Exercice 1.

1. (a) Définir $S_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels.
   (b) Redémontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
2. En exhibant une base de cet espace, démontrer que $S_2(\mathbb{R})$ est de dimension 3.
3. Généralisons : quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Démontrer que $g \circ f$ est un projecteur. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 3.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. On note p son indice de nilpotence, c'est à dire

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \ u^k = 0\}.$$

On se donne $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(u^{p-1})$.

1. Justifier l'existence d'un tel vecteur x.
2. Montrer que $(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$ est libre.
3. Supposons dans cette question que E est de dimension finie n.
   Montrer que $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 4.

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul et on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - nP \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En commençant par évaluer f sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, démontrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

Exercice 5.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose $n \geq 2$.
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E tels que $H_1 \neq H_2$.

1. Rappeler la dimension de H_1 et H_2.
2. En vous appuyant sur l'inclusion $H_1 \subset H_1 + H_2 \subset E$, démontrer que $H_1 + H_2 = E$.
3. En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.
4. Soit $x_1 \in H_1 \setminus H_2$ et $x_2 \in H_2 \setminus H_1$.
   (a) Justifier l'existence de x_1 et de x_2.
   (b) Justifier que (x_1, x_2) est libre.
   (c) Prouver que $H_1 \cap H_2$ et $\mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 6. Un peu de développements limités.

1. Cours. Énoncer la formule de Taylor-Young.
En appliquant cette proposition, retrouver le résultat du cours sur le DL en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{e^t - 1} \end{array} \right.$$

(a) Démontrer qu'on a pour f le développement limité suivant au voisinage de 0 :

$$f(t) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}t + o(t).$$

(b) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. Que vaut alors $f(0)$?
Justifier que ce prolongement est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

Problème (début).

On définit l'application

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$$

On rappelle que pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel E

$$u^0 = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u^{n+1} = u \circ u^n.$$

Partie I - Préliminaires

1. Justifier que D est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg P$. On suppose que $n \geq 0$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}_\mathcal{P} = \left(P, P', \ldots, P^{(n)}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Conclure que $\mathcal{B}_\mathcal{P}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II - Sous-espaces stables par D

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par D, c'est-à-dire :

$$\forall P \in F \quad D(P) \in F.$$

3. *si les degrés des polynômes de F sont bornés*

On suppose que $F \neq \{0\}$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$F \subset \mathbb{R}_N[X].$$

(a) Justifier que l'on peut définir un entier naturel n par

$$n = \max \{\deg P \mid P \in F,\ P \neq 0\}.$$

On se donne $P \in F$ tel que $\deg(P) = n$.
Justifier que $\mathcal{B}_P$ est une famille de vecteurs de F.
*La famille $\mathcal{B}_P$ a été définie à la question **2**.*

(b) Montrer que

$$F = \mathbb{R}_n[X].$$

On pourra considérer le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}_p$.

4. *si les degrés des polynômes de F ne sont pas bornés*

On suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $P \in F$ tel que $\deg P > N$.

Montrer que $\mathbb{R}_N[X] \subset F$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Que vaut F ?

5. *conclusion*

Quels sont tous les sous-espaces vectoriels stables par D ?