Exercice 1. Deux calculs pour s'échauffer en ce matin glacial.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer
$$\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{\arctan(x)}{x^3}\mathrm{d}x.$$
2. À l'aide du changement de variable $x = \sin t$, calculer
$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Un théorème de point fixe.

Soit une fonction $f : [a, b] \to [a, b]$ croissante.
(on se permet d'insister sur l'hypothèse que $[a, b]$ est stable par f).

On souhaite montrer qu'il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Pour cela, on va considérer la partie
$$A = \{x \in [a, b] \ | \ x \leq f(x)\}.$$

1. Justifier l'existence du réel $s = \sup(A)$ et justifier que $s \in [a, b]$.
2. Montrer que $f(s)$ est un majorant de A.
3. En déduire que $s \leq f(s)$.
4. En déduire que $f(s) \leq s$.
5. Conclure.

Exercice 3. Équation d'Euler.

L'équation d'Euler est linéaire d'ordre 2 mais *pas* à coefficients constants.
$$(E) \quad x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$$
On utilise deux méthodes pour la résoudre sur $I =]0, +\infty[$

<u>*Méthode 1.*</u>

1. (a) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles de
$$(E') \quad y'' + 2y' + y = e^{-2x}$$
   (b) Soit y_0 une solution de (E) sur I.
   Montrer que $f : x \mapsto y_0(e^x)$ est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer f est solution de (E').
   (d) En déduire la forme de y_0.
2. Traduire par une inclusion ce que vous venez de montrer.
3. Conclure.

<u>*Méthode 2.*</u>

4. Résoudre sur I l'équation
$$(E'') \quad xy' + y = \frac{1}{x^2}$$
5. Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution de $(H) : x^2y'' + 3xy' + y = 0$
6. Soit y_0 une solution de (E). On considère la fonction $g : x \mapsto x\,y_0(x)$.
   Montrer que g est deux fois dérivable sur I et que g' est solution de (E'')
7. Conclure

Problème. Étude d'une suite récurrente.

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit une suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ par $u_1 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}.$$

Dans tout l'énoncé, les lettres n et k désigneront toujours des entiers.

1. Démontrer que tous les termes de la suite u sont strictement positifs.

2. On suppose que la suite u vérifie la propriété :
$$\forall n \geq 1 \quad : \quad u_n \geq \sqrt{n}.$$
Montrer que la suite u est croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.

I. Une caractérisation de la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$

3. On suppose que la suite u converge vers une limite finie ℓ. Montrer que $\ell = 0$.

4. On suppose que la suite u vérifie la propriété :
$$\exists\, k \in \mathbb{N}^* \quad u_k < \sqrt{k}.$$
   (a) Montrer que
   $$\forall n \geq k \quad u_n < \sqrt{n}.$$
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq k}$ est décroissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite u ?

5. Montrer que la suite u converge si et seulement si il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

II. Étude d'une suite

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$w_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

6. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

7. Soit $n \geq 1$. Montrer que
$$v_n = \frac{1}{2} v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{2^{k+1}}.$$
En déduire que
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{2^k} - w_n.$$

8. Soit $n \geq 1$. En remarquant que $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \ln 2$ dès que $k \geq 1$, établir :
$$\frac{1}{2} \ln 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{2^k} \leq \ln 2.$$

9. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $V = \lim v_n$.

10. Justifier que
$$\frac{1}{2} \ln 2 \leq V \leq \ln 2.$$

III. Conclusion

11. Pour $n \geq 2$, montrer que
$$\ln u_n = 2^{n-1} \ln a - 2^{n-2} v_{n-2}.$$

12. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la suite u converge est qu'il existe $k > 2$ tel que $2 \ln a < v_{k-2}$.

13. Si $a < e^{\frac{V}{2}}$, montrer que la suite u converge vers 0.

14. Si $a \geq e^{\frac{V}{2}}$, montrer que $\lim u_n = +\infty$.

15. Déterminer la limite de u dans les deux cas suivants : $a < 2^{\frac{1}{4}}$ et $a \geq \sqrt{2}$.