Corrigé du DM 10

Exercice. Une partie bornée.

1. $\boxed{0 \text{ est le minimum de } A}$, comme on va le démontrer.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, de sorte que tous les éléments sont positifs : 0 est un minorant de A.
   • $\sqrt{0} - \lfloor \sqrt{0} \rfloor = 0$: $0 \in A$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$, de sorte que $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq 1$: A est majorée par 1. Puisque A est non vide (elle contient 0), elle admet une borne supérieure.

3. Soit $p \geq 2$.
   • On a $\lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor \leq \sqrt{p^2-1}$ et puisque $p^2 - 1 < p^2$, on a $\sqrt{p^2-1} < p$ par stricte croissance de la racine carrée. Par transitivité $\lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor < p$.
   Or, $\lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor$ est un entier, donc $\lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor \leq p - 1$.

   • Montrons que $p - 1 \leq \lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor$. Puisque $\lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor$ est par définition le plus grand entier inférieur à $\sqrt{p^2-1}$, il suffit de prouver que $p-1$ (qui est entier) est inférieur à $\sqrt{p^2-1}$, ce qui se fait en comparant $(p-1)^2$ et p^2-1, les carrés de ces entiers positifs : on a
   $$p^2 - 1 - (p-1)^2 = 2p - 2 \geq 0.$$
   Par antisymétrie, $\boxed{\lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor = p - 1}$.

4. En utilisant la relation prouvée ci-dessus, on calcule
   $$\sqrt{p^2-1} - \lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor = \sqrt{p^2-1} - (p-1) = \sqrt{p^2-1} - \sqrt{(p-1)^2}.$$
   En multipliant la différence des racines par leur somme (« quantité conjuguée »), on fait apparaître une identité remarquable :
   $$\sqrt{p^2-1} - \lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor = \frac{p^2-1-(p-1)^2}{\sqrt{p^2-1}+\sqrt{(p-1)^2}} = \frac{2(p-1)}{\sqrt{(p-1)(p+1)}+\sqrt{(p-1)^2}},$$
   soit en factorisant par $p-1$, $\boxed{\sqrt{p^2-1} - \lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{p+1}{p-1}}}}$.

5. Puisque $\sqrt{\frac{p+1}{p-1}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a $\sqrt{p^2-1} - \lfloor \sqrt{p^2-1} \rfloor \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, on peut trouver des éléments de A aussi proche de 1 que l'on veut : ce majorant de A est le plus petit des majorants. On a bien $\boxed{\sup(A) = 1}$.

Problème Suites sous-additives. Corrigé : S.B.

1. (a) L'entier a étant fixé, on raisonne par récurrence sur $q \in \mathbb{N}^\star$.
   — Pour $q = 1$, il y égalité.
   — Si $u_{qa} \leq q u_a$ pour un $q \in \mathbb{N}^*$, alors
   $$\begin{aligned} u_{(q+1)a} &= u_{qa+a} \\ &\leq u_{qa} + u_a \\ &\leq q u_a + u_a \\ &\leq (q+1) u_a. \end{aligned}$$
   (b) En utilisant la question précédente :
   $$\begin{aligned} u_{qa+r} &\leq u_{qa} + u_r \\ &\leq q u_a + u_r. \end{aligned}$$

2. (a) On sait que $0 \leq r_n < a$, d'où
   $$\begin{aligned} a q_n &\leq n < a q_n + a \\ q_n &\leq \frac{n}{a} < q_n + 1. \end{aligned}$$
   Puisque $q_n \in \mathbb{N}$:
   $$q_n = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor.$$
   On obtient
   $$\frac{1}{a} - \frac{1}{n} < \frac{q_n}{n} \leq \frac{1}{a}.$$
   Par encadrement :
   $$\boxed{\lim \frac{q_n}{n} = \frac{1}{a}}$$
   (b) Notons $A = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{a-1}\}$ et $B = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{a-1}\}$.
   L'entier a étant fixé, A et B sont des constantes. Puisque $r_n \in [\![0, a-1]\!]$:
   $$A \leq u_{r_n} \leq B,$$
   si bien que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \frac{A}{n} \leq \frac{u_{r_n}}{n} \leq \frac{B}{n}.$$
   Par encadrement :
   $$\boxed{\lim \frac{u_{r_n}}{n} = 0}.$$

(c) Pour tout entier $n \geq a$, on a $q_n \geq 1$ et d'après la question 1 :

$$\begin{aligned} u_n &\leq q_n u_a + u_{r_n} \\ \frac{u_n}{n} &\leq \frac{q_n}{n} u_a + \frac{u_{r_n}}{n} \qquad (1). \end{aligned}$$

Par combinaison linéaire des suites convergentes $\left(\frac{q_n}{n}\right)$ et $\left(\frac{u_{r_n}}{n}\right)$:

$$\lim \left(\frac{q_n}{n} u_a + \frac{u_{r_n}}{n} \right) = \frac{u_a}{a}.$$

Par définition de la limite, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq n_1 \quad : \quad \frac{q_n}{n} u_a + \frac{u_{r_n}}{n} \leq \frac{u_a}{a} + \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (2).$$

En posant $n_0 = \max(a, n_1)$, on obtient d'après (1) et (2) :

$$\boxed{\forall n \geq n_0 \quad : \quad \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_a}{a} + \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

3. (a) L'ensemble $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (v_0 est dedans) et minorée (par hypothèse).

(b) On sait que $\ell + \frac{1}{2}\varepsilon > \ell$. Par définition d'une borne inférieure, $\ell + \frac{1}{2}\varepsilon$ n'est pas un minorant de $\left\{\frac{u_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$:

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \frac{u_a}{a} < \ell + \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

(c) • Soit $\varepsilon > 0$. La question b assure l'existence d'un entier $a \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{u_a}{a} < \ell + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

D'après la question 2, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad : \quad \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_a}{a} + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Par ailleurs $\frac{u_n}{n} \geq \ell$. On déduit de tout cela que

$$\forall n \geq n_0 \quad : \quad \ell \leq \frac{u_n}{n} \leq \ell + \varepsilon,$$

si bien que

$$\forall n \geq n_0 \quad : \quad \left|\frac{u_n}{n} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

• On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad |v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Par définition :

$$\boxed{\lim v_n = \ell}.$$

4. *Si la suite (v_n) n'est pas minorée*

On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas minorée.

(a) Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathbb{R}$.

On sait que (v_n) n'est pas minorée par $A - \frac{1}{2}\varepsilon$.

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad \frac{u_a}{a} < A - \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

(b) • Soit $A \in \mathbb{R}$. On fixe un $\varepsilon > 0$, par exemple $\varepsilon = 1$. Il existe $a \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\frac{u_a}{a} < A - \frac{1}{2}\varepsilon$. D'après la question 2, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad : \quad \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_a}{a} + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

On déduit de tout cela que

$$\forall n \geq n_0 \quad : \quad \frac{u_n}{n} \leq A.$$

• On a ainsi montré que

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^\star \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad v_n \leq A.$$

Par définition :

$$\boxed{\lim v_n = -\infty}.$$

5. On peut définir $u_n = \ln w_n$. On observe que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad : \quad u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

D'après ce qui précède, la suite $\left(\frac{1}{n} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers une limite finie ℓ ou bien diverge vers $-\infty$. En passant à l'exponentielle, la suite $\left(\sqrt[n]{w_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^ℓ ou bien converge vers 0. Dans tous les cas :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\sqrt[n]{w_n}\right)_n \text{ converge}}.$$