Chapitre 6

Forme algébrique.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Le corps des nombres complexes.

On admet l'existence d'un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ ainsi que d'une addition et d'un produit:

$$+ : \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z, z') & \mapsto & z + z' \end{cases} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z, z') & \mapsto & z \cdot z' \end{cases}$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes**. La construction de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ n'est pas très difficile, mais elle est hors-programme. La liste des propriétés ci-dessous est donc admise.

- Les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Dans $\mathbb{C}$ il existe un nombre i tel que
$$i^2 = -1.$$
Ainsi, l'équation $x^2 = -1$ qui n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, en possède une dans $\mathbb{C}$.
- Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme $\boxed{a + ib}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Cette écriture est unique : on dit que $a + ib$ est la **forme algébrique** de z.
- Les lois $+$ et $\cdot$ sont commutatives et associatives.
- La loi $\cdot$ est distributive par rapport à $+$.
- Il existe un élément neutre pour $+$: 0 et un élément neutre pour $\cdot$: 1.

Méthode : Un premier calcul dans $\mathbb{C}$

$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

- L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sera noté $\mathbb{C}^*$. Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique nombre complexe ω tel que $\omega z = z\omega = 1$.
Ce nombre sera appelé **inverse** de z et noté z^{-1}. Comme dans $\mathbb{R}$, 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{C}$.
- Le quotient de deux nombres complexes est défini ainsi : si $(z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$,
$$\frac{z'}{z} = z'(z)^{-1}.$$
Les égalités suivantes sont vraies pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$:
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \quad \frac{z_1 z_2}{z_3} = z_1 \frac{z_2}{z_3}.$$
- Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
- Les nombres complexes n'ont pas de signe : écrire une égalité entre deux nombres complexes n'a **aucun sens**.
- Les identités démontrées dans le cours Sommes et Produits sont toujours vraies pour les nombres complexes.

Exemple 1

1. $\forall p \in \mathbb{Z} \quad i^{2p} = (-1)^p$ et $i^{2p+1} = (-1)^p i$. En particulier, $\boxed{\frac{1}{i} = -i}$.
2. Calcul de
$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4, \quad (1 + 2i)^2, \quad (1 + i)^3.$$

Solution :

$\boxed{2.}$ $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 = 1 - 3 + 5 + 2i - 4i = 3 - 2i$.
$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i, \quad$ et $\quad (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$.

Exemple 2: Calcul de l'inverse.

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Vérifier que
$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$
Le nombre $a - ib$ sera appelé plus loin le conjugué de $a + ib$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$ son module.

2. Calculer $\frac{1}{1+i}$ et $\frac{2-i}{1-3i}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.
$\boxed{2.}$ $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$ et $\frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$.

Proposition 3: Retour sur l'unicité de la forme algébrique.

Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. L'unicité de l'écriture de la forme algébrique donne

$$a + ib = a' + ib' \iff (a = a' \text{ et } b = b').$$

En particulier,

$$a + ib = 0 \iff (a = 0 \text{ et } b = 0).$$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec (a, b) tel que $z = a + ib$.
Le réel a est appelé **partie réelle** de z et noté $\mathrm{Re}(z)$.
Le réel b est appelé **partie imaginaire** de z et noté $\mathrm{Im}(z)$.

Proposition 4: Réel et imaginaires purs.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0.$$

La nullité de $\mathrm{Re}(z)$ caractérise quant à elle l'appartenance de z aux **imaginaires purs**, parfois noté $i\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$.
Supposons $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors $z = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$.
Supposons $z \in \mathbb{R}$, alors $z = z + i \times 0 = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$. Par unicité, $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Proposition 5

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ réel, on a

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z).$$
$$\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z).$$

Plus généralement, si $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(z_k).$$

Preuve :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $\exists a, b \in \mathbb{R} \mid z = a + ib$ et $\exists a', b' \in \mathbb{R} \mid z' = a' + ib'$.
On a $z + z' = (a + a') + i(b + b')$, et par unicité de la forme algébrique:
— $\mathrm{Re}(z + z') = a + a' = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = b + b' = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$, et par unicité de la forme algébrique:
— $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda a + \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda b = \lambda \mathrm{Im}(z)$.

« La partie réelle de la somme, c'est la somme des parties réelles ». Idem pour la partie imaginaire.

Corrolaire 6

Les applications partie rélle et partie imaginaire sont $\mathbb{R}$-linéaires, c'est à dire que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ réels, on a

$$\mathrm{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \mu \mathrm{Re}(z')$$
$$\mathrm{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \mu \mathrm{Im}(z')$$

Le nombre $\lambda z + \mu z'$ peut être désigné comme une **combinaison linéaire** de z et z' à coefficients réels.

2 Représentation géométrique.

On travaille dans cette partie avec un repère orthonormé du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 7

Soient a et b deux réels.

1. Si M est le point du plan de coordonnées (a, b), le nombre $a+ib$ est appelé l'**affixe** de M. Réciproquement, si $z = a + ib$, le point M de coordonnées (a, b) est l'unique point du plan d'affixe z, on pourra le noter $M(z)$.
2. Cette correspondance bijective $z \mapsto M(z)$ entre nombre complexes et points du plan permet d'identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$: on parle de **plan complexe**.
3. L'affixe d'un vecteur $\vec{u}(a, b)$ est le nombre complexe $a + ib$.

Proposition 8

Si A a pour affixe z_A et B pour affixe z_B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixe respectives z et z', et λ et μ deux réels, le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda z + \mu z'$.

3 Conjugué d'un nombre complexe.

Définition 9

On appelle **conjugué** d'un nombre complexe z, et on note $\overline{z}$ le nombre

$$\overline{z} := \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z).$$

Autrement dit,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \overline{a+ib} = a - ib.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, le point M' d'affixe $\overline{z}$, est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses, du point M d'affixe z.

Proposition 10

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z).$$

Ceci permet d'obtenir les caractérisations suivantes:

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \quad \text{et} \quad z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}.$$

Proposition 11: Conjugaison et opérations. ★

Pour tous nombres complexes z et z', on a

a) $\overline{\overline{z}} = z$ c) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.

b) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ d) si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Par conséquent, l'application $z \mapsto \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, c'est-à-dire que pour tous nombres $z, z' \in \mathbb{C}$ et tous réels λ, μ, on a

$$\overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda\overline{z} + \mu\overline{z'}.$$

« Le conjugué de la somme, c'est la somme des conjugués ». Marche avec le produit et le quotient.

4 Module d'un nombre complexe.

Définition 12

Pour tout nombre complexe z, on appelle **module** de z et on note $|z|$ le nombre réel positif

$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Exemple 13

$$|i| = 1 \qquad |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^3} = \sqrt{13}$$

Le moudle d'un nombre réel a vaut $\sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$.

$$\boxed{\text{pour } z, z' \in \mathbb{C},\ |z - z'| \text{ est la } \textbf{distance} \text{ entre } z \text{ et } z'.}$$

Exemple 14: Module, cercles et disques.

Représenter les points dont l'affixe z satisfait $|z - 1| = 1$ et $|z + 1| \leq 2$.

Proposition 15

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$,

a) $|z| = 0 \iff z = 0$ c) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

b) $|-z| = |z| = |\overline{z}|$. d) $\mathrm{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$.

Preuve :

$\boxed{\text{a)}}$ Supposons $|z| = 0$, alors $|z|^2 = 0$ donc $a^2 + b^2 = 0$ donc $a = b = 0$ donc $z = 0$.
Supposons $z = 0$, alors $a = b = 0$, donc $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

$\boxed{\text{b)}}$ $|-z| = |-a - ib| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$.

$\boxed{\text{c)}}$ $|z|^2 \geq a^2$ donc $|z| \geq |a|$ donc $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)|$, idem pour $\mathrm{Im}(z)$.

$\boxed{\text{d)}}$ Supposons $\mathrm{Re}(z) = |z|$, alors $\mathrm{Re}(z)| = |z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geq 0$ donc $\mathrm{Im}(z) = 0$ donc $z = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}_+$.
Supposons $z \in \mathbb{R}_+$, alors $\mathrm{Re}(z) = z$ et $|z| = z$ car $z \geq 0$, donc $\mathrm{Re}(z) = |z|$.

Proposition 16: Propriétés multiplicatives du module.

Pour tous nombres complexes z et z', on a

$$\text{a) } |z|^2 = z \cdot \overline{z} \quad \text{b) } |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|, \quad \text{c) si } z' \neq 0, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{d) si } z \neq 0, \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Preuve :

Notons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
$\boxed{\text{a)}}$ $z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.
$\boxed{\text{b)}}$ $|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$, tout est positif : $|zz'| = |z||z'|$.
$\boxed{\text{c)}}$ Supposons $z' \neq 0$: $|z'|\left|\frac{z}{z'}\right| = |z|$ donc $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
$\boxed{\text{d)}}$ $z\overline{z} = |z|^2$ donc $z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$ donc $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Proposition 17: Inégalité triangulaire. ★

Pour tous nombres complexes z, z', on a

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Cas d'égalité: les deux membres sont égaux ssi $z = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid z' = \lambda z$.

Preuve :

On compare les carrés.

$$\begin{aligned}
(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 &= |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 - (z + z')(\overline{z + z'}) \\
&= |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 - z\overline{z} - \overline{z}z' - z'\overline{z} - z'\overline{z'} \\
&= 2|z||z'| - (z\overline{z'} + \overline{z}z') \\
&= 2(|zz'| - \text{Re}(zz'))
\end{aligned}$$

Or on a vu que $\forall z \in \mathbb{C}, \ |\text{Re}(z)| \leq |z|$, le résultat est donc positif. Alors:

$$|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \iff |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Corrolaire 18

1. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z - z'| \leq |z| + |z'|$.
2. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Preuve :

$\boxed{1.}$ Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a $|z - z'| = |z + (-z')| \leq |z| + |-z'| = |z| + |z'|$.
$\boxed{2.}$ Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a $|z| = |z + z' - z'| \leq |z| + |z - z'|$ donc $|z| - |z'| \leq |z - z'|$.
Par symétrie, $|z'| - |z| \leq |z - z'| = |z - z'|$. Alors $\max(|z| - |z'|, |z'| - |z|) \leq |z - z'|$.
On en déduit que $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

5 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Solution :

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = a + ib$. On a :

$$\begin{aligned}
& 4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0 \\
\iff & 4(a + ib)^2 + 8(a^2 + b^2) - 3 = 0 \\
\iff & 4a^2 + 8aib - 4b^2 + 8a^2 + 8b^2 - 3 = 0 \\
\iff & (12a^2 + 4b^2 - 3) + i(8ab) = 0 \\
\iff & \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ 8ab = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\
\iff & 4b^2 - 3 = 0 \text{ ou } 12a^2 - 3 = 0 \\
\iff & b^2 = \frac{3}{4} \text{ ou } a^2 = \frac{1}{4} \\
\iff & b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } a = \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc :

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Exercice 2: ⧫◊◊

Soient a et b deux nombres complexes non nuls. Montrer que :

$$\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}.$$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| &= \left|\frac{a|b|^2 - b|a|^2}{|a|^2|b|^2}\right| = \frac{|ab\bar{b} - ba\bar{a}|}{||ab|^2|}\\ &= \frac{\left|ab(\bar{b} - \bar{a})\right|}{||ab|^2|} = \frac{|ab||\bar{a} - \bar{b}|}{|ab|^2}\\ &= \frac{|a-b|}{|ab|} = \frac{|a-b|}{|a||b|}\end{aligned}$$

Exercice 3: ⧫⧫◊

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, montrer que :

$$\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1.$$

Solution :

Supposons $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$. Montrons $|z| = 1$.
Soit $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1+z}{1-z} = ib \iff 1 + z = ib - zib \iff z(1+ib) = ib - 1 \iff z = \frac{ib-1}{1+ib}$$

Ainsi, $|z| = |\frac{ib-1}{1+ib}| = \frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{1+b^2}} = 1$.
Supposons $|z| = 1$, montrons $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. Par supposition, $a^2 + b^2 = 1$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+a+ib}{1-a-ib} = \frac{(1+a+ib)(1-a+ib)}{(1-a-ib)(1-a+ib)} = \frac{1+2ib-a^2-b^2}{1-2a+a^2+b^2}\\ &= \frac{2ib}{2-2a} = \frac{ib}{1-a} = i\frac{b}{1-a}\end{aligned}$$

Exercice 4: ⧫◊◊

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls de mêmes module. Démontrer que

$$\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\ldots z_n} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Solution :

Commençons par énoncer que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \frac{\overline{z_i}}{\overline{z_j}} = \frac{z_j}{z_i}.$$

En effet,

$$\frac{z_i}{z_j} \cdot \frac{\overline{z_i}}{\overline{z_j}} = \left|\frac{z_i}{z_j}\right|^2 = 1 \iff \frac{\overline{z_i}}{\overline{z_j}} = \frac{z_j}{z_i}.$$

Le conjugué de (1) est :

$$\frac{(\overline{z_1}+\overline{z_2})(\overline{z_2}+\overline{z_3})\ldots(\overline{z_{n-1}}+\overline{z_n})(\overline{z_n}+\overline{z_1})}{\overline{z_1}\overline{z_2}\ldots\overline{z_n}} = (1+\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}})(1+\frac{\overline{z_3}}{\overline{z_2}})\ldots(1+\frac{\overline{z_n}}{\overline{z_{n-1}}})(1+\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_n}})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{(\overline{z_1}+\overline{z_2})(\overline{z_2}+\overline{z_3})\ldots(\overline{z_{n-1}}+\overline{z_n})(\overline{z_n}+\overline{z_1})}{\overline{z_1}\overline{z_2}\ldots\overline{z_n}} &= (1+\frac{z_1}{z_2})\ldots(1+\frac{z_n}{z_1})\\ =\frac{z_1+z_2}{z_2}\cdots\frac{z_n+z_1}{z_1} &= \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\ldots z_n}\end{aligned}$$

Puisque (1) est égal à son conjugué, (1) $\in \mathbb{R}$.

Exercice 5: ♦♦◊

Soient a, b deux nombres complexes tels que $\overline{a}b \neq 1$ et $c = \frac{a-b}{1-\overline{a}b}$. Montrer que

$$(|c| = 1) \iff (|a| = 1 \text{ ou } |b| = 1).$$

Solution :

Supposons $|c| = 1$. Montrons que $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.
On a :

$$\begin{aligned}
&|c| = 1\\
\iff &|c|^2 = \frac{(a-b)(\overline{a}-\overline{b})}{(1-\overline{a}b)(1-a\overline{b})} = \frac{|a|^2 - a\overline{b} - b\overline{a} + |b|^2}{1 - a\overline{b} - \overline{a}b + |a|^2|b|^2} = 1\\
\iff &|a|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b + |b|^2 = 1 - a\overline{b} - \overline{a}b + |a|^2|b|^2\\
\iff &|a|^2 + |b|^2 - |a|^2|b|^2 = 1\\
\iff &|a|^2(1 - |b|^2) = 1 - |b|^2
\end{aligned}$$

Si on suppose $|b| \neq 1$, on obtient : $|c| = 1 \iff |a|^2 = \frac{1-|b|^2}{1-|b|^2} = 1$ donc $|a| = 1$.
Si on suppose $|a| \neq 1$, on obtient : $|c| = 1 \iff |b|^2 = \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2} = 1$ donc $|b| = 1$.
Supposons $|a| = 1$. On a :

$$|c| = \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \left|\frac{a-b}{\overline{a}a - \overline{a}b}\right| = \left|\frac{1}{\overline{a}}\right|\left|\frac{a-b}{a-b}\right| = |a| = 1$$

Supposons $|b| = 1$. On a :

$$|c| = \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \left|\frac{a-b}{\overline{b}b - \overline{a}b}\right| = \left|\frac{1}{b}\right|\left|\frac{a-b}{\overline{b}-\overline{a}}\right| = |b|\frac{|a-b|}{|a-b|} = |b| = 1$$

Exercice 6: ♦♦♦

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $R^2 + S^2$ où

$$R = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

Solution :

On a :

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} i^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} i^{2k} \cdot i = R + iS$$

Ainsi :

$$\begin{cases} R = \operatorname{Re}\left((1+i)^n\right) = 2^{\frac{n}{2}} \cos(\frac{n\pi}{4}) \\ S = \operatorname{Im}\left((1+i)^n\right) = 2^{\frac{n}{2}} \sin(\frac{n\pi}{4}) \end{cases}$$

Finalement, $R^2 + S^2 = 2^n(\cos^2(\frac{n\pi}{4}) + \sin^2(\frac{n\pi}{4})) = 2^n$.

Exercice 7: ♦♦♦

Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Montrer que $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

Solution :

Soient $(z, z') \in \mathbb{R}$. Les points A, B, C, D d'affixes $0, z, z+z', z'$ forment un parallélogramme.
Alors :

$$\begin{cases} AC^2 = |z+z'|^2 \\ BD^2 = |z-z'|^2 \\ AB^2 = CD^2 = |z|^2 \\ BC^2 = DA^2 = |z'|^2 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}
AC^2 + BD^2 &= |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')(\overline{z} + \overline{z'}) + (z-z')(\overline{z} - \overline{z'})\\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'}\\
&= |z|^2 + |z'|^2 + |z|^2 + |z'|^2\\
&= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2
\end{aligned}$$