Propriétés de $\mathbb{R}$
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 2.1 [♦◊◊]

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b \\
\iff\ & \frac{a^3-a^2b+b^3-ab^2}{ab}\geq 0 \\
\iff\ & \frac{a^2(a-b)+b^2(b-a)}{ab}\geq 0 \\
\iff\ & \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{ab}\geq 0 \\
\iff\ & \frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\geq 0
\end{aligned}$$

Or $(a-b)^2\geq 0$, $(a+b)\geq 0$ et $ab\geq 0$.
Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.2 [$\blacklozenge\lozenge\lozenge$]

1. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \iff \ & a+b \leq a + 2\sqrt{ab} + b \\ \iff \ & 2\sqrt{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
Considérons $a \geq b$, alors $|a-b| = a-b$.

$$\begin{aligned} & |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{a-b} \\ \iff \ & a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b \\ \iff \ & 2b \leq 2\sqrt{ab} \\ \iff \ & b^2 \leq ab & \text{Or } a \geq b \text{ donc } ab \geq b^2 \end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque $b \geq a$.
Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 2.3 [$\blacklozenge\lozenge\lozenge$] *Manipuler la notion de distance*

En utilisant la notion de distance sur $\mathbb{R}$, écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ |x+3| \leq 6 \text{ et } |x^2 - 1| > 3\}$$

On a :

$$x \in [-9, 3] \text{ et } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

Donc :

$$x \in [-9, -2] \cup [2, 3]$$