# Propriétés de $\mathbb{R}$

**Corrigé**

DARVOUX Théo

Septembre 2023

---

## Exercices.



---

## Exercice 2.1 [♦◊◊]

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\
\iff\ & \frac{a^3 - a^2b + b^3 - ab^2}{ab} \geq 0 \\
\iff\ & \frac{a^2(a-b) + b^2(b-a)}{ab} \geq 0 \\
\iff\ & \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{ab} \geq 0 \\
\iff\ & \frac{(a-b)^2(a+b)}{ab} \geq 0
\end{aligned}$$

Or $(a-b)^2 \geq 0$, $(a+b) \geq 0$ et $ab \geq 0$.
Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$.

## Exercice 2.2 [♦◊◊]

1. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\begin{aligned} &\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \iff &a + b \leq a + 2\sqrt{ab} + b \\ \iff &2\sqrt{ab} \geq 0 \\ \iff &\sqrt{ab} \geq 0 \\ \iff &ab \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
Considérons $a \geq b$, alors $|a-b| = a - b$.

$$\begin{aligned} &|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{a-b} \\ \iff &a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b \\ \iff &2b \leq 2\sqrt{ab} \\ \iff &b^2 \leq ab \\ \iff &b \leq a \end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque $b \geq a$.
Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

## Exercice 2.3 [♦◊◊] *Manipuler la notion de distance*

En utilisant la notion de distance sur $\mathbb{R}$, écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \ | \ |x+3| \leq 6 \text{ et } |x^2 - 1| > 3\}$$

On a :

$$x \in [-9, 3] \text{ et } x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

Donc :

$$x \in [-9, -2] \cup [2, 3]$$

## Exercice 2.4 [♦♦◊] *Plusieurs façons de définir une moyenne*

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a \leq b$. On définit les nombres $m, g, h$ par

$$m = \frac{a+b}{2}, \qquad g = \sqrt{ab}, \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Et on les appelle respectivement moyenne arithmétique, géométrique et harmonique de $a$ et $b$.
Démontrer l'encadrement

$$a \leq h \leq g \leq m \leq b$$

Montrons les inégalités une par une :

- $m \leq b \iff \frac{a+b}{2} - b \leq 0 \iff \frac{a-b}{2} \leq 0 \iff a - b \leq 0 \iff a \leq b.$
- $g \leq m \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$
- $h \leq g \iff \frac{1}{h} \geq \frac{1}{g} \iff \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 0 \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2ab} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2ab} \geq 0.$
- $a \leq h \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{h} \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \geq 0 \iff \frac{b-a}{2ab} \geq 0 \iff b - a \geq 0 \iff a \leq b$

Ainsi, toutes les inégalités sont vraies et $a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

## Exercice 2.5 [♦◊◊]

Résoudre l'équation

$$\ln|x| + \ln|x+1| = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
& \ln|x| + \ln|x+1| = 0 \\
\iff & \ln\left(|x(x+1|\right) = 0 \\
\iff & |x(x+1)| = 1 \\
\iff & x(x+1) = 1 \\
\iff & x^2 + x - 1 = 0 \\
\iff & x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

## Exercice 2.6 [♦◊◊]

Résoudre l'équation

$$|x-2| = 6-2x$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Considérons $x \geq 2$

$$\begin{aligned} & |x-2| = 6-2x \\ \iff & x-2 = 6-2x \\ \iff & x = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Considérons $x \leq 2$

$$\begin{aligned} & |x-2| = 6-2x \\ \iff & 2-x = 6-2x \\ \iff & x = 4 \end{aligned}$$

Seul la solution $x = \frac{8}{3}$ convient. Ainsi, l'unique solution à l'équation est $\frac{8}{3}$.

## Exercice 2.7 [♦♦♦]

Démontrer l'égalité $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x$.
Soient $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.
Notons $r$ la partie décimale de $x$, ainsi $x = \lfloor x \rfloor + r$.
On a alors $nx = n\lfloor x \rfloor + nr$ et $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nr \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nr \rfloor$.
Conséquemment, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n}$.
Or, $0 \leq \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < 1$ car $0 \leq r < 1$, donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$.
Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor < \lfloor x + 1 \rfloor$.
Par conséquent, $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.