

Exercice 1. Une fonction plus simple qu'il n'y paraît.

Dans cet exercice, on s'intéresse à la fonction

$$f : x \mapsto \arccos \left(\frac{1+x}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}} \right).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .
2. Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ?
Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x dans cet ensemble.
3. En déduire une expression plus simple de $f(x)$ pour tout x réel.

Exercice 2 Une équation fonctionnelle.

Dans cet exercice, on veut démontrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(f(n)) = n + 1.$$

On va raisonner par l'absurde. On suppose donc qu'il existe une telle fonction f .

1. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) - f(n) = 1$.
Indication : on pourra considérer $f \circ f \circ f$.
2. Démontrer alors que pour tout entier naturel n , on a $f(n) = n + f(0)$.
3. Conclure.