

Ensembles et applications

Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 5.1	2
Exercice 5.2	2
Exercice 5.3	3
Exercice 5.4	3
Exercice 5.5	4
Exercice 5.6	4
Exercice 5.7	6
Exercice 5.8	6

Exercice 5.1 [◆◆◆]

Soient A, B deux parties d'un ensemble E . Établir que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad \text{et} \quad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

On a :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \setminus B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

□

Exercice 5.2 [◆◆◆]

Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble E , telles que

$$E = A \cup B \cup C, \quad A \cap D \subset B, \quad B \cap D \subset C, \quad C \cap D \subset A.$$

Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.

Soit $x \in D$, on sait que $x \in E$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$.

⊙ Si $x \in A$, alors $x \in A \cap D$, donc $x \in B$.

⊙ Si $x \in B$, alors $x \in B \cap D$, donc $x \in C$.

⊙ Si $x \in C$, alors $x \in C \cap D$, donc $x \in A$.

On en déduit que $x \in A \cap B \cap C$.

Ainsi, $D \subset A \cap B \cap C$.

□

Exercice 5.3 [◆◆◇]

Démontrer que

$$\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\}.$$

On note $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\}$

⊙ Montrons que $\mathbb{R} \subset A$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

○ Si $x \leq 0$, On pose $a = 1$ et $b = x - 1$, ainsi $x = a + b$ donc $x \in A$.

○ Si $x > 0$, On pose $a = x + 1$ et $b = -1$, ainsi $x = a + b$ donc $x \in A$.

Dans tous les cas $x \in A$, on en conclut que $\mathbb{R} \subset A$.

⊙ Montrons que $A \subset \mathbb{R}$.

Soit $x \in A$, alors il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $x = a + b$.

Or $a + b \in \mathbb{R}$, donc $x \in \mathbb{R}$. On en conclut que $A \subset \mathbb{R}$.

□

Exercice 5.4 [◆◆◇]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, \dots, A_n n parties de E telles que

$$A_n = E \quad \text{et} \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n.$$

On pose $B_1 = A_1$ et pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on pose $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.

Prouver que $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un recouvrement disjoint de E .

Soit $x \in E$. Alors $x \in A_n$. Il existe alors k le plus petit entier tel que $x \in A_k$. Ainsi, $x \in B_k$ puisque $x \in A_k \wedge x \notin A_{k-1}$ par définition de k .

On en déduit que tout élément de E appartient à au moins un (B_k) .

Montrons maintenant que tout élément de E appartient aussi au plus à un B_k .

Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$ et $x \in B_i$ et $x \in B_j$.

Or, puisque $x \in B_j$ et $i < j$, $x \notin A_i$. De plus, puisque $x \in B_i$, $x \in A_i$ ce qui est absurde.

Ainsi, tout élément de E appartient au plus à un (B_k) .

$(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est donc un recouvrement disjoint de E .

□

Exercice 5.5 [◆◆◆]

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E . Démontrer que

$$B \subset A \iff (\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)).$$

Supposons $B \subset A$.

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.

On a :

$$(A \cap X) \cup B = (A \cup B) \cap (X \cup B) = A \cap (X \cup B)$$

Supposons $(\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B))$.

On a $B \in \mathcal{P}(E)$, donc :

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup B &= A \cap (B \cup B) \iff (A \cup B) \cap B = A \cap B \\ &\iff (A \cup B) = A \\ &\iff B \subset A \end{aligned}$$

□

Exercice 5.6 [◆◆◆]

Expliciter les ensembles

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right].$$

A est l'ensemble vide, puisque l'intersection est commutative, on peut prendre $n = 1$ et $n = 10$, par exemple, et remarquer que leur intersection est nulle, ce qui se propage à toutes les intersections.

Montrons que B est l'ensemble $]0, 1]$ par double inclusion.

⊙ Montrons que $B \subset]0, 1]$.

Soit $x \in B$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$. Ainsi, $0 < x \leq 1$. Donc $x \in]0, 1]$.

⊙ Montrons que $]0, 1] \subset B$.

Soit $x \in]0, 1]$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 \geq \frac{1}{x} \geq n$. Donc que $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$.

Ainsi $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ et donc $x \in B$.

On en conclut que $B =]0, 1]$.

□

Exercice 5.7 [◆◆◆] Différence symétrique

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E , on définit

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que la réunion définissant $A \Delta B$ est disjointe.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Montrer que $\overline{A \Delta B} = A \Delta B$.
4. Simplifier $A \Delta E$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$.
5. (*) Résoudre l'équation $A \Delta X = \emptyset$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Considérons l'intersection :

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) \\ &= A \cap (B \cap \overline{B}) \cap \overline{A} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= \overline{A \cap B} \cap (A \cup B) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (A \cup B) \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap A) \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup \emptyset \\ &= \overline{A} \cap B \\ &= A \Delta B \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= A \Delta B \end{aligned}$$

4. On a :

- $A \Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = E \cap \overline{A}$.
- $A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$.
- $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.
- $A \Delta \overline{A} = (A \cup \overline{A}) \setminus (A \cap \overline{A}) = E \setminus \emptyset = E$

5. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\begin{aligned} A \Delta X &= \emptyset \\ \iff (A \setminus X) \cup (X \setminus A) &= \emptyset \\ \iff A \setminus X &= \emptyset \text{ et } X \setminus A = \emptyset \\ \iff X &\subseteq A \text{ et } A \subseteq X \\ \iff X &= A \end{aligned}$$

□

Exercice 5.8 [◆◆◆] Paradoxe de Russell

Supposons qu'il existe un *ensemble de tous les ensembles* et notons le \mathcal{E} .

Considérons alors l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes :

$$y = \{x \in \mathcal{E} \mid x \notin x\}.$$

Démontrer que $y \in y \iff y \notin y$.

Supposons que $y \in y$. Montrons que $y \notin y$.

On a que $y \in y$. Or tout élément de y n'appartient pas à lui-même.

Ainsi, $y \notin y$.

Supposons que $y \notin y$. Montrons que $y \in y$.

y est un ensemble, donc $y \in \mathcal{E}$. De plus, $y \notin y$ par supposition.

Ce sont les deux conditions nécessaires pour appartenir à y .

Ainsi, $y \in y$.

On a bien montré que $y \in y \iff y \notin y$.

Cela est absurde, ainsi les ensemble \mathcal{E} et y ne peuvent pas exister.

□