Exercice.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.
$D_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^\perp$.

Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Quelle est sa distance à $D_n(\mathbb{R})$? (*question ajoutée*)

Problème. Matrices orthogonales et décomposition QR.

On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si $A^\top A = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ peut être confondu avec $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et il est muni du produit scalaire canonique, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On rappelle que si X et Y sont dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, Y\rangle = X^\top Y.$$

On notera aussi $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Partie I. Faits sur le groupe orthogonal.

1. Établir que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ *porte le nom de groupe orthogonal.*
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $(C_1, \ldots, C_n)$ la famille de ses colonnes.
   Démontrer l'équivalence
   $$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \iff (C_1, \ldots, C_n) \text{ est une b.o.n. de } \mathbb{R}^n.$$
3. Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Démontrer que
   $$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n \quad \text{et} \quad \left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leq n$$
   Indication : pour la deuxième inégalité, on pourra écrire la somme comme le produit scalaire de deux vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé.
   (a) Démontrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$
   Pourquoi dit-on que f est une *isométrie* ?
   (b) Démontrer que f préserve l'orthogonalité, c'est-à-dire :
   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

Partie II. Décomposition QR : exemple introductif.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
On note c_1, c_2, c_3 les colonnes de P, considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

5. Justifier que la famille (c_1, c_2, c_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$ pour construire $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$.
7. Soit Q la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$. Justifier que $Q \in O_3(\mathbb{R})$.
8. Déterminer la matrice de passage R de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.
   On constate que R est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
9. Justifier que $P = QR$.

Partie III. Sur l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

On redémontre, avec les outils de l'algèbre linéaire, quelques résultats standard sur l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n, noté ici $T_n(\mathbb{R})$.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $(e_1, \ldots, e_n)$.

10. Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$ et t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.
Prouver que $T \in T_n(\mathbb{R})$ si et seulement si
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i) \text{ est stable par } t.$$

11. En utilisant la caractérisation donnée dans la question précédente, redémontrer que le produit de deux matrices de $T_n(\mathbb{R})$ est dans $T_n(\mathbb{R})$.
Vérifier que les coefficients diagonaux d'un produit de triangulaires supérieures sont obtenus comme produits des coefficients diagonaux des deux matrices.

12. Soit T une matrice triangulaire inversible. Justifier que
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} T_n(\mathbb{R}) & \to & T_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & TX \end{array} \right.$$
est un isomorphisme, et en déduire que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure.

Partie IV. Décomposition QR : le cas général.

13. Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. En s'inspirant de la démarche mise en oeuvre en partie II, montrer qu'il existe une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $P = QR$.

14. Soit $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.
Expliquer l'intérêt de la décomposition $P = QR$ avec Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs pour résoudre le système linéaire $PX = B$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les deux questions qui suivent permettent de démontrer l'unicité de la décomposition QR.

15. Soit M une matrice à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Montrer que $M = I_n$.
Indication : On a $M^{-1} = M^\top$...

16. On considère quatre matrices Q_1, Q_2, R_1, R_2 de $M_n(\mathbb{R})$ telles que Q_1 et Q_2 sont orthogonales et R_1 et R_2 triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. Montrer que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.