le dm de la toussaint
corrigé

darvoux theo

toussaint 2k13

1 exercice

1.

Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $z = re^{i\theta}$. On a :

$$\begin{aligned} & r^3 e^{3i\theta} = 1 \\ \iff & \begin{cases} r^3 = 1 \\ e^{3i\theta} = 1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} r = 1 \\ 3\theta = 0[2\pi] \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\theta \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$ et donc $z \in \left\{e^0, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}$, donc $z \in \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$
On parle de racine troisième de l'unité car ce sont les nombres complexes qui sont égaux à 1 lorsqu'ils sont mis au carré.

2.

On a :

$$\overline{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}+2\pi} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2.$$

Et :

$$1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 1 + 2\mathrm{Re}(j) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = 0$$

$$\begin{aligned} 1 + j + j^2 &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\pi}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \\ &= 1 - (\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) = 0 \end{aligned}$$

3.

a) sur la feuille
b) On a :

$$\begin{cases} |j-1| = |e^{2i\pi/3}-1| = |e^{i\pi/3}||e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}| = 2\sin(\pi/3) = \sqrt{3} \\ |j^2-1| = |e^{4i\pi/3}-1| = |e^{2i\pi/3}||e^{2i\pi/3}-e^{-2i\pi/3}| = 2\sin(2\pi/3) = \sqrt{3} \\ |j^2-j| = |e^{4i\pi/3}-e^{2i\pi/3}| = |e^{i\pi}||e^{-i\pi/3}-e^{i\pi/3}| = 2\sin(\pi/3) = \sqrt{3} \end{cases}$$

On en conclut que c'est un triangle équilatéral. Son périmètre est de $3\sqrt{3}$.

4.

a)

$$\begin{cases} 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{3k\leq n} \binom{n}{3k} + \sum_{3k+1\leq n} \binom{n}{3k+1} + \sum_{3k+2\leq n} \binom{n}{3k+2} = S_0 + S_1 + S_2 \\ (1+j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = \sum_{3k\leq n} \binom{n}{3k} j^{3k} + \sum_{3k+1\leq n} \binom{n}{3k+1} j^{3k+1} + \sum_{3k+2\leq n} \binom{n}{3k+2} j^{3k+2} \\ \qquad = \sum_{3k\leq n} \binom{n}{3k} + j\sum_{3k+1\leq n} \binom{n}{3k+1} + j^2 \sum_{3k+2\leq n} \binom{n}{3k} = S_0 + jS_1 + j^2S_2 \\ (1+j^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} = \sum_{3k\leq n} \binom{n}{3k} j^{6k} + \sum_{3k+1\leq n} \binom{n}{3k+1} j^{6k+2} + \sum_{3k+2\leq n} \binom{n}{3k+2} j^{6k+4} \\ \qquad = \sum_{3k\leq n} \binom{n}{3k} + j^2\sum_{3k+1\leq n} \binom{n}{3k+1} + j \sum_{3k+2\leq n} \binom{n}{3k+2} = S_0 + j^2S_1 + jS_2 \end{cases}$$

b) En sommant les égalités, on obtient :

$$3S_0 + S_1(1+j+j^2) + S_2(1+j+j^2) = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} (1+j)^n + (1+j^2)^n &= (e^{i\pi/3}(2\cos\frac{\pi}{3}))^n + (e^{-i\pi/3}(2\cos-\frac{\pi}{3}))^n \\ &= e^{in\pi/3} + e^{-in\pi/3} = 2\cos\frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_0 = \frac{1}{3}\left(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

2 probleme

2.1 a. wallis

1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)(\cos t)^{n+1} dt = \left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n+1)(\sin t)(-\sin t)(\cos^n t) dt$$
$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos^n t) dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

Ainsi, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$. Donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que cos est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, $\cos^n$ est aussi positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Or, l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle est positive, ainsi, $W_n > 0$

3.

On a $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ donc $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$.
Ainsi, la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur $W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.
En effet :

$$W_0W_1 = \int_0^{\pi/2} 1dt \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = \frac{\pi}{2}$$

4.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\cos^{n+1}(x) - \cos^n(x) = \cos^n(x)(\cos(x) - 1) \leq 0$.
Ainsi,

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t))dt \leq 0$$

Donc la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus, on a :

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n \iff \frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n}$$

Ainsi, par décroissance de (W_n), on a :

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq \frac{W_n}{W_n} = 1$$

Enfin, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

5.

On a $W_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} W_n$ et $\frac{\pi}{2} = nW_{n-1}W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} nW_n^2$.
Alors $W_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2n}$. On en déduit que $\sqrt{n}W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6.

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation.
On a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{0!}{2^0 0!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixe tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a :

$$\begin{aligned}
W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion.
Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation.
On a $W_1 = 1$ et $\frac{2^0(0!)^2}{1!} = 1$.
Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixe tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a :

$$\begin{aligned}
W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \\
&= \frac{2n+2}{2n+3} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n+1}(n+1)!n!}{(2n+3)(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}
\end{aligned}$$

C'esst exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion.
Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 b. gauss

1.

a) f est une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$, ainsi f est dérivable de dérivée positive sur $\mathbb{R}$, f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $t \geq 1$. On a $-t^2 \leq -t$ et donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ par croissance de l'exponentielle.
Soit $x \in [1, +\infty[$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt$$

On a :

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq f(1) + \int_1^x e^{-t} dt \leq f(1) + e - e^{-x} \leq f(1) + e$$

Ainsi, f est majorée par $f(1) + e$

2.

a) Soit $u \in]-\infty, 1[$, on a :

$$\frac{d}{dx}(1 + u - e^u) = 1 - e^u > 0 \text{ pour u} < 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^u - \frac{1}{1-u}\right) = e^u - \frac{1}{(1-u)^2} < 0 \text{ car } e^u < 1 \text{ et } \frac{1}{(1-u)^2} > 1$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \sqrt{n}]$. On a :

$$1 - \frac{x^2}{n} \leq e^{-\frac{x^2}{n}} \leq \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n}}$$

$$\iff (1 - \frac{x^2}{n})^n \leq e^{-x^2} \leq (\frac{1}{1 + \frac{x^2}{n}})^n = \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{n})^n}$$

3.

a) $x = \sqrt{n}\sin t$, $dx = \sqrt{n}\cos(t)dt$.
On a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{n\sin^2 t}{n}\right)^n \sqrt{n}\cos(t)dt$$
$$= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)dt = \sqrt{n}W_{2n+1}$$

b) $x = \sqrt{n}\tan t$, $dx = \sqrt{n}(1+\tan^2(t))dt$.
On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{n}(1+\tan^2(t))}{(1+\frac{n\tan^2(t)}{n})^n}dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{n}(1+\tan^2(t))}{(1+\tan^2(t))^n}dt \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^{n-1}}dt \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(t)dt \\ &\leq \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(t)dt \\ &= \sqrt{n}W_{2n-2}\end{aligned}$$

c) Par croissance de l'intégrale, $I_n \leq f(\sqrt{n}) \leq J_n$.
On a :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq f(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} f(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.