Exercice 1 Inégalité de Ky-Fan.

1. Démontrer que $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ est concave sur $]0, \frac{1}{2}]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in]0, \frac{1}{2}]^n$. Montrer que

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{1/n}} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}.$$

Exercice 2 (*facultatif*)

Avant de traiter cet exercice, on pourra relire dans le cours Primitives et intégrales *les propriétés que l'intégrale sur un segment partage avec la somme finie : croissance, linéarité, inégalité triangulaire.*

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On définit

$$\Delta_f : x \mapsto \int_0^1 |f(t) - x| \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que Δ_f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que Δ_f est continue sur $\mathbb{R}$.
   On pourra vérifier que f est 1-lipschitzienne.
3. Calculer les limites de Δ_f en $+\infty$.
   On pourra commencer par introduire les bornes de f sur $[0, 1]$.
4. Justifier que Δ_f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
5. Prouver que l'ensemble des points où ce minimum est atteint est un intervalle.