Problème.

On définit l'application

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$$

On rappelle que pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel E

$$u^0 = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u^{n+1} = u \circ u^n.$$

Les parties **II** à **IV** sont indépendantes.

Partie I - Préliminaires

1. Justifier que D est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg P$. On suppose que $n \geq 0$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \left(P, P', \ldots, P^{(n)}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Conclure que $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II - Sous-espaces stables par D

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par D, c'est-à-dire :

$$\forall P \in F \quad D(P) \in F.$$

3. *si les degrés des polynômes de F sont bornés*
   On suppose que $F \neq \{0\}$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

   $$F \subset \mathbb{R}_N[X].$$

   (a) Justifier que l'on peut définir un entier naturel n par

   $$n = \max \{\deg P \mid P \in F,\ P \neq 0\}.$$

   On se donne $P \in F$ tel que $\deg(P) = n$.
   Justifier que $\mathcal{B}_P$ est une famille de vecteurs de F.
   *La famille $\mathcal{B}_P$ a été définie à la question **2**.*

   (b) Montrer que

   $$F = \mathbb{R}_n[X].$$

   On pourra considérer le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}_p$.

4. *si les degrés des polynômes de F ne sont pas bornés*
   On suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $P \in F$ tel que $\deg P > N$.
   Montrer que $\mathbb{R}_N[X] \subset F$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Que vaut F ?

5. *conclusion*
   Quels sont tous les sous-espaces vectoriels stables par D ?

Partie III - Une condition suffisante pour que D^m admette une racine k^e

On se donne deux entiers naturels non nuls m et k tels que k divise m.

6. Montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}[X]$ tel que $g^k = D^m$.

Partie IV - Cette condition suffisante est nécessaire

On se donne deux entiers naturels non nuls m et k.
On suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$g^k = D^m.$$

7. Montrer que $\mathrm{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

8. Montrer que g est surjective.

9. Pour $i \in [\![0, k]\!]$, justifier que $\mathrm{Ker}(g^i)$ est de dimension finie.
   On pourra comparer Ker(g^i) et Ker(g^k).

10. Soit $i \in [\![1, k]\!]$. On définit l'application ϕ_i par

    $$\phi_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(g^i) & \to & \mathrm{Ker}(g^{i-1}) \\ P & \mapsto & g(P). \end{array} \right.$$

    (a) Justifier que ϕ_i est bien définie et que ϕ_i est une application linéaire.
    (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\phi_i = \mathrm{Ker} g$.
    (c) Montrer que ϕ_i est surjective.
    (d) Déduire de ce qui précède une relation entre $\dim \mathrm{Ker}(g^i)$, $\dim \mathrm{Ker}(g^{i-1})$ et $\dim \mathrm{Ker}(g)$.

11. Montrer que pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $\dim \mathrm{Ker}(g^i) = i \dim \mathrm{Ker}(g)$.
    Conclure que k divise m.

Exercice 1. Un exercice sur les développements limités

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{e^t - 1} \end{cases}$$

1. (a) Démontrer qu'on a pour f le développement limité suivant au voisinage de 0 :

$$f(t) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}t + o(t).$$

   (b) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. Que vaut alors $f(0)$? Justifier que ce prolongement est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On note alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = f^{(n)}(0)$. (Les b_n sont les *nombres de Bernoulli.*)

2. (a) Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) + \frac{1}{2}t$ est paire.

   (b) Pour $k \geq 1$, montrer que $b_{2k+1} = 0$.

3. (a) En remarquant que $t = f(t)(e^t - 1)$, montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0.$$

   (b) Calculer b_k pour $k \in [\![0, 3]\!]$.

Exercice 2. (*)

1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et V un sous-espace de E. On note $n = \dim E$, $p = \dim F$ et $q = \dim V$. On définit

$$\mathscr{L}_V(E, F) = \{u \in \mathscr{L}(E, F) \mid V \subset \mathrm{Ker}(u)\}.$$

   (a) Démontrer que $\mathscr{L}_V(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$.

   (b) À l'aide de $\Phi : u \mapsto u_{|V}$, démontrer que $\dim \mathscr{L}_V(E, F) = p(n - q)$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On définit

$$G_1 = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ f = 0\}$$
$$G_2 = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ u = 0\}$$
$$G_3 = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ u \circ f = 0\}$$

   Démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$ et exprimer leur dimension à l'aide de n et de $\mathrm{rg}(f)$.