Exercice 1.

Soient E, F, G trois ensembles. On se donne trois applications

$$f : E \to F, \quad g : F \to G \quad \text{et} \quad h = g \circ f.$$

1. Supposons que h est surjective et g injective.
   Montrer que f est surjective.
2. Supposons que h est injective et f surjective.
   Montrer que g est injective.

Exercice 2.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.

Pour une partie A de E, on note
- M_A l'ensemble des majorants de A dans E
- A^* l'ensemble des minorants de M_A dans E.

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset A^*$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \quad A \subset B \Longrightarrow M_B \subset M_A$.
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \quad A \subset B \Longrightarrow A^* \subset B^*$.
4. $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad M_A = M_{A^*}$ et $A^* = (A^*)^*$.

Exercice 3.

Soit E un ensemble et A une partie de E.

Pour deux parties X et Y de E, on note $X \sim Y$ lorsque $X \cap A = Y \cap A$, ce qui définit sur $\mathcal{P}(E)$ une relation binaire.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. (*) Pour $X \in \mathcal{P}(E)$, on note $[X]$ la classe d'équivalence de X et $\mathcal{P}(E)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences pour $\sim$.

   Pour toute partie X de E, on note pose $\widetilde{f}([X]) = X \cap A$.

   (a) Expliquer pourquoi ce qui précède définit correctement une *application* $\widetilde{f}$ de $\mathcal{P}(E)/\sim$ dans $\mathcal{P}(A)$.

   (b) Justifier que $\widetilde{f}$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)/\sim$ vers $\mathcal{P}(A)$.