Corrigé du DM 6

Exercice 1

$$\begin{aligned}
\sin^5 t &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{1}{2^5 i^5}\big[(e^{it})^5 + 5(e^{it})^4(-e^{-it}) + 10(e^{it})^3(-e^{-it})^2 \\
&\qquad + 10(e^{it})^2(-e^{-it})^3 + 5(e^{it})(-e^{-it})^4 + (-e^{-it})^5\big] \\
&= \frac{1}{32i}\left[e^{5it}-e^{-5it} - 5\left(e^{3it}-e^{-3it}\right) + 10\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right] \\
&= \frac{1}{32i}\left(2i\sin(5t) - 10i\sin(3t) + 20i\sin(t)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On calcule

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} = e^{2i\theta}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\theta}\right)^k = e^{2i\theta}\cdot\frac{1-(e^{2i\theta})^n}{1-e^{2i\theta}},$$

ce calcul étant possible car le nombre $e^{2i\theta}$, raison de la progression géométrique, est différent de 1 (hypothèse $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$).
En factorisant par l'angle moitié,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} &= e^{2i\theta}\cdot\frac{e^{in\theta}\left(e^{-in\theta}-e^{in\theta}\right)}{e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}-e^{i\theta}\right)} \\
&= e^{i\theta(2+n-1)}\cdot\frac{-2i\sin(n\theta)}{-2i\sin(\theta)} \\
&= e^{i(n+1)\theta}\cdot\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.
\end{aligned}$$

2. On connaît la formule de duplication ci-dessous (pour x réel)

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x), \quad \text{ce qui donne} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

3. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sin^2(k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k),$$

ce qui donne

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k) \qquad (*)$$

Or, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{2ik}\right) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}e^{2ik}\right].$$

On a fait apparaître la somme complexe calculée en question 1 avec $\theta = 1$, qui est bien dans $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos(2k) &= \mathrm{Re}\left[e^{i(n+1)}\cdot\frac{\sin(n)}{\sin(1)}\right] \\
&= \frac{\sin(n)}{\sin(1)}\mathrm{Re}\left[e^{i(n+1)}\right] \\
&= \frac{\sin(n)}{\sin(1)}\cos((n+1)).
\end{aligned}$$

Cette somme est bornée : pour le montrer, majorons-la en valeur absolue :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(2k)\right| = \left|\frac{\sin(n)\cos(n+1)}{\sin(1)}\right| \leq \frac{1}{\sin(1)}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En revenant à l'expression $(*)$ donnée plus haut, on obtient que

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}}.$$

Exercice 3 Un exercice de plus sur les ensembles.

1. Preuve de l'équivalence $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

   • Supposons $A \subset B$. Montrons $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
   Soit $X \in \mathcal{P}(A)$. Alors $X \subset A$. Or, $A \subset B$. Par transitivité, $X \subset B$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{P}(B)$.

   • Supposons $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. Montrons $A \subset B$.
   Soit $x \in A$. Alors $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Or, $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ donc $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$.
   Le singleton contenant x est inclus dans B donc $x \in B$.

2. Preuve de $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ par double inclusion.

   • Puisque $A \cap B \subset A$, on a $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A)$ d'après 1.
   De même, $A \cap B \subset B$, on a $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(B)$.
   On a bien montré $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

   • Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
   On a $X \in \mathcal{P}(A)$ et $X \in \mathcal{P}(B)$.
   Puisque $X \subset A$, tous les éléments de X sont dans A.
   Puisque $X \subset B$, tous les éléments de X sont dans B
   Tous les éléments de X sont donc dans $A \cap B$ donc $X \subset A \cap B$, soit $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.
   On a bien montré $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$.

3. • Montrons que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

   Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   Premier cas : $X \in \mathcal{P}(A)$. Ceci s'écrit $X \subset A$. Or, $A \subset A \cup B$.
   Par transitivité, $X \subset A \cup B$.
   Second cas : $X \in \mathcal{P}(B)$. Ceci s'écrit $X \subset B$. Or, $B \subset A \cup B$.
   Par transitivité, $X \subset A \cup B$.
   Dans les deux cas, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

   • Prouvons que $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est fausse en général. Prenons

   $$A = \{1, 2\} \quad \text{et} \quad B = \{3\}.$$

   On a $A \cup B = \{1, 2, 3\}$. Ainsi, $X = \{1, 3\}$ est une partie de $A \cup B$ mais ce n'est ni une partie de A, ni une partie de B.
   On a donc

   $$X \in \mathcal{P}(A \cup B) \text{ mais } X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Quelques remarques :

1. Lorsqu'il s'agit de prendre un élément d'un ensemble... d'ensembles, on utilise une lettre capitale pour cet élément, puisque c'est lui-même un ensemble.
2. Avec un élément de A, comment faire un élément de $\mathcal{P}(A)$?
   Réponse : en le mettant dans une boîte ! Si l'élément x appartient à A, le singleton $\{x\}$ appartient à $\mathcal{P}(A)$.