Primitives et intégrales
Corrigé

DARVOUX Théo

Octobre 2023

MRC AMINE POUR LES EXOS 8.8, 8.10, 8.11 ET 8.14

Exercices.

Exercice 8.1 [⧫◊◊]

Donner les primitives des fonctions suivantes (on précisera l'intervalle que l'on considère).

$$a : x \mapsto \cos x e^{\sin x}; \qquad b : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad c : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}; \qquad d : x \mapsto \frac{1}{3x+1};$$
$$e : x \mapsto \frac{\ln x}{x}; \qquad f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}; \qquad g : x \mapsto \sqrt{3x+1}; \qquad h : x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}.$$

$$A : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\sin x} + c \end{cases}; \quad B : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\sin x) + c \end{cases};$$
$$C : \begin{cases}]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\sqrt{\sin x} + c \end{cases}; \quad D : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}\ln(3x+1) + c \end{cases};$$
$$E : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2 x + c \end{cases}; \quad F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln x) + c \end{cases};$$
$$G : \begin{cases} [-\frac{1}{3}, +\infty] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c \end{cases}; \quad H : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + c \end{cases}.$$

Avec c les constantes d'intégration.

□

Exercice 8.2 [⧫◊◊] Issu du cahier de calcul

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
1. Sans chercher à les calculer, donner le signe des intégrales suivantes.

$$\int_{-2}^{3} e^{-x^2} dx; \qquad \int_{5}^{-3} |\sin x| dx; \qquad \int_{1}^{a} \ln^7(x) dx (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

2. En vous ramenant à des aires, calculer de tête

$$\int_1^3 7dx; \qquad \int_0^7 3x dx; \qquad \int_{-2}^{1} |x| dx.$$

1.
La première est positive car $-2 < 3$ et la fonction est positive sur $[-2, 3]$e.
La seconde est négative car $5 > -3$ et la fonction est positive sur $[-3, 5]$.
La dernière est positive lorsque $a \geq 1$ et négative lorsque $a \leq 1$ car $\ln^7$ est positive sur $[1, +\infty[$.
2.
La première vaut $2 \times 7 = 14$.
La seconde vaut $\frac{7^2 \times 3}{2} = \frac{147}{2}$.
La dernière vaut $\frac{1}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 2.5$

□

Exercice 8.3 [♦◊◊]

Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{x}dx, \quad I_2 = \int_{-1}^1 2^x dx, \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln^3(t)}{t}dt, \quad I_4 = \int_0^1 \frac{x}{2x^2+3}dx,$$
$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2+3}dx, \quad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx, \quad I_7 = \int_0^{\pi} |\cos x| dx, \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$
$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx.$$

$$I_1 = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad I_2 = \left[\frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}\right]_{-1}^1 = \frac{3}{\ln 4}, \quad I_3 = \left[\frac{\ln^4 t}{4}\right]_1^e = \frac{1}{4},$$
$$I_4 = \left[\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right), \quad I_5 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$
$$I_6 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[-2\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, I_7 = [2\sin x]_0^{\pi} = 2,$$
$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \cos x \sin^2(x) dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3},$$
$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x + \tan x - \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(\tan^2 x + 1)dx - \frac{\ln 2}{2} = \left[\frac{1}{2}\tan^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\ln 2}{2}$$
$$= \frac{1-\ln 2}{2}$$

□

Exercice 8.4 [♦◊◊]

Calculer le nombre $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

1. À l'aide d'une IPP.
2. À l'aide du changement de variable $x = t^2$.

1.

$$\int_1^2 \ln x \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\ln x \cdot 2\sqrt{x}\right]_1^2 - 2\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{2}\ln 2 - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = 2\sqrt{2}(\ln 2 - 2) + 4$$

2.

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln t^2}{t}2tdt = 4\int_1^{\sqrt{2}} \ln(t)dt = 4\left[t\ln t - t\right]_1^{\sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$$

□

Exercice 8.5 [♦◊◊]

Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}dt \qquad \text{en posant } t = u^2.$$

On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}dt = \int_0^1 \frac{1}{(u^2+1)u}2udu = 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = 2\left[\arctan(u)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

□

Exercice 8.6 [♦◊◊]

Calculer

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1}dt \qquad \text{en posant } u = t^5.$$

On a :

$$\int_0^1 \frac{t^9}{t^5+1}dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{5}t^5}{t^5+1}5t^4dt = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{u}{u+1}du = \frac{1}{5}\int_0^1 1 - \frac{1}{u+1}du = \frac{1}{5}\left(1 - \ln 2\right)$$

□

Exercice 8.7 [♦♦◊]

En posant le changement de variable $u = \tan(x)$, calculer l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+\cos^2(\arctan(u))} \cdot \frac{1}{1+u^2}du \\
&= \int_0^1 \frac{1+u^2}{(2+u^2)(1+u^2)}du \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2+u^2}du \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

□

Exercice 8.8 [♦◊◊]

On pose

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

1. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, prouver que $C = S$.
2. Calculer $C + S$, en déduire la valeur commune de ces deux intégrales.

1. En posant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, on a :

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} (-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\cos(u) + \sin(u)}\, du \end{aligned}$$

Ainsi, $C = S$.

2. On a :

$$\begin{aligned} C + S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $C = S = \frac{\pi}{4}$.

□

Exercice 8.9 [♦♦♦]

On considère les deux intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}dt \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}dt$$

1. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - t$ calculer $I + J$.
2. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ montrer que $I = J$.
3. En déduire I et J.

1. On a :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\frac{\pi}{4}-u)+\sin(\frac{\pi}{4}-u)}{\sqrt{1+\cos(2u)}}du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{\sqrt{2\cos^2(u)}}du = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{\sqrt{2}|\cos(u)|}du = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. On a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin(2t)}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sqrt{1+\sin(\pi-u)}}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sqrt{1+\sin(u)}}du = J$$

3. On a $2I = 2J = I + J = \frac{\pi}{2}$. Donc $I = J = \frac{\pi}{4}$.

□

Exercice 8.10 [♦◊◊]

Que vaut

$$\int_{-666}^{666} \ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right) dx \ ?$$

Soit $x \in [-666, 666]$.
Par imparité de arctan, on a :

$$\ln\left(\frac{1+e^{\arctan(-x)}}{1+e^{-\arctan(-x)}}\right) = \ln\left(\frac{1+e^{-\arctan(x)}}{1+e^{\arctan(x)}}\right) = -\ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right)$$

Ainsi, $\ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right)$ est impaire. Donc

$$\int_{-666}^{666} \ln\left(\frac{1+e^{\arctan(x)}}{1+e^{-\arctan(x)}}\right) dx = 0.$$

□

Exercice 8.11 [♦♦◊]

Le but de cet exercice est de calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

1. Justifier que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ possède une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.
Exprimer α à l'aide de la fonction ln.
2. Calculer J en posant $x = \mathrm{sh}(t)$. On exprimera le résultat en fonction de α.
3. À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une équation reliant I et J.
4. En déduire une expression de I en fonction de α.

1. On a :

$$\mathrm{sh}(\alpha) = 1 \iff \left(\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\right) = 1 \iff e^\alpha - 2e^{-\alpha} = 0 \iff e^{2\alpha} - 2e^\alpha - 1 = 0$$

Changement de variable : $X = e^\alpha$

$$\begin{aligned}
&X^2 - 2X - 1 = 0\\
&\Delta = (-2)^2 - 4\cdot(-1) = 8\\
&\Delta > 0, \text{ donc il y a 2 racines}\\
&X_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}, \quad X_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}\\
&\alpha = \ln(2+\sqrt{2}) \quad (\text{Impossible, car } \ln(2-\sqrt{2}) < 0)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = \ln(2+\sqrt{2})$

2. On a :

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)}}\cdot \mathrm{ch}(t)\,dt = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{ch}(t)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}}\,dt = \int_0^\alpha 1\,dt = \alpha$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx &= \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx\\
&= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\
&= \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\
&= \sqrt{2} - I + J
\end{aligned}$$

Ainsi, $I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+J\right)$.

4. Il vient immédiatement que $I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\alpha\right)$

□

Exercice 8.12 [♦♦♦]

Calculer $\int_0^1 \arctan(x^{1/3})dx$ en posant d'abord $x = t^3$.
On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan(x^{\frac{1}{3}})dx &= \int_0^1 \arctan(t) \cdot 3t^2 dt \\
&= \left[\arctan(t) \cdot t^3\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 t dt + \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{4}\left(\pi - 2 + \ln(4)\right)
\end{aligned}$$

□

Exercice 8.13 [♦♦♦]

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$ en posant $x = \frac{\pi}{4} - u$.
On a :

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)du = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I
\end{aligned}$$

On en déduit que $2I = \frac{\pi}{4}\ln 2$. Ainsi, $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$

□

Exercice 8.14 [♦♦♢] Les intégrales de Wallis

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le nombre

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

2. Démontrer les égalités suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Allez voir le DM7

□

Exercice 8.15 [♦♦♢]

Pour tous entiers naturels p et q, on note

$$I(p,q) := \int_0^1 t^p(1-t)^q dt.$$

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
Avec un changement de variable, démontrer que $I(p,q) = I(q,p)$.
2. À l'aide de l'intégration par parties, démontrer

$$\forall p,q \in \mathbb{N}, \quad (p+1)I(p,q+1) = (q+1)I(p+1,q).$$

3. (a) Calculer $I(p,0)$ pour un entier p donné.
(b) Démontrer enfin que

$$\forall p,q \in \mathbb{N}, \quad I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

1. Changement de variable : $u = 1-t$:

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q dt = -\int_1^0 (1-u)^p u^q du = \int_0^1 u^q(1-u)^p du$$

2. On a :

$$I(p,q+1) = \int_0^1 t^p(1-t)^{q+1}dt = \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}\cdot(1-t)^{q+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1}t^{p+1}\cdot -(q+1)(1-t)^q dt$$
$$= \frac{q+1}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt = \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q)$$

Donc on a bien $(p+1)I(p,q+1) = (q+1)I(p+1,q)$.
3. (a) On a :

$$I(p,0) = \int_0^1 t^p dt = \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

(b) Soit $\mathcal{P}_q$ la proposition $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Montrons que $\mathcal{P}_q$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $q = 0$, on a $I(p,q) = \frac{1}{p+1}$ et $\frac{p!q!}{(p+q+1)!} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}$. $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}_q$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{q+1}$.
On a :

$$I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q) = \frac{q+1}{p+1}\frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!}$$
$$= \frac{(p+1)!(q+1)!}{(p+1)(p+q+2)!} = \frac{p!(q+1)!}{(p+(q+1)+1)!}$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{q+1}$.
Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_q$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 8.16 [♦♦◊]

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.
1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que $J_n = 2I_n + nI_{n-1}$ est indépendant de n. Déterminer sa valeur.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis, en utilisant la question **2.**, démontrer l'encadrement

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

1. On a :

$$I_0 = \int_1^e x\,dx = \frac{e^2-1}{2}.$$
$$I_1 = \int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e x\ln^n x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln^n x\right]_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1} x\,dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $2I_n = e^2 - nI_{n-1}$.
Ainsi, $J_n = 2I_n + nI_{n-1} = e^2$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x\ln^{n+1} x\,dx - \int_1^e x\ln^n x\,dx = \int_1^e x\ln^n x(\ln x - 1)\,dx$$

Or, pour $x \in [1, e]$, $\ln x \in [0, 1]$ donc $\ln x - 1 \leq 0$. Ainsi, $x\ln^n x(\ln x - 1) \leq 0$.
On en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et donc que (I_n) est décroissante.
Montrons que $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$:

$$\begin{aligned} & I_n \leq I_{n-1} \\ \iff & nI_n \leq nI_{n-1} \\ \iff & (n+2)I_n \leq 2I_n + nI_{n-1} \\ \iff & I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \end{aligned}$$

Montrons que $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n$:

$$\begin{aligned} & I_{n+1} \leq I_n \\ \iff & (n+1)I_{n+1} \leq (n+1)I_n \\ \iff & (n+3)I_{n+1} \leq 2I_{n+1} + (n+1)I_n \\ \iff & I_{n+1} \leq \frac{e^2}{n+3} \iff \frac{e^2}{n+3} \leq I_{n+1} \leq I_n \end{aligned}$$

4. On a :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^2}{n+3}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{e^2}{n+2}=0$$
Ainsi, d'après le Sandwich Theorem, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$
On a:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{ne^2}{n+3}=e^2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{ne^2}{n+2}=e^2$$
Ainsi, d'après le Théorème de l'Étau, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = e^2$$
□

Exercice 8.17 [♦♦♦]

Calculer, pour tout entier naturel n, le nombre $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.
On a :
$$\begin{aligned} I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx &= \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)^{3/2}\right]_0^1-\int_0^1 -\frac{2}{3}nx^{n-1}(1-x)^{3/2}dx \\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx \\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}-x^n\sqrt{1-x}dx=\frac{2n}{3}(I_{n-1}-I_n)\end{aligned}$$
On obtient que
$$I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.$$
Calculons I_0 et I_1:
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \sqrt{1-x}dx=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}. \\ I_1 &= \frac{2}{5}I_0=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\end{aligned}$$
On a alors :
$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}=\frac{2n}{2n+3}\cdot\frac{2(n-1)}{2n+1}\cdot\ldots\cdot I_1 \\ &= \frac{2^{n+1}n!}{\prod_{k=0}^{n} 2k+3}\end{aligned}$$
On peut donc faire une preuve belle, rigoureuse, et **triviale** par récurrence mais j'ai la flemme.
□