Ensembles et applications
3/3 : Relations binaires

1 Relations binaires et leurs éventuelles propriétés.

Soit E un ensemble.

Définition 1.

On appelle **relation binaire** sur E un prédicat $\mathscr{R}(x, y)$ sur $E \times E$, c'est-à-dire une propriété dépendant de $(x, y) \in E \times E$ et pouvant être vérifiée ou pas par chaque couple (x, y) de $E \times E$.

Soit $(x, y) \in E^2$. Si la propriété $\mathscr{R}(x, y)$ est vérifiée, on dit que x et y sont **en relation**, et on note

$$x \mathscr{R} y.$$

Remarque. On peut aussi définir plus rigoureusement (mais moins clairement) une relation binaire $\mathscr{R}$ comme une partie de $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on dit alors que x est en relation avec y si $(x, y) \in \mathscr{R}$.

Définition 2 (Propriétés que possède *éventuellement* une relation binaire)**.**

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est

- **réflexive** si
$$\forall x \in E \quad x \mathscr{R} x,$$
- **symétrique** si
$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \mathscr{R} y \Longrightarrow y \mathscr{R} x,$$
- **antisymétrique** si
$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} x) \Longrightarrow x = y,$$
- **transitive** si
$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z) \Longrightarrow x \mathscr{R} z.$$

Exemples 3.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites du plan, et E un ensemble quelconque.

Relation	réflexive ?	symétrique ?	antisymétrique ?	transitive ?
$=$ sur E				
$<$ sur $\mathbb{R}$				
$\perp$ sur $\mathcal{D}$				
$\parallel$ sur $\mathcal{D}$				

2 Relations d'équivalence.

Définition 4.

Sur un ensemble E, une **relation d'équivalence** est une relation binaire $\sim$ qui est réflexive, symétrique et transitive.

Deux éléments x et y qui sont en relation (i.e. tels que $x \sim y$) sont dits **équivalents**.

Pour $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence de** x l'ensemble des éléments qui sont équivalents à x ; on notera ici cet ensemble $[x]$:

$$[x] := \{y \in E \mid y \sim x\}.$$

Exemple Sur E, l'égalité est une relation d'équivalence (triviale). Que dire des classes d'équivalence ?

Exemple 5 (Relation d'équivalence associée à une fonction)**.**

Soit $f : E \to F$ une application. Pour $x, y \in E$, on pose $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$.
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E. Décrire les classes d'équivalence.

Définition 6.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$, la relation de **congruence** modulo α est définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \equiv y[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ x = y + k\alpha.$$

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Sur $\mathbb{Z}$, la relation de **congruence** modulo n est définie par

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad p \equiv q[n] \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ p = q + kn.$$

Proposition 7.

Les relations de congruence sont des relations d'équivalence.

Proposition 8.

Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Pour $x, x' \in E$,

$$x \sim x' \iff x' \in [x] \iff [x] = [x'].$$

Théorème 9.

Les classes d'équivalence pour une relation d'équivalence sur un ensemble E forment une partition de cet ensemble.

3 Relations d'ordre.

Définition 10.

Sur un ensemble E, une **relation d'ordre** est une relation binaire $\preceq$ qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Au sujet du couple $(E, \preceq)$, on peut alors parler d'*ensemble ordonné*.

Définition 11.

Une relation d'ordre sur un ensemble E est dite **totale** si on peut toujours comparer deux éléments de E, c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \preceq y \;\text{ ou }\; y \preceq x.$$

Dans le cas contraire, on peut parler d'ordre **partiel**.

Remarque. Logique : prouver qu'un ordre $\preceq$ n'est pas total sur un ensemble E, c'est être en mesure d'exhiber deux éléments x et y de E pour lesquels les assertions $(x \preceq y)$ et $(y \preceq x)$ sont fausses.

Exemple 12 (Inégalités)**.**

La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Il s'agit d'un ordre total.
La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas réflexive).

Exemple 13 (Inclusion)**.**

Soit E un ensemble. La relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
Dès que E possède plus de deux éléments, il s'agit d'un ordre partiel.

Exemple 14 (Divisibilité sur les entiers positifs)**.**

Soient p et q deux entiers naturels. On dit que p divise q si il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $q = kp$; on note alors $p \mid q$. La relation $\mid$ est une relation d'ordre (partielle) sur $\mathbb{N}$.

Exemple 15.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'ordre lexicographique est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}^p$.
Deux p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ sont comparés d'abord selon leur première coordonnée, puis selon la deuxième en cas d'égalité, etc...
Les p-uplets sont alors ordonnés comme dans un dictionnaire.
Pour cet ordre sur $\mathbb{N}^3$, $(1, 2, 4)$ est plus petit que $(1, 3, 2)$, qui est lui-même plus petit que $(1, 3, 4)$.

Les définitions qui suivent généralisent à des ensembles ordonnés quelconques le vocabulaire utilisé dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$.

Définition 16.

Considérons deux ensembles, chacun muni d'une relation d'ordre : $(E, \underset{E}{\preceq})$ et $(F, \underset{F}{\preceq})$.
D'une application $f : E \to F$, on dit qu'elle est

- **croissante** si
$$\forall (x, x') \in E^2 \quad x \underset{E}{\preceq} x' \implies f(x) \underset{F}{\preceq} f(x').$$
- **décroissante** si
$$\forall (x, x') \in E^2 \quad x \underset{E}{\preceq} x' \implies f(x') \underset{F}{\preceq} f(x).$$
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 17.

Connaissons-nous des fonctions monotones (au sens de l'inclusion) de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même ?

Définition 18 (Majorant, minorant).

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- On dit que A est **majorée** dans E si il existe un élément M de E tel que
$$\forall x \in A \quad x \preceq M.$$
Dans ce contexte, M est appelé un **majorant** de A.
- On dit que A est **minorée** dans E si il existe un élément m de E tel que
$$\forall x \in A \quad m \preceq x.$$
Dans ce contexte, m est appelé un **minorant** de A.
- On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarques.

1. L'existence d'un majorant ou d'un minorant pour une partie A de E n'est pas garantie.
2. Un majorant ou un minorant de A n'appartient pas nécessairement à A.
3. Un majorant ou un minorant n'est pas nécessairement unique.

Définition 19 (Maximum, minimum)**.**

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- S'il existe un majorant de A qui appartient à A, alors cet élément est unique.
  Il est appelé plus grand élément de A ou encore **maximum** de A et noté $\max(A)$.
- S'il existe un minorant de A qui appartient à A, alors cet élément est unique.
  Il est appelé plus petit élément de A ou encore **minimum** de A et noté $\min(A)$.

Remarques.

1. L'existence d'un maximum ou d'un minimum n'est pas garantie.
2. Un maximum ou un minimum appartient nécessairement à A.

Exemple 20.

Soit E un ensemble. Alors $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné.
$\mathcal{P}(E)$ possède-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

Définition 21 (Borne supérieure, inférieure)**.**

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, alors cet élément est unique.
  Il est appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup(A)$.
- Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, alors cet élément est unique.
  Il est appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf(A)$.

Remarques.

1. Comme pour le maximum, l'existence d'une borne supérieure dans E n'est pas garantie.
2. En cas d'existence, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A et la borne inférieure le plus grand des minorants de A.

Exemple 22 ((*) laissé en exercice, une fois apprivoisée la notion pour les parties de $\mathbb{R}$)**.**

Soit E un ensemble. Dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$, toute partie A de $\mathcal{P}(E)$ possède une borne supérieure ainsi qu'une borne inférieure : on a

$$\sup(A) = \bigcup_{X \in A} X \quad \text{et} \quad \inf(A) = \bigcap_{X \in A} X.$$

Exercices

$\boxed{\mathbf{16.1}}$ **[♦♦◊]** Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser le cardinal de la classe d'équivalence d'un réel x.

$\boxed{\mathbf{16.2}}$ **[♦♦◊]** On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$p \mathscr{R} q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* : p^n = q.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

$\boxed{\mathbf{16.3}}$ **[♦♦◊]** Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $x \preceq y$ si

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad : \quad \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.
2. Si $n \geq 2$, montrer qu'il s'agit d'un ordre partiel.

$\boxed{\mathbf{16.4}}$ **[♦♦◊]** Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit une relation binaire en posant que deux réels strictement positifs sont en relation, ce qu'on note $x\mathcal{R}y$ si et seulement si

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad px = qy.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Démontrer que pour cette relation, deux classes d'équivalences sont nécessairement en bijection.

$\boxed{\mathbf{16.5}}$ **[♦♦◊]** Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 + 2y = y^2 + 2x.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un réel a.

$\boxed{\mathbf{16.6}}$ **[♦♦◊]** Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.
Pour $(x, y) \in E$, on note $x \sim y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_n \in E$ tels que

$$x_0 = x, \quad x_0\mathcal{R}x_1, \quad x_1\mathcal{R}x_2, \quad x_{n-1}\mathcal{R}x_n, \quad x_n = y.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation transitive sur E.
2. On suppose que $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

$\boxed{\mathbf{16.7}}$ **[♦♦♦]** Soit E un ensemble et A une partie de E. Pour deux parties X et Y de E, on note $X \sim Y$ lorsque $X \cap A = Y \cap A$, ce qui définit sur $\mathcal{P}(E)$ une relation binaire.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On note $\mathcal{P}(E)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences pour $\sim$.
   Démontrer qu'il existe une bijection de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(E)/\sim$.
