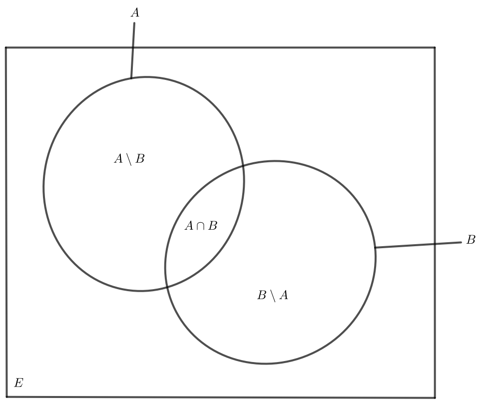
Corrigé du DM 5

Exercice 1

1. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} = \overline{B} \setminus \overline{A}$.

2.

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup \Big(B \cap \underbrace{(A \cup \overline{A})}_{=E} \Big) \quad \textit{(facto par } B \textit{ à drte)} \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup B \\
&= (A \cup B) \cap \underbrace{(B \cup \overline{B})}_{=E} \quad \textit{(distrib)} \\
&= A \cup B.
\end{aligned}$$



Exercice 2

Démontrons que les trois assertions ci-dessous sont deux à deux équivalentes en utilisant la transitivité :

1. $\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$ On suppose que $(A \setminus B) \subset C$.
   Soit $x \in A \setminus C$, c'est-à-dire $x \in A$ et $x \notin C$.
   Montrons par l'absurde que $x \in B$.
   Supposons $x \notin B$. Alors $x \in A \setminus B$. Or, $A \setminus B \subset C$ par hypothèse, donc $x \in C$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.
   Ainsi, $x \in B$ et l'inclusion $(A \setminus C) \subset B$ est prouvée.
2. $\boxed{(2) \Longrightarrow (3)}$ On suppose que $(A \setminus C) \subset B$.
   Soit $x \in A$. Montrons que $x \in B$ ou $x \in C$. Par disjonction de cas :
   — Si $x \in C$, la conclusion est vérifiée.
   — Si $x \notin C$ alors $x \in A \setminus C$. Or, $A \setminus C \subset B$ par hypothèse, donc $x \in B$, cqfd.
   On a bien prouvé que $A \subset (B \cup C)$.
3. $\boxed{(3) \Longrightarrow (1)}$ On suppose que $A \subset (B \cup C)$.
   Soit $x \in A \setminus B$, c'est-à-dire $x \in A$ et $x \notin B$. Montrons que $x \in C$.
   Comme on a $x \in A$ et $A \subset (B \cup C)$ on a $x \in B$ ou $x \in C$.
   Le 1$^{\text{er}}$cas est exclu par hypothèse sur x, il reste bien $x \in C$, et on a prouvé $A \setminus B \subset C$.

Question bonus. Considérons n assertions dont on veut montrer qu'elles sont équivalentes deux à deux.
Le point de vue naïf est de prendre toutes les paires d'assertions possibles pour les démontrer par double implication : pour chaque paire d'assertion $\{A_i, A_j\}$. avec $i \neq j$, on démontre une implication puis sa réciproque.
Comme il y a $\binom{n}{2}$ paires, cela donne $\boxed{2 \times \binom{n}{2} = n(n-1) \text{ implications à prouver}}$.
Grâce à la transitivité de l'implication, il suffit de montrer $A_1 \Longrightarrow A_2$, puis $A_2 \Longrightarrow A_3$, …, $A_{n-1} \Longrightarrow A_n$ et enfin $A_n \Longrightarrow A_1$ soit $\boxed{n \text{ implications à prouver}}$.

Exercice 3 Un exercice de plus sur les fonctions.

1. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$. Or, pour tout réel x, $\mathrm{th}(x) \in]-1,1[\subset [-1,1]$, ce qui justifie que la composée $\arcsin \circ \mathrm{th}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$, et la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. Par théorème, la composée $\arcsin \circ \mathrm{th}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Pour x un réel,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{th}'(x) \cdot \arcsin'(\mathrm{th}(x)) \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}}. \end{aligned}$$
   Or, $1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, d'où puisque $\mathrm{ch}(x)$ est un nombre positif, $\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} = \mathrm{ch}(x)$. On a donc bien
$$f'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}.$$

3. Posons $g : x \mapsto 2\arctan(e^x)$. La fonction g est dérivable comme composée de exp et de arctan, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = 2\frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{2}{e^{-x}+e^x} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}.$$
   La fonction $f - g$ est donc de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elle y est constante. On peut connaître cette constante en calculant
$$f(0) - g(0) = \arcsin(0) - 2\arctan(1) = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$
   On peut donc conclure que $f - g$ est constante égale à $\frac{-\pi}{2}$, ce qui démontre bien que
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.}$$