Suites réelles : la théorie

0 Propriété de la borne supérieure.

Définition 1.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On appelle **borne supérieure** de A et on note $\sup A$, le plus petit des majorants de A, lorsque ce nombre existe.
- On appelle **borne inférieure** de A et on note $\inf A$, le plus grand des minorants de A, lorsque ce nombre existe.

Implicite dans cette définition : l'*unicité* de la borne supérieure. On peut la montrer comme on avait prouvé celle d'un maximum. Pour ce qui concerne l'*existence*, commençons par examiner un cas simple.

Proposition 2.

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un maximum M, alors elle a une borne supérieure, qui vaut M.

Le théorème ci-dessous, admis, est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure/inférieure)**.**

Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4 (Caractérisation de la borne supérieure.)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha \end{cases}$$

Interprétons l'assertion commençant par $\forall \varepsilon \ \exists x \in A : \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ dans ce qui précède : il est dit que l'on peut trouver un élément de A *aussi proche que l'on veut* de α.

Si on a compris pour la borne supérieure, on sait adapter pour la borne inférieure : pour A une partie non vide et minorée et α un réel,

$$\alpha = \inf A \iff \begin{cases} \alpha \text{ est un minorant de } A \\ \dots \end{cases}$$

Exemple 5.

Soit $A = [0, 1[$. Justifier l'existence de $\sup A$ puis la calculer.

Soit $B = \left\{ r \in \mathbb{Q} : r < \sqrt{2} \right\}$. Justifier l'existence de $\sup B$ puis la calculer.

Soit $C = \{1/n - 1/p, \ n, p \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\sup C$ et $\inf C$, après avoir justifié qu'elles existent.

Méthode (Majorer une borne supérieure/"Passage au sup")**.**

Soient M un réel et A une partie de $\mathbb{R}$ possédant une borne supérieure. Pour démontrer l'inégalité

$$\sup A \leq M,$$

il suffira de montrer que M est un majorant de A ($\sup A$ étant le *plus petit* des majorants de A).

Exemple 6 (Calculs de bornes supérieures)**.**

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Justifier que $\sup A \leq \sup B$.

Remarque : Pour montrer que deux bornes supérieures sont égales, on pourra utiliser l'équivalence

$$\sup A = \sup B \iff \sup A \leq \sup B \ \text{ et } \ \sup B \leq \sup A.$$

Exemple 7 (Homogénéité du sup)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la partie $\lambda A := \{\lambda x \mid x \in A\}$.
Montrer l'égalité

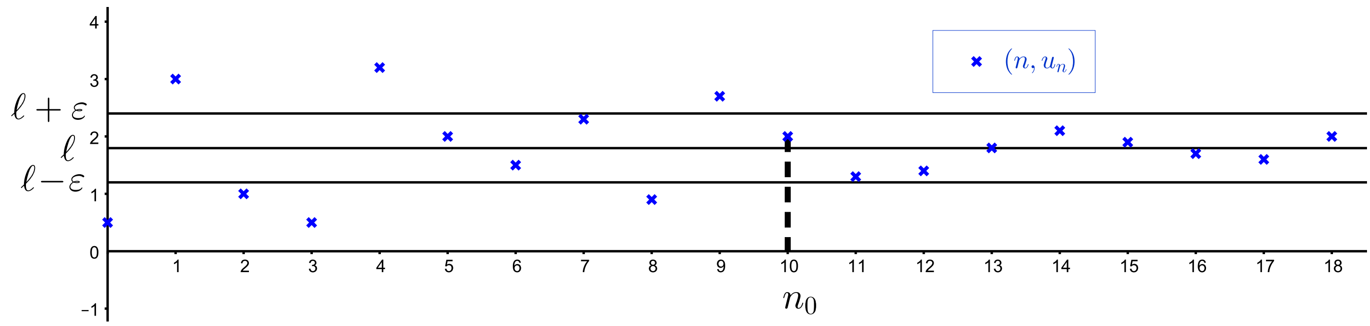
$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A).$$

1 Limite d'une suite.

Définition 8 (Convergence vers $\ell \in \mathbb{R}$)**.**

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) **converge** vers ℓ (ou qu'elle **tend** vers ℓ), et on note $u_n \to \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$



Cette définition est écrite sous cette forme par Cauchy en 1821. Elle avait été donnée par d'Alembert dans l'Encyclopédie (1767) : « *On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée si petite qu'on la puisse supposer...* »

Proposition 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On a

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longleftrightarrow \quad |u_n - \ell| \longrightarrow 0.$$

Méthode.

Prouver une convergence du type $u_n \to \ell$, c'est montrer que la **distance** $|u_n - \ell|$ peut être rendue « aussi petite que l'on veut ». On cherchera donc

- à majorer $|u_n - \ell|$ par un réel ε quelconque *à partir d'un certain rang* n_0 qui dépend de ε. C'est ce que nous ferons dans les preuves de ce cours mais dans les exercices, on dégainera rarement ε !
- à majorer $|u_n - \ell|$ par une suite convergeant notoirement vers 0. On peut alors conclure grâce au théorème d'encadrement.

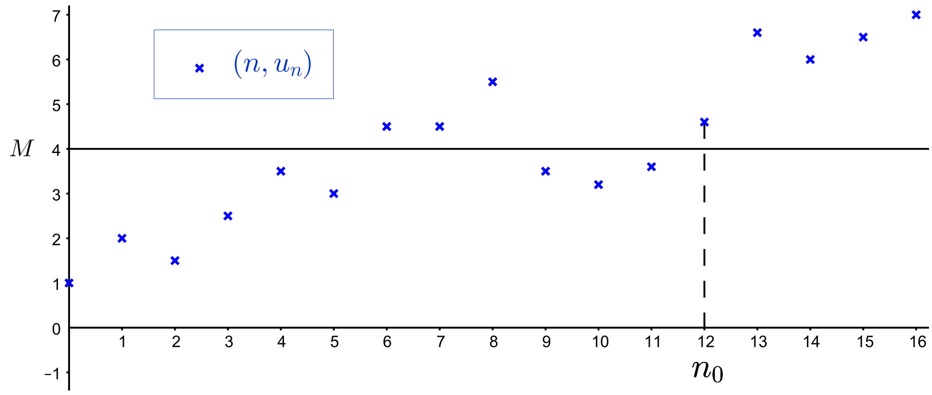
Exemple 10.

• Soit (u_n) une suite constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Démontrer en revenant à la définition que $u_n \to a$.
• Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{n+1}{n}$.
Démontrer en revenant à la définition que $u_n \to \ell$ où ℓ est un réel à deviner.

Définition 11 (Tendre vers $+\infty$).

Soit (u_n) une suite réelle. On dit qu'elle **tend vers** $+\infty$ et on note $u_n \to +\infty$ si

$$\forall M > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq M.$$



Exemple 12.

Pour $n \geq 2$, posons $u_n = \ln(\ln(n))$. En revenant à la définition, démontrer que $u_n \to +\infty$.

Proposition-Définition 13 (Tendre vers $-\infty$).

Soit (u_n) une suite réelle. On dit qu'elle **tend vers** $-\infty$ et on note $u_n \to -\infty$ si

$$\forall M < 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq M.$$

On a l'équivalence

$$u_n \to -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad -u_n \to +\infty.$$

Proposition-Définition 14 (Unicité de la limite).

Soit (u_n) une suite réelle et $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \to L$ et $u_n \to L'$, alors $L = L'$.
Le nombre L est alors appelé limite de la suite (u_n) et noté $\lim u_n$.

Définition 15.

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est **convergente** si elle converge vers une limite finie.
Si une suite n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Ainsi, on pourra dire d'une suite qui tend vers $+\infty$ qu'elle *diverge vers* $+\infty$.

Exemple 16.

On démontre (par l'absurde) que la suite de terme général $(-1)^n$ est divergente.

Proposition 17.

Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse, : la suite de terme général $(-1)^n$, bornée et divergente.

2 Limites et opérations : preuves des résultats.

On démontre ici une partie seulement de tous les résultats ayant donnés sous forme de tableaux de cas dans le cours Suites réelles : la pratique.

Proposition 18 (Somme de deux suites ayant une limite)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$$\text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to \ell', \qquad \text{alors } u_n + v_n \to \ell + \ell'$$

$$\text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to +\infty, \qquad \text{alors } u_n + v_n \to +\infty$$

Lemme 19.

Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Lemme 20.

Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang, en particulier $u_n > 0$ à.p.d.c.r.

Proposition 21 (Produit de deux suites ayant une limite)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$$\text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to \ell', \qquad \text{alors } u_n v_n \to \ell\ell'$$

Supposons $\ell > 0$ $\qquad$ $\text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to +\infty, \qquad \text{alors } u_n v_n \to +\infty$

Proposition 22 (Inverse, quotient de deux suites ayant une limite)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et ℓ, ℓ' deux nombres réels, avec $\ell' \neq 0$.

$$\text{Si } u_n \to 0+ \text{ alors } \frac{1}{u_n} \to +\infty. \qquad \text{Si } u_n \to \ell \text{ et } v_n \to \ell', \quad \text{alors } \frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$$

Proposition 23 (Lemme de Cesàro (hors-programme mais très classique))**.**

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n la moyenne arithmétique des n premiers termes de u : $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

$$\text{Si } u_n \to \ell \quad \text{alors } c_n \to \ell.$$

Quel contre exemple permet de voir que la réciproque de l'implication ci-dessus est fausse ?

3 Passer à la limite ?

Les propositions ci-dessous examinent la possibilité de *passer à la limite* dans une inégalité ou une égalité.

Proposition 24 (Passage à la limite d'une inégalité large)**.**

Soient u et v deux suites réelles et ℓ et ℓ' deux réels.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \; u_n \leq v_n \\ u_n \to \ell \;\text{ et }\; v_n \to \ell' \end{cases} \quad \text{alors } \ell \leq \ell'.$$

En particulier,
- si u est majorée par un réel M et admet une limite, alors $\lim u_n \leq M$.
- si u est minorée par un réel m et admet une limite, alors $\lim u_n \geq m$.

⚠ Les inégalités strictes ne sont **pas** conservées : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \frac{1}{n} > 0$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Exemple 25.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$

1. Que dire de la monotonie de u ?
2. Supposons que $u_0 \in [0,1]$. Montrer que (u_n) est convergente et que $\lim u_n = 0$.
3. Supposons que $u_0 < 0$. Montrer que $u_n \to -\infty$. Que dire si $u_0 > 1$?

Voici un résultat utilisé pour obtenir une équation sur la limite d'une suite convergente définie par une relation du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Proposition 26 (La limite comme point fixe)**.**

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f : X \to X$ et u une suite satisfaisant $u_0 \in X$ et $\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers une limite ℓ, que $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ, alors $\boxed{f(\ell) = \ell}$

Exemple 27.

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} = \mathrm{ch}(u_n)$. Démontrer que (u_n) diverge.

4 Existence d'une limite : preuves des théorèmes.

On se concentre ici sur les preuves de résultats qui ont été abondamment utilisés dans le cours **Suites réelles : la pratique**. On y renvoie le lecteur pour les illustrations, les exemples, les corollaires...

On rappelle qu'établir un encadrement ou exploiter une monotonie sont les deux stratégies principales face à un problème de convergence de suites.

Encadrement

Théorème 28 (d'encadrement, ou des gendarmes)**.**

Soient trois suites réelles (g_n), (u_n), (d_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \leq u_n \leq d_n$.
Si de surcroît, (g_n) et (d_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$(u_n) \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \lim u_n = \ell.$$

Proposition 29 (de minoration, de majoration)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$ et $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

Monotonie

Théorème 30 (de la limite monotone)**.**

Toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie.
Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Remarque. Le théorème de la limite monotone établit ainsi une dichotomie qui n'existe pas pour les suites quelconques : une suite croissante a toujours une limite, finie ou infinie selon que la suite est majorée ou pas.

On rappelle que deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** lorsqu'elles sont monotones, de monotonie contraire, et que leur différence tend vers 0.

Théorème 31 (Convergence des suites adjacentes)**.**

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite finie.

Plus précisément, si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes (u croissante et v décroissante), alors elles convergent vers une même limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq \ell \leq v_n$.

5 Suites extraites.

Définition 32.

Soit (u_n) une suite. Une **suite extraite** de (u_n) est une suite (v_n) dont le terme général est de la forme

$$v_n = u_{\varphi(n)},$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

Exemple. Soit (u_n) une suite réelle.

- Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).
- D'autres exemples : (u_{n+1}), (u_{n^2}), (u_{2^n})...

Lemme 33.

Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \geq n$.

Proposition 34.

Soit (u_n) une suite convergente.
Toute suite extraite de (u_n) converge vers la limite de (u_n).

Méthode (Prouver la divergence d'une suite avec deux suites extraites)**.**

Si une suite a deux suites extraites ne convergeant pas vers la même limite, alors elle diverge.

Exemple 35.

Montrer (à nouveau) que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Proposition 36.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } u_{2n} \to \ell \text{ et } u_{2n+1} \to \ell, \text{ alors } u_n \to \ell.$$

Théorème 37 (de Bolzano-Weierstrass)**.**

Toute suite bornée possède une suite extraite convergente.

6 Traduction séquentielle de certaines propriétés.

Définition 38.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est **dense** dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Plus précisément, si

$$\forall a < b \in \mathbb{R} \quad X \cap]a, b[\neq \emptyset.$$

Exemple. Dans le cours Propriétés de $\mathbb{R}$, on a démontré que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
Expérience de pensée : sur le segment $[0, 1]$, mettons une goutte d'encre verte sur les rationnels et une goutte d'encre rouge sur les irrationnels. Que se passe-t-il ?

Proposition 39 (Caractérisation séquentielle de la densité)**.**

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre les assertions

1. X est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel α, il existe une suite d'éléments de X qui tend vers α.

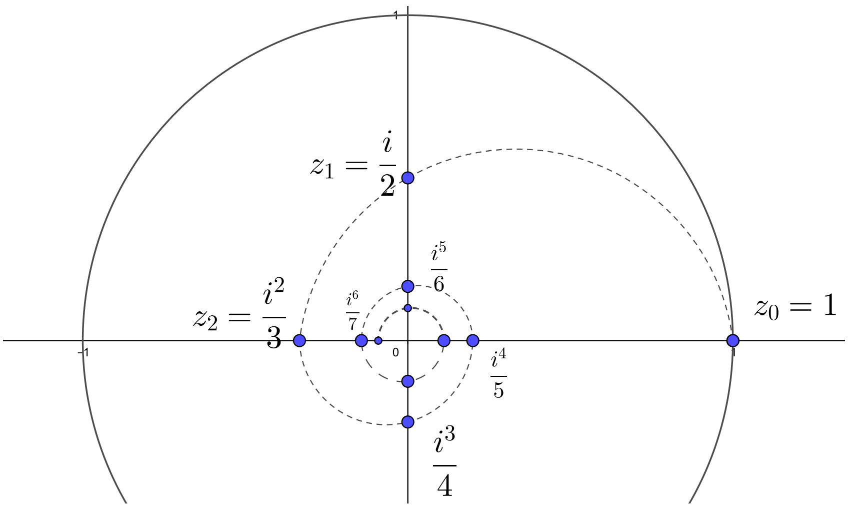
Retour sur la notion de borne supérieure.

Proposition 40.

Si X est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. non majorée), alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).

7 Suites complexes.

Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. Ci-dessous, en confondant un point du plan et son affixe, une représentation de $z : n \mapsto \frac{i^n}{n+1}$. La spirale, décorative, permet de mieux se figurer la dynamique, le temps discret n étant "caché" dans cette représentation.



La distance entre deux nombres complexes est donnée par le module de leur différence. Pour avoir une définition de convergence pour une suite complexe, il suffit de reprendre notre définition dans $\mathbb{R}$ et de remplacer la valeur absolue par le module.

Définition 41.

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) **converge** vers ℓ et on note $u_n \to \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Pour $\ell \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$, on rappelle qu'écrire $|z - \ell| \leq \varepsilon$ est équivalent à écrire que le nombre complexe z est dans le disque de centre ℓ et de rayon ε.

Proposition 42.

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a

$$u_n \to \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \to \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(u_n) \to \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Reste vrai avec des suites à valeurs complexes :

- Les résultats sur la limite d'une somme, d'un produit.
- Une limite usuelle : si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < 1$, alors $z^n \to 0$.
- L'idée que pour prouver qu'une suite de nombres complexes tend vers 0, on peut écraser son module par une suite qui tend vers 0.
- Toute suite de nombres complexes qui converge vers une limite finie est bornée (c'est-à-dire que la suite des modules est majorée).
- Bolzano-Weierstrass : de toute suite de nombres complexes bornée (majorée en valeur absolue), on peut extraire une suite convergente.

À oublier en revanche : tous les arguments à base d'encadrement ou de monotonie : on rappelle que dans $\mathbb{C}$, on ne dispose pas d'une relation d'ordre.

Preuves

Preuve de la proposition 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par écrire ℓ comme une moyenne : $\ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell$.
On a alors,

$$c_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell).$$

Prenons la valeur absolue :

$$|c_n - \ell| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

Puisque $u_n \to \ell$ et que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, la définition de la convergence de la suite u donne l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq n_0 \quad |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Reprenons la majoration ci-dessus avec en supposant que $n \geq n_0$. La relation de Chasles donne

$$|c_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell|.$$

On sait que pour tout $k \geq n_0$, $|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sommons ces inégalités :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = (n - n_0 + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient bien

$$|c_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell| + \frac{n - n_0 + 1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

La somme $\sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell|$ est une *constante* indépendante de n, qu'on peut noter C.
Remarquons aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n - n_0 + 1}{n} \leq 1$. On obtient donc que pour tout $n \geq n_0$, $|c_n - \ell| \leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Puisque $\frac{C}{n} \to 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{C}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons alors $N = \max(n_0, n_1)$. On a

$$\forall n \geq N \quad |c_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci achève de prouver que $c_n \longrightarrow \ell$. □

Preuve de la proposition 24. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
• Supposons (u_n) majorée par un réel M. Montrons que $\ell \leq M$ et pour cela, supposons que $\ell > M$. Posons $\varepsilon = \frac{\ell - M}{2}$. On sait qu'il existe un rang n_0 tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \varepsilon$. Notamment, $u_{n_0} \geq \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell - M}{2} = \frac{\ell + M}{2}$. Or, puisque $\ell > M$, on a $\frac{\ell + M}{2} > \frac{2M}{2} = M$. Ainsi, $u_{n_0} > M$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On a bien $\ell \leq M$.
• Supposons que (u_n) est minorée par un réel m. Alors, $(-u_n)$ est majorée par $-m$. De plus $-u_n \to -\ell$ donc d'après le point précédent, $-\ell \leq -m$, ce qui prouve bien que $\ell \geq m$.
• Soit une suite (v_n) convergeant vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n - u_n \geq 0$. Ainsi, 0 minore la suite $(v_n - u_n)$ qui converge vers $\ell' - \ell$ (somme de suites convergentes). D'après le point précédent, $\ell' - \ell \geq 0$, ce qui prouve bien que $\ell \leq \ell'$. □

Proposition 43 (des segments emboîtés, bonus hors-programme)**.**

Soit $(I_n)_{n\geq 1}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n = [a_n, b_n]$.
On suppose que ces segments sont emboités, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 1$, $I_{n+1} \subset I_n$.
Alors il existe au moins un réel qui appartient à tous les segments :

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset.$$

De plus, si la suite $(b_n - a_n)$ tend vers 0, $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ est un singleton.

Preuve de la proposition 43. • Soit (I_n) une suite de segments emboîtés, et les suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n = [a_n, b_n]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'inclusion $I_{n+1} \subset I_n$ amène $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. La suite (a_n) est croissante, majorée par b_0 donc converge vers un réel α. La suite (b_n) est décroissante, minorée par a_0 donc converge vers un réel β. *[On retrouve les arguments utilisés dans la preuve du théorème de convergence des suites adjacentes. C'est encore plus facile ici puisque le fait que (a_n) reste inférieure à (b_n) nous est donné par l'énoncé.]* Par stabilité des inégalités larges, $\alpha \leq \beta$ et même, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ d'où $[\alpha, \beta] \subset I_n$. Puisque $[\alpha, \beta]$ est inclus dans tous les I_n, il est inclus dans leur intersection (la convexité est une propriété stable par intersection)

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n.$$

Ainsi, l'intersection est bien non vide.
• Supposons maintenant que $(b_n - a_n)$ tend vers 0. Par unicité de la limite, $\beta - \alpha = 0$. Notons x la valeur commune de α et β. On sait déjà que $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$. Soit réciproquement un élément y dans $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y \in I_n$ donc $a_n \leq y \leq b_n$. En passant à la limite, $x \leq y \leq x$ d'où $y = x$. On vient bien de montrer que l'intersection des segments I_n était réduite à $\{x\}$. $\square$

Proposition 44 (bonus hors-programme)**.**

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Plus précisément, $\mathbb{R}$ ne saurait s'écrire comme l'ensemble des termes d'une suite réelle.

Preuve de la proposition 44. La preuve classique par procédé diagonal de Cantor repose sur l'existence d'un développement décimal pour tout réel (fin d'année : cours sur les séries). La preuve suivante s'appuie sur le théorème des segments emboîtés.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme l'ensemble des termes d'une suite (x_n) :

$$\mathbb{R} = \{x_0, x_1, x_2 \ldots\}.$$

Considérons le segment $[0, 1]$ que l'on découpe en trois sous-segments $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$. Prenons x_0 : il ne peut pas se trouver dans les trois segments à la fois *[Si on avait coupé en deux seulement, il pouvait encore se trouver dans les deux à la fois... au milieu !]* L'un des trois segments (au moins) ne contient x_0 ; notons I_0 un tel segment. Coupons-le en trois : l'une des trois parties ne contient pas x_1 : notons I_1 une telle partie. On a donc $I_1 \subset I_0$ et I_1 ne contient ni x_0, ni x_1. En itérant le procédé, on construit une suite de segments emboîtés (I_n) tels que pour n fixé, I_n ne contient aucun des nombres. $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Pour n donné, $x_n \notin I_n$ donc $x_n \notin \bigcap_{n\geq 1} I_n$. Ainsi, $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ ne contient aucun des x_n donc par hypothèse ne contient aucun nombre réel : l'intersection de nos segments emboîtés est vide ! Ceci est en contradiction avec le théorème des segments emboîtés : on tient notre absurdité. $\square$

Preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass (37).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.
• On va procéder par *dichotomie* et définir deux suites (a_n) et (b_n) telles que
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est une des deux *moitiés* de $[a_n, b_n]$;
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u.

Les suites a et b sont définies par récurrence comme suit. On choisit a_0 parmi les minorants de u, et b_0 parmi ses majorants : $[a_0, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite (tous !). Soit un entier naturel n. On suppose que les nombres $a_0, a_1 \dots, a_n$ et $b_0, b_1 \dots, b_n$ ont été bien définis et que $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u. Notons $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Les deux moitiés de $[a_n, b_n]$ sont $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$. Il serait absurde que chacun contienne un nombre fini de termes de la suite. L'un au moins en contient une infinité. Si c'est le cas pour $[a_n, c_n]$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$, sinon on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
• Passons à l'extraction proprement dite. On va définir une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le u_{\varphi(n)} \le b_n. \qquad (*)$$

On pose $\varphi(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ sont bien définis. On sait que le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de la suite u. Il contient donc au moins un (en fait une infinité) terme u_k avec $k > \varphi(n)$: on pose $\varphi(n+1) = k$. On a bien $a_{n+1} \le u_{\varphi(n+1)} \le b_{n+1}$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.
• Par construction, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. De plus, leur différence est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$: elle tend vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Par théorème, elles convergent vers une même limite ℓ. L'encadrement $(*)$ nous donne alors que $u_{\varphi(n)} \to \ell$. On a donc bien construit une suite extraite de (u_n) qui converge. □

Exercices

Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{14.1}}$ **[♦♦◇]** Calculer les bornes supérieures et inférieures des parties, après en avoir prouvé l'existence.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad B = \left\{ \frac{m}{nm+1} \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad C = \left\{ x^2 + y^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy = 1 \right\}.$$

$\boxed{\textbf{14.2}}$ **[♦♦◇]** Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B := \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$. Démontrer

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Suites convergentes : quelques exercices de plus

$\boxed{\textbf{14.3}}$ **[♦♦◇]** Soit (u_n) une suite de réels non nuls telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$.
Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

$\boxed{\textbf{14.4}}$ **[♦♦◇]** Soit u une suite bornée et v la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \sup \{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}.$$

Justifier que v est bien définie et qu'elle est convergente.

$\boxed{\textbf{14.5}}$ **[♦♦◇]** Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 > v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune. En examinant la suite $(u_n v_n)$, exprimer cette limite en fonction de u_0 et v_0.

$\boxed{\textbf{14.6}}$ **[♦♦◇]** [Lemme de Riemann-Lebesgue]
Soit $[a, b]$ un segment avec $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b e^{int} f(t) \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La chose demeure vraie lorsque f est seulement supposée continue mais le résultat est hors de notre portée pour le moment.

Exercices *avec epsilon.*

$\boxed{\textbf{14.7}}$ **[♦◇◇]** Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire.

$\boxed{\textbf{14.8}}$ **[♦♦◇]** Soit (u_n) une suite réelle. Prouver l'équivalence

$$u_n \to 0 \iff \frac{u_n}{1 + |u_n|} \to 0.$$

$\boxed{\textbf{14.9}}$ **[♦♦♦]** Cesáro généralisé
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que

$$\text{Si } u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \qquad \text{alors } \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Suites extraites.

$\boxed{\textbf{14.10}}$ **[♦◇◇]**
Démontrer qu'une suite extraite d'une suite extraite d'une suite (u_n) est une suite extraite de (u_n).

$\boxed{\textbf{14.11}}$ **[♦♦◇]** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que $(|u_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$ si et seulement si u admet une suite extraite convergente.

$\boxed{\textbf{14.12}}$ **[♦♦◇]** Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes.
Montrer que (u_n) est convergente.

$\boxed{\textbf{14.13}}$ **[♦♦♦]** Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'entiers telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ b_n > 0 \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \ell \quad \text{et} \quad \ell \notin \mathbb{Q}.$$

Montrer que $b_n \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{14.14}}$ **[♦♦♦]** On veut montrer que la suite de terme général $\sin(n)$ diverge.
On note $u_n = \sin(n)$. On raisonne par l'absurde en supposant que (u_n) est convergente, de limite ℓ.

1. En considérant $\sin(n + 1) - \sin(n-1)$, montrer que $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. En déduire une contradiction.

$\boxed{\textbf{14.15}}$ **[♦♦♦]** Démontrer la divergence de la suite de terme général $\sin(\ln(n))$.
