Exercice. Deux questions en guise d'échauffement.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $P = X^5 + aX^2 + bX$.
   (a) Prouver qu'il existe un unique couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ pour lequel 1 est racine de multiplicité au moins 2 de P.
   (b) Factoriser dans ce cas le polynôme P en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, et $\omega \in \mathbb{C}$.
   On note $\widetilde{P} : z \mapsto P(z)$ la fonction polynomiale associée, définie sur $\mathbb{C}$.
   Prouver que l'ensemble des antécédents de ω par $\widetilde{P}$ est non vide et fini.

Problème. Une preuve de l'identité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{C}[X]$:

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right].$$

1. En développant par la formule du binôme de Newton, montrer que
$$P_n = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^{2\ell}.$$
   On précisera les coefficients a_ℓ et on vérifiera que ce sont des réels.
   Préciser le degré de P_n, son coefficient dominant et le coefficient de X^{2n-2}.
2. Montrer que les racines complexes de P_n sont exactement les nombres réels
$$\omega_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, \quad k \in [\![1, 2n]\!].$$
   En déduire que
$$P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}(X - \omega_k).$$
3. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que : $\omega_{2n+1-k} = -\omega_k$.
   En déduire que
$$\prod_{k=1}^{2n}(X - \omega_k) = \prod_{k=1}^{n}(X^2 - \omega_k^2).$$
4. On pose $Q_n(X) = (2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \omega_k^2)$.
   Montrer que $Q_n(X^2) = P_n(X)$.
   Préciser le degré, le coefficient dominant et le coefficient de X^{n-1} de Q_n.
5. On définit :
$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\omega_k^2 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$
   (a) Montrer que $S_n = n + T_n$.
   (b) Montrer, en considérant la somme des racines de Q_n, que
$$T_n = \frac{n(2n-1)}{3} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{2n(n+1)}{3}.$$
6. (a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\sin x \leq x \leq \tan x$. En déduire que :
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad : \quad \frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}.$$
   (b) Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$
   (Encadrer cette somme à l'aide de S_n et T_n.)