

## Colles, semaine 16 (29/01→2/02)

### *Polynômes* (tout)

Tout sur les polynômes, notamment la partie 2 qui fait le lien entre racines et factorisation.

#### Questions de cours.

- Théorème de division euclidienne : preuve de l'unicité.
- Théorème :  $\alpha$  est racine de  $P$  ssi  $X - \alpha$  divise  $P$ .
- Caractérisation du fait que la multiplicité d'une racine soit au moins égale à  $m$ .
- Factorisation de  $X^6 - 1$  en produit d'irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  puis de  $\mathbb{R}[X]$ .
- Formules de Viète : un énoncé précis dans le cas général (on pourra demander la preuve dans le cas  $n = 3$ ).
- Théorème d'interpolation de Lagrange : existence et unicité d'un polynôme interpolateur, sous les bonnes hypothèses.

#### Savoir-faire importants.

- Savoir faire une division euclidienne en théorie (appliquer le théorème).
- Savoir poser une division euclidienne (comme à l'école primaire avec les entiers).
- Savoir montrer qu'un polynôme est nul en montrant qu'il a « trop » de racines.
- Savoir prouver que deux polynômes sont égaux en prouvant que leur différence a « trop » de racines.
- Savoir chercher les racines d'un polynôme en posant une équation du type  $P(z) = 0$  (et non pas  $P(X) = 0$  !!!)
- Savoir factoriser un polynôme de degré  $n$  dans  $\mathbb{K}[X]$  lorsqu'on a  $n$  racines dans  $\mathbb{K}$ , distinctes deux à deux, ou comptées avec leur multiplicité.
- Savoir faire apparaître des irréductibles de degré 2 de  $\mathbb{R}[X]$  en couplant les racines avec leur conjuguées.
- Savoir accéder à la somme et au produit des racines grâce aux formules de Viète.
- Connaître les polynômes de Lagrange associés à une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de scalaires deux à deux distincts, et leur rôle dans l'interpolation de Lagrange.

À venir en semaine 17 : Limites et continuité.