Colles, semaine 20 (11/03→15/03)

Familles de vecteurs

Familles génératrices, familles libres, bases d'un espace vectoriel.

Le cours sur la dimension finie a été commencé et les étudiants disposent d'ores et déjà de la caractérisation des bases en dimension finie (on connaît les dimension « usuelles »).

Aux colleurs : attention, le cours n'est pas terminé nous n'avons pas encore les résultats sur les sous-espaces vectoriels en dimension finie. Notamment, pas de formule de Grassmann à ce stade et pas de caractérisation des supplémentaires.

Questions de cours.

- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- (*) Une famille de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.
- Exemple : Démontrer que si $a \in \mathbb{K}$, la famille $\left((X-a)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
- Dans un espace de dimension finie égale à n, les familles libres ont un cardinal inférieur à n et les familles génératrices un cardinal supérieur à n.
- Théorème de caractérisation des bases en dimension finie.
- Exemple : Écrire les polynômes de Lagrange associés à une famille de n scalaires de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et prouver qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Savoir-faire importants.

- Savoir montrer qu'une famille est libre.
- Savoir écrire un ensemble comme un Vect et obtenir ainsi une famille génératrice de ce sous-espace vectoriel.
- Savoir exhiber une base pour calculer la dimension d'un espace vectoriel.
- Savoir se servir de la dimension d'un espace vectoriel pour prouver qu'une certaine famille de vecteurs en est une base.

À venir en semaine 21 : Espaces vectoriels de dimension finie (tout). Applications linéaires (début).