Chapitre 4

Fonctions de la variable réelle.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

Dans tout ce cours, la lettre $\mathbb{K}$ pourra être remplacée par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les lettres I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

1 Vocabulaire sur les fonctions.

Soit X un partie de $\mathbb{R}$ et Y une partie de $\mathbb{K}$. Une fonction (ou application)

$$f : \begin{cases} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

est un procédé qui à tout élément x de X associe un unique élément $f(x)$ appartenant à Y.

Si $x \in X$ et $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x et que x est un **antécédent** de y par f.

Puisqu'ici la variable x est un nombre réel, on dit que la fonction est de la **variable réelle**.

Lorsque toutes les images par la fonction f sont des nombres réels, alors f est dite **à valeurs réelles**.

La notion de fonction (ou d'application) entre deux ensembles quelconques sera étudiée plus formellement dans un cours Ensemble et applications à venir.

1.1 Ensemble de définition.

Rappel

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des réels x tel que $f(x)$ a un sens.

Exemple 1

Donner l'ensemble de définition de

$$f : x \mapsto \sqrt{x(x-2)}, \quad g : x \mapsto \ln(x(x-2)), \quad h : x \mapsto \ln(x) + \ln(x-2).$$

1.2 Représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles.

Définition 2

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de la variable réelle et à valeurs réelles.
On appelle **graphe** de f la partie de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$\{(x, f(x)), \quad x \in X\}.$$

qui peut aussi s'écrire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in X \text{ et } y = f(x)\}$.
Supposons le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À chaque élément du graphe correspond alors un point du plan. Déposons une goutte d'encre sur chacun de ces points. Le résultat est appelé **courbe représentative** de la fonction. Dans la pratique, on confond graphe et courbe représentative.

1.3 Somme et produit de fonctions.

Définition 3

Soient f et g définies sur un même ensemble $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles.
La **somme** de f et g est la fonction définie par

$$f+g : \begin{cases} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{cases}.$$

Définition 4

Soient f et g définies sur un même ensemble $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles.
Le **produit** et le **quotient** de f et g sont les fonctions définies par

$$f \cdot g : \begin{cases} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad f/g : \begin{cases} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)/g(x) \end{cases}.$$

Pour que la définition du quotient ait un sens, il est nécessaire que g ne s'annule pas sur X.

1.4 Parité, imparité, périodicité.

Définition 5

Soit X un partie de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est dite

- **paire** si $\forall x \in X \begin{cases} -x \in X \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- **impaire** si $\forall x \in X \begin{cases} -x \in X \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Exemple 6

Montrer que le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

Solution :

Soient f et g impaires et définies sur $X \subset \mathbb{R}$.
Soit $x \in X$, on a $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$.
Le produit de f et g est donc une fonction paire.

Exemple 7: Une preuve par analyse-synthèse.

Démontrer le résultat ci-dessous

Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme
d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Solution :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction.
Analyse. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ paire et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ impaire telles que $f + h = \varphi$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:
— $\varphi(x) = f(x) + g(x)$
— $\varphi(-x) = f(x) - g(x)$
En sommant les deux égalités : $f(x) = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$.
En soustrayant les deux égalités : $g(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$.
On a donc montré l'unicité de la décomposition.

Synthèse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ définie par $f(x) = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On vérifie facilement que f est paire et g est impaire, et que φ est la somme des deux (on a tout fait pour).

Conclusion. φ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Définition 8

Soit $T > 0$ et $X \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** si

$$\forall x \in X \begin{cases} x + T \in X \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

Une fonction sera dite **périodique** si elle admet une certaine période $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemples. cos et sin sont 2π-périodiques. La fonction tan et π-périodique sur son ensemble de définition.
Un exemple de fonction à valeurs complexes : $t \mapsto e^{it}$ est 2π-périodique.

La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

Exemple 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction T-périodique, où T est un réel strictement positif.
Montrer que $g : x \mapsto f(-x)$ est T-périodique.
Soit $a > 0$, prouver que $h : x \mapsto f(ax)$ est T'-périodique, en précisant T'.

Solution :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x+T) = f(-x-T) = f(-x-T+T) = f(-x) = g(x)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x+\frac{T}{a}) = f(ax+T) = f(ax) = h(x)$.

Méthode : Réduction de l'intervalle d'étude.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

- Si f est T-périodique, son graphe est laissé invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$.
  Il suffit donc d'étudier une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T, le plus souvent $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. On obtient le reste du graphe par translations.
- Si f est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  Si f est impaire, il est invariant par la symétrie centrale de centre O.
  Il suffit alors d'étudier f sur $X \cap \mathbb{R}_+$. L'étude sur $X \cap \mathbb{R}_-$ vient par symétrie.

Exemple 10

Proposer un intervalle d'étude pour $f : x \mapsto \mathrm{ch}(\sin(3x))$.

Solution :

C'est une fonction paire et $\frac{\pi}{3}$ périodique.
On peut restreindre son intervalle d'étude à $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ et donc à $[0, \frac{\pi}{6}]$ par parité.

1.5 Monotonie.

Définition 11

Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Elle est dite

- **croissante** si $\forall x, x' \in X \quad x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$.
- **décroissante** si $\forall x, x' \in X \quad x \leq x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')$.
- **strictement croissante** si $\forall x, x' \in X \quad x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$.
- **strictement décroissante** si $\forall x, x' \in X \quad x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')$.

Lorsqu'une fonction a l'une de ces propriétés, elle est dite **monotone** (stricteement monotone dans les deux derniers cas).

Exemple 12

Soit f une fonction paire sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, montrer qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Solution :

Soient $x, y \in \mathbb{R}_-$ tels que $x \leq y$, alors $-x \geq -y$.
On applique f, croissante sur $\mathbb{R}_+$: $f(-x) \geq f(-y)$, or f est paire donc $f(x) \geq f(y)$.
On a bien montré que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Exemple 13: Un peu de composition.

Que dire de la composée de deux fonctions décroissantes ?

Solution :

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ décroissantes sur leurs ensembles de définition.
Soient $x, y \in X$ tels que $x \leq y$.
Alors $f(x) \geq f(y)$ donc $g(f(x)) \leq g(f(y))$ par décroissance de g.
On en conclut que $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$, la composée est croissante.

Exemple 14: Un peu de logique.

Justifier que si f est strictement monotone, alors les réciproques des implications écrites dans la définition sont vraie.
Que dire si f est seulement monotone ?

Solution :

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ strictement croissante et $x, y \in X$: $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
La contraposée de la réciproque est $x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$, c'est vrai par croissance de f.

Supposons f seulement croissante, on a $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
On peut avoir $f(2) \leq f(1)$, mais $2 \leq 1$ est faux, donc la réciproque est fausse.

1.6 Fonctions bornées.

Définition 15

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X,\ f(x) \leq M$.
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X,\ f(x) \geq m$.
- **bornée** si elle est majorée et minorée.

Proposition 16: Caractérisation des fonctions bornées.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction.

$$f \text{ est bornée} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leq \mu.$$

Preuve :

On a

$$f \text{ bornée} \iff \{f(x),\ x \in X\} \text{ est borné.}$$

Il reste alors à appliquer la caractérisation des parties bornées à cet ensemble (cours précédent).

Exemple 17: ★

Soient deux fonctions bornées f et g définies sur un même ensemble X.
Montrer que leur somme $f+g$ et leur produit fg sont bornées.

Solution :

Il existe $M, N \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x \in X,\ |f(x)| \leq M$ et $|g(x)| \leq N$.
Alors pour $x \in X$, on a $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq M+N$, la somme est bornée.
De même, $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq MN$. Le produit est borné.

Définition 18

Soit une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$. On dit que

- f admet un **maximum** en a si $\forall x \in X,\ f(x) \leq f(a)$.
- f admet un **minimum** en a si $\forall x \in X,\ f(x) \geq f(a)$.
- un **extremum** est un maximum ou un minimum.

1.7 Bijections.

La notion de bijection entre un ensemble E et un ensemble F sera étudiée ultérieurement.
On se contente ici de quelques résultats sur les bijections entre deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

Définition 19

On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est une **bijection** de I vers J si tout élément de J possède un unique antécédent dans I par f, ce qui s'écrit

$$\forall y \in J,\ \exists! x \in I \quad y = f(x).$$

Définition 20

Soit $f : I \to J$ une bijection. Tout élément $y \in J$ possède un unique antécédent dans I par f; notons-le $f^{-1}(y)$.
Ceci définit la fonction **réciproque** de f.

$$f^{-1} : \begin{cases} J & \to & I \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{cases}.$$

Méthode : L'équation reliée à la bijectivité.

Prouver la bijectivité de $f : I \to J$ revient à montre rque pour tout élément $y \in J$, l'équation

$$y = f(x),$$

a une unique solution dans I. Calculer $f^{-1}(y)$ c'est exprimer cette solution x en fonction de y.

Exemple 21

Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$ et expliciter sa réciproque.

Solution :

Soit $y \in [1, +\infty[$, on cherche $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sqrt{1+x^2} = y$.
On a $1+x^2 = y^2$ donc $x^2 = y^2-1$ et $x = \sqrt{y^2-1}$ car $x \in \mathbb{R}_+$.
L'équation a donc une unique solution. C'est bien une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$.
Sa réciproque est $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{y^2-1}$.

Proposition 22: découle de la définition de f^{-1}

Soit $f : I \to J$ une bijection et $f^{-1} : J \to I$ sa réciproque. On a

$$\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{ et } \quad \forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Proposition 23

Soit $f : I \to J$ une bijection.
Le graphe de $f^{-1} : J \to I$ est le symétrique de celui de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Preuve :

Notons C_f et $C_{f^{-1}}$ les graphes de f et f^{-1}. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x,y) \in C_f \iff x \in I \text{ et } y = f(x) \iff y \in J \text{ et } x = f^{-1}(y) \iff (y,x) \in C_{f^{-1}}.$$

Proposition 24

Soit $f : I \to J$ une bijection.

1. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I, alors f^{-1} est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur J).
2. Si f est impaire, alors $f^{-1} : J \to I$ l'est aussi.

Preuve :

$\boxed{1.}$ Supposons f strictement croissante sur I, soient $y, y' \in J$. Par contraposée, supposons $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$.
Appliquons f croissante: $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y'))$ alors $y \geq y'$.

$\boxed{2.}$ Supposons f impaire sur I et soit $y \in J$. On note $x = f^{-1}(y)$. Alors:

$$-y = -f(x) = f(-x) \quad \text{donc} \quad -y \in J.$$

Alors $f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$.
On a f^{-1} bien impaire sur J.

2 Continuité et dérivabilité.

2.1 Définitions.

Définition 25

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. La fonction f est **continue** en a si

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a).$$

Si f est continue en tout point de I, elle est dite **continue sur** I.

Définition 26

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. La fonction f est **dérivable** en a si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \neq a)$$

a une limite finie lorsque x tend vers a. On note alors $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Si f est dérivable en tout point de I, elle est dite **dérivable** sur I.
La fonction $f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$, est alors appelée **dérivée** de f.

Exemple 27

Continuité et dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Solution :

• Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

• Montrons que f n'est pas dérivable en 0. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

Tableau des dérivées usuelles : (X est l'ensemble où la fonction f est dérivable)

$f(x)$	$f'(x)$	X
$x^n (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^p (p \in \mathbb{Z})$	px^{p-1}	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^a (a \in \mathbb{R})$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

$f(x)$	$f'(x)$	X
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}x$	$\begin{cases} 1-\mathrm{th}^2 x \\ \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \end{cases}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\begin{cases} 1+\tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$	$D_{\tan}$

Proposition 28

Si une fonction est dérivable, alors elle est continue, la réciproque est fausse.

Preuve :

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et supposée dérivable en $a \in I$. Pour $x \in I \setminus \{a\}$, on a

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, donc f est continue en a.

2.2 Continuité et opérations.

Proposition 29

Si f et g sont continues sur I, alors leur somme et leur produit sont continues sur I.
Si f et g sont continues sur I et que g ne s'annule pas sur I, leur quotient est continu sur I.

Proposition 30

Soient deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$.
Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I.

2.3 Dérivabilité et opérations.

La plupart des résultats théoriques seront démontrés dans le cours dédié à la dérivabilité.

Proposition 31: Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Soient deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{K}$, dérivables sur l'intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- La fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, la fonction f/g est dérivable sur I et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Théorème 32: Dérivée d'une composée. ★

Soient deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$.
Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(g \circ f') = f' \cdot (g' \circ f)} \quad \text{i.e.} \quad \forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Exemple 33

Dériver les fonctions $A : x \mapsto \cos(\ln(x))$ et $B : x \mapsto (\mathrm{ch}(x))^\pi$.

Solution :

• On a ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et cos dérivable sur $\mathbb{R}$, alors A est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$A'(x) = \ln'(x)\cos'(\ln(x)) = \frac{1}{x}\sin(\ln(x)).$$

• Notons $u : x \mapsto x^\pi$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a ch dérivable sur $\mathbb{R}$, alors B est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$B'(x) = ch'(x)u'(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{sh}(x)(\pi \mathrm{ch}(x)^{\pi-1}).$$

Exemple 34

Soit $C : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Où est-elle définie ? Où est-elle dérivable ? Donner sa dérivée.

Solution :

Elle est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$.
La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u : x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
C'est est dérivable par composée sur $]-1,1[$. Sa dérivée est pour $x \in]-1,1[$:

$$C'(x) = u'(x)\frac{1}{2u(x)} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Corrolaire 35: Cas particuliers courants.

Soit $u : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, alors

- la fonction e^u est dérivable sur I et $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.
- u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Si de surcroît

- $u : I \to \mathbb{R}^*$, alors $1/u$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$.
- $u : I \to \mathbb{R}_+^*$, alos pour tout réel a, u^a est dérivable sur I et $\boxed{(u^a)' = au'u^{a-1}}$.

  Notamment, $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.
- $u : I \to \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$.

Remarque. À quoi sert de regarder des cas particuliers puisqu'on a une formule simple dans le cas général ? La réponse est à chercher du côté du calcul de primitive : nous aurons besoin de savoir « dériver à l'envers » : il est donc utile de bien connaître la forme des dérivées de composées dans les cas courants.

2.4 Dérivée d'une réciproque.

Théorème 36: Dérivée d'une réciproque.

Soit une bijection $f : I \to J$ dérivable sur I.
Sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J ssi f' ne s'annule pas sur I. On a alors

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}} \quad \text{i.e.} \quad \forall y \in J \quad (f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemple 37

Appliquer le théorème pour retrouver le résultat connu sur la dérivée de ln.

Solution :

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc par théorème, sa réciproque ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

2.5 Dérivées d'ordre supérieur.

Définition 38

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur I telle que $f' : I \to \mathbb{K}$ est elle-même dérivable sur I.
On appelle **dérivée seconde de** f et on note f'' la fonction dérivée de f'.

Définition 39

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On peut définir par récurrence une dérivée de f à l'ordre n, notée $f^{(n)}$.

- On convient que $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est bien définie et dérivable sur I, alors $\boxed{f^{(n+1)} = (f^{(n)})'}$.

Exemple 40: ★

Dérivées successives de $f : x \mapsto x^p$ $(p \in \mathbb{N})$ et de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution :

Elles sont dérivables, de même pour toutes leurs dérivées successives. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $f'(x) = px^{p-1}$, $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ ... $f^{(n)}(x) = p(p-1)...(p-(n-1))x^{p-n}$.
Alors si $p < n$, alors $f^{(n)(x)=0}$, sinon, $f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln^0(x) = \ln(x)$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$... $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

3 Résultats importants du cours d'analyse.

Les théorèmes présentés dans cette section étaient connus en Terminale, et seront démontrés plus tard dans l'année dans un cours d'analyse où la notion de limite aura été définie rigoureusement.

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 41

Soient deux réels $a \leq b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a,b] \quad y = f(c)$$

Autrement dit, toutre valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ possède (au moins) un antécédent par f. Comme on le voit dans l'exemple ci-dessous, il n'y a pas forcément unicité de l'antécédent.

Le TVI pourra donc être utilisé pour prouver l'existence d'une solution à une équation. Ceci est illustré dans le corollaire suivant, qui revient à prouver l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = 0$.

Corrolaire 42: Changement de signe d'une fonction continue.

Si une fonction continue sur un intervalle y change de signe, alors elle s'annule sur cet intervalle.

Voici maintenant un corollaire où l'hypothèse de stricte monotonie est ajoutée, il pourra être utilisé pour prouver l'existence **et** l'unicité d'une solution à une équation.

Corrolaire 43: TVI strictement monotone.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur $[a,b]$. Pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$

$$\exists! c \in [a,b] \quad y = f(c).$$

Exemple 44

Soient a et b deux nombres réels, on considère l'équation

$$x^3 + ax + b = 0.$$

1. Démontrer que l'équation possède une solution et ce quelles que soient les valeurs de a et b.
2. Démontrer l'unicité de la solution dans le cas où a est positif.

Solution :

$\boxed{1.}$ Posons $f : x \mapsto x^3 + ax + b$ polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$.
Elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, elle change alors de signe, donc s'annule par TVI.

$\boxed{2.}$ Supposons $a \geq 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 3x^2 + a > 0$.
Ainsi, $\forall x \in]-\infty, 0[,\ f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, de même sur $]0, +\infty[$.
Bilan: f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Par TVI, $\exists! c \in \mathbb{R} \mid f(c) = 0$.

Théorème 45: Théorème de la bijection continue.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est **strictement monotone** et **continue** sur I, alors elle réalise une bijection de I dans $f(I)$.

Précisons que la notation $f(I)$ désigne l'ensemble des images des éléments de I par f.

$$f(I) = \{f(x), x \in I\} = \{y \in J \mid \exists x \in I \ : \ y = f(x)\}.$$

De surcroît,
- L'ensemble $f(I)$ est un intervalle.
- Sur cet intervalle, f^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que f.
- Sur cet intervalle, la réciproque f^{-1} est continue.

Exemple 46: ★

1. Justifier que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Expliciter sa réciproque, puis calculer la dérivée de cette réciproque.
3. Retrouver le dernier résultat en appliquant le théorème de dérivation d'une réciproque.

Solution :

$\boxed{1.}$ sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{sh}(R) = \mathbb{R}$.
$\boxed{2.}$ Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on pose l'équation $y = \mathrm{sh}(x)$:

$$\begin{aligned} y = \mathrm{sh}(x) &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^x - 2y - e^{-x} = 0 \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x \text{ racine de } X^2 - 2yX - 1 = 0 \iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}). \end{aligned}$$

La réciproque de sh est donc argsh: $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
En dérivant, on trouve pour $x \in \mathbb{R}$ que $\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
$\boxed{3.}$ sh est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{argsh} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3.2 Variations des fonctions dérivables.

Théorème 47: Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
- f est croissante sur I ssi f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I ssi f' est négative sur I.
- f est constante sur I ssi f' est nulle sur I.

Proposition 48: Caractérisation des fonctions strictement motones parmi les fonctions dérivables.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
La fonction f est strictement croissante sur I ssi f' est positive (ou nulle) sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ inclus dans I avec $a < b$.

Corrolaire 49: Dans la pratique.

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
- Si f' est strictement positive sur I, alors f y est strictement croissante. Réciproque fausse.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f y est strictement décroissante. Réciproque fausse.

L'implication demeure vraie si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I.

Exemple 50

Donner un exemple de fonction...
1. dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée s'annule.
2. dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et dont la dérivée est négative sans que la fonction soit décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Solution :

$\boxed{1.}$ La fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante, sa dérivée s'annule en 0.

$\boxed{2.}$ La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée négative, mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Méthode : Conseils pour l'étude d'une fonction

- Déterminer son ensemble de définition.
- Détecter une éventuelle parité/imparité/périodicité et réduire en conséquence le domaine d'étude.
- Pour l'étude des variations, on ne se rue pas sur la dérivation si la fonction est une somme ou une composée de fonction croissantes, par exemple !
- Dans le cas où on dérive, on justifie sur quel ensemble et pourquoi on peut le faire, soigneusement.
- Calcul de la dérivée. Puisque c'est son signe qui nous intéressera, on cherche à la **factoriser** le plus possible!
- Étude du signe de la dérivée : il suffira la plupart du temps de résoude l'**inéquation** $f'(x) \geq 0$.
- Tableau de signe pour la dérivée, de variations pour la fonction.
- Calcul des limites aux bords. Si on détecte une incohérence, il est encore temps de se relire !
- Esquisser un graphe résumant l'étude. Ne pas hésiter à y souligner des valeurs, ou des tangentes notables.

4 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.

Solution :

On a $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x-2 \in \mathbb{R} \\ f(x-2) = f(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} x+3 \in \mathbb{R} \\ f(x+3) = f(x) \end{cases}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x-2+3 \in \mathbb{R} \\ f(x-2+3) = f(x-2) = f(x) \end{cases}$

Exercice 2: ♦♦♦

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x.$$

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et f une solution du problème.
On remarque que $f : x \mapsto x$ est solution du problème.
• Supposons $f(x) > x$, on a : $f(f(x)) > f(x)$ par croissance de f.
Or $f(f(x)) = x$ donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.

• Supposons $f(x) < x$, on a : $f(f(x)) < f(x)$ par croissance de f.
Or $f(f(x)) = x$ donc $x < f(x)$, ce qui est absurde.

Ainsi, la seule fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ solution est $f : x \mapsto x$.

Exercice 3: ⧫◊◊

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée.

$$A : x \mapsto x^{\pi}, \quad B : x \mapsto \pi^{x}, \quad C : x \mapsto \cos(5x), \quad D : x \mapsto \operatorname{th}(\operatorname{ch}(x)),$$
$$E : x \mapsto \ln\left(1+x^3\right) n \quad F : x \mapsto \cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right), \quad G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}, \quad H : x \mapsto \sin|x+1|.$$

Solution :

- $A' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi x^{\pi-1} \end{cases}$
- $B' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\pi)\pi^{x} \end{cases}$
- $C' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -5\sin(5x) \end{cases}$
- $D' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{ch}(x))} \end{cases}$
- $E' : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x^2}{1+x^3} \end{cases}$
- $F' : \begin{cases}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}} \end{cases}$
- $G' : x \mapsto -\frac{3}{2}(3x-1)^{3/2}$
- $H'_- : \begin{cases}]-\infty,-1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\cos(-x-1) \end{cases}$
- $H'_+ : \begin{cases}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x+1) \end{cases}$

Exercice 4: ⧫◊◊

Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x\ln(x)}$$

Solution :

On a $f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x)(\ln(x)+2)e^{x\ln^2(x)} \end{cases}$.

Son tableau de variations est donc :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	↗	e^{4/e^2}	↘	1	↗	$+\infty$

Exercice 5: ⧫⧫◊

1. Démontrer que
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
2. À l'aide du théorème des gendarmes, calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
3. Retrouver ce résultat en faisant apparaître un taux d'accroissement.

Solution :

$\boxed{1.}$ Posons :

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \qquad g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

Elles sont dérivables et tout et tout :

$$f' : x \mapsto -\frac{x}{(1+x)^2} \qquad g' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

L'inégalité est donc vérifiée car ces fonctions prennent des valeurs négatives.

$\boxed{2.}$ Soit $x \in]-1,+\infty[$. On a :

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Et :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$\boxed{3.}$ On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Exercice 6: ♦♦◊

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

Solution :

Posons :

$$f : x \mapsto x - \sin x \qquad\qquad g : x \mapsto x - \sin x - \frac{x^3}{6}$$

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$:

$$f' : x \mapsto 1 - \cos x \qquad\qquad g' : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$$

La première inégalité est triviale car $\cos x \leq 1$, ainsi $x - \sin x \geq 0$.
On a :

$$g'' : x \mapsto \sin x - x$$

Et donc :

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$-$	
$g'(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$
g	0	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, g prend des valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+$, donc : $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.

Exercice 7: ♦♦◊

Faire une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

Solution :

⊚ Soit $x \in]-1, 1[$.
On a :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad\qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

⊚ Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
On a :

$$f : x \mapsto \ln\left(-\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad\qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Pour les limites on a factorisé par x :

$$f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right|\right)$$

Exercice 8: ♦♦◊

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in]0, 1[\qquad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Solution :

Soit $x \in]0, 1[$.
On a :

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x\ln x}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)}$$

Posons :

$$f : x \mapsto e^{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)} \qquad\qquad f' : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)e^{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)}$$

x	0		0.5		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	‖ 1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1 ‖

La fonction est donc toujours supérieur à $\frac{1}{2}$ sur $]0, 1[$.

Exercice 9: ♦♦♢

. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sur $[0,+\infty[$.
2. Prouver que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in [0,+\infty[$. On a :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow 1$

$\boxed{2.}$ Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

On applique f, fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui ne change pas les inégalités:

$$\begin{aligned}\frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$

Exercice 10: ♦♦♢

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.
1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Étudier ses variations et donner le tableau correspondant.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x \end{cases}$ On a : $g' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{cases}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
g	$+\infty \searrow 0$

f donc définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$-f(x) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x^2+1-x^2}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = f(-x)$$

$\boxed{3.}$ On a $f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty \searrow -\infty$

Exercice 11: ♦♦♢

Notons a le nombre

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

1. Montrer que $a^3 = 6a + 40$.
2. En déduire la valeur de a.

Solution :

$\boxed{1.}$

$$\begin{aligned}a^3 &= 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2(20-14\sqrt{2})} + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})^2} \\ &= 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(400-392)} + 3\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})(400-392)} \\ &= 40 + 6\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + 6\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\ &= 6a + 40\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ On a :

$$a^3 - 6a - 40 = 0 \iff (a-4)(a^2+4a+10) = 0 \iff a = 4$$

Exercice 12: ♦◇◇

onsidérons la fonction

$$f : \begin{cases}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \end{cases}.$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de f. Peut-on écrire en conclusion que $f^{-1} = f$?

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in]1,+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \iff & y = \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \\ \iff & \ln(y) = -\frac{1}{\ln(x)} \\ \iff & -\frac{1}{\ln(y)} = \ln(x) \\ \iff & x = \exp(-\frac{1}{\ln(y)}) \end{aligned}$$

L'équation a une unique solution, f réalise donc une bijection de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{2.}$ On a :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to]1,+\infty[\\ x \mapsto \exp(-\frac{1}{\ln(x)}) \end{cases}$$

$f \neq f^{-1}$ car leurs domaines de définition sont différents.

Exercice 13: ♦♦♦

1. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque, qu'on notera argth.
2. De deux façons différentes, montrer que argth est dérivable sur son intervalle de définition et calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argth}\left(\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right) = x + \ln\sqrt{2}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned} & y = \operatorname{th}(x) \\ \iff & y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \iff & y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ \iff & e^{2x}(1-y) = y+1 \\ \iff & e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \\ \iff & x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) \end{aligned}$$

L'équation a une unique solution, th réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

Sa réciproque est argth : $\begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \end{cases}$

$\boxed{2.}$ On peut montrer que argth est dérivable sur $]-1,1[$ par le théorème de dérivée des réciproques ou en dérivant $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ comme composée de fonctions dérivables.
On retrouve dans les deux cas:

$$\operatorname{argth}' : \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \end{cases}$$

$\boxed{3.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{argth}\left(\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}+1}{1-\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{4+4\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}}{\frac{2-2\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+2\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)}\right) + \frac{1}{2}\ln(2) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}\right) + \ln(\sqrt{2}) \\ &= x + \ln\sqrt{2} \end{aligned}$$