Exercice 1. Un calcul d'équivalent.

Soit $\alpha > 0$. Calculer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha},$$

et ce en utilisant une somme de Riemann.

Exercice 2. Maximum de deux variables aléatoires.

Dans cet exercice, n est un entier naturel fixé.

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $Z = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de Z.
   Indication : on pourra commencer par calculer $P(Z \leq k)$ pour k bien choisi.
2. Calculer $P(X = Y)$ ainsi que $P(X = Z)$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   Déterminer la loi de X conditionnellement à l'événement $(Z = k)$.

Exercice 3. Loi des événements rares : une apparition de la loi de Poisson.

Soit λ un réel strictement positif et n un entier supérieur à λ.

Sur un espace probabilisé (Ω, P), on considère X_n, une variable aléatoire telle que

$$X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

On fixe un entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $p_n(k) = P(X_n = k)$.

1. Rappeler l'expression de $p_n(k)$.
2. Démontrer l'existence d'un réel $p(k)$, qu'on exprimera en fonction de λ et k tel que
   $$p_n(k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p(k).$$
   On peut vérifier que $(p(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels positifs qui somment à 1 : c'est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$, ensemble infini.
   Il faudra attendre la spé pour lui faire correspondre une loi usuelle sur $\mathbb{N}$:

   *la **loi de Poisson.***
3. Un examinateur interroge à l'oral du CCINP n candidats tous nés en 2005. On note $U_1, \ldots, U_n$ les n dates de naissance des candidats. On suppose que les U_i sont des variables aléatoires sur un espace (Ω, P) qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1, 365]\!]$ et que ces variables sont indépendantes.
   On pourra noter c_i la date de convocation du candidat i.
   Enfin, on note Y_n le nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire.
   (a) Exprimer Y_n à l'aide des U_i et des c_i.
   Utilisez $\sum$ ainsi que des indicatrices.
   (b) Donner la loi de Y_n.
   (c) Dans le cas où l'examinateur interroge 240 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. On n'utilisera pas de machine, bien entendu, mais on pourra utiliser que $e^{-2/3} \approx \frac{1}{2}$.