Outils pour l'analyse

2

1/3 : Propriétés de $\mathbb{R}$

La construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ est hors-programme. C'est donc sur un ensemble de nombres familier mais non rigoureusement défini que nous travaillerons la plupart du temps en analyse...

1 Une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

1.1 Relation $\leq$.

Rappel ($\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$).

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$. (Réflexivité)
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y$. (Antisymétrie)
- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$. (Transitivité)

Rappel (C'est une relation d'ordre totale).

On peut toujours comparer deux réels : pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Rappel (Élémentaire mais fondamental).

On peut comparer deux réels en examinant le signe de leur différence :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad x\leq y \iff y-x\geq 0.$$

Exemple 1 (Inégalité arithmético-géométrique .).

Établir l'inégalité $\sqrt{xy}\leq \dfrac{x+y}{2}$ pour deux réels x et y positifs. Dans quel cas a-t-on égalité ?

1.2 Relation $\leq$ et opérations algébriques.

Rappel ($\leq$ et somme).

On peut *sommer des inégalités.* Pour tous réels x, x', y, y',

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & \leq & y \\ & \text{et} & \\ x' & \leq & y' \end{array}\right. \implies x+x'\leq y+y'.$$

Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont des familles finies de nombres réels,

$$(\forall i\in I \quad x_i\leq y_i) \implies \sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{i\in I} y_i.$$

Proposition 2 (Somme nulle de termes positifs).

Soient $x_1,\ldots,x_n$ des réels $\boxed{\text{positifs}}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies \forall i\in [\![1,n]\!] \quad x_i=0.$$

Preuve Supposons que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Considérons un entier j particulier entre 1 et n.
Bon, en fait il n'a rien de particulier justement, il sert à prouver la chose pour tous les entiers entre 1 *et* n.

On a que $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $0\leq x_i$. Par somme d'inégalités, on a donc $0\leq \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq j}}^n x_i = 0$. Ajoutons maintenant x_j : on obtient

$$x_j\leq \sum_{i=1}^n x_i.$$

Or, la somme à droite est nulle par hypothèse, donc $x_j\leq 0$. De plus, $x_j\geq 0$. Par antisymétrie, $x_j=0$.

On a bien prouvé que tous les termes de la somme sont nuls.

□

Rappel ($\leq$ et produit).

Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$.
- Si a est un réel positif alors $ax \leq ay$.
- Si a est un réel négatif alors $ax \geq ay$.

On peut *multiplier des inégalités* dont les membres sont positifs. Pour tous réels x, x', y, y',

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ \text{et} \\ 0 \leq x' \leq y' \end{cases} \implies x \times x' \leq y \times y'.$$

Rappel ($\leq$ et quotient).

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad 0 < x \leq y \implies 0 \leq \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

Exemple 3 (Majorer, minorer une somme, un produit, un quotient).

Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$. Encadrer $x - y$, $(x-y)^2$ et $\dfrac{xy}{x+y}$.

1.3 Intervalles.

Définition 4 (Les deux infinis).

On ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ les deux éléments $+\infty$ et $-\infty$ pour former l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\},$$

en prenant la convention que pour tout x réel, $x \leq +\infty$ et $-\infty \leq x$.

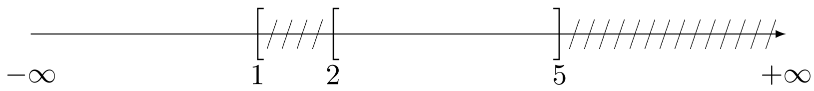
Définition 5.

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes décrites ci-dessous :

- Segment $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \text{ et } x \leq b\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- Intervalles ouverts $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x \text{ et } x < b\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- Intervalles semi-ouverts $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \text{ et } x \leq b\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$,
  ou bien $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \text{ et } x < b\}$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Remarque. Les parties décrites ci-dessus peuvent être vides. Par exemple, $]5,3] = \emptyset$.

Figures. Représentation des intervalles $[1,2[$ et $]5,+\infty[$.



Exemple 6.

L'ensemble des réels non nuls $\mathbb{R}^*$ n'est **pas** un intervalle. C'est néanmoins une réunion d'intervalles :

$$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Pour une preuve, on attendra la caractérisation des intervalles comme parties convexes de $\mathbb{R}$ (ou encore comme parties « sans trou ») à la fin de ce cours.

2 Valeur absolue.

2.1 Valeur absolue.

Définition 7.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre réel *positif* donné par

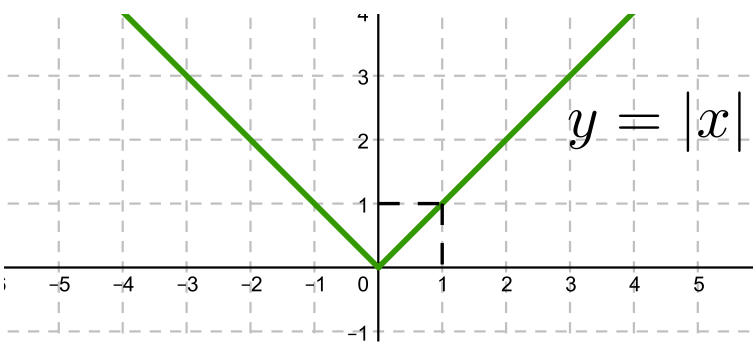
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

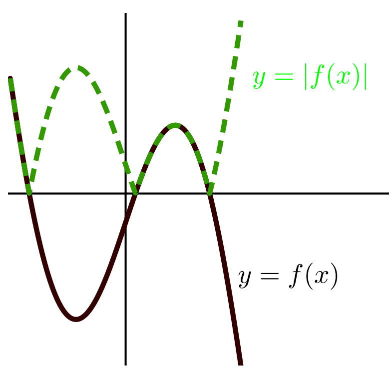
Proposition 8 (Propriétés élémentaires).

Pour tout x réel,

$$|x| = \max(x, -x) \qquad\qquad x \leq |x|, \quad -x \leq |x| \quad \text{et} \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

$$|-x| = |x| \qquad\qquad |x| = 0 \iff x = 0$$





2.2 Valeur absolue et opérations algébriques.

Proposition 9 (Valeurs absolues et produits)**.**

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x|^2 = x^2$ et $|x| = \sqrt{x^2}$.
2. La valeur absolue du produit, c'est le produit des valeurs absolues
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}^* \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Attention, en général, la valeur absolue de la somme n'est **pas** la somme des valeurs absolues...

Théorème 10 (Inégalité triangulaire)**.**

Pour tous nombres réels x et y, on a
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Remarque. Avec l'inégalité analogue dans $\mathbb{C}$, on pourra alors vraiment dessiner un triangle.

Corollaire 11.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y| \leq |x| + |y|$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous nombres réels $x_1, \dots, x_n$, on a l'inégalité $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

⚠ On notera que dans la première inégalité, on a écrit un $-$ à gauche mais il y toujours un $+$ à droite !

2.3 Une notion de distance sur $\mathbb{R}$.

Plaçons deux nombres x et y sur la droite réelle et considérons les cas $x \geq y$ ou que $x < y$.

$\boxed{|x-y| \text{ est la } \textbf{distance} \text{ entre } x \text{ et } y.}$

Proposition 12.

$$\forall x, a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}_+ \qquad \begin{array}{lcl} |x-a| \leq b & \iff & x \in [a-b, a+b] \\ |x-a| \geq b & \iff & x \geq a+b \ \text{ ou } \ x \leq a-b. \end{array}$$

En particulier, $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}_+ \quad |x| \leq b \iff -b \leq x \leq b.$

3 Entiers.

3.1 Entiers naturels, entiers relatifs.

Définition 13.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{-1, -2, \ldots\}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Proposition 14.

L'ensemble des entiers relatifs est stable par somme, différence, et produit.

Le résultat est admis, mais précisons le sens de "stable" : on a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad p + q \in \mathbb{Z} \quad p - q \in \mathbb{Z} \quad pq \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des entiers naturels, quant à lui, est stable par somme et produit mais pas par différence.

Proposition 15.

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

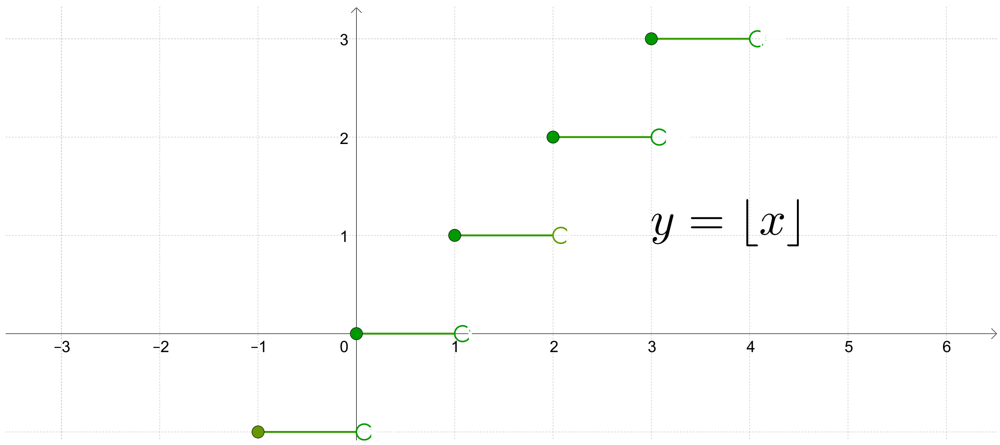
3.2 Partie entière d'un réel.

Définition 16.

Pour tout nombre réel x, on appelle **partie entière** de x, et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur à x :

$$\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Exemple. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.



Proposition 17 (Partie entière et encadrements).

Pour tout nombre réel x,
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$
En « croisant » les inégalités, ceci implique notamment que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Proposition 18.

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 19 (Une propriété simple de la partie entière).

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
Ceci a pour conséquence que la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

Lemme 20 (Une utilisation de la partie entière en analyse).

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède la propriété dite d'Archimède : pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout réel positif $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > x$.

4 Rationnels.

4.1 Nombres décimaux.

Les nombres décimaux sont populaires, ce sont eux « qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule ».

Définition 21.

On appelle **nombre décimal** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{10^k}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux, est noté $\mathbb{D}$.

Définition 22 (généralisation).

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle **fraction p-adique** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\dfrac{q}{p^k}$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Les fractions 2-adiques sont dites dyadiques. Les nombres "flottants" en info sont des dyadiques.

Proposition 23.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre décimal $d_n(x) := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ satisfait l'encadrement

$$d_n(x) \leq x < d_n(x) + 10^{-n}.$$

Les nombres $d_n(x)$ et $d_n(x) + 10^{-n}$ sont appelés respectivement **valeur décimale** par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n}.

Exemple. Voici les valeurs décimales par défaut et par excès à la précision 10^{-3} de certaines constantes.

	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	π	e	$\ln(2)$
par défaut à 10^{-3} près	$1,000$	$1,414$	$1,732$	$3,141$	$2,718$	0.693
par excès à 10^{-3} près	$1,001$	$1,415$	$1,733$	$3,142$	$2,719$	0.694

Corollaire 24 ($\mathbb{D}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$)**.**

Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre décimal.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad a < b \implies \mathbb{D} \cap]a,b[\neq \emptyset.$$

Preuve Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Montrons qu'il existe un nombre décimal entre a et b.
On pose $m = \frac{a+b}{2}$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a < m < d_n(m) + 10^{-n}.$$

Posons $\varepsilon = b - m$. Il existe* un entier n tel que $10^{-n} < \varepsilon$ (n étant "grand" si ε est "petit"). On a alors

$$a < m < d_n(m) + 10^{-n} < d_n(m) + \varepsilon \leq m + (b - m) = b,$$

ce qui implique

$$a < \underbrace{d_n(m) + 10^{-n}}_{\in \mathbb{D}} < b.$$

Détails sur * : il s'agit de prouver l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-n} < \varepsilon$, c'est-à-dire $10^n \varepsilon > 1$. Il s'agit d'une version un peu spécifique de la propriété d'Archimède énoncée plus haut. Se convaincre que l'entier $n = \lfloor \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(10)} \rfloor + 1$ convient. $\square$

4.2 Nombres rationnels.

Définition 25.

Un nombre **rationnel** est un nombre réel qui s'écrit sous la forme d'un quotient d'entiers $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

On dit d'un nombre de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qu'il est **irrationnel**.

Lorsqu'un rationnel s'écrit comme une fraction $\frac{p}{q}$ avec deux entiers p et q n'ayant pas de diviseurs communs (on dit aussi qu'ils sont premiers entre eux), on dit que ce rationnel est écrit sous forme **irréductible**.

Les nombres décimaux sont des nombres rationnels, et on peut écrire les inclusions

$$\boxed{\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

La dernière inclusion est stricte : certains réels ne sont pas rationnels, comme le montre le résultat qui suit.

Proposition 26.

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque. Culture : e et π sont irrationnels, mais on ne le montrera pas ici.

Proposition 27.

L'ensemble des rationnels est stable par somme, différence, produit, et passage à l'inverse.

Exemple 28.

Justifier que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est PAS stable par somme, ni par produit.

4.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 29 ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$)**.**

Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel et un irrationnel.
Autrement dit, pour tous a, b réels avec $a < b$,

$$]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

Preuve Soient a, b deux réels tels que $a < b$.

• Dans l'intervalle $]a, b[$, nous avons prouvé qu'il existe un nombre décimal : c'est a fortiori un nombre rationnel.
Ceci démontre bien qu'entre deux réels quelconques, il existe un nombre rationnel.

• Puisque $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, nous savons qu'il existe entre eux un nombre rationnel r.
On a $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$, puis $a < r + \sqrt{2} < b$.
Le nombre $r + \sqrt{2}$ est irrationnel. Comment le prouver ? Par l'absurde ! Supposons qu'il est rationnel. Alors $(r + \sqrt{2}) - r$ l'est aussi puisque $\mathbb{Q}$ est stable par différence. On obtient alors que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est une contradiction.
Ceci démontre bien qu'entre deux réels quelconques, il existe un nombre irrationnel.

□

Corollaire 30 (Écriture séquentielle de la densité de $\mathbb{Q}$)**.**

Pour tout réel x, il existe une suite (r_n) de rationnels telle que $r_n \to x$.

5 Parties bornées de $\mathbb{R}$.

5.1 Majorants, minorants.

Dans tout ce qui suit, A est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 31 (Majorant, minorant)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est **majorée** si il existe un réel M tel que $\forall x \in A \quad x \leq M$.
  Dans ce contexte, M est appelé un **majorant** de A.
- On dit que A est **minorée** si il existe un réel m tel que $\forall x \in A\ x \geq m$.
  Dans ce contexte, m est appelé un **minorant** de A.
- On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 32.

Donner des majorants et des minorants de $A = [0, 1[$.
Soit $A' = [1, +\infty[$. Démontrer que A' n'est pas majorée.

Proposition 33 (Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

$$A \text{ est bornée} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in A \quad |x| \leq \mu.$$

Remarques.

1. Le slogan : « être borné équivaut à être majoré en valeur absolue ».
2. Le mot *caractérisation* renvoie à l'équivalence : les parties de $\mathbb{R}$ bornées sont majorées en valeur absolues et ce sont les seules dans ce cas. On a donc proposé ici une alternative (équivalente) à la définition.

5.2 Maximum, minimum.

Définition 34 (Maximum, minimum)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- S'il existe un élément $a \in A$ tel que $\forall x \in A\ x \leq a$, alors cet élément est unique.
  Il est appelé plus grand élément de A ou encore **maximum** de A et noté $\max(A)$.
- S'il existe un élément $b \in A$ tel que $\forall x \in A \quad x \geq b$, alors cet élément est unique.
  Il est appelé plus petit élément de A ou encore **minimum** de A et noté $\min(A)$.

Exemple 35.

La partie $[0, 1[$ a 0 comme minimum et n'a pas de maximum (on le montre par l'absurde).

5.3 Borne supérieure, borne inférieure.

Définition.

Définition 36.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle **borne supérieure** de A et on note $\sup A$, le plus petit des majorants de A, lorsque ce nombre existe.
- On appelle **borne inférieure** de A et on note $\inf A$, le plus grand des minorants de A, lorsque ce nombre existe.

Implicite dans cette définition : l'*unicité* de la borne supérieure. On peut la montrer comme on avait prouvé celle d'un maximum. Pour ce qui concerne l'*existence*, commençons par examiner un cas simple.

Proposition 37.

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un maximum M, alors elle a une borne supérieure, qui vaut M.

Le théorème ci-dessous, admis, est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

Théorème 38 (Propriété de la borne supérieure/inférieure)**.**

Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Caractérisation et calculs.

Proposition 39 (Caractérisation de la borne supérieure.)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha \end{cases}$$

Interprétons l'assertion commençant par $\forall \varepsilon\ \exists x \in A : \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ dans ce qui précède : il est dit que l'on peut trouver un élément de A *aussi proche que l'on veut* de α.

Si on a compris pour la borne supérieure, on sait adapter pour la borne inférieure : pour A une partie non vide et minorée et α un réel,

$$\alpha = \inf A \iff \begin{cases} \alpha \text{ est un minorant de } A \\ \dots \end{cases}$$

Exemple 40 (Calculs de bornes supérieures).

Soit $A = [0, 1[$. Justifier l'existence de $\sup A$ puis la calculer.

Soit $B = \left\{r \in \mathbb{Q} : r < \sqrt{2}\right\}$. Justifier l'existence de $\sup B$ puis la calculer.

Soit $C = \{1/n - 1/p,\ n, p \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\sup C$ et $\inf C$, après avoir justifié qu'elles existent.

Majoration.

Méthode (Majorer une borne supérieure/"Passage au sup").

Soient M un réel et A une partie de $\mathbb{R}$ possédant une borne supérieure. Pour démontrer l'inégalité

$$\sup A \leq M,$$

il suffira de montrer que M est un majorant de A ($\sup A$ étant le *plus petit* des majorants de A).

Exemple 41.

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Justifier que $\sup A \leq \sup B$.

Remarque : Pour montrer que deux bornes supérieures sont égales, on pourra utiliser l'équivalence

$$\sup A = \sup B \quad \Longleftrightarrow \quad (\sup A \leq \sup B \quad \text{et} \quad \sup B \leq \sup A)\,.$$

Proposition 42 (Homogénéité du sup).

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On définit la partie $\lambda A := \{\lambda x \mid x \in A\}$.

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A).$$

Une caractérisation des intervalles.

Définition 43.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est **convexe** si pour tout $a, b \in A$ avec $a \leq b$, on a $[a, b] \subset A$.

Proposition 44 (Caractérisation des intervalles).

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

• Supposons que X est un intervalle. Il est donc de l'un des trois types suivant.

· un segment $[g,d] = \{x \in \mathbb{R} : g \leq x \text{ et } x \leq d\}$ où $g, d \in \mathbb{R}$.

· un intervalle ouvert $]g,d[= \{x \in \mathbb{R} : g < x \text{ et } x < d\}$ où $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

· un intervalle semi-ouvert, par exemple du type $]g,d] = \{x \in \mathbb{R} : g < x \text{ et } x \leq d\}$ où $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, d \in \mathbb{R}$

Dans les trois cas, on peut vérifier que ces parties sont convexes.
Par exemple, dans le cas d'un segment $[g,d]$, si a et b sont dans $[g,d]$ avec $a \leq b$, on a $g \leq a \leq b \leq d$ d'où $[a,b] \subset [g,d]$. Dans le cas où $a > b$, alors $[a,b] = \emptyset \subset [g,d]$.

• Supposons que X est convexe, c'est-à-dire satisfait : $\forall a, b \in X \quad [a,b] \subset X$.

⋆ Cas où X est vide. Alors X est un intervalle : l'intervalle $[0,-5]$ par exemple!

⋆ Cas où X est non vide, majorée et minorée. La partie X admet alors une borne supérieure, que l'on note d et une borne inférieure, que l'on note g. Ce sont respectivement un majorant, et un minorant de X, de sorte que
$$X \subset [g,d].$$
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure (et inférieure), il existe $\alpha \in X$ tel que $g \leq \alpha < g + \varepsilon$. Il existe $\beta \in X$ tel que $d - \varepsilon < \beta \leq d$. Si on a supposé de surcroît que $\varepsilon < \frac{d-g}{2}$, on a
$$g \leq \alpha < g + \varepsilon < d - \varepsilon < \beta \leq d.$$
Or, d'après l'hypothèse, le segment $[\alpha, \beta]$ est tout entier inclus dans X. Puisqu'il contient $[g+\varepsilon, d-\varepsilon]$, on parvient à
$$[g+\varepsilon, d-\varepsilon] \subset X \subset [g,d].$$
Dans ce qui précède, le nombre ε, peut être pris arbitrairement petit, ce qui conduit à
$$]g,d[\subset X \subset [g,d].$$
On a donc
$$X =]g,d[\quad \text{ou} \quad X = [g,d[\quad \text{ou} \quad X =]g,d] \quad \text{ou} \quad X = [g,d].$$
On a bien montré que X est un intervalle.

⋆ Cas où X est non vide, majorée et non minorée. En adaptant les idées ci-dessus, le lecteur montrera que qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que
$$X =]-\infty, d[\quad \text{ou} \quad X =]-\infty, d].$$

⋆ Cas où X est non vide, non majorée, et minorée. En adaptant les idées ci-dessus, le lecteur montrera que qu'il existe $g \in \mathbb{R}$ tel que
$$X =]g, +\infty[\quad \text{ou} \quad X = [g, +\infty[.$$

⋆ Cas où X est non vide, non majorée et non minorée. On peut alors montrer que $X =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

□

Exemple 45 (Applications de la caractérisation).

Justifier que

1. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.
2. une intersection d'intervalles est un intervalle.

Exercices

Inégalités.

$\boxed{\textbf{2.1}}$ **[♦◇◇]** Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b.$$

$\boxed{\textbf{2.2}}$ **[♦◇◇]**

1. Montrer que $\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2\ \sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
2. Montrer que $\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2\ |\sqrt{a}-\sqrt{b}|\leq\sqrt{|a-b|}$.

$\boxed{\textbf{2.3}}$ **[♦◇◇]** [Manipuler la notion de distance]
En utilisant la notion de distance sur $\mathbb{R}$, écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E=\left\{x\in\mathbb{R}\mid |x+3|\leq 6\ \text{ et }\ |x^2-1|>3\right\}.$$

$\boxed{\textbf{2.4}}$ **[♦♦◇]** [Plusieurs façons de définir une moyenne]

Soient a et b deux réels tels que $0<a\leq b$. On définit les nombres m,g,h par

$$m=\frac{a+b}{2},\qquad g=\sqrt{ab},\qquad \frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

et on les appelle respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de a et b.
Démontrer l'encadrement

$$a\leq h\leq g\leq m\leq b.$$

Valeurs absolues.

$\boxed{\textbf{2.5}}$ **[♦◇◇]** Résoudre l'équation

$$\ln|x|+\ln|x+1|=0.$$

$\boxed{\textbf{2.6}}$ **[♦◇◇]** Résoudre l'équation

$$|x-2|=6-2x.$$

Entiers, rationnels.

$\boxed{\textbf{2.7}}$ **[♦♦♦]** Démontrer l'égalité $\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ et tout réel x.

$\boxed{\textbf{2.8}}$ **[♦♦◇]**

1. Pour $x>0$, montrer que
$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
2. Soit p un entier supérieur à 2. Que vaut la partie entière de
$$\sum_{k=1}^{p^2-1}\frac{1}{\sqrt{k}}?$$

$\boxed{\textbf{2.9}}$ **[♦♦♦]** Prouver que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

$\boxed{\textbf{2.10}}$ **[♦♦♦]** Soient x et y deux rationnels positifs tels que que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

Parties bornées (sans la notion de borne supérieure).

$\boxed{\textbf{2.11}}$ **[♦♦◇]** Soit l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Cette partie de $\mathbb{R}$ est-elle bornée ? Possède-t-elle un maximum ? Un minimum ?

$\boxed{\textbf{2.12}}$ **[♦♦◇]**

1. Montrer que
$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad : \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a - b}{4}.$$
Étudier le cas d'égalité.
2. En déduire que l'ensemble
$$E = \left\{ \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \mid (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ et } a + b + c \geq 2 \right\}$$
admet un minimum et le calculer.

Borne supérieure.

$\boxed{\textbf{2.13}}$ **[♦♦◇]** Calculer les bornes supérieures et inférieures des parties, après en avoir prouvé l'existence.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad B = \left\{ \frac{m}{nm + 1} \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad C = \left\{ x^2 + y^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy = 1 \right\}.$$

$\boxed{\textbf{2.14}}$ **[♦♦◇]** Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B := \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$. Démontrer

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$
