

# TD13 : Dénombrement sur les arbres binaires

## 1 Lien entre les grandeurs d'un arbre binaire

On considère un arbre binaire de hauteur  $h$  possédant  $n$  nœuds dont  $f$  feuilles.

**Question 1 :** Si un arbre binaire possède  $n$  nœuds, quelle est sa hauteur maximale? minimale?

**Question 2 :** Si un arbre binaire est de hauteur  $h$ , quel est son nombre minimal de nœuds? maximal?

**Question 3 :** Si un arbre binaire est de hauteur  $h$ , quel est son nombre minimal de feuilles? maximal?

**Question 4 :** Si un arbre binaire possède  $n$  nœuds, quel est son nombre minimal de feuilles? maximal?

**Question 5 :** Montrer que le nombre de feuilles d'un arbre binaire est égale à son nombre de nœuds de degré 2 plus un.

## 2 Compter des arbres binaires

**Question 6 :** Combien y a-t-il d'arbres binaires stricts possédant 3 nœuds? 4 nœuds?

**Question 7 :** Donner une relation de récurrence sur le nombre d'arbres binaires stricts possédant  $n$  nœuds.

## 3 Parcourir des arbres binaires

**Question 8 :** Un arbre binaire étant représenté (en ocaml) par le type

```
type arbre = Feuille | Noeud of arbre * arbre
```

Écrire une fonction `arbre -> int` qui calcule la hauteur de l'arbre. Quelle est sa complexité temporelle?

**Question 9 :** On suppose qu'un arbre binaire est représenté (en C) par un tableau de père : pour chaque  $i$ , `pere[i]` est l'indice du père du nœud d'indice  $i$ , avec par convention que la racine est son propre père.

1. On suppose que la numérotation est compatible avec la généalogie, c'est-à-dire que pour tout  $i$ , on a `pere[i] ≤ i`. Écrire une fonction `hauteur` qui renvoie la hauteur d'un arbre, de complexité temporelle  $\Theta(n)$ .
2. Sans cette hypothèse de compatibilité généalogique, est-ce encore possible?