Exercice. Des sommes.

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit n un entier supérieur à 2.
À l'aide du télescopage, simplifier les sommes

(a) $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \left(\cos\left((k+1)\frac{\pi}{n} \right) - \cos\left(k\frac{\pi}{n} \right) \right)$.

(b) $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$.

On précisera $\lim U_n$ et $\lim V_n$ si ces limites existent.

3. Soit n un entier naturel. Calculer les deux sommes

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^{i-j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} 2^{i-j}.$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soient $A_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $B_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

(a) Calculer $A_p + B_p$.

(b) Démontrer que $B_p = A_p$.

(c) En déduire la valeur de A_p.

Problème. Transformation d'Abel.

Dans tout ce problème, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles, et n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_n v_{n+1} - u_0 v_1 - \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) v_k.}$$

Cette relation s'appelle **transformation d'Abel** : la somme de gauche fait intervenir les accroissements de la suite v et celle de droite les accroissements de u. C'est une sorte d'intégration par parties discrète.
Parfois, comme on va le voir dans les applications ci-dessous, la seconde somme est plus facile à calculer que la première...

2. En considérant le cas où $u_k = v_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, retrouver l'expression connue de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

3. En considérant le cas où $u_k = k^2$ et $v_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, retrouver l'expression connue de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

4. Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} kq^k$.
Indication : on pourra commencer par multiplier la somme par $q-1$...