Chapitre 26

Espaces de dimension finie

Marathon du lundi de paques

Exercice 1: ♦◊◊

Soit $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.
Montrer que F est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

Solution :

La trace est une forme linéaire sur $M_2(\mathbb{R})$, donc $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(M_2(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) + \dim(\mathrm{Tr}(M_2(\mathbb{R})))$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \dim(F) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathbb{R}) = 3$.

Exercice 2: ♦◊◊

Montrer que (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de $M_2(\mathbb{R})$ avec :

$$M_1 = I_2,\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution :

Montrons que c'est une famille libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que : $\lambda_1 I_2 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = 0$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

En résolvant le systeme. Ainsi, (M_1, M_2, M_3, M_4) est une famille libre.
Or $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, et c'est une famille libre de 4 vecteurs : c'est une base.

Exercice 3: ♦♦◊

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution :

On sait déjà que c'est une famille libre (cf 25.13).
C'est une famille libre de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, donc c'est une base.

Exercice 4: ♦♦◊

Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Montrer qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.

Solution :

On sait que $(e_1, ..., e_{n-1})$ est une famille libre de E.
Par théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base de E.
Supposons qu'il n'existe pas de j tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.
Alors, pour tout j, $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est liée.
Donc, pour tout j, e'_j est combinaison linéaire de $(e_1, ..., e_{n-1})$.
Donc $\mathcal{B}'$ est combinaison linéaire de $\mathcal{B}$, ce qui est absurde.
Donc il existe un j tel que $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ est une base de E.

Exercice 5: ♦◊◊

Justifier que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1 et un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

Solution :

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1 car $\forall z \in \mathbb{C}, z = z \cdot 1$.
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 car $\forall z \in \mathbb{C}, z = \Re(z) \cdot 1 + \Im(z) \cdot i$ avec $\Re(z), \Im(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 6: ♦♦◊

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{0 \le k \le n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^n = 0$.

1. Montrer que $\forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^p = 0$.
2. Montrer que $\forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$.
3. Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{k=0}^n \lambda_k P(k) = 0$.
4. Déduire que $((X+k)^n, k \in [\![0, n]\!])$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution :

On pose $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^n = 0$.
$\boxed{1.}$ On a $P' = \sum_{k=0}^n \lambda_k n (X+k)^{n-1} = n \sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^{n-1} = 0$.
Donc $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^{n-1} = 0$.
En dérivant n fois, on obtient bien l'égalité pour tout $p \in [\![0, n]\!]$.

$\boxed{2.}$ En évaluant en 0 l'égalité du $\boxed{1.}$, on obtient bien l'égalité.

$\boxed{3.}$ Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On a $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$.
On a $\sum_{k=0}^n \lambda_k P(k) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sum_{p=0}^n a_p k^p = \sum_{p=0}^n a_p \sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$.

$\boxed{4.}$ On a montré que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{k=0}^n \lambda_k P(k) = 0$.
Donc, en particulier pour un polynôme ne s'annulant jamais, on a que les λ_k sont nuls.
Donc $((X+k)^n, k \in [\![0, n]\!])$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.
Or, c'est une famille de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, donc c'est une base.

Exercice 7: ♦♦◊

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 < ... < a_n \in \mathbb{R}$.
Soient $(\lambda_1, ... \lambda_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0$.
Alors $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f_{a_k} = -\lambda_n f_{a_n}$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f_{a_k - a_n} = -\lambda_n$.
Or $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f_{a_k - a_n}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $\lambda_n = 0$.
En itérant, on obtient que $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.
Donc $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$\boxed{2.}$ Supposons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension finie.
Alors, toute famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de cardinal inférieur ou égal à la dimension de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Or, on a montré que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de cardinal infini.
Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 8: ♦♦◊

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Justifier l'existence d'un entier p tel que $(I_n, M, M^2, ..., M^p)$ est liée.
2. Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure.

Solution :

$\boxed{1.}$ L'espace $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2, donc toute famille de n^2+1 vecteurs est liée.
En particulier, $(I_n, M, M^2, ..., M^{n^2})$ l'est.

$\boxed{2.}$ Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure inversible d'inverse M^{-1}.
On a que les itérés de M sont triangulaires supérieures.
Soit p tel que $(I_n, M, ..., M^p)$ est liée.
Alors, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k M^k = I_n$.
On multiplie par M^{-1} : $\sum_{k=1}^p \lambda_k M^{k-1} = M^{-1}$.
Ainsi, M^{-1} est combinaison linéaire de MTS, donc est triangulaire supérieure.

Exercice 9: ♦◊◊

Sans la formule de Grassmann :

1. Soient deux plans vectoriels non confondus d'un espace E de dimension 3. Montrer que leur intersection est une droite vectorielle.
2. Donner un exemple en dimension 4 de deux plans vectoriels supplémentaires.

Solution :

$\boxed{1.}$ On note P_1 et P_2 ces deux plans.
Alors $\exists (e_1, e_2) \in E^2 \mid P_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $\exists (e_3, e_4) \in E^2 \mid P_2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$.
On suppose ces familles libres. Puisque E est de dimension 3, alors $e_3 \in P_1$ ou $e_4 \in P_1$.
Ainsi, $P_1 \cap P_2 \neq \{0\}$ car $e_3 \neq 0$ et $0 < \dim(P_1 \cap P_2) < 2$ comme l'intersection est de dimension strictement inférieure à P_1 et P_2, puisque $P_1 \neq P_2$.
On a donc que $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle.

$\boxed{2.}$ On peut prendre $P_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $P_2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ avec (e_1, e_2, e_3, e_4) base de $\mathbb{C}^4$.

Exercice 10: ♦♦◊

Soit E un espace vectoriel de dimension égale à $n \in \mathbb{N}$ et H_1, H_2 deux hyperplans de E non confondus.
Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Solution :

On a $\dim(H_1) = \dim(H_2) = n - 1$.
On a $H_1 \subset H_1 + H_2 \subset E$ donc $n - 1 \le \dim(H_1 + H_2) \le n$.
Or $H_1 \neq H_2$ donc $\exists x \in H_1 + H_2 \mid x \notin H_1$. Alors $\dim(H_1 + H_2) > \dim(H_1)$.
Ainsi, $\dim(H_1 + H_2) = n$.
On a $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$.

Exercice 11: ♦♦◊

Calculer $\dim S_n(\mathbb{R})$. En déduire $\dim A_n(\mathbb{R})$.

Solution :

On a $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ car c'est le nombre de coefficients au dessus/dessous de la diagonale.
On a $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim A_n(\mathbb{R}) = \dim M_n(\mathbb{R}) - \dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 12: ♦♦◊

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = P(2)\}$.

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et justifier que $\dim F \le 3$.
2. Trouver une base de F.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) - P(2) = 0\} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ avec $\varphi : P \mapsto P(1) - P(2)$.
Or φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$, donc $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \mathrm{rg}(\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$.
Donc $\dim F = 4 - 1 = 3$.

$\boxed{2.}$ On peut prendre $P_1 = 1$, $P_2 = X^2 - 3X + 2$ et $P_3 = X^3 - 3X^2 + 2X$.

Exercice 13: ♦♦◊

Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Montrer que $\mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus \mathrm{Vect}(P)$.

Solution :

On a que $\mathbb{R}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $\mathrm{Vect}(P)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
D'après le chapitre suivant, $\mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus \mathrm{Vect}(P)$.

Exercice 14: ♦♦◊

Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $D = \mathrm{Vect}((\lambda, \lambda, 1))$ et $P = \mathrm{Vect}((1, \lambda, 1), (2, 1, 1))$ soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Solution :

On a que D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et P est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
La condition nécessaire et suffisante pour que D et P soient supplémentaires est que $D \cap P = \{0\}$.

Exercice 15: ♦♦♦

Soient F, G deux s.e.v. d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que $(\dim F + G)^2 + (\dim F \cap G)^2 \ge (\dim F)^2 + (\dim G)^2$.

Solution :

On a $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.
Donc $\dim F + G + \dim F \cap G = \dim F + \dim G$.
Donc $(\dim F + G)^2 + (\dim F \cap G)^2 + 2 \dim F + G \dim F \cap G = (\dim F)^2 + (\dim G)^2 + 2 \dim F \dim G$.
Montrons que $\dim(F + G) \dim(F \cap G) \ge \dim F \dim G$.
Si F et G sont confondus, il y a égalité.
SPDG, supposons que $\dim F \ge \dim G$.
Alors $\dim(F + G) \ge \dim F + 1$ et $\dim F \cap G \ge \dim G - 1$.
Donc $\dim(F + G) \dim(F \cap G) \ge \dim F \dim G - \dim F + \dim G - 1 \ge \dim F \dim G$.
En remplaçant dans l'égalité, on obtient l'inégalité.