Chapitre 27

Applications linéaires

Exercice 1: ♦◊◊

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer

$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \iff \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$$

Solution :

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.
On a assez facile que : $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$
Montrons que : $\mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^2)$
Posons $y = u(x)$
$u^2(x) = 0$
$u \circ u(x) = 0$
$u(y) = 0$
$y = 0$ $(y \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u))$
$u(x) = 0$
Ainsi on obtient : $x \in \mathrm{Ker}(u)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
Soit $y \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$
$\exists x \in E \mid y = u(x)$
Posons $x \mid y = u(x)$
$u(y) = 0$ $(y \in \mathrm{Ker}(u))$
$u \circ u(x) = 0$
$u^2(x) = 0$
$u(x) = 0$ $(\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2))$
Ainsi on obtient : $y = 0_E$

Exercice 2: ♦◊◊

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$$

Solution :

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$.
On a assez facile que : $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$
Montrons que : $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$
Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$
$\exists x \in E \mid y = u(x)$ $(y \in \mathrm{Im}(u))$
Posons $x \mid y = u(x)$
$\exists (x', \widetilde{x}) \in \mathrm{Ker}(u) \times E \mid x = x' + u(\widetilde{x})$ $(E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u))$
Posons $(x', \widetilde{x}) \in \mathrm{Ker} u \times E \mid x = x' + u(\widetilde{x})$
$y = u(x' + u(\widetilde{x}))$
$y = u(x') + u \circ u(\widetilde{x})$
$y = u^2(\widetilde{x})$ $(x' \in \mathrm{Ker}(u))$
Ainsi on obtient que : $y \in \mathrm{Im}(u^2)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.
On a assez facile que : $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) \subset E$
Montrons que : $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$
Soit $x \in E$ Posons $y \mid y = u(x)$
$\exists \widetilde{x} \in E \mid y = u^2(\widetilde{x})$ $(\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2))$
Posons $\widetilde{x} \mid y = u^2(\widetilde{x})$
$x = x - u(\widetilde{x}) + u(\widetilde{x})$
$u(x - u(\widetilde{x})) = u(x) - u^2(\widetilde{x}) = 0$
$u(\widetilde{x}) \in \mathrm{Im}(u)$ et $x - u(\widetilde{x}) \in \mathrm{Ker}(u)$
Ainsi on obtient que : $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$

Exercice 3: ♦♦◊

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel.

1. Montrer que pour tout $k \geq 0$, on a $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \Rightarrow \mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^{k+2})$$

Solution :

$\boxed{1.}$
Soient $k \in \mathbb{N}, x \in \mathrm{Ker}(u^k)$
$u^{k+1}(x) = u \circ u^k(x)$
$u^{k+1}(x) = u(0)$ $(x \in \mathrm{Ker}(u^k))$
$u^{k+1}(x) = 0$
Ainsi on obtient que $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$

$\boxed{2.}$
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
On obtient avec Q1 : $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+2})$ Montrons que : $\mathrm{Ker}(u^{k+2}) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+2})$
$u^{k+2}(x) = u^{k+1} \circ u(x) = 0$
$u^k \circ u(x) = 0$ $(\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1}))$
$u^{k+1}(x) = 0$
Ainsi on obtient que : $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$

Exercice 4: ♦♦♦

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Supposons que $p + q$ est projecteur. Montrer que

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$

Solution :

$\boxed{1.}$
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$.
On a $(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p^2 + q^2 = p + q$ donc $p + q$ est un projecteur.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $p + q$ est un projecteur.
Alors $(p+q)^2 = p + pq + qp + q = p + q$ donc $pq + qp = 0$.
Alors $pq = qp \Rightarrow pq = p^2q = -pqp = qp = -qp^2 = qp^2 = qp$.
Donc $pq = qp$, mais aussi $pq = -qp$ donc $pq = qp = 0$.