# Corrigé du DM 22 

## Problème sur la fonction Gamma

Définition énoncé : $\forall x \in ]0, +\infty[ \qquad \Gamma_n(x) = \dfrac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

**Partie A.** Une suite d'intégrales.

Définition énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in ]0, +\infty[ \quad F_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^{x-1} \mathrm{d}u.$

1. On rappelle que pour $a \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^a$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0. On considère donc cette fonction comme continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour $x \in [1, +\infty[$, la fonction $u \mapsto \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^{x-1}$ est continue sur $[0, n]$ : l'intégrale $F_n(x)$ est donc bien définie.

2. (a) Soit un couple $(a, b)$ de réels tels que $0 < a < b$.
La fonction ln est continue sur $[b-a, b]$ et dérivable sur $]b-a, b[$. D'après l'égalité des accroissements finis,

$$\exists c \in ]b-a, b[ \quad \frac{\ln(b) - \ln(b-a)}{b - (b-a)} = \frac{1}{c}.$$

Puisque $\frac{1}{c} \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{b-a}]$, on bien

$$\frac{a}{b} \leq \ln(b) - \ln(b-a) \leq \frac{a}{b-a}.$$

(b) La fonction $f_u$ est définie sur $]u, +\infty[$ et elle y est dérivable. Pour tout réel $x$ dans cet intervalle, le calcul donne

$$f_u'(x) = -\left(\ln(x) - \ln(x-u) - \frac{u}{x-u}\right).$$

D'après la question précédente, si $x \in ]u, +\infty[$, on peut écrire l'inégalité pour $a = u$ et $b = x$ et obtenir $f_u'(x) \geq 0$, ce qui établit la croissance de $f_u$ sur $]u, +\infty[$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $u \in [0, n[$. Puisque $u < n < n+1$, la croissance de la fonction $f_u$ sur $]u, +\infty[$ donne

$$f_u(n) \leq f_u(n+1) \quad \text{soit} \quad n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right) \leq (n+1) \ln\left(1 - \frac{u}{n+1}\right).$$

En passant à l'exponentielle (croissante), on obtient bien

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1},$$

et l'inégalité est facile à vérifier pour $u = n$.

(d) L'énoncé a fixé $x \in [1, +\infty[$ ; fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. La question précédente amène

$$\forall u \in [0, n] \quad \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^{x-1} \leq \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^{x-1}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^{x-1} \mathrm{d}u \leq \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^{x-1} \mathrm{d}u.$$

Le nombre $\int_n^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^{x-1} \mathrm{d}u$ est positif (c'est l'intégrale d'une fonction c.p.m. et positive entre deux bornes bien rangées). On déduit donc de la ligne précédente que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^{x-1} \mathrm{d}u \leq \int_0^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^{x-1} \mathrm{d}u$$

$$\text{i.e. } \boxed{F_n(x) \leq F_{n+1}(x)}.$$

3. Dans cette question, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x \in [1, +\infty[$.

(a) On a

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\ln(n-u) - \ln(n)\right)\right) \leq \exp\left(-n \cdot \frac{u}{n}\right)$$

en utilisant l'inégalité de gauche de la question 2.(a).
On obtient donc $\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$. Reste à multiplier par $u^{x-1}$ et à intégrer : la croissance de l'intégrale donne

$$F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}u.$$

(b) Par croissances comparées, on a

$$u^{x-1}e^{-u/2} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi l'inégalité $u^{x-1}e^{-u/2} \leq 1$ est vraie au voisinage de l'infini. Il existe un réel $A$ strictement positif tel que

$$\forall u \geq A \quad u^{x-1} \leq e^{u/2}.$$

Dans la suite, on travaille avec un tel réel $A$.

(c) La majoration donnée à la question (a) ainsi que la relation de Chasles donne

$$F_n(x) \leq \int_0^A e^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}u + \int_A^n e^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}u.$$

Nous noterons $I_A(x)$ la première intégrale.
• Supposons $n \leq A$. Alors dans le membre de droite de l'inégalité, deuxième terme est négatif. On a alors $F_n(x) \leq I_A(x)$.
• Supposons $n > A$. On utilise alors la majoration prouvée en (b) ainsi que la croissance de l'intégrale pour obtenir

$$\int_A^n e^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}u \leq \int_A^n e^{-u}e^{u/2}\mathrm{d}u.$$

Or, $\int_A^n e^{-u}e^{u/2}\mathrm{d}u = \left[e^{-u/2}\right]_A^n = 2e^{-A/2} - 2e^{-n/2}$. On obtient donc

$$F_n(x) \leq I_A(x) + 2e^{-A/2},$$

et on remarque grâce au traitement du cas particulier $n \leq A$ que cette majoration de $F_n(x)$ par une constante indépendante de $n$ est vraie $n \leq A$. On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n(x) \leq I_A(x) + 2e^{-A/2}.}$$

**Partie B.** La fonction Gamma comme limite.

1. (a) Soient $a$ et $b$ deux réels positifs. On calcule

$$(a+1)I(a,b+1) = (a+1)\int_0^1 t^a(1-t)^{b+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{(a+1)t^a}_{:=u'(t)}\underbrace{(1-t)^{b+1}}_{:=v(t)}\mathrm{d}t$$

Les fonctions $u : t \mapsto t^{a+1}$ et $v : t \mapsto (1-t)^{b+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
Une intégration par parties amène

$$\begin{aligned}(a+1)I(a,b+1) &= \left[t^{a+1}(1-t)^{b+1}\right]_0^1 - \int_0^1 t^{a+1}\cdot\left(-(b+1)(1-t)^b\right)\mathrm{d}t \\ &= [0-0] + (b+1)\int_0^1 t^{b+1}(1-t)^b\mathrm{d}t \\ &= (b+1)I(a+1,b).\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{(a+1)I(a,b+1) = (b+1)I(a+1,b)}.$$

(b) Soit $a \in [1,+\infty[$ un réel supérieur à 1 et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}I(a,n) &= \frac{n}{a+1}I(a+1,n-1) \\ &= \frac{n}{a+1}\cdot\frac{n-1}{a+2}I(a+2,n-2) \\ &= \cdots \quad \text{(on itère)} \\ &= \frac{n}{a+1}\cdot\frac{n-1}{a+2}\cdot\frac{n-2}{a+3}\cdots\frac{n-(n-1)}{a+n}I(a+n,0).\end{aligned}$$

Or, un rapide calcul donne $I(a+n,0) = \int_0^1 t^{a+n}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{a+n+1}}{a+n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+n+1}$.
Ceci amène

$$\boxed{I(a,n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}}.$$

2. (a) On pose le changement de variable $u = nt$ ($\mathrm{d}u = n\mathrm{d}t$). Il amène

$$F_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n (nt)^{x-1} n\mathrm{d}t = n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\mathrm{d}t,$$

ce qui laisse $F_n(x) = n^x I(x-1,n)$.
En utilisant l'expression de $I$ trouvée à la question 1, on obtient

$$F_n(x) = \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

ce qui prouve bien l'égalité $\Gamma_n(x) = F_n(x)$ pour un réel $x \in [1,\infty[$.

(b) Soit $x \in [1,+\infty[$. Les suites $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont égales. La question 2 (d) de la partie A donne la croissance de la suite. La question 2 (c) en propose une majoration par une constante indépendante de $n$. Le théorème de la limite monotone donne alors que $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. (a)

$$\begin{aligned}\Gamma_{n+1}(x) &= \frac{(n+1)^x \cdot (n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)}\\ &= \frac{(n+1)^{x+1}\cdot n!}{x(x+1)\cdot((x+1)+n)}\\ &= \frac{(n+1)^{x+1}}{xn^{x+1}} \cdot \frac{n^{x+1}\cdot n!}{(x+1)\cdots((x+1)+n)},\end{aligned}$$

ce qui laisse $\boxed{\Gamma_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}\Gamma_n(x+1)}$.

(b) Soit $x \in ]0,1[$. D'après la question 2(b), la suite $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. La suite $(1+\frac{1}{n})^{x+1}$ tend vers 1 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Par produit, $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel strictement positif $x$, on peut poser $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Gamma_n(x)$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\Gamma_n(1) = \frac{n!\cdot n}{1\cdot 2\cdots(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Un passage à la limite donne $\boxed{\Gamma(1) = 1}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a prouvé à la question 3 (a) de cette partie que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x).$$

Un passage à la limite donne

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 1{\cdot}\Gamma(1).$$

Or, $\Gamma(1) = 1$ ; on a donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \Gamma(n) = (n-1)!}$ (on peut écrire une récurrence si on trouve que l'itération ci-dessus n'est pas suffisante).

**Partie C.** Intermède : deux petits résultats de convexité.

1. Soient $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, la convexité de la fonction $f_n$ donne l'inégalité

$$f_n((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y).$$

On a $f_n(x) \to f(x)$, $f_n(y) \to f(y)$ et $f_n((1-\lambda)x+\lambda y) \to f((1-\lambda)x+\lambda y)$, par hypothèse. Les inégalité larges étant stables pas par passage à la limite, on obtient

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

ce qui prouve la convexité de $f$ sur $I$

2. La fonction $\ln\circ g$ est deux fois dérivable sur $I$ comme composée et

$$(\ln g)' = \frac{g'}{g} \quad \text{et} \quad (\ln g)'' = \frac{g''g-(g')^2}{g^2}.$$

La log-convexité de $g$ (c'est-à-dire la convexité de $\ln g$) donne que $(\ln g)'' \geq 0$. On a donc $g''g - (g')^2 \geq 0$ i.e. $g''g \geq (g')^2 \geq 0$. Puisque $g > 0$, on obtient $g'' \geq 0$, ce qui établit la convexité de $g$ sur l'intervalle $I$.

**Partie D.** Convexité et log-convexité de $\Gamma$.

1. (a) Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ a été fixé.
La fonction $\Gamma_n$ est clairement strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On calcule

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(\Gamma_n(x)) = \ln(n!) + x\ln(n) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k).$$

La fonction $\ln\Gamma_n$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (\ln\Gamma_n)''(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} \geq 0.$$

Ceci établit que $\ln\Gamma_n$ est convexe sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
La deuxième question de la partie C permet d'en déduire que $\Gamma_n$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

(b) Fixons $x$ un réel strictement positif. Par définition dans ce problème, $\Gamma(x) = \lim \Gamma_n(x)$.
• Pour $x \geq 1$, nous avons vu que $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. On peut donc écrire par exemple $\Gamma(x) \geq \Gamma_1(x) > 0$.
• Pour $x \in ]0,1[$, l'identité $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ et le point précédent donnent que $\Gamma(x) > 0$.
Puisque $\Gamma$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma_n(x) \to \Gamma(x) \quad \text{ et } \quad \ln(\Gamma_n(x)) \to \ln(\Gamma(x)).$$

Dans la question précédente, nous avons prouvé que $\Gamma_n$ et $\ln\Gamma_n$ sont convexes sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après la question 1 de la partie C, cela autorise à conclure que

$$\boxed{\ln\Gamma \text{ et } \Gamma \text{ sont convexes sur } ]0,+\infty[.}$$

2. (a) L'énoncé a fixé $x \in ]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme on l'avait fait pour $\Gamma$, en utilisant la valeur en 1 et la relation $\Upsilon(x+1) = x\Upsilon(x)$, on se convainc que $\Upsilon(n) = (n-1)!$. Par hypothèse sur $\Upsilon$, on a peut écrire

$$\Upsilon(x) = \frac{1}{x}\Upsilon(x+1) = \frac{1}{x(x+1)}\Upsilon(x+2) = \cdots = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}\Upsilon(x+n+1).$$

Ceci permet d'écrire

$$\begin{aligned}\psi(x) - \ln(\Gamma_n(x)) &= \ln\left(\frac{\Upsilon(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right) - \ln\left(\frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)\\ &= \ln(\Upsilon(x+n+1)) - \ln(n!\cdot n^x)\\ &= \psi(n+1+x) - \psi(n+1) - x\ln(n)\end{aligned}$$

On a $n < n+1 < n+1+x < n+2$. L'inégalité des pentes pour la fonction $\psi$ convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ donne

$$\frac{\psi(n+1)-\psi(n)}{n+1-n} \leq \frac{\psi(n+1+x)-\psi(n+1)}{(n+1+x)-(n+1)} \leq \frac{\psi(n+2)-\psi(n+1)}{(n+2)-(n+1)},$$

ce qui donne bien l'inégalité souhaitée :

$$\psi(n+1)-\psi(n) \leq \frac{\psi(n+1+x)-\psi(n+1)}{x} \leq \psi(n+2)-\psi(n+1).$$

(b) En combinant les deux résultats de la question précédente, on obtient que pour $x \in ]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x(\psi(n+1)-\psi(n)) - x\ln(n) \leq \psi(x) - \ln(\Gamma_n(x)) \leq x(\psi(n+2)-\psi(n+1)) - x\ln(n).$$

Or, $\psi(n+1)-\psi(n) = \ln\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right) = \ln(n)$ et $\psi(n+2)-\psi(n+1) = \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \ln(n+1)$. Ceci amène l'encadrement

$$0 \leq \psi(x) - \ln(\Gamma_n(x)) \leq x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Il reste à passer à limite pour obtenir $\psi(x) = \ln(\Gamma(x))$ et à l'exponentielle pour avoir que $\Gamma(x) = \Upsilon(x)$.
Nous venons de montrer que les fonction $\Gamma$ et $\Upsilon$ coïncident sur $]0,1]$. Puisqu'elle satisfont toutes les deux l'équation fonctionnelle « $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x+1) = xf(x)$ », une récurrence facile permet de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, elles coïncident sur $]n,n+1]$. Ceci achève de prouver que $\boxed{\Upsilon = \Gamma}$.