Fonctions usuelles
Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 4.1 [♦◊◊]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique et 3-périodique. Montrer que f est 1-périodique.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x-2 \in \mathbb{R} \\ f(x-2) = f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+3 \in \mathbb{R} \\ f(x+3) = f(x) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x-2+3 \in \mathbb{R} \\ f(x-2+3) = f(x-2) = f(x) \end{cases}$$

□

Exercice 4.2 [♦♦♦]

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(f(x)) = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et f une solution du problème.
On remarque que $f : x \mapsto x$ est solution du problème.
Supposons $f(x) > x$, on a : $f(f(x)) > f(x)$ par croissance de f. Or $f(f(x)) = x$ donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.
Supposons $f(x) < x$, on a : $f(f(x)) < f(x)$ par croissance de f. Or $f(f(x)) = x$ donc $x < f(x)$, ce qui est absurde.
Ainsi, la seule fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ solution est $f : x \mapsto x$.

Exercice 4.3 [♦◊◊] S'entraîner tout seul à dériver.

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner un ou plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est dérivable, et préciser sa dérivée.

$$A : x \mapsto x^\pi, \quad B : x \mapsto \pi^x, \quad C : x \mapsto \cos(5x), \quad D : x \mapsto \operatorname{th}(\operatorname{ch}(x)),$$
$$E : x \mapsto \ln\left(1+x^3\right) n \quad F : x \mapsto \cos\left(\sqrt{\ln(x)}\right), \quad G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}, \quad H : x \mapsto \sin|x+1|.$$

$G' : x \mapsto -\frac{3}{2}(3x-1)^{3/2}$

- $A' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi x^{\pi-1} \end{cases}$
- $D' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{ch}(x))} \end{cases}$
- $H'_- : \begin{cases}]-\infty, -1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\cos(-x-1) \end{cases}$
- $B' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\pi)\pi^x \end{cases}$
- $E' : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x^2}{1+x^3} \end{cases}$
- $H'_+ : \begin{cases}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x+1) \end{cases}$
- $C' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -5\sin(5x) \end{cases}$
- $F' : \begin{cases}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{\ln(x)})}{2x\sqrt{\ln(x)}} \end{cases}$

Exercice 4.4 [♦◊◊]

Donner le tableau de variations complet de

$$f : x \mapsto x^{x\ln(x)}.$$

On a :

$$f : x \mapsto e^{x\ln^2(x)}$$

Donc :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x)(\ln(x)+2)e^{x\ln^2(x)} \end{cases}$$

Son tableau de variations est donc :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	e^{4/e^2}	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$