Suites, La Pratique
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Exercices.

Exercice 13.1 [⧫◊◊]

Une suite croissante est une fonction croissante sur $\mathbb{N}$.
Démontrer que le titre de l'exercice dit vraie, c'est à dire, pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équivalence entre
1. $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geq u_n$.
2. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2\ n \leq p \Longrightarrow u_n \leq u_p$.

Supposons 2, montrons 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$
On a $n \leq n+1$. D'après 2, $u_n \leq u_{n+1}$. ez

Supposons 1, montrons 2.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$. On sait que $u_{n+1} \geq u_n$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, $u_{n+3} \geq u_{n+2}$, etc...
Par récurrence triviale et par transitivité, pour tout entier $q \geq n$, $u_q \geq u_n$.
En particulier, $u_p \geq u_n$

□

Exercice 13.2 [⧫⧫◊]

Soit a un réel supérieur à 1 et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \frac{a^n}{n!}$.
Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de a.
(u_n) est strictement positive sur $\mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On peut donc écrire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$.
Ainsi, (u_n) est croissante $(a \geq n+1)$ puis décroissante $(a \leq n+1)$, ce qui implique qu'un maximum existe.
Ce maximum est atteint lorsque $a = n+1$ c'est à dire quand $n = \lfloor a \rfloor$.
Ainsi, le maximum de la suite u est : $\frac{a^{\lfloor a \rfloor}}{\lfloor a \rfloor !}$

□

Exercice 13.3 [⧫◊◊]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1}.$$

Prouver que la suite (u_n) est bornée.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$. Donc :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\
&\leq \frac{n^2+n}{n^2+2n+2} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Majorer en valeur absolue c'est borner

□

Exercice 13.4 [♦◇◇]

Soit $\alpha \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha(1-\alpha) \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha(1-\alpha) \end{cases}$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de α et n.
2. Donner $\lim u_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose l'équation au point fixe : $x = (1-\alpha)x + \alpha(1-\alpha)$.
Sa solution est : $x = 1 - \alpha$.
On a : $u_{n+1} - (1-\alpha) = (1-\alpha)u_n + \alpha(1-\alpha) - (1-\alpha)$.
Ainsi, $u_{n+1} + \alpha - 1 = (1-\alpha)(u_n + \alpha - 1)$.
On pose $v_n := u_n + \alpha - 1$. Par définition, v est géométrique, de raison $1 - \alpha$.
Son terme général est : $v_n = v_0(1-\alpha)^n$.
Or $v_0 = u_0 + \alpha - 1 = \alpha(1-\alpha) + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(1-\alpha)$.
On en déduit que $v_n = (\alpha - 1)(1-\alpha)^{n+1}$.
Finalement, $u_n = (\alpha - 1)(1-\alpha)^{n+1} - \alpha + 1$.

□

Exercice 13.5 [♦◇◇]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
1. Donner la forme du terme général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

2. Supposons dans cette question que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Donner sous forme factorisée le terme général de l'unique suite (u_n) satisfaisant la relation ci-dessus et telle que $u_0 = u_1 = 1$.

Polynome caractéristique : $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1$. $\Delta = -4\sin^2(\theta)$. $r_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $r_2 = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.
Lorsque $\theta \in \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda n \cos^n(\theta) + \mu \cos^n(\theta)$.
Lorsque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$.
2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$.
On a $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = \cos(\theta) + \mu\sin(\theta) = 1$ donc $\mu = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}n, \ u_n = \cos(n\theta) + \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(n\theta)$
Comment tu factorises ça wtf

□