29 Comparaison locale

Les fonctions dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dont a est un élément ou une borne (a peut valoir $+\infty$ ou $-\infty$). Elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (même si des images complexes seraient possibles). On supposera que les fonctions considérées, généralement notées f, g et h dans les définitions et propositions, ne s'annulent pas au voisinage de a sauf peut-être en a, ce qui donne un sens au quotient f/g au voisinage de a.

Pour ce qui concerne les suites, notées (u_n), (v_n), (w_n) dans les définitions et propositions, elles sont supposées ne plus s'annuler à partir d'un certain rang, ce qui donne un sens au quotient u/v àpdcr.

1 Trois relations de comparaison locale pour les fonctions.

1.1 Négligeabilité.

Définition 1 (Négligeabilité : fonctions)**.**

On dit que f est **négligeable** devant g **en** a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a. On note alors

$$f \underset{a}{=} o(g) \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{a}{=} o(g(x))\,.$$

On peut dire « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ » en a.

Remarque. L'écriture

$$f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(h(x))$$

s'interprète de la manière suivante : la fonction f s'écrit comme une somme de fonctions $g+\widetilde{g}$ et l'information dont on dispose sur $\widetilde{g}$, c'est que cette fonction est négligeable devant la fonction h en a.

Exemple 2.

Les exemples ci-dessous, très élémentaires pour apprivoiser la notation, sont généralisés ensuite

$$x^2 \underset{0}{=} o(x) \qquad x \underset{+\infty}{=} o(x^2) \qquad e^x \underset{+\infty}{=} o(e^{2x}) \qquad e^{2x} \underset{-\infty}{=} o(e^x)$$

$$\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x) \qquad \ln(x) \underset{0_+}{=} o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \underset{+\infty}{=} o(e^x) \qquad e^x \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Proposition 3 (Puissances au voisinage de $+\infty$ et de 0+)**.**

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \qquad \alpha<\beta \quad \Longrightarrow \quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{0+}{=} o(x^\alpha).$$

Retenons en vue des développements limités que $x^2 \underset{0}{=} o(x)$, $x^3 \underset{0}{=} o(x^2)$, $x^4 \underset{0}{=} o(x^3)$...

Proposition 4 (Fonctions exponentielles)**.**

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad a<b \quad \Longrightarrow \quad e^{ax} \underset{+\infty}{=} o(e^{bx}) \quad \text{et} \quad e^{bx} \underset{-\infty}{=} o(e^{ax}).$$

Proposition 5 (Croissances comparées)**.**

Pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in]0,+\infty[$, on a

$$\ln^\beta(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha) \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma x}) \qquad \ln^\beta(x) \underset{0}{=} o(x^{-\alpha}) \qquad e^{\gamma x} \underset{-\infty}{=} o\left(|x|^{-\alpha}\right).$$

La notation $o(1)$ sera bien pratique pour désigner une quantité qui tend vers 0 :

Proposition 6 (Une nouvelle façon d'exprimer qu'une fonction tend vers 0)**.**

$$f(x) \underset{a}{=} o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

1.2 Domination.

Définition 7 (Domination : fonctions)**.**

On dit que f est **dominée** par g en a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note alors

$$f \underset{a}{=} O(g) \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{a}{=} O(g(x)).$$

On peut dire « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ » en a.

On se souvient qu'être bornée, c'est être majorée en valeur absolue... on a donc

$$f(x) = O(g(x)) \iff \exists C > 0 \ \ \exists \eta > 0 \ \ \forall x \in I \setminus \{a\} \ \ |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Exemple 8.

$$x^2 \sin(x) \underset{+\infty}{=} O(x^2) \qquad\qquad x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} O(x^2).$$

Proposition 9 (Un petit o est un grand O)**.**

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$$

Proposition 10 (Une nouvelle façon d'exprimer qu'une fonction est bornée localement)**.**

$$f(x) \underset{a}{=} O(1) \quad \iff \quad f \text{ bornée au voisinage de } a$$

1.3 Équivalence.

Définition 11 (Équivalence de fonctions)**.**

On dit que f est **équivalente à** g **en** a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x).$$

Remarque. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, on dit que $g(x)$ est un **équivalent** de $f(x)$ au voisinage de a. Lorsqu'on cherche « un équivalent » de $f(x)$, on veut une fonction équivalente à f qui soit *plus simple* que f. Par exemple

$$x + 2\ln(x) + 3 \underset{0}{\sim} x \qquad\qquad \ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1.$$

En revanche, au voisinage de $+\infty$ ou de 0_+, on ne sait pas proposer d'équivalent plus simple de $\ln(x)$.

Proposition 12.

L'équivalence en a est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a sauf peut-être en a.

Proposition 13 (Limite finie <u>non nulle</u>)**.**

Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{si et seulement si} \quad f(x) \underset{a}{\sim} \ell$$

Exemple 14 (Un premier tabou)**.**

Tendre vers 0, ce n'est pas *être équivalent à zéro* : ce qui est écrit en italique n'a aucun sens.

⚠ **Pas d'équivalent à** 0. ⚠

Théorème 15 (Lien entre $\sim$ et $=$)**.**

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Remarque. Il sera important de savoir traduire l'équivalence à l'aide d'une égalité, notamment pour travailler avec des sommes (on ne pourra pas sommer des équivalents).

Exemple 16 (Obtenir un équivalent en factorisant par le terme prépondérant)**.**

Donner un équivalent en $+\infty$ ainsi qu'en 0 de

$$\frac{x^2 + \ln(x) + 1}{x + e^x}.$$

Exemple 17 (Obtenir un équivalent en négligeant le(s) négligeable(s))**.**

Donner un équivalent en $+\infty$ ainsi qu'en 0 et $-\infty$ de

$$\frac{1}{x} + x + e^x + e^{2x}$$

Proposition 18 (Fonctions polynomiales et fractions rationnelles)**.**

Soient $(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $(b_0, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$ tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

$$a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0 \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{(terme de plus haut degré)}$$

$$\frac{a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0} \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} \quad \text{(termes de plus haut degré)}$$

Proposition 19 (Obtenir un équivalent à l'aide d'un encadrement)**.**

Si on a l'encadrement $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et si $f(x) \sim h(x)$, alors

$$f(x) \sim g(x) \sim h(x).$$

Exemple 20.

$$\lfloor x \rfloor \underset{+\infty}{\sim} x.$$

Proposition 21 (L'équivalence préserve le signe)**.**

Si deux fonctions sont équivalentes en a, alors elles ont le même signe au voisinage de a.

Proposition 22 (L'équivalence préserve la limite)**.**

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{a}{\to} L \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Longrightarrow \quad g(x) \underset{a}{\to} L.$$

2 Règles de calcul.

2.1 Jongler avec les o et les O.

Tous les résultats ci-dessous demeurent vrais lorsque o est remplacé par O.

Proposition 23 (Multiplication d'un négligeable par une constante, une suite, une fonction)**.**

1. Les constantes multiplicatives sont absorbées et digérées par o : si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \cdot o(f) \underset{a}{=} o(f).$$

2. Les fonctions sont absorbées (mais *pas* digérées) par o.

$$g \cdot o(f) \underset{a}{=} o(gf).$$

Proposition 24 (Somme de deux négligeables)**.**

$$o(f) + o(f) \underset{a}{=} o(f).$$

Proposition 25 (Transitivité de la négligeabilité)**.**

$$f \underset{a}{=} o(g) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} o(h) \quad \Longrightarrow \quad f = o(h).$$

Notamment $o\left(o(f)\right) \underset{a}{=} o(f)$.

Exemple 26.

En utilisant les principes qui viennent d'être énoncés, simplifier les expressions ci-dessous :

$$x^4 + x^2 + o(x^3) \quad \text{en } 0 \qquad\qquad x^4 + x^2 + o(x) \quad \text{en } 0$$

$$x^2 \ln(x) + \frac{x^3}{\ln(x)} + o(x^3) \quad \text{en } +\infty$$

Proposition 27 (On est négligeable par rapport à toutes fonctions équivalentes)**.**

$$f = o(g) \text{ et } g \sim h \implies f = o(h).$$

Proposition 28 (Substitution dans un négligeable)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $u : J \to I$, ainsi que a élément ou borne de I, b élément ou borne de J.

$$\left(f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \text{ et } u(t) \underset{t\to b}{\to} a \right) \implies f\left(u(t)\right) \underset{t\to b}{=} o\left(g\left(u(t)\right)\right).$$

2.2 Ce qu'on peut faire avec $\sim$, et ce qu'on ne peut pas faire.

Proposition 29 (Produit d'équivalents, quotient d'équivalents)**.**

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ et } f^*(x) \underset{a}{\sim} g^*(x) \implies f(x)f^*(x) \underset{a}{\sim} g(x)g^*(x) \text{ et } \frac{f(x)}{f^*(x)} \underset{a}{\sim} \frac{g(x)}{g^*(x)}.$$

Exemple 30 (Donner un exemple justifiant chaque tabou)**.**

⚠ **On ne somme pas des équivalents.** ⚠

⚠ **On ne compose pas par une fonction dans un équivalent.** ⚠

Il est possible, en revanche, de *substituer*.

Proposition 31 (Substitution dans un équivalent)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $u : J \to I$, ainsi que a élément ou borne de I, b élément ou borne de J.

$$\left(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ et } u(t) \underset{t\to b}{\to} a \right) \implies f\left(u(t)\right) \underset{t\to b}{\sim} g\left(u(t)\right).$$

3 Approximations du premier ordre.

3.1 Développement limité à l'ordre 1 et dérivabilité.

Proposition 32 (La dérivabilité implique l'existence d'un développement limité d'ordre 1)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément de I. Si f est dérivable en a, alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

En particulier dans le cas d'une fonction dérivable en 0, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Corollaire 33 (Développements limités usuels à l'ordre 1 en 0)**.**

$$\sin x \underset{0}{=} x + o(x) \qquad \tan x \underset{0}{=} x + o(x) \qquad \cos x \underset{0}{=} 1 + o(x)$$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x) \qquad \ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$$

$$\arcsin x \underset{0}{=} x + o(x) \qquad \arctan x \underset{0}{=} x + o(x) \qquad (1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$$

Exemple 34.

Quel est le signe de $f : x \mapsto \tan(x) + \sqrt{1+x} - e^x$ au voisinage de 0 ?

Exemple 35.

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer (en prouvant que la limite existe)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Proposition 36.

Supposons que f est définie au voisinage de a sauf peut-être en a et qu'elle y admet *un développement limité à l'ordre* 1, c'est-à-dire qu'il existe deux réels a_0 et a_1 tels que

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a).$$

Alors
- f est continue en a, ou prolongeable par continuité en posant $f(a) = a_0$
- f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = a_1$.

Exemple 37.

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - x}{x^2}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer que f est prolongeable en 0 en une fonction dérivable en 0.
Justifier ensuite que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On admettra (en avant-première) les développements limités suivants :

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2).$$

3.2 Équivalents usuels.

Corollaire 38 (Équivalents pour des fonctions usuelles)**.**

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$$

$$\arcsin x \underset{0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$$

Exemple 39.

Donner un équivalent au voisinage de 0 pour $f : x \mapsto e^x - (1+x)^{\frac{1}{3}}$.

Pourquoi est-on incapable de faire pareil pour $g : x \mapsto e^x - (1+x)$? De quoi avons-nous besoin ?

Exemple 40.

Donner un équivalent en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1+x^2)}.$$

Exemple 41 (Un exemple ailleurs qu'en 0)**.**

Justifier que

$$\ln\left(1 + \cos(t)\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - t.$$

4 Comparaison de suites.

On adapte rapidement pour les suites le vocabulaire et les principes dégagés pour les fonctions. On rappelle que dans ce qui suit, u et v seront des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Définition 42 (Négligeabilité et domination : suites).

On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \to 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$

On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.

On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Pour les suites, rien besoin d'écrire sous le symbole $=$ ou le symbole $\sim$: l'horizon, c'est forcément $n \to +\infty$.

Les principes établis pour les fonctions se généralisent aux suites. En particulier, les produits et quotients d'équivalents sont possibles, mais pas les sommes. Pour travailler avec ces dernières, on rappelle que

$$u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = v_n + o(v_n).$$

Plutôt que de récrire les théorèmes dans le cas des suites, on va se concentrer sur une collection d'exemples.

Énonçons tout de même quelques résultats relatifs aux suites géométriques et un résultat de substitution.

Proposition 43 (Suites géométriques).

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \qquad |p| < |q| \quad \Longrightarrow \quad p^n = o\left(q^n\right).$$

Proposition 44 (Croissances comparées).

Soient $a \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et $q \in]-1, 1[$.

$$n^a = o\left(p^n\right) \qquad \text{et} \qquad q^n = o(n^a).$$

Si on a une relation de comparaison entre fonctions au voisinage de a, on peut substituer à la variable une suite qui tend vers a. Voici un énoncé lorsque la comparaison est une équivalence

Proposition 45 (Substitution dans un équivalent).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément de I ou une borne de I. Soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$.

$$\left(f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \;\; \text{et} \;\; u_n \to a \right) \quad \Longrightarrow \quad f\left(u_n\right) \sim g\left(u_n\right).$$

Exemple 46.

$$n+1 \sim n \qquad \text{et plus généralement } (n+1)^\alpha \sim n^\alpha \text{ pour tout réel } \alpha$$

Exemple 47.

$$\ln(n+1) \sim \ln(n) \quad \text{et} \quad e^{n+1} \not\sim e^n.$$

Exemple 48.

Donner un équivalent pour

$$\sum_{k=1}^{n} k \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exemple 49.

Que dire des suites de terme général

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ? \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} ? \qquad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n ?$$

Exemple 50 (Négliger le négligeable)**.**

Donner un équivalent simple pour les termes généraux de suites ci-dessous :

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n} \quad 2^n+n^2 \quad \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}+\ln(n).$$

$$\ln(n+1)+\ln(\ln(n)), \quad 2^{-n}+3^{-n}+4^{-n}, \quad 2^n+\operatorname{ch}(n), \quad e^{\sqrt{n}}+n^6.$$

Exemple 51 (Obtenir un équivalent par encadrement)**.**

1. À l'aide des accroissements finis, prouver pour tout entier $k \geq 2$ l'encadrement

$$\ln(k+1)-\ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k)-\ln(k-1).$$

2. Soit la suite (H_n) définie par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $\boxed{H_n \sim \ln(n)}$.

5 Applications de la comparaison locale.

5.1 Exemples de développements asymptotiques.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Nous avons démontré plus haut que

$$H_n \sim \ln(n) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad H_n = \ln(n) + o\left(\ln(n)\right).$$

Le résultat qui vient est plus précis.

Théorème 52 (Série harmonique et constante d'Euler)**.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Il existe une constante strictement positive appelée **constante d'Euler** et notée γ telle que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Preuve. On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ puis on prouve que u et v sont deux suites adjacentes qui convergent vers une même limite strictement positive. □

La constante d'Euler a pour valeur approchée $0,577215$. On ignore si ce nombre est rationnel ou irrationnel. Avec des outils plus sophistiqués on peut établir le résultat plus fin suivant :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exemple 53 (Un développement asymptotique)**.**

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1}$. Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$f(x) \underset{+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

5.2 Formule de Stirling.

Théorème 54 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Corollaire 55 (La formule de Stirling écrite comme un développement asymptotique)**.**

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1).$$

Exercices

$\boxed{\textbf{29.1}}$ **[♦◇◇]** On fixe un entier $p \in \mathbb{N}$. Donner un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\binom{n}{p}$.

$\boxed{\textbf{29.2}}$ **[♦♦◇]** Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\tan\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)$.

$\boxed{\textbf{29.3}}$ **[♦◇◇]** Prouver que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{3/2} = o\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\right)$.

$\boxed{\textbf{29.4}}$ **[♦♦◇]** Prouver que $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{k^2} \sim e^{n^2}$.

$\boxed{\textbf{29.5}}$ **[♦◇◇]** Soient deux fonctions f et g définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et telles que

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty.$$

Démontrer que $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.

$\boxed{\textbf{29.6}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1-x^2}$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. Donner un équivalent de f en 0.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$. Prouver que $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.
3. Donner un équivalent de f en 1.

$\boxed{\textbf{29.7}}$ **[♦♦◇]** Équivalent d'une suite d'intégrales
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I_n + I_{n+2}$ pour un entier naturel n donné.
2. Montrer que (I_n) est décroissante. En déduire l'inégalité $I_{n+2} + I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2} \leq I_n + I_n$, valable pour tout n.
3. En déduire un équivalent de I_n.

$\boxed{\textbf{29.8}}$ **[♦♦♦]** Équivalent d'une suite par récurrence
Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n \times e^{-u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que u converge. Préciser la limite de u.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ puis un équivalent de u_n. *Il faudra ici utiliser le lemme de Cesàro.*

$\boxed{\textbf{29.9}}$ **[♦♦♦]** Équivalent d'une suite définie implicitement]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'équation $x - 1 - \ln(x+n) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'on notera x_n.
2. (*) Démontrer que $x_n \sim \ln(n)$.
