

Relations Binaires
Corrigé

DARVOUX Théo
Décembre 2023

Exercices.

Exercice 16.1	2
Exercice 16.2	2
Exercice 16.3	3
Exercice 16.4	3
Exercice 16.5	4
Exercice 16.6	4

Exercice 16.1 [◆◆◇]

Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{R} par :

$$x \mathcal{R} y \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .
2. Préciser le cardinal de la classe d'équivalence d'un réel x .
1. Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien que $xe^x = xe^x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$, on a bien $ye^x = xe^y$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Montrons que $xe^z = ze^x$.
D'après la première égalité, $y = xe^{y-x}$.
On remplace y dans la seconde : $xe^{y-x+z} = ze^y$.
On divise par e^y : $xe^{z-x} = z$. On multiplie par e^x : $xe^z = ze^x$.
On a bien $x \mathcal{R} z$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
On a $x \mathcal{R} y \iff xe^y = ye^x \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y}$.
On pose $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$. La classe d'équivalence de x est alors $\{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}$.
La question revient à chercher le nombre d'éléments dans \mathbb{R} qui ont la même image par f .
On a que f est dérivable et $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$. Alors :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

Alors, pour $x \in]-\infty, 0]$, $|[x]| = 1$, pour $x = 1$, $|[x]| = 1$ et sinon, $|[x]| = 2$.

Exercice 16.2 [◆◆◇]

On considère la relation \mathcal{R} définie sur \mathbb{N}^* par

$$p \mathcal{R} q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* : p^n = q.$$

- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre partiel sur \mathbb{N}^* .
- Réflexivité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $p^1 = p$, donc $p \mathcal{R} p$.
- Antisymétrie : Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = p$. Montrons que $p = q$.
On a $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = p$. De plus, $q^m = p$, donc $q^{nm} = p^n = q$.
Ainsi, $p = p^{nm}$ et $q = q^{nm}$. Alors, soit $p = q = 1$, soit $n = m = 1$ et alors $p = q$ dans tous les cas.
- Transitivité : Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = r$. Montrons que $p \mathcal{R} r$.
On a que $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = r$. Or $nm \in \mathbb{N}^*$, donc $p \mathcal{R} r$.
- \mathcal{R} est bien une relation d'ordre sur \mathbb{N}^* .
Ce n'est pas un ordre total : il n'existe pas d'entier n tel que $2^n = 3$ ou $3^n = 2$, par exemple.

Exercice 16.3 [◆◆◆]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $x \preceq y$ si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i.$$

1. Montrer que \preceq est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^n .

2. Si $n \geq 2$, montrer qu'il s'agit d'un ordre partiel.

1. Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a bien que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k x_i$.

Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $x \preceq y$ et $y \preceq x$. Montrons que $x = y$.

On a que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i \wedge \sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k x_i$.

Par antisymétrie de \leq , $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k y_i$.

Par récurrence triviale sur k , on peut montrer que tous les éléments sont égaux 1 à 1.

i.e. On initialise avec $k = 1$ pour obtenir $x_1 = y_1$, on suppose $x_k = y_k$ et on a $\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k = \sum_{i=1}^{k-1} y_i + y_k$ Transitivité :

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \preceq y$ et $y \preceq z$. Montrons que $x \preceq z$.

On a que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k z_i$. Par transitivité de \leq , $x \preceq z$.

2. Soient $x = (0, 2)$ et $y = (1, 0)$.

On a $\sum_{i=1}^2 x_i \geq \sum_{i=1}^2 y_i$ et $\sum_{i=1}^1 x_i \leq \sum_{i=1}^1 y_i$: x et y ne sont pas comparables, \preceq est un ordre partiel. □

Exercice 16.4 [◆◆◆]

Sur \mathbb{R}_+^* , on définit une relation binaire en posant que deux réels strictement positifs sont en relation, ce qu'on note $x \mathcal{R} y$ si et seulement si

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad px = qy$$

1. Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2. Démontrer que pour cette relation, deux classes d'équivalence sont nécessairement en bijection.

1. Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{N}^*$. On a que $1 \cdot x = 1 \cdot x$ donc $x \mathcal{R} x$.

Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^* \quad px = qy$. On a $qy = px$ donc $y \mathcal{R} x$.

Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^* \quad px = qy$ et $\exists (p', q') \in \mathbb{N}^* \quad p'y = q'z$.

On a $y = \frac{p}{q}x$ donc $p'\frac{p}{q}x = q'z$. Alors $pp'x = qq'z$ et $x \mathcal{R} z$.

2. Soient $[x]$ et $[y]$ deux classes d'équivalence de \mathcal{R} avec $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose $f : \begin{cases} [x] \rightarrow [y] \\ a \mapsto \frac{a}{x}y \end{cases}$.

Pour $a \in [x]$, on a $f(a) \in [y] : \exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad pa = qx$ Alors $a = \frac{q}{p}x$ et $f(a) = \frac{q}{p} \frac{x}{x}y \iff pf(a) = qy$.

On a f injective : Soient $a, a' \in [x]$ tels que $f(a) = f(a')$ on a $\frac{y}{x}a = \frac{y}{x}a'$ donc $a = a'$.

On a f surjective : Soit $b \in [y] : \exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad pb = qy$, alors $b = \frac{q}{p}y$.

On pose $a \in [x] \mid pa = qx$, donc $a = \frac{q}{p}x$. On a $f(a) = \frac{q}{p}y = b$.

Donc f est bien une fonction bijective de $[x]$ vers $[y]$. □

Exercice 16.5 [◆◆◇]

Sur \mathbb{R} , on définit la relation \mathcal{R} par

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 + 2y = y^2 + 2x.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un réel a .

1. Réflexivité : On a bien que $x^2 + 2x = x^2 + 2x$.

Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$, par symétrie de l'égalité, on a $y \mathcal{R} x$.

Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. Par transitivité de l'égalité, $x \mathcal{R} z$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x^2 + 2a &= a^2 + 2x \\ \iff x^2 - a^2 &= 2(x - a) \\ \iff (x - a)(x + a) &= 2(x - a) \\ \iff (x - a)(x + a - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, soit $x = a$, soit $x = 2 - a$.

La classe d'équivalence de a est alors : $[a] = \{2 - a, a\}$.

□

Exercice 16.6 [◆◆◇]

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble E .

Pour $x, y \in E$, on note $x \sim y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n \in E$ tels que

$$x_0 = x, x_0 \mathcal{R} x_1, x_1 \mathcal{R} x_2, \dots, x_{n-1} \mathcal{R} x_n, x_n = y.$$

1. Montrer que \sim est une relation transitive sur E .
2. On suppose \mathcal{R} réflexive et symétrique. Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur E .

1. Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Montrons $x \sim z$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n \in E$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $y_0, \dots, y_m \in E$ tels que

$$x_0 = x, x_0 \mathcal{R} x_1, \dots, x_{n-1} \mathcal{R} x_n = y_0 \mathcal{R} y_1, \dots, y_{m-1} \mathcal{R} y_m = z$$

Alors on a $m + n$ éléments de E tels que

$$x_0 = x, x_0 \mathcal{R} x_1, \dots, x_{m+n-1} \mathcal{R} x_{m+n}, x_{m+n} = z.$$

On en conclut que $x \sim z$: \sim est transitive sur E .

2. Réflexivité : Soit $x \in E$. On pose $x_0 = x$ et $x_1 = x$. Par réflexivité de \mathcal{R} , on a $x_0 \mathcal{R} x_1$.

Alors on a que $x_0 = x, x_0 \mathcal{R} x_1, x_1 = x$. C'est exactement $x \sim x$.

Symétrie : Soient $x, y \in E$ tels que $x \sim y$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n tels que [la relation].

Par symétrie de \mathcal{R} , on obtient :

$$x_n = y, x_n \mathcal{R} x_{n-1}, \dots, x_1 \mathcal{R} x_0, x_0 = x$$

On pose alors $(y_0, y_1, \dots, y_n) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)$ et on obtient que

$$y_0 = y, y_0 \mathcal{R} y_1, \dots, y_{n-1} \mathcal{R} y_n, y_n = x$$

Alors $y \sim x$ et on en conclut que \sim est réflexive.

On a déjà montré la transitivité de \sim : c'est une relation d'équivalence sur E .

□