

Chapitre 11

Équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Sommaire.

1	Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 1.	1
2	Résolution de l'équation homogène.	1
3	Équation générale : obtenir une solution particulière.	2
3.1	Trouver une solution à vue.	2
3.2	Principe de superposition.	2
3.3	Méthode générale : variation de la constante.	3
4	Synthèse.	3
5	Exercices	4

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 1.

Définition 1

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux applications continues sur I . On considère l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E).$$

- On dit que $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est **solution** de (E) sur I si elle est dérivable sur I et si elle est telle que $\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
- La fonction b est souvent appelée **second membre** de l'équation.
- L'**équation homogène** associée à (E) est $y' + a(x)y = 0 \quad (E_0)$.

Ci-dessous, S et S_0 désignent respectivement les ensembles de solutions de (E) et (E_0) .

Proposition 2: Lien entre S et S_0 .

Si S est non vide, alors, en considérant $z_p \in S$ (une « solution particulière » de l'équation), on a

$$S = \{z_p + y, \quad y \in S_0\}.$$

Preuve :

Soit $z : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I .

$$\begin{aligned} z \in S &\iff \forall x \in I, z'(x) + a(x)z(x) = b(x) \iff \forall x \in I, z'(x) + a(x)z(x) = z_p'(x) + a(x)z_p(x) \\ &\iff \forall x \in I, (z - z_p)'(x) + a(x)(z - z_p)(x) = 0 \iff z - z_p \in S_0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } z \in S \iff z - z_p \in S_0 \iff \exists y \in S_0 \mid z - z_p = y \iff \exists y \in S_0 \mid z = z_p + y.$$

2 Résolution de l'équation homogène.

On va donner toutes les solution de (E_0) .

Cas particulier (Terminale) : le cas où a est une fonction constante égale à $a \in \mathbb{K}$. On a vu que les solutions de $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-ax}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ci-dessous, on traite le cas général pour $a : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Théorème 3: ★

Soit (E_0) l'équation $y' + a(x)y = 0$, où $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur I .

Soit A une primitive de a sur I . L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) sur I est

$$S_0 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Preuve :

⊃ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$. Montrons que $f \in S_0$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors A est dérivable sur I , \exp est dérivable sur \mathbb{R} donc f est dérivable sur I comme composée.

$$\forall x \in I, f'(x) = \lambda(-A'(x))e^{-A(x)} = -\lambda a(x)e^{-A(x)} = -a(x)f(x).$$

Ainsi, $f'(x) + a(x)f(x) = 0$, donc $f \in S_0$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on sait dériver $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ où φ est dérivable à valeurs complexes.

⊂ Soit $y \in S_0$. Montrons que $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid \forall x \in I, y(x)e^{A(x)} = \lambda$.

Il suffira de prouver que $p : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ est constante sur I , p est dérivable comme produit:

$$\forall x \in I, \quad p'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)A'(x)e^{A(x)} = e^{A(x)} \underbrace{(y'(x) + a(x)y(x))}_{=0 \text{ car } y \in S_0}$$

La fonction p est constante sur I donc $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid \forall x \in I p(x) = \lambda$ donc $y(x)e^{A(x)} = \lambda$ donc $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$.

Exemple 4

Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation $t(1 - t)y' + y = 0$.

Solution :

La fonction $t \mapsto t(1 - t)$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$. Le problème est équivalent à:

$$y' + \frac{1}{t(1 - t)}y = 0.$$

Notons $a : t \mapsto \frac{1}{t(1 - t)}$. On a besoin d'une primitive, et $a(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t - 1}$.

On pose $A : t \mapsto \ln |t| - \ln |t - 1|$. Par théorème, $S = \{t \mapsto \lambda e^{-\ln \frac{t}{1 - t}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Lemme 5: Une remarque intéressante.

Si a est continue sur I , la seule solution de $y' + a(x)y = 0$ qui s'annule sur I , c'est la fonction nulle.

Preuve :

Soit $y \in S_0 : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, y(x) = \lambda e^{-A(x)}$ où A est primitive de a .

Supposons que y s'annule sur I , $\exists x_0 \in I \mid \lambda e^{-A(x_0)} = 0$.

Alors $\lambda = 0$ ou $e^{-A(x_0)} = 0 : \lambda = 0$, donc y est nulle.

3 Équation générale : obtenir une solution particulière.

Il s'agit ici de trouver une solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ (E).

3.1 Trouver une solution à vue.

Lorsque a et b sont des fonctions constantes (a non nulle), notre équation a une solution constante. On a déjà croisé ce genre de situation en physique en regardant un circuit RC soumis à un échelon de tension.

Plus précisément,

L'équation $y' + ay = b$ a pour solution particulière la fonction constante $z_p : x \mapsto \frac{b}{a}$.

Plus généralement, lorsque b sera une fonction polynomiale de degré n , on pourra chercher une solution polynomiale de degré n .

Exemple 6

Deviner une solution pour les équations ci-dessous

$$(1) \ y' + 2y = 1 \qquad (2) \ y' + 2y = e^x \qquad (3) \ y' + y = x.$$

Solution :

1.

$x \mapsto \frac{1}{2}$ solution.
2.

$x \mapsto \frac{1}{3}e^x$ solution.
3.

$x \mapsto x - 1$ solution

3.2 Principe de superposition.

Pratique lorsque le second membre se présente comme somme de deux fonctions.

Proposition 7: Principe de superposition.

Soient a, b_1, b_2 trois fonctions continues sur I . Si

- y_1 est solution sur I de $y' + a(x)y = b_1(x)$ (E₁),
- y_2 est solution sur I de $y' + a(x)y = b_2(x)$ (E₂),

alors $y_1 + y_2$ est solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$ (E₃).

Preuve :

y_1 et y_2 sont dérivables sur I car solutions d'EDL1 donc $y_1 + y_2$ est dérivable sur I comme somme.

$$(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = (y_1' + ay_1) + (y_2' + ay_2) = b_1 + b_2.$$

Exemple 8

Trouver une solution de l'équation $y' + 2y = 1 + e^x$.

Solution :

- $y' + 2y = 1$ a pour solution $x \mapsto \frac{1}{2}$.
 - $y' + 2y = e^x$ a pour solution $x \mapsto \frac{e^x}{3}$.
- Par principe de superposition, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^x$ est solution de (E).

3.3 Méthode générale : variation de la constante.

Proposition 9: Variation de la constante.

Si a et b sont continues sur I , l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ possède une solution z de la forme $z = \lambda u$ où u est une solution non nulle de l'équation homogène, et λ une fonction dérivable sur I .

Preuve :

On cherche une solution de (E) de la forme $z : x \mapsto \lambda(x)u(x)$ où $u \in S_0$ non nulle et λ dérivable à choisir. La fonction z étant dérivable sur I comme produit, on a

$$z' + az = (\lambda u)' + a(\lambda u) = \lambda' u + \lambda u' + \lambda au = \lambda' u + \lambda \underbrace{(u' + au)}_{=0},$$

où on a utilisé à la dernière ligne que u est solution de (E_0) . Ainsi,

$$z \text{ est solution de } (E) \iff z' + az = b \text{ sur } I \iff \lambda' u = b \text{ sur } I.$$

Nous avons vu plus haut que, puisque u est une solution de (E_0) qui n'est pas la fonction nulle, elle ne s'annule nulle part sur I . On peut donc écrire

$$z \text{ est solution de } (E) \iff \lambda' = b/u \text{ sur } I.$$

Notre fonction z sera donc solution ssi λ est choisie parmi les primitives b/u .

Exemple 10

Résolution de $x^4 y' + 3x^3 y = 1$ sur \mathbb{R}_+^* .

Solution :

Homogène. On résout $x^4 y' + 3x^3 y = 0$, équivalente à $y' + \frac{3}{x}y = 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

Posons $a : x \mapsto \frac{3}{x}$ et $A : x \mapsto 3 \ln(x)$, $S_0 = \{x \mapsto \lambda x^{-3} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Générale. On cherche une solution de $y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^4}$. Soit $u : x \mapsto x^{-3}$.

C'est une solution non nulle de (E_0) . Soit λ dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On cherche une solution $z = \lambda u$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} z'(x) + \frac{3}{x}z(x) &= \lambda'(x)u(x) + \lambda(x)u'(x) + \frac{3}{x}\lambda u(x) \\ &= \lambda'(x)u(x) + \lambda(x)(u'(x) + \frac{3}{x}u(x)) \\ &= \lambda'(x)u(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) + \frac{3}{x}z(x) = \frac{1}{x^4} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x)x^{-3} = x^{-4} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

On choisit $\lambda = \ln$. La solution trouvée est donc $z : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^3}$.

Conclusion. $S = \{x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^3} + \frac{\lambda}{x^3} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4 Synthèse.

Théorème 11

Soient $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues. L'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

a des solutions. Si z_p est une telle solution (« particulière ») et A une primitive de a sur I , alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \left\{ x \mapsto z_p(x) + \lambda e^{-A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Définition 12

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale (valeur imposée en un point)

$$\begin{cases} y' + a(x)y &= b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Théorème 13: de Cauchy-Lipschitz, cas linéaire.

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y &= b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I .

Preuve :

D'après le théorème précédent, l'équation différentielle admet des solutions, on en fixe une, que l'on note z_p . Si A est primitive de a sur I , alors les solutions sont de la forme $y : x \mapsto z_p(x) + \lambda e^{-A(x)}$.

Parmi ces fonctions, on veut distinguer celles qui satisfont la condition initiale. On écrit donc

$$y(x_0) = y_0 \iff z_p(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 \iff \lambda = e^{A(x_0)}(y_0 - z_p(x_0)).$$

Il existe donc une unique valeur pour λ pour laquelle $y(x_0) = y_0$; notons la λ_0 .
Le problème de Cauchy possède une unique solution : la fonction $y = z_p + \lambda_0 e^{-A}$.

5 Exercices

Exercice 1: ♦♦♦

Résoudre les équations différentielles ci-dessous

1. $y' - 2y = 2$ sur \mathbb{R}
2. $(x^2 + 1)y' + xy = x$
3. $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. $y' - \ln(x)y = x^x$ sur \mathbb{R}_+^*
5. $(1 - x)y' - y = \frac{1}{1-x}$ sur $] -\infty, 1[$

Solution :

1. Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière, avec y constante : $S_p : x \mapsto -1$.

Ensemble de solutions : $S = \{\lambda e^{2x} - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. L'équation se réécrit comme $y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}$.

Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière : $S_p : x \mapsto 1$ est solution évidente.

Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. Soit $I =] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda \cos x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I . On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution} &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) \cos(x) = \sin(2x) \\ &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = 2 \sin(x) \\ &\iff \lambda = -2 \cos \end{aligned}$$

Ainsi, $z = -2 \cos^2$.

Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \lambda \cos x - 2 \cos^2 x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. Soit $I = \mathbb{R}_+^*$.

Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda \frac{x^x}{e^x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I . On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution} &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) \frac{x^x}{e^x} = x^x \\ &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = e^x \\ &\iff \lambda = e^x \end{aligned}$$

Ainsi, $z : x \mapsto x^x$

Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \lambda \frac{x^x}{e^x} + x^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

5. Soit $I =] -\infty, 1[$. L'équation se réécrit comme $y' - \frac{1}{1-x}y = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I . On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution} &\iff \forall x \in I, \frac{\lambda'(x)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = \frac{1}{1-x} \\ &\iff \forall x \in I, \lambda(x) = -\ln(1-x) \end{aligned}$$

Ainsi, $z : x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2: ♦♦♦

Résoudre sur R_+^* le problème de Cauchy $\begin{cases} y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$.

Solution :

Solution homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda x^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution} &\iff \forall x \in I \quad \lambda'(x)x^2 = x^2 \cos x \\ &\iff \forall x \in I \quad \lambda'(x) = \cos x \\ &\iff \lambda = \sin \end{aligned}$$

Ainsi, $z : x \mapsto x^2 \sin x$.

Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \lambda x^2 + x^2 \sin x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Conditions initiales : Soit $y \in S$. On a :

$$\begin{aligned} y(\pi) = 0 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \pi^2 + \pi^2 \sin(\pi) = 0 \\ &\iff \lambda \pi^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \end{aligned}$$

L'unique solution de ce problème de Cauchy est donc : $y : x \mapsto x^2 \sin x$.

Exercice 3: ♦♦♦

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t) dt$$

Solution :

Analyse.

On suppose qu'il existe y dérivable sur \mathbb{R} solution de cette équation.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

En dérivant l'égalité, on obtient : $y''(x) + y'(x) = 0$. On pose $g(x) = y'(x)$.

On a : $g'(x) + g(x) = 0$.

Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi, $g \in S$ et $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x) = -\lambda e^{-x} + \mu$.

On a :

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t) dt &\iff \lambda e^{-x} - \lambda e^{-x} + \mu = [\lambda e^{-t} + \mu t]_0^1 \\ &\iff \mu = \lambda e^{-1} + \mu - \lambda \\ &\iff \lambda(e^{-1} - 1) = 0 \iff \lambda = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\{x \mapsto \mu \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

Synthèse.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R} \mid y(x) = \mu$. On a $y'(x) + y(x) = \mu$ et $\int_0^1 y(t) dt = \int_0^1 \mu dt = \mu$

Exercice 4: ♦♦♦

Soit l'équation différentielle $x^2 y' - y = 0$.

- Résoudre sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .
- Trouver toutes les solutions définies sur \mathbb{R}

Solution :

1. On se ramène à l'équation : $y' - \frac{1}{x^2}y = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble de solutions $S_+ = \{x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{x}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, l'ensemble de solutions $S_- = \{x \mapsto \mu e^{-\frac{1}{x}} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Une solution de y sur \mathbb{R} est solution sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* . Ainsi, $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ \mu e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a :

$$\mu e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty \quad \text{et} \quad \lambda e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Donc y est prolongeable en 0 si et seulement si $\mu = 0$. On a alors $y(0) = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} x > 0 : \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} &= \frac{\lambda e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -\lambda \left(-\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ c.c.} \\ x < 0 : \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} &= 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \end{aligned}$$

Donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$.

La fonction est alors continue et dérivable sur \mathbb{R} et on a $0^2 y'(0) - y(0) = 0$, l'équation est donc satisfaite en 0.

Les solutions sont donc les fonctions :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$