1 Le corps des nombres complexes.

On admet l'existence d'un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ ainsi que d'une *addition* et d'un *produit* $+$ et $\cdot$:

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z,z') & \mapsto & z+z' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z,z') & \mapsto & z\cdot z' \end{array} \right. .$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes**. La construction de $(\mathbb{C},+,\cdot)$ n'est pas très difficile mais elle est hors-programme. La liste des propriétés ci-dessous est donc admise.

- Les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Dans $\mathbb{C}$, il existe un nombre i tel que

$$i^2 = -1.$$

  Ainsi, l'équation $x^2 = -1$, qui n'a *pas de solutions* dans $\mathbb{R}$, en possède une (au moins...) dans $\mathbb{C}$.

- Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme $\boxed{z = a + ib}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
  Cette écriture est unique (voir plus bas) : on dit que $a+ib$ est la **forme algébrique** du nombre z.
- Les lois $+$ et $\cdot$ sont commutatives :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \qquad z + z' = z' + z \quad \text{et} \quad z \cdot z' = z' \cdot z.$$

- Les lois $+$ et $\cdot$ sont associatives :

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{et} \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

- La loi $\cdot$ est distributive par rapport à $+$:

$$\forall z_1, z_2, z \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2) \cdot z = z_1 \cdot z + z_2 \cdot z = z \cdot (z_1 + z_2).$$

- 0 est neutre pour l'addition et 1 est neutre pour la multiplication :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad 0 + z = z = z + 0 \quad \text{et} \quad z \times 1 = z = 1 \times z.$$

Méthode (Un premier calcul dans $\mathbb{C}$).

$$(a+ib)\cdot(c+id) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

- L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sera noté $\mathbb{C}^*$.
  Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique nombre complexe ω tel que $\omega z = z\omega = 1$. Ce nombre sera appelé **inverse** de z et noté z^{-1}. Comme dans $\mathbb{R}$, 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{C}$.
- Le quotient de deux nombres complexes est défini ainsi : si $(z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$,

$$\frac{z'}{z} := z' \cdot (z)^{-1}.$$

  Les égalités suivantes sont vraies pour tous nombres z_1, z_2, z_3 non nuls :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} = \frac{z_2}{z_1} \qquad \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \qquad \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = z_1 \cdot \frac{z_2}{z_3}.$$

- Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad z \cdot z' = 0 \iff \big(z = 0 \ \text{ ou } \ z' = 0\big).$$

- Les nombres complexes n'ont pas de signe : écrire une inégalité entre deux nombres complexes n'a <u>aucun sens</u>.
- Les identités démontrées dans le cours Sommes et produits sont vraies pour les nombres complexes (toutes les preuves fonctionnent de la même façon). On a notamment

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{si } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1-k} \beta^k$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}.$$

Exemple 1.

1. $\forall p \in \mathbb{Z} \quad i^{2p} = (-1)^p \quad$ et $i^{2p+1} = (-1)^p i$. En particulier, $\boxed{\frac{1}{i} = -i}$.
2. Calcul de

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4, \qquad (1 + 2i)^2, \qquad (1 + i)^3.$$

Exemple 2 (Calcul de l'inverse)**.**

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Vérifier que

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

   Le nombre $a - ib$ sera appelé plus loin le conjugué de de $a + ib$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$ son module.
2. Calculer $\dfrac{1}{1 + i}$ et $\dfrac{2 - i}{1 - 3i}$.

Proposition-Définition 3 (Retour sur l'unicité de la forme algébrique)**.**

Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. L'unicité de l'écriture de la forme algébrique d'un nombre complexe donne

$$a + ib = a' + ib' \iff \left(a = a' \text{ et } b = b'\right).$$

En particulier,

$$a + ib = 0 \iff (a = 0 \text{ et } b = 0).$$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec (a, b) tel que $z = a + ib$.
Le réel a est appelé **partie réelle** de z et noté $\mathrm{Re}(z)$.
Le réel b est appelé **partie imaginaire** de z et noté $\mathrm{Im}(z)$.

Proposition 4 (Réels et imaginaires purs)**.**

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0.$$

La nullité de la partie réelle de z caractérise quant à elle l'appartenance de z à l'ensemble des **imaginaires purs**, qui est parfois noté $i\mathbb{R}$.

Proposition 5.

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ <u>réel</u>, on a

$$\mathrm{Re}\left(z + z'\right) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\left(\lambda z\right) = \lambda \mathrm{Re}(z).$$

$$\mathrm{Im}\left(z + z'\right) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\lambda z\right) = \lambda \mathrm{Im}(z).$$

Plus généralement, si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(z_k).$$

« La partie réelle de la somme, c'est la somme des parties réelles ». Idem pour la partie imaginaire.

Corollaire 6.

Les applications partie réelle et partie imaginaire sont $\mathbb{R}$-linéaires, c'est à dire que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ <u>réels</u>, on a

$$\mathrm{Re}\left(\lambda z + \mu z'\right) = \lambda \mathrm{Re}(z) + \mu \mathrm{Re}(z')$$
$$\mathrm{Im}\left(\lambda z + \mu z'\right) = \lambda \mathrm{Im}(z) + \mu \mathrm{Im}(z')$$

Le nombre $\lambda z + \mu z'$ peut être désigné comme une **combinaison linéaire** de z et z' à coefficients réels.

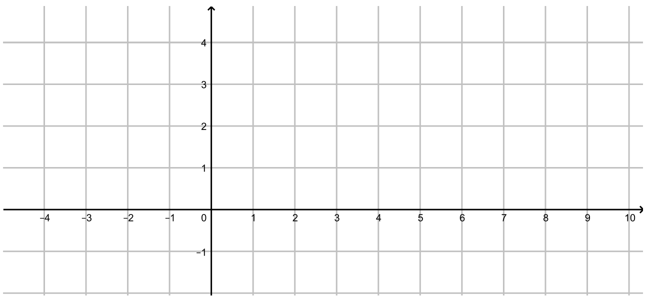
2 Représentation géométrique.

On travaille dans cette partie avec un repère orthonormé du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

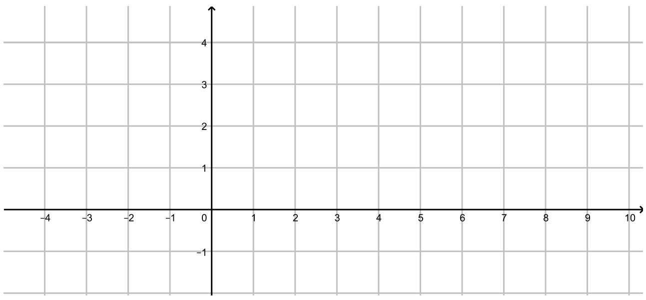
Définition 7.

Soient a et b deux réels.

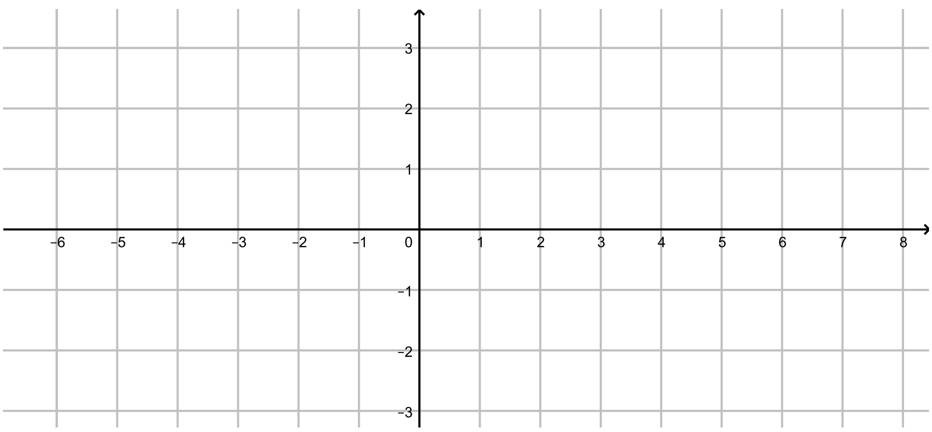
1. Si M est le point du plan de coordonnées (a, b), le nombre $a + ib$ est appelé l'**affixe** de M. Réciproquement, si $z = a + ib$, le point M de coordonnées (a, b) est l'unique point du plan d'affixe z. On pourra le noter $M(z)$.
2. Cette correspondance bijective $z \mapsto M(z)$ entre nombres complexes et points du plan permet d'identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$: on parle de **plan complexe**.
3. L'affixe d'un vecteur $\vec{u}(a, b)$ est le nombre complexe $a + ib$.



Point d'affixe $z = a + ib$



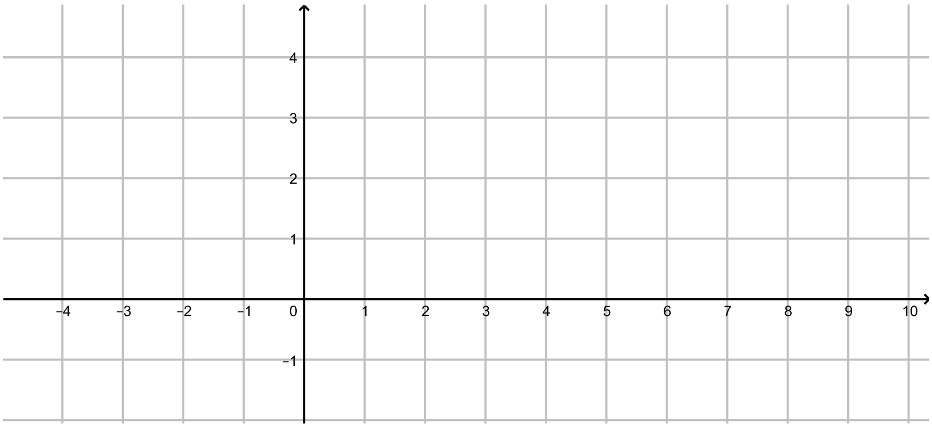
Vecteur d'affixe $z = a + ib$



Proposition 8.

Si A a pour affixe z_A et B pour affixe z_B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixe respectives z et z', et λ et μ deux réels, le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda z + \mu z'$.



Somme de deux nombres complexes et parallélogramme

3 Conjugué d'un nombre complexe.

Définition 9.

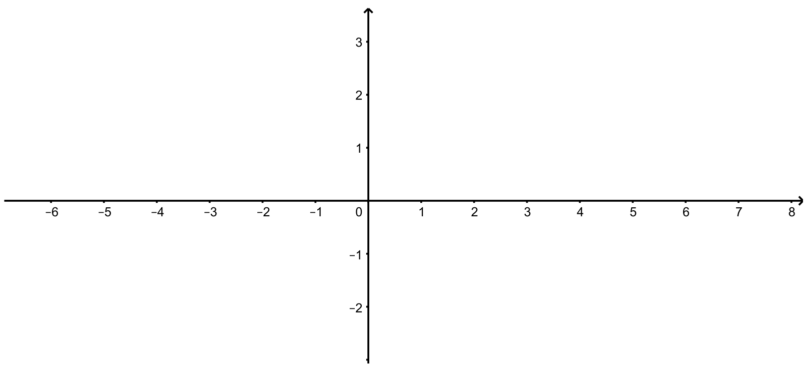
On appelle **conjugué** d'un nombre complexe z, et on note $\overline{z}$ le nombre

$$\overline{z} := \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z).$$

Autrement dit,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \quad \overline{a+ib} = a - ib.$$

Figure. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le point M', d'affixe $\overline{z}$, est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses, du point M d'affixe z.



Proposition 10.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z).$$

Ceci permet d'obtenir les caractérisations suivantes :

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \qquad \text{et} \qquad z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}.$$

Proposition 11 (Conjugaison et opérations)**.**

Pour tous nombres complexes z et z', on a

a) $\overline{\overline{z}} = z$ c) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

b) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ d) si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Par conséquent, l'application $z \mapsto \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, c'est à dire que pour tous nombres $z, z' \in \mathbb{C}$, et tous <u>réels</u> λ, μ, on a

$$\overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda \overline{z} + \mu \overline{z'}.$$

« Le conjugué de la somme, c'est la somme des conjugués ». Marche avec le produit et le quotient.

4 Module d'un nombre complexe.

Définition 12.

Pour tout nombre complexe z, on appelle **module** de z et on note $|z|$ le nombre réel positif

$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

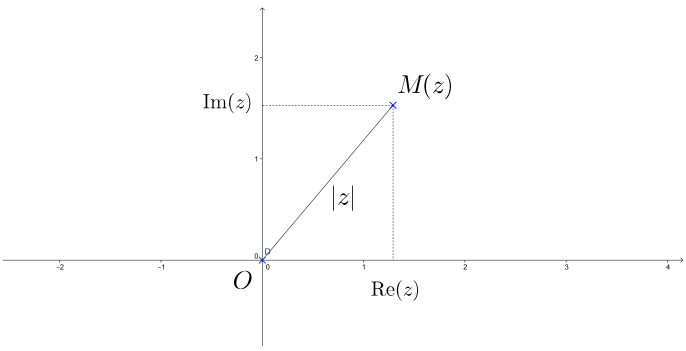
Exemple 13.

$|i| =$ $|2 + 3i| =$.

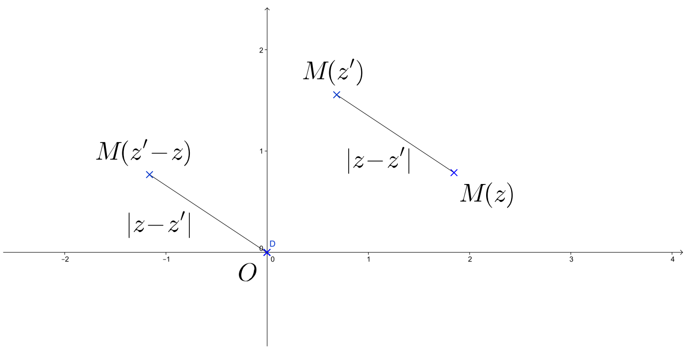
Le module d'un nombre réel a vaut $\sqrt{a^2 + 0^2}$: c'est sa valeur absolue !

Figure.

- Si M est un point du plan d'affixe z, alors $|z|$ est la longueur du segment $[OM]$.
- Si M et M' sont deux points du plan d'affixes z et z', alors $|z - z'|$ est la distance entre M et M'.



Module.



Distance entre deux points.

Confondons le point et son affixe pour énoncer l'idée importante suivante :

$$\boxed{\text{pour } z, z' \in \mathbb{C},\ |z - z'| \text{ est la } \textbf{distance} \text{ entre } z \text{ et } z'.}$$

Exemple 14 (Module, cercles et disques)**.**

Représenter les points dont l'affixe z satisfait $|z-1| = 1$ et $|z+1| \leq 2$.

Proposition 15.

Pour tout nombre complexe z,

a) $|z| = 0 \iff z = 0$.

b) $|-z| = |z| = |\overline{z}|$.

c) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

d) $\mathrm{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 16 (Propriétés multiplicatives du module)**.**

Pour tous nombres complexes z et z', on a

a) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ *b)* $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$, *c)* si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ *d)* si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

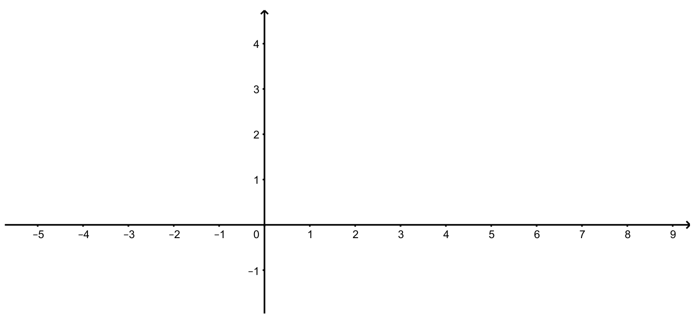
« Le module du produit, c'est le produit des modules ». Idem pour le quotient mais... attention à la somme !

Proposition 17 (Inégalité triangulaire)**.**

Pour tous nombres complexes z et z', on a

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Cas d'égalité : Les deux membres sont égaux si et seulement si $z = 0$ ou il existe un nombre réel <u>positif</u> λ tel que $z' = \lambda z$.



$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Corollaire 18.

1. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z - z'| \leq |z| + |z'|$.

2. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous nombres complexes $z_1, \dots, z_n$,
$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Exercices

$\boxed{\textbf{6.1}}$ **[♦◇◇]** Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

$\boxed{\textbf{6.2}}$ **[♦◇◇]** Soient a et b deux nombres complexes non nuls. Montrer que :
$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}.$$

$\boxed{\textbf{6.3}}$ **[♦♦◇]** Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, montrer que :
$$\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1.$$

$\boxed{\textbf{6.4}}$ **[♦◇◇]** Soient z_1, z_2,...z_n des nombres complexes non nuls de même module. Démontrer que
$$\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\cdots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n} \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\textbf{6.5}}$ **[♦♦◇]** Soient a, b deux nombres complexes tels que $\overline{a}b \neq 1$ et $c = \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}$. Montrer que
$$(|c| = 1) \iff (|a| = 1 \text{ ou } |b| = 1).$$

$\boxed{\textbf{6.6}}$ **[♦♦♦]** Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $R^2 + S^2$ où
$$R = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad S = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

$\boxed{\textbf{6.7}}$ **[♦♦♦]** Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Montrer que $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.
