

**Exercice 1** Ensembles : des calculs.

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

Démontrer par le calcul ensembliste les égalités ci-dessous :

1.  $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$ ;
2.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = A \cup B$ .

*Le second résultat se dessine bien (le faire).*

**Exercice 2** Ensembles : de la logique et des inclusions.

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ .

Démontrer que les trois assertions ci-dessous sont deux à deux équivalentes

1.  $A \setminus B \subset C$ .
2.  $A \setminus C \subset B$ .
3.  $A \subset B \cup C$ .

*Une question bonus : considérons  $n$  assertions dont on veut montrer qu'elles sont équivalentes deux à deux. D'un point de vue naïf, combien d'implications devrait-on établir ? Grâce à la transitivité de l'implication, de combien d'implications peut-on se contenter ?*

**Exercice 3** Un exercice de plus sur les fonctions.

Dans cet exercice, on considère la fonction

$$f : x \mapsto \arcsin(\operatorname{th}(x))$$

1. Justifier soigneusement que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
2. Justifier soigneusement que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et prouver que  $f' = \frac{1}{\operatorname{ch}}$ .
3. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$