Chapitre 42

Familles sommables.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

Introduction.

Exemple 1: Pour poser le problème.

Soit la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ définie pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ par $u_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p+1 \\ -1 & \text{si } p = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{Calculer: } \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}, \quad \sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{n+p=N} u_{n,p}. \quad \text{Commenter.}$$

Solution :

La première somme vaut -1, la deuxième vaut 1 et la dernière n'est pas sommable.

1 Sommer des réels positifs.

1.0 Travailler dans $[0, +\infty]$

On note $\boxed{[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}}$.

Définition 2

On appelle **borne supérieure** d'une partie A de $[0, +\infty]$ le plus petit des majorants de A dans $[0, +\infty]$. Cet élément de $[0, +\infty]$ est noté $\sup(A)$.

Méthode : Passage au sup : l'argument clé du cours.

Soient $M \in [0, +\infty]$ un réel et A une partie de $[0, +\infty]$. Pour démontrer l'inégalité $\sup(A) \leq M$, il suffira de montrer que M est un majorant de A, autrement dit:

$$(\forall x \in A \quad x \leq M) \Longrightarrow \sup(A) \leq M.$$

1.1 Somme d'une famille de réels positifs.

Définition 3

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs**. On appelle **somme** de cette famille, notée $\sum_{i\in I} u_i$ le nombre

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i,\ F \subset I,\ F \text{ finie}\right\} \quad (\in [0, +\infty]).$$

Proposition 4

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et $I' \subset I$. On a $\sum\limits_{i\in I'} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.

Preuve :

Soit $F \subset I'$ finie. Alors $F \subset I$. On a:

$$\sum_{i\in F} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in I'} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$$

Par passage au sup sur F.

Proposition 5

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs telles que $\forall i \in I,\ u_i \leq v_i$. On a $\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$

Preuve :

Soit $F \subset I$ finie. Alors on a:

$$\sum_{i\in F} u_i \leq \sum_{i\in F} v_i \leq \sum_{i\in I} v_i \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$$

Par passage au sup sur F.

Proposition 6: Lien avec les sommes finies, les sommes de séries.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

1. Si I est finie, le nombre $\sum\limits_{i\in I} u_i$ est à la fois la somme des nombres de la famille, et la somme de la famille.
2. Si $I = \mathbb{N}$, alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$, le nombre à droite étant la somme de la série $\sum u_n$.

Preuve :

$\boxed{1.}$ Notons s la somme finie habituelle et σ la nouvelle.
⊚ On a $I \subset I$ finie, donc $s \leq \sigma$.
⊚ Soit $F \subset I$ finie, on a

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in I\setminus F} u_i \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in F} u_i \leq s \quad \text{alors} \quad \sigma \leq s.$$

Par antisymétrie, $\sigma = s$.

$\boxed{2.}$ ⊚ Soit $N \in \mathbb{N}$, $[\![0, N]\!] \subset \mathbb{N}$ donc $\sum\limits_{i=0}^{N} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$. Par passage à la limite, $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.
⊚ Soit $F \subset \mathbb{N}$ finie. On a

$$\sum_{i\in F} u_i \leq \sum_{i=0}^{N} u_i \quad \text{avec } N = \max(F).$$

Alors, par passage à la limite, puis au sup:

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Proposition 7: Invariance de la somme par permutation, cas positif.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs et σ une bijection de I dans I. On a

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

Preuve :

⊚ Soit $F \subset I$ finie. On a

$$\sum_{i\in F} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in\sigma(F)} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} \leq \sum_{i\in I} u_i.$$

⊚ Soit $F \subset I$ finie. On a

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{i\in\sigma^{-1}(F)} u_{\sigma(i)} \leq \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} \quad \text{alors} \quad \sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

1.2 Familles sommables de réels positifs.

Définition 8

Une famille de réels **positifs** $(u_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si sa somme est finie, ce qui se note

$$\sum_{i\in I} u_i < +\infty.$$

Proposition 9

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs (indexées par le même ensemble) et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

- La famille $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ le sont.
- Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

Preuve :

Trivial.

1.3 Sommation par paquets.

Théorème 10: de sommation par paquets, cas positifs.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs**.
On suppose que I s'écrit comme une réunion **disjointe** $I = \bigcup_{j\in J} I_j$. Alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$$

Preuve :

Preuve hors-programme.

Corrolaire 11: si cette somme est finie, alors c'est sommable.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres positifs est sommable si et seulement si

1. pour tout $j \in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable,
2. la famille $(\sum\limits_{i\in I_j} u_i)_{j\in J}$ est sommable.

Théorème 12: de Fubini positif.

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs indexée par un produit cartésien $I \times J$, on a:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

Preuve :

On a $I \times J = \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times J)$ où les $\{i\} \times J$ sont un recouvrement disjoint de $I \times J$. Alors:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{(i,j)\in\{i\}\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j}.$$

Exemple 13: Sommes triangulaires, cas positif.

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs indexée par $\mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}$$

Solution :

On a $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ où $I_n = \{(k, n-k) \mid 0 \le k \le n\}$ recouvrement disjoint.

Exemple 14

Calculer la somme de la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{p^2q^2} &= \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\sum_{q\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2q^2} = \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}\left(\sum_{q\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{q^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}\\ &= \frac{\pi^4}{36}.\end{aligned}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p+q = n\} = \{(k, n-k) \mid k \in [\![1, n]\!]\}$ (recouvrement disjoint).

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(p+q)^2} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{(p,q)\in I_n}\frac{1}{(p+q)^2}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}|I_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc la famille n'est pas sommable.

Exemple 15

Démontrer l'identité $\sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)=1$.

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1) &= \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 16

Soit $a \in [0,1[$. En considérant la famille $(a^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, démontrer l'identité:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1-a^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)a^n,$$

où pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Solution :

On va poser pour $n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid pq = n\}$ (recouvrement disjoint):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1-a^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}(a^n)^p = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} a^{pq} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{(p,q)\in I_n} a^{pq} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a^n|I_n| \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a^n d(n)\end{aligned}$$

En effet, $I_n = \{(p, \frac{n}{p}) \mid p \text{ divise } n\}$. Donc $|I_n| = d(n)$.

2 Sommer des nombres complexes.

2.1 Familles sommables de nombres complexes: l'espace ℓ^1.

Définition 17

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^I$ est dite **sommable** si $\sum_{i\in I}|u_i| < +\infty$.

L'ensemble des familles sommables de $\mathbb{K}^I$ est noté $\ell^1(I)$

Proposition 18

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors toute sous-famille de $(u_i)_{i\in I'}$ $(I \subset I')$ l'est aussi.

Preuve :

Supposons $(u_i)_{i\in I}$ sommable. D'après 4

$$\sum i \in I'|u_i| \leq \sum_{i\in I}|u_i| < +\infty.$$

Proposition 19

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs telles que

$$\forall i \in I,\ |u_i| \leq v_i.$$

Si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$.

Preuve :

On a $(|u_i|)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont des familles positives. D'après 5:

$$\sum_{i\in I}|u_i| \leq \sum_{i\in I} v_i < +\infty$$

Proposition 20

L'ensemble $\ell^1(I)$ des familles sommables de $\mathbb{K}^I$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

Preuve :

⊚ Posons $(\theta_i)_{i\in I} = 0_{\mathbb{K}^I}$. Alors $\sum \theta_i = 0$, donc $(\theta_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$.

⊚ Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} |\lambda u_i + \mu v_i| &\le \sum_{i\in I} |\lambda u_i| + \sum_{i\in I} |\mu v_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i\in I} |u_i| + |\mu| \sum_{i\in I} |v_i| \\ &< +\infty\end{aligned}$$

2.2 Somme d'une famille sommable de nombres complexes.

Définition 21: Somme d'une famille sommable réelle.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de nombre réels. On pose

$$I_+ = \{i \in I \mid u_i \ge 0\} \quad \text{et} \quad I_- = \{i \in I \mid u_i < 0\}.$$

Les famille s$(u_i)_{i\in I_+}$ et $-(u_i)_{i\in I_-}$ sont des familles sommables de réels positifs.

On appelle **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et on note $\sum\limits_{i\in I} u_i$ le nombre réel défini par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_+} u_i - \sum_{i\in I_-} (-u_i)$$

Définition 22: Somme d'une famille sommable complexe.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de nombres complexes.
Les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont des familles réelles sommables.

On appelle **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et on note $\sum\limits_{i\in I} u_i$ le nombre complexe défini par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i).$$

Proposition 23: Lien avec les séries.

Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Si c'est le cas,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Le membre de gauche étant la somme de la famille, et celui de droite la somme de la série.

Preuve :

Proposition 6.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(I) \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty \iff \sum u_n \text{ CVA..}$$

Proposition 24: Approcher la somme par une somme finie.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie F finie de I telle que

$$\left| \sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i \right| \le \varepsilon$$

Preuve :

Idée de preuve (cas réel). Soit F partie finie de I. On a

$$\begin{aligned}\left| \sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i \right| &= \left| \sum_{i\in I_+} u_i - \sum_{i\in I_-} (-u_i) - \sum_{i\in F\cap I_+} u_i + \sum_{i\in F\cap I_-} (-u_i) \right| \\ &\le \left| \sum_{i\in I_+} u_i - \sum_{i\in F\cap I_+} u_i \right| + \left| \sum_{i\in I_-} (-u_i) - \sum_{i\in F\cap I_-} (-u_i) \right| \\ &\le \left| \sum_{i\in I_+\setminus F} u_i \right| + \left| \sum_{i\in I_-\setminus F} (-u_i) \right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{caractérisation de la borne sup.} \\ &\le \varepsilon\end{aligned}$$

Théorème 25: Linéarité de la somme.

$$(u_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} u_i \text{ est une forme linéaire sur } \ell^1(I).$$

Preuve :

Admis.

Proposition 26: Croissance de la somme.

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables telles que $\forall i \in I,\ u_i \leq v_i$, alors:

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

Preuve :

Admis.

Corrolaire 27: Inégalité triangulaire.

$$\forall (u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I),\quad \left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} |u_i|.$$

Preuve :

Admis.

Théorème 28: Permutation des termes de la somme d'une famille sommable.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombre complexes et σ une bijection de I dans I. On a

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

En particulier, on peut permuter les termes de la somme d'une série absolument convergente.

Preuve :

Admis.

2.3 Sommation par paquets.

Théorème 29: de sommation par paquets.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.
On suppose que I s'écrit comme une réunion disjointe $I = \bigcup\limits_{j\in J} I_j$.

Si u est sommable, alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Théorème 30: de Fubini.

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres complexes indexée par un produit cartésien $I\times J$.
Si u est **sommable**,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

Exemple 31: Sommes triangulaires.

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable de nombres complexes. On a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}.$$

Méthode : Le calcul d'abord, la justification ensuite.

En partique, on pourra écrire une sommation par paquets ou un échange de somme "sous réserve de sommabilité", le temps de voir si on aboutit ainsi à un résultat intéressant.

Le cas échéant, il est encore temps de prouver la sommabilité en sommant les modules.
On insiste sur le fait que les calculs de somme sur les modules sont justifiés par la seule positivité!

Exemple 32: Retour sur un exemple.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Démontrer que la famille $(z^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n,$$

où pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exemple 33

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}.$$

Solution :

On a:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} (z^{2n-1})^p = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} z^{(2n-1)p} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^{-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (z^{2p})^n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^{2p}}.$$

Justifions que ces opérations sont possible: que $(z^{(2n-1)p})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
Calculons la somme des modules:

$$\sum_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2} |z^{(2n-1p)}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} |z|^{(2n-1)p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{|z|^p}{1-|z|^{2p}}$$

Convergente car $\frac{|z|^p}{1-|z|^{2p}} \sim |z|^p$ avec $|z| < 1$.

On a:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{p=0}^{+\infty} (z^{2^{n+1}})^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^n(2p+1)}$$

Pour $q \in \mathbb{N}^*$, $I_q = \{(n,p) \in \mathbb{N}^2 \mid 2^n(2p+1) = q\}$, on a $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{q\in\mathbb{N}^*} I_q$ et les I_q sont disjoints deux-à-deux.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, alors $(n,p) \in I_{2^n(2p+1)}$.
Par sommation par paquets:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} z^{2^n(2p+1)} = \sum_{q\in\mathbb{N}^*}\sum_{(n,p)\in I_q} z^{2^n(2p+1)} = \sum_{q\in\mathbb{N}^*} z^q |I_q| = \sum_{q\in\mathbb{N}^*} z^q = \frac{z}{1-z}.$$

En effet, pour $q \in \mathbb{N}^*$, d'après le TFAr, q s'écrit de manière unique sous la forme $q = 2^n p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$. Or les p_i sont premiers impairs donc leur produit est impair, noté $(2p+1)$ $(p \in \mathbb{N})$. On a donc $q = 2^n(2p+1)$, donc $|I_q| = 1$.
Il reste à prouver que $(z^{2^n(2p+1)})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} |z^{2^n(2p+1)}| = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} |z|^{2^n(2p+1)} = \frac{|z|}{1-|z|} < +\infty.$$

2.4 Produits.

Proposition 34

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables, alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Ce résultat s'étend à un produit à un produit fini de familles sommables.

Preuve :

On somme les modules.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} |a_i b_j| = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} |a_i||b_j| = \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right)\left(\sum_{j\in J} |b_j|\right) < +\infty.$$

La famille est donc sommable. Alors:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Théorème 35: Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes toutes deux absolument convergents.

La série de terme général

$$c_n := \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

est absolument convergente. On l'appelle **produit de Cauchy** de $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
On a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right)$$

Preuve :

⊙ Montrons que $\sum c_n$ CVA. Sommons les modules:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| = \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_i||b_j| = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) < +\infty.$$

⊙ En refaisant le calcul sans les modules, on obtient bien l'égalité.

Exemple 36

Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$$

Solution :

On a:

$$\frac{1}{(1-z^2)} = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

On a utilisé le théorème du produit de Cauchy, car les séries sont absolument convergentes.

Exemple 37: Propriété de morphisme de l'exponentielle, et retour sur le début de l'année.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on définit le nombre $\exp(z)$ par

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

(on avait prouvé qu'il s'agit bien d'une série convergente avec d'Alembert).

Démontrer que

$$\forall (z, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z + \tilde{z}) = \exp(z)\exp(\tilde{z}).$$

Démontrer que $\exp : x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est sa propre dérivée.

Solution :

Soient $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}^2$. On a $\exp(z)$ et $\exp(\tilde{z})$ les sommes de deux séries absolument convergentes. On écrit le produit de Cauchy:

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(\tilde{z}) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tilde{z}^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} \times \frac{\tilde{z}^{n-k}}{(n-k)!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k \tilde{z}^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(z+\tilde{z})^n\\ &= \exp(z+\tilde{z})\end{aligned}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} - \exp(a)\right| &= \exp(a)\left|\frac{\exp(h)-1}{h} - 1\right|\\ &= \exp(a)\left|\frac{\exp(h)-1-h}{h}\right|\\ &= \exp(a)\left|\frac{1}{h}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{h^n}{n!}\right|\\ &= \exp(a)\left|h\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{h^{n-2}}{n!}\right|\\ &\le |h|\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{h^n}{n!}\right|\\ &\le |h|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\end{aligned}$$

Donc $\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \exp(a)$.
Donc exp est dérivable en a et $\exp'(a) = \exp(a)$.

Théorème 38: Théorème de réarrangement de Riemann.

Soit $\sum u_n$ une série de nombres réels convergente, mais pas absolument. Alors pour tout $l \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} l.$$

Preuve :

Hors-programme.

3 Exercices.

Exercice 1

Calculer la somme de $\left(\frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)}\right)_{i \geq 0, j \geq 1}$ (on suppose $\zeta(2)$ connu). En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}.$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(j^2+i)(j^2+i+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^2+i} - \frac{1}{j^2+i+1} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid n = i + j^2\}$ (recouvrement disjoint).

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{(i,j) \in I_n} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} |I_n| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

En effet, $I_n = \{(n-j^2, j^2) \mid j^2 \in [\![1, n]\!]\} = \{(n-j^2, j^2) \mid j \in [\![1, \sqrt{n}]\!]\}$. Donc $|I_n| = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

En conclusion, cette somme vaut $\zeta(2)$.