Relations Binaires
Corrigé

DARVOUX Théo

Décembre 2023

Exercices.

Exercice 16.1 [♦♦◊]

Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser le cardinal de la classe d'équivalence d'un réel x.

1. Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien que $xe^x = xe^x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$, on a bien $ye^x = xe^y$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Montrons que $xe^z = ze^x$.
D'après la première égalité, $y = xe^{y-x}$.
On remplace y dans la seconde : $xe^{y-x+z} = ze^y$.
On divise par e^y : $xe^{z-x} = z$. On multiplie par e^x : $xe^z = ze^x$.
On a bien $x \mathscr{R} z$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
On a $x \mathscr{R} y \iff \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y}$.
On pose $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$. La classe d'équivalence de x est alors $\{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}$.
On a que f est dérivable et $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$. Alors :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Alors, pour $x \in]-\infty, 0]$, $|[x]| = 1$, pour $x = 1$, $|[x]| = 1$ et sinon, $|[x]| = 2$.

□

Exercice 16.2 [♦♦◊]

On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$p \mathscr{R} q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \ : \ p^n = q.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

Réfléxivité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $p^1 = p$, donc $p \mathscr{R} p$.

Antisymétrie : Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = p$. Montrons que $p = q$.
On a $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = p$. De plus, $q^m = p$, donc $q^{nm} = p^n = q$.
Ainsi, $p = p^{nm}$ et $q = q^{nm}$. Alors, soit $p = q = 1$, soit $n = m = 1$ et alors $p = q$.

Transitivité : Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = r$. Montrons que $p \mathscr{R} r$.
On a que $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = r$. Or $nm \in \mathbb{N}^*$, donc $p \mathscr{R} r$.

$\mathscr{R}$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
Ce n'est pas un ordre total : il n'existe pas d'entier n tel que $2^n = 3$, par exemple.

□