

# Chapitre 25

## Espaces Vectoriels

### Marathon du dimanche de paques

#### Exercice 1: ♦♦♦

Soit  $F$  l'ensemble des suites bornées et  $G$  l'ensemble des suites qui tendent vers 0.

- Démontrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- Pourquoi peut-on dire que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  ?

**Solution :**

[1.] La suite nulle tend vers 0 donc  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in G$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $u, v \in G$ , c'est-à-dire  $u \rightarrow 0$  et  $v \rightarrow 0$ .

On a  $\lambda u + \mu v \rightarrow 0$  par produit et somme de limites donc  $\lambda u + \mu v \in G$ .

Ainsi,  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

[2.] La suite nulle est bornée donc  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $u, v \in F$ , c'est-à-dire  $u$  et  $v$  sont bornées.

Alors  $\exists M_u, M_v \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M_u \wedge |v_n| \leq M_v$ .

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda u_n + \mu v_n \leq \lambda M_u + \mu M_v$  donc  $\lambda u + \mu v$  est bornée et appartient à  $F$ .

Ainsi,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

[3.]  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  car  $G \subset F$  et  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

#### Exercice 2: ♦♦♦

Dans chacun des cas suivants, justifier que  $F_i$  est un s.e.v. de  $E_i$ .

- $E_1 = \mathbb{R}^3$  et  $F_1 = \{(x, y, x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- $E_2 = M_n(\mathbb{R})$  et  $F_2 = \{M \in E_2 : \text{Tr}(M) = 0\}$ .
- $E_3 = M_n(\mathbb{R})$  et  $F_3 = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$  pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$  fixé.

**Solution :**

[1.] On a  $F_1 = \{(x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$  c'est bien un s.e.v. de  $\mathbb{R}^3$ .

[2.] On a  $F_2 = \text{Ker}(\text{Tr})$ , or  $\text{Tr}$  est linéaire donc  $F_2$  est un s.e.v. de  $E_2$ .

[3.] La matrice nulle commute avec toutes les matrices donc  $0_{M_n(\mathbb{R})} \in F_3$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $M, N \in F_3$ , c'est-à-dire  $AM = MA$  et  $AN = NA$ .

On a  $A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A$  donc  $\lambda M + \mu N \in F_3$ .

Ainsi,  $F_3$  est un s.e.v. de  $E_3$ .

#### Exercice 3: ♦♦♦

Soit  $U$  l'ensemble des fonctions croissantes sur  $I$ .

Soit  $V = \{f - g \mid f, g \in U\}$ . Montrer que  $V$  est un s.e.v. de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

**Solution :**

La fonction nulle, notée 0 est croissante sur  $I$  et  $0 = 0 - 0$  donc  $0 \in V$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $\varphi, \psi \in V : \exists f_\varphi, g_\varphi \in U \mid \varphi = f_\varphi - g_\varphi$  et  $\exists f_\psi, g_\psi \in U \mid \psi = f_\psi - g_\psi$ .

Alors  $\lambda\varphi + \mu\psi = \lambda(f_\varphi - g_\varphi) + \mu(f_\psi - g_\psi) = (\lambda f_\varphi + \mu f_\psi) - (\lambda g_\varphi + \mu g_\psi)$ .

Or  $\lambda f_\varphi + \mu f_\psi$  et  $\lambda g_\varphi + \mu g_\psi$  sont croissantes car sommes de fonctions croissantes donc  $\lambda\varphi + \mu\psi \in V$ .

Ainsi,  $V$  est un s.e.v. de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

#### Exercice 4: ♦♦♦

Soit  $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ,  $u = (1, j, j^2)$ ,  $v = (1, j^2, j)$  et  $w = (j, j^2, 1)$ .

Montrer que  $\text{Vect}(u, v, w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$ .

**Solution :**

$$\begin{aligned} \text{Vect}(u, v, w) &= \{x(1, j, j^2) + y(1, j^2, j) + z(j, j^2, 1) \mid x, y, z \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(x + y + zj, xj + yj^2 + zj^2, xj^2 + yj + z) \mid x, y, z \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

En effet,  $\forall x, y, z \in \mathbb{C}, x + y + zj + xj + yj^2 + zj^2 + xj^2 + yj + z = (x + y + z)(1 + j + j^2) = 0$ .

#### Exercice 5: ♦♦♦

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F, G$  deux s.e.v. de  $E$ . Montrer :

$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

**Solution :**

$\Rightarrow$  Supposons que  $F \cup G$  est un s.e.v. de  $E$ .

Par l'absurde, supposons que  $F \not\subset G$  et  $G \not\subset F$ .

Soient  $x \in F \setminus G$  et  $y \in G \setminus F$ . On a  $x + y \in F \cup G$ , puisque c'est un s.e.v.

Ainsi,  $x + y \in F$ , ce qui est absurde car  $y \notin F$ , ou  $x + y \in G$ , ce qui est absurde car  $x \notin G$ .

Donc  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

$\Leftarrow$  Supposons que  $F \subset G$  SPDG.

Alors  $F \cup G = G$ , qui est un s.e.v. de  $E$ .

#### Exercice 6: ♦♦♦

Soit  $P$  l'ensemble des fonctions paires sur  $\mathbb{R}$  et  $I$  l'ensemble des fonctions impaires sur  $\mathbb{R}$ .

- Justifier que  $P$  et  $I$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- Démontrer que  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$ .

**Solution :**

[1.] La fonction nulle est paire et impaire donc  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in P \cap I$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in P$ , c'est-à-dire  $f(-x) = f(x)$  et  $g(-x) = g(x)$ . On prend  $x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$ .

Ainsi,  $\lambda f + \mu g \in P$ . Même raisonnement pour  $I$ .

Ainsi,  $P$  et  $I$  sont des s.e.v. de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

[2.] On a  $P \cap I = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$  car  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ .

Soit  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

**Analyse.** Supposons qu'il existe  $g \in P$  et  $h \in I$  tels que  $f = g + h$ .

Alors  $f(x) = g(x) + h(x)$  et  $f(-x) = g(-x) - h(x)$ .

En sommant, on a  $2g(x) = f(x) + f(-x)$  et  $2h(x) = f(x) - f(-x)$ .

Ainsi,  $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$  et  $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ .

**Synthèse.** On pose  $f : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$  et  $h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ .

On a bien que  $f = g + h$ ,  $g \in P$  et  $h \in I$ .

Ainsi,  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$ .

#### Exercice 7: ♦♦♦

Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles convergentes et  $F$  l'ensemble des suites réelles de limite nulle.

- Démontrer que  $E$  est un s.e.v. de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On admettra que  $F$  l'est aussi.
- Soit  $c$  la suite constante égale à 1. Montrer que  $E = F \oplus \text{Vect}(c)$ .

**Solution :**

[1.] La suite nulle converge et  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $u, v \in E$ , c'est-à-dire  $u$  et  $v$  convergent.

Alors  $\lambda u + \mu v$  converge par produit et somme de limites donc  $\lambda u + \mu v \in E$ .

Ainsi,  $E$  est un s.e.v. de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

[2.] On a  $F \cap \text{Vect}(c) = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$  car les suites constantes, sauf  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ , n'ont pas de limite nulle.

Soit  $u \in E$ , alors  $\exists l \in \mathbb{R} \mid u_n \rightarrow l$ .

Soit  $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l$ .

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + l \cdot c_n$ . Or  $v \in F$  et  $l \cdot c \in \text{Vect}(c)$ .

Ainsi,  $E = F \oplus \text{Vect}(c)$ .

#### Exercice 8: ♦♦♦

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $P\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  divisibles par  $P$ .

- Justifier que  $P\mathbb{K}[X]$  est un s.e.v. de  $E$ .
- Démontrer que  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$ .

**Solution :**

[1.] Le polynôme nul est divisible par tout polynôme donc  $0_{\mathbb{K}[X]} \in P\mathbb{K}[X]$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $Q, R \in P\mathbb{K}[X]$ .

Alors  $P$  divise  $\lambda Q + \mu R$  car  $P$  divise  $\lambda Q$  et  $\mu R$ .

Ainsi,  $\lambda Q + \mu R \in P\mathbb{K}[X]$  donc  $P\mathbb{K}[X]$  est un s.e.v. de  $E$ .

[2.] On a  $P\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{n-1}[X] = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  car si  $A \in P\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$ , alors  $P$  divise  $A$  et  $A$  est de degré strictement inférieur à  $n$ , ce qui n'est possible que pour  $0_{\mathbb{K}[X]}$ .

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$ , alors  $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \times P\mathbb{K}[X] \mid A = PQ + R$ .

Or  $\deg(R) < \deg(P) = n$  donc  $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  et  $PQ \in P\mathbb{K}[X]$ .

Ainsi,  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$ .

#### Exercice 9: ♦♦♦

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F, G, H$  trois s.e.v. de  $E$  tels que :

$$\begin{cases} F + G = F + H = F + (G \cap H) \\ F \cap G = F \cap H \end{cases}$$

Montrer que  $G = H$ .

**Solution :**

$\subset$  Soit  $x \in G$ .

Alors  $\exists(x_F, x_{G \cap H}) \in F \times G \cap H \mid x = x_F + x_{G \cap H}$ .

Ainsi,  $x_F = x - x_{G \cap H} \in G$  comme somme d'éléments de  $G$ .

On obtient  $x_F \in F \cap G = F \cap H$ .

Ainsi,  $x_F \in H$  et  $x = x_F + x_{G \cap H} \in H$  comme somme d'éléments de  $H$ .

Donc  $G \subset H$ .

$\supset$  Raisonnement identique,  $H \subset G$ .

Ainsi,  $G = H$  par double inclusion.

#### Exercice 10: ♦♦♦

Montrer que les vecteurs  $(1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1)$  et  $(1, 2, 3, 4)$  forment une famille libre de  $\mathbb{R}^4$ .

**Solution :**

Soient  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda(1, 0, 1, 0) + \mu(0, 1, 0, 1) + \nu(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0)$ .

Système trivial, on trouve  $\lambda = \mu = \nu = 0$ .

Ainsi, la famille est libre.

#### Exercice 11: ♦♦♦

Montrer que les suites  $u = (1)_{n \in \mathbb{N}}, v = (n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $w = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une famille libre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Solution :**

Soient  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda(1)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(n)_{n \in \mathbb{N}} + \nu(2^n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On a  $\lambda + \mu + \nu 2^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En particulier, pour  $n = 0$ , on a  $\lambda + \nu = 0$ .

Pour  $n = 1$ , on a  $\lambda + \mu + 2\nu = \mu + \nu = 0$  en simplifiant les  $\lambda + \nu$  et  $\mu + \nu$ .

Pour  $n = 2$ , on a  $\lambda + 2\mu + 4\nu = \nu = 0$  en simplifiant les  $\lambda + \nu$  et  $\mu + \nu$ .

Ainsi,  $\lambda = \mu = \nu = 0$  et la famille est libre.

#### Exercice 12: ♦♦♦

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $q_1 < q_2 < \dots < q_p$   $p$  réels strictement positifs.

Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $a^{(k)}$  la suite géométrique de raison  $q_k$  et de premier terme 1.

Montrer que  $(a^{(1)}, \dots, a^{(p)})$  est libre.

**Solution :**

Par récurrence sur  $p$  :

**Initialisation.** Pour  $p = 1$ , la famille est réduite à un seul vecteur donc elle est libre.

**Hérédité.** Supposons que la famille est libre pour  $p - 1 \in \mathbb{N}$ .

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  tels que pour  $n \in \mathbb{N}$   $\lambda_1 q_1^n + \dots + \lambda_p q_p^n = 0$ .

Alors  $\lambda_1 \left(\frac{q_1}{q_p}\right)^n + \dots + \lambda_p = 0$ , on fait tendre vers l'infini :  $\lambda_p = 0$ .

On obtient  $\lambda_1 q_1^n + \dots + \lambda_{p-1} q_{p-1}^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par hypothèse de récurrence, on a  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ .

**Conclusions.** Par principe de récurrence, la famille est libre pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

#### Exercice 13: ♦♦♦

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ .

Démontrer que  $(P_0, \dots, P_n)$  est une famille libre de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Solution :**

Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$ .

Alors  $\lambda_0(1 - X)^n + \dots + \lambda_n X^n = 0$ .

Pour  $X = 1$ , on a  $\lambda_n = 0$ .

On obtient  $\lambda_0(1 - X)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}(1 - X) = 0$ .

Donc  $(1 - X)(\lambda_0(1 - X)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}) = 0$ .

Donc  $\lambda_0(1 - X)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1} = 0$  car  $1 - X \neq 0$ .

On itère le raisonnement pour obtenir  $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Ainsi, la famille est libre.

#### Exercice 14: ♦♦♦

Déterminer les fonctions  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  telles que :

- $f$  est dérivable et  $(f, f')$  est une famille liée.
- $f$  est deux fois dérivable et  $(f, f', f'')$  est une famille liée.

**Solution :**

[1.] Soit  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  dérivable telle que  $(f, f')$  est liée.

Puisque  $(f, f')$  est liée,  $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid f' = \lambda f$ .

Alors  $f' = \lambda f$ , une EDL1.

Ainsi,  $f \in \{x \mapsto \alpha e^{\lambda x} \mid \alpha, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

[2.] Soit  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  deux fois dérivable telle que  $(f, f', f'')$  est liée.

Puisque  $(f, f', f'')$  est liée,  $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid f'' = \lambda f + \mu f'$ .

Alors  $f'' = \lambda f + \mu f'$ , une EDL2.

Les fonctions sont donc les solutions de cette EDL2.

#### Exercice 15: ♦♦♦