Forme Algébrique
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 6.1 [♦◊◊]

Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = a + ib$. On a :

$$\begin{aligned}
& 4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0 \\
\iff & 4(a+ib)^2 + 8(a^2+b^2) - 3 = 0 \\
\iff & 4a^2 + 8aib - 4b^2 + 8a^2 + 8b^2 - 3 = 0 \\
\iff & (12a^2 + 4b^2 - 3) + i(8ab) = 0 \\
\iff & \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ 8ab = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\
\iff & 4b^2 - 3 = 0 \text{ ou } 12a^2 - 3 = 0 \\
\iff & b^2 = \frac{3}{4} \text{ ou } a^2 = \frac{1}{4} \\
\iff & b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } a = \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc :

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

□

Exercice 6.2 [♦◊◊]

Soient a et b deux nombres complexes non nuls. Montrer que :

$$\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| &= \left|\frac{a|b|^2 - b|a|^2}{|a|^2|b|^2}\right| = \frac{|ab\bar{b} - ba\bar{a}|}{||ab|^2|} \\
&= \frac{\left|ab(\bar{b} - \bar{a})\right|}{||ab|^2|} = \frac{|ab||\bar{a} - \bar{b}|}{|ab|^2} \\
&= \frac{|a-b|}{|ab|} = \frac{|a-b|}{|a||b|}
\end{aligned}$$

□