Chapitre M1
Cinématique

Application 1

On considère un point M dont les coordonnées cartésiennes dépendent du temps, avec

$x(t) = 2t^2$, $y(t) = 4t + 7$ et $z(t) = t(2 - t)$

1. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$, ainsi que sa norme.
2. En déduire l'expression du vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$
3. Calculer les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$, ainsi que sa norme.
4. Calculer l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'axe (Ox) à l'instant $t = 1$.

Solution :

$\boxed{1}$ Dans la base cartésienne, le vecteur $\overrightarrow{v}$ s'exprime $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ avec $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ les vecteurs de la base.

$\dot{x} = 4t$, $\dot{y} = 4$ et $\dot{z} = -2t + 2$

Ainsi on obtient $\overrightarrow{v} = 4t\overrightarrow{e_x} + 4\overrightarrow{e_y} + (-2t + 2)\overrightarrow{e_z}$

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{v}|| &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ &= \sqrt{(4t)^2 + 4^2 + (-2t + 2)^2} \\ &= \sqrt{16t^2 + 16 + 4t^2 - 8t + 4} \\ &= \sqrt{20t^2 - 8t + 20}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ On a la relation suivant : $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{v}dt \\ &= (\dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z})dt \\ &= (\tfrac{dx}{dt}\overrightarrow{e_x} + \tfrac{dy}{dt}\overrightarrow{e_y} + \tfrac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z})dt \\ &= dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Dans la base cartésienne, le vecteur $\overrightarrow{a}$ s'exprime $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$ avec $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ les vecteurs de la base.

$\ddot{x} = 4$, $\ddot{y} = 0$ et $\ddot{z} = -2$

Ainsi on obtient $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{e_x} - 2\overrightarrow{e_z}$

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{a}|| &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \\ &= \sqrt{4^2(-2)^2} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ En passant dans une base cylindrinque, on obtient que $x(t) = r\cos(\theta)$ avec $r = ||\overrightarrow{v}||$

$\theta = cos^{-1}(\frac{x(t)}{||\overrightarrow{v}||})$

A l'instant $t = 1$: $\theta(1) = cos^{-1}(\frac{x(1)}{||\overrightarrow{v}(1)||})$

$$\begin{aligned}\theta(1) &= cos^{-1}(\tfrac{2}{\sqrt{32}}) \\ &= cos^{-1}(\tfrac{2}{4\sqrt{2}}) \\ &= cos^{-1}(\tfrac{\sqrt{2}}{4}) \\ &\approx 69.3°\end{aligned}$$

Application 2: Changement de coordonnées

1. Sur un schéma, représenter les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$

Solution :

$\boxed{1}$