Primitives et intégrales
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

Exercices.

Exercice 8.1 [♦◊◊]

Donner les primitives des fonctions suivantes (on précisera l'intervalle que l'on considère).

$$a : x \mapsto \cos x e^{\sin x}; \qquad b : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad c : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}; \qquad d : x \mapsto \frac{1}{3x+1};$$
$$e : x \mapsto \frac{\ln x}{x}; \qquad f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}; \qquad g : x \mapsto \sqrt{3x+1}; \qquad h : x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}.$$

$A : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\sin x} + c \end{cases}$; $B : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\sin x) + c \end{cases}$; $C : x \mapsto \begin{cases}]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\sqrt{\sin x} + c \end{cases}$

$D : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}\ln(3x+1) + c \end{cases}$; $E : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2 x + c \end{cases}$; $F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln x) + c \end{cases}$;

$G : \begin{cases} [-\frac{1}{3}, +\infty] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c \end{cases}$; $H : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + c \end{cases}$.

Avec c les constantes d'intégration. □

Exercice 8.2 [♦◊◊] Issu du cahier de calcul

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
1. Sans chercher à les calculer, donner le signe des intégrales suivantes.

$$\int_{-2}^{3} e^{-x^2} dx; \qquad \int_{5}^{-3} |\sin x| dx; \qquad \int_{1}^{a} \ln^7(x) dx (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

2. En vous ramenant à des aires, calculer de tête

$$\int_1^3 7dx; \qquad \int_0^7 3xdx; \qquad \int_{-2}^{1} |x|dx.$$

1. La première est positive car $-2 < 3$ et la fonction est positive sur $[-2, 3]$e.
La seconde est négative car $5 > -3$ et la fonction est positive sur $[-3, 5]$.
La dernière est positive lorsque $a \geq 1$ et négative lorsque $a \leq 1$ car $\ln^7$ est positive sur $[1, +\infty[$.
2. La première vaut $2 \times 7 = 14$.
La seconde vaut $\frac{7^2 \times 3}{2} = \frac{147}{2}$.
La dernière vaut $\frac{1}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 2.5$

□