Bibmaths - Théorème de Darboux

DARVOUX Théo

March 1, 2024

Un seul exercice parce que le nom est drôle : Énoncé.

[★★★★]

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et f une fonction dérivable sur I.
Montrons que f' vérifie le TVI.
1. Ce n'est pas trivial car la dérivée n'est pas toujours continue.
2. Soient $a, b \in I^2 \mid f'(a) < f'(b)$ et $z \in]f'(a), f'(b)[$
Soit $\varepsilon > 0$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a) \Rightarrow \exists \alpha_1 > 0, \forall h \in]0, \alpha_1], \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in [f'(a)-\varepsilon, f'(a)+\varepsilon]$$
$$\frac{f(b+h)-f(b)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(b) \Rightarrow \exists \alpha_2 > 0, \forall h \in]0, \alpha_1], \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \in [f'(b)-\varepsilon, f'(b)+\varepsilon]$$

On pose donc $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ et $\varepsilon = \min(z - f'(a), f'(b) - z)$ car $z \in]f'(a), f'(b)[$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq f'(a) + \varepsilon \leq z$$
$$\frac{f(b+h)-f(b)}{h} \geq f'(b) - \varepsilon \geq z$$

Alors :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq z \leq \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

3. Soit $h \in [0, \alpha]$ la fonction $T_a : x \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est continue sur I.
On a $T_a(a) \leq z \leq T_a(b)$ donc par TVI, $\exists y \in [a, b] \mid T_a(y) = z$ et $y + h \in I$.

4. f est continue sur $[y, y+h]$ et dérivable sur $]y, y+h[$.
D'après le TAF, $\exists x \in]y, y+h[\mid \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = z = f'(x)$.

5. $\forall a, b \in I, \forall z \in]f'(a), f'(b)|, \exists x \in I \mid z = f'(x) \iff z \in f(I)$.

6. Pour $x \in]0, 1], f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x} \cos(\frac{1}{x})$.

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right| = |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
On a $|f'(x)| \leq |2x - \frac{2}{x}| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ donc f' n'est pas continue en 0.