Forme Trigonométrique
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 7.1 [♦◊◊]

Calculer $(1+i)^2023$.
On a :

$$(1+i)^{2023} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2023} = \sqrt{2}^{2023}e^{i\frac{2023\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2023}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

□

Exercice 7.2 [♦♦◊]

Soient trois réels x, y, z tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.
On a :

$$\begin{aligned} & e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \\ \iff & e^{-ix} + e^{-iy} + e^{-iz} = 0 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & (e^{ix} + e^{iy} + e^{iz})^2 = e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} + 2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) \\ \iff & e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = -2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) \end{aligned}$$

Or :

$$2(e^{ixy} + e^{ixz} + e^{iyz}) = 2e^{i(x+y+z)}(e^{-ix} + e^{-iy} + e^{-iz}) = 0$$

Ainsi,

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$$

□

Exercice 7.3 [♦◊◊]

1. Déterminer les formes algébriques et trigonométriques du nombre

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$$

2. En déduire l'expression de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{7\pi}{12})$ à l'aide de radicaux.

1. On a :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} + i\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\right)$$

2. On a :

$$\begin{cases} \cos(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \\ \sin(\frac{7\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \end{cases} \quad \text{Donc : } \frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

□

Exercice 7.4 [♦◊◊]

Soit un réel θ. Linéariser $(\cos\theta)^5$ et $(\sin\theta)^6$.
On a :

$$\begin{aligned}
(\cos\theta)^5 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{5i\theta}+5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}+10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(2\cos(5\theta)+10\cos(3\theta)+20\cos(\theta)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos(5\theta)+5\cos(3\theta)+10\cos(\theta)\right)
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
(\sin\theta)^6 &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^6 \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta}-6e^{4i\theta}+15e^{2i\theta}-20+15e^{-2i\theta}-6e^{-4i\theta}+e^{-6i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{64}\left(2\cos(6\theta)-12\cos(4\theta)+30\cos(2\theta)-20\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(10+6\cos(4\theta)-15\cos(2\theta)-\cos(6\theta)\right)
\end{aligned}$$

□