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, N\}$.
Soit $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, pour que l'événement $(X \geq k)$ se réalise, il faut et il suffit que chacun des n tirages amène un numéro supérieur ou égal à k.
On a donc :

$$(X \geq k) = \bigcap_{i=1}^{n} (B_i \geq k)$$

On a facilement $(X = N) = \bigcap_{i=1}^{n} (B_i = N)$ et par indépendance des tirages, $\mathbb{P}(X = N) = \frac{1}{N^n}$.
L'écriture de l'événement $(X = k)$ pour $k < N$ est loin d'être aussi aisée, on s'intéresse alors à l'événement $(X \geq k)$.

Les événements $(B_i \geq k)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendants donc :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i \geq k)$$

Il y a $N - k + 1$ numéros supérieurs ou égaux à k dans l'urne donc par équiprobabilité :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathbb{P}(B_i \geq k) = \frac{N - k + 1}{N}$$

Ainsi

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, N\},\ \mathbb{P}(X \geq k) = \frac{(N - k + 1)^n}{N^n}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}\forall k \in \{1, 2, \ldots, N\},\ \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)\\ &= \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1)\\ &= \frac{(N - k + 1)^n}{N^n} - \frac{(N - k)^n}{N^n}\end{aligned}$$

D'après la question 1 :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(N - k + 1)^n}{N^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(N - k)^n}{N^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$$

Exercice 7 –

1.
- Pour la loi de X_1, l'urne ne contenant que la boule ①, on l'obtient dès le premier tirage. Ainsi $X_1(\Omega) = \{1\}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$. L'espérance est $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
- Pour la loi de X_2, l'urne ne contient que les boules ① et ②.
  - Soit on tire la boule ① au premier tirage et alors $X_2 = 1$.
  - Soit on tire la boule ② au premier tirage et, celle-ci étant enlevée, on tirera la boule ① au second tirage et $X_2 = 2$.

  On a donc $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$ et par équiprobabilité, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(Z_2 = 1) = 1/2$.
  Comme $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) = 1/2$.
  L'espérance est :

$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. Il y a n boules dans l'urne. Les cas extrêmes sont :
- On tire la boule ① au premier tirage et dans ce cas $X_n = 1$.
- On tire le numéro n au premier tirage, puis $n - 1$ au deuxième tirage, puis $n - 2$ au troisième tirage, … et ainsi de suite jusqu'à tirer la boule ① au $n^{\text{ème}}$ tirage et dans ce cas $X_n = n$.

Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Il est ensuite toujours possible de tirer la boule ① au $k^{\text{ème}}$ tirage donc $X_n(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. L'événement $(X_n = 1)$ se réalise si et seulement si on obtient au premier tirage la boule numérotée 1, par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$$

L'événement $(X_n = n)$ se réalise si et seulement si on enlève une seule boule à chaque tirage c'est à dire si et seulement si on obtient dans cet ordre les boules numérotées $n, n-1, \dots, 2, 1$. En nommant, pour i allant de n, N_i la variable aléatoire égale au numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, on a :

$$(X_n = 1) = \bigcap_{i=1}^{n} (N_i = n - i + 1)$$

La formule des probabilités composées avec $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (N_i = n - i + 1)\right) \neq 0$ nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = 1) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (N_i = n - i + 1)\right) \\
&= \mathbb{P}(N_1 = n)\mathbb{P}_{(N_1=n)}(N_2 = n-1) \dots \mathbb{P}_{(N_1=n)\cap(N_2=n-1)\cap\dots\cap(N_{n-1}=2)}(N_n = 1) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

4. Soit $n \geq 2$, Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Sachant que $(Z_n = k)$ est réalisé, la première boule tirée est $k \geq 2$, alors :

- On a retiré tous les numéros supérieurs ou égaux à k, le deuxième tirage se fait donc dans une urne ne contenant que les boules numérotées de 1 à $k - 1$.
- Le premier tirage n'apportant pas la boule ①, l'événement $(X_n = j)$ se réalise si et seulement si on obtient la boule ① pour la première fois après $j - 1$ tirages.
  Le premier de ces $j - 1$ tirages se faisant dans une urne ne contenant que les boules numérotées de 1 à $k - 1$, cela se réalise avec une probabilité $\mathbb{P}(X_{k-1} = j - 1)$.

Ainsi :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{2, \dots, n\},\ \mathbb{P}_{(Z_n=k)}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{k-1} = j - 1)$$

5. Soit $n \geq 2$, $(Z_n = k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilité non nulle donc d'après la formule des probabilités totales pour $j \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(Z_n = k)}_{1/n} \mathbb{P}_{(Z_n=k)}(X_n = j) \\
&= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\mathbb{P}_{(Z_n=1)}(X_n = j)}_{=0 \text{ pour } j>1} + \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}_{Z_n=k}(X_n = j)\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_{k-1} = j - 1) \quad \text{d'après la question 4} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_l = j - 1) \quad \text{en posant } l = k - 1
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \geq 2,\ \mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j - 1)$$

6. Soit $n \geq 3$ et $j \geq 2$:

- $n \geq 3$ et $j \geq 2$ donc : $n\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{n}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j - 1)$
- $n \geq 3$ donc $n - 1 \geq 2$ et $j \geq 2$ donc : $(n-1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j) = \dfrac{n-1}{n-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(X_k = j - 1)$

Ainsi :

$$n\mathbb{P}(X_n = j) - (n-1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j - 1) - \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(X_k = j - 1)$$

7.
- Pour $n \geq 3$ et $j \geq 2$: $n\mathbb{P}(X_n = j) = (n-1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \mathbb{P}(X_{n-1} = j - 1)$
- Pour $n \geq 3$ et $j \geq 2$: $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{n-1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \dfrac{1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j - 1)$

Attention, nous devons établir le résultat pour $n \geq 2$ et $j \geq 1$

- Si $j = 1$ alors pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n$ et :

$$\frac{n-1}{n}\underbrace{\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)}_{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n}\underbrace{\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)}_{0} = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} = \mathbb{P}(X_n = 1)$$

Si $j = 1$ la propriété est donc toujours vraie.

- Supposons que $n = 2$, le cas $j = 1$ vient d'être traité. Si $j \geq 3$, alors la propriété est vraie puisque :

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = 0$$

Il reste à traiter le cas $j = 2$:

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1/2,\ \mathbb{P}(X_1 = 2) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$$

Donc :

$$\frac{2-1}{2}\mathbb{P}(X_1 = 2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(X_2 = 2)$$

On a bien établi que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \geq 1,\ \mathbb{P}(X_n = j) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j - 1)$$

8. Soit $n \geq 2$, comme $X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X_n = j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \left[\frac{n-1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j - 1)\right] \\
&= \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X_{n-1} = j - 1)
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(X_{n-1} = n) = 0$, on peut retirer le terme correspondant à $j = n$ dans la première somme et, pour la seconde somme, on pose $i = j - 1$.

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\mathbb{P}(X_{n-1} = i)$$

On enlève dans la seconde somme le terme correspondant à $i = 0$ qui est nul.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} j\mathbb{P}(X_{n-1} = j)}_{\mathbb{E}(X_{n-1})} + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} j\mathbb{P}(X_{n-1} = j)}_{\mathbb{E}(X_{n-1})} + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = j)}_{1} \\ &= \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 2\end{aligned}$$

9. Comme $\mathbb{E}(X_1) = 1$ et $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 2$, on prouve par récurrence que :

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Initialisation : Pour $n = 1$, $\mathbb{E}(X_1) = 1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$.
Hérédité : On suppose que pour un certain entier $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On a d'après la question 8 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 8 –

1. Vrai. Pour n'avoir aucun changement, il faut et il suffit de ne tirer que des piles ou que des faces. Ainsi $(X_n = 0) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$ union d'événements deux à deux incompatibles. on a donc :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Puis par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = p^n + q^n$$

2. Faux. L'événement $(X_n = 1)$ se réalise si et seulement si il y a exactement un changement lors des n lancers. Ainsi :

$$(X_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{n-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} F_i\right) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} P_i\right)$$

Par incompatibilité et par indépendance mutuelle des lancers on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = 1) &= \sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} q^k p^{n-k}\\
&= q^n \sum_{k=1}^{n-1} (p/q)^k + p^n \sum_{k=1}^{n-1} (q/p)^k \quad \text{or } \frac{p}{q} \neq 1 \text{ et } \frac{q}{p} \neq 1 \text{ donc :}\\
&= q^n \times \frac{p}{q} \times \frac{1-(p/q)^{n-1}}{1-(p/q)} + p^n \times \frac{q}{p} \times \frac{1-(q/p)^{n-1}}{1-(q/p)}\\
&= p \times \frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{1-(p/q)} + q \times \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{1-(q/p)}\\
&= (q^{n-1} - p^{n-1})\left(\frac{p}{1-(p/q)} - \frac{q}{1-(q/p)}\right)\\
&= (q^{n-1} - p^{n-1})\left(\frac{pq}{q-p} - \frac{pq}{p-q}\right)\\
&= \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

3. Vrai. Comme $Z_k(\Omega) = \{0, 1\}$, alors $\mathbb{E}(Z_k) = 0 \times \mathbb{P}(Z_k = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Z_k = 1) = \mathbb{P}(Z_k = 1)$.
Z_k est le nombre de changements au $k^{\text{ème}}$ lancer (0 ou 1), or, pour $n \geq 2$, X_n est le nombre total de changements entre le $2^{\text{ème}}$ et le $n^{\text{ème}}$ lancer inclus, par conséquent :

$$X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc;

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(Z_k) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1)$$

4. Vrai. La formule des probabilités totales avec le système complet (P_{k-1}, F_{k-1}) nous permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(Z_k = 1) = \underbrace{\mathbb{P}(P_{k-1})}_{p} \mathbb{P}_{P_{k-1}}(Z_k = 1) + \underbrace{\mathbb{P}(F_{k-1})}_{q} \mathbb{P}_{F_{k-1}}(Z_k = 1)$$

- Sachant que la pièce est tombée sur pile au $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer, l'événement $(Z_k = 1)$ se réalise si et seulement si la pièce tombe sur face au $k^{\text{ème}}$ lancer.
  Ainsi $\mathbb{P}_{P_{k-1}}(Z_k = 1) = \mathbb{P}(F_k) = q$.
- Sachant que la pièce est tombée sur face au $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer, l'événement $(Z_k = 1)$ se réalise si et seulement si la pièce tombe sur pile au $k^{\text{ème}}$ lancer.
  Ainsi $\mathbb{P}_{F_{k-1}}(Z_k = 1) = \mathbb{P}(P_k) = p$ et ainsi $\mathbb{P}(Z_k = 1) = pq + qp = 2pq$

5. Faux. $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1) = \sum_{k=2}^{n} 2pq = 2(n-1)pq$.

50 Lois discrètes finies usuelles

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit X, Y et S des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ d'images respectives $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et $S(\Omega)$.

1. Si $X(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) \in]0, 1[$ alors :

☐ Vrai ☐ Faux

X suit une loi de Bernoulli.

2. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega) \setminus \{\Omega, \emptyset\}$, si $Y = \mathbb{1}_A$, fonction indicatrice de A, alors :

☐ Vrai ☐ Faux

Y suit une loi de Bernoulli.

3. On lance 10 fois un dé cubique équilibré et on note S la somme des résultats des lancers :

☐ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{E}(S) = 30$$

4.

☐ Vrai ☐ Faux

$$\sum_{k=1}^{9} k \binom{9}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{9-k} = 3$$

Exercice 2 –

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Déterminer $X(\Omega)$, la loi de X, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ dans chacune des situations suivantes :

1. Une urne contient 1 seule boule numérotée a. On tire une boule au hasard, X est la variable aléatoire égale au numéro de cette boule.
2. Soit un entier naturel non nul n. Une urne contient n boules indiscernables numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard, X est la variable aléatoire égale au numéro de cette boule.
3. Soit $p \in]0, 1[$. Une urne contient une proportion p de boules rouges. On tire une boule au hasard, $X = 1$ si la boule tirée est rouge, $X = 0$ sinon.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$. Une urne contient une proportion p de boules rouges. On tire successivement avec remise n boules au hasard, X est la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Une pièce non forcément équilibrée a la probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur « pile ».
Les lancers sont mutuellement indépendants. On note X le nombre de « piles » obtenus.

1. Dans cette question, on lance 20 fois la pièce.

a) Quelle est la loi de X ? Préciser son espérance.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 8 « piles » ?

c) Pour quelle valeur de p la valeur de $\mathbb{P}(X = 8)$ est-elle maximale ?

2. Dans cette question on a $p = 0,6$ et on lance la pièce n fois avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Quelle est la valeur de $p_n = \mathbb{P}(X \geq 1)$?

b) Combien de fois faut-il lancer la pièce pour que la probabilité d'obtenir au moins un « pile » dépasse 99, 9% ?

3. Dans l'expérience A, on lance quatre fois la pièce, dans l'expérience B, on lance deux fois la pièce. X_A (resp. X_B) est la variable aléatoire égale au nombre de « piles » obtenus au cours de l'expérience A (resp. B). On parie sur l'expérience qui a le plus de chance d'obtenir strictement plus de la moitié de « faces ».

a) Calculer la probabilité de gagner avec l'expérience A.

b) Sur quelle expérience faut-il parier ? Discuter en fonction des valeurs de p.

Exercice 4 –

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on considère $N+1$ urnes notées $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_N$. Chacune de ces urnes contient N boules indiscernables au toucher et, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$, l'urne $\mathcal{U}_i$ contient i boules blanches et $N - i$ boules noires.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit aléatoirement une urne dans laquelle on effectue n tirages avec remise d'une boule. On nomme X le numéro de l'urne choisie et Y le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Prouver que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, N\},\ \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{i}{N}\right)^k \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-k}$$

3. Démontrer que :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{2}$$

Exercice 5 –

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire.

On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, chaque tirage d'une boule entraînant l'ajout d'une boule de la même couleur.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Montrer que X_1 et X_2 suivent toutes deux une loi uniforme.

2. On suppose que pour un certain entier naturel $n \geq 1$, $X_n \sim \mathscr{U}(\{0, 1, \dots, n\})$.
Prouver que $X_{n+1} \sim \mathscr{U}(\{0, 1, \dots, n+1\})$ et conclure.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

On considère deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient une proportion $p \in]0, 1[$ de boules rouges tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une proportion $\alpha \in]0, 1[$ de boules vertes.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. L'expérience consiste à :

- Tirer N boules au hasard et avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
  X est la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues lors de ces N tirages.
- Si on a tiré n boules rouges dans $\mathcal{U}_1$, alors on tire n boules au hasard et avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_2$. Y est la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues lors de ces n tirages.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Quelle est l'image $Y(\Omega)$?

3. Soit $n \in X(\Omega)$ et $k \in Y(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k)$.

4. Soit trois entiers naturels $0 \leq k \leq n \leq N$, établir que :

$$\binom{N}{n}\binom{n}{k} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$

5. Déterminer la loi de Y.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$. La fonction génératrice de X est la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

1. $g_X(0) = 0$ et $g_X(1) = 1$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathbb{E}(X) = g_X'(1)$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 = \mathbb{V}(X)$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X = i) = g_X^{(i)}(0)$. ☐ Vrai ☐ Faux
5. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = pt$$

6. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = (pt + 1 - p)^n$$

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$. ☐ Vrai ☒ Faux
2. $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ par $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Soit X la variable aléatoire égale au résultat d'un lancer de dé équilibré. $X \sim \mathscr{U}(\{1, 2, \ldots, 6\})$ et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1+6}{2} = 3,5$ donc : ☐ Vrai ☒ Faux

$$\mathbb{E}(S) = 10 \times 3,5 = 35$$

4. On reconnait l'espérance de $X \sim \mathscr{B}(9, 1/3)$. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Cours

1. $X(\Omega) = \{a\}$, $\mathbb{P}(X = a) = 1$, $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = 0$, X suit la loi certaine de paramètre a.
2. X suit la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

3. X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

4. On répète n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p. Ainsi X, compteur de succès, suit la loi binomiale de paramètres n et p.

$$\forall k \in X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p)$$

Exercice 3 –

1. Dans cette question, on lance 20 fois la pièce de façon identique et indépendante.

   a) $X \sim \mathscr{B}(20, p)$ et $\mathbb{E}(X) = 20p$.

   b) On a :

$$\mathbb{P}(X = 8) = \binom{20}{8} p^8 (1 - p)^{12}$$

   c) Pour tout $p \in]0, 1[$, on pose :

$$f(p) = \binom{20}{8} p^8 (1 - p)^{12}$$

   f est dérivable sur $]0, 1[$ et :

$$f'(p) = \binom{20}{8} \left[8p^7 (1 - p)^{12} - 12(1 - p)^{11} p^8 \right]$$

   On obtient après factorisation :

$$f'(p) = \binom{20}{8} p^7 (1 - p)^{11} \left(8(1 - p) - 12p\right)$$

$\binom{20}{8}p^7(1-p)^{11} > 0$ donc :

$$\begin{aligned} f'(p) \geq 0 &\iff 8(1-p) - 12p \geq 0 \\ &\iff 8 - 20p \geq 0 \\ &\iff p \leq 8/20 \end{aligned}$$

Le maximum est atteint pour $p = \dfrac{8}{20} = 40\%$.

2. Dans cette question on a $p = 0,6$, on lance la pièce n fois avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $X \sim \mathscr{B}(n; 0,6)$ donc :

$$p_n = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0,4^n$$

b) On résout :

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,999 &\iff 1 - 0,4^n \geq 0,999 \\ &\iff 0,001 \geq 0,4^n \\ &\iff \ln(0,001) \geq \ln(0,4^n) \\ &\iff \ln(0,001) \geq n\ln(0,4) \\ &\iff \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)} \leq n \quad \text{car } \ln(0,4) < 0 \end{aligned}$$

On obtient $n \geq 8$.

3. Dans l'expérience A, obtenir plus de la moitié de « faces » correspond à $X_A \in \{0, 1\}$.
Dans l'expérience B, obtenir plus de la moitié de « faces » correspond à $(X_B = 0)$.

a) $X_A \sim \mathscr{B}(4, p)$, et, par incompatibilité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(X_A \in \{0,1\}\big) &= \mathbb{P}(X_A = 0) + \mathbb{P}(X_A = 1) \\ &= (1-p)^4 + \binom{4}{1}p(1-p)^3 \\ &= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 \end{aligned}$$

b) $X_B \sim \mathscr{B}(2, p)$ et $\mathbb{P}(X_B = 0) = (1-p)^2$.
On résout :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_A \in \{0,1\}) \geq \mathbb{P}(X_B = 0) &\iff (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 \geq (1-p)^2 \\ &\iff (1-p)^2\left[(1-p)^2 + 4p(1-p) - 1\right] \geq 0 \\ &\iff (1-p)^2 + 4p - 4p^2 - 1 \geq 0 \quad \text{car } (1-p)^2 > 0 \\ &\iff (1-p)^2 - (2p-1)^2 \geq 0 \quad \text{car } 4p - 4p^2 - 1 = -(2p-1)^2 \\ &\iff (1 - p - 2p + 1)(1 - p + 2p - 1) \geq 0 \\ &\iff (2 - 3p) \times p \geq 0 \\ &\iff 2 - 3p \geq 0 \\ &\iff p \leq 2/3 \end{aligned}$$

Ainsi on a intérêt à parier sur l'expérience A si $p < 2/3$ et sur l'expérience B si $p > 2/3$.
Si $p = 2/3$, les deux expériences donnent la même probabilité de succès.

Exercice 4 –

1. L'urne est choisie au hasard donc X suit la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, N\}$, donc :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, N\},\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{N+1}$$

2. Soit $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements de probabilité non nulle $(X = i)_{0 \leq i \leq N}$ nous permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Y = k)$$

Soit $i \in \{0, 1, \dots, N\}$. Sachant que l'événement $(X = i)$ est réalisé, on tire avec remise n boules de $\mathcal{U}_i$ dans laquelle la proportion de boules blanches est $\frac{i}{N}$. La loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$ est donc la loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{i}{N}\right)$. Par conséquent on a :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, N\},\ \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{i}{N}\right)^k \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-k}$$

3. Comme $Y(\Omega) = \{0, 1, \dots, N\}$, l'espérance de Y est :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Y = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{i}{N}\right)^k \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{i}{N}\right)^k \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-k}}_{\frac{ni}{N}} \\
&= \frac{n}{N(N+1)} \underbrace{\sum_{i=0}^{N} i}_{\frac{N(N+1)}{2}} = \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

> Les deux sommes étant finies avec des indices i et j indépendants, on peut intervertir les Σ. On reconnait l'espérance de la loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{i}{N}\right)$.

Exercice 5 –

1. Si $n = 1$, il y a un seul tirage qui a amené soit une boule blanche soit une boule noire avec la même probabilité 1/2. On a donc $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ ainsi :

$$X_1 \sim \mathcal{U}(\{0, 1\})$$

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on nomme :

- N_i : « le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire »,
- B_i : « le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule blanche ».

Si $n = 2$, il y a exactement deux tirages donc $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Comme $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$;

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1) &= 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = 2)\\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

On pouvait considérer $(X_2 = 1) = (N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2)$, union d'événements disjoints.

On a ainsi :

$$X_2 \sim \mathcal{U}(\{0, 1, 2\})$$

2. On suppose que pour un certain entier naturel $n \geq 1$:

$$X_n \sim \mathcal{U}(\{0, 1, \dots, n\})$$

Étudions la loi de X_{n+1}. Au cours des $n + 1$ premiers tirages on a tiré entre 0 et $n + 1$ boules blanches, ainsi $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1, \dots, n + 1\}$.
L'événement $(X_{n+1} = 0)$ se réalise si et seulement si on n'a tiré aucune boule blanche lors des n premiers tirages et si la $(n + 1)^{\text{ème}}$ boule tirée est noire. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}\big((X_n = 0) \cap N_{n+1}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(X_n = 0\big)\, \mathbb{P}_{(X_n=0)}\big(N_{n+1}\big)\end{aligned}$$

Comme $X_n \sim \mathcal{U}(\{0, 1, \dots, n\})$ alors $\mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{1}{n+1}$.
Sachant que l'événement $\big(X_n = 0\big)$ est réalisé, on a ajouté n boules noires.
Avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, il y a donc une boule blanche et $(n + 1)$ boules noires dans l'urne. On a par équiprobabilité :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}\\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

Soit maintenant un entier k, $1 \leq k \leq n + 1$. Pour avoir exactement k boules blanches en $n + 1$ tirages, il faut et il suffit d'avoir k boules blanches après n tirages puis de tirer une boule noire au dernier tirage ou d'avoir $k - 1$ boules blanches après n tirages puis de tirer une boule blanche au dernier tirage, ainsi :

$$(X_{n+1} = k) = \big[(X_n = k) \cap N_{n+1}\big] \cup \big[(X_n = k - 1) \cap B_{n+1}\big]$$

Les événements formant cette union étant incompatibles, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}((X_n = k) \cap N_{n+1}) + \mathbb{P}((X_n = k - 1) \cap B_{n+1}).\\ &= \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(N_{n+1}) + \mathbb{P}(X_n = k - 1)\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(B_{n+1})\end{aligned}$$

Méthode

On peut aussi utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements de probabilité non nulle $(X_n = i)_{0\leq i\leq n}$. Cela donne pour $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = i)\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)$$

Et, en remarquant que les seuls termes non nuls de cette somme sont pour $i = k - 1$ et $i = k$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) + \mathbb{P}(X_n = k-1)\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k)$$

Comme $X_n \sim \mathscr{U}(\{0, 1, \dots, n\})$, $\mathbb{P}((X_n = k) = \mathbb{P}((X_n = k - 1) = \dfrac{1}{n+1}$.

- Sachant que $(X_n = k)$ est réalisé, lors des n premiers tirages on a obtenu k boules blanches et $n - k$ boules noires. On a donc ajouté k boules blanches et $n - k$ boules noires dans l'urne qui contenait initialement une boule blanche et une boule noire. L'urne contient donc $k + 1$ boules blanches et $n - k + 1$ boules noires, soit $n + 2$ boules.
  Par équiprobabilité :
  $$\mathbb{P}_{(X_n=k)}(N_{n+1}) = \frac{n-k+1}{n+2}$$
- Sachant que $(X_n = k - 1)$ est réalisé, lors des n premiers tirages on a obtenu $k - 1$ boules blanches et $n - k + 1$ boules noires. On a donc ajouté $k - 1$ boules blanches et $n - k + 1$ boules noires dans l'urne qui contenait initialement une boule blanche et une boule noire. L'urne contient donc k boules blanches et $n - k + 2$ boules noires, soit $n + 2$ boules.
  Par équiprobabilité :
  $$\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(B_{n+1}) = \frac{k}{n+2}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n-k+1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2}\\ &= \frac{n-k+1+k}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

Finalement on a $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1, \dots, n + 1\}$ et, pour tout entier k, $0 \leq k \leq n + 1$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+2}$ donc :

$$X_{n+1} \sim \mathscr{U}(\{0, 1, \dots, n + 1\})$$

On a prouvé que $X_1 \sim \mathscr{U}(\{0, 1\})$ puis que, si, pour un certain entier $n \geq 1$, $X_n \sim \mathscr{U}(\{0, 1, \dots, n\})$ alors $X_{n+1} \sim \mathscr{U}(\{0, 1, \dots, n + 1\})$.
Par principe de récurrence, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \sim \mathscr{U}(\{0, 1, \dots, n\})$$

Exercice 6 –

1. On répète N fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, les tirages étant avec remise, ces épreuves sont indépendantes. Le compteur de succès X suit donc la loi binomiale de paramètres N et p.
2. Lors de la seconde partie de l'expérience, on peut ne tirer aucune boule verte mais aussi jusqu'à N boules vertes (il aura fallu préalablement obtenir N boules rouges). Tous les cas intermédiaires étant possibles, on a $Y(\Omega) = \{0, 1, \dots, N\}$.
3. Soit $n \in X(\Omega)$ et $k \in Y(\Omega)$. On répète n fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre $\alpha \in]0,1[$, les tirages étant avec remise, ces épreuves sont indépendantes. La loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est donc la loi binomiale de paramètres n et α.

$$\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

4. Soit $0 \leq k \leq n \leq N$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{N}{n}\binom{n}{k} &= \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{N!}{(N-n)!} \times \frac{1}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{(n-k)!\,(N-n)!} \\
&= \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}
\end{aligned}$$

5. Soit $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $(X = n)_{0 \leq n \leq N}$ est un système complet d'événements de probabilité non nulle. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k) \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = n)\underbrace{\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k)}_{0} + \sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k) \\
&= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{n} p^n(1-p)^{N-n}\binom{n}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k} \\
&= (\alpha p)^k \sum_{n=k}^{N} \underbrace{\binom{N}{n}\binom{n}{k}}_{\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}}(p(1-\alpha))^{n-k}(1-p)^{N-n} \quad \text{on pose } m = n-k : \\
&= \binom{N}{k}(\alpha p)^k \sum_{m=0}^{N-k} \binom{N-k}{m}(p(1-\alpha))^m(1-p)^{N-k-m} \quad \text{et avec le binôme de Newton} \\
&= \binom{N}{k}(\alpha p)^k\left(p(1-\alpha) + (1-p)\right)^{N-k} = \binom{N}{k}(\alpha p)^k(1-\alpha p)^{N-k}
\end{aligned}$$

Ainsi $Y \sim \mathscr{B}(N, \alpha p)$

Exercice 7 –

1. Faux. $g_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$ et $g_X(1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$ car $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

2. Vrai. Comme g_X est une fonction polynôme, alors g_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t :

$$g_X'(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)kt^{k-1}$$

De plus $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, donc :

$$g_X'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)$$

3. Vrai. $g_X''(t) = \sum\limits_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X = k)k(k-1)t^{k-2}$ et $g_X''(1) = \sum\limits_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X = k)k(k-1)$
Et, en rajoutant les termes nuls en $k = 0$ et $k = 1$:

$$\begin{aligned}
g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)k(k-1+1) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{V}(X)
\end{aligned}$$

4. Faux. Soit $i \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ g_X^{(i)}(t) &= \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}(X = k)k(k-1)\cdots(k-i+1)t^{k-i} \\
&= \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}(X = k)\frac{k!}{(k-i)!}t^{k-i}
\end{aligned}$$

Lorsque $t = 0$, tous les termes de la somme excepté celui correspondant à $k = i$ s'annulent. Il reste $g_X^{(i)}(0) = i!\,\mathbb{P}(X = i)$. On a donc :

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{i!}\,g_X^{(i)}(0)$$

5. Faux. $X \sim \mathscr{B}(p)$ donc pour tout réel t, $g_X(t) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)t = 1 - p + pt$.

6. Vrai. $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ donc pour tout réel t, $g_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(pt)^k(1-p)^{n-k} = (pt + 1 - p)^n$.

51 Couples de variables aléatoires

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ d'images respectives $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$.

1. La loi conjointe du couple (X, Y) est définie par la connaissance de $n+p$ probabilités. ☐ Vrai ☐ Faux
2. La connaissance de la loi conjointe (X, Y) entraîne la connaissance des lois marginales X et Y. ☐ Vrai ☐ Faux
3. La connaissance des lois marginales X et Y entraîne la connaissance de la loi conjointe (X, Y). ☐ Vrai ☐ Faux
4. Si X et Y sont indépendantes, la connaissance des lois marginales X et Y entraîne la connaissance de la loi conjointe (X, Y). ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes X et Y est donnée par le tableau ci-dessous :

$y_j \backslash x_i$	0	1	2	3	$\sum$
-1	α	0	4α	α	
0	0	3α	2α	0	
1	α	5α	0	3α	
$\sum$					

1. Déterminer la valeur du réel α.
2. Recopier et compléter le tableau.
3. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
4. Déterminer l'espérance de X et l'espérance de Y.
5. Déterminer l'espérance de XY.
6. Déterminer la covariance du couple (X, Y).
7. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 1)$.
8. Déterminer l'espérance de $Z = X^2 + Y$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

On dispose de 4 urnes $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$ contenant chacune 6 boules numérotées et indiscernables au toucher.

- $\mathcal{U}$ contient ① ②② ③③③ • $\mathcal{U}_1$ contient ③ ②② ①①①.
- $\mathcal{U}_2$ contient ② ①① ③③③ • $\mathcal{U}_3$ contient ① ③③ ②②②.

L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne $\mathcal{U}$ et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si $X = i$, alors on tire successivement avec remise deux boules de l'urne $\mathcal{U}_i$ et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules ① tirées dans $\mathcal{U}_i$.

1. Donner la loi de X et calculer son espérance $\mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) en complétant le tableau ci-dessous.

$y_j \backslash x_i$	1	2	3	Σ
0				
1				
2				
Σ				

3. En déduire la loi de Y. Calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4 –

Soit deux entiers naturels non nuls n et m, un réel $p \in]0,1[$ et deux variables aléatoires réelles indépendantes $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$.
Prouver que $Z = X + Y \sim \mathscr{B}(n+m,p)$, on utilisera l'identité de Vandermonde :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

Exercice 5 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n$.
Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'urne $\mathcal{U}_i$ contient i boules numérotées de 1 à i.
On choisit aléatoirement une urne puis on tire de façon équiprobable une boule de l'urne choisie.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
3. En déduire la loi de Y et calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 6 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Étudier la loi de $X = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

La fonction génératrice de X est la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\, t^k$$

1. Montrer que : $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X = i) = g_X^{(i)}(0)$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$. Démontrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t)\, g_Y(t) = g_{X+Y}(t)$$
3. Soit $r \geq 2$ et $X_1, X_2, \dots, X_r$, r variables aléatoires réelles discrètes indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$. Démontrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_{(X_1+X_2+\cdots+X_r)}(t) = \prod_{k=1}^{r} g_{X_k}(t)$$
4. Soit $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in\,]0, 1[$. Prouver que $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$.
5. Retrouver le résultat de l'exercice 4 à l'aide des fonctions génératrices.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une urne $\mathscr{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathscr{U}$.

Soit $k \geq 1$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $X_i \sim \mathscr{B}(k, 1/n)$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Soit $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$. $\mathbb{V}(X_i + X_j) = \dfrac{2k}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$.	☐ Vrai	☐ Faux
4. $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \dfrac{k}{n^2}$.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Il faut calculer $\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, il y a donc $n \times p$ probabilités. ☐ Vrai ☒ Faux
2. On utilise la formule des probabilités totales. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Pas sans l'indépendance . ☐ Vrai ☒ Faux
4. Dans ce cas, $\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j)$. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

$(X, Y) : \Omega \to X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire discrète.
On appelle loi conjointe du couple (X, Y) la loi du couple (X, Y).
La loi conjointe du couple (X, Y) est déterminée par l'ensemble des valeurs :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\},\ p_{ij} = \mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j)) = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

Cours

Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y.
Pour retrouver les lois marginales de X et de Y, on utilise la formule des probabilités totales avec les systèmes complets d'événements $\left(Y = y_j\right)_{1 \leq j \leq p}$ et $(X = x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} p_{ij} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\},\ \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

Cours

Si $\mathbb{P}(Y = y_j) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y_j)$ est la donnée des probabilités :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\ \mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i) = \frac{\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}}$$

Exercice 2 –

1. Le tableau donné définit la loi conjointe du couple (X, Y) si et seulement si tous les coefficients du tableau sont positifs et la somme de ses coefficients est égale à 1.
   Il faut et il suffit d'avoir $\alpha \geq 0$ et $20\alpha = 1$ ainsi $\alpha = \dfrac{1}{20} = 0,05$.

2. On en déduit le tableau suivant :

$y_j \backslash x_i$	0	1	2	3	$\sum$
-1	$0,05$	0	$0,2$	$0,05$	$0,3$
0	0	$0,15$	$0,1$	0	$0,25$
1	$0,05$	$0,25$	0	$0,15$	$0,45$
$\sum$	$0,1$	$0,4$	$0,3$	$0,2$	1

3. La loi marginale X est donnée par le tableau :

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,1$	$0,4$	$0,3$	$0,2$

La loi marginale Y est donnée par le tableau :

y_j	-1	0	1
$\mathbb{P}(Y = y_j)$	$0,3$	$0,25$	$0,45$

Méthode

Pour obtenir les lois marginales, il suffit de remplir la colonne et la ligne Σ dans lesquelles on additionne tous les termes de la ligne ou de la colonne.

4. $\mathbb{E}(X) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 = 1,6$ et $\mathbb{E}(Y) = -1 \times 0,3 + 1 \times 0,45 = 0,15$.

5. Pour calculer l'espérance de XY, on utilise la formule de transfert avec l'application $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = xy$.

Cours – Formule de transfert.

Soit deux variables aléatoires discrètes X et Y d'images finies respectives $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$ et une application $f : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.
La variable aléatoire $Z = f(X, Y)$ est discrète d'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(i,j)\in I\times J} f(x_i, y_j)\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,i)\in I\times J} x_i y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

En omettant les cas où $x_i = 0$, $y_j = 0$ et/ou $p_{ij} = 0$, il nous reste :

$$\mathbb{E}(XY) = 2 \times (-1) \times 0,2 + 3 \times (-1) \times 0,05 + 1 \times 1 \times 0,25 + 3 \times 1 \times 0,15 = 0,15$$

6. Calculons la covariance du couple (X, Y) à l'aide de la formule de Kœnig Huygens.

Cours – Théorème de Kœnig Huygens.

Soit deux variables aléatoires discrètes X et Y à images finies.
La covariance du couple (X, Y) est $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0,15 - 1,6 \times 0,15 = -0,09$$

7. $\mathbb{P}(X = 1) = 0,4 \neq 0$. La loi conditionnelle de Y sachant $(X = 1)$ est donnée par la formule :

$$\forall j \in J,\ \mathbb{P}_{(X=1)}(Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = y_j))}{\mathbb{P}(X = 1)}$$

Méthode

On se concentre uniquement sur la $3^{\text{ème}}$ colonne du tableau, celle qui donne les probabilités $\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=y_j))$, sans oublier de diviser ces valeurs par $\mathbb{P}(X=1)=0,4$.

$$\mathbb{P}_{(X=1)}(Y=-1)=\frac{0}{0,4}=0$$

$$\mathbb{P}_{(X=1)}(Y=0)=\frac{0,15}{0,4}=0,375$$

$$\mathbb{P}_{(X=1)}(Y=1)=\frac{0,25}{0,4}=0,625$$

8. L'espérance de $Z=X^2+Y$ est donnée par la formule de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z)&=\sum_{(i,i)\in I\times J}(x_i^2+y_j)\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j))\\&=(-1)\times 0,05+3\times 0,2+8\times 0,05+0,15+4\times 0,1+0,05+2\times 0,25+10\times 0,15\\&=3,55\end{aligned}$$

Exercice 3 –

1. La loi marginale X est donnée par le tableau :

x_i	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	1/6	1/3	1/2

L'espérance de X est $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$.

2. Pour tout $i\in\{1,2,3\}$, si $X=i$, on tire deux boules avec remise dans l'urne $\mathscr{U}_i$.
On répète de façon indépendante deux épreuves de Bernoulli. Seule la probabilité de tirer la boule ① varie en fonction de l'urne.

La loi conditionnelle de Y sachant $(X=1)$ est $\mathscr{B}(2,1/2)$, ainsi :

$\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=0))=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}_{(X=1)}(Y=0)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{24}$

$\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1))=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}_{(X=1)}(Y=1)=\frac{1}{6}\times 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$

$\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=2))=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}_{(X=1)}(Y=2)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{24}$

La loi conditionnelle de Y sachant $(X=2)$ est $\mathscr{B}(2,1/3)$, ainsi :

$\mathbb{P}((X=2)\cap(Y=0))=\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}_{(X=2)}(Y=0)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$

$\mathbb{P}((X=2)\cap(Y=1))=\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}_{(X=2)}(Y=1)=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$

$\mathbb{P}((X=2)\cap(Y=2))=\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}_{(X=2)}(Y=2)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{27}$

La loi conditionnelle de Y sachant $(X = 3)$ est $\mathscr{B}(2, 1/6)$, ainsi :

$$\mathbb{P}((X = 3) \cap (Y = 0)) = \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}_{(X=3)}(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

$$\mathbb{P}((X = 3) \cap (Y = 1)) = \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}_{(X=3)}(Y = 1) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$\mathbb{P}((X = 3) \cap (Y = 2)) = \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}_{(X=3)}(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{72}.$$

Récapitulons ces résultats dans le tableau ci-dessous :

$y_j \backslash x_i$	1	2	3	$\sum$
0	1/24	4/27	25/72	29/54
1	1/12	4/27	5/36	10/27
2	1/24	1/27	1/72	5/54
$\sum$	1/6	1/3	1/2	1

3. La loi marginale de Y est obtenue à l'aide de la dernière colonne du précédent tableau :

y_j	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y_j)$	29/54	10/27	5/54

L'espérance de Y est $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{10}{27} + 2 \times \dfrac{5}{54} = \dfrac{5}{9}$.

4. À l'aide de la formule du transfert avec $f : (x, y) \mapsto xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j \mathbb{P}((X = x_i)(Y = y_j)) \\
&= \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{24} + 2 \times \frac{4}{27} + 4 \times \frac{1}{27} + 3 \times \frac{5}{36} + 6 \times \frac{1}{72} \\
&= \frac{10}{9}
\end{aligned}$$

Enfin $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \dfrac{10}{9} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{5}{9} = -\dfrac{5}{27}$.

Exercice 4 –

Cours

Soit deux variables aléatoires discrètes X et Y d'images finies respectives $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$.
X et Y sont indépendantes si : $\forall (i, j) \in I \times J,\ \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$.

$X \sim \mathscr{B}(n, p)$ donc :

$$\forall i \in X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\},\ \mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$

$Y \sim \mathscr{B}(m, p)$ donc :

$$\forall j \in Y(\Omega) = \{0, 1, \dots, m\},\ \mathbb{P}(Y = j) = \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}$$

$Z = X+Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans $Z(\Omega) = \{0, 1, \dots, m+n\}$. Soit $k \in \{0, 1, \dots, n+m\}$.

Méthode

Si X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$(Z = k) = (X + Y = k) = \bigcup_{i=0}^{k} ((X = i) \cap (Y = k - i))$$

Union d'événements deux à deux incompatibles. Si de plus X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k - i))}_{\text{incompatibilité}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i)}_{\text{indépendance}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k} ((X = i) \cap (Y = k - i))\right) \quad \text{et par incompatibilité :} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k - i)) \quad \text{et par indépendance de } X \text{ et } Y : \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i}
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \binom{n}{i} = 0 \text{ si } i > n \text{ et } \binom{m}{k-i} = 0 \text{ si } k - i > m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} p^k (1-p)^{m+n-k} \\
&= p^k (1-p)^{m+n-k} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}_{\binom{n+m}{k}} \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}
\end{aligned}$$

Et avec l'image $Z(\Omega) = \{0, 1, \dots, m + n\}$, on a bien $Z \sim \mathscr{B}(n + m, p)$.

Cours – Stabilité de la loi binomiale par l'addition.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de binomiales respectives $\mathscr{B}(n, p)$ et $\mathscr{B}(m, p)$, alors $Z = X + Y$ est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n + m, p)$.

Cours

Soit deux variables aléatoires discrètes X et Y d'images finies. On a toujours :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

Et seulement dans le cas où X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \quad \operatorname{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Exercice 5 –

1. Le numéro de l'urne est choisi de façon équiprobable entre 1 et n donc $X \sim \mathscr{U}(\{1, 2, \dots, n\})$.
2. On peut tirer la boule numéro 1 ou 2 ou … ou n (en choisissant la boule n de l'urne $\mathcal{U}_n$) donc $Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.
   Sachant que l'événement $(X = i)$ est réalisé, on tire de façon équiprobable une boule parmi les boules numérotées de 1 à i de l'urne $\mathscr{U}_i$. La loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$ est donc $\mathscr{U}(\{1, 2, \dots, i\})$.
   Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. On a $\mathbb{P}(X = i) \neq 0$ et :
   $$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{ni} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$
3. La loi marginale de Y est donnée par :
   $$\begin{aligned} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},\ \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \underbrace{\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))}_{0 \text{ car } i<j} + \sum_{i=j}^{n} \underbrace{\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))}_{\frac{1}{ni}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Comme $Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(Y = j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}\\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}\end{aligned}$$

On a $1 \leq j \leq i \leq n$ d'où l'équivalence des systèmes :
$[1 \leq j \leq n \text{ et } j \leq i \leq n] \iff [1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq i]$

La deuxième somme dépendant de la première, il faut être très prudent pour inverser les symboles Σ.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i}\\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j\\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1)\\ &= \frac{n+3}{4}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 6 –

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $X_i \sim \mathscr{U}(\{1, 2, \dots, n\})$ donc $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X_i = j) = \dfrac{1}{n}$.
Toutes les variables aléatoires X_i sont d'image $X_i(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$, on a $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Cours

Les variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Et dans le cas général où les variables ne sont pas forcément discrètes :

$$\mathbb{P}((X_1 \leq x_1) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n)) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leq x_n)$$

À retenir

$(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq k)$ et $(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geq k)$

Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq k)\right)$ et par indépendance : $\mathbb{P}(X \leq k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq k)$.

Or $\mathbb{P}(X_i \leq k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$ donc $\mathbb{P}(X \leq k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Soit $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n$.

$X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

Comme $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$, la formule est encore valide pour $k = 1$.

Ainsi $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n$.

Exercice 7 –

1. g_X, fonction polynôme, est de classe C^∞. Soit $i \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$g_X^{(i)}(t) = \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}(X = k) k(k-1) \cdots (k-i+1)\, t^{k-i} = \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}(X = k) \frac{k!}{(k-i)!}\, t^{k-i}$$

Lorsque $t = 0$, tous les termes de la somme excepté celui correspondant à $k = i$ s'annulent.
Il reste $g_X^{(i)}(0) = i!\,\mathbb{P}(X = i)$ donc $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{i!}\, g_X^{(i)}(0)$.

Ce résultat permet d'établir que si deux variables aléatoires réelles discrètes ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi. On dit que la fonction génératrice est caractéristique de la loi.

2. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ et X et Y indépendantes donc $(X+Y)(\Omega) \subset \{0, 1, \dots, 2n\}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_X(t)\, g_Y(t) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k) t^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k-i)\right) t^k \end{aligned}$$

si $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k x^k$ sont deux fonctions polynomiales, alors : $PQ(x) = \sum_{k=0}^{p+q} c_k x^k$ où pour tout $k \in \{0, 1, \dots, p+q\}$, $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Comme les variables X et Y sont indépendantes alors pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$ et pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k-i) = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k-i))$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} g_X(t) g_Y(t) &= \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k-i))\right)}_{\mathbb{P}(X+Y=k)} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X + Y = k)\, t^k \\ &= g_{X+Y}(t) \end{aligned}$$

On peut donc conclure que si X et Y sont indépendantes, alors $g_{X+Y} = g_X g_Y$.

3. On prouve par récurrence sur $r \geq 2$ que si $X_1, X_2, \dots, X_r$ sont r variables aléatoires réelles discrètes indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$, alors :
$\forall t \in \mathbb{R}$, $g_{(X_1 + X_2 + \cdots + X_r)}(t) = \prod_{k=1}^{r} g_{X_k}(t)$, à l'aide de la proposition suivante :

Cours – Lemme des coalitions.
Soit $r \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_r$, r variables aléatoires réelles indépendantes.
Soit $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ et deux applications $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^{r-k} \to \mathbb{R}$.
Alors les variables $f(X_1, \ldots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \ldots, X_r)$ sont indépendantes.

Initialisation : On a prouvé le résultat pour $r = 2$ à la question précédente.
Hérédité : On suppose que pour un certain entier $r \geq 2$ on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_{(X_1+X_2+\cdots+X_r)}(t) = \prod_{k=1}^{r} g_{X_k}(t)$$

Si $X_1, X_2, \ldots, X_r, X_{r+1}$ sont des variables indépendantes alors, d'après le lemme des coalitions, les variables $X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ et X_{r+1} sont indépendantes. Le résultat de la question 2 nous permet de conclure que $g_{(X_1+X_2+\cdots+X_r+X_{r+1})} = g_{(X_1+X_2+\cdots+X_r)} g_{X_{r+1}}$. On a ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_{(X_1+X_2+\cdots+X_{r+1})}(t) = \prod_{k=1}^{r+1} g_{X_k}(t)$$

La propriété est donc héréditaire.
Conclusion : Par principe de récurrence on a établi la propriété.

4. Soit $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $X_k \sim \mathscr{B}(p)$ donc pour tout réel t :

$$g_{X_k}(t) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)t = 1 - p + pt$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, $g_X(t) = g_{(X_1+X_2+\cdots+X_n)}(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(t) = (1 - p + pt)^n$.

Soit $i \in X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X = i) = \dfrac{1}{i!} g_X^{(i)}(0) = \dfrac{n!}{(n-i)!\, i!} p^i (p \times 0 + 1 - p)^{n-i}$.

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

On reconnaît la loi binomiale de paramètres (n, p) donc $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

5. Soit deux entiers naturels non nuls n et m, un réel $p \in]0, 1[$ et deux variables aléatoires réelles indépendantes $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$, on pose $Z = X + Y$.
$X \sim \mathscr{B}(n, p)$ donc pour tout réel t, $g_X(t) = (pt + 1 - p)^n$.
$Y \sim \mathscr{B}(m, p)$ donc pour tout réel t, $g_Y(t) = (pt + 1 - p)^m$.
Comme X et Y sont indépendantes alors : $g_Z = g_{X+Y} = g_X\, g_Y$.
On a pour tout réel t, $g_Z(t) = g_X(t)\, g_Y(t) = (pt + 1 - p)^n (pt + 1 - p)^m = (pt + 1 - p)^{m+n}$.
Avec $Z(\Omega) = \{0, 1, \ldots, m + n\}$, par caractérisation de la loi par la fonction génératrice on a $Z = X + Y \sim \mathscr{B}(n + m, p)$.

Exercice 8 –

1. On répète k fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre $1/n$ donc la variable $X_i \sim \mathscr{B}(k, 1/n)$. ☒ Vrai ☐ Faux

2. $\mathbb{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = 0$, $\mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k) = \left(\dfrac{1}{n^k}\right)^2 \neq 0$, le résultat de l'exercice 4 ne s'applique donc pas ici. ☐ Vrai ☒ Faux

3. La variable aléatoire $X_i + X_j$ est égale au nombre de boules numérotées i ou j obtenues lors de k épreuves indépendantes de Bernoulli. Le paramètre de ces épreuves de Bernoulli est donc $2/n$. ☒ Vrai ☐ Faux
   Ainsi $X_i + X_j \sim \mathscr{B}(k, 2/n)$ et $\mathbb{V}(X_i + X_j) = k \times \dfrac{2}{n} \times \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$.

4. $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \dfrac{1}{2}(\mathbb{V}(X_i + X_j) - \mathbb{V}(X_i) - \mathbb{V}(X_j))$ ☐ Vrai ☒ Faux

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2} \times \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{k}{n^2}$$

52 Inégalités en probabilités

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit un entier non nul n et $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ suivant la même loi.

On considère les variables $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Si X admet une espérance, alors pour tout réel $a > 0$: ☐ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

2. Si X admet une variance, alors pour tout réel $a > 0$: ☐ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

3. Si toutes les variables aléatoires X_k admettent une espérance, on nomme μ cette espérance commune : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mu \text{ et } \mathbb{E}(M_n) = \mu$$

4. Si toutes les variables aléatoires X_k admettent une variance, on nomme σ^2 cette variance commune : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\mathbb{V}(S_n) = n\sigma^2 \text{ et } \mathbb{V}(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Exercice 2 –

Le nombre de truites arc-en-ciel prélevées dans un étang en une semaine est une variable aléatoire T d'espérance $\mathbb{E}(T) = 50$ et de variance $\mathbb{V}(T) = 25$.

1. À l'aide de l'inégalité de Markov, majorer la probabilité que le prélèvement d'une semaine soit supérieur ou égal à 75.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité que le prélèvement d'une semaine soit strictement compris entre 40 et 60.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

On lance 9000 fois un dé équilibré, minorer la probabilité d'obtenir strictement entre 1300 et 1700 fois un ⑥.

On considérera la variable aléatoire X égale au nombre d'apparitions du ⑥ et on donnera l'espérance et la variance de X.

Exercice 4 –

On cherche à estimer la proportion p de truites arc-en-ciel d'un étang.

Pour cela, on effectue un prélèvement de n poissons dans cet étang. On suppose que le nombre de poissons dans l'étang est suffisamment grand pour que le prélèvement s'apparente à une succession de n tirages avec remise. On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de truites arc-en-ciel prélevées. Le but de cet exercice est de déterminer avec quelle précision on peut approximer la proportion p par la variable T_n/n.

1. Préciser la loi de T_n, son espérance ainsi que sa variance.
2. Déterminer le maximum sur $[0,1]$ de la fonction $f : x \mapsto f(x) = x(1-x)$.
3. Prouver que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$
4. En déduire un nombre de poissons à prélever afin que T_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 90%.

Exercice 5 –

1. Soit un entier non nul n et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ suivant la même loi et admettant un moment d'ordre 2. On note μ l'espérance commune et σ^2 la variance commune.
On considère la variable $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Prouver que :
$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}$$
2. Soit $p \in\,]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Soit un entier non nul n et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X. On considère un réel $a > 0$ tel que $]p-a, p+a[\, \subset [0,1]$.
Soit $\delta \in\,]0,1[$. Déterminer une condition suffisante sur la taille de l'échantillon n telle que la probabilité que la variable M_n soit strictement comprise entre $p-a$ et $p+a$ soit supérieure ou égale à δ.
3. On suppose ici que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$.
Déterminer une condition suffisante sur la taille n de l'échantillon de sorte à ce que la probabilité que la variable M_n soit strictement comprise entre $0,14$ et $0,46$ soit supérieure ou égale à 95%.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes une loi de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \sim \mathscr{B}(p_k) \text{ avec } p_k \in]0,1[$$

On pose pour tout entier $n \geq 1,\ M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que :

$$\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < a\right) = 1$$

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

> **Cours – Convergence en probabilité.**
>
> Soit X une variable aléatoire et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
> La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si :
>
> $$\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq a) = 0 \text{ on note } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et admettant toutes une variance.

1. Si pour tout entier naturel n, $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$ alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq a) = 0$$

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$ alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq a) = 0$$

3. Soit X une variable aléatoire.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n - X) = 0$ alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq a) = 0$$

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Il faudrait que la variable aléatoire X soit positive pour pouvoir appliquer l'inégalité de Markov. ☐ Vrai ☒ Faux
2. C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev . ☒ Vrai ☐ Faux
3. Il s'agit la linéarité de l'espérance. ☒ Vrai ☐ Faux
4. Il faut de plus que les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ soient indépendantes. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours – Inégalité de Markov.

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance et un réel $a > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Cours – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, X une variable aléatoire réelle admettant une variance et un réel $a > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

À retenir

Soit un entier non nul n et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ suivant la même loi et admettant un moment d'ordre 2. On note μ l'espérance commune et σ^2 la variance commune.

On considère les variables $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

- $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ et $\mathbb{E}(M_n) = \mu$ (ne nécessite pas l'indépendance)
- $\mathbb{V}(S_n) = n\sigma^2$ et $\mathbb{V}(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ (nécessite l'indépendance)

Exercice 2 –

1. La variable aléatoire T égale au nombre de truites arc-en-ciel prélevées est positive et admet une espérance $\mathbb{E}(T) = 50$.
   Appliquons l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(T \geq 75) \leq \frac{\mathbb{E}(T)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

2. On cherche à minorer $\mathbb{P}(40 < T < 60)$.
   En remarquant l'écart de ± 10 par rapport à $\mathbb{E}(T)$:

$$\begin{aligned}(40 < T < 60) &= (50 - 10 < T < 50 + 10)\\ &= (-10 < T - 50 < 10)\\ &= (|T - 50| < 10)\end{aligned}$$

Il s'agit d'égalités d'événements.

La variable aléatoire T admet une variance $\mathbb{V}(T) = 25$.
Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|T - \mathbb{E}(T)| \geq 10) \leq \frac{\mathbb{V}(T)}{10^2} &\iff \mathbb{P}(|T - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = 0,25\\ &\iff 1 - \mathbb{P}(|T - 50| \geq 10) \geq 1 - 0,25\\ &\iff \mathbb{P}(|T - 50| < 10) \geq 0,75\\ &\iff \mathbb{P}(40 < T < 60) \geq 0,75\end{aligned}$$

Méthode

Penser aux événements contraires. Soit $\delta \in]0,1[$:

$$\mathbb{P}(|T - \mathbb{E}(T)| < a) \geq \delta \iff \mathbb{P}(|T - \mathbb{E}(T)| \geq a) \leq 1 - \delta$$

La probabilité que le nombre de prélèvements de truites arc-en-ciel en une semaine soit strictement compris entre 40 et 60 est supérieure ou égale à 75%.

Exercice 3 –

On lance 9000 fois un dé équilibré, X, compteur d'apparitions du ⑥ dans une succession de 9000 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre 1/6, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(9000, 1/6)$.

$$\mathbb{E}(X) = 9000 \times \frac{1}{6} = 1500 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 9000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 1250$$

On cherche à minorer $\mathbb{P}(1300 < X < 1700)$.
En remarquant l'écart de ± 200 par rapport à $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned}(1300 < X < 1700) &= (1500 - 200 < X < 1500 + 200)\\ &= (-200 < X - 1500 < 200)\\ &= (|X - 1500| < 200)\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec X qui admet une variance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 200) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{200^2} &\iff \mathbb{P}(|X - 1500| \geq 200) \leq \frac{1250}{200^2} = 0,03125\\ &\iff 1 - \mathbb{P}(|X - 1500| \geq 200) \geq 1 - 0,03125\\ &\iff \mathbb{P}(|X - 1500| < 200) \geq 0,96875\\ &\iff \mathbb{P}(1300 < X < 1700) \geq 0,96875\end{aligned}$$

La probabilité que le nombre d'apparitions du ⑥ soit strictement compris entre 1300 et 1700 est supérieure ou égale à 96,875%.

Exercice 4 –

1. On effectue une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètres p, le compteur de succès T_n suit donc la loi binomiale de paramètres n et p.

$$\mathbb{E}(T_n) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T_n) = np(1-p)$$

2. f est dérivable de dérivée $f' : x \mapsto f'(x) = 1 - 2x$. On résout :

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff 1 - 2x \geq 0 \\ &\iff x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi le maximum de f sur $[0, 1]$ est $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. On a donc :

$$\forall x \in [0,1],\ x(1-x) \leq 1/4$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. On s'intéresse à $\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$:

$$\begin{aligned} \left(\left|\frac{T_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &= \left(\left|\frac{T_n - np}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \\ &= \left(\left|T_n - np\right| \geq n\varepsilon\right) \quad \text{car } n > 0 \\ &= \left(\left|T_n - \mathbb{E}(T_n)\right| \geq n\varepsilon\right) \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à T_n en considérant $a = n\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq a) &\leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{a^2} \\ &\leq \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Comme $p \in [0,1]$ alors $f(p) = p(1-p) \leq 1/4$. On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

4. On applique le résultat précédent à une précision $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2}\right) \leq \frac{1}{4n \times 10^{-4}} = \frac{2500}{n}$$

On cherche un entier $n \geq 1$ tel que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geq 0,9$$

$$\text{donc tel que} \quad 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \leq 0,1$$

$$\text{soit encore que} \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2}\right) \leq 0,1$$

Il suffit donc de trouver n tel que $\frac{2500}{n} \leq 0,1$ soit $n \geq 25\,000$.
Il suffit de prélever au minimum 25 000 poissons.

Exercice 5 –

1. Par linéarité de l'espérance :

$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Par indépendance de $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$

$$\mathbb{V}(M_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n on obtient :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}$$

Cette inégalité est appelée inégalité de concentration

2. $X \sim \mathscr{B}(p)$, l'espérance et la variance communes aux variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_2$ sont donc respectivement :

$$\mu = \mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \mathbb{V}(X) = p(1-p)$$

L'inégalité de concentration nous permet d'écrire :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(|M_n - p| \geq a) \leq \frac{p(1-p)}{na^2}$$

Soit $\delta \in]0,1[$ et $a > 0$ tel que $]p-a, p+a[\subset [0,1]$. On applique la méthode habituelle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(p-a < M_n < p+a) \geq \delta &\iff \mathbb{P}(-a < M_n - p < a) \geq \delta \\
&\iff \mathbb{P}(|M_n - p| < a) \geq \delta \\
&\iff 1 - \mathbb{P}(|M_n - p| < a) \leq 1 - \delta \\
&\iff \mathbb{P}(|M_n - p| \geq a) \leq 1 - \delta
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(|M_n - p| \geq a) \leq \dfrac{p(1-p)}{na^2}$, il suffit de choisir l'entier $n \geq 1$ tel que : $\dfrac{p(1-p)}{na^2} \leq 1-\delta$. C'est à dire :

$$n \geq \frac{p(1-p)}{(1-\delta)a^2}$$

Par exemple :

$$n = \left\lfloor \frac{p(1-p)}{(1-\delta)a^2} \right\rfloor + 1$$

3. On applique le résultat précédent avec : $p = 0,3$, $a = 0,16$ et $\delta = 0,95$.
$\dfrac{0,3 \times (1-0,3)}{(1-0,95) \times 0,16^2} = 164,0625$, si $n \geq 165$ alors $\mathbb{P}(\underbrace{0,3-0,16}_{0,14} < M_n < \underbrace{0,3+0,16}_{0,46}) \geq 0,95$.

Il faut être capable de retrouver ce résultat en refaisant toutes les étapes du raisonnement.

Exercice 6 –

Attention, les variables ont des espérances et des variances à priori distinctes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\mathbb{E}(X_k) = p_k$ et $\mathbb{V}(X_k) = p_k(1 - p_k)$.

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$$

Par indépendance de $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$\mathbb{V}(M_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1 - p_k)$$

Résultat à connaître : $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leq 1/4$.

Or pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p_k(1 - p_k) \leq 1/4$, Par conséquent :

$$\mathbb{V}(M_n) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4} = \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{4} = \frac{1}{4n}$$

Soit $a > 0$. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n qui admet une variance on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}(M_n)}{a^2} \leq \frac{1}{4na^2}$$

Par passage à l'événement contraire :

$$1 - \mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < a\right) \leq \frac{1}{4na^2}$$

$$\mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < a\right) \geq 1 - \frac{1}{4na^2}$$

D'où :

$$1 - \frac{1}{4na^2} \leq \mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < a\right) \leq 1$$

Et le théorème d'encadrement avec $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{4na^2} = 1$ nous permet de conclure que :

$$\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < a\right) = 1$$

Exercice 7 –

1. Vrai. Soit un réel $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. X_n admet un moment d'ordre 2, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous amène à :

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_n - \underbrace{\mathbb{E}(X_n)}_{\mu}| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n)}{a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$\forall a > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq a) = 0$$

2. Vrai. Soit un réel $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Utilisons l'inégalité de Markov avec la variable positive $(X_n - \mu)^2$ qui admet une espérance.
On a :

$$\big(|X_n - \mu| \geq a\big) = \big((X_n - \mu)^2 \geq a^2\big)$$

On ne peut pas ici utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev car les variables X_n n'ont pas la même espérance.

Donc :

$$\mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq a) = \mathbb{P}\big((X_n - \mu)^2 \geq a^2\big) \leq \frac{\mathbb{E}\left((X_n - \mu)^2\right)}{a^2}$$

Méthode

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, il peut être utile d'inverser l'identité de Kœnig Huygens :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2$$

Appliqué à la variable $(X_n - \mu)$, cela donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X_n - \mu)^2\right) &= \mathbb{V}(X_n - \mu) + [\mathbb{E}(X_n - \mu)]^2 \\ &= \mathbb{V}(X_n) + [\mathbb{E}(X_n) - \mu)]^2\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} [\mathbb{E}(X_n) - \mu)]^2 = 0$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu$.

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n) + [\mathbb{E}(X_n) - \mu)]^2}{a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$\forall a > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq a) = 0$$

3. Vrai. Soit un réel $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On applique la même méthode que précédemment :

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq a) = \mathbb{P}\big((X_n - X)^2 \geq a^2\big) \leq \frac{\mathbb{E}\left((X_n - X)^2\right)}{a^2} \quad \text{d'après Markov}$$

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n - X) + [\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X)]^2}{a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n - X) = 0$.
Donc :

$$\forall a > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq a) = 0$$

53 Produits scalaires

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien.

1. Pour $x \in E$, si $< x, x > = 0$ alors x est nul.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Pour $x \in E$, $y \mapsto < x, y >$ définit une application linéaire.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Pour $x \in E$, $y \mapsto < x, y >$ définit un endomorphisme de E.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \geq 1$. Donner l'expression des produits scalaires usuels sur les espaces vectoriels suivants : $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Exercice 3 –

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $<\,,\,>$.

1. **a)** Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   b) Préciser le cas d'égalité.

2. Le but de cette question est de donner une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas de deux vecteurs x et y.

   a) Prouver l'inégalité dans le cas où $y = 0_E$.

   b) On suppose y différent du vecteur nul. Montrer l'inégalité en utilisant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = < x + ty, x + ty >$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

On pose :

$$\forall ((x, y), (z, t)) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \varphi((x, y), (z, t)) = xz - 3xt - 3yz + 14yt$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 –
Soit $n \geq 1$. On pose :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ < P, Q >= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\, Q^{(k)}(1)$$

Montrer que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 –
Soit $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

et déterminer les cas pour lesquels il y a égalité.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –
Soit H un espace préhilbertien et $f : H \to H$ une application telle que :

$$\forall (x,y) \in H^2,\ < f(x), y >=< x, f(y) >$$

Montrer que $f \in \mathscr{L}(H)$.

Exercice 8 –
Soit x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien tels que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

Montrer que $< x, y >= 0$.

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin
Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien.
Soit $x, y \in E$.

1. Si $< x, y >= \|x\|\,\|y\|$ alors il existe un réel α tel que $x = \alpha y$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. L'application :
$$((x,y),(z,t)) \to 3xz - yt$$
☐ Vrai ☐ Faux
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
3. L'application :
$$(X, Y) \mapsto XY^T$$
☐ Vrai ☐ Faux
définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Pour $x \in E$, si $< x, x >= 0$ alors x est nul. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Pour $x \in E$, $y \mapsto < x, y >$ définit une application linéaire. ☒ Vrai ☐ Faux
3. L'application est à valeurs dans $\mathbb{R}$. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

1. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$< A, B >= \operatorname{Tr}(A^T B)$$

3. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, on pose :

$$< f, g >= \int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

Exercice 3 –

1. **a)** Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$$

> **Cours**
> Pour tout $x \in E$, on pose :
> $$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$
> L'application $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}_+$ est alors appelée norme euclidienne. L'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit alors :
> $$\forall (x, y) \in E^2, \; | < x, y > | \leq \|x\| \, \|y\|$$

b) Il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si x et y sont colinéaires.

> **Cours**
> Les vecteurs x et y sont colinéaires si et seulement si il existe un réel α tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

2. **a)** Soit $x \in E$. Par linéarité par rapport à la seconde variable d'un produit scalaire, on sait que $< x, 0_E >= 0$ et $< 0_E, 0_E >= 0$ ce qui donne l'égalité (donc l'inégalité) souhaitée.

b) Par bilinéarité du produit scalaire, on a pour tout réel t :

$$f(t) = < x, x > + t < x, y > + t < y, x > + t^2 < y, y >$$

donc par symétrie :

$$f(t) = < x, x > + 2 < x, y > t + < y, y > t^2$$

On sait que y est non nul donc par défini-positivité du produit scalaire, $< y, y >$ est non nul. On en déduit que f est une fonction polynomiale de degré 2. Or, par positivité du produit scalaire, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0$$

Ainsi, le discriminant associé à f est négatif ou nul :

$$(2 < x, y >)^2 - 4 < x, x >< y, y > \leq 0$$

ou encore :

$$< x, y >^2 \leq < x, x >< y, y >$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\sqrt{< x, y >^2} \leq \sqrt{< x, x >< y, y >}$$

ce qui donne le résultat par positivité du produit scalaire :

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$$

Exercice 4 –

Vérifions les différents points de la définition.

— Il est clair que l'application φ est définie sur $(\mathbb{R}^2)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

— La symétrie est claire par commutativité du produit de réels.

— Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (z, t) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2), (z, t)) &= \varphi((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2), (z, t)) \\
&= (\lambda x_1 + x_2)z - 3(\lambda x_1 + x_2)t - 3(\lambda y_1 + y_2)z + 14(\lambda y_1 + y_2)t \\
&= \lambda x_1 z + x_2 z - 3\lambda x_1 t - 3x_2 t - 3\lambda y_1 z - 3y_2 z + 14\lambda y_1 t + 14 y_2 t \\
&= \lambda(x_1 z - 3x_1 t - 3y_1 z + 14 y_1 t) + x_2 z - 3x_2 t - 3y_2 z + 14 y_2 t \\
&= \lambda\varphi((x_1, y_1), (z, t)) + \varphi((x_2, y_2), (z, t))
\end{aligned}$$

La linéarité par rapport à la seconde variable est prouvée donc la bilinéarité aussi par symétrie.

— Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\varphi((x, y), (x, y)) = x^2 - 3xy - 3yx + 14y^2 = x^2 - 6xy + 14y^2$$

donc :

On fait apparaitre un carré à l'aide d'une identité remarquable

$$\varphi((x, y), (x, y)) = (x - 3y)^2 - 9y^2 + 14y^2 = (x - 3y)^2 + 5y^2 \geq 0$$

De plus, si cette quantité est nulle, alors sachant qu'une somme de réels positifs est nulle si et si seulement si tous les réels sont nuls, on en déduit que $(x-3y)^2 = 5y^2 = 0$ donc $y = 0$ puis $x = 0$. Cela montre la défini-positivité.

Ainsi, φ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Cours

Soit H un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Un *produit scalaire* sur H est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur H, c'est-à-dire une application $\varphi : H \times H \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— *Symétrie* : pour tout $(x, y) \in H^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

— *Bilinéarité* : pour tout $y \in H$, L'application :

$$\begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

est linéaire. La symétrie implique alors la linéarité par rapport à la seconde variable (on peut évidemment montrer si l'on préfère la linéarité par rapport à la seconde variable).

— *Définie positivité* : pour tout $x \in H$, $\varphi(x, x) \geq 0$ et :

$$\varphi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_H$$

On dit alors que H est un espace préhilbertien. De plus, si H est de dimension finie, on dit que H est un *espace euclidien*.

Exercice 5 –

Vérifions les différents points de la définition.

— Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $< P, Q > \in \mathbb{R}$.

— Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $< P, Q > = < Q, P >$ (par commutativité du produit de réels).

— La bilinéarité est évidente par symétrie et par linéarité par rapport à la première variable (dû à la linéarité de la dérivation).

— Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :

$$< P, P > = \sum_{k=0}^{n} \left[P^{(k)}(1)\right]^2 \geq 0$$

Si $< P, P > = 0$ alors sachant qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les réels sont nuls, on obtient que pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $P^{(k)}(1) = 0$. Ainsi, 1 est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P qui est au plus de degré n. Nécessairement, P est le polynôme nul.

Ainsi, cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 –

On utilise le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} 1 \times x_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

donc :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit qu'il y a égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$ sont colinéaires donc si et seulement si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Vect}((1, \dots, 1))$, ce qui équivalent à dire que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

À retenir

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

Exercice 7 –

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in H^2$. Pour tout $z \in H$, on a :

$$\begin{aligned} < f(\lambda x + y), z > &=< \lambda x + y, f(z) > \quad \text{(par hypothèse)} \\ &= \lambda < x, f(z) > + < y, f(z) > \quad \text{(linéarité par rapport à la première variable)} \\ &= \lambda < f(x), z > + < f(y), z > \quad \text{(par hypothèse)} \\ &=< \lambda f(x) + f(y), z > \end{aligned}$$

par linéarité par rapport à la première variable. Toujours par linéarité, on en déduit que pour tout $z \in H$,

$$< f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y), z >= 0$$

En particulier :

$$< f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y), f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y) >= 0$$

donc par défini-positivité du produit scalaire :

$$f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y) = 0_H$$

et finalement :

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On en déduit que $f \in \mathscr{L}(H)$.

À retenir

$< x, y >= 0$ et $y \neq 0_H$ n'implique pas que $x = 0_H$.

Exercice 8 –

Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x+\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$ ou encore :

$$\|x\|^2 + 2 < x, \lambda y > + \|\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$$

et ainsi par bilinéarité et homogénéité :

$$2\lambda < x, y > + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0$$

ce qui donne en factorisant :

$$\lambda(2 < x, y > + \lambda \|y\|^2) \geq 0$$

Si y est le vecteur nul, le résultat souhaité est évident. Supposons maintenant que y n'est pas le vecteur nul. Alors $\|y\|^2$ est non nul et le polynôme $X(2 < x, y > + X\|y\|^2)$ est donc un polynôme de degré 2 positif et ayant pour racines 0 et $-2\frac{<x,y>}{\|y\|^2}$. Ces deux racines sont nécessairement égales (sinon le polynôme changerait de signe) donc $< x, y >= 0$.

Cours

Soit a, b deux vecteurs d'un espace préhilbertien. En notant $\| \cdot \|$ la norme euclidienne, on a :

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2 < a, b > + \|b\|^2$$
$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2 < a, b > + \|b\|^2$$
$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

Exercice 9 –

1. Faux. Si $y = 0_E$ alors pour tout vecteur x de E, on a l'égalité énoncée et pourtant x n'est pas forcément nul.
2. Faux. En notant φ cette application, on a :

$$\varphi((0,1),(0,1)) = -1 < 0$$

donc la défini-positivité n'est pas vérifiée.

3. Faux. Cette application est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

À retenir

L'application :

$$(X, Y) \mapsto X^T Y$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

54 Orthogonalité

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel.

1. L'orthogonal d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le vecteur $(1, -1, 1)$ est orthogonal au plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Considérons $\mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \text{Vect}(a, b)$ où :

$$a = (1, 1, 1, 1, 1) \text{ et } b = (1, 2, 3, 4, 5)$$

Déterminer une base de $F^\perp$.

Exercice 3 –

Trouver, sans gros calcul, une base orthonormée du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel) d'équation :

$$x - y + 2z = 0$$

Exercice 4 –

Considérons $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. Soit $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Déterminer une base orthonormale de F.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer que :

1. $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$
4. $E = F \oplus G \iff E = G^\perp \oplus F^\perp$

Exercice 6 –

Considérons $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. On pose :

$$A_1 = \mathrm{I}_2,\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que (A_1, A_2, A_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Soit $H = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire suivant :

$$\forall (f, g) \in H^2,\ < f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Considérons $F = \{f \in H,\ f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H et déterminer son orthogonal.
2. Que peut-on dire de $(F^{\perp})^{\perp}$? Qu'en déduit-on ?

Exercice 8 –

Soit H un espace préhilbertien. On suppose qu'il existe une famille $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_n)$ $(n \geq 1)$ de vecteurs unitaires de H telle que :

$$\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$$

Montrer que $\mathscr{F}$ est une base orthonormée de H.

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

1. Tout espace euclidien admet une base orthonormée. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Toute famille libre d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. L'orthogonal d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $< (1, -1, 1), (1, -1, 0) > \neq 0$ et $(1, -1, 0)$ appartient au plan. ☐ Vrai ☒ Faux

À retenir

Un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ a une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ où $n = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est non nul. Le vecteur n est alors un vecteur normal au plan et dirige l'orthogonal du plan, qui est une droite vectorielle.

Exercice 2 –

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Alors :

$$\begin{aligned}
x \in F^{\perp} &\iff < x, a >= 0 \text{ et } < x, b >= 0\\
&\iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\\
&\iff x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \text{ et } -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\\
&\iff x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \text{ et } x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 4x_5\\
&\iff x_1 = x_3 + 2x_4 + 3x_5 \text{ et } x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 4x_5\\
&\iff x = (x_3 + 2x_4 + 3x_5, -2x_3 - 3x_4 - 4x_5, x_3, x_4, x_5)\\
&\iff x = x_3 u + x_4 v + x_5 w
\end{aligned}$$

où :

$$u = (1, -2, 1, 0, 0),\ v = (2, -3, 0, 1, 0) \text{ et } w = (3, -4, 0, 0, 1)$$

Ainsi $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Or F est de dimension 2 (a et b sont non colinéaires) donc $F^{\perp}$ est de dimension 3. Ainsi, la famille (u, v, w) génère $F^{\perp}$ et son cardinal est égal à la dimension de $F^{\perp}$ donc c'est une base de ce sous-espace vectoriel.

Cours

Soit F un sous-espace espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, <, >)$. On appelle orthogonal de F, et on note $F^{\perp}$, la partie suivante de E :

$$F^{\perp} = \{x \in E,\ \forall f \in F,\ < x, f >= 0\}$$

Voici les propriétés fondamentales de cette partie :

— $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

— $F \oplus F^{\perp} = E$.

— Si $(f_1, \dots, f_p)$ $(p \geq 1)$ est une famille génératrice de F alors pour tout $x \in E$:

$$x \in F^{\perp} \iff \forall k \in \{1, \dots, p\},\ < x, f_k >= 0$$

Cela permet d'obtenir un système d'équations régissant $F^{\perp}$ et donc, d'obtenir une base de ce sous-espace.

— Si E est de dimension finie alors :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^{\perp})$$

Exercice 3 –

Notons F ce plan vectoriel. Sachant qu'il est de dimension 2, commençons par trouver une famille libre d'éléments de F. Or, toute famille orthogonale finie constituée de vecteurs non nuls est libre. Il suffit donc de trouver deux vecteurs de F orthogonaux. Prenons un vecteur de F choisi au hasard (ayant une composante nulle pour simplifier le calcul) :

$$x_1 = (2, 0, -1) \in F$$

Tout vecteur de la forme $(1, a, 2)$ (où $a \in \mathbb{R}$) est nécessairement orthogonal à x_1. Or il appartient à F si et seulement si :

$$1 - a + 4 = 5 - a$$

On en déduit que :

$$x_2 = (1, 5, 2) \in F$$

Ainsi, (x_1, x_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de F donc est une base de F.

À retenir

Toute famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.

Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de normaliser les vecteurs. On a :

$$\|x_1\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

et :

$$\|x_2\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{30}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2)$$

forment une base orthonormée de F.

Cours

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ (I est une partie non vide de $\mathbb{N}$) est dite :

— orthogonale si : $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow < x_i, x_j >= 0$.

— orthonormale si : $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow < x_i, x_j >= \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Autrement dit, une famille orthonormale est une famille orthogonale constituée de vecteurs de norme 1 (appelés vecteurs unitaires).

— une base orthonormée si c'est une base de E qui est orthonormale.

Exercice 4 –

La famille (e_1, e_2) est une une base de F car les vecteurs e_1 et e_2 sont non colinéaires. On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$< e_2 + \alpha e_1, e_1 >= 0$$

C'est équivalent à :

$$< (1+\alpha, -1, 1+\alpha, -1), (1, 0, 1, 0) >= 0$$

ou encore :

$$1 + \alpha + 1 + \alpha = 0$$

Ainsi, $\alpha = -1$ convient et on a dans ce cas :

$$e_2 - e_1 = (0, -1, 0, -1)$$

On a :

$$\| e_1 \| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

et :

$$\| e_2 - e_1 \| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

On pose donc :

$$x_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$$

et :

$$x_2 = \frac{e_2 - e_1}{\| e_2 - e_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, -1)$$

D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, on en déduit que (x_1, x_2) est une base orthonormée de F.

Méthode

Voici la méthode pratique pour orthonormaliser une famille $(e_1, \dots, e_p)$ à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt :

— On pose $f_1 = e_1$.

— On choisit f_2 de la forme $e_2 + \alpha f_1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) de sorte que $< f_2, f_1 >= 0$.

— On choisit f_3 de la forme $e_3 + \alpha f_1 + \beta f_2$ de sorte que $< f_3, f_1 >= 0$ et $< f_3, f_2 >= 0$.

— Ainsi de suite pour trouver $f_4, \dots, f_p$.

— On calcule la norme des vecteurs f_i pour $i \in [\![1 ; p]\!]$ et on pose $\varepsilon_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$.

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est alors une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Exercice 5 –

1. Supposons que $F \subset G$. Soit $x \in G^\perp$. Alors :

$$\forall y \in G, < x, y >= 0$$

Sachant que $F \subset G$, on a :

$$\forall y \in F, < x, y >= 0$$

Ainsi, $x \in F^\perp$. Finalement :

$$F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$$

2. Raisonnons par double inclusion.

- Soit $x \in (F+G)^{\perp}$. Alors :

$$\forall (f,g) \in F \times G, < x, f+g >= 0$$

F et G sont des sous-espaces vectoriels de E donc contiennent le vecteur nul et ainsi :

$$\forall f \in F \ < x, f >=< x, f + 0_E >= 0$$

donc $x \in F^{\perp}$ et :

$$\forall g \in G \ < x, g >=< x, 0_E + g >= 0$$

donc $g \in G^{\perp}$. Ainsi, $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. On vient donc de montrer que :

$$(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

- Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Soit $z \in F+G$. Alors :

$$\exists (f,g) \in F \times G, \ z = f + g$$

On a alors :

Bilinéarité du produit scalaire

$$< x, z >=< x, f+g >=< x, f > + < x, g >= 0$$

car $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Ainsi, $x \in (F+G)^{\perp}$. On vient donc de montrer que $F^{\perp} \cap G^{\perp}$ est inclus dans $(F+G)^{\perp}$.

Finalement, par double inclusion, on a :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

3. • Montrons que :

$$F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$$

Soit $x \in F^{\perp} + G^{\perp}$. Alors il existe $(a,b) \in F^{\perp} \times G^{\perp}$ tel que $x = a + b$. Soit $z \in F \cap G$. Par bilinéarité du produit scalaire,

$$< z, a+b >=< z, a > + < z, b >= 0$$

car z est un élément de F et de G, a appartient à $F^{\perp}$ et b appartient à $G^{\perp}$. Ainsi, $x \in (F \cap G)^{\perp}$. Finalement,

$$F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$$

- L'espace E est euclidien donc de dimension finie. D'après la formule de Grassman, on a :

$$\begin{aligned} \dim(F^{\perp} + G^{\perp}) &= \dim(F^{\perp}) + \dim(G^{\perp}) - \dim(F^{\perp} \cap G^{\perp}) \\ &= \dim(E) - \dim(F) + \dim(E) - \dim(G) - \dim(F^{\perp} \cap G^{\perp}) \\ &= 2\dim(E) - \dim(F) - \dim(G) - \dim(F^{\perp} \cap G^{\perp}) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

donc :

$$\begin{aligned}\dim(F^\perp + G^\perp) &= 2\dim(E) - \dim(F) - \dim(G) - \dim((F+G)^\perp)\\ &= 2\dim(E) - \dim(F) - \dim(G) - (\dim(E) - \dim(F+G))\\ &= \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F+G)\\ &= \dim(E) - \dim(F \cap G)) \quad \text{(formule de Grassman)}\\ &= \dim((F\cap G)^\perp)\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré une inclusion et l'égalité des dimensions donc :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

4. • Supposons que $E = F \oplus G$. Sachant que E est un espace euclidien, on a :

$$\begin{aligned}\dim(G^\perp) + \dim(F^\perp) &= \dim(E) - \dim(G) + \dim(E) - \dim(F)\\ &= (\dim(E) - \dim(G) - \dim(F)) + \dim(E)\\ &= 0 + \dim(E)\\ &= \dim(E)\end{aligned}$$

Soit $x \in G^\perp \cap F^\perp$. Alors d'après la question 2,

$$x \in (F+G)^\perp$$

D'après l'hypothèse, $F + G = E$ donc $(F+G)^\perp = E^\perp = \{0_E\}$ et ainsi, $x = 0_E$. Réciproquement, le vecteur nul appartient à $G^\perp \cap F^\perp$ (intersection de deux sous-espaces vectoriels). Finalement,

$$G^\perp \cap F^\perp = \{0_E\}$$

On en déduit que :

$$E = G^\perp \oplus F^\perp$$

• Supposons maintenant que $E = G^\perp \oplus F^\perp$. D'après la première partie du raisonnement, on a :

$$E = (G^\perp)^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$$

Sachant que E est euclidien, on en déduit que :

$$E = G \oplus F$$

On a donc montré l'équivalence souhaitée.

À retenir

Si F est un sous-espace vectoriel de *dimension finie* d'un espace préhilbertien alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 6 –

Cours
Soit $n \geq 1$. Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défini de la manière suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, < A, B >= \mathrm{Tr}(A^T B)$$

- Soit a, b, c trois réels tels que :

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0_2$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} a+b+c & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = 0_2$$

donc $b = 0$ puis $a = 0$ et $c = 0$. Ainsi, (A_1, A_2, A_3) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Posons $X_1 = A_1$. On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

On utilise l'algorithme de Gram-Schmidt

$$< A_2 + \alpha X_1, X_1 >= 0$$

ou encore :

$$< \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \mathrm{I}_2 >= 0$$

Par définition du produit scalaire, c'est équivalent à :

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}^T \mathrm{I}_2\right) = 0$$

ou encore :

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}\right) = 0$$

puis :

$$2 + 2\alpha = 0$$

donc $\alpha = -1$ convient. On pose donc :

$$X_2 = A_2 - X_1 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche maintenant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$< A_3 + \alpha X_1 + \beta X_2, X_1 >= 0 \text{ et } < A_3 + \alpha X_1 + \beta X_2, X_2 >= 0$$

On a :

$$A_3 + \alpha X_1 + \beta X_2 = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

donc :

$$(A_3 + \alpha X_1 + \beta X_2)^T = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

On a évidemment :

$$(A_3 + \alpha X_1 + \beta X_2)^T \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

et :

$$(A_3 + \alpha X_1 + \beta X_2)^T X_2 = \begin{pmatrix} \beta & 1+\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Ainsi, on souhaite résoudre :

$$\begin{cases} 1 + 2\alpha & = 0 \\ 2\beta & = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = 0$. On pose donc :

$$X_3 = A_3 - \frac{1}{2}X_1 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :

Normalisation des vecteurs

$$\|X_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

De même :

$$\|X_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

et par homogénéité :

$$\|X_3\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En posant pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\varepsilon_i = \frac{X_i}{\|X_i\|}$$

On a alors que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.

À retenir

Soit $n \geq 1$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En considérant le produit scalaire usuel, on a :

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$$

Exercice 7 –

1. Utilisons la méthode des trois points.
   - $F \subset H$.
   - La fonction nulle appartient à F.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in F^2$. Alors :

   $$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$$

   donc $\lambda f + g \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de H.

Soit $g \in F^{\perp}$. Posons h la fonction de F définie par :

$$\forall t \in [0,1],\ h(t) = tg(t)$$

On sait que $< g, h >= 0$ donc :

$$\int_0^1 tg(t)^2 \mathrm{d}t = 0$$

Par positivité de l'intégration (les bornes sont dans l'ordre croissant et l'intégrande est continue), on en déduit que :

$$\forall t \in [0,1],\ tg(t)^2 = 0$$

donc :

$$\forall t \in]0,1]\,,\ g(t) = 0$$

Par continuité de g sur $[0,1]$, on en déduit que g est la fonction nulle sur $[0,1]$. Réciproquement, la fonction nulle appartient à $F^{\perp}$ car c'est un sous-espace vectoriel de H. Ainsi, $F^{\perp}$ est réduit à la fonction nulle.

2. D'après la question précédente, $(F^{\perp})^{\perp}$ est égal à H qui est différent de F car il existe des fonctions de H ne s'annulant pas en 0 (une fonction constante non nulle par exemple). Il faut donc se méfier de l'orthogonal de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie.

Exercice 8 –

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Par hypothèse, on a :

$$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < e_i, e_k >^2 = < e_i, e_i >^2 + \sum_{k \neq i} < e_i, e_k >^2$$

Or e_i est unitaire donc sa norme vaut 1 (donc $< e_i, e_i >$ aussi). Ainsi :

$\|e_i\|^2 = < e_i, e_i >$

$$0 = \sum_{k \neq i} < e_i, e_k >^2$$

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les réels sont nuls donc pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq i$, on a :

$$< e_i, e_k >= 0$$

On en déduit que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale, de vecteurs non nuls car unitaires donc c'est aussi une famille libre. Posons :

$$F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

Montrons que $F = H$ et pour cela, commençons par montrer que $F^{\perp} = \{0_H\}$.

Soit $x \in H$. Si x est orthogonal à F alors :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2 = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

donc x est le vecteur nul. On en déduit que $F^\perp \subset \{0_H\}$ et l'autre inclusion est vérifiée car $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H. Ainsi,

$$F^\perp = \{0_H\}$$

On a donc :

$$(F^\perp)^\perp = \{0_H\}^\perp = H$$

Or F est de dimension finie donc :

$$(F^\perp)^\perp = F$$

donc $F = H$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est une famille libre orthogonale qui génère H et composée de vecteurs unitaires donc c'est une base orthonormée de H.

Exercice 9 –

1. Vrai.
2. Faux. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormée : c'est le théorème de la base incomplète orthonormée.

55 Projection orthogonale et distance

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle d'un espace préhilbertien $(E, <,>)$, $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthogonale de F et $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F.

1. $p(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p(x) \in F^{\perp}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $< x, x - p(x) >= 0$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $p(x) = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$x - 2y + z = 0$$

1. Donner l'expression de la projection orthogonale sur $P^{\perp}$ notée q.
2. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur P notée p.
3. Donner, avec le moins de calcul possible, la distance de $(1, 0, 1)$ au plan P.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel et on pose :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que :
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Trouver une base de $F^{\perp}$ et déterminer le projeté orthogonal de N sur $F^{\perp}$.

Exercice 4 –

Considérons $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel.
Soit $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $(2, 2, 0, 0)$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 5 –

Soit $n \geq 2$. On pose pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,

$$< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

où a_0, …, a_n sont n réels distincts deux à deux.

1. Montrer que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer brièvement que :
$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$$
est un espace vectoriel. Donner sa dimension et son orthogonal.
3. Déterminer la distance de X^n à F.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure à 2. Soit x et y deux vecteurs distincts de E tels que :

$$< x, y >= \|y\|^2$$

Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que $y = p_H(x)$ où p_H est la projection orthogonale sur H.

Exercice 7 –

Soit $n \geq 1$ et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (muni de son produit scalaire usuel).

1. Montrer que :
$$\dim(\text{Vect}(\{v_i - v_j,\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2\})) \leq n - 1$$
2. On note pour $k \in \{1, \dots, n\}$, H_k l'espace défini par $x_k = 0$ (où x_k est la k-ième coordonnée d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique). Montrer que si les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont deux à deux distincts alors il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sur H_k soient deux à deux distincts.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

Soit F un hyperplan d'un espace euclidien $(E, <, >)$ et x un vecteur unitaire de E n'appartenant pas à F.

1. $E = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathrm{Vect}(x)$ est l'orthogonal de F. ☐ Vrai ☐ Faux
3. La distance d'un vecteur y à F vaut $| < y, x > |$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $p(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p(x) \in F^{\perp}$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Le produit scalaire est nul si et seulement si $x \in F$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. C'est vrai pour une base orthonormale. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E (muni d'un produit scalaire $<,>$). Alors $F \oplus F^{\perp} = E$ donc la projection p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est bien définie et est appelée *projection orthogonale* sur F.

Si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une base orthonormée de F alors :

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, \varepsilon_i > \varepsilon_i$$

Le vecteur $p_F(x)$ est appelé le *projeté orthogonal* de x sur F.

Exercice 2 –

1. Le vecteur $(1, -2, 1)$ est un vecteur normal à P et sachant que $P^{\perp}$ est de dimension 1 ($\mathbb{R}^3$ est de dimension 3), on en déduit que :

$\|(1,-2,1)\|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6$

$$n = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

forme une base orthonormée de $P^{\perp}$. On sait alors que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q((x,y,z)) &= < (x,y,z), n > n \\ &= \frac{1}{6}(x - 2y + z)(1, -2, 1) \\ &= \frac{1}{6}(x - 2y + z, -2x + 4y - 2z, x - 2y + z) \end{aligned}$$

À retenir

Il est simple d'obtenir l'expression d'une projection orthogonale sur une droite vectorielle.

2. On a $p + q = \mathrm{Id}$ donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} p((x,y,z)) &= (x,y,z) - \frac{1}{6}(x - 2y + z, -2x + 4y - 2z, x - 2y + z) \\ &= \frac{1}{6}((6x, 6y, 6z) - (x - 2y + z, -2x + 4y - 2z, x - 2y + z)) \\ &= \frac{1}{6}(5x + 2y - z, 2x + 2y + 2z, -x + 2y + 5z) \end{aligned}$$

3. On sait que P est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et n est un vecteur normal à cet hyperplan et de norme 1 donc :

$$\mathrm{d}((1,0,1), P) = | < (1,0,1), n > | = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

À retenir

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur unitaire de $H^\perp$. Alors pour tout vecteur x de E,

$$\mathrm{d}(x, H) = | < x, a > |$$

Exercice 3 –

1. On a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ aM_1 + bM_2, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(M_1, M_2)$$

où :

$$M_1 = \mathrm{I}_2 \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$< M_1, M >= \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_2^T M) = \mathrm{Tr}(M) = a + d$$

et :

$$\begin{aligned} < M_2, M > &= \mathrm{Tr}(M_2^T M) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \right) \\ &= -c + b \end{aligned}$$

Ainsi, M appartient à $F^\perp$ si et seulement si $a = -d$ et $b = c$ donc si et seulement si :

$$M = d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$F^{\perp} = \mathrm{Vect}(M_3, M_4)$$

où :

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs M_3 et M_4 sont non colinéaires donc (M_3, M_4) est une base de $F^{\perp}$.

Il est évident que :

$$N = M_1 + M_4$$

avec $M_1 \in F$ et $M_4 \in F^{\perp}$. On en déduit que le projeté orthogonal de N sur $F^{\perp}$ est M_4.

Méthode

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, <,>)$ et $x \in E$. Si on trouve une égalité de la forme $x = y + z$ où $y \in F$ et $x - y = z \in F^{\perp}$ alors y est le projeté orthogonal de x sur F.

Exercice 4 –

1. Le corrigé est déjà effectué dans la fiche 54. On pose :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$$

et :

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, -1)$$

On a prouvé que (x_1, x_2) était une base orthonormée de F.

2. Notons p_F cette projection. La famille (x_1, x_2) est une base orthonormée de F donc pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} p_F((x, y, z, t)) &= < (x, y, z, t), x_1 > x_1 + < (x, y, z, t), x_2 > x_2 \\ &= \frac{1}{2} < (x, y, z, t), (1, 0, 1, 0) > (1, 0, 1, 0) \\ &+ \frac{1}{2} < (x, y, z, t), (0, -1, 0, -1) > (0, -1, 0, -1) \\ &= \frac{1}{2}(x + z, y + t, x + z, y + t) \end{aligned}$$

En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$p_F((2, 2, 0, 0)) = \frac{1}{2}(2, 2, 2, 2) = (1, 1, 1, 1)$$

On sait alors que :

$$d((2,2,0,0),F) = \|(2,2,0,0) - (1,1,1,1)\| = \|(1,1,-1,-1)\| = \sqrt{4} = 2$$

Cours

Soit x un vecteur d'un espace préhilbertien E et F un sous-espace vectoriel de E de *dimension finie*. On note p_F la projection orthogonale sur F. L'ensemble :

$$\{\|x-y\|,\ y \in F\}$$

admet un minimum, celui-ci est atteint en un unique vecteur qui est $p_F(x)$. Ainsi :

$$\|x - p_F(x)\| = \min_{y\in F} \|x-y\|$$

Le réel positif $\|x - p_F(x)\|$ est appelé *distance* de x à F et est noté $d(x,F)$. Ainsi :

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \min_{y\in F} \|x-y\|$$

Exercice 5 –

1. Remarquons pour commencer que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $<P,Q> \in \mathbb{R}$.
   — La symétrie est évidente par commutativité du produit de réels.
   — La linéarité par rapport à la première variable est claire donc la bilinéarité aussi (par symétrie).
   — Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :

   $$<P,P> = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geq 0$$

   Si $<P,P> = 0$, sachant qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les réels sont nuls, on en déduit que :

   $$P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$$

   Les réels $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts donc P admet $n+1$ racines distinctes et est de degré inférieur ou égal à n donc P est le polynôme nul.

   Ainsi, $(P,Q) \mapsto <P,Q>$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Notons abusivement 1 le polynôme constant égal à 1. Alors :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ <P,1> = 0\} = [\mathrm{Vect}(1)]^\perp$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et cet espace étant de dimension finie, on a :

$$\dim(F) = \dim(\mathrm{Vect}(1)^\perp) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathrm{Vect}(1)) = n$$

En utilisant de nouveau que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, on a :

$$F^\perp = (\mathrm{Vect}(1)^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(1)$$

3. L'espace F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et 1 génère son orthogonal.

On en déduit que :

Ne pas oublier de normer le vecteur

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(X^n, F) &= | < X^n, \tfrac{1}{\|1\|} > | \\ &= \frac{| < X^n, 1 > |}{\|1\|} \end{aligned}$$

Or :

$$\|1\| = \sqrt{< 1, 1 >} = \sqrt{n+1}$$

donc :

$$\mathrm{d}(X^n, F) = \frac{\left|(a_0)^n + \cdots + (a_n)^n\right|}{\sqrt{n+1}}$$

Exercice 6 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

— *Analyse.* Soit H un hyperplan de E tel que $y = p_H(x)$. Alors $y \in H$ et $y - x \in H^\perp$. Or sachant que E est un espace euclidien, on sait que :

$$\dim(H^\perp) = \dim(E) - \dim(H) = 1$$

Le vecteur $y - x$ est non nul car y et x sont distincts donc :

$$H^\perp = \mathrm{Vect}(y - x)$$

Sachant que E est euclidien, on en déduit que :

$$H = \left[\mathrm{Vect}(y - x)\right]^\perp$$

— *Synthèse.* Posons :

$$H = \left[\mathrm{Vect}(y - x)\right]^\perp$$

Le vecteur $y - x$ est non nul car y et x sont distincts donc $\mathrm{Vect}(y - x)$ est de dimension 1 et sachant que E est euclidien, on en déduit que :

$$\dim(H) = \dim(E) - 1$$

donc H est un hyperplan de E. Remarquons maintenant que $y \in H$ car par bilinéarité et symétrie du produit scalaire :

$$< y, y - x >=< y, y > - < y, x >= \|y\|^2 - < y, x >= 0$$

par hypothèse. De plus, on a :

$$x = x - y + y$$

avec $x - y \in H^\perp$ (car E est euclidien) et $y \in H$. On a donc bien $y = p_H(x)$.

Exercice 7 –

1. Notons :

$$\mathscr{F} = \{v_k - v_n,\ k \in \{1, \dots, n-1\}\}$$

Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Si $j \neq n$ alors :

$$v_i - v_j = v_i - v_n + v_n - v_j \in \text{Vect}(\mathscr{F})$$

en remarquant que, si $i = n$, $v_i - v_n$ est le vecteur nul. Si $j = n$ et $i = n$, $v_i - v_j$ est aussi le vecteur nul donc appartient à tout sous-espace vectoriel et si $j = n$ et $i \neq n$ alors :

$$v_i - v_n \in \mathscr{F}$$

On en déduit que :

$$\text{Vect}(\{v_i - v_j,\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2\}) \subset \text{Vect}(\mathscr{F})$$

Or $\mathscr{F}$ contient $n-1$ éléments donc $\text{Vect}(\mathscr{F})$ est de dimension finie et sa dimension est inférieure ou égale à $n-1$. On en déduit bien que :

$$\dim(\text{Vect}(\{v_i - v_j,\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2\})) \leq n - 1$$

2. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et p_k la projection orthogonale sur H_k. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ p_k(v_i) = v_i - < v_i, e_k > e_k$$

En effet, par définition, H_k est l'orthogonal de $\text{Vect}(e_k)$ et e_k est unitaire.

On suppose que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont deux à deux distincts. Supposons par l'absurde que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $p_k(v_i) = p_k(v_j)$ (attention, i et j dépendent de k). Fixons donc un entier k et les entiers i et j associés. On a alors :

$$v_i - < v_i, e_k > e_k = v_j - < v_j, e_k > e_k$$

Forcément les deux produits scalaires sont différents (sinon $v_i = v_j$ ce qui est faux) donc on a :

$$e_k = \frac{1}{< v_j, e_k > - < v_i, e_k >}(v_j - v_i)$$

Cela implique que pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$e_k \in \text{Vect}(\{v_i - v_j,\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2\})$$

donc :

$(e_1, \dots, e_n)$ génère $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \subset \text{Vect}(\{v_i - v_j,\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2\})$$

C'est absurde car $\mathbb{R}^n$ est de dimension n et :

$$\dim(\text{Vect}(\{v_i - v_j,\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2\})) \leq n - 1$$

On a donc montré le résultat souhaité par l'absurde.

Exercice 8 –

Tous les résultats sont vrais uniquement si x appartient à l'orthogonal de F.

1. $E = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $\mathrm{Vect}(x)$ est l'orthogonal de F. ☐ Vrai ☒ Faux
3. La distance d'un vecteur y à F vaut $| < y, x > |$. ☐ Vrai ☒ Faux

56 Séries

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

On considère la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si $\alpha = 1$, la série diverge.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si $\alpha = 1$, la série diverge grossièrement.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, la série diverge.	☐ Vrai	☐ Faux
4. Si $\alpha \leq 1$, la série diverge.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Énoncer le critère de convergence pour les séries géométriques de raison $z \in \mathbb{C}$ et rappeler dans ce cas la valeur des sommes et des restes. Donner une preuve de ces résultats.

Exercice 3 –

Montrer que la série harmonique diverge.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Déterminer la nature de la série suivante :

$$\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

et donner sa somme en cas de convergence.

Exercice 5 –

Donner la nature des séries suivantes (a est un réel) :

1. $\sum \frac{n-1}{7n^2+7}$
2. $\sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$
3. $\sum \frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+2}$
4. $\sum \frac{n!}{n^n}$
5. $\sum e^{-n^2}$
6. $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
7. $\sum \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
8. $\sum \frac{1}{1+2+\cdots+n}$
9. $\sum n^{-1-\frac{1}{n}}$
10. $\sum \frac{n^2}{(n-1)!}$
11. $\sum \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n}(a+k)^2$
12. $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^a}$

Exercice 6 –

Déterminer la nature, et la somme le cas échéant, de $\sum e^{-2n}\operatorname{ch}(n)$.

Exercice 7 –

Déterminer la nature, et la somme le cas échéant, de $\sum \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 –

Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 –

Déterminer la nature de $\sum \frac{\sin(e^n)}{n^3+n^2+1}$.

Exercice 10 –

Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

Pour aller plus loin

Exercice 11 –

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.

1. Montrer que $\sum \min(u_n, v_n)$ et $\sum \max(u_n, v_n)$ convergent.
2. Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ convergent.

Exercice 12 –

Déterminer la nature de $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 13 –

Étudier la nature de $\sum(-1)^n u_n$ où :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

Exercice 14 –

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{(-1)^n \cos(u_{n-1})}{n}$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 15 – Le vrai/faux de la fin

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles.

1. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n + v_n)$ aussi.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors $\sum(u_n + v_n)$ aussi.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Si pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$ et si$\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ aussi.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Si $\alpha = 1$, la série diverge.	☒ Vrai	☐ Faux
2. Si $\alpha = 1$, la série diverge grossièrement.	☐ Vrai	☒ Faux
3. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, la série diverge.	☒ Vrai	☐ Faux
4. Si $\alpha \leq 1$, la série diverge.	☒ Vrai	☐ Faux

Cours

On appelle *série de Riemann* de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 2 –

Cours

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. On a dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{et} \quad \forall m \geq 0,\ \sum_{k=m+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{m+1}}{1-z}$$

Soit z un nombre complexe. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Si $|z| < 1$, $(z^{n+1})_{n\geq 0}$ converge vers 0 et ainsi $\sum z^n$ converge et sa somme est égale à :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

— Si $|z| \geq 1$ alors la série diverge grossièrement.

Si $|z| < 1$, le reste d'ordre m de la série géométrique de raison z vaut :

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{+\infty} z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k - \sum_{k=0}^{m} z^k = \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \frac{z^{m+1}}{1-z}$$

Exercice 3 –

Posons :

$$\forall n \geq 1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Raisonnons par l'absurde : si la série harmonique converge, la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ est convergente donc la suite extraite de celle-ci $(H_{2n})_{n\geq 1}$ est aussi convergente et de même limite. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n) = 0$$

Or on a :

$$\forall n \geq 1,\ H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et pour tout $n \geq 1$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall k \in \{n+1, \dots, 2n\},\ \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$$

On en déduit que :

$$\forall n \geq 1,\ H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - (n+1) + 1)\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

La suite $(H_{2n} - H_n)_{n\geq 1}$ est donc minorée par $\frac{1}{2}$ et ne peut donc pas converger vers 0. On obtient ainsi une absurdité et ainsi la série harmonique diverge.

À retenir

Il existe de nombreuses preuves de divergence de la série harmonique.
Il est crucial d'en connaitre au moins une.

Exercice 4 –

Nous allons calculer les sommes partielles de cette série.
Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) &= 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)\\ &= \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+2)\end{aligned}$$

ce qui fait apparaitre un (double) télescopage.
On en déduit que pour tout entier $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) &= \sum_{k=1}^{N} \left[\ln(k+1) - \ln(k) + \ln(k+1) - \ln(k+2)\right]\\ &= \sum_{k=1}^{N}(\ln(k+1) - \ln(k)) + \sum_{k=1}^{N}(\ln(k+1) - \ln(k+2))\\ &= \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(N+2)\\ &= \ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right)\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{N+2} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{N\to+\infty} \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) = 0$$

par continuité du logarithme népérien en 1. Ainsi, la série étudiée converge et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \ln(2)$$

Méthode

La manière la plus simple d'étudier la nature d'une série (et de calculer sa somme) est de calculer ses sommes partielles. Cela est possible notamment quand ces sommes sont télescopiques.

Exercice 5 –

1. On a :

$$\frac{n-1}{7n^2+7} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{7n}$$

Les deux séries sont à termes généraux positifs pour $n \geq 1$. On sait que la série de terme général $\frac{1}{7n}$ diverge (série harmonique) donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{n-1}{7n^2+7}$ diverge.

Cours – Critère de comparaison.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à *termes positifs*.

a) Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors :

— La convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$.

— La divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$.

b) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. On a par croissances comparées :

$$\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1} \times n^{5/4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^{1/4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par théorème des croissances comparées. Ainsi :

$$\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$$

Or la série de terme général positif $\frac{1}{n^{5/4}}$ converge (série de Riemann avec $5/4 > 1$) donc par critère de comparaison, la série de terme général $\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$ converge absolument donc converge.

Cours – Critère de comparaison.

Soit $\sum u_n$ une série de nombres réels ou complexes et $\sum v_n$ une série à *termes positifs* convergente.

a) Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

b) Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

3. On a :

$$n \times \frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

par théorème des croissances comparées. Ainsi, à partir d'un certain rang :

$$n \times \frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+2} \geq 1$$

donc :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+2} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

La série harmonique diverge et les séries étudiées sont à termes positifs donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée diverge.

4. Il est possible d'utiliser le critère de d'Alembert mais on peut remarquer plus simplement que pour tout entier $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{n!}{n^n} &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n} \\ &= \frac{2}{n^2} \times \prod_{k=3}^{n} \frac{k}{n} \\ &\leq \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

car pour tout $k \in \{3, \ldots, n\}$, $\frac{k}{n} \in [0, 1]$ et $\frac{2}{n^2} \geq 0$. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée converge.

5. Pour tout entier $n \geq 0$, $n^2 \geq n$ donc par décroissance de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$:

$$0 \leq \mathrm{e}^{-n^2} \leq \mathrm{e}^{-n} = (\mathrm{e}^{-1})^n$$

La série de terme général $(\mathrm{e}^{-1})^n$ est convergente (série géométrique avec $|\mathrm{e}^{-1}| < 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée converge.

On pouvait aussi remarquer que :

$$\mathrm{e}^{-n^2} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

6. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{\ln(2)}{\sqrt{n}} \leq \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann avec $1/2 < 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée diverge.

7. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$n + (-1)^n\sqrt{n} \geq n - \sqrt{n} > 0$$

La série étudiée est donc à termes strictement positifs. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$n + (-1)^n\sqrt{n} = n\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Or on a :

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc :

$$n + (-1)^n\sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} n$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

La série à terme général positif $\frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée diverge.

8. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)} \leq \frac{2}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée converge.

9. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 \leq n^{-1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times n^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times \exp\left(-\frac{1}{n}\ln(n)\right)$$

D'après le théorème des croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\ln(n) = 0$$

et par continuité de la fonction exponentielle en 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{1}{n}\ln(n)\right) = 1$$

Ainsi,

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

La série à terme général positif $\frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée diverge.

10. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{n^2}{(n-1)!} > 0$$

et :

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{n!}}{\frac{n^2}{(n-1)!}} = \frac{(n+1)^2}{n!} \times \frac{(n-1)!}{n^2}$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = 0 < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que la série étudiée converge.

Cours – Règle de d'Alembert.

Soit $\sum u_n$ une série à termes *strictement* positifs.

On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ possède une limite ℓ (éventuellement $\ell = +\infty$). Alors :

— Si $\ell \in [0, 1[$, la série $\sum u_n$ converge.

— Si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

— Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

11. Distinguons deux cas.

- Si a est un entier négatif ou nul alors pour tout entier $n \geq -a$,

$$\prod_{k=0}^{n}(a+k)^2 = 0$$

et la série converge car ses termes sont tous nuls à partir d'un certain rang.

- Supposons que a n'est pas un entier négatif ou nul. Pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n}(a+k)^2 > 0$$

et

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{(2n+2)!}\prod_{k=0}^{n+1}(a+k)^2 \times (2n)!\frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(a+k)^2}\\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \times (a+n+1)^2\end{aligned}$$

On a :

$$\frac{(a+n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que la série étudiée converge.

12. La série étudiée est à termes positifs.

Pour tout entier $n \geq 1$,

Quantité conjuguée

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^a} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^a}\\ &= \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^a}\\ &= \frac{1}{(\sqrt{1+1/n}+1)n^{a+1/2}}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{a+1/2}}$$

La série de Riemann de terme général positif $\frac{1}{n^{a+1/2}}$ converge si et seulement si $a + 1/2 > 1$ donc si et seulement si $a > 1/2$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée converge si et seulement si $a > 1/2$.

Exercice 6 –

La série étudiée est à termes positifs. On a :

$$\mathrm{e}^{-2n}\mathrm{ch}(n) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2n} \times \frac{\mathrm{e}^n}{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1})^n$$

La série de terme général positif $(\mathrm{e}^{-1})^n$ converge (série géométrique avec $|\mathrm{e}^{-1}| < 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série étudiée converge.

Notons S la somme de cette série. On a :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2k} \times \frac{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{-k}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-k} + \mathrm{e}^{-3k})$$

Les séries de termes généraux $(\mathrm{e}^{-1})^n$ et $(\mathrm{e}^{-3})^n$ convergent (séries géométriques avec des raisons positives strictement plus petites que 1). On a donc :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-1})^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-3})^k \\ &= \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-1})} + \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-3})} \end{aligned}$$

À retenir

Il faut connaitre la somme d'une série géométrique.

Exercice 7 –

Remarquons que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \Im m\left(\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2^n}\right) = \Im m\left(\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\right)^n\right)$$

La série de terme général $(\mathrm{e}^{i\theta}/2)^n$ converge car $|\mathrm{e}^{i\theta}/2| = 1/2 < 1$. La partie imaginaire de cette série est donc convergente et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} &= \Im m\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^n\right)\\ &= \Im m\left(\frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}\right)\\ &= \Im m\left(\frac{2}{2-e^{i\theta}}\right)\end{aligned}$$

On a :

$\overline{2-e^{i\theta}} = 2 - e^{-i\theta}$

$$\begin{aligned}\frac{2}{2-e^{i\theta}} &= \frac{2(2-e^{-i\theta})}{|2-e^{i\theta}|^2}\\ &= \frac{2\left[2-\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right]}{|2-e^{i\theta}|^2}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \frac{2\sin(\theta)}{|2-e^{i\theta}|^2}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}|2-e^{i\theta}|^2 &= (2-\cos(\theta))^2 + (-\sin(\theta)^2\\ &= 4-4\cos(\theta)+\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2\\ &= 5-4\cos(\theta)\end{aligned}$$

Finalement, on a montré :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \frac{2\sin(\theta)}{5-4\cos(\theta)}$$

Cours

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\sum u_n$ converge.

2. $\sum \Re e(u_n)$ et $\sum \Im m(u_n)$ convergent.

Si l'une des deux assertions précédentes est vérifiée, on a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \Re e(u_k) + i\sum_{k=0}^{+\infty} \Im m(u_k)$$

Exercice 8 –

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par croissance de l'intégration (les bornes sont dans le bon sens et les intégrandes continues), on a alors :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2} \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} \mathrm{d}t$$

donc :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^2}$$

ou encore :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$) et sachant que :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

la série télescopique de terme général $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ converge. Par sommation (licite car les séries convergent), on en déduit que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

ou encore en notant H_n la somme de l'énoncé, et après un changement d'indice dans la somme de gauche :

$$H_n - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq H_n$$

puis :

$$\frac{1}{n} \leq H_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

On a donc pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 \leq nH_n \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que la suite de terme général nH_n converge, de limite 1. Finalement, on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

À retenir

Ce type de raisonnement est appelé comparaison série-intégrale. Il permet d'étudier le comportement asymptotique de sommes partielles (ou de restes).

Exercice 9 –

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq \left|\frac{\sin(\mathrm{e}^n)}{n^3+n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^3+n^2+1} \leq \frac{1}{n^3}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann avec $3 > 1$) donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série étudiée converge absolument donc converge.

Cours

Une série de terme général u_n est dite *absolument convergente* si la série de terme général $|u_n|$ est convergente. Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente. On a de plus dans ce cas l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Exercice 10 –

La série étudiée est une série alternée car pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}} \geq 0$$

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (justification par composition ou par dérivation) donc la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ est aussi décroissante, et converge vers 0. Par théorème des séries alternées, on en déduit que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ converge.

Cours – Théorème des séries alternées.

On appelle *série alternée* toute série dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ où (u_n) est une suite de nombres réels de signe constant.

Soit $\sum(-1)^n u_n$ une série alternée telle que $(|u_n|)_{n\geq 0}$ soit décroissante et convergente vers 0. Alors :

1. La série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=m}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^m u_m$ et on a :

$$\left|\sum_{k=m}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leq |u_m|$$

Exercice 11 –

1. • Pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq \min(u_n, v_n) \leq u_n$$

La série $\sum u_n$ converge. Par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \min(u_n, v_n)$ converge.

• Pour tout entier $n \geq 0$,

$$\max(u_n, v_n) + \min(u_n, v_n) = u_n + v_n$$

donc :

$$\max(u_n, v_n) = u_n + v_n - \min(u_n, v_n)$$

Par combinaison linéaire de séries convergentes, on en déduit que $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.

À retenir

Une combinaison linéaire de séries convergentes est convergente.

2. • Utilisons l'inégalité classique :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

On en déduit, pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$$

Par somme de séries convergentes, la série de terme général $\frac{u_n+v_n}{2}$ converge. Par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

• Voici une deuxième manière de montrer la convergence. Par positivité des termes, on a pour tout entier $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n v_n \leq \max(u_n, v_n)^2$$

donc :

Croissance de $x \longrightarrow \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$

$$0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \max(u_n, v_n)$$

Il suffit alors d'utiliser la première question et le critère de comparaison de séries à termes positifs.

• Pour tout entier $n \geq 0$, u_n et v_n sont strictement positifs donc $u_n + v_n > u_n > 0$ et ainsi :

$$0 \leq \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leq \frac{u_n v_n}{u_n} = v_n$$

La série de terme général v_n converge. Par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ converge.

Exercice 12 –

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} &= \sqrt{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+\circ\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \quad \text{car } \frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ &\underset{+\infty}{=} n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

donc :

$$\pi\sqrt{n^2+1} \underset{+\infty}{=} \pi n+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

puis :

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \underset{+\infty}{=} \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

donc :

$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &\underset{+\infty}{=} (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} (-1)^n\left[\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\circ\left(\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2\right)\right]\end{aligned}$$

car $\sin(x) \underset{0}{=} x+\circ(x^2)$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)=0$$

Finalement, en négligeant les termes en $\frac{1}{n^3}$ par rapport à $\frac{1}{n^2}$, on obtient :

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\pi(-1)^n}{2n}-\frac{\pi(-1)^n}{8n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)=\frac{\pi(-1)^n}{2n}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Chacun de ces termes est le terme général d'une série convergente : le premier correspond à la série harmonique alternée (qui converge d'après le théorème des séries alternées) et la deuxième est absolument convergente donc convergente par critère de comparaison à une série de Riemann convergente ($2>1$). Ainsi, par somme, la série étudiée converge.

Exercice 13 –

Pour tout $n \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est positive et continue sur $[0,1]$ donc par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), u_n est positif.

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)\mathrm{d}x$$

Or pour tout $x\in[0,1]$, $x^n e^{-x}\geq 0$ et $x-1\leq 0$ donc par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), $u_{n+1}-u_n$ est négatif. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a par décroissance de $t \mapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$:

$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$$

puis sachant que $x^n \geq 0$:

$$x^n e^{-1} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), on en déduit que :

$$\int_0^1 e^{-1} x^n \mathrm{d}x \leq u_n \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

ou encore :

$$\frac{e^{-1}}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Finalement, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive, décroissante et converge vers 0. D'après le théorème des séries alternées, on en déduit que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 14 –

- Commençons par étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

  $$0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n}$$

  On en déduit par théorème d'encadrement que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

- Sachant que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, on en déduit que :

  $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$

  $$\cos(u_{n-1}) \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{u_{n-1}^2}{2} + \circ(u_{n-1}^2)$$

  Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$,

  $$u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{u_{n-1}^2}{2} + \circ(u_{n-1}^2)\right) = \frac{(-1)^n}{n} - (-1)^n \frac{u_{n-1}^2}{2n} + \circ\left(\frac{u_{n-1}^2}{n}\right)$$

  — La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge (série harmonique alternée).

  — Pour tout entier $n \geq 2$,

  $$0 \leq |u_{n-1}| \leq \frac{1}{n-1} \quad \text{donc} \quad \left|-(-1)^n \frac{u_{n-1}^2}{2n}\right| \leq \frac{1}{2n(n-1)^2}$$

  Or on a :

  $$\frac{1}{2n(n-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}$$

  La série de terme général positif $\frac{1}{n^3}$ converge donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{2n(n-1)^2}$ converge et de nouveau par comparaison, la série de terme général $-(-1)^n \frac{u_{n-1}^2}{2n}$ converge absolument donc converge.

- D'après le point précédent et par critère de comparaison, la série de terme général $\circ\left(\frac{u_{n-1}^2}{n}\right)$ converge absolument donc converge.

Par combinaison linéaire, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

Exercice 15 –

Pour la deuxième question, il suffit de penser à :

$$\forall n \geq 0, -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 0$$

1. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n + v_n)$ aussi.	⊠ Vrai	☐ Faux
2. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors $\sum(u_n + v_n)$ aussi.	☐ Vrai	⊠ Faux
3. Penser au signe.	☐ Vrai	⊠ Faux

57 Familles sommables

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes.

1. La famille $(u_n)_{n\geq 0}$ est sommable si et seulement $\sum u_n$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux
2. La famille $(u_n)_{n\geq 0}$ est sommable si et seulement $\sum u_n$ converge absolument. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$u_{n,m} = \frac{1}{2^{n+m}}$$

Montrer que $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et déterminer sa somme en utilisant la définition de famille sommable.

Exercice 3 –

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

1. Montrer que $\exp(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et que la série associée est absolument convergente.
2. Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose :

$$u_{n,m} = \frac{1}{(m + n^2)(1 + m + n^2)}$$

Montrer que $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable et déterminer sa somme. On admettra que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 5 –

Calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

Exercice 6 –

Montrer que pour tout $x\in[0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

Exercice 7 –

Pour tout entier $n\geq 1$, on pose :

$$a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent.
2. Déterminer la série produit de Cauchy de ces deux séries. Est-elle convergente ?
3. Qu'en déduit-on ?

Pour aller plus loin

Exercice 8 –

On pose pour tout réel $s>1$:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

Montrer que :

$$\forall s>1,\ \zeta(s)^2=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{d(j)}{j^s}$$

où $d(j)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de j.

Exercice 9 –

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{|\sigma(n)|^2}$.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

1. Pour montrer que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on montre que $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, $(u_i+v_i)_{i\in I}$ aussi. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La famille $(u_n)_{n\geq 0}$ est sommable si et seulement $\sum u_n$ converge. ☐ Vrai ☒ Faux
2. La famille $(u_n)_{n\geq 0}$ est sommable si et seulement $\sum u_n$ converge absolument. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Remarquons que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n,m} \geq 0$. Soit F une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Il existe deux entiers N et M tels que :

$$\forall (n, m) \in F,\ n \leq N \text{ et } m \leq M$$

Par positivité des termes, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in F} u_{n,m} &\leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} u_{n,m} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^{n+m}} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^m}\right) \\
&= \frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-(1/2)} \times \frac{1-(1/2)^{M+1}}{1-(1/2)} \\
&= 4\left(1-(1/2)^{N+1}\right)\left(1-(1/2)^{M+1}\right)
\end{aligned}$$

ce qui est inférieur à 4. Ainsi :

$$X = \left\{ \sum_{(n,m)\in F} u_{n,m},\ F \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } F \text{ est fini} \right\}$$

est majoré. On en déduit que $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (et sa somme est inférieure ou égale à 4). Posons pour tout $N \geq 0$:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} u_{n,m} \in X$$

On a $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = 4$ donc par caractérisation d'une borne supérieure :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = 4$$

À retenir

Soit X une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de X si et seulement si M est un majorant de X et si il existe une suite d'éléments de X convergeant vers M.

Cours

Soit I un ensemble non vide et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

— Si l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{i \in F} u_i,\ F \subset I \text{ et } F \text{ fini} \right\}$$

est majoré, étant non vide, il admet une borne supérieure. Alors$(u_i)_{i \in I}$ est sommable, on définit sa *somme* notée $\sum_{i \in I} u_i$ par :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i,\ F \subset I \text{ et } F \text{ fini} \right\}$$

— Si l'ensemble précédent n'est pas majoré, on dit que $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, sa somme est alors par définition $+\infty$ et on note $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Exercice 3 –

1. Si $z = 0$, le terme général de la série est nul excepté pour $k = 0$ où le terme vaut 1. Dans ce cas la série est bien absolument convergente.

Si $z \neq 0$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left| \frac{z^n}{n!} \right| > 0$$

On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

D'après la règle de d'Alembert pour des séries à termes strictement positifs, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge donc $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument donc converge.

2. On vient de montrer que la série exponentielle est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par produit de Cauchy, on a pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z')^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k} = \frac{1}{n!} (z + z')^n$$

par linéarité et d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z')^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + z')^n}{n!}$$

ou encore $\exp(z) \exp(z') = \exp(z + z')$.

Cours

On appelle *produit de Cauchy* des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ où pour tout $n \geq 0$, le terme w_n est défini par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont *absolument convergentes* alors la série produit de Cauchy de ces deux séries est absolument convergente et on a :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k\right)$$

Exercice 4 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n,m} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{m^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{m^2}$ converge $(2 > 1)$ donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $u_{n,m}$ $(m \geq 1)$ converge. Remarquons de plus que :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

donc :

$$\frac{1}{(m+n^2)(1+m+n^2)} = \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{1+m+n^2}$$

Par télescopage, on en déduit que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(1+m+n^2)} = \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ étant convergente, on en déduit que $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}} \frac{1}{(m+n^2)(1+m+n^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Cours – Théorème de Fubini pour une suite double de réels positifs.

Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs. Si pour tout entier $n \geq 0$, la série de terme général $u_{n,m}$ $(m \geq 0)$ converge et si la série de terme général $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}$ $(n \geq 0)$ converge, alors la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n,m\geq 0} u_{n,m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}$$

Exercice 5 –

Posons pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$:

$$u_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \frac{1}{k!} & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

Montrons que la famille de réels positifs $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Soit $k \geq 0$. La série de terme général $u_{n,k}$ $(n \geq 0)$ converge car les termes sont nuls à partir du rang $k+1$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} = \frac{k+1}{k!}$$

En reconnaissant la somme de deux séries exponentielles, on a :

$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e$$

Ainsi, d'après le théorème de Fubini, $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on peut donc permuter les sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e$$

Exercice 6 –

Soit $x \in [0, 1[$. Alors pour tout entier $n \geq 1$, $x^n \in [0, 1[$ donc la série de terme général $(-x^n)^p$ $(p \geq 0)$ converge et on a :

$$\frac{1}{1+x^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-x^n)^p = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{np}$$

puis :

$$(*) \qquad \frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)}$$

Posons :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ u_{n,p} = (-1)^p x^{n(p+1)}$$

Montrons que cette famille est sommable en utilisant le théorème de Fubini positif. Pour tout entier $n \geq 1$, la série de terme général $|u_{n,p}| = (x^n)^{p+1}$ converge (série géométrique convergente) et on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \frac{x^n}{1-x^n}$$

Remarquons maintenant, comme $x \in [0, 1[$, que :

$$\frac{x^n}{1-x^n} \underset{+\infty}{\sim} x^n$$

et la série de terme général x^n converge donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{x^n}{1-x^n}$ aussi. Par théorème de Fubini, on en déduit que la famille étudiée est sommable et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$$

sachant que ces sommes existent toutes les deux d'après le théorème. On a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}$$

donc par $(*)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty}(x^{p+1})^n$$

puis par calcul d'une somme de série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

ce qui donne le résultat.

Cours – Théorème de Fubini pour une suite double.

Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de complexes. Si :

— Pour tout entier $n \geq 0$, la série de terme général $|u_{n,m}|$ $(m \geq 0)$ converge.

— La série de terme général $\sum_{m=0}^{+\infty}|u_{n,m}|$ $(n \geq 0)$ converge.

Alors la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\sum_{n,m\geq 0} u_{n,m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}$$

où les sommes existent par théorème.

À retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et tout entier $N \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} z^n = \frac{z^N}{1-z}$$

Exercice 7 –

1. La suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est positive, décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent.
2. Notons pour tout $n \geq 1$, w_n le terme général du produit de Cauchy des séries de termes géné-

raux a_n et b_n.

On a pour tout $n \geq 2$:

Attention : il n'y a pas de terme d'indice **0**

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|w_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{k} \leq \sqrt{n-1}$ et $\sqrt{n-k} \leq \sqrt{n-1}$ donc par produit de termes positifs,

$$0 < \sqrt{k}\sqrt{n-k} \leq n-1$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \frac{1}{n-1}$$

puis par sommation :

$$|w_n| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} = 1$$

Ainsi, (w_n) ne peut pas converger vers **0** et la série de terme général w_n diverge grossièrement.

3. Pour tout $n \geq 1$,

$$|a_n| = |b_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann divergente donc les séries de termes généraux a_n et b_n ne convergent pas absolument. On en déduit que l'hypothèse de convergence absolue des séries étudiées est importante pour obtenir la convergence de la série produit de Cauchy associée.

Exercice 8 –

Soit $s > 1$. On a :

$$\zeta(s)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s}\right)$$

Posons :

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ u_{n,m} = \frac{1}{(nm)^s}$$

Montrons que cette famille est sommable en utilisant le théorème de Fubini positif (les termes sont bien positifs). Pour tout entier $n \geq 1$, la série de terme général $u_{n,m}$ converge (multiple d'une série de Riemann convergente) et on a :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} = \frac{\zeta(s)}{n^s}$$

On reconnait maintenant le terme général d'une série convergente (même argument). Par théorème de Fubini, on en déduit que la famille étudiée est sommable et sa somme vaut $\zeta(s)^2$. Posons maintenant pour tout entier $j \geq 1$: $C_j = \{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ nm = j\}$.

Remarquons alors que C_j est de cardinal $d(j)$ et que $(C_j)_{j\geq 1}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. Par théorème de sommation par paquets, on en déduit que pour tout entier $j \geq 1$, $(u_{n,m})_{(n,m)\in C_j}$ est sommable, et en notant sa somme S_j, que la série de terme général S_j converge et que la somme de cette série vaut la somme de la famille sommable. Ainsi :

$$\zeta(s)^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} S_j \quad \text{où} \quad S_j = \sum_{(n,m)\in C_j} \frac{1}{(nm)^s} = \frac{d(j)}{j^s}$$

Ainsi :

$$\zeta(s)^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{d(j)}{j^s}$$

Cours – Sommation par paquets.

Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I (J est un ensemble). Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable alors pour tout $j \in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right)$$

Exercice 9 –

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge absolument donc la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est sommable. Par propriété de permutation, la famille $\left(\frac{1}{|\sigma(n)|^2}\right)_{n\geq 1}$ est sommable donc la série de terme général $\frac{1}{|\sigma(n)|^2}$ converge.

Cours

Si une série converge absolument, l'ordre de sommation n'a pas d'importance.

Exercice 10 –

1. Pour montrer que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on montre que $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, $(u_i + v_i)_{i\in I}$ aussi. ☒ Vrai ☐ Faux

58 Fonctions de deux variables

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $f : (x, y) \mapsto 3x^2y + x^3y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\nabla(f)(x, y) = (6xy + 3x^2y^2, 3x^2 + 2x^3y)$$

2. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(2t + 1, 1 - t^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : ☐ Vrai ☐ Faux

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(2t + 1, 1 - t^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t + 1, 1 - t^2)$$

3. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et si $\nabla(f)(a, b) = 0$ alors f admet un extremum en (a, b). ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y)\,\mathrm{e}^{x^3y}$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$,
2. $g : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 3 –

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $g : (u, v) \mapsto f(2v, u - v)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donner ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(x + t, y + t) = f(x, y)$$

En s'intéressant à la fonction $t \mapsto f(x + t, y + t)$, prouver que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 5 –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} - 2x^2 - y^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et préciser ses dérivées partielles d'ordre 1.
2. Déterminer les extremums éventuels de f.
3. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

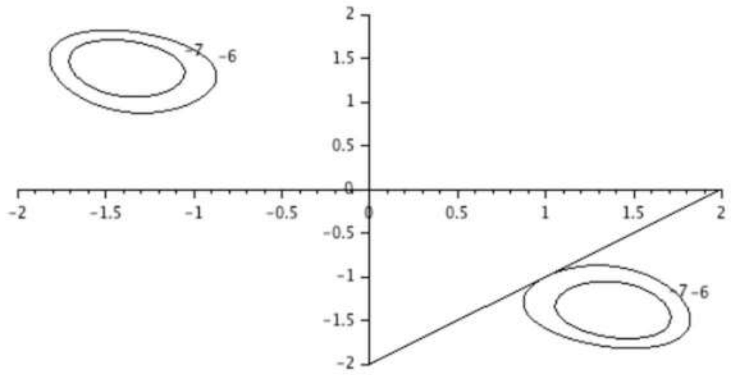
1. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Étudier l'existence de dérivées partielles d'ordre 1 de f en $(0, 0)$.

Exercice 7 –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\left(x - y\right)^2$$

La figure suivante représente les lignes de niveaux -6 et -7 de la fonction f.



1. Trouver l'équation de la tangente au point $(-1, 1)$ à la ligne de niveau -6.
2. En quels autres points les tangentes à cette ligne de niveau sont-elles parallèles à la tangente trouvée dans la question précédente ?

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

1. Si O et O' sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$, alors $O \cap O'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(0,0) = 0$ et, si $(x, y) \neq (0,0)$: $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. g n'est pas continue en $(0,0)$ et admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ admet un extremum global sur $\mathbb{R}^2$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $f : (x, y) \mapsto 3x^2y + x^3y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et : ☒ Vrai ☐ Faux

$$\nabla(f)(x, y) = (6xy + 3x^2y^2, 3x^2 + 2x^3y)$$

Méthode

Pour calculer les dérivées partielles d'une fonction de deux variables f définie sur $\mathbb{R}^2$, on procède ainsi :

- pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on dérive la fonction (d'une variable) $x \mapsto f(x, y)$,
- pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, on dérive la fonction (d'une variable) $y \mapsto f(x, y)$.

2. Faux, on a :

☐ Vrai ☒ Faux

$$\varphi'(t) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2t+1, 1-t^2) - 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2t+1, 1-t^2)$$

Cours

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x, y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, y'(t)$$

soit encore, en notant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

3. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et si $\nabla(f)(a, b) = 0$ alors f admet un extremum en (a, b).

☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f admet un extremum (local ou global) en $a \in \mathbb{R}^2$, alors : $\nabla(f)(a) = 0$.
Attention ! Ce n'est qu'une condition nécessaire et une fonction f peut ne pas admettre d'extremum en un point a tel que $\nabla(f)(a) = 0$; dans ce cas on dit que a est un point col ou un point selle.

Exercice 2 –

1. La fonction $(x, y) \mapsto x^3 y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (en tant que fonction polynôme) sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{x^3 y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions polynômes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur domaine de définition.

> 🎓 **Cours**
>
> Se souvenir que, si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, et si g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω.

De plus la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynôme donc, par produit, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

> La somme, le produit, le quotient (bien défini) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Par ailleurs on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x^3 y} + 3x^2 y \left(x^2 - y\right) \mathrm{e}^{x^3 y} = \left(3x^4 y - 3x^2 y^2 + 2x\right) \mathrm{e}^{x^3 y}$$

et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\mathrm{e}^{x^3 y} + x^3 \left(x^2 - y\right) \mathrm{e}^{x^3 y} = \left(x^5 - x^3 y - 1\right) \mathrm{e}^{x^3 y}$$

2. La fonction g est une fonction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (car son dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble) donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

> Les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur domaine de définition.

De plus on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{y\left(x^2 + y^2\right) - xy \times 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y\left(y^2 - x^2\right)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et comme x et y jouent des rôles symétriques :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x\left(x^2 - y^2\right)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Exercice 3 –

> 🎓 **Cours**
>
> Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si φ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert O de $\mathbb{R}^2$ et si, pour tout $(u, v) \in O$, $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in \Omega$, alors la fonction $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur O et on a, pour tout $(u, v) \in O$:
>
> $$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\,\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)$$
>
> et :
>
> $$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\,\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$$

Les fonctions $\varphi : (u, v) \mapsto 2v$ et $\psi : (u, v) \mapsto u - v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (ce sont des fonctions polynômes) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par ailleurs on a d'une part :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

et d'autre part :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)$$
$$= 2\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) - \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

Exercice 4 –

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $g : t \mapsto f(x+t, y+t)$ est constante, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante nulle.

$g(t) = f(x,y)$ ne dépend pas de t.

De plus les fonctions $u : t \mapsto x+t$ et $v : t \mapsto y+t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t))\,u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))\,v'(t)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)$$

et donc, en particulier pour $t = 0$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial (}{\partial x}x, y) + \frac{\partial (}{\partial y}x, y) = 0$$

Exercice 5 –

1.
- La fonction $(x,y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est une fonction polynôme de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{1+x^2+y^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
  De plus la fonction $(x,y) \mapsto -2x^2 - y^2$ est une fonction polynôme de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- De plus, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - 4x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - 2y \end{cases}$$

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est ouvert, donc f ne peut admettre d'extremum qu'en un point annulant son gradient. De plus, d'après le résultat précédent, on a, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

On cherche des extremums sur un ouvert, donc on commence par chercher les points critiques de f.

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} - 4x = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\left(1 - 4\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right) = 0 \\ y\left(1 - 2\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right) = 0 \end{cases}$$

donc, comme $4\sqrt{1 + x^2 + y^2} \neq 1$ et $2\sqrt{1 + x^2 + y^2} \neq 1$ (car $\sqrt{1 + x^2 + y^2} \geq 1$) :

$$\nabla(f)(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

Par conséquent, $f(0, 0)$ est le seul extremum possible de f sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) - f(0, 0) &= \sqrt{1 + x^2 + y^2} - 2x^2 - y^2 - 1 \\ &= \sqrt{1 + x^2 + y^2} - (1 + x^2 + y^2) - x^2 \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 + x^2 + y^2 \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall t \geq 1,\ \sqrt{t} \leq t$$

donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) - f(0, 0) \leq -x^2 \leq 0$$

ce qui nous permet de conclure que $f(0, 0) = 1$ est le maximum global de f sur $\mathbb{R}^2$ et que c'est le seul extremum de f.

Méthode

Quand on cherche les extremums d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, on peut procéder ainsi :

- on commence par résoudre l'équation $\nabla f(x, y) = 0$ d'inconnue $(x, y) \in \Omega$ pour trouver les points (appelés points critiques) en lesquels f peut *éventuellement* admettre un extremum,
- on étudie ensuite, pour tout point critique (a, b), le signe de $f(x, y) - f(a, b)$ pour $(x, y) \in \Omega$ (ou, ce qui est parfois plus simple, le signe de $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ lorsque $(a + h, b + k) \in \Omega$).

3. • La fonction f admet un maximum global donc f est majorée (par 1).

• On peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x,0) = \sqrt{1+x^2} - 2x^2$$
$$= x^2 \left[\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}} - 2\right]$$

f n'a pas de minimum, mais elle peut malgré tout être minorée (la borne inférieure, quand elle existe, n'est pas toujours atteinte), on va donc montrer que ce n'est pas le cas.

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,1) = -\infty$$

ce qui permet d'affirmer que f n'est pas minorée.

Exercice 6 –

1. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On cherche à utiliser les théorèmes généraux donc on écrit f sous la forme d'une composée de fonctions continues en remarquant que f est une fonction de $x^2 + y^2$.

de telle sorte que l'on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$$

De plus la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$$

donc, comme $\varphi(0) = 1$:

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \varphi(0)$$

et φ est donc aussi continue en 0. Par ailleurs, la fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc, par composition, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. • La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est une fonction polynôme de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions qui le sont donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• De plus, on a de manière immédiate :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2) - 2x\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2) - 2y\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

3. • On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{\frac{\sin(x^2)}{x^2} - 1}{x}$$
$$= \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^3}$$

Cours

Si f est une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en $(a, b) \in \Omega$ par rapport à x si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x, b)$ est dérivable en a, donc si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$ admet une limite finie en a ; de plus on a, le cas échéant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

De même, sous réserve que la limite soit finie :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

De plus, on a :

$$\sin(t) \underset{t \to 0}{=} t + \circ(t^2)$$

donc :

$$\sin(x^2) \underset{x \to 0}{=} x^2 + \circ(x^4)$$

d'où :

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \underset{x \to 0}{=} \circ(x)$$

et finalement :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

ce qui nous permet de conclure que f admet une première dérivée partielle en $(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

- De même, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \ \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \frac{\sin(y^2) - y^2}{y^3}$$

donc :

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

Ainsi f admet une deuxième dérivée partielle en $(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Exercice 7 –

1. La ligne de niveau -6 est l'ensemble :

$$L_{-6} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = -6\}$$

Si on peut croire le graphique, les lignes de niveau sont symétriques par rapport à $(0, 0)$ et la tangente au point $(1, -1)$ est la droite d'équation $y = x - 2$, donc, par symétrie, la tangente recherchée est la droite d'équation $y = x + 2$.

Cours

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \Omega$, le gradient de f en (x, y) est orthogonal à la ligne de niveau contenant le point (x, y).

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}^2$, donc le gradient de f en $(-1, 1)$ est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau passant par le point $(-1, 1)$. Or on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \nabla f(x, y) = \left(4x^3 - 4\left(x - y\right), 4y^3 + 4\left(x - y\right)\right)$$

donc :

$$\nabla f(-1, 1) = (4, -4)$$

Faut-il rappeler que la droite d'équation $y = ax + b$ a comme vecteur directeur le vecteur $(1, a)$? Les vecteurs $(1, a)$ et $(4, -4)$ sont donc orthogonaux, d'où :

$$4 - 4a = 0$$

On en déduit que $a = 1$ et comme la tangente passe par le point de coordonnées $(-1, 1)$, on en déduit que $-1 + b = 1$, donc que la tangente au point $(-1, 1)$ à la ligne de niveau -6 a pour équation $y = x + 2$.

2. Soit $A = (x_0, y_0)$ un élément de la ligne de niveau -6 de f. La tangente à la ligne de niveau passant par le point A est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$ si et seulement si le gradient de f en A est orthogonal à cette droite, donc si et seulement si le gradient de f en A est colinéaire au gradient de f en $(-1, 1)$.
Or on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) \in \operatorname{Vect}(\nabla f(-1, 1)) &\iff \nabla f(x, y) \in \operatorname{Vect}((4, -4))\\ &\iff 4x^3 - 4x + 4y = -(4y^3 + 4x - 4y)\\ &\iff x^3 = -y^3\end{aligned}$$

et comme la fonction $t \mapsto t^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

$$\nabla f(x, y) \in \operatorname{Vect}(\nabla f(-1, 1)) \iff x = -y$$

Ainsi, pour tout (x, y) appartenant à la ligne de niveau -6, on a :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) \in \operatorname{Vect}(\nabla f(-1, 1)) &\iff \begin{cases} x^4 + y^4 - 2\left(x - y\right)^2 = -6 \\ x = -y \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 2x^4 - 8x^2 = -6 \\ x = -y \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \\ x = -y \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} (x^2 - 1)(x^2 - 3) = 0 \\ x = -y \end{cases}\\ &\iff (x, y) \in \left\{(1, -1), (-1, 1), (\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3})\right\}\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que les tangentes à la ligne de niveau -6 parallèle à celle trouvée dans la question précédente sont les tangentes aux points $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

Exercice 8 –

1. Vrai. Soit $a \in O \cap O'$. a appartient à O et à O', qui sont tous deux des ouverts, donc il existe deux réels r et r' strictement positifs tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x-a\| < r \Longrightarrow x \in O$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x-a\| < r' \Longrightarrow x \in O$$

En notant $\alpha = \min(r, r')$, on a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x-a\| < \alpha &\Longrightarrow \begin{cases} x \in O \\ x \in O' \end{cases}\\ &\Longrightarrow x \in O \cap O'\end{aligned}$$

donc $O \cap O'$ est ouvert.

Cours

On dit qu'une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ est ouverte si Ω est vide ou si, pour tout $a \in \Omega$, il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans Ω, c'est-à-dire si :

$$\forall a \in \Omega,\ \exists r > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x-a\| < r \Longrightarrow x \in \Omega$$

2. Vrai. On peut déjà remarquer que, si f était continue en $(0,0)$, alors la fonction $g : t \mapsto f(t,t)$ le serait également. Or on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donc g n'est pas continue. Ainsi f n'est pas continue en $(0,0)$. Par ailleurs, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t-0} = 0$$

donc :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t-0} = 0$$

ce qui prouve que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$ et que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

À retenir

On se souviendra qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ peut admettre des dérivées partielles d'ordre 1 sans être continue.

3. Faux. On peut remarquer que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, 0) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x, 0) = -\infty$$

donc f n'est ni majorée, ni minorée, et ne peut donc admettre d'extremum global.

100% ENTRAÎNEMENT

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques et économiques. L'objectif est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience, donc d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficultés progressives, encadrés par deux « Vrai/Faux ».

Chaque livre est découpé en chapitres qui correspondent à ceux du programme officiel et chaque chapitre comporte quatre parties :

1. **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ce qui permet de vérifier que les notions nécessaires à la résolution des exercices sont correctement en place. Ce Vrai/Faux est suivi d'exercices d'application directe du cours.

2. **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut connaître et maîtriser parfaitement.

3. **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains très difficiles, ainsi que « le Vrai/Faux de la fin » qui nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.

4. **Solutions des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

www.editions-ellipses.fr

9 782340 048775