Chapitre 37

Espaces préhilbertiens.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

Dans ce chapitre, E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les scalaires sont **réels**.

1 Produits scalaires.

Définition 1: Produit scalaire.

On appelle **produit scalaire** sur E toute application

$$\langle .,. \rangle \ : \ \begin{cases} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{cases}$$

,

- bilinéaire : $\forall (x,x',y,y')\in E^4,\ \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \langle \lambda x+\mu x', y\rangle & = & \lambda\langle x,y\rangle+\mu\langle x',y\rangle \\ \langle x, \lambda y+\mu y'\rangle & = & \lambda\langle x,y\rangle+\mu\langle x,y'\rangle \end{cases}$
- symétrique : $\forall x,y\in E,\ \langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$.
- définie : $\forall x\in E,\ \langle x,x\rangle=0 \Longrightarrow x=0_E$.
- positive : $\forall x\in E,\ \langle x,x\rangle\geq 0$.

Pour x,y deux vecteurs de E, $\langle x,y\rangle$ est une nombre réel, appelé produit scalaire de x et y.

Définition 2: Espaces préhilbertiens, euclidiens.

Si $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur E, le couple $(E,\langle .,.\rangle)$ est appelé **espace préhilbertien**.
Un espace préhilbertien de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

Proposition 3

L'application $\langle .,.\rangle$ qui à $x=(x_1,...,x_n)$ et $y=(y_1,...,y_n)$ associe

$$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^n x_iy_i,$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, dit **produit scalaire canonique.**

Quitte à identifier $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (on écrit les n-uplets comme des matrices colonnes), on peut calculer le produit scalaire canonique à l'aide d'un produit matriciel :

$$\forall X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \quad \forall Y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}, \quad \boxed{\langle X,Y\rangle = X^\top Y}.$$

Preuve :

Symétrie: $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i=\sum_{i=1}^n y_ix_i=\langle y,x\rangle$.
Bilinéarité: Par symétrie, la linéarité à gauche suffit.
Soient $X,X',Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

$$\langle \lambda X+\mu X', Y\rangle = (\langle X+\mu X')^\top Y = \lambda X^\top Y+\mu X'^\top Y = \lambda\langle X,Y\rangle+\mu\langle X',Y\rangle$$

Positive:

$$\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$$

Définie: Supposons $\langle x,x\rangle=0$, alors $\sum_{i=1}^n x_i^2=0$, nombres positifs qui somment à 0, tous les x_i sont nuls.

Proposition 4

L'application $\langle .,. \rangle$ qui à deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ associe

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{i,j}.$$

est un produit scalaire sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$, dit **produit scalaire canonique.**

On peut exprimer le produit scalaire de A et B ainsi :

$$\boxed{\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)}$$

Preuve :

On a :

$$\mathrm{Tr}(A^\top B) = \sum_{j=1}^{p} \left[A^\top B\right]_{j,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \left[A^T\right]_{j,i} [B]_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{i,j}$$

Symétrie: Claire.
Bilinéarité: Suffisante à droite.
Soient $A, B, B' \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\langle A, \lambda B + \mu B' \rangle &= \mathrm{Tr}(A^\top(\lambda B + \mu B')) = \mathrm{Tr}(\lambda A^\top B + \mu A^\top B') \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(A^\top B) + \mu \mathrm{Tr}(A^\top B') = \lambda \langle (A, B) + \mu \langle (A, B').\end{aligned}$$

Positivité:

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \geq 0$$

Définie: Supposons $\langle A, A \rangle = 0$, somme de termes positifs est nulle : les termes sont nuls.

Proposition 5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
L'application $\langle .,. \rangle$ qui à $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2$ associe

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Preuve :

Symétrie: Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)f(t)\mathrm{d}t = \langle f, g \rangle.$$

Bilinéarité: La linéarité à gauche suffit.
Soient $f, \widetilde{f}, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle \lambda f + \mu \widetilde{f}, g \rangle &= \int_a^b (\lambda f(t) + \mu \widetilde{f}(t))g(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b \widetilde{f}(t)g(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda \langle f, g \rangle + \mu \langle \widetilde{f}, g \rangle\end{aligned}$$

Positivité: Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \geq 0. \quad \text{car } f^2 \text{ positive, cpm et } a < b.$$

Définie: Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\langle f, f \rangle = 0$.

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a, b],\ f^2(t) = 0 \quad \text{car } f^2 \text{ positive, continue et } a < b.$$

Donc $\forall t \in [a, b],\ f(t) = 0$.

Exemple 6: Un produit scalaire intégral sur l'espace des polynômes.

Pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on note

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Vérifier que l'application $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Solution :

Symétrie: Évidente.
Bilinéarité: Pareil que sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
Positivité: Pareil.

Définie: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$.

$$\int_0^1 P^2(t)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [0,1],\ P^2(t) = 0 \quad \text{car } P^2 > 0, \text{ continue et } 0 < 1.$$

Donc $\forall t \in [0,1],\ P(t) = 0$, alors P a une infinité de racines, il est **nul**.

2 Norme associée à un produit scalaire.

Définition 7

On appelle **norme associée au produit scalaire** $\langle .,.\rangle$ l'application

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{cases}$$

Remarque: Bien définie car $\langle x, x\rangle$ est positif pour tout $x \in E$.

Exemple 8

Pour tout $x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$, la norme de x vaut

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Cette norme est souvent écrite en physique dans les cas $n = 2$ et $n = 3$:

$$\text{Pour } \vec{u}(x,y),\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ et pour } \vec{v}(x,y,z),\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Proposition 9: Faits élémentaires.

Soit $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$ sur E.
1. Le vecteur nul est le seul vecteur de norme 0.
2. Pour tout $x \in E$, pour tout réel λ, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. Si x est non nul, $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1.

Preuve :

Soit $(E, \langle .,.\rangle)$ préhilbertien.
$\boxed{1.}$ • On a $\|0_E\|^2 = \langle 0_\mathbb{R} 0_E, 0_E\rangle = 0_\mathbb{R}\langle 0_E, 0_E\rangle = 0_\mathbb{R}$, donc $\|0_E\| = 0$.
• Soit $x \in E$ tel que $\|x, x\| = 0$, alors $\langle x, x\rangle = 0$ et $x = 0$ par définition.
On a bien $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \iff x = 0$.

$\boxed{2.}$ Soit $x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2 \langle x, x\rangle \quad \text{donc} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|\langle x, x\|$$

Donc $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

$\boxed{3.}$ Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, sa norme est non nulle.

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Proposition 10: Identités remarquables.

Soit $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle .,.\rangle$ sur E. Soient $x, y \in E$.
1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
3. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

Preuve :

$\boxed{1.}$

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x^2\| + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\|x-y\|^2 = \|x+(-y)\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, -y\rangle + \|-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$\boxed{2.}$ On somme les deux :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

$\boxed{3.}$ On différencie les deux :

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle \Longrightarrow \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Exemple 11: Avec n vecteurs.

Développer $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2$, pour n vecteurs $x_1, ..., x_n$ de $(E, \langle ., . \rangle)$.

Solution :

On a:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x_i, x_j \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle + \sum_{i<j} \langle x_i, x_j \rangle + \sum_{i>j} \langle x_i, x_j \rangle$$

Or, $\sum_{i>j} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{j<i} \langle x_j, x_i \rangle = \sum_{i<j} \langle x_i, x_j \rangle$. Conclusion :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i<j} \langle x_i, x_j \rangle.$$

Théorème 12: Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle$ sur E, alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Cette inégalité est une égalité ssi (x, y) est liée ssi $y = 0_E$ ou $\exists \alpha \in \mathbb{R} : x = \alpha y$.

Preuve :

Soient $x, y \in E^2$.
Cas (x, y) **liée**.
• Supposons $x = 0_E$.
D'une part, $|\langle x, y \rangle| = |\langle 0_E, y \rangle| = 0$.
D'autre part, $\|x\|\|y\| = \|0_E\|\|y\| = 0$.
Il y a égalité dans ce sous-cas.

• Supposons $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid y = \alpha x$.
D'une part, $|\langle x, y \rangle| = |\langle x, \alpha x \rangle| = |\alpha| \|x\|^2$.
D'autre part, $\|x\|\|y\| = \|x\|\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|^2$.
Il y a égalité dans ce sous-cas.

Bilan: dans le cas (x, y) liée, l'égalité est vraie.

Cas (x, y) **libre**.
On introduit $f : \lambda \mapsto \|x + \lambda y\|^2$, c'est un polynôme de degré 2.
En effet, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + \|x\|^2$.
De plus, puisque $y \neq 0$, par séparation, $\|y\| \neq 0$ et f est vraiment de degré 2.
On remarque de surcroît que f prend des valeurs strictement positives.
En effet, on a clairement que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x + \lambda y\|^2 \geq 0$.
De plus, $\|x + \lambda y\| \neq 0$ car sinon, on aurait que le vecteur est nul, ce qui est impossible puisque (x, y) est libre.
Alors, le discriminant de f est strictement négatif.
Notons $\Delta = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 = 4\left(\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2\right) < 0$.
Ainsi, $\langle x, y \rangle^2 < \|x\|^2\|y\|^2$, puis en appliquant la racine strictement croissante :
On a $\langle x, y \rangle < \|x\|\|y\|$**.**

Exemple 13: Des inégalités de Cauchy-Schwarzenigger écrites au carré.

• Soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. En utilisant le produit scalaire canonique :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

• Soient f et g dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. En utilisant le produit scalaire 5.

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t \right) \left(\int_a^b g(t)^2 \mathrm{d}t \right)$$

Proposition 14: Inégalité triangulaire.

Soit $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle$ sur E. Alors,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Il s'agit d'une égalité ssi x et y sont positivement liés; ssi $y = 0_E$ ou $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : x = \alpha y$.

Preuve :

Soit $x, y \in E^2$. Différence des carrés :

$$\begin{aligned}(\|x\|+\|y\|)^2 - \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle - \|y\|^2 \\ &= 2\left(\|x\|\|y\| - \langle x, y\rangle\right) \geq 0 \quad \text{d'après Cauchy-Schwarz.}\end{aligned}$$

Alors :

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2 \quad \text{donc} \quad \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

Supposons que $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$. Alors $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$, puis, d'après l'égalité dans Cauchy-Schwarz :

$$\begin{cases}\langle x, y\rangle \geq 0 \\ |\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|.\end{cases}$$

Alors (x, y) est liée.
1er cas: $x = 0_e$.
2eme cas: $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid y = \alpha x$.
Alors $\langle x, \alpha x\rangle \geq 0$ et $\alpha\|x^2\| \geq 0$ puisque $\|x\|^2 > 0$, on a $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Supposons que x, y sont positivement liés.
Sous-cas 1: $x = 0_E$, alors $\|x+y\| = \|y\| = \|x\|+\|y\|$.
Sous-cas 2: $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid y = \alpha x$, alors $\|x+y\| = \|(1+\alpha)x\| = |\underbrace{1+\alpha}_{>0}| \cdot \|x\| = \|x\| + \|\alpha x\| = \|x\|+\|y\|$.

Corrolaire 15

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

Remarque: La fonction norme est 1-lipschitzienne.

Définition 16: Distance euclidienne.

Soit $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle ., .\rangle$ sur E.
On appelle **distance euclidienne** entre deux vecteurs x et y de E le nombre positif :

$$d(x, y) = \|x-y\|.f$$

3 Orthogonalité.

3.1 Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales.

Définition 17: Vecteurs orthogonaux.

Deux vecteurs d'un espace préhilbertien sont dits **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

Exemple 18

- Couples de vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire canonique.
- Dans l'espace $(\mathcal{C}(0, 2\pi), \mathbb{R})$ muni du produit scalaire de 5, les vecteurs cos et sin sont orthogonaux.
- Diagonales d'un losange, dans un espace quelconque : si x et y ont même norme, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.

Proposition 19

Le vecteur nul est l'unique vecteur orthogonal à tous les vecteurs d'un espace préhilbertien.

Preuve :

- Soit $x \in E$. $\langle 0_E, x\rangle = 0$ car $y \mapsto \langle y, x\rangle$ est une forme linéaire.
- Soit $x \in E \mid \forall y \in E,\ \langle x, y\rangle = 0$. En particulier, $\langle x, x\rangle = 0$: par définition, $x = 0_E$.

Définition 20

Soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E.

On dit que c'est une **famille orthogonale** si ses vecteurs sont orthogonaux deux-à-deux :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \ i \neq j \Longrightarrow \langle x_i, x_j\rangle = 0.$$

On parle de famille **orthonormée** si de plus, tous ses vecteurs sont de norme 1 :

$$\forall 1 \leq i \leq n \ \|x_i\| = 1.$$

Proposition 21

Soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$.

$$(x_1, ..., x_n) \text{ est orthonormée} \iff \forall i, j \in [\![1, n]\!] \ \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Preuve :

$(x_1, ..., x_n)$ orthonormée $\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \|x_i\|^2 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top B)$ la base canonique est orthonormée :
Pour $i,j,k,l \in [\![1,n]\!]$: $\langle E_{i,j}, E_{k,l}\rangle = \mathrm{Tr}(E_{i,j}^\top E_{k,l}) = \mathrm{Tr}(E_{j,i}E_{k,l}) = \delta_{i,k}\mathrm{Tr}(E_{j,l}) = \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \delta_{(i,j),(k,l)}$. Bien orthonormée.

Proposition 22: Renormalisation.

Si $(x_i, ..., x_n)$ est une famille orthogonale de E, constituée de vecteurs non nuls, on peut poser

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\ e_i := \frac{x_i}{\|x_i\|}.$$

Alors la famille $(e_1, ..., e_n)$ est orthonormée.

Preuve :

Tous les e_i sont de norme 1 (évident).
Montrons qu'ils sont orthogonaux : soient $i,j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$.

$$\langle e_i, e_j\rangle = \left\langle \frac{x_i}{\|x_i\|}, \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\rangle = \frac{1}{\|x_i\| \cdot \|x_j\|} \cdot \langle x_i, x_j\rangle = 0.$$

Proposition 23

Une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

Notamment, les familles orthonormées sont libres.

Preuve :

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E.
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$ fixé, alors :

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,\ x_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i, x_k\rangle = \lambda_k \|x_k\|^2 = 0.$$

En effet, $\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,\ x_k\rangle = \langle 0_E,\ x_i\rangle = 0_E$.
Donc $\lambda_k = 0$ car $x_k \neq 0_E$: $\|x_k\|^2 \neq 0$.

Proposition 24: Théorème de Pythagore.

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille orthogonale d'un espace préhilbertien pour lequel on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i\rangle + \sum_{i \neq j} \underbrace{\langle x_i, x_j\rangle}_{=\,0} \\
&= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.
\end{aligned}$$

3.2 Orthogonal d'une partie.

Définition 25

Soit X une partie de E. On appelle **orthogonal** de X et on note $X^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de X, c'est-à-dire

$$X^\perp = \{y \in E : \quad \forall x \in X, \quad \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Exemple 26: Conséquences immédiates de la définition.

Si X et Y sont deux parties de E,

1. $X \subset Y \implies Y^\perp \subset X^\perp$.
2. $X \subset (X^\perp)^\perp$

Solution :

$\boxed{1.}$ Supposons $X \subset Y$ et $z \in Y^\perp$, alors pour $x \in X$, $\langle x, z\rangle = 0$ car $x \in X \subset Y$ et $z \in Y^\perp$. Donc $z \in X^\perp$.
$\boxed{2.}$ Soit $x \in X$, pour $y \in X^\perp$, $\langle x, y\rangle = 0$ donc $x \in (X^\perp)^\perp$.

Exemple 27: Se ramener à un sous-espace vectoriel.

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad X^\perp = (\text{Vect}(X))^\perp$$

Solution :

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
On a $X \subset \text{Vect}(X)$, par décroissance de l'orthogonal, on a $(\text{Vect}(X))^\perp \subset X^\perp$.
Soit $y \in X^\perp$, et $x \in \text{Vect}(x)$: $\exists n \in \mathbb{N}^* \ \exists (x_1, ..., x_n) \in X^n \ \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.
Alors $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i, y\rangle = 0$ car $y \in X^\perp$. Donc $y \in (\text{Vect}(X))^\perp$.

Proposition 28

Si X est une partie de $(E, \langle .,. \rangle)$, alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E en somme directe avec F.

Preuve :

$\boxed{1.}$ Avec la caractérisation :
On a $0_E \in X^\perp$. En effet, 0_E est orthogonal à tout vecteur (de X).
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $u, v \in (X^\perp)^2$. Montrons que $\lambda u + \mu v \in X^\perp$.
Pour $x \in X$, on a $\langle \lambda u + \mu v, x\rangle = \lambda\langle u, x\rangle + \mu\langle v, x\rangle = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$. Donc $\lambda u + \mu v \in X^\perp$.

$\boxed{1.}$ Autre preuve :
On a $X^\perp = \{y \in E \ \forall x \in X, \ \langle x, y\rangle = 0\}$. On pose $\varphi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle$ pour $x \in X$ donné.
Alors $X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X, \ \varphi_x(y) = 0\} = \{y \in E \mid \forall x \in X, \ y \in \text{Ker}(\varphi_x)\} = \bigcap_{x \in X} \text{Ker}(\varphi_x)$.
C'est un sev comme intersection de sev puisque φ_x est une forme linéaire non nulle si $x \neq 0$.
Si $x = 0_E$, $\text{Ker}\varphi_x$ est un hyperplan et $\text{Ker}\varphi_0 = E$.

$\boxed{2.}$ Soit F un sev de E.
Soit $x \in X \cap X^\perp$, alors $\langle x, x\rangle = 0$ donc $x = 0_E$.

Exemple 29: Reconnaître un «vecteur normal» à un hyperplan.

• Soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On considère le plan :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

Écrire F sous la forme $\text{Vect}(u)^\perp$ où u est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à expliciter.
Sait-on prouver que $F^\perp = \text{Vect}(u)$?

• On considère le sev :

$$G = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ \text{Tr}(M) = 0\}.$$

Écrire G sous la forme $\text{Vect}(U)^\perp$ où U est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ à expliciter.
Sait-on prouver que $G^\perp = \text{Vect}(U)$.

Solution :

On a :

$$F = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (a, b, c), \vec{u}\rangle = 0\} = \text{Vect}(a, b, c)^\perp.$$

On a :

$$G = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(I_n^\perp M) = 0\} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \langle I_n, M\rangle = 0\} = \text{Vect}(I_n)^\perp$$

3.3 Bases orthonormées d'un espace euclidien.

Théorème 30

Dans un espace euclidien de dimension non nulle, il existe des bases orthonormées.

Preuve :

Par récurrence sur la dimension de l'espace :
Initialisation: Soit E un espace euclidien de dimension 1.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Alors $\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ est libre car non nul, c'est une base car $\dim E = 1$, orthonormée par construction.
Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le théorème soit vrai, soit E euclidien de dimension $n + 1$.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, $H = \{y \in E \mid \langle y, x\rangle = 0\}$, c'est un hyperplan de E comme noyau d'une forme linéaire.
On munit H du produit scalaire induit par E, c'est donc un espace euclidien de dimension n.
Par hypothèse, il a une b.o.n., qu'on complète par $\frac{x}{\|x\|}$ pour obtenir une b.o.n. de E.
En effet, elle est orthonormée car la base de H est orthonormée et $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1.
C'est une base car elle est libre (orthogonaux deux-à-deux et avec $\frac{x}{\|x\|} \in H^\perp$) et de cardinal $n + 1$.
Conclusion: Par récurrence, le théorème est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 31

Si E est de dimension finie et que $(e_1, ..., e_n)$ en est une base orthonormée, alors

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Preuve :

Soit $x \in E$, il existe donc $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle , \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j.$$

Corrolaire 32

Si E est de dimension finie et que $(e_1, ..., e_n)$ en est une base orthonormée, alors pour $(x, y) \in E^2$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$$

Preuve :

On a :

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j \rangle e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$$

Exemple 33

4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

4.1 Projeté orthogonal.

Définition 34

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie.
Alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E :

$$\boxed{E = F \oplus F^\perp}.$$

La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est notée ici p_F et appelé **projecteur orthogonal** de F.

$$\text{Si } (e_1, ..., e_p) \text{ est une base orthonormée de } F, \text{ alors} \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Preuve :

Par analyse-synthèse, supposons que x se décompose sur $F + F^\perp$: $\exists y, z \in F \times F^\perp \; x = y + z$.
F est de dimension finie, il admet une b.o.n. $(e_1, ..., e_p)$, et $y = \sum_{i=1}^{p} \langle y, e_i \rangle e_i$.
On sait que $x - y \in F^\perp$: $\langle x - y, e_i \rangle = 0$ donc $\langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle = 0$ donc $\langle x, e_i \rangle = \langle y, e_i \rangle$.
Donc $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle, e_i$, évidemment, $z = x - y$.
On a bien l'unicité.
Synthèse : on pose $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$, $z = x - y$.
On a bien $y \in F$ et $y + z = x$.
Montrons que $x - y \in F^\perp$. Soit $f \in F$, $f = \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i$.

$$\langle x - y, f \rangle = \left\langle x - y, \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle (\langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle) = 0.$$

Car $\langle y, e_i \rangle$ est la coordonnée de y sur e_i : $\langle x, e_i \rangle$ par définition.
Conclusion : tout $x \in E$ se décompose de manière unique sur $F + F^\perp$.

Corrolaire 35: Inégalité de Bessel.

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors,

$$\forall x \in E \quad \|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

Preuve :

Soit $x \in E$, alors $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$.
On a donc $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$ et $\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\| \geq 0$.
Par passage à la racine, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Corrolaire 36

Soit E un espace euclidien et F un sev de E. Alors

$$\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F).$$

Preuve :

On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$ car F de dimension finie.
Donc $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$ donc $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$.

Proposition 37: La question du bi-orthogonal (Hors-programme).

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^{\perp} = E$.
On a

$$(F^{\perp})^{\perp} = F.$$

Le projecteur orthogonal sur $F^{\perp}$ est le projecteur sur $F^{\perp}$ parallèlement à F, de sorte que

$$\forall x \in E,\ X = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x).$$

Tout ceci est vrai en particulier lorsque F est de dimension finie, et donc dans le cas où E est euclidien.

Preuve :

On a déja prouvé que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
Montrons l'inclusion réciproque sous l'hypothèse $E = F \oplus F^{\perp}$.
Soit $x \in (F^{\perp})^{\perp}$. $\exists!(x_F, x_{F^{\perp}}) \in F \times F^{\perp} \mid x = x_F + x_{F^{\perp}}$.
D'une part $\langle x, x_{F^{\perp}} \rangle = 0$ car $x \in (F^{\perp})^{\perp}$ et $x_F \in F^{\perp}$.
D'autre part, $\langle x, x_{F^{\perp}} \rangle = \langle x_F + x_{F^{\perp}}, x_{F^{\perp}} \rangle = \cancel{\langle x_F, x_{F^{\perp}} \rangle} + \langle x_{F^{\perp}}, x_{F^{\perp}} \rangle = \|x_{F^{\perp}}\|^2$.
On obtient $\|x_{F^{\perp}}\|^2 = 0$ donc $x_{F^{\perp}} = 0_E$ donc $x = x_F \in F$.
On a bien $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$, par double inclusion, $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

4.2 Distance à un sous-espace de dimension finie.

Définition 38

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sous-espace de E et $x \in E$ un vecteur.
On appelle **distance** de x à F, que l'on pourra noter $d(x, F)$ le réel positif

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Remarque: La borne a un sens car $\{\|x - y\|, y \in F\}$ est non vide $\|x - 0_F\|$ et minoré par 0.

Proposition 39

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace de dimension finie. On a

$$\boxed{d(x, F) = \|x - p_F(x)\|}.$$

La distance au sous-espace est donc atteinte : $\|x - p_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$, et le projeté orthogonal $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise le minimum.

Preuve :

Notons $y_0 = p_F(x)$ (existe car F est de dimension finie) et considérons $y \in F$. Puisque $x - y_0$ appartient à $F^{\perp}$ et que $y - y_0$ appartient à F, le théorème de Pythagore donne

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2.$$

Avec égalité ssi $\|y_0 - y\| = 0$.
On a donc bien prouvé que $\|x - y\| \geq \|x - y_0\|$ avec égalité ssi $y = y_0$.

Corrolaire 40: Distance à un sous-espace, dans un espace de dimension finie.

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.
Pour tout vecteur x de E, on a

$$d(x, F) = \|p_{F^{\perp}}(x)\|.$$

Preuve :

Pour $x \in E$, $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^{\perp}}(x)\|$.

4.3 Construction de b.o.n. : algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exemple 41: Comprendre d'abord pour deux vecteurs.

On orthonormalise une famille libre (u_1, u_2), en illustrant.

Solution :

On pose $e_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}$ a un sens car $u_1 \neq 0$ (famille libre).
Notons $F = \text{Vect}(u_1)$, alors $e_2 := \frac{u_2 - p_F(u_2)}{\|u_2 - p_F(u_2)\|}$.

Proposition 42: Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit E un espace préhilbertien. Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille libre de vecteurs de E $(n \geq 2)$.
Il est possible de définir des vecteurs $e_1, ..., e_n$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n\mathrm{rg},\ (e_1, ..., e_k) \text{ est une b.o.n de } \text{Vect}(u_1, ..., u_k) := F_k.$$

Le procédé de construction est le suivant : on commence par poser

$$e_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, si $e_1, ..., e_k$ sont construits, on pose $e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$, où

$$v_{k+1} := u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1}) = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1}, e_i \rangle e_i.$$

Le procédé mis en oeuvre pour passer de $(u_1, ..., e_n)$ à $(e_1, ..., e_n)$ est appelé **algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** et on dit que l'on a orthonormalisé la famille $(u_1, ..., u_n)$

Preuve :

Pour $k = 1$, on a déjà $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ bien défini et $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$.
Soit $k \geq 1$, supposons $e_1, ..., e_k$ bien construits.
Alors par définition : $v_{k+1} = u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1})$ avec $F_k = \text{Vect}(u_1, ..., u_k)$.
Par définition du projeté orthogonal, $v_{k+1} \in F_k^{\perp}$. En particulier, $\forall i \in [\![1, k]\!]$ $\langle v_{k+1}, e_i \rangle = 0$.
Supposons que $v_{k+1} = 0$, alors $u_{k+1} = p_{F_k}(u_{k+1}) \in \text{Vect}(u_1, ..., u_k)$, absurde car famille libre.
On a bien $v_{k+1} \neq 0$, on pose $e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$.
On sait déjà que $(e_1, ..., e_k)$ est orthonormée.
De plus, $\|e_{k+1}\| = \mathbb{1}$ et pour $i \in [\![1, k]\!]$, $\langle e_{k+1} e_i \rangle = \langle \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|} = 0 \rangle$.
C'est bien orthonormé.
Alors $(e_1, ..., e_{k+1})$ est libre, or $F_{k+1} = \text{Vect}(u_1, ..., u_{k+1})$ donc $\dim F_{k+1} = k+1$, c'est une b.o.n.

Exemple 43

Orthonormaliser la famille (u_1, u_2, u_3) où $u_1 = (2, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$.
Solution : l'algorithme donne (e_1, e_2, e_3) tels que :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}(-1, 2, 4), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, -1).$$

Exemple 44: Matrice de passage.

Soit $(u_1, ..., u_n)$ une base d'un espace euclidien et $(e_1, ..., e_n)$ la b.o.n. obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt. Expliquer pourquoi la matrice de passage de la première à la seconde est triangulaire supérieure.

Solution :

Avec $e_k \in \text{Vect}(u_1, ..., u_k)$.

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} ... & a_{1,k} & ... \\ ... & \vdots & ... \\ ... & a_{k,k} & ... \\ ... & 0 & ... \\ ... & \vdots & ... \\ ... & 0 & ... \end{pmatrix}$$

Proposition 45: Théorème de la b.o.n. incomplète.

Dans un espace euclidien, toute famille orthonormée peut être complétée en une b.o.n.

4.4 Projeté orthogonal et calcul de distance : la pratique.

Méthode : Projeter un vecteur sur F avec une b.o.n.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E et $x \in E$.
Pour calculer $p_F(x)$, projeté orthogonal de x sur F, on peut

1. Se donner une b.o.n. $(e_1, ..., e_p)$ de F.
2. Utiliser la formule $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Méthode : Projeter un vecteur sur F lorsqu'on a une base quelconque de F.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E et $x \in E$.
Pour calculer $p_F(x)$, projeté orthogonal de x sur F, on peut

1. Se donner une base $(u_1, ..., u_p)$ de F.
2. Introduire $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$, p-uplet des coordonnées de $p_F(x)$ sur $(u_1, ..., u_p)$.
3. Écrire le système des $\forall i \in [\![1, p]\!]$ $\langle x - p_F(x), u_i \rangle = 0$.
4. Résoudre le système linéaire.

Exemple 46: Distance à un hyperplan en dimension finie.

Soit u un vecteur non nul d'un espace euclidien E et x un vecteur de E.

1. Justifier que $\text{Vect}(u)^\perp$ est un hyperplan. Quel nom peut-on donner à u ?
2. Notons $H = \text{Vect}(u)^\perp$ et $D = \text{Vect}(u)$.
   Lequel de $p_H(x)$ ou de $p_D(x)$ est le plus facile à calculer en premier ?
3. Justifier que la distance de x à H est $d(x, H) = \frac{|\langle x,u \rangle|}{\|u\|}$.
4. Application : montrer que la distance d'un vecteur $x = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ à un plan vectoriel P d'équation $ax + by + cz = 0$ $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ vaut

$$d(x, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Solution :

1. $\text{Vect}(u)$ est une droite car $u \neq 0$, $\text{Vect}(u)^\perp$ est un supplémentaire de $\text{Vect}(u)$ car de dimension finie, c'est un hyperplan.
2. $p_D(x)$ est plus facile à calculer en premier car D est de dimension 1.
3. On a $d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \|p_D(x)\|$.
Une b.o.n. de D est $(\frac{u}{\|u\|})$. Alors $p_D(x) = \langle x, \frac{u}{\|u\|} \rangle \frac{u}{\|u\|} = \frac{\langle x,u \rangle}{\|u\|^2} u$.
Finalement, $d(x, H) = \|p_D(x)\| = \frac{|\langle x,u \rangle|}{\|u\|}$.
4. On a $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (a, b, c) \rangle = 0\} = \text{Vect}(a, b, c)^\perp$.
P est un hyperplan de R^3. On a $d(x, P) = \frac{|\langle x,(a,b,c) \rangle|}{\|(a,b,c)\|} = \frac{ax_0+by_0+cz_0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemple 47

Calculer le nombre

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 \mathrm{d}x$$

Solution :

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$.

$$\int_0^1 (e^x - ax + b)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (\exp - f_{a,b})^2 = \| \exp - f_{a,b} \|^2.$$

C'est la norme associée au produit scalaire intégral sur $\mathcal{C}([0, 1])$ (5).
Il s'agit donc de calculer $d(\exp, F)$ où $F = \{f_{a,b} : x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On a $F = \text{Vect}(\text{id}_\mathbb{R}, \mathbb{1})$, c'est un plan de base $(\text{id}, \mathbb{1})$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid p_F(\exp) = \lambda \text{id} + \mu \mathbb{1}$. On pose le système :

$$\begin{cases} \langle \exp - p_F(\exp), \text{id} \rangle & = 0 \\ \langle \exp - p_F(\exp), \mathbb{1} \rangle & = 0 \end{cases}$$

D'une part, $\langle \exp - p_F(\exp), \text{id} \rangle = \int_0^1 x e^x \mathrm{d}x - \lambda \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - \mu \int_0^1 x \mathrm{d}x = I - \frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2}$ où $I = \int_0^1 x e^x \mathrm{d}x$.
D'autre part, $\langle \exp - p_F(\exp), \mathbb{1} \rangle = J - \frac{\lambda}{2} - \mu$.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{2}\mu = I \\ \frac{1}{2}\lambda + \mu = J \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda + 3\mu = 6I \\ 3\lambda + 6\mu = 6J \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 12I - 6J \\ \mu = 4J - 6I \end{cases}$$

Reste à calculer I, J et $\int_0^1 (\exp - \lambda \text{id} - \mu)^2$.

5 Exercices.

Exercice 1: 37.6

Montrer que pour tout $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^n x_i^2$.
Pour quels n-uplets a-t-on égalité ?

Solution :

Soit $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (1,...,1)$. On applique Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)$$

ça marche.

On a égalité ssi (x,y) est liée ssi $y = 0$ ou $\exists\lambda \in \mathbb{R} \mid x = \lambda y$ ssi les x_i sont égaux.

Exercice 2: 37.7

Soient $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Étudier l'égalité.

Solution :

On a $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 = \|u\|^2$ où $u := (\frac{1}{\sqrt{x_1}},...,\frac{1}{\sqrt{x_n}})$.

Posons $v := (\sqrt{x_1},...,\sqrt{x_n})$ de norme $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n(\sqrt{x_i})^2 = 1$ par hypothèse.

Donc $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}\sqrt{x_i} = n$.

Donc $(\langle u,v\rangle)^2 \leq \|u\|^2\|v\|$ donc $n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ d'après Cauchy-Schwarz.

Cas d'égalité: ssi (x,y) est liée, ssi $\exists\alpha \in \mathbb{R} \mid y = \alpha x$.
Avec la condition $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, on trouvera un unique vecteur pour le cas d'égalité : $(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n})$.