Logique
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 0.1 [♦◊◊]

Que répond un mathématicien à la question «Vous êtes gaucher ou droitier ?».
- « OUI »

Exercice 0.2 [⧫◊◊]

C'est l'histoire de cinq mathématiciens qui vont au restaurant. Ils ont pris un menu avec thé ou (bien) café compris. À la fin du repas, le serveur demande : **tout le monde** prendra du café ? Le premier mathématicien répond «Je ne sais pas». Idem pour le second, le troisième, et le quatrièeme. Le cinquième répond «Quatre cafés et un thé SVP». Expliquer.

Le premier, deuxième, troisième et quatrième veulent un café car s'ils voulaient un thé, ils auraient répondu «Non». Le cinquième sait alors qu'ils veulent tous les quatres un café et choisit un thé pour lui-même.

Exercice 0.3 [⧫◊◊]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Plus tard dans l'année, nous définirons la phrase «$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$» par l'assertion :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Longrightarrow u_n \geq M.$$

(pas besoin de comprendre pourquoi à ce stade !)
Écrire la négation de cette assertion.

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq p \ \text{ et } \ u_n < M)$$

Exercice 0.4 [⧫◊◊]

1. Nier l'assertion :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \geq 0 \tag{1}$$

Sa négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y < 0$$

Prouver que l'assertion (1) est fausse.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = -(x+1)$.
On a $x + y = -1$ c'est pourquoi $x + y < 0$. Ainsi, la négation de (1) est toujours vraie.
On en déduit que (1) est toujours fausse.

Exercice 0.5 [♦♢♢]

«S'il faut beau, je ne prends pas mon parapluie.»
Écrire la contraposée de la réciproque.

Sa réciproque est :
«Si je ne prends pas mon parapluie, il fait beau.»

La contraposée de cette réciproque est :
«S'il ne fait pas beau, je prends mon parapluie.»

Exercice 0.6 [♦♦♢]

Soit (u_n) une suite réelle. Démontrer l'équivalence des deux assertions :

1. $P : \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
2. $Q : \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad p \geq n \Longrightarrow u_p \geq u_n$.

Supposons Q, montrons P.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après Q, on a $n+1 \geq n \Longrightarrow u_{n+1} \geq u_n$.
Ainsi, $Q \Longrightarrow P$.

Supposons P, montrons Q.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq n$, montrons que $u_p \geq u_n$.
D'après P, (u_n) est une suite croissante, ainsi, puisque $p \geq n$: $u_p \geq u_n$.

Exercice 0.7 [♦♦◊] [Récurrence Standard]

Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.
Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : «$2^n \geq n^2$».
Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur à 4.

Initialisation.
Posons $n = 4$.
$2^4 \geq 4^2$. Ainsi, $\mathcal{P}_4$ est vérifiée.

Hérédité.
Soit n un entier naturel supérieur à 4 fixé tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a :

$$2^n \geq n^2 \iff 2^{n+1} \geq 2n^2$$

Or, pour tout n, on a : $n^2 \geq 2n + 1$ (polynome du second degré)
Ainsi,

$$2^n \geq n^2 \iff 2^{n+1} \geq n^2 + 2n + 1 \iff 2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion.
Par le principe du raisonnement par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} : n \geq 4$.
De plus, on peut vérifier facilement que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$.
Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n différent de 3.

Exercice 0.8 [♦♦♢] [Récurrence Double]

Soit x un réel non nul.

1. Pour n un entier naturel, calculer $(x^n + \frac{1}{x^n}) \cdot (x + \frac{1}{x})$
2. Supposons que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ x^n + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

1.
$$(x^n + \frac{1}{x^n}) \cdot (x + \frac{1}{x}) = x^{n+1} + x^{n-1} + x^{1-n} + x^{-n-1}$$

2.
Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : «$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$».
Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation.
Pour $n = 0$.
$x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Or $2 \in \mathbb{Z}$. Mézalor, $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
Pour $n = 1$.
$x^1 + \frac{1}{x^1} = x + \frac{1}{x}$. Or on a supposé que ceci appartenait à $\mathbb{Z}$. Conséquemment, $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vérifiées. Montrons $\mathcal{P}_{n+2}$.
On a:
$$(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}) \cdot (x + \frac{1}{x}) = x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} + x^n + \frac{1}{x^n}$$
D'où :
$$(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}) \cdot (x + \frac{1}{x}) - (x^n + \frac{1}{x^n}) = x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$$
Or, par hypothèse de récurrence, $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$, ainsi que $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
Enfin, par stabilité de $\mathbb{Z}$ en somme et en produit, on obtient que :
$$(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}) \cdot (x + \frac{1}{x}) - (x^n + \frac{1}{x^n}) \in \mathbb{Z}$$
Alors :
$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$$
C'est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$.
Conclusion.
Par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 0.9 [♦◇◇] [Récurrence Forte]

Soit (u_n), définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \end{cases}$$

Démontrer par récurrence forte que $\forall n \geq 1$ $u_n = 3n$.
Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : «$\forall n \geq 1$, $u_n = 3n$».
Initialisation.
Initialisation triviale pour $n = 1$.
Hérédité.
Soit $n \geq 1$ tel que $\forall k \in [1, n]$, $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &\overset{HR}{=} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 3k \\ &= \frac{6}{n} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{3n(n+1)}{n} \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion.
Par le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 0.10 [♦♦◇]

Comme on l'a fait plus haut pour le principe de récurrence, écrire un «principe de récurrence forte» à l'aide d'une suite de quantificateurs.
Soit une assertion dont le sens dépend d'un entier n, et que l'on note $\mathcal{P}_n$.

$$[\forall n \in \mathbb{N} \;\; (\forall k \in [0, n] \;\; \mathcal{P}_k) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}] \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \;\; \mathcal{P}_n)$$

Exercice 0.11 [♦♦♢]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Analyse.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Lorsque $x = y = 0$, $f^2(0) - f(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Lorsque $y = 0$, $f(x)f(0) - f(0) = x$. Ainsi, la possibilité $f(0) = 0$ est éliminée.
Ainsi, $f(x)f(0) - f(0) = x$. Donc $f(x) = x + 1$.
On en déduit que f est unique si elle existe.
Synthèse.
Posons $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$. Montrons que g est solution.
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g(x)g(y) - g(xy) &= (x+1)(y+1) - (xy+1) \\ &= xy + x + y + 1 - xy - 1 \\ &= x + y \end{aligned}$$

Conclusion.
La fonction g est alors solution unique.

Exercice 0.12 [♦♦♢]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Analyse.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Lorsque $x = f(0), y = 0$, $f(0) = 1 - f(0)$. Ainsi, $2f(0) = 1$, donc $f(0) = \frac{1}{2}$.
Lorsque $y = 0$, $f(x - \frac{1}{2}) = 1 - x$.
Posons $z = x - \frac{1}{2}$.
On a $f(z) = 1 - z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - z$.
Alors $f(x) = \frac{1}{2} - x$ *(car $z \in \mathbb{R}$)*
On en déduit que f est unique si elle existe.
Synthèse.
Posons $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} - x \end{cases}$. Montrons que g est solution.
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(x - g(y)) = \frac{1}{2} - (x - (\frac{1}{2} - y)) = 1 - x - y$$

Conclusion.
La fonction g est alors solution unique.