Chapitre 9

Petits systèmes linéaires.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Droites et plans.

Droites.

Définition 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $c \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui sont solutions de l'équation linéaire

$$ax + by = c$$

est une **droite affine** de $\mathbb{R}^2$.
La droite d'équation $ax + by = 0$ est dite **vectorielle**. Parallèle à la première, elle contient $(0, 0)$.

Proposition 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On considère les droites

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\} \quad \text{et} \quad D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}.$$

Considérons
— $\vec{u}$ un vecteur (couple) (α, β) non nul de D_0 (une solution non nulle de $ax + by = 0$);
— M_p un couple (x_p, y_p) de D (une solution particulière de $ax + by = c$).
On a

$$D_0 = \{(\lambda\alpha, \lambda\beta) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$$D = \{(x_p + \lambda\alpha, y_p + \lambda\beta) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{M_p \oplus \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle ces écritures des **représentations paramétriques** de D_0 et D, le réel λ étant un paramètre. L'addition $\oplus$ est ici celle des couples, coordonnée par coordonnée.

Exemple 3

Droite d'équation $x - 3y = -6$. Représentations paramétriques. Droite vectorielle associée.

Solution :

La droite : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = -6\} = \{(3y - 6, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(-6, 0) + y(3, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 4: Système linéaire 2×2 : l'intersection de droites sous-jacentes.

Soient (a, b, c) et (a', b', c') deux triplets de réels, tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$.
On considère le système linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} ax & + & by & = c \\ a'x & + & b'y & = c' \end{cases}$$

En raisonnant en termes d'intersections de droites, discuter de la forme que peut avoir l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$.

Solution :

Notons S l'ensemble des solutions de ce système.
• Les deux droites sécantes, alors $S = (x, y)$.
• Les deux droites parallèles et non confondues, alors $S = \varnothing$.
• Les deux droites confondues, alors $S = D$.

Exemple 5: Notre système linéaire 2×2 préféré : somme et différence.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{cases} x + y & = & a \\ x - y & = & b \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & \frac{a+b}{2} \\ y & = & \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

Plans.

Définition 6

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $d \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des triplets (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ qui sont solutions de l'équation linéaire

$$ax + by + cz = d$$

est un **plan affine** de $\mathbb{R}^3$.
Le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est dit **vectoriel**. Il contient le triplet $(0,0,0)$.

Proposition 7

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $d \in \mathbb{R}$. On considère les plans

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\} \quad \text{et} \quad P_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

Considérons
— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs (triplets) non colinéaires de P_0;
— M_p un triplet de P.
On a

$$P_0 = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad P = \{M_p + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle ces écritures des **représentations paramétriques** de P_0 et P, les réels λ et μ étant des paramètres.
L'addition $+$ est ici celle des triplets, coordonnée par coordonnée.

Exemple 8

Plan d'équation $x - y - z = 3$. Représentation paramétrique. Plan vectoriel associé.

Solution :

Le plan $P = \{(x,y,z) \mid x-y-z = 3\} = \{(y+z+3, y, z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} = \{(3,0,0) + y(1,1,0) + z(1,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$

Exemple 9: Système linéaire 2×3 : l'intersection de plans sous-jacente.

Soient (a,b,c,d) et (a',b',c',d') deux quadruplets de réels, tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(a',b',c') \neq (0,0,0)$.
On considère le système linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} ax & + & by & + & cz & = d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = d' \end{cases}$$

En raisonnant en termes d'intersections de plans, discuter de la forme que peut avoir l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$.

Solution :

Notons S l'ensemble des solutions de ce système.
• Les deux plans sécants, alors S est une droite de $\mathbb{R}^3$.
• Les deux plans parallèles et non confondus, alors $S = \varnothing$.
• Les deux plans confondus, alors $S = P$.

2 L'algorithme du pivot ★, par l'exemple.

Exemple 10

Donner l'ensemble des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ solutions de

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = 1 \\ 2x & - & y & + & 11z & = -1 \\ 3x & + & 4y & + & z & = 1 \end{cases}$$

Solution :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \quad \text{est solution} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 11z = -1 \\ 3x + 4y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y + 9z = -3 \\ y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ y - 2z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 12 \\ y = -8 \\ z = -3 \end{cases}$$

Exemple 11

Donner l'ensemble des triplets $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ solutions de

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 6 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3x + 4y + 9z = 8 \end{cases}$$

Solution :

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\quad \text{est solution} &\iff \begin{cases} x + \ y + 2z = 2 \\ 2x+3y+7z=6 \\ 3x+4y+9z=8 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+2z=2 \\ \quad y+3z=2 \\ \quad y+3z=2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2-2+3z-2z \\ y=2-3z \\ 0=0 \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} x=z \\ y=2-3z \end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions : $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z \text{ et } y=2-3z\} = \{(0,2,0)+z(1,-3,1)\mid z\in\mathbb{R}\}$.

Exemple 12

Discuter selon les valeurs de $m\in\mathbb{R}$ la compatibilité et les solutions du système suivant.

$$\begin{cases} x + (m+1)y = (m+2) \\ mx - (m+4)y = 8 \end{cases}$$

Interpréter en termes d'intersections de droites.

Solution :

Soit $m\in\mathbb{R}$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(x,y)\quad \text{est solution} &\iff \begin{cases} x + (m+1)y = (m+2) \\ mx - (m+4)y = 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ \qquad (4-m^2)y = 8-m(m+2) \end{cases}\end{aligned}$$

• $m\notin\{2,-2\}$. Alors $4-m^2\neq 0$.
Dans ce cas, $x=m+2-(m+1)y$ et $y=\frac{8-m(m+2)}{4-m^2}$, unique couple solution.
• $m=2$. Alors $x=4-3y$, solutions : $\{(4-3y,y)\mid y\in\mathbb{R}\}=\{(4,0)+y(-3,1)\mid y\in\mathbb{R}\}$.
• $m=-2$. Alors $0=8$... pas de solutions.

Définition 13

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système l'une des opérations suivantes :

1. Échange des $i$èmes et $j$èmes lignes. On note $L_i\leftrightarrow L_j$.
2. Multiplication d'une ligne par un scalaire $\lambda\neq 0$. On note $L_i\leftarrow \lambda L_i$.
3. Ajout à la ligne L_i d'une ligne L_j $(i\neq j)$ multipliée par un scalaire λ. On note $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$.

Proposition 14: admise

Si on passe d'un système à un autre par un nombre fini d'opérations élémentaires, les deux systèmes ont le même ensemble de solutions.

Définition 15

Un système linéaire ayant une unique solution est dit de **Cramer**.

3 Exercices.

Exercice 1: ⧫◊◊ Un système de Cramer bête et méchant.

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 10 \\ 2x - y + \ \ z = 3 \\ \ \ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solution :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \text{ est solution } &\iff \begin{cases} 3x + y - 2z = 10 \\ 2x - y + \ \ z = 3 \\ \ \ x - y + 2z = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \ \ x - y + 2z = 2 \\ 2x - y + \ \ z = 3 \\ 3x + y - 2z = 10 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - \ \ y + 2z = 2 \\ \qquad y - 3z = -1 \\ \quad\ 4y - 8z = 4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ \quad\ \ y - 3z = -1 \\ \qquad\ \ 4z = 8 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'unique solution de système dans $\mathbb{R}^3$ est donc $(3, 5, 2)$.

Exercice 2: ⧫◊◊

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \ \ x + 2y - \ \ z = 2 \\ \ \ x - 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \end{cases}$$

Solution :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \text{ est solution } &\iff \begin{cases} \ \ x + 2y - \ \ z = 2 \\ \ \ x - 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y - \ \ z = 2 \\ \ \ - 4y + 4z = -4 \\ \ \ - 8y + 8z = -8 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ \qquad y - z = 1 \\ \qquad\quad z = y - 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -x \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions est alors

$$S = \{(x, 1 - x, -x) \ | \ x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 1, 0) + x(1, -1, -1) \ | \ x \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3: ⧫⧫◊

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Résoudre :

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$$

Solution :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \text{ est solution } \iff \begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ (b-a)y+(b^2-a^2)z=b^3-a^3 \\ (c-a)y+(c^2-a^2)z=c^3-a^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ (b-a)y+(b-a)(b+a)z=(b-a)(a^2+ab+b^2) \\ (c-a)y+(c-a)(c+a)z=(c-a)(a^2+ac+c^2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ y+(b+a)z=a^2+ab+b^2 \\ y+(c+a)z=a^2+ac+b^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ y+(b+a)z=a^2+ab+b^2 \\ z=a+b+c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ y=-bc-ab-ac \\ z=a+b+c \end{cases} \iff \begin{cases} x=abc \\ y=-(ab+bc+ca) \\ z=a+b+c \end{cases}$$

L'unique solution est donc $(abc, -(ab+bc+ca), a+b+c)$.

Exercice 4: ⧫⧫⧫

Soit λ un paramètre réel et le système :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(2-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(2-\lambda)z=0 \end{cases}$$

Le résoudre, en discutant selon les valeurs de λ.

Solution :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \text{ est solution } \iff \begin{cases} x+y+(2-\lambda)z=0 \\ x+(2-\lambda)y+z=0 \\ (2-\lambda)x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+(2-\lambda)z=0 \\ (1-\lambda)y+(\lambda-1)z=0 \\ (\lambda-1)y+(1-(2-\lambda)^2)z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+(2-\lambda)z=0 \\ (1-\lambda)y+(\lambda-1)z=0 \\ (-\lambda^2+5\lambda-4)z=0 \end{cases}$$

Les racines (évidentes) du polynôme $-\lambda^2+5\lambda-4$ sont 1 et 4.
⊚ Premier cas : $\lambda \notin \{1,4\}$.

$$(x,y,z) \text{ est solution } \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

L'unique solution est le couple $(0,0,0)$.
⊚ Deuxième cas : $\lambda = 1$.

$$(x,y,z) \text{ est solution } \iff \begin{cases} x+y+z=0 \end{cases}$$

L'ensemble S des solutions est le plan vectoriel:

$$S = \{(-y-z,y,z) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

⊚ Dernier cas : $\lambda = 4$

$$(x,y,z) \text{ est solution } \iff \begin{cases} x+z-2z=0 \\ -3y+3z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=z \\ 0=0 \end{cases}$$

L'ensemble S des solutions est la droite passant par l'origine:
. $$S = \{(z,z,z) \,|\, z \in \mathbb{R}\} = \{(0,0,0)+z(1,1,1) \;\; | \, z \in \mathbb{R}\}$$