Corrigé du DM 3

Exercice 1. Étude de fonction.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $-x$ et $x+\pi$ sont des réels. On calcule d'une part

$$f(-x) = \cos(-3x)\cos(-x)^3 = \cos(3x)\cos(x)^3 = f(x) \qquad \text{car cos est paire.}$$

   ce qui montre que f est paire. D'autre part

$$\begin{aligned} f(x+\pi) = \cos(3x+3\pi)\cos(x+\pi)^3 &= (-\cos 3x)(-\cos x)^3 \\ &= (-1)^4 \cos 3x (\cos x)^3 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

   ce qui montre que f est π-périodique. On peut donc réduire l'étude à un intervalle de longueur π. Choisissons $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: par parité, on pourra finalement réduire l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

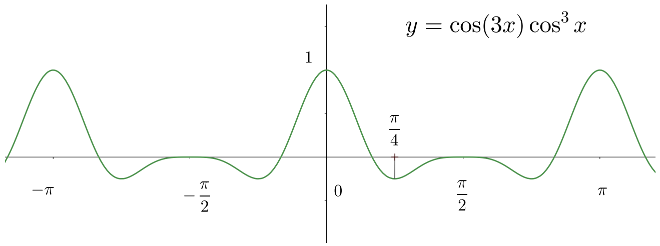
2. La fonction f est dérivable comme produit et composée de fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour x un réel, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(-\sin(3x)\right)\cos^3 x + \cos(3x)\cdot 3(-\sin x)\cos^2 x \\ &= -3\cos^2 x\left(\sin(3x)\cos x + \cos(3x)\sin x\right) \\ &= -3\cos^2 x \sin(3x+x) \\ &= -3\cos^2 x\sin(4x) \end{aligned}$$

   Puisque $\cos^2 x$ est positif, il est vrai que $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$.

3. Voici le tableau de variations sur l'intervalle d'étude réduit, puis un graphe sur $\mathbb{R}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0



Exercice 2. Recherche de points fixes.

1. Le quotient $\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ est défini dès que $x \neq 1$.
   C'est un nombre positif (valeur absolue). Il est *strictement* positif dès que $x \neq -1$. La fonction f est donc définie sur $X_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. Soit $x \in X_f$. Puisque X_f est "symétrique" par rapport à 0, $-x \in X_f$ et

$$f(-x) = \ln\left(\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right) = -\ln\left(\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{-1}\right) = -\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) = -f(x).$$

3. Puisque f est impaire, on va se contenter de l'étudier sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$.
   • Si $x \in]1,+\infty[$, $\frac{1+x}{1-x} < 0$, d'où

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(1+x) - \ln(x-1).$$

   La fonction f est clairement dérivable sur $]1,+\infty[$. Pour x dans cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x^2-1},$$

   • Si $x \in [0,1[$, $\frac{1+x}{1-x} > 0$, d'où

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

   La fonction f est clairement dérivable sur $[0,1[$. Pour x dans cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2},$$

   Voici donc le tableau de variations de f :

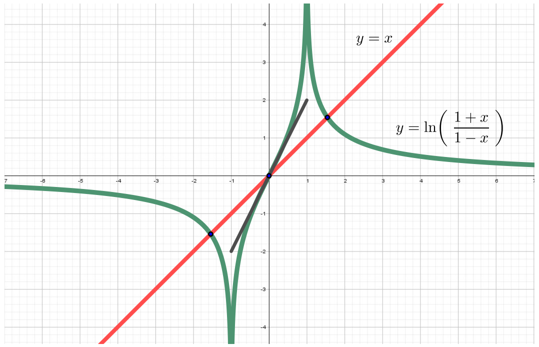
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Détails pour la limite nulle en $+\infty$.

On a $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On obtient une limite nulle par composition avec ln.

4. La fonction f est dérivable en 0. On a $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$. La courbe admet une tangente à l'origine d'équation $y = x$.
Rappelons que pour tout $x \in [0, 1[$, $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$.
La dérivée de la fonction f est donc croissante sur $[0, 1[$ car c'est l'inverse d'une fonction décroissante (*vous pouvez calculer la dérivée seconde si vous y tenez*).
Ceci démontre la convexité de f sur $[0, 1[$ (et sa concavité sur $]-1, 0]$ par imparité).

5. Voici le graphe de f, ainsi que la droite d'équation $y = x$, qui servira à la question suivante.
La tangente en 0, d'équation $y = 2x$ est représentée aussi : l'étude de convexité faite à la question précédente donne que la courbe est au-dessus de sa tangente sur $[0, 1[$.



6. La courbe et la droite d'équation $y = x$ ont trois points d'intersection : on conjecture trois points fixes.

7. La fonction g est dérivable sur $]1, +\infty[$. Pour x dans cet intervalle,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{2}{x^2 - 1} - 1 < 0,$$

ce qui amène que g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

La fonction g change de signe : en s'appuyant sur les limites de f, il est facile de montrer que

$$\lim_{x\to1+} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

La fonction g est continue sur $]1, +\infty[$ (car dérivable), elle y est strictement décroissante et change de signe.
D'après le TVI strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ (c'est-à-dire $f(x) = x$) possède une unique solution sur $[1, +\infty[$.

Autre rédaction possible.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.
Le théorème de la bijection continue assure que g réalise une bijection entre $]1, +\infty[$ et $g(]1, +\infty[)$.
À l'aide des limites de g, on obtient que $g(]1, +\infty[) = \mathbb{R}$
En particulier, 0 possède un unique antécédent par g dans $]1, +\infty[$.

Problème 2. (*facultatif, la fin est difficile*) Un exercice du concours général 2023.

1. $v(1) = 0$, $v(2) = 1$, $v(3) = 0$, $v(4) = 2$.

2. • On prouve l'implication (n impair $\Longrightarrow v(n) = 0$) par contraposée.
Supposons que $v(n) \neq 0$, c'est-à-dire $v(n) \geq 1$. On a que $n/2^{v(n)}$ est égal à un certain entier naturel q, puis $n = 2 \cdot 2^{v(n)-1} q$. Ceci prouve que n est pair (il est de la forme $n = 2k$ avec k entier).
• Supposons que n est pair. Alors $n/2$ est entier et pour tout $k \geq 1$,
$$\frac{n}{2^k} = \frac{n/2}{2^{k-1}}.$$
Ainsi,
$$k \leq v(n) \iff \frac{n}{2^k} \in \mathbb{N} \iff \frac{n/2}{2^{k-1}} \in \mathbb{N} \iff k - 1 \leq v(\tfrac{n}{2}).$$
On a bien $v(n) = v(\frac{n}{2}) + 1$.

3. Voici les huit premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
u_k	1	2	1/2	3	2/3	3/2	1/3	4

4. Le nombre u_1 est rationnel et il est clair que si $u_n \in \mathbb{Q}$, alors $u_{n+1} \in \mathbb{Q}$ (puisque $v(n)$ est rationnel et que $\mathbb{Q}$ est stable par somme et inverse). On obtient donc par récurrence que (u_n) est une suite de rationnels.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\mathcal{P}_n : \text{« } u_{2n} > 0,\ u_{2n+1} > 0,\ u_{2n} = u_n + 1,\ u_{2n+1} = \tfrac{u_n}{u_n+1} \text{ ».}$$
• On vérifie à partir de la question précédente que $u_2 > 0$, $u_3 > 0$ et que $u_4 = u_2 + 1$ et $u_5 = \frac{u_2}{u_2+1}$. La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que les assertions $\mathcal{P}_k$ sont vraies pour tout k entre 1 et n.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

D'après $\mathcal{P}_n$, on a $u_{2n+1} \neq 0$. Ainsi,
$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= 1 + 2v(2n+2) - \frac{1}{u_{2n+1}} \\ &= 1 + 2\left(v(n+1) + 1\right) - \frac{u_n + 1}{u_n} \quad \text{(question 2 et } \mathcal{P}_n\text{)} \\ &= 1 + \left(1 + 2v(n+1) - \frac{1}{u_n}\right) \\ &= 1 + u_{n+1} \end{aligned}$$
Pour écrire la dernière égalité, on a besoin de savoir que $u_n \neq 0$. C'est là qu'on voit la nécessité d'une récurrence dite forte : sous notre hypothèse, tous les termes u_i avec i entre 1 et $2n+1$ sont strictement positifs : c'est en particulier le cas pour u_n.

L'hypothèse de récurrence forte nous donne aussi $u_{n+1} > 0$ puis $u_{2n+2} = u_{n+1} + 1 > 0$. Puisque u_{2n+2} est non nul, on a
$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= 1 + 2v(2n+3) - \frac{1}{u_{2n+2}} \\ &= 1 + 2 \cdot 0 - \frac{1}{u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + 1}. \end{aligned}$$
• D'après le principe de récurrence, pour tout entier n supérieur à 1, $\mathcal{P}_n$ est vraie. Cela implique en particulier que tous les u_n sont strictement positifs à partir du rang 2. Puisque c'est aussi vrai pour u_1, on a bien achevé de vérifier que les u_n sont tous des rationnels strictement positifs.

5. Pour tout entier naturel non nul n, nous posons la proposition
$$\mathcal{P}_n : \text{« pour tout couple } (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } p + q \leq n, \text{ le rationnel } \tfrac{p}{q} \text{ est un terme de la suite. »}$$

• Initialisation. Il n'existe pas de couple d'entiers strictement positifs tels que $p+q \leq 1$. L'assertion $\mathcal{P}_1$ est donc formellement vraie... et la récurrence est ainsi initialisée.

• Initialisation (bis). Si cela vous gêne de vous appuyer sur ce cas un peu dégénéré, vous pouvez aussi initialiser au rang 2 : il y a un unique couple (p,q) qui convient et c'est $(1,1)$; or, $\frac{1}{1} = u_1$: le rationnel est bien un terme de la suite, et $\mathcal{P}_2$ est vraie.

• Hérédité. Soit n un entier supérieur à 2.
Supposons $\mathcal{P}_n$. Pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$, considérons un couple $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p+q \leq n+1$.

— Cas $p = q$. Le rationnel $\frac{p}{q}$ vaut alors 1, qui est un terme de la suite.

— Cas $p > q$. Alors $\frac{p}{q} = \frac{p-q}{q} + 1$.
Or, $(p-q,q)$ est un couple de $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p-q+q = p \leq n$ (puisque $p+q \leq n+1$ et $q \geq 1$). D'après la proposition $\mathcal{P}_n$, le rationnel $\frac{p-q}{q}$ est un terme de la suite : il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{p-q}{q} = u_k$. D'après la question précédente, on a alors
$$\frac{p}{q} = \frac{p-q}{q} + 1 = u_k + 1 = u_{2k},$$
ce qui prouve bien que $\frac{p}{q}$ est un terme de la suite.

— Cas $p > q$. Toujours dans l'optique d'utiliser la question précédente, peut-on écrire $\frac{p}{q} = \frac{r}{r+1}$? Résoudre l'équation donne $r = \frac{p}{q-p}$.
Or, $(p, q-p)$ est un couple d'entiers naturels non nuls tels que $p+q-p = q \leq n$ (puisque $p+q \leq n+1$ et $p \geq 1$). D'après la proposition $\mathcal{P}_n$, le rationnel $\frac{p}{q-p}$ est un terme de la suite : il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{p}{q-p} = u_k$. D'après la question précédente, on a alors
$$\frac{p}{q} = \frac{\frac{p}{q-p}}{\frac{p}{q-p}+1} = \frac{u_k}{u_k+1} = u_{2k+1},$$
ce qui prouve bien que $\frac{p}{q}$ est un terme de la suite.

• D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n supérieur à 2, ce qui donne que tout rationnel strictement positif est un terme de la suite u.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons
$$\mathcal{P}_n : \text{« les termes } u_1, u_2, \ldots, u_n \text{ sont deux à deux distincts. »}$$
• La proposition $\mathcal{P}_1$ est trivialement vraie.
• Soit n un entier naturel non nul. Supposons $\mathcal{P}_n$. Pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$, puisque $u_1, \ldots, u_n$ sont deux à deux distincts d'après $\mathcal{P}_n$, il suffit de prouver que $u_{n+1} \notin \{u_1, \ldots, u_n\}$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $u_{n+1} = u_k$ où k est un certain entier entre 1 et n.
Il découle de la question 4 que tous les termes de la suite ayant un indice pair sont strictement supérieure à 1, et que tous ceux d'indice impair, à l'exception de u_1, sont strictement inférieurs à 1. On propose donc la discussion suivante.
   (a) Premier cas : $n+1$ est pair. Alors u_{n+1} (et u_k) sont strictement supérieurs à 1. Ainsi, $n+1$ et k sont pairs. Puisque $u_{n+1} = u_k$, soit $u_{\frac{n+1}{2}} + 1 = u_{\frac{k}{2}} + 1$, on a $u_{\frac{n+1}{2}} = u_{\frac{k}{2}}$, ce qui contredit $\mathcal{P}_n$ (puisque $n+1/2$ et $k/2$ sont inférieurs à n).
   (b) Second cas : $n+1$ est impair. Alors u_{n+1} (et u_k) sont strictement inférieurs à 1. Ainsi, $n+1$ et k sont impairs. Puisque $u_{n+1} = u_k$, soit $\frac{u_{\frac{n}{2}}}{u_{\frac{n}{2}}+1} = \frac{u_{\frac{k}{2}}}{u_{\frac{k}{2}}+1}$, on a (faire le produit en croix...) $u_{\frac{n}{2}} = u_{\frac{k}{2}}$, ce qui contredit $\mathcal{P}_n$ (puisque $\frac{n}{2}$ et $\frac{k}{2}$ sont inférieurs à n).

7. On définit f sur $\mathbb{N}$ en posant
$$f(0) = 0; \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(2n) = u_n \quad \text{et} \quad f(2n-1) = -u_n.$$

L'application f va de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}$ d'après la question 4.
Tout rationnel strictement positif possède un unique antécédent (pair) par f : l'existence découle de la question 5 et l'unicité de la question 6.
Par symétrie, tout rationnel strictement négatif a un unique antécédent (impair) par f. Quant à 0, il a 0 pour unique antécédent par f.
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une bijection de } \mathbb{N} \text{ vers } \mathbb{Q}.}$