

Chapitre 38

Espérance et variance.

Sommaire.

1	Espérance.	1
1.1	Définition et exemples.	1
1.2	Propriétés de l'espérance.	2
1.3	Espérance d'un produit et indépendance.	5
2	Variance.	5
2.1	Définition et exemples.	5

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Espérance.

1.1 Définition et exemples.

Définition 1

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{K} définie sur Ω . On appelle **espérance** de X et on note $E(X)$ le nombre

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x.$$

Interprétation

On réalise un certain nombre de fois un expérience conduisant à un résultat numérique : un nombre dans l'ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons f_i la fréquence à laquelle on a obtenu x_i . La valeur moyenne obtenue lors de cette série d'expériences vaut

$$\sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} f_i x_i.$$

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, ..., x_n\}$ et qu'on note $p_i := P(X = x_i)$, l'espérance de X s'écrit

$$\sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} p_i x_i.$$

Dans cette moyenne pondérée, les probabilités ont remplacé les fréquences. Or, on se souvient que le nombre $P(X = x_i)$ est interprété comme la fréquence a priori de l'événement $(X = x_i)$. Ainsi, le nombre $E(X)$ peut être interprété comme la **valeur moyenne** prise par X a priori. SI X est comme dans l'exemple un gain à un jeu, $E(X)$ représente le gain moyen a priori, ce que l'on peut espérer gagner en jouant au jeu. On dira aussi que c'est un indicateur de position : $E(X)$ est la position moyenne de la variable X .

Exemple 2

On jette un dé équilibré, si le résultat est 1, 2 ou 3, on ne gagne rien. Si le résultat est 4 ou 5, on gagne dix euros. Si le résultat est 6, on gagne 100 euros. On note X le gain à ce jeu. Considérons que X est une variable aléatoire dans un espace probabilisé (Ω, P) . Calculer $E(X)$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x \\ &= P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 10) \cdot 10 + P(X = 100) \cdot 100 \\ &= \frac{2}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 100 = \frac{120}{6} \\ &= 20 \end{aligned}$$

Interprétation: À ce jeu, on gagne en moyenne 20 euros.

Proposition 3: Une évidence.

Si deux variables aléatoires ont la même loi, alors elles ont la même espérance.

Preuve :

Lire la définition de l'espérance: elle ne dépend **que** de la loi de X , pas de (Ω, P) .

Proposition 4: Éspérance des lois usuelles.

Soit X, Y, Z des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, P) , $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. **Variable constante.** Si X est la variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{K}$, alors $E(X) = a$.
2. **Loi de Bernoulli.** Si $Y \sim \mathcal{B}(p)$, $E(Y) = p$. En particulier, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $E(\mathbf{1}_A) = P(A)$.
3. **Loi binomiale.** Si $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$, $E(Z) = np$.

Preuve :

1. $X(\Omega) = \{a\}$ donc $P(X = a) = 1$, d'où $E(X) = P(X = a)a = a$.
2. $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Y = 1) = p$, $P(Y = 0) = 1 - p$ d'où $E(Y) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = p$.
3. $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Alors :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1 - p)^{n-1-j} \\ &= np \end{aligned}$$

Exemple 5: Le pari de Pascal.

Dans son texte célèbre dit du "pari", (*Pensées, fragment 397*) Pascal met en scène un dialogue avec un athée, qu'il veut convaincre de croire en Dieu. Celui qui croit *gage* son énergie, son temps, parfois sa vie entière, et au-dessus de lui *se joue un jeu [...] où il arrivera croix ou pile*, c'est-à-dire qu'à la fin, *Dieu est, ou il n'est pas*. S'il est, celui qui a cru sortira gagnant mais... il sera perdant si Dieu n'existe pas ! Et c'est bien ce qui inquiète l'interlocuteur fictif de Pascal, qui a peur de *gager trop*, de ne pas récupérer sa mise... Savoir si l'on gagnera ou pas à ce jeu revient à savoir si Dieu existe ou pas, et Pascal nous dit que *la raison n'y peut rien déterminer* : pour celui qui croit, il y a *pareil hasard de gain et de perte*.

L'argument de Pascal en faveur de la croyance est le suivant : si on gagne, on gagne l'infini, si on perd, on perd peut-être beaucoup mais on perd une quantité finie (finitude de l'homme...) En moyenne, on gagne l'infini : son raisonnement est un calcul d'espérance ! N'oublions pas que Pascal était mathématicien en plus d'être philosophe, et qu'il s'intéressait notamment au hasard. Posons le calcul de Pascal, en notant X ce que gagne le croyant. Le gain X vaut $+\infty$ si Dieu existe, la perte est finie s'il n'existe pas : disons qu'alors $X = -a$, où a est une quantité finie. Voici ce que le croyant gagne en moyenne :

$$E(X) = \frac{1}{2}(+\infty) + \frac{1}{2}(-a) = +\infty.$$

Notez que le choix de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ comme distribution de probabilités n'a aucune importance, tant que l'on évite une probabilité nulle. Dans *Ma nuit chez Maud*, d'Éric Rohmer, Antoine Vitez (Vidal dans le film) en choisit une autre lorsqu'il fait le pari que l'Histoire a un sens. Jean- Louis Trintignant (Jean-Louis dans le film) lui parle alors d'espérance mathématique. L'extrait est disponible sur Youtube, mais on n'hésitera pas à regarder tout le film !

1.2 Propriétés de l'espérance.

Lemme 6

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, P) et à valeurs dans \mathbb{K} . Alors,

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega).$$

Preuve :

L'ensemble $X(\Omega)$ est fini puisque Ω l'est.

Un événement s'écrit comme la «réunion des singletons». Ainsi pour x fixé dans $X(\Omega)$, on a

$$(X = x) = \bigcup_{\omega \in (X=x)} \{\omega\}.$$

La réunion précédente est bien sûr envisagée comme une réunion disjointe, ainsi

$$P(X = x) = \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}).$$

Réinjectons :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\})x = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\})X(\omega).$$

Or, $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, une partition de Ω . La double somme précédente est une somme sur Ω . On a bien

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega).$$

Proposition 7: Espérance et inégalités.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs *réelles* sur (Ω, P) . Alors,

1. Si $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$ (positivité).
2. Si $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$, et $E(X) = 0$, alors $P(X = 0) = 1$ (cas d'égalité).
3. Si $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $E(X) \leq E(Y)$ (croissance).
4. $|E(X)| \leq E(|X|)$ (inégalité triangulaire).

Preuve :

1. Supposons que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Alors :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega(P)} P(\{\omega\})X(\omega) \geq 0 \quad \text{car somme de termes positifs.}$$

2. Supposons que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et $E(X) = 0$. Alors :

$$\sum_{\omega \in \Omega(P)} P(\{\omega\})X(\omega) = 0$$

Alors $\forall \omega \in \Omega \setminus (X = 0), P(\{\omega\})X(\omega) = 0$ et $X(\omega) \neq 0$ donc $P(\{\omega\}) = 0$.

Par conséquent, $P(X \neq 0) = 0$, donc $P(X = 0) = 1$.

3. Supposons que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors :

$$E(Y) - E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})(Y(\omega) - X(\omega)) \geq 0.$$

Donc $E(X) \leq E(Y)$.

4. Ici, on autorise $X : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Alors :

$$\left| E(X) \right| = \left| \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega) \right| \leq \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})|X(\omega)| = E(|X|).$$

Théorème 8: L'espérance est linéaire.

Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P) et à valeurs dans \mathbb{K} . Alors,

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Notamment, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu$.

Dans le cas de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n et n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i E(X_i).$$

Preuve :

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} E(\lambda X + \mu) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})(\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega)) \\ &= \lambda \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \mu \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})Y(\omega) \\ &= \lambda E(X) + \mu E(Y). \end{aligned}$$

Proposition 9

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, P) et à valeurs dans \mathbb{K} . La variable

$$\bar{X} = X - E(X)$$

est appelée variable aléatoire centrée. On a $E(\bar{X}) = 0$.

Preuve :

On a :

$$E(\bar{X}) = E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0.$$

Théorème 10: Formule du transfert.

Soit une v.a. $X : \Omega \rightarrow E$ où E est un ensemble sur lequel est défini une application $f : E \rightarrow \mathbb{K}$. Alors:

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x).$$

Remarque: On n’a pas besoin de connaître la loi de $f(X)$ pour calculer $E(f(X))$.

Preuve :

On a:

$$\begin{aligned} E(f(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) \underbrace{f(X(\omega))}_{=x} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \underbrace{\sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\})}_{=P(X=x)} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x) \end{aligned}$$

Exemple 11: Un calcul simple.

Calcul de $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Solution :

On applique la formule du transfert avec $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$, alors :

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^n P(X = k) f(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{1}{k+1}$$

Or, $\binom{n}{k}(n+1) = \binom{n+1}{k+1}(k+1)$ donc $\binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \frac{1}{n+1}$ et :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j (1-p)^{n+1-j} \\ &= \left(\frac{1}{p(n+1)} (1 - (1-p)^{n+1}) \right) \end{aligned}$$

Exemple 12: Appliquer la formule de transfert à un couple.

Calcul de $E[(2^X - 1)2^{XY}]$ où X et Y sont deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
On pourra appliquer la formule de transfert au couple (X, Y) dont on connaît la loi conjointe.

1.3 Espérance d’un produit et indépendance.

Théorème 13

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P) , et à valeurs dans \mathbb{K} . Si X et Y sont **indépendantes**, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Plus généralement, si $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille de variables aléatoires **indépendantes**,

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i).$$

Preuve :

On applique la formule de transfert à $f : (x, y) \mapsto x \times y$.

$$E(XY) = E[f(X, Y)] = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P((X, Y) = (x, y)) f(x, y).$$

Or, pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x)P(Y = y)xy \\ &= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x \right) \times \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y)y \right) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Exemple 14

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires sur (Ω, P) , indépendantes et de même loi de Rademacher, donnée par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad X_k(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Pour $t \in \mathbb{R}$, démontrer que $E(\cos(tS_n)) = \cos^n(t)$.

Solution :

On a $\cos(x) = \operatorname{Re} e^{ix}$.

$$\begin{aligned} E(\cos(tS_n)) &= E[\operatorname{Re}(e^{itS_n})] \\ &= \operatorname{Re}(E(e^{itS_n})) \\ &= \operatorname{Re}\left(E\left(e^{it\sum_{j=1}^n X_j}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(E\left(\prod_{j=1}^n e^{itX_j}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\prod_{j=1}^n E(e^{itX_j})\right) \end{aligned}$$

Or $E(e^{itX_j}) = P(X_j = 1)e^{it} + P(X_j = -1)e^{-it} = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} = \cos t$.
Alors $E[\cos(tS_n)] = (\cos t)^n$.

2 Variance.

2.1 Définition et exemples.

Définition 15

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω .
On appelle **variance** de X et on note $V(X)$ le réel

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

On appelle **écart-type**, parfois noté $\sigma(X)$, le réel $\sqrt{V(X)}$.

Interprétation

L’expression de $V(X)$ donne **l’écart quadratique moyen** de la variable X , par rapport à sa moyenne.

Plus la variance est grande, plus les valeurs prises par X sont «loin» (en moyenne) de $E(X)$.

La variance et l’écart-type sont des indicateurs de dispersion. Il aurait pu sembler plus naturel de considérer la quantité $E(|X - E(X)|)$, mais on verra que le carré qui se trouve dans la définition est bien mieux adapté à la linéarité de l’espérance (voir plus loin le travail sur les sommes de v.a.).

Proposition 16: La variance est quadratique.

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. On a, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Preuve :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E[(aX + b - E(aX + b))^2] \\ &= E[(aX + b - (aE(X) + b))^2] \\ &= E[a^2(X - E(X))^2] \\ &= a^2E((X - E(X))^2) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

Proposition 17

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini telle que $\sigma(X) > 0$.

La variable aléatoire $\frac{1}{\sigma(X)}X$ est de variance 1 : elle est dite **réduite**.

La variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma_X}$.

Preuve :

$$\begin{aligned} \odot E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) &= \frac{1}{\sigma_x} (E(X) - E(X)) = 0. \\ \odot V\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) &= \frac{1}{\sigma_X^2} V(X) = 1 \end{aligned}$$

Proposition 18: Lien avec le moment d'ordre 2.

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. On a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le nombre $E(X^k)$ est appelé **moment** d'ordre k de la variable X .

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2E(X) + (E(X))^2] \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

Proposition 19: Une évidence.

Si deux variables aléatoires ont la même loi, elles ont la même variance.

Proposition 20: Variance des lois usuelles.

Soit X, Y, Z des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, P) , $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. **Variable constante.** Si X est la variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{K}$, alors $V(X) = 0$.
2. **Loi de Bernoulli.** Si $Y \sim \mathcal{B}(p)$, $V(Y) = p(1 - p)$.
3. **Loi binomiale.** Si $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$, $V(Z) = np(1 - p)$.

Preuve :

1. Si X est constante égale à $a \in \mathbb{R}$, alors $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E[(a - a)^2] = 0$.
2. Si $Y \sim \mathcal{B}(p)$, alors :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = p - p^2 = p(1 - p) \quad \text{car } Y^2 = Y.$$

3. Si $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$, on introduit Z_1, \dots, Z_n indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, on note \tilde{Z} la somme de ces variables. On a $\tilde{Z} \sim \mathcal{B}(n, p) \sim Z$ donc $V(\tilde{Z}) = V(Z)$. Ainsi :

$$V(Z) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = np(1 - p).$$

On a utilisé la proposition 26.

Définition 21

On appelle **covariance** de deux variables aléatoires X et Y , et on note $\text{cov}(X, Y)$ le nombre

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Lorsque ce nombre est nul, on dit qu'elles sont **décorrélées**.

Interprétation

Lorsque X et Y ont une covariance positive, alors le produit $(X - E(X))(Y - E(Y))$ est positif en moyenne. Cela signifie que lorsque X est supérieure à sa moyenne, Y a tendance à l'être aussi.

Lorsque X et Y ont une covariance négative, alors le produit $(X - E(X))(Y - E(Y))$ est négatif en moyenne. Cela signifie que lorsque X est supérieure à sa moyenne, Y a tendance à être inférieure à la sienne.

Proposition 22

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, leur covariance s'exprime comme

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorréllées :

$$X \perp Y \implies \text{cov}(X, Y) = 0.$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E[XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - \cancel{E(Y)E(X)} + \cancel{E(X)E(Y)} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= 0 \quad \text{car } E(XY) = E(X)E(Y) \text{ si } X \perp Y. \end{aligned}$$

Donc si X et Y indépendantes, elles sont décorréllées.

Exemple 23: Décorrélées mais pas indépendantes.

Soient X et Y deux v.a. définies sur un espace probabilisé, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Vérifier que U et V sont décorréllées puis justifier qu'elles ne sont pas indépendantes.

Solution :

On a $E(V) = E(X) - E(Y) = 0$ car mêmes lois.
On a $E(UV) = E(X^2) - E(Y^2) = 0$ car mêmes lois donc même moment d'ordre 2.
Donc $\text{cov}(U, V) = 0$.
On a $P(U = 1, V = 0) = 0$ car $(V = 0) \subset (U \text{ pair})$.
On a $P(U = 1) = 2p(1 - p)$ et $P(V = 0) = (1 - p)^2 + p^2$.
Donc $P(U = 1)P(V = 0) \neq P(U = 1, V = 0)$, elles ne sont pas indépendantes.

Exemple 24

Proposition 25

Proposition 26