Équations Différentielles Linéaires d'ordre 2

Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Exercices.

Exercice 12.1 [♦◊◊]

Résoudre le problème de Cauchy ci-dessous :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Polynome caractéristique : $r^2 + 2r + 10$. $\Delta = -36$. $r_\pm = -1 \pm 3i$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto e^{-x}(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$
Solution particulière : $S_p : x \mapsto \frac{1}{2}$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \frac{1}{2} + e^{-x}(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
Conditions initiales.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x))$.
On a $y(0) = 1 \iff \frac{1}{2} + \alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}$.
On a $y'(0) = 0 \iff -\frac{1}{2} + 3\beta = 0 \iff \beta = \frac{1}{6}$.
L'unique solution de ce problème de Cauchy est : $x \mapsto \frac{1}{2} + e^{-x}\left(\frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{1}{6}\sin(3x)\right)$

□

Exercice 12.2 [♦◊◊]

Résoudre :

$$y'' - y' - 2y = 2\,\mathrm{ch}(x)$$

On réecrit d'abord cette équation comme : $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-x}$.
Polynome caractéristique : $r^2 - r - 2$. $\Delta = 9$. $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Équation auxiliaire 1 : $y'' - y' - 2y = e^x$. Solution particulière : $S_{p,1} : x \mapsto Be^x \mid B \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Be^x$.
On a $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = e^x \iff -2Be^x = e^x \iff B = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, $S_{p,1} : x \mapsto -\frac{1}{2}e^x$.
Équation auxiliaire 2 : $y'' - y' - 2y = e^{-x}$. Solution particulière : $S_{p,2} : x \mapsto Cxe^{-x} \mid C \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Cxe^{-x}$.
On a $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = e^{-x} \iff -3Ce^{-x} = e^{-x} \iff C = -\frac{1}{3}$.
Ainsi, $S_{p,2} : x \mapsto -\frac{1}{3}xe^{-x}$.
Par superposition, l'ensemble des solutions est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}xe^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

Exercice 12.3 [♦◊◊]

Résoudre :

$$y'' + 2y' + y = \cos(2t) \quad (E).$$

Polynome caractéristique : $r^2 + 2r + 1$. $\Delta = 0$. $r = -1$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda xe^{-x} + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Équation auxiliaire : $y'' + 2y' + y = e^{2ix}$. Solution particulière : $S_{p,aux} : x \mapsto Be^{2ix}$ avec $B \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Be^{2ix}$.
On a : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{2ix} \iff Be^{2ix}(-3 + 4i) = e^{2ix} \iff B = \frac{1}{-3+4i} = \frac{-3-4i}{25}$.
Passage à la partie réelle : $\Re(y(x)) = \Re\left(-\frac{3+4i}{25}(\cos(2x) + i\sin(2x))\right) = -\frac{3}{25}\cos(2x) + \frac{4}{25}\sin(2x)$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda xe^{-x} + \mu e^{-x} - \frac{3}{25}\cos(2x) + \frac{4}{25}\sin(2x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

□

Exercice 12.4 [♦♦◊] Résonance... ou pas

1. Excitation à une pulsation quelconque. Résoudre

$$y'' + 4y = \cos t$$

2. Excitation à la pulsation propre : résonance. Résoudre

$$y'' + 4y = \cos(2t)$$

1. Polynome caractéristique : $r^2 + 4$. $\Delta = -16$. $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Équation auxiliaire : $y'' + 4y = e^{it}$. Solution particulière : $S_{p,aux} : x \mapsto Be^{ix}$ avec $B \in \mathbb{R}$.
Soit $x, B \in \mathbb{R}$, et $y : x \mapsto Be^{ix}$.
On a : $y''(x) + 4y(x) = e^{ix} \iff 3Be^{ix} = e^{ix} \iff B = \frac{1}{3}$.
Passage à la partie réelle : $\Re(y(x)) = \frac{1}{3}\cos(x)$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) + \frac{1}{3}\cos(x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

2. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est encore S_0.
Équation auxiliaire : $y'' + 4y + e^{2it}$. Solution particulière : $S_{p,aux} : x \mapsto Bxe^{2ix}$ avec $B \in \mathbb{R}$.
Soit $x, B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Bxe^{2ix}$.
On a : $y''(x) + 4y(x) = e^{2ix} \iff Be^{2ix}(4i - 4x) + 4Bxe^{2ix} = e^{2ix} \iff B = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$
Passage à la partie réelle : $\Re(y(x)) = \Re\left(-\frac{i}{4}x(\cos(2x) + i\sin(2x))\right) = \frac{1}{4}x\sin(2x)$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \cos(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

□