Tracé de lignes et de courbes planes

Christian Nguyen

Département d'informatique
Université de Toulon

Plan

Définition

Le processus de représentation d'objets graphiques *continus* par un ensemble de pixels *discrets* est appelé "génération de tracé".

De nombreux algorithmes générateurs de tracé sont implantés dans le matériel (câblé ou microprogrammé) de l'ordinateur.

Plan

Etapes du tracé d'un segment $[AB]$ avec A et B les coordonnées de deux pixels :

- projection des sommets A et B dans l'espace écran,
- calcul de la pente de la droite $p = (y_B - y_A)/(x_B - x_A)$,
- itération, suivant un pas suffisamment précis, sur le calcul $y = px + c$ et l'affichage des résultats.

Remarques :

- quel coût (en temps) ?
- quel choix pour le pas ?

Cet algorithme a trois qualités remarquables en géométrie algorithmique :

1. il est incrémental,

Cet algorithme a trois qualités remarquables en géométrie algorithmique :

1. il est incrémental,
2. les données sont de type entier,

Cet algorithme a trois qualités remarquables en géométrie algorithmique :

1. il est incrémental,
2. les données sont de type entier,
3. les opérations arithmétiques se limitent à des additions et des soustractions.

Cet algorithme a trois qualités remarquables en géométrie algorithmique :

1. il est incrémental,
2. les données sont de type entier,
3. les opérations arithmétiques se limitent à des additions et des soustractions.

Conditions initiales :

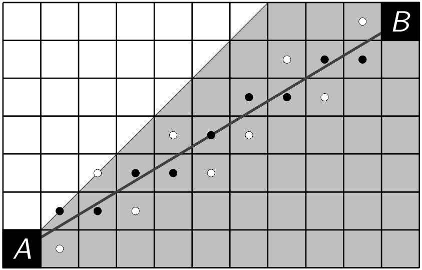
- les coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) sont supposées être le centre des pixels A et B,
- le segment appartient au premier octant du plan euclidien centré en A,
- $x_A < x_B$.

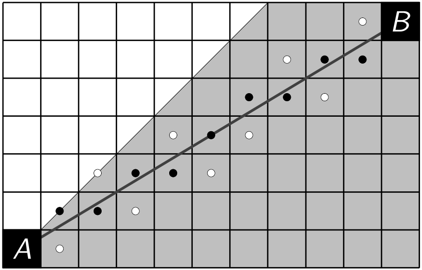
On se limite au premier octant pour deux raisons :

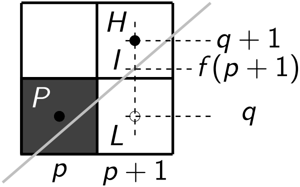
- la première est que l'on peut obtenir un tracé dans n'importe quel autre octant avec des symétries très simples,
- la seconde est que l'algorithme de Bresenham repose sur l'hypothèse que la pente de la droite est strictement inférieure à 1 pour obtenir le résultat suivant :

  soit M un point quelconque du segment $[A, B]$ d'abscisse entière p. Si q désigne l'ordonnée du pixel $P = (p, q)$ qui contient M, alors $[A, B]$ traverse le pixel $L := (p + 1, q)$ ou le pixel $H := (p + 1, q + 1)$ (ou inclusif).

Algorithme de Bresenham
Illustration




A
B


H
I
P
L
$q+1$
$f(p+1)$
q
p
$p+1$

f : fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ / (AB) définie par $y = f(x)$.

Définition de deux quantités dont le quotient est la pente de cette droite :

$$\Delta_x := x_B - x_A, \qquad \Delta_y := y_B - y_A. \tag{1}$$

Si $P := (p, q)$ est le dernier pixel choisi par l'algorithme (initialement $P := A$), le prochain pixel a pour abscisse $p + 1$ et l'ordonnée correspondante est $f(p + 1)$.

Le signe de la longueur $|HI| - |IL|$ détermine s'il faut allumer le pixel L ou H.

On a $|HI| - |IL| = 2(q - f(p+1)) + 1$.

Comme $f(p+1) = f(p) + \Delta_y/\Delta_x$, on a

$$|HI| - |IL| = 2(q - f(p) - \Delta_y/\Delta_x) + 1$$

De plus, $\Delta_x \geq 0$, donc le test $|HI| - |IL| > 0$ équivaut au test

$$2\Delta_x(q - f(p)) + \Delta_x - 2\Delta_y > 0. \tag{2}$$

On note R_p la partie gauche de cette inégalité.

À l'initialisation du processus $q = f(p)$ et donc $R_0 = \Delta_x - 2\Delta_y$.

Il reste un produit à calculer dans l'expression (2). La quantité R_{p+1} vaut respectivement pour le choix H ou L :

$$R_{p+1} = \begin{cases} 2\Delta_x(q+1-f(p+1)) + \Delta_x - 2\Delta_y, & \text{si } H. \\ 2\Delta_x(q-f(p+1)) + \Delta_x - 2\Delta_y, & \text{si } L. \end{cases}$$

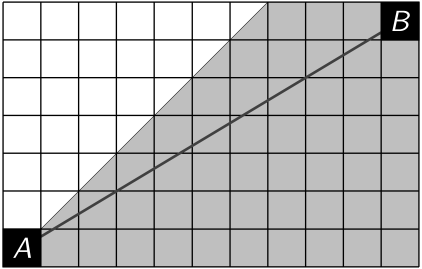
Plutôt que de recalculer R_{p+1} ex-nihilo, on calcule la différence $R_{p+1} - R_p$:

$$R_{p+1} - R_p = \begin{cases} 2(\Delta_x - \Delta_y), & \text{si } H. \\ -2\Delta_y, & \text{si } L. \end{cases}$$

Algorithme de Bresenham

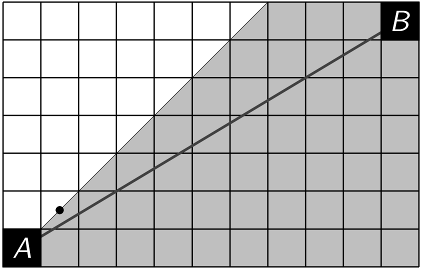
Algorithme

```
données
  dx, dy : entiers
variables
  dec, x, y : entiers
debut
  dec ⟵ dx − 2dy
  x ⟵ y ⟵ 0
  tantque (x ≤ dx) faire
    allumer_pixel(x, y)
    si (dec < 0) alors
      dec ⟵ dec + 2dx
      y ⟵ y + 1
    finsi
    dec ⟵ dec − 2dy
    x ⟵ x + 1
  fintq
fin
```



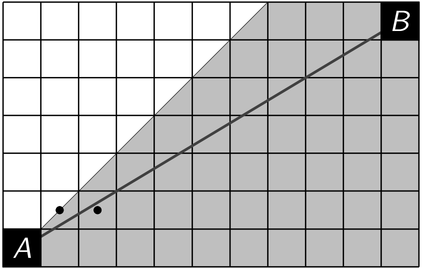
$d_x := 10$ et $d_y := 6$

dec	x	y
-2	0	0



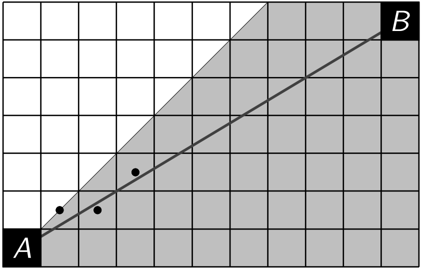
$d_x := 10$ et $d_y := 6$

dec	x	y
-2	0	0
6	1	1



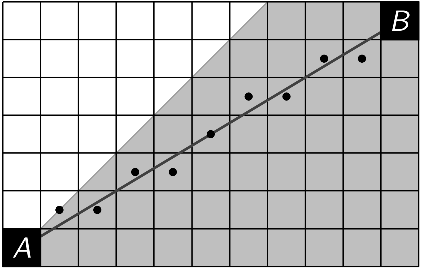
$d_x := 10$ et $d_y := 6$

dec	x	y
-2	0	0
6	1	1
-6	2	1



$d_x := 10$ et $d_y := 6$

dec	x	y
-2	0	0
6	1	1
-6	2	1
2	3	2



$d_x := 10$ et $d_y := 6$

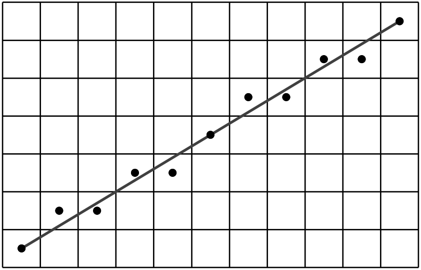
dec	x	y
-2	0	0
6	1	1
-6	2	1
2	3	2
-10	4	2
-2	5	3
6	6	4
-6	7	4
2	8	5
-10	9	5
-2	10	6

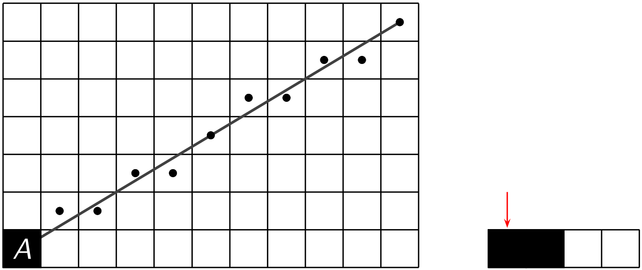
Le dessin en traitillé implique la répétition d'un motif composé de petits segments de droite.

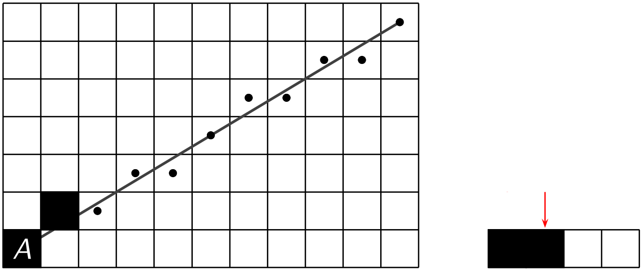
Calcul des coordonnées des extrémités des petits segments à partir de l'équation de la droite et de leurs longueurs : trop coûteux.

Utilisation d'un modèle de traitillé que l'on copie point à point en utilisant un compteur et les propriétés de l'arithmétique modulaire.

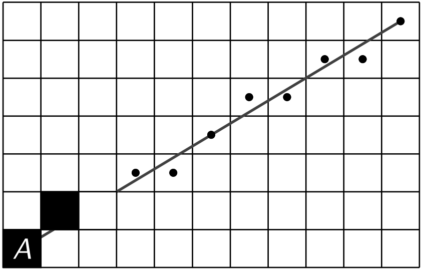
Le modèle est stocké dans un mot (un ensemble de bits) et lu cycliquement (modulo le nombre de bits du mot) pour tester si le point courant est allumé ou éteint.

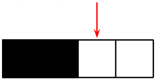


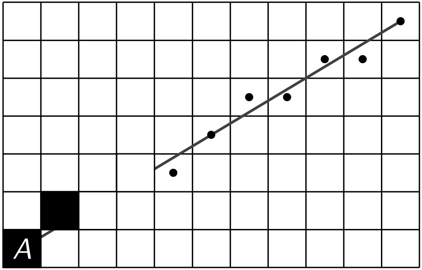

A

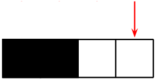


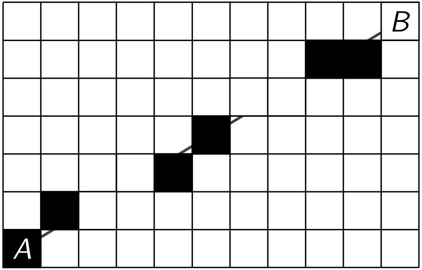
A


A




A




B
A

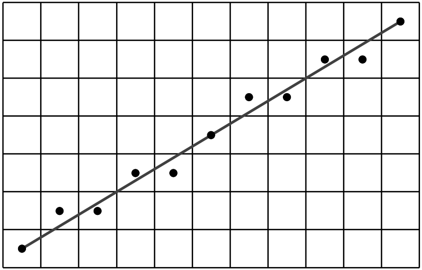
Un segment doit pouvoir être dessiné en plusieurs largeurs.

Dessiner plusieurs segments de même longueur, superposés les uns au dessus des autres : le calcul des points extrémités des segments est fonction de la pente de la droite.

Nombreux problèmes : cas des droites jointives, nombre de segments est proportionnel à la largeur du trait, largeur et luminosité variables en fonction de l'inclinaison.

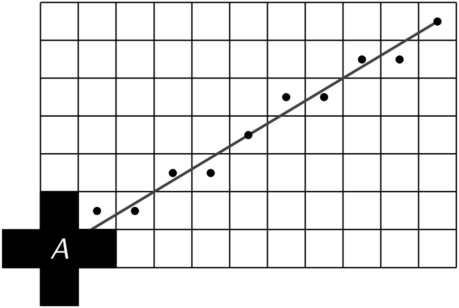
Travailler au niveau du dessin des points qui composent le segment.

Le tracé d'un point est remplacé par celui d'un motif (le "pinceau"), ce qui permet de gérer efficacement les extrémités et autorise une implantation matérielle (*blitter*).



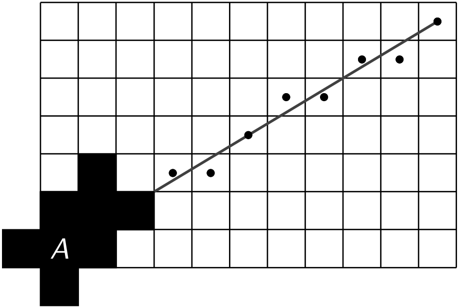
Travailler au niveau du dessin des points qui composent le segment.

Le tracé d'un point est remplacé par celui d'un motif (le "pinceau"), ce qui permet de gérer efficacement les extrémités et autorise une implantation matérielle (*blitter*).



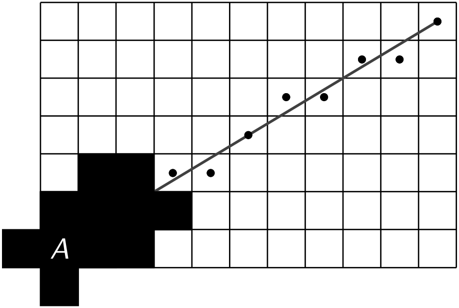
Travailler au niveau du dessin des points qui composent le segment.

Le tracé d'un point est remplacé par celui d'un motif (le "pinceau"), ce qui permet de gérer efficacement les extrémités et autorise une implantation matérielle (*blitter*).



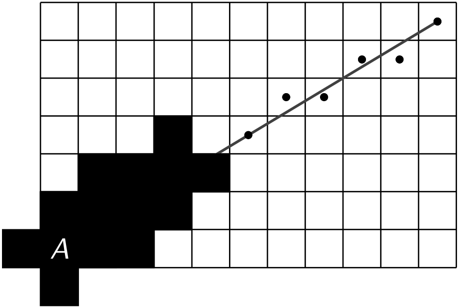
Travailler au niveau du dessin des points qui composent le segment.

Le tracé d'un point est remplacé par celui d'un motif (le "pinceau"), ce qui permet de gérer efficacement les extrémités et autorise une implantation matérielle (*blitter*).



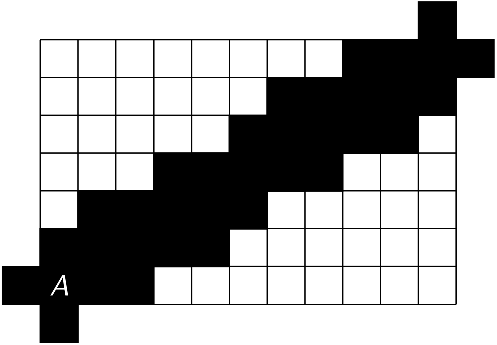
Travailler au niveau du dessin des points qui composent le segment.

Le tracé d'un point est remplacé par celui d'un motif (le "pinceau"), ce qui permet de gérer efficacement les extrémités et autorise une implantation matérielle (*blitter*).



Travailler au niveau du dessin des points qui composent le segment.

Le tracé d'un point est remplacé par celui d'un motif (le "pinceau"), ce qui permet de gérer efficacement les extrémités et autorise une implantation matérielle (*blitter*).

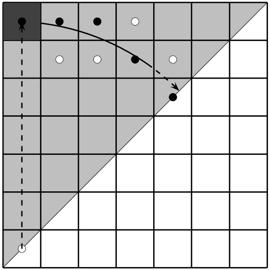


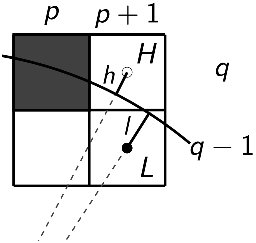
Plan

Cercle centré en l'origine dans le repère de la fenêtre écran (une simple translation permettant de centrer le cercle en tout autre point du plan) et rayon r du cercle exprimé en nombre de pixels.

1. Description d'un cercle de rayon r à l'aide de fonctions paramétrées $r \cos\theta$ et $r \sin\theta$.
2. Utilisation de la fonction de rotation sous forme matricielle qui ne nécessite qu'un seul calcul de cosinus et de sinus.

Le tracé se fait dans le sens des aiguille d'une montre et commence par le pixel au sommet du cercle. En supposant que le tracé se limite au second octant, on incrémente systématiquement l'abscisse, le décrément ou non de l'ordonnée étant laissé à la charge de l'algorithme.





Le choix se fait en comparant les quantités $\bar{h} := |OH|^2 - r^2$ et $\bar{l} := r^2 - |OL|^2$ qui permettent d'évaluer la position relative des points par rapport au cercle.

$$\begin{cases} \bar{l} = r^2 - [(p+1)^2 + (q-1)^2] \\ \bar{h} = [(p+1)^2 + q^2] - r^2 \end{cases}$$

avec $y^2 = r^2 - (p+1)^2$

$$\bar{l} - \bar{h} = 2(r^2 - (p+1)^2) - 2q^2 + 2q - 1$$

Conditions initiales : $p = 0$ et $q = r$ soit $\bar{l} - \bar{h} = 2r - 3$

Si $2r - 3 > 0$ alors $p \leftarrow p + 1$:

$$(\bar{l} - \bar{h})' = 2(r^2 - (p+1)^2) - 2q^2 + 2q - 1 + \text{(-4p-6)}$$

sinon $p \leftarrow p + 1$, $q \leftarrow q - 1$:

$$(\bar{l} - \bar{h})' = 2(r^2 - (p+1)^2) - 2q^2 + 2q - 1 + \text{(4(q-p)-10)}$$

Plan

Les courbes et les surfaces dites de *Bézier* ont été développées par P. Bézier dans les années 70 pour la création d'éléments de carrosserie chez Renault.

Le principe est relativement simple, on se donne un ensemble de $n+1$ points du plan appelés *points de contrôle* et on cherche à construire une courbe plane qui soit la plus proche de ces points et inscrite dans l'enveloppe convexe de ces $n+1$ points.

L'idée consiste à construire une famille de points qui sont les barycentres de notre famille de $n+1$ points de contrôle.

1. représentation *cartésienne*, i.e. les points $M = (x, y)$ de la courbe sont définis par une équation du type $y = f(x)$.

   $\Rightarrow$ impossible de dessiner toutes les courbes !

   Par exemple, un simple cercle ne peut pas être représenté de cette manière (f étant une fonction, il n'est pas possible de lui associer deux images).

2. représentation *implicite* de la courbe, en considérant les points $M = (x, y)$ solutions de l'équation $f(x, y) = 0$.

   $\Rightarrow$ pas toujours possible de manière algébrique.

   Si l'expression de f est trop compliquée, on ne peut résoudre l'équation en y (ou symétriquement en x).

3. choix d'une représentation *paramétrique* des points de la courbe :

$$M(u) = \begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \end{pmatrix}, \quad u \in I. \tag{3}$$

On a donc une application $M : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
Ainsi, le cercle de rayon r et de centre $(0,0)$ a pour représentation paramétrique :

$$M(u) = \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi]. \tag{4}$$

Autre avantage : définir naturellement une *orientation* de la courbe. En effet, l'application M étant définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, l'orientation de la courbe est obtenue en faisant croître le paramètre u dans cet intervalle.

Les courbes de Bézier ont été définies avec un procédé algorithmique, la formalisation est venue ensuite.

À partir de $n+1$ points de contrôle, on peut construire les n barycentres des paires $\{M_i, M_{i+1}\}$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$ affectés des coefficients $1-u$ et u, c'est à dire les n points

$$(1-u)M_i + uM_{i+1}, \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

On peut alors recommencer à calculer deux-à-deux les $n-1$ barycentres des n points obtenus (toujours avec les mêmes coefficients) et ainsi de suite jusqu'à n'obtenir qu'un seul point.

Dans le cas d'une courbe de Bézier cubique, on a les points suivants :

$$\begin{array}{lll} M_{0,0} = M_0 & M_{0,1} = (1-u)M_{0,0} + uM_{1,0} & M_{0,2} = (1-u)M_{0,1} + uM_{1,1} \\ M_{1,0} = M_1 & M_{1,1} = (1-u)M_{1,0} + uM_{2,0} & M_{1,2} = (1-u)M_{1,1} + uM_{2,1} \\ M_{2,0} = M_2 & M_{2,1} = (1-u)M_{2,0} + uM_{3,0} & \\ M_{3,0} = M_3 & & \end{array}$$

et $M_{0,3} = (1-u)M_{0,2} + uM_{1,2}$.

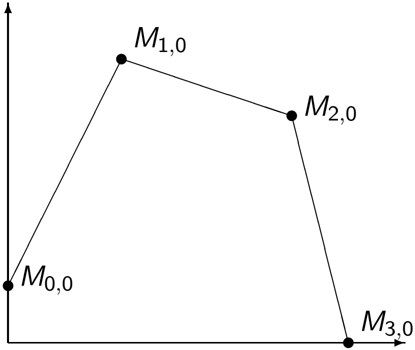


FIGURE – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

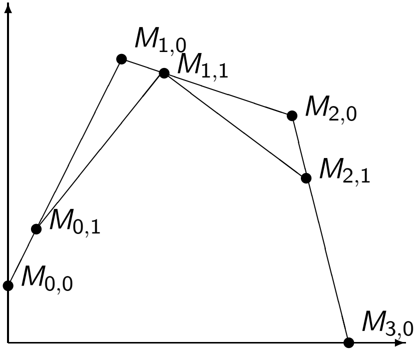


FIGURE – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

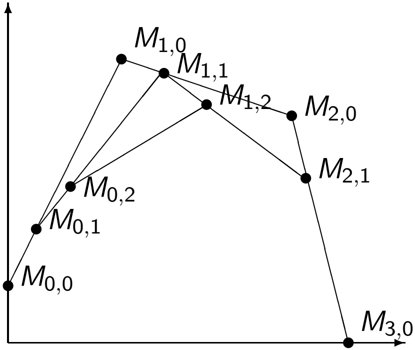


FIGURE – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

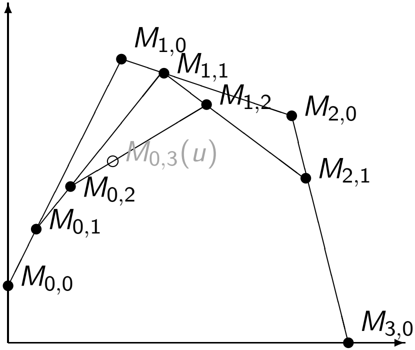


FIGURE – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

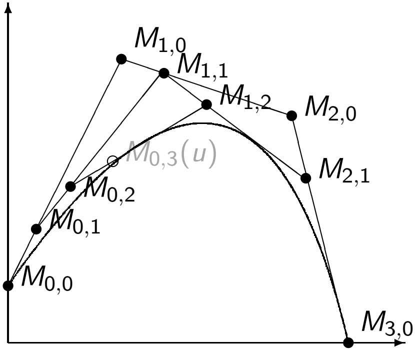


FIGURE – Algorithme de calcul récursif d'une courbe de Bézier

Definition

Soit n un entier strictement positif. On appelle *p-ème polynôme de Bernstein* d'ordre n le polynôme de $\mathbf{R}[T]$ défini par :

$$B_{n,p}(T) := \binom{n}{p} T^p (1 - T)^{n-p}$$

où $\binom{n}{p}$ est le p-ème coefficient binomial, i.e.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Proposition

Les polynômes de Bernstein satisfont l'égalité suivante :

$$\sum_{p=0}^{n} B_{n,p}(u) = 1 \quad \forall u \in [0,1] \tag{5}$$

Preuve.

La formule du binôme de Newton nous donne pour tout $0 \leq p \leq n$:

$$(T + (1-T))^n = 1 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} T^p (1-T)^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} B_{n,p}(T)$$

$\square$

Theorem

Les polynômes de Bernstein $B_{n,p}(T)$, $0 \leq p \leq n$, forment une base de l'espace $\mathbf{R}_n[T]$ des polynômes de degré au plus n sur $\mathbf{R}$.

On peut donc représenter tout polynôme de degré inférieur à n à l'aide d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein.

Propriété fondamentale : les polynômes de Bernstein de degré n permettent de représenter toutes les courbes obtenues à l'aide de polynômes de degrés inférieurs à n.

On peut alors construire une courbe $\mathcal{C}$ dont les points $M(u)$ sont les barycentres des points de contrôle M_p, $0 \leq p \leq n$ affectés respectivement des coefficients $B_{n,p}(u)$, $0 \leq p \leq n$, u variant dans l'intervalle $[0, 1]$.

Definition

On appelle *courbe de Bézier* de degré n, de *points de contrôle* M_p, $0 \leq p \leq n$, la courbe paramétrique définie par les points suivants :

$$M(u) = \sum_{p=0}^{n} B_{n,p}(u) M_p, \quad u \in [0, 1]. \tag{6}$$

Un segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B pondérés par des valeurs positives. Une partie P d'un **R**-espace vectoriel E est dite *convexe* si et seulement si

$$\forall (A, B) \in P \times P,\ [A, B] \subseteq P.$$

Theorem

L'enveloppe convexe d'une famille finie $\mathcal{M} = \{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ de points d'un **R***-espace vectoriel est l'ensemble des barycentres de ces points, i.e.*

$$\operatorname{env}(\mathcal{M}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} u_i M_i;\ u_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} u_i = 1 \right\}. \tag{7}$$

Démonstration.

L'ensemble des barycentres des points M_i est évidemment une partie convexe qui contient ces points, elle contient donc l'enveloppe convexe de ces points.

Réciproquement, soit M un barycentre des points M_i, on peut construire M de proche en proche en calculant la succession de barycentres de deux points uniquement, donc dans l'enveloppe convexe qui contient tous les M_i. □

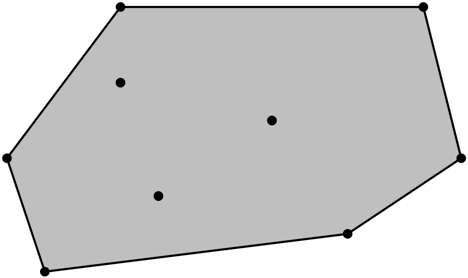


FIGURE – L'enveloppe convexe des points est matérialisée par la zone grise du dessin.

On a les valeurs particulières des fonctions polynomiales de Bernstein suivantes ($0 < p < n$, $n \neq 0$) :

$$
\begin{array}{ll}
B_{n,0}(0) = 1 & B_{n,0}(1) = 0 \\
B_{n,p}(0) = 0 & B_{n,p}(1) = 0 \\
B_{n,n}(0) = 0 & B_{n,n}(1) = 1
\end{array}
$$

On en déduit que les courbes de Bézier passent nécessairement par les points de contrôle extrémaux, i.e. par M_0 et M_n.

Soit une cubique de Bézier ($n = 3$) dont les 4 points de contrôle sont $M_0 = (0, 1)$, $M_1 = (2, 5)$, $M_2 = (5, 4)$ et $M_3 = (6, 0)$. Les polynômes de Bernstein sont les suivants :

$$
\begin{aligned}
B_{3,0}(T) &= -T^3 + 3T^2 - 3T + 1\\
B_{3,1}(T) &= 3T^3 - 6T^2 + 3T\\
B_{3,2}(T) &= -3T^3 + 3T^2\\
B_{3,3}(T) &= T^3
\end{aligned}
$$

On obtient donc la courbe cubique définie par les coordonnées paramétriques suivantes :

$$
\begin{cases}
X(u) = -3u^3 + 3u^2 + 6u\\
Y(u) = 2u^3 - 15u^2 + 12u + 1
\end{cases}
$$

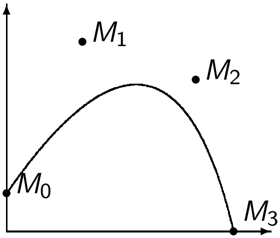


Figure – Courbe de Bézier cubique

Défaut des courbes de Bézier :

- le degré des polynômes qui interviennent dans la définition du point $M(u)$ de la courbe est égal à n,
- toute modification sur un point de contrôle de la courbe affecte l'ensemble de la courbe.

Pour ces différentes raisons, on préfère construire des courbes de Bézier *par morceaux*. Avantages :

- les calculs qui sont simplifiés,
- la modification d'un point de contrôle affectera *localement* la forme de la courbe générale.

En général, on utilise des courbes de Bézier cubiques ($n = 3$).

Comment joindre correctement les morceaux ainsi obtenus ?

Il est clair que la première condition pour deux courbes de Bézier $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est que le dernier point de contrôle de la courbe $\mathcal{C}_1$ soit égal au premier point de contrôle de la courbe $\mathcal{C}_2$, autrement dit, la courbe doit être continue !

Malheureusement cette première condition de continuité sur la courbe (condition de continuité C^0) est hautement insuffisante.

Il est légitime d'imposer que les tangentes aux points de jonction soient les mêmes pour les deux courbes.

La tangente en un point $M(a)$ d'une courbe définie paramétriquement par les points $M(u), \; u \in I$ est donnée par la droite paramétrée suivante :

$$T(u) = M(a) + uM'(a) = \begin{pmatrix} X(a) + uX'(a) \\ Y(a) + uY'(a) \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbf{R}. \qquad (8)$$

où $X'(a)$ désigne la valeur de la dérivée[1] de la fonction $u \mapsto X(u)$ au point a et $Y'(a)$ la valeur de la dérivée de $u \mapsto Y(u)$ au point a.

1. le nombre dérivé en un point d'une fonction à variable réelles est le coefficient directeur de la tangente au graphe de cette fonction en ce point.

Considérons deux courbes de Bézier $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même degré n.

Soient $M_0, M_1, \ldots, M_n$ les $n+1$ points de contrôle de la première courbe et $M_n, M_{n+1}, \ldots, M_{2n}$ les $n+1$ points de contrôle de la seconde courbe.

La première condition impose que le dernier point de contrôle de la première courbe soit égal au premier point de contrôle de la seconde.

L'équation de la tangente en M_n est obtenue pour $u = 1$ avec la courbe $\mathcal{C}_1$ et pour $u = 0$ avec la courbe $\mathcal{C}_2$. En notant $M_{(1)}(u)$ le point générique de la courbe $\mathcal{C}_1$ et $M_{(2)}(u)$ celui de $\mathcal{C}_2$, on déduit la condition de continuité du premier ordre C^1 :

$$M'_{(1)}(1) = M'_{(2)}(0). \tag{9}$$

Calcul des dérivées des polynômes de Bernstein pour les différentes valeurs de p en 0 et en 1 :

$$B'_{n,0}(T) = -n(1-T)^{n-1} \tag{10a}$$
$$B'_{n,n}(T) = nT^{n-1} \tag{10b}$$
$$B'_{n,p}(T) = \binom{n}{p} T^{p-1}(1-T)^{n-p-1}(p-nT),\ 0 < p < n \tag{10c}$$

On en déduit les valeurs

$$\begin{aligned} B'_{n,n}(1) &= n & \qquad B'_{n,0}(0) &= -n \\ B'_{n,n-1}(1) &= -n & B'_{n,1}(0) &= n \\ B'_{n,p\in[0,n-2]}(1) &= 0 & B'_{n,p\in[2,n]}(0) &= 0 \end{aligned}$$

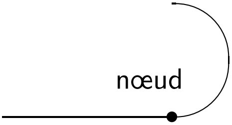
On exprime alors la condition (9) sous la forme

$$n(M_n - M_{n-1}) = n(M_{n+1} - M_n),$$

c'est à dire

$$M_n = \frac{1}{2}(M_{n-1} + M_{n+1}). \tag{11}$$

Autrement dit, les trois points M_{n-1}, M_n et M_{n+1} sont alignés et le nœud M_n est situé au milieu des deux autres points.



Un mobile se déplace le long de la droite, que va-t-il se passer quand il va aborder la courbe ?
La composante verticale de son accélération passer de 0 à une valeur positive (variation brutale).

- condition C^0 : fonction *position* continue (pas de ravin),
- condition C^1 : fonction *vitesse* continue,
- condition C^2 : fonction *accélération* continue.

Soit M_n le nœud de deux courbes de Bézier ayant pour points de contrôle respectifs les points $M_0, M_1, \ldots, M_n$ et $M_n, M_{n+1}, \ldots, M_{2n}$ on a :

$$M_{n-2} - 2M_{n-1} - M_n = M_{n+2} - 2M_{n+1} - M_n \qquad (12)$$

En utilisant la condition de continuité du premier ordre on en déduit pour le 3ème point de la 2nde courbe :

$$M_{n+2} = M_{n-2} + 4(M_n - M_{n-1}). \qquad (13)$$

Conclusion : les seuls points de contrôle des courbes de Bézier cubiques que l'on peut modifier sont le premier et le dernier point.