Envariabelsanalys: Definitioner

Envariabelsanalys: Satser

Envariabelsanalys

Def (delmängd): Låt A och B vara mängder. Vi säger att A är en **delmängd** av B om för varje $x \in A$ så gäller att $x \in B$. Detta betecknas $A \subset B$.

Def (union): Antag att A och B är mängder. **Unionen** av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$.

Def (snitt): Antag att A och B är mängder. **Snittet** av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$.

Def (övre begränsning): Ett tal m sägs vara en **övre begränsning** av en mängd A om $x \leq m$ för varje $x \in A$. En mängd som har en övre begränsning kallas **uppåt begränsad**, annars **uppåt obegränsad**.

Def (undre begränsning): Ett tal m sägs vara en **undre begränsning** av en mängd A om $x \geq m$ för varje $x \in A$. En mängd som har en undre begränsning kallas **nedåt begränsad**, annars **nedåt obegränsad**.

Def (supremum): Ett tal m sägs vara **supremum** av en mängd A och betecknas sup A om m är den minsta övre begränsningen av A.

$$\sup[a,b] = \sup[a,b) = \sup(-\infty, b) = b$$

Def (infimum): Ett tal m sägs vara **infimum** av en mängd A och betecknas inf A om m är den största undre begränsningen av A

$$\inf[a,b] = \inf(a,b] = \inf(a,\infty) = a$$

Def (funktion, avbildas, bilden, argument, definitionsmängd, målmängd): Låt X och Y vara mängder. En **funktion** $f: X \to Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi skriver $f(x) = y$. Vi säger att x **avbildas** på y och att y är **bilden** av x. Elementet x kallas **argument** till f. Mängderna X och Y kallas **definitionsmängd** respektive **målmängd**. För definitionsmängden för f används även beteckningen D_f. Ett vanligt alternativ till ordet funktion är **avbildning**.

Def (värdemängd): **Värdemängden** till en funktion $f: X \to Y$ definieras som
$V_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$
och beskriver mängden av alla element vi kan få.

Def (injektiv): En funktion $f: X \to Y$ sägs vara **injektiv** om det för varje $x, y \in X$ gäller att om $f(x) = f(y)$ så är $x = y$

Def (surjektiv): En funktion $f: X \to Y$ sägs vara **surjektiv** om $V_f = Y$

Def (bijektiv): En funktion $f: X \to Y$ som både är injektiv och surjektiv sägs vara **bijektiv**, eller en **bijektion**.

Def (invers): Låt $f: X \to Y$ vara en bijektiv funktion. Inversen till f är avbildningen $f^{-1}: Y \to X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där x är det entydiga element i X som uppfyller $f(x) = y$. En funktion som har en invers kallas inverterbar.

Def (växande): Vi säger att en reellvärd funktion f, där $D_f \subset \mathbb{R}$, är växande på en mängd $M \subset D_f$ om det för varje $x, y \in M$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) \leq f(y)$. Om en funktion är växande på hela sin definitionsmängd kallas f växande.

Def (strängt växande): Vi säger att en reellvärd funktion f, där $D_f \subset \mathbb{R}$, är strängt växande på en mängd $M \subset D_f$ om det för varje $x, y \in M$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) < f(y)$. Om en funktion är strängt växande på hela sin definitionsmängd kallas f strängt växande.

Def (uppåt obegränsad): En funktion f är uppåt obegränsad om dess värdemängd V_f är uppåt obegränsad och uppåt begränsad om dess värdemängd V_f är uppåt begränsad.

Def (avtagande): Vi säger att en reelvärd funktion f, där $D_f \subset \mathbb{R}$, är avtagande på en mängd $M \subset D_f$ om det för varje $x, y \in M$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) \geq f(y)$. Om en funktion är avtagande på hela sin definitionsmängd kallas f avtagande.

Def (strängt avtagande): Vi säger att en reelvärd funktion f, där $D_f \subset \mathbb{R}$, är strängt avtagande på en mängd $M \subset D_f$ om det för varje $x, y \in M$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) > f(y)$. Om en funktion är strängt avtagande på hela sin definitionsmängd kallas f strängt avtagande.

Def (nedåt obegränsad): En funktion f är nedåt obegränsad om dess värdemängd V_f är nedåt obegränsad och nedåt begränsad om dess värdemängd V_f är nedåt begränsad.

Def (monoton): Vi säger att en funktion är monoton eller strängt monoton i ett intervall om den är växande respektive strängt växande i intervallet eller avtagande respektive strängt avtagande i intervallet.

Def (jämn): En funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara jämn om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Def (udda): En funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara udda om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$

Def (talföljd): En följd av tal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kallas för en talföljd och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Def (växande, avtagande): Vi säger att en talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande eller avtagande om $a_{n+1} \geq a_n$ respektive $a_{n+1} \leq a_n$ för varje $n \geq 1$

Def (uppåt begränsad, nedåt begränsad): Vi säger att en talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad eller nedåt begränsad om det finns ett tal M sådant att $a_n \leq M$ för varje $n \geq 1$ respektive $a_n \geq M$ för varje $n \geq 1$.

Def (konvergent, divergent): En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs konvergera mot gränsvärdet A om det för alla $\varepsilon>0$ finns ett N sådant att $|a_n-A|<\varepsilon$ för varje $n>N$. Vi inför beteckningen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

En talföljd med denna egenskap kallas konvergent, annars kallas talföljden divergent.

Def (oegentligt gränsvärde): Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ har det oegentliga gränsvärdet ∞ om det för varje M existerar ett N sådant att $a_n>M$ för varje $n>N$. Vi betecknar detta med:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

SATS 4.5: Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vara kontinuerliga talföljder med gränsvärdena A respektive B. Då följer:

a) $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet $A+B$
b) $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet $A\cdot B$
c) om $B\neq 0$ har vi att $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent mot gränsvärdet A/B
d) om $a_n\leq b_n$ för varje n så gäller $A\leq B$

SATS 4.7: Låt $a_n\leq b_n\leq c_n$ för varje n och låt $a_n\to A$ och $c_n\to A$ då $n\to\infty$. Då gäller att $b_n\to A$ då $n\to\infty$.

SATS 4.8: Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n\geq 1\}$

SATS 4.9: Följande gränsvärde gäller

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases}\infty & \text{om } p>0\\ 0 & \text{om } p<0\end{cases}$$

SATS 4.21: Låt $a>1$ och $b>0$. Då gäller att:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^b}=\infty\,;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{b^n}=\infty$$

Def (delföljd): Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Om vi endast studerar en del av talen a_n, men fortfarande oändligt många, och bildar en egen talföljd av dessa så sägs denna nya talföljd vara en delföljd av den ursprungliga talföljden. Denna nya talföljd betecknas ofta $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, där $n_k\in\mathbb{N}$ och $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ är en strängt växande talföljd.

SATS 4.25 (Bolzano-Weierstrass sats): Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Då finns det en konvergent delföljd.

Def (e): Vi definierar talet e som $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Def (konvergent): Låt f vara en funktion definierad i (a,∞) för något a. Vi säger att f konvergerar mot gränsvärdet A då x går mot ∞ om det för varje $\varepsilon>0$ finns ett N sådant att $|f(x)-A|<\varepsilon$ för varje $x>N$. Vi skriver detta $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$. Alternativt skriver vi att $f(x)\to A$ då $x\to\infty$. Om inget sådant A existerar kallas f divergent då x går mot ∞.

SATS 5.4: Låt f och g vara funktioner sådana att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to \infty$. Då följer att:

a) $f(x)+g(x) \to A+B$, då $x \to \infty$
b) $f(x) \cdot g(x) \to AB$, då $x \to \infty$
c) om $B \neq 0$ så följer att $f(x)/g(x) \to A/B$, då $x \to \infty$
d) om $f(x) \leq g(x)$, för alla $x \in (a, \infty)$ så gäller att $A \leq B$

SATS 5.5: Låt $f: (a, \infty) \to \mathbb{R}$ för något $a \in \mathbb{R}$ vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att $\lim_{x \to \infty} f(x) = \sup\{f(x): x \geq a\}$

SATS 5.6: Låt $a > 1$ och $b > 0$, då gäller följande gränsvärden

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty$$

Def (konvergerar): Låt f vara en reellvärd funktion, med $D_f \subset \mathbb{R}$, sådan att varje punkterad omgivning till $x=a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f konvergerar mot A då x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett δ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyller att $0 < |x-a| < \delta$. Vi skriver detta $\lim_{x \to a} f(x) = A$ eller $f(x) \to A$ då $x \to a$

Def (vänster- och högergränsvärden): Vänster- och högergränsvärden definieras genom att endast studera funktions värdena för $x < a$ respektive $x > a$. Vi använder då notationen $x \to a^-$ för vänstergränsvärden och $x \to a^+$ för högergränsvärden. $\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = A$

Def (oegentligt gränsvärde): Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x=a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då x går mot a om det för varje K finns ett δ sådant att $f(x) > K$ för varje $0 < |x-a| < \delta$. Vi skriver detta $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

SATS 6.5: Låt f och g vara funktioner sådana att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to a$. Då följer att

a) $f(x)+g(x) \to A+B$, då $x \to a$
b) $f(x) g(x) \to AB$, då $x \to a$
c) om $B \neq 0$ så följer att $f(x)/g(x) \to A/B$, då $x \to a$
d) om $f(x) \leq g(x)$ för varje x i en punkterad omgivning av a så följer att $A \leq B$

SATS 6.7: Låt $f: (a-\delta, a) \to \mathbb{R}$ för något $\delta > 0$ vara växande och uppåt begränsad. Då gäller att $\lim_{x \to a^-} f(x) = \sup\{f(x): x \in (a-\delta, a)\}$.

Def (kontinuerlig): Låt f vara en reellvärd funktion, med $D_f \subset \mathbb{R}$ sådan att varje punkterad omgivning till $x=a$ innehåller punkter från D_f och $a \in D_f$. Vi säger att f är kontinuerlig i a om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
alternativt: $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

SATS 7.2: Låt f vara kontinuerlig i punkten b och låt $g(x) \to b$, då $x \to a$. Då gäller att $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$
givet att vänsterledet är definierat.

SATS 7.4: Låt f och g vara kontinuerliga funktioner. Då följer att sammansättningen $x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$ är kontinuerlig.

SATS 7.5: Funktionerna $x \mapsto \sin x$ och $x \mapsto \cos x$ är kontinuerliga

SATS 7.6: Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ är kontinuerlig.

SATS 7.7: Låt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då är f begränsad.

SATS 7.9: Summan och produkten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

SATS 7.10: Polynom är kontinuerliga funktioner

SATS 7.12: Låt A och B vara intervall och låt $f: A \to B$ vara en kontinuerlig, inverterbar och strängt växande funktion.

SATS 7.17 (Satsen om mellanliggande värden): Låt f vara kontinuerlig i $[a,b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$

SATS 7.20: Låt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då antar f ett största och ett minsta värde, d.v.s. det finns $x_1, x_2 \in [a,b]$ sådana att $\sup V_f = f(x_1)$ och $\inf V_f = f(x_2)$

SATS 7.23 (Lokala standardgränsvärden): Följande gränsvärden gäller

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \; ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \; ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Def (derivatan): Låt f vara en funktion definierad i en omgivning av x_0. Vi säger att f är **deriverbar** i punkten x_0 om

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existerar. Värdet $f'(x_0)$ kallas **derivatan** av f i punkten x_0. Om f är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd så kallas f **deriverbar** och funktionen f' med definitionsmängden $D_{f'} = D_f$ kallas för **derivatan** av f.

SATS 8.7: Låt funktionen f vara deriverbar i intervallet (a,b). Då är f kontinuerlig i (a,b)

SATS 8.8: Låt f och g vara funktioner deriverbara i punkten x. Derivatorna har följande samband:

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Om dessutom $g(x) \neq 0$ så följer att f/g är deriverbar i punkten x och

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

SATS 8.9: Låt f vara en deriverbar funktion i punkten x och $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att $(af)'(x) = af'(x)$

SATS 8.12 (Kedjeregeln): Antag att f är deriverbar i punkten y, g deriverbar i punkten x och $y=g(x)$. Då är $f \circ g$ deriverbar i punkten x med derivatan: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Def (tangent): Låt $f(x)$ vara en funktion som är deriverbar i x_0. Den räta linjen som går genom punkten $(x_0, f(x_0))$ och har derivatan $f'(x_0)$ kallas för **tangenten** för f i punkten x_0.

Def (normal): Låt $f(x)$ vara en funktion som är deriverbar i x_0. Den räta linjen som går genom $(x_0, f(x_0))$ och är vinkelrät mot tangenten kallas för **normalen** till f i punkten x_0

SATS 8.20: Låt f vara en deriverbar och inverterbar funktion. Då gäller att inversen är deriverbar i alla punkter $y=f(x)$, där $f'(x) \neq 0$, med derivatan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Def (lokal maxpunkt): En funktion f sägs ha ett **lokalt maximum** i punkten $x_0 \in D_f$ om det finns en omgivning I till x_0 sådan att $f(x) \leq f(x_0)$, för varje $x \in I \cap D_f$.

Def (lokal minpunkt): En funktion f sägs ha ett **lokalt minimum** i punkten $x_0 \in D_f$ om det finns en omgivning I till x_0 sådan att $f(x) \leq f(x_0)$, för varje $x \in I \cap D_f$

Def (lokal extrempunkt): En funktion som har ett lokalt maximum eller ett lokalt minimum i en punkt x_0 sägs ha en **lokal extrempunkt** i x_0.

SATS 8.24: Låt f vara deriverbar i punkten x_0 och ha en lokal extrempunkt i x_0. Då gäller att $f'(x_0) = 0$.

Def (stationär punkt): En funktion sägs ha en **stationär punkt** i x_0 om f är deriverbar i punkten x_0 och $f'(x_0)=0$

Def (globalt maximum): En funktion f sägs ha ett **globalt maximum** i punkten $x_0 \in D_f$ om $f(x) \leq f(x_0)$, för varje $x \in D_f$

Def (globalt minimum): En funktion f sägs ha ett **globalt minimum** i punkten $x_0 \in D_f$ om $f(x) \geq f(x_0)$, för varje $x \in D_f$.

SATS 8.26 (Rolles sats): Låt $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion som är deriverbar på (a,b) och låt $f(a)=f(b)$. Då existerar det en punkt $p \in (a,b)$ sådan att $f'(p)=0$

SATS 8.27 (Medelvärdessatsen): Låt $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion som är deriverbar på (a,b). Då existerar det en punkt $p \in (a,b)$ sådan att $f'(p)(b-a) = f(b) - f(a)$

eller $f'(p) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

SATS 8.28 (Generaliserade medelvärdessatsen): Låt f och g vara reellvärda och kontinuerliga funktioner på $[a,b]$ som är deriverbara på (a,b). Då existerar det en punkt $p \in (a,b)$ sådan att
$$f'(p)(g(b)-g(a)) = g'(p)(f(b)-f(a)).$$
Om $g(a) \neq g(b)$ och $g'(p) \neq 0$
$$\frac{f'(p)}{g'(p)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

SATS 8.29: Låt f vara en deriverbar funktion på ett intervall $(a,b) \subseteq D_f$. Då gäller att
a) $f'(x)=0$ för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är konstant på (a,b)
b) $f'(x) \geq 0$ för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är växande på (a,b)
c) $f'(x) > 0$ för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är strängt växande på (a,b)
d) $f'(x) \leq 0$ för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är avtagande på (a,b)
e) $f'(x) < 0$ för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är strängt avtagande på (a,b)

SATS 8.30 (L'Hôpitals regel): Låt f och g vara reellvärda, deriverbara funktioner i en omgivning I av a sådana att $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Då gäller att
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Def (lodrät asymptot): En linje $x=a$ sägs vara en lodrät asymptot till en funktion f om $f(x)$ går mot $+\infty$ eller $-\infty$ då $x \to a^+$ eller $x \to a^-$

Def (sned asymptot): En linje $y=kx+m$ är en sned asymptot till en funktion f om $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(kx+m))=0$ eller $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+m))=0$

SATS 9.1 (Taylors formel): Låt f vara en n gånger deriverbar funktion definierad i en omgivning av 0, sådan att $f^{(n)}$ är kontinuerlig. Då följer att
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\alpha)x^n}{n!} \quad \text{för något } \alpha \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Def (Taylorpolynom): Låt f vara n gånger deriverbar. Polynomet
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
kallas Taylorpolynomet till f kring a av gradtal n.

Def (serie): Låt $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ vara en talföljd och låt $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden där $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$. Vi definierar serien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ som $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n$

Def (delsummor): Talen $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ kallas för seriens delsummor.

Def (seriens summa): Om gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar sägs serien vara konvergent och gränsvärdet kallas för seriens summa.

Def (positiv serie): En serie sägs vara positiv om $a_j \geq 0$, för varje $j \in \mathbb{N}$

SATS 10.2: Om serien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är konvergent så gäller att $a_j \to 0$, då $j \to \infty$.

Def (geometrisk serie): En geometrisk serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är en serie vars termer $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ bildar en geometrisk talföljd, d.v.s. $a_j = x^j$ för något $x \in \mathbb{R}$

SATS 10.4 (Summan av en geometrisk serie): Om $|x|<1$ så gäller att $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$

SATS 10.5: Låt $0 \leq a_j \leq b_j$ för varje $j \in \mathbb{N}$. Då gäller att om $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergent så är även $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergent.

SATS 10.6: Låt $0 \leq a_j \leq b_j$ för varje $j \in \mathbb{N}$. Då gäller att om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är divergent så är även $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ divergent.

SATS 10.8: Serien $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$ är konvergent om och endast om $p>1$

SATS 10.9: Låt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=0}^{\infty}$ vara två positiva serier vars termer uppfyller att
$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = K,$$
för något $K \neq 0$. Då gäller att $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergerar om och endast om $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergerar.

Def (absolutkonvergens): Serien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ sägs vara absolutkonvergent om serien $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ är konvergent.

SATS 10.12: Om en serie är absolutkonvergent så är den konvergent.

Def (konvergensradie): Det största talet r för vilket en Taylorserie konvergerar för varje $|x|<r$ kallas Taylorseriens konvergensradie.

Def (trappfunktion): En trappfunktion Ψ på det slutna intervallet $[a,b]$ är en funktion av typen
$$\Psi = \begin{cases} c_1 & : x_0 \leq x \leq x_1 \\ c_2 & : x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \\ c_n & : x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$
där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är reella konstanter och $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Def (uppdelning): Mängden $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ kallas en uppdelning av intervallet $[a,b]$ och intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ kallas ett delintervall av uppdelningen.

Def (integralen av en trappfunktion): Integralen av en trappfunktion $\Psi:[a,b] \to \mathbb{R}$ över $[a,b]$ definieras som:
$$\int_a^b \Psi(x)\,dx := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

Def (undertrappa, övertrappa, undersumma, översumma): Låt $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Då finns det trappfunktioner Φ och Ψ sådana att
$\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$ för varje $x \in [a,b]$. Funktioner Φ och Ψ som uppfyller ovanstående kallas undertrappa respektive övertrappa till f och deras integraler kallas undersumma respektive översumma till f.

Def ($L(f)$, $U(f)$): Låt $L(f)$ vara mängden av alla undersummor till f och $U(f)$ vara mängden av alla översummor till f, d.v.s.
$$L(f) = \left\{ \int_a^b \Phi(x)\,dx : \Phi \text{ är en undertrappa till } f \right\}$$
$$U(f) = \left\{ \int_a^b \Psi(x)\,dx : \Psi \text{ är en övertrappa till } f \right\}$$

Def (integral): Låt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Om $\sup L(f) = \inf U(f)$ så sägs f vara **integrerbar** och **integralen** av f över $[a,b]$ är
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup L(f) = \inf U(f)$$

SATS 11.4: Låt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Då är f integrerbar om och endast om det för varje $\varepsilon>0$ finns en undertrappa Φ och en övertrappa Ψ till f sådana att $\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon$

SATS 11.6: Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$. Då är f integrerbar på $[a,b]$. Dessutom gäller att
$$\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{då } \max\Delta_i\to 0 \text{ och}$$
$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{och} \quad m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

Def (likformigt kontinuerlig): En funktion f sägs vara **likformigt kontinuerlig** på intervallet I om det för varje $\varepsilon>0$ existerar ett $\delta>0$ sådant att $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ för varje $x,y\in I$ som uppfyller att $|x-y|<\delta$

SATS 11.8: Låt f vara kontinuerlig på intervall $[a,b]$. Då är f likformigt kontinuerlig på $[a,b]$

SATS 11.9 (Räkneregler för integraler): Låt f och g vara integrerbara funktioner på intervallet $[a,b]$ och $c\in\mathbb{R}$. Då gäller att
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$
Om $f(x)\le g(x)$, för varje $x\in[a,b]$ så gäller att
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

SATS 11.11 (Medelvärdessatsen för integraler): Låt f vara kontinuerlig i $[a,b]$. Då finns det ett tal $\alpha\in(a,b)$ sådant att
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)(b-a)$$

SATS 11.12 (Generaliserade medelvärdessatsen för integraler): Låt f och g vara kontinuerliga funktioner i $[a,b]$ och $g\ge 0$. Då finns det ett tal $\alpha\in[a,b]$ sådant att
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\alpha)\int_a^b g(x)\,dx$$

Def (primitiv funktion): Låt f vara en funktion definierad på ett intervall $[a,b]$. En funktion F sägs vara en primitiv funktion till f på $[a,b]$ om $F'(x)=f(x)$, för varje $x\in(a,b)$ och F är kontinuerlig i $[a,b]$.

SATS 11.14 (Analysens huvudsats): Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$. Då gäller att

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$$

är en primitiv funktion till f i intervallet $[a,b]$

SATS 11.15 (Insättningsformeln): Låt f vara kontinuerlig i $[a,b]$ och låt F vara en primitiv funktion till f på $[a,b]$. Då gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

SATS 11.18 (Partiell integration): Låt f, g och g' vara kontinuerliga i $[a,b]$ och låt F vara en primitiv funktion till f i $[a,b]$. Då gäller att

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

SATS 11.21 (Variabelbyte): Låt g och g' vara kontinuerliga i $[a,b]$ och låt f vara kontinuerlig mellan $g(a)$ och $g(b)$. Då gäller att

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

SATS 11.28: Följande Taylorutvecklingar gäller

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(1+\alpha)}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\alpha^2)}$$

där α är något tal mellan 0 och x

Def (integraler över obegränsade intervall): Låt f vara en funktion som är integrerbar på $[a,R]$, för varje $R>a$. Då definieras integralen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

Om detta gränsvärde existerar sägs integralen vara konvergent, i annat fall divergent. Integration som inkluderar $-\infty$ definieras på ett analogt vis. Låt f vara en integrerbar funktion på varje slutet och begränsat intervall. Om integralerna

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad \text{och} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx$$

är konvergenta så sägs integralen $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ vara konvergent.

SATS 12.2: Integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ är konvergent om och endast om $p>1$

SATS 12.3: Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R>a$, sådana att $0 \le f(x) \le g(x)$, för varje $x \ge a$. Då gäller att om $\int_a^\infty g(x)dx$ är konvergent så är även $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent.

SATS 12.4: Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R>a$, sådanna att $0 \le f(x) \le g(x)$, för varje $x \ge a$. Då gäller att om $\int_a^\infty f(x)dx$ är divergent så är även $\int_a^\infty g(x)dx$ divergent.

SATS 12.7: Låt f och g vara positiva och integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R>a$, sådana att $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ för något $K \neq 0$. Då gäller att

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ konvergerar om och endast om } \int_a^\infty g(x)dx \text{ konvergerar}$$

SATS 12.9: Låt f vara en avtagande funktion i intervallet $[m,n]$, där m och n är heltal sådana att $m<n$. Då gäller att

$$\sum_{j=m+1}^{n} f(j) \le \int_m^n f(x)\,dx \le \sum_{j=m}^{n-1} f(j)$$

Vilket kan omformuleras till

$$f(n) + \int_m^n f(x)dx \le \sum_{j=m}^{n} f(j) \le f(m) + \int_m^n f(x)dx$$

SATS 12.12: Låt f vara en växande funktion i intervallet $[m,n]$, där m och n är heltal sådana att $m<n$. Då gäller att

$$\sum_{j=m}^{n-1} f(j) \le \int_m^n f(x)dx \le \sum_{j=m+1}^{n} f(j)$$

Vilket kan omformuleras till

$$f(m) + \int_m^n f(x)dx \le \sum_{j=m}^{n} f(j) \le f(n) + \int_m^n f(x)dx$$

SATS 12.13 (Cauchys integralkriterium): Låt f vara en positiv och avtagande funktion i (m,∞), då gäller att $\sum_{j=m}^{\infty} f(j)$ är konvergent om och endast om $\int_m^\infty f(x)dx$ är konvergent.

Def (lokal integrerbarhet): Låt $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ vara en integrerbar funktion i intervallet $[a+\varepsilon, b]$, för varje litet $\varepsilon>0$. Vi definierar

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Om detta gränsvärde existerar sägs integralen vara konvergent, i annat fall divergent. Om integralen är konvergent sägs funktionen f vara **integrerbar** i intervallet $(a,b]$. En liknande definition görs för $[a,b)$.
Låt f vara en funktion definierad i intervallen $[a,c)$ och $(c,b]$, odefinierad i punkten $c \in (a,b)$ och integrerbar på varje slutet intervall $I \subset [a,c) \cup (c,b]$. Då definieras

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Om båda integralerna i högerledet är konvergenta så sägs integralen $\int_a^b f(x)dx$ vara konvergent, annars divergent.

SATS 13.3: Integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^q}\,dx$ är konvergent om och endast om $q<1$.

SATS 13.4: Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon>0$ sådana att $0\le f(x)\le g(x)$, för varje $x\in(a,b]$. Då gäller att om $\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent så är även $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

SATS 13.5: Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon>0$ sådana att $0\le f(x)\le g(x)$, för varje $x\in(a,b]$. Då gäller att om $\int_a^b f(x)\,dx$ är divergent så är även $\int_a^b g(x)\,dx$ divergent.

SATS 13.6: Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon>0$, sådana att
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=K$$
för något $K\neq 0$. Då gäller att
$\int_a^b f(x)\,dx$ konvergerar om och endast om $\int_a^b g(x)\,dx$

Def (Riemannsumma): Låt $P_n=\{x_{n,i}\}_{i=0}^{N_n}$ vara en uppdelning av $[a,b]$, d.v.s. för varje givet n är P_n en uppdelning av $[a,b]$ som består av N_n antal delintervall.
Vi har att: $a=x_{n,0}<x_{n,1}<x_{n,2}<\ldots<x_{n,N_{n-1}}<x_{n,N_n}=b$
Låt $\alpha_{n,i}\in[x_{n,i-1}, x_{n,i}]$ och $\Delta_{n,i}=x_{n,i}-x_{n,i-1}$
Summan
$$\sum_{i=1}^{N_n} f(\alpha_{n,i})\Delta_{n,i}$$
kallas en **Riemannsumma** för f i intervallet $[a,b]$

SATS 14.2: Låt f vara kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ och låt $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av uppdelningar av $[a,b]$ sådana att det största delintervallets längd $\max\{\Delta_{n,i}: 1\le i\le N_n\}\to 0$ då $n\to\infty$. Då gäller att Riemannsumman
$$\sum_{i=0}^{N_n} f(\alpha_{n,i})\Delta_{n,i}\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{då } n\to\infty$$

Def (Volymberäkning: Rotation kring x-axeln): Låt f vara en integrerbar funktion i intervallet $[a,b]$. Då beräknas **volymen** V av den kropp som bildas då f roterar runt x-axeln i intervallet $[a,b]$ som:
$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

Def (Volymberäkning: Rotation kring y-axeln): Låt f vara en integrerbar funktion i intervallet $[a,b]$. Då beräknas **volymen** V av den kropp som bildas under f då f roterar runt y-axeln i intervallet $[a,b]$ som:
$$V=2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$$

Def (Längden av en kurva): Låt f vara en deriverbar funktion definerat på intervallet $[a,b]$. Vi definierar **längden** L av funktionen f mellan a och b som:
$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Def (ordinär differentialekvation): En **ordinär differentialekvation** (ODE) är en ekvation som innehåller en eller flera envariabelfunktioner och deras derivator.

SATS 15.1: Låt $a \in \mathbb{R}$. En funktion y löser differentialekvationen $y' + ay = 0$ om och endast om $y(x) = Ce^{-ax}$, där $C \in \mathbb{R}$

Def (karakteristiskt polynom): Låt $y'' + ay' + by = 0$ vara en differentialekvation, där a och b är reella tal. Polynomet $r \mapsto r^2 + ar + b$ kallas det **karakteristiska polynomet** till differentialekvationen och $r^2 + ar + b = 0$, kallas den **karaktäristiska ekvationen** för differentialekvationen.

SATS 15.3: Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och låt r_1 och r_2 vara lösningarna till den karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$

En funktion y löser den homogena differentialekvationen $y'' + by' + ay = 0$ om och endas om y uppfyller nedanstående:

a) I fallet då r_1 och r_2 är reella och $r_1 \neq r_2$, så är $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b) I fallet $r_1 = r_2$, så är $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

c) I fallet $r_1 = c + di$ och $r_2 = c - di$, där $d \neq 0$, så är $y(x) = e^{cx}(C_1 \cos dx + C_2 \sin dx)$

där $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

Def (homogen lösning): En lösning till en **homogen differentialekvation** $y'' + ay' + by = 0$ kallas för en **homogen lösning**.

Def (partikulär lösning): Låt y_p vara en lösning till den inhomogena ekvationen $y''(x) + ay'(x) + by(x) = h(x)$. Lösningen y_p kallas för en **partikulär lösning** till den inhomogena ekvationen.

SATS 15.?: Låt y_h vara den generella lösningen till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ och y_p vara en partikulärlösning till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = h(x)$. Då är den generella lösningen y till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = h(x)$ $y = y_h + y_p$

Def (separabel differentialekvation): En differentialekvation av formen $g(y(x))\, y'(x) = f(x)$ kallas en **separabel** differentialekvation.

SATS 15.??: Låt $G'(x) = g(x)$ och $F'(x) = f(x)$, en separabel differentialekvation av formen $g(y(x))\, y'(x) = f(x)$ kan skrivas om som $G(y(x)) = F(x) + C$ och, om G är inverterbar, $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$

radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
deg	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	$0 : \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 : \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 : \frac{\sqrt{0}}{2}$
$\cos\theta$	$1 : \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 : \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{-1}{2} : \frac{-\sqrt{1}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-1 : \frac{-\sqrt{4}}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos\theta = \cos(\theta + n2\pi)$$
$$\cos\theta = \sin(\theta + \pi/2)$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\cos\theta = -\cos(\theta + \pi)$$

$$\sin\theta = \sin(\theta + n2\pi)$$
$$\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\sin\theta = -\sin(\theta + \pi)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x = 2\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x = 2\tan x \cdot \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2\theta}$$

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^{x+y} = a^x a^y$$
$$a^{-x} = 1/a^x$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad x>0, y>0$$
$$\log_a(x^y) = y\log_a(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$
$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1} \quad a \neq 0$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$