

Équations Différentielles Linéaires d'ordre 1

Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Ibrahim pour tout (j'aime pas les EDL)

Exercices.

Exercice 11.1 2

Exercice 11.1 [◆◆◆]

Résoudre les équations différentielles ci-dessous

1. $y' - 2y = 2$ sur \mathbb{R} 2. $(x^2 + 1)y' + xy = x$ 3. $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 4. $y' - \ln(x)y = x^x$ sur \mathbb{R}_+^* 5. $(1 - x)y' - y = \frac{1}{1-x}$ sur $] -\infty, 1[$

1. Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière, avec y constante : $S_p : x \mapsto -1$.

Ensemble de solutions : $S = \{\lambda e^{2x} - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. L'équation se réécrit comme $y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}$.

Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière : $S_p : x \mapsto 1$ est solution évidente.

Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. Soit $I =] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda \cos x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Solution particulière : Soit $u \in S_0$ et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I . On cherche $z = \lambda' u$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution} &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) \cos(x) = \sin(2x) \\ &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = 2 \sin(x) \\ &\iff \lambda = -2 \cos \end{aligned}$$

Ainsi, $z = -2 \cos^2$.

Ensemble de solutions : $S = \{x \mapsto \lambda \cos x - 2 \cos^2 x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.