Khôlles d'informatique, Saison 2.

$$\text{Mars} \xrightarrow[\text{programme de colle} \to \text{fin}]{} \text{Avril}$$

Résumé

Dans ce document LaTeX, on donne des preuves complètes des questions de cours à connaître :)

Questions de cours :
- Ensemble bien fondé, définition et preuve.
- Ensembles construits inductivement.
- Théorème d'induction structurelle.
- Forme normale négative.
- Formules de De Morgan avec tables de vérité (trivial).

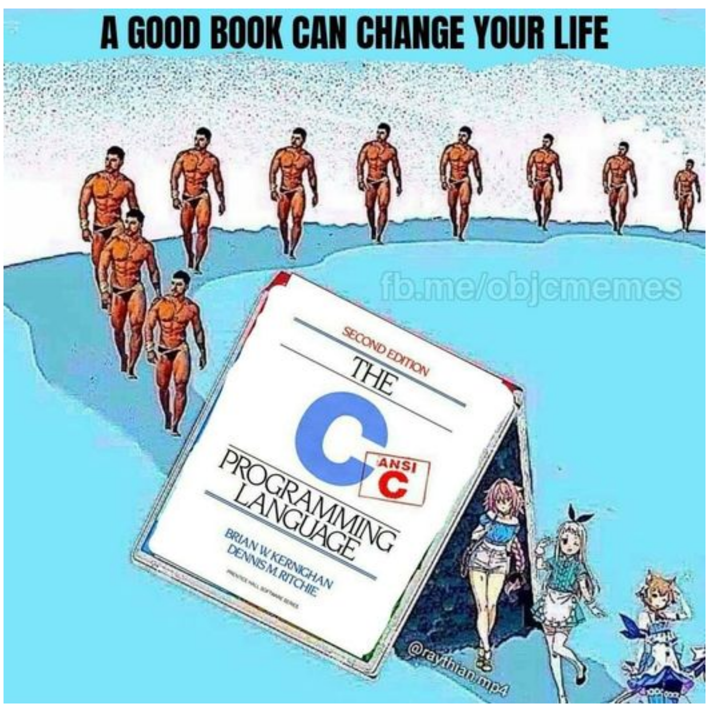

FIGURE 1 – La majorité à voté pour le C dans le sondage (brain rot) 

Questions de cours :

Ensemble bien fondé.

Soit E un ensemble ordonné par la loi $\leq$. Il y a équivalence entre :
1. Tout sous-ensemble **non-vide** de E admet un élément minimal.
2. Toute suite infinie décroissante de E est stationnaire.

Preuve.
$1 \Longrightarrow 2$: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie décroissante de E.
Soit $F = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$.
Alors $\exists k \in \mathbb{N} \mid u_k = \min(F)$, or F est décroissante donc $\forall n \geq k,\ u_n = u_k$.
On a bien montré que cette suite est stationnaire.

$2 \Longrightarrow 1$: Soit $F \subset E \mid F \neq \varnothing$.
On définit (u_n) telle que $u_0 \in F$ et u_{n+1} soit le prédécesseur de u_n par $\leq$ s'il existe, sinon u_n.
Par construction, (u_n) est infinie et décroissante donc stationnaire : $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k,\ u_n = u_k$.
On en déduit que u_k n'a pas de prédécesseur par $\leq$, c'est le minimum de F.
On a bien montré l'équivalence.

Définition inductive d'un ensemble.

Soit E un ensemble non vide. Une définition de $X \subseteq E$ consiste à se donner :
- ◎ Un ensemble $B \subseteq E$ non vide d'assertions.
- ◎ Un ensemble R de règles : $\forall r_i \in R,\ r_i : E^{n_i} \to E$ avec n_i l'arité de r_i.

Théorème du point fixe (inclus dans la question de cours) :
Il existe un plus petit sous-ensemble X de E tel que :
- (B) $B \subset X$: les assertions sont dans X.
- (I) $\forall r_i \in R,\ \forall (x_1, ..., x_{n_i}) \in X^{n_i}$ on a $r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in X$ avec n_i l'arité de r_i : X est stable par les règles.

Preuve.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de E vérifiant (B) et (I).
On considère X l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{F}$:

$$X = \bigcap_{Y\in\mathcal{F}} Y.$$

Puisque $\forall Y \in \mathcal{F},\ B \subset Y$, on en déduit que $B \subset X$. On a donc vérifié (B).
Soit $r_i \in R$ et $(x_1, ..., x_{n_i}) \in X^{n_i}$.
Remarquons que $\forall Y \in \mathcal{F},\ x_1, ..., x_{n_i} \in Y$, or les Y sont stables par les règles d'où $\forall Y \in \mathcal{F},\ r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in Y$.
Puisque X est leur intersection, $r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in X$ et X vérifie alors (I).
C'est donc le plus petit ensemble vérifiant (B) et (I) par construction.

Théorème d'induction structurelle.

Soit $X \subseteq E$ défini inductivement (cf question précédente) et $\mathcal{P}$ un prédicat sur E.
Si on a que :
- (B) $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in B$.
- (I) $\mathcal{P}$ est héréditaire : $\forall r_i \in R,\ \forall (x_1, ..., x_{n_i}) \in E^{n_i},\ \mathcal{P}(x_1), ..., \mathcal{P}(x_{n_i}) \Longrightarrow \mathcal{P}(r_i(x_1, ..., x_{n_i}))$.

Alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$.

Preuve.
On suppose (B) et (I), montrons que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.
Soit $Y = \{x \in E \mid P(x)\}$. Alors $B \subset Y$ d'après (B) et Y est stable par R d'après (I).
On a alors $X \subset Y$ donc $\forall x \in X,\ \mathcal{P}(x)$ est vrai.

Forme normale négative.

Définition.
La forme normale négative de φ est une formule équivalente à φ où les négations portent exclusivement sur les littéraux.
- $\mathrm{nnF}(\varphi) = \varphi$ si φ est un littéral.
- $\mathrm{nnF}(\neg\varphi) = \neg\varphi$ si φ est un littéral.
- $\mathrm{nnF}(\neg\neg\varphi) = \varphi$ (Facile à oublier attention)
- $\mathrm{nnF}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{nnF}(\varphi) \wedge \mathrm{nnF}(\psi)$. (Pareil pour la disjonction)
- $\mathrm{nnF}(\neg(\varphi \wedge \psi)) = \mathrm{nnF}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnF}(\neg\psi)$. (Pareil pour la disjonction)

Preuve.
<u>Proposition :</u> $\mathrm{nnF}(\varphi)$ est sous forme normale négative et $\varphi \equiv \mathrm{nnF}(\varphi)$.
<u>Cas de base :</u> Si φ est une variable propositionnelle, $\mathrm{nnF}(\varphi) = \varphi$ et $\mathrm{nnF}(\neg\varphi) = \neg\varphi$, donc c'est vrai.
<u>Hérédité :</u> Soient φ et ψ deux formules telles que $\mathrm{nnF}(\varphi) \equiv \varphi$ et $\mathrm{nnF}(\neg\varphi) \equiv \neg\varphi$ et $\mathrm{nnF}(\psi) \equiv \psi$ et $\mathrm{nnF}(\neg\psi) \equiv \neg\psi$.
Soit v une valuation de φ et ψ.
On a $\mathrm{nnF}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{nnF}(\varphi) \wedge \mathrm{nnF}(\psi)$ donc c'est bien sous forme normale négative par hypothèse.
De plus, $v \vDash \mathrm{nnF}(\varphi \wedge \psi) = \Longleftrightarrow\ v \vDash \mathrm{nnF}(\varphi) \wedge \mathrm{nnF}(\psi) \iff v \vDash \varphi$ et $v \vDash \psi \iff v \vDash \varphi \wedge \psi$.
On a $\mathrm{nnF}(\neg(\varphi \wedge \psi)) = \mathrm{nnF}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnF}(\neg\psi)$ donc c'est bien sous forme normale négative par hypothèse.
Et $v \vDash \mathrm{nnF}(\neg(\varphi\wedge\psi)) \iff v \vDash \mathrm{nnF}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnF}(\neg\psi) \iff v \vDash \neg\varphi$ ou $v \vDash \neg\psi \iff v \vDash \neg\varphi \vee \neg\psi \iff v \vDash \neg(\varphi \wedge \psi)$.
Même raisonnement pour la disjonction.
Par théorème d'induction, c'est vrai pour toute formule φ.

☼☼ Fin du sujet ! ☼☼