Problème 1. Une inégalité.

1. *Inégalités de Bernoulli*

(a) On sait que $x \mapsto 1+x$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$. Par ailleurs, $t \mapsto t^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Par composition, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
La fonction polynomiale $x \mapsto 1+\alpha x$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
Par différence, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1,+\infty[}$.
On calcule que

$$\forall x \in]-1,+\infty[\qquad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \boxed{\alpha\left((1+x)^{\alpha-1}-1\right)}.$$

(b) • On suppose $\alpha > 1$, de sorte que $\alpha - 1 > 0$ et $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Pour $x \in]-1,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff (1+x)^{\alpha-1} - 1 > 0 \quad \text{car } \alpha > 0 \\ &\iff 1 + x > 1 \quad \text{car } t \mapsto t^{\alpha-1} \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^\star \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

• On suppose $\alpha < 1$, de sorte que $\alpha - 1 < 0$. Cette fois, $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. On obtient

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

(c) • Si $\alpha < 1$, l'étude précédente assure que f admet un maximum en 0. On en déduit, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, que

$$\begin{gathered} f(x) \leq f(0) \\ (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \leq 0 \\ \boxed{(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x}. \end{gathered}$$

• Si $\alpha > 1$, l'étude précédente assure que f admet un minimum en 0. On en déduit que

$$\forall x \in]-1,+\infty[\quad : \quad \boxed{(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x}.$$

2. *Inégalité préliminaire*

Soient $a \in]0,1[$ et $b \in]0,1[$.

(a) On sait que $0 < 1-b < 1$. On utilise l'inégalité de Bernoulli dans le cas $\alpha = 1-b \in]0,1[$ et $x = a-1 \in]-1,+\infty[$:

$$a^{1-b} = (1+(a-1))^{1-b} \boxed{\leq 1 + (1-b)(a-1))}.$$

(b) • On observe que $1 + (1-b)(a-1) = a + b - ab$.
Par ailleurs $a + b - ab = \underbrace{a}_{>0} + \underbrace{b(1-a)}_{>0} > 0$. La question précédente laisse

$$\begin{gathered} a^{1-b} \leq a + b - ab \\ a \leq (a+b-ab)a^b \quad \text{car } a^b > 0 \\ \boxed{\frac{a}{a+b-ab} \leq a^b} \quad \text{car } a+b-ab > 0. \end{gathered}$$

• Par symétrie des hypothèses, on a aussi $b^a \geq \frac{b}{a+b-ab}$.
Par somme d'inégalités :

$$\boxed{a^b + b^a \geq \frac{a+b}{a+b-ab}}.$$

3. *Preuve du résultat principal*

• Si $a \geq 1$. Alors $a^b \geq 1$ et $b^a > 0$, si bien que $a^b + b^a > 1$.

• Si $b \geq 1$. Alors $a^b > 0$ et $b^a \geq 1$, si bien que $a^b + b^a > 1$.

• Reste le cas $a < 1$ et $b < 1$. Les hypothèses de la question 2 sont satisfaites. On sait donc que $a^b + b^a \geq \frac{a+b}{a+b-ab}$. Par ailleurs $a + b > a + b - \underbrace{ab}_{>0}$ et on a vu que $a + b - ab > 0$. On en déduit que $\frac{a+b}{a+b-ab} > 1$. Par transitivité :

$$\boxed{a^b + b^a > 1}.$$

4. *La minoration par 1 est optimale*

(a) Immédiatement, $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} 0$ (pas de forme indéterminée).

Ensuite, $\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{-x\ln x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} 1$ car $x \ln x \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées).

Il vient alors

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^x \right) = 1}.$$

(b) Soit $x > 0$. Prenons $a = x > 0$ et $b = \frac{1}{x} > 0$. On a donc $x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^x \geq m$. Par passage à la limite, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^x \right) \geq m,$$

ce qui laisse

$$\boxed{1 \geq m}.$$

Problème 2. Une somme qui télescope.

1. On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)^2 + \mathrm{sh}^2(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{2} \\
&= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \boxed{\mathrm{ch}(2x)}
\end{aligned}$$

et

$$2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) = 2\frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2 \cdot 2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \boxed{\mathrm{sh}(2x)}.$$

Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $\mathrm{th}(x)$ et $\mathrm{th}(2x)$ sont non nuls.

$$\frac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \frac{1}{\mathrm{th}(x)} = \frac{2\mathrm{ch}(2x)}{\mathrm{sh}(2x)} - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)} - \frac{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)} = \boxed{\mathrm{th}(x)}.$$

2. On applique ce qui précède à $x = 2^k a \in \mathbb{R}^\star$ pour obtenir $\mathrm{th}\left(2^k a\right) = \frac{2}{\mathrm{th}\left(2^{k+1}a\right)} - \frac{1}{\mathrm{th}\left(2^k a\right)}$. En multipliant par 2^k :

$$\boxed{2^k \mathrm{th}\left(2^k a\right) = \frac{2^{k+1}}{\mathrm{th}\left(2^{k+1}a\right)} - \frac{2^k}{\mathrm{th}\left(2^k a\right)}}.$$

3. On reconnaît une somme télescopique.

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2^{k+1}}{\mathrm{th}\left(2^{k+1}a\right)} - \frac{2^k}{\mathrm{th}\left(2^k a\right)} \right) \\
&= \frac{2^n}{\mathrm{th}\left(2^n a\right)} - \frac{2^0}{\mathrm{th}\left(2^0 a\right)} \\
&= \boxed{\frac{2^n}{\mathrm{th}\left(2^n a\right)} - \frac{1}{\mathrm{th}(a)}}.
\end{aligned}$$