

Fonctions usuelles

Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Vocabulaire sur les fonctions.	2
Exercice 4.1	2
Exercice 4.2	2
Étude de fonctions.	3
Exercice 4.3	3
Exercice 4.4	3
Exercice 4.5	4
Exercice 4.6	4
Exercice 4.7	5
Exercice 4.8	6
Exercice 4.9	6
Exercice 4.10	7
Exercice 4.11	7
Bijections.	8
Exercice 4.12	8

Exercice 4.1 [◆◆◆]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x - 2 \in \mathbb{R} \\ f(x - 2) = f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 3 \in \mathbb{R} \\ f(x + 3) = f(x) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x - 2 + 3 \in \mathbb{R} \\ f(x - 2 + 3) = f(x - 2) = f(x) \end{cases}$$

□

Exercice 4.2 [◆◆◆]

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et f une solution du problème.

On remarque que $f : x \mapsto x$ est solution du problème.

Supposons $f(x) > x$, on a : $f(f(x)) > f(x)$ par croissance de f . Or $f(f(x)) = x$ donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.

Supposons $f(x) < x$, on a : $f(f(x)) < f(x)$ par croissance de f . Or $f(f(x)) = x$ donc $x < f(x)$, ce qui est absurde.

Ainsi, la seule fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} solution est $f : x \mapsto x$.

Exercice 4.3 [◆◆◆] S'entraîner tout seul à dériver.

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée.

$$\begin{aligned} A : x \mapsto x^\pi, \quad B : x \mapsto \pi^x, \quad C : x \mapsto \cos(5x), \quad D : x \mapsto \text{th}(\text{ch}(x)), \\ E : x \mapsto \ln(1 + x^3), \quad F : x \mapsto \cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right), \quad G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}, \quad H : x \mapsto \sin|x+1|. \end{aligned}$$

$$G' : x \mapsto -\frac{3}{2}(3x-1)^{3/2}$$

$$\bullet A' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi x^{\pi-1} \end{cases}$$

$$\bullet D' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(\text{ch}(x))} \end{cases}$$

$$\bullet H'_- : \begin{cases}]-\infty, -1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\cos(-x-1) \end{cases}$$

$$\bullet B' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\pi)\pi^x \end{cases}$$

$$\bullet E' : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x^2}{1+x^3} \end{cases}$$

$$\bullet H'_+ : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x+1) \end{cases}$$

$$\bullet C' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -5\sin(5x) \end{cases}$$

$$\bullet F' : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}} \end{cases}$$

Exercice 4.4 [◆◆◆]

Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x \ln(x)}.$$

On a :

$$f : x \mapsto e^{x \ln^2(x)}$$

Donc :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x)(\ln(x) + 2)e^{x \ln^2(x)} \end{cases}$$

Son tableau de variations est donc :

x	0	e^{-2}			1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	1	e^{4/e^2}			1	$+\infty$

Exercice 4.5 [◆◆◆]

1. Démontrer que

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. À l'aide du théorème des gendarmes, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

3. Retrouver ce résultat en faisant apparaître un taux d'accroissement.

1. Posons :

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

$$g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

Elles sont dérivables et tout et tout :

$$f' : x \mapsto -\frac{x}{(1+x)^2}$$

$$g' : x \mapsto -\frac{x}{1+x}$$

x	-1	0			$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f		$-\infty$	0	$-\infty$	

x	-1	0			$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
g		$-\infty$	0	$-\infty$	

L'inégalité est donc vérifiée car ces fonctions prennent des valeurs négatives.

2. Soit $x \in]-1, +\infty[$. On a :

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

3. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

□

Exercice 4.6 [◆◆◇]

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

Posons :

$$f : x \mapsto x - \sin x \qquad g : x \mapsto x - \sin x - \frac{x^3}{6}$$

Ces fonctions sont dérivables sur \mathbb{R}_+ :

$$f' : x \mapsto 1 - \cos x \qquad g' : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$$

La première inégalité est triviale car $\cos x \leq 1$, ainsi $x - \sin x \geq 0$.

On a :

$$g'' : x \mapsto \sin x - x$$

Et donc :

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	0	—
$g'(x)$	0	$-\infty$
g	0	$-\infty$

Ainsi, g prend des valeurs négatives sur \mathbb{R}_+ , donc : $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.

□

Exercice 4.7 [◆◆◆]

Faire une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)$$

⊙ Soit $x \in]-1, 1[$.

On a :

$$f : x \mapsto \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

⊙ Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

On a :

$$f : x \mapsto \ln \left(-\frac{1+x}{1-x} \right) \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \qquad f' : x \mapsto \frac{2}{1-x^2}.$$

Ainsi,

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
f	0 \searrow	$-\infty$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$
				0 \searrow

Pour les limites :

$$f : x \mapsto \ln \left(\left| \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} \right| \right)$$

Exercice 4.8 [◆◆◆]

Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in]0, 1[\qquad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in]0, 1[$.

On a :

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x \ln x} e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}$$

Posons :

$$f : x \mapsto e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)} \qquad f' : x \mapsto \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) e^{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}$$

x	0	0.5	1
$f'(x)$		-	+
f	1 \searrow	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \nearrow$

□

Exercice 4.9 [◆◆◆]

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.
2. Prouver que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. On a :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	0	1

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

On applique f , fonction croissante sur \mathbb{R}_+ , ce qui ne change pas les inégalités:

$$\begin{aligned} \frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \end{aligned}$$

□

Exercice 4.10 [◆◆◆]

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est impaire.
3. Étudier ses variations et donner le tableau correspondant.

$$1. \text{ Soit } g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x \end{cases} \quad \text{On a : } g' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
g	$+\infty$	0

f donc définie sur \mathbb{R} .

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 -f(x) &= -\ln(\sqrt{x^2+1}-x) \\
 &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x^2+1-x^2}\right) \\
 &= \ln(\sqrt{x^2+1}+x) \\
 &= f(-x)
 \end{aligned}$$

3. On a :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$	$-\infty$

Exercice 4.11 [◆◆◆]

Notons a le nombre

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

1. Montrer que $a^3 = 6a + 40$.
2. En déduire la valeur de a .

1.

$$\begin{aligned}
 a^3 &= 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2(20-14\sqrt{2})} + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})^2} \\
 &= 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(400-392)} + 3\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})(400-392)} \\
 &= 40 + 6\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + 6\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\
 &= 6a + 40
 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
 a^3 - 6a - 40 &= 0 \\
 \iff (a-4)(a^2+4a+10) &= 0 \\
 \iff a &= 4
 \end{aligned}$$

Exercice 4.12 [◆◆◆]

Considérons la fonction

$$f : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right) \end{cases}.$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de f . Peut-on écrire en conclusion que $f^{-1} = f$?

Soit $x \in]1, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \exp\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right) \\ &\iff \ln(y) = -\frac{1}{\ln(x)} \\ &\iff -\frac{1}{\ln(y)} = \ln(x) \\ &\iff x = \exp\left(-\frac{1}{\ln(y)}\right) \end{aligned}$$

L'équation a une unique solution, f réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ vers \mathbb{R}_+^* .

2. On a :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow]1, +\infty[\\ x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right) \end{cases}$$

$f \neq f^{-1}$ car leurs domaines de définition sont différents.