Ensembles et applications

1/3 : Vocabulaire de base

1 Ensembles et opérations.

1.1 Notations.

Définition 1 (Naïve)**.**

- Un **ensemble** non vide E est une collection d'objets x appelés **éléments**.
- On dit d'un élément x de E qu'il **appartient** à E, ce qui se note $x \in E$.
  Si l'objet x n'est pas un élément de l'ensemble E, on peut noter $x \notin E$.
- On pose qu'il existe un ensemble n'ayant pas d'éléments et que cet ensemble est unique.
  On l'appelle **ensemble vide** et on note $\emptyset$. Pour tout objet x, l'assertion "$x \in \emptyset$" est fausse.
- Signe « $=$ ». Si x et y deux éléments d'un ensemble E, on notera $x = y$ si on veut exprimer que x et y sont un seul et même élément de E.

Remarque. *Ne la lisez surtout pas !*

La définition précédente est naïve car la description d'une collection peut conduire à des paradoxes, des non-sens. Dans un exercice de la feuille de TD, consacré au paradoxe de Russell, on comprend que parler d'*ensemble de tous les ensembles* n'a pas de sens.

Donnons une version pédagogique de ce paradoxe (mais est-ce bien pédagogique de commencer par là ?...) Dans un village, on demande à un barbier de raser tous les villageois qui ne se rasent pas eux-même. Pourquoi est-il impossible à ce barbier d'accomplir sa mission ?

Exemple 2 (Ensembles de nombres).

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$; $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
2. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels strictement positifs. On a $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des entiers compris entre 1 et n s'écrit
$$\{1, 2, \cdots, n\},$$
ou bien $\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$. Cet intervalle d'entiers pourra aussi être noté $[\![1, n]\!]$.

Comment décrire un ensemble non vide ?

On utilise des accolades, ainsi qu'une description de ses éléments, qui peut prendre deux formes.

- En **extension** : les éléments sont présentés sous forme de liste, par exemple $\{1, 2, 3\}$. Signalons que l'ordre dans notre liste n'a pas d'importance : $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$. L'ensemble
$$\{2k, k \in \mathbb{N}\}$$
est l'ensemble des entiers naturels pairs, qu'il faut lire $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ en comprenant le sens des points de suspension.
- En **compréhension** : on sélectionne dans un autre ensemble, des éléments possédant une certaine propriété. Par exemple, l'ensemble des entiers pairs se note, en compréhension
$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N} : n = 2p\}.$$
Dans la notation en compréhension
$$\{x \in E \mid \mathscr{P}(x) \text{ est vraie}\}$$
on écrit, dans l'ordre et entre accolades
x : l'élément typique, E : l'ensemble de sélection, $|$: tel que $\mathscr{P}(x)$: condition de sélection.

Exemple 3.

Écrire de deux façons l'ensemble des couples de réels opposés.

Que dire de l'ensemble vide ? Si on imagine les ensembles comme des boîtes, il n'est pas difficile d'imaginer l'ensemble vide : c'est une boîte qui ne contient rien. On conviendra que l'assertion
$$\forall x \in \emptyset \quad \mathcal{P}(x)$$
est vraie, quelle que soit l'assertion $\mathcal{P}(x)$ énoncée à l'aide de x. Puisqu'il n'y a pas d'éléments dans l'ensemble vide, on peut dire que tous les éléments de l'ensemble vide sont verts. Ils sont aussi bleus à poils durs.

Méthode (Démontrer qu'un ensemble est vide).

Le raisonnement par l'absurde peut être utile : on suppose que l'ensemble n'est pas vide, on prend un élément de l'ensemble, et on cherche une contradiction.

1.2 Inclusion.

Définition 4.

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B, ce que l'on note $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B :

$$\forall x \in A \quad x \in B.$$

On peut faire un lien entre inclusion et implication en écrivant que A est inclus dans B signifie :

$$\forall x \quad x \in A \implies x \in B.$$

ceci en écrivant un $\forall x$ sans préciser où x est pris, ce qui n'est pas très bien mais...

Méthode.

Pour prouver une inclusion $A \subset B$,

1. On considère un élément de A ("Soit $x \in A$")
2. puis on prouve qu'il est dans B (on devra conclure avec "donc $x \in B$").

Exemple 5.

Justifier que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ puis que $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

Proposition 6 (Transitivité)**.**

Soient A, B, C trois ensembles.

$$(A \subset B \ \text{ et } \ B \subset C) \implies A \subset C.$$

Théorème 7 (Double-inclusion)**.**

Soient A et B deux ensembles. On a

$$A = B \quad \iff \quad A \subset B \ \text{ et } \ B \subset A.$$

Exemple 8 (Prouver une égalité par double-inclusion)**.**

Soient les ensembles

$$A = \mathbb{R}_- \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad y \geq x\}$$

Montrer que $A = B$.

1.3 Parties d'un ensemble et opérations.

Définition 9.

On appelle **partie** d'un ensemble E tout ensemble A tel que $A \subset E$.
Alternativement, on pourra dire que A est un *sous-ensemble* de E.

Remarque. Pour tout ensemble E, les ensembles E et $\emptyset$ sont des parties de E.

Définition 10.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On définit l'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$ et leur **réunion** $A \cup B$ par

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \qquad \text{et} \qquad A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

On appelle **différence** de A et de B, (« A privé de B ») la partie

$$A \setminus B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

On appelle **complémentaire** de A la partie $E \setminus A$. Cet ensemble pourra aussi être noté $\overline{A}$ ou A^c.

Dans le reste du paragraphe, on allège les énoncés en fixant une fois pour toutes un ensemble E et trois parties A, B, C de cet ensemble.

Proposition 11 (Évidences).

$$\begin{array}{c} A \cup A = A \cap A = A \\ A \cup E = E \cup A = E \\ A \cap E = E \cap A = A \\ A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \\ A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \\ A \setminus A = \emptyset \\ A \setminus \emptyset = A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overline{\overline{A}} = A \\ A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cap B \subset A \subset A \cup B \end{array}$$

Proposition 12 (Distributivité).

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Proposition 13 (Lien entre différence et complémentaire).

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Proposition 14 (*Décroissance* du passage au complémentaire)**.**

$$A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Comprendre le mot *décroissance* nécessite ici d'apercevoir l'analogie entre $\leq$ et $\subset$. Nous formaliserons cette idée plus loin dans le paragraphe consacré aux *relations d'ordre*.

Proposition 15 (Formules de Morgan)**.**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exemple 16.

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Définition 17 (Généralisation : Intersection et union d'une famille de parties.)**.**

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, indexée par un ensemble I.

- On appelle intersection des A_i, pour i parcourant I l'ensemble ci-dessous :

  $$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E : \ \forall i \in I \ x \in A_i\}.$$

  C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à *tous* les A_i.
- On appelle réunion des A_i, pour i parcourant I l'ensemble ci-dessous :

  $$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : \ \exists i \in I \ x \in A_i\}.$$

  C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à (au moins) l'un des A_i.

Exemple 18.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Que valent $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$?

Les propriétés vues pour l'intersection/réunion de deux ensembles se généralisent : pour un ensemble E, une partie A de E et une famille $(B_i)_{i \in I}$ de parties de E, on a

$$\boxed{A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)} \quad \text{et} \quad \boxed{A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)}.$$

Définition 19.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Lorsque $A \cap B = \emptyset$, c'est à dire qu'il n'existe pas d'élément commun à A et B, on dit que A et B sont **disjointes**.

Exemple 20.

Pour chacune des situations ci-dessous, donner l'exemple de deux ensembles A et B tels que

1. A et B sont distincts mais non disjoints.
2. A et B sont disjoints mais non distincts.
3. A et B sont disjoints et distincts.
4. A et B sont non disjoints et non distincts.

Définition 21.

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, indexée par un ensemble I. On dit que cette famille est constituée de parties **deux à deux disjointes** si

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Exemple 22 (Il ne suffit pas à l'intersection d'être vide !)**.**

Donner l'exemple d'un ensemble E et de trois parties A, B, C de E telles que $A \cap B \cap C = \emptyset$ et telles que A, B et C sont **non disjointes deux à deux**.

1.4 Cardinal d'un ensemble fini.

On effleure seulement le sujet ici : un chapitre *Dénombrement* y sera consacré.

Définition 23 (point de vue naïf)**.**

Soit E un ensemble non vide. Il est dit fini s'il a un nombre fini d'éléments.
Ce nombre est appelé **cardinal** de E et noté $|E|$, ou $\#E$, ou $\mathrm{Card}(E)$. On pose que l'ensemble vide est fini et que son cardinal est 0.
Un ensemble constitué d'un unique élément est appelé **singleton**.
Un ensemble constitué d'exactement deux éléments est appelé une **paire**.

Par exemple, $\mathrm{Card}\left(\{\bigstar, \blacktriangledown, \square\}\right) = 3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}([\![1, n]\!]) = n$ et $\mathrm{Card}([\![0, n]\!]) = n + 1$.

Si a et b sont deux entiers relatifs avec $a \leq b$, $\mathrm{Card}([\![a, b]\!]) = \quad$.

Proposition 24 (La partie et le tout).

Soit E un ensemble <u>fini</u> et A une partie de E.

- Tout partie A de E est un ensemble fini et $|A| \leq |E|$.
- Si A et B sont des parties de E, alors

$$A = B \iff \begin{cases} A \subset B \\ |A| = |B| \end{cases}$$

Ce résultat est admis, faute de définition suffisamment solide pour les ensembles finis et leurs cardinaux. Le slogan derrière l'implication $\Longleftarrow$: *si la partie est aussi grande que le tout, alors elle est égale au tout.*

1.5 Produit cartésien.

Définition 25.

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \; x \in E, y \in F\}.$$

Les éléments de $E \times F$ sont appelés **couples**.

Notation.

On note $E^2 = E \times E$. Par exemple, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 26.

Soient $E = \{1, 2, 3\}$, et $F = \{\diamondsuit, \heartsuit\}$. Expliciter $E \times F$.

Définition 27.

Soient $E_1, E_2, \ldots E_n$, n ensembles. On appelle produit cartésien de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et on note $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\mid\; x_1 \in E_1,\; x_2 \in E_2, \cdots,\; x_n \in E_n\}.$$

Les éléments de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ sont appelés **n-uplets**.

Proposition 28 (Égalité de deux n-uplets).

Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux n-uplets d'un produit cartésien $E_1 \times \cdots E_n$.

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1 \ldots, y_n) \quad \iff \quad [\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = y_i].$$

1.6 Ensemble des parties d'un ensemble.

Définition 29.

L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque. Si E est un ensemble, l'assertion « A est une partie de E » peut s'écrire au choix

$$\text{« } A \in \mathcal{P}(E) \text{ »} \qquad \text{ou} \qquad \text{« } A \subset E \text{ »}.$$

Exemples.

- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) =$

- $\mathcal{P}(\{1\}) =$

- $\mathcal{P}(\emptyset) =$

- $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\{1\})\right) =$

Proposition 30 (admis pour le moment)**.**

Si E est un ensemble fini à n éléments, $\mathcal{P}(E)$ est fini et a 2^n éléments.
Ainsi, il y a 2^n parties dans un ensemble à n éléments.
Si $p \in [\![0, n]\!]$, le nombre de ces parties ayant exactement p éléments est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1.7 Recouvrement disjoint, partition.

Définition 31.

Un **recouvrement disjoint** d'un ensemble E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que

- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ (l'ensemble E est réunion des parties).
- $\forall i, j \in I \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (les parties sont deux à deux disjointes).

Si de surcroît tous les A_i sont non vides, on dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de E.

Exemple 32.

Proposer une partition de $]0, +\infty[$ en trois parties.
Proposer une partition de $]0, +\infty[$ en une infinité de parties.

2 Applications entre deux ensembles.

Dans ce qui suit, les lettres E, F et G désigneront trois ensembles.

2.1 Définitions.

Définition 33.

Une **application** f de E dans F est un procédé qui à tout élément x de E associe un unique élément dans F, que l'on note $f(x)$. Cet objet est aussi appelé **fonction**, et décrit à l'aide de la notation

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

L'ensemble E est alors appelé **ensemble de départ** F **ensemble d'arrivée**.

Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que

$$y = f(x);$$

On dit que y est l'**image** de x par f et que x est <u>un</u> **antécédent** de y par f.

Figure : deux patates et des flèches (important !)

Une application sert à faire un lien entre deux ensembles (éventuellement égaux). On a beaucoup manipulé au lycée les fonctions de la variable réelle, telles que la fonction logarithme népérien :

$$\ln : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right. .$$

Mais les applications ne seront pas définies seulement entre des ensembles de nombres : elles vont nous permettre de donner une existence mathématique à certaines opérations. Prenons l'exemple du passage au complémentaire dans un ensemble E donné : il peut être vu comme une application :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array} \right. .$$

Définition 34 (Des applications simples à définir)**.**

On appelle application **identité** sur E et on note id_E l'application

$$\mathrm{id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. .$$

Soit $a \in F$; on appelle **application constante** égale à a la fonction

$$: \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & a \end{array} \right. .$$

Notation.

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou bien $\mathcal{F}(E, F)$.

Proposition 35 (Égalité de deux fonctions)**.**

Deux applications sont égales si et seulement si elles sont *égales en tout point* :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{F}(E,F))^2 \qquad f = g \quad \iff \quad \forall x \in E \quad f(x) = g(x).$$

2.2 Restriction, prolongement.

Définition 36.

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et A une partie de E.
On appelle **restriction** de f à A, et on note $f_{|A}$ l'application

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{lcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Définition 37.

Soit A une partie de E et $g \in \mathcal{F}(A,F)$.
On appelle **prolongement** de g sur E toute application f telle que $f_{|A} = g$.

Exemple 38.

Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto 1$. Définir sur $\mathbb{R}$ deux prolongements différents de g.

2.3 Composition.

Définition 39.

Soient E, F, G trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
La **composée** de f par g, notée $g \circ f$ est l'application

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) := g(f(x)) \end{array} \right. .$$

Exemple 40.

Soient

$$f : x \mapsto \ln(x-3), \qquad g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}, \qquad h : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}.$$

Écrire chacune comme la composée de deux fonctions "simples" (en précisant bien sûr chaque fois les ensembles de départ et d'arrivée).

Exemple 41.

1. La composée de deux fonctions monotones, de même monotonie, est une fonction croissante.
2. La composée de deux fonctions monotones, de monotonie contraire, est décroissante.

Proposition 42 (L'identité est neutre pour la composition)**.**

Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, alors
$$\mathrm{id}_F \circ f = f \quad \text{et} \quad f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

Proposition 43 (Associativité de la composition)**.**

Si $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to I$, alors,
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,.$$

2.4 Famille d'éléments d'un ensemble.

Définition 44.

Soient E et I deux ensembles (le second étant celui des indices).

Une **famille d'éléments de E indexée par** I est une fonction $a\colon I \to E$.

Pour $i \in I$, on note $a_i = a(i)$. La famille a est alors notée $a = (a_i)_{i \in I}$.

L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I sera notée E^I.

L'idée : a_i est un élément de E « étiqueté » à l'aide d'une étiquette i prise dans l'ensemble des indices I.

Définition 45.

On appelle **suite** d'éléments de E une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$.

L'ensemble des suites à termes dans E est donc $E^{\mathbb{N}}$. Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ est donc notée $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 46 (admis)**.**

Soit $f : E \to E$ et $a \in E$. Alors il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Exercices

$\boxed{5.1}$ **[♦◇◇]** Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Établir que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad \text{et} \quad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

$\boxed{5.2}$ **[♦◇◇]** Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble E, telles que

$$E = A \cup B \cup C, \qquad A \cap D \subset B, \qquad B \cap D \subset C, \qquad C \cap D \subset A.$$

Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.

$\boxed{5.3}$ Démontrer que

$$\mathbb{R} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \ \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\right\}.$$

$\boxed{5.4}$ **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n parties de E telles que

$$A_n = E \qquad \text{et} \qquad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n.$$

On pose $B_1 = A_1$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, on pose $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.
Prouver que $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un recouvrement disjoint de E. Illustrer.

$\boxed{5.5}$ **[♦♦◇]** Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Démontrer que

$$B \subset A \iff (\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)).$$

$\boxed{5.6}$ **[♦♦♦]** Expliciter les ensembles $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}]$ et $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}]$.

$\boxed{5.7}$ **[♦♦♦]** (Différence symétrique) Soient E un ensemble. Pour A, B deux parties de E on définit

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Soient A, B deux parties de E.

1. Montrer que la réunion définissant $A \Delta B$ est disjointe.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Montrer que $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$.
4. Simplifier $A \Delta E$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$.
5. (*) Résoudre l'équation $A \Delta X = \emptyset$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

$\boxed{5.8}$ **[♦♦♦]** Paradoxe de Russell.
Supposons qu'il existe un *ensemble de tous les ensembles* et notons-le $\mathcal{E}$.
Considérons alors l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes :

$$y = \{x \in \mathcal{E} | x \notin x\}.$$

Démontrer que $y \in y \iff y \notin y$.
