Chapitre 39

Déterminants.

Sommaire.

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 La théorie dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Formes n-linéaires alternées.

Définition 1

Une forme n-linéaire sur E est une fonction $f : E^n \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \forall (a_1,...,a_{j-1},a_{j+1}...,a_n) \in E^{n-1},\ x \mapsto f(a_1,...,a_{j-1},x,a_{j+1},...,a_n) \quad \text{est linéaire.}$$

Proposition 2

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire.

1. $\forall (x_1,...,x_n) \in E^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x_1,...,\lambda x_n) = \lambda^n f(x_1,...,x_n)$.
2. Soit $(x_1,...,x_n) \in E^n$ tel que l'un des x_i est nul, alors $f(x_1,...,x_n) = 0$.

Preuve :

$\boxed{1.}$ λ est factorisé n fois par n-linéarité.

$\boxed{2.}$ $f(x_1,...,0_E,...,x_n) = f(x_1,...,0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E,...,x_n) = 0_{\mathbb{K}} f(x_1,...,x_n) = 0$.

Définition 3

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire. On dit que f est alternée si elle s'annule sur tous les n-uplets contenant deux vecteurs égaux.

Proposition 4

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée ($n \geq 2$) et $(x_1,...,x_n) \in E^n$.

1. On ne change pas la valeur prise par f sur $(x_1,...,x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.
2. Si $(x_1,...,x_n)$ est liée, alors $f(x_1,...,x_n) = 0$.
3. **Effet d'une transposition.** Soit $\{i,j\}$ avec $i < j$. On a :

$$f(...,x_{i-1},\boxed{x_j},x_{i+1},...,x_{j-1},\boxed{x_i},x_{j+1},...) = -f(...,x_{i-1},\boxed{x_i},x_{i+1},...,x_{j-1},\boxed{x_j},x_{j+1},...)$$

L'échange de x_i et x_j provoque un changement de signe.

4. **Effet d'une permutation.** Pour tout $\sigma \in S_n$,

$$f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,...,x_n)$$

Où $\varepsilon : S_n \to \{-1,1\}$ la signature de σ l'unique morphisme non trivial de $(S_n,\circ)$ dans $(\{-1,1\},\times)$

Preuve :

$\boxed{1.}$ Soit $j \in [\![1,n]\!]$, $(\lambda_i)_{i\neq j} \in \mathbb{K}^{n-1}$.

On a $f(x_1,...,x_j + \sum\limits_{i\neq j} \lambda_i x_i,...,x_n) = f(x_1,...,x_n) + \underbrace{\sum\limits_{i\neq j} \lambda_i f(x_1,...,\overbrace{x_i}^{j},...,x_n)}_{=0 \text{ car alternée et deux fois } x_i}$

$\boxed{2.}$ Supposons $(x_1,...,x_n)$ liée, alors $\exists j \in [\![1,n]\!],\ \exists (\lambda_i)_{i\neq j} \mid x_j = \sum\limits_{i\neq j} \lambda_i x_i$.

Alors $f(x_1,...,x_j,...,x_n) \overset{(1)}{=} f(x_1,...,x_j - \sum\limits_{i\neq j} \lambda_i x_i,...,x_n) = f(x_1,...,0_E,...,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$.

$\boxed{3.}$ On a ;

$$\begin{aligned} f(...,x_j,...,x_i,...) &= f(...,x_j+x_i,...,x_i,...) = f(...,\boxed{x_j+x_i},...,x_i-\boxed{(x_j+x_i)},...) \\ &= f(...,x_j+x_i,...,-x_j,...) = (-1)f(...,x_j+x_i,...,x_j,...) \\ &= (-1)f(...,x_i,...,x_j,...) \end{aligned}$$

$\boxed{4.}$ $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \exists \tau_1,...,\tau_p$ transpositions $\mid \sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_p$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}) &= f(x_{\tau_1\circ...\circ\tau_p(1)},...,x_{\tau_1\circ...\circ\tau_p(n)}) \\ &= (-1)f(x_{\tau_2...\tau_p(1)},...,x_{\tau_2...\tau_p(n)}) \quad \text{et } (-1)=\varepsilon(\tau_1) \\ &= \varepsilon(\tau_1)...\varepsilon(\tau_p)f(x_1,...,x_n) \\ &= \varepsilon(\sigma)f(x_1,...,x_n) \end{aligned}$$

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

Théorème 5

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est une droite vectorielle.

Si $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ est une base de E, alors il existe une unique forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur $\mathscr{B}$. On l'appelle **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ et on note $\det_{\mathscr{B}}$. On a:

$$\forall (x_1,...,x_n) \in E^n \quad \det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j).$$

Preuve :

Analyse. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. Soit $(x_1,...,x_n) \in E^n$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} e^*_{i_1}(x_1)e_{i_1},...,\sum_{i_n=1}^{n} e^*_{i_n}(x_n)e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n}...\sum_{i_n=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} e^*_{i_j}(x_j)f(e_{i_1},...,e_{i_n}) \\ &= \sum_{(i_1,...,i_n)\in\mathscr{A}_n([\![1,n]\!])} \left(\prod_{j=1}^{n} e^*_{i_j}(x_j)\right) f(e_{i_1},...,e_{i_n}) \end{aligned}$$

Où $(i_1,...,i_n) \in [\![1 \mapsto (\sigma_i(k) \mapsto i_k)$ bijection de $\mathscr{A}_n([\![1,n]\!]) \to S_n$.

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j)f(e_{s(1)},...,e_{s(n)}) \\ &= f(e_1,...,e_n)\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j) \end{aligned}$$

Supposons que $f(e_1,...,e_n) = 1$, il reste un unique candidat.
Synthèse. Posons $\det_{\mathscr{B}} : (x_1,...,x_n) \mapsto \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{j=1} e^*_{\sigma(j)}(x_j)$. Vérifions qu'elle convient.

• Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et $(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},x_n) \in E^{n-1}$ et $x \in E$.

Alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\left(\prod\limits_{j\neq k} e^*_{\sigma(j)}(x_j)\right) e^*_{\sigma(k)}(x)$ linéaire car combinaison linéaire de linéaires.

• Soit $1 \leq k < l \leq n$, et $(x_1,...,x_n) \mid x_k = x_l$.
Alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j)$. Posons $\tau = (k\ l)$ qui échange k et l.
Alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(\tau(j))}(x_j) = \sum_{\varphi\in S_n} \varepsilon(\varphi\tau)\prod_{j=1}^{n} e^*_{\varphi(j)}(x_j)$ où $\varphi = \sigma\tau$.
Donc $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = -\sum_{\varphi\in S_n} \varepsilon(\varphi)\prod_{j=1}^{n} e^*_{\varphi(j)}(x_j) = -\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$.
Donc $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) = 0$.

• $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(e_1,...,e_n) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod\limits_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(e_j) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod\limits_{j=1}^{n} \delta_{j,\sigma(j)} = \varepsilon(\mathrm{id}) = 1$.

Corrolaire 6

Si f est une forme n-linéaire alternée et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\exists\lambda\in\mathbb{K} \mid f = \lambda\det_{\mathscr{B}}$

Définition 7

Soit $\mathscr{B} = (e_1,..,e_n)$ base de E et $(x_1,...,x_n) \in E^n$.
Le nombre $\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$ est appelé **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ de $(x_1,...,x_n)$.

Théorème 8: Caractérisation des bases.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$.

$$(x_1, ..., x_n) \text{ est base de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n) \neq 0$$

Preuve :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que le déterminant est différent de 0, alors $(x_1, ..., x_n)$ libre, c'est une base car $\dim E = n$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\mathscr{B}' = (x_1, ..., x_n)$ est base de E. Alors $\det_{\mathscr{B}'}$ existe, c'est une forme n-linéaire alternée.
Par théorème, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid \det_{\mathscr{B}'} = \lambda \det_{\mathscr{B}}$. Alors $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}') = \lambda \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$ donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.

Exemple 9: Interprétation géométrique.

• Si $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, pour $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ un couple de vecteurs, le nombre $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ peut être vu comme l'aire orientée du parallélogramme engendré par $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

• Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, pour $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ un triplet de vecteurs, le nombre $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ peut être vu comme le volume orienté du parallélépipède engendré par $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

1.3 Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie.

Lemme 10

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le nombre $\det_{\mathscr{B}}(u(e_1), ..., u(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ considérée.

Preuve :

Soit $f \in \Lambda_n(E)$ une forme n-linéaire alternée.
Déformons la à l'aide de $u \in \mathscr{L}(E)$: $(x_1, ..., x_n) \mapsto f(u(x_1), ..., u(x_n))$ est n-linéaire alternée.
Notons-la $\varphi_u(f) \in \Lambda_n(E)$. On pose $\varphi_u : f \mapsto \varphi_u(f)$ de $\Lambda_n(E) \to \Lambda_n(E)$ linéaire, c'est une homothétie.
Alors $\exists \lambda_u \in \mathbb{K} \mid \varphi_u = \lambda_u \mathrm{id}_{\Lambda_n(E)}$.
On a prouvé que $\exists \lambda_u \in \mathbb{K} \quad \forall f \in \Lambda_n(E) \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in E \quad f(u(x_1), ..., u(x_n)) = \lambda_u f(x_1, ..., x_n)$.
En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \lambda_u \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$ est vrai pour tous x_i.
En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(u_(\mathscr{B})) = \lambda_u \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \lambda_u$, ne dépend pas de $\mathscr{B}$.

Définition 11

Soi $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u et on note $\det(u)$ le nombre

$$\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}),$$

où $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base quelconque de E.

Proposition 12

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$. On a

$$\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$$

Preuve :

L'application $(x_1, ..., x_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ...u(x_n))$ est n-linéaire alternée : elle est dans $\mathrm{Vect}(\det_{\mathscr{B}})$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K} \mid \forall (x_1, ..., x_n) \in E^n$, $\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$.
En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})$ donc $\det(u) = \lambda$.
On a bien $\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$.

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
2. $\forall u \in \mathscr{L}(E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
3. $\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$
4. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$. Alors:

$$\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$$

Remarque: Rien à dire sur $\det(u + v)$.

Preuve :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
$\boxed{1.}$ $\det(\mathrm{id}_E) = \det_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}(e_1), ..., \mathrm{id}(e_n)) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.
$\boxed{2.}$ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda u) = \det_{\mathscr{B}}(\lambda u(e_1), ..., \lambda u(e_n)) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), ..., u(e_n)) = \lambda^n \det(u)$.
$\boxed{3.}$ Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

Alors: $\det(u \circ v) = \det_{\mathscr{B}}(u(v(e_1)), ..., u(v(e_n))) = \det(u) \det(v(e_1), ..., v(e_n)) = \det(u) \det(v) \cancelto{1}{\det_{\mathscr{B}}(B)}$.
$\boxed{4.}$ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est bijectif ssi l'image de $\mathscr{B}$ par u est une base ssi son déterminant dans B est non nul (8).
Alors pour un automorphisme u, on a $u \circ u^{-1} = \mathrm{id}_E$ et $\det(u \circ u^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E) = 1$ donc $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$.

Corrolaire 14

Si E est de dimension finie, det induit un morphisme de groupes entre $GL(E)$ et $\mathbb{K}^*$.

Exemple 15: Déterminant d'une symétrie vectorielle.

Que dire de $\det(s)$ si s est une symétrie vectorielle de E ?

Solution :

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie vectorielle.
Alors $s^2 = \mathrm{id}_E$ donc $\det(s^2) = \det(\mathrm{id}_E) = 1$.
Alors $\det(s)^2 = 1$ donc $\det(s) = \pm 1$.

On sait que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
Prenons une base adaptée à ces deux supplémentaires.
Notons $p = \dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et prenons $(e_1, ..., e_p)$ une de ses bases, et $(e_{p+1}, ..., e_n)$ base de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Notons $B = (e_1, ..., e_p, ...e_n)$. Alors :

$$\begin{aligned}\det(s) &= \det_{\mathscr{B}}(s(e_1), ..., s(e_p), ..., s(e_n)) = \det_{\mathscr{B}}(e_1, ..., e_p, -e_{p+1}, ..., -e_n)\\ &= (-1)^{n-p}\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = (-1)^{n-p}.\end{aligned}$$

1.4 Déterminant d'une matrice carrée.

Définition 16

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle **déterminant** de A, et on note $\det(A)$ le nombre

$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}_c}(C_1, ..., C_1).$$

où $\mathscr{B}_c$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A.

Autrement dit, $\det(A)$ est le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Notation

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, le déterminant de A est aussi noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Théorème 17

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
3. $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2\ \det(AB) = \det(A)\det(B)$.
4. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$, alors:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

Preuve :

C'est juste le théorème 13 appliqué aux endomorphismes canoniquement associés.

Corrolaire 18

L'application det induit un morphisme de groupes entre $GL_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^*$.

Proposition 19

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}.$$

Remarque: On appliquera très peu cette formule.

Preuve :

Notons $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $(C_1, ..., C_n)$ les colonnes de A.

$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}_c}(C_1, ..., C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} E^*_{\sigma(j)}(C_j) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

Application 1

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{Z})$.
La formule précédente nous donne que $\det(A)$ est une somme de produits d'entiers:

$$A \in M_n(\mathbb{Z}) \Longrightarrow \det(A) \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 20: Cohérence avec la définition en taille 2.

Retrouver à l'aide de la formule précédente l'expression connue pour le déterminant d'une matrice de taille 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Solution :

On a $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$ où $\tau = (1\ 2)$. Alors:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1),1} a_{\mathrm{id}(2),2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = ad - cb. \end{aligned}$$

Exemple 21

Soient $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On note $M = (X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice aléatoire. Démontrer que

$$E\left[\det((X_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}\right] = \det\left[(E(X_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}\right]$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} E\left[\det((X_{i,j}))\right] &= E\left[\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} X_{\sigma(j),j}\right] \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) E\left[\prod_{j=1}^{n} X_{\sigma(j),j}\right] \quad \text{linéarité.} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} E\left[X_{\sigma(j),j}\right] \quad \text{indépendance.} \\ &= \det(E(X_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}. \end{aligned}$$

Théorème 22

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \ \det(A^\top) = \det(A).$$

Preuve :

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Alors:

$$\begin{aligned} \det(A^\top) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \left[A^\top\right]_{\sigma(j),j} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} [A]_{j,\sigma(j)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(k),k} \quad (\mathrm{k} := \sigma(j)) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(k),k} \quad (\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)) \\ &= \sum_{\varphi\in S_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{k=1}^{,} a_{\varphi(k),k} \quad (\varphi := \sigma^{-1}) \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

Corrolaire 23

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de lignes $L_1, ..., L_n$.

$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}_c}(L_1, ..., L_n)$$

où $\mathscr{B}_c$ est la base canonique de $M_{1,n}(\mathbb{K})$.

Proposition 24

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (x_1, ..., x_n)$ une base de E. On a

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \det(u)$$

Preuve :

Notons $(a_{i,j})$ les coefficients de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x^*_{\sigma(j)}(u(x_j)) = \det_{\mathscr{B}}(u) = \det(u).$$

Corrolaire 25

Deux matrices semblables ont même déterminant.

Preuve :

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ semblables : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ $B = P^{-1}AP$.

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P)^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A).$$

Preuve :

Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ avec $\mathscr{B}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Notons $\mathscr{C}$ la base des colonnes de P. D'après le changement de base, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
Donc d'après la proposition précédente:

$$\det(A) = \det(f) = \det(B).$$

2 La pratique.

2.1 Échelonner.

Proposition 26: Effet des opérations de pivot sur les colonnes.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $(C_j,\ j \in [\![1, n]\!])$ ses colonnes. Soit $\mathcal{O}$ une opération élémentaire sur les colonnes, transformant A en B:

$$A \underset{\mathcal{O}}{\sim} B.$$

1. Si $\mathcal{O}$ est du type $C_i \leftrightarrow C_j$, alors $\det(B) = -\det(A)$,
2. Si $\mathcal{O}$ est du type $C_i \leftarrow \lambda C_i$, alors $\det(B) = \lambda \det(A)$,
3. Si $\mathcal{O}$ est du type $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, alors $\det(B) = \det(A)$.

Le déterminant étant invariant par transposition, tout reste vrai pour des opérations élémentaires sur les lignes.

Preuve :

Notons $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On sait que $\det(A) = \det_{\mathscr{B}_c}(C_1, ..., C_n)$ qui est n-linéaire alternée.

Proposition 27

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
Par exemple, pour une matrice triangulaire supérieure,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & ... & 0 & a_n \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} a_j$$

Preuve :

Soit A une matrice triangulaire.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

Le produit vaut 0 sauf si $\sigma = \mathrm{id}$, il ne reste que $\prod_{j=1}^{n} a_{j,j}$.

Preuve :

• Si l'un des coefficients diagonaux est nul, A n'est pas inversible donc le déterminant vaut 0. Cohérent.
• Sinon, $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $a_j \neq 0$. Alors :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & ... & 0 & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & a_{2,3}\dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & ... & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

L'opération est $C_2 \leftarrow C_2 - \frac{a_{1,2}}{a_1} C_1$, ..., $C_n \leftarrow C_n - \frac{a_{1,n}}{a_1} C_1$.
En itérant, on se ramène à une matrice diagonale de colonnes $(C'_1, ..., C'_n)$.
Par linéarité, son déterminant est $a_1 ... a_n \cdot \det(I_n) = \prod_{j=1}^{n} a_j$.
Par transitivité, c'est aussi le déterminant de A.

Exemple 28

Calculer $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 10 & 6 & -4 \\ 15 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Solution :

On a:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 10 & 6 & -4 \\ 15 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 \cdot (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -60 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -60 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -120.$$

L'autre est non-inversible donc de déterminant 0 car de rang $2 < 3$.

Exemple 29

Soit $a \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant de taille n ci-dessous.

$$D := \begin{vmatrix} a & 1 & & (1) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (1) & & 1 & a \end{vmatrix}$$

Indication: la somme des éléments de chaque colonne (ou ligne) est toujours la même.

Solution :

On a:

$$D = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ a+n-1 & a & & & \\ \vdots & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a+n-1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

Opérations : $c_1 \leftarrow c_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j$, puis $\forall i \geq 2,\ c_i \leftarrow c_i - c_1$.
Donc $D = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$.

Bonus : La matrice est inversible ssi $a \in \mathbb{K} \setminus \{1, 1-n\}$.

2.2 Développer selon une colonne ou une ligne.

Notation

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
On appelle mineur à la position (i,j), noté $\Delta_{i,j}$ le déterminant de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Lemme 30

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$. Alors,

$$\forall A \in M_{n-1}(\mathbb{K}), \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} & A & \end{vmatrix}_{n-1}$$

Preuve :

Posons

$$\Psi : \begin{cases} M_{n-1}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{vmatrix}_n \end{cases}$$

On peut montrer que Ψ est n-linéaire alternée, puis calculer l'image de la base canonique de $M_{n-1,1}$.

Théorème 31

Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$. On a, en développant selon la colonne j ou la ligne i:

$$\forall j\in [\![1,n]\!],\quad \det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\quad \text{et}\quad \forall i\in [\![1,n]\!],\quad \det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Preuve :

Pour $i\in [\![1,n]\!]$, on a:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,j} & \dots & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,j} & \dots & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ a_1,1 & \dots & & & & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}(-1)^n$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ a_{1,j} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,j} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+1}\Delta_{i,j}.$$

À l'étape 1, on échange la ligne i avec la ligne $i-1$ successivement jusqu'à 1.
À l'étape 2, on échange la colonne j avec la colonne $j-1$ successivement jusqu'à 1.
On se retrouve avec la matrice de départ où la ligne i est à la position 1 et la colonne j à la position 1.
On peut alors utiliser le lemme.

Application 2

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}[A]_{1,j}\Delta_{1,j}=+a\begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f\\ g & i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix}\text{selon } L_1.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=-b\begin{vmatrix} d & f\\ g & i\end{vmatrix}+e\begin{vmatrix} a & c\\ g & i\end{vmatrix}-h\begin{vmatrix} a & c\\ d & f\end{vmatrix}\text{selon } C_2.$$

Exemple 32

Soit x un réel. On note $D(x)=\begin{vmatrix} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2\\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2\\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2\end{vmatrix}$

a) Justifier que $D: x\mapsto D(x)$ est une fonction polynomiale de degré au plus 2.
b) En déduire la valeur de $D(x)$ pour tout x.

Solution :

a) On développe selon la première ligne.

$$D(x)=(1+x)^2\Delta_{1,1}-(2+x)^2\Delta_{1,2}+(3+x)^2\Delta_{1,3}-(4+x)^2\Delta_{1,4}.$$

C'est une combinaison linéaire de polynomes de degrés inférieurs à 2, D est bien de degré inférieur à 2.

b) On remarque que $D(1)=0$, car alors $L_1=L_2$, $D(2)=0$ car alors $L_1=L_3$ et $D(3)=0$ car alors $L_1=L_4$.
C'est un polynôme a trois racines distinctes, donc D est le polynôme nul (trop de racines).

Exemple 33

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Soit la matrice bidiagonale:

$$\begin{pmatrix} a & & & b \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ b & & & a \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

Calculer son déterminant D_n en établissant une realtion de récurrence satisfaite par (D_n).

Solution :

Notons Δ_n le déterminant de taille $2n$.

$$\Delta_n = a \begin{vmatrix} a & & & b & 0 \\ 0 & a & \iddots & & \\ & \iddots & \ddots & & \\ b & & & \ddots & \\ 0 & & & & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & & & b \\ 0 & 0 & \ddots & b & 0 \\ & & \iddots & \ddots & \\ & \iddots & & & a \\ b & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ b & & & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ b & & & a \end{vmatrix} \quad \text{selon } L_{2n-1} \text{ et } C_1$$

$$= (a^2 - b^2)\Delta_{n-1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = (a^2 - b^2)^{n-1}\Delta_1$ où $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$.

Alors $\Delta_n = (a^2 - b^2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc inversible quand $a \neq \pm b$.

Théorème 34: Déterminant de Vandermonde.

Soient $a_1, ..., a_n$ n nombres réels ou complexes.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Preuve :

On va factoriser les $a_i - a_1$ de droite à gauche: $c_i \leftarrow c_i - a_1 c_{i-1}$.
Notation: $V(a_1, ..., a_n)$ le déterminant à calculer.

$$V(a_1, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \dots & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & \dots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

On développe selon la première ligne.

$$V(a_1, ..., a_n) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & ... & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & ... & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)...(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & ... & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & ... & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) V(a_2, ..., a_n)$$

$$= \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \prod_{j=3}^{n} (a_j - a_2) V(a_3, ..., a_n)$$

$$= \prod_{i<j} (a_j - a_i) V(a_n)$$

$$= \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

Voir aussi l'exercice 39.9 du TD.

Exemple 35

Deux exemples de problèmes se ramenant à des déterminants de Vandermonde:
1. L'interpolation de Lagrange.
2. Le problème des moments pour des variables aléatoires d'image finie.

Solution :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \to \mathbb{K}$, $X(\Omega)$ est fini, on note $n = |X(\Omega)|$.
Soient $x_1, ..., x_n$ ses éléments deux-à-deux distincts.
Notation: pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $m_k = E(X^k)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = P(X = x_i)$.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, d'après la formule du transfert:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k$$

Le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = V^\top \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

On sait que $\det(V^\top) = \det(V) = \prod_{i<j}(x_j - x_i) \neq 0$ car les x_i sont deux-à-deux différents.
Donc $V^\top$ est inversible:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = (V^\top)^{-1} \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}$$

On voit bien que connaître les m_k permet de retrouver les p_i.

2.3 Complément théorique : la comatrice.

Définition 36

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.
Le réel $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est appelé **cofacteur** de $a_{i,j}$ dans A.
La matrice $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée **comatrice** de A et notée $\mathrm{Com}(A)$.

Proposition 37

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ A \cdot (\mathrm{Com}(A))^\top = (\mathrm{Com}(A))^\top \cdot A = \det(A) I_n.$$

En particulier, si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^\top$.

Preuve :

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Alors:

$$\begin{aligned} \left[A(\mathrm{Com}(A))^\top\right]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \left[\mathrm{Com}(A)^\top\right]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} [\mathrm{Com}(A)]_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k} \end{aligned}$$

Si $i = j$, on reconnaît le développement selon la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\det(A)$.
Si $i \neq j$, on reconnaît le développement selon la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\widetilde{A}$ obtenue en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ ligne de A par la $i^{\text{ème}}$ ligne de A. Donc le déterminant est nul (argument de rang).

Bilan: $\left[A(\mathrm{Com}(A))^\top\right]_{i,j} = \begin{cases} \det(A) \text{ si } i = j. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Donc $A(\mathrm{Com}(A))^\top = \det(A) I_n$.

Exemple 38

Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on retrouve que $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Solution :

On a:

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\Delta_{1,1} & (-1)^{1+2}\Delta_{1,2} \\ (-1)^{2+1}\Delta_{2,1} & (-1)^{2+2}\Delta_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^\top = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple 39: Inverse à coefficients entiers.

1. Si $A \in M_n(\mathbb{Z})$, justifier que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que

$$A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \iff \det(A) = \pm 1.$$

Solution :

1. C'est vrai d'après 5, somme et produit d'entiers.
2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$, on a $AA^{-1} = I_n$ donc $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$.

Donc $\det(A)$ est un entier inversible dans $\mathbb{Z}$, donc $\det(A) \in \{\pm 1\}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\det(A) = \pm 1$. On a:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Com}(A)^\top = \pm \operatorname{Com}(A)^\top$$

Or, $\operatorname{Com}(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{i,j})$ or les $\Delta_{i,j}$ sont des entiers car déterminants de matrices de $M_n(\mathbb{Z})$.
Donc $A^{-1} = \pm \operatorname{Com}(A)^\top \in M_n(\mathbb{Z})$