Logique
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 0.1 . . . 1
Exercice 0.2 . . . 2
Exercice 0.3 . . . 2
Exercice 0.4 . . . 2
Exercice 0.5 . . . 3
Exercice 0.6 . . . 3
Exercice 0.7 . . . 4
Exercice 0.8 . . . 5
Exercice 0.9 . . . 6
Exercice 0.10 . . . 6
Exercice 0.11 . . . 7
Exercice 0.12 . . . 8
Exercice 0.13 . . . 8
Exercice 0.14 . . . 9
Exercice 0.15 . . . 9
Exercice 0.16 . . . 10

Exercice 0.1 [♦◊◊]

Que répond un mathématicien à la question «Vous êtes gaucher ou droitier ?».
- « OUI »

Exercice 0.2 [♦◊◊]

C'est l'histoire de cinq mathématiciens qui vont au restaurant. Ils ont pris un menu avec thé ou (bien) café compris. À la fin du repas, le serveur demande : **tout le monde** prendra du café ? Le premier mathématicien répond «Je ne sais pas». Idem pour le second, le troisième, et le quatrième. Le cinquième répond «Quatre cafés et un thé SVP». Expliquer.

Le premier, deuxième, troisième et quatrième veulent un café car s'ils voulaient un thé, ils auraient répondu «Non». Le cinquième sait alors qu'ils veulent tous les quatres un café et choisit un thé pour lui-même.

Exercice 0.3 [♦◊◊]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Plus tard dans l'année, nous définirons la phrase «$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$» par l'assertion :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Longrightarrow u_n \geq M.$$

(pas besoin de comprendre pourquoi à ce stade !)
Écrire la négation de cette assertion.

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq p \ \text{ et } \ u_n < M)$$

Exercice 0.4 [♦◊◊]

1. Nier l'assertion :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \geq 0 \tag{1}$$

Sa négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y < 0$$

Prouver que l'assertion (1) est fausse.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = -(x+1)$.
On a $x + y = -1$ c'est pourquoi $x + y < 0$. Ainsi, la négation de (1) est toujours vraie.
On en déduit que (1) est toujours fausse.

Exercice 0.5 [♦◊◊]

«S'il fait beau, je ne prends pas mon parapluie.»
Écrire la contraposée de la réciproque.

Sa réciproque est :
«Si je ne prends pas mon parapluie, il fait beau.»

La contraposée de cette réciproque est :
«S'il ne fait pas beau, je prends mon parapluie.»

Exercice 0.6 [♦♦◊]

Soit (u_n) une suite réelle. Démontrer l'équivalence des deux assertions :

1. $P : \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
2. $Q : \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad p \geq n \Longrightarrow u_p \geq u_n$.

Supposons Q, montrons P.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après Q, on a $n+1 \geq n \Longrightarrow u_{n+1} \geq u_n$.
Ainsi, $Q \Longrightarrow P$.

Supposons P, montrons Q.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq n$, montrons que $u_p \geq u_n$.
D'après P, (u_n) est une suite croissante, ainsi, puisque $p \geq n$: $u_p \geq u_n$.

Exercice 0.7 [♦♦◊] [Récurrence Standard]

Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.
Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : «$2^n \geq n^2$».
Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur à 4.

Initialisation.
Posons $n = 4$.
$2^4 \geq 4^2$. Ainsi, $\mathcal{P}_4$ est vérifiée.

Hérédité.
Soit n un entier naturel supérieur à 4 fixé tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a :

$$2^n \geq n^2 \iff 2^{n+1} \geq 2n^2$$

Or, pour tout n, on a : $n^2 \geq 2n + 1$ (polynome du second degré)
Ainsi,

$$2^n \geq n^2 \iff 2^{n+1} \geq n^2 + 2n + 1 \iff 2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion.
Par le principe du raisonnement par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} : n \geq 4$.
De plus, on peut vérifier facilement que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$.
Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n différent de 3.

Exercice 0.8 [♦♦◊] [Récurrence Double]

Soit x un réel non nul.

1. Pour n un entier naturel, calculer $(x^n + \frac{1}{x^n}) \cdot (x + \frac{1}{x})$
2. Supposons que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ x^n + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

1.
$$(x^n + \frac{1}{x^n}) \cdot (x + \frac{1}{x}) = x^{n+1} + x^{n-1} + x^{1-n} + x^{-n-1}$$

2.
Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : «$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$».
Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation.
Pour $n = 0$.
$x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Or $2 \in \mathbb{Z}$. Mézalor, $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
Pour $n = 1$.
$x^1 + \frac{1}{x^1} = x + \frac{1}{x}$. Or on a supposé que ceci appartenait à $\mathbb{Z}$. Conséquemment, $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vérifiées. Montrons $\mathcal{P}_{n+2}$.
On a:
$$(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}) \cdot (x + \frac{1}{x}) = x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} + x^n + \frac{1}{x^n}$$
D'où :
$$(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}) \cdot (x + \frac{1}{x}) - (x^n + \frac{1}{x^n}) = x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$$
Or, par hypothèse de récurrence, $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$, ainsi que $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
Enfin, par stabilité de $\mathbb{Z}$ en somme et en produit, on obtient que :
$$(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}) \cdot (x + \frac{1}{x}) - (x^n + \frac{1}{x^n}) \in \mathbb{Z}$$
Alors :
$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$$
C'est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$.
Conclusion.
Par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 0.9 [♦◊◊] [Récurrence Forte]

Soit (u_n), définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall n \geq 1 \ \ u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \end{cases}$$

Démontrer par récurrence forte que $\forall n \geq 1 \ u_n = 3n$.
Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : «$\forall n \geq 1$, $u_n = 3n$».
Initialisation.
Initialisation triviale pour $n = 1$.
Hérédité.
Soit $n \geq 1$ tel que $\forall k \in [1, n]$, $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &\overset{HR}{=} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 3k \\ &= \frac{6}{n} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{3n(n+1)}{n} \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion.
Par le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 0.10 [♦♦◊]

Comme on l'a fait plus haut pour le principe de récurrence, écrire un «principe de récurrence forte» à l'aide d'une suite de quantificateurs.
Soit une assertion dont le sens dépend d'un entier n, et que l'on note $\mathcal{P}_n$.

$$[\forall n \in \mathbb{N} \ \ (\forall k \in [0, n] \ \ \mathcal{P}_k) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}] \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \ \ \mathcal{P}_n)$$

Exercice 0.11 [♦♦♢]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Analyse.
Supposons qu'il existe f une telle fonction. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Lorsque $x = y = 0$, $f^2(0) - f(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
2. Lorsque $y = 0$, $f(x)f(0) - f(0) = x$. Ainsi, la possibilité $f(0) = 0$ est éliminée.

Ainsi, $f(x)f(0) - f(0) = x$. Donc $f(x) = x + 1$.
Alors f est solution si elle existe.

Synthèse.
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Posons $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{cases}$.
On a :

$$\begin{aligned} g(x)g(y) - g(xy) &= (x+1)(y+1) - (xy+1) \\ &= xy + x + y + 1 - xy - 1 \\ &= x + y \end{aligned}$$

Conclusion: La fonction $x \mapsto x + 1$ est alors solution unique.

Exercice 0.12 [♦♦♢]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Analyse.
Supposons qu'il existe f une telle fonction. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Lorsque $x = f(0), y = 0$, $f(0) = 1 - f(0)$. Ainsi, $2f(0) = 1$, donc $f(0) = \frac{1}{2}$.
2. Lorsque $y = 0$, $f(x - \frac{1}{2}) = 1 - x$.

Posons $z = x - \frac{1}{2}$.
On a $f(z) = 1 - z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - z$.
Donc $f(x) = \frac{1}{2} - x$ *(car $z \in \mathbb{R}$)*. Alors f est solution si elle existe.

Synthèse.
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Posons $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} - x \end{cases}$.
On a :

$$g(x - g(y)) = \frac{1}{2} - (x - (\frac{1}{2} - y)) = 1 - x - y$$

Conclusion: La fonction $x \mapsto \frac{1}{2} - x$ est alors solution unique.

Exercice 0.13 [♦♢♢]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad xf(xy) = f(y).$$

Analyse.
Supposons qu'il existe f une telle fonction. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

1. Lorsque $y = 1$, $f(1) = xf(x)$.
2. Lorsque $x = \frac{1}{y}$, $f(1) = yf(y)$

Alors $xf(x) = yf(y)$, donc $f(x) = \frac{yf(y)}{x} = \frac{f(1)}{x}$.
En posant $a = f(1)$, $f(x) = \frac{a}{x}$. Donc f est solution si elle existe.

Synthèse.
Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \frac{a}{x} \end{cases}$.
On a :

$$xg(xy) = x\frac{a}{xy} = \frac{a}{y} = g(y).$$

Conclusion: Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 0.14 [♦♦♦]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4x^2 y.$$

Analyse. Supposons qu'il existe f une telle fonction. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Lorsque $y = x^2$, $f(f(x) + x^2) = f(0) + 4x^4$

(2) Lorsque $y = -f(x)$, $f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4x^2 f(x)$

(1) + (2) : $4x^2(x^2 - f(x)) = 0$.

Ainsi, lorsque $x \neq 0$, on a: $x^2 - f(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x^2$.
Donc f est solution si elle existe.

Synthèse.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
Posons $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
On a :

$$(x^2 + y)^2 = x^4 + 2x^2 y + y^2 = (x^4 - 2x^2 y + y^2) + 4x^2 y = (x^2 - y)^2 + 4x^2 y$$

Conclusion: La fonction $x \mapsto x^2$ est donc solution unique.

Exercice 0.15 [♦♦♢]

Résoudre l'équation

$$x^2 + x\sqrt{1 - x^2} - 1 = 0$$

Analyse. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant cette équation.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = -x\sqrt{1 - x^2} &\Rightarrow (x^2 - 1)^2 = (-x\sqrt{1 - x^2})^2 \\ &\Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = -x^4 + x^2 \\ &\Rightarrow 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Posons $\omega = x^2$. On a alors $2\omega^2 - 3\omega + 1 = 0$.
Les racines de ce polynome sont : $\omega_1 = \frac{1}{2}$ et $\omega_1 = 1$.
Ainsi, si x existe alors $x \in \{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Synthèse.
On remarque que l'équation est vérifiée lorsque $x \in \{-1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ uniquement.

Conclusion.
L'équation admet donc pour ensemble de solutions : $\{-1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Exercice 0.16 [♦♦♦]

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On considère F l'ensemble des fonctions affines, et G l'ensemble des fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $g(0) = g'(0) = 0$.
Démontrer que toute fonction de E s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction de F et d'une fonction de G.

Soit h une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Analyse.
On suppose qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) + g(x)$$

On a :

- $f \in F$ donc $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a$.
- $g \in G$ donc $g(0) = g'(0) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + g(x)$ donc $h'(x) = f'(x) + g'(x) = a + g'(x)$.
- $h(0) = f(0) + g(0) = b$ et $h'(0) = f'(0) + g'(0) = a$

Ainsi, si f existe, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = h'(0)x + h(0)$.
De plus, si g existe, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = h(x) - f(x)$.

Synthèse.
Soient f et g deux fonctions définies comme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto h'(0)x + h(0) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x) - h'(0)x - h(0) \end{cases}$$

- f est une fonction affine de coefficient $h'(0)$ et d'ordonnée à l'origine $h(0)$ donc $f \in F$.
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = h'(x) - h'(0)$.
- $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$. Ainsi, $g \in G$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= h'(0)x + h(0) + h(x) - h'(0)x - h(0) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Conclusion.
Toute fonction dérivable dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction affine $f : x \mapsto h'(0)x + h(0)$ et d'une fonction $g : x \mapsto h(x) - h'(0)x - h(0)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $g(0) = g'(0) = 0$.