# Ensembles et applications

## 2/3 : Applications : images et antécédents



### L'essentiel du premier cours sur les applications.

**Définition 1.**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Une **application** $f$ de $E$ dans $F$ est un procédé qui à tout élément $x$ de $E$ associe un unique élément dans $F$, que l'on note $f(x)$. Cet objet est aussi appelé **fonction**, et décrit par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

L'ensemble $E$ est alors appelé **ensemble de départ** et l'ensemble $F$ **ensemble d'arrivée**.

Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que
$$y = f(x);$$
On dit que $y$ est l'**image** de $x$ par $f$ et que $x$ est <u>un</u> **antécédent** de $y$ par $f$.

L'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $F^E$ ou bien $\mathcal{F}(E, F)$.

L'application **identité** sur un ensemble $E$ est

$$\mathrm{id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. .$$

**Proposition 2** (Égalité de deux fonctions)**.**

Deux applications sont égales si et seulement si elles sont *égales en tout point* :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{F}(E, F))^2 \qquad f = g \quad \iff \quad \forall x \in E \quad f(x) = g(x).$$

**Définition 3.**

Soient $E, F, G$ trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
La **composée** de $f$ par $g$, notée $g \circ f$ est l'application

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) := g(f(x)) \end{array} \right. .$$

**Proposition 4** (Propriétés de la composition)**.**

- L'identité est neutre pour la composition :

$$\forall f \in \mathcal{F}(E, F) \qquad \mathrm{id}_F \circ f = f \quad \text{ et } \quad f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

- La composition est associative :

$$\forall f \in \mathcal{F}(E, F) \quad \forall g \in \mathcal{F}(F, G) \quad \forall h \in \mathcal{F}(G, H) \qquad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,.$$

### Fonctions indicatrices.

Dans ce qui suit, $E$ est un ensemble.

**Définition 5.**

Soit $A$ une partie de $E$. La **fonction indicatrice** de $A$ est l'application notée $\mathbf{1}_A$, définie par

$$\mathbf{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Par exemple, $\mathbb{Q}$ étant une partie de $\mathbb{R}$, on considère $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$, fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, définie sur $\mathbb{R}$.

$$\mathbf{1}_\mathbb{Q}\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{1}_\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = 0.$$

**Proposition 6.**

Soit $E$ un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Les égalités qui suivent sont des égalités entre applications.

Si $A$ et $B$ sont <u>disjoints</u> ($A \cap B = \emptyset$) alors $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.

Plus généralement,

$$\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A \cap B}, \qquad \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \qquad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}.$$

**Proposition 7** (Une partie est caractérisée par sa fonction indicatrice)**.**

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \quad A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B.$$

# 1 Images par une application.

## 1.1 Image directe.

**Définition 8.**

Soit $f : E \to F$ une application et $A$ une partie de $E$.
On appelle **image** (directe) de $A$ par $f$, et on note $f(A)$ la partie de $F$ ci-dessous

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in F : \exists x \in A \ y = f(x)\}.$$

Lorsque c'est l'image de $E$ tout entier que l'on considère, on peut noter

$$\mathrm{Im}(f) = f(E).$$

**Exemple 9.**

1. Que vaut $\mathrm{Im}(\arctan)$ ?
2. Soit $\exp : z \mapsto e^z; \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ l'exponentielle complexe. Que valent $\exp(\mathbb{R})$ et $\exp(i\mathbb{R})$ ?

**Proposition 10.**

Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$. On a

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

**Exemple 11.**

Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Considérons $A = [1, +\infty[$, et $B = ]-\infty, -1]$. Montrer que

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

## 1.2 Image réciproque.

**Définition 12.**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Soit $A$ une partie de $F$.
On appelle **image réciproque** de $A$ par $f$, et on note $f^{-1}(A)$ la partie de $E$ ci-dessous

$$f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}.$$

En particulier, si $y_0 \in F$, $f^{-1}(\{y_0\})$ est l'ensemble des antécédents de $y_0$ par $f$ dans $E$.

⚠ La notation $f^{-1}(A)$ peut prêter à confusion.
Si $f : E \to F$, n'est pas bijective, **l'application $f^{-1}$ n'est pas définie**, contrairement à l'ensemble $f^{-1}(A)$.
Bref, sauf dans le cas où la réciproque existe, l'image réciproque n'est pas l'image par la réciproque...

**Exemple 13.**

1. La fonction tan étant définie sur l'ensemble que l'on sait, déterminer $\tan^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ?
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right.$. Que valent $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\{0\})$ ?

**Proposition 14.**

Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A$ et $B$ deux parties de $F$. On a

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

# 2 Applications injectives, surjectives, bijectives.

## 2.1 Injectivité

**Définition 15.**

Une application $f : E \to F$ est dite **injective** si tout élément de $F$ a au plus un antécédent dans $E$, ce qui s'écrit :

$$\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

**Méthode.**

1. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **est** injective :
   - On considère deux éléments $x$ et $x'$ de $E$,
   - on suppose que $f(x) = f(x')$,
   - on démontre que $x = x'$.
2. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **n'est pas** injective, il suffit d'exhiber une paire $\{x, x'\}$ d'éléments de $E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

D'une application $f : E \to F$ injective, on peut dire aussi que c'est une **injection** de $E$ vers $F$.

**Exemples 16.**

1. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle injective ?
2. Soient
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & p + \sqrt{2}q \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right. .$$
   Montrer que $f$ est injective et que $g$ ne l'est pas.

**Exemple 17.**

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer que si $f$ est strictement monotone, alors elle est injective.

**Proposition 18.**

La composée de deux applications injectives est injective.

**Proposition 19** (Une réciproque partielle)**.**

Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

$$g \circ f \text{ est injective} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est injective.}$$

### 2.2 Surjectivité.

**Définition 20.**

Une application $f : E \to F$ est dite **surjective** si tout élément de $F$ a au moins un antécédent dans $E$, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

**Méthode.**

1. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **est** surjective :
   - On considère un élément $y$ de $F$,
   - on trouve/prouve l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
2. Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ **n'est pas** surjective, il suffit d'exhiber un élément de $F$ n'ayant pas d'antécédent dans $E$ par $f$.

D'une application $f : E \to F$ surjective, on peut dire aussi que c'est une **surjection** de $E$ vers $F$.

**Exemples 21.**

1. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective ?
2. Soient
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & p + \sqrt{2}q \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right. .$$
   Montrer que $g$ est surjective et que $f$ ne l'est pas.

**Proposition 22** (Vision ensembliste de la surjectivité)**.**

Soit $f : E \to F$ une application. On a

$$f \text{ surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = F.$$

**Proposition 23.**

La composée de deux applications surjectives est surjective.

**Proposition 24** (Une réciproque partielle)**.**

Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

$$g \circ f \text{ est surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ est surjective.}$$

### 2.3 Bijectivité et application réciproque.

**Définition 25.**

Soit une application $f : E \to F$. Elle est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de $F$ possède un unique antécédent dans $E$, ce qui s'écrit

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x).$$

**Définition 26.**

Soit $f : E \to F$ une application bijective. On considère, pour tout élément $y$ de $F$ son unique antécédent par $f$, que l'on note $f^{-1}(y)$. Ce procédé permet de définir comme suit l'**application réciproque** de $f$, notée $f^{-1}$ :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array} \right. .$$

**Méthode** (Calcul de la réciproque d'une fonction)**.**

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective et $y \in F$. S'il est possible de résoudre l'équation

$$y = f(x),$$

c'est-à-dire d'exprimer $x$ en fonction de $y$, on a une expression de $f^{-1}(y)$.

Si, pour tout élément $y \in F$, on sait prouver l'existence et l'unicité d'un antécédent dans $E$ (une solution de l'équation $y = f(x)$), on a prouvé la bijectivité de $f$.

**Théorème 27** (Caract. de la bijectivité par l'existence d'un *inverse* à gauche et à droite)**.**

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ une application. Alors,

$$f \text{ est bijective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F,E) : g \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Autrement dit, $f$ est bijective si et seulement si elle admet un (même) « inverse » à gauche et à droite pour la composition. De plus, lorsque cet inverse $g$ existe, $g = f^{-1}$.

**Proposition 28.**

La composée de deux applications bijectives est bijective.
De plus, si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications bijectives, alors

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

## Exercices

### Images directes, images réciproques.

$\boxed{\textbf{15.1}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : E \to F$ une application. Soient deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer l'égalité

$$f(A) \cap B = f\left(A \cap f^{-1}(B)\right).$$

---

$\boxed{\textbf{15.2}}$ **[♦♦◇]** Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A$ une partie de $E$ et $B$ une partie de $F$.

1. (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Démontrer que si $f$ est injective, l'inclusion réciproque est vraie.
2. Soit $B$ une partie de $F$.
   (a) Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
   (b) Démontrer que si $f$ est surjective, l'inclusion réciproque est vraie.
3. Montrer que $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.
4. Montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

---

$\boxed{\textbf{15.3}}$ **[♦♦♦]** Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que

$$f \text{ est injective} \quad \iff \quad [\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)].$$

---

### Applications injectives, surjectives.

$\boxed{\textbf{15.4}}$ **[♦◇◇]** Soient

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (n,p) & \mapsto & (-1)^n p \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1+ix}{1-ix} \end{array} \right. .$$

Ces fonctions sont-elles injectives ? Surjectives ?

---

$\boxed{\textbf{15.5}}$ **[♦◇◇]** Dans cet exercice, on admet que $\pi$ est irrationnel.
Démontrer que $\cos_{|\mathbb{Q}}$ n'est pas injective et que $\sin_{|\mathbb{Q}}$ l'est.

---

$\boxed{\textbf{15.6}}$ **[♦♦◇]** Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1. Montrer que $f$ n'est pas injective.
2. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}}$ (restriction de $f$ à $\mathbb{Q}$) est injective.

---

$\boxed{\textbf{15.7}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : E \to E$. Montrer que

1. $f$ est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.
2. $f$ est surjective si et seulement si $f \circ f$ est surjective.

---

$\boxed{\textbf{15.8}}$ **[♦♦◇]** Soit $E$ un ensemble et $f : E \to E$ une application.
On suppose que $f \circ f = f$ et que $f$ est injective ou surjective. Montrer que $f = \mathrm{id}_E$.

---

$\boxed{\textbf{15.9}}$ **[♦♦◇]** Soit $E$ un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que

$$f \text{ est surjective} \iff f \text{ est injective.}$$

---

$\boxed{\textbf{15.10}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n + (-1)^n \end{cases}$.
Démontrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même et donner sa réciproque.

---

$\boxed{\textbf{15.11}}$ **[♦♦♦]** Soient $E$ un ensemble et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On définit

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$$

1. Calculer $\Phi(\emptyset)$ et $\Phi\big(E \setminus (A \cup B)\big)$. Que dire de $A$ et $B$ si $(A, \emptyset)$ admet un antécédent par $\Phi$ ?
2. Montrer que : $\Phi$ injective $\iff A \cup B = E$.
3. Montrer que : $\Phi$ surjective $\iff A \cap B = \emptyset$.

---

$\boxed{\textbf{15.12}}$ **[♦♦♦]**
*On souhaite que cet exercice éclaire la caractérisation de la bijectivité par existence d'un inverse*

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Démontrer que $f$ est injective si et seulement si elle est inversible à gauche.
   Plus précisément, prouver l'assertion
   $$f \text{ est injective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \quad g \circ f = \mathrm{id}_E.$$
2. Démontrer que $f$ est surjective si et seulement si elle est inversible à gauche.
   Plus précisément, prouver l'assertion
   $$f \text{ est injective} \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) \quad f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

---

$\boxed{\textbf{15.13}}$ **[♦♦♦]** [Théorème de Cantor]
Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathcal{P}(E))$. Montrer que $f$ n'est pas surjective.
Indication : on pourra considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

---