Chapitre 39

Déterminants.

Sommaire.

1 La théorie dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. 1
1.1 Formes n-linéaires alternées. 1
1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. 2
1.3 Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie. 3
1.4 Déterminant d'une matrice carrée. 4

2 La pratique. 4
2.1 Échelonner. 4
2.2 Développer selon une colonne ou une ligne. 4
2.3 Complément théorique : la comatrice. 4

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 La théorie dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Formes n-linéaires alternées.

Définition 1

Une forme n-linéaire sur E est une fonction $f : E^n \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \forall (a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1} ..., a_n) \in E^{n-1},\ x \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, x, a_{j+1}, ..., a_n) \quad \text{est linéaire.}$$

Proposition 2

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire.

1. $\forall (x_1, ..., x_n) \in E^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, ..., x_n)$.
2. Soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ tel que l'un des x_i est nul, alors $f(x_1, ..., x_n) = 0$.

Preuve :

$\boxed{1.}$ λ est factorisé n fois par n-linéarité.

$\boxed{2.}$ $f(x_1, ..., 0_E, ..., x_n) = f(x_1, ..., 0_\mathbb{K} \cdot 0_E, ..., x_n) = 0_\mathbb{K} f(x_1, ..., x_n) = 0$.

Définition 3

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire. On dit que f est alternée si elle s'annule sur tous les n-uplets contenant deux vecteurs égaux.

Proposition 4

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée ($n \geq 2$) et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$.

1. On ne change pas la valeur prise par f sur $(x_1, ..., x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.
2. Si $(x_1, ..., x_n)$ est liée, alors $f(x_1, ..., x_n) = 0$.
3. **Effet d'une transposition.** Soit $\{i, j\}$ avec $i < j$. On a :
$$f(..., x_{i-1}, \boxed{x_j}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \boxed{x_i}, x_{j+1}, ...) = -f(..., x_{i-1}, \boxed{x_i}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \boxed{x_j}, x_{j+1}, ...)$$
L'échange de x_i et x_j provoque un changement de signe.
4. **Effet d'une permutation.** Pour tout $\sigma \in S_n$,
$$f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, ..., x_n)$$
Où $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ la signature de σ l'unique morphisme non trivial de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$

Preuve :

$\boxed{1.}$ Soit $j \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda_i)_{i \neq j} \in \mathbb{K}^{n-1}$.

On a $f(x_1, ..., x_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) + \underbrace{\sum_{i \neq j} \lambda_i f(x_1, ..., \overbrace{x_i}^{j}, ..., x_n)}_{=0 \text{ car alternée et deux fois } x_i}$

$\boxed{2.}$ Supposons $(x_1, ..., x_n)$ liée, alors $\exists j \in [\![1, n]\!],\ \exists (\lambda_i)_{i \neq j} \mid x_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i$.

Alors $f(x_1, ..., x_j, ..., x_n) \overset{(1)}{=} f(x_1, ..., x_j - \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i, ..., x_n) = f(x_1, ..., 0_E, ..., x_n) = 0_\mathbb{K}$.

$\boxed{3.}$ On a ;

$$\begin{aligned} f(...,x_j,...,x_i,...) &= f(...,x_j+x_i,...,x_i,...) = f(...,\boxed{x_j+x_i},...,x_i-\boxed{(x_j+x_i)},...) \\ &= f(...,x_j+x_i,...,-x_j,...) = (-1)f(...,x_j+x_i,...,x_j,...) \\ &= (-1)f(...,x_i,...,x_j,...) \end{aligned}$$

$\boxed{4.}$ $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \exists \tau_1,...,\tau_p$ transpositions $\mid \sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_p$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}) &= f(x_{\tau_1\circ...\circ\tau_p(1)},...,x_{\tau_1\circ...\circ\tau_p(n)}) \\ &= (-1)f(x_{\tau_2...\tau_p(1)},...,x_{\tau_2...\tau_p(n)}) \quad \text{et } (-1)=\varepsilon(\tau_1) \\ &= \varepsilon(\tau_1)...\varepsilon(\tau_p)f(x_1,...,x_n) \\ &= \varepsilon(\sigma)f(x_1,...,x_n) \end{aligned}$$

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

Théorème 5

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est une droite vectorielle.

Si $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ est une base de E, alors il existe une unique forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur $\mathscr{B}$. On l'appelle **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ et on note $\det_{\mathscr{B}}$. On a:

$$\forall (x_1,...,x_n) \in E^n \quad \det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j).$$

Preuve :

Analyse. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. Soit $(x_1,...,x_n) \in E^n$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} e^*_{i_1}(x_1)e_{i_1},...,\sum_{i_n=1}^{n} e^*_{i_n}(x_n)e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} ... \sum_{i_n=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} e^*_{i_j}(x_j) f(e_{i_1},...,e_{i_n}) \\ &= \sum_{(i_1,...,i_n)\in\mathscr{A}_n([\![1,n]\!])} \left(\prod_{j=1}^{n} e^*_{i_j}(x_j)\right) f(e_{i_1},...,e_{i_n}) \end{aligned}$$

Où $(i_1,...,i_n) \in [\![1 \mapsto (\sigma_i(k) \mapsto i_k)$ bijection de $\mathscr{A}_n([\![1,n]\!]) \to S_n$.

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j) f(e_{s(1)},...,e_{s(n)}) \\ &= f(e_1,...,e_n) \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j) \end{aligned}$$

Supposons que $f(e_1,...,e_n) = 1$, il reste un unique candidat.
Synthèse. Posons $\det_{\mathscr{B}} : (x_1,...,x_n) \mapsto \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{j=1} e^*_{\sigma(j)}(x_j)$. Vérifions qu'elle convient.

• Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et $(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},x_n) \in E^{n-1}$ et $x \in E$.

Alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod\limits_{j\neq k} e^*_{\sigma(j)}(x_j)\right) e^*_{\sigma(k)}(x)$ linéaire car combinaison linéaire de linéaires.

• Soit $1 \leq k < l \leq n$, et $(x_1,...,x_n) \mid x_k = x_l$.
Alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j)$. Posons $\tau = (k\ l)$ qui échange k et l.
Alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(\tau(j))}(x_j) = \sum_{\varphi\in S_n} \varepsilon(\varphi\tau) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\varphi(j)}(x_j)$ où $\varphi = \sigma\tau$.
Donc $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = -\sum_{\varphi\in S_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\varphi(j)}(x_j) = -\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$.
Donc $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = 0$.

• $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(e_1,...,e_n) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(e_j) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{j=1}^{n} \delta_{j,\sigma(j)} = \varepsilon(\mathrm{id}) = 1.$

Corrolaire 6

Si f est une forme n-linéaire alternée et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f = \lambda \det_{\mathscr{B}}$

Définition 7

Soit $\mathscr{B} = (e_1,..,e_n)$ base de E et $(x_1,...,x_n) \in E^n$.
Le nombre $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$ est appelé **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ de $(x_1,...,x_n)$.

Théorème 8: Caractérisation des bases.

Soit $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ une base de E et $(x_1,...,x_n) \in E^n$.

$$(x_1,...,x_n) \text{ est base de } E \quad \iff \quad \det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) \neq 0$$

Preuve :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que le déterminant est différent de 0, alors $(x_1, ..., x_n)$ libre, c'est une base car $\dim E = n$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\mathscr{B}' = (x_1, ..., x_n)$ est base de E. Alors $\det_{\mathscr{B}'}$ existe, c'est une forme n-linéaire alternée.
Par théorème, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid \det_{\mathscr{B}'} = \lambda \det_{\mathscr{B}}$. Alors $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}') = \lambda \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$ donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.

Exemple 9: Interprétation géométrique.

• Si $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, pour $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ un couple de vecteurs, le nombre $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ peut être vu comme l'aire orientée du parallélogramme engendré par $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

• Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, pour $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ un triplet de vecteurs, le nombre $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ peut être vu comme le volume orienté du parallélépipède engendré par $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

1.3 Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie.

Lemme 10

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le nombre $\det_{\mathscr{B}}(u(e_1), ..., u(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ considérée.

Preuve :

Soit $f \in \Lambda_n(E)$ une forme n-linéaire alternée.
Déformons la à l'aide de $u \in \mathscr{L}(E)$: $(x_1, ..., x_n) \mapsto f(u(x_1), ..., u(x_n))$ est n-linéaire alternée.
Notons-la $\varphi_u(f) \in \Lambda_n(E)$. On pose $\varphi_u : f \mapsto \varphi_u(f)$ de $\Lambda_n(E) \to \Lambda_n(E)$ linéaire, c'est une homothétie.
Alors $\exists \lambda_u \in \mathbb{K} \mid \varphi_u = \lambda_u \mathrm{id}_{\Lambda_n(E)}$.
On a prouvé que $\exists \lambda_u \in \mathbb{K} \quad \forall f \in \Lambda_n(E) \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in E \quad f(u(x_1), ..., u(x_n)) = \lambda_u f(x_1, ..., x_n)$.
En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \lambda_u \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$ est vrai pour tous x_i.
En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(u_(\mathscr{B})) = \lambda_u \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \lambda_u$, ne dépend pas de $\mathscr{B}$.

Définition 11

Soi $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u et on note $\det(u)$ le nombre

$$\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}),$$

où $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base quelconque de E.

Proposition 12

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$. On a

$$\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$$

Preuve :

L'application $(x_1, ..., x_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ...u(x_n))$ est n-linéaire alternée : elle est dans $\mathrm{Vect}(\det_{\mathscr{B}})$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K} \mid \forall (x_1, ..., x_n) \in E^n, \ \det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$.
En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})$ donc $\det(u) = \lambda$.
On a bien $\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$.

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
2. $\forall u \in \mathscr{L}(E), \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
3. $\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E)^2, \ \det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$
4. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$. Alors:

$$\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$$

Remarque: Rien à dire sur $\det(u + v)$.

Preuve :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
$\boxed{1.}$ $\det(\mathrm{id}_E) = \det_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}(e_1), ..., \mathrm{id}(e_n)) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.
$\boxed{2.}$ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda u) = \det_{\mathscr{B}}(\lambda u(e_1), ..., \lambda u(e_n)) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), ..., u(e_n)) = \lambda^n \det(u)$.
$\boxed{3.}$ Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$.
Alors: $\det(u \circ v) = \det_{\mathscr{B}}(u(v(e_1)), ..., u(v(e_n))) = \det(u) \det(v(e_1), ..., v(e_n)) = \det(u) \det(v) \cancelto{1}{\det_{\mathscr{B}}(B)}$.
$\boxed{4.}$ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est bijectif ssi l'image de $\mathscr{B}$ par u est une base ssi son déterminant dans B est non nul (8).
Alors pour un automorphisme u, on a $u \circ u^{-1} = \mathrm{id}_E$ et $\det(u \circ u^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E) = 1$ donc $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$.

Corrolaire 14

Si E est de dimension finie, det induit un morphisme de groupes entre $GL(E)$ et $\mathbb{K}^*$.

Exemple 15: Déterminant d'une symétrie vectorielle.

Que dire de $\det(s)$ si s est une symétrie vectorielle de E ?

Solution :

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie vectorielle.
Alors $s^2 = \mathrm{id}_E$ donc $\det(s^2) = \det(\mathrm{id}_E) = 1$.
Alors $\det(s)^2 = 1$ donc $\det(s) = \pm 1$.

On sait que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
Prenons une base adaptée à ces deux supplémentaires.
Notons $p = \dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et prenons $(e_1, ..., e_p)$ une de ses bases, et $(e_{p+1}, ..., e_n)$ base de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Notons $B = (e_1, ..., e_p, ...e_n)$. Alors :

$$\begin{aligned}\det(s) &= \det_{\mathscr{B}}(s(e_1), ..., s(e_p), ..., s(e_n)) = \det_{\mathscr{B}}(e_1, ..., e_p, -e_{p+1}, ..., -e_n)\\ &= (-1)^{n-p} \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = (-1)^{n-p}.\end{aligned}$$

1.4 Déterminant d'une matrice carrée.

2 La pratique.

2.1 Échelonner.

2.2 Développer selon une colonne ou une ligne.

2.3 Complément théorique : la comatrice.