Propriétés de $\mathbb{R}$
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 2.1 [♦◊◊]

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b\\
\iff\quad &\frac{a^3-a^2b+b^3-ab^2}{ab}\geq 0\\
\iff\quad &\frac{a^2(a-b)+b^2(b-a)}{ab}\geq 0\\
\iff\quad &\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{ab}\geq 0\\
\iff\quad &\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\geq 0
\end{aligned}$$

Or $(a-b)^2\geq 0$, $(a+b)\geq 0$ et $ab\geq 0$.
Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.2 [⧫◊◊]

1. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \iff \ & a + b \leq a + 2\sqrt{ab} + b \\ \iff \ & 2\sqrt{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
Considérons $a \geq b$, alors $|a-b| = a - b$.

$$\begin{aligned} & |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{a-b} \\ \iff \ & a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b \\ \iff \ & 2b \leq 2\sqrt{ab} \\ \iff \ & b^2 \leq ab \qquad \text{Or } a \geq b \text{ donc } ab \geq b^2 \end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque $b \geq a$.
Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.