

Propriétés de \mathbb{R}

Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Inégalités.	1
Exercice 2.1	2
Exercice 2.2	3
Exercice 2.3	3
Exercice 2.4	4
Valeurs absolues.	4
Exercice 2.5	4
Exercice 2.6	5
Entiers, rationnels.	5
Exercice 2.7	5

Exercice 2.1 [◆◆◆]

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3 - a^2b + b^3 - ab^2}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2(a - b) + b^2(b - a)}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)(a^2 - b^2)}{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a + b)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Or $(a - b)^2 \geq 0$, $(a + b) \geq 0$ et $ab \geq 0$.

Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.2 [◆◆◆]

1. Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} &\leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \iff a+b &\leq a+2\sqrt{ab}+b \\ \iff 2\sqrt{ab} &\geq 0 \\ \iff \sqrt{ab} &\geq 0 \\ \iff ab &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

Considérons $a \geq b$, alors $|a-b| = a-b$.

$$\begin{aligned} |\sqrt{a} - \sqrt{b}| &\leq \sqrt{a-b} \\ \iff a - 2\sqrt{ab} + b &\leq a-b \\ \iff 2b &\leq 2\sqrt{ab} \\ \iff b^2 &\leq ab \\ \iff b &\leq a \end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque $b \geq a$.

Ainsi, $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 2.3 [◆◆◆] *Manipuler la notion de distance*

En utilisant la notion de distance sur \mathbb{R} , écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \leq 6 \text{ et } |x^2-1| > 3\}$$

On a :

$$x \in [-9, 3] \text{ et } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

Donc :

$$x \in [-9, -2] \cup [2, 3]$$

Exercice 2.4 [◆◆◆] Plusieurs façons de définir une moyenne

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. On définit les nombres m, g, h par

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Et on les appelle respectivement moyenne arithmétique, géométrique et harmonique de a et b .

Démontrer l'encadrement

$$a \leq h \leq g \leq m \leq b$$

Montrons les inégalités une par une :

- $m \leq b \iff \frac{a+b}{2} - b \leq 0 \iff \frac{a-b}{2} \leq 0 \iff a - b \leq 0 \iff a \leq b.$
- $g \leq m \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$
- $h \leq g \iff \frac{1}{h} \geq \frac{1}{g} \iff \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 0 \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2ab} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2ab} \geq 0.$
- $a \leq h \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{h} \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \geq 0 \iff \frac{b-a}{2ab} \geq 0 \iff b - a \geq 0 \iff a \leq b$

Ainsi, toutes les inégalités sont vraies et $a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

Exercice 2.5 [◆◆◆]

Résoudre l'équation

$$\ln |x| + \ln |x+1| = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} & \ln |x| + \ln |x+1| = 0 \\ \iff & \ln (|x(x+1)|) = 0 \\ \iff & |x(x+1)| = 1 \\ \iff & x(x+1) = 1 \\ \iff & x^2 + x - 1 = 0 \\ \iff & x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

Exercice 2.6 [◆◆◆]

Résoudre l'équation

$$|x - 2| = 6 - 2x$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Considérons $x \geq 2$

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 6 - 2x \\ \iff x - 2 &= 6 - 2x \\ \iff x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Considérons $x \leq 2$

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 6 - 2x \\ \iff 2 - x &= 6 - 2x \\ \iff x &= 4 \end{aligned}$$

Seul la solution $x = \frac{8}{3}$ convient. Ainsi, l'unique solution à l'équation est $\frac{8}{3}$.

Exercice 2.7 [◆◆◆]

Démontrer l'égalité $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x .

Soient $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Notons r la partie fractionnaire de x , ainsi $x = \lfloor x \rfloor + r$.

On a alors $nx = n\lfloor x \rfloor + nr$ et $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nr \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nr \rfloor$.

Conséquemment, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n}$.

Or, $0 \leq \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < 1$ car $0 \leq r < 1$, donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$.

Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$.

Par conséquent, $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.