

Forme Trigonométrique

Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 7.1	2
Exercice 7.2	2
Exercice 7.3	2
Exercice 7.4	3
Exercice 7.5	4
Exercice 7.6	4
Exercice 7.7	5
Exercice 7.8	6
Exercice 7.9	6

Pour $z \in \mathbb{C}$,
 $\Re(z)$ est la partie réelle de z .
 $\Im(z)$ est la partie imaginaire z .

Exercice 7.1 [◆◆◆]

Calculer $(1+i)^{2023}$.

On a :

$$(1+i)^{2023} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2023} = \sqrt{2}^{2023} e^{i\frac{2023\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2023} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

□

Exercice 7.2 [◆◆◆]

Soient trois réels x, y, z tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} &= 0 \\ \iff e^{-ix} + e^{-iy} + e^{-iz} &= 0 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (e^{ix} + e^{iy} + e^{iz})^2 &= e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} + 2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) \\ \iff e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} &= -2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) \end{aligned}$$

Or :

$$2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) = 2e^{i(x+y+z)}(e^{-ix} + e^{-iy} + e^{-iz}) = 0$$

Ainsi,

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$$

□

Exercice 7.3 [◆◆◆]

1. Déterminer les formes algébriques et trigonométriques du nombre

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$$

2. En déduire l'expression de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{7\pi}{12})$ à l'aide de radicaux.

1. On a :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} + i\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \right)$$

2. On a :

$$\begin{cases} \cos(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \\ \sin(\frac{7\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \end{cases} \quad \text{Donc : } \frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

□

Exercice 7.4 [◆◆◆]

Soit un réel θ . Linéariser $(\cos \theta)^5$ et $(\sin \theta)^6$.

On a :

$$\begin{aligned} (\cos \theta)^5 &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^5 \\ &= \frac{1}{32} (e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}) \\ &= \frac{1}{32} (2 \cos(5\theta) + 10 \cos(3\theta) + 20 \cos(\theta)) \\ &= \frac{1}{16} (\cos(5\theta) + 5 \cos(3\theta) + 10 \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (\sin \theta)^6 &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^6 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}) \\ &= -\frac{1}{64} (2 \cos(6\theta) - 12 \cos(4\theta) + 30 \cos(2\theta) - 20) \\ &= \frac{1}{32} (10 + 6 \cos(4\theta) - 15 \cos(2\theta) - \cos(6\theta)) \end{aligned}$$

□

Exercice 7.5 [◆◆◆]

1. Soit x un réel. Exprimer $\cos(5x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.
2. Montrer que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du trinôme $x \mapsto 16x^2 - 20x + 5$.
3. En déduire l'égalité $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. On a :

$$\begin{aligned} \cos(5x) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^5) \\ &= \cos^5(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x) \\ &= \cos^5(x) - 10 \cos^3(x)(1 - \cos^2(x)) + 5 \cos(x)(1 - 2 \cos^2(x) + \cos^4(x)) \\ &= 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5 \cos(x) \end{aligned}$$

2. Posons $x = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ On a :

$$\begin{aligned} \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{10}\right) &= 16 \cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ \iff 16 \cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 &= 0 \\ \iff 16x^2 - 20x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine de ce trinôme.

3. On a :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 16x^2 - 20x + 5 &= 0 \\ \iff x &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ car $\cos(\pi/5) > \cos(\pi/3) = 0.5$. On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Exercice 7.6 [◆◆◆]

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$

Notons : $S' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$ On a :

$$\begin{aligned} S + iS' &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k \\ &= (1 + e^{ix})^n \\ &= \left(e^{\frac{ix}{2}}\right)^n \left(e^{-\frac{ix}{2}} + e^{\frac{ix}{2}}\right)^n \\ &= e^{\frac{inx}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc $S = \Re\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{inx}{2}}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \Re\left(e^{\frac{inx}{2}}\right)$.

Or, on a :

$$\Re\left(e^{\frac{inx}{2}}\right) = \Re\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

En conclusion :

$$S = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

□

Exercice 7.7 [◆◆◆] Noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On note

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

1. Montrer que $D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}}$.
2. Montrer que $F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$.

1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^n (e^{ix})^k \\ &= e^{-nx} \frac{1 - e^{ix(2n+1)}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-inx} - e^{ix(n+1)}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{ix/2}(e^{-ix(n+1/2)} - e^{ix(n+1/2)})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})} \\ &= \frac{-2i \sin(x(n + \frac{1}{2}))}{-2i \sin(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

2.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((k + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{n \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k + \frac{1}{2})x)$$

Calculons la somme des $\sin((k + 1/2)x)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k + \frac{1}{2})x) &= \Im \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix(k+\frac{1}{2})} \right) = \Im \left(e^{ix\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ixk} \right) = \Im \left(e^{ix\frac{1}{2}} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) \\ &= \Im \left(e^{ix\frac{1}{2}} \frac{e^{i\frac{nx}{2}} (\sin(\frac{nx}{2}))}{e^{i\frac{x}{2}} (\sin(\frac{x}{2}))} \right) = \Im \left(e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right) = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

Donc :

$$F_n(x) = \frac{1}{n \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{n \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

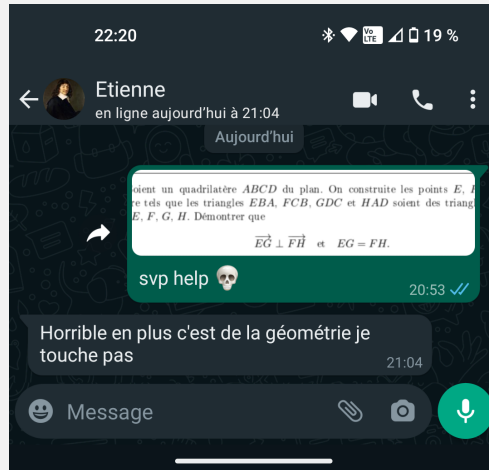
□

Exercice 7.8 [◆◆◆]

Soit un quadrilatère $ABCD$ du plan. On construit les points E, F, G, H à l'extérieur du quadrilatère tels que les triangles EBA, FCB, GDC et HAD soient des triangles directs, isocèles et rectangles en E, F, G, H .

Démontrer que

$$\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{FH} \quad \text{et} \quad EG = FH.$$



Exercice 7.9 [◆◆◆]

Trouver les nombres complexes d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $1, z^2$ et z^4 sont alignés.

C'est évident lorsque $z \in \{0, 1\}$. Supposons $z \notin \{0, 1\}$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.

On a :

$$\begin{aligned}
 &1, z^2, z^4 \text{ alignés} \\
 \iff &\frac{z^4 - 1}{z^2 - 1} \in \mathbb{R} \\
 \iff &\frac{(z^2 - 1)(z^2 + 1)}{z^2 - 1} \in \mathbb{R} \\
 \iff &z^2 + 1 \in \mathbb{R} \\
 \iff &z^2 \in \mathbb{R} \\
 \iff &r^2 e^{2i\theta} = r^2 e^{-2i\theta} \\
 \iff &e^{2i\theta} = e^{-2i\theta} \\
 \iff &e^{4i\theta} = 1 \\
 \iff &\theta = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Donc $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

□