Problème.

Partie I - Préliminaires

1. D est une application de $\mathbb{R}[X]$ vers lui-même.

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad D(\lambda P + \mu Q) = \lambda P' + \mu Q' = \lambda D(P) + \mu D(Q).$$

$$\boxed{D \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])}$$

Par ailleurs, si $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, en posant $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} \in \mathbb{R}[X]$ on obtient $D(P) = Q$.

$$\boxed{D \text{ est surjectif.}}$$

2. (a) Puisque $\deg P = n$, on sait que $\deg P^{(k)} = n-k$ pour $0 \leq k \leq n$. La famille considérée est donc une famille de polynômes non nuls, à degrés deux à deux distincts : elle est libre.

(b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(P^{(k)}) = n-k \leq n$. Donc $\mathcal{B}_P$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par conséquent, $\mathcal{B}_P$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Par caractérisation des bases d'un espace vectoriel de dimension finie :

$$\boxed{\mathcal{B}_P \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}.$$

Partie II - Sous-espaces stables par D

3. *si les degrés des polynômes de F sont bornés*

On suppose que $F \neq \{0\}$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$F \subset \mathbb{R}_N[X].$$

(a) • L'ensemble $\{\deg P \mid P \in F,\ P \neq 0\}$ est une partie non vide ($F \neq \{0\}$) et majorée (par N) de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément que l'on note n.

• Soit $P \in F$ tel que $\deg P = n$ (il en existe par définition de n).
Puisque $P \in F$ et F est stable par D, on sait que $P' = D(P) \in F$, $P'' = D(P') \in F$, ..., $P^{(n)} \in F$. La famille $\mathcal{B}_P$ est bien une famille de vecteurs de F.

(b) • Par définition de n : $\boxed{F \subset \mathbb{R}_n[X]}$.

• On sait que $\mathcal{B}_P$ est une famille de vecteurs de F. Donc $\mathrm{Vect}\mathcal{B}_P \subset F$.
Or $\mathcal{B}_P$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, d'après 1. En particulier $\mathrm{Vect}\mathcal{B}_P = \mathbb{R}_n[X]$.
Il reste $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \subset F}$.

4. *si les degrés des polynômes de F ne sont pas bornés*

On suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $P \in F$ tel que $\deg P > N$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $P \in F$ tel que $\deg P = n > N$.
Comme à la question précédente : $\mathrm{Vect}\mathcal{B}_P = \mathbb{R}_n[X] \subset F$. Puisque $\mathbb{R}_N[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ il vient

$$\mathbb{R}_N[X] \subset F.$$

Par conséquent

$$\mathbb{R}[X] = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_N[X] \subset F.$$

L'inclusion réciproque est connue.

$$\boxed{F = \mathbb{R}[X]}$$

5. *conclusion*

D'après les deux questions précédentes, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par D alors
— ou bien $\boxed{F = \{0\}}$;
— ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{F = \mathbb{R}_n[X]}$:
— ou bien $\boxed{F = \mathbb{R}[X]}$.
Réciproquement, ces sous-espaces sont bien stables par D.

Partie III - Une condition suffisante pour que D^m admette une racine k^e.

On se donne deux entiers naturels non nuls m et k tels que k divise m.

6. Soit $\ell \in \mathbb{N}^\star$ tel que $m = k\ell$. On pose

$$\boxed{g = D^\ell}.$$

On a bien $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ et $g^k = D^{\ell k} = D^m$.

Partie IV - Cette condition suffisante est nécessaire

On se donne deux entiers naturels non nuls m et k.

On suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$g^k = D^m.$$

7. $\mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Ker} D^m = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : P^{(m)} = 0\} = \boxed{\mathbb{R}_{m-1}[X]}$.

8. D étant surjective, D^m aussi par composition. Par conséquent, g^k est surjective. Pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = g^k(R) = g(g^{k-1}(R))$. En posant $P = g^{k-1}(R)$:

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad \exists P \in \mathbb{R}[X] \quad : \quad Q = g(P).$$

$$\boxed{g \text{ est surjective}}$$

9. Soit $P \in \mathrm{Ker}(g^i)$. Alors $g^k(x) = g^{k-i}(g^i(x)) = g^{k-i}(0) = 0$ (c'est possible car $k - i \geq 0$). Ainsi $P \in \mathrm{Ker}(g^k)$. Cela montre que

$$\mathrm{Ker}(g^i) \subset \mathrm{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{m-1}[X].$$

Puisque $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ est de dimension finie, on sait que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g^i) \text{ est de dimension finie}}.$$

10. (a) • Soit $P \in \mathrm{Ker}(g^i)$. De $g^{i-1}(g(x)) = 0$ on déduit que $g(x) \in \mathrm{Ker}(g^{i-1})$. Cela justifie que la fonction

$$\boxed{\phi_i \text{ est bien définie}}.$$

• La linéarité de ϕ_i découle de la linéarité de g.

(b)

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}\phi_i &\iff \big(P \in \mathrm{Ker}(g^i) \text{ et } g(P) = 0\big) \\ &\iff P \in \mathrm{Ker}(g^i) \cap \mathrm{Ker} g \\ &\iff P \in \mathrm{Ker} g \qquad \text{car } \mathrm{Ker} g \subset \mathrm{Ker}(g^i) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}\phi_i = \mathrm{Ker} g}$$

(c) Soit $Q \in \mathrm{Ker}(g^{i-1})$. Puisque g est surjective, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = g(P)$. De $g^{i-1}(Q) = 0$ on déduit $g^{i-1}\left(g(P)\right) = 0$, c'est-à-dire $g^i(P) = 0$. Autrement dit $P \in \mathrm{Ker}(g^i)$ et $Q = g(P) = \phi_i(P)$:

$$\forall Q \in \mathrm{Ker}(g^{i-1}) \quad \exists P \in \mathrm{Ker}(g^i) \quad : \quad Q = \phi_i(P).$$

Cela montre que

$$\boxed{\phi_i \text{ est surjective}}.$$

(d) L'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(g^i)$ est de dimension finie. On applique le théorème du rang à l'application linéaire ϕ_i :

$$\dim \mathrm{Ker}(g^i) = \dim \mathrm{Ker}\phi_i + \mathrm{rg}\phi_i = \dim \mathrm{Ker} g + \dim \mathrm{Im}\phi_i.$$

Or $\mathrm{Im}\phi_i = \mathrm{Ker}(g^{i-1})$ car ϕ_i est surjective.

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(g^i) = \dim \mathrm{Ker} g + \dim \mathrm{Ker}(g^{i-1})}$$

11. • Notons $d = \dim \mathrm{Ker} g$. On vient de montrer que

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \quad : \quad \dim \mathrm{Ker}(g^i) = \dim \mathrm{Ker}(g^{i-1}) + d.$$

On reconnaît une suite arithmétique de premier terme $\dim \mathrm{Ker}(g^0) = 0$ et de raison $d = \dim \mathrm{Ker} g$. On obtient

$$\boxed{\forall i \in [\![0, k]\!] \quad \dim \mathrm{Ker} g^i = i \dim \mathrm{Ker} g}.$$

• On sait donc que

$$m = \dim \mathbb{R}_{m-1}[X] = \dim \mathrm{Ker}(g^k) = k \dim \mathrm{Ker} g.$$

Puisque $\dim \mathrm{Ker} g$ est un entier :

$$\boxed{k \mid m}.$$

Exercice 1. Un exercice sur les DL.

1. (a) On sait que $e^t \underset{0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2)$. Pour $t \neq 0$, on a donc

$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)} = \frac{1}{1 + \frac{t}{2} + o(t)}$$

Nous savons aussi que $\frac{1}{1+u} \underset{0}{==} 1 - u + o(u)$. Ainsi, par substitution avec une fonction qui tend vers 0, on a bien

$$\boxed{f(t) = 1 - \frac{t}{2} + o(t)}$$

(b) Le développement à l'ordre 0 donne que $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = 1}$.
L'existence d'un DL en 0 l'ordre 1 est équivalente à la dérivabilité en 0.

On a donc que f est dérivable en 0 et que $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}}$.

2. (a) Il est évident que $g(-0) = g(0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$:

$$g(-t) = \frac{t}{1-e^{-t}} - \frac{1}{2}t = \frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t\,(e^t-1)}{2\,(e^t-1)} = \frac{t\,(e^t+1)}{2\,(e^t-1)} = \frac{t\,(e^t-1)}{2\,(e^t-1)} + \frac{2t}{2\,(e^t-1)}.$$

La dernière expression vaut $\frac{1}{2}t + f(t)$, ce qui achève de prouver que $g(-t) = g(t)$: la fonction g est $\boxed{\text{paire}}$.

(b) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle admet donc un développement limité à tout ordre en 0 (Taylor-Young). Pour $n \geq 0$,

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n).$$

Or pour $k \geq 2$: $g^{(k)} = f^{(k)}$, et donc $g^{(k)}(0) = b_k$. On a donc

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{k!} t^k + o(t^n).$$

Puisque g est une fonction paire, on sait les coefficients d'ordre impair de son développement limité en 0 sont nuls : pour $k \geq 1$, $\boxed{b_{2k+1} = 0}$.

3. (a) La formule de Taylor-Young donne les développements limités en 0 :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} t^k + o(t^n) \qquad \text{et} \qquad e^t - 1 = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l!} t^l + o(t^n).$$

Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ avec pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ $\alpha_k = \frac{b_k}{k!}$.

Posons $Q = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_k X^k$, avec $\beta_0 = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k = \frac{1}{k!}$. On a

$$f(t)(e^t - 1) = P(t)Q(t) + \underbrace{P(t)o(t^n) + Q(t)o(t^n) + o(t^n)o(t^n)}_{=o(t^n)}$$

Le coefficient γ_n de X^n dans le produit des polynômes P et Q vaut

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} \underset{\beta_0=0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k.$$

Puisque $f(t)\,(e^t - 1) = t$, il vient a fortiori

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k t^k + o(t^n) = t + o(t^n).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité :

$$\forall n \geq 2 \quad : \quad \gamma_n = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0}.$$

(b) On sait que $b_0 = f(0)$ donc $\boxed{b_0 = 1}$.
Par la question 1-(b) : $b_1 = f'(0)$ donc $\boxed{b_1 = -\frac{1}{2}}$. Par la question 2-(b) : $\boxed{b_3 = 0}$.
Par la question précédente avec $n = 3$:

$$\binom{3}{0} b_0 + \binom{3}{1} b_1 + \binom{3}{2} b_2 = 0,$$

d'où on déduit

$$\boxed{b_2 = \frac{1}{6}}.$$

Exercice 2. (*)

1. Soit V un sous-espace vectoriel de E. On note q sa dimension et on définit

$$\mathscr{L}_V(E,F) = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid V \subset \mathrm{Ker}(u)\}\,.$$

   (a) On considère u et v dans $\mathscr{L}_V(E,F)$ et λ et μ deux scalaires.
   Montrons que $\lambda u + \mu v \in \mathscr{L}_V(E,F)$, c'est-à-dire que $V \subset \mathrm{Ker}(\lambda u + \mu v)$.
   Soit $x \in V$. On a $(\lambda u + \mu v)(x) = \lambda u(x) + \mu v(x)$.
   Or, $u(x) = 0_F$ car $V \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $v(x) = 0_F$ car $V \subset \mathrm{Ker}(v)$.
   On a donc $(\lambda u + \mu v)(x) = 0_F$, ce qui donne $x \in \mathrm{Ker}(\lambda u + \mu v)$, CQFD.

   (b) L'énoncé suggère de s'intéresser à $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{L}(V,F) \\ u & \mapsto & u_{|V} \end{array} \right.$.
   Il est facile de vérifier que Φ est une application linéaire.
   Puisque $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie (égale à np), on peut applique le théorème du rang, qui donne

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim \mathrm{Ker}\Phi + \dim \mathrm{Im}\Phi. \qquad (*)$$

   - Le noyau de Φ est l'ensemble des applications nulles sur V : c'est $\mathscr{L}_V(E,F)$.
   - L'application Φ est clairement surjective.
     Pour le montrer, fixons W un supplémentaire de V dans E et considérons une application $v \in \mathscr{L}(V,F)$, il existe une (unique mais peu importe ici) application linéaire u telle que $u_{|V} = v$ et $u_{|W} = 0$ (définition d'une application linéaire sur deux supplémentaires) : u est un antécédent de v par Φ.
     Remarque : on aurait aussi pu définir u en fixant $u_{|W} = \mathrm{id}_W$ par exemple, ce qui aurait défini un antécédent différent.
     La surjectivité de Φ amène

$$\dim \mathrm{Im}(\Phi) = \dim \mathscr{L}(V,F) = \dim(V) \times \dim(F) = qp.$$

   L'égalité $(*)$ amène alors

$$\dim \mathscr{L}_V(E,F) = \dim \mathrm{Ker}\Phi = \dim \mathscr{L}(E,F) - \dim \mathrm{Im}\Phi = np - qp = \boxed{p(n-q)}.$$

2. - On peut récrire

$$G_1 = \{u \in \mathscr{L}(E) : \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(u)\} = \mathscr{L}_{\mathrm{Im} f}(E,E).$$

   En appliquant la question 1 avec $V = \mathrm{Im}(f)$ qui est de dimension $\mathrm{rg}(f)$, et avec $F = E$ de dimension $p = n$, on obtient que l'ensemble G_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et que $\boxed{\dim G_1 = n(n - \mathrm{rg}(f))}$.

   - On peut récrire

$$G_2 = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(f)\} = \mathscr{L}(E, \mathrm{Ker}(f)).$$

   Ceci prouve que G_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
   D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) = n - \mathrm{rg}(f)$, d'où

   $\dim G_2 = \dim \mathscr{L}(E, \mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) \times \dim(\mathrm{Ker} f)$: $\boxed{\dim G_2 = n(n - \mathrm{rg}(f))}$.

   - On peut récrire

$$G_3 = \{u \in \mathscr{L}(E, \mathrm{Ker}(f)) : \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(u)\} = \mathscr{L}_{\mathrm{Im} f}(E, \mathrm{Ker} f).$$

   En appliquant la question 1 avec $V = \mathrm{Im}(f)$ qui est de dimension $\mathrm{rg}(f)$, et avec $F = \mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension $n - \mathrm{rg}(f)$, on obtient que l'ensemble G_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et que $\boxed{\dim G_3 = (n - \mathrm{rg}(f))^2}$.