**Exercice 1.** Essentiel.

Soit $\varepsilon \in ]0,1[$. Justifier que

$$\sum \frac{\ln(n)}{n^{1+\varepsilon}} \text{ converge} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{n^{1-\varepsilon}\ln(n)} \text{ diverge.}$$

**Exercice 2.**

Soit $a > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n\ln(n)}.$$

1. Calculer un équivalent de $u_n$ (*on discutera selon la valeur de* $a$).
2. Donner la nature de $\sum u_n$ (*toujours en discutant selon la valeurs de* $a$).

**Exercice 3.**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

1. Calculer un équivalent de $u_n$ (*on discutera selon les valeurs de* $a$ *et* $b$).
2. Donner la nature de $\sum u_n$ (*toujours en discutant selon les valeurs de* $a$ *et* $b$).

**Exercice 4.** Règle de Raabe-Duhamel et application.

1. Soit $\alpha > 0$ et $u$ une suite réelle strictement positive telle que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   (a) On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Quelle est la nature de la série $\sum(b_{n+1} - b_n)$ ?
   (b) En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}.$$
2. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)}.$$
   (a) À l'aide de la question 1, prouver que $\sum u_n$ converge.
   (b) Sans l'aide de la question 1 mais avec celle de la formule de Stirling, redémontrer ce résultat.

## **Problème**. Semi-convergence de la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ $(\theta \notin 2\pi\mathbb{Z})$.

Dans ce problème, on fixe un réel $\theta \in ]0, 2\pi[$ et on s'intéresse à la série.

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$$

1. Démontrer que cette série n'est pas absolument convergente.
2. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites complexes. Montrer pour un entier $n$ donné l'identité
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})b_k = a_n b_n - a_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_k - b_{k+1}).$$
   Ce calcul s'appelle *transformation d'Abel*. C'est une sorte d'IPP discrète.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $D_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ (la fonction de $\theta$ associée est appelée noyau de Dirichlet).
   (a) Calculer une expression de $D_n(\theta)$ sans signe somme puis montrer que la suite $(D_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) À l'aide de la transformation d'Abel, prouver que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \frac{D_n(\theta)}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k(\theta)}{k(k+1)}.$$
4. Démontrer que la série $\sum \frac{D_n(\theta)}{n(n+1)}$ est absolument convergente.
   Démontrer alors que la série étudiée converge.
   Pourquoi parle-t-on de série *semi-convergente* ?
5. Justifier que les séries
$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$$
   sont convergentes.
6. (*)
   Démontrer que les deux séries ci-dessus ne sont pas absolument convergentes.