Chapitre 41

Fractions rationnelles.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Fractions rationnelles.

1.1 Le corps $\mathbb{K}[X]$

Définition 1

On note $K(X)$ le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
Ses éléments, appelés **fractions rationnelles** sont de la forme

$$F = AB^{-1} \quad \text{ou} \quad F = \frac{A}{B}.$$

où $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Le couple (A, B) est appelé un **représentant** de F.

Proposition 2

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$B \text{ est unitaire et non nul}, \quad A \wedge B = 1 \quad \text{et} \quad F = \frac{A}{B}.$$

C'est la **forme irréductible** de la fraction F.

Fonction rationnelle associée, composée, dérivation.

Définition 3: Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de forme irréductible $F = \frac{A}{B}$. On pose $D_F = \mathbb{K} \setminus \{\alpha \in \mathbb{K} \mid B(\alpha) = 0\}$.
On appelle **fonction rationnelle** associée à F l'application $\widetilde{F} : \begin{cases} D_F & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \frac{A(x)}{B(x)} \end{cases}$

Exemple 4

Soit $F = \frac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$. Montrer que $F(-X) = F(X)$ et $F(\frac{1}{X}) = F(X)$.

Exemple 5

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, non nul, de degré d. Justifier que $X^d P(\frac{1}{X})$ est un polynôme.
Pourquoi l'appelle-t-on parfois polynôme symétrique de P ?

Solution :

Notons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors:

$$X^d P\left(\frac{1}{X}\right) = X^d \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{d-k} = \sum_{j=0}^{d} a_{d-j} X^j.$$

Remarque: $f : P \mapsto X^d P(\frac{1}{X})$ est un endomorphisme de $R_d[X]$.

Degré et partie entière d'une fraction rationnelle.

Définition 6

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de forme irréductible $F = \frac{A}{B}$. Le **degré** de F est

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B).$$

On a donc $\deg(F) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Proposition 7: Degré et opérations.

Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F+G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \deg(\lambda F) \leq \deg(F)$.
3. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$.
4. Si $G \neq 0,\ \ \deg(\frac{F}{G}) = \deg(F) - \deg(G)$

Exemple 8

$$\deg\left(\frac{X^4}{X^2+1}\right) = 2; \quad \deg\left(\frac{X-1}{X^3+1}\right) = -2; \quad \deg\left(\frac{X^2+1}{X^2-1}\right) = 0.$$

Proposition 9

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Alors

$$\exists!(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2 \mid A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

On divise par B: $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$.
On appelle Q la **partie entière** de F, notée E, et $\frac{R}{B}$ est une fraction de degré strictement négatif.

Exemple 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la partie entière de $\frac{X^n}{X-1}$.

Solution :

On a

$$X^n = X^n - 1 + 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k + 1$$

La partie entière est donc $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

1.2 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle.

Définition 11

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de forme irréductible $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$.

1. α est un **zéro** de F si $A(\alpha) = 0$.
2. α est un **pôle** de F si $B(\alpha) = 0$.

On parlera de **pôle simple** au sujet d'un pôle de multiplicité 1.

Exemple 12

Déterminer les pôles de $\frac{1}{X^2+1}$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Solution :

Pas de pôles réels, mais i et $-i$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple 13

Justifier qu'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ sans pôle ne peut être qu'un polynôme.

Solution :

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.
On utilise le théorème de d'Alembert-Gauss sur B: les polynômes non constants ont des racines dans $\mathbb{C}$, ce n'est pas le cas de B donc il est constant (non nul).
Alors $\exists\lambda \in \mathbb{K}^* \mid B = \lambda$ et $F = \frac{1}{\lambda}A \in \mathbb{K}[X]$.

Proposition 14

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
Alors α est pôle de F de multiplicité m ssi $\overline{\alpha}$ l'est aussi.

2 Décomposition en éléments simples.

2.1 Les deux théorèmes.

Théorème 15: Décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$.

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ sous forme irréductible, le dénominateur étant décomposé en facteurs irréductibles:

$$F(X) = \frac{A(X)}{\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}}$$

Les complexes α_k sont distincts deux-à-deux, les m_k sont des entiers naturels non nuls. Alors il existe:
— Un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ (partie entière de F).
— Une unique famille $(a_{k,j})$ de complexes.
tels que

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\alpha_{k,j}}{(X - \alpha_k)^j} \right)$$

Théorème 16: Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ sous forme irréductible:

$$F(X) = \frac{A(X)}{\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{l=1}^{s} (X^2 + p_l + q_l)^{n_l}}$$

Les réels α_k sont distincts deux-à-deux; les irréductibles de degré 2: $X^2 + p_l + q_l$ sont distrincts deux-à-deux, les m_k et les n_l sont dans $\mathbb{N}^*$.
Alors il existe:
— Un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ (partie entière de F).
— Une unique famille $(a_{k,j})$ de réels.
— Une unique famille $(b_{l,j}X + c_{l,j})$ de polynômes des $\mathbb{R}_1[X]$.
tels que:

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\alpha_{k,j}}{(X - \alpha_k)^j} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n_l} \frac{b_{l,j}X + c_{l,j}}{(X^2 + p_l X + q_l)^j} \right).$$

Exemple 17: Forme d'une décomposition en éléments simples.

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de

$$F(X) = \frac{X}{(X+1)^3(X^2+X+1)}$$

2. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F(X) = \frac{X^2+2}{(X-1)^2(X+2)(X^2+X+1)^2}$$

Solution :

$\boxed{1.}$

$$F = \frac{X}{(X+1)^3(X^2+X+1)} = \frac{X}{(X+1)^3(X-j)(X-\overline{j})}.$$

D'après le théorème: $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$ tels que

$$F = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{(X+1)^2} + \frac{\gamma}{(X+1)^3} + \frac{\delta}{X-j} + \frac{\varepsilon}{X-\overline{j}}$$

$\boxed{2.}$

$$F = \frac{X^2+2}{(X-1)^2(X+2)(X^2+X+1)^2}$$

Par théorème, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$F(X) = \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{(X-1)^2} + \frac{\beta}{(X+2)} + \frac{\gamma_1 X + \delta_1}{X^2+X+1} + \frac{\gamma_2 X + \delta_2}{(X^2+X+1)^2}.$$

2.2 Coefficient relatif à un pôle simple.

Proposition 18: Calcul du coefficient relatif à un pôle simple.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ un **pôle simple** de F.
La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc

$$F = \frac{c}{X-\alpha} + G \quad \text{où } \alpha \text{ n'est pas un pôle de } G.$$

1. Formule du cache : $c = [(X-\alpha)F(X)](\alpha)$.
2. Formule théorique: si $F = \frac{A}{B}$ et $B' \neq 0$, alors $c = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$.

Preuve :

$\boxed{1.}$ On a $F(X) = \frac{c}{X-\alpha} + G$ donc $(X-\alpha)F(X) = c + (X-\alpha)G$, en évaluant en α on trouve $c = [(X-\alpha)F(X)](\alpha)$.
$\boxed{2.}$ Notons $B = (X-\alpha)Q$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$.
On a $B' = (X-\alpha)Q' + Q$ donc $B'(\alpha) = Q(\alpha)$, or :

$$\frac{A}{(X-\alpha)Q} = \frac{C}{X-\alpha} + G$$

Donc $\frac{A}{Q} = c + (X-\alpha)G$ et donc $\frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)} = c$ donc $c = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)} = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$.

Exemple 19

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{2X-1}{X^3+3X^2+2X}$$

$$G = \frac{n!}{X(X-1)...(X-n)} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Solution :

$\boxed{1.}$ On a:

$$F = \frac{2X-1}{X(X+1)(X+2)}$$

Alors $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$F(X) = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+2}.$$

Alors $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 3$, $\gamma = -\frac{5}{2}$.
$\boxed{2.}$ On a:

$$G = \frac{n!}{X(X-1)...(X-n)}$$

Alors $\exists \alpha_0 ... \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$G(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{X-k}$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$ fixé, $\alpha_k = \frac{n!}{k(k-1)...1\cdot(-1)...(k-n)} = (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}$.

Exemple 20

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ admettant n racines distinctes non nulles $z_1, ..., z_n$.
1. Décomposer en éléments simples la fraction P^{-1}.
2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k P'(z_k)}.$$

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - z_k)$ où λ est le coefficient dominant de P.
Alors $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - z_k}.$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la formule du cache donne $a_k = \frac{1}{\lambda \prod\limits_{i \neq k}^{n} (z_i - z_k)}$.

La formule théorique donne $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $a_k = \frac{1}{P'(z_k)}$, alors

$$P^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(z_k)(X - z_k)}$$

$\boxed{2.}$ On évalue en 0:

$$P^{-1}(0) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k P'(z_k)}$$

2.3 Une décomposition importante : celle de $\frac{P'}{P}$.

Lemme 21: Dérivée logarithmique d'un produit.

Soient $P_1, ..., P_r \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)'}{\prod_{k=1}^{r} P_k} = \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k'}{P_k}$$

Preuve :

$$\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)" = \sum_{k=1}^{r} P_k' \prod_{i \neq k} P_i.$$

On divise par $\prod_{i=1}^{r} P_i$:

$$\frac{(\prod_{k=1}^{r} P_k')}{\prod_{k=1}^{r} P_k} = \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k'}{P_k}.$$

Théorème 22: Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$

Soit P un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$:

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X - \alpha_k}$$

Preuve :

Posons $P_k = (X - \alpha_k)^{m_k}$. D'après le Lemme:

$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)'}{\prod_{k=1}^{r} P_k} = \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k'}{P_k}$$

Or:

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \ \frac{P_k'}{P_k} = \frac{m_k (X - a_k)^{m_k - 1}}{(X - \alpha_k)^{m_k}} = \frac{m_k}{X - \alpha_k}$$

Donc $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X - \alpha_k}$.

Exemple 23: Utilisation d'une décomposition en éléments simples.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Déterminer la forme irréductible de

$$F = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Solution :

Posons $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$. On sait que $F = \frac{P'}{P}$ et on a:

$$P = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k; \quad P' = \sum_{k=0}^{n-1} k X^{k-1}.$$

On a $\mathrm{PGCD}(P', P) = 1$ car P n'a que des racines simples, donc P et P' n'ont pas de racines communes.

On évalue en 1:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$$

2.4 Pratique de la décomposition en éléments simples.

Méthode : comment aborder un calcul de décomposition en éléments simples.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ dont on cherche la décomposition en éléments simples.

1. On écrit F sous forme irréductible.
   On décompose le dénominateur en facteurs irréductibles.
2. On cherche la partie entière de F (si $\deg F < 0$, la partie entière est nulle).
3. On écrit *a priori* la décomposition en éléments simples de F.
   Elle fait intervenir des coefficients qu'il reste à calculer.
4. On calcule les coefficients relatifs aux pôles simples (formule du cache).
5. On calcule les autres coefficients comme on peut.
   On peut s'aider de la parité, de la conjugaison complexe, de l'évaluation en quelques valeurs, des limites en $+\infty$...

Exemple 24

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

$$F = \frac{X^2+2}{X^2(X^2+1)} \quad \text{et} \quad G = \frac{1}{X^n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Solution :

$\boxed{1.}$ On a:

$$F = \frac{X^2+2}{X^2(X-i)(X+i)} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X^2} + \frac{\gamma}{X-i} + \frac{\delta}{X+i}$$

Avec la formule du cache : $\gamma = \frac{i}{2}$ et $\delta = -\frac{i}{2}$.
On multiplie par X^2: $\frac{X^2+2}{X^2+1} = \alpha X + \beta + \frac{\gamma X^2}{X-i} + \frac{\delta X^2}{X+i}$.
On évalue en 0: $\beta = 2$.
On multiple par X: $\frac{X^2+2}{X(X^2+1)} = \alpha + \frac{\beta}{X} + \frac{\gamma X}{X-i} + \frac{\delta X}{X+i}$
On passe à la limite: $0 = \alpha + 0 + \gamma + \delta$ donc $\alpha = 0$.
Conclusion: $F = \frac{2}{X^2} + \frac{i/2}{X-i} - \frac{i/2}{X+i}$.

$\boxed{2.}$ On a:

$$G = \frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k}$$

Avec $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$.
Avec la formule théorique, on sait que si α est un pôle simple de $\frac{A}{B}$, alors le coefficient vaut $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$.
Ici, $A = 1$, $B = X^n$ et $B' = nX^{n-1}$.
On a:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \ a_k = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$$

Donc:

$$\frac{1}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{n(X-\omega_k)}.$$

Exemple 25

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F = \frac{1}{X^3+1} \quad \text{et} \quad G = \frac{4X^2}{X^4+1}$$

Solution :

$\boxed{1.}$ On a:

$$F = \frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 - X + 1}$$

Formule du cache : $\alpha = \frac{1}{3}$.
On évalue en 0: $F(0) = 1 = \alpha + \gamma$ donc $\gamma = \frac{2}{3}$.
On évalue en 1: $F(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \beta + \frac{2}{3}$ donc $\beta = -\frac{1}{3}$.
Conclusion: $F = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{X-2}{X^2-X+1}\right)$.

$\boxed{2.}$ On a

$$G = \frac{4X^2}{X^4+1} = \frac{4X^2}{(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)} = \frac{\alpha X + \beta}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$$

On passe à la limite dans $XG(X)$: $0 = \alpha + \gamma$.
On évalue en 0: $0 = \beta + \delta$.
Il en faut deux autres...