Présentation des copies.

1. Tout document interdit. Calculatrice interdite. Téléphone interdit.
2. Les réponses doivent être justifiées et les résultats encadrés.
3. Votre copie est un livret (au moins une copie double, pas de feuilles simples volantes).
4. Numéroter chaque copie en indiquant à la fin le nombre total de pages.
   Le faire au fur et à mesure, pour ne pas faire d'erreur à la fin du devoir.
5. Les problèmes de concours sont (trop) longs.
   Les sujets de DS le sont moins mais il ne faut pas chercher forcément à tout faire. La vitesse oui, la précipitation non !

Questions de cours et petits exercices.

1. Pour n et p deux entiers naturels, rappeler la définition de $\binom{n}{p}$.
   Énoncer la formule de Pascal.
2. Soit un entier naturel n. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Soit n un entier naturel non nul. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} 1$.
4. Par lecture graphique, dire combien de solutions a l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$.
   Résoudre ensuite cette équation.
   (On soignera bien sûr la structure logique de la résolution).
5. Résoudre $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (On représentera les solutions sur le cercle trigonométrique).
6. Soit la fonction $u : x \mapsto x^{1/x}$. Sur quel intervalle est-elle définie ?
   Donner un tableau de variations complet (on détaillera le calcul des limites).

Problème 1. Inégalité arithmético-géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.

Si $a_1, \ldots, a_n$ sont n réels strictement positifs, alors

$$(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

1. *Une inégalité préliminaire*

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto te^{-t}$.
   Étudier rapidement la fonction f : tableau de variation et limites.

   En constatant que f admet un maximum en 1, montrer que

   $$(\star) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad t \leq e^{t-1}.$$

2. *Démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique*

   On se donne $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs et on pose

   $$m = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

   Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on définit $t_k = \dfrac{a_k}{m}$.

   (a) Que vaut $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$?

   (b) Montrer que
   $$t_1 \times t_2 \times \ldots \times t_n \leq 1.$$
   On pourra utiliser l'inégalité $(\star)$.

   (c) Conclure que

   $$(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Problème 2. Une somme qui télescope.

Pour un entier $n \geq 1$ fixé, on définit pour tout réel x

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right).$$

1. Que vaut $S_n(0)$?

2. Démontrer pour un réel a quelconque les identités

   $$\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(2a) = 2\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(a).$$

   Prouver enfin que
   $$\mathrm{th}(2a) = \frac{2\mathrm{th}(a)}{1 + \mathrm{th}^2(a)}.$$

3. Soit x strictement positif. Démontrer que

   $$S_n(x) = \ln\left(2^n \mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\mathrm{th}(x)).$$

4. Étudier la parité de la fonction $x \mapsto S_n(x)$.
   Exprimer alors $S_n(x)$ pour x strictement négatif.

5. En faisant d'abord apparaître un taux d'accroissements, démontrer que

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{th}(x)}{x} = 1.$$

6. (a) Soit $x > 0$ fixé. Déterminer si elle existe $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x)$.

   (b) Soit $n \geq 1$ fixé. Déterminer si elle existe $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n(x)$.