Fonctions usuelles
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 3.1 [♦◊◊]

Résoudre $2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3)$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned} & 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3) \\ \iff & \ln\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right) = \ln(3x) \\ \iff & \frac{(x+3)^2}{4} = 3x \\ \iff & x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \iff & x = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, 3 est l'unique solution.

Exercice 3.2 [♦♦◊]

Résoudre l'équation $ch(x) = 2$. Que dire des solutions ?
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned} & \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \\ \iff & e^x + e^{-x} = 4 \\ \iff & e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \\ \iff & e^x = 2 \pm \sqrt{3} \\ \iff & x = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\ln(2-\sqrt{3})$ et $\ln(2+\sqrt{3})$ sont les uniques solutions dans $\mathbb{R}$.
On remarque que :

$$\ln(2+\sqrt{3}) = -\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = -\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Les solutions sont opposées.

Exercice 3.3 [♦◇◇]

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned}
& x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \\
\iff & e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \\
\iff & \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \\
\iff & \ln(x)(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) = 0 \\
\iff & \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\
\iff & x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\
\iff & x = 1 \text{ ou } x = 4
\end{aligned}$$

Les uniques solutions sont donc 1 et 4.

Exercice 3.4 [♦◇◇] Trigonométrie hyperbolique.

1. Montrer que pour tous réels a et b, on a
   (a) $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$.
   (b) $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)$.
   (c) Trouver une identité pour $\mathrm{th}(a+b)$.
2. Pour x réel, on pose $t = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$\text{(a)}\ \mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{(b)}\ \mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{(c)}\ \mathrm{th}\,x = \frac{2t}{1+t^2}$$

1.
(a)

$$\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \mathrm{ch}(a+b)$$

(b)

$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \frac{e^{a+b} - e^{a-b}}{2} = \mathrm{sh}(a+b)$$

(c)

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)}$$

On divise en haut et en bas par $\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)$.

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)} + \frac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)}}{1 + \frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)} \cdot \frac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)}} = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$$

2.

(a)

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1+\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})}{1-\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2})+\operatorname{sh}^2(\frac{x}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2})-\operatorname{sh}^2(\frac{x}{2})}$$
$$= \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch}(x)$$

(b)

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\operatorname{th}(\frac{x}{2})}{1-\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2})\operatorname{ch}(\frac{x}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2})-\operatorname{sh}^2(\frac{x}{2})}$$
$$= \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sh}(x)$$

(c)

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\operatorname{th}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2})\operatorname{ch}(\frac{x}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2})+\operatorname{sh}^2(\frac{x}{2})}$$
$$= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)$$

$\square$

Exercice 3.5 [♦♦♢]

Sans calculatrice, comparer π^e et e^π.
Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \end{cases}$$

Un magnifique tableau de variations :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On en conclut que :

$$\frac{\pi}{\ln(\pi)} > e$$
$$\iff \pi > e\ln(\pi)$$
$$\iff e^\pi > e^{e\ln\pi}$$
$$\iff e^\pi > \pi^e$$

Donc $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 3.6 [♦♦♦]

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.
2. Des deux nombres $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[3]{24}$, lequel est le plus grand ?

1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\right) \end{cases}$$

On a :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	-1	$\nearrow$	0

2.

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{24} \\ =&\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{3} \\ =&(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) - (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

Or f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi : $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$.
On en conclut que $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Exercice 3.7 [♦♦◊]

1. Soit α un réel et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$ (on discutera selon les valeurs de α).
2. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$$

1. Posons $f : x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$. f est définie, continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$ de dérivée :

$$g : \begin{cases}]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha((1+x)^{\alpha-1}-1) \end{cases}$$

Alors :

◎ Si $\alpha \in]0,1[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\alpha-1$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

◎ Si $\alpha \in]1,+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\alpha-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

◎ Si $\alpha \in]-\infty,0[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$ lorsque $\alpha \notin [0,1]$.

2. D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geq \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = (n+1)^\alpha$$

□

Exercice 3.8 [♦◇◇]

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad b) \sin^2 x = \frac{3}{2}\cos x \qquad c) \cos x + \sin x = 1$$

a)

$$\begin{aligned}
\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \begin{cases} 2x \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ 2x \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{8}[\pi] \\ x \equiv \frac{3\pi}{8}[\pi] \end{cases} \\
&\iff x \in \left\{\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sin^2 x = \frac{3}{2}\cos x &\iff 2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \\
&\iff -2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \\
&\iff \cos x = -2 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \\
&\iff x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}$$

c)

$$\cos(-\frac{\pi}{4} + x) = \cos(-\frac{\pi}{4})\cos x - \sin(-\frac{\pi}{4})\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x = 1 &\iff \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4} + x) = 1 \\
&\iff \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv \frac{2\pi}{4}[2\pi] \\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases} \\
&\iff x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}$$

Exercice 3.9 [♦◇◇]

Soit x un réel. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

Notons $\mathcal{P}_n$ cette proposition. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation.
On a : $|\sin(0x)| \leq 0|\sin x| \iff 0 \leq 0$.
Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a :

$$\begin{aligned}
|\sin(nx+x)| &= |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \\
&\leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)| \\
&\leq |\sin(nx)||\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(nx)| \\
&\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \\
&\leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| \qquad \text{(HR)} \\
&\leq (n+1)|\sin(x)|
\end{aligned}$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion.
Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 3.10 [♦♦♢]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}} \qquad (n \text{ fois le symbole } \sqrt{\cdot})$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.
2. En déduire $\lim u_n$

1. Notons $\mathcal{P}_n$ cette proposition. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation.
On a : $2\cos(\frac{\pi}{4}) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.
Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a :

$$\begin{aligned} u_n &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ \iff \sqrt{2+u_n} &= \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\ \iff u_{n+1} &= \sqrt{2(1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}))} \end{aligned}$$

Or $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$
Ainsi, $1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}$
Alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{4\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.
Conclusion.
Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

2.
$$\lim u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2\cos(0) = 2$$

Exercice 3.11 [♦♦♦]

Calculer $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.
On a :

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\\ &= \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\\ &= \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{8}\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\\ &= -\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\frac{1}{8}\\ &= -\frac{1}{8}\end{aligned}$$