

Fonctions usuelles  
Corrigé

DARVOUX Théo  
Septembre 2023

Exercices.

Vocabulaire sur les fonctions.	2
Exercice 4.1	2
Exercice 4.2	2
Étude de fonctions.	2
Exercice 4.3	2
Exercice 4.4	3
Exercice 4.5	4
Exercice 4.6	4
Exercice 4.7	5
Exercice 4.8	5
Exercice 4.9	6
Exercice 4.10	7
Exercice 4.11	7
Bijections.	8
Exercice 4.12	8
Exercice 4.13	9

**Exercice 4.1 [◆◆◆]**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction 2-périodique et 3-périodique. Montrer que  $f$  est 1-périodique.  
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x - 2 \in \mathbb{R} \\ f(x - 2) = f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 3 \in \mathbb{R} \\ f(x + 3) = f(x) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x - 2 + 3 \in \mathbb{R} \\ f(x - 2 + 3) = f(x - 2) = f(x) \end{cases}$$

□

**Exercice 4.2 [◆◆◆]**

Déterminer toutes les fonctions croissantes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $f$  une solution du problème.

On remarque que  $f : x \mapsto x$  est solution du problème.

Supposons  $f(x) > x$ , on a :  $f(f(x)) > f(x)$  par croissance de  $f$ . Or  $f(f(x)) = x$  donc  $x > f(x)$ , ce qui est absurde.

Supposons  $f(x) < x$ , on a :  $f(f(x)) < f(x)$  par croissance de  $f$ . Or  $f(f(x)) = x$  donc  $x < f(x)$ , ce qui est absurde.

Ainsi, la seule fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  solution est  $f : x \mapsto x$ .

□

**Exercice 4.3 [◆◆◆] S'entraîner tout seul à dériver.**

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée.

$$\begin{aligned} A : x \mapsto x^\pi, \quad B : x \mapsto \pi^x, \quad C : x \mapsto \cos(5x), \quad D : x \mapsto \text{th}(\text{ch}(x)), \\ E : x \mapsto \ln(1 + x^3), \quad F : x \mapsto \cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right), \quad G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}, \quad H : x \mapsto \sin|x+1|. \end{aligned}$$

- $A' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi x^{\pi-1} \end{cases}$
- $D' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(\text{ch}(x))} \end{cases}$
- $G' : x \mapsto -\frac{3}{2}(3x-1)^{3/2}$
- $B' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\pi)\pi^x \end{cases}$
- $E' : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x^2}{1+x^3} \end{cases}$
- $H'_- : \begin{cases} ]-\infty, -1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\cos(-x-1) \end{cases}$
- $C' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -5\sin(5x) \end{cases}$
- $F' : \begin{cases} ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}} \end{cases}$
- $H'_+ : \begin{cases} ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x+1) \end{cases}$

□

**Exercice 4.4 [◆◆◆]**

Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x \ln(x)}$$

$$(f : x \mapsto e^{x \ln^2(x)})$$

On a :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x)(\ln(x) + 2)e^{x \ln^2(x)} \end{cases}$$

Son tableau de variations est donc :

$x$	0					$e^{-2}$	1		$+\infty$	
$f'(x)$						+	0	-	0	+
$f$	1					$e^{4/e^2}$		1		$+\infty$
						$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

□

**Exercice 4.5 [◆◆◆]**

1. Démontrer que

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. À l'aide du théorème des gendarmes, calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

3. Retrouver ce résultat en faisant apparaître un taux d'accroissement.

1. Posons :

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \qquad g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

Elles sont dérivables et tout et tout :

$$f' : x \mapsto -\frac{x}{(1+x)^2} \qquad g' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$$

$x$	$-1$		$0$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f$			$0$		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

$x$	$-1$		$0$	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$g$		$0$			
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

L'inégalité est donc vérifiée car ces fonctions prennent des valeurs négatives.

2. Soit  $x \in ]-1, +\infty[$ . On a :

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

3. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

□

### Exercice 4.6 [◆◆◇]

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

Posons :

$$f : x \mapsto x - \sin x \qquad g : x \mapsto x - \sin x - \frac{x^3}{6}$$

Ces fonctions sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$f' : x \mapsto 1 - \cos x \qquad g' : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$$

La première inégalité est triviale car  $\cos x \leq 1$ , ainsi  $x - \sin x \geq 0$ .

On a :

$$g'' : x \mapsto \sin x - x$$

Et donc :

$x$	0	$+\infty$
$g''(x)$	0	—
$g'(x)$	0	$-\infty$
$g$	0	$-\infty$

Ainsi,  $g$  prend des valeurs négatives sur  $\mathbb{R}_+$ , donc :  $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ .

□

**Exercice 4.7 [◆◆◆]**

Faire une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \ln \left( \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)$$

⊙ Soit  $x \in ]-1, 1[$ .

On a :

$$f : x \mapsto \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

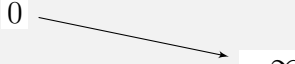
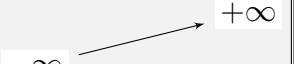
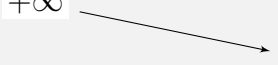
⊙ Soit  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .

On a :

$$f : x \mapsto \ln \left( -\frac{1+x}{1-x} \right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}.$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	
$f$	0 	$-\infty$	$-\infty$ 	$+\infty$ 

Pour les limites :

$$f : x \mapsto \ln \left( \left| \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} \right| \right)$$

□

**Exercice 4.8 [◆◆◆]**

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in ]0, 1[ \qquad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

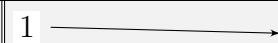
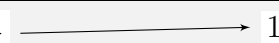
Soit  $x \in ]0, 1[$ .

On a :

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x \ln x} e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}$$

Posons :

$$f : x \mapsto e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)} \qquad f' : x \mapsto \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}$$

$x$	0	0.5	1
$f'(x)$		-	+
$f$	1 	$\frac{1}{2}$ 	1

□

**Exercice 4.9 [◆◆◇]**

1. Étudier les variations de  $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$  sur  $[0, +\infty[$ .
2. Prouver que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

1. Soit  $x \in [0, +\infty[$ . On a :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$$

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f$	0	1

2. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Par inégalité triangulaire, on a :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

On applique  $f$ , fonction croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui ne change pas les inégalités:

$$\begin{aligned} \frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \end{aligned}$$

□

**Exercice 4.10 [◆◆◇]**

Soit la fonction  $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est impaire.
3. Étudier ses variations et donner le tableau correspondant.

$$1. \text{ Soit } g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x \end{cases} \quad \text{On a : } g' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g$	$+\infty$	0

$f$  donc définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 -f(x) &= -\ln(\sqrt{x^2+1} - x) \\
 &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x^2+1 - x^2}\right) \\
 &= \ln(\sqrt{x^2+1} + x) \\
 &= f(-x)
 \end{aligned}$$

3. On a :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f$	$+\infty$	$-\infty$

□

### Exercice 4.11 [◆◆◆]

Notons  $a$  le nombre

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

1. Montrer que  $a^3 = 6a + 40$ .
2. En déduire la valeur de  $a$ .

1.

$$\begin{aligned}
 a^3 &= 40 + 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})^2(20 - 14\sqrt{2})} + 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})^2} \\
 &= 40 + 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})(400 - 392)} + 3\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})(400 - 392)} \\
 &= 40 + 6\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + 6\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \\
 &= 6a + 40
 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
 a^3 - 6a - 40 &= 0 \\
 \iff (a - 4)(a^2 + 4a + 10) &= 0 \\
 \iff a &= 4
 \end{aligned}$$

□

**Exercice 4.12** [◆◆◆]

Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \end{cases}.$$

1. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de  $f$ . Peut-on écrire en conclusion que  $f^{-1} = f$  ?

Soit  $x \in ]1, +\infty[$  et  $y \in \mathbb{R}_+^*$ . On a :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \iff y &= \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \\ \iff \ln(y) &= -\frac{1}{\ln(x)} \\ \iff -\frac{1}{\ln(y)} &= \ln(x) \\ \iff x &= \exp(-\frac{1}{\ln(y)}) \end{aligned}$$

L'équation a une unique solution,  $f$  réalise donc une bijection de  $]1, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. On a :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow ]1, +\infty[ \\ x \mapsto \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \end{cases}$$

$f \neq f^{-1}$  car leurs domaines de définition sont différents.

□



**Exercice 4.13 [◆◆◆]**

1. Montrer que  $\text{th}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $] -1, 1[$  et déterminer une expression explicite de sa réciproque, qu'on notera  $\text{argth}$ .
2. De deux façons différentes, montrer que  $\text{argth}$  est dérivable sur son intervalle de définition et calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{argth}\left(\frac{1+3\text{th } x}{3+\text{th } x}\right) = x + \ln \sqrt{2}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in ] -1, 1[$ . On a :

$$\begin{aligned}
 y &= \text{th } x \\
 \iff y &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 \iff y &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\
 \iff e^{2x}(1 - y) &= y + 1 \\
 \iff e^{2x} &= \frac{y + 1}{1 - y} \\
 \iff x &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{y + 1}{1 - y} \right)
 \end{aligned}$$

L'équation a une unique solution,  $\text{th}$  réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $] -1, 1[$ .

Sa réciproque est  $\text{argth} : \begin{cases} ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{1-x} \right) \end{cases}$

2. On peut montrer que  $\text{argth}$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  par le théorème de dérivée des réciproques ou en dérivant  $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{1-x} \right)$  comme composée de fonctions dérivables.

On retrouve dans les deux cas :

$$\text{argth}' : \begin{cases} ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \end{cases}$$

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{argth} \left( \frac{1 + 3 \text{th } x}{3 + \text{th } x} \right) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{1+3\text{th } x}{3+\text{th } x} + 1}{1 - \frac{1+3\text{th } x}{3+\text{th } x}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{4+4\text{th } x}{3+\text{th } x}}{\frac{2-2\text{th } x}{3+\text{th } x}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2 + 2 \text{th } x}{1 - \text{th } x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\text{ch}(x) + \text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - \text{sh}(x)} \right) + \frac{1}{2} \ln(2) \\
 &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x}) + \ln(\sqrt{2}) \\
 &= x + \ln \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

□