23 Dérivabilité

Dans tout le cours, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Dérivabilité : du point de vue local au point de vue global.

1.1 Définition et exemples.

Définition 1 (Dérivabilité en un point)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f est dite **dérivable en** a si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie quand x tend vers a.

Lorsqu'elle existe, cette limite est appelée **nombre dérivé** en a et notée $f'(a)$.

Une autre écriture du taux d'accroissement de f au point a est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

(on se demande alors si une limite finie existe lorsque h tend vers 0, pour h différent de 0).

Définition 2 (Dérivabilité sur un intervalle)**.**

On dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I.
On appelle alors **dérivée** de f la fonction $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$.
On pourra noter $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, à valeurs réelles.

La dérivabilité, comme la continuité, est donc d'abord une notion locale. Considérons une fonction f dérivable en un point a d'un intervalle I et notons

$$\varepsilon : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Cette fonction est définie au voisinage de a (sauf en a) et par définition de la dérivabilité, elle tend vers 0 en a. Pour $x \in I \setminus \{a\}$, on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Cette écriture sera appelée un développement limité de f au voisinage de a à l'ordre 1. Les termes sont écrits du plus *grand* au plus *petit* (on rendra cela rigoureux). Le terme $(x - a)\varepsilon(x)$ peut être vu comme l'erreur d'approximation lorsqu'on écrit

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Une fonction dérivable en a, c'est donc une fonction qui se comporte au voisinage de a comme une fonction affine. Sa courbe représentative y admet pour tangente la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Proposition 3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.
2. Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Exemple. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0. Elle n'y est pas dérivable.

Remarque. La dérivabilité est donc une notion de régularité (vraiment) plus forte que la continuité. On a l'inclusion $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, et cette inclusion est stricte.

Exemple 4 (Fonctions puissances au voisinage de 0)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x^a$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Pour quelles valeurs de a la fonction ainsi obtenue est-elle dérivable en 0 ?

Exemple 5.

Représenter au voisinage de 0 les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Prolonger par continuité en 0, puis dire si ces prolongements sont dérivables en 0.

Définition 6.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est
— **dérivable à gauche** en a si le taux d'accroissement en a admet une limite à gauche (finie).
— **dérivable à droite** en a si le taux d'accroissement en a admet une limite à droite (finie).

Lorsque ces limites existent, on note

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{et} \quad f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Figure. Dérivées à gauche et à droite et demi-tangentes.

Proposition 7 (Caractérisation de la dérivabilité en a)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I \setminus \{\inf(I), \sup(I)\}$.

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans le cas où f est dérivable en a, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

1.2 Dérivabilité et opérations.

Proposition 8 (Somme, produit, quotient)**.**

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. Alors,

- pour tous λ et μ réels, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$
- fg est dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
- Si $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a et f/g est dérivable en a : on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Corollaire 9 (du local au global)**.**

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Alors,

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$,
- $fg \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$,
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $f/g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$.

Théorème 10 (Composition).

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
Si f est dérivable au point a et g dérivable au point $f(a)$, alors

$$g \circ f \text{ est dérivable en } a \quad \text{et} \quad (g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a)).$$

Corollaire 11 (du local au global).

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable sur I et g dérivable sur J. Alors,

$$g \circ f \text{ est dérivable sur } I \quad \text{et} \quad (g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

Exemple 12 (jongler avec les théorèmes globaux et le point de vue local).

Établir la dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{x \sin(x)}$ sur $[0, \pi[$.

1.3 Dérivabilité d'une réciproque.

Théorème 13 (Dérivabilité d'une réciproque).

Soit f une fonction continue et strictement monotone réalisant une bijection de I dans J.
On note $f^{-1} : J \to I$ sa fonction réciproque. Supposons que f est dérivable en un point $a \in I$.

$$f^{-1} \text{ est dérivable au point } f(a) \quad \text{si et seulement si} \quad f'(a) \neq 0.$$

De plus, lorsqu'il y a dérivabilité en $f(a)$, on a $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Corollaire 14 (du local au global).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ réalisant une bijection de I dans J et $f^{-1} : J \to I$ sa fonction réciproque.
Si f est dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemple 15.

Justifier brièvement que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons argsh sa réciproque, (*qu'on ne cherchera pas à expliciter*). Montrer que cette réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

1.4 Extremum local et point critique.

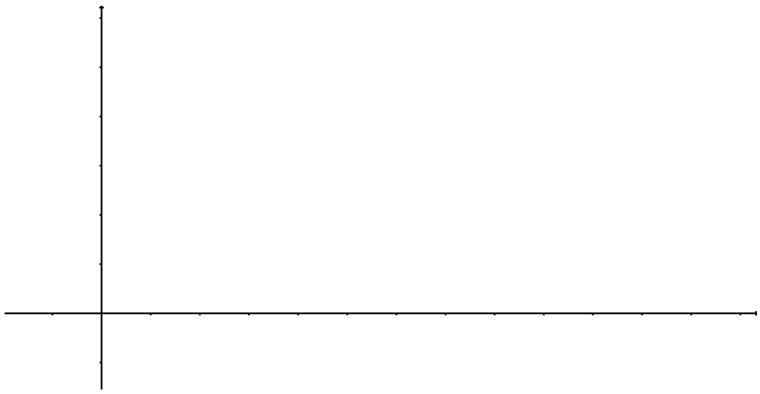
Définition 16.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f admet un **extremum local** en a si $f(a)$ est un extremum (maximum ou minimum) de f au voisinage de a.
Plus précisément, on dit que f admet un maximum local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) \leq f(a)$$

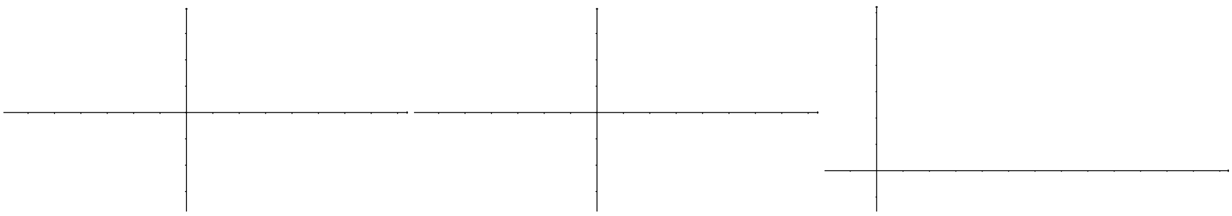
Proposition 17 (Extremum local et dérivabilité)**.**

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$.
Si f admet un extremum local en c et y est dérivable, alors $f'(c) = 0$.
Un point c où la dérivée de f s'annule est appelé un **point critique** de f.



Exemple 18 (la réciproque est fausse et toutes les hypothèses comptent)**.**

1. $x \mapsto x^3$ a un point critique en 0 qui n'est pas un extremum local.
2. $x \mapsto |x|$ a un minimum global en 0 : elle n'y est pas dérivable.
3. Montrer à l'aide d'un graphe de fonction l'importance de l'hypothèse que c est à l'*intérieur* d'un intervalle ouvert est essentielle.



2 Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle.

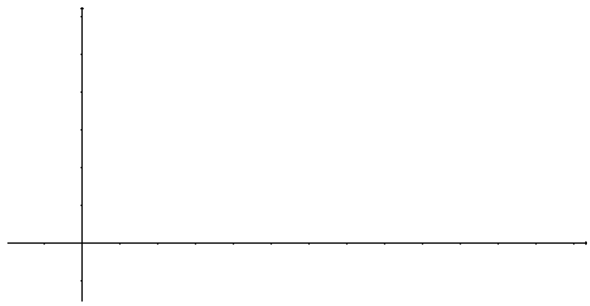
Dans tout ce qui suit, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

2.1 Théorème de Rolle.

Théorème 19 (de Rolle)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a, b[\quad f'(c) = 0.$$



Exemple 20.

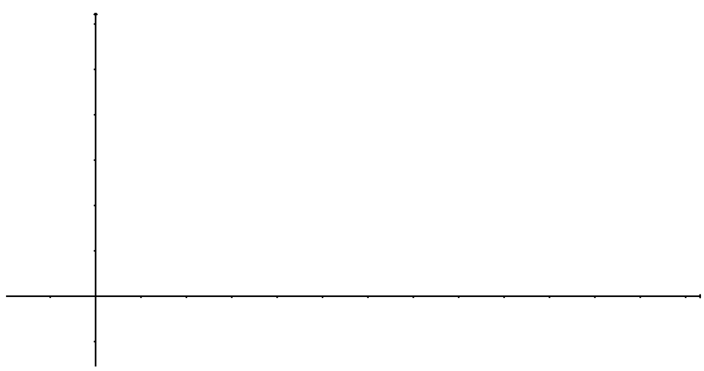
Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Montrer que si f s'annule n fois ($n \in \mathbb{N}^*$), alors f' s'annule (au moins) $n-1$ fois.

2.2 Egalité des accroissements finis.

Théorème 21 (Égalité des accroissements finis)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Remarque. Idée de preuve à retenir : on pose une fonction auxiliaire $\Phi : x \mapsto f(x) - A(x-a)$, en choisissant A de manière à "compenser la pente" et ainsi pouvoir appliquer le théorème de Rolle à Φ.

Remarque. Notons que le théorème ci-dessus concerne des accroissements où b ne tend pas vers a ! C'est en ce sens que les accroissements sont **finis**, là où dans la partie 1, le passage à la limite les rendait *infinitésimaux*. On pourrait donc rebaptiser ce résultat : théorème des accroissements **macroscopiques**.

Exemple 22.

En appliquant l'EAF à ln sur $[k, k+1]$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Deux applications des AF ci-dessous, la première étant un théorème bien connu...

Théorème 23 (Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables)**.**

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

- Si f' est strictement positive sur I, alors f y est strictement croissante. Réciproque fausse.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f y est strictement décroissante. Réciproque fausse.

Théorème 24 (de la limite de la dérivée)**.**

Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et <u>continue en a</u>. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad f'(x) \underset{\substack{x\to a \\ x\neq a}}{\longrightarrow} \ell \quad \text{alors} \quad \underline{f \text{ est dérivable en } a} \text{ de dérivée } f'(a) = \ell.$$

Automatiquement f' est continue en a.
Si de surcroît la fonction f' est continue sur $I \setminus \{a\}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

La réciproque est fausse : voir l'exemple de $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ au paragraphe 3.1.

Proposition 25 (limite $\pm\infty$ pour la dérivée)**.**

Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et <u>continue en a</u>.

$$\text{Si} \quad f'(x) \underset{\substack{x\to a \\ x\neq a}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{alors} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{\substack{x\to a \\ x\neq a}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exemple 26 (Un prolongement $\mathcal{C}^1$)**.**

Soit a un réel, et $f : x \mapsto x^a e^{-\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Justifier que f est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2.3 Inégalité des accroissements finis.

Définition 27.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $K \geq 0$. On dit que f est K-**lipschitzienne** sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

On dira que f est **lipschitzienne** sur I s'il existe $K \geq 0$ tel que f est K-lipschitzienne.

Proposition 28.

Une fonction lipschitzienne sur un intervalle y est continue. La réciproque est fausse.

Théorème 29 (Inégalité des accroissements finis)**.**

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Si $|f'|$ est majorée par un réel K, alors f est K-lipschitzienne.

Exemple 30.

Démontrer

$$\forall x, y \in [1, +\infty[\quad \left| \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y} \right| \leq 2|x - y|.$$

Application. Application contractante et convergence linéaire vers le point fixe.

Soit $f : I \to I$ une application k-lipschitzienne, avec $0 \leq k < 1$: elle est dite *contractante*.
On suppose de surcroît que f admet un point fixe $\alpha \in I$: $f(\alpha) = \alpha$.
Ce point fixe est alors unique (on le montre) et si (u_n) est une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$,
alors (u_n) converge vers α. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|.$$

Une récurrence amène immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|.$$

La convergence de u vers α est linéaire, en échelle logarithmique : $-\ln|u_n - \alpha|$ est majorée par une fonction linéaire de n. Si on regarde u_n comme une approximation de α, le nombre de *décimales exactes* dans l'approximation croît comme une fonction linéaire de n. Voir le TD pour un exemple de convergence linéaire vers le point fixe.

Une méthode offrant de meilleurs résultats numériques : la **méthode de Newton**, pour laquelle la vitesse de convergence est quadratique, avec une majoration de l'erreur de la forme $|u_n - \alpha| \leq k^{2^n} |u_0 - \alpha|$, où $0 \leq k < 1$. Cette fois, le nombre de décimales exactes double à chaque itération !

3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

3.1 Retour sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 31.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I si
- elle est dérivable sur I
- sa dérivée f' est continue sur I

Certains auteurs parlent aussi de fonctions « continûment dérivables ».
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I sera noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Exemple 32.

Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment y est lipschitzienne.

Exemple 33 (Une fonction dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$: un exemple en cinq étapes)**.**

1. Une définition sur $\mathbb{R}^*$: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Prolongement en 0. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ $|f(x)| \leq x^2$ donc f a une limite nulle en 0.
   On prolonge f par continuité en posant $f(0) = 0$.
3. Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$? **Oui** : par produit et composée. On a
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$
4. Dérivabilité de f en 0 ? **Oui** : on l'a vu en début de cours : le taux d'accroissement en 0 tend vers 0 et on a $f'(0) = 0$.
5. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? **Non** : f' est parfaitement continue sur $\mathbb{R}^*$ par produit et composée mais à cause de $\cos(1/x)$, f' n'a pas de limite en 0 ! Elle ne saurait donc y être continue.

3.2 Dérivabilité d'ordre supérieur et fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Définition 34.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble des fonctions n **fois dérivables** sur I, noté $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, et pour f dans cet ensemble, sa **dérivée** n**ème** $f^{(n)}$, ou dérivée à l'ordre n.

- On pose $\mathcal{D}^0(I, \mathbb{R}) = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$: toutes les fonctions définies sur I sont 0 fois dérivables, et pour $f : I \to \mathbb{R}$, on pose $f^{(0)} := f$.
- Supposons $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ bien défini pour un certain entier naturel n. Alors, $\mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ dont la dérivée $n$ème est dérivable sur I ; on pose alors
$$f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'.$$

Remarques. $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) = \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et la dérivée à l'ordre 1 est la dérivée... tout court.

Si $f \in \mathcal{D}^2(I,\mathbb{R})$, elle est dérivable et sa dérivée f' est elle-même dérivable, f a une dérivée d'ordre 2, dite aussi dérivée seconde : $f^{(2)} = (f')'$ souvent notée f''.

Lemme 35.

Si f est n fois dérivable sur I et si $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ vérifie $k + l \leq n$, alors

$$f^{(k+\ell)} = \left(f^{(k)}\right)^{(\ell)}.$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, si f est dérivable $n+1$ fois sur I,

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \left(f'\right)^{(n)}.$$

Définition 36.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **de classe $\mathcal{C}^n$** sur I si
- elle est dérivable n fois sur I
- sa dérivée $n$ème $f^{(n)}$ est continue sur I.

Notamment, les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sur I sont les fonctions qui y sont continues.
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I sera noté $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{D}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R}) \ \dots \subset \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}).}$$

Proposition 37.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \iff (f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})).$$

Définition 38.

On appelle fonction **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I une fonction qui est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}).$$

Exemples.
- Les fonctions exp, ln, cos, sin, tan, ch, sh, ainsi que les fonction polynomiales et leurs quotients sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition, et cela peut être affirmé sans démonstration.
- Les fonctions $x \mapsto x^a$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonction arcsin et arccos, définies sur $[-1,1]$, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

3.3 Stabilité par opérations de la classe $\mathcal{C}^n$.

Dans ce qui suit, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 39 ($\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.)**.**

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors pour tous λ et μ réels, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Dans le cas où n est fini,

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Proposition 40 ($\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est stable par produit/Formule de Leibniz)**.**

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, Alors, la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Dans le cas où n est fini,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exemple 41.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto x^n \cos(x)$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Proposition 42.

- Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, avec g ne s'annulant pas sur I, alors (f/g) est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J alors, $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Soit $f : I \to J$ bijective et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I $(n \geq 1)$.
  Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Fin : Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

On étend la définition de la dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation par la dérivabilité des parties réelles et imaginaires. Identité $f' = \mathrm{Re}(f') + i\mathrm{Im}(f')$.
On constate avec l'exemple $t \mapsto e^{it}$ sur $[0, 2\pi]$ que le théorème de Rolle n'est plus vrai pour ces fonctions, et à plus forte raison l'égalité des accroissements finis. L'inégalité des AF demeure, comme on le voit ci-dessous.

Proposition 43 (Inégalité des accroissements finis)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que le module de la dérivée est majoré sur I par une constante $K \geq 0$. Alors f est K-lipschitzienne sur I :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

Exercices

$\boxed{23.1}$ **[♦♢♢]** Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a et dérivable en a. Montrer que la limite suivante existe et la calculer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

$\boxed{23.2}$ **[♦♦♢]** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) - f(y) \leq (x-y)^2.$$

$\boxed{23.3}$ **[♦♦♦]** Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $f' = f \circ f$.

$\boxed{23.4}$ **[♦♦♢]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable et tendant vers une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$.
Montrer que la dérivée de f s'annule sur $\mathbb{R}$.
<u>Indication</u> : on pourra s'intéresser à la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\tan(x)) \end{array} \right.$.

$\boxed{23.5}$ **[♦♦♢]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f(a) = 0$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $f^{(k)}(b) = 0$.
Démontrer que les fonctions $f', f^{(2)}, \ldots$ et $f^{(n)}$ s'annulent sur $]a, b[$.

$\boxed{23.6}$ **[♦♦♦]** Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$.
Montrer que la tangente à la courbe de f en un certain point de $]0, 1[$ est une droite qui passe par l'origine.

$\boxed{23.7}$ **[♦♦♢]** En appliquant le théorème des accroissements finis entre k et $k+1$ à la fonction $x \mapsto \ln|\ln(x)|$, démontrer que la suite de terme général $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k \ln(k)}$ diverge.

$\boxed{23.8}$ **[♦♦♢]** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$

1. Démontrer que f possède un unique point fixe ℓ sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on exprimera à l'aide de a.
   Justifier que $[\ell, +\infty[$ est stable par f.
2. Démontrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[\ell, +\infty[$.
3. Soit u la suite définie par $u_0 \in [\ell, +\infty[$ et par $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
4. Pourquoi dit-on que la convergence vers le point fixe se fait à une vitesse *linéaire* ?

$\boxed{23.9}$ **[♦♦♢]** Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\quad \tan^{(n)}(x) \geq 0.$$

$\boxed{23.10}$ **[♦♦♢]** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big(x^{n-1}\ln(x)\Big) = \frac{(n-1)!}{x}$$

$\boxed{23.11}$ **[♦♦♦]** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$
