

Fonctions usuelles

Corrigé

DARVOUX Théo

Septembre 2023

Exercices.

Exercice 3.1 [◆◆◆]

Résoudre $2 \ln \left(\frac{x+3}{2} \right) = \ln(x) + \ln(3)$, sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\begin{aligned} 2 \ln \left(\frac{x+3}{2} \right) &= \ln(x) + \ln(3) \\ \iff \ln \left(\left(\frac{x+3}{2} \right)^2 \right) &= \ln(3x) \\ \iff \frac{(x+3)^2}{4} &= 3x \\ \iff x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ \iff x &= 3 \end{aligned}$$

Ainsi, 3 est l'unique solution.

Exercice 3.2 [◆◆◆]

Résoudre l'équation $\text{ch}(x) = 2$. Que dire des solutions ?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= 2 \\ \iff e^x + e^{-x} &= 4 \\ \iff e^{2x} - 4e^x + 1 &= 0 \\ \iff e^x &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \iff x &= \ln(2 \pm \sqrt{3})\end{aligned}$$

Ainsi, $\ln(2 - \sqrt{3})$ et $\ln(2 + \sqrt{3})$ sont les uniques solutions dans \mathbb{R} .

On remarque que :

$$\ln(2 + \sqrt{3}) = -\ln\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = -\ln(2 - \sqrt{3})$$

Les solutions sont opposées.

Exercice 3.3 [◆◆◆]

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}} &= \sqrt{x}^x \\ \iff e^{\sqrt{x} \ln x} &= e^{x \ln(\sqrt{x})} \\ \iff \sqrt{x} \ln(x) &= \frac{x}{2} \ln(x) \\ \iff \ln(x) \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) &= 0 \\ \iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} &= \frac{x}{2} \\ \iff x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ \iff x = 1 \text{ ou } x &= 4\end{aligned}$$

Les uniques solutions sont donc 1 et 4.

Exercice 3.4 [◆◆◆] Trigonométrie hyperbolique.

1. Montrer que pour tous réels a et b , on a

(a) $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$.

(b) $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$.

(c) Trouver une identité pour $\operatorname{th}(a+b)$.

2. Pour x réel, on pose $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$(a) \operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (b) \operatorname{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad (c) \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

1.

(a)

$$\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b)$$

□

(b)

$$\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} = \operatorname{sh}(a+b)$$

□

(c)

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)}$$

On divise en haut et en bas par $\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)$.

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} + \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}}{1 + \frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{ch}(b)}} = \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1+t^2}{1-t^2} &= \frac{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

□

(b)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1-t^2} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

□

(c)

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)\end{aligned}$$

□

Exercice 3.5 [◆◆◆]

Sans calculatrice, comparer π^e et e^π .

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \end{cases}$$

Un magnifique tableau de variations :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		—	— 0 +	
f	$+\infty$	$-\infty$	e	$+\infty$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\ln(\pi)} &> e \\ \iff \pi &> e \ln(\pi) \\ \iff e^\pi &> e^{e \ln \pi} \\ \iff e^\pi &> \pi^e \end{aligned}$$

Donc $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 3.6 [◆◆◆]

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.
2. Des deux nombres $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[3]{24}$, lequel est le plus grand ?

1. f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+ de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{(x+1)^{2/3}} \right) \end{cases}$$

On a :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	-1	0

- 2.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{24} \\ &= \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{3} \\ &= (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) - (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

Or f est croissante sur \mathbb{R}_+ , ainsi : $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$.

On en conclut que $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Exercice 3.7 [◆◆◇]

1. Soit α un réel et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$ (on discutera selon les valeurs de α).
2. Soit $\alpha \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$$

1. Posons $f : x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$. f est définie, continue et dérivable sur $] -1, +\infty[$ de dérivée :

$$g : \begin{cases}] -1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1) \end{cases}$$

Alors :

⊙ Si $\alpha \in]0, 1[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$\alpha - 1$	0	$-\infty$

⊙ Si $\alpha \in]1, +\infty[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$\alpha - 1$	0	$+\infty$

⊙ Si $\alpha \in]-\infty, 0[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

Ainsi, $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ lorsque $\alpha \notin [0, 1]$.

2. D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = (n+1)^\alpha$$

□

Exercice 3.8 [◆◆◆]

Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R} .

$$\text{a) } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } \sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x \quad \text{c) } \cos x + \sin x = 1$$

a)

$$\begin{aligned} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \begin{cases} 2x \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ 2x \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{8} [\pi] \\ x \equiv \frac{3\pi}{8} [\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x &\iff 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \\ &\iff -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \\ &\iff \cos x = -2 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

c)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos x - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(x) + \sin(x))$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x = 1 &\iff \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 \\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{2\pi}{4} [2\pi] \\ x \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Exercice 3.9 [◆◆◆]

Soit x un réel. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

Notons \mathcal{P}_n cette proposition. Montrons que \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation.

On a : $|\sin(0x)| \leq 0|\sin x| \iff 0 \leq 0$.

Ainsi, \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Montrons \mathcal{P}_{n+1} .

On a :

$$\begin{aligned} |\sin(nx + x)| &= |\sin(nx) \cos(x) + \sin(x) \cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx) \cos(x)| + |\sin(x) \cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)| |\cos(x)| + |\sin(x)| |\cos(nx)| \\ &\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \\ &\leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| \quad (\text{HR}) \\ &\leq (n+1)|\sin(x)| \end{aligned}$$

C'est exactement \mathcal{P}_{n+1} .

Conclusion.

Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 3.10 [◆◆◆]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} \quad (n \text{ fois le symbole } \sqrt{\cdot})$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

2. En déduire $\lim u_n$

1. Notons \mathcal{P}_n cette proposition. Montrons que \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation.

On a : $2 \cos(\frac{\pi}{4}) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Ainsi, \mathcal{P}_1 est vérifiée.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Montrons \mathcal{P}_{n+1} .

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ \iff \sqrt{2 + u_n} &= \sqrt{2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\ \iff u_{n+1} &= \sqrt{2(1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}))} \end{aligned}$$

Or $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$

Ainsi, $1 + \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}$

Alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{4 \cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} = 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

\mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

Conclusion.

Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

2.

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2 \cos(0) = 2$$

Exercice 3.11 [◆◆◆]

Calculer $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$.

On a :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= \frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{7} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{8} \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} \\ &= -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} \frac{1}{8} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Exercice 3.12 [◆◆◆]

Calculer $\tan \frac{\pi}{8}$.

On a :

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{4} &= \tan \frac{2\pi}{8} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2 \tan \frac{\pi}{8} &= 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} \\ \iff \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 &= 0 \\ \iff \tan \frac{\pi}{8} &= -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 3.13 [◆◆◆]

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

⊙ Montrons que $\arctan(x) \leq x$.

Posons $f : x \mapsto \arctan x - x$. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{x^2}{x^2+1} \end{cases}$$

On a :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
f	0	$-\infty$

Donc $\arctan(x) \leq x$.

⊙ Montrons que $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$.

Posons $f : x \mapsto x - \frac{x^3}{3} - \arctan(x)$. f est dérivable sur \mathbb{R}_+ de dérivée :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{x^4}{x^2+1} \end{cases}$$

On a :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
f	0	$-\infty$

Donc $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$. □

Exercice 3.14 [◆◆◆]

Montrer que

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

On a :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$$

En appliquant \arctan , on obtient bien que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$. □

Exercice 3.15 [◆◆◇]

Soit l'équation

$$\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Justifier que l'équation admet une unique solution sur $[-1, 1]$.
2. Donner une expression de cette solution.

1. \arctan est strictement croissante sur \mathbb{R} et prend ses valeurs dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc l'équation admet une unique solution sur \mathbb{R} .

2. Soit $x \in [-1, 1]$

On a :

$$\begin{aligned}\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ \iff \tan(\arcsin(x) + \arcsin(\frac{x}{2})) &= 1 \\ \iff \frac{3x}{2} \cdot \frac{2}{2-x^2} &= 1 \\ \iff 2x^2 + 6x - 4 &= 0 \\ \iff x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

L'unique solution est donc $\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2}$.