

Khôlles d'informatique, Saison 2.

Mars $\xrightarrow{\text{programme de colle} \rightarrow \text{fin}}$ Avril

Résumé

Dans ce document \LaTeX , on donne des preuves complètes des questions de cours à connaître :)

Questions de cours :

- Ensemble bien fondé, définition et preuve.
- Ensembles construits inductivement.
- Théorème d'induction structurelle.
- Forme normale conjonctive.
- Forme normale négative.
- Formules de De Morgan avec tables de vérité (trivial).
- Définition de l'équivalence logique (\equiv) de deux formules.
- Définition d'une tautologie \top .

Questions de cours :

Ensemble bien fondé.

Soit E un ensemble ordonné par la loi \leq . Il y a équivalence entre :

1. Tout sous-ensemble **non-vide** de E admet un élément minimal.
2. Toute suite infinie décroissante de E est stationnaire.

Preuve.

$1 \implies 2$: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie décroissante de E .

Soit $F = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$.

Alors $\exists k \in \mathbb{N} \mid u_k = \min(F)$, or F est décroissante donc $\forall n \geq k, u_n = u_k$.

On a bien montré que cette suite est stationnaire.

$2 \implies 1$: Soit $F \subset E \mid F \neq \emptyset$.

On définit (u_n) telle que $u_0 \in F$ et u_{n+1} soit le prédécesseur de u_n par \leq s'il existe, sinon u_n .

Par construction, (u_n) est infinie et décroissante donc stationnaire : $\exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k, u_n = u_k$.

On en déduit que u_k n'a pas de prédécesseur par \leq , c'est le minimum de F .

On a bien montré l'équivalence.

Définition inductive d'un ensemble.

Soit E un ensemble non vide. Une définition de $X \subseteq E$ consiste à se donner :

- ⊙ Un ensemble $B \subseteq E$ non vide d'assertions.
- ⊙ Un ensemble R de règles : $\forall r_i \in R, r_i : E^{n_i} \rightarrow E$ avec n_i l'arité de r_i .

Théorème du point fixe (inclus dans la question de cours) :

Il existe un plus petit sous-ensemble X de E tel que :

- (B) $B \subset X$: les assertions sont dans X .
- (I) $\forall r_i \in R, \forall (x_1, \dots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$ on a $r_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in X$ avec n_i l'arité de r_i : X est stable par les règles.

Preuve.

Soit \mathcal{F} l'ensemble des parties de E vérifiant (B) et (I).

On considère X l'intersection de tous les éléments de \mathcal{F} :

$$X = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y.$$

Puisque $\forall Y \in \mathcal{F}, B \subset Y$, on en déduit que $B \subset X$. On a donc vérifié (B).

Soit $r_i \in R$ et $(x_1, \dots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$.

Remarquons que $\forall Y \in \mathcal{F}, x_1, \dots, x_{n_i} \in Y$, or les Y sont stables par les règles d'où $\forall Y \in \mathcal{F}, r_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in Y$.

Puisque X est leur intersection, $r_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in X$ et X vérifie alors (I).

C'est donc le plus petit ensemble vérifiant (B) et (I) par construction.

Théorème d'induction structurelle.

Soit $X \subseteq E$ défini inductivement (cf question précédente) et \mathcal{P} un prédicat sur E .

Si on a que :

- (B) $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in B$.
- (I) \mathcal{P} est héréditaire : $\forall r_i \in R, \forall (x_1, \dots, x_{n_i}) \in E^{n_i}, \mathcal{P}(x_1), \dots, \mathcal{P}(x_{n_i}) \implies \mathcal{P}(r_i(x_1, \dots, x_{n_i}))$.

Alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$.

Preuve.

On suppose (B) et (I), montrons que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

Soit $Y = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$. Alors $B \subset Y$ d'après (B) et Y est stable par R d'après (I).

On a alors $X \subset Y$ donc $\forall x \in X, \mathcal{P}(x)$ est vrai.

Équivalence logique.

Soient φ, ψ deux formules, $\varphi \equiv \psi \iff \varphi \models \psi$ et $\psi \models \varphi$.

C'est à dire que tout modèle de φ est modèle de ψ , et réciproquement.

Forme normale négative.

Définition.

La forme normale négative de φ est une formule équivalente à φ où les négations portent exclusivement sur les littéraux.

- $\text{nnF}(\varphi) = \varphi$ si φ est un littéral.
- $\text{nnF}(\neg\varphi) = \neg\varphi$ si φ est un littéral.
- $\text{nnF}(\neg\neg\varphi) = \varphi$ (Facile à oublier attention)
- $\text{nnF}(\varphi \wedge \psi) = \text{nnF}(\varphi) \wedge \text{nnF}(\psi)$. (Pareil pour la disjonction)
- $\text{nnF}(\neg(\varphi \wedge \psi)) = \text{nnF}(\neg\varphi) \vee \text{nnF}(\neg\psi)$. (Pareil pour la disjonction)

Preuve.

Proposition : $\text{nnF}(\varphi)$ est sous forme normale négative et $\varphi \equiv \text{nnF}(\varphi)$.

Cas de base : Si φ est une variable propositionnelle, $\text{nnF}(\varphi) = \varphi$ et $\text{nnF}(\neg\varphi) = \neg\varphi$, donc c'est vrai.

Hérédité : Soient φ et ψ deux formules telles que $\text{nnF}(\varphi) \equiv \varphi$ et $\text{nnF}(\neg\varphi) \equiv \neg\varphi$ et $\text{nnF}(\psi) \equiv \psi$ et $\text{nnF}(\neg\psi) \equiv \neg\psi$.

Soit v une valuation de φ et ψ .

On a $\text{nnF}(\varphi \wedge \psi) = \text{nnF}(\varphi) \wedge \text{nnF}(\psi)$ donc c'est bien sous forme normale négative par hypothèse.

De plus, $v \models \text{nnF}(\varphi \wedge \psi) \iff v \models \text{nnF}(\varphi) \wedge \text{nnF}(\psi) \iff v \models \varphi$ et $v \models \psi \iff v \models \varphi \wedge \psi$.

On a $\text{nnF}(\neg(\varphi \wedge \psi)) = \text{nnF}(\neg\varphi) \vee \text{nnF}(\neg\psi)$ donc c'est bien sous forme normale négative par hypothèse.

Et $v \models \text{nnF}(\neg(\varphi \wedge \psi)) \iff v \models \text{nnF}(\neg\varphi) \vee \text{nnF}(\neg\psi) \iff v \models \neg\varphi$ ou $v \models \neg\psi \iff v \models \neg\varphi \vee \neg\psi \iff v \models \neg(\varphi \wedge \psi)$.

Même raisonnement pour la disjonction.

Par théorème d'induction, c'est vrai pour toute formule φ .

☀ ☀ Fin du sujet ! ☀ ☀