Problème : Pseudo-inversibilité

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.

Dans tout ce problème, n est un entier naturel non nul.

Partie A. Matrices pseudo-inversibles.

On dit d'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ qu'elle est **pseudo-inversible** si

$$\exists B \in M_n(\mathbb{R}) : \begin{cases} AB = BA & (i) \\ ABA = A & (ii) \\ BAB = B & (iii) \end{cases}$$

On dit alors que B est une **pseudo-inverse** de A.

1. Unicité de la pseudo-inverse. Considérons A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, pseudo-inversible ainsi que B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.
   (a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_1 = AB_2$.
   (b) En déduire que $B_1 = B_2$.
   Notation : lorsque A est pseudo-inversible, *la* pseudo-inverse de A sera désormais notée A^*.
2. Pseudo-inversibilité et inversibilité.
   (a) Montrer que toute matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible et que sa pseudo-inverse est son inverse.
   (b) Montrer que la matrice nulle 0_n est pseudo-inversible et donner 0_n^*.
   Que dire en lien avec la question (a) ?
3. Pseudo-inversibilité des matrices diagonales.
   Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est pseudo-inversible et donner M^*.
   Généraliser : montrer que tout matrice diagonale est pseudo-inversible.
4. Pseudo-inversibilité et nilpotence.
   Montrer que dans $M_n(\mathbb{R})$, la matrice nulle est la seule nilpotente pseudo-inversible.
   Indication : on pourra commencer par montrer que si N est pseudo-inversible, alors pour tout entier $k \geq 2$, on a $N^*N^k = N^{k-1}$.

Partie B. Matrices semblables.

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **semblable** à B si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad A = P^{-1}BP.$$

Notons $A \sim B$ pour « A est semblable à B ».

1. Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Quelle est la classe d'équivalence de la matrice nulle ?
   Justifier que la classe d'équivalence d'une matrice inversible ne contient que des matrices inversibles.
3. Démontrer que deux matrices semblables ont nécessairement la même trace.
4. Donner deux matrices non semblables et ayant la même trace.

Partie C. Une diagonalisation.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer PAP^{-1} et en déduire que A est semblable à une matrice diagonale.
3. Démontrer que A est pseudo-inversible et donner A^*.

Partie D. (*) Pseudo-inversibles... dans un anneau quelconque !

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit d'un élément $a \in A$ qu'il est **pseudo-inversible** si

$$\exists b \in A \quad ab = ba, \quad aba = a, \quad bab = b.$$

1. Montrer qu'un élément $a \in A$ est pseudo-inversible si et seulement si
   $$\exists (p, u) \in A^2 : \quad p^2 = p \text{ (p est "idempotent")}, \quad u \in U(A), \quad pu = up, \quad a = pu.$$
2. Montrer qu'un élément de A est pseudo-inversible si et seulement si c'est l'élément d'une partie de A qui est un groupe pour le produit (sans être forcément un sous-groupe de $U(A)$).

Exercice 1 Groupe où tous les éléments sont d'ordre 2.

On considère un groupe $(G, \star)$ de neutre e.
On suppose de surcroît que tous les éléments de G sont « d'ordre 2 », c'est-à-dire que

$$\forall g \in G \quad g \star g = e.$$

1. Démontrer que G est abélien.
   Indication : on pourra calculer $(g \star g')^2$ pour g et g' deux éléments de G.

2. Soit H un sous-groupe strict de G ($H \neq G$) et soit $g \in G \setminus H$.
   On pose $gH = \{g \star h \mid h \in H\}$.
   (a) Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de G.
   Il y a un peu de travail !
   (b) Supposons que H est fini. Montrer que $|H \cup gH|$ a pour cardinal $2 \times |H|$.

3. (*) Démontrer que si G est un groupe fini, alors son cardinal est une puissance de 2.
   On pourra raisonner sur un sous-groupe dont le cardinal est une puissance de 2 maximale.

Exercice 2. Tirage sans entiers consécutifs.

Dans cet exercice de dénombrement, n et p désignent des entiers naturels non nuls.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera E_k l'ensemble $\{1, 2, \cdots, k\}$.
On notera aussi

— $\mathcal{P}_p(E_k)$ l'ensemble des parties de E_k ayant p éléments.
— $\mathcal{Q}_p(E_k)$ l'ensemble des parties de E_k ayant p éléments et ne contenant pas de paire d'entiers consécutifs.

1. Donner un exemple d'élément dans $\mathcal{Q}_3(E_8)$ et un dans $\mathcal{P}_3(E_8) \setminus \mathcal{Q}_3(E_8)$.

2. Soit $\{x_1, \ldots, x_p\}$ un élément de $Q_p(E_n)$, où on a écrit les x_i dans l'ordre :
   $\forall i \in [\![1, p-1]\!] \quad x_i < x_{i+1}$. Pour $1 \leq i \leq p$, on note $y_i = x_i + 1 - i$. Prouver que
   $$1 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_p \leq n + 1 - p.$$

3. Que vaut le cardinal de $Q_p(E_n)$ lorsque $2p > n + 1$?

   <u>On supposera jusqu'à la fin de l'énoncé que $2p \leq n + 1$.</u>

4. Construire une bijection de $\mathcal{Q}_p(E_n)$ dans $\mathcal{P}_p(E_{n+1-p})$.

5. En déduire le cardinal de $\mathcal{Q}_p(E_n)$.

6. Lors du Loto de la Française des jeux, 5 numéros sont tirés au sort parmi les entiers entre 1 et 49. Combien de tirages ne contiennent pas de paire d'entiers consécutifs ?

7. Décomposer l'entier obtenu à la question précédente comme un produit de facteurs premiers.