Partie A. L'opérateur de translation.

1. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons d son degré (il est inférieur à n). On peut écrire P sous la forme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, où a_d, coefficient dominant de P, est non nul. On calcule
$$\tau(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d (X+1)^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k$$
$$= a_d X^d + \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k.$$
Les deux sommes écrites ci-dessus sont des polynômes de degré inférieur à $d-1$. Ainsi, on voit que $\tau(P)$ est bien un polynôme de degré $d = \deg(P)$ et de coefficient dominant $a_d = \mathrm{cd}(P)$.

2. Tout d'abord, remarquons que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\tau(P)$ aussi d'après la question précédente. Vérifions que τ est linéaire. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,
$$\tau(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda \tau(P) + \mu \tau(Q).$$
Soit $P \in \mathrm{Ker}(\tau)$. Alors $\tau(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Supposons $P \neq 0$. Alors $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$, d'où $\tau(P) \neq 0$, ce qui n'est pas. Le polynôme P est donc nul, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\tau) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.
Ce qui précède implique que l'application τ est injective. Puisque la dimension de l'espace de départ vaut celle de l'espace d'arrivée, par caractérisation de la bijectivité en dimension finie, on obtient que τ est bijective.

Ici, on pouvait aussi facilement justifier la bijectivité de τ en remarquant que si σ est l'application $P(X) \mapsto P(X-1)$, alors,
$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \text{bonus :} \quad \tau^{-1} = \sigma.$$

3. Le polynôme P étant fixé, pour k entier naturel on pose $\mathcal{P}_k$ « $\tau^k(P) = P(X+k)$ ».

• On a $\tau^0(P) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}(P) = P = P(X+0)$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_k$. Alors,
$$\tau^{k+1} = \tau \circ \tau^k(P) = \tau(\tau^k(P)) = \tau(P(X+k)) = P((X+1)+k) = P(X+(k+1)).$$
Ceci démontre $\mathcal{P}_{k+1}$.
• D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout k entier naturel.

Partie B. L'opérateur de différence.

1. Soit un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons d son degré. On peut écrire P sous la forme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $d \in [\![1, n]\!]$ et $a_d \neq 0$. On calcule en mettant de côté les termes de degré d et $d-1$:
$$\delta(P) = a_d \left((X+1)^d - X^d\right) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \left((X+1)^k - X^k\right)$$
$$= a_d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} X^j + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$$
$$= \underbrace{d a_d}_{\neq 0} X^{d-1} + \underbrace{a_d \sum_{j=0}^{d-2} \binom{d}{j} X^j + \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} X^j}_{\in \mathbb{R}_{d-2}[X]}.$$
On en déduit les égalités
$$\boxed{\deg(\delta(P)) = d-1 = \deg(P) - 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{cd}\left(\delta(P)\right) = d a_d = \deg(P) \cdot \mathrm{cd}(P)}.$$

2. • Soit $P \in \mathrm{Ker}(\delta)$. Alors P ne peut être que constant. En effet, s'il ne l'est pas, $\deg(P) \geq 1$ et d'après la question précédente $\deg(\delta(P)) \geq 0$ (ce qui empêche $\delta(P)$ d'être nul). On a $\mathrm{Ker}(\delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$, et l'autre inclusion est facile : $\boxed{\mathrm{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$.
• D'après le théorème du rang, appliqué à δ,
$$\dim\left(\mathrm{Im}(\delta)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(\delta)\right) = n + 1 - 1 = n.$$
Or, d'après la question (b), si P est un polynôme de degré inférieur à n, alors $\delta(P)$ est de degré inférieur à $n-1$, ce qui se récrit $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Une inclusion et l'égalité des dimensions donnent $\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

3. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $\deg(P) \leq j-1$, alors $\deg\left(\delta^j(P)\right) \leq \deg(P) - j \leq -1$, ce qui amène $\delta(P) = 0$ donc $P \in \mathrm{Ker}(\delta)$. On a $\mathbb{R}_{j-1}[X] \subset \mathrm{Ker}(\delta)$.
Réciproquement, si $P \in \mathrm{Ker}(\delta)$, alors $\deg(P) \leq j-1$. Montrons-le par l'absurde en supposant $\deg(P) \geq j$. Alors on peut appliquer j fois la question 1 sur un polynôme non constant pour avoir $\deg\left(\delta^j(P)\right) = \deg(P) - j \geq 0$. On a donc En itérant le résultat de la question 1, on obtient que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$\delta^j(P) = \deg(P) - j \geq 0$, ce qui contredit $\delta^j(P) = 0$.

Par double inclusion, on a donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$.

• Grâce à la question 1, on montre que $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$ et on conclut à l'égalité en prouvant l'égalité des dimensions grâce à la formule du rang : $\boxed{\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$.

4. (a) L'identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ commute avec τ, comme avec n'importe quel endomorphisme. On peut donc écrire la formule du binôme, pour τ et $-\mathrm{Id}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta^k = (\tau - \mathrm{Id})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \tau^j \circ (-\mathrm{Id})^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j.$$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $P \in \mathrm{Ker}(\delta^n)$ d'après la question 3, c'est-à-dire $\delta^n(P) = 0$. En appliquant la question précédente avec $k = n$,

$$0_{\mathbb{R}_n[X]} = \delta^n(P) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j(P) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(X+j),$$

la dernière égalité utilisant la question A.3. Évaluons en 0 :

$$0 = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j)$$

5. (a) L'endomorphisme u commute avec tous ses itérés, et donc commute en particulier avec $u^2 = \delta$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Alors $\delta(P) = 0$ puisqu'on a vu que $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$. Comme u et δ commutent, on peut écrire

$$\delta(u(P)) = u(\delta(P)) = u(0) = 0.$$

Ceci montre que $u(P) \in \mathrm{Ker}(\delta)$, et donc que $u(P) \in \mathbb{R}_0[X]$.

(c) L'endomorphisme u commute avec tous ses itérés, et donc commute en particulier avec $u^4 = \delta^2$.

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Alors $\delta^2(P) = 0$ puisqu'on a vu que $\mathrm{Ker}(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$ en question B.3. Comme u et δ^2 commutent, on peut écrire

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0.$$

Ceci montre que $u(P) \in \mathrm{Ker}(\delta^2)$, et donc que $u(P) \in \mathbb{R}_1[X]$.

(e) D'après les questions b et d précédentes, il existe a, b, c trois réels tels que

$$u(X) = aX + b \quad \text{et} \quad u(1) = 0.$$

D'une part, $u^2(X) = \delta(X) = 1$.
D'autre part, $u^2(X) = u(aX + b) = au(X) + bu(1) = a^2X + ab + bc$.
Par unicité des coefficients $a^2 = 0$ et $ab + bc = 0$, et donc $a = 0$ et $bc = 0$.
D'une part, $u^2(1) = \delta(1) = 0$.
D'autre part, $u^2(1) = u(c) = c^2$. On a donc $c^2 = 0$ puis $c = 0$.
En revenant au calcul de $u^2(X)$, on obtient $u^2(X) = a^2X + ab + bc = 0$, mais on a aussi $u^2(X) = 1$. C'est absurde.

On a prouvé qu' $\boxed{\text{il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ tel que } u^2 = \delta}$.

6. (a) D'après la question 1.(b), les degrés des polynômes de la famille $\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right)$ sont respectivement $d, d-1, \ldots, 1, 0$. Cette famille de polynômes non nuls étant de degrés échelonnés, elle est libre. Notons

$$V = \mathrm{Vect}\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right).$$

Toute combinaison linéaire de polynômes de cette famille est de degré inférieur à d, de sorte que $V \subset \mathbb{R}_d[X]$. Or, V est de dimension $d+1$, car il est engendré par une famille libre de cardinal $d+1$. On a donc

$$V = \mathbb{R}_d[X].$$

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, stable par δ et non réduit à $\{0\}$. Soit d *le plus grand degré* d'un polynôme de F et $P \in F$ de degré $d = \deg(P)$. Comme $F \neq \{0\}$, on a $d \geq 0$ et d étant maximal, $\boxed{F \subset \mathbb{R}_d[X]}$.
Le polynôme $\delta(P)$ appartient à F puisque F est stable par δ. Il en va de même de $\delta^2(P) = \delta(\delta(P))$ puisque $\delta(P) \in F$ et en itérant, on obtient que tous les polynômes de la famille $\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right)$ appartiennent à F. On a donc

$$\mathrm{Vect}\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right) \subset F.$$

D'après 1. ceci se récrit $\boxed{\mathbb{R}_d[X] \subset F}$, ce qui permet de conclure que $F = \mathbb{R}_d[X]$.

En guise de conclusion globale sur la question 3, on écrira que les sous-espaces stables par δ sont exactement le sous-espace nul et les espaces $\mathbb{R}_d[X]$ avec $d \in [\![0, n]\!]$.

Partie C. Polynômes de Hilbert.

C.1. Décomposition sur la base.

1. Cette famille est constituée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts : c'est une famille libre. Étant de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, espace de dimension $n+1$, c'est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Le polynôme H_0 est constant : $\delta(H_0)=0$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\delta(H_k) &= H_k(X+1)-H_k\\ &= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j)-\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\\ &\underset{i=j-1}{=} \frac{1}{k!}\prod_{i=-1}^{k-2}(X-i)-\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\\ &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)(X+1-(X-(k-1)))\\ &= \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k-1)!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)=H_{k-1}.\end{aligned}$$

3. Soient $l\in[\![0,n]\!]$. D'après la question précédente et une récurrence immédiate, pour tout i inférieur à l, $\delta^i(H_l)=H_{l-i}$. Soit $k\in[\![0,n]\!]$.
   • Si $k\le l-1)$, alors $l-k\ge 1$ et 0 est racine du polynôme H_{l-k}. On a donc $\delta^k(H_l)(0)=H_{l-k}(0)=0$.
   • Si $k=l$, $\delta^k(H_l)=H_0=1$ et on a $\delta^k(H_l)(0)=1$.
   • Si $k>l$, alors $\delta^k(H_l)=\delta^{k-l}(H_0)=0_{\mathbb{R}_n[X]}$. On a donc $\delta^k(H_l)(0)=0$.
4. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. La famille $(H_0,\ldots,H_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\exists!(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\quad P=\sum_{l=0}^{n}\lambda_l H_l.$$

Fixons k dans $[\![0,n]\!]$ et appliquons δ^k. Par linéarité, $\delta^k(P)=\sum\limits_{l=0}^{n}\lambda_l\delta^k(P)$. Évaluons en 0 : le seul terme non nul, d'après la question précédente, est celui d'indice $l=k$, qui vaut 1 d'où

$$\delta^k(P)(0)=\lambda_k\delta^k(H_k)(0)=\lambda_k,$$

ce qui permet de conclure.

C.2. Application : suites récurrentes.

1. Soit $Q=X^3+2X^2+5X+7$. Il s'agit de calculer les nombres $\delta^k(Q)(0)$ pour $k\in[\![0,3]\!]$. Un calcul amène

$$Q=X^3+2X^2+5X+7,\quad \delta(Q)=3X^2+7X+8,\quad \delta^2(Q)=6X+10,\quad \delta^3(Q)=6.$$

L'évaluation en 0 donne les coordonnées :

$$Q=7H_0+8H_1+10H_2+6H_3.$$

2. Puisque $\delta^2(H_k)=H_{k-2}$, par linéarité

$$Q=7\delta^2(H_2)+8\delta^2(H_3)+10\delta^2(H_4)+6\delta^2(H_5)=\delta^2\left(7H_2+8H_3+10H_4+6H_5\right).$$

Le polynôme $P=7H_2+8H_3+10H_4+6H_5$ est bien dans $\mathbb{R}_5[X]$ et vérifie $\delta^2(P)=Q$.
3. Ce qui précède nous met sur la piste d'une solution particulière du problème posé dans cette question. En effet,

$$\delta^2(P)=P(X+2)-2P(X+1)+P(X)=X^3+2X^2+5X+7.$$

Ainsi, si on note $v_k=P(k)$ pour tout entier k, on a

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad v_{k+2}-2v_{k+1}+v_k=k^3+2k^2+5k+7.$$

Soit u une suite réelle telle que

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad u_{k+2}-2u_{k+1}+u_k=k^3+2k^2+5k+7.$$

On a alors

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad (u_{k+2}-v_{k+2})-2(u_{k+1}-v_{k+1})+(u_k-v_k)=0.$$

La suite $u-v$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (homogène). L'équation caractéristique étant $(x-1)^2=0$, de racine double 1, nous savons que ces suite forment un plan vectoriel engendré par les suite $(1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n1^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites qui conviennent est donc

$$\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ \mid\ \exists!(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=v_n+\lambda+\mu n\right\}$$

C.3. Application : polynômes à valeurs entières.

1. • Supposons $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque H_n a pour racines les entiers compris entre 0 et $n-1$: $H_n(k) = 0$.
   • Supposons $k \geq n$. Alors,
$$H_n(k) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(k-j) \underset{i=k-j}{=} \frac{1}{n!}\prod_{j=k-(n-1)}^{k} i = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n}.$$
   • Supposons $k < 0$ et notons $k = -p$.
$$H_n(k) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1} -(p+j) \underset{i=p+j}{=} \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{i=p}^{n-1+p} i = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n\binom{n+p-1}{p-1}.$$
2. Les coefficients binomiaux sont des entiers ! On l'avait démontré par récurrence sur les lignes du triangle de Pascal en début d'année. Ce sera très bientôt encore plus évident, lorsqu'on aura donné leur signification combinatoire. Dans les trois cas détaillés ci-dessus, on voit que l'image d'un entier relatif par H_n est un entier relatif.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Alors, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\delta(P(k)) = P(k+1) - P(k)$. Ce dernier nombre est un entier relatif, comme différence d'entiers relatifs.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   • Supposons que P est à valeurs entières sur les entiers.Ses coordonnées sur la base des (H_k) sont les nombres $\delta^k(P)(0)$. Or, on a vu dans la question précédente que si $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, alors c'est aussi le cas pour $\delta(P)$ puis par une récurrence simple, pour tout polynôme $\delta^k(P)$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. C'est ainsi que les coordonnées de P sur la base, les nombres $\delta^k(P)(0)$ sont bien des entiers.
   • Réciproquement, supposons que les coordonnées de P sur la base des (H_k) (notées ici $\lambda_0, \dots, \lambda_n$) sont des entiers. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P = \sum_{l=0}^{n} \lambda_l H_l(k)$. Les nombres $H_l(k)$ sont aussi des entiers. En effet, pour $l \in [\![1, n]\!]$, $H_l = \delta^{n-l}(H_n)$. Puisque H_n est à valeurs entières sur les entiers, H_l l'est aussi puisque d'après 7, cette propriété est conservée en appliquant δ.

5. Supposons que P est à valeurs entières sur les entiers. D'après la question précédente, il existe des <u>entiers</u> $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que
$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j).$$

Ainsi,
$$d!P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{d!}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j).$$
Puisque pour $k \leq d$, les $\frac{d!}{k!}$ sont des entiers, comme les λ_k, il est clair que $d!P \in \mathbb{Z}[X]$.

La réciproque est fausse, comme on le voit avec le polynôme $P = \frac{1}{2}X^2$. En effet, $2!P$ est à coefficients entiers mais $P(1) = \frac{1}{2}$ donc P ne prend pas que des valeurs entières sur les entiers.