

## Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

### TD 1. Raisonnement, logique propositionnelle<sup>1</sup>

#### LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

**EXERCICE 1.** Un mathématicien discute avec un ami logicien dont la femme vient d'accoucher. Il lui demande s'il a eu un garçon ou une fille et le logicien lui répond *oui*. Expliquez la réponse du logicien.

**EXERCICE 2.** Donnez des exemples de phrases dans lesquelles le connecteur logique *ou* est inclusif.

**EXERCICE 3.** La phrase “La saucisse a mangé le chien” contient une erreur de nature lexicale, syntaxique ou sémantique ? Même question pour les phrases “Je n'ai rien compris à cet algorithme” et “Moi Tarzan, toi bonjour ?”

**EXERCICE 4.** Dessinez un arbre de dérivation possible pour chacune des formules ci-dessous en rajoutant les parenthèses omises si nécessaire :

$$\begin{array}{ll} (P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R) & P \vee Q \vee \neg R. \\ \neg(P \wedge Q) \vee \neg R & (P \Rightarrow \neg R) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q). \end{array}$$

**EXERCICE 5.** Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. On considère la formule  $P \Rightarrow Q$ . Que pouvez-vous déduire sur la valeur de vérité de  $Q$  si la formule est vraie ? Que pouvez déduire sur la valeur de vérité de  $P$  (resp.  $Q$ ) si la formule et  $Q$  (resp.  $P$ ) sont vraies ?

**EXERCICE 6.** On qualifie de *jumeau/jumelle* toute personne qui a un ou plusieurs frères ou soeurs du même accouchement. Pourquoi la phrase “Donald et Vladimir sont des jumeaux” n'est pas une proposition mathématique ?

**EXERCICE 7.** Rappelez les deux lois de De Morgan et démontrez les.

**EXERCICE 8.** Démontrez la transitivité de l'implication, i.e. si  $P, Q$  et  $R$  sont des propositions alors

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

**EXERCICE 9.** † Soit  $P, Q$  et  $R$  trois propositions. Construisez la table de vérité du connecteur ternaire “si/alors/sinon” noté  $\Rightarrow$  puis démontrez que

$$\Rightarrow (P, Q, R) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R).$$

**EXERCICE 10.** Démontrez que le connecteur  $\oplus$  est commutatif et associatif. Parmi les autres connecteurs binaires, lesquels sont commutatifs ?

**EXERCICE 11.** Soit  $P$  et  $Q$  deux variables propositionnelles. Démontrez que

$$(P \oplus Q) \equiv (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

**EXERCICE 12.** Un connecteur logique binaire  $\diamond$  est dit associatif si pour toutes propositions  $P, Q$  et  $R$  on a

$$(P \diamond Q) \diamond R \equiv P \diamond (Q \diamond R)$$

Montrez que la conjonction, la disjonction et l'équivalence sont des connecteurs associatifs mais pas l'implication.

**EXERCICE 13.** Soit  $P, Q$  et  $R$  trois propositions. Démontrez que

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$$

**EXERCICE 14.** Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. Démontrez que

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

**EXERCICE 15.** Exprimez la négation de chacune des propositions suivantes :

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), \quad \neg P \Rightarrow Q, \quad (P \wedge Q) \vee R.$$

**EXERCICE 16.** † Soit  $P, Q$  et  $R$  trois variables propositionnelles et  $\mathcal{F}$  la formule propositionnelle définie par

$$((P \vee Q) \vee R) \Rightarrow (P \wedge Q)$$

1. Donnez la valeur logique (interprétation) de la formule  $\mathcal{F}$  dans les cas suivants :

- Les variables  $P$  et  $Q$  prennent la valeur logique  $V$ , la variable  $R$  prend la valeur logique  $F$ .
- Les variables  $P$  et  $Q$  prennent la valeur logique  $F$ , la variable  $R$  prend la valeur logique  $V$ .

2. Montrez que  $\mathcal{F}$  est logiquement équivalente à

$$(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg R)$$

**EXERCICE 17.** † Soit  $P, Q, R$  et  $S$  des variables propositionnelles. Vérifiez que

$$\neg(((P \wedge Q) \vee P) \vee R) \vee S \equiv ((\neg P \wedge \neg R) \wedge \neg S)$$

$$\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \equiv ((P \wedge Q) \wedge \neg R)$$

**EXERCICE 18.** Soit  $P, Q, R$  des variables propositionnelles, la proposition

$$(((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)) \Rightarrow (Q \vee R))$$

<sup>1</sup>version du Friday 17<sup>th</sup> January, 2020, 13 : 10

est-elle une tautologie ou non ?

### MODÉLISATION DU RAISONNEMENT

**EXERCICE 19.** † Dans une brasserie vous commandez un *sandwich au jambon* ou un *sandwich au pâté* et un verre de bière. Le garçon vous écoute distraitemment car il est occupé.

- (1) Dans un premier temps il est sûr de la place du *ou* et du *et* mais il hésite sur la place des parenthèses.
  - (a) Écrire pour chacune des commandes possibles la formule propositionnelle correspondante.
  - (b) Pour être sûr de contenter le client, il doit satisfaire à la fois les deux commandes possibles : écrire la formule propositionnelle correspondante. Montrez à l'aide d'une table de vérité que cette dernière est logiquement équivalente à apporter (*un sandwich au jambon ou un sandwich au pâté*) et un verre de bière.
- (2) Dans un second temps le garçon hésite *aussi* sur la place du *et* et du *ou*.
  - (a) Refaire dans ce cas le 1a), puis le 1b) en utilisant les équivalences logiques.
  - (b) Montrez que dans ce cas il peut se contenter d'apporter *un sandwich au jambon et (un sandwich au pâté ou un verre de bière)*.
- (3) Que doit-il apporter au minimum pour satisfaire le client et répondre à toutes ses hésitations ?

**EXERCICE 20.** † On définit trois variables propositionnelles  $E, R, S$  par :

- ( $E$ ) Il y a un examen.
- ( $R$ ) Alexis révise ses cours.
- ( $S$ ) Alexis échoue.

et les trois propositions  $P, Q, T$  suivantes :

- ( $P$ ) S'il y a un examen, alors Alexis révise ses cours.
  - ( $Q$ ) Si Alexis révise ses cours, alors Alexis n'échoue pas.
  - ( $T$ ) S'il n'y a pas d'examen, alors Alexis n'échoue pas.
- (1) Écrire  $P, Q, T$  sous forme de propositions logiques.
  - (2) Transformez  $P, Q, T$  en propositions  $P', Q', T'$  ne contenant que des disjonctions ( $\vee$ ) et des négations ( $\neg$ ).
  - (3) En utilisant la question 1), trouver une proposition  $U$  telle que la proposition  $((P' \wedge Q') \Rightarrow U)$  soit une tautologie.

- (4) En utilisant la question 1), trouver une proposition  $V$  telle que la proposition  $((T' \wedge U) \Rightarrow V)$  soit une tautologie.
- (5) Que peut-on déduire de la réussite d'Alexis à l'examen ?

**EXERCICE 21.** † Trois suspects ont été arrêtés à la suite du cambriolage de la villa de Monsieur Futay, ce sont *Bradacié*, *Piedplat* et *Nécassé*. Ils déclarent respectivement à l'inspecteur *Lafrite* qui les interroge :

- (1) « *Piedplat* est coupable et *Nécassé* est innocent. »
- (2) « Si *Bradacié* est coupable, alors *Nécassé* l'est aussi. »
- (3) « Je suis innocent mais l'un au moins des deux autres est coupable. »

C'est une nécessité pour *Lafrite* d'envisager plusieurs possibilités, c'est ce qu'il fait avant de se mettre au lit :

- (a) Est-il possible que mes trois lascars aient dit la vérité ? Alors qui serait coupable ?
- (b) Ils auraient pu mentir tous les trois, je suppose !?
- (c) Il me semble que certains témoignages se déduisent des autres. Lesquels au juste ?
- (d) Si je suppose que tous sont innocents, qui a menti ? Et si je les suppose tous coupables, qui a menti ?
- (e) Est-il possible qu'il n'y ait qu'un seul faux témoignage ? Dans ce cas, qui a menti et qui est coupable ?
- (f) Et je garde le meilleur pour la fin...après ceci je dormirai comme un loir : si je suppose que l'innocent dit la vérité et que le coupable ment, alors qui est innocent et qui est coupable ?

Pouvez-vous aider l'inspecteur Lafrite à répondre à ces questions ? Indication : les variables propositionnelles  $B, P$  et  $N$  représentent les trois suspects, elles prennent pour valeur de vérité V si le suspect innocent et F sinon. Formalisez les déclarations de chacun des suspects et la validité de ces affirmations (table de vérité). Répondre à toutes les questions de Lafrite...

**EXERCICE 22.** † Formalisez les énoncés suivants en logique propositionnelle :

- (1) Bob a déchiffré le message d'Alice ou Alice est inquiète,
- (2) Bob a déchiffré le message d'Alice et Alice n'est pas inquiète,
- (3) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice et Alice est inquiète,
- (4) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice ou Alice n'est pas inquiète,
- (5) Si Bob a déchiffré le message d'Alice alors Alice n'est pas inquiète,
- (6) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice si Alice est inquiète.