Khôlles d'informatique, Saison 2.

$$\text{Mars} \xrightarrow[\text{programme de colle} \to \text{fin}]{} \text{Avril}$$

Résumé

Dans ce document LaTeX, on donne des preuves incomplètes des questions de cours à connaître :))

Questions de cours :
- Ensembles construits inductivement.
- Théorème d'induction structurelle.
- Utilisation du théorème : Taille d'un ABS.
- Définitions et preuves du chapitre Logique Propositionnelle

FIGURE 1 – La majorité à voté pour le C dans le sondage : 

Questions de cours :

Définition inductive d'un ensemble.
Soit E un ensemble non vide. Une définition de $X \subseteq E$ consiste à se donner :
- ⊚ Un ensemble $B \subseteq E$ non vide d'assertions.
- ⊚ Un ensemble R de règles : $\forall r_i \in R,\ r_i : E^{n_i} \to E$ avec n_i l'arité de r_i.

Théorème du point fixe (inclus dans la question de cours) :
Il existe un plus petit sous-ensemble X de E tel que :
- (B) $B \subset X$: les assertions sont dans X.
- (I) $\forall r_i \in R,\ \forall (x_1, ..., x_{n_i}) \in X^{n_i}$ on a $r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in X$ avec n_i l'arité de r_i : X est stable par les règles.

Preuve.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de E vérifiant (B) et (I).
On considère X l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{F}$:

$$X = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y.$$

Puisque $\forall Y \in \mathcal{F},\ B \subset Y$, on en déduit que $B \subset X$. On a donc vérifié (B).
Soit $r_i \in R$ et $(x_1, ..., x_{n_i}) \in X^{n_i}$.
Remarquons que $\forall Y \in \mathcal{F},\ x_1, ..., x_{n_i} \in Y$, or les Y sont stables par les règles d'où $\forall Y \in \mathcal{F},\ r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in Y$.
Puisque X est leur intersection, $r_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in X$ et X vérifie alors (I).
C'est donc le plus petit ensemble vérifiant (B) et (I) par construction.

Théorème d'induction structurelle.
Soit $X \subseteq E$ défini inductivement (cf question précédente) et $\mathcal{P}$ un prédicat sur E.
Si on a que :
- (B) $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in B$.
- (I) $\mathcal{P}$ est héréditaire : $\forall r_i \in R,\ \forall (x_1, ..., x_{n_i}) \in E^{n_i},\ \mathcal{P}(x_1), ..., \mathcal{P}(x_{n_i}) \Longrightarrow \mathcal{P}(r_i(x_1, ..., x_{n_i}))$.

Alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$.
Preuve.
On suppose (B) et (I), montrons que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.
Soit $Y = \{x \in E \mid P(x)\}$. Alors $B \subset Y$ d'après (B) et Y est stable par R d'après (I).
On a alors $X \subset Y$ donc $\forall x \in X,\ \mathcal{P}(x)$ est vrai.

☼☼ Fin du sujet ! ☼☼