

CCB – Physique

Durée : 4h.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Le sujet comporte trois exercices indépendants. Les trois exercices doivent être rédigés sur des copies séparées. Veillez à écrire votre nom sur chaque nouvelle copie.

Exercice 1 – Escale à Fort Boyard

Situé au large de la Charente-Maritime, le Fort Boyard est édifié sous l'impulsion de Napoléon afin de protéger la rade, l'embouchure de la Charente, le port et surtout le grand arsenal de Rochefort des assauts de la marine anglaise. Construit entre 1804 et 1857, il est transformé en prison quelques années à peine après son achèvement. Cet imposant vaisseau de pierre est dorénavant connu dans le monde entier grâce au jeu télévisé du même nom, tourné depuis 1990, dans lequel une équipe généralement constituée de six candidats réalise diverses épreuves physiques et intellectuelles afin de gagner un trésor en boyards. Ce sujet s'intéresse à certains aspects du jeu.

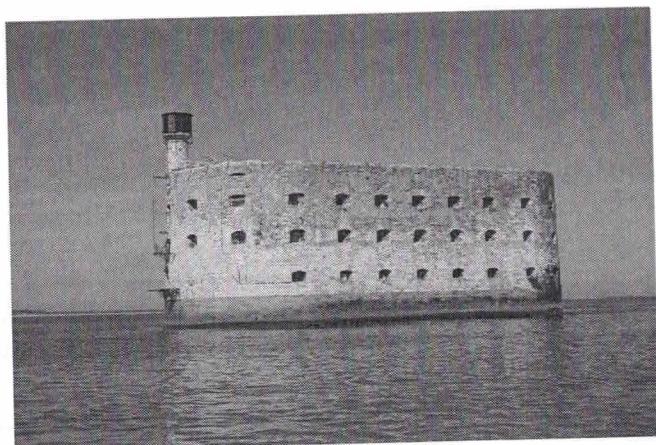


FIGURE 1 – Fort Boyard.

Observation du Fort

Avant de se lancer à l'assaut du Fort, les candidats l'observent depuis l'île d'Aix à l'aide de jumelles, sommairement modélisées par une paire de lunettes de Galilée. Chaque lunette comprend deux lentilles, l'une plan convexe, l'autre plan concave.

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction, au moyen d'un schéma faisant apparaître les grandeurs utiles.

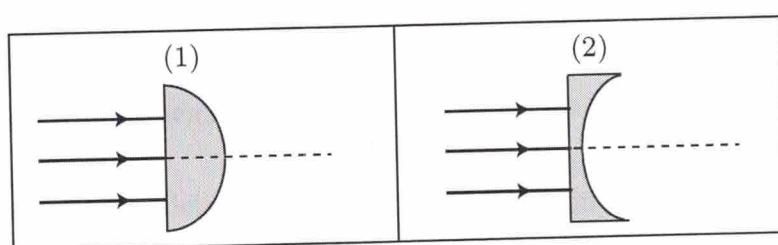


FIGURE 2 – Lentilles plan convexe (1) et plan concave (2).

2. La figure 2 représente les lentilles plan convexe et plan concave, taillées dans un verre d'indice optique $n > 1$ et plongées dans l'air d'indice optique $n_{\text{air}} = 1$. Recopier la figure et tracer qualitativement le suivi des rayons au travers du dioptre air/verre, puis du dioptre verre/air. Bien qu'aucun calcul ne soit attendu, détailler la démarche adoptée en utilisant la réponse à la question 1.

3. En déduire la nature, convergente ou divergente, de chaque lentille.

Dans la suite, les lentilles sont supposées minces et utilisées dans les conditions de Gauss. Chaque lunette de Galilée est composée d'une lentille (L_1) de distance focale $f'_1 > 0$ constituant l'objectif de la lunette, et d'une lentille (L_2) de distance focale $f'_2 < 0$, telle que $|f'_2| < f'_1$, constituant l'oculaire (Fig. 3). On note respectivement O_1 , F_1 et F'_1 le centre optique, le foyer principal objet et le foyer principal image de l'objectif. De même, on note respectivement O_2 , F_2 et F'_2 le centre optique, le foyer principal objet et le foyer principal image de l'oculaire.

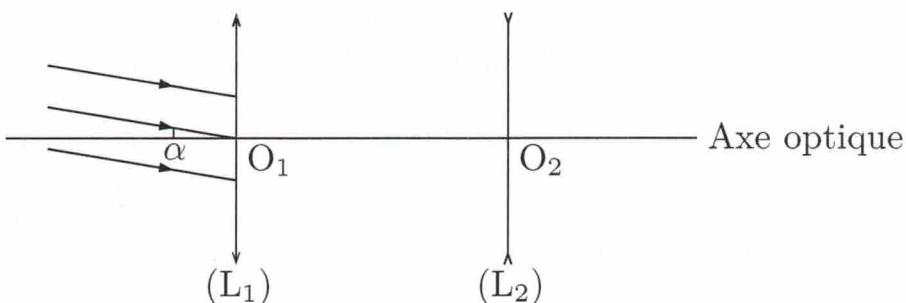


FIGURE 3 – Schéma optique de la lunette de Galilée.

La lunette est réglée de façon à donner une image à l'infini d'un objet à l'infini, ce qui permet à l'observateur d'éviter toute fatigue. Dans ces conditions, la lunette est dite afocale.

4. Préciser et justifier la position relative des foyers des lentilles. En déduire l'encombrement $\ell = O_1 O_2$ en fonction de f'_1 et de $|f'_2|$.
5. Recopier le schéma de la figure 3 et poursuivre le tracé des rayons incidents parallèles faisant un angle α avec l'axe optique et émergeant sous un angle α' avec l'axe optique.
6. L'image du Fort à travers les jumelles apparaît-elle droite ou renversée par rapport au Fort observé à l'œil nu ? Justifier.
7. En se plaçant dans les conditions de Gauss, les angles α et α' sont petits ; déterminer l'expression du grossissement de la lunette $G = \alpha'/\alpha$ en fonction de f'_1 et de $|f'_2|$.
8. Compte tenu des valeurs de grossissement et d'encombrement précisées en fin de partie, calculer la valeur des distances focales f'_1 et f'_2 .

On observe le Fort, de hauteur h , depuis l'île d'Aix située à une distance d .

9. Sous quel angle le Fort est-il observé à l'œil nu ? Sous quel angle est-il observé à travers les jumelles ? Vérifier la validité des conditions de Gauss.

Données

Hauteur du Fort Boyard :	$h = 20 \text{ m}$
Distance Île d'Aix-Fort Boyard :	$d = 3,0 \text{ km}$
Grossissement de la lunette de Galilée :	$G = 20$
Encombrement de la lunette de Galilée :	$\ell = 25 \text{ cm}$

L'épreuve de la cloche

Parmi les épreuves soumises aux candidats, on s'intéresse à l'épreuve de la cloche. Le candidat est attaché debout sur un trapèze, ce dernier faisant initialement un angle de 20° par rapport à la verticale. Celui-ci est lâché sans vitesse initiale et décrit un mouvement oscillant. Ses équipiers vont alors tirer sur une corde pour donner de plus en plus d'amplitude au trapèze, tout comme s'ils sonnaient une cloche. Le candidat malmené pourra attraper l'indice qui se trouve suspendu en hauteur à condition que l'amplitude des oscillations soit suffisante. Pour une efficacité maximale, la technique consiste à tirer sur la corde lorsque le trapèze est à son point le plus haut afin d'en augmenter l'amplitude à chaque oscillation.

On étudie tout d'abord le mouvement du système {candidat+trapèze}, sans l'intervention des coéquipiers, effectuant des oscillations libres. On modélise la situation par un pendule simple ponctuel M de masse m , attaché à l'extrémité d'un fil souple de masse négligeable, inextensible et dont l'autre extrémité O est fixe, plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\hat{u}_x$ de longueur ℓ_0 et dont l'autre extrémité O est fixe, plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\hat{u}_x$ (Fig. 4). Dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen, le mouvement du point M est plan, sa position étant repérée par l'angle θ . On néglige tout frottement. À l'instant initial $t = 0$, le pendule est écarté d'un angle θ_0 et lâché sans vitesse : $\dot{\theta}(t = 0) = 0$.

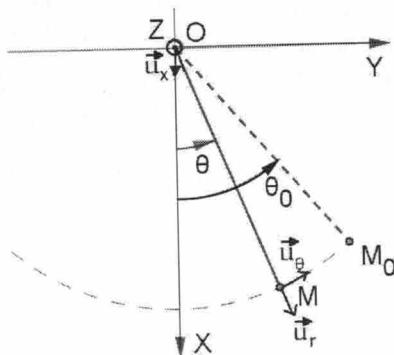


FIGURE 4 – Pendule simple.

10. Exprimer les vecteurs vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} du point M dans la base polaire $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$.
11. Expliciter l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p(\theta)$ du point M en fonction de m , g , ℓ_0 et de θ . On prendra $\mathcal{E}_p(\theta = \pi/2) = 0$.
12. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ . On posera $\omega_0 = \sqrt{g/\ell_0}$.
13. Dans le cas de petits mouvements, déterminer la loi horaire $\theta(t)$ et calculer littéralement, puis numériquement la période T_0 du mouvement.

Afin de tenir compte de l'intervention des coéquipiers, on considère désormais que la longueur du fil, notée $\ell(t)$, varie dans le temps. On ne se place plus dans le cas de petits mouvements.

14. Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit à présent

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\ell}(t)}{\ell(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)} \sin \theta = 0.$$

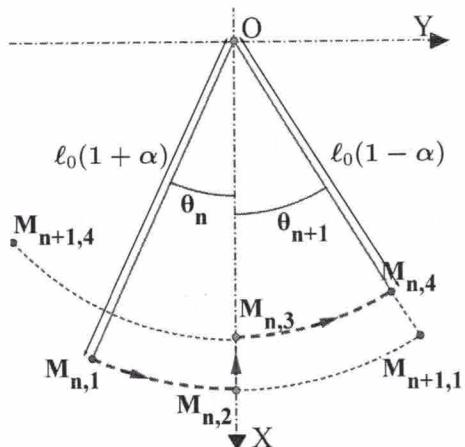


FIGURE 5 – Pendule de longueur variable.

Cette équation étant difficile à résoudre analytiquement, on opte pour une approche discrète dans laquelle la longueur $\ell(t)$ passe instantanément de la valeur $\ell_0(1 + \alpha)$ à la valeur $\ell_0(1 - \alpha)$ au passage par la verticale, et reprend sa valeur $\ell_0(1 + \alpha)$ aux positions extrêmes où sa vitesse s'annule. On a $0 < \alpha < 1$. Lors d'un mouvement entre $M_{n,1}$ et $M_{n,4}$, le mobile part du point $M_{n,1}$ d'angle non orienté θ_n avec une vitesse nulle, et arrive en $M_{n,4}$ d'angle non orienté θ_{n+1} avec une vitesse nulle (Fig. 5). Dans la phase retour, le mobile repart de $M_{n+1,1}$ sans vitesse.

15. Que dire de l'énergie mécanique entre les points $M_{n,1}$ et $M_{n,2}$? En adaptant le résultat de la question 11, montrer que la vitesse $v_{n,2}$ au point $M_{n,2}$ lors du passage du mobile par la verticale peut s'écrire

$$v_{n,2} = \sqrt{2g\ell_0\beta}(1 - \cos \theta_n)^\gamma.$$

Préciser l'expression de β en fonction de α , ainsi que la valeur de l'exposant γ .

16. Entre les points $M_{n,2}$ et $M_{n,3}$, on admet que le moment résultant exercé sur le mobile est nul : son moment cinétique est donc conservé. En déduire la vitesse $v_{n,3}$ au point $M_{n,3}$ en fonction de g , ℓ_0 , α et de θ_n .
17. Déterminer alors la relation entre l'angle de montée θ_{n+1} et l'angle θ_n sous la forme

$$1 - \cos \theta_{n+1} = \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right)^\delta (1 - \cos \theta_n).$$

Donner la valeur de l'exposant δ .

18. Montrer que l'amplitude des balancements augmente.
19. En remarquant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1 - \cos \theta_n$ est géométrique, exprimer en fonction de θ_0 et de α le nombre N d'allers-retours permettant au candidat d'atteindre un angle $\theta = \pi/2$ et ainsi d'attraper l'indice. Calculer numériquement N en prenant $\theta_0 = 20^\circ$ et $\alpha = 1/20$.

Données

Accélération de la pesanteur :	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Longueur du fil du pendule simple :	$\ell_0 = 7,0 \text{ m}$

Exercice 2 – Capteurs

Capteur de pression sanguine

Afin d'obtenir une mesure de la pression artérielle en continu (Fig. 6), la réalisation d'un transducteur de pression est nécessaire. On utilise souvent un transducteur piézoélectrique qui convertit un signal de pression $P(t)$ en une tension électrique directement mesurable $u_{\text{mes}}(t)$. La piézorésistivité traduit le fait que la résistance électrique de certains matériaux varie selon la pression à laquelle ils sont soumis.

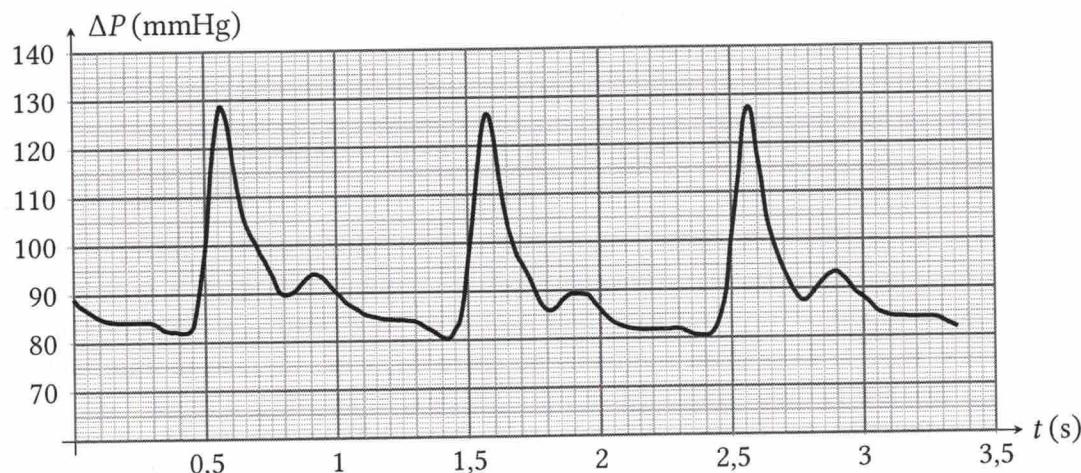


FIGURE 6 – Mesure de la pression artérielle en fonction du temps. La pression est exprimée en millimètre de mercure (mmHg), une unité de pression largement utilisée en médecine. On a $P_{\text{atm}} = 760 \text{ mmHg}$.

Pour cette mesure, on considère pour cela un matériau piézorésistif dont la résistance dépend de la pression sous la forme suivante :

$$R = R_0[1 + k(P - P_{\text{atm}})].$$

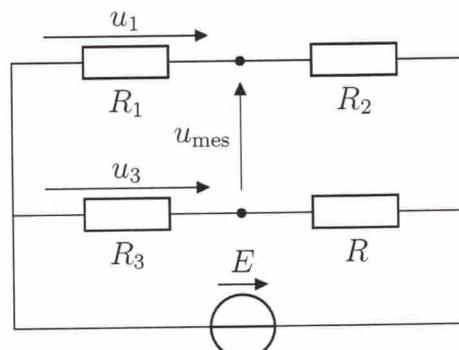
$P_{\text{atm}} = 1,013 \text{ bar}$ est la pression atmosphérique, k une constante appelée coefficient de piézorésistivité et R_0 est la valeur de la résistance pour $P = P_{\text{atm}}$.

Le matériau piézorésistif est placé dans le circuit représenté ci-dessus. E est une tension continue constante. R_1 est une résistance variable. R_2 et R_3 sont des résistances constantes. u_{mes} est la tension mesurée.

1. Exprimer u_1 en fonction de R_1 , R_2 et E , puis u_3 en fonction de R , R_3 et E . En déduire que

$$u_{\text{mes}} = E \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R} \right).$$

2. Déterminer l'expression de R_1 qui permet d'avoir $u_{\text{mes}} = 0$ lorsque $P = P_{\text{atm}}$, en fonction de R_0 , R_2 et R_3 . Cette valeur est fixée pour la suite.



3. On considère une variation de pression ΔP positive par rapport à P_{atm} de sorte que $P = P_{\text{atm}} + \Delta P$. On suppose que la condition $k\Delta P \ll 1$ est vérifiée en pratique. Montrer que

$$u_{\text{mes}} \approx \frac{R_0 R_3 E}{(R_0 + R_3)^2} k \Delta P.$$

$$R_a = R_0 \left[1 + \frac{k(P - P_{\text{atm}})}{\Delta P} \right]$$

La mesure de u_{mes} en fonction du temps donne accès aux variations de la pression artérielle ΔP . Une mesure de pression artérielle en fonction du temps est donnée sur la figure 6.

4. Le spectre de la pression artérielle (Fig. 6) contient-il des harmoniques ? Justifier.
 5. Quel type de filtrage est adapté pour déterminer la pression artérielle moyenne ? Justifier.
 On précisera la fréquence de coupure du filtre.

Capteur capacitif de hauteur d'eau

Afin de mesurer le niveau d'eau dans un réservoir, on utilise le capteur capacitif représenté sur la figure 7. Il s'agit d'un condensateur, dont l'une des armatures est formée d'un cylindre conducteur de diamètre d , recouvert d'une mince couche d'isolant d'épaisseur e . L'autre armature est l'eau qui entoure le cylindre. On note z la hauteur du liquide, repérée à partir de l'extrémité inférieure du cylindre.

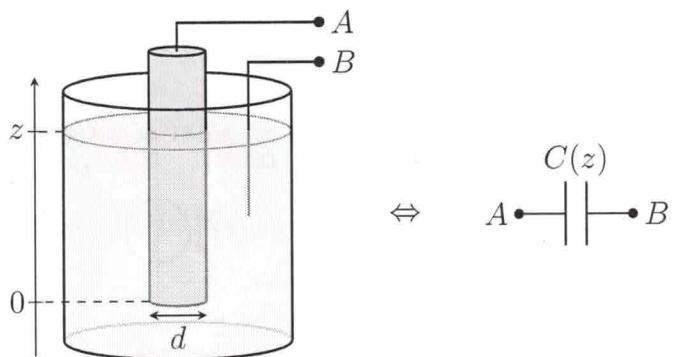


FIGURE 7 – Capteur capacitif de niveau d'eau. L'électrode métallique au centre est électriquement isolée de l'eau par une mince couche d'isolant.

On admet que la capacité du condensateur ainsi formé est donnée par $C = \epsilon_0 \epsilon_r S / e$, où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide, ϵ_r la permittivité relative de l'isolant (constante) et où S est la surface de l'armature cylindrique en contact avec l'eau.

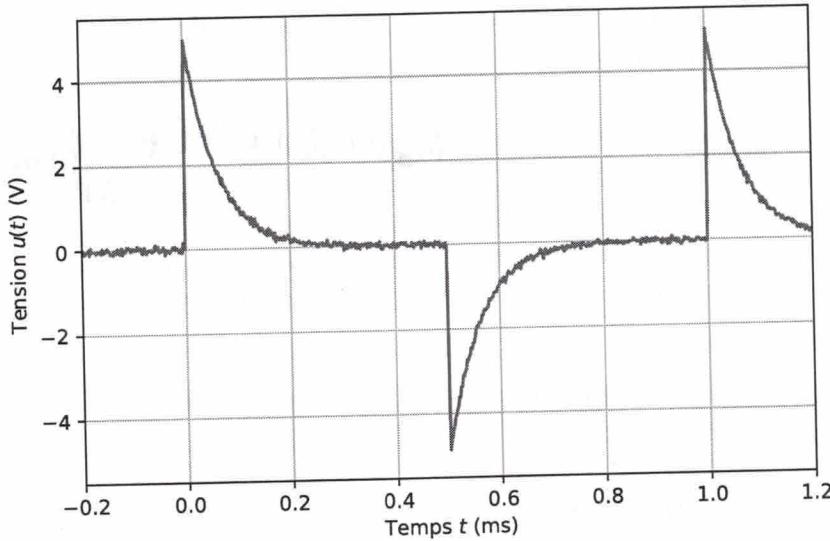
6. Montrer que la capacité $C(z)$ du condensateur s'exprime sous la forme

$$C(z) = C_0 + \gamma z,$$

où C_0 et γ sont deux constantes que l'on exprimera en fonction des données de l'énoncé.
 Donner l'unité de γ .

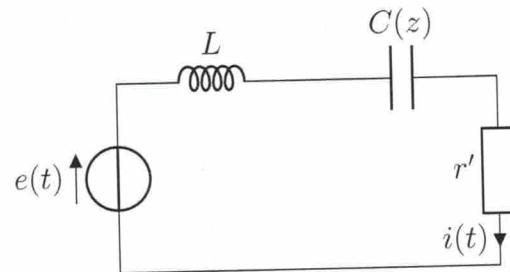
Un étalonnage permet de déterminer la valeur de γ . On obtient $\gamma = 2,2 \times 10^{-7}$ USI (unité du système international). On suppose dans toute la suite que la hauteur d'eau est suffisante pour avoir $C_0 \ll \gamma z$, de sorte que $C(z) \approx \gamma z$.

Le capteur capacitif est branché en série avec une résistance $r = 500 \Omega$ et un GBF qui délivre une tension en créneau entre 0 V et 5 V. Lors d'une mesure (Fig. 8), on relève la tension $u(t)$ aux bornes de l'un des dipôles du circuit.

FIGURE 8 – Évolution de la tension $u(t)$ aux bornes d'un des dipôles du circuit.

7. Aux bornes de quel dipôle la tension $u(t)$ est-elle mesurée ? Justifier sans calcul.
 8. Proposer une estimation de la hauteur z_0 d'eau dans le réservoir au moment de la mesure.

Afin d'améliorer la précision de la mesure, on réalise, avec le capteur capacitif, le circuit RLC représenté ci-contre, où le générateur délivre cette fois une tension sinusoïdale à la pulsation ω . On adoptera la notation complexe de sorte que $e(t) = E_0 e^{j\omega t}$ et $i(t) = I e^{j\omega t}$, avec I l'amplitude complexe de l'intensité $i(t)$.



9. Rappeler l'expression de l'impédance complexe d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine.
 10. Montrer que l'amplitude complexe I de l'intensité du courant dans le circuit s'écrit sous la forme

$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)},$$

où I_0 , ω_0 et Q sont des constantes que l'on exprimera en fonction de E_0 , r' , L , et C .

11. En déduire l'expression de l'amplitude réelle I de $i(t)$.
 12. Justifier qu'il y a résonance en intensité à une pulsation ω_c dont on donnera l'expression.
 13. Expliquer succinctement comment ce montage peut-être utilisé pour déterminer la hauteur d'eau dans le réservoir. Indiquer notamment comment choisir r' et L pour réaliser une mesure la plus précise possible.

Exercice 3 – Eau chaude sanitaire

Plus de la moitié des logements produisent leur eau chaude sanitaire (ECS) de manière indépendante. L'électricité est la première source de production d'ECS des résidences principales. Avec la réglementation thermique 2012 qui impose une réduction très importante des besoins de chauffage, la part de la consommation liée à l'ECS est en passe de devenir l'un des premiers postes de consommation dans les bâtiments résidentiels neufs. Les besoins en ECS sont établis à 40 °C, température moyenne d'utilisation de l'ECS. Les besoins journaliers par personne sur une année sont en moyenne de (56 ± 23) L à 40 °C.

Source : ademe.fr

On considère un appartement où vivent deux étudiants en collocation. L'eau chaude sanitaire (ECS) est produite par un chauffe-eau électrique dont les caractéristiques techniques sont données ci-dessous. Il s'agit d'un cylindre contenant un réservoir d'eau de volume V , isolé par une épaisseur e de laine de roche. Le réservoir est alimenté par le circuit d'eau froide à la température $T_f = 15$ °C. Une résistance chauffante permet de maintenir la température de l'eau du réservoir à une température $T_c = 65$ °C.

Caractéristiques techniques du chauffe-eau

- capacité : $V = 150$ L ;
- dimensions : hauteur $h = 120$ cm ; diamètre : $d = 50$ cm ;
- épaisseur d'isolant : $e = 5$ cm ;
- conductivité thermique de la laine de roche $\lambda = 0,036 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- puissance : $\mathcal{P}_e = 1600$ W ;
- temps de chauffe de 15 °C à 65 °C : $\tau_c = 349$ min.

Mise en service

Dans cette partie seulement, on considère que la paroi du chauffe-eau est parfaitement calorifugée : on néglige les transferts thermiques autres que celui de la résistance chauffante. Lors de l'emménagement des étudiants, le chauffe-eau est plein d'eau froide à la température T_f depuis très longtemps.

1. Exprimer, puis calculer la durée Δt qu'il faudrait pour porter l'eau seule contenue dans le chauffe-eau à la température T_c en fonction de V , T_f , T_c , \mathcal{P}_e , de la capacité thermique massique c de l'eau et de sa masse volumique ρ . Commenter.
2. Exprimer, puis calculer la valeur en eau μ du chauffe-eau, c'est-à-dire la masse d'eau qui aurait la même capacité thermique que le chauffe-eau seul, en fonction de ρ , c , V , T_f , T_c , \mathcal{P}_e et τ_c . Commenter.

Dans toute la suite, on négligera la capacité thermique du chauffe-eau.

3. Une fois que l'eau est à la température T_c , le chauffe-eau s'éteint temporairement. Un volume $V_1 = 30$ L d'eau chaude est utilisé pour le premier grand ménage de l'appartement, remplacé dans le réservoir par le même volume d'eau froide. Exprimer, puis calculer la température T_1 de l'eau du réservoir avant que le chauffe-eau ne se rallume.
4. Proposer une estimation de la consommation énergétique annuelle moyenne due à la production d'ECS dans l'appartement des étudiants. On exprimera le résultat en kilowatt-heure ($\text{kW} \cdot \text{h}$).

Pertes thermiques

Les parois du chauffe-eau ne sont en réalité pas parfaitement calorifugées : l'eau à la température $T(t)$ reçoit de l'extérieur à la température T_0 une puissance thermique

$$\Phi = \frac{T_0 - T(t)}{R_{\text{th}}}, \quad \text{avec} \quad R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}.$$

R_{th} est la résistance thermique des parois du chauffe-eau, λ la conductivité thermique de l'isolant d'épaisseur e et S est la surface extérieure de la paroi (on ne comptera que la surface latérale du cylindre et pas celle de ses extrémités).

5. Rappeler les trois modes de transfert thermique.

Lorsque le chauffe-eau est allumé, la température de l'eau est constante et égale à T_c . La température de la pièce est supposée constante et égale à $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

6. Avant de partir pour une semaine de vacances bien méritées, les deux étudiants éteignent le chauffe-eau. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$. On fera apparaître un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression en fonction des paramètres du problème.
7. La résoudre et représenter graphiquement $T(t)$.
8. En rentrant et avant même de rallumer le chauffe-eau, les étudiants sont surpris de constater que l'eau est encore tiède. Commenter.

Régulation de température

On suppose dans la suite que le refroidissement n'est dû qu'au transfert thermique Φ à travers la paroi : les deux étudiants sont en cours, ils ne consomment pas d'eau chaude.

9. En régime permanent, déterminer la puissance avec laquelle il faudrait alimenter la résistance chauffante pour que la température de l'eau du réservoir reste égale à T_c .

La régulation de la température $T(t)$ de l'eau du réservoir fonctionne en réalité en tout ou rien :

- la résistance chauffante est d'abord alimentée à la pleine puissance du chauffe-eau tant que $T(t) < T_c$;
 - dès que $T(t) \geqslant T_c$, l'alimentation de la résistance chauffante est coupée, et ce tant que $T(t) > T_m = 64^\circ\text{C}$;
 - dès que $T(t) \leqslant T_m$, l'alimentation de la résistance chauffante est rallumée et le cycle recommence.
10. Donner l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ sur un intervalle $[t_0, t_1]$ où la résistance est alimentée, avec les instants t_0 et t_1 tels que $T(t_0) = T_m$ et $T(t_1) = T_c$.
 11. La résoudre et donner l'expression de $T(t)$. Déterminer la durée de cette phase, soit $t_1 - t_0$.
 12. Exprimer, puis calculer la durée $t_2 - t_1$ pendant laquelle la résistance n'est plus alimentée, où t_2 est tel que $T(t_2) = T_m$.
 13. Représenter graphiquement $T(t)$ sur quelques cycles de fonctionnement de la régulation de température.