Relations Binaires
Corrigé

DARVOUX Théo

Décembre 2023

Exercices.

Exercice 16.1 [♦♦♢]

Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser le cardinal de la classe d'équivalence d'un réel x.

1. Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien que $xe^x = xe^x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$, on a bien $ye^x = xe^y$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Montrons que $xe^z = ze^x$.
D'après la première égalité, $y = xe^{y-x}$.
On remplace y dans la seconde : $xe^{y-x+z} = ze^y$.
On divise par e^y : $xe^{z-x} = z$. On multiplie par e^x : $xe^z = ze^x$.
On a bien $x \mathscr{R} z$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
On a $x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y}$.
On pose $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$. La classe d'équivalence de x est alors $\{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}$.
La question revient à chercher le nombre d'éléments dans $\mathbb{R}$ qui ont la même image par f.
On a que f est dérivable et $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$. Alors :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Alors, pour $x \in]-\infty, 0]$, $|[x]| = 1$, pour $x = 1$, $|[x]| = 1$ et sinon, $|[x]| = 2$.

□

Exercice 16.2 [♦♦♢]

On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$p \mathscr{R} q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \ : \ p^n = q.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

Réfléxivité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $p^1 = p$, donc $p \mathscr{R} p$.

Antisymétrie : Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = p$. Montrons que $p = q$.
On a $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = p$. De plus, $q^m = p$, donc $q^{nm} = p^n = q$.
Ainsi, $p = p^{nm}$ et $q = q^{nm}$. Alors, soit $p = q = 1$, soit $n = m = 1$ et alors $p = q$ dans tous les cas.

Transitivité : Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n = q$ et $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid q^m = r$. Montrons que $p \mathscr{R} r$.
On a que $p^n = q$ donc $p^{nm} = q^m = r$. Or $nm \in \mathbb{N}^*$, donc $p \mathscr{R} r$.

$\mathscr{R}$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
Ce n'est pas un ordre total : il n'existe pas d'entier n tel que $2^n = 3$ ou $3^n = 2$, par exemple.

□

Exercice 16.3 [♦♦◊]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $x \preceq y$ si

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \ : \ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.
2. Si $n \geq 2$, montrer qu'il s'agit d'un ordre partiel.

1. Réfléxivité : Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a bien que $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i$.
Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $x \preceq y$ et $y \preceq x$. Montrons que $x = y$.
On a que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \ \wedge \sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i$.
Par antisymétrie de $\leq$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$.
Par récurrence triviale sur k, on peut montrer que tous les éléments sont égaux 1 à 1.
i.e. On initialise avec $k = 1$ pour obtenir $x_1 = y_1$, on suppose $x_k = y_k$ et on a $\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k$ Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \preceq y$ et $y \preceq z$. Montrons que $x \preceq z$.
On a que $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} z_i$. Par transitivité de $\leq$, $x \preceq z$.

2. Soient $x = (0, 2)$ et $y = (1, 0)$.
On a $\sum_{i=1}^{2} x_i \geq \sum_{i=1}^{2} y_i$ et $\sum_{i=1}^{1} x_i \leq \sum_{i=1}^{1} y_i$: x et y ne sont pas comparables, $\preceq$ est un ordre partiel. □

Exercice 16.4 [♦♦◊]

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit une relation binaire en posant que deux réels strictement positifs sont en relation, ce qu'on note $x \mathscr{R} y$ si et seulement si

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ px = qy$$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Démontrer que pour cette relation, deux classes d'équivalence sont nécessairement en bijection.

1. Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{N}^*$. On a que $1 \cdot x = 1 \cdot x$ donc $x \mathscr{R} x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^*$ $px = qy$. On a $qy = px$ donc $y \mathscr{R} x$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^*$ $px = qy$ et $\exists (p', q') \in \mathbb{N}^*$ $p'y = q'z$.
On a $y = \frac{p}{q}x$ donc $p'\frac{p}{q}x = q'z$. Alors $pp'x = qq'z$ et $x \mathscr{R} z$.

2. Soient $[x]$ et $[y]$ deux classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ avec $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.
On pose $f : \begin{cases} [x] \to [y] \\ a \mapsto \frac{a}{x}y \end{cases}$.
Pour $a \in [x]$, on a $f(a) \in [y]$: $\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $pa = qx$ Alors $a = \frac{q}{p}x$ et $f(a) = \frac{q}{p}\frac{x}{x}y \iff pf(a) = qy$.
On a f injective : Soient $a, a' \in [x]$ tels que $f(a) = f'(a)$ on a $\frac{y}{x}a = \frac{y}{x}a'$ donc $a = a'$.
On a f surjective : Soit $b \in [y]$: $\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $pb = qy$, alors $b = \frac{q}{p}y$.
On pose $a \in [x] \mid pa = qx$, donc $a = \frac{q}{p}x$. On a $f(a) = \frac{q}{p}y = b$.
Donc f est bien une fonction bijective de $[x]$ vers $[y]$. □

Exercice 16.5 [♦♦◊]

Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathscr{R}$ par

$$x \mathscr{R} y \iff x^2 + 2y = y^2 + 2x.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{R}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un réel a.

1. Réflexivité : On a bien que $x^2 + 2x = x^2 + 2x$.
Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathscr{R} y$, par symétrie de l'égalité, on a $y \mathscr{R} x$.
Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$. Par transitivité de l'égalité, $x \mathscr{R} z$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} & x^2 + 2a = a^2 + 2x \\ \iff & x^2 - a^2 = 2(x-a) \\ \iff & (x-a)(x+a) = 2(x-a) \\ \iff & (x-a)(x+a-2) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, soit $x = a$, soit $x = 2 - a$.
La classe d'équivalence de a est alors : $[a] = \{2-a, a\}$.

□

Exercice 16.6 [♦♦◊]

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E.
Pour $x, y \in E$, on note $x \sim y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, ...x_n$ tels que

$$x_0 = x,\ x_0 \mathscr{R} xx_1,\ x_1 \mathscr{R} x_2,\ ...,\ x_{n-1} \mathscr{R} x_n,\ x_n = y.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation transitive sur E.
2. On suppose $\mathscr{R}$ transitive et symétrique. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.