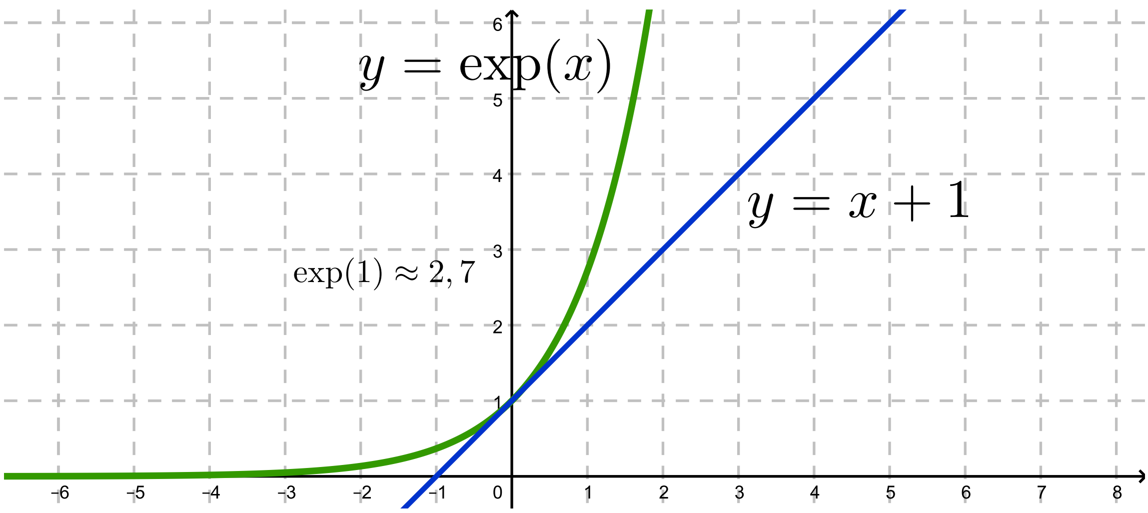
Outils pour l'analyse
2/3 : Fonctions usuelles

1 Fonction exponentielle.

Définition 1.

La fonction **exponentielle** est l'unique fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x).$$



Proposition 2 (Faits)**.**

1. La fonction exp prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.
2. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Le graphe de l'exponentielle a une tangente en 0 d'équation $y = x + 1$. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geq x + 1.$$

Théorème 3 (Propriété de morphisme de l'exponentielle)**.**

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),}$$

Il découle de cette propriété que

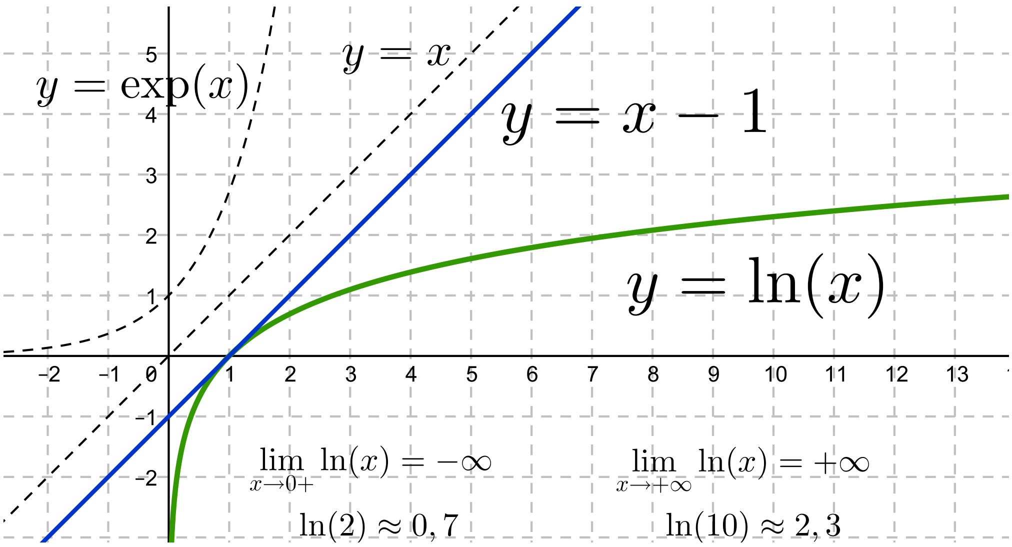
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall p \in \mathbb{Z} \quad \exp(px) = \exp(x)^p$.

2 Logarithme népérien.

La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$. Plus précisément, tout élément $y \in \mathbb{R}_+^*$ possède un unique antécédent par exp dans $\mathbb{R}$, que l'on va noter $\ln(y)$.

Définition 4.

On appelle **logarithme népérien** la fonction $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, réciproque de l'exponentielle.



La réciprocité de ln et de exp implique notamment

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(x)) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp(\ln(y)) = y}.$$

Proposition 5.

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée la fonction inverse : $\forall y \in]0, +\infty[\ \ln'(y) = \frac{1}{y}$. Le graphe de ln a une tangente en 1 d'équation $y = x - 1$. De plus,

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \ln(x) \leq x - 1.$$

Proposition 6 (Propriété de morphisme du logarithme)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Il découle de cette propriété que

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- $\forall p \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \ln(x^p) = p\ln(x)$.

Exemple 7.

Le logarithme de dix milliards, c'est grand comment ?

Définition 8.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction **logarithme en base** a, notée $\log_a$, est définie par

$$\log_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log_a(x) := \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} \right. .$$

Proposition 9 (sa raison d'être)**.**

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad \forall N \in \mathbb{N} \qquad \log_a\left(a^N\right) = N.$$

En informatique, on pourra apprécier le logarithme en base 2.

En physique et en SI, le logarithme en base 10.

3 Puissances.

3.1 Fonctions $x \mapsto x^p$, où p est entier.

• Exposants entiers positifs.

Soit n un entier naturel non nul et x un nombre réel. Le nombre x^n « x puissance n » est défini par

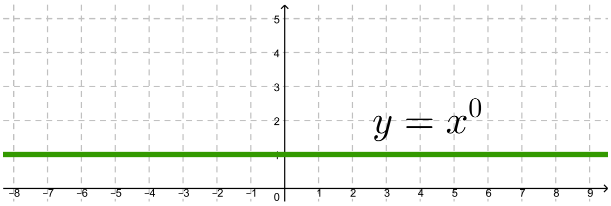
$$x^n := x \times x \times \ldots \times x. \qquad \text{(facteur } x \text{ présent } n \text{ fois).}$$

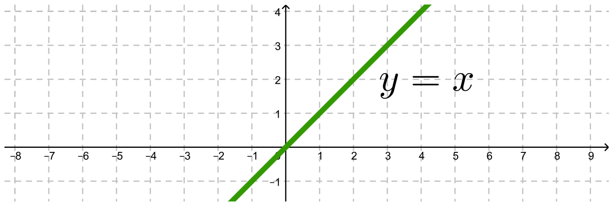
Il vient immédiatement $\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$.
Quel sens donner alors à l'écriture x^0 ? Si on veut que la relation $x^0 \cdot x^n = x^{0+n}$ soit vraie pour tout entier naturel n, on posera

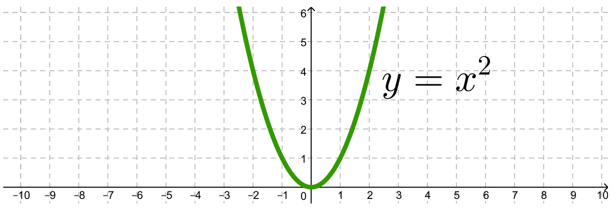
$$x^0 := 1.$$

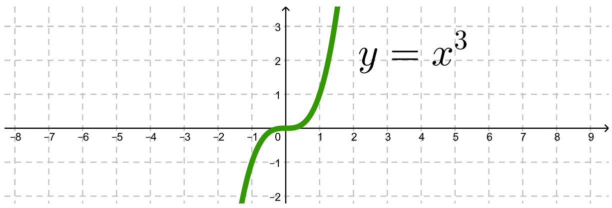
Définition 10.

Si n est un entier naturel, la fonction $x \mapsto x^n$, est définie sur $\mathbb{R}$.





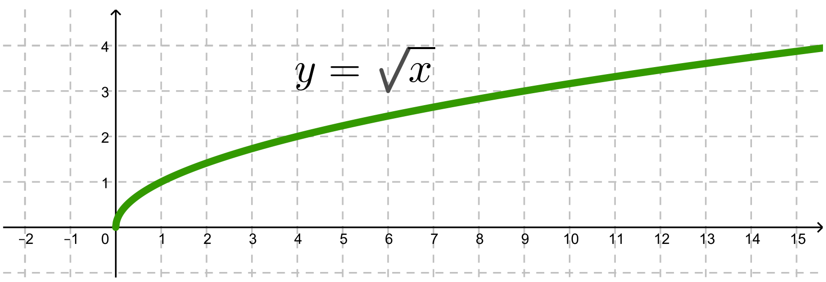




Définition 11.

Soit a un réel positif. L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont de signes opposés.
La solution positive de cette équation est appelée **racine carrée** de a et notée $\sqrt{a}$.
Dans le cas de l'équation $x^2 = 0$, les deux solutions sont confondues et $\sqrt{0} = 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.



On peut démontrer à partir de cette définition que si x et y sont deux réels positifs,

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (y \neq 0).$$

• Exposants entiers négatifs.

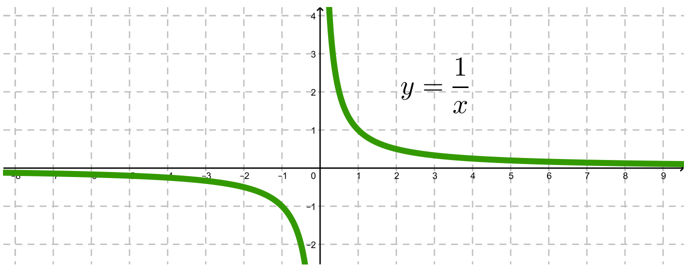
Soit x un nombre réel non nul et $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $-n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Le nombre x^n, non nul, possède un inverse : on peut poser :

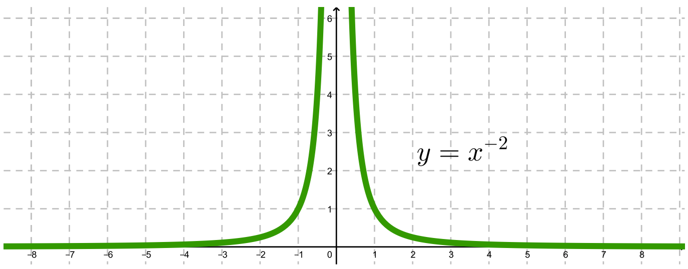
$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

On peut alors prouver (laissé au lecteur) que $\boxed{\forall p, q \in \mathbb{Z} \quad x^p \cdot x^q = x^{p+q}}$.

Définition 12.

Si p est un entier strictement négatif ($p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$), la fonction $x \mapsto x^p$, est définie sur $\mathbb{R}^*$.





3.2 Puissances d'exposant réel.

On souhaite maintenant donner un sens à l'écriture x^a, avec a un réel quelconque, *non forcément entier*. Pour cela, remarquons que si p est un entier relatif, et si $x \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant la propriété de morphisme,

$$x^p = (\exp(\ln(x)))^p \underset{(*)}{=} \exp(p\ln(x)).$$

Définition 13.

Pour $\boxed{x > 0}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit le réel x^a (« x puissance a ») par

$$\boxed{x^a = \exp(a\ln(x)).}$$

Exemple. L'écriture π^3 a toujours eu un sens pour nous : $\pi \times \pi \times \pi$.
En revanche, l'écriture $\pi^{\sqrt{2}}$ n'en avait pas. Désormais si ! il s'agit de $\exp\left(\sqrt{2}\ln(\pi)\right)$.

Remarque. Si $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(*)$ montre que la "nouvelle" définition de x^p est cohérente avec l'ancienne. On peut donc dire que l'on a *étendu* la définition de x^a des puissances au cas d'un exposant a réel (au prix d'une contrainte de stricte positivité pour x).

Proposition 14 (Notation puissance pour exp)**.**

Notons e le nombre $\exp(1)$. Ce nombre vaut environ $2,71$ et il est tel que $\ln(e) = 1$. On a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x.}$$

La propriété de morphisme se récrit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x e^y.$$

De plus,

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \qquad (e^x)^a = e^{ax} \quad \text{et} \quad \ln(y^a) = a\ln(y).$$

Proposition 15.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x^{a+b} = x^a x^b \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad (xy)^a = x^a y^a.$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \qquad (x^a)^b = x^{ab}.$$

Corollaire 16.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}.$$

Proposition 17 (Comparer deux puissances)**.**

Soient a, b deux réels. On a

$$\forall x \in]0, 1[\qquad a \leq b \iff x^a \geq x^b$$

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad a \leq b \iff x^a \leq x^b$$

Remarque. Par exemple, l'inégalité $x^2 \leq x^3$ est fausse lorsque $0 < x < 1$!
On l'écrit en remarque car cette erreur grossière demeure assez fréquente. Voir le graphe de comparaison dans la proposition 23

Exemple 18.

Domaine de définition et simplification de $x \mapsto x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$.

3.3 Fonctions $x \mapsto x^a$, où a est réel.

Définition 19.

Pour un réel a quelconque, la fonction $x \mapsto x^a$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme on va le voir ci-dessous, lorsque $\underline{a > 0}$, cette fonction peut être prolongée en 0 en une fonction continue, en posant $0^a := 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans la suite, on notera f_a la fonction $f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a \end{array} \right.$.

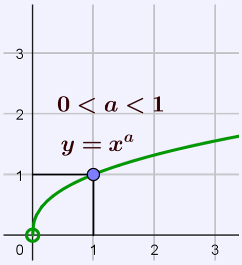
Proposition 20.

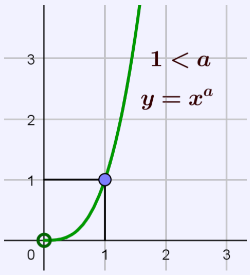
La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f_a'(x) = a x^{a-1}$.

Proposition 21 (cas $a > 0$)**.**

Soit $a > 0$. Alors f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\lim_{x \to 0} x^a = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$$

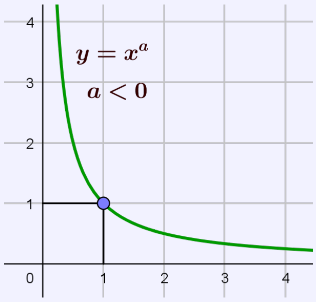




Proposition 22 (cas $a < 0$)**.**

Soit $a < 0$. Alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

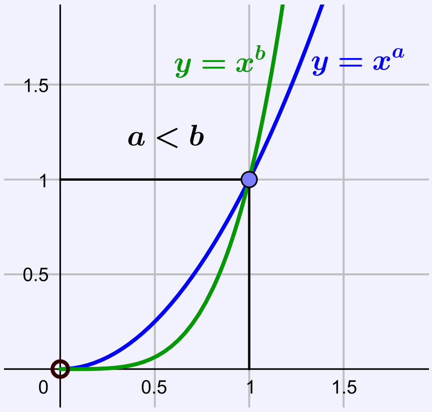
$$\lim_{x \to 0} x^a = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = 0$$



Proposition 23 (comparaison)**.**

Si $a < b$, alors

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,1] &\quad : \quad x^b \leq x^a \\ \forall x \in [1,+\infty[&\quad : \quad x^a \leq x^b. \end{aligned}$$



Proposition 24.

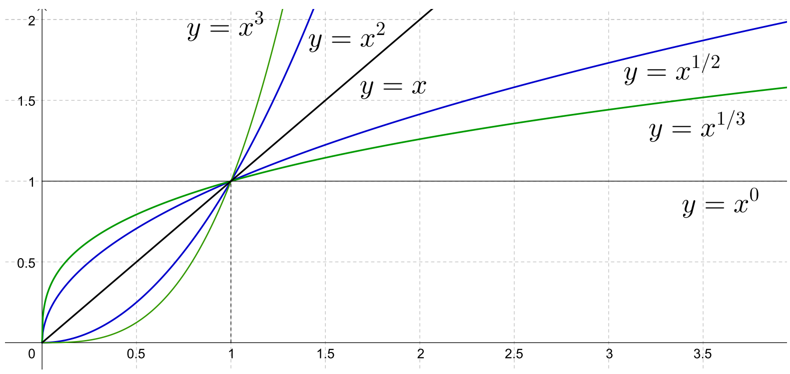
Soit a un réel non nul. Pour tout réel strictement positif y, le nombre $y^{\frac{1}{a}}$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $x^a = y$.

La fonction $f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^a \end{array} \right.$ est donc bijective, et sa réciproque est la fonction $x \mapsto x^{1/a}$.

Notation.

Mentionnons que la puissance d'exposant $1/n$, peut être notée avec un symbole radical :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt[n]{x} := x^{1/n}.$$



Fonctions puissances d'exposant positif.

3.4 Croissances comparées.

On compare les fonctions puissances avec les fonctions exponentielle et logarithme, et ce du point de vue *asymptotique* (celui des limites).

Lemme 25.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une constante $C_a \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{x^a}{e^x} \leq C_a x^{-a}$.

Théorème 26 (Croissances comparées)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a les limites suivantes.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^a e^x = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0; \quad \lim_{x \to 0_+} x^a \ln(x) = 0.$$

Exemple 27.

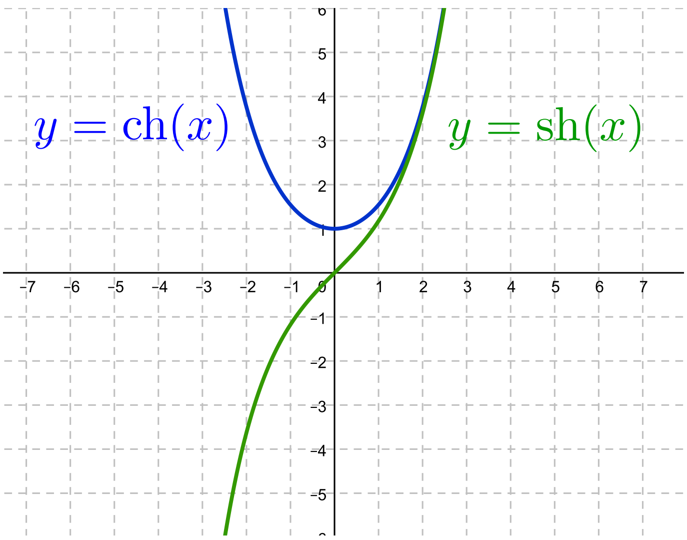
Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}$ et de $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{\sqrt{x}}$.

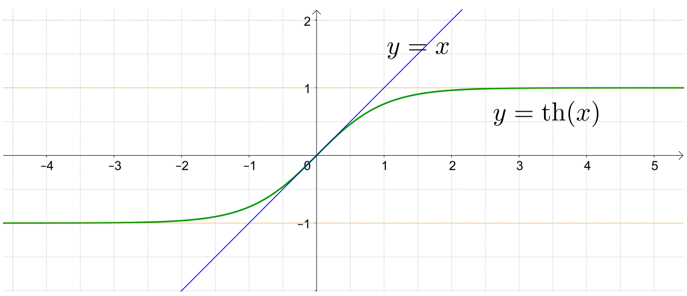
4 Fonctions hyperboliques.

Définition 28.

Les fonctions **cosinus, sinus et tangente hyperbolique** sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$





Proposition 29.

- La fonction ch est paire et les fonctions sh et th sont impaires.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} e^x &= \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) \\ e^{-x} &= \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \end{cases}$
- Une formule de trigonométrie hyperbolique :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$
- Des limites :
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1.$$
- Toutes les trois sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x), \quad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$

Pourquoi *cosinus* et *sinus* ? Cela vient de l'analogie avec les formules d'Euler pour les "vrais" cos et sin :
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$
Pourquoi *hyperbolique* ? Pour les "vrais" cosinus et sinus, on a $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est un cercle appelé *cercle trigonométrique*. Avec ch et sh, on a $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ et l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ est appelé une hyperbole en géométrie, d'où le nom donné à nos deux fonctions.

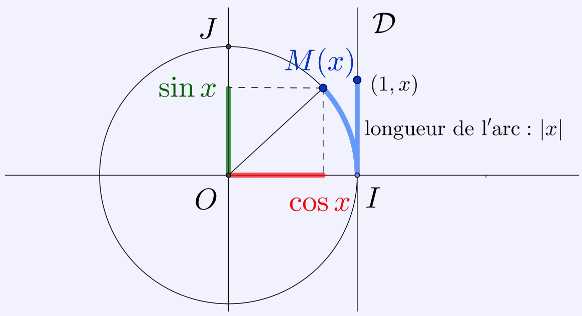
5 Fonctions circulaires.

5.1 Trigonométrie.

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J). Le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé **cercle trigonométrique**. Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point I. À tout un réel x, on associe le point $(1, x)$ sur $\mathcal{D}$. Notamment, le réel 0 est identifié à $I \in \mathcal{D}$.
On « enroule » alors la droite $\mathcal{D}$ sur le cercle : les réels positifs vont l'être dans le sens direct (antihoraire), et les réels négatifs dans le sens indirect. Pour un réel x, on notera $M(x)$ le point du cercle sur lequel a été enroulé le point $(1, x)$. Le cercle étant de périmètre 2π et la droite infinie, il va falloir faire plusieurs tours...

Définition 30.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M(x)$ le point correspondant sur le cercle trigonométrique, obtenu par enroulement. On appelle **cosinus** de x son abscisse et **sinus** de x son ordonnée, notés $\cos x$ et $\sin x$.



Par définition, on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{array}}$ c'est-à-dire $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} |\cos x| \leq 1 \\ |\sin x| \leq 1 \end{array}}$

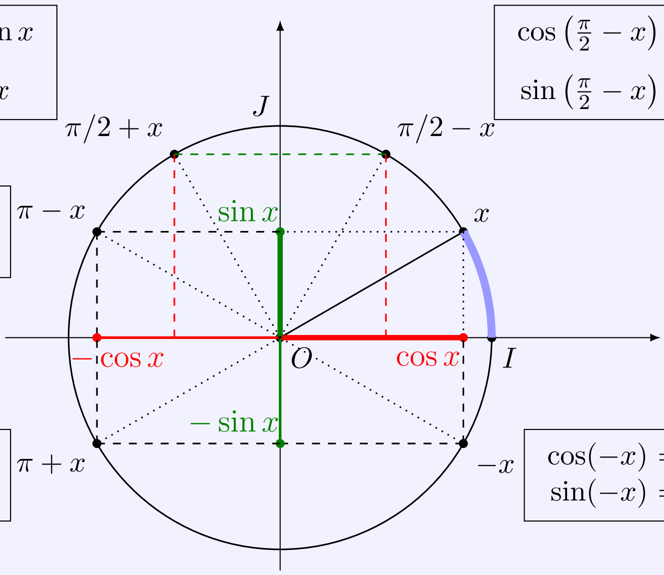
Formulaire.

Proposition 31 (Les symétries de cos et sin).

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

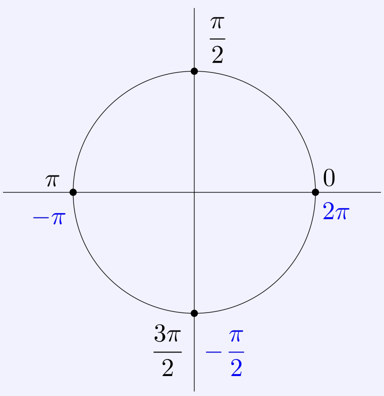


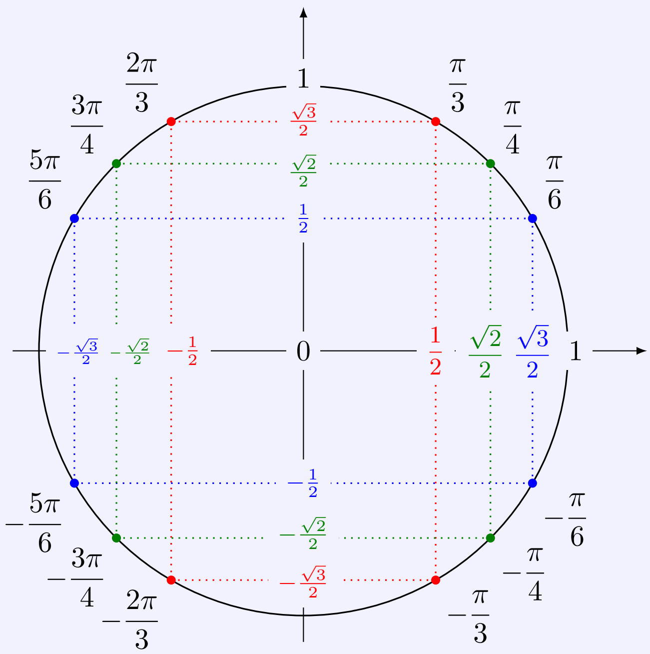
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

Proposition 32 (Valeurs notables).

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0
$\sin x$	0	1	0	-1





Proposition 33 (Une conséquence du théorème de Pythagore).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Proposition 34 (Formules d'addition).

Pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rclcrcl} \cos(a-b) & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b & \qquad & \sin(a-b) & = & \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b & & \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{array}$$

Corollaire 35 (Formules de duplication).

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{et} \quad \sin 2a = 2\cos a \sin a.$$

La première identité donne $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.

Exemple 36.

- Calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
- Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$.

Corollaire 37 (Produit de deux cosinus, de deux sinus).

Pour tous réels a, b, $\begin{cases} \cos a \cos b & = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right) \\ \sin a \sin b & = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \\ \sin a \cos b & = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \end{cases}$

Proposition 38 (Somme et différence de deux cosinus, de deux sinus).

Pour tous réels p, q,

$$\begin{array}{rclcrcl} \cos p + \cos q & = & 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) & \qquad & \sin(p) + \sin(q) & = & 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q & = & -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) & & \sin(p) - \sin(q) & = & 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{array}$$

Remarque. Dans le cours sur les nombres complexes, on apprendra comment retrouver simplement ces formules en utilisant les nombres e^{ip} et e^{iq}.

Égalité de deux cosinus, de deux sinus.

Définition 39 (Congruence modulo α)**.**

On dit que deux réels a et b sont **congrus** (ou plus simplement égaux) modulo α, et on note

$$a \equiv b\ [\alpha]$$

si a et b diffèrent d'un multiple entier de α. Cette définition se récrit

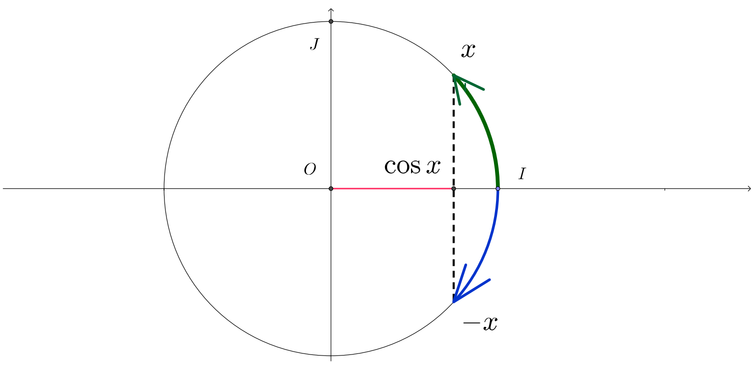
$$a \equiv b\ [\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = b + k\alpha.$$

Remarque. Deux réels égaux modulo 2π seront *enroulés* sur le même point : ils représentent le même *angle*.

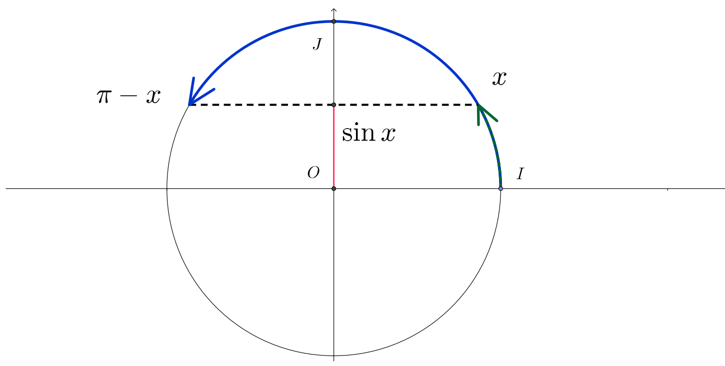
Proposition 40.

Soient x et y deux nombres réels. On a

$$\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x \equiv y\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin x = \sin y \iff \begin{cases} x \equiv y\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y\ [2\pi] \end{cases}$$



Égalité de deux cosinus.



Égalité de deux sinus.

Exemple 41.

Résoudre les équations ci-dessous. Représenter les solutions sur un cercle.

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos(3x) = \sin x \qquad \cos x + \sqrt{3}\sin x = 1.$$

Exemple 42.

Résoudre l'inéquation $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$.

5.2 Fonctions cos et sin.

On étudie dans ce paragraphe les fonctions $\cos : x \mapsto \cos x$ et $\sin : x \mapsto \sin x$, définies sur $\mathbb{R}$.

Du formulaire de trigonométrie, on déduit la proposition ci-dessous.

Corollaire 43.

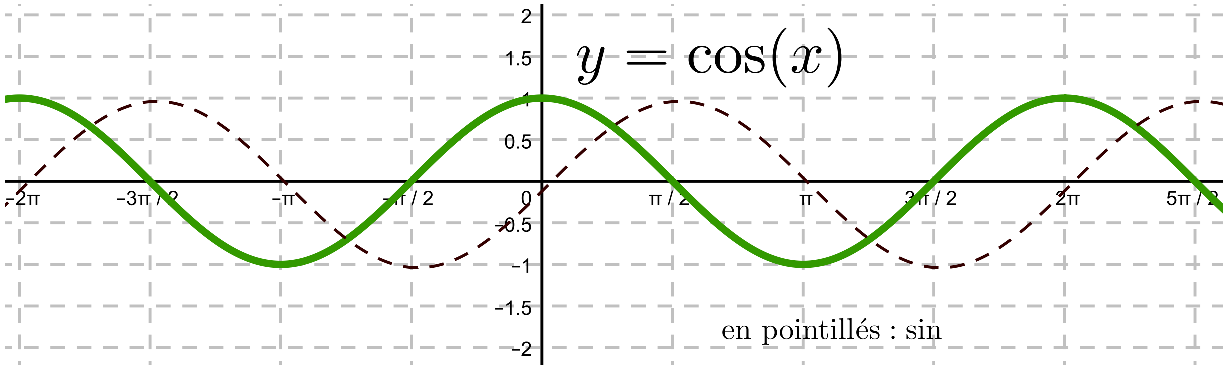
La fonction cos est paire, et la fonction sin impaire.
Elles sont toutes deux 2π-périodiques.
Le graphe de sin se déduit de celui de cos par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{i}$.

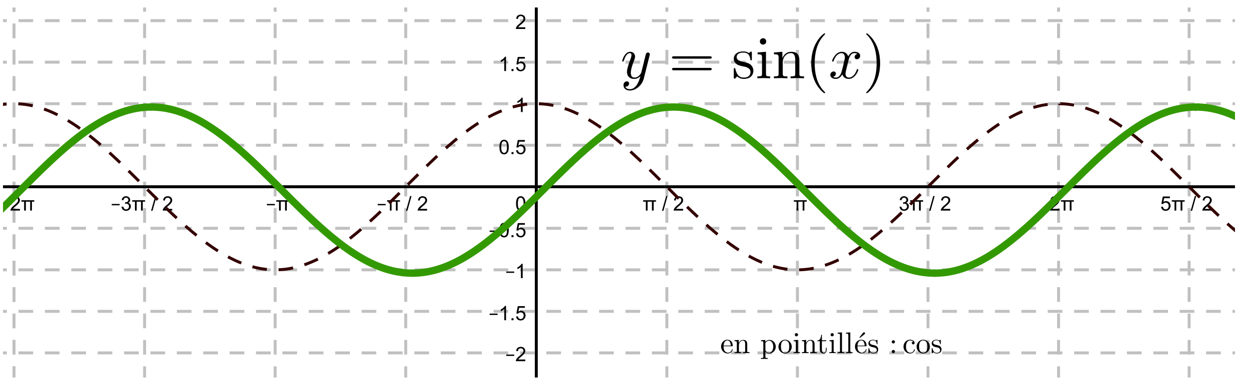
Proposition 44.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées

$$\cos' = -\sin \qquad \text{et} \qquad \sin' = \cos .$$

Preuve : en annexe, à la fin.





Proposition 45.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x)| \leq |x|.$$

5.3 Fonction tan.

Définition 46.

On appelle fonction **tangente** et on note tan la fonction définie par

$$\tan : \left\{ \begin{array}{ccc} D_{\tan} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) := \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right. \qquad \text{où} \quad D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Proposition 47.

Sur $D_{\tan}$, la fonction tangente est impaire et π-périodique.

La π-périodicité permet de réduire l'étude à un intervalle de longueur π, ce qui est le cas de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

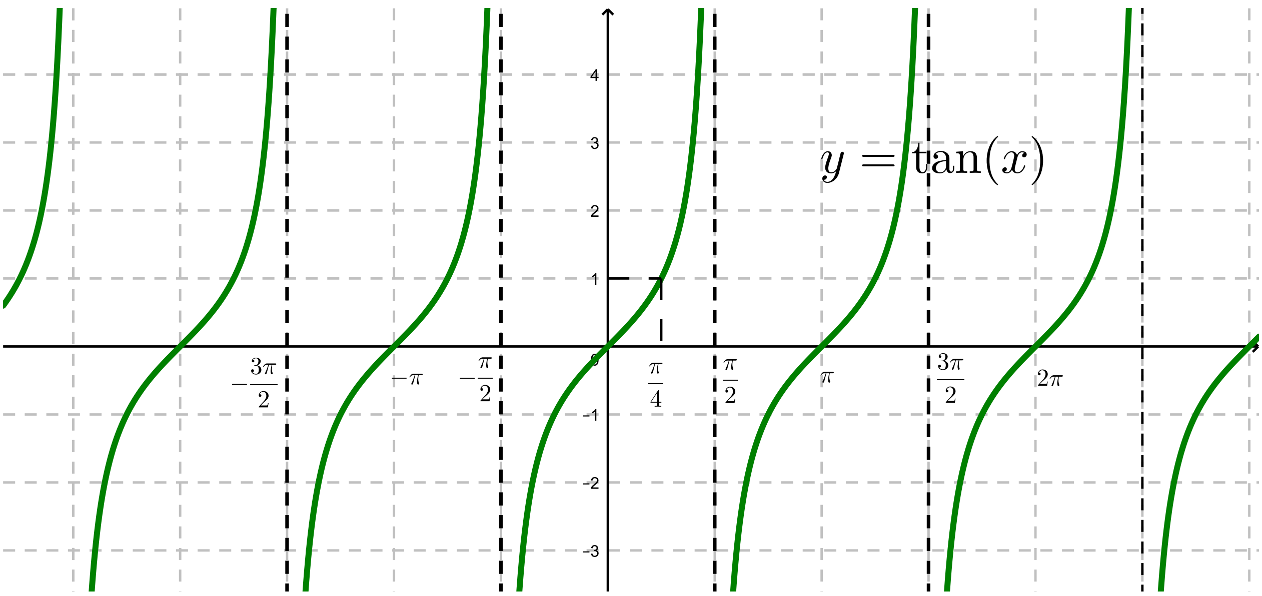
Proposition 48 (Valeurs et limites notables)**.**

$$\tan(0) = 0, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \qquad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

Proposition 49.

La fonction tangente est dérivable sur $D_{\tan}$ et

$$\forall x \in D_{\tan} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$



Proposition 50 (Formules d'addition).

Pour tous réels a et b tels que les nombres ci-dessous ont un sens,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}, \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.$$

Corollaire 51 (Identités à savoir retrouver).

Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire que a est un réel tel que $\frac{a}{2} \in D_{\tan}$. En notant $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$,

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.$$

6 Fonctions circulaires réciproques : arcsin, arccos, arctan.

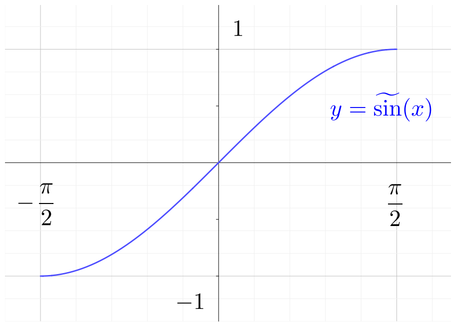
La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est (grossièrement) pas bijective. Par exemple, on pourra remarquer que 2 ne possède pas d'antécédent par sin, ou encore que 1 en possède une infinité.

En revanche, la fonction

$$\widetilde{\sin} : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array} \right.$$

est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et $\widetilde{\sin}\left([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) = [-1,1]$.

Le TVI strictement monotone légitime alors la définition ci-dessous



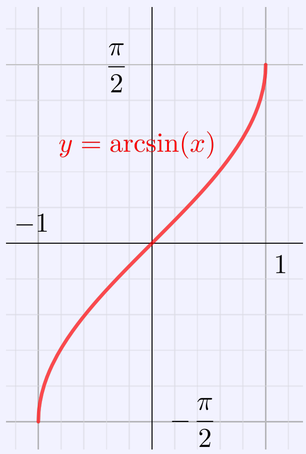
Définition 52.

On appelle fonction **arcsinus** et on note

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

la réciproque de la bijection $\widetilde{\sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.

Pour tout y dans $[-1,1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique antécédent de y par sin dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Proposition 53.

La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et elle est impaire.

Proposition 54.

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \sin(\arcsin(x)) = x \qquad\qquad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \arcsin(\sin x) = x$$

Exemple 55.

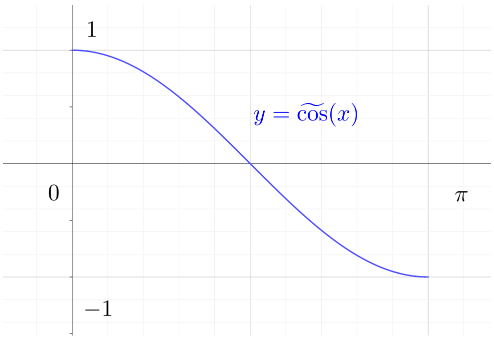
Que valent $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin(\frac{1}{2})$? Et $\arcsin\left(\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$?

La fonction

$$\widetilde{\cos} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array} \right.$$

est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$,
et $\widetilde{\cos}\,([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Le TVI strictement monotone légitime alors la définition ci-dessous



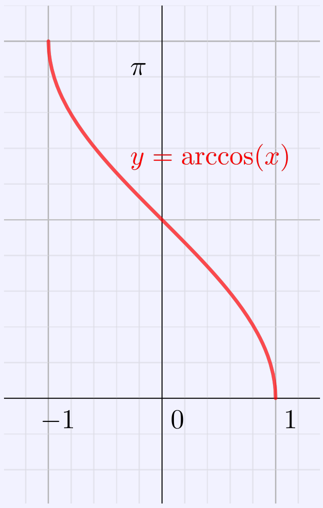
Définition 56.

On appelle fonction **arccosinus** et on note

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

la réciproque de la bijection $\widetilde{\cos} : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

Pour tout y dans $[-1, 1]$, $\arccos(y)$ est l'unique antécédent de y par cos dans $[0, \pi]$.



Comme réciproque d'une fonction strictement décroissate, arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

Proposition 57.

$$\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arccos(x)) = x \qquad\qquad \forall x \in [0,\pi] \quad \arccos(\cos x) = x$$

Exemple 58.

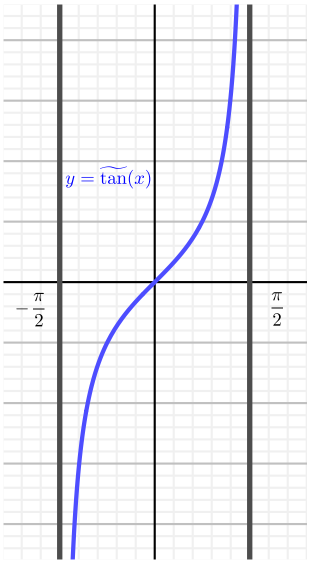
Que valent $\arccos(0)$, $\arccos(1)$, $\arccos(-1)$, $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$? Et $\arccos\left(\cos(\frac{5\pi}{3})\right)$?

La fonction

$$\widetilde{\tan} : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{cases}$$

est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,
et $\widetilde{\tan}\left(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right) = \mathbb{R}$.

Le TVI strictement monotone légitime alors la définition ci-dessous



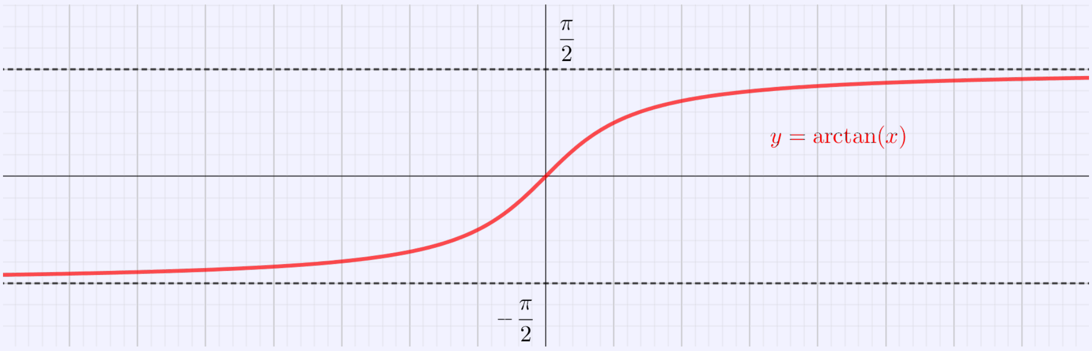
Définition 59.

On appelle fonction **arctangente** et on note

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

la réciproque de la bijection $\widetilde{\tan} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

Pour tout y dans $\mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique antécédent de y par tan dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.



Proposition 60.

La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire.

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Proposition 61.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan(x)) = x \qquad\qquad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \arctan(\tan x) = x$$

Exemple 62.

Que valent $\arctan(0)$? $\arctan(1)$? $\arctan(\sqrt{3})$? Et $\arctan(\tan(\pi))$?

Lemme 63.

$$\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos(x)).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Proposition 64.

Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Proposition 65 (Lien entre arccos et arcsin)**.**

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x).$$

Proposition 66.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Annexe.

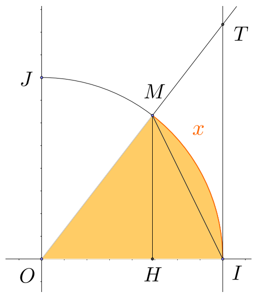
Preuve de la proposition 44 : on prouve que cos et sin sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et que leurs dérivées sont respectivement $-\sin$ et cos.

Lemme.

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \cos x \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Preuve. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. On note $M = M(x)$ le point du cercle trigonométrique associé à x par enroulement. Notons $\mathcal{C}(x)$ la portion de disque délimitée par O, I et M (pleine sur la figure suivante). On lit sur la figure l'inégalité

$$Aire(OIM) \leq Aire\,(\mathcal{C}(x)) \leq Aire(OIT). \quad (\star)$$



• Le disque de rayon 1 est d'aire π donc le quart de disque $\mathcal{C}(\frac{\pi}{2})$ est d'aire $\frac{\pi}{4}$. Une règle de trois nous donne que $\mathcal{C}(x)$ est d'aire $\frac{x}{2}$.

• Le triangle OIM est de base $OI = 1$ et de hauteur $HM = \sin(x)$. On a donc $Aire(OIM) = \frac{1\times\sin(x)}{2}$.

• Le théorème de Thalès donne $\frac{IT}{HM} = \frac{OI}{OH}$ d'où $IT = \frac{HM\times OI}{OH} = \frac{\sin x}{\cos x}$. On a donc $Aire(OIT) = \frac{\tan x}{2}$.

Les inégalités $(\star)$ donnent donc

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2\cos x}.$$

ce qui fournit bien l'inégalité

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

□

Preuve de la proposition 44.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. On va dériver la fonction sin en x c'est à dire s'intéresser au taux d'accroissement

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Il nous faut montrer que ce dernier a pour limite $\cos x$ lorsque h tend vers 0.

L'utilisation des formules d'addition amène, pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Ainsi, la proposition est démontrée si on prouve

$$\frac{\sin h}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos h}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

La première limite découle du lemme précédent grâce au théorème des gendarmes.

Pour la seconde, on calcule

$$\frac{(1+\cos h)\,(1-\cos h)}{h} = \frac{1-\cos^2 h}{h} = \frac{\sin^2(h)}{h} = \sin h \times \frac{\sin h}{h},$$

d'où

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{\sin h}{1+\cos h} \times \frac{\sin h}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{0}{2} \times 1 = 0.$$

On a donc bien

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos(x) \times 1 + 0 = \cos(x).$$

Ceci achève de démontrer que sin est dérivable en x, de dérivée $\cos x$.

• Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Ainsi, cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = (-1)\sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x).$$

□

Exercices

Exponentielle and friends.

$\boxed{3.1}$ **[♦◇◇]** Résoudre $2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(x) + \ln(3)$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{3.2}$ **[♦♦◇]** Résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$. Que dire des solutions ?

$\boxed{3.3}$ **[♦◇◇]** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

$\boxed{3.4}$ **[♦◇◇]** Trigonométrie hyperbolique.

1. Montrer que pour tous réels a et b, on a
   (a) $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
   (b) $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.
   (c) Trouver une identité pour $\mathrm{th}(a+b)$.
2. Pour x réel, on pose $t = \mathrm{th}(\frac{x}{2})$. Montrer que

$$(a)\ \mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad (b)\ \mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad (c)\ \mathrm{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$\boxed{3.5}$ **[♦♦◇]** Sans calculatrice, comparer π^e et e^π.

$\boxed{3.6}$ **[♦♦♦]**

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.
2. Des deux nombres $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[3]{24}$, lequel est le plus grand ?

$\boxed{3.7}$ **[♦♦◇]**

1. Soit α un réel et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1 + \alpha x$ (on discutera selon les valeurs de α).
2. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha.$$

Trigonométrie. Fonctions circulaires.

$\boxed{3.8}$ **[♦◇◇]** Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\text{a) } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \text{b) } \sin^2(x) = \frac{3}{2}\cos x \qquad \text{c) } \cos x + \sin x = 1$$

$\boxed{3.9}$ **[♦◇◇]** Soit x un réel. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

$\boxed{3.10}$ **[♦♦◇]** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}} \qquad (n \text{ fois le symbole } \sqrt{\cdot})$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.
2. En déduire $\lim u_n$.

$\boxed{3.11}$ **[♦♦♦]** Calculer $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

$\boxed{3.12}$ **[♦◇◇]** Calculer $\tan(\frac{\pi}{8})$.

Fonctions circulaires réciproques.

$\boxed{\textbf{3.13}}$ **[♦◇◇]** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \; x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$.

$\boxed{\textbf{3.14}}$ **[♦♦◇]** Montrer que

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{\textbf{3.15}}$ **[♦♦◇]** Soit l'équation

$$\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Justifier que l'équation admet une unique solution sur $[-1, 1]$.
2. Donner une expression de cette solution.

$\boxed{\textbf{3.16}}$ **[♦♦◇]** Soit

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1, 1[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression plus simple de la fonction f.
4. Retrouver ce résultat par une preuve directe.

$\boxed{\textbf{3.17}}$ **[♦♦♦]** Pour $a < x < b$, montrer que $\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} = \arctan\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$.
