Chapitre 2

Propriétés de $\mathbb{R}$.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

1.1 Relation $\leq$.

Rappel : $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}\ x \leq x$ (réflexivité).
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$ (antisymétrie).
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$ (transitivité).

Rappel : C'est une relation d'ordre totale.

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Rappel : Élémentaire mais fondamental.

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \iff y - x \geq 0.$$

Exemple 1: Inégalité arithmético-géométrique.

Établir l'inégalité $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ pour deux réels x et y positifs. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Solution :

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0.$$

Donc $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, avec égalité si $x = y$.

1.2 Relation $<$ et opérations algébriques.

Rappel : $\leq$ et somme.

On peut sommer des inégalités. Pour tous réels x, x', y, y':

$$\begin{cases} x & \leq & y \\ & \text{et} & \\ x' & \leq & y' \end{cases} \implies x + x' \leq y + y'.$$

Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont des familles finies de nombres réels,

$$(\forall i \in I \quad x_i \leq y_i) \implies \sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{i\in I} y_i.$$

Proposition 2: Somme nulle de termes positifs.

Soient $x_1, ..., x_n$ des réels $\boxed{\textbf{positifs}}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0.$$

Preuve :

Supposons que les x_i somment à 0 et soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a:

$$\sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} x_i \geq 0 \quad \text{car les } x_i \text{ sont positifs.}$$

Donc $x_j \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, ainsi $x_j = 0$ car $0 \leq x_j \leq 0$.

Rappel : $\leq$ et produit.

Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$.
— Si a est un réel **positif**, alors $ax \leq ay$.
— Si a est un réel **négatif**, alors $ax \geq ay$.

On peut multiplier des inégalités dont les membres sont **positifs**. Pour touts réels x, x', y, y':

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ \quad \text{et} \\ 0 \leq x' \leq y' \end{cases} \Longrightarrow x \times x' \leq y \times y'$$

Rappel : $\leq$ et quotient

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 < x \leq y \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

Exemple 3: Majorer, minorer une somme, un produit, un quotient.

Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$. Encadrer $x - y$, $(x-y)^2$ et $\frac{xy}{x+y}$.

Solution :

On a $x - y \in [\![-1, 4]\!]$, $\quad (x-y)^2 \in [\![0, 16]\!]$ et $\frac{xy}{x+y} \in \left[\frac{1}{4}, 5\right]$

1.3 Intervalles.

Définition 4: Les deux infinis.

On ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ les deux éléments $+\infty$ et $-\infty$ pour former l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

en prenant la convention que $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq +\infty$ et $-\infty \leq x$.

Définition 5

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes décrites ci-dessous:

- Segment $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \text{ et } x \leq b\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- Intervalles ouverts $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \text{ et } x < b\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- Intervalles semi-ouverts. $[a, b[$ ou bien $]a, b]$.

Remarque: les parties décrites peuvent être vides : $[5, 3] = \varnothing$.

Exemple 6

L'ensemble des réels non nuls $\mathbb{R}^*$ n'est **pas** un intervalle. C'est néanmoins une réunion d'intervalles:

$$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Pour une preuve, on attendra la caractérisation des intervalles comme parties convexes de $\mathbb{R}$.

2 Valeur absolue.

2.1 Valeur absolue.

Définition 7

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre réel positif donné par

$$\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8: Propriétés élémentaires.

Pour tout réel x, $|x| = \max(x, -x)$, $|-x| = |x|$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$, $-|x| \leq x \leq |x|$ et $|x| = 0 \iff x = 0$.

Preuve :

$\boxed{1.}$ Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et $\max(x, -x) = x$; si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$ et $\max(x, -x) = -x$.
$\boxed{2.}$ $|-x| = \max(-x, --x) = \max(-x, x) = |x|$
$\boxed{3.}$ $x \leq \max(x, -x)$ donc $x \leq |x|$.
$\boxed{4.}$ $-x \leq \max(x, -x)$ donc $-x \leq |x|$.
$\boxed{5.}$ En combinant les deux précédentes, on a $-|x| \leq x \leq |x|$.
$\boxed{6.}$ Si $x = 0$, alors $|x| = 0$. Si $|x| = 0$, on a $-|x| \leq x \leq 0$ donc $x = 0$.

2.2 Valeur absolue et opérations algébriques.

Proposition 9: Valeurs absolues et produits.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x|^2 = x^2$ et $|x| = \sqrt{x^2}$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Preuve :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x \geq 0$, alors $|x|^2 = x^2$, si $x < 0$, alors $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.
$\boxed{2.}$ Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$.
$\boxed{3.}$ Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right| \times 1 = \left|\frac{x}{y}\right| \times \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$.

Théorème 10: Inégalité triangulaire. ★

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Preuve :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned}(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x + y)^2 \\ &= x^2 + 2|x||y| + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 \\ &= 2(|xy| - xy) \geq 0 \quad \text{car } |xy| \geq xy.\end{aligned}$$

donc $(|x| + |y|)^2 \geq |x + y|^2$ donc $|x| + |y| \geq |x + y|$ par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Corrolaire 11

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leq |x| + |y|$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

Preuve :

$\boxed{1.}$ Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.
$\boxed{2.}$ On le verra dans $\mathbb{C}$.
$\boxed{3.}$ Par récurrence sur n, pour $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ (hérédité):

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|.$$

⚠ On notera que dans la première inégalité, on a écrit un $-$ à gauche, mais il y a toujours un $+$ à droite !

2.3 Une notion de distance sur $\mathbb{R}$

$|x - y|$ est la **distance** entre x et y.

Proposition 12

$$\forall x, a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{array}{l} |x-a| \leq b \iff x \in [a-b, a+b] \\ |x-a| \geq b \iff x \geq a+b \text{ ou } x \leq a-b \end{array}$$

En particulier, $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}_+\ |x| \leq b \iff -b \leq x \leq b.$

3 Entiers.

3.1 Entiers naturels, entiers relatifs.

Définition 13

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ et $\mathbb{Z} = \{0, 1, ...\} \cup \{-1, -2, ...\}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Proposition 14

L'ensemble des entiers relatifs est stable par somme, différence et produit.

Preuve :

Le résultat est admis, mais précisons le sens de stable: on a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2,\ p + q \in \mathbb{Z} \text{ et } p - q \in \mathbb{Z} \text{ et } pq \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des entiers naturels quant à lui est stable par somme et produit, mais pas par différence.

Proposition 15

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

3.2 Partie entière d'un réel.

Définition 16

Pour tout nombre réel x, on appelle **partie entière** de x, et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur à x:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Proposition 17: Partie entière et encadrements.

Pour tout nombre réel x,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

En «croisant» les inégalites, on obient notamment que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Preuve :

Par définition, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$.
Supposons $x \geq \lfloor x \rfloor + 1$. Alors $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier inférieur à x, et $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x.
Donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq \lfloor x \rfloor$, ce qui est absurde. Donc $x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Proposition 18

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soient $x, y \in \mathbb{R} \mid x \leq y$, alors $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y$, donc $\lfloor x \rfloor \leq y$.
Ainsi, $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à y, donc inférieur à $\lfloor y \rfloor$, le plus grand entier inférieur à y.
On a bien $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$: la fonction est croissante.

Exemple 19: Une propriété simple de la partie entière.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
Ceci a pour conséquence que la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < \lfloor x \rfloor + 2$.
Ainsi, $\lfloor \lfloor x \rfloor + 1 \rfloor \leq \lfloor x + 1 \rfloor < \lfloor \lfloor x \rfloor + 2 \rfloor$.
Donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq \lfloor x + 1 \rfloor < \lfloor x + 2 \rfloor < \lfloor x \rfloor + 2$ (la partie entière d'un entier est cet entier).
Donc $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Lemme 20: Une utilisation de la partie entière en analyse.

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède la propriété dite d'Archimède :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \mid n\varepsilon > x.$$

4 Rationnels.

4.1 Nombres décimaux.

Définition 21

On appelle **nombre décimal** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\frac{p}{10^k}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Définition 22: généralisation.

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle **fraction p-adique** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\frac{q}{p^k}$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 23

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre décimal $d_n(x) := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ satisfait l'encadrement

$$d_n(x) \leq x < d_n(x) + 10^{-n}.$$

Les nombres $d_n(x)$ et $d_n(x) + 10^{-n}$ sont appelés respectivement **valeur décimale** par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n}.

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$
$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$
$$d_n(x) \leq x < d_n(x) + 10^{-n}.$$

Corrolaire 24: $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre décimal.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \Longrightarrow \mathbb{D} \cap]a,b[\neq \varnothing.$$

Preuve :

Soient $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$. On pose $m = \frac{a+b}{2}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a < m < d_n(m) + 10^{-n}$.
On pose $\varepsilon = b - m$. Il existe $n \in \mathbb{N} \mid 10^{-n} < \varepsilon$. Alors

$$a < m < d_n(m) + 10^{-n} < d_n(m) + \varepsilon \leq m + (b - m) = b$$

Donc

$$a < \underbrace{d_n(m) + 10^{-n}}_{\in \mathbb{D}} < b.$$

4.2 Nombres rationnels.

Définition 25

Un nombre **rationnel** est un nombre réel qui s'écrit sous la forme d'un quotient d'entiers $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

On dit d'un nombre de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qu'il est **irrationnel**.

Proposition 26

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Proposition 27

L'ensemble des rationnels est stable par somme, différence, produit, et passage à l'inverse.

Exemple 28

Justifier que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas stable par somme, ni par produit.

Solution :

On a $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$, or $0 \in \mathbb{Q}$.
On a $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$, or $2 \in \mathbb{Q}$.

4.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 29: $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel et un nombre irrationnel.
Autrement dit, pour touts a, b réels avec $a < b$,

$$]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing \text{ et }]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing.$$

Preuve :

Soient $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$.
• On sait déjà que dans $]a, b[$ il existe un décimal: $d_n(\frac{a+b}{2})$, c'est donc un rationnel.

• Puisque $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, il existe un rationnel r entre eux.
Alors $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$, donc $a < r + \sqrt{2} < b$.
Supposons que $r + \sqrt{2}$ soit rationnel, alors $r + \sqrt{2} - r$ l'est aussi par stabilité, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, absurde.
Il existe donc un nombre irrationnel entre a et b.

Corrolaire 30: Écriture séquentielle de la densité de $\mathbb{Q}$.

Pour tout réel x, il existe une suite (r_n) de rationnels telle que $r_n \to x$.

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in \mathbb{Q} \cap]x, x + \frac{1}{n}[$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x < y_n < x + \frac{1}{n}$.
Par encadrement, $y_n \to x$.

5 Parties bornées de $\mathbb{R}$.

5.1 Majorants, minorants.

Dans tout ce qui suit, A est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 31: Majorant, minorant.

- On dit que A est **majorée** si il existe $M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ x \leq M$. Dans ce contexte, M est un **majorant** de A.
- On dit que A est **minorée** si il existe $m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ m \leq x$. Dans ce contexte, m est un **minorant** de A.
- On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 32

Donner des majorants et des minorants de $A = [0, 1[$.
Soit $A' = [1, +\infty[$, démontrer que A' n'est pas majorée.

Solution :

A est majorée par 1, mais aussi par $\pi, 666...$ et minorée par $0, -1, ...$
Supposons A' majorée, alors $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ x \leq M$, or $M + 1 \in A'$ donc $M + 1 \leq M$, absurde.

Proposition 33: Caractérisation des parties bornées avec la valeur absolue. ★

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

$$A \text{ est bornée} \iff \exists \mu \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in A,\ |x| \leq \mu.$$

Preuve :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons A bornée, alors il existe $M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ x \leq M$ et $m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ m \leq x$.
Alors $\forall x \in A,\ -|m| \leq x \leq |M|$, donc $|x| \leq \max(|M|, |m|)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\exists \mu \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in A,\ |x| \leq \mu$. Alors $\forall x \in A, -\mu \leq x \leq \mu$. Donc A est bornée.

5.2 Maximum, minimum.

Définition 34: Maximum, minimum. ★

- S'il existe un élément $a \in A$ tel que $\forall x \in A,\ x \leq a$, alors cet élément est unique. Il est appelé plus grand élément de A ou encore **maximum** de A et noté $\max(A)$.
- S'il existe un élément $b \in A$ tel que $\forall x \in A,\ b \leq x$, alors cet élément est unique. Il est appelé plus petit élément de A ou encore **minimum** de A et noté $\min(A)$.

Preuve :

Soient M et M' deux maximums de A, alors $M \leq M'$ et $M' \leq M$ donc $M = M'$, il y a bien unicité.

Exemple 35: ★

La partie $[0,1[$ admet 0 comme minimum, mais n'a pas de maximum.

Solution :

Supposons que A ait un maximum M.
On a $0 \leq M < 1$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{M+1}{2} < 1$.
Alors $\frac{M+1}{2} \in [0,1[$: $\frac{M+1}{2} \leq M$, donc $M+1 \leq 2M$ donc $1 \leq M$, absurde.

6 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \\
\iff & \frac{a^3 - a^2b + b^3 - ab^2}{ab} \geq 0 \\
\iff & \frac{a^2(a-b) + b^2(b-a)}{ab} \geq 0 \\
\iff & \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{ab} \geq 0 \\
\iff & \frac{(a-b)^2(a+b)}{ab} \geq 0
\end{aligned}$$

Or $(a-b)^2 \geq 0$, $(a+b) \geq 0$ et $ab \geq 0$.
Ainsi, cette inégalité est vraie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2: ♦◊◊

1. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2\ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\
\iff & a + b \leq a + 2\sqrt{ab} + b \\
\iff & 2\sqrt{ab} \geq 0 \\
\iff & \sqrt{ab} \geq 0 \\
\iff & ab \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$\boxed{2.}$ Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
Considérons $a \geq b$, alors $|a-b| = a - b$.

$$\begin{aligned}
& |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{a-b} \\
\iff & a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b \\
\iff & 2b \leq 2\sqrt{ab} \\
\iff & b^2 \leq ab \\
\iff & b \leq a
\end{aligned}$$

Le raisonnement est symétrique lorsque $b \geq a$.
Ainsi, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2\ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 3: ⧫◊◊

En utilisant la notion de distance sur $\mathbb{R}$, écrire comme réunion d'intervalles l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ |x+3| \leq 6 \text{ et } |x^2-1| > 3\}$$

Solution :

On a $x \in [-9,3]$ et $x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ donc $x \in [-9,-2] \cup [2,3]$.

Exercice 4: ⧫⧫◊

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. On définit les nombres m, g, h par

$$m = \frac{a+b}{2}, \qquad g = \sqrt{ab}, \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Et on les appelle respectivement moyenne arithmétique, géométrique et harmonique de a et b.
Démontrer l'encadrement

$$a \leq h \leq g \leq m \leq b$$

Solution :

Montrons les inégalités une par une :

- $m \leq b \iff \frac{a+b}{2} - b \leq 0 \iff \frac{a-b}{2} \leq 0 \iff a - b \leq 0 \iff a \leq b.$
- $g \leq m \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$
- $h \leq g \iff \frac{1}{h} \geq \frac{1}{g} \iff \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 0 \iff \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2ab} \geq 0 \iff \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2ab} \geq 0.$
- $a \leq h \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{h} \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \geq 0 \iff \frac{b-a}{2ab} \geq 0 \iff b - a \geq 0 \iff a \leq b$

Ainsi, $a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

Exercice 5: ⧫◊◊

Résoudre l'équation

$$\ln|x| + \ln|x+1| = 0$$

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

$$\begin{aligned} & \ln|x| + \ln|x+1| = 0 \\ \iff & \ln(|x(x+1|) = 0 \\ \iff & |x(x+1)| = 1 \end{aligned}$$

Supposons $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
On a :

$$\begin{aligned} & |x(x+1)| = 1 \\ \iff & x(x+1) = 1 \\ \iff & x^2 + x - 1 = 0 \\ \iff & x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Supposons $x \in]-1, 0[$.

$$\begin{aligned} & |x(x+1)| = 1 \\ \iff & -x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions dans $]-1,0[$.
L'ensemble des solutions de l'équation est : $\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

Exercice 6: ⧫◊◊

Résoudre l'équation

$$|x-2| = 6 - 2x$$

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Considérons $x \geq 2$

$$\begin{aligned} & |x-2| = 6 - 2x \\ \iff & x - 2 = 6 - 2x \\ \iff & x = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Considérons $x \leq 2$

$$\begin{aligned} & |x-2| = 6 - 2x \\ \iff & 2 - x = 6 - 2x \\ \iff & x = 4 \end{aligned}$$

Seul la solution $x = \frac{8}{3}$ convient. Ainsi, l'unique solution à l'équation est $\frac{8}{3}$.

Exercice 7: ⧫⧫⧫

Démontrer l'égalité $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x.
Soient $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Solution :

Notons r la partie fractionnaire de x, ainsi $x = \lfloor x \rfloor + r$.
On a alors $nx = n\lfloor x \rfloor + nr$ et $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + nr \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor nr \rfloor$.
Conséquemment, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n}$.
Or, $0 \leq \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < 1$ car $0 \leq r < 1$, donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor nr \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$.
Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor < \lfloor x + 1 \rfloor$.
Par conséquent, $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 8: ⧫⧫◊

1. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Soit p un entier supérieur à 2. Que vaut la partie entière de

$$\sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\iff\ & 2\sqrt{x(x+1)} - 2x < 1 \\
\iff\ & (2\sqrt{x(x+1)})^2 < (1+2x)^2 \\
\iff\ & 4x(x+1) < 4x^2 + 4x + 1 \\
\iff\ & 4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x < 1 \\
\iff\ & 0 < 1
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\
\iff\ & 1 < 2\sqrt{(x+1)^2} - 2\sqrt{x(x+1)} \\
\iff\ & 1 < 2|x+1| - 2\sqrt{x(x+1)} \\
\iff\ & (2x+1)^2 > (2\sqrt{x(x+1)})^2 \\
\iff\ & 4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x \\
\iff\ & 1 > 0
\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$
On a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc, en remplaçant x par $x-1$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1} < \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Ainsi,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

Mais alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p^2-1} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{p^2-1} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) \\
\iff\ & \sqrt{p^2} - \sqrt{1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{p^2-1} - \sqrt{0} \\
\iff\ & 2p - 2 < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{p^2-1} \\
\iff\ & 2p - 2 < \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \lfloor 2\sqrt{p^2-1} \rfloor
\end{aligned}$$

Or $2p - 2 < 2\sqrt{p^2-1} < 2p$ donc $\lfloor 2\sqrt{p^2-2} \rfloor = 2p - 2$
On en conclut :

$$\lfloor \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \rfloor = 2p - 2$$

Exercice 9: ♦♦♦

Prouver que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

Solution :

Supposons que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que :

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & p \ln 3 = q \ln 2 \\ \iff & \ln(3^p) = \ln(2^q) \\ \iff & e^{\ln(3^p)} = e^{\ln 2^q} \\ \iff & 3^p = 2^q \end{aligned}$$

Or 3^p est toujours impair et 2^q est toujours pair, donc cela est absurde.
Ainsi, $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 10: ♦♦♦

Soient x et y deux rationnels positifs tels que
$\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.
Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Solution :

Supposons $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.
On a :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y \\ \iff & \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \end{aligned}$$

Or $x - y \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ par hypothèse. Donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.
D'autre part,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{x}$$

$\sqrt{x}$ est donc la somme de deux rationnels, et est donc rationnel.
C'est absurde. On en conclut que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Exercice 11: ♦♦♢

Soit l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Cette partie de $\mathbb{R}$ est-elle bornée ? Possède-t-elle un maximum ? Un minimum ?

Solution :

Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = \frac{n^2 - 1}{n} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \\ &= \frac{n^3 - n}{n^3 + n} = \frac{n^3 + n}{n^3 + n} - \frac{2n}{n^3 + n} \\ &= 1 - \frac{2}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{2}{(n+1)^2 + 1} - 1 + \frac{2}{n^2 + 1} \\ &= \frac{2}{n^2 + 1} - \frac{2}{n^2 + 2n + 2} \\ &= \frac{4n + 2}{(n^2)(n^2 + 2n + 2)} \end{aligned}$$

C'est toujours positif : on en déduit que, (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.
Elle admet donc un minimum en 1, qui est 0.
Elle admet aussi un majorant lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

Ainsi, A admet 0 comme minimum, n'a pas de maximum et est majorée par 1.

Exercice 12: ♦♦◊

1. Montrer que

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad : \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}.$$

Étudier le cas d'égalité.

2. En déduire que l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \mid (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ et } a+b+c \geq 2 \right\}$$

admet un minimum et le calculer.

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

On a :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} \geq 0 \\ \iff & \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)} \geq 0 \\ \iff & (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{a+b} = \frac{3a-b}{4} \\ \iff & (a-b)^2 = 0 \\ \iff & a = b \end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Soient $(a,b,c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ tels que $a+b+c \geq 2$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} &\geq \frac{3a-b}{4} + \frac{3b-c}{4} + \frac{3c-a}{4} \\ &\geq \frac{2a+2b+2c}{4} \\ &\geq \frac{a+b+c}{2} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Or, lorsque $a = b = c = \frac{2}{3}$, on a $a+b+c \geq 2$ et:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = 3\frac{a}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ainsi, $1 \in E$ et $\forall x \in E$, $x \geq 1$ donc 1 est minimum de E.