

# Équations Différentielles Linéaires d'ordre 2

## Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

---

### Exercices.

Exercice 12.1	2
Exercice 12.2	2

---

**Exercice 12.1** [◆◆◆]

Résoudre le problème de Cauchy ci-dessous :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Polynôme caractéristique :  $r^2 + 2r + 10$ .  $\Delta = -36$ .  $r_{\pm} = -1 \pm 3i$ .

Solutions de l'équation homogène :  $S_0 = \{x \mapsto e^{-x}(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$

Solution particulière :  $S_p : x \mapsto \frac{1}{2}$ .

Solution générale :  $S = \{x \mapsto \frac{1}{2} + e^{-x}(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Conditions initiales.

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x))$ .

On a  $y(0) = 1 \iff \frac{1}{2} + \alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}$ .

On a  $y'(0) = 0 \iff -\frac{1}{2} + 3\beta = 0 \iff \beta = \frac{1}{6}$ .

L'unique solution de ce problème de Cauchy est :  $x \mapsto \frac{1}{2} + e^{-x}(\frac{1}{2} \cos(3x) + \frac{1}{6} \sin(3x))$

□

**Exercice 12.2** [◆◆◆]

Résoudre :

$$y'' - y' - 2y = 2 \operatorname{ch}(x)$$

On réécrit d'abord cette équation comme :  $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-x}$ .

Polynôme caractéristique :  $r^2 - r - 2$ .  $\Delta = 9$ .  $r_1 = -1$  et  $r_2 = 2$ .

Solutions de l'équation homogène :  $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Équation auxiliaire 1 :  $y'' - y' - 2y = e^x$ . Solution particulière :  $S_{p,1} : x \mapsto B e^x \mid B \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathbb{R}$  et  $y : x \mapsto B e^x$ .

On a  $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = e^x \iff -2B e^x = e^x \iff B = -\frac{1}{2}$ .

Ainsi,  $S_{p,1} : x \mapsto -\frac{1}{2} e^x$ .

Équation auxiliaire 2 :  $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ . Solution particulière :  $S_{p,2} : x \mapsto C x e^{-x} \mid C \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  et  $y : x \mapsto C x e^{-x}$ .

On a  $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = e^{-x} \iff -3C e^{-x} = e^{-x} \iff C = -\frac{1}{3}$ .

Ainsi,  $S_{p,2} : x \mapsto -\frac{1}{3} x e^{-x}$ .

Par superposition, l'ensemble des solutions est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} - \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{3} x e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

□