Outils pour l'analyse
3/3 : Fonctions de la variable réelle

Dans tout ce cours, la lettre $\mathbb{K}$ pourra être remplacée par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les lettres I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

1 Vocabulaire sur les fonctions.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ (pas forcément un intervalle) et Y une partie de $\mathbb{K}$. Une fonction (ou application)

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

est un procédé qui a tout élément x de X associe un unique élément $f(x)$ appartenant à Y.

Si $x \in X$ et $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x et que x est *un* **antécédent** de y.

Puisqu'ici la variable x est un nombre réel, on dit que la fonction est de la **variable réelle**.

Lorsque toutes les images par la fonction f sont des nombres réels, alors f est dite **à valeurs réelles** (dans la pratique, ce sera le cas dans l'immense majorité des cas considérés).

La notion de fonction (ou d'application) entre deux ensembles quelconques, sera étudiée plus formellement dans un cours Ensemble et applications à venir.

1.1 Ensemble de définition.

Rappel.

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des réels x tel que $f(x)$ a un sens.

Exemple 1.

Donner l'ensemble de définition de

$$f : x \mapsto \sqrt{x(x-2)}, \qquad g : x \mapsto \ln\left(x(x-2)\right), \qquad h : x \mapsto \ln(x) + \ln(x-2).$$

1.2 Représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles.

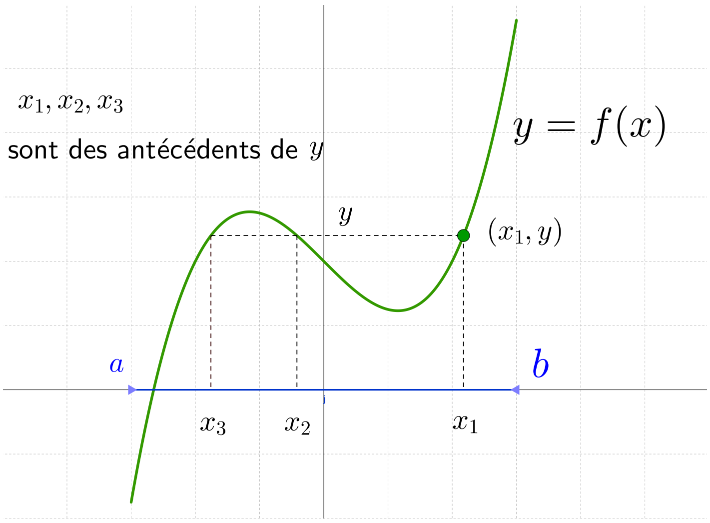
Définition 2.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de la variable réelle et à valeurs réelles.
On appelle **graphe** de f la partie de $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\{(x, f(x)), \quad x \in X\}$$

$$\text{qui peut aussi s'écrire} \qquad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X \text{ et } y = f(x)\right\}.$$

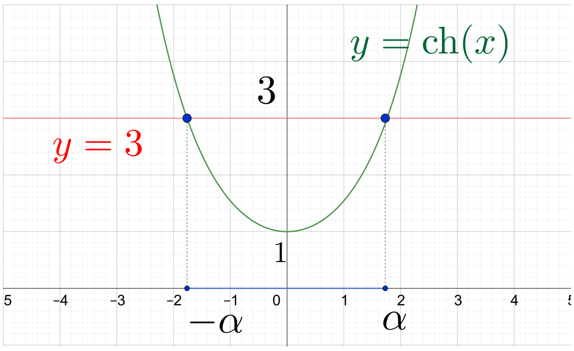
Supposons le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. À chaque élément du graphe correspond alors un point du plan. Déposons une goutte d'encre sur chacun de ces points (ou noircissons le pixel correspondant). Le résultat est appelé **courbe représentative** de la fonction. Dans la pratique, on confond graphe et courbe représentative.



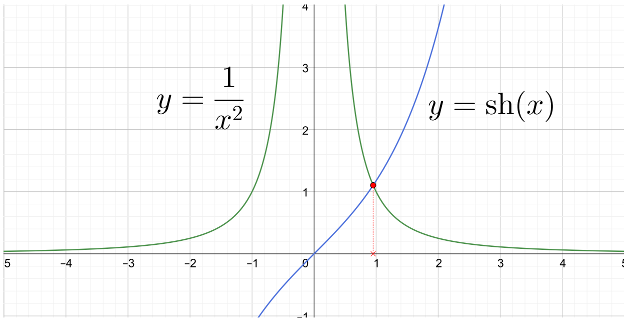
Graphe d'une fonction définie sur un segment $[a, b]$.

Remarque. Chaque fois qu'on représentera un graphe de fonctions dans la suite, il faudra bien sûr comprendre qu'il s'agit d'une fonction à valeurs réelles.

• Les graphes de fonctions permettent de résoudre graphiquement des équations/inéquations. Le TVI et son corollaire strictement monotone permettront de rendre plus rigoureuses ces lectures graphiques.

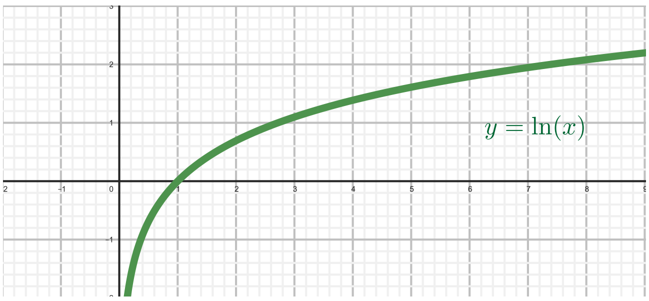


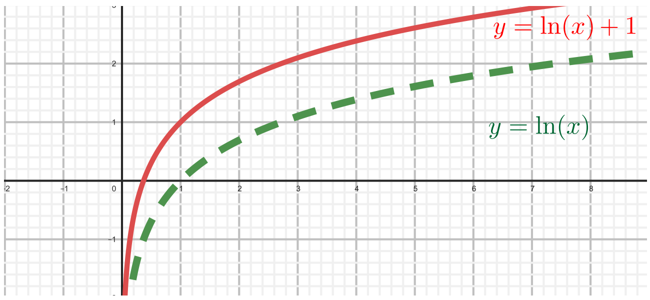
Inéquation $\mathrm{ch}(x) \leq 3$.

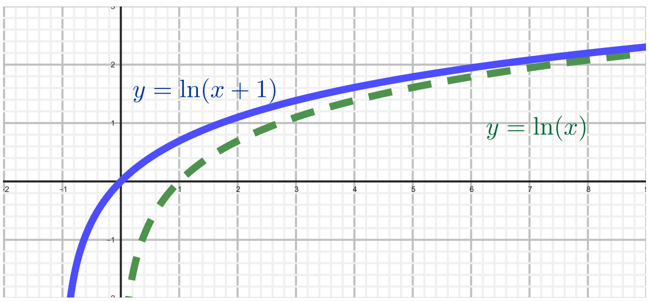


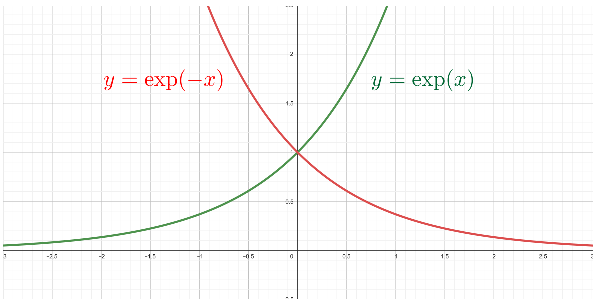
Équation $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

• Quelques graphes déduits de graphes de fonctions usuelles.

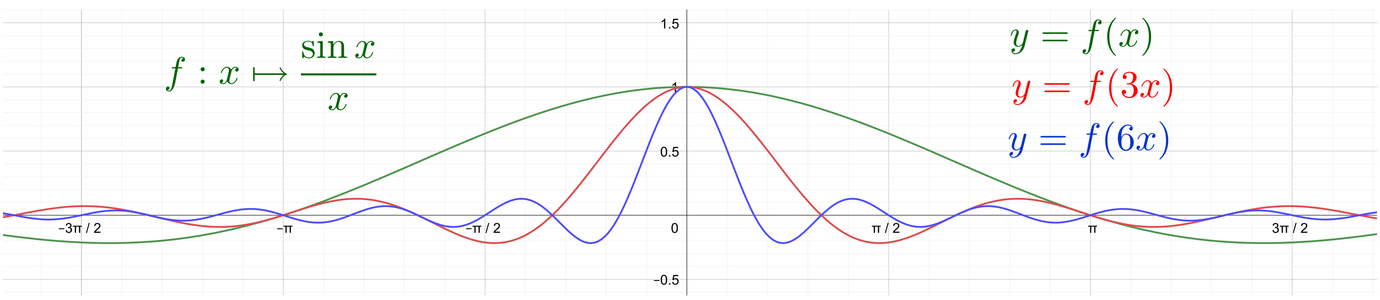








• Quel lien entre le graphe de f et celui de $x \mapsto f(ax)$, avec $a > 0$?



1.3 Somme et produit de fonctions.

Définition 3.

Soient f et g définies sur un même ensemble $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles.
La **somme** de f et g est la fonction définie par

$$f+g : \left\{ \begin{array}{ccl} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (f+g)(x) := f(x)+g(x) \end{array} \right. .$$

Définition 4.

Soient f et g définies sur un même ensemble $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles.
Le **produit** et le **quotient** de f et g sont les fonctions définies par

$$f \cdot g : \left\{ \begin{array}{ccl} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (f \cdot g)(x) := f(x)g(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f/g : \left\{ \begin{array}{ccl} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (f/g)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right. .$$

(pour que la définition du quotient ait un sens, il est nécessaire que g ne s'annule pas sur X).

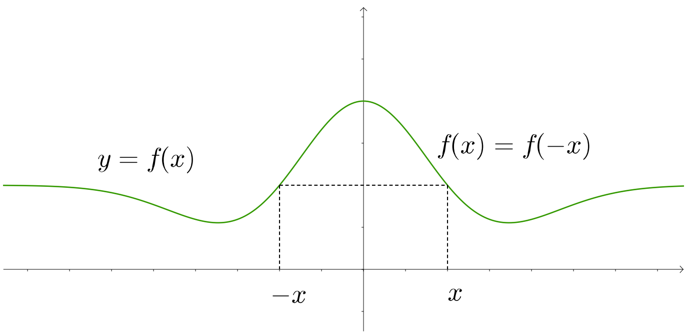
1.4 Parité, imparité, périodicité.

Définition 5.

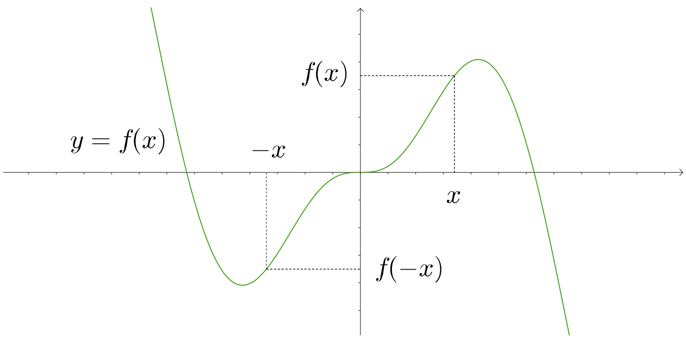
Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est dite

- **paire** si $\forall x \in X \left\{ \begin{array}{l} -x \in X \\ f(-x) = f(x) \end{array} \right.$
- **impaire** si $\forall x \in X \left\{ \begin{array}{l} -x \in X \\ f(-x) = -f(x) \end{array} \right.$

On peut dire d'un ensemble de réels X qui satisfait la condition $\forall x \in X \;\; (-x) \in X$ qu'il est symétrique par rapport à l'origine.



Graphe d'une fonction paire.



Graphe d'une fonction impaire.

Exemple 6.

Montrer que le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

Exemple 7 (Une preuve par analyse-synthèse)**.**

Démontrer le résultat ci-dessous.

Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Définition 8.

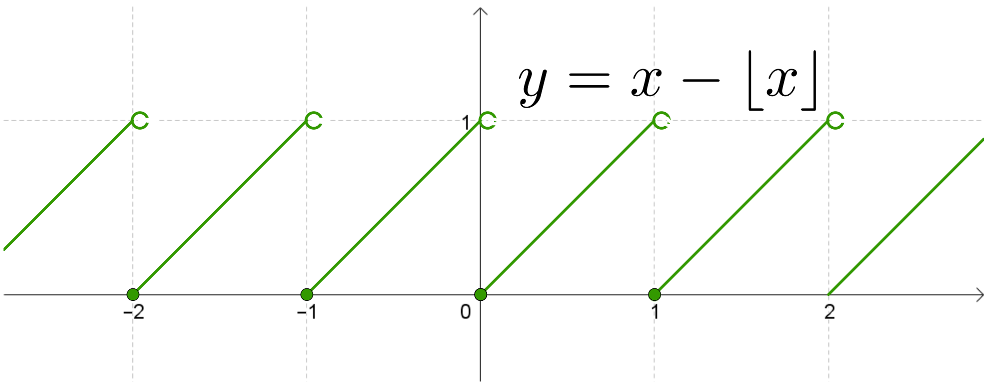
Soit $T > 0$ et X une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est dite **T-périodique** si

$$\forall x \in X \begin{cases} x + T \in X \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

On peut aussi dire que f « admet T pour période ».
Une fonction sera dite périodique si elle admet une certaine période $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemples. cos et sin sont 2π-périodiques. La fonction tan est π-périodique sur son ensemble de définition. Un exemple de fonction à valeurs complexes : $t \mapsto e^{it}$, 2π-périodique.

Ci-dessous, le graphe de $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, qui est 1-périodique.



Exemple 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction T-périodique, où T est un réel strictement positif.
Montrer que $g : x \mapsto f(-x)$ est T-périodique.
Soit $a > 0$. Prouver que $h : x \mapsto f(ax)$ est T'-périodique, en précisant T'.

Méthode (Réduction de l'intervalle d'étude)**.**

Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

- Si f est T périodique, son graphe est laissé invariant par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$. Il suffit donc d'étudier une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T, le plus souvent $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. On obtient le reste du graphe par translations.
- Si f est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  Si f est impaire, il est invariant par la symétrie centrale de centre O.
  Il suffit alors d'étudier f sur $X \cap \mathbb{R}_+$. L'étude sur $X \cap \mathbb{R}_-$ vient par symétrie.

Exemple 10.

Proposer un intervalle d'étude pour la fonction $x \mapsto \text{ch}\,(\sin(3x))$.

1.5 Monotonie.

Définition 11.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Elle est dite

- **croissante** si $\quad \forall x \in X\ \forall x' \in X \quad x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$.
- **décroissante** si $\quad \forall x \in X\ \forall x' \in X \quad x \leq x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')$.
- **strictement croissante** si $\quad \forall x \in X\ \forall x' \in X \quad x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$.
- **strictement décroissante** si $\quad \forall x \in X\ \forall x' \in X \quad x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')$.

Lorsqu'une fonction a l'une des propriétés ci-dessus, elle est dite **monotone** (strictement monotone dans les deux derniers cas).

En bref et en français : une fonction est croissante si elle conserve les inégalités larges, strictement croissante si elle conserve les inégalités strictes.

Exemple 12.

Soit f une fonction paire sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Exemple 13 (Un peu de composition)**.**

Que dire de la composée de deux fonctions décroisantes ?

Exemple 14 (Un peu de logique)**.**

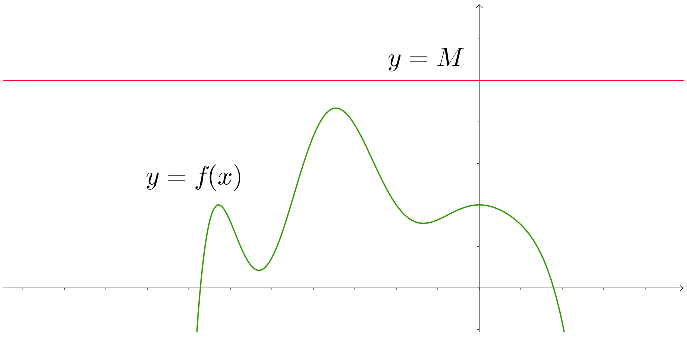
Justifier que si f est strictement monotone, alors les réciproques des implications écrites dans la définition sont vraies. Que dire si f est seulement monotone ?

1.6 Fonctions bornées.

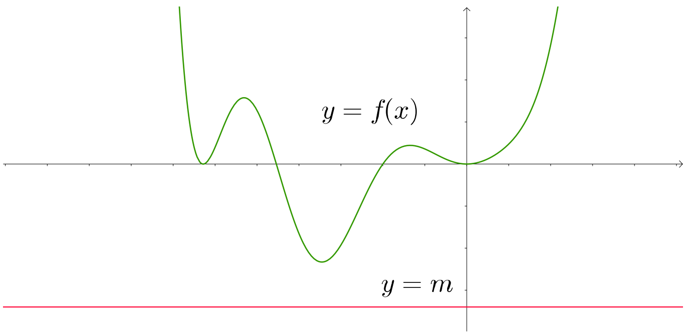
Définition 15.

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite

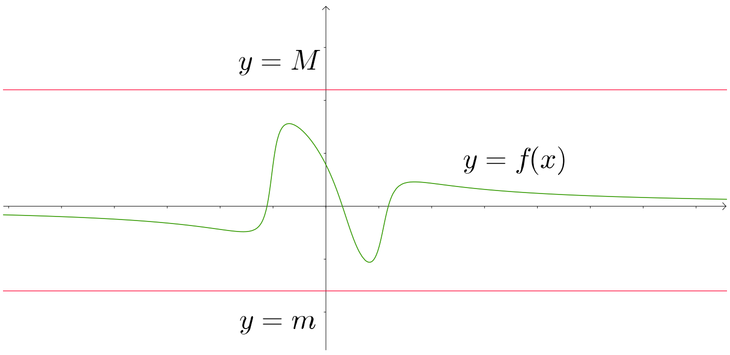
- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X\ f(x) \leq M$,
  (M étant alors appelé un majorant de f)
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X\ f(x) \geq m$,
  (m étant alors appelé un minorant de f)
- **bornée** si elle est majorée et minorée.



Une fonction f majorée par un réel M.



Une fonction f minorée par un réel m.



Une fonction bornée.

Proposition 16 (Caractérisation des fonctions bornées)**.**

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction.

$$f \text{ est bornée} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in X\ \ |f(x)| \leq \mu.$$

On retrouve le slogan : « être borné, c'est être majoré en valeur absolue ».

Exemple 17.

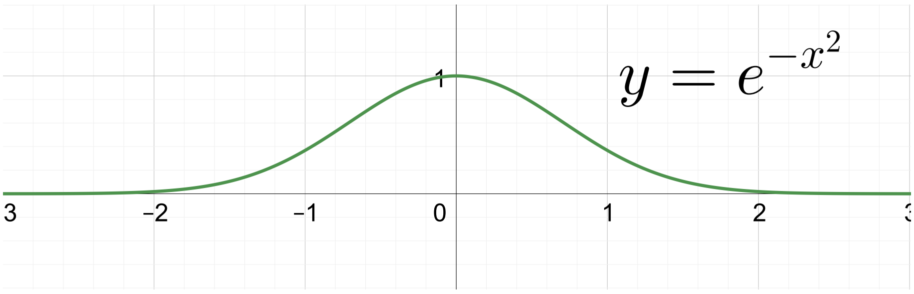
Soient deux fonctions bornées f et g définies sur un même ensemble X.
Montrer que leur somme $f + g$ et leur produit fg sont des fonctions bornées.

Définition 18.

Soit une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in X$. On dit que

- f admet (ou atteint) un **maximum** en a si $\forall x \in X\ f(x) \leq f(a)$,
- f admet (ou atteint) un **minimum** en a si $\forall x \in X\ f(x) \geq f(a)$,
- un **extremum** est un minimum ou un maximum.

Dans la définition précédente, $f(a)$ est le maximum de la partie de $\mathbb{R}$ $\{f(x), x \in X\}$, qui est l'ensemble de toutes les images par f. Il y a unicité de ce maximum, comme on l'a montré dans le cours précédent. En revanche, ce maximum peut être atteint en plusieurs points ! Par exemple, la fonction cos admet un maximum (qui vaut 1) et ce maximum est atteint en tous les multiples de 2π.



La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ possède un maximum en 0, qui vaut 1. La fonction est minorée (par 0) mais ne possède pas de minimum. En effet, puisque la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, aucun minimum ne peut être atteint sur cet intervalle, idem pour $\mathbb{R}_-$.

1.7 Bijections.

La notion de bijection entre un ensemble E et un ensemble F sera étudiée ultérieurement.
On se contente ici de quelques résultats sur les bijections entre deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

Définition 19.

On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est une **bijection** de I vers J si tout élément de J possède un unique antécédent dans I par f, ce qui s'écrit

$$\forall y \in J \quad \exists ! x \in I \quad y = f(x).$$

Définition 20.

Soit $f : I \to J$ une bijection. Tout élément $y \in J$ possède un unique antécédent dans I par f ; notons-le $f^{-1}(y)$. Ceci définit la fonction **réciproque** de f.

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} J & \to & I \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array} \right. .$$

Exemple. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est sa réciproque.

Méthode (L'équation reliée à la bijectivité)**.**

Prouver la bijectivité de $f : I \to J$ revient à montrer que pour tout élément $y \in J$, l'équation

$$y = f(x),$$

a une unique solution dans I. Calculer $f^{-1}(y)$, c'est exprimer cette solution x en fonction de y.

Exemple 21.

Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$ et expliciter sa réciproque.

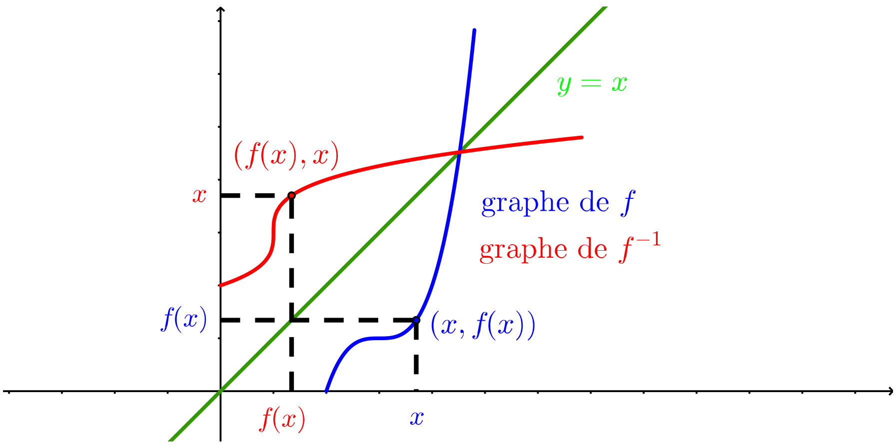
Proposition 22 (découle de la définition de f^{-1})**.**

Soit $f : I \to J$ une bijection et $f^{-1} : J \to I$ sa réciproque. On a

$$\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

Proposition 23.

Soit $f : I \to J$ une bijection de I vers J.
Le graphe de $f^{-1} : J \to I$ est le symétrique de celui de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Proposition 24.

Soit $f : I \to J$ une bijection.

1. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I, alors f^{-1} est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur J).
2. Si f est impaire, alors $f^{-1} : J \to I$ l'est aussi.

2 Continuité et dérivabilité.

2.1 Définitions.

Définition 25.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. La fonction f est **continue en** a si

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a).$$

Si f est continue en tout point de I, elle est dite **continue sur** I.

Définition 26.

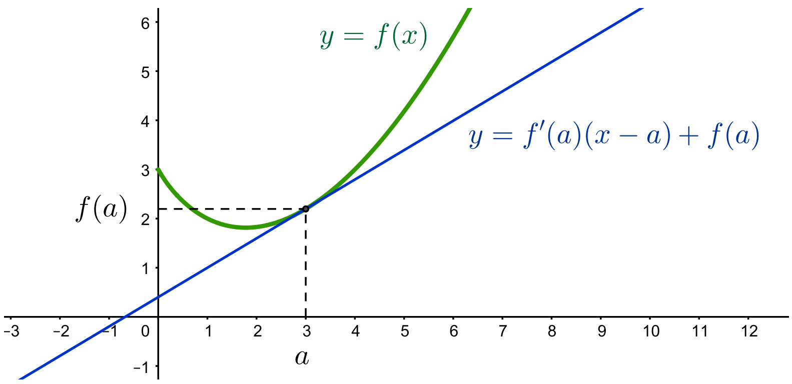
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. La fonction f est **dérivable en** a si

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (x \neq a)$$

a une limite finie lorsque x tend vers a. On note alors $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Si f est dérivable en tout point de I, elle est dite **dérivable sur** I.

La fonction $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$, est alors appelée **dérivée** de f.



Tangente en un point au graphe de f.

Figure. Par les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ passe une droite appelée corde, de pente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Lorsque x se rapproche de a, cette corde "tend" vers une droite qui effleure la courbe de f en a : c'est la tangente. La pente de la corde tend vers celle de la tangente : $f'(a)$.

L'équation de la tangente est $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a).}$

Exemple 27.

Continuité et dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Tableau des dérivées usuelles : (X est l'ensemble où la fonction f est dérivable)

$f(x)$	$f'(x)$	X
$x^n (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^p (p \in \mathbb{Z})$	px^{p-1}	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^a (a \in \mathbb{R})$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

$f(x)$	$f'(x)$	X
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th} x$	$\begin{cases} 1 - \mathrm{th}^2 x \\ \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \end{cases}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\begin{cases} 1 + \tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$	$D_{\tan}$

Proposition 28.

Si une fonction est dérivable, alors elle est continue. La réciproque est fausse.

2.2 Continuité et opérations.

Proposition 29.

Si f et g sont continues sur I, alors leur somme et leur produit sont continus sur I.
Si f et g sont continues sur I et que g ne s'annule pas sur I, leur quotient est continu sur I.

Proposition 30.

Soient deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$.
Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I.

2.3 Dérivabilité et opérations.

Proposition 31 (Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient)**.**

Soient deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{K}$, dérivables sur l'intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- La fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, la fonction fonction f/g est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$.

Théorème 32 (Dérivée d'une composée).

Soient deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$.
Si f est dérivable sur I, et si g est dérivable sur J, alors la composée $g \circ f$, est dérivable sur I et

$$\boxed{(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)} \qquad \text{i.e.} \qquad \forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'\left(f(x)\right).$$

Exemple 33.

Dériver les fonctions $A : x \mapsto \cos(\ln(x))$ et de $B : x \mapsto (\operatorname{ch}(x))^{\pi}$

Exemple 34.

Soit $C : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. Où est-elle définie ? Où est-elle dérivable ? Donner sa dérivée.

Corollaire 35 (Cas particuliers courants).

Soit $u : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, alors

- la fonction e^u est dérivable sur I et $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.
- u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Si de surcroît,

- $u : I \to \mathbb{R}^*$, alors la fonction $1/u$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$.
- $u : I \to \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout réel a, u^a est dérivable sur I, et $\boxed{(u^a)' = au'u^{a-1}}$.

  Notamment, $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.
- $u : I \to \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$.

Autre cas particulier courant : si g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors pour tous a et b réels, puisque $x \mapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction composée $x \mapsto g(ax + b)$ l'est aussi par théorème. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{dx} g(ax+b) = \frac{\mathrm{d}}{dx}(ax+b) \cdot g'(ax+b) \qquad \text{soit } \boxed{\frac{\mathrm{d}}{dx} g(ax+b) = a \cdot g'(ax+b).}$$

Remarque. À quoi sert de regarder des cas particuliers puisqu'on a une formule simple dans le cas général ? La réponse est à chercher du côté du calcul de primitives : nous aurons besoin de savoir « dériver à l'envers » : il est donc utile de bien connaître la forme des dérivées de composées dans les cas courants.

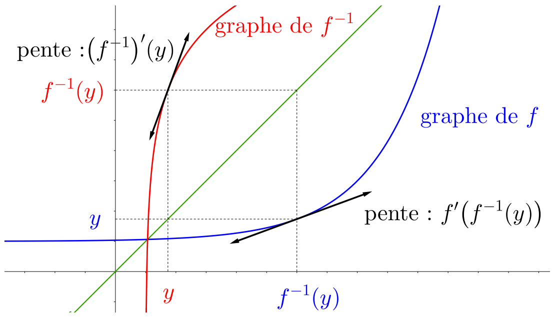
2.4 Dérivée d'une réciproque.

Théorème 36 (Dérivée d'une réciproque)**.**

Soit une bijection $f: I \to J$, dérivable sur I.
Sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I. On a alors

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}} \qquad \text{i.e.} \qquad \forall y \in J \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Les nombres $f'\left(f^{-1}(y)\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'(y)$ sont les pentes respectivement d'une tangente à la courbe de f et d'une tangente à la courbe de f^{-1}. Symétriques par rapport à $y = x$, leurs pentes sont inverses l'une de l'autre.



Ceci n'est pas une preuve.

Exemple 37.

Appliquer le théorème pour retrouver le résultat connu sur la dérivée de ln.

2.5 Dérivées d'ordre supérieur.

Définition 38.

Soit $f: I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur I telle que $f': I \to \mathbb{K}$ est elle-même dérivable sur I.
On appelle **dérivée seconde de** f et on note f'' la fonction dérivée de f'.

Définition 39.

Soit $f: I \to \mathbb{K}$. On peut définir par récurrence une dérivée de f à l'ordre n, qui sera notée $f^{(n)}$.

- On convient que $f^{(0)} = f$.
- Soit n un entier naturel. Si la dérivée à l'ordre n, $f^{(n)}$ est bien définie sur I et est elle-même dérivable sur I, alors la dérivée à l'ordre $n+1$ est définie par $\boxed{f^{(n+1)} = (f^{(n)})'}$.

Exemple 40.

Dérivées successives de $x \mapsto x^p$ (pour $p \in \mathbb{N}$) et de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Résultats importants du cours d'analyse.

Les théorèmes présentés dans cette section étaient connus en Terminale, et seront démontrés plus tard dans l'année dans un cours d'analyse où la notion de limite aura été définie rigoureusement.

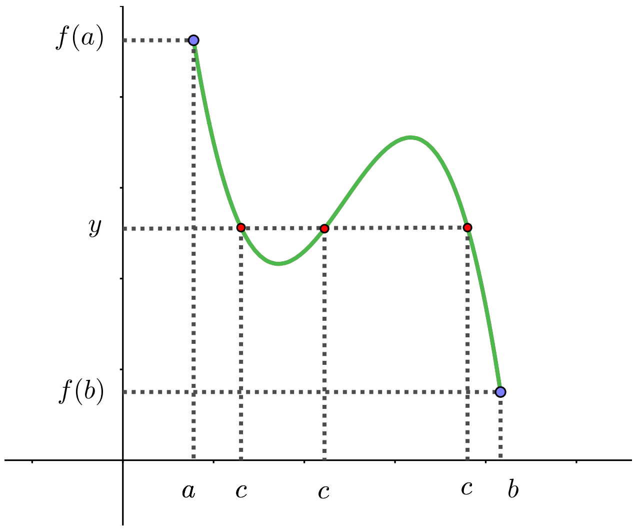
3.1 Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 41 (des valeurs intermédiaires)**.**

Soient deux réels $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a, b] \quad y = f(c).$$

Autrement dit, toute *valeur intermédiaire* entre $f(a)$ et $f(b)$ possède (au moins) un antécédent par f. Comme on le voit dans l'exemple ci-dessous, il n'y a pas forcément unicité de l'antécédent.



Le TVI pourra donc être utilisé pour prouver l'existence d'une solution à une équation. Ceci est illustré par le corollaire suivant, qui revient à prouver l'existence d'une solution à une équation de forme $f(x) = 0$.

Corollaire 42 (Changement de signe d'une fonction continue)**.**

Si une fonction continue sur un intervalle y change de signe, alors elle s'annule sur cet intervalle.

Voici maintenant un corollaire où l'hypothèse de stricte monotonie est ajoutée. Il pourra être utilisé pour prouver l'existence <u>et</u> l'unicité d'une solution à une équation.

Corollaire 43 (TVI strictement monotone)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists! c \in [a, b] \quad y = f(c).$$

Exemple 44.

Soient a et b deux nombres réels. On considère l'équation

$$x^3 + ax + b = 0.$$

1. Démontrer que l'équation possède une solution et ce quelles que soient les valeurs de a et b.
2. Démontrer l'unicité de la solution dans le cas où a est positif.

Théorème 45 (Théorème de la bijection continue)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est <u>strictement monotone</u> et <u>continue</u> sur I, alors elle réalise une bijection de I dans $f(I)$.

Précisons que la notation $f(I)$ désigne l'ensemble de toutes les images par f des éléments de I :

$$f(I) = \{f(x), x \in I\} = \{y \in J \mid \exists x \in I : y = f(x)\}.$$

De surcroît,

- L'ensemble $f(I)$ est un intervalle.
- Sur cet intervalle, f^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que f.
- Sur cet intervalle, la réciproque f^{-1} est continue.

Remarques.

1. À ce stade de l'année, on retiendra surtout la première partie du théorème (l'encadré), qui permet de justifier qu'une fonction donnée est une bijection de *machin* dans *bidule*.
2. On se permet d'insister à nouveau sur l'importance de *machin* et *bidule* ! Dire que « f est une bijection », sans préciser les ensembles de départ et d'arrivée, cela n'a pas de sens.

Dans la pratique, l'intervalle $f(I)$ est déterminé à partir de la forme de I et des limites aux bornes de f :

$f(I)$ dans les huit cas :

I	$[a,b]$	$]a,b]$	$[a,b[$	$]a,b[$
$f \nearrow$	$[f(a), f(b)]$	$]\lim_a f, f(b)]$	$[f(a), \lim_b f[$	$]\lim_a f, \lim_b f[$
$f \searrow$	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_a f[$	$]\lim_b f, f(a)]$	$]\lim_b f, \lim_a f[$

Exemple 46.

1. Justifier que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Expliciter sa réciproque, puis calculer la dérivée de cette réciproque.
3. Retrouver le dernier résultat en appliquant le théorème de dérivation d'une réciproque.

Nous venons de définir la fonction réciproque de sh, parfois notée argsh (ce n'est pas une fonction usuelle à proprement parler).

3.2 Variations des fonctions dérivables.

Théorème 47 (Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables)**.**

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Proposition 48 (Caract. des fonctions strict. monotones parmi les fonctions dérivables)**.**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I.
La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive (ou nulle) sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ inclus dans I avec $a < b$.

Corollaire 49 (Dans la pratique)**.**

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- Si f' est strictement positive sur I, alors f y est strictement croissante. Réciproque fausse.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f y est strictement décroissante. Réciproque fausse.

L'implication demeure vraie si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I.

Exemple 50.

Donner un exemple de fonction...

1. dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée s'annule.
2. dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et dont la dérivée est négative sans que la fonction soit décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Méthode (Conseils pour l'étude d'une fonction)**.**

- Déterminer son ensemble de définition.
- Détecter une éventuelle parité/imparité/périodicité et réduire en conséquence le domaine d'étude.
- Pour l'étude des variations, on ne se rue pas sur la dérivation si la fonction est une somme ou une composée de fonctions croissantes, par exemple !
- Dans le cas où on dérive, on justifie sur quel ensemble et pourquoi on peut le faire, soigneusement.
- Calcul de la dérivée. Puisque c'est son signe qui nous intéressera, on cherche à la **factoriser** le plus possible !
- Étude du signe de la dérivée : il suffira la plupart du temps de résoudre l'**inéquation** $f'(x) \geq 0$.
- Tableau de signe pour la dérivée, de variations pour la fonction.
- Calcul des limites aux bords. Si on détecte une incohérence, il est encore temps de se relire !
- Esquisser un graphe résumant l'étude. Ne pas hésiter à y souligner des valeurs, ou des tangentes notables.

Exercices

Vocabulaire sur les fonctions

$\boxed{\textbf{4.1}}$ **[♦◇◇]** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2 périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.

$\boxed{\textbf{4.2}}$ **[♦♦♦]** Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x.$$

Étude de fonctions.

$\boxed{\textbf{4.3}}$ **[♦◇◇]** [S'entraîner tout seul à dériver.]

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée (réponses ci-dessous).

$$A : x \mapsto x^\pi, \quad B : x \mapsto \pi^x, \quad C : x \mapsto \cos(5x), \quad D : x \mapsto \operatorname{th}(\operatorname{ch}(x)),$$

$$E : x \mapsto \ln(1+x^3), \quad F : x \mapsto \cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right), \quad G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}, \quad H : x \mapsto \sin|x+1|,$$

Réponses pour le premier exercice.

- La fonction A est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cours : fonction usuelle).
  On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $A'(x) = \pi x^{\pi-1}$.
- Par définition : $B : x \mapsto e^{x\ln(\pi)}$. Cette fonction est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$
  et $\forall x \in \mathbb{R}$ $B'(x) = \ln(\pi)e^{x\ln(\pi)} = \ln(\pi)\pi^x$.
- C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $C'(x) = -5\sin(5x)$.
- D est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $D'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{ch}(x))}$.
- E est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, c'est-à-dire sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$.
  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $E'(x) = \frac{3x^2}{1+x^3}$.
- F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$ $F'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}}$.
- On a $G : x \mapsto (3x-1)^{-1/2}$. Sur $]\frac{1}{3},+\infty[$, $G'(x) = -\frac{3}{2}(3x-1)^{-3/2}$.
- Sur $]-1,+\infty[$, $H(x) = \sin(x+1)$ et $H'(x) = \cos(x+1)$.
  Sur $]-\infty,-1[$, $H(x) = \sin(-x-1)$ et $H'(x) = -\cos(-x-1)$.

$\boxed{\textbf{4.4}}$ **[♦◇◇]** Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x\ln(x)}.$$

$\boxed{\textbf{4.5}}$ **[♦♦◇]**

1. Démontrer que
$$\forall x \in]-1,+\infty[\quad \frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x.$$
2. À l'aide du théorème des gendarmes, calculer $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
3. Retrouver ce résultat en faisant apparaître un taux d'accroissement.

$\boxed{4.6}$ **[♦♦◇]** Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

$\boxed{4.7}$ **[♦♦◇]** Faire une étude complète de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$.

$\boxed{4.8}$ **[♦♦◇]** Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in]0,1[\quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

$\boxed{4.9}$ **[♦♦◇]**

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ sur $[0,+\infty[$.
2. Prouver que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

$\boxed{4.10}$ **[♦♦◇]** Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Étudier ses variations et donner le tableau correspondant.

$\boxed{4.11}$ **[♦♦◇]** Notons a le nombre $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

1. Montrer que $a^3 = 6a + 40$.
2. En déduire la valeur de a.

Bijections.

$\boxed{4.12}$ **[♦◇◇]** Considérons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right) \end{array} \right.$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de f. Peut-on écrire en conclusion que $f^{-1} = f$?

$\boxed{4.13}$ **[♦♦♦]**

1. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque, qu'on notera argth.
2. De deux façons différentes, montrer que argth est dérivable sur son intervalle de définition et calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right) = x + \ln\sqrt{2}$.
