

# Ensembles et applications

## Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

---

### Exercices.

|                        |   |
|------------------------|---|
| Exercice 5.1 . . . . . | 2 |
| Exercice 5.2 . . . . . | 2 |
| Exercice 5.3 . . . . . | 3 |
| Exercice 5.4 . . . . . | 3 |
| Exercice 5.5 . . . . . | 4 |
| Exercice 5.6 . . . . . | 4 |
| Exercice 5.7 . . . . . | 6 |
| Exercice 5.8 . . . . . | 6 |

---

**Exercice 5.1 [◆◆◆]**

Soient  $A, B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Établir que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad \text{et} \quad A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

On a :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \setminus B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

□

**Exercice 5.2 [◆◆◆]**

Soient  $A, B, C, D$  quatre parties d'un ensemble  $E$ , telles que

$$E = A \cup B \cup C, \quad A \cap D \subset B, \quad B \cap D \subset C, \quad C \cap D \subset A.$$

Montrer que  $D \subset A \cap B \cap C$ .

Soit  $x \in D$ , on sait que  $x \in E$ . Alors  $x \in A$  ou  $x \in B$  ou  $x \in C$ .

⊙ Si  $x \in A$ , alors  $x \in A \cap D$ , donc  $x \in B$ .

⊙ Si  $x \in B$ , alors  $x \in B \cap D$ , donc  $x \in C$ .

⊙ Si  $x \in C$ , alors  $x \in C \cap D$ , donc  $x \in A$ .

On en déduit que  $x \in A \cap B \cap C$ .

Ainsi,  $D \subset A \cap B \cap C$ .

□

**Exercice 5.3 [◆◆◇]**

Démontrer que

$$\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\}.$$

On note  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}_+^* \exists b \in \mathbb{R}_-^* : x = a + b\}$

⊙ Montrons que  $\mathbb{R} \subset A$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

○ Si  $x \leq 0$ , On pose  $a = 1$  et  $b = x - 1$ , ainsi  $x = a + b$  donc  $x \in A$ .

○ Si  $x > 0$ , On pose  $a = x + 1$  et  $b = -1$ , ainsi  $x = a + b$  donc  $x \in A$ .

Dans tous les cas  $x \in A$ , on en conclut que  $\mathbb{R} \subset A$ .

⊙ Montrons que  $A \subset \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in A$ , alors il existe  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b \in \mathbb{R}_-^*$  tels que  $x = a + b$ .

Or  $a + b \in \mathbb{R}$ , donc  $x \in \mathbb{R}$ . On en conclut que  $A \subset \mathbb{R}$ .

□

**Exercice 5.4 [◆◆◇]**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  parties de  $E$  telles que

$$A_n = E \quad \text{et} \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n.$$

On pose  $B_1 = A_1$  et pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on pose  $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ .

Prouver que  $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un recouvrement disjoint de  $E$ .

Soit  $x \in E$ . Alors  $x \in A_n$ . Il existe alors  $k$  le plus petit entier tel que  $x \in A_k$ . Ainsi,  $x \in B_k$  puisque  $x \in A_k \wedge x \notin A_{k-1}$  par définition de  $k$ .

On en déduit que tout élément de  $E$  appartient à au moins un  $(B_k)$ .

Montrons maintenant que tout élément de  $E$  appartient aussi au plus à un  $B_k$ .

Soit  $x \in E$ . Supposons qu'il existe  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i < j$  et  $x \in B_i$  et  $x \in B_j$ .

Or, puisque  $x \in B_j$  et  $i < j$ ,  $x \notin A_i$ . De plus, puisque  $x \in B_i$ ,  $x \in A_i$  ce qui est absurde.

Ainsi, tout élément de  $E$  appartient au plus à un  $(B_k)$ .

$(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  est donc un recouvrement disjoint de  $E$ .

□

**Exercice 5.5 [◆◆◆]**

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux parties de  $E$ . Démontrer que

$$B \subset A \iff (\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)).$$

Supposons  $B \subset A$ .

Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$ .

On a :

$$(A \cap X) \cup B = (A \cup B) \cap (X \cup B) = A \cap (X \cup B)$$

Supposons  $(\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B))$ .

On a  $B \in \mathcal{P}(E)$ , donc :

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup B &= A \cap (B \cup B) \iff (A \cup B) \cap B = A \cap B \\ &\iff (A \cup B) = A \\ &\iff B \subset A \end{aligned}$$

□

**Exercice 5.6 [◆◆◆]**

Expliciter les ensembles

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right].$$

$A$  est l'ensemble vide, puisque l'intersection est commutative, on peut prendre  $n = 1$  et  $n = 10$ , par exemple, et remarquer que leur intersection est nulle, ce qui se propage à toutes les intersections.

Montrons que  $B$  est l'ensemble  $]0, 1]$  par double inclusion.

⊙ Montrons que  $B \subset ]0, 1]$ .

Soit  $x \in B$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$ . Ainsi,  $0 < x \leq 1$ . Donc  $x \in ]0, 1]$ .

⊙ Montrons que  $]0, 1] \subset B$ .

Soit  $x \in ]0, 1]$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n+1 \geq \frac{1}{x} \geq n$ . Donc que  $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$ .

Ainsi  $x \in \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$  et donc  $x \in B$ .

On en conclut que  $B = ]0, 1]$ .

□

## Exercice 5.7 [◆◆◆] Différence symétrique

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux parties de  $E$ , on définit

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que la réunion définissant  $A \Delta B$  est disjointe.
2. Montrer que  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
3. Montrer que  $\overline{A \Delta B} = A \Delta B$ .
4. Simplifier  $A \Delta E$ ,  $A \Delta \emptyset$ ,  $A \Delta A$ ,  $A \Delta \overline{A}$ .
5. (\*) Résoudre l'équation  $A \Delta X = \emptyset$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{P}(E)$ .

1. Considérons l'intersection :

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) \\ &= A \cap (B \cap \overline{B}) \cap \overline{A} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= \overline{A \cap B} \cap (A \cup B) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (A \cup B) \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap A) \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup \emptyset \\ &= \overline{A} \cap B \\ &= A \Delta B \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= A \Delta B \end{aligned}$$

4. On a :

- $A \Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = E \cap \overline{A}$ .
- $A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$ .
- $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$ .
- $A \Delta \overline{A} = (A \cup \overline{A}) \setminus (A \cap \overline{A}) = E \setminus \emptyset = E$

5. Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

$$\begin{aligned} A \Delta X &= \emptyset \\ \iff (A \setminus X) \cup (X \setminus A) &= \emptyset \\ \iff A \setminus X = \emptyset \text{ et } X \setminus A &= \emptyset \\ \iff X \subseteq A \text{ et } A \subseteq X \\ \iff X &= A \end{aligned}$$

□

**Exercice 5.8 [◆◆◆] Paradoxe de Russell**

Supposons qu'il existe un *ensemble de tous les ensembles* et notons le  $\mathcal{E}$ .

Considérons alors l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes :

$$y = \{x \in \mathcal{E} \mid x \notin x\}.$$

Démontrer que  $y \in y \iff y \notin y$ .

Supposons que  $y \in y$ . Montrons que  $y \notin y$ .

On a que  $y \in y$ . Or tout élément de  $y$  n'appartient pas à lui-même.

Ainsi,  $y \notin y$ .

Supposons que  $y \notin y$ . Montrons que  $y \in y$ .

$y$  est un ensemble, donc  $y \in \mathcal{E}$ . De plus,  $y \notin y$  par supposition.

Ce sont les deux conditions nécessaires pour appartenir à  $y$ .

Ainsi,  $y \in y$ .

On a bien montré que  $y \in y \iff y \notin y$ .

□