Problème. Algèbre linéaire et suites récurrentes.

Dans tout ce problème, a désigne un réel différent de 1.
On se propose d'étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n), \qquad \text{où } P \text{ est un polynôme.}$$

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

0) Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Partie I Cas où P est constant.

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \exists b \in \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} = au_n + b\right\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = au_n + b$.
   Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$, pour $u \in E_a^{(0)}$.
2. <u>Cas $a = 0$</u>. Déterminer $E_0^{(0)}$. *On mettra en évidence qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. Soit x la suite constante égale à 1 et y la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ y_n = a^n$.
   Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera b_x et b_y.
5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$
   (b) Le couple (λ, μ) étant celui défini à la question précédente, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda x_n + \mu y_n.$$
   (c) Que peut-on en conclure sur (x, y) ?
6. Prouver que $E_a^{(0)}$ est de dimension finie et en donner une base et la dimension.

Partie II Cas où P est un polynôme quelconque.

On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

On pose $E_a^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)\right\}$.

On conserve la notation y pour désigner la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ y_n = a^n$.

1. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$
   Montrer l'unicité de P.
   On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.
2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Justifier $\theta : u \mapsto P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
4. Justifier que $\operatorname{Ker}\theta$ est une droite vectorielle engendrée par y.
5. Justifier que θ est une application surjective. Donner la dimension de $\operatorname{Im}\theta$.
6. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on fixe $v^{(k)}$ un antécédent de X^k par θ dans $E_a^{(p)}$.
   (a) Démontrer que la famille $(v^{(0)}, \dots, v^{(p)}, y)$ engendre $E_a^{(p)}$.
   Pour $u \in E_a^{(p)}$, on pourra commencer par appliquer θ.
   (b) Montrer qu'il s'agit de surcroît d'une famille libre.
   (c) Justifier que $E_a^{(p)}$ est de dimension finie et préciser sa dimension.
7. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $x_n^{(k)} = n^k$.
   Démontrer que $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.
8. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = -2$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7.$$