

Relations Binaires
Corrigé

DARVOUX Théo

Décembre 2023

Exercices.

Exercice 16.1 2

Exercice 16.1 [◆◆◆]

Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{R} par :

$$x \mathcal{R} y \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .
2. Préciser le cardinal de la classe d'équivalence d'un réel x .
1. Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien que $xe^x = xe^x$.
- Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$, on a bien $ye^x = xe^y$.
- Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Montrons que $xe^z = ze^x$.
- D'après la première égalité, $y = xe^{y-x}$.
- On remplace y dans la seconde : $xe^{y-x+z} = ze^y$.
- On divise par e^y : $xe^{z-x} = z$. On multiplie par e^x : $xe^z = ze^x$.
- On a bien $x \mathcal{R} z$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
- On a $x \mathcal{R} y \iff \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y}$.
- On pose $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$. La classe d'équivalence de x est alors $\{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}$.
- On a que f est dérivable et $f' : x \mapsto \frac{1-x}{e^x}$. Alors :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

Alors, pour $x \in]-\infty, 0]$, $|[x]| = 1$, pour $x = 1$, $|[x]| = 1$ et sinon, $|[x]| = 2$.

□