Exercice 1. Étude de fonction.

Soit $f : x \mapsto \cos(3x)\cos^3(x)$.

1. Justifier que f est paire et π-périodique. Qu'en déduire sur la réduction de l'intervalle d'étude ?
2. Montrer que f est dérivable et que le signe de $f'(x)$ est celui de $-\sin(4x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 2. Recherche de points fixes.

Définition : Soit une fonction $f : X \to \mathbb{R}$.
On dit qu'un élément x de X est un **point fixe** de f si $f(x) = x$.

On définit la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right).$$

1. Déterminer X_f, l'ensemble sur lequel f est définie.
2. Prouver que la fonction f est impaire.
3. Dresser le tableau de variations complet de f (en détaillant le calcul des limites).
4. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe en 0 ?
   Que dire de la convexité/concavité de f sur $]-1,1[$?
5. Esquisser le graphe de f (on sera attentif en particulier à la position par rapport à la tangente en 0).
6. Conjecturer graphiquement le nombre de points fixes de f.
7. En appliquant soigneusement un théorème du cours à $g : x \mapsto f(x) - x$, prouver que f possède un unique point fixe sur $]1,+\infty[$.

Problème. (*facultatif... et difficile*) Un exercice du concours général 2023.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $v(n)$ le plus grand entier naturel k tel que $\dfrac{n}{2^k}$ soit un entier.

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par récurrence, en posant $u_1 = 1$ puis, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0 \\ 1 + 2v(n) - \dfrac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

1. Donner la valeur des entiers $v(1), v(2), v(3), v(4)$.
2. Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que $v(n) = 0$ si n est impair et que $v(n) = v(\frac{n}{2}) + 1$ si n est pair.
3. Calculer les huit premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et vérifier que $u_8 = 4$.
4. Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.
5. Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme u_n.
6. Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n.
7. À l'aide de la suite u, définir une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.
   Dire que f est une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}$ signifie que tout élément de $\mathbb{Q}$ possède par f un unique antécédent dans $\mathbb{N}$.

Prouver comme on vient de le faire qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}$, c'est montrer que l'on peut "compter" les rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est **dénombrable**.