Chapitre 27

Applications linéaires

Exercice 1: ♦♦♦

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Supposons que $p+q$ est projecteur. Montrer que

$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q).$$

Solution :

$\boxed{1.}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$.
On a $(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p^2 + q^2 = p + q$ donc $p+q$ est un projecteur.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $p+q$ est un projecteur.
Alors $(p+q)^2 = p + pq + qp + q = p + q$ donc $pq + qp = 0$.
Alors $pq = qp \Rightarrow pq = p^2 q = -pqp = qp = -qp^2 = qp^2 = qp$.
Donc $pq = qp$, mais aussi $pq = -qp$ donc $pq = qp = 0$.