

Chapitre 35

Intégrales sur un segment

1 Intégrale d’une fonction continue sur un segment

1.1 Ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$

Définition 1: Fonction continue par morceaux sur un intervalle.

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f|_{[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l’ensemble des fonctions continues par morceaux sur I .

Exemple 2: $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

La fonction $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* . Expliquer.

Preuve :

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Notons $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cap]a, b[$.
Cet ensemble est finito : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a < \frac{1}{n} < b \iff \frac{1}{b} < n < \frac{1}{a} \iff \lfloor \frac{1}{b} \rfloor + 1 \leq n \leq \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$.
 S contient donc au plus $\lfloor \frac{1}{a} \rfloor - \lfloor \frac{1}{b} \rfloor$ points.
Notons $n = |S|$ puis $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.
Posons $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ avec $a_0 := a$ et $a_{n+1} := b$.
Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est constante, elle y est donc continue et prolongeable par continuité aux bords. Ainsi, $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
Remarque: En posant $f(0) := 0$, ça ne marche plus car $f|_{[0,b]}$ n’est pas cpm sur $[0, b]$.

1.2 Intégrale d’une fonction continue par morceaux entre deux bornes

Définition 3

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On note $\int_a^b f(x)dx$, ou plus simplement $\int_a^b f$ le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{[a,b]} f \text{ si } a < b, \quad \int_a^a f(x)dx := 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)dx := - \int_{[b,a]} f \text{ si } a > b.$$

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$.
Les fonctions $x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$ sont continues par morceaux sur I .
Pour $a, b \in I$, on pose :

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b \operatorname{Re}(f(x))dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(x))dx.$$

Ainsi, la partie réelle de l’intégrale est l’intégrale de la partie réelle, idem pour la partie imaginaire.

Preuve :

Pour prouver la continuité par morceaux de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ à partir de celle de f , on introduit une subdivision adaptée à f $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et on prouve qu’elle est adaptée à sa partie réelle et à sa partie imaginaire. On peut utiliser :

$$\forall x \in I \operatorname{Re}(f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \text{ et } \operatorname{Im}(f(x)) = \frac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}).$$

En effet, ces relations donnent que pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les restrictions de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ à $]a_i, a_{i+1}[$ y sont continues, et prolongeables par continuité sur les bords.

1.3 Relation de Chasles.

Proposition 5: Relation de Chasles

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $a, b, c \in I$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Preuve :

La relation a été établie dans le cours de construction pour une fonction à valeurs réelles dans le cas où $a < c < b$.

- cas $a < b < c$:

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_{[a,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

- cas $b = c < a$:

D’une part $\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$, d’autre part : $\int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f = -\int_{[b,a]} f$.

Les autres cas sont similaires.

1.4 Linéarité.

Proposition 6: Linéarité de l’intégrale.

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et $a, b \in I$. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Preuve :

On l’a prouvé pour $a < b$ et f, g à valeurs réelles. Il faut le vérifier dans les autres cas.

1.5 Intégrales et inégalités.

Proposition 7: Positivité

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ où le segment $[a, b]$ est tel que $a \leq b$.

Si f est positive sur $[a, b]$, alors l’intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre positif.

Si f est négative sur $[a, b]$, alors cette intégrale est un nombre négatif.

Preuve :

On l’a déjà prouvé.

Proposition 8: Intégrale nulle d’une fonction positive et continue

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, avec $a < b$, continue et positive sur $[a, b]$.

Si $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.

Par contraposée, si $\exists c \in [a, b] \ f(c) > 0$, alors $\int_a^b f > 0$.

Preuve :

Il y a aussi la preuve suivante dans **L’Exercice 79** de la banque CCINP :

On suppose f continue et positive sur $[a, b]$ et $\int_a^b f = 0$.

Posons $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ définie sur $[a, b]$, f étant continue sur $[a, b]$, F est une primitive de f sur $[a, b]$ d’après le TFA (prouvé plus loin).

Donc $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x) \geq 0$, ainsi F est croissante sur $[a, b]$.

Or, $F(b) = \int_a^b f = 0$, de plus, $F(a) = \int_a^a f = 0$.

Par croissance, $\forall x \in [a, b]$, $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ donc $F(x) = 0$.

Donc F est constante sur $[a, b]$, on a $a < b$ donc $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x) = 0$.

Remarque: Pourquoi continue et pas continue par morceaux ?

Soit $f : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$, son intégrale est nulle, mais f ne l’est pas.

Proposition 9: Croissance

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ avec $a \leq b$.

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Preuve :

On a :

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f)$$

Comme $g - f$ est continue par morceaux et positive, on a $\int_a^b (g - f) \geq 0$ donc $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Proposition 10: Inégalité de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ avec $a \leq b$.

Si f est minorée par un réel m et majorée par M sur $[a, b]$, alors :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a), \text{ Lorsque } a < b, \text{ on a } m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Preuve :

On a $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$.

La fonction $f, x \mapsto m, x \mapsto M$ sont continues par morceaux.

Par croissance :

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt$$

Donc

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b - a)$$

Proposition 11: Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, avec $a \leq b$.

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Preuve :

⊙ **Cas réel:** Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

On a $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$, or $f, -f$ et $|f|$ sont cpm sur $[a, b]$.

Par croissance de l'intégrale ($a \leq b$) : $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ et $-\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$.

Donc $\max(\int_a^b f, -\int_a^b f) \leq \int_a^b |f|$ et alors $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

⊙ **Cas complexe:** admis.

1.6 Quelques exercices de cours.

Exemple 12

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I_a = \int_a^{a^2} \ln^3(x)dx$. Existence et signe de I_a .

Preuve :

Existence: \ln^3 est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* .

1er cas: Supposons $a \geq 1$, alors $a \leq a^2$ et $\forall x \in [a, a^2] \ln^3(x) \geq 0$, par positivité, $\int_a^{a^2} \ln^3 \geq 0$.

2eme cas: Supposons $a \in]0, 1[$, alors $a^2 \leq a$ et $\forall x \in [a^2, a] \ln^3(x) \leq 0$, par positivité, $\int_{a^2}^a \ln^3 \leq 0$

donc $\int_a^{a^2} \ln^3 \geq 0$.

Ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, I_a \geq 0$

Exemple 13

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a < b$ continue telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$.
Justifier que f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

Preuve :

1er cas: Supposons que f change de signe sur $[a, b]$, alors d'après le TVI, f s'annule sur $[a, b]$ puisque f est continue.

2eme cas: Supposons que f ne change pas de signe sur $[a, b]$. On a que $a < b$, que f est continue et monotone sur $[a, b]$, et d'intégrale nulle. Par théorème, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.

On peut aussi le prouver avec le TFA + Rolle.

Exemple 14: Un exercice : suite définie par une intégrale.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n := \int_1^e (\ln(x))^n dx$.
1. Prouver que (I_n) est convergente.
2. Prouver que la limite vaut 0 à l'aide d'une IPP.
3. Donner un équivalent de I_n .

Preuve :

[1.] **Monotonie:** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e \underbrace{(\ln(x))^n}_{\geq 0} \underbrace{(\ln(x) - 1)}_{\leq 0} dx$$

La fonction $x \mapsto (\ln(x))^n(\ln(x) - 1)$ est continue sur $[1, e]$ on a $1 \leq e$ et la fonction est négative.
Par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et donc (I_n) est décroissante.

Convergence: Par positivité, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, donc I_n est décroissante et minorée par 0 donc elle converge d'après le TLM.

[2.] Une IPP pour trouver une relation de récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e (\ln(x))^n dx \\ &= [x(\ln(x))^n]_1^e - \int_1^e x n \frac{1}{x} (\ln(x))^{n-1} dx \\ &= e - n I_{n-1} \end{aligned}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \frac{1}{n+1}(e - I_{n+1})$. Notons $l = \lim I_n$, qui existe d'après [1.].

Alors $I_n = \frac{1}{n+1}(e - I_{n+1}) \rightarrow 0$ car $e - I_{n+1} \rightarrow e - l$.

[3.] On a $n I_n = \frac{n}{n+1}(e - I_{n+1}) \rightarrow e$ donc $I_n \sim \frac{e}{n}$.

Exemple 15: Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt \rightarrow 0.$$

Remarque: Le lemme est vrai pour f continue sur $[a, b]$, mais difficile à démontrer.

Preuve :

Idée : IPP. Soit $n \in \mathbb{N}$. f et $\frac{1}{in}e^{int}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ donc :

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \left[f(t) \cdot \frac{1}{in}e^{int} \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot \frac{1}{in}e^{int}dt$$

Alors

$$|I_n| = \left| \dots \right| \leq \left| [\dots]_a^b \right| + \left| \int_a^b \dots \right|$$

D'une part : $\left| \left[f(t) \frac{1}{in}e^{int} \right]_a^b \right| = \frac{1}{n} \left| f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina} \right| \leq \frac{1}{n}(|f(b)| + |f(a)|)$.

D'autre part : $\left| \int_a^b f'(t) \frac{1}{in}e^{int}dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)|dt$.

Par majoration, $|I_n| = O(\frac{1}{n})$ donc $I_n \rightarrow 0$.

Théorème 16: Théorème fondamental de l'analyse

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I . Soit $a \in I$. La fonction

$$E : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur I et de dérivée $F' = f$.

Preuve :

Soit $x_0 \in I$. Montrons que $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \rightarrow f(x_0)$
Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)dt \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} |f(t) - f(x_0)| dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0 , $\exists \eta > 0 \forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\mid |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
Supposons que $|x - x_0| \leq \eta$. Alors $[\min(x_0, x), \max(x_0, x)] \subset I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.
Par croissance :

$$\int_{\min}^{\max} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \int_{\min}^{\max} \varepsilon dt = \varepsilon(\max - \min) = \varepsilon|x - x_0|.$$

Ainsi, $\left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x-x_0|} \varepsilon |x - x_0| = \varepsilon$

Corrolaire 17

Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Preuve :

Le TFA donne bien une primitive sous ces hypothèses.
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, F et G deux primitives de f .
Alors $F - G$ est dérivable sur I et $(F - G)' = f - f = 0$ donc $F - G$ est constante sur I d'après AF.

Proposition 18

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I . Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Preuve :

On a f continue sur $[a, b]$. Le TFA donne $\tilde{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ primitive de f sur $[a, b]$.
La fonction F en est une autre, sur le même intervalle : $\exists C \in \mathbb{K} \forall x \in [a, b] \tilde{F}(x) = F(x) + C$.
Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

Proposition 19

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Alors pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Preuve :

Découle du résultat précédent car f est une primitive de f' sur $[a, b]$ sous ces hypothèses.

Exemple 20

Soit la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt.$$

1. Donner le domaine de définition de F .

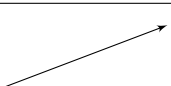
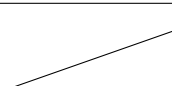
2. Montrer que F est dérivable sur D et calculer sa dérivée. Donner les variations de F .

3. (*) Calculer les limites intéressantes.

Preuve :

1. $f := \frac{1}{\ln}$ est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et non prolongeable.
Pour $x \in]0, 1[$, $0 < x^2 < x < 1$ donc $[x^2, x] \subset]0, 1[$ donc f est continue sur $[x^2, x]$.
Pour $x \in]1, +\infty[$, $x^2 > x$ donc $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$ donc f est continue sur $[x, x^2]$.
Ainsi, $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

2. \odot Sur $]0, 1[$. Notons L une primitive de f sur $]0, 1[$, elle existe par TFA et continuité de f .
Alors $F(x) = \int_x^{x^2} f = L(x^2) - L(x)$ et F est dérivable comme composée et différence.
Donc $\forall x \in]0, 1[$, $F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{1}{\ln(x)}(x - 1) > 0$.
 \odot Sur $]1, +\infty[$, on a $F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$.

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		+	+
F			

3. **Limite en $+\infty$:** Soit $x > 1$. $\forall t \in [x, x^2]$ $\frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x^2)}$ alors par croissance de l'intégrale ($x < x^2$):

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln x^2} dt \text{ donc } F(x) \geq \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \rightarrow +\infty$$

Par minoration, $F(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.

Limite en 0_+ : On encadre pour $x \in]0, 1[$: $\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$ alors ($x^2 < x$):

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt$$

Donc $\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq F(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$ Par encadrement, $F(x) \rightarrow 0$ en 0_+ .

Limite en 1_+ : Pour $x > 1$, $F(x) = L(x^2) - L(x)$ et $L'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \sim_1 \frac{1}{x-1}$ donc $L'(x) =_1 \frac{1}{x-1} + o(\frac{1}{x-1})$.
Posons $R(x) = L'(x) - \frac{1}{x-1}$ continue sur $]1, +\infty[$.
On a :

$$F(x) = \int_x^{x^2} L(t) dt = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t-1} + R(t) \right) dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt + \int_x^{x^2} R(t) dt$$
$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = \ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) = \ln(x + 1) \xrightarrow{x \rightarrow 1_+} \ln(2)$$

Montrons que $\int_x^{x^2} R(t) dt \rightarrow 0$.
On a $(t - 1)R(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 1_+$.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0 \forall t \in]1, 1 + \eta[$ $-\varepsilon \leq (t - 1)R(t) \leq \varepsilon$ donc $-\frac{\varepsilon}{t-1} \leq R(t) \leq \frac{\varepsilon}{t-1}$.
Supposons $x \in]1, \sqrt{1 + \eta}[$ alors $[x, x^2] \subset]1, 1 + \eta[$.
Alors $\forall t \in [x, x^2]$, $-\frac{\varepsilon}{t-1} \leq R(t) \leq \frac{\varepsilon}{t-1}$.
On intègre :

$$-\varepsilon \leq -\varepsilon \ln(x + 1) \leq \int_x^{x^2} R(t) dt \leq \varepsilon \ln(x + 1) \leq \varepsilon$$

On a donc bien $\int_x^{x^2} R(t) dt =_1 o(1)$.
On a donc prouvé que $F(x) =_1 \ln(x + 1) + o(1)$ donc $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1_+} \ln 2$

Limite en 1_- : Soit $x \in]0, 1[$. On a $F(x) = \int_x^{x^2} t \frac{1}{t \ln t} dt$. On a $0 < x^2 < x < 1$. Soit $t \in [x^2, x]$.
On a $\frac{x}{t \ln t} \leq t \frac{1}{t \ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$. On intègre : $\int_x^{x^2} \frac{x^2}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{x}{t \ln t} dt$.
Or, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln(x)| = \ln(-2 \ln(x)) - \ln(\ln(-x)) = \ln(2)$.
Finalement, $x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2)$ et par théorème des gendarmes, $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1_-} \ln(2)$.

1.7 Outils de calcul intégral.

Théorème 21: Intégration par parties.

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Preuve :

On a uv dérivable comme produit de fonctions dérivables sur I .
Alors $(uv)' = u'v + uv'$. Or u, v étant de classe \mathcal{C}^1 , $u'v$ et uv' sont continues sur I .

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)'(t)dt &= \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt \\ [uv]_a^b &= \int_a^b u'v + \int_a^b uv' \end{aligned}$$

Exemple 22: Suites dont le terme général est une intégrale.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n := \int_a^b f_n(x)dx$$

On peut obtenir une relation de récurrence sur la suite (I_n) avec une IPP dans certains cas.

Théorème 23: Formule du changement de variable

Soit $\varphi \in \mathcal{DM}^1(I, J)$, $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

Exemple 24

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$, montrer que:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + \sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$$

Preuve :

On pose le changement de variable :

t	dt	$\frac{2}{1+t^2}dt$	$t = -1$	$t = 1$
$\tan \frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{x}{2}))dx$	dx	$x = -\frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + \sin x} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{4t^2 + 2t + 4}dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{2t^2 + t + 2}dt \end{aligned}$$

Pas de racine réelles. On a $2t^2 + t + 2 = 2(t^2 + \frac{1}{2} + 1) = 2((t + \frac{1}{4})^2 - (\frac{\sqrt{15}}{4})^2)$.

Cours : $\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}))$.

Donc :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(t + \frac{1}{4})^2 + (\frac{\sqrt{15}}{4})^2}dt = \frac{4}{2\sqrt{15}} \left[\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{15}(t + \frac{1}{4})}\right) \right]_{-1}^1 = \frac{2}{\sqrt{15}} \left[\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{15}}\right) + \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right) \right]$$

Or $\frac{5}{\sqrt{15}} \cdot \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{15}{15} = 1$ et $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (x > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (x < 0) \end{cases}$

$$\text{Alors } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+\sin x}dx = \frac{2}{\sqrt{15}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$$

Corrolaire 25: Intégrale d’une fonction paire/impaire.

Soit $f \in \mathcal{CM}([-a, a], K)$.
Si f est paire : $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.
Si f est impaire : $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Corrolaire 26

Soit $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T -périodique avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Théorème 27: Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{K})$ et $x \in [a, b]$. Alors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^b \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Preuve :
Par récurrence :
Cas de base: Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a, x \in I$. Alors :

$$f(x) - \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(x) - f(a)$$

Et

$$\int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)dt = \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

Le résultat est vrai.
Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai pour cet entier. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$ et $x, a \in I$.
Or $\mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, par hypothèse : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$.
Avec IPP, fonctions de classes \mathcal{C}^1 , f^{n+1} et $-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(t)dt \\ &= -\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(t)dt \end{aligned}$$

Bilan : $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$
L’identité est vraie au rang $n+1$ donc vraie pour tout n par récurrence.

Exemple 28: Comparer une fonction et son polynôme de Taylor

Montrer l’inégalité :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}.$$

Preuve :
On a \cos de classe \mathcal{C}^∞ donc \mathcal{C}^3 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc d’après Taylor avec Reste intégral :

$$\cos(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos^{(3)}(t)dt$$

Donc $\cos(x) - x + \frac{x^2}{2!} = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t)dt$. Cette intégrale est positive car continue, positive et $0 \leq x$.
On en déduit bien l’inégalité.

Proposition 29: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$.
On suppose que la fonction $|f^{(n+1)}|$ est majorée par une constante M_{n+1} sur I . Alors

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve :

D’après Taylor avec reste intégral, $\min := \min(a, x)$ et $\max := \max(a, x)$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| = \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_{\min}^{\max} \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt$$

Par croissance de l’intégrale, $\int_{\min}^{\max} \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \leq \int_{\min}^{\max} \frac{|x-t|^n}{n!} M_{n+1} dt = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$

Exemple 30

Prouver que

$$\forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x).$$

Preuve :

Soit $x \in [0, 1]$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{x^k}{k}$ décroissante vers 0.
La série $\sum (-1)^k u_k$ converge (thm des séries alternées.).
Notons $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Posons $n \in \mathbb{N}^*$ et T_n son polynôme de Taylor à l’ordre n en 0.

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} X^k$$

On majore $|f - T_n|$ avec Taylor-Lagrange. On a $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n (n)!}{(1+x)^{n+1}}$ majorée par $n!$ sur $[0, 1]$.
Donc l’inégalité donne :

$$|f(x) - T_n(x)| \leq n! \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, $T_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 Sommes de Riemann

2.1 Convergence des sommes de Riemann

Définition 31

Soit un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.
La famille (a_0, \dots, a_n) est appelée subdivision régulière de $[a, b]$ à n segments. Chaque segment de la subdivision est de longueur $\frac{b-a}{n}$, et ce nombre est appelé pas de la subdivision.
Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. On appelle n ème somme de Riemann de f le nombre

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

Théorème 32: Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ et $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$. Alors,

$$R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Preuve :

Remarque: on écrira la preuve dans le cas f lipschitzienne.

Corrolaire 33: Cas particulier important

Soit $f \in \mathcal{CM}([0, 1], \mathbb{R})$.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Preuve :

C'est le théorème avec $a = 0$ et $b = 1$.

Exemple 34

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

Preuve :

Posons $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$.

On a f continue, c'est une somme de Riemann, par convergence des sommes de Riemann:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Posons $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On a g continue, c'est une somme de Riemann, par converge :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln |1+t|]_0^1 = \ln 2$$

Exemple 35: Inégalité de Jensen pour les intégrales

CENTRALE 2024

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction CPM à valeurs dans I et φ une fonction convexe et continue sur I .
Démontrer l'inégalité de Jensen pour les intégrales :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t)) dt$$

Preuve :

On sait (CV des sommes de Riemann) :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

On a φ convexe sur I , on pose $\lambda_i = \frac{1}{n}$ et $x_i = f(a_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
D'après l'inégalité de Jensen :

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(f(a_i))$$

Donc, puisque φ est \mathcal{CM} sur $[a, b]$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi \circ f(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt$$

D'après le théorème sur les sommes de \mathbb{R} .

De même, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

On a bien $\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i)\right) \rightarrow \varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right)$ lorsque $I = \mathbb{R}$.

Par stabilité des inégalités larges :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt$$

2.2 Comparaison de la méthode des rectangle avec celle des trapèzes.

Proposition 36: Erreur d'approximation avec la méthode des rectangles

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction M -lipschitzienne, avec $M \in \mathbb{R}_+^*$.
Notons $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Ce nombre est une valeur approchée de l'intégrale de f entre a et b .
Voici une majoration de l'erreur : $\left| R_n(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$.
On a donc $\left| R_n(f) - \int_a^b f(t) dt \right| = O(\frac{1}{n})$.

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} \left| R_n(f) - \int_a^b f \right| &= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} f(a_k) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)| dt \end{aligned}$$

Pour k fixé, $\forall t \in [a_k, a_{k+1}]$, $|f(a_k) - f(t)| \leq M(b - a_k)$.
Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)| dt \leq M \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_k) dt \leq \frac{1}{2} M (a_{k+1} - a_k)^2 \leq \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2$$

On somme :

$$\left| R_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2} \frac{(b-a)^2}{n^2} \leq \frac{M(b-a)^2}{2n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Proposition 37: Erreur d'approximation avec la méthode des trapèzes

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{K})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $T_n(f)$ comme :

$$T_n(f) := R_n(f) + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{2}$$

Alors :

$$\left| T_n(f) - \int_a^b f(t) dt \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2.3 Complément : continuité uniforme d'une fonction.

Définition 38: Uniforme continuité

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 39

Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I y est uniformément continue.

Preuve :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ on suppose qu'il existe $K > 0$ telle que $\forall x, y \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$. Soit $(x, y) \in I^2 \mid |x - y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \leq K\eta = \varepsilon$.

Théorème 40: de Heine

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Preuve :

Par l'absurde, soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur $[a, b]$ mais non uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0 \exists (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit un tel ε . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (x_n, y_n) \in I^2$ $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, puisque (x_n) et (y_n) sont bornées, on peut extraire deux suites convergentes : $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante | $x_{\varphi(n)}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $|y_{\varphi(n)} - l| = |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - l| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - l|$ donc $y_{\varphi(n)} \rightarrow l$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$ et f continue en $l \in [a, b]$ donc $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(l)$.
De même pour $f(y_{\varphi(n)}) \rightarrow f(l)$. Par passage à la limite, $|f(l) - f(l)| \geq \varepsilon$ et $\varepsilon \leq 0$, absurde.