# Corrigé du DS 1



**Questions de cours et petits exercices.**

1. Cours. Avez-vous pensé aux cas "dégénérés" où ce nombre est défini par 0 et non par un quotient de factorielles ?

2. Exemple du cours, au programme de colle. La "formule sans nom" permet de remplacer $k$ par $n$... qui se factorise, lui.

3. $$\sum_{1\leq i<j\leq n} 1 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=1}^{n}(j-1) \underset{k=j-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} k = \boxed{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

4. La courbe de sh a un unique point d'intersection avec la droite d'équation $y = x$. Ci-dessous, une résolution dans les règles de l'art.

   Soit $x$ un nombre réel. On a

   $$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = 1 &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \\ &\iff e^x - e^{-x} = 2 \\ &\iff (e^x)^2 - 1 = 2e^x \qquad \text{car } e^x \neq 0 \\ &\iff e^x \text{ est racine de } u^2 - 2u - 1 = 0 \end{aligned}$$

   On sait déterminer les solutions de $u^2 - 2u - 1 = 0$ : elles valent $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$. Reprenons nos équivalences :

   $$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = 1 &\iff e^x = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } e^x = 1 - \sqrt{2} \\ &\iff e^x = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{car } \ 1-\sqrt{2} \leq 0 \text{ et } e^x > 0 \\ &\iff x = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

   L'équation admet une unique solution : $\ln(1 + \sqrt{2})$.

5. *Si ce n'est toi, c'est donc ton frère.*
   Équations analogues résolues dans le cours.

6. Calculons les limites de $u$.
   Les croissances comparées donnent $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

   L'exponentielle est continue en 0 et $\exp(0) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1}$.

   On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x) = 0}$.

   La fonction $u$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, comme composée de $x \mapsto x\ln(x)$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et de exp, dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

   $$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad u'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

   On voit que la fonction $u'$ est de même signe que la fonction $1 - \ln$. Cela permet de dresser le tableau de variations suivant pour $u$ :

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $u$ | ‖ $0$ | ↗ | $e^{\frac{1}{e}}$ | ↘ | $1$ |

**Problème 1.** Inégalité arithmético-géométrique.

1. *Une inégalité préliminaire*
   On étudie $f : t \mapsto te^{-t}$.

   Par produit de fonctions dérivables, $f$ est dérivable et $f'(t) = (1-t)e^{-t}$.
   Signe de $f'(t)$ : $f'(t) < 0 \Longleftrightarrow 1 - t < 0 \Longleftrightarrow 1 < t$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $e^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

   La limite de $f$ en $-\infty$ est immédiate ; celle en $+\infty$ résulte des croissances comparées.
   L'existence d'un maximum pour $f$ en $t = 1$ donne pour tout réel $t$,

$$f(t) \leq f(1) \quad \text{soit} \quad te^{-t} \leq e^{-1} \quad \text{d'où} \quad \boxed{t \leq e^{t-1}}.$$

2. *Démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique*

   (a) $\sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{m} \cdot nm = \boxed{n}$.

   (b) D'après l'inégalité $(\star)$ :

$$t_k \leq e^{t_k - 1} \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n.$$

   En multipliant ces inégalités entre nombres positifs :

$$\prod_{k=1}^{n} t_k \leq \prod_{k=1}^{n} e^{t_k-1} \quad \text{et donc} \quad \prod_{k=1}^{n} t_k \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} (t_k - 1)\right).$$

   Or $\sum\limits_{k=1}^{n} (t_k - 1) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_k\right) - n = 0$. On obtient bien

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} t_k \leq 1}.$$

   (c) Puisque $\prod\limits_{k=1}^{n} t_k = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{m} = \frac{1}{m^n} \prod_{k=1}^{n} a_k$, l'inégalité précédente donne

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \leq m^n.$$

   Puisque $t \mapsto t^{1/n}$ est croissante sur $]0, +\infty[$,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq m$$

   On obtient donc bien l'inégalité souhaitée : $\boxed{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$

**Problème 2.** Une somme qui télescope.

1. $S_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1) = 0.$

2. Vivent les identités remarquables :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a) &= \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2a} + \cancel{2e^a e^{-a}} + e^{-2a} + e^{2a} - \cancel{2e^a e^{-a}} + e^{-2a}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2a} + e^{-2a}\right) \\ &= \mathrm{ch}(2a).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(a) &= 2\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2a} - e^{-2a}\right) \\ &= \mathrm{sh}(2a).\end{aligned}$$

Pour $a$ un réel, on a

$$\mathrm{th}(2a) = \frac{2\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a)} = \frac{2\frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)}}{1 + \left(\frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)}\right)^2} = \frac{2\mathrm{th}(a)}{1 + \mathrm{th}^2(a)}.$$

3. Fixons d'abord un entier $k$ entre 1 et $n$. D'après la question précédente,

$$1 + \mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{2\ \mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}.$$

Passons au ln : on obtient un terme constant et un terme qui télescope :

$$\ln\left(1 + \mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).$$

Sommons pour $k$ entre 1 et $n$ : on obtient

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(2) + \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\right) \\ &= n\ln(2) + \ln\left(\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^{1-1}}\right)\right) \\ &= \ln\left(2^n \mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\mathrm{th}(x)\right)\end{aligned}$$

4. Le carré dans la définition de $S_n$ amène pour tout $x$ réel : $S_n(x) = S_n(-x)$ : la fonction $x \mapsto S_n(x)$ est <u>paire</u>. On a donc, en utilisant la question 4,

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad S_n(x) = \ln\left(2^n \mathrm{th}\left(-\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\mathrm{th}(-x)\right).$$

5. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{\mathrm{th}(x)}{x} = \frac{\mathrm{th}(x) - \mathrm{th}(0)}{x - 0}.$$

Ceci est donc le taux d'accroissement en 0 de la fonction th, qui est dérivable en 0. On a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{th}(x)}{x} = \mathrm{th}'(0) = 1 - \mathrm{th}^2(0) = 1.$$

6. (a) Le réel $x$ étant fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$.
Or, d'après la question 1, $\lim_{X\to 0} \frac{\mathrm{th}(X)}{X} = 1$.
En composant, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{x}\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$, d'où $\lim_{n\to+\infty} 2^n\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x$.
En utilisant l'expression de la question 5,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \ln(x) - \ln(\mathrm{th}(x)), \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \ln\left(\frac{x}{\mathrm{th}(x)}\right)}.$$

(b) On sait (limite de fonction usuelle) que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$. L'entier $n$ étant fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} 2^n\mathrm{th}(\frac{x}{2^n}) = 2^n$.
En utilisant l'expression de la question 5,

$$\lim_{x\to+\infty} S_n(x) = \ln(2^n) - \ln(1), \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} S_n(x) = n\ln(2)}.$$