Colles, semaine 29 (10/06→14/06)

Espaces préhilbertiens

Le cours **Espaces préhilbertiens** définit la notion de produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et les notions de norme, et d'orthogonalité associées. L'intérêt des bases orthonormées a été mis en valeur.

Nous avons défini la notion de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel *de dimension finie*. Le lien avec la distance à un sous-espace de ce type sera étudié seulement lundi 10 juin.

Colleurs attention : l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt n'a pas encore été expliqué et n'est pas attendu cette semaine. L'orthonormalisation fera partie des questions de cours la semaine prochaine.

Questions de cours.

- L'application $(f,g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a < b$).
- Inégalité de Cauchy-Schwarz (et son cas d'égalité).
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- Existence des bases orthonormées dans un espace euclidien (par récurrence sur la dimension de l'espace). *Les étudiants pourront présenter une preuve abrégée, en se concentrant sur les idées principales.*
- Si E est préhilbertien et F de dimension finie, alors $F \oplus F^\perp = E$.
  On a fait une analyse-synthèse. Bien sûr, il est possible de se passer de l'analyse si on a retenu comment exprimer la composante d'un vecteur sur F...
- Si E est euclidien et F est un s.e.v. de E, alors $(F^\perp)^\perp = F$.
  Une inclusion (qu'on démontrera) et l'égalité des dimensions...

Savoir-faire importants.

- Connaître la définition de produit scalaire.
  Connaître les produits scalaires "usuels" sur les espaces "usuels".
- Savoir orthographier et surtout savoir énoncer correctement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Savoir calculer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un s.e.v. de dimension finie.
- Savoir obtenir une base orthonormée en renormalisant une base orthogonale.
- Savoir écrire la définition de la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie et faire le dessin (!!) pour comprendre de quoi on parle.

À venir en semaine 30 : Espérance et variance d'une variable aléatoire.

MP2I PV