Concours blanc - Épreuve de mathématiques

25 mai 2024 - PV - MP2I

Aucun document n'est autorisé, ni aucune machine.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.
La clarté de la rédaction, ainsi que la présentation de la copie font partie des critères d'évaluation.
Il est demandé d'encadrer les résultats et de numéroter les pages.

Problème 1 Commutants.

Notations.
Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n sera un entier supérieur à 2.

La lettre E désignera un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

On rappelle que l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ est celui des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient de M se trouvant à la ligne i et à la colonne j pourra être noté $[M]_{i,j}$.

Si $(d_1,\ldots,d_n) \in \mathbb{K}^n$, on notera $\mathrm{Diag}(d_1,\ldots,d_n)$ la matrice diagonale D dont les coefficients sont les d_i.
Plus précisément,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \Longrightarrow [D]_{i,j} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad [D]_{i,i} = d_i.$$

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ est celui des endomorphismes de E.

Définition 1. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle **commutant** de A, noté $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$$

Définition 2. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on appelle **commutant** de f, noté $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathscr{L}(E)$ qui commutent avec f, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

Partie A Généralités et exemples.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$.
   (b) Démontrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-anneau de $(M_n(\mathbb{K}),+,\times)$.
   Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on montre de la même façon (non demandé) que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E),+,\cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathscr{L}(E),+,\times)$.
2. Déterminer $\mathcal{C}(I_n)$. Que vaut sa dimension ?
3. *Dans cette question, $n=2$.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer AM et MA.
   En déduire une base de $\mathcal{C}(A)$ (on vérifiera que $\dim \mathcal{C}(A) = 2$).
4. *Dans cette question, $n=3$.* Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer BM et MB pour une matrice M de $M_3(\mathbb{K})$.
   En déduire une base de $\mathcal{C}(B)$ (on vérifiera que $\dim \mathcal{C}(B) = 5$).

Partie B Commutant d'une matrice diagonalisable avec valeurs propres deux à deux distinctes.

5. Soit $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet de nombres deux à deux distincts et $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$.
   Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.
   (a) Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, que valent $[DM]_{i,j}$ et $[MD]_{i,j}$?
   (b) Montrer que M appartient à $\mathcal{C}(D)$ si et seulement si il existe $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $M = \mathrm{Diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$.
   (c) En déduire une base de $\mathcal{C}(D)$ ainsi que sa dimension.

6. On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ semblable à D. Il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que
$$D = P^{-1}AP.$$
   Dans ces conditions on dit que la matrice A est *diagonalisable*.
   (a) Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que
$$M \in \mathcal{C}(D) \iff PMP^{-1} \in \mathcal{C}(A).$$
   (b) On définit deux applications Φ et Ψ par
$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(D) & \to & \mathcal{C}(A) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A) & \to & \mathcal{C}(D) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right. .$$
      i. Vérifier que Φ et Ψ sont bien définies et linéaires.
      ii. Calculer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.
      iii. Déduire de ce qui précède la valeur de la dimension de $\mathcal{C}(A)$.

7. *Un exemple de matrice diagonalisable.*
   Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé.
   (a) Que vaut $\mathrm{rg}(A)$? En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et proposer une base de ce sous-espace.
   (b) Soient $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$. Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
   (c) À l'aide de ce qui précède, expliciter une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie C Commutant d'un endomorphisme diagonalisable avec deux valeurs propres.

Dans cette partie, on fixe $f \in \mathscr{L}(E)$ en rappelant que E est un espace vectoriel de dimension n.
Pour un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on note
$$E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E).$$
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut noter plus simplement $E_\lambda = E_\lambda(f)$.

On rappelle qu'un sous-espace F de E est dit **stable** par f si
$$\forall x \in F \quad f(x) \in F.$$

Si F est stable par f, on appelle **endomorphisme induit** par f sur F l'application
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

8. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Justifier que E_λ est stable par f. Que dire de $f_{|E_\lambda}$?

9. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $g \in \mathcal{C}(f)$. Prouver que $E_\lambda(f)$ est stable par g.

10. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\lambda \neq \mu$. Justifier que $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f) = \{0_E\}$.

Dorénavant et jusqu'à la fin du problème, on fait l'hypothèse plus forte que

$$\boxed{E = E_\lambda \oplus E_\mu} \qquad (\star)$$

c'est-à-dire que les sous-espaces $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont supplémentaires dans E.

11. On définit l'application

$$\Lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(f) & \to & \mathscr{L}(E_\lambda) \times \mathscr{L}(E_\mu) \\ g & \mapsto & (g_{|E_\lambda}, g_{|E_\mu}) \end{array} \right. .$$

   (a) Justifier que Λ est bien définie et linéaire.

   (b) Justifier que Λ est injective.

   (c) (*) Justifier que Λ est surjective.

12. Notons $p = \dim E_\lambda$. Exprimer $\dim \mathcal{C}(f)$ à l'aide de p et de n (dimension de E).

13. (a) Citez un type d'endomorphisme f pour lequel la condition $(\star)$ est satisfaite pour $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ et rappeler la caractérisation algébrique pour ce type d'endomorphismes.

   (b) Citez un type d'endomorphisme f pour lequel la condition $(\star)$ est satisfaite pour $(\lambda, \mu) = (1, -1)$ et rappeler la caractérisation algébrique pour ce type d'endomorphismes.

Problème 2 Produits infinis.

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour $N \geq n_0$, on pose

$$P_N = u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_N = \prod_{n=n_0}^{N} u_n$$

La suite $(P_N)_{N \geq n_0}$ est appelée *suite des produits partiels* associée à $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Cette suite de produits partiels est encore appelée **produit infini** et notée $\prod_{n \geq n_0} u_n$.

On dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ **converge** si la suite $(P_N)_{N \geq n_0}$ admet une limite finie non nulle.

Cette limite est notée $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et est appelée *valeur* du produit infini.

Si $(P_N)_{N \geq n_0}$ est divergente ou de limite nulle, on dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ **diverge**.

On se permet d'insister sur un point : le fait que lorsque les produits partiels tendent vers 0, le produit infini est déclaré divergent.

Partie A Autour de la définition : premiers exemples.

1. *Produits téléscopiques*

   (a) Établir la divergence du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

   (b) Établir la convergence du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et donner sa valeur $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ $\frac{1}{2}$

2. *Conditions nécessaires de convergence*

   (a) Montrer que si $\displaystyle\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \neq 0$.

   (b) Montrer, en considérant le quotient $\dfrac{P_{N+1}}{P_N}$ que si $\displaystyle\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   (c) La condition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ est-elle suffisante pour que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge ?

3. *Lien avec les séries*

   On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de réels strictement positifs.

   (a) Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0}\ln(u_n)$ converge.

   Préciser alors la relation entre $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\ln(u_n)$.

   (b) Supposons que pour tout $n \geq n_0$, $0 < u_n < 1$. $\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$
   Montrer qu'alors, le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq n_0}(1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

   (c) Soit $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge-t-il ?

Partie B Vers l'identité $\sin x = x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$, le produit eulérien du sinus.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)$$

4. (a) Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

   (b) Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.
   Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \mid k \in [\![0, 2n]\!]\}$.

   (c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P_n(X) = \lambda X\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right)$

   (d) En calculant $P_n'(0)$, montrer que $\lambda = 1$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $\lim(1+\frac{a}{n})^n$? Admettons que ce résultat soit vrai en remplaçant a par un nombre complexe z : que vaut alors $\lim P_n(x)$ pour x réel ?

Ici les x_j dépendent de n et on ne peut pas écrire de produit infini. Avec un peu (beaucoup !) plus d'efforts, on obtient le développement eulérien du sinus écrit dans le titre de cette partie B. Voir par exemple Centrale PC 2024