Chapitre 7

Récursivité et Induction

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Récurrence sur $\mathbb{N}$

Proposition 1: Récurrence.

Soit $P(n)$ un prédicat sur $n \in \mathbb{N}$.

$$(P(0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in \mathbb{N},\ P(n).$$

Preuve :

Supposons que $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ est non vide.
Alors E est minoré et non vide, il a un minimum m non nul tel que $P(m)$ est faux.
Ainsi, $P(m-1)$ est vrai car $m-1 < m$ et m est le minimum de E, or $P(m-1) \implies P(m)$.
On en déduit que $P(m)$ est vrai, ce qui est absurde, donc $E = \varnothing$.

Remarques: Ce principe repose sur les propriétés de $\mathbb{N}$, qui possède un ordre total, a un élément plus petit 0 et est le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N} \implies n+1 \in \mathbb{N}$.

2 Ensembles ordonnés.

2.1 Définitions.

Définition 2: Prédécesseurs.

Soit $E \neq \varnothing$ et $\leq$ une relation d'ordre sur E. Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$.
On dit que x est un **prédécesseur** de y si ils sont comparables et que $x \leq y$.
C'est un **prédécesseur immédiat** de y si $\forall z > x,\ z \geq y$.
On dit que x est **minimal** si $\forall y \in E,\ y \geq x$.

Définition 3: Ordre total.

La relation d'ordre est totale si $\forall x, y \in E,\ x \leq y$ ou $y \leq x$.

Un ensemble muni d'un ordre total a au plus un élément minimal m.
La donnée d'un ordre sur un ensemble l'induit sur chacun de ses sous-ensembles.

Proposition 4: Ensemble bien fondé. ★

Soit E un ensemble ordonné par la loi $\leq$. Il y a équivalence entre :

1. Tout sous-ensemble **non-vide** de E admet un élément minimal.
2. Toute suite infinie décroissante de E est stationnaire.

Preuve :

$\boxed{\implies}$ Supposons que tout sous-ensemble non-vide de E admet un élément minimal.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie décroissante de E.
Soit $F = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$.
Alors $\exists k \in \mathbb{N} \mid u_k = \min(F)$, or (u_n) est décroissante donc $\forall n \geq k,\ u_n = u_k$.
On a bien montré que cette suite est stationnaire.

$\boxed{\impliedby}$ Supposons que toute suite infinie décroissante de E est stationnaire.
Soit $F \subset E \mid F \neq \varnothing$.
On définit (u_n) telle que $u_0 \in F$ et u_{n+1} soit le prédécesseur immédiat de u_n par $\leq$ s'il existe, sinon u_n.
Par construction, (u_n) est infinie et décroissante donc stationnaire : $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k,\ u_n = u_k$.
On en déduit que u_k n'a pas de prédécesseur par $\leq$, c'est le minimum de F.
On a bien montré l'équivalence.

Définition 5

Soit une famille $(E_i, \leq_i)_{i\in I}$ d'ensembles ordonnés.
L'ordre produit sur $\prod_{i\in I} E_i$ est donné par:

$$(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I} \iff \forall i \in I,\ x_i \leq_i y_i.$$

Cet ordre n'est pas total.

Proposition 6: Ordre sur les produits d'ensembles.

Un ordre produit sur une famille finie de N ensembles tous munis d'un ordre bien fondé est bien fondé.

Preuve :

On prend une suite infinie décroissante (u_n) dans le produit cartésien. Notons p_i sa $i^{\text{ème}}$ composante.
On définit k_i avec $1 \leq i \leq N$ tel qu'il soit le rang à partir duquel la suite $(p_i(u_n))$ est stationnaire.
Alors (u_n) est stationnaire à partir du rang k_N, donc l'ordre est bien fondé.

Corrolaire 7: Ordre lexicographique.

Soit E un ensemble ordonné par $\leq$.
L'ordre lexicographique sur E^n est :

$$(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} < (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \implies \exists N \in [\![1,n]\!] \mid \forall i < N,\ x_i = y_i \wedge x_N < y_N.$$

Si $\leq$ est total, alors l'ordre lexicographique l'est aussi.
Si l'ordre de E est bien fondé, alors l'ordre lexicographique sur E^n l'est aussi.

2.2 Ensembles inductifs.

Définition 8: Ensemble défini inductivement. ★

Soit E un ensemble non vide. Une définition de $X \subseteq E$ consiste à se donner :
- ⊚ Un ensemble $B \subseteq E$ non vide d'assertions.
- ⊚ Un ensemble R de règles : $\forall r_i \in R,\ r_i : E^{n_i} \to E$ avec n_i l'arité de r_i.

Théorème 9: Point fixe. ★

Il existe un plus petit sous-ensemble X de E tel que :
- (B) $B \subset X$: les assertions sont dans X.
- (I) $\forall r_i \in R,\ \forall (x_1, ..., x_{n_i}) \in X^{n_i}$ on a $r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in X$ avec n_i l'arité de r_i : X est stable par les règles.

Preuve :

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties de E vérifiant (B) et (I).
On considère X l'intersection de tous les éléments de $\mathscr{F}$:

$$X = \bigcap_{Y\in\mathscr{F}} Y.$$

Puisque $\forall Y \in \mathscr{F},\ B \subset Y$, on en déduit que $B \subset X$. On a donc vérifié (B).
Soit $r_i \in R$ et $(x_1, ..., x_{n_i}) \in X^{n_i}$.
Remarquons que $\forall Y \in \mathscr{F},\ x_1, ..., x_{n_i} \in Y$, or les Y sont stables par les règles d'où $\forall Y \in \mathscr{F},\ r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in Y$.
Puisque X est leur intersection, $r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in X$ et X vérifie alors (I).
C'est donc le plus petit ensemble vérifiant (B) et (I) par construction.

3 Preuve par induction.

3.1 Théorème de l'induction.

Théorème 10: Induction structurelle. ★

Soit $X \subseteq E$ défini inductivement (cf question précédente) et $\mathcal{P}$ un prédicat sur E.
Si on a que :
- (B) $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in B$.
- (I) $\mathcal{P}$ est héréditaire : $\forall r_i \in R,\ \forall (x_1, ..., x_{n_i}) \in E^{n_i},\ \mathcal{P}(x_1), ..., \mathcal{P}(x_{n_i}) \implies \mathcal{P}(r_i(x_1, ..., x_{n_i}))$.

Alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$.

Preuve :

On suppose (B) et (I), montrons que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.
Soit $Y = \{x \in E \mid P(x)\}$. Alors $B \subset Y$ d'après (B) et Y est stable par R d'après (I).
On a alors $X \subset Y$ donc $\forall x \in X,\ \mathcal{P}(x)$ est vrai.

Exemple 11

Pour un arbre binaire strict A, on note $\mathscr{N}(A)$ son nombre de noeuds, $\mathscr{F}(A)$ son nombre de feuilles.
On a alors $\mathscr{N}(A) = 2\mathscr{F}(A) - 1$.

Solution :

On définit inductivement l'ensemble $\mathscr{A}$ des arbres binaires stricts par :

- Assertions : $\{0\}$ l'arbre restreint à sa racine.
- Règles : $\{R_0 : (g, d) \mapsto \text{Noeud}(g, d)\}$, l'arbre obtenu en donnant un ancêtre commun à $g, d \in \mathscr{A}$.

La propriété est immédiatement vraie sur l'arbre réduit à sa racine.
On suppose que la propriété est vraie pour $g, d \in \mathscr{A}$.
Ainsi, $\mathscr{N}(R_0(g, d)) = 1 + \mathscr{N}(g) + \mathscr{N}(d) = 1 + 2\mathscr{F}(g) - 1 + 2\mathscr{F}(d) - 1 = 2\mathscr{F}(R_0(g, d)) - 1$.
Donc la propriété est stable par les règles d'inférence.
Par théorème d'induction structurelle, elle est vraie pour tout arbre binaire strict.

Corrolaire 12: Induction bien fondée.

Soit E muni d'un ordre bien-fondé et $\mathcal{P}$ un prédicat sur E. Si :

- $\mathcal{P}$ est vraie sur tout élément minimal de E.
- $\forall x \in E,\ (\forall y < x,\ \mathcal{P}(y)) \Longrightarrow \mathcal{P}(x)$.

Alors $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $x \in E$.

Preuve :

- Les assertions sont les minimaux.
- Les règles sont une famille de fonction permettant de passer au successeur immédiat.

3.2 Correction des récursives.

Méthode : Correction des récursives.

L'ensemble des valeurs des paramètres des fonctions récursives peut être défini par induction :

- Assertions : cas de base.
- Règles : lien entre les paramètres de l'appel récursif et ceux de l'appel courant.

On utilise alors le théorème d'induction pour prouver la correction.