Colles, semaine 21 (18/03→22/03)

Espaces vectoriels de dimension finie
Applications linéaires (parties 1,2,3)

Le cours sur la dimension finie a été terminé en début de semaine, avec des résultats sur les sommes (formule de Grassmann, caractérisation des supplémentaires en dimension finie).

Le cours sur les applications linéaires est bien avancé : pour cette semaine, on se concentrera sur le début, avec les notions d'**images et de noyaux**. Pour les résultats sur les applications linéaires en dimension finie, nous attendons la semaine prochaine.

Questions de cours.

- Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est trivial.
- Si $u \in L(E,F)$ et $(x_1,\dots,x_n)$ engendre E, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(x_1),\dots,u(x_n))$.
- Définition de la projection sur un sous-espace F parallèlement à un supplémentaire G. Dessin et principales propriétés (sans preuve).
- Définition de la symétrie par rapport à un sous-espace F parallèlement à un supplémentaire G. Dessin et principales propriétés (sans preuve).
- Si p est un endomorphisme idempotent, alors c'est un projecteur (on démontre en particulier que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$).

Savoir-faire importants.

- Savoir prouver une inclusion. Savoir prouver une égalité de sous-espaces par double inclusion.
- Savoir utiliser la dimension pour prouver l'égalité de deux sous-espaces vectoriels.
- Savoir utiliser la caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
- Savoir traduire l'appartenance à un noyau, à une image.
- Avoir repéré les inclusions triviales $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
- Savoir travailler dans l'anneau $L(E)$. Connaître la définition de u^2, par exemple.
- Connaître les propriétés des projecteurs, des symétries.

À venir en semaine 22 : Applications linéaires (suite et fin).