Problème. Polynômes de Legendre.

Partie A. Une famille de polynômes scindés. (CCP PC 2018)

1. $L_0 = 1$.
   $L_1 = \frac{1}{2}(X^2-1)' = X$.

2. (a) U_n est un polynôme de degré $2n$, unitaire, donc $U_n^{(2n)}$ est un polynôme de degré $\deg U_n - 2n = 0$: c'est un polynôme constant :

$$U_{2n}^{(2n)} = \left(X^{2n}\right)^{(2n)} = (2n)(2n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

On a

$$U_n^{(2n)} = (2n)! \qquad \text{et} \qquad \forall k > 2n,\ U_n^{(k)} = 0.$$

(b) Le polynôme U_n s'écrit

$$U_n = X^{2n} + V_n, \quad \text{avec } \deg V_n < 2n.$$

$$U_n^{(n)} = (2n)(2n-1)\cdots(2n-(n-1))X^n + V_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}X^n + V_n^{(n)}, \quad \text{avec } \deg V_n^{(n)} < n.$$

Puisque $L_n = \frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$, on a $\boxed{\deg(L_n) = n}$ le coefficient dominant de L_n est est $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

Or $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$. Donc, $\boxed{\text{le coefficient dominant de } L_n \text{ est : } \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}}$.

3. (a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$U_n = (X^2-1)^n = \big((X-1)(X+1)\big)^n = (X-1)^n(X+1)^n.$$

La polynôme U_n a deux racines, (-1) et 1, toutes deux de multiplicité n.
Donc (-1) et 1 sont deux racines de multiplicité $(n-1)$ de U_n'.
En outre, la fonction polynômiale associée à U_n est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, et $U_n(-1)=U_n(1)=0$, donc il existe $\alpha\in]-1,1[$ tel que $U_n'(\alpha)=0$.

Les nombres -1 et 1 sont des racines de multiplicité $n-1$ et $\alpha\in]-1,1[$ a une multiplicité au moins 1. En comptant les multiplicités on obtient donc au moins $2(n-1)+1 = 2n-1$ racines. Or, $\deg U_n' = 2n-1$ donc U_n' est scindé :

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

où λ est une constante non nulle. On ne nous demande pas de calculer sa valeur mais ce n'est pas compliqué, λ est le coefficient dominant de U_n', c'est donc $2n$.

(c) Soit $n\geq 2$. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

Tout d'abord, comme (-1) et 1 sont des racines de multiplicité n de U_n, ce sont des racines de multiplicité $n-(k+1)$ de $U_n^{(k+1)}$.
Soit $l\in[\![1,k-1]\!]$, la fonction $U_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_l,\alpha_{l+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_l,\alpha_{l+1}[$. En outre, $U_n^{(k)}(\alpha_l) = U_n^{(k)}(\alpha_{l+1})$, donc il existe $\beta_{l+1}\in]\alpha_l,\alpha_{l+1}[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_l)=0$.

De même, la fonction $U_n^{(k)}$ est continue sur $[-1,\alpha_1]$ et dérivable sur $]-1,\alpha_1[$. En outre, $U_n^{(k)}(-1) = U_n^{(k)}(\alpha_1)$, donc il existe $\beta_1\in]-1,\alpha_1[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_1)=0$.

on peut faire le même raisonnement sur $[\alpha_k,1]$ pour montrer qu'il existe $\beta_{k+1}\in]\alpha_k,1[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_{k+1})=0$.

Enfin, on a $\beta_1<\alpha_1<\beta_2<\alpha_2<\ldots<\beta_k<\alpha_k<\beta_{k+1}$ donc les réels β_1,...,β_{k+1} sont distincts deux à deux.
Ainsi, il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$U_n^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})Q.$$

Or, les degrés de $U_n^{(k+1)}$ d'une part, et de $(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$ d'autre part sont tous les deux égaux à $2n-(k+1)$, donc $\deg(Q)=0$.
Il existe donc $\nu\in\mathbb{R}^*$ tel que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

(d) D'après le principe de récurrence, il existe $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ dans $]-1,1[$ deux à deux distincts et μ dans $\mathbb{R}^*$ tels que :

$$L_n = \mu(X-\gamma_1)\cdots(X-\gamma_n).$$

$\boxed{\text{Le polynôme } L_n \text{ est scindé à racines simples, toutes dans }]-1,1[.}$

Partie B. Évaluation de L_n en 1 et en -1.

1. $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad ((X+1)^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}$.
2. Les fonctions $x \mapsto (x-1)^n$ et $x \mapsto (x+1)^n$ sont polyomiales donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En confondant polynômes et fonctions polynomiales, la formule de Leibniz amène

$$\begin{aligned} L_n = \frac{1}{2^n n!}\left((X+1)^n(X-1)^n\right)^n &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((X+1)^n)^{(k)}((X-1)^n)^{(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^n \cancel{n!}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}\frac{\cancel{n!}}{k!}(X-1)^k \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X+1)^{n-k}(X-1)^k. \end{aligned}$$

3. $L_n(1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{0}^2(1+1)^n = 1 \qquad$ et $\qquad L_n(-1) = (-1)^n$.

Partie C. Calcul des nombres $\langle L_n, L_m\rangle$.

1. (a) (*) Soit n non nul, et $k \in [\![0,n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Alors :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = \langle U_n^{(n-k)}, U_m^{(m+k)}\rangle$$

Par intégration par parties, en dérivant $U_m^{(m+k)}$ et en intégrant $U_n^{(n-k)}$ on obtient :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = (-1)^k\left[U_m^{(m+k)}U_n^{(n-k-1)}\right]_{-1}^{1} - (-1)^k\int_{-1}^{1}U_n^{(n-k-1)}(t)U_m^{(m+k+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Or, si $k \in [\![0,n-1]\!]$, $n-k-1 \in [\![0,n-1]\!]$, donc $U_n^{(n-k-1)}(-1) = 0 = U_n^{(n-k-1)}(1)$, (rappelons que -1 et 1 sont racines de U_n de multiplicité n chacune) donc :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1}U_n^{(n-k-1)}(t)U_m^{(m+k+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

(b) Par linéarité de l'intégrale, $\langle L_n, L_m\rangle = \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle$.
En appliquant la question précédente pour $k=n$, on obtient le résultat demandé.

2. Supposons $n<m$, alors :

$$\langle L_n, L_m\rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m}n!m!}\langle U_n, U_m^{(n+m)}\rangle.$$

Or, comme $n<m$, on a $n+m>2m$ et donc $U_m^{(n+m)} = 0$. Ainsi,

$$\langle U_n, U_m^{(n+m)}\rangle = \int_{-1}^{1}0\mathrm{d}t = 0, \quad \text{donc} \quad \langle L_n, L_m\rangle = 0.$$

Si $n>m$, alors en utilisant une symétrie claire, $\langle L_n, L_m\rangle = \langle L_m, L_n\rangle = 0$

3. (a) On a démontré en question 2 que $U_n^{(2n)}$ est un polynôme constant égal à $(2n)!$.

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\langle U_n, U_n^{(2n)}\rangle = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\langle U_n, (2n)!\rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(-1)^n(t^2-1)^n\mathrm{d}t.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, on veut calculer : $J_k = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^k\mathrm{d}t$.
Une IPP avec $u(t) = (1-t^2)$, $u'(t) = -2tk(1-t^2)^{k-1}$, $v'(t) = 1$, $v(t) = t$.

$$\begin{aligned} J_k &= \left[(1-t^2)^k\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}2kt^2(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t \\ &= 0 + 2k\int_{-1}^{1}(t^2-1+1)(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t \\ &= 2k\int_{-1}^{1}(t^2-1)(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t + 2k\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{k-1}\mathrm{d}t \\ &= -2kJ_k + 2kJ_{k-1}. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{J_k = \dfrac{2k}{2k+1}J_{k-1}}$.

(c) Ainsi :

$$J_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}J_0 = \frac{2^n\prod_{k=1}^{n}k\prod_{k=1}^{n}2k}{\prod_{k=1}^{n}k}J_0 = \frac{2^n n! 2^n n!}{(2n+1)!}J_0.$$

Or $J_0 = 2$, donc

$$J_n = \frac{2}{2n+1}\frac{\left(2^n(n!)\right)^2}{(2n)!} \quad \text{puis} \quad \langle L_n, L_n\rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2n!)J_n : \boxed{\langle L_n, L_n\rangle = \frac{2}{2n+1}}.$$

Exercice 1. Convergence linéaire vers le point fixe.

1. On résout l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x \iff x = \frac{a}{x} \iff x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$$

Ceci démontre que f possède un unique point sur $\mathbb{R}_+^*$: $\boxed{\ell = \sqrt{a}}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$: pour tout réel strictement positif x, on a $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$. Ceci conduit au tableau de variations ci-dessous :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

On obtient que $f\left([\sqrt{a}, +\infty[\right) \subset [\sqrt{a}, +\infty[$: $\boxed{[\sqrt{a}, +\infty[\text{ est stable par } f}$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \geq \sqrt{a}$, on a $0 \leq \frac{a}{x^2} \leq 1$, puis $0 \leq f'(x) \leq \sqrt{a}$.
L'inégalité des accroissements finis donne alors que f est $\underline{\tfrac{1}{2}\text{-lipschitzienne}}$ sur l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$.

4. La suite u est bien définie car $u_0 \in [\sqrt{a}, +\infty[$, qui est stable par f. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\sqrt{a} = f\left(\sqrt{a}\right)$. Puisque u_n et $\sqrt{a}$ appartiennent un intervalle sur lequel f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, on a

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| = |f(u_n) - f(\sqrt{a})| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{a}|.$$

Par récurrence, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \sqrt{a}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |u_0 - \sqrt{a}|.$$

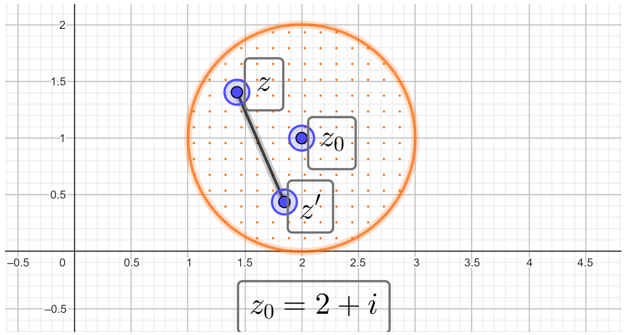
Ceci donne la convergence $\boxed{u_n \to \sqrt{a}}$ à *vitesse linéaire* (échelle logarithmique).

5. Si $u_0 \in]0, \ell[$, on a $u_1 \in [\sqrt{a}, +\infty[$, puis $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^* \; |u_n - \sqrt{a}| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |u_1 - \sqrt{a}|}$.

Exercice 2. Sur la notion générale de convexité.

1. Considérons $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de $\mathbb{C}$, indexées par un ensemble I et montrons que $\bigcap_{i \in I} X_i$ est convexe.
Pour cela, on considère z et z' dans $\bigcap_{i \in I} X_i$, ainsi que $\lambda \in [0, 1]$.
Soit $i \in I$. Par définition, $\forall i \in I \; z \in X_i$ et $z' \in X_i$. Pour un $i \in I$ fixé, puisque z et z' sont des éléments de X_i et que X_i est convexe, on a $(1 - \lambda)z + \lambda z' \in X_i$.
On a donc prouvé que $(1 - \lambda)z + \lambda z' \in \bigcap_{i \in I} X_i$, et donc que $[z, z'] \subset \bigcap_{i \in I} X_i$.

2. L'exemple des disques.
(a)



(b) Soient z et z' deux éléments de $\mathcal{D}(z_0, r)$ et $\lambda \in [0, 1]$.
Montrons que $(1 - \lambda)z + \lambda z' \in \mathcal{D}(z_0, r)$.

$$\begin{aligned}
|(1 - \lambda)z + \lambda z' - z_0| &= |(1 - \lambda)z + \lambda z' - ((1 - \lambda)z_0 + \lambda z_0)| \\
&= |(1 - \lambda)(z - z_0) + \lambda(z' - z_0)| \\
&\leq (1 - \lambda)|z - z_0| + \lambda|z' - z_0| \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq (1 - \lambda)r + \lambda r \qquad (\text{car } z \in \mathcal{D}(z_0, r) \text{ et } z' \in \mathcal{D}(z_0, r)) \\
&\leq r
\end{aligned}$$

On a bien prouvé que $\boxed{\mathcal{D}(z_0, r) \text{ est convexe}}$.

3. On va raisonner par récurrence. La stabilité par barycentre de 1 points est triviale. Quant à celle pour le barycentre de deux points, remarquons qu'il s'agit de la définition. Supposons que X est stable pour le barycentre de n points, où $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in X^{n+1}$ ainsi que $n + 1$ réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ de

somme 1. On décompose d'abord le barycentre de $n+1$ points comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i + \lambda_{n+1} z_{n+1} = (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i + \lambda_{n+1} z_{n+1},$$

ceci en supposant $1-\lambda_{n+1} \neq 0^*$ et en posant $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$.

Le nombre complexe $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i z_i$ est un barycentre de n éléments de X. En effet, les μ_i sont positifs (puisque les λ_i le sont et que $\lambda_{n+1} \leq 1$) et somment à 1 : $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$. Puisque X a été supposé stable pour le barycentre de n éléments, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i z_i \in X$. Puisqu'on a aussi $z_{n+1} \in X$ et que X est convexe, on a

$$(1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i + \lambda_{n+1} z_{n+1} \in X, \quad \text{soit} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_i \in X.$$

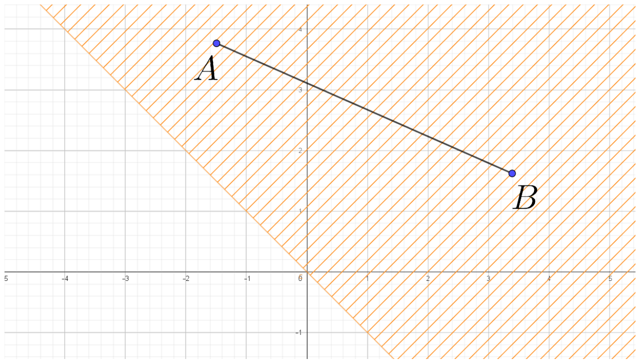
* Reste à traiter le cas où $1-\lambda_{n+1} = 0$. On a alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, ce qui implique (puisque les λ_i sont positifs) que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Dans ce cas, on a donc $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_i = 1 \cdot z_{n+1} \in X$. Ceci achève de prouver que X est stable par barycentre de $n+1$ éléments.

On en déduit par récurrence que X contient les barycentres de ses éléments.

4. L'exemple des demi-plans.

(a)



(b) Soient $A = (x, y)$ et $B = (x', y')$ deux éléments de H, et $\lambda \in [0, 1]$. Par définition de H, on a

$$ax + by \geq c \quad \text{et} \quad ax' + by' \geq c.$$

On multiplie la première inégalité par $(1-\lambda)$ (positif) et la seconde par λ (positif) : on obtient

$$(1-\lambda)ax + (1-\lambda)by \geq (1-\lambda)c \quad \text{et} \quad \lambda ax' + \lambda by' \geq \lambda c.$$

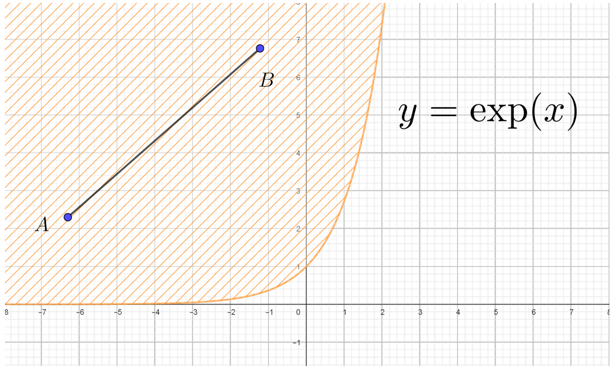
Sommons : on obtient

$$a\left((1-\lambda)x + \lambda x'\right) + b((1-\lambda)y + \lambda y) \geq c.$$

Ceci prouve que $(1-\lambda)(x, y) + \lambda(x', y') \in H$: on a démontré que $[A, B] \subset H$.

5. Épigraphe d'une fonction convexe.

(a)



(b) Supposons que f est une fonction convexe sur I. Considérons deux points $A = (x, y)$ et $B = (x', y')$ de l'ensemble $\mathcal{E}(f)$. Par définition $y \geq f(x)$ et $y' \geq f(x')$. On multiplie la première inégalité par $(1-\lambda)$ et la seconde par λ (tous deux positifs) avant de sommer : on obtient

$$(1-\lambda)y + \lambda y' \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x').$$

Or, par convexité de f, on a $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(x') \geq f\left((1-\lambda)x + \lambda x'\right)$.

Par transitivité,

$$(1-\lambda)y + \lambda y' \geq f\left((1-\lambda)x + \lambda x'\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad ((1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)y + \lambda y') \in \mathcal{E}(f).$$

On a démontré que $[A, B] \subset \mathcal{E}(f)$, et établi que $\mathcal{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

(c) Le demi-plan $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by \geq c\}$ est (dans le cas où $b > 0$) l'épigraphe de la fonction affine (donc convexe) $x \mapsto \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$.