Colles, semaine 26 (13/05→17/05)

Matrices et applications linéaires (tout)

Dans la partie 1 du cours, on a vu comment représenter une application linéaire dans un couple de bases et établi un "dictionnaire" entre les propriétés dans $L(E, F)$ et celles dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dans la seconde partie, on part de la matrice et on lui associe, canoniquement, une application linéaire. Le rang d'une matrice est défini et un lien est fait avec les "autres" notions de rang. Un théorème important : les matrices de taille n inversibles sont exactement celles de rang n.

La partie 3 s'ouvre par la formule du changement de base(s). Quel lien entre deux matrices qui représentent la même application linéaire ? le même endomorphisme ? Ces questions conduisent naturellement aux notions de matrices équivalentes et de matrice semblables.

Questions de cours.

- Soit J la matrice "Attila" de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
  Calcul de $\mathrm{Ker}(J)$ en passant par le point de vue colonnes (avec l'appli lin cano associée)
- Le rang diminue lors d'un produit matriciel, il reste invariant lors du produit par une matrice inversible (P 30).
- Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.
- Pour toute matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$.
- La similitude des matrices est une relation d'équivalence. Si deux matrices sont semblables elles ont même trace. La réciproque est fausse.
- Si p est un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Savoir-faire importants.

- Savoir calculer le rang d'une matrice en considérant la famille des colonnes (ou des lignes !) et en éliminant les vecteurs superflus pour se ramener à une famille libre.
- Savoir que le rang est invariant par opérations élémentaires et donc que l'échelonnement par l'algo du pivot peut être mobilisé pour un calcul de rang.
- Savoir déterminer le noyau d'une matrice A en posant le système $AX = 0$ ou bien en s'appuyant sur l'ALCA et le rang (point de vue colonne, mieux !)
- Savoir écrire la formule du changement de bases.
- Connaître les propriétés de l'équivalence des matrices, de la similitude des matrices.
- Maîtriser l'exemple de diagonalisation (numéroté 57), très formateur.

À venir en semaine 27 (27 mai) : Intégrales sur un segment.