Khôlles

M7, T3, T4, T5, I1

Exercices.

M7 — Mécanique du solide

Question 1

Énoncer le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe pour un solide en rotation.

Solution :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à son axe (O_z) est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \quad \text{soit} \quad J_z\dot{\omega} = \sum_i M_i$$

Question 2

Énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe et montrer qu'il est équivalent à la loi du moment cinétique scalaire.

Solution :

TEC : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i$ et $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega^2$ et $\mathcal{P}_i = \vec{M}_i\dot{\theta}$.
TMCS : $\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M}_i$ et $L_z = J_z\omega$ et $J\dot{\omega} = \sum_i \vec{M}_i$.

Question 3

Établir l'équation du mouvement du pendule pesant avec le TEC.

Solution :

Système : {Pendule de masse m}.
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : $\vec{p} = m\vec{g}$, $M_z(\vec{p}) = -d\sin\theta mg$ donc $\mathcal{P}(\vec{p}) = M_z(\vec{p}).\dot{\theta} = -lmg\dot{\theta}\sin\theta$.
$\vec{R}$ la réaction du pivot, qui est idéal : $M_z(\vec{R}) = 0$ donc $\mathcal{P}(\vec{R}) = 0$.
Étude cinématique : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$.
TEC: $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{p}) + \cancel{\mathcal{P}(\vec{R})} \Longrightarrow J\ddot{\theta}\dot{\theta} = -lmg\dot{\theta}\sin\theta \Longrightarrow J\ddot{\theta} + lmg\sin\theta = 0$.

Question 4

Établir l'équation du mouvement du pendule pesant avec le TMC.

Solution :

Système : {Pendule de masse m}.
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : $\vec{p} = m\vec{g}$, $M_z(\vec{p}) = -d\sin\theta mg$ Et $M_z(\vec{R}) = 0$ car c'est une liaison pivot idéale.
Etude cinématique : $\vec{OM} = l\vec{e_r}$, $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$
Ainsi, $L_z = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{e_r} \wedge ml\dot{\theta}\vec{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{e_z}$ et $\frac{dL_z}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e_z}$.
TMC : $\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \Longrightarrow ml^2\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

T3 — Deuxième Principe

Question 5

Énoncer complètement le second principe : propriétés de l'entropie, bilan d'entropie et expliciter les différents termes.

Solution :

L'entropie S est une fonction d'état extensive et additive.
Deuxième principe:

$$\Delta S = S_{\text{créée}} + S_{\text{éch}}$$

Où est $S_{\text{créée}}$ est l'entropie créée par le système et $S_{\text{éch}}$ est l'entropie échangée avec l'extérieur.
On a $S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ au contact des thermostats de températures T_i.
Si $S_{\text{créée}} = 0$, la transformation est réversible, sinon elle est irréversible.

Question 6

Citer et établir la loi de Laplace pour un gaz parfait et ses conditions d'application.
On rappelle l'entropie d'un gaz parfait :

$$S(P,V) = \frac{nR}{\gamma - 1}\ln\frac{P}{P_0} + \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\ln\frac{V}{V_0} + S_0.$$

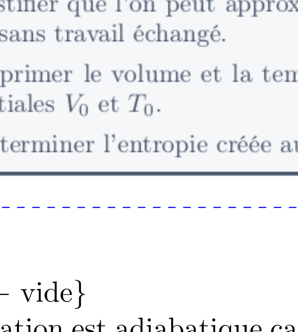
Solution :

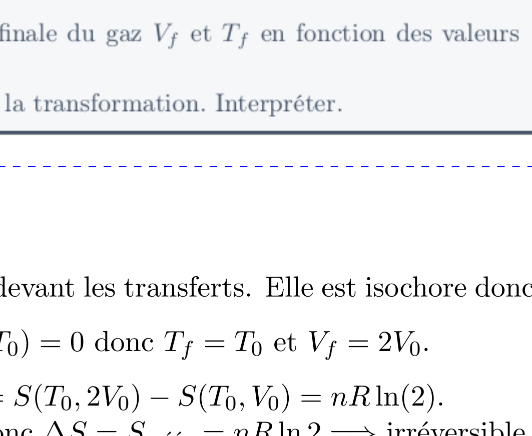
Conditions: on considère un gaz parfait, subissant une transformation adiabatique réversible.
Loi de Laplace: $PV^\gamma = cste$.
Les conditions adiabatique et réversible assurent que $\Delta S = 0$.
De plus, $\Delta S = S(P_2, V_2) - S(P_1, V_1) = ... = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{P_2V_2^\gamma}{P_1V_1^\gamma}$ donc $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$.

Question 7

Application 8 – Détente de Joule – Gay-Lussac

« L'appareil à deux globes » est constitué de deux ballons en verre de même volume $V_0 \approx 14\,\text{L}$, reliés entre eux par une tubulure de laiton munie d'un robinet. L'un des ballons peut être relié à une machine pneumatique permettant d'y faire le vide, ou à une réserve de gaz.





On suppose la demi-enceinte de droite initialement vide et le gaz dans la demi-enceinte de gauche à la température T_0. Lorsque l'on ouvre le robinet, le gaz se répand très rapidement dans le vide.

1. Justifier que l'on peut approximer la transformation du gaz comme étant adiabatique et sans travail échangé.
2. Exprimer le volume et la température finale du gaz V_f et T_f en fonction des valeurs initiales V_0 et T_0.
3. Déterminer l'entropie créée au cours de la transformation. Interpréter.

Solution :

Système : {gaz + vide}
$\boxed{1.}$ La transformation est adiabatique car rapide devant les transferts. Elle est isochore donc $W = 0$.

$\boxed{2.}$ Premier principe: $\Delta U = \cancel{W} + Q = mc(T_f - T_0) = 0$ donc $T_f = T_0$ et $V_f = 2V_0$.

$\boxed{3.}$ Deuxième principe : $\Delta S = \Delta S_{GP} + \cancel{\Delta S_{vide}} = S(T_0, 2V_0) - S(T_0, V_0) = nR\ln(2)$.
L'entropie échangée est nulle car adiabatique. Donc $\Delta S = S_{\text{créée}} = nR\ln 2 \Longrightarrow$ irréversible.

Question 8

Application 9 – Chauffage par effet Joule

On considère une masse m d'eau de capacité thermique massique c, initialement à la température $T_i = 20\,°\text{C}$, dans un calorimètre dont on néglige la valeur en eau. On plonge une résistance $R = 5\,\Omega$ (de capacité thermique négligeable), parcourue par un courant d'intensité $I = 1\,\text{A}$ pendant $\tau = 1\,\text{min}$ dans l'eau.

1. Établir l'expression de la température finale T_f. Faire l'application numérique.
2. Exprimer l'entropie créée. Conclure.
3. Que devient cette expression en supposant $T_f \approx T_i$, c'est-à-dire si $RI^2\tau \ll mcT_i$? Faire l'application numérique.

Donnée : on rappelle que l'entropie massique d'une phase condensée est donnée par

$$s(t) = c\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0,$$

où s_0 est l'entropie massique à la température T_0 et c la capacité thermique massique.

Solution :

Système : {Eau + Résistance + Calorimètre}
$\boxed{1.}$ Travail électrique : $W = RI^2\tau$.
On a $\Delta H = W + \cancel{Q} = mc(T_f - T_i)$ donc $T_f = T_i + \frac{RI^2\tau}{mc}$.

$\boxed{2.}$ $\Delta S = \Delta S_{eau} + \cancel{\Delta S_{calo}} + \cancel{\Delta S_R} = mc\ln\frac{T_f}{T_i}$.
Adiabatique : $S_{\text{éch}} = 0$ donc $S_{\text{créée}} = mc\ln\frac{T_f}{T_i}$ donc irréversible.

$\boxed{3.}$ $S_{\text{créée}} = mc\ln(1 + \frac{RI^2\tau}{mcT_i}) \sim \frac{RI^2\tau}{T_i} > 0$.

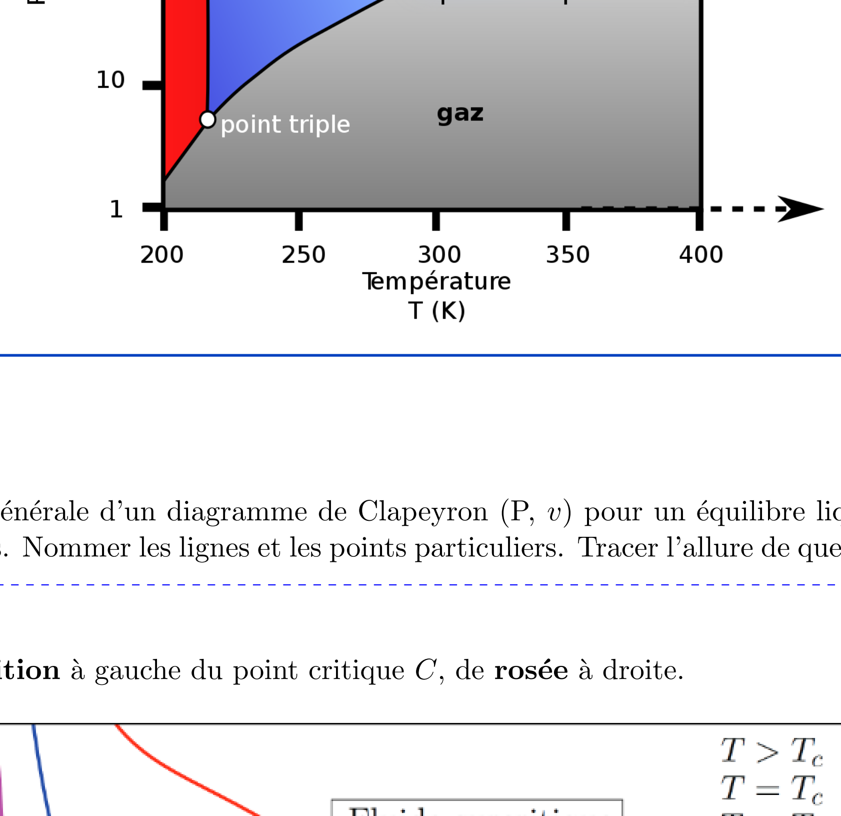
T4 — Transition de Phase

Question 9

Diagramme de phase (P, T) quelconque avec point triple et critique.

Solution :

C'est :

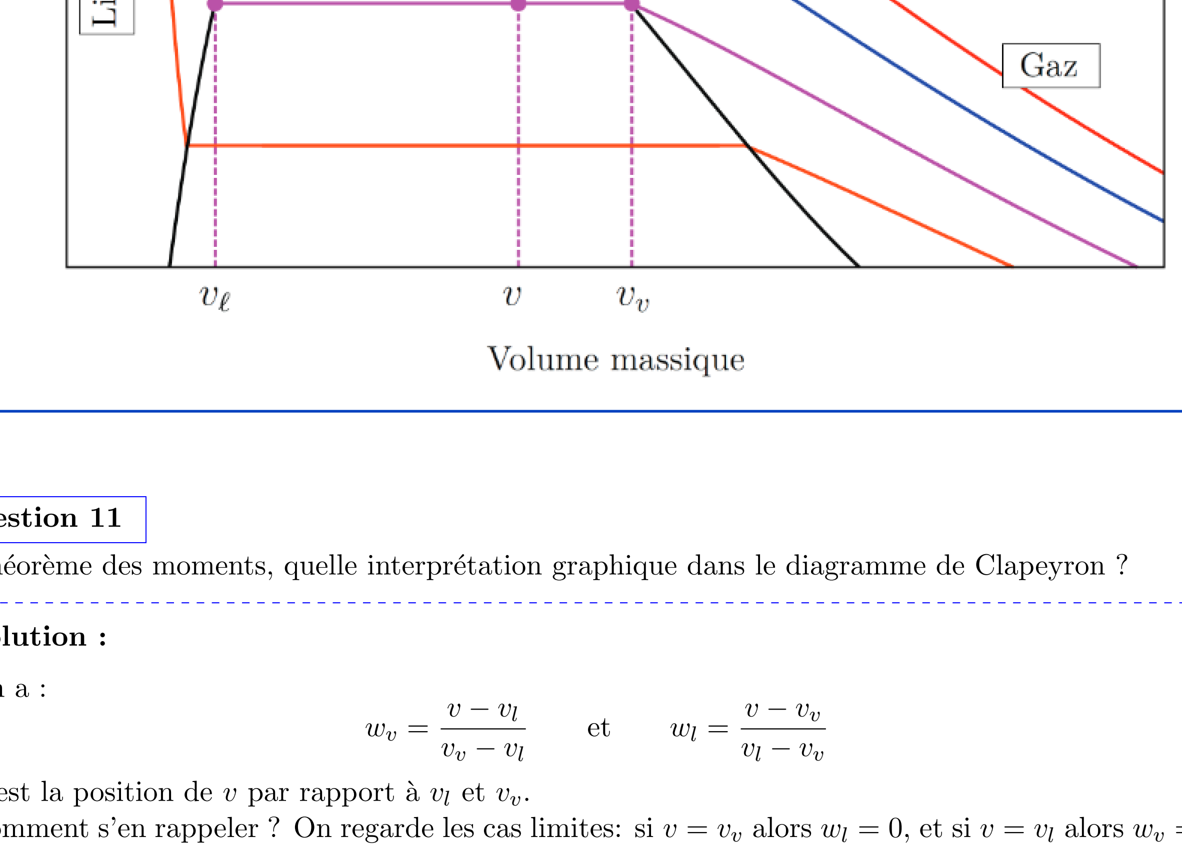


Question 10

Tracer l'allure générale d'un diagramme de Clapeyron (P, v) pour un équilibre liquide-vapeur et y placer les phases. Nommer les lignes et les points particuliers. Tracer l'allure de quelques isothermes.

Solution :

Courbe d'**ébullition** à gauche du point critique C, de **rosée** à droite.



Question 11

Théorème des moments, quelle interprétation graphique dans le diagramme de Clapeyron ?

Solution :

On a :

$$w_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l} \qquad \text{et} \qquad w_l = \frac{v - v_v}{v_l - v_v}$$

C'est la position de v par rapport à v_l et v_v.
Comment s'en rappeler ? On regarde les cas limites: si $v = v_v$ alors $w_l = 0$, et si $v = v_l$ alors $w_v = 0$.

T5 — Machine Thermique

Question 12

Donner le sens réel des échanges d'énergies dans un moteur, un réfrigérateur et une pompe à chaleur.

Solution :

- **Moteur:** $W < 0$, $Q_c > 0$ et $Q_f < 0$.
- **Réfrigérateur:** $W > 0$, $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$.
- **Pompe à chaleur:** $W > 0$, $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$.

Question 13

Citer quelques ordres de grandeurs de machines thermiques actuelles.

Solution :

- **Moteur:** $\eta \sim 40\%$.
- **Réfrigérateur:** ~ 2 (frigo) et ~ 8 (congélateur).
- **Pompe à chaleur:** $e \sim 4$.

Question 14

Définir le rendement ou l'efficacité d'une machine thermique en fonction des énergies échangées au cours du cycle et établir la formulation associée au théorème de Carnot.

Solution :

Ils sont définis par $\left|\frac{\mathcal{E}_{\text{utile}}}{\mathcal{E}_{\text{coûteuse}}}\right|$
Rendement de Carnot:
On a $\eta = \left|\frac{W}{Q_c}\right| = -\frac{W}{Q_c}$.
Premier principe : $-W = Q_c + Q_f \Longrightarrow \eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$.
Deuxième principe : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 \Longrightarrow \frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$.
Alors $\eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_c} = \eta_C$.
Efficacité de Carnot (réfrigérateur):
De la même manière :
On a $e = \left|\frac{Q_f}{W}\right| = \frac{Q_f}{W}$.
Premier principe : $W = -Q_c - Q_f \Longrightarrow e = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f}$.
Deuxième principe : $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \Longrightarrow \frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f}$.
Alors $e = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{-\frac{Q_c}{Q_f} - 1} \leq \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = e_C$.
Efficacité de Carnot (pompe à chaleur):
De la même manière :
On a $e = \left|\frac{Q_c}{W}\right| = -\frac{Q_c}{W}$.
Premier principe : $W = -Q_c - Q_f \Longrightarrow e = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f}$.
Deuxième principe : $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \Longrightarrow \frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$.
Alors $e = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = e_C$.
Interprétation physique: Pour 1 joule fournies par W, on peut extraire e joules de chaleur.

I1 — Champ Magnétique

Question 15

Représenter les lignes de champ au voisinage d'une spire, d'une bobine longue et d'un aimant.

Solution :

On a :

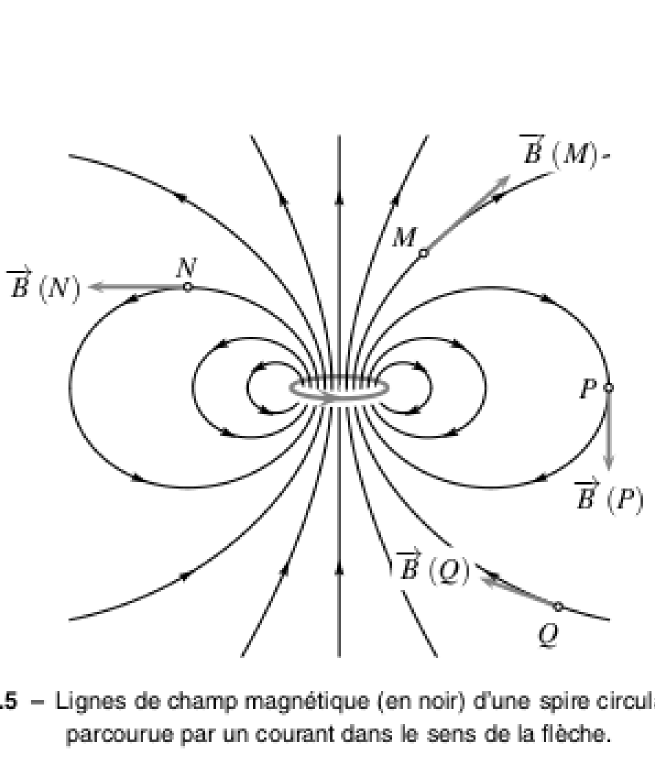


Figure 27.5 – Lignes de champ magnétique (en noir) d'une spire circulaire (en gris) parcourue par un courant dans le sens de la flèche.

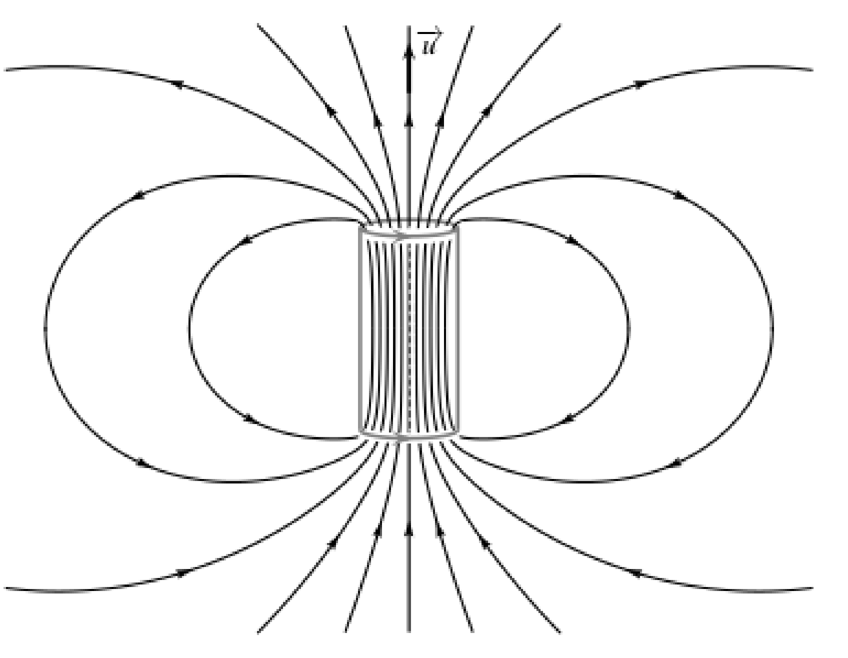


Figure 27.8 – Lignes de champ magnétique, en noir, d'une bobine, en gris (seules les spires extrêmes sont représentées, afin de voir les lignes de champ dans la bobine).

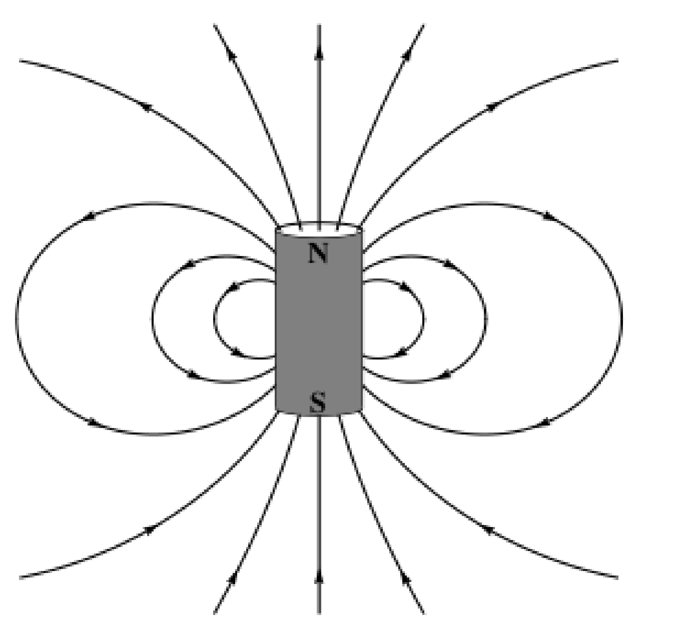


Figure 27.9 – Lignes de champ magnétique d'un aimant. **N** est le pôle nord et **S** le pôle sud.

Question 16

Expliquer comment s'identifie une zone de champ uniforme sur une carte de champ magnétique et décrire un dispositif permettant de réaliser un tel champ.

Solution :

On reconnaît un champ uniforme par des lignes de champ parallèles et espacées de manière régulière. Pour réaliser un champ uniforme, on peut utiliser un solénoïde de grande longueur devant son rayon.

Question 17

En s'appuyant sur un schéma, donner l'expression de la force de Laplace qui s'exerce sur un élément de fil conducteur de longueur dl.

Solution :

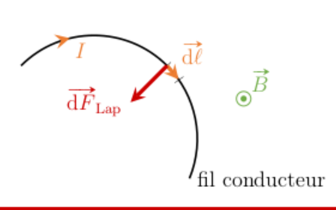
Cours :

Définition

Un élément de fil de longueur $\mathrm{d}\ell$, parcouru par un courant d'intensité I, subit de la part d'un champ magnétique **extérieur** $\vec{B}$ la **force de Laplace** élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_{\text{Lap}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_{\text{Lap}} = I\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B},$$

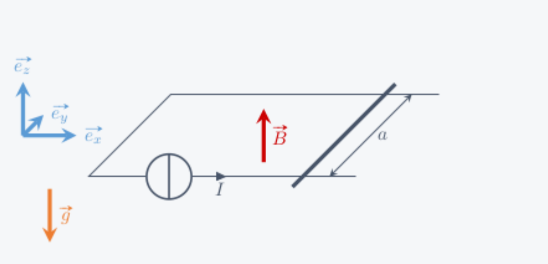
où $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est tangent au fil, de **même sens que** I et de norme $\mathrm{d}\ell$.



Question 18

Application 4 – Rail de Laplace

On considère le circuit représenté ci-contre, constitué d'un barreau métallique de masse m, libre de glisser sans frottement le long de deux rails parallèles séparés d'une distance a. Le circuit est fermé par une source idéale de courant qui impose un courant d'intensité $I > 0$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{e_z}$, où $B > 0$.



https://youtu.be/58MmOpSm4LY

1. Exprimer la force de Laplace $\vec{F}_{\text{Lap}}$ qui s'exerce sur le barreau métallique. Reproduire le schéma et représenter $\vec{F}_{\text{Lap}}$.
2. ~~Établir l'équation différentielle du mouvement. Quel type de mouvement observe-t-on ?~~
3. Exprimer la puissance de la force de Laplace $\mathcal{P}_{\text{Lap}}$. Commenter.

Solution :

1. $\vec{F_{Lap}} = Ia\vec{e_y} \wedge B\vec{e_z} = aIB\vec{e_x}$.
3. $\mathcal{P}_{Lap} = \vec{F_{Lap}} \cdot \vec{v} = aIB\vec{e_x} \cdot \dot{x}\vec{e_x} = aIB\dot{x} > 0$, c'est donc une force motrice.

Question 19

Établir l'expression du moment du couple subit par une spire rectangulaire.

Solution :

À voir en cours lundi 13 mai.