Petits Systèmes Linéaires
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

C'est pas possible d'écrire les $L_1 \leftrightarrow L_3$ sous les $\iff$ (de manière esthétique) en LaTeX, sadface

---

Exercices.

Exercice 9.1 [♦◊◊] [Un système de Cramer bête et méchant]

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 10 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
& (x, y, z) \text{ est solution} \\
\iff & \begin{cases} 3x + y - 2z = 10 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 10 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - 3z = -1 \\ 4y - 8z = 4 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - 3z = -1 \\ 4z = 8 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'unique solution de système dans $\mathbb{R}^3$ est donc $(3, 5, 2)$.

□

Exercice 9.2 [♦◊◊]

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & (x, y, z) \text{ est solution} \\ \iff & \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -4y + 4z = -4 \\ -8y + 8z = -8 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y - z = 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -x \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions est alors

$$S = \{(x, 1 - x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 1, 0) + x(1, -1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

□

Exercice 9.3 [♦♦♢]

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Résoudre :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&(x,y,z) \text{ est solution} \\
\iff &\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ (b-a)y + (b^2-a^2)z = b^3 - a^3 \\ (c-a)y + (c^2-a^2)z = c^3 - a^3 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ (b-a)y + (b-a)(b+a)z = (b-a)(a^2+ab+b^2) \\ (c-a)y + (c-a)(c+a)z = (c-a)(a^2+ac+c^2) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ y + (b+a)z = a^2+ab+b^2 \\ y + (c+a)z = a^2+ac+b^2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ y + (b+a)z = a^2+ab+b^2 \\ z = a+b+c \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ y = -bc-ab-ac \\ z = a+b+c \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x = abc \\ y = -(ab+bc+ca) \\ z = a+b+c \end{cases}
\end{aligned}$$

L'unique solution est donc $(abc, -(ab+bc+ca), a+b+c)$.

□