Forme Trigonométrique
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Pour $z \in \mathbb{C}$,
$\Re(z)$ est la partie réelle de z.
$\Im(z)$ est la partie imaginaire z.

Exercice 7.1 [♦◊◊]

Calculer $(1+i)^2023$.
On a :

$$(1+i)^{2023} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2023} = \sqrt{2}^{2023}e^{i\frac{2023\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2023}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

□

Exercice 7.2 [♦♦◊]

Soient trois réels x, y, z tels que $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0$. Montrer que $e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0$.
On a :

$$\begin{aligned} & e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0 \\ \iff & e^{-ix}+e^{-iy}+e^{-iz}=0 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & (e^{ix}+e^{iy}+e^{iz})^2 = e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}+2(e^{ixy}+e^{ixz}+e^{iyz}) \\ \iff & e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz} = -2(e^{ixy}+e^{ixz}+e^{iyz}) \end{aligned}$$

Or :

$$2(e^{ixy}+e^{ixz}+e^{iyz}) = 2e^{i(x+y+z)}(e^{-ix}+e^{-iy}+e^{-iz}) = 0$$

Ainsi,

$$e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0$$

□

Exercice 7.3 [♦◊◊]

1. Déterminer les formes algébriques et trigonométriques du nombre

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$$

2. En déduire l'expression de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{7\pi}{12})$ à l'aide de radicaux.

1. On a :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} + i\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\right)$$

2. On a :

$$\begin{cases} \cos(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \\ \sin(\frac{7\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \end{cases} \quad \text{Donc : } \frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

□

Exercice 7.4 [♦◊◊]

Soit un réel θ. Linéariser $(\cos\theta)^5$ et $(\sin\theta)^6$.
On a :

$$\begin{aligned}
(\cos\theta)^5 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{5i\theta}+5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}+10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(2\cos(5\theta)+10\cos(3\theta)+20\cos(\theta)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos(5\theta)+5\cos(3\theta)+10\cos(\theta)\right)
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
(\sin\theta)^6 &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^6 \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta}-6e^{4i\theta}+15e^{2i\theta}-20+15e^{-2i\theta}-6e^{-4i\theta}+e^{-6i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{64}\left(2\cos(6\theta)-12\cos(4\theta)+30\cos(2\theta)-20\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(10+6\cos(4\theta)-15\cos(2\theta)-\cos(6\theta)\right)
\end{aligned}$$

□

Exercice 7.5 [♦♦◊]

1. Soit x un réel. Exprimer $\cos(5x)$ comme un polynome en $\cos(x)$.
2. Montrer que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du trinôme $x \mapsto 16x^2-20x+5$.
3. En déduire l'égalité $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \operatorname{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^5\right) \\
&= \cos^5(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)+5\cos(x)\sin^4(x) \\
&= \cos^5(x)-10\cos^3(x)(1-\cos^2(x))+5\cos(x)(1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)) \\
&= 16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x)
\end{aligned}$$

2. Posons $x=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ On a :

$$\begin{aligned}
&\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{10}\right) = 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right)-20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right)+5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \\
\iff\ & 16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right)-20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+5=0 \\
\iff\ & 16x^2-20x+5=0
\end{aligned}$$

Ainsi $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine de ce trinôme.

3. On a :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{5})}{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$16x^2 - 20x + 5 = 0$$
$$\iff x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$$

Ainsi, $\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ car $\cos(\pi/5) > \cos(\pi/3) = 0.5$. On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 7.6 [♦♦◊]

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

Notons : $S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ On a :

$$\begin{aligned} S + iS' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k \\ &= (1+e^{ix})^n \\ &= \left(e^{\frac{ix}{2}}\right)^n \left(e^{-\frac{ix}{2}} + e^{\frac{ix}{2}}\right)^n \\ &= e^{\frac{inx}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc $S = \Re\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{inx}{2}}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \Re\left(e^{\frac{inx}{2}}\right)$.

Or, on a :

$$\Re\left(e^{\frac{inx}{2}}\right) = \Re\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

En conclusion :

$$S = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

□

Exercice 7.7 [♦♦◊] Noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On note

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

1. Montrer que $D_n(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$.
2. Montrer que $F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$.

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{ix}\right)^k \\
&= e^{-nx}\frac{1-e^{ix(2n+1)}}{1-e^{ix}} \\
&= \frac{e^{-inx}-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}} \\
&= \frac{e^{ix/2}(e^{-ix(n+1/2)}-e^{ix(n+1/2)})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})} \\
&= \frac{-2i\sin(x(n+\frac{1}{2}))}{-2i\sin(\frac{x}{2})} \\
&= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

2.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{n\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin((k+\frac{1}{2})x)$$

Calculons la somme des $\sin((k+1/2)x)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\sin((k+\frac{1}{2})x) &= \Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix(k+\frac{1}{2})}\right) = \Im\left(e^{ix\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ixk}\right) = \Im\left(e^{ix\frac{1}{2}}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) \\
&= \Im\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{i\frac{nx}{2}}(\sin(\frac{nx}{2}))}{e^{i\frac{x}{2}}(\sin(\frac{x}{2}))}\right) = \Im\left(e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right) = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

Donc :

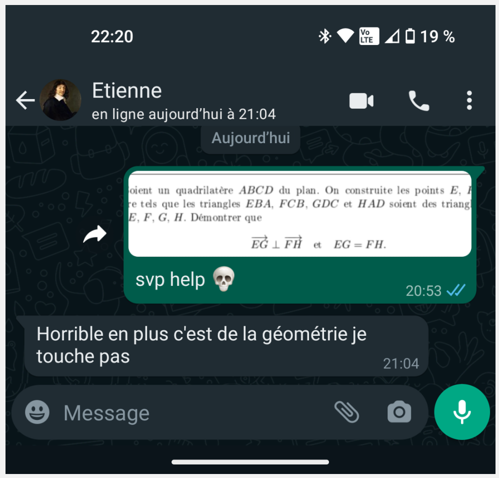
$$F_n(x) = \frac{1}{n\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{n\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

□

Exercice 7.8 [♦♦♦]

Soit un quadrilatère $ABCD$ du plan. On construit les points E, F, G, H à l'extérieur du quadrilatère tels que les triangles EBA, FCB, GDC et HAD soient des triangles directs, isocèles et rectangles en E, F, G, H.
Démontrer que

$$\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{FH} \qquad \text{et} \qquad EG = FH.$$



□

Exercice 7.9 [♦♦♦]

Trouver les nombres complexes d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $1, z^2$ et z^4 sont alignés.
C'est évident lorsque $z \in \{0, 1\}$. Supposons $z \notin \{0, 1\}$.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.
On a :

$$\begin{aligned}
& 1, z^2, z^4 \text{ alignés} \\
\iff & \frac{z^4 - 1}{z^2 - 1} \in \mathbb{R} \\
\iff & \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{z^2-1} \in \mathbb{R} \\
\iff & z^2 + 1 \in \mathbb{R} \\
\iff & z^2 \in \mathbb{R} \\
\iff & r^2 e^{2i\theta} = r^2 e^{-2i\theta} \\
\iff & e^{2i\theta} = e^{-2i\theta} \\
\iff & e^{4i\theta} = 1 \\
\iff & \theta = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Donc $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

□