Chapitre 3

Fonctions usuelles.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Fonction exponentielle.

Définition 1

La fonction **exponentielle** est l'unique fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x).$$

Proposition 2: Faits.

1. La fonction exp prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$.
2. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Elle a une tangente en 0 d'équation $y = x + 1$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geq x + 1.$$

Théorème 3: Propriété de morphisme de l'exponentielle.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)},$$

Il découle de cette propriété que

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(-x) = \exp(x)^{-1}$,
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z},\ \exp(px) = \exp(x)^p$.

Preuve :

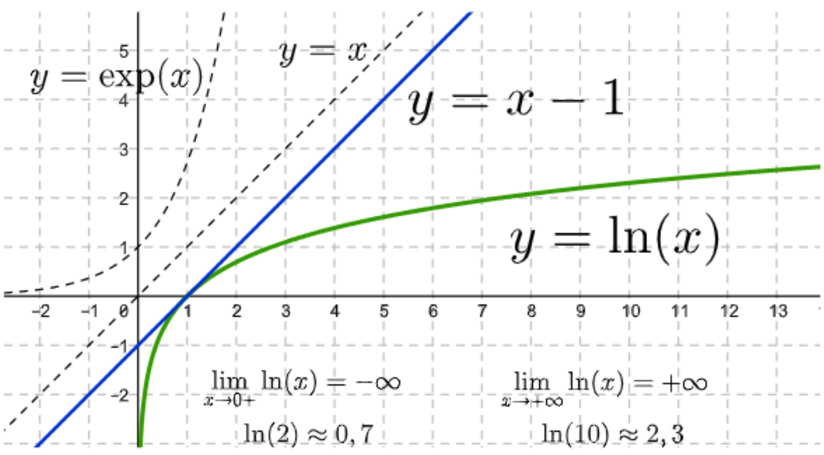
Ça ne sera démontré qu'en fin d'année.....

2 Logarithme népérien.

La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. Plus précisément, tout élément $y \in \mathbb{R}_+^*$ possède un unique antécédent par exp dans $\mathbb{R}$, que l'on va noter $\ln(y)$.

Définition 4

On appelle **logarithme népérien** la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, réciproque de l'exponentielle.



La réciprocité de ln et de exp implique notamment

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall y \in]0,+\infty[,\ \exp(\ln(y)) = y}.$$

Proposition 5

La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée la fonction inverse : $\forall y \in]0,+\infty[,\ \ln'(y) = \frac{1}{y}$.
Le graphe a une tangente en 1 d'équation $y = x - 1$. De plus,

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln(x) \leq x - 1.$$

Proposition 6: Propriété du morphisme du logarithme.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Il découle de cette propriété que

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- $\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x^p) = p\ln(x)$.

Exemple 7

Le logarithme de dix milliards, c'est grand comment ?

Solution :

On a $\ln(10^{10}) = 10\ln(10)$ c'est approximativement 23.

Définition 8

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction **logarithme en base** a, notée $\log_a$ est définie par:

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{cases}.$$

Proposition 9: Sa raison d'être.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \log_a(a^N) = N.$$

En informatique, on pourra apprécier le logarithme en base 2, quant à la physique, le logarithme en base 10.

3 Puissances.

3.1 Fonctions $x \mapsto x^p$, où p est un entier.

Définition 10

Si n est un entier naturel, la fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 11

Soit a un réel positif. L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont de signes opposés.
La solution positive de cette équation est appelée **racine carrée** de a et notée $\sqrt{a}$.
Dans le cas de l'équation $x^2 = 0$, les deux solutions sont confondues et $\sqrt{0} = 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 12

Si p est un entier strictement négatif, la fonction $x \mapsto x^p$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

3.2 Puissances d'exposant réel.

Définition 13

Pour $\boxed{x > 0}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit le réel x^a par

$$x^a = \exp(a\ln(x)).$$

Proposition 14: Notation puissance pour exp.

Notons e le nombre $\exp(1)$. Ce nombre vaut environ $2,71$, et il est tel que $\ln(e) = 1$. On a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x}.$$

La propriété de morphisme se réécrit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+y} = e^x e^y.$$

De plus,

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad (e^x)^a = e^{ax} \text{ et } \ln(y^a) = a\ln(y).$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $e^{x+y} = \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) = e^x e^y$.
Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a $(e^x)^a = \exp(a\ln(e^x)) = \exp(ax) = e^{ax}$.
De plus, $\ln(y^a) = \ln(\exp(a\ln(y))) = a\ln(y)$.

Proposition 15: ★

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x^{a+b} = x^a x^b, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \quad (xy)^a = x^a y^a,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, \qquad (x^a)^b = x^{ab}.$$

Preuve :

$\boxed{1.}$ $x^{a+b} = \exp((a+b)\ln(x)) = \exp(a\ln(x) + b\ln(x)) = \exp(a\ln(x))\exp(b\ln(x)) = x^a x^b$.
$\boxed{2.}$ $x^{-a} = \exp(-a\ln(x)) = \frac{1}{\exp(a\ln(x))} = \frac{1}{x^a}$.
$\boxed{3.}$ $(xy)^a = \exp(a\ln(xy)) = \exp(a\ln(x) + a\ln(y)) = \exp(a\ln(x))\exp(a\ln(y)) = x^a y^a$.
$\boxed{4.}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \exp(a\ln(x) - a\ln(y)) = \exp(a\ln(x))\exp(-a\ln(y)) = \frac{x^a}{y^a}$.
$\boxed{5.}$ $(x^a)^b = \exp(b\ln(\exp(a\ln(x)))) = \exp(ba\ln(x)) = x^{ab}$.

Corrolaire 16

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
— $(x^{1/2})^2 = x$ donc $x^{1/2}$ est la solution positive de $X^2 = x$, c'est $\sqrt{x}$.
— $x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Remarque: $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Proposition 17: Comparer deux puissances.

Soient a, b deux réels, on a

$$\forall x \in]0,1[\quad a \leq b \iff x^a \geq x^b$$
$$\forall x \in]1,+\infty[\quad a \leq b \iff x^a \leq x^b$$

Preuve :

Pour $x \in]0,1[$, $a \leq b \iff a\ln(x) \geq b\ln(x) \iff e^{a\ln(x)} \geq e^{b\ln(x)} \iff x^a \geq x^b$.

Exemple 18

Domaine de définition et simplification de $x \mapsto x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$.

Solution :

Son ensemble de définition est $]1,+\infty[$

$$x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\ln(x)\right) = \exp(\ln(\ln(x))) = \ln(x).$$

Remarque: f et $\ln$ coïncident sur $]1,+\infty[$ mais ce ne sont pas les mêmes fonctions.

3.3 Fonctions $x \mapsto a^x$, où a est réel.

Définition 19

Pour un réel a quelconque, la fonction $x \mapsto x^a$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme on va le voir ci-dessous, lorsque $a > 0$, cette fonction peut être prolongée en 0 en une fonction continue, en posant $0^a = 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans la suite, on notera f_a la fonction $x \mapsto x^a$.

Proposition 20

La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a'(x) = a x^{a-1}$.

Preuve :

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_a(x) = \exp(a\ln(x))$, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée.

$$f_a'(x) = u'(x)e^{u(x)} = a\frac{1}{x}x^a = ax^{-1}x^a = ax^{a-1}.$$

Proposition 21: cas $a > 0$.

Soit $a > 0$, alors f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\lim_{x\to 0} x^a = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty.$$

Preuve :

f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a'(x) = ax^{a-1} > 0$.
Elle est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
• $a\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car $a > 0$ et $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Par composition, $e^{a\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

• $a\ln(x) \xrightarrow[x\to 0_+]{} -\infty$ car $a > 0$ et $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.
Par composition, $e^{a\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0_+$.

Remarque. On peut prolonger f_a en 0 par continuité en posant $f_a(0) := 0$.

Proposition 22: cas $a < 0$.

Soit $a < 0$. Alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\lim_{x\to 0} x^a = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^a = 0.$$

Proposition 23: comparaison

Si $a < b$, alors

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,1] &\quad : \quad x^b \le x^a. \\ \forall x \in [1,+\infty[&\quad : \quad x^a \le x^b \end{aligned}$$

Proposition 24

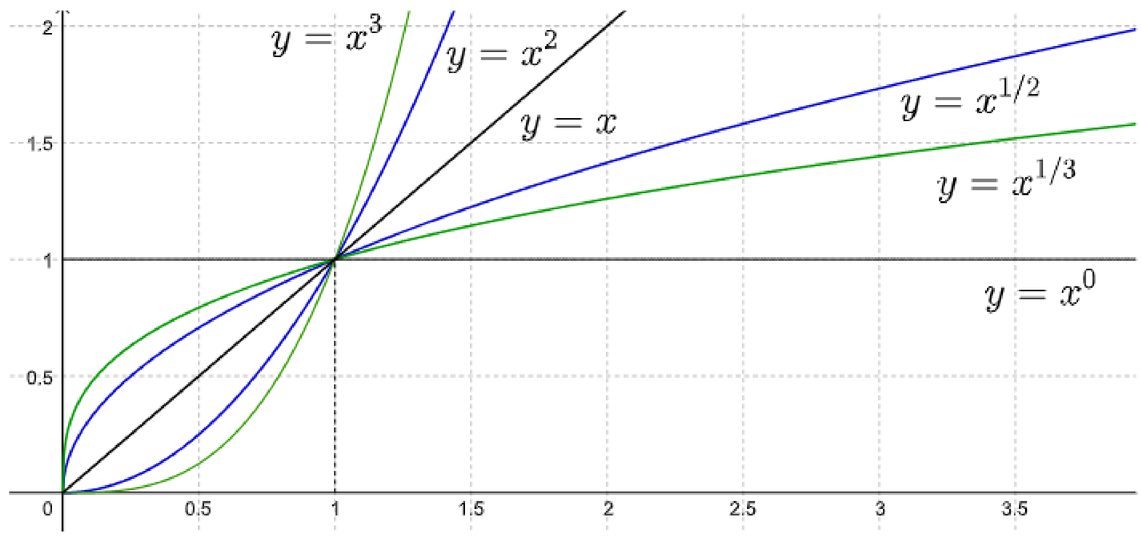
Soit a un réel non nul. Pour tout réel strictement positif y, le nombre $y^{\frac{1}{a}}$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $x^a = y$.

La fonction $f_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^a \end{cases}$ est donc bijective, et sa réciproque est la fonction $x \mapsto x^{1/a}$.

Notation

Mentionnons que la puissance d'exposant $1/n$, peut être notée avec un symbole radical :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt[n]{x} := x^{1/n}.$$



Fonctions puissances d'exposant positif.

3.4 Croissances comparées.

Lemme 25

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une constante $C_a \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{x^a}{e^x} \leq C_a x^{-a}$.

Preuve :

On pose $f : x \mapsto \frac{x^a}{e^x} \times x^a = x^{2a}e^{-x}$.
On va prouver qu'elle est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit :
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2ax^{2a-1} \cdot e^{-x} + x^{2a} \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(2ax^{2a-1} - x^{2a}) = e^{-x}x^{2a-1}(2a - x)$.
f possède donc un maximum en $2a$, posons $C_a = f(2a) = (2a)^{2a}e^{-2a}$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{x^a}{e^x}x^a \leq C_a$ donc $\frac{x^a}{e^x} \leq C_a x^{-a}$.

Théorème 26: Croissances comparées.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0; \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0; \qquad \lim_{x\to 0_+} x^a \ln(x) = 0.$$

Preuve :

$\boxed{1.}$ D'après le Lemme, il existe $C_a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \frac{x^a}{e^x} \leq C_a x^{-a}$.
D'après le théorème des gendarmes, $\frac{x^a}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{2.}$ Pour $x \leq 0$, $|x|^a e^x = (-x)^a \frac{1}{e^{-x}}$.
On a $-x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ donc $\frac{x^a}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{0}$. Par composition, $|x|^a e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

$\boxed{3.}$ Pour $x > 0$, $\frac{\ln(x)}{x^a} = \frac{\ln(x)}{\exp(a\ln(x))} = \frac{a\ln(x)}{e^{a\ln(x)}}\frac{1}{a}$.
On a $a\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\frac{x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{a\ln(x)}{e^{a\ln(x)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{\ln(x)}{x^a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{4.}$ Soit $x > 0$, on a $x^a \ln(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a} \times \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^a}$.
On a $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0_+]{} +\infty$ et $\frac{\ln(x)}{x^a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $x^a \ln(x) \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$.

Exemple 27

Calcul de $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}$ et de $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{\sqrt{x}}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln(x)}{x^{1/2}} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{par somme et CC.}$$

$\boxed{2.}$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{\ln(e^x+x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(e^x(1+\frac{x}{e^x}))}{\sqrt{x}} = \frac{1+\ln(1+\frac{x}{e^x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{par somme et CC car } \frac{x}{e^x} \to 0.$$

4 Fonctions hyperboliques.

Définition 28

Les fonctions **cosinus, sinus et tangente hyperbolique** sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

Proposition 29

- La fonction ch est paire et les fonctions sh et th sont impaires.
- $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} e^x & = & \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) \\ e^{-x} & = & \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \end{cases}$
- Une formule de trigonométrie hyperbolique

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

- Des limites:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1.$$

- Toutes les trois sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x),\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x),\ \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Preuve :

• Soit $x \in \mathbb{R}$.
— $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$.
— $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$.

• Montrons que ch est paire, sh est impaire et th est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$.
— $\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^{--x}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$.
— $\mathrm{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{--x}}{2} = -\frac{e^x-e^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$.
— $\mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = -\mathrm{th}(x)$. • Limites.
On a $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.
Par parité/imparité : $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.

Pour th, on a une forme indeterminée en $+\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Par imparité de th, $\mathrm{th}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$.

• Dérivées.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
— $ch'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathrm{sh}(x)$
— $sh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{ch}(x)$
On a $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ quotient de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ et ch ne s'annulant pas.

$$\mathrm{th}' = \frac{\mathrm{chsh}' - \mathrm{shch}'}{\mathrm{ch}^2} = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \left(\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\right)^2 = 1 - \mathrm{th}^2.$$

• Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)) = e^x e^{-x} = 1$.
On en déduit la seconde expression pour th': $\mathrm{th}' = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$.

Pourquoi *cosinus* et *sinus* ? Cela vient de l'analogie avec les formules d'Euler pour les "vrais" cos et sin :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Pourquoi *hyperbolique* ? Pour les "vrais" cosinus et sinus, on a $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\{x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$ est un cercle appelé *cercle trigonométrique*. Avec ch et sh, on a $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ et $\{x, y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 = 1\}$ est appelé une hyperbole, d'où le nom donnée aux deux fonctions.

5 Fonctions circulaires.

5.1 Trigonométrie.

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J). Le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé **cercle trigonométrique**. Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point I. À tout réel x, on associe le point $(1, x)$ sur $\mathcal{D}$. Notamment, le réel 0 est identifié à $I \in \mathcal{D}$.
On « enroule » alors la droite sur le cercle : les réels positifs vont l'être dans le sens direct (antihoraire), et les réels négatifs dans le sens indirect. Pour un réel x, on notera $M(x)$ le point du cercle sur lequel a été enroulé le point $(1, x)$. Le cercle étant de périmètre 2π et la droite infinie, il va falloir faire plusieurs tours...

Définition 30

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M(x)$ le point correspondant sur le cercle trigonométrique, obtenu par enroulement.
On appelle **cosinus** de x son abscisse et **sinus** de x son ordonnée, notés $\cos x$ et $\sin x$.

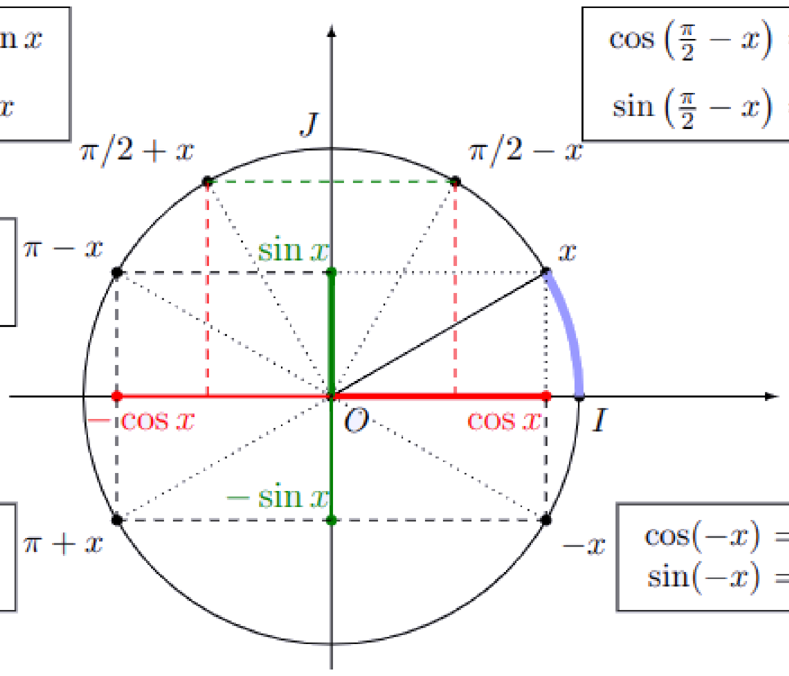
$$\text{Par définition, on a } \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{c} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{array}} \text{ c'est-à-dire } \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{c} |\cos x| \leq 1 \\ |\sin x| \leq 1 \end{array}}$$

Proposition 31: Les symétries de cos et sin.

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

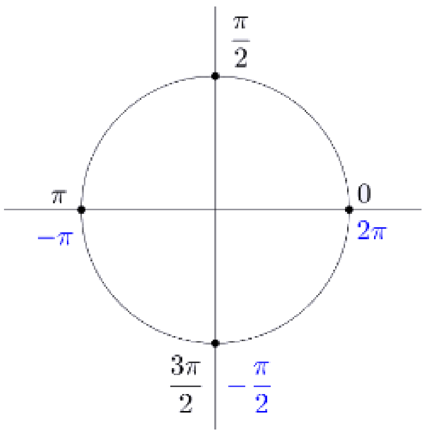


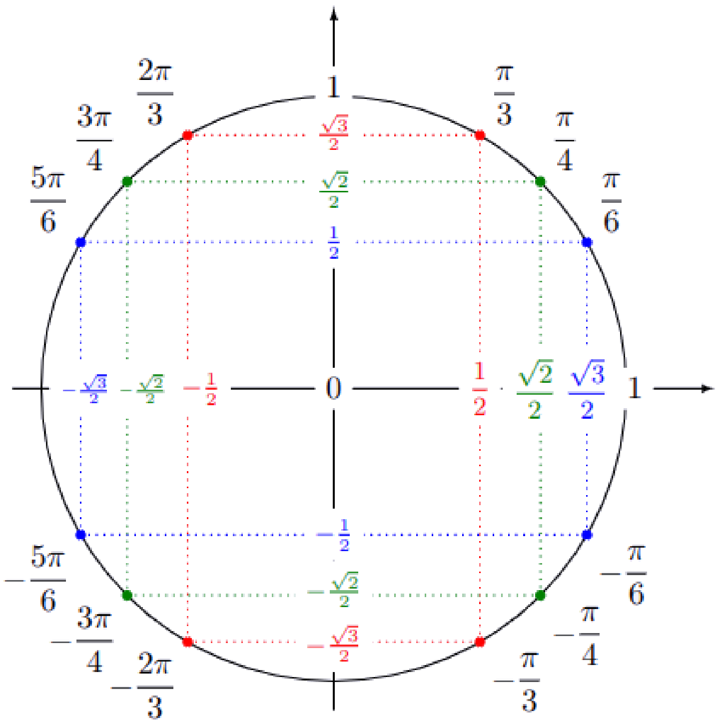
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

Proposition 32: Valeurs notables.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0
$\sin x$	0	1	0	-1





Proposition 33: Une conséquence du théorème de Pythagore.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Proposition 34: Formules d'addition.

Pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{aligned}$$

Corrolaire 35: Formules de duplication.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{et} \quad \sin 2a = 2\cos a \sin a.$$

La première identité donne $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.

Exemple 36

- Calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
- Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$.

Solution :

• On a $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}$ et $\cos a = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1$.
Alors $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos a - 1)$. Avec $a = \frac{\pi}{6}$:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Donc $\cos(\pi/12) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

• On a:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}.$$

Corrolaire 37: Produit de deux cosinus, de deux sinus.

Pour tous réels a, b, $\begin{cases} \cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \end{cases}$

Proposition 38: Somme et différence de deux cosinus, de deux sinus.

Pour tous réels p, q,

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) & \sin(p) + \sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) & \sin(p) - \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{aligned}$$

Remarque. Avec les nombres complexes, on retrouvera facilement ces formules avec les nombres e^{ip} et e^{iq}.

Définition 39: Congruence module α

On dit que deux réels a et b sont **congrus** module α et on note

$$a \equiv b[\alpha]$$

si a et b diffèrent d'un multiple entier de α:

$$a \equiv b[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = b + k\alpha.$$

Proposition 40: ★

Soient x et y deux nombres réels. On a

$$\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ \quad \text{ou} \\ x \equiv -y[2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin x = \sin y \iff \begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ \quad \text{ou} \\ x \equiv \pi - y[2\pi] \end{cases}$$

Exemple 41: ★

Résoudre les équations ci-dessous.

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(3x) = \sin x, \quad \cos x + \sqrt{3}\sin x = 1.$$

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{4}) \iff \begin{cases} 2x \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \pi - \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{8}[\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{3\pi}{8}[\pi] \end{cases}.$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{2.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(3x) = \sin(x) \iff \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \iff \begin{cases} 3x \equiv \frac{\pi}{2} - x[2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv -\frac{\pi}{2} + x[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{2}] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi] \end{cases}.$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{3.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1 \iff \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2} \iff \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2}$

$\iff \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) \iff \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{3} - x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}.$

L'ensemble des solutions est donc $\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 42

Résoudre l'inéquation $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Solution :

L'ensemble des solutions:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right].$$

5.2 Fonction cos et sin.

Corrolaire 43

La fonction cos est paire, et la fonction sin impaire.
Elles sont toutes deux 2π-périodiques.
Le graphe de sin se déduit de celui de cos par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Proposition 44

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos.$$

Preuve :

En annexe de l'autre polycopié.

Proposition 45

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|$$

Preuve :

⊙ Soit $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$, on a $|x| = x \geq \frac{\pi}{2} \geq 1 \geq |\sin x|$.

⊙ Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin'' = -\sin$ négatif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Son graphe est donc en dessous de sa tangente en 0, qui est la droite d'équation $y = x$.
Alors $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin(x) \leq x$. Sur cet intervalle, tout est positif: $|\sin(x)| \leq |x|$.

⊙ Soit $x \in \mathbb{R}_-$, on a $|\sin x| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)| \leq |-x| \leq |x|$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

5.3 Fonction tan.

Définition 46

On appelle fonction **tangente** et on note tan la fonction définie par

$$\tan : \begin{cases} D_{\tan} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases} \quad \text{où} \quad D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposition 47

Sur $D_{\tan}$, la fonction tangente est impaire et π-périodique.

Preuve :

Soit $x \in D_{\tan}$.
• $(-x) \in D_{\tan}$ et $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.
• Montrons que $x+\pi \in D_{\tan}$. Supposons que $x+\pi \notin D_{\tan}$. Alors:

$$\exists k \in \mathbb{Z} \mid x+\pi = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{donc} \quad x = \frac{\pi}{2}+(k-1)\pi, \quad \text{absurde car } x \in D_{\tan}.$$

Donc $x+\pi \in D_{\tan}$.
• On a $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.

Proposition 48: Valeurs limites notables.

$$\tan(0)=0, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}, \quad \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty.$$

Proposition 49

La fonction tangente est dérivable sur $D_{\tan}$ et

$$\forall x \in D_{\tan} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x).$$

Preuve :

tan est dérivable sur $D_{\tan}$ comme quotient de fonctions dérivables avec cos ne s'annulant pas.

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos\sin' - \cos'\sin}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2.$$

Proposition 50: Formules d'addition.

Pour tous réels a et b tels que les nombres ci-dessous ont un sens,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}, \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}, \quad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.$$

Preuve :

On a:

$$\begin{aligned}\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\cos a\cos b\left(\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}\right)}{\cos a\cos b\left(1-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}\right)}\\ &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}.\end{aligned}$$

...

Corrolaire 51: Identités à savoir retrouver.

Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, \ k\in\mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire que a est un réel tel que $\frac{a}{2} \in D_{\tan}$. En notant $t = \tan(\frac{a}{2})$,

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Preuve :

On a

$$\cos a = \cos(2\times\frac{a}{2}) = 2\cos^2(\frac{a}{2})-1 = 2\times\frac{1}{1+\tan^2(\frac{a}{2})}-1 = \frac{2-1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin a = \sin(2\times\frac{a}{2}) = 2\cos(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{2}) = 2\cos^2(\frac{a}{2})\cdot t = 2\frac{1}{1+t^2}\cdot t = \frac{2t}{1+t^2}.$$

6 Fonctions circulaires réciproques.

Définition 52

On appelle fonction **arcsinus** et on note $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ la réciproque de la fonction $\widetilde{\sin} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.
Pour tout y dans $[-1,1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique antécédent de y par sin dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Proposition 53

La fonction arcsin est strictement croissante $[-1,1]$ et elle est impaire.

Preuve :

Par réciprocité de arcsin, et $\widetilde{\sin}$ qui est structement croissante et impaire.

Proposition 54

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x \qquad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin(x)) = x.$$

Exemple 55

Que valent $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin(\frac{1}{2})$? Et $\arcsin(\sin(\frac{2\pi}{3}))$?

Solution :

- $\arcsin(0) = 0$ par imparité.
- $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ car $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ car $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $\arcsin(\sin(\frac{2\pi}{3})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Définition 56

On appelle fonction **arccosinus** et on note $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ la réciproque de $\widetilde{\cos} : [0,\pi] \to [-1,1]$.
Pour tout y dans $[-1,1]$, $\arccos(y)$ est l'unique antécédent de y par cos dans $[0,\pi]$.

Proposition 57

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos(x)) = x, \qquad \forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x.$$

Exemple 58

Que valent $\arccos(0)$, $\arccos(1)$, $\arccos(-1)$, $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$? Et $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{3}))$?

Solution :

- $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$.
- $\arccos(1) = 0$ car $\cos(0) = 1$ et $0 \in [0,\pi]$.
- $\arccos(-1) = \pi$ car $\cos(\pi) = -1$ et $\pi \in [0,\pi]$.
- $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$ car $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [0,\pi]$.
- $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in [0,\pi]$.

Définition 59

On appelle fonction **arctangente** et on note $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la réciproque de $\widetilde{\tan} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.
Pour tout y dans $\mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique antécédent de y par tan dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Proposition 60

La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire.

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Proposition 61

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x.$$

Exemple 62

Que valent $\arctan(0)$? $\arctan(1)$? $\arctan(\sqrt{3})$? Et $\arctan(\tan(\pi))$?

Solution :

- $\arctan(0) = 0$ car $\tan(0) = 0$ et $0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ car $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ et $\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(\tan(0)) = 0$ car $0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Lemme 63: ★

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos(x)).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Preuve :

Soit $x \in [-1,1]$. On a $\cos^2 = 1 - \sin^2$ donc $|\cos| = \sqrt{1-\sin^2}$.
Alors $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}$ donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
De même, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.
Or $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2$$

Donc $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Proposition 64: ★

Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Preuve :

On a $\widetilde{\sin}$ dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ne s'annulant pas.
D'après le théorème de dérivation des réciproques, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\widetilde{\sin}'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De même pour arccos et arctan.

Proposition 65: Lien entre arccos et arcsin

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x).$$

Preuve :

Pour $x \in [-1,1]$, on a:

$$\arcsin'(x) + \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc $\arccos(x) + \arcsin(x) = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.
Or $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(0) = 0$ donc $c = \frac{\pi}{2}$.
Donc $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Proposition 66

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Donc constante sur les intervalles de définition.
On a $\arctan(1) + \arctan(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

7 Exercices.

Exercice 1: ⧫◊◊

Résoudre $2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3)$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3) \iff \ln\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right) = \ln(3x) \iff \frac{(x+3)^2}{4} = 3x$$
$$\iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff x = 3$$

Ainsi, 3 est l'unique solution.

Exercice 2: ⧫⧫◊

Résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$. Que dire des solutions ?

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x + e^{-x} = 4 \iff e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$
$$\iff e^x = 2 \pm \sqrt{3} \iff x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

Ainsi, $\ln(2-\sqrt{3})$ et $\ln(2+\sqrt{3})$ sont les uniques solutions dans $\mathbb{R}$. On remarque que :

$$\ln(2+\sqrt{3}) = -\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = -\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Les solutions sont opposées.

Exercice 3: ⧫◊◊

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \iff e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \iff \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x)$$
$$\iff \ln(x)(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) = 0 \iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} \iff x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2$$
$$\iff x = 1 \text{ ou } x = 4$$

Les uniques solutions sont donc 1 et 4.

Exercice 4: ⧫◊◊

1. Montrer que pour tous réels a et b, on a
   (a) $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
   (b) $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.
   (c) Trouver une identité pour $\mathrm{th}(a+b)$.
2. Pour x réel, on pose $t = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$\text{(a) } \mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{(b) } \mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{(c) } \mathrm{th}x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Solution :

$\boxed{1.a)}$ $\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) = \frac{e^{a+b}+e^{-a-b}}{2} = \mathrm{ch}(a+b)$

$\boxed{1.b)}$ $\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b) = \frac{e^{a+b}-e^{a-b}}{2} = \mathrm{sh}(a+b)$

$\boxed{1.c)}$ $\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)} = \frac{\frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)}+\frac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)}}{1+\frac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)}\cdot\frac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)}} = \frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$

$\boxed{2.a)}$ $\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1+\mathrm{th}^2(\frac{x}{2})}{1-\mathrm{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{\mathrm{ch}^2(\frac{x}{2})+\mathrm{sh}^2(\frac{x}{2})}{\mathrm{ch}^2(\frac{x}{2})-\mathrm{sh}^2(\frac{x}{2})} = \mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \mathrm{ch}(x)$

$\boxed{2.b)}$ $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\mathrm{th}(\frac{x}{2})}{1-\mathrm{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\mathrm{sh}(\frac{x}{2})\mathrm{ch}(\frac{x}{2})}{\mathrm{ch}^2(\frac{x}{2})-\mathrm{sh}^2(\frac{x}{2})} = \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \mathrm{sh}(x)$

$\boxed{2.c)}$ $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\mathrm{th}(\frac{x}{2})}{1+\mathrm{th}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\mathrm{sh}(\frac{x}{2})\mathrm{ch}(\frac{x}{2})}{\mathrm{ch}^2(\frac{x}{2})+\mathrm{sh}^2(\frac{x}{2})} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{th}(x)$

Exercice 5: ♦♦◊

Sans calculatrice, comparer π^e et e^π.

Solution :

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée : $f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \end{cases}$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

On en conclut que :

$$\frac{\pi}{\ln(\pi)} > e \iff \pi > e\ln(\pi) \iff e^\pi > e^{e\ln\pi} \iff e^\pi > \pi^e$$

Donc $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 6: ♦♦♦

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.
2. Des deux nombres $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[3]{24}$, lequel est le plus grand ?

Solution :

$\boxed{1.}$ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\right) \end{cases}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	-1	↗	0

$\boxed{2.}$

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{3} = (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) - (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4})$$

Or f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi : $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$. On en conclut que $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Exercice 7: ♦♦◊

1. Soit α un réel et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1 + \alpha x$ (on discutera selon les valeurs de α).
2. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$$

Solution :

1. Posons $f : x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$. f est définie, continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée :

$$g : \begin{cases}]-1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1) \end{cases}$$

Alors :

⊚ Si $\alpha \in]0,1[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	$\alpha - 1$	↗	0	↘	$-\infty$

⊚ Si $\alpha \in]1, +\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	$\alpha - 1$	↘	0	↗	$+\infty$

⊚ Si $\alpha \in]-\infty, 0[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Ainsi, $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ lorsque $\alpha \notin [0,1]$.

2. D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = (n+1)^\alpha$$

Exercice 8: ⧫◊◊

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad b) \sin^2 x = \frac{3}{2}\cos x \qquad c) \cos x + \sin x = 1$$

Solution :

$\boxed{a)}$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} 2x \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ 2x \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{8}[\pi] \\ x \equiv \frac{3\pi}{8}[\pi] \end{cases} \iff x \in \left\{\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$\boxed{b)}$

$$\sin^2 x = \frac{3}{2}\cos x \iff 2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \iff -2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \iff \cos x = -2 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \iff x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$\boxed{c)}$

$$\cos(-\frac{\pi}{4} + x) = \cos(-\frac{\pi}{4})\cos x - \sin(-\frac{\pi}{4})\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) + \sin(x))$$

Donc

$$\cos x + \sin x = 1 \iff \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4} + x) = 1 \iff \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \equiv \frac{2\pi}{4}[2\pi] \\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases} \iff x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 9: ⧫◊◊

Soit x un réel. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ cette proposition. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. $|\sin(0x)| \leq 0|\sin x| \iff 0 \leq 0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a :

$$\begin{aligned} |\sin(nx + x)| &= |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)||\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \\ &\leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| \qquad \text{(HR)} \\ &\leq (n+1)|\sin(x)| \end{aligned}$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10: ⧫⧫◊

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}} \qquad (n \text{ fois le symbole } \sqrt{\cdot})$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.
2. En déduire $\lim u_n$

Solution :

$\boxed{1.}$ Notons $\mathcal{P}_n$ cette proposition. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation. On a : $2\cos(\frac{\pi}{4}) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \iff \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \iff u_{n+1} = \sqrt{2(1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}))}$$

Or $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ donc $1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}$
Alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{4\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{2.}$

$$\lim u_n = \lim_{n \to +\infty} 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2\cos(0) = 2$$

Exercice 11: ♦♦♦

Calculer $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

Solution :

On a :

$$\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7}$$

Donc :

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{8}\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

Exercice 12: ♦◊◊

Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$.

Solution :

On a :

$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{2\pi}{8} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$

Donc :

$$2\tan\frac{\pi}{8} = 1-\tan^2\frac{\pi}{8} \iff \tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0 \iff \tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$$

Ainsi, $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.

Exercice 13: ♦◊◊

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+\ x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

⊚ Montrons que $\arctan(x) \leq x$.

Posons $f : x \mapsto \arctan x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{x^2}{x^2+1} \end{cases}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$

Donc $\arctan(x) \leq x$.

⊚ Montrons que $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$.

Posons $f :\mapsto x - \frac{x^3}{3} - \arctan(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée : $f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{x^4}{x^2+1} \end{cases}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$

Donc $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+\ x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$.

Exercice 14: ♦♦◊

Montrer que

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Solution :

On a :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5} = 1$$

En appliquant arctan, on obtient bien que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 15: ♦♦◊

Soit l'équation
$$\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Justifier que l'équation admet une unique solution sur $[-1, 1]$.
2. Donner une expression de cette solution.

Solution :

$\boxed{1.}$ arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc l'équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2.}$ Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\arcsin(x) + \arcsin(\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{4} \iff \tan(\arcsin(x) + \arcsin(\frac{x}{2})) = 1 \iff \frac{3x}{2} \cdot \frac{2}{2 - x^2} = 1$$
$$\iff 2x^2 + 6x - 4 = 0 \iff x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

L'unique solution est donc $\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2}$.

Exercice 16: ♦♦◊

Soit
$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1, 1[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression plus simple de la fonction f.
4. Retrouver ce résultat par preuve directe.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$g' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \end{cases}$$

Alors :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$-1 \nearrow 1$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1, 1[$.

$\boxed{2.}$ On a $f :]-1, 1[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $g : \mathbb{R} \to]-1, 1[$.

Ainsi, f est dérivable comme composée de fonctions dérivables, et : $f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$.

$\boxed{3.}$ Sur $\mathbb{R}$, $f - \arctan$ est de dérivée nulle donc constante. Ainsi :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \arctan(x) = C.$$

Évaluons en 0: $f(0) - \arctan(0) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0$. Donc $f = \arctan$.

$\boxed{4.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\tan\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{1+x^2} = x$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(f(x)) = x$. Donc $f = \arctan$.

Exercice 17: ♦♦♦

Pour $a < x < b$, montrer que
$$\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = \arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}.$$

Solution :

On a :

$$\cos\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right)\right) = \sqrt{1 - \frac{x-a}{b-a}} = \sqrt{\frac{b-x}{b-a}}$$

$$\cos\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x-a}{b-x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b-a}{b-x}}} = \sqrt{\frac{b-x}{b-a}}$$

Ainsi, $\cos\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = \cos\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$.

Or, $\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \in]-1, 1[$ et $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \in]-1, 1[$ donc $\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = \arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$.