

Applications  
Corrigé

DARVOUX Théo

Décembre 2023

Exercices.

Images directes, images réciproques. . . . .	2
Exercice 15.1 . . . . .	2
Exercice 15.2 . . . . .	2
Exercice 15.3 . . . . .	3
Applications injectives, surjectives. . . . .	3
Exercice 15.4 . . . . .	3
Exercice 15.5 . . . . .	4
Exercice 15.6 . . . . .	4
Exercice 15.7 . . . . .	4
Exercice 15.8 . . . . .	5
Exercice 15.9 . . . . .	5
Exercice 15.10 . . . . .	5
Exercice 15.11 . . . . .	6
Exercice 15.12 . . . . .	6
Exercice 15.13 . . . . .	7

**Exercice 15.1** [◆◆◆]

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soient deux parties  $A \subset E$  et  $B \subset F$ . Montrer l'égalité

$$f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B)).$$

Procédons par double inclusion.

⊙ Soit  $y \in f(A) \cap B$ . Montrons que  $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ .

On a  $y \in f(A)$  et  $y \in B$ .

$\exists x \in A \mid y = f(x)$  donc  $x \in A$  et  $x \in f^{-1}(B)$  car  $y \in B$ .

Ainsi  $x \in A \cap f^{-1}(B)$  et  $f(x) = y \in f(A \cap f^{-1}(B))$

⊙ Soit  $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$  Montrons que  $y \in f(A) \cap B$ .

$\exists x \in A \cap f^{-1}(B) \mid y = f(x)$  donc  $x \in A$  et  $x \in f^{-1}(B)$ .

Ainsi,  $f(x) = y \in f(A)$  et  $f(x) = y \in B : y \in f(A) \cap B$ .

□

**Exercice 15.2** [◆◆◆]

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .

1. (a) Montrer que  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

(b) Montrer que si  $f$  est injective, la réciproque est vraie.

2. (a) Montrer que  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

(b) Démontrer que si  $f$  est surjective, la réciproque est vraie.

3. Montrer que  $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$ .

4. Montrer que  $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$ .

1.

a) Soit  $x \in A$ . Montrons que  $x \in f^{-1}(f(A))$ .

On a  $x \in A$  alors  $f(x) \in f(A)$  et  $x \in f^{-1}(f(A))$ .

b) On suppose  $f$  injective, soit  $x \in f^{-1}(f(A))$ .

On applique  $f : f(x) \in f(A)$ . Par injectivité de  $f$ ,  $x \in A$ .

2.

a) Soit  $y \in f(f^{-1}(B))$ .

On a  $\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$ . Ainsi,  $f(x) \in B : y \in B$ .

b) Supposons  $f$  surjective, soit  $y \in B$ .

On a  $\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$  et  $f(x) = y \in f(f^{-1}(B))$ .

3) Soit  $y \in f(f^{-1}(f(A)))$ . Montrons que  $y \in f(A)$ .

On a  $\exists x \in f^{-1}(f(A)) \mid y = f(x)$  et  $f(x) \in f(A)$  donc  $y \in f(A)$ .

Soit  $y \in f(A)$ . Montrons que  $y \in f(f^{-1}(f(A)))$ .

On a  $\exists x \in A \mid y = f(x)$  alors  $f(x) \in f(A)$  et  $x \in f^{-1}(f(A))$ . Donc  $f(x) = y \in f(f^{-1}(f(A)))$ .

4) Soit  $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$ . Montrons que  $y \in f^{-1}(B)$ .

On a  $f(y) \in f(f^{-1}(B))$  alors  $y \in f^{-1}(B)$ .

Soit  $y \in f^{-1}(B)$ . Montrons que  $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$ .

On a  $f(y) \in f(f^{-1}(B))$  donc  $y \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$ .

□

### Exercice 15.3 [◆◆◆]

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Montrer que

$$f \text{ est injective} \iff [\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$$

⊙ Supposons  $f$  injective. Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

On sait déjà que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

Montrons alors que  $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ .

Soit  $y \in f(A) \cap f(B)$ . On a que  $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$ .

Ainsi,  $\exists x_A \in A \mid y = f(x_A)$  et  $\exists x_B \in B \mid y = f(x_B)$ .

Or  $f$  est injective :  $x_A = x_B$ , ainsi  $x_A \in A \cap B$ .

On a enfin que  $f(x_A) \in f(A \cap B)$ , alors  $y \in f(A \cap B)$ .

⊙ Supposons  $[\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$ . Montrons que  $f$  est injective.

Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

Soient  $x, x' \in E$ . On suppose que  $f(x) = f(x')$ . Montrons que  $x = x'$ .

On a que  $\{x\}$  et  $\{x'\} \in \mathcal{P}(E)$ .

Ainsi :  $f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$ .

Supposons que  $x \neq x'$ . On a alors :  $f(\emptyset) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) : \emptyset = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$ .

Or  $f(x) = f(x')$  donc  $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} \neq \emptyset$ . C'est absurde :  $x = x'$ .

On a bien montré que  $f$  est injective. □

### Exercice 15.4 [◆◆◆]

Soient

$$f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \\ (n, p) \mapsto (-1)^n p \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{1+ix}{1-ix} \end{cases}$$

Ces fonctions sont-elles injectives ? Surjectives ?

On a que  $f$  n'est pas injective :  $f(0, 1) = f(2, 1) = 1$ .

Montrons que  $f$  est surjective.

Soit  $y \in \mathbb{Z}$ . Montrons que  $\exists (n, p) \in \mathbb{N}^2 \mid f(n, p) = y$ .

Si  $y \geq 0$ , on prend  $n = 0$  et  $p = |y|$ .

Si  $y \leq 0$ , on prend  $n = 1$  et  $p = |y|$ .

On a que  $g$  n'est pas surjective : 0 n'a aucun antécédent par  $g$ .

Montrons que  $g$  est injective.

Soient  $x, x' \in \mathbb{R}$ , supposons  $g(x) = g(x')$ . Montrons que  $x = x'$ .

On a :

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\iff \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1+ix'}{1-ix'} \\ &\iff (1+ix)(1-ix') = (1+ix')(1-ix) \\ &\iff 1-ix'+ix+xx' = 1-ix+ix'+xx' \\ &\iff 2ix = 2ix' \\ &\iff x = x' \end{aligned}$$

On a bien que  $g$  est injective. □

**Exercice 15.5** [◆◆◆]

Dans cet exercice, on admet que  $\pi$  est irrationnel.

Démontrer que  $\cos|_{\mathbb{Q}}$  n'est pas injective et que  $\sin|_{\mathbb{Q}}$  l'est.

On sait que  $\cos$  est paire :  $\cos|_{\mathbb{Q}}$  l'est aussi.

Alors  $\cos|_{\mathbb{Q}}(\frac{1}{2}) = \cos|_{\mathbb{Q}}(-\frac{1}{2})$ . Or  $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$  :  $\cos|_{\mathbb{Q}}$  n'est pas injective.

Soient  $x, x' \in \mathbb{Q}^2$ . Supposons que  $\sin|_{\mathbb{Q}}(x) = \sin|_{\mathbb{Q}}(x')$ . Montrons que  $x = x'$ .

On a :

$$\begin{aligned} \sin|_{\mathbb{Q}}(x) = \sin|_{\mathbb{Q}}(x') &\iff x \equiv x'[2\pi] \text{ (} 2\pi\text{-périodicité)} \\ &\iff x = x' + 2k\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Or,  $\forall k \in \mathbb{Z}^*, x' + 2k\pi \notin \mathbb{Q}$ . On a alors que  $k = 0$  :

$$\sin|_{\mathbb{Q}}(x) = \sin|_{\mathbb{Q}}(x') \iff x = x' + 2 \cdot 0\pi \iff x = x'$$

□

**Exercice 15.6** [◆◆◆]

Soit l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  n'est pas injective.

2. Montrer que  $f|_{\mathbb{Q}}$  est injective.

1. On a  $f(2) = 4$  et  $f(-\sqrt{2}) = 4$  :  $f$  n'est pas injective.

2. Soient  $x, x' \in \mathbb{Q}$  tels que  $f|_{\mathbb{Q}}(x) = f|_{\mathbb{Q}}(\tilde{x})$ . Montrons que  $x = \tilde{x}$ .

Cas n°1 :  $x$  et  $\tilde{x}$  positifs :

$$f|_{\mathbb{Q}}(x) = f|_{\mathbb{Q}}(\tilde{x}) \iff x^2 = \tilde{x}^2 \iff x = \tilde{x}$$

Cas n°2 :  $x$  et  $\tilde{x}$  strictement négatifs :

$$f|_{\mathbb{Q}}(x) = f|_{\mathbb{Q}}(\tilde{x}) \iff 2x^2 = 2\tilde{x}^2 \iff x^2 = \tilde{x}^2 \iff x = \tilde{x} \text{ car } x, \tilde{x} \in \mathbb{R}_-^*$$

Cas n°3 :  $x \geq 0$  et  $\tilde{x} < 0$  :

$$f|_{\mathbb{Q}}(x) = f|_{\mathbb{Q}}(\tilde{x}) \iff x^2 = 2\tilde{x}^2 \iff x = -\sqrt{2}\tilde{x} \iff -\frac{x}{\tilde{x}} = \sqrt{2}$$

Cela est impossible par stabilité de  $\mathbb{Q}$  par la division. Donc  $f|_{\mathbb{Q}}(x) \neq f|_{\mathbb{Q}}(\tilde{x})$ .

Le cas où  $x < 0$  et  $\tilde{x} \geq 0$  est symétrique.

On a prouvé que  $f|_{\mathbb{Q}}$  est injective.

□

**Exercice 15.7** [◆◆◆]

Soit  $f : E \rightarrow E$ . Montrer que

1.  $f$  est injective si et seulement si  $f \circ f$  est injective.

2.  $f$  est surjective si et seulement si  $f \circ f$  est surjective.

1. Supposons  $f$  injective. D'après la proposition 18,  $f \circ f$  est injective.

Supposons  $f \circ f$  injective. D'après la proposition 19,  $f$  est injective.

2. Supposons  $f$  surjective. D'après la proposition 23,  $f \circ f$  est surjective.

Supposons  $f \circ f$  surjective. D'après la proposition 24,  $f$  est surjective.

□

**Exercice 15.8 [◆◆◇]**

Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  une application.

On suppose que  $f \circ f = f$  et que  $f$  est injective ou surjective. Montrer que  $f = \text{id}_E$ .

⊙ Supposons  $f$  injective. Soit  $x \in E$ .

On a  $f \circ f(x) = f(x)$ . Par injectivité de  $f$ ,  $f(x) = x$  donc  $f = \text{id}_E$ .

⊙ Supposons  $f$  surjective. Soit  $y \in E$ .

On a  $f \circ f(y) = f(y)$  et  $\exists x \in E \mid f(x) = y$  par surjectivité de  $f$ .

Donc  $f \circ f \circ f(x) = f \circ f(x)$ . Alors  $f \circ f(x) = f(x)$  et  $f(y) = y : f = \text{id}_E$ .

□

**Exercice 15.9 [◆◆◇]**

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $f : E \rightarrow E$  une application telle que  $f \circ f \circ f = f$ .

Montrer que

$$f \text{ est surjective} \iff f \text{ est injective}$$

⊙ Supposons  $f$  injective, montrons que  $f$  est surjective.

Soit  $y \in E$ . Par définition de  $f : f \circ f \circ f(y) = f(y)$ .

Par injectivité de  $f : f \circ f(y) = y$ .

Donc  $f(y)$  est antécédent de  $y : f$  est surjective.

⊙ Supposons  $f$  surjective, montrons  $f$  injective.

Soient  $y, y' \in E$  tels que  $f(y) = f(y')$ . Montrons que  $y = y'$ .

Par surjectivité de  $f$ ,  $\exists x, x' \in E \mid f(x) = y \wedge f(x') = y'$ .

Ainsi,  $f \circ f(x) = f \circ f(x')$ .

Appliquons  $f : f \circ f \circ f(x) = f \circ f \circ f(x')$ .

Alors :  $f(x) = f(x')$  et donc  $y = y'$ .

On a bien prouvé l'injectivité de  $f$ .

□

**Exercice 15.10 [◆◆◇]**

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + (-1)^n \end{cases}$ .

Démontrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{N}$  dans lui-même et donner sa réciproque.

Montrons que  $f$  est un inverse à gauche et à droite d'elle-même.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(n) &= f(n + (-1)^n) = n + (-1)^n + (-1)^{n+(-1)^n} \\ &= n + (-1)^n(1 + (-1)^{(-1)^n}) \end{aligned}$$

Or  $(-1)^n$  est toujours impair :  $(-1)^{(-1)^n} = -1$ . Ainsi :

$$f \circ f(n) = n + (-1)^n(1 - 1) = n$$

On a bien que  $f$  est un inverse à gauche et à droite d'elle-même :  $f$  est bijective et est sa propre réciproque.

□

**Exercice 15.11 [◆◆◆]**

Soient  $E$  un ensemble et  $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ . On définit

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

1. Calculer  $\Phi(\emptyset)$  et  $\Phi(E \setminus (A \cup B))$ . Que dire de  $A$  et  $B$  si  $(A, \emptyset)$  admet un antécédent par  $\Phi$  ?
2. Montrer que  $\Phi$  injective  $\iff A \cup B = E$ .
3. Montrer que  $\Phi$  surjective  $\iff A \cap B = \emptyset$ .

1. On a  $\Phi(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$  et  $\Phi(E \setminus (A \cup B)) = ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap A, (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$ .

Si  $(A, \emptyset)$  admet un antécédent par  $\Phi$  alors  $A$  et  $B$  sont disjoints :  $A \cap B = \emptyset$ .

2.

⊙ Supposons  $\Phi$  injective. Montrons  $A \cup B = E$ .

On a que  $\Phi(E) = (A, B)$  et  $\Phi(A \cup B) = (A, B)$ . Par injectivité de  $\Phi$ ,  $E = A \cup B$ .

⊙ Supposons  $A \cup B = E$ . Montrons que  $\Phi$  est injective.

Soient  $X, Y \in \mathcal{P}(E)$  telles que  $\Phi(X) = \Phi(Y)$ . Montrons que  $X = Y$ .

On a

$$\begin{aligned} (X \cap A, X \cap B) &= (Y \cap A, Y \cap B) \\ \implies X \cap A &= Y \cap A \wedge X \cap B = Y \cap B \\ \implies (X \cap A) \cup (X \cap B) &= (Y \cap A) \cup (Y \cap B) \\ \implies X \cap (A \cup B) &= Y \cap (A \cup B) \\ \implies X &= Y \text{ car } A \cup B = E \end{aligned}$$

2.

⊙ Supposons  $\Phi$  surjective. Montrons  $A \cap B = \emptyset$ .

On a que  $\exists X \in \mathcal{P}(E) \mid \Phi(X) = (A, \emptyset)$  puisque  $(A, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$  et que  $\Phi$  est surjective.

Or, puisque  $X$  existe, on a que  $A$  et  $B$  sont disjoints:  $A \cap B = \emptyset$ .

⊙ Supposons  $A \cap B = \emptyset$ . Montrons que  $\Phi$  est surjective.

Soit  $Y \in \mathcal{P}(A)$  et  $Z \in \mathcal{P}(B)$ . Montrons que  $\exists X \in \mathcal{P}(E) \mid \Phi(X) = (Y, Z)$ .

On choisit  $X = Y \cup Z$ . On a  $\Phi(X) = ((Y \cup Z) \cap A, (Y \cup Z) \cap B)$ .

Or  $A \cap B = \emptyset$ . En particulier,  $Y \cap B = \emptyset$  et  $Z \cap A = \emptyset$  car  $Y \in \mathcal{P}(A)$  et  $Z \in \mathcal{P}(B)$ .

Alors,  $\Phi(X) = (Y \cap A, Z \cap B) = (Y, Z)$ .

On a bien que  $X$  est un antécédent de  $(Y, Z)$ . □

**Exercice 15.12 [◆◆◆]**

Soit  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ .

1. Démontrer que  $f$  est injective si et seulement si elle est inversible à gauche.  
Plus précisément, prouver l'assertion

$$f \text{ est injective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \ g \circ f = \text{id}_E$$

2. Démontrer que  $f$  est surjective si et seulement si elle est inversible à droite.  
Plus précisément, prouver l'assertion

$$f \text{ est surjective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \ f \circ g = \text{id}_F$$

**Exercice 15.13 [◆◆◆] Théorème de Cantor**

Soit  $f \in \mathcal{F}(E, \mathcal{P}(E))$ . Montrer que  $f$  n'est pas surjective.

Indication : on pourra considérer  $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ .

Montrons que  $A$  n'a pas d'antécédent par  $f$ .

Supposons qu'il en ait un.

Alors  $\exists \alpha \in E \mid A = f(\alpha)$ .

⊙ Supposons que  $\alpha \in A$ . Alors  $\alpha \in \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ .

Donc  $\alpha \notin f(\alpha)$  donc  $\alpha \notin A$ . Absurde.

⊙ Supposons que  $\alpha \notin A$ . Alors  $\alpha \notin \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ .

Donc  $\alpha \in A$ . Absurde.

$\alpha$  n'existe pas :  $A$  n'a pas d'antécédent par  $f$  et  $f$  n'est pas surjective.

□