Rappels mathématiques

Espace vectoriel, espace affine, matrices, espace projectif

Christian Nguyen

Département d'informatique
Université de Toulon

Introduction

Informatique : définition algébrique des objets mathématiques.
↳ Infographie : nature duale plutôt qu'aspect géométrique.

⇒ constituer un ensemble d'équations concises d'algèbre linéaire.
⇒ notations raccourcies des formes algébriques équivalentes : opérations vectorielles ou matricielles

Objets manipulés principalement, à l'échelle "atomique" : points et vecteurs.

Les points

Wikipédia

Toutes les figures du plan et de l'espace sont constituées d'ensemble de points.

Le plus petit élément constitutif de l'espace géométrique.

Seule caractéristique : sa *position* (pas de dimension, longueur, largeur, épaisseur, volume ou aire).

Lorsque le plan est muni d'un repère cartésien, on peut positionner tout point par rapport aux axes de ce repère par ses coordonnées cartésiennes (un couple de réels en 2D).

Les points

Introduction (Wikipédia)

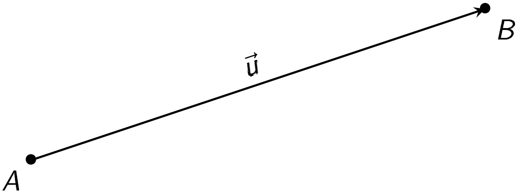
Dans un espace *affine* E associé à l'espace *vectoriel* V, les éléments de E sont appelés les *points* et les éléments de V sont appelés les *vecteurs*.

À chaque couple de points (A, B), on associe un vecteur $\phi(A, B) = \vec{u}$.

Les points
Introduction (Wikipédia)

Dans un espace *affine* E associé à l'espace *vectoriel* V, les éléments de E sont appelés les *points* et les éléments de V sont appelés les *vecteurs*.

À chaque couple de points (A, B), on associe un vecteur $\phi(A, B) = \vec{u}$.



Plan

Espace vectoriel
Définition

E ensemble d'éléments, dénommés vecteurs (exemple $v = (1, 3)$), possédant un ensemble de propriétés axiomatiques.

$(E, +)$ est un groupe abélien :

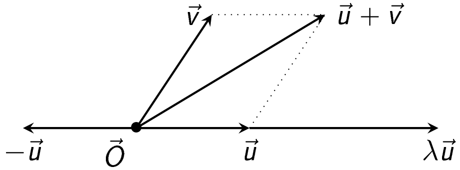
- $+$ est une loi commutative et associative,
- un élément neutre, noté 0, appelé vecteur nul,
- tout vecteur v a un opposé, noté $-v$.

Soit K un corps commutatif, les éléments du corps K sont appelés des *scalaires* (exemple $i = 12, 7$).

$(E, +, \bullet)$ est un *K-espace vectoriel* :

- $+$ est une loi de composition interne,
- $\bullet$ est une loi de composition externe à opérateurs dans K.

Espace vectoriel
Définition



La loi • vérifie les propriétés suivantes :

1. distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :
   $\forall\lambda \in K,\ \forall(u,v) \in E \times E, \quad \lambda.(u+v) = (\lambda.u) + (\lambda.v)$
2. distributivité par rapport à l'addition des scalaires :
   $\forall(\lambda,\mu) \in K \times K,\ \forall u \in E, \quad (\lambda+\mu).u = (\lambda.u) + (\mu.u)$
3. associativité : $\forall(\lambda,\mu) \in K \times K,\ \forall u \in E, \quad \lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$
4. élement neutre : $\forall u \in E, \quad 1.u = u$

A noter que les éléments obtenus sont tous dans E.

Espace vectoriel
Combinaison linéaire

Construction fondamentale puisqu'elle fait intervenir les deux lois de composition de l'espace :

- l'addition de deux vecteurs,
- la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

$$u := \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$$

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est dite *libre* si aucun vecteur de la famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Une famille *génératrice* est une famille de vecteurs dont les combinaisons linéaires permettent de construire tous les autres vecteurs de l'espace.

Espace vectoriel
Base

Une famille libre et génératrice est appelée *base* du sous-espace F.

Si cette base est finie, son cardinal est appelé *dimension* de l'espace vectoriel F.

Une base permet de construire *tous* les vecteurs de l'espace à l'aide de combinaisons linéaires des vecteurs de la base.

Espace vectoriel
Exemple : les couleurs

Codées sur 3 octets, chaque octet correspondant à l'intensité de chacune des couleurs fondamentales en synthèse additive (codage RVB).

En notant E l'espace des couleurs et R, V, B les couleurs rouge, vert et bleu respectivement, la couleur jaune est obtenue par la *combinaison linéaire*.

$$J = 255R + 255V + 0B.$$

$\{R, V, B\}$ forment une famille *génératrice* de E puisqu'elles permettent de construire *toutes* les autres et *libre* puisqu'*aucune* d'entre elles ne peut s'obtenir comme combinaison linéaire des deux autres.

Espace vectoriel

Application linéaire, calcul matriciel

Une *application linéaire* est un morphisme d'espaces vectoriels i.e une application qui ne bouleverse pas ces structures.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et φ une application de E dans F. Pour que φ soit une application linéaire, elle doit respecter :

- la structure additive : soient deux vecteurs u et v, $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
- la structure multiplicative : soit un vecteur u et un scalaire λ, $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Espace vectoriel
Application linéaire, calcul matriciel

Ce que l'on peut résumer ainsi : pour toute combinaison linéaire $k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$ de vecteurs de E on a :

$$\varphi(k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n) = k_1 \varphi(v_1) + .. + k_n \varphi(v_n)$$

En particulier si on écrit un vecteur v dans sa base, $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n$, on a :

$$\varphi(v) = x_1 \varphi(b_1) + x_2 \varphi(b_2) + \cdots + x_n \varphi(b_n)$$

$\Rightarrow$ il suffit de connaître $\varphi(b_1), \varphi(b_2), \ldots, \varphi(b_n)$ pour calculer $\varphi(v)$ et connaître φ.

Questions : dans $\mathbf{R}$, $\varphi : x \to 3x$ est-elle linéaire ? et $\varphi : x \to 3x + 2$?

Espace vectoriel
Application linéaire, calcul matriciel

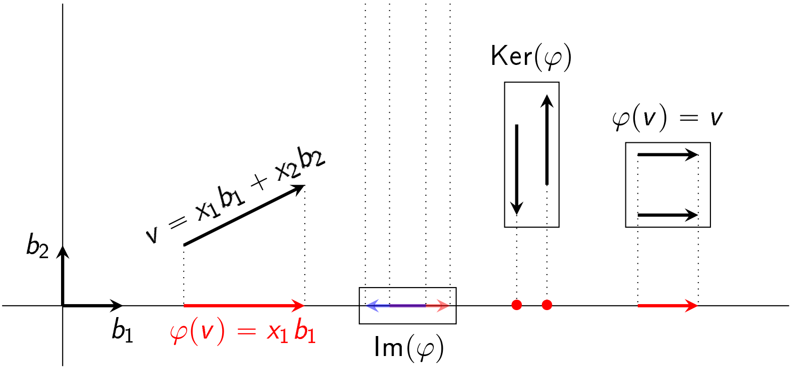
Propriétés des applications linéaires

- $\varphi(0_E) = 0_F$ (car $\varphi(0_E) = \varphi(v - v) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0_F$),
- $\mathrm{Im}(\varphi)$, l'ensemble de toutes les images des éléments de E par φ, est un sous espace vectoriel de F,
- $\mathrm{Ker}(\varphi)$, l'ensemble des vecteurs de E qui on pour image 0_F, est un sous espace vectoriel de E,
- l'ensemble des vecteurs v de E tels que $\varphi(v) = kv$ (avec k donné) est un sous espace vectoriel de E (en particulier c'est le cas des invariants de E qui sont tels que $\varphi(v) = v$).

Espace vectoriel

Application linéaire, calcul matriciel

Exemple de la projection φ du plan E de base (b_1, b_2) sur la droite F de base $(b1)$ parallèlement à $(b2)$



Espace vectoriel
Application linéaire, calcul matriciel

Lien entre calcul matriciel et application linéaire φ :

- soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies respectives $p > 0$ et $n > 0$ et de bases respectives e et f,
- soit φ une application linéaire de E dans F,

on appelle *matrice représentative* de φ dans les bases e et f la matrice (α_{ij}) déterminée par

$$\forall j \in \{1, \ldots, p\}, \quad \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i.$$

Espace vectoriel
Application linéaire, calcul matriciel

Exemple, transformation d'une image en niveaux de gris :

$$\begin{pmatrix} g_r \\ g_v \\ g_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ 0,299 & 0,587 & 0,114 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix} \tag{1}$$

En informatique :

- implantation des applications linéaires : sous forme matricielle,
- transposition de la structure matricielle : la structure de tableau.

Espace vectoriel

Translations et homothéties

Deux transformations élémentaires : les *translations* (loi additive interne) et les *homothéties* (loi multiplicative externe).

Soit E un K-espace vectoriel et v un vecteur de E. On appelle *translation de vecteur v*, l'application $t_v : E \to E$ définie par

$$t_v(u) = u + v.$$

Soit E un K-espace vectoriel et λ un scalaire de K. On appelle *homothétie de rapport λ*, l'application $h_\lambda : E \to E$ définie par

$$h_\lambda(u) = \lambda u.$$

Espace vectoriel
Translations et homothéties

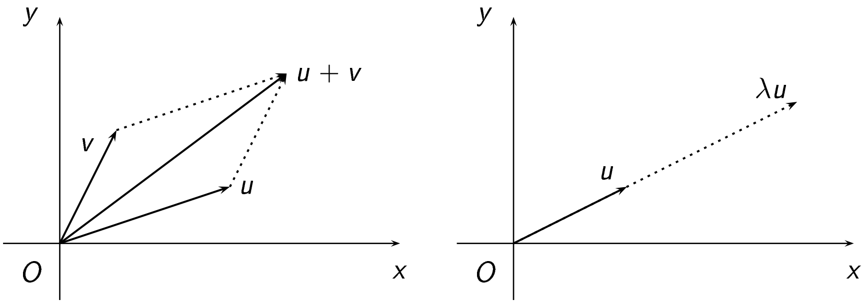


Figure : À gauche : translation de vecteur v. À droite : homothétie de rapport λ

Espace vectoriel

Translations et homothéties

L'application t_v est-elle une application linéaire ? Exemple dans le plan euclidien à deux dimensions :

$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad ? \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \tag{2}$$

L'application h_λ est une application linéaire, exemple :

$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \tag{3}$$

Espace vectoriel
Produit scalaire

La structure d'espace vectoriel est le support de base pour faire de la géométrie.

Deux notions supplémentaires pour manipuler les objets du plan : distance et angle, toutes deux obtenues grâce au *produit scalaire*.

On appelle *produit scalaire* l'application $\phi : K^n \times K^n \to K$ définie dans une base orthonormée par

$$\phi(u, v) := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \tag{4}$$

avec $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

On note souvent $(u \mid v)$ le nombre réel $\phi(u, v)$.

Espace vectoriel
Produit scalaire

Un produit scalaire permet de définir une *norme* puis une *distance* dites *induites*. Si u et v désignent deux vecteurs du plan,

$$\|u\| := \sqrt{(u \mid u)} \quad \text{et} \quad d(u, v) := \|v - u\|. \tag{5}$$

la norme et la distance ainsi définies sont la norme et la distance *euclidiennes*.

Un vecteur est dit *normé* ou *unitaire* si $\|u\| = 1$.

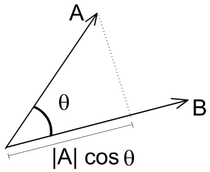
Deux vecteurs u et v sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, autrement dit si $(u \mid v) = 0$.

Ils sont *orthonormés* s'ils sont orthogonaux et si chacun des vecteurs est normé.

Espace vectoriel
Produit scalaire

Soient u et v deux vecteurs non nuls du plan euclidien, alors :

$$(u \mid v) = \|u\| \|v\| \cos(u, v)$$



Projeté : la trigonométrie du triangle rectangle permet de calculer le produit scalaire grâce à une projection orthogonale. Soit C le projeté de A sur B, on a :

$$(A \mid B) = \|A\| \|B\| \cos\theta = \|B\| \|C\|$$

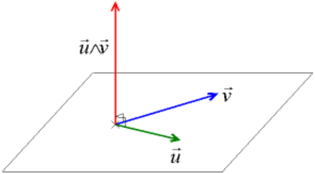
Espace vectoriel

Produit vectoriel

Opération effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension trois.

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :

- le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal aux deux vecteurs donnés,
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct,
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.



Espace vectoriel

Droite vectorielle

Si $u = (a, b)$, alors les vecteurs $v = (x, y)$ orthogonaux à u satisfont

$$ax + by = 0. \tag{6}$$

Il s'agit là de l'*équation d'une droite vectorielle* D.

Si $u = (x, y)$ est un vecteur non-nul et appartient à la droite D, i.e. s'il satisfait (6), alors tout vecteur λu qui lui est colinéaire ($\lambda \neq 0$) satisfait l'équation (6) également.

N'importe lequel de ces vecteurs est appelé *vecteur directeur* de la droite D.

Espace vectoriel

Matrice de rotation

Une matrice A (2×2) est dite *orthogonale* si les vecteurs formés par les deux colonnes de la matrice sont orthonormés.

Ceci équivaut à ce que l'application linéaire représentée par cette matrice conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall (u, v) \in \mathcal{P}, \quad (Au \,|\, Av) = (u \,|\, v). \tag{7}$$

Les matrices orthogonales de déterminant 1 sont appelées des matrices orthogonales directes ou *matrices de rotation*.

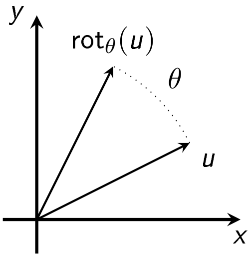
Espace vectoriel

Matrice de rotation

On appelle donc *rotation d'angle θ* l'application $\mathrm{rot}_\theta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ définie par $u \mapsto \mathrm{rot}_\theta(u)$.

Cela se traduit sous forme matricielle, en notant $u = (x, y)$, par

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{8}$$



Plan

Espace affine

Introduction (Wikipédia)

En géométrie, la notion d'espace affine généralise la notion d'espace issue de la géométrie euclidienne en omettant les notions d'angle et de distance.

Alignement, parallélisme, barycentre s'expriment sous une forme qui utilise des rapports de mesures algébriques, qui est une notion affine.

Résultat : une géométrie affine, où l'espace apparait comme une structure algébrique, voisine de celle d'espace vectoriel.

Un espace affine peut aussi être vu comme un espace vectoriel "dont on a oublié l'origine".

Espace affine
Points et vecteurs

Les points d'un espace affine sont aussi des vecteurs, tout dépend du point de vue auquel on se place.

- un point a une position, ni direction, ni longueur,
- un vecteur a une direction et une longueur, pas de position.

Remarque : si une origine est spécifiée, un point peut-être représenté par un vecteur, soient A, B deux points du plan affine alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $B - A$.

Espace affine
Définition

Soit E un ensemble et V un K-espace vectoriel. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow V$ une application satisfaisant :

1. $\forall (A, B) \in E^2, \forall v \in V,\ A + v = B \Leftrightarrow AB = v,$
2. $\forall (A, B, C) \in E \times E \times E,\ \varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C).$

Le couple (E, φ) est appelé *espace affine* défini sur V. Les éléments d'un espace affine sont appelés des *points*.

Espace affine
Droite affine

La première (resp. seconde) coordonnée d'un point $M = (x, y)$ dans le plan affine est appelée *abscisse* (resp. *ordonnée*).

Soit Δ une droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$. On appelle *droite affine* de direction Δ contenant $A = (x_A, x_A)$ l'ensemble des points $M = (x, y)$ de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AM} \in \Delta$.

$$ax + by - (ax_A + by_A) = 0.$$

En notant que si A décrit le plan $\mathcal{P}$, alors $-(ax_A + by_A)$ décrit $\mathbf{R}$ tout entier, l'équation générale d'une droite affine est obtenue pour trois scalaires a, b et c par

$$ax + by + c = 0.$$

Espace affine

Translation, rotation, symétrie

La *translation* d'un point de l'espace affine est définie exactement de la même manière que dans un espace vectoriel.

La *rotation* d'un angle θ autour d'un point I du plan affine $\mathcal{P}$ est l'application $\mathrm{rot}_{(I,\theta)} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui associe à un point M l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{IM'} = \mathrm{rot}_\theta(\overrightarrow{IM}). \tag{9}$$

où rot_θ désigne la rotation vectorielle d'angle θ.

Quand $\theta = \pi$, la rotation $\mathrm{rot}_{(I,\pi)}$ s'appelle *symétrie* de centre I.

Plan

Transformations graphiques 2D
Généralités

Deux types de transformation (complémentaires) :

- les *transformations géométriques*, qui permettent de déplacer les objets par rapport à un système de coordonnées fixe,
- les *transformations de coordonnées*, pour lesquelles l'objet reste fixe par rapport à un système de coordonnées en mouvement par rapport à cet objet.

Remarque : les transformations de coordonnées sont essentielles dans le "prélèvement" c'est à dire la définition des objets dans leur propre système de coordonnées local, puis leur plongement dans un système de coordonnées principal.

Transformations graphiques 2D
Les transformations géométriques

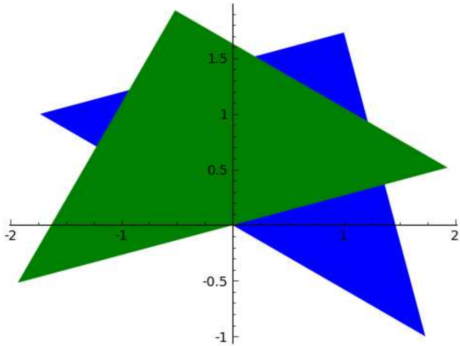
Soit un système de coordonnées cartésien dans le plan et un objet considéré comme un ensemble de points.

Toutes transformations appliquées à cet objet peuvent être ramenées à des transformations identiques appliquées à l'ensemble des points définissant cet objet.

$$P'(x', y') = P(x, y) + T_v \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

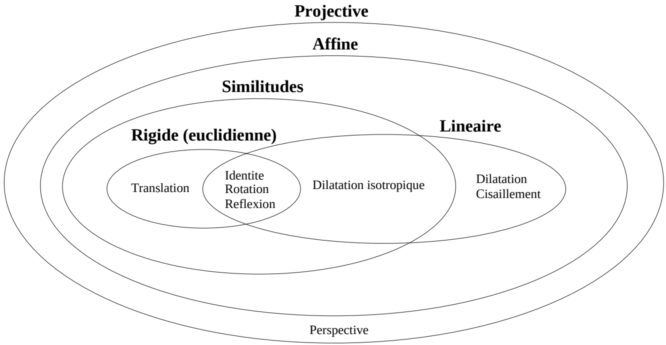
$$P'(x', y') = R_\Theta(P(x, y)) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases}$$

Transformations graphiques 2D
Les transformations géométriques



Rotation d'un objet (ici un polygone)

Transformations graphiques 2D
Classes de transformations



- les *transformations rigides* préservent distances et angles,
- les *similitudes* préservent les angles,
- les *transformations affines* préservent le parallélisme,
- les *transformations projectives* préservent le sens.

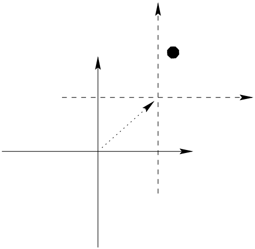
Transformations graphiques 2D

Les transformations de coordonnées

Supposons un plan muni des deux systèmes de coordonnées O, x, y et O', x', y'. Chaque point du plan a donc deux jeux de coordonnées.

Si on suppose que le second système est le résultat d'une transformation appliquée au premier, on dit qu'une *transformation de coordonnées* a été effectuée.

Translation



$$P' \begin{cases} x' = x - t_x \\ y = y - t_y \end{cases}$$

Transformations graphiques 2D
Espaces projectifs

Motivation initiale : trouver un cadre théorique adapté à l'étude des perspectives.

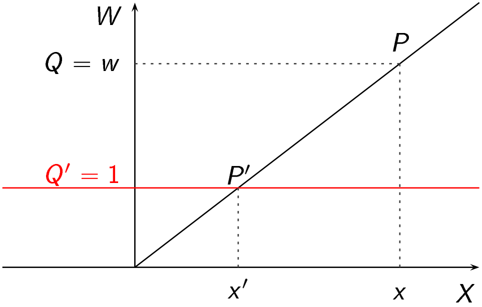
- un étudiant en science a appris que deux droites parallèles ne se coupent pas,
- un architecte sait qu'elles se coupent à l'infini (ce que le dessin en perspective montre bien).

Motivation en infographie : simplification des transformations planes, ainsi la translation devient une transformation linéaire dans le plan projectif.

Transformations graphiques 2D
Les coordonnées homogènes

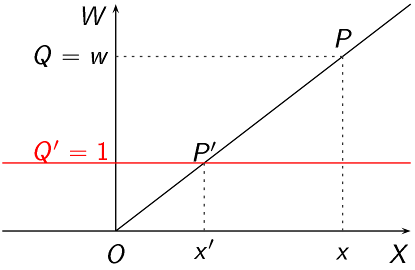
Soit un point quelconque $P(x, w)$ (avec $w \neq 0$), sa projection centrale $P'(x', 1)$ est l'intersection de la droite OP et de la droite d'équation $w = 1$.
On constate que les deux triangles OPQ et $OP'Q'$ sont semblables si bien que :

$$x' = \frac{x'}{1} = \frac{P'Q'}{OQ'} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{x}{w}$$



Transformations graphiques 2D

Les coordonnées homogènes

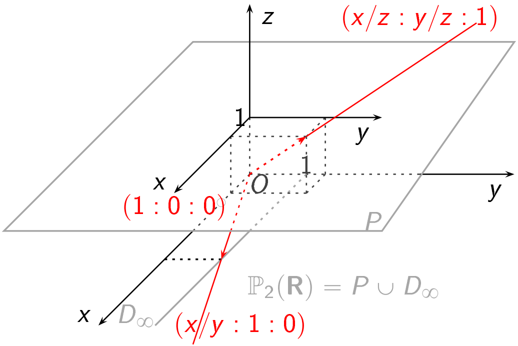


$$\boxed{x = w\,x'}$$

- tous les points vérifiant cette relation sont sur la droite OP,
- ils ont tous la même projection P' sur la droite $Q' = 1$,
- tout couple de coordonnées (wx', w) peut être utilisé pour définir P', et en particulier le couple $(x', 1)$.

Transformations graphiques 2D
Les coordonnées homogènes

Dans le sous-espace de codimension 1 du plan, un même point à plusieurs représentations distinctes, correspondant à une relation de proportionnalité : $P_i(tx_i, ty_i, th_i)$ avec $t \neq 0$.

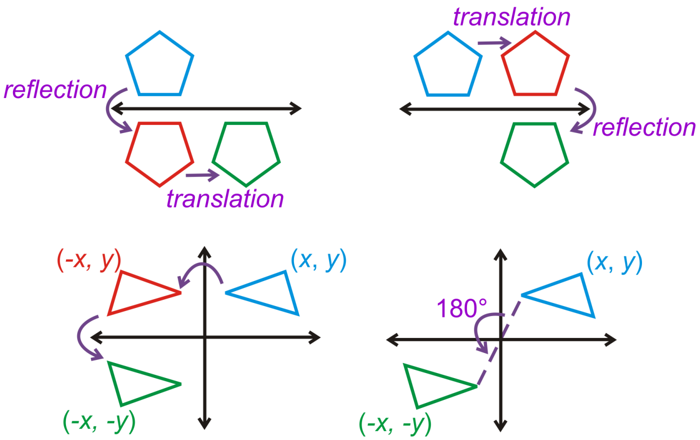


Transformations graphiques 2D
Représentations matricielles

Puisque les points sont représentés par des vecteurs-colonnes composés de trois éléments, les matrices correspondantes sont 3×3 :

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_{x|y} \begin{pmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformations graphiques 2D
Compositions de transformation



Transformations graphiques 2D

Compositions de transformation

Exemple, rotation autour d'un point quelconque :

$$v' = T^{-1} \cdot R \cdot T \cdot v$$

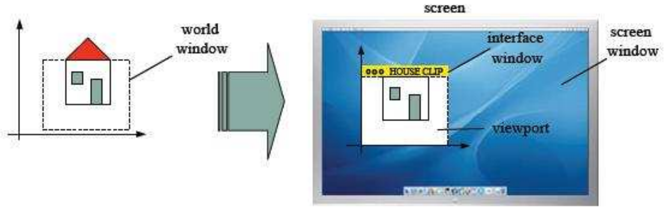
Avantage principal : gain en efficacité.

Produit une transformation affine dont l'application sur un point nécessite 9 multiplications et 6 additions. Cependant, sa structure fixe permet de simplifier le calcul en 4 multiplications et 4 additions.

Transformations graphiques 2D
Transformation de visualisation

Souvent, les dimensions des objets sont incompatibles avec le système de coordonnées du dispositif d'affichage (immeuble, molécule, ...).

On distingue la fenêtre (*window*) qui est parallèle aux axes du système de coordonnées et liée aux objets, de la zone de visualisation (*viewport*) liée à l'image résultante.



Transformations graphiques 2D
Transformation de visualisation

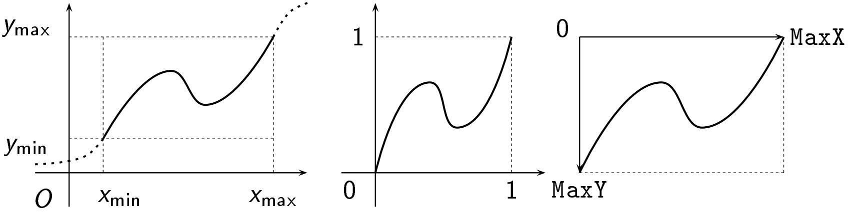
On distingue donc trois systèmes de coordonnées :

- le système de coordonnées absolues ou repère du monde (*World Coordonate* ou *WC*), qui décrit l'objet par rapport à un système de coordonnées cartésien,
- le système de coordonnées normalisées (*Normalized Coordinate* ou *NC*) $[0, 1] \times [0, 1]$,
- le système de coordonnées du dispositif physique (*Display Coordinate* ou *DC*).

Transformations de visualisation

Exemple

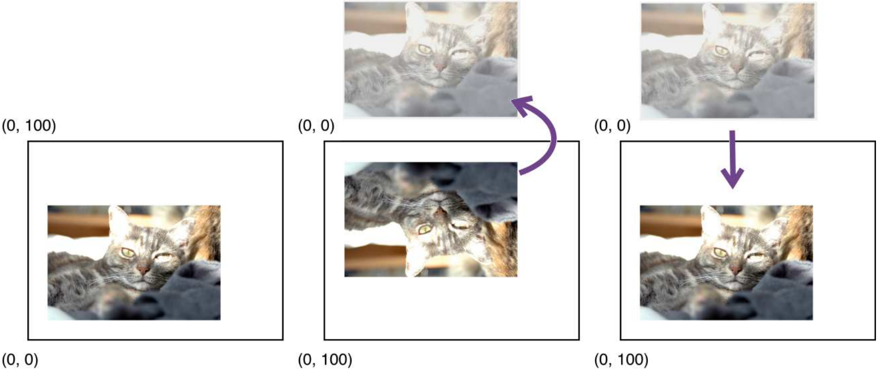
La représentation d'une courbe sur un écran nécessite quelques transformations à partir de sa représentation dans le plan réel $\mathcal{P}$.



fenêtre d'observation/espace réel [WC] espace normalisé [NC] fenêtre de visualisation/écran [DC]

Transformations de visualisation

Passage d'un repère orth. direct à indirect



Attention au changement de repère

Plan

Déterminant
Propriétés géométriques

Soient les vecteurs u, v dans le plan euclidien, l'*expression analytique* de leur déterminant est :

$$det(u,v) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

L'*expression géométrique* équivalente est :

$$det(u,v) = \|u\|\|v\| \sin(u,v)$$

Propriétés :

- la valeur absolue du déterminant est égale à l'aire du parallélogramme défini par u et v,
- le déterminant est nul ssi les deux vecteurs sont colinéaires,
- son signe est strictement positif ssi la mesure de l'angle (u, v) est comprise dans l'intervalle $]0, \pi[$.

Déterminant
En dimension 3

Déterminant de trois vecteurs dans l'espace euclidien (ou produit mixte) :

$$det(u, v, w) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Propriétés :

- la valeur absolue du déterminant est égale au volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs,
- le déterminant est nul ssi les trois vecteurs sont contenus dans un même plan (coplanaires).

Droite

Droite et demi-plans

En géométrie euclidienne du plan, la *puissance d'un point* M par rapport à un cercle de centre O et de rayon R est un nombre qui indique la position de M par rapport à ce cercle. Elle peut être définie comme $P(M) = OM^2 - R^2$.

La droite (AB) définit 3 régions :

- un demi-plan formé de tous les points de puissance positive,
- un demi-plan formé de tous les points de puissance négative,
- la droite elle-même dont tous les points ont une puissance nulle.

Tous les points ayant une puissance positive (resp. négative, nulle) sont "à gauche de" (resp. "à droite de", "sur") la droite orientée $\overrightarrow{AB}$.

Droite

En coordonnées homogènes

Soit une droite δ : $ax + by + c = 0$, celle-ci peut s'écrire $axh + byh + ch = 0$ ou bien encore :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xh \\ yh \\ h \end{pmatrix} = 0$$

Remarque : dans le système de coordonnées homogènes, les points et les droites ont une représentation analogue et leurs rôles peuvent être échangés.

Droite (en coordonnées homogènes)

Droite passant par deux points

Soient les deux points $A(x_1, y_1, h_1)$ et $B(x_2, y_2, h_2)$. Un point $M(x, y, h)$ appartient à la droite δ passant par ces deux points s'il satisfait :

$$det(M, A, B) = \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ h & h_1 & h_2 \end{vmatrix} = 0$$

Le vecteur directeur de la droite est donné par $\begin{pmatrix} y_1 h_2 - h_1 y_2 \\ h_1 x_2 - h_2 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$

La position d'un point par rapport à une droite est donnée par le signe de $det(M, A, B)$.

Droite (en coordonnées homogènes)

Point d'intersection de deux droites

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ vecteurs directeurs des droites δ et δ'.

Le point d'intersection de ces deux droites peut être déterminé grâce au produit vectoriel par un calcul en composantes :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} b_1\,c_2 - b_2\,c_1 \\ a_2\,c_1 - c_2\,a_1 \\ a_1\,b_2 - b_1\,a_2 \end{pmatrix}$$

Droite

Distance entre un point et une droite

Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$, de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Soit $M(x, y)$ un point quelconque de $\mathcal{P}$.

L'équation de la droite passant par A et B est :

$$pM/(AB)^{1} = (y - y_A)(x_B - x_A) - (x - x_A)(y_B - y_A) = 0$$

La distance euclidienne du point M à la droite (AB) est :

$$d(M, (AB)) = \frac{|pM/(AB)|}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

1. puissance du point M par rapport à la droite (AB)

Segment
Intersection de deux segments

Méthode 1 :

1. déterminer les équations des deux supports des segments,
2. résoudre le système (2 équations à 2 inconnues réelles).

Les deux segments se coupent ssi les deux paramètres appartiennent simultanément à $[0,1]$.

Méthode 2 : utilisation de la notion de puissance d'un point, les deux segments se coupent en un point distinct de leur quatre extrémités ssi :

- A, B sont situés de part et d'autre de la droite (CD),
- C, D sont situés de part et d'autre de la droite (AB).

Segment
Intersection de deux segments

En coordonnées homogènes, raisonnement en deux temps pour la méthode 2 :

1. les sommets définissant l'un des segments doivent être de part et d'autre de l'autre segment considéré :

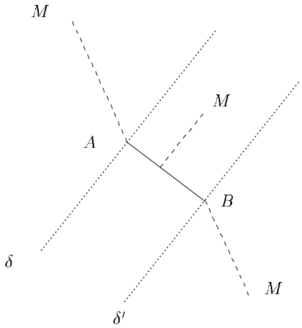
$$\begin{cases} det(A, C, D) \cdot det(B, C, D) < 0 \\ det(C, A, B) \cdot det(D, A, B) < 0 \end{cases} \quad \text{(signes opposés)}$$

2. si ces conditions sont remplies, alors le point d'intersection est solution de :

$$\begin{cases} det(M, A, B) = 0 \\ det(M, C, D) = 0 \end{cases}$$

Segment

Distance entre un point et un segment



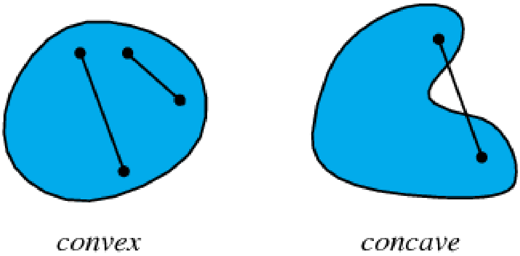
Soit H la section du plan comprise entre δ et δ' :

- si M est à l'intérieur de H : $d(M, [A, B]) = d(M, (AB))$,
- si M est dans HA (demi-plan gauche) : $d(M, [A, B]) = d(M, A)$,
- si M est dans HB (demi-plan droit) : $d(M, [A, B]) = d(M, B)$.

Polygone
Définitions

Théorème de Jordan : toute courbe fermée simple partage son complémentaire dans le plan en deux composantes connexes : son intérieur et son extérieur.

Convexité : un ensemble Z est dit convexe si et seulement si tout couple de points qu'il contient peut être relié par un segment de droite entièrement contenu dans Z.

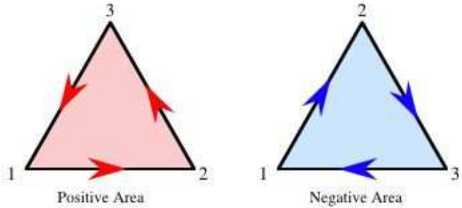


Polygone
Définitions

N-polygone simple (N-gone) : polygone de N sommets dont deux arrêtes ne peuvent avoir un point commun que consécutives sur la frontière et si ce point commun est l'une de leurs extrémités.

Position d'un point par rapport à un polygone :

- convexe : position du point par rapport à tous les *segments orientés* du polygone ⇒ puissance du point.



- concave : ?