# Chapitre 35

Intégrales sur un segment

## 1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

### 1.1 Ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$

**Définition 1: Fonction continue par morceaux sur un intervalle.**

Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que $f$ est **continue par morceaux** sur $I$ si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $I$.

**Exemple 2:** $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

La fonction $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Expliquer.

**Preuve :**

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Notons $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cap ]a, b[$.
Cet ensemble est finito : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a < \frac{1}{n} < b \iff \frac{1}{b} < n < \frac{1}{a} \iff \lfloor \frac{1}{b} \rfloor + 1 \leq n \leq \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$.
$S$ contient donc au plus $\lfloor \frac{1}{a} \rfloor - \lfloor \frac{1}{b} \rfloor$ points.
Notons $n = |S|$ puis $S = \{a_1, ..., a_n\}$, avec $a_1 < a_2 < ... < a_n$.
Posons $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1})$ avec $a_0 := a$ et $a_{n+1} := b$.
Soit $i \in [\![0, ]\!]$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est constante, elle y est donc continue et prolongeable par continuité aux bords. Ainsi, $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
**Remarque:** En posant $f(0) := 0$, ça ne marche plus car $f_{|[0,b]}$ n'est pas cpm sur $[0, b]$.

### 1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux entre deux bornes

**Définition 3**

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ou plus simplement $\int_a^b f$ le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_{[} a, b]f \text{ si } a < b, \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_{[b,a]} f \text{ si } a > b.$$

**Proposition 4**

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont continues par morceaux sur $I$.
Pour $a, b \in I$, on pose :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la partie réelle de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle, idem pour la partie imaginaire.

**Preuve :**

Pour prouver la continuité par morceaux de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à partir de celle de $f$, on introduit une subdivision adaptée à $f$ $\sigma = (a_0, ..., a_n)$ et on prouve qu'elle est adaptée à sa partie réelle et à sa partie imaginaire. On peut utiliser :

$$\forall x \in I \ \mathrm{Re}(f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \text{ et } \mathrm{Im}(f(x)) = \frac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}).$$

En effet, ces relations donnent que pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, les restrictions de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à $]a_i, a_{i+1}[$ y sont continues, et prolongeables par continuité sur les bords.

### 1.3 Relation de Chasles.

**Proposition 5: Relation de Chasles**

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $a, b, c \in I$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Preuve :**

La relation a été établie dans le cours de construction pour une fonction à valeurs réelles dans le cas où $a < c < b$.
• cas $a < b < c$ :

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_{[a,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

• cas $b = c < a$ :
D'une part $\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$, d'autre part : $\int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f = -\int_[ b,a] f$.
Les autres cas sont similaires.

### 1.4 Linéarité.

**Proposition 6: Linéarité de l'intégrale.**

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et $a, b \in I$. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

**Preuve :**

On l'a prouvé pour $a < b$ et $f, g$ à valeurs réelles. Il faut le vérifier dans les autres cas.

### 1.5 Intégrales et inégalités.

**Proposition 7: Positivité**

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ où le segment $[a, b]$ est tel que $\boxed{a \leq b}$.
Si $f$ est positive sur $[a, b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un nombre positif.
Si $f$ est négative sur $[a, b]$, alors cette intégrale est un nombre négatif.

**Preuve :**

On l'a déjà prouvé.

**Proposition 8: Intégrale nulle d'une fonction positive et continue**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $\boxed{a < b}$, continue et positive sur $[a, b]$.
Si $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors $f$ est nulle sur $[a, b]$.
Par contraposée, si $\exists c \in [a, b]\ f(c) > 0$, alors $\int_a^b f > 0$.

**Preuve :**

Il y a aussi la preuve suivante dans **L'Exercice 79** de la banque CCINP :
On suppose $f$ continue et positive sur $[a, b]$ et $\int_a^b f = 0$.
Posons $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ définie sur $[a, b]$, $f$ étant continue sur $[a, b]$, $F$ est une primitive de $f$ sur $[a, b]$ d'après le TFA (prouvé plus loin).
Donc $\forall x \in [a, b],\ F'(x) = f(x) \geq 0$, ainsi $F$ est croissante sur $[a, b]$.
Or, $F(b) = \int_a^b f = 0$, de plus, $F(a) = \int_a^a f = 0$.
Par croissance, $\forall x \in [a, b],\ F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ donc $F(x) = 0$.
Donc $F$ est constante sur $[a, b]$, on a $a < b$ donc $\forall x \in [a, b],\ F'(x) = f(x) = 0$.

**Remarque:** Pourquoi continue et pas continue par morceaux ?

Soit $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$, son intégrale est nulle, mais $f$ ne l'est pas.