Corrigé du DM 21

Problème : Similitude entre une matrice et son inverse.

Petites Mines

Partie A

1. C'est du cours.

2. (a) Pour tout $y \in \operatorname{Im} w$, il existe $x \in \operatorname{Ker} u^{i+j}$ tel que $y = u^j(x)$. Alors $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$ vu que $x \in \operatorname{Ker} u^{i+j}$, d'où $y \in \ker u^i$. Ceci établit l'inclusion $\boxed{\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i}$.

   (b) Le théorème du rang appliqué à w donne $\dim \operatorname{Ker} u^{i+j} = \dim \operatorname{Im} w + \dim \operatorname{Ker} w$.
   Or $\dim \operatorname{Im} w \leq \dim \operatorname{Ker} u^i$ d'après l'inclusion obtenue au (a),
   et $\dim \operatorname{Ker} w \leq \dim \operatorname{Ker} u^j$ (étant donné que w est la restriction de u^j à un s.e.v. de E).
   L'inégalité $\boxed{\dim \operatorname{Ker} u^{i+j} \leq \dim \operatorname{Ker} u^i + \dim \operatorname{Ker} u^j}$ en découle alors.

3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2$.

   (a) En appliquant le 2.(b). aux couples $(i,j) = (1,1)$ et $(2,1)$, on obtient :
   $$\dim \operatorname{Ker} u^2 \leq 2 \dim \operatorname{Ker} u \qquad \text{et} \qquad \dim \operatorname{Ker} u^3 \leq \dim \operatorname{Ker} u^2 + \dim \operatorname{Ker} u.$$
   Or $\dim \operatorname{Ker} u = 3 - \dim \operatorname{Im} u = 2$ (d'après le théorème du rang)
   et $\dim \operatorname{Ker} u^3 = 3$ (car $u^3 = 0$).
   Les deux inégalités conduisent à $\dim \operatorname{Ker} u^2 \leq 2$ et $\dim \operatorname{Ker} u^2 \geq 2$, et on conclut sur l'égalité.

   (b) L'existence de a est assurée par le fait que $u^2 \neq 0$.
   Pour tous réels α, β, γ, l'égalité $\alpha u^2(a) + \beta u(a) + \gamma a = 0$ implique, en composant par u^2, que $\gamma u^2(a) = 0$ (vu que $u^3(a) = u^4(a) = 0$). Il en résulte $\gamma = 0$ puisque $u^2(a) \neq 0$. En reportant dans l'égalité de départ et en composant par u, on obtient de même $\beta u^2(a) = 0$, d'où $\beta = 0$ et en reportant à nouveau, on montre enfin la nullité de α.
   La famille $\mathcal{B}' = (u^2(a), u(a), a)$ est donc libre de cardinal $3 = \dim E$:
   $$\boxed{\text{c'est une base de } E}.$$

   (c) Par définition de la matrice U et de la base $\mathcal{B}'$, on a immédiatement
   $$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   La matrice de $u^2 - u$ dans la base $\mathcal{B}'$ étant $U^2 - U$, on en déduit
   $$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) L'existence d'un vecteur b tel que $u(b) \neq 0$ est due au fait que $u \neq 0$ (puisque $\operatorname{rang} u = 1$).

   (b) Comme $u^2 = 0$, le vecteur $u(b)$ appartient à $\operatorname{Ker} u$, de dimension 2 d'après le théorème du rang.
   On peut alors compléter le vecteur non nul $u(b)$ en une base $(u(b), c)$ de $\operatorname{Ker} u$ par application du théorème de la base incomplète.
   Enfin, b n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} u$, la droite vectorielle D qu'il engendre est en somme directe avec le plan vectoriel $\operatorname{Ker} u$ et, par suite, $(b, u(b), c)$ est une base de $D \oplus \operatorname{Ker} u$: cette famille libre de cardinal 3 est ainsi une base de E.

   (c) Par définition de U' et V', on obtient $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $V' = -U'$.

Partie B

5. La matrice T est inversible, ce qui est équivalent à dire qu'elle est de rang 3. On pouvait ici obtenir le rang de T en considérant les trois colonnes, ou en s'appuyant sur le caractère échelonné de T. On pouvait sinon dire que T est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls. Reste ensuite à dire que A et T étant semblables, elles ont le même rang.

6. Un calcul matriciel sans difficulté amène à $N^3 = 0$.
   De plus, $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$ se simplifie en $I_3 - N^3 = I_3$. L'inverse à droite donc l'inverse de $I_3 + N$ est donc $I_3 - N + N^2$, d'où $(P^{-1}AP)^{-1} = I_3 - N + N^2$, ce qui s'écrit encore $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

7. Si $N = 0$, alors $P^{-1}AP = I_3$, ce qui conduit rapidement à $A = I_3$, d'où $A^{-1} = A$ et $A \sim A^{-1}$.

8. (a) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est N. Comme $u^3 = 0$ et que le rang de u vaut 2, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ s'écrive $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. d'après la question 3. Ceci entraîne que N et U sont semblables.

Puisque M est la matrice dans $\mathcal{B}$ de $u^2 - u$, et que la matrice de ce dernier endomorphisme dans $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, M est semblable à cette dernière matrice.

(b) Pour M^3, le plus simple est d'écrire $M^3 = (N(N - I_3))^3 = N^3(N - I_3)^3 = 0$, la deuxième égalité provenant du fait que N et $N - I_3$ commutent.
Comme M et V sont semblables, ces matrices ont même rang. Celui de V se calcule directement : le premier vecteur colonne est nul et les deux autres non colinéaires, donc $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} V = 2$.

(c) Puisque $M^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(M) = 2$, le raisonnement effectué pour N au (a) en s'appuyant sur la question 3 s'applique alors aussi à M, qui est ainsi également semblable à U. Par transitivité de $\sim$, on conclut que M et N sont semblables.

(d) Si $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ est telle que $Q^{-1}NQ = N^2 - N$, alors $Q^{-1}(I_3 + N)Q = I_3 + N^2 - N$, ce qui établit que $A \sim I_3 - N + N^2$, d'où $\boxed{A \sim A^{-1}}$ d'après 6.

9. Dire que le rang de N vaut 1 signifie que ses deux derniers vecteurs colonnes C_2 et C_3 sont proportionnels, c'est-à-dire que $\alpha = 0$ (si $C_2 = 0$) ou $\gamma = 0$ (si $C_2 \neq 0$).
Le calcul direct de N^2 donne alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $N^2 = 0$.
La question 4 s'applique donc à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est N et il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de u est $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc $N \sim U'$ et $N^2 - N \sim (-U')$. Comme $\operatorname{rg}(N^2 - N) = \operatorname{rg}(-U') = 1$ et que $(N^2 - N)^2 = 0$, la matrice $N^2 - N$ est également semblable à U' et, en raisonnant comme au 8 (d), on en déduit que $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables}}$.

10. (a) $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ayant un rang égal à 1 (matrice non nulle aux colonnes proportionnelles), le théorème du rang implique que $\dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = 3 - 1 = 2$. De plus, les vecteurs non colinéaires a et $b - c$ appartiennent clairement à $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ donc $(a, b - c)$ en constitue une base.

(b) Pour faire court, on peut dire que $(a, c, b - c)$ est échelonnée par rapport à la base (a, c, b) donc est aussi une base de E, et il en est de même de (e_1, e_2, c) par permutation.
On a directement $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_2$ par définition de $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. De plus, $u(c) = -b + 2c = -e_2 + c$ donc la matrice de u dans la base (e_1, e_2, c) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice A est alors semblable à une matrice du type T où, avec les notations précédentes, $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, -1)$.
La question 9 s'applique : $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables}}$.

11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $A = A^{-1}$ (donc $A \sim A^{-1}$), mais A n'est pas semblable à une matrice du type T, sinon on aurait $\operatorname{Tr}(A) = 3$.