

# Fonctions usuelles

## Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

---

### Exercices.

Exponentielle and friends. . . . .	1
Exercice 3.1 . . . . .	2
Exercice 3.2 . . . . .	2
Exercice 3.3 . . . . .	3
Exercice 3.4 . . . . .	5
Exercice 3.5 . . . . .	6
Exercice 3.6 . . . . .	7
Exercice 3.7 . . . . .	8
Trigonométrie. Fonctions circulaires. . . . .	8
Exercice 3.8 . . . . .	9
Exercice 3.9 . . . . .	10
Exercice 3.10 . . . . .	11
Exercice 3.11 . . . . .	12
Exercice 3.12 . . . . .	12
Fonctions circulaires réciproques. . . . .	12
Exercice 3.13 . . . . .	13
Exercice 3.14 . . . . .	13

---

**Exercice 3.1** [◆◆◆]

Résoudre  $2 \ln \left( \frac{x+3}{2} \right) = \ln(x) + \ln(3)$ , sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

On a :

$$\begin{aligned} 2 \ln \left( \frac{x+3}{2} \right) &= \ln(x) + \ln(3) \\ \iff \ln \left( \left( \frac{x+3}{2} \right)^2 \right) &= \ln(3x) \\ \iff \frac{(x+3)^2}{4} &= 3x \\ \iff x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ \iff x &= 3 \end{aligned}$$

Ainsi, 3 est l'unique solution.

**Exercice 3.2** [◆◆◆]

Résoudre l'équation  $\text{ch}(x) = 2$ . Que dire des solutions ?

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= 2 \\ \iff e^x + e^{-x} &= 4 \\ \iff e^{2x} - 4e^x + 1 &= 0 \\ \iff e^x &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \iff x &= \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\ln(2 - \sqrt{3})$  et  $\ln(2 + \sqrt{3})$  sont les uniques solutions dans  $\mathbb{R}$ .

On remarque que :

$$\ln(2 + \sqrt{3}) = -\ln \left( \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) = -\ln(2 - \sqrt{3})$$

Les solutions sont opposées.

**Exercice 3.3 [◆◆◆]**

Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

On a :

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}} &= \sqrt{x}^x \\ \Longleftrightarrow e^{\sqrt{x} \ln x} &= e^{x \ln(\sqrt{x})} \\ \Longleftrightarrow \sqrt{x} \ln(x) &= \frac{x}{2} \ln(x) \\ \Longleftrightarrow \ln(x) \left( \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} &= \frac{x}{2} \\ \Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ \Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4\end{aligned}$$

Les uniques solutions sont donc 1 et 4.

**Exercice 3.4 [◆◆◆] Trigonométrie hyperbolique.**

1. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a

(a)  $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$ .

(b)  $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$ .

(c) Trouver une identité pour  $\operatorname{th}(a+b)$ .

2. Pour  $x$  réel, on pose  $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$ . Montrer que

$$(a) \operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (b) \operatorname{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad (c) \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

1.

(a)

$$\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b)$$

□

(b)

$$\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} = \operatorname{sh}(a+b)$$

□

(c)

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)}$$

On divise en haut et en bas par  $\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)$ .

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} + \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}}{1 + \frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}} = \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1+t^2}{1-t^2} &= \frac{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

□

(b)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1-t^2} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

□

(c)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)\end{aligned}$$

□

### Exercice 3.5 [◆◆◆]

Sans calculatrice, comparer  $\pi^e$  et  $e^\pi$ .

Soit  $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \end{cases}$$

Un magnifique tableau de variations :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		—	— 0 +	
$f$	$+\infty$	$-\infty$	$e$	$+\infty$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\ln(\pi)} &> e \\ \iff \pi &> e \ln(\pi) \\ \iff e^\pi &> e^{e \ln \pi} \\ \iff e^\pi &> \pi^e \end{aligned}$$

Donc  $e^\pi > \pi^e$ .

### Exercice 3.6 [◆◆◆]

1. Étudier les variations de  $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$ .
2. Des deux nombres  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  et  $\sqrt[3]{24}$ , lequel est le plus grand ?

1.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{(x+1)^{2/3}} \right) \end{cases}$$

On a :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	-1	0

- 2.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{24} \\ &= \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{3} \\ &= (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) - (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

Or  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , ainsi :  $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$ .

On en conclut que  $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ .

## Exercice 3.7 [◆◆◇]

1. Soit  $\alpha$  un réel et  $x > -1$ . Comparer  $(1+x)^\alpha$  et  $1+\alpha x$  (on discutera selon les valeurs de  $\alpha$ ).
2. Soit  $\alpha \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$$

1. Posons  $f : x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$ .  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $] -1, +\infty[$  de dérivée :

$$g : \begin{cases} ] -1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1) \end{cases}$$

Alors :

⊙ Si  $\alpha \in ]0, 1[$ :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f$	$\alpha - 1$	0	$-\infty$

⊙ Si  $\alpha \in ]1, +\infty[$ :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f$	$\alpha - 1$	0	$+\infty$

⊙ Si  $\alpha \in ]-\infty, 0[$ :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f$	$+\infty$	0	$+\infty$

Ainsi,  $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$  lorsque  $\alpha \notin [0, 1]$ .

2. D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = (n+1)^\alpha$$

□



**Exercice 3.8 [◆◆◆]**

Résoudre les équations suivantes sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{a) } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } \sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x \quad \text{c) } \cos x + \sin x = 1$$

a)

$$\begin{aligned} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \begin{cases} 2x \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ 2x \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{8} [\pi] \\ x \equiv \frac{3\pi}{8} [\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x &\iff 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \\ &\iff -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \\ &\iff \cos x = -2 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

c)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos x - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(x) + \sin(x))$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x = 1 &\iff \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 \\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{2\pi}{4} [2\pi] \\ x \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

**Exercice 3.9 [◆◆◆]**

Soit  $x$  un réel. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

Notons  $\mathcal{P}_n$  cette proposition. Montrons que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Initialisation.*

On a :  $|\sin(0x)| \leq 0|\sin x| \iff 0 \leq 0$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

*Hérédité.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_n$  soit vraie. Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

On a :

$$\begin{aligned} |\sin(nx + x)| &= |\sin(nx) \cos(x) + \sin(x) \cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx) \cos(x)| + |\sin(x) \cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)| |\cos(x)| + |\sin(x)| |\cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \\ &\leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| \quad (\text{HR}) \\ &\leq (n+1)|\sin(x)| \end{aligned}$$

C'est exactement  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

*Conclusion.*

Par le principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

□

### Exercice 3.10 [◆◆◆]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} \quad (n \text{ fois le symbole } \sqrt{\cdot})$$

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ .

2. En déduire  $\lim u_n$

1. Notons  $\mathcal{P}_n$  cette proposition. Montrons que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Initialisation.*

On a :  $2 \cos(\frac{\pi}{4}) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}_1$  est vérifiée.

*Hérédité.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{P}_n$  soit vraie. Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ \iff \sqrt{2 + u_n} &= \sqrt{2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\ \iff u_{n+1} &= \sqrt{2(1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}))} \end{aligned}$$

Or  $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$

Ainsi,  $1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}$

Alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{4 \cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} = 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

$\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie.

*Conclusion.*

Par le principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

□

2.

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2 \cos(0) = 2$$

**Exercice 3.11 [◆◆◆]**

Calculer  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= \frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{7} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{8} \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} \\ &= -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} \frac{1}{8} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

**Exercice 3.12 [◆◆◆]**

Calculer  $\tan \frac{\pi}{8}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{4} &= \tan \frac{2\pi}{8} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2 \tan \frac{\pi}{8} &= 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} \\ \iff \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 &= 0 \\ \iff \tan \frac{\pi}{8} &= -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ .

**Exercice 3.13** [◆◆◆]

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

⊙ Montrons que  $\arctan(x) \leq x$ .

Posons  $f : x \mapsto \arctan x - x$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{x^2}{x^2+1} \end{cases}$$

On a :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f$	0	$-\infty$

Donc  $\arctan(x) \leq x$ .

⊙ Montrons que  $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$ .

Posons  $f : x \mapsto x - \frac{x^3}{3} - \arctan(x)$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{x^4}{x^2+1} \end{cases}$$

On a :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f$	0	$-\infty$

Donc  $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$ .

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$ . □

**Exercice 3.14** [◆◆◆]

Montrer que

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

On a :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$$

En appliquant  $\arctan$ , on obtient bien que  $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ . □