1

Sommes et produits

Dans ce cours, on énonce toutes nos propositions pour des familles de nombres *complexes*. Si vous ne savez pas encore ce que c'est, ce n'est pas bien grave car les nombres réels sont des nombres complexes (et ceux-là, vous les connaissez). On dira parfois juste « nombres » de toute façon. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. Pour le moment, vous pouvez le remplacer par $\mathbb{R}$ chaque fois que vous le voyez.

La notion de *famille* sera définie dans le cours sur les ensembles. Pour le moment, une définition vague suffit : une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est une collection de nombres « étiquetée »(on dit indexée) par un ensemble d'indices I. Dans tout ce cours, et même si on s'abstient de le préciser, l'ensemble I sera **fini**. On donnera un jour un sens à certaines sommes ayant une infinité de termes mais... patience. Pour un indice (une « étiquette ») $i \in I$ donné, l'écriture a_i désigne un certain nombre complexe. Bien sûr, si on veut manipuler une collection de trois nombres, il est naturel de l'indexer par l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ mais on verra dans l'année qu'il peut être utile d'indexer certaines familles par autre chose que des entiers.

1 Somme et produit d'une famille finie de nombres.

Notations 1.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble **fini non vide** I.

On note $\sum_{i\in I} a_i$ (resp. $\prod_{i\in I} a_i$) la somme (resp. le produit) des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Exemple. Notons $I = \{\Diamond, \heartsuit, \Delta\}$, puis posons $a_\Diamond := 2$, $a_\heartsuit := e$, $a_\Delta := \pi$.
Alors, $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de trois nombres complexes.

$$\sum_{i\in I} a_i = a_\Diamond + a_\heartsuit + a_\Delta = 2 + e + \pi \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} a_i = a_\Diamond \times a_\heartsuit \times a_\Delta = 2e\pi.$$

Notation.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $I = [\![1,n]\!] = \{1,2,\dots,n\}$, on peut aussi noter

$$a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Plus généralement, si $m,n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ et $I = [\![m,n]\!] = \{m, m+1, \dots, n\}$ on peut noter

$$a_m + \cdots + a_n = \sum_{i \in [\![m,n]\!]} a_i = \sum_{m \leq i \leq n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i.$$

Remarque. La lettre i est une variable *muette* elle a seulement un sens localement, dans l'écriture de la somme ou du produit :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Notation.

Si I est l'ensemble vide, on convient qu'une expression du type $\sum_{i \in I} a_i$ vaut 0 et que $\prod_{i \in I} a_i$ vaut 1.

Exemple 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Détailler les sommes suivantes, éventuellement avec des points de suspension.

$$\sum_{k=2}^{5} k, \qquad \sum_{k=0}^{0} 2^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2, \qquad \sum_{k=1}^{0} k, \qquad \sum_{k=0}^{n} 1.$$

Proposition 3.

Soient deux entiers m et n tels que $m \leq n$ et $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ des nombres.
L'ensemble $[\![m,n]\!]$ contient $n - m + 1$ entiers, de sorte que

$\sum_{i=m}^{n} a_i$ est une somme de $n - m + 1$ **termes**,

$\prod_{i=m}^{n} a_i$ est un produit de $n - m + 1$ **facteurs**.

Exemple 4 (Termes ou facteurs égaux)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Que valent $\sum_{k=0}^{n} a$ et $\prod_{k=0}^{n} a$?

2 Règles de calcul.

Proposition 5 (Linéarité de la somme)**.**

Soient deux familles de nombres $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble fini et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I}\lambda a_i=\lambda\sum_{i\in I}a_i.$$

Corollaire 6 (La somme de la combinaison linéaire, c'est la combinaison linéaire des sommes)**.**

Soient deux familles de nombres $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i+\mu b_i)=\lambda\sum_{i\in I}a_i+\mu\sum_{i\in I}b_i.$$

Proposition 7 (Produits de produits)**.**

Soient deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{i\in I}(a_i\cdot b_i)=\left(\prod_{i\in I}a_i\right)\cdot\left(\prod_{i\in I}b_i\right)$$

En particulier, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\lambda a_i)=\lambda^n\prod_{i=1}^{n}a_i$

Si de surcroît tous les b_i sont non nuls,

$$\prod_{i\in I}\frac{a_i}{b_i}=\frac{\prod_{i\in I}a_i}{\prod_{i\in I}b_i}.$$

Pour tout entier naturel p,

$$\left(\prod_{i\in I}a_i\right)^p=\prod_{i\in I}a_i^p.$$

Proposition 8 (Relations de Chasles)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et m un entier tel que $1 \leq m \leq n$. Soit $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{m}a_i+\sum_{i=m+1}^{n}a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n}a_i=\left(\prod_{i=1}^{m}a_i\right)\cdot\left(\prod_{i=m+1}^{n}a_i\right).$$

Proposition 9 (Exponentielle d'une somme, logarithme d'un produit)**.**

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres réels, les b_i étant tous <u>strictement positifs</u>.

$$\exp\left(\sum_{i\in I}a_i\right)=\prod_{i\in I}\exp(a_i) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\prod_{i\in I}b_i\right)=\sum_{i\in I}\ln(b_i).$$

3 Télescopage.

Théorème 10 (Sommes télescopiques)**.**

Soient $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n, a_{n+1}$ des nombres complexes. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

Proposition 11 (Produits télescopiques)**.**

Soient $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n, a_{n+1}$ des nombres complexes non nuls. Alors,

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Exemple 12.

Soit n un entier supérieur à 2. Simplifier

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^6 - k^6\right), \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

4 Sommes et produits de référence.

Proposition 13 ($\sum_{k=1}^{n} k^p$ avec $p \in \{1, 2, 3\}$)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Proposition 14 (Progression géométrique)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et q un nombre complexe.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui précède permet d'écrire une factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$:

$$x^n - 1 = (x - 1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right).$$

Exemple 15 (de sommes de progressions géométriques).

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \leq n)$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x^k$.

Généralisons la factorisation de $x^n - 1$ obtenue plus haut :

Proposition 16 (Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$).

Soient a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Exemple 17.

Factoriser : $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^3 + b^3$.

Définition 18.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** de n et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \qquad \text{si } n \geq 1,$$

et on pose que $0! = 1$. Par exemple $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Remarque. Vu en Terminale : $n!$ est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. C'est aussi le nombre de façons différentes de numéroter n objets. Sera revu dans le cours de dénombrement.

Proposition 19 (Une relation simple et utile).

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Exemple 20 (Produit des entiers pairs, des entiers impairs).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n! \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

5 Changements d'indice.

Pas de définition formelle ici : il s'agit d'écrire une même somme de deux manières différentes, en changeant la forme de l'indice (en fait, l'ensemble des indices). Dans ce qui suit, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

• Décalage $[j = k-1]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}.$

k	1	2	$\cdots$	n
j	0	1	$\cdots$	$n-1$

• Inversion de compteur $[j = n-k]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{n-1} u_{n-j}.$

k	1	2	$\cdots$	n
j	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	0

• Tri des termes d'indice pair et d'indice impair.

La famille $(u_k)_{0\leq k\leq 2n}$ est une famille de $2n+1$ nombres.
Les nombres $u_0, u_2, u_4, \ldots, u_{2n}$ portent un indice pair : ce sont les nombres de la famille $(u_{2j})_{0\leq j\leq n}$:

$$u_0 + u_2 + u_4 + \ldots u_{2n} = \sum_{j=0}^{n} u_{2j}$$

j	0	1	2	$\cdots$	n
$2j$	0	2	4	$\cdots$	$2n$

Les autres $(u_1, u_3 \ldots, u_{2n-1})$ portent un indice impair

$$u_1 + u_3 + \ldots u_{2n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} u_{2j+1}$$

j	0	1	$\cdots$	$n-1$
$2j+1$	1	3	$\cdots$	$2n-1$

On a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n} u_k = \sum_{j=0}^{n} u_{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} u_{2j+1}}.$$

Lorsqu'on ne connaît pas la parité du nombre de termes dans la somme de départ, on peut écrire ceci :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{j\,:\,2j\leq n} u_{2j} + \sum_{j\,:\,2j+1\leq n} u_{2j+1}\\ &= \sum_{j\,:\,j\leq \frac{n}{2}} u_{2j} + \sum_{j\,:\,j\leq\frac{n-1}{2}} u_{2j+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} u_{2j} \;+\; \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} u_{2j+1}}$$

Exemple 21.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{2n} k^2 + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

On formalise (et on généralise) ce qui précède à l'aide de la proposition suivante. Elle est admise et peut être laissée pour une seconde lecture.

Proposition 22.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini I et σ une bijection de I vers I. Alors

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

6 Coefficients binomiaux et formule du binôme.

Définition 23.

Pour deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on appelle **coefficient binomial** « p parmi n » le nombre

$$\binom{n}{p} := \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0,n]\!], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 24.

Soient n et p deux entiers naturels.

Le nombre $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$, on a $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}$.

Exemple 25.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 26.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*\ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}\ \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

(symétrie) (formule *sans nom*) (formule de Pascal)

Conséquence. Triangle de Pascal/algorithme de calcul.

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0								$\cdots$
1								$\cdots$
2								$\cdots$
3								$\cdots$
4								$\cdots$
5								$\cdots$
6								$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Exemple 27.

Démontrer que les coefficients binomiaux sont des entiers.

On connaît l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. On va généraliser pour un exposant quelconque.

Théorème 28 (Formule du binôme)**.**

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 29.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

Exemple 30 (Calculs classiques)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

7 Sommes doubles.

Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, on rappelle la définition du produit cartésien $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!] = \{(i,j), i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,p]\!]\}$.

Il est courant de noter $a_{i,j}$ plutôt que $a_{(i,j)}$, même si ici, l'indice est un couple (i,j).

Théorème 31 (Sommes doubles : deux écritures)**.**

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$, $I = [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Proposition 32 (Produit de deux sommes)**.**

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$ et deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_i \cdot b_j.$$

En particulier,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j.$$

Proposition 33 (Sommes triangulaires : deux écritures)**.**

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$, et $I = \{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] : i \leq j\}$.
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I. Leur somme peut s'écrire

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{p} a_{i,j}.$$

Remarque. On saura adapter. Par exemple, $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} a_{i,j} =$.

Méthode.

Dans les doubles sommes, on peut ajouter des parenthèses superflues :

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right).$$

À l'intérieur des parenthèses, on calcule à j fixé, c'est à dire que *l'on traite j comme une constante.*

Exemple 34.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$.

Exercices

1.1 [♦◇◇] Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

1.2 [♦◇◇] Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1), \quad \sum_{k=n}^{2n} e^{-k}, \quad \sum_{k=0}^{2n} |k-n|.$$

1.3 [♦♦◇]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=-n}^{n} (k+2) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

1.4 [♦♦◇] Ci-dessous, n est un entier naturel. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right); \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}; \qquad \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$$

1.5 [♦♦◇] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. non nul. Simplifier.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} (u_{2k+1} - u_{2k-1}).$$

1.6 [♦♦◇] Soit $q \in \mathbb{R}$. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} kq^{k-1}$.
Que vaut-elle si $q = 1$? Désormais, on supposera $q \neq 1$.
Soit la fonction $f_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} kx^{k-1}$. En la voyant comme la dérivée d'une autre que l'on calculera, calculer S_n.

1.7 [♦♦◇] $0,999... = 1$. Expliquer.

$\boxed{\textbf{1.8}}$ **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : x \mapsto x^n$. On se donne un entier naturel p et un réel x.
Exprimer le nombre $f_n^{(p)}(x)$ à l'aide de factorielles.
Précision sur la notation : la fonction $f_n^{(p)}$ est la dérivée pème de f_n.

$\boxed{\textbf{1.9}}$ **[♦♦◇]** Soit n un entier naturel non nul et p un entier naturel.

1. À l'aide d'un télescopage, démontrer l'identité
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$
2. Grâce au cas $p = 1$, retrouver l'expression connue de $\sum_{k=1}^{n} k$.
3. Grâce au cas $p = 2$, retrouver l'expression connue de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$\boxed{\textbf{1.10}}$ **[♦♦◇]** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$.

$\boxed{\textbf{1.11}}$ **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i}$.

$\boxed{\textbf{1.12}}$ **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i - j|$

$\boxed{\textbf{1.13}}$ **[♦♦◇]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k}.$$

$\boxed{\textbf{1.14}}$ **[♦♦♦]** Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$\boxed{\textbf{1.15}}$ **[♦♦♦]** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kH_k$ en fonction de n et H_n.

Indications.

1.4 Ça télescope, mais il faut arriver à faire apparaître la forme $u_{k+1} - u_k$.

1.9 Une formule du cours vous aidera. Quel est l'indice qui "bouge" ? Quelle est alors la forme d'une somme "télescopable" ?

1.13 Quel type de somme avons-nous sous les yeux ? Quelle est la seule chose que nous ayons dite sur ces sommes ?