Chapitre 10

Équations algébriques.

Sommaire.

1 Racines carrées d'un nombre complexe. 1

2 Racines n-èmes de l'unité et équation $z^n = a$ 2

3 Équations du second degré. 3

4 Exercices. 4

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_n$ des nombres complexes. L'équation

$$\boxed{a_n z^n + a_{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0},$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est appelée **équation algébrique** : elle s'écrit seulement avec des sommes et des produits.
On parle aussi d'équation **polynomiale** puisque l'application $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est appelée polynome.
Dans le cours sur les polyômes, nous énoncerons le théorème d'Alembert-Gauss (ou théorème fondamental de l'algèbre) qui affirme que si $a_1, ..., a_n$ ne sont pas tous nuls, l'équation ci-dessus possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Prenons par exemple l'équation $x^6 + 2x^2 + 3 = 0$. On peut vite voir qu'elle ne possède pas de solution réelle. En effet, pour tout x réel, $x^6 + 2x + 3 \leq 3 > 0$. Le théorème de d'Alembert-Gauss nous apprend que dans $\mathbb{C}$, il y a une solution. Mais il ne nous dit pas comment la trouver ! Il n'existe d'ailleurs pas de méthode générale.

Dans cette partie, on va s'intéresser à des équations algébriques particulières et importantes, pour lesquelles on a une méthode de résolution.

1 Racines carrées d'un nombre complexe.

Rappelons que **la** racine carrée d'un nombre réel positif a est **le** nombre positif dont le carré vaut a. Il est noté $\sqrt{a}$. On réservera le symbole $\sqrt{\ }$ pour la racine carrée d'un nombre réel positif.

Définition 1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Une **racine carrée** de a est un nombre complexe z tel que $z^2 = a$.

Proposition 2

Tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées et elles sont opposées.

Preuve :

Soit $z, a \in \mathbb{C}^*$, $\exists (a, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mid a = \rho e^{i\alpha}$ et $\exists (\theta, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mid z = re^{i\theta}$.

$$z^2 = a \iff r^2 e^{2i\theta} = \rho e^{i\alpha} \iff \begin{cases} r^2 = \rho \\ 2\theta \equiv \alpha[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ \theta \equiv \frac{\alpha}{2}[\pi] \end{cases}$$

Deux solutions $\pm\sqrt{\rho}e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

⚠ Attention : l'écriture $\sqrt{a}$ continue à n'avoir de sens que lorsque a est un réel positif. Rappelons qu'elle désigne la solution positive de l'équation $x^2 = a$. Une écriture du type « $\sqrt{1+i}$ » n'a **aucun sens**.

Méthode : Recherche des racines carrées sous forme trigonométrique. ★

Soit l'équation $z^2 = a$ (d'inconnue z, avec $a \in \mathbb{C}^*$ fixé).
On écrit a sous forme trigonométrique : $a = \rho e^{i\alpha}$ ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$).
Les racines carrées de a sont

$$\sqrt{\rho}e^{i\alpha/2} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\rho}e^{i\alpha/2}.$$

Méthode : Recherche des racines carrées sous forme algébrique. ★

Soit l'équation $z^2 = a$ (d'inconnue z, avec $a \in \mathbb{C}$ fixé).
On écrit z et a sous forme algébrique : $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) et $a = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
On a $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Ainsi,

$$z^2 = a \iff \begin{cases} |z|^2 & = & |a| \\ z^2 & = & a \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ x^2 - y^2 & = & \alpha \\ 2xy & = & \beta \end{cases}$$

Les deux premières lignes permettent de calculer x^2 et y^2 et donc x et y au signe près.
La dernière ligne permet de savoir si x et y sont de mêmes signes ou de signes opposés.

Exemple 3

1. Calculer les racines carrées de $-4i$, ainsi que celles du nombre $3-4i$.
2. Calculer de deux façons les racines carrées du nombres $1+i$.
   En déduire une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution :

$\boxed{1.}$ Les racines de $-4i$: $\pm 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
Les racines de $3-4i$: soit $z\in\mathbb{C}$, $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid z=a+ib$.

$$z^2=3-4i \iff \begin{cases}|a+ib|^2=|3-4i|\\(a+ib)^2=(3-4i)^2\end{cases} \iff \begin{cases}a^2+b^2=5\\a^2-b^2=3\\2ab=-4\end{cases} \iff \begin{cases}a=\pm4\\b=\pm1\\ab=-2\end{cases} \iff \begin{cases}a=-2 \text{ et } b=1\\ \quad\text{ou}\\a=2 \quad\text{et } b=-1\end{cases}$$

Les racines sont donc $-2+i$ et $2-i$.

2 Racines n-èmes de l'unité et équation $z^n=a$

Définition 4

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ème de l'unité** toute solution complexe de l'équation

$$z^n=1.$$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$èmes de l'unité.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Remarquons que $1\in\mathbb{U}_n$. À quelle condition a-t-on $-1\in\mathbb{U}_n$?
Démontrer que $\mathbb{U}_n$ est stable par conjugaison : $\forall z\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{U}_n \Longrightarrow \overline{z}\in\mathbb{U}_n$.

Théorème 5: Description des racines $n$èmes de l'unité. ★

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a
$$\mathbb{U}_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\} \quad \text{(ensemble de cardinal } n).$$

Preuve :

Soit $z\in\mathbb{C}$: $\exists(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\mid z=re^{i\theta}$.

$$z^n=1 \iff \begin{cases}r^n=1\\n\theta\equiv0[2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases}r=1\\\theta\equiv0[\frac{2\pi}{n}]\end{cases}$$

Les solutions sont donc tous les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
$\boxed{\supset}$ Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $\exists k\in[\![0,n-1]\!]\mid z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, on a bien $z^n=1$ donc $z\in\mathbb{U}_n$.
$\boxed{\subset}$ Soit $z\in\mathbb{U}_n$, $\exists k\in\mathbb{Z}\mid z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Division euclidienne : $\exists!(q,r)\in\mathbb{Z}^2\mid k=qn+r$ et $0\le r\le n-1$. Alors:

$$z=e^{\frac{2i(qn+r)\pi}{n}}=e^{2iq\pi}\cdot e^{\frac{2ir\pi}{n}}=e^{\frac{2ir\pi}{n}}.$$

Donc $z\in\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$ car $r\in[\![0,n-1]\!]$.
Par double inclusion, on a bien $\mathbb{U}_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$.

Proposition 6: Propriétés algébriques des racines $n$èmes de 1.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Les racines $n$èmes de l'unité forment une progression géométrique de raison $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$:

$$\mathbb{U}_n=\{1,\omega,\omega^2,...,\omega^{n-1}\}.$$

Les nombres $\omega,\omega^2,...,\omega^{n-1}$ sont les $n-1$ solutions de $\sum_{k=0}^{n-1}x^k=0$.
Si $n\ge2$, alors la somme des racines $n$èmes de l'unité est nulle.

Preuve :

Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}=\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k=\omega^k$ avec $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Corrolaire 7: Cas particulier important : racines troisièmes de l'unité. ★

Notons $\boxed{j=e^{\frac{2i\pi}{3}}}$. L'équation $z^3=1$ a pour solutions les trois éléments de $\mathbb{U}_3=\{1,j,j^2\}$.

$$j=e^{\frac{ei\pi}{3}=-\frac{1}{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad j^2=e^{\frac{4i\pi}{3}}=j^{-1}=\overline{j}.$$

Les nombres j et j^2 sont les solutions de $x^2+x+1+0$.

Preuve :

$j^2=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)=e^{\frac{4i\pi}{3}}$, $\quad j^2\cdot j=j^3=1$ donc $j^2=j^{-1}=\overline{j}$.

Méthode : Résoudre $z^n = a$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ quelconque.

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On peut l'écrire $a = \rho e^{i\alpha}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le nombre $z_0 := \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}}$ est une solution de l'équation $z^n = a$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = a \iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n.$$

L'ensemble des solutions de $z^n = a$ est donc $\{z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

Les points dont l'affixe est solution de l'équation forment un polygone régulier à n sommets.

Exemple 8: ★

Résolution de $z^3 = 8i$.

Solution :

Posons $z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$ une solution de $z^3 = 8i$. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $z^3 = 8i \iff z^3 = z_0^3 \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1$.
Ainsi, $\frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_3$ donc les solutions sont dans $\{z_0,\ z_0 j,\ z_0 j^2\}$.

3 Équations du second degré.

Définition 9

On appelle **équation du second degré** toute équation de la forme

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation sont appelées ses **racines**.

Proposition 10: Équations du second degré, coefficients complexes.

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On cosidère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

et on note Δ le nombre complexes $b^2 - 4ac$, qu'on appelle **discriminant** de l'équation

- Si $\Delta \neq 0$, alors Δ a exactement deux raacines carrées que l'on note δ et $-\delta$.
  L'équation a alors exactement deux racines : $r_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine "double" : $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$.

Factorisation du trinôme : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\boxed{az^2 + bz + c = a(z - r_1)(z - r_2)}$.

Proposition 11: Équations du second degré, coefficients réels.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors Δ a pour racines carrées $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$ et l'équation a deux racines réelles distinctes
$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine "double" : $r = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors Δ a pour racines carrées $i\sqrt{|\Delta|}$ et $-i\sqrt{\Delta}$ et l'équation a deux racines complexes conjuguées
$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Proposition 12: Relations coefficients-racines.

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Il y a équivalence entre

1. z_1 et z_2 sont deux racines, éventuellement égales, de $az^2 + bz + c = 0$;
2. $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Preuve :

Soit $z \in \mathbb{C}$, $a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2)$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose 1, on regarde les cas particuliers $z = 0$ et $z = 1$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ $a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = az^2 + bz + c$ donc z_1 et z_2 sont racines.

Exemple 13

Soit $z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser à vue les expressions

$$z^2 + 2z - 3, \qquad 2z^2 + z - 1, \qquad z^2 - 2r\cos(\theta)z + r^2.$$

4 Exercices.

Exercice 1: ♦◊◊

1. Calculer les racines carrées du nombre $-8i$.
On donnera ces nombres sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

Solution :

$\boxed{1.}$ Notons δ une racine de $-8i$:

$$\delta = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2 - 2i$$

$\boxed{2.}$ Le discriminant Δ vaut $-8i$. Ses racines carrées sont donc $2-2i$ et $-2+2i$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{3-i, 1+i\}$.

Exercice 2: ♦◊◊

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calcul de

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z \quad \text{et} \quad \prod_{z\in\mathbb{U}_n} z$$

Solution :

On a :

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Et :

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

Exercice 3: ♦♦◊

Donner une expression du périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$.
Que conjecture-t-on sur la limite lorsque $n \to +\infty$? Essayer de prouver votre conjecture.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le périmètre du polygone régulier formé par les nombres de $\mathbb{U}_n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}}||e^{-\frac{\pi}{n}} - e^{\frac{\pi}{n}}| = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Et, puisque $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi$$

Exercice 4: ♦◊◊

Soit $\omega \in \mathbb{U}_7$, une racine 7e de l'unité différente de 1.
1. Justifier que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$.
2. Calculer le nombre $\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

Solution :

$\boxed{1.}$ On a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2$, $\sum\limits_{z\in\mathbb{U}_n} z = 0$ dans le 10.18.

$\boxed{2.}$ On a :

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{2+2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5}{\omega^6} = -\frac{2\omega^6}{\omega^6} = -2$$

Exercice 5: ♦♦♢

1. Quand dit-on qu'un nombre réel θ est un argument d'un nombre complexe z ?
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donner le module et un argument de $e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$.
3. Établir l'égalité

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1| = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Solution :

$\boxed{1.}$ θ est un argument de $z \neq 0$ ssi $z = |z|e^{i\theta}$.
$\boxed{2.}$ On a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{\pi(2k+n)}{2n}}$$

Ainsi son module est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et l'un de ses arguments est $\frac{\pi(2k+n)}{2n}$.
$\boxed{3.}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1| &= \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 2\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

Or, $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$. Ainsi (formule du cours) :

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1| &= 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\frac{\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\end{aligned}$$

Exercice 6: ♦♦♢

Soit θ un nombre réel appartenant à $]0, \pi[$. Résoudre l'équation

$$z^2 - 2e^{i\theta}z + 2ie^{i\theta}\sin\theta = 0.$$

On écrira les solutions sous forme algébrique <u>et</u> sous forme trigonométrique.

Solution :

On a:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4e^{2i\theta} - 8ie^{i\theta}\sin\theta = 4e^{i\theta}\left(\cos\theta + i\sin\theta - 2i\sin\theta\right) \\ &= 4e^{i\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) = 4e^{i\theta}e^{-i\theta} \\ &= 4\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ x_2 &= e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Exercice 7: ♦♦♢

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 2\cos(\theta)z^n + 1 = 0$.

Solution :

$\boxed{1.}$ $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta) \leq 0$.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2\cos(\theta) + i\sqrt{4\sin^2(\theta)}}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \\ x_2 &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta}\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Posons $z' = z^n$.
On sait que z' est solution de $z'^2 - 2\cos(\theta)z' + 1 = 0$.
Ainsi, $z_1' = e^{i\theta}$ et $z_2' = e^{-i\theta}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}z_1 &= {z_1'}^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{i\theta}{n}} \\ z_2 &= {z_2'}^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{i\theta}{n}}\end{aligned}$$

Exercice 8: ♦♦◇

Résoudre.

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0.$$

Solution :

Posons $\omega = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)$. On a : $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$.
On a alors $\omega \in \mathbb{U}_4 \setminus \{1\}$.
Ainsi, $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = i$ ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = -1$ ou $\left(\frac{z+i}{z-1}\right) = -i$.

$\boxed{1.}$ $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = i \iff z+i = iz+1 \iff z(1-i) = 1-i \iff z = 1.$

$\boxed{2.}$ $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = -1 \iff z+i = i-z \iff z = -z \iff z = 0.$

$\boxed{3.}$ $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = -i \iff z+i = -1-zi \iff z(1+i) = -1-i \iff z = -\frac{1+i}{1+i} = -1$

L'ensemble des solutions est donc : $\{-1, 0, 1\}$.

Exercice 9: ♦♦♦

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = z^n$.

Solution :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
z^n = (z+1)^n &\iff \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n = 1 \\
&\iff (1 + \frac{1}{z}) \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \ | \ 1 + \frac{1}{z} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff \frac{1}{z} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 \\
&\iff z = \frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1} \\
&\iff z = \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})} \\
&\iff z = \frac{\cos(\frac{k\pi}{n}) - i\sin(\frac{k\pi}{n})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})} \\
&\iff z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\tan(\frac{k\pi}{n})}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\{-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\tan(\frac{k\pi}{n})} \mid k \in [\![1, n-1]\!]\}$.

Exercice 10: ♦♦♦

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = -1 \\ uv = 1 \end{cases}$$

Solution :

On peut prendre un couple dans $(C^*)^2$ car le système impose que les membres soient non nuls.
Soit $(u, v) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Soit $(r, \rho) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\theta, \pi) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u = re^{i\theta}$ et $v = \rho e^{i\varphi}$

$$\begin{aligned}
(u, v) \text{ est solution} &\iff \begin{cases} u^2 + v^2 = -1 \\ uv = 1 \end{cases} \\
&\iff u^2 \text{ et } v^2 \text{ racines de } X^2 + X + 1 \\
&\iff (u^2, v^2) \in \left\{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right\} \\
&\iff \begin{cases} u^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ v^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{3}[\pi] \\ \rho = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{3}[\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{(e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}), (e^{i\frac{5\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}), (e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}), (e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}})\right\}$$

Exercice 11: ♦♦♦

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = (1+z)^n = 1$.
Montrer que n est un multiple de 6 et que $z^3 = 1$.

Solution :

Analyse.
On a $z^n = (1+z)^n = 1$. Ainsi, $|z| = |1+z| = 1$ et $z \in \mathbb{U}$.

Puisque $|z| = |1+z|$ et que $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(1+z)$, on a :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z+1)^2 + \mathrm{Im}(z+1)^2} \\ \Longrightarrow & \mathrm{Re}(z)^2 = \mathrm{Re}(z+1)^2 \\ \Longrightarrow & \mathrm{Re}(z)^2 = (1+\mathrm{Re}(z))^2 \\ \Longrightarrow & \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\exists \theta \in \mathbb{R} \mid z = e^{i\theta}$, et : $\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$.

On obtient que $\theta \in \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ainsi, $z \in \{e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$ et $z^3 = 1$.

On a $z^n \in \{e^{i\frac{2n\pi}{3}}, e^{i\frac{4n\pi}{3}}\}$, or $z^n = 1$ donc $\frac{2n\pi}{3} \equiv 0[2\pi]$ et $\frac{4n\pi}{3} \equiv 0[2\pi]$.

Ainsi, $n \equiv 0[3]$ et $2n \equiv 0[3]$. n est donc multiple de 6.

Synthèse.
On a $z \in \{e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$.

On a que $z^3 = 1$.

De plus, $z^n \in \{e^{i4k\pi}, e^{i8k\pi}\}$, or $e^{i4k\pi} = e^{i8k\pi} = 1$. Ainsi, $z^n = 1$.

Enfin, $(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}})^n = (2e^{i\frac{\pi}{3}}\cos(\frac{\pi}{3}))^{6k} = (64e^{2i\pi}\frac{1}{64})^k = 1$.

Et : $(1 + e^{i\frac{4\pi}{3}})^n = (2e^{i\frac{2\pi}{3}}\cos(\frac{2\pi}{3}))^{6k} = (64e^{4i\pi}\frac{1}{64})^k = 1$.