0 # Logique

Table des matières

1 Négation, conjonction, disjonction. **1**
1.1 Non, Ou, Et : tables de vérité. . . . 1
1.2 Calculer avec des assertions. . . . 2
1.3 Un ou deux quantificateurs. . . . 3

2 Implication, équivalence. **5**
2.1 Implique, Équivaut : tables de vérité. . . . 5
2.2 L'implication, dans la pratique. . . . 6
2.3 Négation d'une implication. . . . 8
2.4 Contraposée d'une implication. . . . 8

3 Raisonnements usuels. **9**
3.1 Raisonner par récurrence. . . . 9
3.2 Raisonner par l'absurde. . . . 10
3.3 Prouver une unicité. . . . 10
3.4 Raisonner par analyse-synthèse. . . . 11
3.5 Résoudre une équation. . . . 13

Exercices **15**

1 Négation, conjonction, disjonction.

1.1 Non, Ou, Et : tables de vérité.

Définition 1.

Une **assertion** est une phrase pouvant prendre l'une des deux valeurs : Vrai (V) ou Faux (F).

Il n'y a pas d'autre possibilité que Vrai ou Faux en logique classique : c'est le principe du *tiers exclu*.

- « $1+1=2$ » est une assertion vraie et « $1+1=3$ » est une assertion fausse.
- « Comment allez-vous ? » n'est pas une assertion.
- « Il a plu le jour de la rentrée sur le lycée Paul Valéry. » est une assertion.
  Elle sera évaluée parfois vraie, parfois fausse... cela dépendra des années !

Définition 2.

On appelle **négation** d'une assertion P, et on note (non P), ou encore $\neg P$, l'assertion définie par

P	$\neg P$
V	F
F	V

Définition 3.

Soient deux assertions P et Q. Les assertions (P et Q), (P ou Q) et (P ou bien Q) sont appelées respectivement **conjonction**, **disjonction**, et disjonction exclusive de P et Q, et sont définies par

P	Q	P et Q	P ou Q	P ou bien Q
V	V	V	V	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

Exemple 4.

Évaluer les assertions ci-dessous.

- « Ali est un garçon et Elsa est une fille » :
- « Ali est un garçon ou Elsa est une fille » :
- « Ali est un garçon ou bien Elsa est une fille » :
- « Ali est un garçon et Elsa est en MP2I » :
- « Ali est un garçon ou Elsa est en MP2I » :

1.2 Calculer avec des assertions.

Soient P, Q, R trois assertions. On note p, q, r leurs valeurs de vérité respectives, de sorte que le triplet (p, q, r) appartient à $\{V, F\}^3$ et peut prendre $2^3 = 8$ valeurs différentes.

Considérons maintenant deux assertions $\mathcal{A}(P, Q, R)$ et $\mathcal{B}(P, Q, R)$ bien construites avec les lettres P, Q, R et avec des connecteurs logiques. Les valeurs de vérité de $\mathcal{A}(P, Q, R)$ et $\mathcal{B}(P, Q, R)$ dépendent de (p, q, r).

Notation.

Si dans les huit cas possibles, les assertions $\mathcal{A}(P, Q, R)$ et $\mathcal{B}(P, Q, R)$ ont la même valeur de vérité, on dira alors que les expressions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont **synonymes**, ce que l'on notera dans la suite

$$\mathcal{A}(P, Q, R) \equiv \mathcal{B}(P, Q, R).$$

Proposition 5.

a) $(P \text{ et } P) \equiv P, \quad (P \text{ ou } P) \equiv P.$

b) $(P \text{ et } Q) \equiv (Q \text{ et } P), \quad (P \text{ ou } Q) \equiv (Q \text{ ou } P).$

c) $((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \equiv (P \text{ et } (Q \text{ et } R)), \quad ((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R) \equiv (P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)).$

d) $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \equiv (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R) \quad P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \equiv (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R).$

Preuve : Voici la table de vérité qui démontre P et $(Q$ ou $R) \equiv (P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$

P	Q	R	Q ou R	P et $(Q$ ou $R)$	P et Q	P et R	$(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

□

Proposition 6.

a) $\neg(\neg P) \equiv P$. (négation de la négation).

b) $\neg(P$ et $Q) \equiv (\neg P)$ ou $(\neg Q)$, $\neg(P$ ou $Q) \equiv (\neg P)$ et $(\neg Q)$ (formules de Morgan).

Preuve :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	P et Q	$\neg(P$ et $Q)$	$(\neg P)$ ou $(\neg Q)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

□

1.3 Un ou deux quantificateurs.

On appelle **prédicat** $\mathcal{P}(X)$ sur un ensemble E une phrase contenant la lettre X telle que lorsqu'on substitue à X un élément x de E, on obtient une assertion $\mathcal{P}(x)$. Par exemple, la phrase

« X est pair »

est un prédicat sur $\mathbb{Z}$. Il permet d'obtenir (entre autres) les assertions "4 est pair" et "3 est pair".

Définition 7.

Soit un prédicat $\mathcal{P}(X)$ sur un ensemble E.

- L'assertion « pour tout x dans E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie » s'écrit

$$\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x).$$

- L'assertion « il existe (au moins un) x dans E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie » s'écrit

$$\exists x \in E \quad \mathcal{P}(x).$$

- L'assertion « il existe un unique x dans E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie » s'écrit

$$\exists! x \in E \quad \mathcal{P}(x).$$

Un prédicat peut dépendre de plusieurs variables et on peut être amené à utiliser plusieurs quantificateurs.

Proposition 8 (Deux quantificateurs égaux *commutent*)**.**

Soient E, F deux ensembles et $\mathcal{P}(X,Y)$ un prédicat où X prend ses valeurs dans E et Y dans F. On a les synonymies :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in E \quad (\forall y \in F \quad \mathcal{P}(x,y)) & \equiv & \forall y \in F \quad (\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x,y)) \\ \exists x \in E \quad (\exists y \in F \quad \mathcal{P}(x,y)) & \equiv & \exists y \in F \quad (\exists x \in E \quad \mathcal{P}(x,y)) \end{array}$$

⚠ En revanche, les assertions suivantes ne sont pas synonymes !

$$(A) \quad \forall x \in E \quad \exists y \in F \quad \mathcal{P}(x,y) \qquad\qquad (B) \quad \exists y \in F \quad \forall x \in E \quad \mathcal{P}(x,y).$$

• Dans la phrase (A) l'existence de y est affirmée après qu'on a parlé d'un élément x : l'élément y peut donc dépendre de x. On peut insister sur cette dépendance en écrivant (A) ainsi : $\forall x \in E \quad \exists y_x \in F \quad \mathcal{P}(x, y_x)$.

• Dans la phrase (B), y est introduit en premier.
Le reste de la phrase $(\forall x \in E\ \mathcal{P}(x,y))$ se comprend pour ce y fixé.

Exemple 9 (Une assertion de type A)**.**

Une théorie affirme que chacun sur Terre a une âme sœur (c'est sans doute vrai, je l'ai lu sur Internet). Formaliser en introduisant quelques notations.
Échanger l'ordre d'écriture des quantificateurs : quel sens a l'assertion obtenue ?

Exemple 10 (Une assertion de type B)**.**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs "la fonction f est majorée".
Échanger l'ordre d'écriture des quantificateurs : quel sens a l'assertion obtenue ?

- « Tous les chats sont gris ».

  Négation : «

- « Il existe un MP2I qui n'aime pas ce petit cours de logique ».

  Négation : «

Théorème 11 (Négation d'une proposition contenant des quantificateurs)**.**

Soit $\mathcal{P}(X)$ un prédicat sur un ensemble E.

$$\begin{array}{rcl} \neg\,(\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x)) & \equiv & \exists x \in E \quad \neg\mathcal{P}(x) \\ \neg\,(\exists x \in E \quad \mathcal{P}(x)) & \equiv & \forall x \in E \quad \neg\mathcal{P}(x) \end{array}$$

Exemple 12.

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.
La phrase P ci-dessous sera notre définition de « (u_n) est majorée ». Écrire sa négation.

$$P: \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M.$$

Exemple 13 (Quand on écrit deux « il existe »)**.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Écrire puis nier l'assertion P : « la fonction f est constante égale à 1 ou constante égale à -1 ».

2 Implication, équivalence.

2.1 Implique, Équivaut : tables de vérité.

Définition 14.

Soient P et Q deux assertions.
Les assertions $P \Longrightarrow Q$ (« P **implique** Q ») et $P \Longleftrightarrow Q$ (« P est **équivalent** à Q ») sont définies par les tables ci-dessous :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V		F
F	F		V

L'implication $Q \Longrightarrow P$ est appelée **implication réciproque** de l'implication $P \Longrightarrow Q$.

On veut que $\boxed{P \Longrightarrow Q \text{ signifie « Si } P \text{ est vraie, alors } Q \text{ est vraie »}}$.

Que décider pour la valeur de $P \Longrightarrow Q$ lorsque P est fausse ? Ce n'est pas très clair alors on a laissé deux cases vides.
Examinons les quatre tables correspondant aux quatre choix possibles pour ces deux cases :

A

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$*$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

B

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$*$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	F	F	F	V

C

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$*$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V

D

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$*$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	V

La colonne * donne la valeur de la conjonction « $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$ ».

Pour choisir parmi les quatre possibilités, procédons par élimination.

On veut que la synonymie

$$« (P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P) » \equiv « P \Longleftrightarrow Q »$$

soit vraie, ce qui élimine les tables B et D.

Dans la table C, les implications $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$ sont synonymes, ce que l'on veut éviter !

La table A est donc choisie pour définir $P \Longrightarrow Q$.

Exemple 15.

Maintenant que la table de $P \Longrightarrow Q$ est complète, évaluer les assertions suivantes :

- "6 est pair"$\Longrightarrow$ "7 est impair" :
- "5 est pair"$\Longrightarrow$ "7 est impair" :
- "5 est impair"$\Longrightarrow$ "7 est pair" :
- "5 est pair"$\Longrightarrow$ "je suis ton père" :

Théorème 16 (Lien entre $\Longrightarrow$ et ou)**.**

$$P \Longrightarrow Q \;\equiv\; (\neg P) \text{ ou } Q.$$

Preuve

P	Q	$\neg P$	$P \Longrightarrow Q$	$(\neg P)$ ou Q
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

□

2.2 L'implication, dans la pratique.

Comment *prouver* une implication $P \Longrightarrow Q$?
Par définition, si P est fausse, $P \Longrightarrow Q$ est vraie... alors concentrons-nous sur le cas où P est vraie !

Méthode (Preuve directe d'une implication)**.**

Pour démontrer une implication $P \Longrightarrow Q$,

1. On suppose P (et on l'écrit),
2. puis on démontre Q.

Un peu de vocabulaire en commençant par une question concrète : pour faire un gâteau au chocolat, est-il nécessaire d'avoir du chocolat ? suffisant d'avoir du chocolat ?

Définition 17.

Dans l'écriture $P \Longrightarrow Q$ d'une implication,

— l'assertion Q est dite condition **nécessaire**, *[Il faut que Q soit vraie pour que P le soit]*.
— l'assertion P est dite condition **suffisante**, *[Il suffit que P soit vraie pour que Q le soit]*.

En mathématiques, nos théorèmes s'écrivent généralement comme des implications :

Si certaines hypothèses sont satisfaites **alors** un certain résultat est obtenu.

Comment *utiliser* une telle implication ?

Proposition 18 (Modus ponens)**.**

Soient P et Q deux assertions.

$$\text{Si} \quad (P \Longrightarrow Q) \text{ et } P \text{ sont vraies,} \quad \text{alors } Q \text{ est vraie.}$$

Exemple 19 (Application : un syllogisme célèbre)**.**

« Tous les hommes sont mortels ». Ce "théorème" affirme que l'implication « Si cet être est un homme, alors il est mortel » est vraie, quel que soit l'être que l'on considère.
C'est donc le Modus Ponens que l'on utilise dans le raisonnement célèbre suivant :

« Tous les hommes sont mortels et Socrate est un homme, donc Socrate est mortel. »

⚠ Lorsqu'on écrit que $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on n'écrit pas que P est vraie, ni que Q est vraie.
Par exemple, l'implication

« Si Superman est un homme alors Superman est mortel. »

est vraie, simplement parce-que l'assertion « Superman est un homme » est fausse. On n'a donc pas se poser de questions sur la kryptonite, c'est-à-dire sur la valeur de l'assertion « Superman est mortel ».

On voit donc qu'utiliser le symbole $\Longrightarrow$ à la place de « donc » est une bien mauvaise habitude : on ne raisonne pas au conditionnel !

Méthode (Ne pas écrire $\Longrightarrow$ à la place de « donc »)**.**

Écrire « $P \Longrightarrow Q$ » n'est **pas la même chose** qu'écrire « P est vraie, donc Q est vraie. »
Ainsi, nous utilisons volontiers le symbole $\Longrightarrow$ pour *énoncer* des résultats mais nous ne l'écrivons pas dans les *démonstrations* de ces résultats.

La *transitivité* de l'implication (et de l'équivalence) sont des propriétés naturelles et importantes.

Proposition 20 (Transitivité de l'implication et de l'équivalence)**.**

Les connecteurs $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ sont transitifs. En effet, si P, Q, R sont des assertions.

$$\text{Si} \quad (P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R) \text{ sont vraies,} \quad \text{alors } (P \Longrightarrow R) \text{ est vraie.}$$

$$\text{Si} \quad (P \Longleftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longleftrightarrow R) \text{ sont vraies,} \quad \text{alors } (P \Longleftrightarrow R) \text{ est vraie.}$$

2.3 Négation d'une implication.

Proposition 21 (Négation d'une implication)**.**

$$\neg (P \Longrightarrow Q) \;\equiv\; P \text{ et } (\neg Q).$$

⚠ On remarquera notamment que la négation d'une implication n'est **pas** une implication.

Exemple 22.

Soit une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie X de $\mathbb{R}$.
Nier la phrase « f est croissante sur X ».

2.4 Contraposée d'une implication.

Définition 23.

Soient P et Q deux assertions. On appelle **contraposée** de l'implication $P \Longrightarrow Q$, l'implication

$$(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P).$$

Théorème 24.

Soient P et Q deux assertions. On a la synonymie

$$P \Longrightarrow Q \quad \equiv \quad (\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$$

Autrement dit, une implication est vraie si et seulement si sa contraposée l'est.

Méthode (Preuve par contraposée d'une implication $P \Longrightarrow Q$)**.**

Au lieu d'utiliser la manière classique (*supposer* P, *montrer* Q) on pourra choisir, si cela paraît plus simple, de prouver la contraposée (*supposer (non* Q*), montrer (non* P*)*).

Proposition 25 (L'équivalence comme double-implication)**.**

Soient P et Q deux assertions. On a la synonymie

$$P \Longleftrightarrow Q \quad \equiv \quad (P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P).$$

Lorsque $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour que P soit vraie.

Preuve : Il suffit de lire la table A de la page 5. □

Exemple 26.

Soit n un entier naturel. Démontrer l'équivalence

$$n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair.}$$

3 Raisonnements usuels.

3.1 Raisonner par récurrence.

Soit une assertion dont le sens dépend d'un entier n, et que l'on note $\mathcal{P}(n)$. Soit un entier naturel n_0.
Le raisonnement par récurrence permet de démontrer l'assertion

« Pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. » ou « $\forall n \geq n_0 \quad \mathcal{P}(n)$. ».

Raisonner par récurrence à partir de n_0, c'est démontrer les deux propriétés suivantes :

- L'initialisation : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- L'hérédité : Pour tout n supérieur à n_0, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est.

Le principe de récurrence (ou axiome de récurrence, puisqu'il est admis) garantit alors que pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

L'idée : si la chute d'un domino quelconque entraîne celle du domino suivant (hérédité) et si le premier domino tombe (initialisation) alors tous les dominos tomberont.

Conformément au paragraphe 2.2, une bonne rédaction pour la preuve de l'hérédité sera

$$\boxed{\text{"Soit } n \geq n_0\text{. Supposons } \mathcal{P}(n)\text{. Montrons } \mathcal{P}(n+1)\text{..."}}$$

L'instant geek : on peut exprimer l'axiome de récurrence à l'aide de l'assertion

$$[\mathcal{P}(0) \ \text{ et } \ (\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))] \quad \Longrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N} \ \ \mathcal{P}(n))\,.$$

Les récurrences dites « fortes ». Considérons un raisonnement par récurrence sur une propriété $\mathcal{P}(n)$. Lorsque l'on veut prouver $\mathcal{P}(n+1)$, on peut avoir besoin, en plus de $\mathcal{P}(n)$ d'utiliser les propriétés $\mathcal{P}(n-1)$, $\mathcal{P}(n-2)$ etc... On pourra donc, dans la preuve de l'hérédité, supposer que $\mathcal{P}(k)$ est vraie **pour tout** k inférieur à n. Cela revient à faire un raisonnement par récurrence, non pas sur $\mathcal{P}(n)$ mais sur

$$\mathcal{Q}(n) : \text{« pour tout } k \text{ inférieur à } n,\ \mathcal{P}(k) \text{ est vraie. »}$$

De la même façon, on peut qualifier de récurrence *double* un raisonnement où on suppose la propriété vraie pour deux rangs consécutifs avant de prouver qu'elle l'est au rang suivant.

Il n'y a donc pas vraiment de récurrence forte mais plutôt des propriétés de récurrence bien choisies !

Exemples 27.

Ils ne manqueront pas ! Voir TD.

3.2 Raisonner par l'absurde.

En mathématiques, une assertion qui n'est pas fausse est vraie, c'est ainsi que ce cours a débuté.
Cela conduit à la stratégie suivante, dite *preuve par l'absurde*. Pour prouver qu'une assertion P est vraie, on suppose que P est fausse et on raisonne jusqu'à trouver une contradiction manifeste, une « absurdité ».
Si cette absurdité est apparue (et que l'on a pas fait d'erreur dans notre raisonnement !), c'est que l'hypothèse faite au départ (« P est fausse ») est fausse. L'assertion P est donc... vraie.

Le raisonnement par l'absurde est souvent efficace pour prouver que quelque chose n'est pas vrai, démontrer qu'un objet n'existe pas, ou qu'un ensemble est vide car en supposant le contraire, on introduit une information positive et exploitable dans la suite du raisonnement.

Exemple 28.

On souhaite démontrer par l'absurde qu'une certaine porte est fermée.
Quelle est la première phrase de notre raisonnement ?

Exemple 29 (Une célébrité)**.**

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il n'est pas le quotient de deux entiers.

Un autre raisonnement par l'absurde célèbre : la preuve du théorème d'Euclide, qui affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers.

3.3 Prouver une unicité.

Pour un problème donné, on dit qu'il y a unicité de la solution si le problème possède 0 ou 1 solution. Autrement dit, il y a unicité si, lorsqu'il existe une solution au problème, elle est la seule.

Méthode.

Pour démontrer une unicité,
- on considère deux solutions du problème X_1 et X_2, (« *Soient X_1 et X_2 deux solutions* »)
- on montre que $X_1 = X_2$.

Exemple 30.

Preuve de l'unicité du maximum pour une partie de $\mathbb{R}$ (voir cours sur les inégalités).

On insiste sur l'idée que la question de l'*unicité* est distincte de celle de l'*existence*. Il y a unicité du maximum pour une partie de $\mathbb{R}$ mais ce maximum n'existe pas toujours !

On souligne que ce genre de preuve n'est pas un raisonnement par l'absurde : dans la méthode ci-dessus, on ne suppose pas que $X_1 \neq X_2$.

3.4 Raisonner par analyse-synthèse.

Ce raisonnement sert à démontrer une équivalence entre deux propositions P et Q sans savoir à l'avance ce qu'est la proposition Q. C'est ce que réclament des énoncés de la forme

$\boxed{\text{Énoncé 1}}$: « Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la proposition P soit satisfaite. »

ou encore

$\boxed{\text{Énoncé 2}}$: « Trouver tous les objets possédant la propriété $\mathcal{P}$. »

En particulier, un raisonnement par analyse-synthèse pourra être proposé pour résoudre une équation (voir paragraphe suivant).

Méthode (Les deux étapes du raisonnement pour traiter l'énoncé 1)**.**

Analyse : Il s'agit de trouver une proposition Q qui découle de P ($P \implies Q$ et la condition Q est nécessaire). Pour cela, on suppose P (et on l'écrit !) On cherche alors une proposition Q... qui permettra de réaliser l'étape suivante.

Synthèse : On montre que la proposition Q découverte dans la partie Analyse est suffisante. Pour cela, on suppose Q et on montre P. (preuve standard de $Q \implies P$.)

Conclusion : La propriété P est vraie si et seulement si Q est vraie.

Toute la difficulté de ce raisonnement est qu'il nous appartient de trouver/choisir la proposition Q par analyse. Il faut donc savoir "quand s'arrêter" : le faire trop tôt conduira au choix d'une condition nécessaire Q qui ne sera pas suffisante pour P.

Exemple 31 (Une équation fonctionnelle)**.**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = x + f(y).$$

<u>Analyse</u> : Supposons qu'il existe une fonction f qui satisfait la contrainte. Alors, en particulier, pour tout réel x, $f(x) = x + f(0)$. On voit donc que f est une fonction affine de pente 1.

<u>Synthèse</u> : Soit f une fonction affine de pente 1, c'est-à-dire une fonction $f : x \mapsto x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. Montrons que f satisfait la contrainte. Soient x et y deux réels ;

$$f(x+y) = (x+y) + c = x + (y+c) = x + f(y).$$

<u>Conclusion</u> : Les fonctions solutions du problème (de l'*équation fonctionnelle*) sont exactement les fonctions affines de pente 1, c'est-à-dire les fonctions du type $x \mapsto x + c$, où c est une constante réelle.

Vous trouverez parmi les exercices de la feuille de TD quelques exemples d'équations fonctionnelles.

Un cas particulier courant : preuve d'une existence+unicité.

Le raisonnement par analyse-synthèse est utile en particulier lorsqu'on veut démontrer l'existence et l'unicité d'une solution pour un certain problème $\mathscr{P}$:

Analyse : Supposons que le problème $\mathscr{P}$ possède une solution que l'on note x. Investigations, calculs... on obtient que nécessairement, x prend une certaine valeur x_0.
À ce stade, l'unicité est prouvée : si une solution existe, c'est forcément x_0.

Synthèse : Reste à montrer que x_0, notre unique candidat au poste de solution, en est bien une.
On vient de démontrer l'existence d'une solution, existence qui avait été supposée dans la partie analyse !

Conclusion : Il existe une unique solution au problème $\mathscr{P}$: x_0.

Exemple 32 (Parties paire et impaire d'une fonction).

Démontrer le résultat (qu'on retiendra) ci-dessous.

Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme
d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Preuve. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Analyse. Supposons qu'il existe deux fonctions g et h, avec g paire et h impaire, telles que $f = g+h$, . Pour un réel x, on peut écrire

$$\left\{\begin{array}{rclcl} f(x) & = & g(x)+h(x) & = & g(x)+h(x) \\ f(-x) & = & g(-x)+h(-x) & = & g(x)-h(x) \end{array}\right.$$

En faisant la somme et la différence des deux lignes, on obtient

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right).$$

Cela met en évidence un unique couple (g,h) candidat, pour la décomposition.

Synthèse. Posons

$$g : x \mapsto \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right).$$

Vérifions que le couple (g,f) convient pour la décomposition, c'est à dire $\left\{\begin{array}{l} f = g+h, \\ g \text{ est paire,} \\ h \text{ est impaire,} \end{array}\right.$

Pour cela on prend un réel x et on vérifie facilement que $g(x)+h(x) = f(x)$, que $g(-x) = g(x)$ et que $h(-x) = -h(x)$.

Conclusion. La fonction f s'écrit bien de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. C'est donc le cas pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Un résultat similaire : toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique, et d'une matrice antisymétrique. Le cours d'algèbre linéaire viendra rapprocher ces deux résultats.

3.5 Résoudre une équation.

Qu'est-ce qu'une équation ?

C'est une égalité entre deux membres qui dépendent de *variables*. Des exemples :

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & 2x & = & x+1 \\ (E_2) & x & = & x+1 \end{array} \qquad \begin{array}{lrcl} (E_3) & x^2+y^2 & = & 1 \\ (E_4) & y''+4y & = & 0 \end{array}$$

Résoudre une équation, c'est trouver les valeurs (prises par les variables) pour lesquelles l'égalité est vraie. Une équation est donc une question, et les variables des lettres utilisées pour écrire cette question.

Équation (E_1).
C'est une équation sur $\mathbb{R}$: il s'agit de déterminer tous les réels qui satisfont l'égalité. Il est facile de montrer (voir paragraphe suivant) que (E_1) possède une unique solution : le nombre 1.

Équation (E_2).
À nouveau une équation sur $\mathbb{R}$. Celle-ci n'a pas de solution ! (voir paragraphe suivant) On comprend ici que le statut de la lettre x n'est pas celui d'un nombre, puisqu'il n'existe pas de nombre qui satisfait la contrainte. La lettre x est une variable dite *muette*, un outil pour poser la question : "quels sont les nombres réels dont la valeur reste inchangée en ajoutant 1 ?"

Équation (E_3).
Deux variables, x et y : il s'agit d'une équation sur $\mathbb{R}^2$. On cherche tous les couples (x, y) tels que $x^2+y^2 = 1$. Il y a une infinité de solutions, parmi lesquelles $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; lorsqu'on les représente dans un repère orthonormé, les solutions correspondent aux points du cercle trigonométrique.

Équation (E_4).
Cette fois il s'agit d'une équation sur $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
Il s'agit de trouver toutes les fonctions y de ce type telles que pour tout t réel, $y''(t) + 4y(t) = 0$.
On parlera ici d'équation différentielle. Celle-ci modélise en physique un oscillateur harmonique de pulsation $\sqrt{4} = 2$. Elle possède une infinité de solutions qui seront déterminées dans un cours dédié.

Exemples de résolutions par équivalences.

Exemple (Équation $2x = x + 1$)**.**

Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution } &\iff 2x = x+1 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

L'équation a donc une unique solution : le nombre 1.

Ici, c'est très simple mais normalement, chaque équivalence doit être justifiée (voir paragraphe 2.2).

On a établi l'équivalence [x est solution $\iff x = 1$], c'est-à-dire
- [x est solution $\implies x = 1$] : *si x est une solution, alors il vaut* 1 ;
- [$x = 1 \implies x$ est solution] : 1 *est solution.*

Exemple (Équation $x = x + 1$).

Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution } &\iff x = x + 1 \\ &\iff 0 = 1 \end{aligned}$$

L'équation ne possède donc aucune solution.

Ici, seules les implications directes servent, finalement : si x est solution, alors $0 = 1$, ce qui est absurde... C'est donc que x n'est pas solution !

Méthode (Résolution d'une équation par équivalence).

On commence par déclarer la variable (disons x ici), puis on crée une chaîne d'équivalences en "partant" de l'assertion « x est solution ».

Attention : en écrivant le symbole $\iff$: il faut être capable de justifier les deux implications !

Pour plus de lisibilité, on alignera les symboles $\iff$, comme on aligne les $=$ dans un calcul sur plusieurs lignes.

Exemples de résolution par analyse-synthèse.

Parfois, (et c'est le cas dans les deux exemples ci-dessous), il est difficile de progresser en conservant des assertions équivalentes entre elles (on est gêné par une disjonction de cas...) Le raisonnement par analyse-synthèse est alors une bonne alternative.

Exemple (Équation $x = \sqrt{1 - x^2}$).

Soit x un nombre réel.

• Supposons que x est solution.
On a alors $x = \sqrt{1 - x^2}$. Passons au carré : $x^2 = 1 - x^2$. On a donc $x^2 = \frac{1}{2}$, d'où $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
À ce stade, on sait que *<u>si</u> x est solution, <u>alors</u> x vaut* $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Examinons les candidats obtenus.
Il est facile de vérifier que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une solution, et que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ n'en est pas une.

• Conclusion : l'équation possède une unique solution : $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarquons que le nombre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ aurait pu être écarté dans l'analyse : l'égalité $x = \sqrt{1 - x^2}$ impliquant que x, qu'on a supposé être une solution, est nécessairement positif.

Exemple (Équation $x-1=\sqrt{1+x^2}$).

Soit x un nombre réel.

• Supposons que x est solution.
On a alors $x-1=\sqrt{1+x^2}$.
En passant au carré, $x^2-2x+1=1+x^2$, ce qui laisse $-2x=0$ puis $x=0$.

• Or, il est facile de vérifier que 0 n'est pas solution.

• Conclusion : l'équation ne possède pas de solution.

Exercices

Assertions.

$\boxed{\textbf{0.1}}$ **[♦◇◇]** Que répond un mathématicien à la question « Vous êtes gaucher ou droitier ? ».

$\boxed{\textbf{0.2}}$ **[♦◇◇]** C'est l'histoire de cinq mathématiciens qui vont au restaurant. Ils ont pris un menu avec thé ou café compris. À la fin du repas, le serveur demande : tout le monde prendra du café ? Le premier mathématicien répond « Je ne sais pas ». Idem pour le second, le troisième, et le quatrième. Le cinquième répond « Quatre cafés et un thé SVP ». Expliquer.

$\boxed{\textbf{0.3}}$ **[♦◇◇]** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Plus tard dans l'année, nous définirons la phrase « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ » par l'assertion

$$\forall M\in\mathbb{R}\quad \exists p\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad n\geq p \Longrightarrow u_n\geq M.$$

(*pas besoin de comprendre pourquoi à ce stade !*) Écrire la négation de cette assertion.

$\boxed{\textbf{0.4}}$ **[♦◇◇]**

1. Nier l'assertion
$$\exists x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\mathbb{R}\quad x+y\geq 0.$$
2. Prouver que l'assertion ci-dessus est fausse.

$\boxed{\textbf{0.5}}$ **[♦◇◇]** « S'il fait beau, je ne prends pas mon parapluie. »
Écrire la contraposée de la réciproque.

$\boxed{\textbf{0.6}}$ **[♦♦◇]** Soit (u_n) une suite réelle. Démontrer l'équivalence des deux assertions

1. $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}\geq u_n$.
2. $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2\quad p\geq n\Longrightarrow u_p\geq u_n$.

Récurrence.

$\boxed{0.7}$ **[♦♦♢]** [Récurrence standard]
Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.

$\boxed{0.8}$ **[♦♦♢]** [Récurrence double]
Soit un réel x non nul.

1. Pour n un entier naturel, calculer $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)$.
2. Supposons que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{0.9}$ **[♦♢♢]** [Récurrence forte]
Soit (u_n), définie par récurrence par $\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k. \end{cases}$.
Démontrer par récurrence forte que $\forall n \geq 1\ u_n = 3n$.

$\boxed{0.10}$ **[♦♦♢]** Comme on l'a fait plus haut pour le principe de récurrence, écrire un « principe de récurrence forte » à l'aide d'une suite de quantificateurs.

Analyse-synthèse.

$\boxed{0.11}$ **[♦♦♢]** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

$\boxed{0.12}$ **[♦♦♢]** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

$\boxed{0.13}$ **[♦♢♢]** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad xf(xy) = f(y).$$

$\boxed{0.14}$ **[♦♦♦]** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f\left(f(x) + y\right) = f\left(x^2 - y\right) + 4x^2 y.$$

$\boxed{0.15}$ **[♦♦♢]** Résoudre l'équation

$$x^2 + x\sqrt{1 - x^2} - 1 = 0.$$

$\boxed{0.16}$ **[♦♦♦]** Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On considère F l'ensemble des fonctions affines, et G l'ensemble des fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $g(0) = g'(0) = 0$.
Démontrer que toute fonction de E s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction de F et d'une fonction de G.
