Primitives et intégrales
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 8.1 [⧫◊◊]

Donner les primitives des fonctions suivantes (on précisera l'intervalle que l'on considère).

$$a : x \mapsto \cos x e^{\sin x}; \qquad b : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad c : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}; \qquad d : x \mapsto \frac{1}{3x+1};$$

$$e : x \mapsto \frac{\ln x}{x}; \qquad f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}; \qquad g : x \mapsto \sqrt{3x+1}; \qquad h : x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}.$$

$$A : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\sin x} + c \end{cases}; \quad B : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\sin x) + c \end{cases};$$

$$C : \begin{cases}]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\sqrt{\sin x} + c \end{cases}; \quad D : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}\ln(3x+1) + c \end{cases};$$

$$E : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2 x + c \end{cases}; \quad F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln x) + c \end{cases};$$

$$G : \begin{cases} [-\frac{1}{3}, +\infty] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c \end{cases}; \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + c \end{cases}.$$

Avec c les constantes d'intégration.

□

Exercice 8.2 [⧫◊◊] Issu du cahier de calcul

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1. Sans chercher à les calculer, donner le signe des intégrales suivantes.

$$\int_{-2}^{3} e^{-x^2} dx; \qquad \int_{5}^{-3} |\sin x| dx; \qquad \int_{1}^{a} \ln^7(x) dx (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

2. En vous ramenant à des aires, calculer de tête

$$\int_1^3 7dx; \qquad \int_0^7 3xdx; \qquad \int_{-2}^{1} |x|dx.$$

1.
La première est positive car $-2 < 3$ et la fonction est positive sur $[-2, 3]$e.
La seconde est négative car $5 > -3$ et la fonction est positive sur $[-3, 5]$.
La dernière est positive lorsque $a \geq 1$ et négative lorsque $a \leq 1$ car $\ln^7$ est positive sur $[1, +\infty[$.
2.
La première vaut $2 \times 7 = 14$.
La seconde vaut $\frac{7^2 \times 3}{2} = \frac{147}{2}$.
La dernière vaut $\frac{1}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 2.5$

□

Exercice 8.3 [♦◊◊]

Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{x}dx, \quad I_2 = \int_{-1}^1 2^x dx, \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln^3(t)}{t}dt, \quad I_4 = \int_0^1 \frac{x}{2x^2+3}dx,$$
$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2+3}dx, \quad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx, \quad I_7 = \int_0^{\pi} |\cos x| dx, \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$
$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx.$$

$$I_1 = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad I_2 = \left[\frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}\right]_{-1}^1 = \frac{3}{\ln 4}, \quad I_3 = \left[\frac{\ln^4 t}{4}\right]_1^e = \frac{1}{4},$$
$$I_4 = \left[\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right), \quad I_5 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$
$$I_6 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[-2\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, I_7 = [2\sin x]_0^{\pi} = 2,$$
$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \cos x \sin^2(x)dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3},$$
$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x + \tan x - \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(\tan^2 x + 1)dx - \frac{\ln 2}{2} = \left[\frac{1}{2}\tan^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\ln 2}{2}$$
$$= \frac{1-\ln 2}{2}$$

□

Exercice 8.4 [♦◊◊]

Calculer le nombre $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

1. À l'aide d'une IPP.
2. À l'aide du changement de variable $x = t^2$.

1.

$$\int_1^2 \ln x \cdot x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\ln x \cdot 2\sqrt{x}\right]_1^2 - 2\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{2}\ln 2 - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = 2\sqrt{2}(\ln 2 - 2) + 4$$

2.

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln t^2}{t}2tdt = 4\int_1^{\sqrt{2}} \ln(t)dt = 4\left[t\ln t - t\right]_1^{\sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$$

□

Exercice 8.5 [♦◊◊]

Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}dt \qquad \text{en posant } t = u^2.$$

On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}dt = \int_0^1 \frac{1}{(u^2+1)u}2udu = 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = 2\left[\arctan(u)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 8.6 [♦◊◊]

Calculer

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1}dt \qquad \text{en posant } u = t^5.$$

On a :

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1}dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{5}t^5}{t^5+1}5t^4dt = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{u}{u+1}du = \frac{1}{5}\int_0^1 1 - \frac{1}{u+1}du = \frac{1}{5}\left(1-\ln 2\right)$$

□

Exercice 8.7 [♦♦◊]

En posant le changement de variable $u = \tan(x)$, calculer l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+\cos^2(\arctan(u))}\cdot\frac{1}{1+u^2}du \\
&= \int_0^1 \frac{1+u^2}{(2+u^2)(1+u^2)}du \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2+u^2}du \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

□

Exercice 8.8 [♦◊◊]

On pose

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

1. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, prouver que $C = S$.
2. Calculer $C + S$, en déduire la valeur commune de ces deux intégrales.

Exercice 8.9 [♦♦♦]

On considère les deux intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}} dt \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}} dt$$

1. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - t$ calculer $I + J$.
2. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ montrer que $I = J$.
3. En déduire I et J.

1. On a :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\frac{\pi}{4}-u)+\sin(\frac{\pi}{4}-u)}{\sqrt{1+\cos(2u)}} du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{\sqrt{2\cos^2(u)}} du = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{\sqrt{2}|\cos(u)|} du = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. On a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sqrt{1+\sin(\pi-u)}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sqrt{1+\sin(u)}} du = J$$

3. On a $2I = 2J = I + J = \frac{\pi}{2}$. Donc $I = J = \frac{\pi}{4}$.

□

Exercice 8.10 [♦◊◊]

Que vaut

$$\int_{-666}^{666} \ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right) dx \ ?$$

Exercice 8.11 [♦♦♢]

Le but de cet exercice est de calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

1. Justifier que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ possède une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.
Exprimer α à l'aide de la fonction ln.
2. Calculer J en posant $x = \mathrm{sh}(t)$. On exprimera le résultat en fonction de α.
3. À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une équation reliant I et J.
4. En déduire une expression de I en fonction de α.

Exercice 8.12 [♦♦♦]

Calculer $\int_0^1 \arctan(x^{1/3})dx$ en posant d'abord $x = t^3$.
On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan(x^{\frac{1}{3}})dx &= \int_0^1 \arctan(t) \cdot 3t^2 dt \\
&= \left[\arctan(t) \cdot t^3\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 t dt + \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{4}\left(\pi - 2 + \ln(4)\right)
\end{aligned}$$

□

Exercice 8.13 [♦♦♦]

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ en posant $x = \frac{\pi}{4} - u$.
On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)du = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I \end{aligned}$$

On en déduit que $2I = \frac{\pi}{4}\ln 2$. Ainsi, $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$

$\square$