Chapitre 35

Intégrales sur un segment

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$

Définition 1: Fonction continue par morceaux sur un intervalle.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Exemple 2: $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

La fonction $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Expliquer.

Solution :

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Notons $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cap]a, b[$.
Cet ensemble est fini : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a < \frac{1}{n} < b \iff \frac{1}{b} < n < \frac{1}{a} \iff \lfloor \frac{1}{b} \rfloor + 1 \leq n \leq \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$.
S contient donc au plus $\lfloor \frac{1}{a} \rfloor - \lfloor \frac{1}{b} \rfloor$ points.
Notons $n = |S|$ puis $S = \{a_1, ..., a_n\}$, avec $a_1 < a_2 < ... < a_n$.
Posons $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1})$ avec $a_0 := a$ et $a_{n+1} := b$.
Soit $i \in [\![0,]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est constante, elle y est donc continue et prolongeable par continuité aux bords. Ainsi, $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
Remarque: En posant $f(0) := 0$, ça ne marche plus car $f_{|[0,b]}$ n'est pas cpm sur $[0, b]$.

1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux entre deux bornes

Définition 3

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ou plus simplement $\int_a^b f$ le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_{[a,b]} f \text{ si } a < b, \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_{[b,a]} f \text{ si } a > b.$$

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont continues par morceaux sur I.
Pour $a, b \in I$, on pose :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la partie réelle de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle, idem pour la partie imaginaire.

Preuve :

Pour prouver la continuité par morceaux de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à partir de celle de f, on introduit une subdivision adaptée à f $\sigma = (a_0, ..., a_n)$ et on prouve qu'elle est adaptée à sa partie réelle et à sa partie imaginaire. On peut utiliser :

$$\forall x \in I \ \mathrm{Re}(f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \text{ et } \mathrm{Im}(f(x)) = \frac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}).$$

En effet, ces relations donnent que pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, les restrictions de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ à $]a_i, a_{i+1}[$ y sont continues, et prolongeables par continuité sur les bords.

1.3 Relation de Chasles.

Proposition 5: Relation de Chasles

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $a, b, c \in I$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Preuve :

La relation a été établie dans le cours de construction pour une fonction à valeurs réelles dans le cas où $a < c < b$.
• cas $a < b < c$:

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_{[a,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f - \int_{[b,c]} f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

• cas $b = c < a$:
D'une part $\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$, d'autre part : $\int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f = -\int_[b, a] f$.

Les autres cas sont similaires.

1.4 Linéarité.

Proposition 6: Linéarité de l'intégrale.

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et $a, b \in I$. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Preuve :

On l'a prouvé pour $a < b$ et f, g à valeurs réelles. Il faut le vérifier dans les autres cas.

1.5 Intégrales et inégalités.

Proposition 7: Positivité

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ où le segment $[a, b]$ est tel que $\boxed{a \leq b}$.
Si f est positive sur $[a, b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un nombre positif.
Si f est négative sur $[a, b]$, alors cette intégrale est un nombre négatif.

Preuve :

On l'a déjà prouvé.

Proposition 8: Intégrale nulle d'une fonction positive et continue

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $\boxed{a < b}$, continue et positive sur $[a, b]$.
Si $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
Par contraposée, si $\exists c \in [a, b]\ f(c) > 0$, alors $\int_a^b f > 0$.

Preuve :

Il y a aussi la preuve suivante dans **L'Exercice 79** de la banque CCINP :
On suppose f continue et positive sur $[a, b]$ et $\int_a^b f = 0$.
Posons $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ définie sur $[a, b]$, f étant continue sur $[a, b]$, F est une primitive de f sur $[a, b]$ d'après le TFA (prouvé plus loin).
Donc $\forall x \in [a, b],\ F'(x) = f(x) \geq 0$, ainsi F est croissante sur $[a, b]$.
Or, $F(b) = \int_a^b f = 0$, de plus, $F(a) = \int_a^a f = 0$.
Par croissance, $\forall x \in [a, b],\ F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ donc $F(x) = 0$.
Donc F est constante sur $[a, b]$, on a $a < b$ donc $\forall x \in [a, b],\ F'(x) = f(x) = 0$.

Remarque: Pourquoi continue et pas continue par morceaux ?

Soit $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$, son intégrale est nulle, mais f ne l'est pas.

Proposition 9: Croissance

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ avec $\boxed{a \leq b}$.

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Preuve :

On a :

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f)$$

Comme $g - f$ est continue par morceaux et positive, on a $\int_a^b (g - f) \geq 0$ donc $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Proposition 10: Inégalité de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ avec $\boxed{a \leq b}$.
Si f est minorée par un réel m et majorée par M sur $[a,b]$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a), \text{ Lorsque } a<b, \text{ on a } m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Preuve :

On a $\forall x \in [a,b], \ m \leq f(x) \leq M$.
La fonction f, $x \mapsto m$, $x \mapsto M$ sont continues par morceaux.
Par croissance :

$$\int_a^b m\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b M\mathrm{d}t$$

Donc

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M(b-a)$$

Proposition 11: Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, avec $\boxed{a \leq b}$.

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Preuve :

⊚ **Cas réel:** Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$.
On a $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$, or $f, -f$ et $|f|$ sont cpm sur $[a,b]$.
Par croissance de l'intégrale $(a \leq b)$: $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ et $-\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$.
Donc $\max(\int_a^b f, -\int_a^b f) \leq \int_a^b |f|$ et alors $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
⊚ **Cas complexe:** admis.

1.6 Quelques exercices de cours.

Exemple 12

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I_a = \int_a^{a^2} \ln^3(x)\mathrm{d}x$. Existence et signe de I_a.

Solution :

Existence: $\ln^3$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
1er cas: Supposons $a \geq 1$, alors $a \leq a^2$ et $\forall x \in [a,a^2]$ $\ln^3(x) \geq 0$, par positivité, $\int_a^{a^2} \ln^3 \geq 0$.
2eme cas: Supposons $a \in]0,1[$, alors $a^2 \leq a$ et $\forall x \in [a^2,a]$ $\ln^3(x) \leq 0$, par positivité, $\int_{a^2}^a \ln^3 \leq 0$ donc $\int_a^{a^2} \ln^3 \geq 0$.
Ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ I_a \geq 0$

Exemple 13

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a<b$ continue telle que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$.
Justifier que f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

Solution :

1er cas: Supposons que f change de signe sur $[a,b]$, alors d'après le TVI, f s'annule sur $[a,b]$ puisque f est continue.
2eme cas: Supposons que f ne change pas de signe sur $[a,b]$. On a que $a<b$, que f est continue et monotone sur $[a,b]$, et d'intégrale nulle. Par théorème, $\forall x \in [a,b], \ f(x)=0$.

On peut aussi le prouver avec le TFA + Rolle.

Exemple 14: Un exercice : suite définie par une intégrale.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}, I_n := \int_1^e (\ln(x))^n \mathrm{d}x$.
1. Prouver que (I_n) est convergente.
2. Prouver que la limite vaut 0 à l'aide d'une IPP.
3. Donner un équivalent de I_n.

Solution :

$\boxed{1.}$ **Monotonie:** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e \underbrace{(\ln(x))^n}_{\geq 0}\underbrace{(\ln(x)-1)}_{\leq 0}\mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto (\ln(x))^n(\ln(x)-1)$ est continue sur $[1,e]$ on a $1 \leq e$ et la fonction est négative.
Par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et donc (I_n) est décroissante.
Convergence: Par positivité, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \ I_n \geq 0$, donc I_n est décroissante et minorée par 0 donc elle converge d'après le TLM.

$\boxed{2.}$ Une IPP pour trouver une relation de récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e (\ln(x))^n \mathrm{d}x \\ &= [x(\ln(x))^n]_1^e - \int_1^e \cancel{x} n \frac{1}{\cancel{x}} (\ln(x))^{n-1} \mathrm{d}x \\ &= e - nI_{n-1} \end{aligned}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \frac{1}{n+1}(e - I_{n+1})$. Notons $l = \lim I_n$, qui existe d'après $\boxed{1.}$.
Alors $I_n = \frac{1}{n+1}(e - I_{n+1}) \to 0$ car $e - I_{n+1} \to e - l$.
$\boxed{3.}$ On a $nI_n = \frac{n}{n+1}(e - I_{n+1}) \to e$ donc $I_n \sim \frac{e}{n}$.

Exemple 15: Lemme de Riemann-Lebesgue ★

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$. Montrer que

$$I_n = \int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t \to 0.$$

Remarque: Le lemme est vrai pour f continue sur $[a,b]$, mais difficile à démontrer.

Solution :

Idée : IPP. Soit $n \in \mathbb{N}$. f et $\frac{1}{in}e^{int}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc :

$$\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t = \left[f(t) \cdot \frac{1}{in}e^{int}\right]_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot \frac{1}{in}e^{int}\mathrm{d}t$$

Alors

$$|I_n| \leq \left|[f(t)\frac{1}{in}e^{int}]_a^b\right| + \left|\int_a^b f'(t)\frac{1}{in}e^{int}\right|$$

D'une part : $\left|\left[f(t)\frac{1}{in}e^{int}\right]_a^b\right| = \frac{1}{n}\left|f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}\right| \leq \frac{1}{n}(|f(b)| + |f(a)|)$.
D'autre part : $\left|\int_a^b f'(t)\frac{1}{in}e^{int}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$.
Par majoration, $|I_n| = O(\frac{1}{n})$ donc $I_n \to 0$.

Théorème 16: Théorème fondamental de l'analyse ★

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. Soit $a \in I$. La fonction

$$E : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de dérivée $F' = f$.

Preuve :

Soit $x_0 \in I$. Montrons que $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \to f(x_0)$
Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$, on note $\min = \min(x_0, x)$ et $\max = \max(x_0, x)$.

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right) - f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{\min}^{\max} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, $\exists \eta > 0$ $\forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
Supposons que $|x - x_0| \leq \eta$. Alors $[\min, \max] \subset I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.
Par croissance :

$$\int_{\min}^{\max} \left|f(t) - f(x_0)\right|\mathrm{d}t \leq \int_{\min}^{\max} \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon(\max - \min) = \varepsilon|x - x_0|.$$

Ainsi, $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\varepsilon|x - x_0| = \varepsilon$

Corollaire 17

Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Preuve :

Le TFA donne bien une primitive sous ces hypothèses.
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, F et G deux primitives de f.
Alors $F - G$ est dérivable sur I et $(F - G)' = f - f = 0$ donc $F - G$ est constante sur I d'après AF.

Proposition 18

Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I. Alors, pour tous $a,b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Preuve :

On a f continue sur $[a,b]$. Le TFA donne $\widetilde{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ primitive de f sur $[a,b]$.
La fonction F en est une autre, sur le même intervalle : $\exists C \in \mathbb{K}\ \forall x \in [a,b]\ \widetilde{F}(x) = F(x) + C$.
Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \widetilde{F}(b))\widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

Proposition 19

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$. Alors pour tous $a,b \in I$,

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

Preuve :

Découle du résultat précédent car f est une primitive de f' sur $[a,b]$ sous ces hypothèses.

Exemple 20: ★

Soit la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$$

.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est dérivable sur D et calculer sa dérivée. Donner les variations de F.
3. (*) Calculer les limites intéressantes.

Solution :

$\boxed{1.}$ $f := \frac{1}{\ln}$ est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et non prolongeable.
Pour $x \in]0,1[$, $0 < x^2 < x < 1$ donc $[x^2,x] \subset]0,1[$ donc f est continue sur $[x^2,x]$.
Pour $x \in]1,+\infty[$, $x^2 > x$ donc $[x,x^2] \subset]1,+\infty[$ donc f est continue sur $[x,x^2]$.
Ainsi, $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\boxed{2.}$ ⊚ Sur $]0,1[$. Notons L une primitive de f sur $]0,1[$, elle existe par TFA et continuité de f.
Alors $F(x) = \int_x^{x^2} f = L(x^2) - L(x)$ et F et dérivable comme composée et différence.
Donc $\forall x \in]0,1[,\ \ F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{1}{\ln(x)}(x-1) > 0$.
⊚ Sur $]1,+\infty[$, on a $F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$.
$\boxed{3.}$ **Limite en $+\infty$:** Soit $x > 1$. $\forall t \in [x,x^2]\ \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x^2)}$ alors par croissance de l'intégrale ($x < x^2$):

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln x^2}\mathrm{d}t \text{ donc } F(x) \geq \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \to +\infty$$

Par minoration, $F(x) \to +\infty$ en $+\infty$.
Limite en 0_+: On encadre pour $x \in]0,1[$: $\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$ alors ($x^2 < x$):

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}\mathrm{d}t \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}\mathrm{d}t$$

Donc $\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq F(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$ Par encadrement, $F(x) \to 0$ en 0_+.
Limite en 1_+: Pour $x > 1$, $F(x) = L(x^2) - L(x)$ et $L'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \sim_1 \frac{1}{x-1}$ donc $L'(x) =_1 \frac{1}{x-1} + o(\frac{1}{x-1})$.
Posons $R(x) = L'(x) - \frac{1}{x-1}$ continue sur $]1,+\infty[$. On a :

$$F(x) = \int_x^{x^2} L(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t-1} + R(t)\right)\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} R(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t = \ln(x^2-1) - \ln(x-1) = \ln(x+1) \xrightarrow[x\to 1_+]{} \ln(2)$$

Montrons que $\int_x^{x^2} R(t)\mathrm{d}t \to 0$. On a $(t-1)R(t) \to 0$ quand $t \to 1_+$.
Soit $\varepsilon > 0, \exists \eta > 0\ \forall t \in]1,1+\eta[\ \ -\varepsilon \leq (t-1)R(t) \leq \varepsilon$ donc $-\frac{\varepsilon}{t-1} \leq R(t) \leq \frac{\varepsilon}{t-1}$.
Supposons $x \in]1,\sqrt{1+\eta}[$ alors $[x,x^2] \subset]1,1+\eta[$.
Alors $\forall t \in [x,x^2],\ \ -\frac{\varepsilon}{t-1} \leq R(t) \leq \frac{\varepsilon}{t-1}$.
On intégre : $-\varepsilon \leq -\varepsilon\ln(x+1) \leq \int_x^{x^2} R(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon\ln(x+1) \leq \varepsilon$.
On a bien $\int_x^{x^2} R(t)\mathrm{d}t =_1 o(1)$ donc $F(x) =_1 \ln(x+1) + o(1)$ donc $F(x) \xrightarrow[x\to 1_+]{} \ln 2$

Limite en 1_-: Soit $x \in]0,1[$. On a $F(x) = \int_x^{x^2} t\frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t$. On a $0 < x^2 < x < 1$. Soit $t \in [x^2,x]$.
On a $\frac{x}{t\ln t} \leq t\frac{1}{t\ln t} \leq \frac{x^2}{t\ln t}$. On intégre : $\int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln t}\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln t}\mathrm{d}t$.
Or, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)| = \ln(-2\ln(x)) - \ln(\ln(-x)) = \ln(2)$.
Finalement, $x^2\ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2)$ et par théorème des gendarmes, $F(x) \xrightarrow[x\to 1_-]{} \ln(2)$.

1.7 Outils de calcul intégral.

Théorème 21: Intégration par parties.

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Preuve :

On a uv dérivable comme produit de fonctions dérivables sur I.
Alors $(uv)' = u'v + uv'$. Or u, v étant de classe $\mathcal{C}^1$, $u'v$ et uv' sont continues sur I.

$$\int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))\mathrm{d}t$$
$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$$

Exemple 22: Suites dont le terme général est une intégrale.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ I_n := \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

On peut obtenir une relation de récurrence sur la suite (I_n) avec une IPP dans certains cas.

Théorème 23: Formule du changement de variable

Soit $\varphi \in \mathcal{DM}^1(I, J)$, $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 24

En posant $t = \tan\frac{x}{2}$, montrer que:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{4+\sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$$

Solution :

On pose le changement de variable :

t	$\mathrm{d}t$	$\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$	$t=-1$	$t=1$
$\tan\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}x$	$x=-\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{4+\sin x} &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{2}{4t^2+2t+4}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2t^2+t+2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pas de racine réelles. On a $2t^2+t+2 = 2(t^2+\frac{1}{2}+1) = 2((t+\frac{1}{4})^2 - (\frac{\sqrt{15}}{4})^2)$.
Cours : $\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{d}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{a}\arctan(\frac{1}{a}))$.
Donc :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(t+\frac{1}{4})^2+(\frac{\sqrt{15}}{4})^2}\mathrm{d}t = \frac{4}{2\sqrt{15}}\left[\arctan(\frac{4}{\sqrt{15}(t+\frac{1}{4})})\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{15}}\left[\arctan(\frac{5}{\sqrt{15}}) + \arctan(\frac{3}{\sqrt{15}})\right]$$

Or $\frac{5}{\sqrt{15}} \cdot \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{15}{\sqrt{15}^2} = 1$ et $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ (x>0) \\ -\frac{\pi}{2}\ (x<0)\end{cases}$
Alors:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+\sin x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{15}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$$

Corrolaire 25: Intégrale d'une fonction paire/impaire.

Soit $f \in \mathcal{CM}([-a, a], \mathbb{K})$.
Si f est paire : $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
Si f est impaire : $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Corrolaire 26

Soit $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ une fonction T-périodique avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 27: Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{K})$ et $x \in [a,b]$. Alors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Preuve :

Par récurrence :
Cas de base: Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ et $a, x \in I$. Alors :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) - f(a)$$

Et

$$\int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$$

Le résultat est vrai.
Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai pour cet entier. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I,\mathbb{K})$ et $x, a \in I$.
Or $\mathcal{C}^{n+2}(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$, par hypothèse : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$.
Avec IPP, fonctions de classes $\mathcal{C}^1$, f^{n+1} et $-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(t)\mathrm{d}t \\ &= - - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Bilan : $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$
L'identité est vraie au rang $n+1$ donc vraie pour tout n par récurrence.

Exemple 28: Comparer une fonction et son polynôme de Taylor

Montrer l'inégalité :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}.$$

Solution :

On a cos de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc d'après Taylor avec Reste intégral :

$$\cos(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos^{(3)}(t)\mathrm{d}t$$

Donc $\cos(x) - x + \frac{x^2}{2!} = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t)\mathrm{d}t$. Cette intégrale est positive car continue, positive et $0 \leq x$.
On en déduit bien l'inégalité.

Proposition 29: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$.
On suppose que la fonction $|f^{(n+1)}|$ est majorée par une constante M_{n+1} sur I. Alors

$$\forall x \in I, \ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve :

D'après Taylor avec reste intégral, min := min(a,x) et max := max(a,x) :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_{\min}^{\max} \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{n+1}(t)|\mathrm{d}t$$

Par croissance de l'intégrale, $\int_{\min}^{\max} \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{n+1}(t)|\mathrm{d}t \leq \int_{\min}^{\max} \frac{|x-t|^n}{n!} M_{n+1}\mathrm{d}t = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$

Exemple 30

Prouver que

$$\forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x).$$

Solution :

Soit $x \in [0,1]$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \; u_k = \frac{x^k}{k}$ décroissante vers 0.
La série $\sum (-1)^k u_k$ converge (thm des séries alternées.).
Notons $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Posons $n \in \mathbb{N}^*$ et T_n son polynome de Taylor à l'ordre n en 0.

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} X^k$$

On majore $|f - T_n|$ avec Taylor-Lagrange. On a $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n (n)!}{(1+x)^{n+1}}$ majorée par $n!$ sur $[0,1]$.
Donc l'inégalité donne :

$$|f(x) - T_n(x)| \leq n! \frac{|x|^{n+1}}{(n+1!)} \leq \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, $T_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

2 Sommes de Riemann

2.1 Convergence des sommes de Riemann

Définition 31

Soit un segment $[a,b]$ avec $a < b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on note $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
La famille $(a_0, ..., a_n)$ est appelée subdivision régulière de $[a,b]$ à n segments. Chaque segment de la subdivision est de longueur $\frac{b-a}{n}$, et ce nombre est appelé pas de la subdivision.
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$. On appelle $n$ème somme de Riemann de f le nombre

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

Théorème 32: Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on note $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$. Alors,

$$R_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Preuve :

On écrira la preuve dans le cas f lipschitzienne en proposition 36.

Corrolaire 33: Cas particulier important

Soit $f \in \mathcal{CM}([0,1], \mathbb{K})$.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Preuve :

C'est le théorème avec $a = 0$ et $b = 1$.

Exemple 34

Calculer :

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \lim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

Solution :

Posons $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$.
On a f continue, c'est une somme de Riemann, par convergence des sommes de Riemann:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \to \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Posons $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On a g continue, c'est une somme de Riemann, par converge :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \to \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln 2$$

Exemple 35: Inégalité de Jensen pour les intégrales

CENTRALE 2024

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction CPM à valeurs dans I et φ une fonction convexe et continue sur I.
Démontrer l'inégalité de Jensen pour les intégrales :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(t))\mathrm{d}t$$

Solution :

On sait (CV des sommes de Riemann) :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)$$

On a φ convexe sur I, on pose $\lambda_i=\frac{1}{n}$ et $x_i=f(a_i)$ pour $i\in[\![1,n]\!]$.
D'après l'inégalité de Jensen :

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(f(a_i))$$

Donc, puisque φ est $\mathcal{CM}$ sur $[a,b]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi\circ f(a_i)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{b-1}\int_a^b\varphi\circ f(t)\mathrm{d}t$$

D'après le théorème sur les sommes de $\mathbb{R}$.
De même, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
On a bien $\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\right)\to\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)$ lorsque $I=\mathbb{R}$.
Par stabilité des inégalités larges :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f(t)\mathrm{d}t$$

2.2 Comparaison de la méthode des rectangle avec celle des trapèzes.

Proposition 36: Erreur d'approximation avec la méthode des rectangles. ★

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ une fonction M-lipschitzienne, avec $M\in\mathbb{R}_+^*$.
Notons $R_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a+k\frac{b-a}{n})$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Ce nombre est une valeur approchée de l'intégrale de f entre a et b.
Voici une majoration de l'erreur : $\left|R_n(f)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{M(b-a)^2}{2n}$.
On a donc $\left|R_n(f)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|=O(\frac{1}{n})$.

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}\left|R_n(f)-\int_a^b f\right|&=\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}f\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}f(a_k)-\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(t)\mathrm{d}t\right)\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(a_k)\mathrm{d}t-\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(t)\mathrm{d}t\right)\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left(f(a_k)-f(t)\right)\mathrm{d}t\right|\\&\leq\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|f(a_k)-f(t)\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour k fixé, $\forall t\in[a_k,a_{k+1}]$, $|f(a_k)-f(t)|\leq M(t-a_k)$.
Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|f(a_k)-f(t)\right|\mathrm{d}t\leq M\int_{a_k}^{a_{k+1}}(t-a_k)\mathrm{d}t\leq\frac{1}{2}M(a_{k+1}-a_k)^2\leq\frac{M}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

On somme :

$$\left|R_n(f)-\int_a^b f\right|\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2}\leq\frac{M(b-a)^2}{2n}=O(\frac{1}{n})$$

Proposition 37: Erreur d'approximation avec la méthode des trapèzes

Soit $f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{K})$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $T_n(f)$ comme :

$$T_n(f):=R_n(f)+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{2}$$

Alors :

$$\left|T_n(f)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2.3 Complément : continuité uniforme d'une fonction.

Définition 38: Uniforme continuité

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est uniformément continue sur I si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 39

Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I y est uniformément continue.

Preuve :

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ on suppose qu'il existe $K > 0$ telle que $\forall x, y \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$. Soit $(x, y) \in I^2 \mid |x - y| \leq \eta$ alors $f|(x) - f(y)| \leq K|x - y| \leq K\eta = \varepsilon$.

Théorème 40: de Heine ★

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Preuve :

Par l'absurde, soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur $[a, b]$ mais non uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0\ \exists (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit un tel ε. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (x_n, y_n) \in I^2\ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, puisque (x_n) et (y_n) sont bornées, on peut extraire deux suites convergentes : $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante $\mid x_{\varphi(n)}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $|y_{\varphi(n)} - l| = |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - l| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - l|$ donc $y_{\varphi(n)} \to l$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}))| > \varepsilon$ et f continue en $l \in [a, b]$ donc $f(x_{\varphi(n)}) \to f(l)$.
De même pour $f(y_{\varphi(n)}) \to f(l)$. Par passage à la limite, $|f(l) - f(l)| \geq \varepsilon$ et $\varepsilon \leq 0$, absurde.