1 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie.

1.1 Paramétrisation du cercle trigonométrique par $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Définition 1.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| = 1.\}.$$

Si on identifie $\mathbb{C}$ avec le plan muni d'un repère orthonormé, alors $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

Définition 2.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ (« exponentielle de $i\theta$ ») le nombre complexe de module 1 suivant :

$$\boxed{e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.}$$

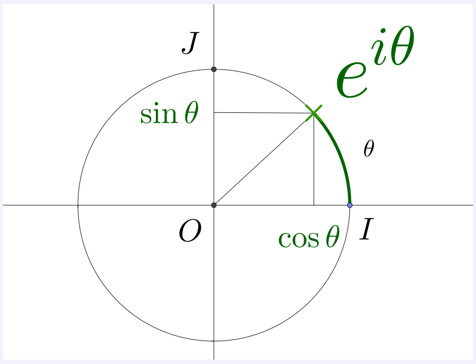
Par définition même de $e^{i\theta}$, on a $\cos\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)$ et $\sin\theta = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)$.

Proposition 3 (Paramétrisation de $\mathbb{U}$).

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \ z = e^{i\theta}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$



Exemple 4 (Valeurs notables)**.**

$$-1 = e^{i\pi}, \qquad 1 = e^{i0} = e^{2i\pi}, \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Le rapport entre les nombres $e^{i\theta}$ qui ont été définis ci-dessus et la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ est à ce stade de l'année encore flou. On se contente pour l'instant de remarquer que ces deux exponentielles partagent la propriété de morphisme.

Proposition 5 (Propriété de morphisme pour $e^{i\cdot}$)**.**

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R} \qquad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}.$$

Par conséquent, pour tout θ, θ' réels

$$\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}, \quad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}.$$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' \ [2\pi].$$

On retiendra notamment, que $\forall w \in \mathbb{U}$, $\overline{\omega} = \omega^{-1}$.

1.2 Applications à la trigonométrie

Proposition 6 (Formule d'Euler)**.**

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin t = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Méthode (Linéarisation des puissances de cos et sin)**.**

Soient p et q deux entiers naturels. Pour *linéariser* $(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q$, on peut toujours :

- transformer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par les formules d'Euler ;
- développer grâce à la formule du binôme de Newton ;
- regrouper les exponentielles conjuguées $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$;
- reconnaître des termes $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ $(k \in \mathbb{N})$ par les formules d'Euler.

On peut ainsi transformer $(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q$ en une combinaison linéaire de termes $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, où $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 7.

Linéariser $(\cos\theta)^4$, $(\sin\theta)^3$ et $(\cos\theta)^3\sin\theta$. Calculer $\int_0^{\pi}(\cos x)^4 \mathrm{d}x$.

Méthode (Technique de l'angle moitié).

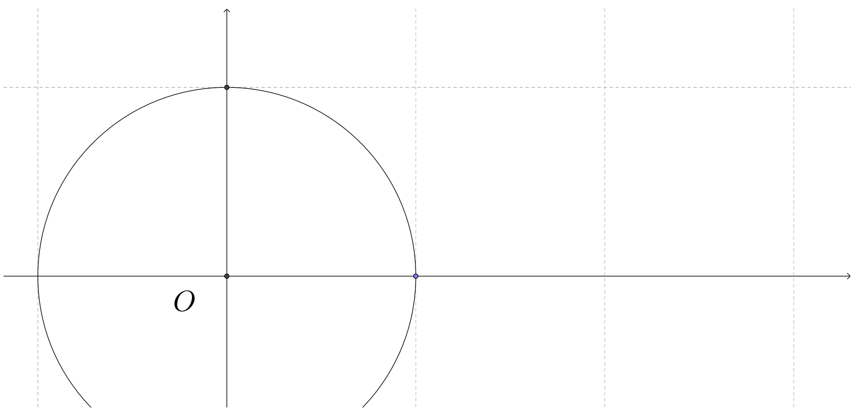
Cette factorisation permet de faire apparaître une formule d'Euler :

$$1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\underbrace{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}_{=2\cos\frac{\theta}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

$$1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\underbrace{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}_{=-2i\sin\frac{\theta}{2}}\right)=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Pour factoriser $e^{ia}+e^{ib}$, on peut factoriser par $e^{i\frac{a+b}{2}}$: (*angle moyen*). Voir l'exemple ci-après.

Représenter les points d'affixe 0, 1, $e^{i\theta}$, $1+e^{i\theta}$ (parallélogramme), permet de faire apparaître l'« angle moitié » $\theta/2$.



L'angle moitié

Exemple 8.

Pour $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$, on établit les formules

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\quad\text{et}\quad\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Exemple 9 (Somme de cos, somme de sin).

Soient $p,q\in\mathbb{R}$. On retrouve les égalités :

$$\begin{aligned}\cos p+\cos q&=2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right) & \sin(p)+\sin(q)&=2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\\ \cos p-\cos q&=-2\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right) & \sin(p)-\sin(q)&=2\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

Proposition 10 (Formule de Moivre).

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méthode (« Délinéarisation » : exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$).

On peut toujours

- écrire la formule de Moivre :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

- développer par la formule du binôme de Newton ;
- identifier les parties réelles et imaginaires.

On exprime ainsi $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
En utilisant la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on poursuit les simplifications.
On obtiendra toujours deux polynômes T_n et U_{n-1} tels que

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= T_n(\cos\theta) \\ \sin(n\theta) &= (\sin\theta)U_{n-1}(\cos\theta). \end{aligned}$$

Exemple 11.

Exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

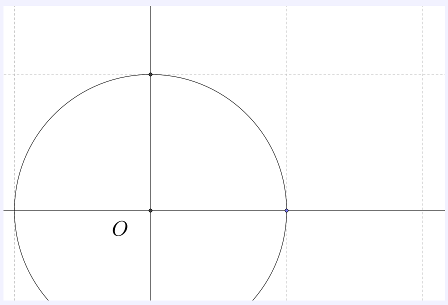
2.1 Exemples et applications.

Proposition-Définition 12.

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{z = re^{i\theta},} \text{ où } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

- Le nombre r est le module de z,
- et on appelle θ est *un* **argument** de z.
- On dit alors que z est écrit **sous forme trigonométrique**.



Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, si O, I et M sont les points d'affixes 0, 1, z ($z \neq 0$), et si θ est *un* argument de z, alors peut être considéré comme une **mesure de l'angle orienté** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Méthode (Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique)**.**

Pour mettre un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique il suffit de mettre son module en facteur. On va peut-être reconnaître un argument classique ($\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$...). Sinon, on peut exprimer l'argument à l'aide de la fonction arctan, comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 13 (De la forme algébrique à la forme trigonométrique, et réciproquement)**.**

1. Mettre les nombres suivants sous forme trigonométrique
   (on précisera bien le module et un argument)

$$-1, \qquad 1-i, \qquad \sin\theta + i\cos\theta \text{ (avec } \theta\in\mathbb{R}\text{)}, \qquad i^{35}$$

   Donner la forme trigonométrique de $1+2i$ (on explicitera un argument en utilisant arctan).

2. (a) Donner la forme algébrique de $(\sqrt{3}+i)^{666}$.

   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. Donner la forme algébrique de $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

Exemple 14.

Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.

Proposition 15 (Égalité de formes trigonométriques : presque-unicité de l'écriture)**.**

$$\forall r, r' \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall \theta, \theta' \in \mathbb{R} \qquad re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \;\; [2\pi] \end{cases}$$

Exemple 16.

Comme on le verra dans la troisième partie de ce cours (Équations algébriques), la forme trigonométrique est particulièrement adaptée à la résolution de problèmes « multiplicatifs ».

En guise d'exemple, on résout sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -4|z|$.

Définition 17.

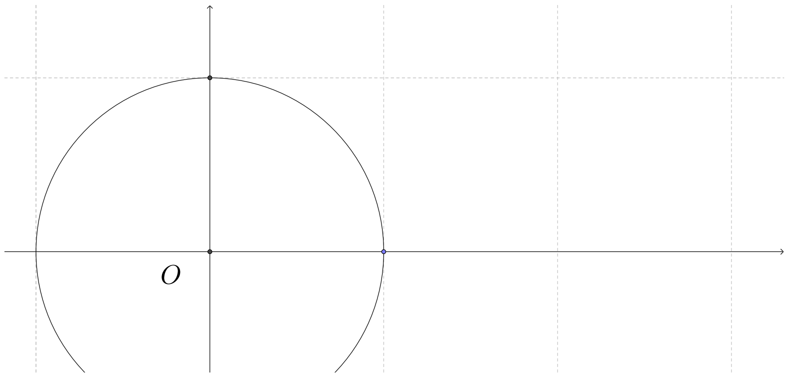
Parmi l'infinité d'arguments d'un même nombre complexe non nul, un seul appartient à l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On l'appelle **argument principal** de z et on le note $\arg(z)$.

Proposition 18.

Soient z et z' dans $\mathbb{C}^*$. On a

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$$

Soient $r > 0$ et $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. Multiplions le nombre $z = re^{i\theta}$ par $e^{i\alpha}$. On obtient $re^{i(\theta+\alpha)}$.
On voit que l'application $z \mapsto e^{i\alpha}z$ est la **rotation** d'angle α.



Effet d'une multiplication par $e^{i\alpha}$

2.2 Un peu de géométrie.

On travaille ici dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. On rappelle que si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives a et b, on appelle **affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $b - a$. Il s'agit de l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Proposition 19.

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b, c et d.

$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = \frac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Le nombre $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Corollaire 20.

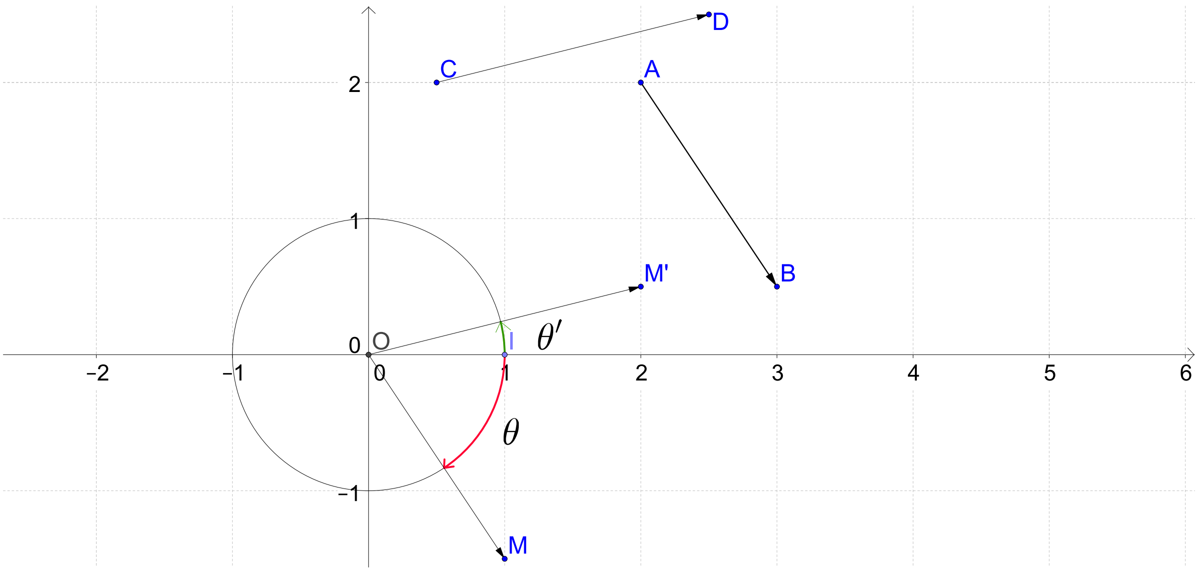
Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux d'affixes a, b, c et d.

- $(AB) \mathbin{/\!/} (CD) \iff \dfrac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$.
- En particulier A, B et C sont alignés ssi $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
- $(AB) \perp (CD) \iff \dfrac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Preuve de la proposition 19. Il faudrait mettre le mot preuve entre guillemets ici puisque la notion d'angle orienté n'a pas été définie rigoureusement...

Notons $\theta = \arg(b-a)$. C'est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ où $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Notons $\theta' = \arg(d-c)$. C'est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'})$ où $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{CD}$.
Le nombre $\theta' - \theta$ est (cf. figure) une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, donc de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ On peut désormais conclure en écrivant

$$\theta' - \theta = \arg(d-c) - \arg(b-a) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) [2\pi].$$



$\square$

Preuve du corollaire 20.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Cela arrive si et seulement si 0 est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ (vecteurs colinéaires, de même sens) ou si π en est une (vecteurs colinéaires, de sens opposé). On a donc

$$(AB) \mathbin{/\!/} (CD) \quad \iff \quad \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0 \ \text{ ou } \pi \quad \iff \quad \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

En particulier, ceci donne une condition d'alignement pour trois points A, B et C distincts deux à deux, car A, B, C sont alignés ssi $(AB) \mathbin{/\!/} (AC)$.

Et pour l'orthogonalité ? Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, c'est à dire si $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. On a donc

$$(AB) \perp (CD) \quad \iff \quad \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ -\frac{\pi}{2} \quad \iff \quad \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

$\square$

Exercices

$\boxed{\mathbf{7.1}}$ **[♦◇◇]** Calculer $(1+i)^{2023}$.

$\boxed{\mathbf{7.2}}$ **[♦♦◇]** Soient trois réels x, y, z tels que $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0$. Montrer que $e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0$.

$\boxed{\mathbf{7.3}}$ **[♦◇◇]**

1. Déterminer les formes algébriques et trigonométriques du nombre

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}.$$

2. En déduire l'expression de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$ à l'aide de radicaux.

$\boxed{\mathbf{7.4}}$ **[♦◇◇]** Soit un réel θ. Linéariser $(\cos\theta)^5$ et $(\sin\theta)^6$.

$\boxed{\mathbf{7.5}}$ **[♦♦◇]**

1. Soit x un réel. Exprimer $\cos(5x)$ comme un polynôme en $\cos x$.
2. Montrer que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du trinôme $x \mapsto 16x^2-20x+5$.
3. En déduire l'égalité $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

$\boxed{\mathbf{7.6}}$ **[♦♦◇]** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

$\boxed{\mathbf{7.7}}$ **[♦♦◇]** Noyaux de Dirichlet et de Féjer.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. On note

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \qquad \text{et} \qquad F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

La fonction $x \mapsto D_n(x)$ est appelée noyau de Dirichlet ; elle intervient notamment dans le cadre de l'analyse de Fourier. La fonction $x \mapsto F_n(x)$, moyenne arithmétique des n premiers noyaux de Dirichlet, est appelée noyau de Féjer.

1. Montrer que $D_n(x)=\dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$.
2. Montrer que $F_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$.

$\boxed{\mathbf{7.8}}$ **[♦♦♦]** Soient un quadrilatère $ABCD$ du plan. On construite les points E, F, G, H à l'extérieur du quadrilatère tels que les triangles EBA, FCB, GDC et HAD soient des triangles directs, isocèles et rectangles en E, F, G, H. Démontrer que

$$\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{FH} \quad \text{et} \quad EG = FH.$$

$\boxed{\mathbf{7.9}}$ **[♦♦♦]** Trouver les nombres complexes d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $1, z^2$ et z^4 sont alignés.
