

Suites, La Pratique
Corrigé

DARVOUX Théo

Novembre 2023

Exercices.

Avant de parler de convergence.	2
Exercice 13.1	2
Exercice 13.2	2
Exercice 13.3	2
Exercice 13.4	3
Exercice 13.5	3
Exercice 13.6	4
Exercice 13.7	4
Encadrement.	4
Exercice 13.8	4
Exercice 13.9	4
Exercice 13.10	5
Monotonie.	5
Exercice 13.11	5
Exercice 13.12	5
Exercice 13.13	6
Exercice 13.14	6
Exercice 13.15	7
Exercice 13.16	7
Modes de définition particulier d’une suite	8
Exercice 13.17	8

Exercice 13.1 [◆◆◆]

Une suite croissante est une fonction croissante sur \mathbb{N} .

Démontrer que le titre de l'exercice dit vrai, c'est-à-dire, pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équivalence entre

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} \geq u_n$.
2. $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \ n \leq p \implies u_n \leq u_p$.

Supposons 2, montrons 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $n \leq n + 1$. D'après 2, $u_n \leq u_{n+1}$. ez

Supposons 1, montrons 2.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$. On sait que $u_{n+1} \geq u_n$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, $u_{n+3} \geq u_{n+2}$, etc...

Par récurrence triviale et par transitivité, pour tout entier $q \geq n$, $u_q \geq u_n$.

En particulier, $u_p \geq u_n$

□

Exercice 13.2 [◆◆◆]

Soit a un réel supérieur à 1 et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \frac{a^n}{n!}$.

Démontrer que l'ensemble des termes de la suite possède un maximum, qu'on exprimera en fonction de a .
 (u_n) est strictement positive sur \mathbb{N} .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On peut donc écrire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$.

Ainsi, (u_n) est croissante ($a \geq n+1$) puis décroissante ($a \leq n+1$), ce qui implique qu'un maximum existe.
 Ce maximum est atteint lorsque $a = n+1$ c'est à dire quand $n = \lfloor a \rfloor$.

Ainsi, le maximum de la suite u est : $\frac{a^{\lfloor a \rfloor}}{\lfloor a \rfloor!}$

□

Exercice 13.3 [◆◆◆]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1}.$$

Prouver que la suite (u_n) est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$. Donc :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2 + 1} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2 + 1} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \\ &\leq \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Majorer en valeur absolue c'est borner

□

Exercice 13.4 [◆◆◆]

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha(1 - \alpha) \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) \end{cases}$

1. Exprimer le terme général de la suite en fonction de α et n .

2. Donner $\lim u_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose l'équation au point fixe : $x = (1 - \alpha)x + \alpha(1 - \alpha)$.

Sa solution est : $x = 1 - \alpha$.

On a : $u_{n+1} - (1 - \alpha) = (1 - \alpha)u_n + \alpha(1 - \alpha) - (1 - \alpha)$.

Ainsi, $u_{n+1} + \alpha - 1 = (1 - \alpha)(u_n + \alpha - 1)$.

On pose $v_n := u_n + \alpha - 1$. Par définition, v est géométrique, de raison $1 - \alpha$.

Son terme général est : $v_n = v_0(1 - \alpha)^n$.

Or $v_0 = u_0 + \alpha - 1 = \alpha(1 - \alpha) + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(1 - \alpha)$.

On en déduit que $v_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1}$.

Finalement, $u_n = (\alpha - 1)(1 - \alpha)^{n+1} - \alpha + 1$.

□

Exercice 13.5 [◆◆◆]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Donner la forme du terme général d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 2 \cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

2. Supposons dans cette question que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Donner sous forme factorisée le terme général de l'unique suite (u_n) satisfaisant la relation ci-dessus et telle que $u_0 = u_1 = 1$.

Polynôme caractéristique : $r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1$. $\Delta = -4 \sin^2(\theta)$. $r_1 = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et $r_2 = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$.

Lorsque $\theta \in \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda n \cos^n(\theta) + \mu \cos^n(\theta)$.

Lorsque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$: $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$.

On a $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = 1$ donc $\mu = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta) + \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(n\theta)$

Comment tu factorises ça wtf

□

Exercice 13.6 [◆◆◆]

Soit (u_n) , définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = 3u_n + 2^n \end{cases}$.

1. Prouver qu'il existe une suite (a_n) géométrique de raison 2 qui satisfait la relation de récurrence.

2. Donner le terme général de (u_n) .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit (a_n) une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 2^n$$

On cherche (a_n) telle que $a_{n+1} = 3a_n + 2^n = 3a_0 2^n + 2^n = 2^n(3a_0 + 1)$.

Posons $a_0 = -1$. On a $a_{n+1} = 2^n(-2) = -2^{n+1} = a_0 2^{n+1}$.

Ainsi, la suite géométrique (a_n) de raison 2 et de premier terme -1 satisfait la relation de récurrence.

2. On a $u_{n+1} - 2a_n = 3u_n + 2^n - 2a_n \iff u_{n+1} - a_{n+1} = 3(u_n - a_n)$.

On pose $v_n := u_n - a_n$. Alors $v_0 = u_0 - a_0 = 2$ et $v_n = 2 \cdot 3^n$.

On en déduit que $u_n = v_n + a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n = 2(3^n - 2^{n-1})$

On a $u_{n+1} = 2(3^{n+1} - 2^n)$

□

Exercice 13.7 [◆◆◇]

Étudier la suite (u_n) , définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 > 0; u_1 > 0 \\ \forall n \geq 0 \ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} &\iff \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) \\ &\iff \ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)) \end{aligned}$$

On pose $v_n := \ln(u_n)$.

On obtient : $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$.

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 !

Polynome caractéristique : $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$. $\Delta = \frac{9}{4}$. $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, $v_n = \lambda + \frac{\mu(-1)^n}{2^n} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et v_n une telle suite.

Alors $v_0 = \lambda + \mu$ et $v_1 = \lambda - \frac{\mu}{2}$.

On a $v_0 + 2v_1 = 3\lambda = \ln(u_0u_1^2)$. Donc $\lambda = \ln(\sqrt[3]{u_0u_1^2})$.

On a $u_n = e^\lambda \cdot e^{\frac{\mu(-1)^n}{2^n}} \rightarrow e^\lambda$. Ainsi, $u_n \rightarrow \sqrt[3]{u_0u_1^2}$.

□

Exercice 13.8 [◆◆◇]

Soit $a > 1$. Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = (\lfloor a^n \rfloor)^{1/n}$.

Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On a :

$$a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n \iff (a^n - 1)^{\frac{1}{n}} < \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \leq a$$

On peut appliquer la fonction $x \mapsto \frac{1}{n}$: elle est croissante sur \mathbb{R}_+ et $a > 1$.

D'une part, $(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} = (a^n(1 - \frac{1}{a^n}))^{\frac{1}{n}} = a(1 - \frac{1}{a^n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow a$.

D'autre part, $a \rightarrow a$ (*big brain*)

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes : $\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \rightarrow a$.

□

Exercice 13.9 [◆◆◇]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n^2})$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1. On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$. f est dérivable comme somme et $f' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$. f décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \leq 0$. Ainsi, $\ln(1+x) \leq x$.

On pose $g : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$. g est dérivable comme somme, $g' : x \mapsto -\frac{x^2}{1+x}$. g décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Or $g(0) = 0$ donc $g(x) \leq 0$. Ainsi, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

2. Posons $v_n := \ln(u_n)$. Alors $v_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n^2})$.

Alors $\sum_{k=1}^n (\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}) \leq v_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} : \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$.

Par théorème des gendarmes, $v_n \rightarrow \frac{1}{2}$. Ainsi, $u_n \rightarrow \sqrt{e}$.

□

Exercice 13.10 [◆◆◆]

Étudier la convergence de la suite de terme général $\frac{1!+2!+\dots+n!}{n!}$.

Soit (u_n) une suite de terme général : $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On sait d'avance que $u_n \geq 1$, puisque $\sum_{k=1}^n k! \geq n!$.

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k! &= \frac{n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-2} k! \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \\ &\longrightarrow 1 \end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes (AQAB), $u_n \rightarrow 1$.

□

Exercice 13.11 [◆◆◆]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\arctan(x))^n dx$. Justifier que (I_n) est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $\arctan(x)^n \in [0, 1]$ donc $\arctan^{n+1}(x) \leq \arctan^n(x)$.

Alors :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\arctan^{n+1}(x) - \arctan^n(x)) dx \leq 0.$$

Ainsi, I_n est décroissante et minorée par 0 : I_n est convergente d'après le TLM.

□

Exercice 13.12 [◆◆◆]

Soit α un réel de $]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha^k)$.

1. Justifier brièvement que $\forall x \in \mathbb{R} \ 1 + x \leq e^x$.

2. Démontrer que (u_n) est une suite convergente, et que $\lim u_n \leq \exp(\frac{\alpha}{1-\alpha})$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, par convexité de l'exponentielle, elle est supérieure à toutes ses tangentes, en particulier $x + 1$.

2. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$, on a $\forall k \in \mathbb{N}, 1 + \alpha^k \leq e^{\alpha^k}$.

Ainsi :

$$\prod_{k=1}^n (1 + \alpha^k) \leq \prod_{k=1}^n e^{\alpha^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^n \alpha^k\right) = \exp\left(\frac{\alpha - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)$$

On a $u_n > 0$ donc on peut écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \alpha^{n+1} > 1$$

Donc (u_n) est croissante et majorée, ainsi elle converge vers un réel $l \leq \exp(\frac{\alpha}{1-\alpha})$

□

Exercice 13.13 [◆◆◆]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4n^2 + 6n + 2} > 0 \\ v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Alors (u_n) et (v_n) sont monotones de monotonies contraires.

On a :

$$u_n - v_n = -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Ainsi, (u_n) et (v_n) sont adjacentes : elles convergent vers la même limite. □

Exercice 13.14 [◆◆◆]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 > v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune. En examinant la suite $(u_n v_n)$, exprimer cette limite en fonction de u_0 et v_0 .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$. Montrons \mathcal{P}_n : « $v_n - u_n \leq 0$ ».

\mathcal{P}_0 est évident. On suppose \mathcal{P}_n pour un n fixé. Montrons \mathcal{P}_{n+1} .

On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - v_n^2}{2(u_n + v_n)} = -\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq 0$.

\mathcal{P}_{n+1} est vrai. Par récurrence, \mathcal{P}_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - \frac{v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} \geq 0$.

Ainsi, u est décroissante, v est croissante.

u est minorée par 0 : elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

Puisque $u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \cdot \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$, $(u_n v_n)$ est constante et $u_n v_n = u_0 v_0$.

On obtient que v_n converge aussi vers une limite $m \in \mathbb{R}$.

On a : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \longrightarrow \frac{l+m}{2}$.

Ainsi, $l = \frac{l+m}{2}$ donc $l = m$. Les deux suites convergent vers la même limite.

Puisque $u_n v_n = u_0 v_0$, $lm = u_0 v_0$ donc $l = m = \sqrt{u_0 v_0}$ □

Exercice 13.15 [◆◆◆]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

1. Pour chacune des deux suites u et v , faire un pronostic : convergente ou divergente ?

2. Justifier que pour tout entier k supérieur à 2, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En déduire que la suite (v_n) est majorée puis qu'elle converge vers une limite finie.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq 1/2$.

(b) Démontrer par l'absurde que (u_n) tend vers $+\infty$.

1. Conjecture : u diverge et v converge.

2. Soit $k \in \mathbb{N} \mid k \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $k^2 \geq k^2 - k \iff \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

On a :

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Et :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

v est croissante et majorée : elle converge vers une limite finie.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Grâce au TLM, on sait que u_n tend soit vers $+\infty$, soit vers un réel.

Supposons que u tende vers une limite réelle, notée l .

On a alors, en passant à la limite que : $u_{2n} - u_n = \frac{1}{2} \implies l - l = \frac{1}{2}$.

C'est absurde, donc $u_n \longrightarrow +\infty$.

□

Exercice 13.16 [◆◆◆]

Soit la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}$$

où a_n est la n ème décimale de π . Étudier la convergence de (u_n) .

On pose $v_n := \sqrt{9 + \sqrt{9 + \dots + \sqrt{9}}}$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{9 + v_n}$ et $v_0 = 3$

Soit \mathcal{P}_n la proposition : « $v_n \leq 9$ ». Montrons \mathcal{P}_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

\mathcal{P}_0 est immédiat. Supposons \mathcal{P}_n pour un n fixé. Montrons \mathcal{P}_{n+1} .

$$v_n \leq 9 \iff v_n + 9 \leq 18 \iff v_{n+1} \leq \sqrt{18} \leq 9.$$

Ainsi, v est majorée par 9.

On a $u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = \sqrt{3 + \sqrt{1}}$, $u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4}}}$...

Or $\sqrt{\cdot}$ est croissante et $3 \leq 3 + \sqrt{1} \leq 3 + \sqrt{1 + \sqrt{4}} \leq \dots$ car $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n \geq 0$.

Alors (u_n) est croissante et majorée par 9.

D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers $l \leq 9$.

□

Exercice 13.17 [◆◆◆]

Étudier la suite u définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2) \end{cases}$.

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{3}(4 - x^2)$. f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On a : $f' : x \mapsto -\frac{2}{3}x$ et :

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	-4	$\frac{4}{3}$	1	$-\infty$

\mathbb{R} est stable par f , (u_n) est bien définie.

Soit $l \in \mathbb{R}$. On a $f(l) = l \iff \frac{1}{3}(4 - l^2) = l \iff l^2 + 3l - 4 = 0$. $r_1 = 1, r_2 = -4$.

Les points fixes de f sont donc en -4 et 1 .

On remarque que $] - \infty, -4]$ est un intervalle stable par f sur lequel f est monotone.

Cas n°1 : $u_0 \in \{-4, 1\}$

Remarque : Lorsque $u_0 \in \{1, 4\}$, on a $u_1 \in \{-4, 1\}$: même raisonnement.

Ce sont les points fixes de f : (u_n) est convergente vers u_0 .

Cas n°2 : $u_0 \in] - \infty, -4[$.

Remarque : Lorsque $u_0 \in]4, +\infty[$, on a $u_1 \in] - \infty, -4[$: même raisonnement.

On a f croissante sur $] - \infty, -4]$, alors (u_n) est monotone sur cet intervalle.

De plus, $u_1 - u_0 = \frac{1}{3}(4 - u_0^2) - u_0 < 0$, alors (u_n) est décroissante.

Enfin, on a que u_0 est inférieur à tout point fixe de f : u ne peut pas converger, elle diverge vers $-\infty$

Cas n°3 : $u_0 \in] - 4, 4[$.

On a que $] - 4, 4[$ est un intervalle stable par f sur lequel f est croissante puis décroissante.

De plus, $\forall x \in] - 4, 1[$, $f(x) - x > 0$ et $\forall x \in]1, 4[$, $f(x) - x < 0$ et pour $x = 1$, $f(x) - x = 0$.

Ainsi, (u_n) est croissante sur $] - 4, 1]$ et décroissante sur $[1, 4[$.

Aussi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [2, 4[\Rightarrow u_{n+1} \in] - 4, 0]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]1, 2] \Rightarrow u_{n+1} \in [0, 1[$

Et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1] \Rightarrow u_{n+1} \in [1, \frac{4}{3}]$.

Par théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers 1 .



Exercice 13.18 [◆◆◆]

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 3$. Prouver que (x_n) converge et déterminer sa limite.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f_n : x \mapsto x^n + x$. f_n est dérivable et $f'_n : x \mapsto nx^{n-1} + 1$ on a :

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f_n	0	$+\infty$

On a que f_n est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, de plus f_n prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$. D'après le TVI, il existe une unique solution à l'équation $x_n^n + x_n = 3$. La suite (x_n) est donc bien définie. De plus, puisque $f_n(1) = 2 < f_n(x_n)$, on a que $x_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, il est évident que $x_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que (x_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$3 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} = x_{n+1}f_n(x_{n+1}) - x_{n+1}^2 + x_{n+1}$$

Ainsi, $f_n(x_{n+1}) = \frac{3+x_{n+1}^2-x_{n+1}}{x_{n+1}} = x_{n+1} - 1 + \frac{3}{x_{n+1}} < 3$ car $x_n \in [1, 3]$. Alors $f_n(x_{n+1}) < 3 = f_n(x_n)$. On a bien montré que (x_n) est décroissante. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1, d'après le TLM, elle converge vers une limite $l \geq 1$. Supposons que $l > 1$. Alors : $x_n^n = e^{n \ln(x_n)} \rightarrow +\infty$ car $x_n \rightarrow l$. Donc $x_n^n + x_n \rightarrow +\infty$, ce qui est absurde : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^n + x_n = 3 \rightarrow 3$. Ainsi, (x_n) converge vers 1.

□