Chapitre 12

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Ensemble des solutions d'une ED linéaire d'ordre 2.

Définition 1

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ deux constantes et $f : I \to \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (E)$$

On appelle **solution** de (E) sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ toute fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, deux fois dérivable, et telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$.

On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E_0).$$

Ci-dessous, S et S_0 désignent les ensembles de solutions de (E) et (E_0).

Proposition 2: Structure de S_0. ★

S_0 contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires.

Preuve :

- On a $0'' = 0' = 0$ donc $0'' + a0' + b0 = 0$ donc $0 \in S_0$.
- Soient $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + a(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(y_1'' + ay_1' + by_1) + \mu(y_2'' + ay_2' + by_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

Donc $(\lambda y_1 + \mu y_2) \in S_0$.

Proposition 3: Lien entre S et S_0.

Si S est non vide, alors, en considérant $z_p \in S$ une « solution particulière » de l'équation, on a

$$S = \{z_p + y, \quad y \in S_0\}.$$

Preuve :

Soit z deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z \in S &\iff z'' + az' + bz = f \iff z'' + az' + bz = z_p'' + az_p' + bz_p \\ &\iff (z - z_p)'' + a(z - z_p)' + b(z - z_p) = 0 \iff z - z_p \in S_0 \\ &\iff \exists y \in S_0 \mid z - z_p = y. \end{aligned}$$

2 Résolution de l'équation homogène.

Définition 4

On appelle **équation caractéristique** associée à (E_0) l'équation

$$x^2 + ax + b = 0.$$

où a et b sont les coefficients constants de (E_0).

Remarque. On rappelle qu'une telle équation a deux racines r_1 et r_2 avec $r_1 + r_2 = -a$. On a une racine double $r_1 = r_2$ si et seulement si elles valent toutes les deux $-\frac{a}{2}$.

Lemme 5: Des solutions de E_0

Soit l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$ associée à (E_0) et r une racine de cette équation.

- la fonction $u : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_0).
- Si r est une racine double, $v : x \mapsto xe^{rx}$ est solution de (E_0).

Preuve :

Le premier point est déjà connu : $u'' + au' + bu = r^2u + aru + bu = u(r^2 + ar + b) = 0$.
Supposons que r est racine double. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors:
— $v(x) = xe^{rx}$, $\quad v'(x) = e^{rx}(1 + rx)$, $\quad v''(x) = e^{rx}(2r + xr^2)$.
Donc : $v''(x) + av'(x) + b(x) = e^{rx}(2r + xr^2 + a(1 + rx) + bx) = e^{rx}(x(r^2 + ar + b) + 2r + a) = 0$.
En effet, r est solution de $x^2 + ax + b = 0$ et $2r = -a$ car racine double.

Théorème 6: Solutions complexes de l'équation homogène. ★

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et (E_0) l'équation $y'' + ay' + by = 0$.
Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$.
On note $S_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs complexes.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$ et

$$S_0^{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double r dans $\mathbb{C}$ et

$$S_0^{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{rx} + \mu xe^{rx} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Preuve :

Pour $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, notons $\Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2) = \{x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x} \mid (\lambda,_\mu) \in \mathbb{C}^2\}$.
$\boxed{\supset}$ Supposons $\Delta \neq 0$ et notons r_1, r_2 les racines de l'équation caractéristique.
D'après 5, les fonctions $y_1 : x \mapsto e^{r_1x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2x}$ sont solutions de (E_0).
D'après 2, les combinaisons linéaires $\lambda y_1 + \mu y_2$ sont solutions de (E_0) donc $S_0^{\mathbb{C}} \supset \Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2)$.
$\boxed{\subset}$ Soit $y \in S_0^{\mathbb{C}}$ solution de (E_0) à coefficients complexes. Soit r une solution complexe de l'EC.
Notons $z : x \mapsto e^{-rx}y(x)$ deux fois dérivable par produit. Notons $u : x \mapsto e^{rx}$. On a

$$y = uz, \qquad y' = u'z + uz', \qquad y'' = u''z + u'z' + uz''.$$

Alors

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E_0) &\iff y'' + ay' + by = 0 \iff (u''z + u'z' + u'z' + uz'') + (au'z + uz') + buz = 0 \\
&\iff uz'' + (2\underbrace{u'}_{=ru} + au)z' + (\underbrace{u'' + au' + bu}_{=0 \text{ car } u \in S_0^{\mathbb{C}}})z = 0 \iff uz'' + u(2r + a)z' = 0 \\
&\iff z'' + (2r + a)z' = 0 \iff z' \text{ est solution de } Y' + (2r + a)Y = 0.
\end{aligned}$$

On a supposé y solution de (E_0), alors en résolvant l'équation, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = \lambda e^{-(2r+a)x}$.
Supposons $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2. Mettons que $r = r_2$, alors $r_1 = -r - a$ et comme $r_1 \neq r_2$, on a $2r + a \neq 0$. Connaissant z', on connait z : il existe une constante μ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = -\frac{\lambda}{2r + a}e^{-(2r+a)x} + \mu.$$

d'où, en notant $\widetilde{\lambda} = \frac{-\lambda}{2r+a}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = e^{rx}z(x) = -\widetilde{\lambda}e^{(-2r-a+r)x} + \mu e^{rx} = \widetilde{\lambda}e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}$$

Donc $y \in \Gamma^{\mathbb{C}}(r_1, r_2)$.

Théorème 7: Solutions réelles de l'équation homogène. ★

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et (E_0) l'équation $y'' + ay' + by = 0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$. Notons $S_0^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs réelles.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et

$$S_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \leq^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $r \in \mathbb{R}$ et

$$S_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu t e^{rt} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'EC a deux racines complexes conjugées $r_1 = \gamma + i\omega$ et $r_2 = \gamma - i\omega$ où $(\gamma, \omega) \in \mathbb{R}^2$ et

$$S_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto e^{\gamma t}(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \{t \mapsto A e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Preuve :

Cas $\Delta < 0$. Soit $y \in S_0^{\mathbb{R}}$, alors $\underline{y \in S_0^{\mathbb{C}}}$ donc $\exists \lambda, \underline{\mu \in} \mathbb{C} \mid \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.
Puisque y est à valeurs réelles, $\overline{y(0)} = y(0)$ et $\overline{y'(0)} = y'(0)$. De plus, $\overline{r_2} = r_1$. Alors:

$$\begin{cases} (\lambda - \overline{\mu}) + (\mu - \overline{\lambda}) & = & 0 & (L_1) \\ r_1(\lambda - \overline{\mu}) + \overline{r_1}(\mu - \overline{\lambda}) & = & 0 & (L_2) \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1$ amène $\mu = \overline{\lambda}$. Alors:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 2e^{\gamma t}(\bar{l} e^{i\omega t} + \bar{l} e^{-i\omega t}) = e^{\gamma t} \cdot 2\mathrm{Re}(\lambda e^{i\omega t}).$$

Écrivons λ sous forme géométrique : $\lambda = re^{i\varphi}$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 2e^{\gamma t}\mathrm{Re}(e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = 2re^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi).$$

L'inclusion réciproque est plus simple.

Exemple 8

Pour chacune des équations ci-dessous, on écrit l'ensemble des solutions réelles :

$$1)\ y'' - 2y' - 3y = 0; \qquad 2)\ y'' - 6y' + 9y = 0; \qquad 3) y'' + y' + y = 0.$$

Solution :

$\boxed{1)}$ Racines évidentes : -1 et 3. Donc $S_0 = \{t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{3t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\boxed{2)}$ Racine double : 3. Donc $S_0 = \{t \mapsto \lambda e^{3t} + \mu t e^{3t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\boxed{3)}$ Deux racines conjuguées : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $S_0 = \{t \mapsto Ae^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$

Exemple : L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$: oscillateur harmonique non amorti.

Soit, pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$.
L'équation caractéristique est $x^2 + \omega^2 = 0$, qui a pour racines $i\omega$ et $-i\omega$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{S_0 = \{t \mapsto \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}}$

3 Équation générale : obtenir une solution particulière.

3.1 Trouver une solution à vue.

Lorsque le second membre f est une fonction constante, l'équation a une solution constante. Plus précisément, si $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $b \neq 0$:

$$\boxed{\text{L'équation } y'' + ay' + by = c \text{ a pour solution particulière la fonction constante } z_p : x \mapsto \tfrac{c}{b}.}$$

Plus généralement, lorsque b sera une fonction polynomiale de degré n, on pourra chercher une solution polynomiale de degré n.

3.2 Principe de superposition.

Proposition 9: Principe de superposition.

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Si

- y_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = f_1 \quad (E_1)$.
- y_2 est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = f_2 \quad (E_2)$.

Alors $y_1 + y_2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = f_1 + f_2$.

Preuve :

Soient y_1 et y_2 solutions de (E_1) et (E_2) respectivement. Elles sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $y_1 + y_2$ l'est aussi. On a:

$$(y_1 + y_2)'' + a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) = (y_1'' + ay_1' + by_1) + (y_2'' + ay_2' + by_2) = f_1 + f_2$$

3.3 Obtenir une solution pour des seconds membres particuliers.

Proposition 10

Soient $a, b, A, \alpha \in \mathbb{K}$. L'équation
$$y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x}$$
admet une solution particulière de la forme

- $x \mapsto Be^{\alpha x}$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique.
- $x \mapsto Bxe^{\alpha x}$ si α est racine simple de l'équation caractéristique.
- $x \mapsto Bx^2e^{\alpha x}$ si α est racine double de l'équation caractéristique.

où B est une constante à déterminer.

Preuve :

On cherche une solution particulière de la forme $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x}$ où z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à déterminer. Notons $u : x \mapsto e^{\alpha x}$. Elle est deux fois dérivable et $u' = \alpha u$, $u'' = \alpha^2 u$. La fonction y est deux fois dérivable comme produit.
$$y = zu, \qquad y' = (\alpha z + z')y, \qquad y'' = (\alpha^2 z + 2\alpha z' + z')u.$$
On a, u ne s'annulant pas :
$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\iff y'' + ay' + by = Au \\ &\iff (\alpha^2 z + 2\alpha z' + z'')\cancel{u} + a(\alpha z + z')\cancel{u} + bz\cancel{u} = A\cancel{u} \\ &\iff z'' + (2\alpha + a)z' + (\alpha^2 + a\alpha + b)z \underset{(*)}{=} A. \end{aligned}$$

• Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, il suffit de prendre z constante égale à $B := \frac{A}{\alpha^2+a\alpha+b}$ pour satisfaire $(*)$. Cela donne bien une solution particulière du type $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Be^{\alpha x}$.
• Si α est racine simple, on a $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a \neq 0$. On choisit donc z tel que $z'' + (2\alpha + a)z' = A$. On prend z' constante égale à $B := \frac{A}{2\alpha+a}$, donc $z : x \mapsto Bx$. On obtient bien $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Bxe^{\alpha x}$
• Si α est racine double, alors $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a = 0$. On choisit z tel que $z'' = A$. On le fait en prenant alors $z : x \mapsto \frac{A}{2}x^2$. On a bien une solution du type $y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = Bx^2e^{\alpha x}$.

Cas particulier important pour les applications : celui où le second membre est de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t)$ ou $t \mapsto A\sin(\omega t)$. Physiquement, il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique excité périodiquement. On va voir que l'on peut se ramener à une équation du type précédent.

Méthode

Soient $a, b, A \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (E) une équation du type
$$y'' + ay' + by = A\cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad y'' + ay' + by = A\sin(\omega t).$$
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(e^{i\omega t}) \quad \text{et} \quad \sin(\omega t) = \mathrm{Im}(e^{i\omega t}).$$
On sait trouver une solution particulière de l'équation auxiliaure complexe
$$y'' + ay' + by = Ae^{i\omega t} \quad (E_C)$$
Reste à sélectionner la partie réelle ou imaginaire pour obtenir une solution de (E).

4 Synthèse.

Méthode : Conseils pour la résolution des EDL2 à coefficients constants.

- Résoudre l'équation homogène (E_0) associée. Pour cela, commencer par poser l'équation caractéristique.
- Rechercher une solution particulière de (E) avec second membre. Le cours nous apprend à le faire lorsque ce dernier est de la forme $Ae^{\alpha x}$. Il va falloir discuter selon que α est racine ou pas de l'EC.
- Si le second membre est de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$, on se ramène à un second membre exponentiel en posant une équation auxiliaire complexe.
- Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de la solution particulière et des solutions de (E_0).
- Conditions initiales. La notion de problème de Cauchy n'a pas été définie pour les EDL2. On vérifiera dans la pratique que pour une équation (E) donnée, il existe une unique solution de (E) satisfaisant une condition initiale du type $(y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0')$.

5 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

Résoudre le problème de Cauchy ci-dessous :
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution :

Polynome caractéristique : $r^2 + 2r + 10$. $\Delta = -36$. $r_\pm = -1 \pm 3i$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto e^{-x}(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$
Solution particulière : $S_p : x \mapsto \frac{1}{2}$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \frac{1}{2} + e^{-x}(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
Conditions initiales. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x))$.
On a $y(0) = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{1}{6}$.
L'unique solution de ce problème de Cauchy est : $x \mapsto \frac{1}{2} + e^{-x}\left(\frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{1}{6}\sin(3x)\right)$

Exercice 2: ⧫◊◊

Résoudre :
$$y'' - y' - 2y = 2\mathrm{ch}(x)$$

Solution :

On réecrit d'abord cette équation comme : $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-x}$.
Polynome caractéristique : $r^2 - r - 2$. $\Delta = 9$. $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Équation auxiliaire 1 : $y'' - y' - 2y = e^x$. Solution particulière : $S_{p,1} : x \mapsto Be^x \mid B \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Be^x$.
On a $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = e^x \iff -2Be^x = e^x \iff B = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, $S_{p,1} : x \mapsto -\frac{1}{2}e^x$.
Équation auxiliaire 2 : $y'' - y' - 2y = e^{-x}$. Solution particulière : $S_{p,2} : x \mapsto Cxe^{-x} \mid C \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Cxe^{-x}$.
On a $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = e^{-x} \iff -3Ce^{-x} = e^{-x} \iff C = -\frac{1}{3}$.
Ainsi, $S_{p,2} : x \mapsto -\frac{1}{3}xe^{-x}$.
Par superposition, l'ensemble des solutions est :
$$\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}xe^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 3: ⧫◊◊

Résoudre :
$$y'' + 2y' + y = \cos(2t) \quad (E).$$

Solution :

Polynome caractéristique : $r^2 + 2r + 1$. $\Delta = 0$. $r = -1$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda xe^{-x} + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Équation auxiliaire : $y'' + 2y' + y = e^{2ix}$. Solution particulière : $S_{p,aux} : x \mapsto Be^{2ix}$ avec $B \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Be^{2ix}$.
On a : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{2ix} \iff Be^{2ix}(-3 + 4i) = e^{2ix} \iff B = \frac{1}{-3+4i} = \frac{-3-4i}{25}$.
Passage à la partie réelle : $\mathrm{Re}(y(x)) = \mathrm{Re}\left(-\frac{3+4i}{25}(\cos(2x) + i\sin(2x))\right) = -\frac{3}{25}\cos(2x) + \frac{4}{25}\sin(2x)$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda xe^{-x} + \mu e^{-x} - \frac{3}{25}\cos(2x) + \frac{4}{25}\sin(2x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 4: ⧫⧫◊ Résonance... ou pas.

1. Excitation à une pulsation quelconque. Résoudre $y'' + 4y = \cos t$
2. Excitation à la pulsation propre : résonance. Résoudre $y'' + 4y = \cos(2t)$

Solution :

$\boxed{1.}$ Polynome caractéristique : $r^2 + 4$. $\Delta = -16$. $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Équation auxiliaire : $y'' + 4y = e^{it}$. Solution particulière : $S_{p,aux} : x \mapsto Be^{ix}$ avec $B \in \mathbb{R}$.
Soit $x, B \in \mathbb{R}$, et $y : x \mapsto Be^{ix}$.
On a : $y''(x) + 4y(x) = e^{ix} \iff 3Be^{ix} = e^{ix} \iff B = \frac{1}{3}$.
Passage à la partie réelle : $\mathrm{Re}(y(x)) = \frac{1}{3}\cos(x)$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) + \frac{1}{3}\cos(x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

$\boxed{2.}$ L'ensemble des solutions de l'équation homogène est encore S_0.
Équation auxiliaire : $y'' + 4y + e^{2it}$. Solution particulière : $S_{p,aux} : x \mapsto Bxe^{2ix}$ avec $B \in \mathbb{R}$.
Soit $x, B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Bxe^{2ix}$.
On a : $y''(x) + 4y(x) = e^{2ix} \iff Be^{2ix}(4i - 4x) + 4Bxe^{2ix} = e^{2ix} \iff B = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$
Passage à la partie réelle : $\mathrm{Re}(y(x)) = \mathrm{Re}\left(-\frac{i}{4}x(\cos(2x) + i\sin(2x))\right) = \frac{1}{4}x\sin(2x)$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\cos(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 5: ⧫⧫◊

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle
$$2y'' + \alpha y' + \alpha y = 0.$$
On discutera selon les valeurs de α.

Solution :

On se ramène à l'équation différentielle : $y'' + \frac{\alpha}{2}y' + \frac{\alpha}{2}y = 0$.
Polynome caractéristique : $r^2 + \frac{\alpha}{2}r + \frac{\alpha}{2}$. $\Delta = \alpha(\frac{\alpha}{4} - 2)$
⊚ Cas $\alpha \in \{0, 8\}$.
  Alors $\Delta = 0$ et $r = -\frac{\alpha}{4}$.
  Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda xe^{-\frac{\alpha}{4}x} + \mu e^{-\frac{\alpha}{4}x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
⊚ Cas $\alpha \in]0, 8[$.
  Alors $\Delta < 0$ et $r_\pm = -\frac{\alpha}{4} \pm i\sqrt{-\Delta}$.
  Solution générale : $S = \{x \mapsto e^{-\frac{\alpha}{4}x}\left(\lambda\cos(\sqrt{-\Delta}x) + \mu\sin(\sqrt{-\Delta}x)\right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
⊚ Cas $\alpha \notin [0, 8]$.
  Alors $\Delta > 0$ et $r_1 = -\frac{\alpha}{4} + \sqrt{\Delta}$, $r_2 = -\frac{\alpha}{4} - \sqrt{\Delta}$.
  Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 6: ♦♦♢

Soit $a \in \mathbb{R}$. En discutant selon la valeur de a, résoudre

$$y'' - 2ay' + (1+a^2)y = \sin x.$$

Solution :

⊚ On suppose $a \neq 0$.
Polynome caractéristique : $r^2 - 2ar + (1+a^2)$. $\Delta = -4$. $r_1 = 1+i$, $r_2 = 1-i$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto e^x\left(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Équation auxiliaire : $y'' - 2ay' + (1+a^2)y = e^{ix}$. Solution particulière : $x \mapsto Be^{ix}$.
Soit $x, B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Be^{ix}$.
On a : $-Be^{ix} - 2aiBe^{ix} + (1+a^2)Be^{ix} = e^{ix} \iff B = \frac{1}{a^2-2ai} = \frac{a+2i}{a^3+4a}$.
Passage à la partie imaginaire : $\mathrm{Im}(y(x)) = \mathrm{Im}\left(\frac{a+2i}{a^3+4a}(\cos(x) + i\sin(x))\right) = \frac{a}{a^3+4a}\sin(x) + 2\cos(x)$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto e^x(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) + \frac{a}{a^3+4a}\sin(x) + 2\cos(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

⊚ On suppose $a = 0$. Polynome caractéristique : $r^2 + r$. $\Delta = -4$. $r_1 = i$ et $r_2 = -i$.
Solutions de l'équation homogène : $\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Équation auxiliaire : $y'' + y = e^{ix}$. Solution particulière : $x \mapsto Bxe^{ix}$.
Soit $x, B \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Bxe^{ix}$.
On a : $y''(x) + y(x) = e^{ix} \iff 2iBe^{ix} = e^{ix} \iff B = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$.
Passage à la partie imaginaire : $\mathrm{Im}(y(x)) = \mathrm{Im}(-\frac{ix}{2}(\cos(x) + i\sin(x))) = -\frac{x}{2}\cos(x)$
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7: ♦♦♢

On considère l'équation différentielle à coefficients *non constants* ci-dessous :

$$(E) \qquad t^2y'' + 4ty' + (2+t^2)y = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Soient y une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $z : t \mapsto t^2y(t)$.

1. Justifier que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que y est solution de l'équation si est seulement si z est solution d'une équation différentielle très simple que l'on précisera.
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Solution :

$\boxed{1.}$ Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Supposons z deux fois dérivable.
Alors $z'(t) = 2ty(t) + t^2y'(t)$ et $z''(t) = 2y(t) + 4ty'(t) + t^2y''(t)$.
Ainsi, y est deux fois dérivable.

Supposons y deux fois dérivable.
z est dérivable une fois comme produit de fonctions dérivable et une deuxième fois comme somme et produit de fonctions dérivables.

$\boxed{2.}$ Supposons y solution de (E), y est alors deux fois dérivable, z aussi. On a $t^2y'' + 4ty' + 2y + t^2y = 1$.
Par identification, $z'' + z = 1$ (E')

$\boxed{3.}$ Polynome caractéristique : $r^2 + 1$. $\Delta = -4$. $r_1 = i$ et $r_2 = -i$.
Solutions de l'équation homogène : $S_0 = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Solution particulière : $S_p : x \mapsto 1$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + 1 \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Ainsi, les solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont : $S_E = \{x \mapsto \frac{\lambda}{x^2}\cos(x) + \frac{\mu}{x^2}\sin(x) + \frac{1}{x^2} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 8: ♦♦♦

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(\pi - x).$$

Solution :

Analyse.
Supposons qu'il existe f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(\pi - x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Alors, $f''(x) = -f'(\pi - x) = -f(\pi - \pi + x) = -f(x)$.
Ainsi, $f''(x) + f(x) = 0$
Polynome caractéristique : $r^2 + 1$. $\Delta = -4$, $r_1 = i$ et $r_2 = -i$.
Solution générale : $S = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Synthèse.
Soit $x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ dérivable comme somme et produit.
On a : $y'(x) = -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$.
Et :

$$\begin{aligned} y'(x) = y(\pi - x) &\iff -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) = \lambda\cos(\pi - x) + \mu\sin(\pi - x) \\ &\iff -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) = -\lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \\ &\iff (\lambda + \mu)(\cos(x) - \sin(x)) = 0 \end{aligned}$$

Conditions initiales : pour $x = 0$.

$$(\lambda + \mu) = 0 \iff \lambda = -\mu$$

Ainsi, les solutions sont : $\{x \mapsto \lambda(\cos(x) - \sin(x)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.