Chapitre 33

Groupe Symétrique

Exercice 1: ♦◊◊

Écrire explicitement s_1, s_2 et s_3.

Solution :

$s_1 = \{id_1\}$, $s_2 = \{id_{[\![1,2]\!]}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}$

$s_3 = \{id_{[\![1,3]\!]}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$

Exercice 2: ♦◊◊

Soit n et p deux entiers naturels supérieurs à 2 tels que $p \leq n$
Combien S_n contient-il de p-cycles ?

Solution :

Choisir un p-cycles, c'est choisir un p-uplet d'éléments distinct deux à deux, on a donc une bijection entre l'ensemble des p-cycles et $A_p([\![1, n]\!])$
Or $|A_p([\![1, n]\!])| = \frac{n!}{(n-p)!}$

Ainsi on a exactement $\frac{n!}{(n-p)!}$, p-cycles distincts.

Exercice 3: ♦♦♦

Centre de S_n
On note $Z(S_n)$ le centre de S_n, c'est-à-dire l'ensemble des permutations qui commutent avec toutes les autres.

1. Que vaut $Z(S_2)$?
2. Montrer que $Z(S_n)$ est trivial dès que $n \geq 3$.

Solution :

$\boxed{1}$ S_2 est un groupe abélien donc on a $Z(S_2) = S_2$

$\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $id_{[\![1,n]\!]} \in Z(S_n)$ étant donné que $id_{[\![1,n]\!]}$ est le neutre du groupe S_n

Supposons qu'il en existe au moins un autre, on le notera γ
$\gamma \neq id_{[\![1,n]\!]}$ donc $\exists k \in [\![1, n]\!] \mid \gamma(k) \neq k$
Notons $z \in ([\![1, n]\!] - \{\gamma^2(k)\})$ (possible $n \geq 3$)

$\gamma = \begin{pmatrix} k & \gamma(k) & ... & ... \\ \gamma(k) & \gamma^2(k) & ... & ... \end{pmatrix}$

Posons $\beta = \begin{pmatrix} k & \gamma(k) & ... & ... \\ \gamma(k) & z & ... & ... \end{pmatrix}$

$\beta \circ \gamma(k) = z$ et $\gamma \circ \beta(k) = \gamma \circ \gamma(k) = \gamma^2(k)$
Donc $\beta \circ \gamma(k) \neq \gamma \circ \beta(k)$ (voir ensemble de définition de z)

Ainsi on a $\beta \circ \gamma \neq \gamma \circ \beta$

On en deduis que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $Z(S_n) = \{id_{[\![1,n]\!]}\}$