Problème A. Sur la notion de fonction génératrice.

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. La formule du transfert appliquée avec $f : x \mapsto t^x$ (définie sur $\mathbb{N}$) amène
$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)t^k,$$

(b) Les variables X et Y ont même loi si et seulement si
$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = P(Y = k).$$
Les nombres ci-dessus sont les coefficients des polynômes G_X et G_Y. Or, deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs suites de coefficients sont égales. On a donc bien que X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

2. On donne juste les réponses.

(a) $X \sim \mathcal{B}(p)$. $G_X(t) = (1 - p) + pt$.

(b) $U \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. $G_U(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t^k = \begin{cases} \frac{t}{n(1-t)}(1 - t^n) & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$.

(c) $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. $G_Y(t) = (1-p+pt)^n$.

3. (a) On a, pour tout t réel,
$$G_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)t^k \quad \text{d'où} \quad G'_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)kt^{k-1}.$$
Évaluons en 1, on a
$$G'_X(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)k = E(X).$$

(b) Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$, on a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_Y(t) = (1 - p + pt)^{n-1}$. Dérivons :
$$G'_Y(t) = np(1 - p + pt)^{n-1}.$$
Ainsi, en évaluant en 1,
$$E(Y) = G'_Y(1) = np.$$

4. (a) Soit t un réel. On a par définition,
$$G_{X+Y}(t) = E\left(t^{X+Y}\right) = E\left(t^X t^Y\right).$$
D'après le cours, puisque X et Y sont indépendantes, les variables t^X et t^Y le sont aussi. On a donc
$$G_{X+Y}(t) = E\left(t^X t^Y\right) = E\left(t^X\right) E\left(t^Y\right) = G_X(t)G_Y(t).$$

(b) Ici, X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, de sorte que, pour tout t réel,
$$G_X(t) = G_Y(t) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} t^k.$$
D'après la question a), puisque X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$; on développe :
$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= \left(\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} t^k\right)^2 \\ &= \frac{1}{36}\left(t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 4t^5 + 5t^6 + 6t^7 + 5t^8 + 4t^9 + 3t^{10} + 2t^{11} + t^{12}.\right) \end{aligned}$$
Comme on l'a compris dès le début de ce problème, le coefficient devant t^k vaut $P(X + Y = k)$, ce qui nous permet de donner la loi de la somme.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X+Y=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(c) Calculons la fonction génératrice de $X + Y$, où X et Y sont les deux variables de l'énoncé. Comme elles sont indépendantes, la question précédente s'applique et on peut écrire le produit $G_X G_Y$. Rappelons qu'on a calculé la fonction génératrice d'une variable de loi binomiale en question 1 (c). On a, pour $t \in \mathbb{R}$
$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = (1-p + pt)^m(1-p + pt)^n = (1-p + pt)^{m+n}.$$
On obtient la fonction génératrice d'une variable de loi $\mathcal{B}(m+n, p)$. Or, d'après la question (a), deux variables aléatoires ayant même fonction génératrice ont la même loi. Ceci prouve que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p)$.

Exercice .

1. C'est fait dans le cours.

2. (a) On a

$$S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \{aE_{1,1} + bS + dE_{2,2} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).$$

Le calcul amène

$$\langle E_{1,1}, E_{2,2} \rangle = \langle E_{1,1}, S \rangle = \langle E_{2,2}, S \rangle = 0$$

La famille est bien orthogonale, et elle est composée de vecteurs non nuls : elle est libre.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } F \text{ et elle est orthogonale.}}$$

(b) On calcule :

$$\|E_{1,1}\| = 1, \quad \|E_{2,2}\| = 1, \quad \|S\| = \sqrt{2}.$$

$\mathcal{F}$ n'est donc pas orthonormée... mais la famille $\left(E_{1,1}, E_{2,2}, \frac{1}{\sqrt{2}}S\right)$ l'est.

3. On utilise la base orthonormée obtenue par renormalisation de $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} p_F(M) &= \langle M, E_{1,1} \rangle E_{1,1} + \langle M, E_{2,2} \rangle E_{2,2} + \langle M, \tfrac{1}{\sqrt{2}}S \rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}}S \\ &= \langle M, E_{1,1} \rangle E_{1,1} + \langle M, E_{2,2} \rangle E_{2,2} + \frac{\langle M, S \rangle}{2} S \\ &= E_{1,1} + 3E_{2,2} + \frac{2+4}{2} S \end{aligned}$$

On obtient $\boxed{p_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}$.

4. D'après le cours, $d(M, F) = \|M - p_F(M)\|$. Or, on a $M - p_F(M) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ceci donne

$$\boxed{d(M, F) = \sqrt{2}}$$