Exercice 1. Une fonction plus simple qu'il n'y paraît.

1. Une fonction auxiliaire.
Posons $u : x \mapsto \dfrac{1+x}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}$. Puisque arccos est définie sur $[-1,1]$, nous allons vérifier que les images par u appartiennent à cet intervalle.

Étude des variations.
La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
— $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$,
— $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Un calcul de dérivée amène

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2}(1+x^2)^{3/2}}.}$$

Si vous n'avez pas trouvé le bon résultat... refaites votre calcul.

Voici le tableau de variations de u :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u			1		
	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Calcul des limites.
Il a fallu calculer $f(1) = 1$ ainsi que les limites de u en ∞. Puisqu'on est face à une « forme indéterminée », on factorise par x au numérateur, et sous la racine par x^2 (terme prépondérant). On obtient pour $x \neq 0$

$$u(x) = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Le quotient $\frac{x}{|x|}$ vaut 1 si $x > 0$ et -1 sinon. On peut alors faire tendre x vers $\pm\infty$ dans l'expression précédente pour trouver les limites du tableau.

Retour à f. La fonction f est bien définie comme composée de $u : \mathbb{R} \to [-1,1]$ avec $\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

2. La fonction f est dérivable sur $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$ comme composée des fonctions dérivables

$$u : I_k \to]-1,1[\quad (k \in \{1,2\}) \qquad \text{et} \qquad \arccos :]-1,1[\to \mathbb{R}.$$

Pour $x \in I_1 \cup I_2$, on calcule

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot \arccos'(u(x)) \\ &= -\frac{1-x}{\sqrt{2}(1+x^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \end{aligned}$$

Or,

$$\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2-2x}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{|x-1|}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En simplifiant, on obtient

$$f'(x) = -\frac{x-1}{|x-1|} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \pm\frac{1}{1+x^2}.$$

On aura un signe $+$ si $x < 1$ et un signe $-$ si $x > 1$.

3. • Sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 1[$, $f - \arctan$ est de dérivée nulle donc constante :

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]-\infty, 1[\quad f(x) - \arctan(x) = C.$$

Évaluons en 0 : on obtient

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 = C \quad \text{ce qui laisse} \quad C = -\frac{\pi}{4}.$$

• Sur l'intervalle $I_2 =]1,+\infty[$, f+arctan est de dérivée nulle donc constante :

$$\exists C' \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]1,+\infty[\quad f(x) + \arctan(x) = C'.$$

Passons à la limite en $+\infty$: on obtient

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = C \quad \text{ce qui laisse} \quad C' = \frac{3\pi}{4}.$$

• On peut enfin calculer $f(1) = \arccos(1) = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \frac{\pi}{4} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 1 \\ -\arctan(x) + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

On pourra vérifier que les limites à gauche et à droite en 1 valent $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $f(1)$: la fonction f est continue en 1.

Exercice 3 Une équation fonctionnelle.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut calculer $f(f(f(n))$ de deux façons. On sait que pour tout entier $X \in \mathbb{N}$, on a $f(f(X)) = X + 1$. On a donc
   - d'une part $f(f(f(n))) = f(n+1)$ (en évaluant en $X = n$),
   - d'autre part $f(f(f(n))) = f(n) + 1$ (en évaluant en $X = f(n)$).

   Derrière ce calcul, l'associativité de la composition : $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$.

2. On pouvait bien entendu proposer une preuve par récurrence.

   En proposant la forme « $f(n+1) - f(n)$ » dans la question 1, l'énoncé espérait que vous vous laissiez tenter par un télescopage : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad \text{soit} \quad f(n) - f(0) = n,$$

   (le résultat étant clair pour $n = 0$).

3. Pour un entier n donné, on a d'après 2 que

   $$f(f(n)) = f(n + f(0)) = (n + f(0)) + f(0),$$

   ($n + f(0)$ étant un entier).
   On a donc $f(f(n)) = n + 2f(0)$ d'une part, et $f(f(n)) = n + 1$ d'autre part. Ceci laisse $2f(0) = 1$ et donc $f(0) = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde, attendu que $f(0)$ est un entier.

   Conclusion : il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(f(n)) = n + 1.$$