

# Ensembles et applications

## Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

---

### Exercices.

Exercice 5.1 . . . . .	2
Exercice 5.2 . . . . .	2
Exercice 5.3 . . . . .	3
Exercice 5.4 . . . . .	3

---

**Exercice 5.1 [◆◆◆]**

Soient  $A, B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Établir que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad \text{et} \quad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

On a :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \setminus B)} \\ &= A \cap \overline{(\overline{A} \cup B)} \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

□

**Exercice 5.2 [◆◆◆]**

Soient  $A, B, C, D$  quatre parties d'un ensemble  $E$ , telles que

$$E = A \cup B \cup C, \quad A \cap D \subset B, \quad B \cap D \subset C, \quad C \cap D \subset A.$$

Montrer que  $D \subset A \cap B \cap C$ .

Soit  $x \in D$ , on sait que  $x \in E$ . Alors  $x \in A$  ou  $x \in B$  ou  $x \in C$ .

⊙ Si  $x \in A$ , alors  $x \in A \cap D$ , donc  $x \in B$ .

⊙ Si  $x \in B$ , alors  $x \in B \cap D$ , donc  $x \in C$ .

⊙ Si  $x \in C$ , alors  $x \in C \cap D$ , donc  $x \in A$ .

On en déduit que  $x \in A \cap B \cap C$ .

Ainsi,  $D \subset A \cap B \cap C$ .

□

**Exercice 5.3 [◆◆◇]**

Démontrer que

$$\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\}.$$

On note  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\}$

⊙ Montrons que  $\mathbb{R} \subset A$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

○ Si  $x \leq 0$ , On pose  $a = 1$  et  $b = x - 1$ , ainsi  $x = a + b$  donc  $x \in A$ .

○ Si  $x > 0$ , On pose  $a = x + 1$  et  $b = -1$ , ainsi  $x = a + b$  donc  $x \in A$ .

Dans tous les cas  $x \in A$ , on en conclut que  $\mathbb{R} \subset A$ .

⊙ Montrons que  $A \subset \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in A$ , alors il existe  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b \in \mathbb{R}_-^*$  tels que  $x = a + b$ .

Or  $a + b \in \mathbb{R}$ , donc  $x \in \mathbb{R}$ . On en conclut que  $A \subset \mathbb{R}$ .

□

**Exercice 5.4 [◆◆◇]**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  parties de  $E$  telles que

$$A_n = E \quad \text{et} \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n.$$

On pose  $B_1 = A_1$  et pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on pose  $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ .

Prouver que  $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un recouvrement disjoint de  $E$ .

Soit  $x \in E$ . Alors  $x \in A_n$ . Il existe alors  $k$  le plus petit entier tel que  $x \in A_k$ . Ainsi,  $x \in B_k$  puisque  $x \in A_k \wedge x \notin A_{k-1}$  par définition de  $k$ .

On en déduit que tout élément de  $E$  appartient à au moins un  $(B_k)$ .

Montrons maintenant que tout élément de  $E$  appartient aussi au plus à un  $B_k$ .

Soit  $x \in E$ . Supposons qu'il existe  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i < j$  et  $x \in B_i$  et  $x \in B_j$ .

Or, puisque  $x \in B_j$  et  $i < j$ ,  $x \notin A_i$ . De plus, puisque  $x \in B_i$ ,  $x \in A_i$  ce qui est absurde.

Ainsi, tout élément de  $E$  appartient au plus à un  $(B_k)$ .

$(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  est donc un recouvrement disjoint de  $E$ .

□