Petits Systèmes Linéaires
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Ibrahim pour l'exercice 9.4
C'est très difficile d'écrire les $L_1 \leftrightarrow L_3$ sous les $\iff$ (de manière esthétique) en LaTeX, bonne chance pour comprendre les étapes

---

Exercices.

Exercice 9.1 [♦◊◊] [Un système de Cramer bête et méchant]

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 10 \\ 2x - y + \ \ z = 3 \\ \ \ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & (x, y, z) \text{ est solution} \\ \iff & \begin{cases} 3x + y - 2z = 10 \\ 2x - y + \ \ z = 3 \\ \ \ x - y + 2z = 2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \ \ x - y + 2z = 2 \\ 2x - y + \ \ z = 3 \\ 3x + y - 2z = 10 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x - \ \ y + 2z = 2 \\ \qquad y - 3z = -1 \\ \qquad 4y - 8z = 4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ \qquad y - 3z = -1 \\ \qquad\qquad 4z = 8 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

L'unique solution de système dans $\mathbb{R}^3$ est donc $(3, 5, 2)$.

□

Exercice 9.2 [♦◊◊]

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & (x, y, z) \text{ est solution} \\ \iff & \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ \quad - 4y + 4z = -4 \\ \quad - 8y + 8z = -8 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ \qquad y - z = 1 \\ \qquad\quad z = y - 1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -x \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions est alors

$$S = \{(x, 1 - x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 1, 0) + x(1, -1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

□

Exercice 9.3 [♦♦◊]

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Résoudre :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
& (x, y, z) \text{ est solution} \\
\iff & \begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ (b-a)y + (b^2 - a^2)z = b^3 - a^3 \\ (c-a)y + (c^2 - a^2)z = c^3 - a^3 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ (b-a)y + (b-a)(b+a)z = (b-a)(a^2 + ab + b^2) \\ (c-a)y + (c-a)(c+a)z = (c-a)(a^2 + ac + c^2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ y + (b+a)z = a^2 + ab + b^2 \\ y + (c+a)z = a^2 + ac + b^2 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ y + (b+a)z = a^2 + ab + b^2 \\ z = a + b + c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ y = -bc - ab - ac \\ z = a + b + c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = abc \\ y = -(ab + bc + ca) \\ z = a + b + c \end{cases}
\end{aligned}$$

L'unique solution est donc $(abc, -(ab + bc + ca), a + b + c)$.

□

Exercice 9.4 [♦♦♦]

Soit λ un paramètre réel et le système :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Le résoudre, en discutant selon les valeurs de λ.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & (x,y,z) \text{ est solution} \\ \iff & \begin{cases} x + y + (2-\lambda)z = 0 \\ x + (2-\lambda)y + z = 0 \\ (2-\lambda)x + y + z = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y + (2-\lambda)z = 0 \\ (1-\lambda)y + (\lambda-1)z = 0 \\ (\lambda-1)y + (1-(2-\lambda)^2)z = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y + (2-\lambda)z = 0 \\ (1-\lambda)y + (\lambda-1)z = 0 \\ (-\lambda^2 + 5\lambda - 4)z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines (évidentes) du polynôme $-\lambda^2 + 5\lambda - 4$ sont 1 et 4.
⊚ Premier cas : $\lambda \notin \{1, 4\}$.

$$(x,y,z) \text{ est solution} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'unique solution est le couple $(0, 0, 0)$.
⊚ Deuxième cas : $\lambda = 1$.

$$(x,y,z) \text{ est solution} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble S des solutions est le plan vectoriel:

$$S = \{(-y-z, y, z) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

⊚ Dernier cas : $\lambda = 4$

$$(x,y,z) \text{ est solution} \iff \begin{cases} x + z - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble S des solutions est la droite passant par l'origine:
. $S = \{(z, z, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\} = \{(0,0,0) + z(1,1,1) \ \,|\, z \in \mathbb{R}\}$

□