Exercice .

On s'intéresse dans cet exercice aux solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$.

1. En écrivant l'inconnue z sous forme trigonométrique, prouver que l'équation possède exactement trois solutions dans $\mathbb{C}$:
$$1, e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$
Pourquoi parle-t-on de *racines troisièmes de l'unité* ?
Les mathématiciens utilisent la notation j pour le nombre $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Les solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont donc $\boxed{1, j \text{ et } j^2}$.

2. Justifier que $j^2 = \overline{j}$ et démontrer de deux façons que $1 + j + j^2 = 0$.

3. (a) Représenter 1, j et j^2 sur le cercle trigonométrique.
   (b) En utilisant le module, prouver que le triangle de sommets 1, j et j^2 est équilatéral et calculer son périmètre.
   Essayez d'être concis et élégants : l'argument moitié vous y aidera.

4. Dans cette question, on s'intéresse aux sommes
$$\begin{cases} S_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \displaystyle\sum_{3k \leq n} \binom{n}{3k} \\ S_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots = \displaystyle\sum_{3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} \\ S_2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots = \displaystyle\sum_{3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2} \end{cases}$$
   (a) Montrer que $\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 = 2^n \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 = (1+j)^n \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 = (1+j^2)^n \end{cases}$
   (b) Démontrer que
$$\boxed{S_0 = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}$$

Problème. Intégrales de Wallis et applications.

Les deux parties du problème sont indépendantes, à l'exception de la dernière question de la partie **B** qui utilise le résultat final de la partie **A**.

A. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit
$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n > 0$.

3. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Préciser la valeur de cette constante.

4. Démontrer que
$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
On pourra démontrer que
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

5. Démontrer enfin que
$$\sqrt{n}\, W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

6. Démontrer les égalités suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:
$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

B. Intégrale de Gauss

Pour tout x réel on pose
$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

1. (a) Justifier que f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Après avec justifié que pour tout $t \geq 1$, on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, justifiez que
$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \int_1^x e^{-t^2} \mathrm{d}t \leq \int_1^x e^{-t} \mathrm{d}t.$$
   En déduire que f est majorée sur $[1, +\infty[$.

   Croissante et majorée, f admet une limité finie en $+\infty$ (d'après le théorème de la limite monotone, admis pour le moment).

2. (a) Établir les inégalités
$$\forall u \in]-\infty, 1[\quad : \quad 1 + u \leq e^u \leq \frac{1}{1-u}.$$

   (b) En déduire que
$$\forall x \in \left[0, \sqrt{n}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit
$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

   (a) À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n} \sin t$, démontrer que
$$I_n = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$

   (b) À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n} \tan t$, montrer que :
$$J_n \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

   (c) Classer les nombres I_n, J_n et $f(\sqrt{n})$ dans l'ordre croissant.
   En déduire la valeur de
$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$
   *(On pourra utiliser la question **5** de la partie **A**).*