

Fonctions usuelles

Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

| | |
|--|---|
| Vocabulaire sur les fonctions. | 1 |
| Exercice 4.1 | 1 |
| Exercice 4.2 | 1 |

Exercice 4.1 [◆◆◆]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x - 2 \in \mathbb{R} \\ f(x - 2) = f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 3 \in \mathbb{R} \\ f(x + 3) = f(x) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x - 2 + 3 \in \mathbb{R} \\ f(x - 2 + 3) = f(x - 2) = f(x) \end{cases}$$

□

Exercice 4.2 [◆◆◆]

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et f une solution du problème.

On remarque que $f : x \mapsto x$ est solution du problème.

Supposons $f(x) > x$, on a : $f(f(x)) > f(x)$ par croissance de f . Or $f(f(x)) = x$ donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.

Supposons $f(x) < x$, on a : $f(f(x)) < f(x)$ par croissance de f . Or $f(f(x)) = x$ donc $x < f(x)$, ce qui est absurde.

Ainsi, la seule fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} solution est $f : x \mapsto x$.