

# Équations Différentielles Linéaires d'ordre 1

## Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Crédits : Ibrahim pour tout (j'aime pas les EDL)

---

### Exercices.

[Exercice 11.1](#) . . . . . [2](#)

---

**Exercice 11.1** [◆◆◆]

Résoudre les équations différentielles ci-dessous

1.  $y' - 2y = 2$  sur  $\mathbb{R}$     2.  $(x^2 + 1)y' + xy = x$     3.  $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$  sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$   
 4.  $y' - \ln(x)y = x^x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$     5.  $(1-x)y' - y = \frac{1}{1-x}$  sur  $] -\infty, 1[$

1. Solutions de l'équation homogène :  $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière, avec  $y$  constante :  $S_p : x \mapsto -1$ .

Ensemble de solutions :  $S = \{\lambda e^{2x} - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

2. L'équation se réécrit comme  $y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}$ .

Solutions de l'équation homogène :  $S_0 = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière :  $S_p : x \mapsto 1$  est solution évidente.

Ensemble de solutions :  $S = \{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

3. Soit  $I = ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Solutions de l'équation homogène :  $S_0 = \{x \mapsto \lambda \cos x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Solution particulière : Soit  $u \in S_0$  et  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivable sur  $I$ . On cherche  $z = \lambda' u$ .

$$\begin{aligned} z \text{ est solution} &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) \cos(x) = \sin(2x) \\ &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = 2 \sin(x) \\ &\iff \lambda = -2 \cos \end{aligned}$$

Ainsi,  $z = -2 \cos^2$ .

Ensemble de solutions :  $S = \{x \mapsto \lambda \cos x - 2 \cos^2 x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

4. Soit  $I = \mathbb{R}_+^*$ .

Solutions de l'équation homogène :  $S_0 = \{x \mapsto \lambda \frac{x^x}{e^x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution particulière : Soit  $u \in S_0$  et  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivable sur  $I$ . On cherche  $z = \lambda' u$ .

$$\begin{aligned} z \text{ est solution} &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) \frac{x^x}{e^x} = x^x \\ &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = e^x \\ &\iff \lambda = e^x \end{aligned}$$

Ainsi,  $z : x \mapsto x^x$

Ensemble de solutions :  $S = \{x \mapsto \lambda \frac{x^x}{e^x} + x^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

5. Soit  $I = ] -\infty, 1[$ . L'équation se réécrit comme  $y' - \frac{1}{1-x}y = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

Solutions de l'équation homogène :  $S_0 = \{x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Solution particulière : Soit  $u \in S_0$  et  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivable sur  $I$ . On cherche  $z = \lambda' u$ .

$$\begin{aligned} z \text{ est solution} &\iff \forall x \in I, \frac{\lambda'(x)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = \frac{1}{1-x} \\ &\iff \forall x \in I, \lambda(x) = -\ln(1-x) \end{aligned}$$

Ainsi,  $z : x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ .

Ensemble de solutions :  $S = \{x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

□