Suites, La Pratique
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Exercices.

Avant de parler de convergence. . . . 2
- Exercice 13.1 . . . 2
- Exercice 13.2 . . . 2
- Exercice 13.3 . . . 2
- Exercice 13.4 . . . 3
- Exercice 13.5 . . . 3
- Exercice 13.6 . . . 4
- Exercice 13.7 . . . 4

Exercice 13.1 [♦◊◊]

Une suite croissante est une fonction croissante sur $\mathbb{N}$.
Démontrer que le titre de l'exercice dit vraie, c'est à dire, pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équivalence entre
1. $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geq u_n$.
2. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2\ n \leq p \Longrightarrow u_n \leq u_p$.

Supposons 2, montrons 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$
On a $n \leq n+1$. D'après 2, $u_n \leq u_{n+1}$. ez

Supposons 1, montrons 2.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$. On sait que $u_{n+1} \geq u_n$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, $u_{n+3} \geq u_{n+2}$, etc...
Par récurrence triviale et par transitivité, pour tout entier $q \geq n$, $u_q \geq u_n$.
En particulier, $u_p \geq u_n$

□

Exercice 13.2 [♦♦◊]

Soit a un réel supérieur à 1 et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \frac{a^n}{n!}$.
Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de a.
(u_n) est strictement positive sur $\mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On peut donc écrire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$.
Ainsi, (u_n) est croissante $(a \geq n+1)$ puis décroissante $(a \leq n+1)$, ce qui implique qu'un maximum existe.
Ce maximum est atteint lorsque $a = n+1$ c'est à dire quand $n = \lfloor a \rfloor$.
Ainsi, le maximum de la suite u est : $\frac{a^{\lfloor a \rfloor}}{\lfloor a \rfloor !}$

□

Exercice 13.3 [♦◊◊]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1}.$$

Prouver que la suite (u_n) est bornée.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$. Donc :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k\sin k}{k^2+1}\right| &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\ &\leq \frac{n^2+n}{n^2+2n+2} \\ &\leq 1\end{aligned}$$

Majorer en valeur absolue c'est borner

□

Exercice 13.4 [♦◊◊]

Soit $\alpha \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha(1-\alpha) \\ \forall n \geq 0 \; u_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha(1-\alpha) \end{cases}$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de α et n.
2. Donner $\lim u_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose l'équation au point fixe : $x = (1-\alpha)x + \alpha(1-\alpha)$.
Sa solution est : $x = 1-\alpha$.
On a : $u_{n+1} - (1-\alpha) = (1-\alpha)u_n + \alpha(1-\alpha) - (1-\alpha)$.
Ainsi, $u_{n+1} + \alpha - 1 = (1-\alpha)(u_n + \alpha - 1)$.
On pose $v_n := u_n + \alpha - 1$. Par définition, v est géométrique, de raison $1-\alpha$.
Son terme général est : $v_n = v_0(1-\alpha)^n$.
Or $v_0 = u_0 + \alpha - 1 = \alpha(1-\alpha) + \alpha - 1 = (\alpha-1)(1-\alpha)$.
On en déduit que $v_n = (\alpha-1)(1-\alpha)^{n+1}$.
Finalement, $u_n = (\alpha-1)(1-\alpha)^{n+1} - \alpha + 1$.

□

Exercice 13.5 [♦◊◊]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
1. Donner la forme du terme général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

2. Supposons dans cette question que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Donner sous forme factorisée le terme général de l'unique suite (u_n) satisfaisant la relation ci-dessus et telle que $u_0 = u_1 = 1$.

Polynome caractéristique : $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1$. $\Delta = -4\sin^2(\theta)$. $r_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $r_2 = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.
Lorsque $\theta \in \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \lambda n\cos^n(\theta) + \mu\cos^n(\theta)$.
Lorsque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$.
2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$.
On a $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = \cos(\theta) + \mu\sin(\theta) = 1$ donc $\mu = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}n, \; u_n = \cos(n\theta) + \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(n\theta)$
Comment tu factorises ça wtf

□

Exercice 13.6 [♦♦◊]

Soit (u_n), définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, \; u_{n+1} = 3u_n + 2^n \end{cases}$.

1. Prouver qu'il existe une suite (a_n) géométrique de raison 2 qui satisfait la relation de récurrence.
2. Donner le terme général de (u_n).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit (a_n) une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n = a_0 2^n$$

On cherche (a_n) telle que $a_{n+1} = 3a_n + 2^n = 3a_0 2^n + 2^n = 2^n(3a_0 + 1)$.
Posons $a_0 = -1$. On a $a_{n+1} = 2^n(-2) = -2^{n+1} = a_0 2^{n+1}$.
Ainsi, la suite géométrique (a_n) de raison 2 et de premier terme -1 satisfait la relation de récurrence.
2. On a $u_{n+1} - 2a_n = 3u_n + 2^n - 2a_n \iff u_{n+1} - a_{n+1} = 3(u_n - a_n)$.
On pose $v_n := u_n - a_n$. Alors $v_0 = u_0 - a_0 = 2$ et $v_n = 2 \cdot 3^n$.
On en déduit que $u_n = v_n + a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n = 2(3^n - 2^{n-1})$
On a $u_{n+1} = 2(3^{n+1} - \cdot 2^n)$

□

Exercice 13.7 [♦♦◊]

Étudier la suite (u_n), définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 > 0 ; u_1 > 0 \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n} \end{cases}$.