Chapitre 42

Familles sommables.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

Introduction.

Exemple 1: Pour poser le problème.

Soit la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ définie pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ par $u_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p+1 \\ -1 & \text{si } p = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{Calculer:} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}, \quad \sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{n+p=N} u_{n,p}. \quad \text{Commenter.}$$

Solution :

La première somme vaut -1, la deuxième vaut 1 et la dernière n'est pas sommable.

1 Sommer des réels positifs.

1.0 Travailler dans $[0, +\infty]$

On note $\boxed{[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}}$.

Définition 2

On appelle **borne supérieure** d'une partie A de $[0, +\infty]$ le plus petit des majorants de A dans $[0, +\infty]$. Cet élément de $[0, +\infty]$ est noté $\sup(A)$.

Méthode : Passage au sup : l'argument clé du cours.

Soient $M \in [0, +\infty]$ un réel et A une partie de $[0, +\infty]$. Pour démontrer l'inégalité $\sup(A) \leq M$, il suffira de montrer que M est un majorant de A, autrement dit:

$$(\forall x \in A \quad x \leq M) \Longrightarrow \sup(A) \leq M.$$

1.1 Somme d'une famille de réels positifs.

Définition 3

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs**. On appelle **somme** de cette famille, notée $\sum_{i\in I} u_i$ le nombre

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i, \ F \subset I, \ F \text{ finie}\right\} \quad (\in [0, +\infty]).$$

Proposition 4

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et $I' \subset I$. On a $\sum\limits_{i\in I'} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.

Preuve :

Soit $F \subset I'$ finie. Alors $F \subset I$. On a:

$$\sum_{i\in F} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in I'} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$$

Par passage au sup sur F.

Proposition 5

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs telles que $\forall i \in I,\ u_i \leq v_i$. On a $\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$

Preuve :

Soit $F \subset I$ finie. Alors on a:

$$\sum_{i\in F} u_i \leq \sum_{i\in F} v_i \leq \sum_{i\in I} v_i \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$$

Par passage au sup sur F.

Proposition 6: Lien avec les sommes finies, les sommes de séries.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

1. Si I est finie, le nombre $\sum\limits_{i\in I} u_i$ est à la fois la somme des nombres de la famille, et la somme de la famille.
2. Si $I = \mathbb{N}$, alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$, le nombre à droite étant la somme de la série $\sum u_n$.

Preuve :

$\boxed{1.}$ Notons s la somme finie habituelle et σ la nouvelle.
⊙ On a $I \subset I$ finie, donc $s \leq \sigma$.
⊙ Soit $F \subset I$ finie, on a

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in I\setminus F} u_i \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in F} u_i \leq s \quad \text{alors} \quad \sigma \leq s.$$

Par antisymétrie, $\sigma = s$.

$\boxed{2.}$ ⊙ Soit $N \in \mathbb{N}$, $[\![0, N]\!] \subset \mathbb{N}$ donc $\sum\limits_{i=0}^{N} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$. Par passage à la limite, $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.
⊙ Soit $F \subset \mathbb{N}$ finie. On a

$$\sum_{i\in F} u_i \leq \sum_{i=0}^{N} u_i \quad \text{avec } N = \max(F).$$

Alors, par passage à la limite, puis au sup:

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Proposition 7: Invariance de la somme par permutation, cas positif.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs et σ une bijection de I dans I. On a

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

Preuve :

⊙ Soit $F \subset I$ finie. On a

$$\sum_{i\in F} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in\sigma(F)} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} \leq \sum_{i\in I} u_i.$$

⊙ Soit $F \subset I$ finie. On a

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{i\in\sigma^{-1}(F)} u_{\sigma(i)} \leq \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

1.2 Familles sommables de réels positifs.

Définition 8

Une famille de réels **positifs** $(u_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si sa somme est finie, ce qui se note

$$\sum_{i\in I} u_i < +\infty.$$

Proposition 9

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs (indexées par le même ensemble) et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

- La famille $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ le sont.
- Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

Preuve :

Trivial.

1.3 Sommation par paquets.

Théorème 10: de sommation par paquets, cas positifs.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs**.
On suppose que I s'écrit comme une réunion **disjointe** $I = \bigcup_{j\in J} I_j$. Alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$$

Preuve :

Preuve hors-programme.

Corrolaire 11: si cette somme est finie, alors c'est sommable.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres positifs est sommable si et seulement si

1. pour tout $j \in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable,
2. la famille $(\sum_{i\in I_j} u_i)_{j\in J}$ est sommable.

Théorème 12: de Fubini positif.

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs indexée par un produit cartésien $I \times J$, on a:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

Preuve :

On a $I \times J = \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times J)$ où les $\{i\} \times J$ sont un recouvrement disjoint de $I \times J$. Alors:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{(i,j)\in\{i\}\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j}.$$

Exemple 13: Sommes triangulaires, cas positif.

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs indexée par $\mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}$$

Solution :

On a $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ où $I_n = \{(k, n-k) \mid 0 \le k \le n\}$ recouvrement disjoint.

Exemple 14

Calculer la somme de la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{p^2q^2} &= \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\sum_{q\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2q^2} = \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}\left(\sum_{q\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{q^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}\\ &= \frac{\pi^4}{36}.\end{aligned}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p+q = n\} = \{(k, n-k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$ (recouvrement disjoint).

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(p+q)^2} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{(p,q)\in I_n}\frac{1}{(p+q)^2}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}|I_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc la famille n'est pas sommable.

Exemple 15

Démontrer l'identité $\sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)=1$.

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1) &= \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 16

Soit $a\in[0,1[$. En considérant la famille $(a^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, démontrer l'identité:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1-a^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)a^n,$$

où pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Solution :

On va poser pour $n\in\mathbb{N}^*,\ I_n=\{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \mid pq=n\}$ (recouvrement disjoint):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1-a^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}(a^n)^p = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}a^{pq} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{(p,q)\in I_n}a^{pq} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}a^n|I_n| \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}a^n d(n)\end{aligned}$$

En effet, $I_n=\{(p,\frac{n}{p}) \mid p \text{ divise } n\}$. Donc $|I_n|=d(n)$.

2 Sommer des nombres complexes.

2.1 Familles sommables de nombres complexes: l'espace ℓ^1.

2.2 Somme d'une famille sommable de nombres complexes.

2.3 Sommation par paquets.

2.4 Produits.

3 Exercices.

Exercice 1

Calculer la somme de $\left(\frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)}\right)_{i\geq 0, j\geq 1}$ (on suppose $\zeta(2)$ connu). En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}.$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} &= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(j^2+i)(j^2+i+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^2+i} - \frac{1}{j^2+i+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \mid n = i + j^2\}$ (recouvrement disjoint).

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}|I_n| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

En effet, $I_n = \{(n-j^2, j^2) \mid j^2 \in [\![1,n]\!]\} = \{(n-j^2, j^2) \mid j \in [\![1,\sqrt{n}]\!]\}$. Donc $|I_n| = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

En conclusion, cette somme vaut $\zeta(2)$.