

Chapitre 1

Sommes et produits.

Sommaire.

1	Sommes et produits d’une famille finie de nombres.	1
2	Règles de calculs.	2
3	Téléscopage.	2
4	Sommes et produits de référence.	3
5	Changements d’indice.	5
6	Coefficients binomiaux et formule du binôme.	5
7	Sommes doubles.	6
8	Exercices.	7

Les propositions marquées de ★ sont au programme de colles.

1 Sommes et produits d’une famille finie de nombres.

Notation

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble **fini non vide** I .
On note $\sum_{i \in I} a_i$ (resp. $\prod_{i \in I} a_i$) la somme (resp. le produit) des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

Exemple. Notons $I = \{\diamond, \heartsuit, \Delta\}$, puis posons $a_\diamond := 2$, $a_\heartsuit := e$ et $a_\Delta := \pi$.
Alors $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de trois nombres complexes.

$$\sum_{i \in I} a_i = a_\diamond + a_\heartsuit + a_\Delta = 2 + e + \pi \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} a_i = a_\diamond \times a_\heartsuit \times a_\Delta = 2e\pi.$$

Notation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $I = \llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$, on peut aussi noter

$$a_1 + \dots + a_n = \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Plus généralement, si $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ et $I = \llbracket m, n \rrbracket = \{m, m+1, \dots, n\}$ on peut noter

$$a_m + \dots + a_n = \sum_{i \in \llbracket m, n \rrbracket} a_i = \sum_{m \leq i \leq n} a_i = \sum_{i=m}^n a_i.$$

Remarque. La lettre i est une variable *muette*, elle a seulement un sens localement, dans l’écriture de la somme ou du produit :

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Notation

Si I est l’ensemble vide, on convient qu’une expression du type $\sum_{i \in I} a_i$ vaut 0 et que $\prod_{i \in I} a_i$ vaut 1.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Détailler les sommes suivantes, éventuellement avec des points de suspension.

$$\sum_{k=2}^5 k, \quad \sum_{k=0}^0 2^k, \quad \sum_{k=0}^n k^2, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2, \quad \sum_{k=1}^0 k, \quad \sum_{k=0}^n 1.$$

Proposition 3

Soient deux entiers m et n tels que $m \leq n$ et a_m, a_{m+1}, \dots, a_n des nombres.
L'ensemble $\llbracket m, n \rrbracket$ contient $n - m + 1$ entiers, de sorte que

$$\sum_{i=m}^n a_i \text{ est une somme de } n - m + 1 \text{ termes,}$$
$$\prod_{i=m}^n a_i \text{ est un produit de } n - m + 1 \text{ facteurs.}$$

Preuve :

On a $\llbracket m, n \rrbracket = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \llbracket 1, m - 1 \rrbracket$ donc $|\llbracket m, n \rrbracket| = |\llbracket 1, n \rrbracket| - |\llbracket 1, m - 1 \rrbracket| = n - m + 1$.
On a $\llbracket m, n \rrbracket = \{m + 0, m + 1, \dots, m + (n - m)\}$ donc $|\llbracket m, n \rrbracket| = n - m + 1$.

Exemple 4: Termes ou facteurs égaux.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Que valent $\sum_{k=0}^n a$ et $\prod_{k=0}^n a$?

Solution :

On a $\sum_{k=0}^n a = (n + 1)a$ et $\prod_{k=0}^n a = a^{n+1}$.

2 Règles de calculs.

Proposition 5: Linéarité de la somme.

Soient deux familles de nombres $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble fini et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i.$$

Corrolaire 6: La somme de la combinaison linéaire, c'est la combinaison linéaire des sommes.

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

Proposition 7: Produits de produits.

Soient deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{i \in I} (a_i \cdot b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \left(\prod_{i \in I} b_i \right), \quad \text{En particulier, } \prod_{i=1}^n (\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^n a_i.$$

Si de surcroît tous les b_i sont non nuls

$$\prod_{i \in I} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i \in I} a_i}{\prod_{i \in I} b_i}.$$

Proposition 8: Relation de Chasles.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et m un entier tel que $1 \leq m \leq n$. Soit $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n a_i = \left(\prod_{i=1}^m a_i \right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^n a_i \right).$$

Proposition 9: Exponentielle d'une somme, logarithme d'un produit.

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles finies de nombre réels, les b_i étant tous strictement positifs.

$$\exp \left(\sum_{i \in I} a_i \right) = \prod_{i \in I} \exp(a_i) \quad \text{et} \quad \ln \left(\prod_{i \in I} b_i \right) = \sum_{i \in I} \ln(b_i).$$

3 Télésopage.

Théorème 10: Sommes télescopiques.

Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n, a_{n+1}$ des nombres complexes. Alors,

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

Proposition 11: Produits télescopiques.

Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n, a_{n+1}$ des nombres complexes non nuls. Alors,

$$\prod_{k=m}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Exemple 12

Soit n un entier supérieur à 2. Simplifier

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^6 - k^6), \quad \sum_{k=1}^{n+1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}), \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Solution :

1. On a $\sum_{k=0}^n ((k+1)^6 - k^6) = (n+1)^6$.
2. On a $\sum_{k=1}^{n+1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+2} - 1$.
3. On a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.
4. On a $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$.

4 Sommes et produits de référence.

Proposition 13: $\sum_{k=1}^n k^p$ avec $p \in \{1, 2, 3\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Preuve :

Pour la première somme, on a

$$2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n - k + 1) = \sum_{k=1}^n (n + 1) = n(n + 1).$$

On peut montrer la deuxième par récurrence, ou en calculant $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$.

Proposition 14: Progression géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Preuve :

Le cas $q = 1$ est trivial.

Dans le cas $q \neq 1$, on a:

$$(1-q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}$$

Donc $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple 15: de sommes de progressions géométriques.

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ ($m \leq n$) et $x \in \mathbb{R}$. Calculer : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=1}^n 2^k$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$, $\sum_{k=m}^n x^k$.

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}. \\ \sum_{k=1}^n 2^k &= \sum_{k=0}^n 2^k - 1 = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1 = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1). \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} &= \sum_{k=0}^n (-x^2)^k = \frac{1 + (-1)^n (x^2)^{n+1}}{1 + x^2}. \\ \sum_{k=m}^n x^k &= \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^{m-1} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1 - x^m}{1 - x} = \frac{x^m - x^{n+1}}{x - 1} = x^m \frac{1 - x^{n-m+1}}{1 - x}. \end{aligned}$$

Proposition 16: Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$

Soient a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Preuve :

On a par télescopage:

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k} \right) = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n.$$

Exemple 17

Factoriser : $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^3 + b^3$.

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b). \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2). \\ a^4 - b^4 &= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Définition 18

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** de n et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n \quad \text{si } n \geq 1,$$

et on pose que $0! = 1$. Par exemple, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Remarque. Vu en Terminale: $n!$ est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. C'est aussi le nombre de façons différentes de numéroté n objets. Sera revu dans le cours de dénombrement.

Proposition 19: Une relation simple et utile.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \prod_{k=1}^n k \cdot (n+1) = (n+1) \cdot n!$

Exemple 20: Produit des entiers pairs, des entiers impairs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n! \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (2k) &= 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!. \\ \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) &= \frac{\prod_{k=0}^{2n} k}{\prod_{k=0}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

5 Changements d'indice.

Exemple 21

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} k^2 + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k}) &= \sum_{j=2}^{n+2} \sqrt{j} - \sum_{k=0}^n \sqrt{k} = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 1. \\ \sum_{k=1}^{2n} k^2 + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{2n} (1 + (-1)^k) k^2 = \sum_{k=1}^n 2(2k)^2 = 8 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{4}{3} n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Proposition 22

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini I et σ une bijection de I vers I . Alors

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

6 Coefficients binomiaux et formule du binôme.

Définition 23

Pour deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on appelle **coefficient binomial** « p parmi n » le nombre

$$\binom{n}{p} := \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in \llbracket 0, n \rrbracket. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 24

Soient n et p deux entiers naturels.

Le nombre $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.

Exemple 25

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 26

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Appelées formule de symétrie, formule du pion et formule de Pascal, dans l'ordre.

Preuve :

On ne fait que les cas où $p \leq n$.

1. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

2. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{p \times (p-1)!(n-p)!} = \frac{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$$

3. Soit $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \times \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{n-p} \right) \\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \times \left(\frac{n+1}{(p+1)(n-p)} \right) \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}. \end{aligned}$$

Exemple 27

Démontrer que les coefficients binomiaux sont des entiers.

Solution :

Montrons le par récurrence sur n .

Initialisation. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a $\binom{0}{p} = 0$ si $p \neq 0$ et $\binom{0}{p} = 1$ sinon.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

On a $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \in \mathbb{N}$ par somme d'entiers. **Conclusion.** Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Théorème 28: Formule du binôme de Newton. ★

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve :

Montrons le par récurrence sur n .

Initialisation. On a $(a + b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie.

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exemple 29

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

Exemple 30: Calculs classiques.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n. \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = (1 - 1)^n = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases} \\ \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}. \end{aligned}$$

7 Sommes doubles.

Théorème 31: Sommes doubles: deux écritures.

Soient n et p dans \mathbb{N}^* , $I = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ et $(a_{i,j})_{i,j \in I}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i,j \in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Proposition 32: Produit de deux sommes.

Soient n et p dans \mathbb{N}^* et deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$. On a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_i \cdot b_j.$$

En particulier,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

Proposition 33: Sommes triangulaires : deux écritures.

Soient n et p dans \mathbb{N}^* , et $I = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket : i \leq j\}$.

Soit $(a_{i,j})_{i,j \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I . Leur somme peut s'écrire:

$$\sum_{i,j \in I} a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^p a_{i,j}.$$

Méthode

Dans les doubles sommes, on peut ajouter des parenthèses superflues:

$$\sum_{i,j \in I} a_{i,j} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^j a_{i,j} \right).$$

À l'intérieur des parenthèses, on calcule à j fixé, c'est-à-dire que l'on traite j comme une constante.

Exemple 34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$

Solution :

On a:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{j+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{4}.$$

8 Exercices.

Exercice 1: ♦♦♦

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

Solution :

Initialisation. Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = \frac{(-1)^1 (2 \cdot 1 + 1) - 1}{4} = -1$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie. On a:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$$

Donc:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1} (n+1) = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1} (n+1)$$

Donc:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \frac{(-1)^n (2n+1) - 1 + 4(-1)^{n+1} (n+1)}{4} \\ &= \frac{(-1)^n (-2n-3) - 1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (2n+3) - 1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (2(n+1)+1) - 1}{4} \end{aligned}$$

Conclusion. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2: ♦♦♦

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n k(k+1), \quad \sum_{k=n}^{2n} e^{-k}, \quad \sum_{k=0}^{2n} |k-n|.$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ \sum_{k=n}^{2n} e^{-k} &= \sum_{k=0}^n e^{-k-n} = e^{-n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e}\right)^k = e^{-n} \cdot \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e^{-n} - e^{-2n-1}}{1 - e^{-1}} \\ \sum_{k=0}^{2n} |k-n| &= \sum_{k=0}^n (-k+n) + \sum_{k=0}^n (k+n-n) = -\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \end{aligned}$$

Exercice 3: ♦♦♦

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=-n}^n (k+2), \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n (k+2) &= \sum_{k=0}^{2n} (k-n+2) = 2(2n+1) = 4n+2 \\ \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{2k} 4k^2 + \sum_{k=1}^n (-1)^{2k-1} (4k^2 - 4k + 1) = n(2n+1) \end{aligned}$$

Exercice 4: ♦♦♦

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}, \quad \sum_{k=0}^n k \cdot k!.$$

Solution :

On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \\ \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \\ \sum_{k=0}^n k \cdot k! &= \sum_{k=0}^n (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

Exercice 5: ♦♦♦

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}), \quad \sum_{k=1}^n (u_{2k+1} - u_{2k-1}).$$

Solution :

On a:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2(k+1)} - u_{2(k)}) = u_{2n} - u_0$$

Et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (u_{2k+1} - u_{2k-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+1}) \\ \text{Donc : } \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+2} - u_{2k}) &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+3} - u_{2k+2}) + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k} - u_{2k+1}) \\ &= u_{2n+1} - u_{2n} - u_{2n-1} + u_0 \\ \text{Alors : } \sum_{k=1}^n (u_{2k+1} - u_{2k-1}) &= u_{2n+1} - u_{2n-1} \end{aligned}$$

Exercice 6: ♦♦◇

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n kq^{k-1}$.

Que vaut-elle si $q = 1$? Désormais, on supposera $q \neq 1$.

Soit la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. En la voyant comme la dérivée d'une autre que l'on calculera, calculer S_n .

Solution :

Pour $q = 1$, $S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

On remarque que $\sum_{k=1}^n kq^{k-1}$ est la dérivée de $\sum_{k=1}^n q^k$ à une constante près.

Or :

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}$$

Et sa dérivée est :

$$\frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1 - q)^2}$$

On en déduit que

$$S_n = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1 - q)^2}$$

Exercice 7: ♦♦◇

$0.999\dots = 1$. Expliquer.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$0,999\dots = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9 - \frac{9}{10^n}}{9}.$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9 - \frac{9}{10^n}}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Exercice 8: ♦♦◇

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : x \mapsto x^n$. On se donne un entier naturel p et un réel x .

Exprimer le nombre $f_n^{(p)}(x)$ à l'aide de factorielles.

Solution :

On a:

- Lorsque $p \leq n$: $\frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$
- Lorsque $p > n$: 0

Exercice 9: ♦♦♦

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide d'un télescopage, démontrer l'identité :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Grâce au cas $p = 1$, retrouver l'expression connue de $\sum_{k=1}^n k$.

3. Grâce au cas $p = 2$, retrouver l'expression connue de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Solution :

1. On a :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. On a :

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. On a :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^n \frac{k!}{2(k-2)!} = \sum_{k=2}^n \frac{k^2 - k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k$$

Et :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{6(n-2)!} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

On en déduit donc que (*on isole $\sum_{k=2}^n k^2$ du premier résultat.*):

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k^2 &= 2 \left(\frac{n(n+1)(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2n(n+1)(n-1) + 3n(n+1) - 6}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6}{6} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=2}^n k^2 + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 10: ♦♦♦

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \text{ch}(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ch}(kx)$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \text{ch}(kx) &= \sum_{k=0}^n \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n (e^x)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e^x} \right)^k \right) \\ &= \frac{1 - e^{(n+1)x}}{2 - 2e^x} + \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{2 - 2e^{-x}} \end{aligned}$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ch}(kx) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^x)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-x})^k \\ &\stackrel{\text{Newton}}{=} \frac{1}{2} \left((1 + e^x)^n + (1 + e^{-x})^n \right) \end{aligned}$$

Exercice 11: ♦♦♦

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i}$$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i} &= \sum_{j=0}^n 2^{-j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \\ &= \sum_{j=0}^n 2^{-j} \cdot 2^j \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Exercice 12: ♦♦♦

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |i - j| \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j |i - j| + \sum_{i=j+1}^n |i - j| \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j+1}^n (i - j) - \sum_{i=1}^j (i - j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i + \sum_{j=1}^n j^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} i = \frac{n(n^2 - 1)}{6}$$

Et :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Donc :

$$S_n = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Exercice 13: ♦♦♦

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}$$

Solution :

On a :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

Exercice 14: ♦♦♦

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{P}_n cette proposition. Montrons \mathcal{P}_n pour tout n .

Initialisation. Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^1 \binom{1}{k} \frac{(-1)^0}{k} = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (-1)^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Conclusion. Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 15: ♦♦♦

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\sum_{k=1}^n H_k$ et $\sum_{k=1}^n kH_k$ en fonction de n et H_n .

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n H_k &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^n \sum_{k=p}^n \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sum_{k=p}^n 1 = \sum_{p=1}^n \frac{n-p+1}{p} \\ &= n \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{p-1}{p} = nH_n + H_n - n \\ &= (n+1)H_n - n \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kH_k &= \sum_{k=1}^n k \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{k}{p} = \sum_{p=1}^n \sum_{k=p}^n \frac{k}{p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sum_{k=p}^n k \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{(n-p+1)(p+n)}{2p} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{n^2 - p^2 + p + n}{p} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^n \frac{n^2 + n}{p} + \sum_{p=1}^n \frac{p(1-p)}{p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(n(n+1)H_n + n \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)H_n + n}{2} - \frac{n(n+1)}{4} \\ &= \frac{2n(n+1)H_n + 2n - n(n+1)}{4} \\ &= \frac{n(2(n+1)H_n - n + 1)}{4} \end{aligned}$$