Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{i\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}z^{n-p}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}z^{n-p}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p\right]$$

En échangeant les symboles sommes,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{i\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n}{p}z^{n-p}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p\right]$$
$$= \sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}z^{n-p}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p\right]$$

Apparaît une progression géométrique de raison $e^{\frac{2ip\pi}{n}}$, qui vaut 1 si $p=0$ ou $p=n$, et qui est différent de 1 sinon. Or

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k = \begin{cases} n & \text{si } p=0 \text{ ou si } p=n \\ 0 & \text{si } p \in [\![1, n-1]\!] \end{cases}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{i\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = \binom{n}{0}z^{n-0}n + \binom{n}{n}z^{n-n}n = n(z^n+1)$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n+1)}$$

2. Pour $z=1$, il vient,

$$2n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(2e^{\frac{ik\pi}{n}}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n \quad \text{(angle moitié)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}2^n e^{ik\pi}\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}2^n (e^{i\pi})^k\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= 2^n \times \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$$

Exercice 2.

1. Dans cette question, les résultats sont donnés sans détails : les méthodes du cours s'appliquent sans obstacle.

   - Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation se récrit
   $$y' - \frac{1}{x}y = x.$$
   L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est
   $$S_+ = \left\{x \mapsto x^2 + \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
   - Sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation se récrit
   $$y' + \frac{1}{x}y = -x.$$
   L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_*^*-$ est
   $$S_+ = \left\{x \mapsto -\frac{x^2}{3} + \lambda \cdot \frac{1}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. On cherche dans cette question les solutions sur $\mathbb{R}$.

Analyse. Considérons une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \cdot f'(x) - f(x) = x^2.$$

En évaluant en 0, on obtient que $f(0)$ vaut nécessairement 0.

La restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après la question 1, il existe une constante λ réelle telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^2 + \lambda x.$$

La restriction de f à $\mathbb{R}_-^*$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$. D'après la question 1, il existe une constante μ réelle telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f(x) = -\frac{x^2}{3} + \mu \cdot \frac{1}{x}.$$

Le réel μ est nécessairement nul car sinon, on aurait

$$|f(x)| \underset{x \to 0_-}{\longrightarrow} +\infty$$

Examinons le taux d'accroissement de f en 0.
— Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x + \lambda \underset{x \to 0_+}{\longrightarrow} \lambda.$$

— Pour $x < 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = -\frac{x}{3} \underset{x \to 0_-}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction f étant supposée dérivable en 0, son taux d'accroissement en 0 possède une limite en 0. Pour que cela soit, il est nécessaire que $\lambda = 0$.

Ainsi, s'il existe une solution, c'est la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ -\frac{x^2}{3} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Synthèse. Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ -\frac{x^2}{3} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Il est clair que la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Pour démontrer la dérivabilité en 0, il suffit de prouver (voir calculs dans l'analyse) que le taux d'accroissement en 0 possède une limite finie en 0. C'est le cas ici et elle est nulle. Reste à vérifier que l'égalité

$$|x|f'(x) - f(x) = x$$

est vraie pour tout x réel. C'est vrai pour $x = 0$ (facile). C'est vrai pour tout x strictement positif car on sait que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est solution de l'équation. C'est vrai pour tout x strictement négatif car...etc.

Conclusion. Il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ et c'est la fonction décrite plus haut.