Linjär algebra: Definitioner

Linjär algebra: Satser

Linjär algebra

Def (linjär ekvation, koefficienter, linjärt ekvationssystem, lösning, lösninsmängd): En **linjär ekvation** med variabler $x_1, \ldots, x_n$ är en ekvation som ser ut så här $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ då n är ett naturligt tal och $a_1, \ldots, a_n, b$ är reella tal. Talen $a_1, \ldots, a_n$ kallas för **koefficienter**. En samling av linjära ekvationer kallas för ett **linjärt ekvationssystem**. En **lösning** är en lista $(s_1, \ldots, s_n)$ av tal som gör varje ekvation till ett rätt påstående om $x_1, \ldots, x_n$ byts ut med $s_1, \ldots, s_n$. Mängden av alla lösningar kallas för **lösningsmängden**.

Def (matris, typ, rader, kolumner, matriselement): En **matris** är ett rektangulärt schema av tal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Denna matris sägs vara av **typ** $m \times n$ där m är antalet **rader** och n är antalet **kolumner**. Talen a_{ij} kallas för **matriselement** och är numrerade så att första index anger rad och andra anger kolumn.

Def (associerad totalmatris): En matris

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

är den **associerade totalmatrisen** till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Def (trappstegsmatris): En **trappstegsmatris** är en matris av formen

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

där x kan vara vilket tal som helst

Def (lösbar, olösbar): Ett linjärt ekvationssystem kallas för **lösbar** om det finns minst en lösning, annars kallas det för **olösbar**.

Def (ekvivalent, ekvivalenspil): Två system sägs vara **ekvivalenta** om de har samma lösningsmängd. Man brukar skriva detta med en **ekvivalenspil** "$\Leftrightarrow$"

Observation: Lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem ändras inte om man:
(i) kastar om ordningen av ekvationer
(ii) multiplicerar en ekvation med ett icke-noll tal
(iii) addera en multipel av en ekvation till en annan.

Def (elementära radoperationer): Det finns tre **elementära radoperationer** av matriser:
(i) kasta om rader
(ii) multiplicera alla element i en rad med ett icke-noll tal.
(iii) addera en multipel av en rad till en annan

Def (radekvivalent): Två matriser heter **radekvivalenta** om det finns en följd av elementära radoperationer som transformerar den ena matrisen till den andra. Två linjära ekvationssystem med radekvivalenta totalmatriser är ekvivalenta.

Def (nollrad, nollkolumn, ledande element): En **nollrad** eller **nollkolumn** är en rad respektive kolumn som bara har noll-element. Ett **ledande element** av en rad är det element längst till vänster i raden som ej är 0.

Def (trappsteysmatris): En matris är en **trappmatris** eller **trappstegsmatris** om:
(i) alla rader skillda från 0 är ovanför alla nollrader
(ii) varje ledande element av en rad är i en kolumn på höger sida till det ledande elementet av raden ovanför.

Def (reducerad): En trappmatris är **reducerad** om
(i) Varje ledande element är lika med 1
(ii) Varje ledande element är det enda icke-noll element i sin kolumn.

SATS 1.1: Varje matris är radekvivalent till en unik reducerad trappsteysmatris

Def (reducerad trappstegsform): Om en matris A är radekvivalent till en reducerad trappsteysmatris U så kallas U för den **reducerade trappstegsformen** av A.

Def (pivot position): En **pivot position** i A är en position i A som korresponderar till ett ledande 1 i sin reducerade trappstegsform

Def (pivot kolumn): En **pivot kolumn** är en kolumn som innehåller en pivot position.

Def (Gausseliminering): Följande steg används för att reducera en matris till sin reducerade trappstegsform och kallas för **Gausseliminering**:
Steg 1: Börja med kolumnen längst till vänster som inte är noll. Den är pivot kolumnen och pivotpositionen är på toppen
Steg 2: Välj ett icke-noll element i pivot kolumnen som pivot. Om det inte är på toppositionen så kasta om rader.
Steg 3: Använd elementära radoperationer för att skapa nollor nedanför pivoten
Steg 4: Ignorera raden som innehåller pivotpositionen och alla rader ovanför. Utför steg 1-4 till submatrisen som är kvar. Repetera tills det finns inga icke-noll rader kvar att modifiera.
Steg 5: Börja med pivotelementet längst till höger och skapa nollor ovanför varje pivot med hjälp av radoperationer. Om pivot inte är 1 multiplicera raden med en skalär för att få pivoten till 1. Repetera steg 5 med nästa höger pivot tills alla pivots är gjorda.

Def (fri variabel): **Fria variabler** är de som är representerade av en icke-pivot kolumn

SATS 1.2 (existens/unikhetssatsen): Ett linjärt ekvationssystem är lösbart om och endast om den mest högra kolumnen i den associerade totalmatrisen inte är en pivotkolumn, det betyder att det inte finns någon rad $[0 \dots 0 \; b]$ där $b \neq 0$ i dess radekvivalenta trappmatris.
Om ett system är lösbart, då finns det
(i) en unik lösning om det inte finns några fria variabler
(ii) oändligt många lösningar om det finns minst en fri variabel

Def (vektor): En vektor är en ordnad lista av reella tal. För varje heltal n betecknar $\mathbb{R}^n$ mängden av alla vektorer av längd n som skrivs som en $n \times 1$ matris:
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Def (nollvektor): Vektorer som bara har nollelement sägs vara nollvektorn och skrivs som $\vec{0}$

Def (vektoraddition och skalär multiplikation): Följande operationer gäller för $u, v \in \mathbb{R}^n$ och $c \in \mathbb{R}$

Vektoraddition:
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

Skalärmultiplikation:
$$c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot v_1 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{bmatrix}$$

Def (algebraiska egenskaper av $\mathbb{R}^n$): För varje $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ och $c, d \in \mathbb{R}$ gäller:

(i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(iii) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
(iv) $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = 0$ där $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u}$
(v) $c \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
(vi) $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$
(vii) $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
(viii) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Def (linjär kombination): Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^n$ och $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$.
Då kallas $\vec{y} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_p\vec{v}_p$ för en linjär kombination.

Def (vektorekvation): En vektorekvation $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$ för $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^n$ har samma lösninsmängd som ett linjärt ekvationssystem med totalmatris $[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n \ \vec{b}]$

Def (linjär hölje): Mängden av alla linjärkombinationer av $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ betecknas med $\text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ och kallas för linjärhöljet av $v_1, \ldots, v_p$, d.v.s.
$\text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} = \{c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_p\vec{v}_p : c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}\}$

Def (produkt av matris och vektor): Produkten av en matris $A = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och en vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ är linjärkombinationen
$$A\vec{x} = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n$$
$A\vec{x}$ är endast definierad om antalet kolumner i A är lika med antalet element i $\vec{x}$.

SATS 1.5: För en matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektorer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ och en skalär $c \in \mathbb{R}$ gäller:
a) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$
b) $A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$

SATS 1.4: Låt $A=[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. De följande påståendena är ekvivalenta
a) $A\vec{x}=\vec{b}$ har en lösning för varje $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
b) Varje $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ är en linjär kombination av kolumnerna i A
c) $\text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$
d) A har en pivotposition i varje rad.

Def (homogen, trivial lösning): Ett linjärt ekvationssystem är **homogent** om man kan skriva det som $A\vec{x}=\vec{0}$ där $\vec{0}$ är nollvektorn. Ett sådant system har alltid minst en lösning, nämligen $\vec{x}=\vec{0}$, vilket kallas den **triviala lösningen**.

Def (icke-homogen): Ett system $A\vec{x}=\vec{b}$ där $\vec{b} \neq \vec{0}$ kallas för **icke-homogent**.

SATS 1.6: Anta att $A\vec{x}=\vec{b}$ har minst en lösning $\vec{p}$. Då består lösningsmängden av $A\vec{x}=\vec{b}$ av mängden av alla vektorer $\vec{x}=\vec{p}+\vec{v}_h$ där $\vec{v}_h$ är en lösning till det homogena systemet $A\vec{x}=0$.

Def (parameterform): Lösningen av ett ekvationssystem $A\vec{x}=\vec{b}$ i **parameterform** skrivs som $\vec{x}=c_1\vec{v}_1+\dots c_p\vec{v}_p \ : \ c_1,\dots,c_p \in \mathbb{R}$ där $\{v_1,\dots,v_p\}$ är linjärt oberoende

Def (linjärt oberoende): En mängd $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p\}$ av vektorer är **linjärt oberoende** om vektorekvationen $x_1\vec{v}_1+\dots+x_p\vec{v}_p=0$ har bara den triviala lösningen. Annars kallas det för **linjärt beroende**, d.v.s. det finns $c_1,\dots,c_p$ där inte alla är 0 så att $c_1\vec{v}_1+\dots+c_p\vec{v}_p=0$. Alltså att det finns en **linjär relation** mellan $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p$.
- $\{\vec{v}\}$ är linjärt oberoende om och endast om $\vec{v} \neq \vec{0}$
- $\{\vec{v},\vec{w}\}$ är linjärt beroende om och endast om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är skalärmultipler av varandra, d.v.s. $\vec{v}=\lambda\cdot\vec{w}$ eller $\lambda\vec{v}=\vec{w}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$

SATS 1.7: En mängd $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p\}$ av vektorer är **linjärt beroende** om och endast om en av vektorerna är en linjär kombination av de övriga vektorerna. Alltså om $S=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p\}$ är linjärt beroende och $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ så finns det $\vec{v}_j$ där $j>1$ så att $\vec{v}_j$ är en linjär kombination av $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{j-1}$.

SATS 1.8: Om $S=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ och $p>n$ så är S linjärt beroende.

Def (linjär avbildning): En avbildning $T:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en **linjär avbildning** om $T(c\vec{u}+d\vec{v})=cT(\vec{u})+dT(\vec{v})$ för alla $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ och $c,d \in \mathbb{R}$
Alternativt:
$T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$ och $T(c\vec{u})=c\cdot T(\vec{u})$

Def (standard matris): För varje linjär avbildning $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ finns en matris A så att $T(\vec{x})=A\vec{x}$. A kallas för **standard matrisen** av avbildningen T

SATS 1.10: Låt $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns det en unik matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ så att $T(\vec{x})=A\vec{x}$, nämligen $A=[T(\vec{e}_1)\dots T(\vec{e}_n)]$.

$$\vec{e}_j=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow j\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Def (surjektiv): En linjär avbildning $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara **surjektiv** om för varje $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ så gäller $T(\vec{x})=\vec{b}$ för minst ett $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Def (injektiv): En linjär avbildning $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara injektiv om för varje $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ finns det som mest en $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ så att $T(\vec{x}) = \vec{b}$

SATS 1.11: Låt $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då ä T injektiv om och endast om $T(\vec{x}) = \vec{0}$ satisfieras bara för $\vec{x} = \vec{0}$

SATS 1.12: Låt $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning med standardmatris $A = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Då
a) T är surjektiv om och endast om $\text{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$.
b) T är injektiv om och endast om $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ är linjärt oberoende.

Def (diagonalelement, huvuddiagonal, diagonalmatris): Låt $A = [a_{ij}]$ vara en matris med matriselementen $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Elementen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ kallas för diagonalelementen och bildar huvuddiagonalen. En diagonalmatris är en $n \times n$ matris vars icke-diagonala element är 0.

Def (summa): Summan av två matriser $A = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n]$ och $B = [\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_n]$ $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definieras som $A + B = [\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ldots \vec{a}_n + \vec{b}_n]$

Def (produkt): Om $r \in \mathbb{R}$ är en skalär så definieras produkten: $r \cdot A = [r \cdot \vec{a}_1 \ldots r \cdot \vec{a}_n]$

SATS 2.1: Låt A, B, C vara tre matriser av samma typ och $r, s \in \mathbb{R}$
Då har vi
a) $A + B = B + A$
b) $(A+B)+C = A+(B+C)$
c) $A + 0 = A$
d) $r(A+B) = rA + rB$
e) $(r+s)A = rA + sA$
f) $r(sA) = (rs)A$

Def (matrismultiplikation): Om A är en $m \times n$ matris och B är en $n \times p$ med kolumnerna $B = [\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_p]$ så är matrismultiplikationen $A \cdot B$ en $m \times p$ matris med kolumnerna $A \cdot B = A \cdot [\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_p] = [A\vec{b}_1 \ldots A\vec{b}_p]$

Räkneregler: Om $A = [a_{ij}]$ och $B = [b_{ij}]$ så har vi att $(AB)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$

SATS 2.2: Låt A, B, C vara matriser så att följande produkter och summor är definierade
Då har vi:
a) $A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ associativa lagen
b) $A(B+C) = AB + AC$
c) $(B+C)A = BA + CA$ $\Big\}$ distributiva lagar
d) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ $\forall r \in \mathbb{R}$
e) Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow I_m A = A \cdot I_n = A$
VARNING!
1) $AB \neq BA$ (ej kommutativ)
2) $AB = AC \not\Rightarrow B = C$
3) $A \cdot B = [\vec{0} \ldots \vec{0}] \not\Rightarrow A = 0$ eller $B = 0$

Def (transponerad matris): Låt A vara en $m \times n$ matris. Den transponerade matrisen av A som betecknas A^T är den $n \times m$ matris vars kolumner är raderna av A.

SATS 2.3: Låt A, B vara matriser så att produkten och summan är definierad. Då har vi:
a) $(A^T)^T = A$
b) $(A+B)^T = A^T + B^T$
c) $(rA)^T = rA^T$
d) $(AB)^T = B^T A^T$

Def (inverterbar): En nxn matris A sägs vara **inverterbar** om det finns en nxn matris C så att: $AC = I_n = CA$

Def (invers): Den unika C kallas för **inversen** av A och betecknas A^{-1}

Def (singulär): En icke-inverterbar matris kallas för **singulär**

SATS 2.4: Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Då är A inverterbar om och endast om $ad - bc \neq 0$
I detta fall har vi inversen $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

SATS 2.5: Om A är en inverterbar nxn matris, då har $A\vec{x} = \vec{b}$ för alla vektorer $\vec{b}$ en och endast en lösning, nämligen $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

SATS 2.6:
a) A är inverterbar $\Rightarrow$ A^{-1} är inverterbar $(A^{-1})^{-1} = A$
b) A, B är inverterbara nxn matriser $\Rightarrow$ $A \cdot B$ är inverterbar $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
c) A är inverterbar $\Rightarrow$ A^T är inverterbar $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Def (elementär matris): En **elementär matris** är en matris som utför en elementär radoperation på en matris när man multiplicerar den från vänster med matrisen.

SATS 2.7: En nxn matris är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med enhetsmatrisen I_n. Isåfall kommer sekvensen av elementära radoperationer som transformerar A till I_n att transformera I_n till A^{-1}

Notera: Alla elementära matriser är inverterbara.

SATS 2.8 (invertible matrix theorem): Låt A vara en nxn matris. Då är följande påståenden ekvivalenta:
a) A är inverterbar
b) A är radekvivalent med enhetsmatrisen
c) A har n pivotpositioner
d) $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara den triviala lösningen $\vec{x} = 0$
e) Kolumnerna av A är linjärt oberoende
f) $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ är injektiv
g) $A\vec{x} = \vec{b}$ har minst en lösning för varje $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
h) Kolumnerna av A spänner upp $\mathbb{R}^n$
i) $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ är surjektiv
j) Det finns $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så att $CA = I_n$
k) Det finns $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så att $AD = I_n$
l) A^T är inverterbar
m) Kolumnerna av A bildar en bas av $\mathbb{R}^n$
n) $\text{Col}\, A = \mathbb{R}^n$
o) $\dim \text{Col}\, A = n$
p) $\text{rank}\, A = n$
q) $\text{Nul}\, A = \{\vec{0}\}$
r) $\dim \text{Nul}\, A = 0$
s) Talet 0 är inte ett egenvärde till A
t) $\det A \neq 0$
u) $(\text{Col}\, A)^{\perp} = \{\vec{0}\}$
v) $(\text{Nul}\, A)^{\perp} = \mathbb{R}^n$
w) $\text{Row}\, A = \mathbb{R}^n$

Def (inverterbar): En linjär avbildning $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sägs vara inverterbar (alternativt bijektiv) om det finns en funktion $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ så att $S(T(\vec{x}))=\vec{x}$ och $T(S(\vec{x}))=\vec{x}$ för alla $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

SATS 2.9: Låt $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning med standardmatris A. Då är T inverterbar om och endast om A är inverterbar. Isåfall är $S(\vec{x})=A^{-1}\vec{x}$ den unika funktionen som uppfyller $S(T(\vec{x}))=\vec{x}$ och $T(S(\vec{x}))=\vec{x}$. Funktionen S kallas för inversen av T och man skriver $S=T^{-1}$

Def (determinant): För en 1x1 matris $A=[a_{11}]$ definieras determinanten som $\det A = a_{11}$
För $n\geq 2$ är determinanten av $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ definierat rekursivt:
$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det A_{1n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1}\cdot a_{1k}\cdot \det A_{1k}$
där A_{ij} definieras som en delmatris av A som man erhåller genom att ta bort i raden och j kolumnen från A.

Def (kofaktor): Låt $C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$. C_{ij} är en kofaktor av A.

SATS 3.1: Låt $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ vara en matris
För alla $1\leq i\leq n$:
$\det A = a_{i1}C_{i1}+\ldots+a_{in}C_{in}$ – utveckling efter i-de raden
För alla $1\leq j\leq n$
$\det A = a_{1j}C_{1j}+\ldots+a_{nj}C_{nj}$ – utveckling efter j-de kolumnen

Def (triangulär): En matris $A=[a_{ij}]$ sägs vara undertriangulär om $a_{ij}=0$ för alla $j>i$
Matrisen sägs vara övertriangulär om $a_{ij}=0$ för alla $i>j$. A heter triangulär om den är övertriangulär eller undertriangulär

SATS 3.2: Om A är en triangulär matris så är $\det A$ lika med produkten av alla element i huvuddiagonalen.

SATS 3.3: Låt $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ vara en matris. Då har vi att:
a) Om en multipel av en rad i A adderas till en annan rad så förändras inte $\det A$
b) Om två rader blir omkastade då multipliceras $\det A$ med -1
c) Om en rad multipliceras med ett tal r då multipliceras också $\det A$ med r

SATS 3.3 (Omformulerad): Låt $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ vara en matris och $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$ en elementär matris. Då har vi $\det EA = \det E\cdot\det A$ där:

$$\det E = \begin{cases} 1 & \text{om } E \text{ adderar en multipel av en rad till en annan} \\ -1 & \text{om } E \text{ omkastar två rader} \\ r & \text{om } E \text{ multiplicerar en rad med } r \end{cases}$$

SATS 3.4: En matris $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar om och endast om $\det A\neq 0$

SATS 3.5: För alla $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ så gäller $\det A^T = \det A$

SATS 3.6: Låt $A, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ vara matriser. Då har vi $\det AB = \det A\cdot\det B$

SATS 3.7 (Cramers regel): Låt $A=[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ vara en inverterbar matris. För varje $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ har vi den unika lösningen $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ av $A\vec{x}=\vec{b}$ där

$$x_i = \frac{\det(A_i(\vec{b}))}{\det A} \qquad \text{där } A_i(\vec{b}) = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1}\ \vec{b}\ \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n]$$

SATS 3.8: Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara en inverterbar matris. Då har vi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \quad \text{där } \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

SATS 3.9: Om A är en 2×2 matris så är ytan av parallellogrammet bestämt av kolumnerna av A lika med $|\det A|$. Om A är en 3×3 matris då är volymen av parallellepipeden bestämd av kolumnerna av A lika med $|\det A|$.

SATS 3.10:

a) Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning med standardmatris A. Om S är ett parallellogram, då har vi:
$\{\text{Ytan av } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{Ytan av } S\}$

b) Låt $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med standardmatris A och låt S vara en parallellepiped, då har vi:
$\{\text{Volymen av } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{Volymen av } S\}$

Detta gäller generellt för alla $S \subseteq \mathbb{R}^2$ eller $S \subseteq \mathbb{R}^3$ som har en ändlig Area respektive volym.

Def (vektorrum): Ett **vektorrum** är en icke-tom mängd V av föremål som kallas vektorer på vilket två operationer definieras kallat för addition och multiplikation med skalärer, som uppfyller följande axiomer för alla vektorer $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in V$ och skalärer $c, d \in \mathbb{R}$

1) summan av $\vec{v}$ och $\vec{w}$, betecknad $\vec{v}+\vec{w}$ är i V
2) $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$
3) $(\vec{v}+\vec{w})+\vec{u} = \vec{v}+(\vec{w}+\vec{u})$
4) Det finns en nollvektor $\vec{0}$ i V så att $\vec{v}+\vec{0} = \vec{v}$
5) För varje $\vec{v}$ i V finns $-\vec{v} \in V$ så att $\vec{v}+(-\vec{v}) = \vec{0}$
6) Skalärmultipler av $\vec{u}$ med c, betecknat $c\vec{u}$, är i V
7) $c(\vec{u}+\vec{w}) = c\vec{u}+c\vec{w}$
8) $(c+d)\vec{u} = c\vec{u}+d\vec{u}$
9) $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
10) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Def (delrum): Ett **delrum** av ett vektorrum V är en delmängd H av V som uppfyller följande tre krav:

1) Nollvektorn av V är i H
2) $\vec{u}, \vec{v} \in H \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in H$
3) För $\forall \vec{v} \in H$ och $\forall r \in \mathbb{R}$ är också $r\vec{v} \in H$

SATS 4.1: Låt $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_p$ vara vektorer i ett vektorrum V. Då är $\operatorname{span}\{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_p\}$ ett delrum av V.

Def (Nollrum): **Nollrummet** av en $m \times n$ matris A, betecknat $\operatorname{Nul} A$, är mängden av alla lösningar till $A\vec{x} = \vec{0}$. $\operatorname{Nul} A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$

SATS 4.2: För varje matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ är $\operatorname{Nul} A$ ett delrum av $\mathbb{R}^n$

Def (kolumnrum): **Kolumnrummet** av en $m \times n$ matris A, betecknat $\operatorname{Col} A$, är mängden av alla linjärkombinationer av kolumnerna d.v.s. om $A = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n]$ då:
$\operatorname{Col} A = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^m : A\vec{x} = \vec{b} \text{ för } \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$

SATS 4.3: Kolumnrummet av en $m \times n$ matris är ett delrum av $\mathbb{R}^m$

Def (linjär avbildning): En funktion T från ett vektorrum V till ett vektorrum W är en linjär avbildning om
a) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
b) $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u}) \quad \forall \vec{u} \in V$ och $\forall c \in \mathbb{R}$

Def (linjärt oberoende): En mängd av vektorer $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ i ett vektorrum V sägs vara linjärt oberoende om $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}$ endast har den triviala lösningen $c_1 = \ldots = c_p = 0$, annars är $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ linjärt beroende

SATS 4.4: En mängd $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ av två eller fler vektorer så att $\vec{v}_1 \neq 0$ är linjärt oberoende om och endast om det finns $j > 1$ för vilket $\vec{v}_j$ är en linjärkombination av $v_1 \ldots v_{j-1}$

Def (bas): Låt H vara ett delrum av V. En mängd $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_p\}$ i V är en bas (basis) för H om
a) B är linjärt oberoende
b) $H = \operatorname{span} B = \operatorname{span}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_p\}$
I fallet $H = V$: En bas av ett vektorrum V är en linjär oberoende mängd av vektorer i V som spänner upp V.

SATS 4.5 (spanning set theorem): Låt $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} \subseteq H$ och $H = \operatorname{span} S$
a) Om en vektor $\vec{v}_k$ i S är en linjär kombination av de andra vektorerna i S, då har vi att $H = \operatorname{span} S \setminus \{\vec{v}_k\}$
b) Om $H \neq \{0\}$ så finns det en delmängd av S som är en bas av H.

SATS 4.6: Mängden av pivotkolumner av en matris A är en bas till $\operatorname{Col} A$.

SATS 4.7 (unique representation theorem): Låt $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ vara en bas för ett vektorrum V. Då finns det för varje $\vec{x} \in V$ en unik mängd av skalärer $c_1, \ldots, c_n$ så att $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_n\vec{b}_n$

Def (koordinatvektor, koordinatfunktion): Låt $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ vara en bas till V och $\vec{x} \in V$. Koordinaterna av $\vec{x}$ relativt till basen B är de unika skalärer $c_1, \ldots, c_n$ sådan att $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_n\vec{b}_n$. Isåfall är $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ koordinatvektorn av $\vec{x}$ relativt till B
Avbildningen $\vec{x} \mapsto [\vec{x}]_B$ heter koordinatfunktionen.
I allmänhet, om $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ är en bas och $P_B = [\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_n]$, då är P_B inverterbar och $[\vec{x}]_B = P_B^{-1}\vec{x}$. Det betyder att $x \mapsto [\vec{x}]_B$ ges av $x \mapsto P_B^{-1}\vec{x}$.

SATS 4.8: Koordinatfunktionen $V \to \mathbb{R}^n$ som ges av $\vec{x} \mapsto [\vec{x}]_B$ är en bijektiv linjär avbildning

Def (isomorfisk): En bijektiv linjär avbildning mellan två vektorrum kallas för isomorfisk.

SATS 4.9: Om ett vektorrum V har en bas $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ då är alla mängder av vektorer i V som innehåller mer än n vektorer linjärt beroende.

SATS 4.10: Om ett vektorrum V har en bas $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ bestående av n vektorer, då består varje bas av n vektorer.

Def (dimension): Om ett vektorrum är uppspänt av en ändlig mängd av vektorer då sägs V vara **ändligt dimensionell** och **dimensionen** av V, betecknat $\dim V$, definieras som antalet av vektorer i en bas av V. Dimensionen av nollrummet $\{\vec{0}\}$ definieras $\dim\{\vec{0}\}=0$. Om V inte är uppspänt av en ändlig mängd av vektorer så sägs V vara **oändligt-dimensionell**.

SATS 4.11: Låt H vara ett delrum i ett ändligt dimensionellt vektorrum V. Då kan varje linjärt oberoende mängd av vektorer i H kompleteras till en bas av H. Dessutom är H ändligt dimensionell och $\dim H \leq \dim V$.

SATS 4.12 (basis theorem): Låt V vara ett p-dimensionellt vektorrum, $p \geq 1$, och låt $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p \in V$ vara olika vektorer.

a) Om $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}$ är linjärt oberoende är $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}$ en bas av V

b) Om $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}$ spänner upp V, dvs $\operatorname{span}\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}=V$, då är $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}$ en bas av V.

Def (radrum): Mängden av alla linjärkombinationer av raderna av en $m\times n$ matris kallas för **radrum** av A, betecknat $\operatorname{Row} A$. $\operatorname{Row} A \subseteq \mathbb{R}^n$ och $\operatorname{Row} A = \operatorname{Col} A^T$

SATS 4.13: Om A och B är radekvivalenta matriser, då har vi $\operatorname{Row} A = \operatorname{Row} B$. Om B är i reducerad trappstegsform, då bildar de icke-noll raderna av B en bas av $\operatorname{Row} B$ och alltså en bas av $\operatorname{Row} A$.

Def (rang): **Rangen** av en matris A är dimensionen av $\operatorname{Col} A$, och betecknas $\operatorname{rank} A$.

SATS 4.14 (rank theorem): Låt A vara en $m\times n$ matris. Då har vi $\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$ och denna dimensionen, rangen av A, är lika med antalet pivot positioner i A
Dessutom $\dim \operatorname{Nul} A + \operatorname{rank} A = n$

SATS 4.15: Låt $B=\{\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n\}$ och $C=\{\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n\}$ vara baser till ett vektorrum V. Då finns det en matris $\underset{C\leftarrow B}{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ så att $[\vec{x}]_C = \underset{C\leftarrow B}{P}[\vec{x}]_B$
Nämligen $\underset{C\leftarrow B}{P} = \left[[\vec{b}_1]_C \ \ldots \ [\vec{b}_n]_C\right]$. Dessutom $\underset{B\leftarrow C}{P} = (\underset{C\leftarrow B}{P})^{-1}$ och $[\vec{c}_1 \ldots \vec{c}_n \,\vdots\, \vec{b}_1 \ldots \vec{b}_n] \sim [I_n \,\vdots\, \underset{C\leftarrow B}{P}]$

Def (egenvektor, egenvärde): Låt A vara en $n\times n$ matris. En icke-nollvektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ sådan att $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ för något tal λ kallas för en **egenvektor** till A med **egenvärde** λ

Def (egenrum): Mängden av alla lösningar till $(A-\lambda I_n)\vec{x}=0$ kallas för **egenrummet** av A till egenvärdet λ. Mer exakt är egenrummet lika med nollrummet av $A-\lambda I_n$ och är därför ett vektorrum som består av alla egenvektorer med egenvärde λ samt nollvektorn.

SATS 5.1: Egenvärden av en triangulär matris är elementen på huvuddiagonalen.

Proposition: Ett tal λ är ett egenvärde till en matris A om och endast om λ är ett egenvärde till A^T

SATS 5.2: Om $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_r$ är egenvektorer till en $n\times n$ matris med olika egenvärden då är $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}$ linjärt oberoende.

Def (karaktäristiskt polynom, karaktäristisk ekvation): Låt A vara en $n \times n$ matris. Då är $\det(A-\lambda I_n)$ ett polynom i λ som kallas för det **karaktäristiska polynomet** av A. Ekvationen $\det(A-\lambda I_n)=0$ kallas för den **karaktäristiska ekvationen** av A

SATS 5.3 (egenskaper av determinanter): Låt A och B vara $n \times n$ matriser. Då gäller:
a) A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$
b) $\det AB = \det A \cdot \det B$
c) $\det A^T = \det A$
d) Om A är en triangulär matris så är $\det A$ lika med produkten av alla element i huvuddiagonalen.
e) Addition av en multipel av en rad i A till en annan ändrar inte $\det A$. Om två rader blir omkastade i A multipliceras $\det A$ med -1. Om en rad multipliceras med en skalär multipliceras även $\det A$ med samma skalär.

SATS 5.8: Talet λ är ett egenvärde till en $n \times n$ matris A om och endast om λ är ett nollställe till det karaktäristiska polynomet av A.

Def (algebraisk multiplicitet): Den **algebraiska multipliciteten** av ett egenvärde är lika med multipliciteten av nollställen vid egenvärdet i det karaktäristiska polynomet. Om λ_1 är ett nollställe som förekommer m gånger i det karaktäristiska polynomet sägs λ_1 ha den algebraiska multipliciteten m.

Def (geometrisk multiplicitet): Den **geometriska multipliciteten** av ett egenvärde λ_1 är antalet linjärt oberoende egenvektorer med egenvärdet λ_1. Alltså är den geometriska multipliciteten av λ_1 lika med $\dim \mathrm{Nul}(A-\lambda_1 I_n)$.

Def (similär): Två $n \times n$ matriser A och B sägs vara **similära** om det finns en inverterbar matris P sådan att $B=P^{-1}AP \Leftrightarrow A=Q^{-1}BQ \ : P^{-1}=Q$

SATS 5.4: Om två $n \times n$ matriser A och B är similära då har A och B samma karaktäristiska polynom.

Def (diagonaliserbar): En $n \times n$ matris är **diagonaliserbar** om den är similär med en diagonalmatris, d.v.s. om $A=PDP^{-1}$ där P är en inverterbar matris och D är en diagonalmatris.

SATS 5.5 (diagonalization theorem): En $n \times n$ matris är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer. Mer exakt har vi $A=PDP^{-1}$ där D är en diagonalmatris om och endast om kolumnerna av P är n linjärt oberoende egenvektorer av A. Isåfall är elementen på huvuddiagonalen av D egenvärden till motsvarande egenvektorerna som uppgör P's kolumner.

SATS 5.6: En $n \times n$ matris med n olika egenvärden är diagonaliserbar.

SATS 5.7: Låt A vara en $n \times n$ matris med olika egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ $:(p \leq n)$
a) För $1 \leq k \leq p$ är dimensionen av egenrummet av λ_k är mindre än eller lika med den algebraiska multipliciteten av λ_k
b) Matrisen A är diagonaliserbar om och endast om summan av dimensionerna av alla egenrum är n. Det gäller om och endast om (i) det karaktäristiska polynomet är en produkt av n linjära funktioner. (ii) dimensionen av egenrummet av ett egenvärde λ_k är lika med den algebraiska multipliciteten av λ_k för alla $1 \leq k \leq p$.
c) Om A är diagonaliserbar och B_k är en bas till egenrummet till λ_k för $1 \leq k \leq p$ då är $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p$ en bas av egenvektorer till $\mathbb{R}^n$.

Def (matrisrepresentation av en linjär avbildning relativt till baser): Låt V och W vara vektorrum med n respektive m dimensioner och låt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ vara baser till V respektive W. Låt T vara en linjär avbildning då $T: V \to W$. Givet ett $\vec{x}$ i V så är koordinatvektorn $[\vec{x}]_\mathcal{B}$ i $\mathbb{R}^n$ och koordinatvektorn av dess avbildning $[T(\vec{x})]_\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^m$. Matrisen M som uppfyller $M \cdot [\vec{x}]_\mathcal{B} = [T(\vec{x})]_\mathcal{C}$ kallas för matrisrepresentationen av T relativt till baser $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$, och definieras som $M = [[T(\vec{b}_1)]_\mathcal{C} \dots [T(\vec{b}_n)]_\mathcal{C}]$ där $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$

Def (matrisrepresentation av en linjär avbildning relativt till en bas): Om $V = W$ och $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ då kallas M för matrisrepresentationen av T relativt till $\mathcal{B}$ eller $\mathcal{B}$-matris av T betecknat $[T]_\mathcal{B}$, $[T(\vec{x})]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B} \cdot [\vec{x}]_\mathcal{B}$

SATS 5.8: Låt A vara en $n \times n$ matris, P en inverterbar matris och D en diagonalmatris sådan att $A = PDP^{-1}$. Om $\mathcal{B}$ är basen av $\mathbb{R}^n$ som består av kolumnerna av P så är D $\mathcal{B}$-matrisen av den linjära avbildningen $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

Observera: SATS 5.8 gäller även om D inte är en diagonalmatris.

Def (inre produkt): Låt $\vec{u} = [u_1 \dots u_n]^T$ och $\vec{v} = [v_1 \dots v_n]^T$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Inre produkten av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ definieras $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

SATS 6.1: Låt $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ och $c \in \mathbb{R}$. Då har vi:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
c) $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$
d) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ och $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Def (längd): Längden av en vektor $\vec{v}$ definieras som $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$
$\|c\vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$

Def (enhetsvektor, normalisering, standardenhetsvektor): En enhetsvektor är en vektor med längd 1. För varje vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ är $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ en enhetsvektor, divisionen $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ kallas för normalisering. Vektorer $\vec{e}_j$ kallas för standardenhetsvektorer.

Def (avstånd): Avståndet mellan två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$, betecknat $\mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{v})$ definieras $\mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

Def (ortogonal): Två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ sägs vara ortogonala om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Def (ortogonal, ortogonalkomplement): Om en vektor $\vec{v}$ är ortogonal till alla vektorer i ett delrum W av $\mathbb{R}^n$, då sägs $\vec{v}$ vara ortogonal till W. Mängden av alla vektorer som är ortogonala till W kallas för ortogonalkomplementet av W betecknat $W^\perp$

Proposition: Låt $W \subseteq \mathbb{R}^n$ vara ett delrum.

a) Om $W = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$, då har vi $\vec{v} \in W^\perp$ om och endast om $\vec{v} \cdot \vec{v}_i = 0 \ \forall 1 \leq i \leq p$
b) $W^\perp$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$.

SATS 6.2 (Pythagoras sats): Två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala om och endast om $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

SATS 6.3: Låt A vara en $m \times n$ matris. Då har vi $(\mathrm{Row}A)^\perp = \mathrm{Nul}A$ och $(\mathrm{Col}A)^\perp = \mathrm{Nul}A^T$

Def (ortogonal mängd): En mängd av vektorer $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p\}\subseteq\mathbb{R}^n$ är en **ortogonal mängd** om $v_i\cdot v_j=0$ för $i,j\in\mathbb{N}\cap[1,p]:i\neq j$.

SATS 6.4: Om $S=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p\}$ är en ortogonal mängd och $\vec{u}_i\neq\vec{0}$ för $1\leq i\leq p$, då är S linjärt oberoende.

Def (ortogonal bas): En **ortogonal bas** av ett delrum W av $\mathbb{R}^n$ är en bas av W som är ortogonal.

SATS 6.5: Låt $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p\}$ vara en ortogonal bas av ett delrum W i $\mathbb{R}^n$. För varje vektor $\vec{y}\in W$ är coefficienterna $c_1,\dots,c_p$ som uppfyller $\vec{y}=c_1\vec{u}_1+\dots+c_p\vec{u}_p$ givna av

$$c_i=\frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_i}{\vec{u}_i\cdot\vec{u}_i}\quad\text{för } 1\leq i\leq p$$

Def (ortonormerad mängd): En ortogonal mängd $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p\}$ som består av enhetsvektorer kallas för en **ortonormerad mängd**.

SATS 6.6: En $m\times n$ matris U har ortonormerade kolumner om och endast om $U^TU=I_n$

SATS 6.7: Låt U vara en $m\times n$ matris med ortonormerade kolumner och $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. Då har vi:

a) $\|U\vec{x}\|=\|\vec{x}\|$

b) $(U\vec{x})\cdot(U\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}$

c) $(U\vec{x})\cdot(U\vec{y})=0$ om och endast om $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$

Def (ortogonal matris): En $n\times n$ matris med ortonormerade kolumner kallas för en **ortogonal matris.**

SATS 6.8: Låt W vara ett delrum av $\mathbb{R}^n$. För varje vektor $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ finns det unika vektorer $\hat{y}\in W$ och $\vec{z}\in W^\perp$ så att $\vec{y}=\hat{y}+\vec{z}$. Om $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p\}$ är en ortogonal bas av W, då har vi att

$$\hat{y}=\frac{\vec{y}\,\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1+\dots+\frac{\vec{y}\,\vec{u}_p}{\vec{u}_p\cdot\vec{u}_p}\cdot\vec{u}_p$$

Def (ortogonal projektion): Vektorn $\hat{y}$ sägs vara den **ortogonala projektionen** av $\vec{y}$ på W, betecknat $\text{proj}_W\vec{y}$

SATS 6.9 (best approximation theorem): Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ och $\hat{y}=\text{proj}_W\vec{y}$. Då har vi att $\|\vec{y}-\hat{y}\|<\|\vec{y}-\vec{v}\|$ för alla $v\in W\setminus\{\hat{y}\}$. Alltså är $\hat{y}$ den närmsta punkten i W till $\vec{y}$.

Def (bästa approximationen): Vektorn $\hat{y}$ i sats 6.9 kallas för den **bästa approximationen** av $\vec{y}$ med vektorer i W.

SATS 6.10: Om $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p\}$ är en ortonormerad bas av ett delrum $W\subseteq\mathbb{R}^n$, då är $\text{proj}_W\vec{y}=(\vec{y}\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1+\dots+(\vec{y}\cdot\vec{u}_p)\vec{u}_p$. Om $U=[\vec{u}_1\dots\vec{u}_p]$ har vi $\text{proj}_W\vec{y}=U\cdot U^T\vec{y}$

SATS 6.11 (Gram-Schmidts ortogonalisering): Låt $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\}$ vara en bas till ett delrum $W\neq\{\vec{0}\}$ i $\mathbb{R}^n$ och låt:

$$\vec{v}_1=\vec{x}_1\;;\;\vec{v}_2=\vec{x}_2-\frac{\vec{x}_2\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1\;;\;\vec{v}_3=\vec{x}_3-\frac{\vec{x}_3\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1-\frac{\vec{x}_3\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\vec{v}_2\;;\dots;\vec{v}_p=\vec{x}_p-\frac{\vec{x}_p\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1-\dots-\frac{\vec{x}_p\vec{v}_{p-1}}{\vec{v}_{p-1}\cdot\vec{v}_{p-1}}\vec{v}_{p-1}$$

Då är $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p\}$ en ortogonal bas till W. Dessutom har vi $\text{span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}=\text{span}\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k\}$ för alla $1\leq k\leq p$.

SATS 6.12 (QR-faktorisering): Låt A vara en $m\times n$ matris med linjärt oberoende kolumner. Då finns det en $m\times n$ matris Q vars kolumner bildar en ortonormerad bas till $\mathrm{Col}A$ och en övertriangulär matris $R\in\mathbb{R}^{n\times n}$ med positiva värden på huvuddiagonalen sådan att $A=QR$

Def (minsta kvadratlösning): Låt A vara en $m\times n$ matris och $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$. En **minsta kvadratlösning** av $A\vec{x}=\vec{b}$ är en vektor $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$ sådan att $\|\vec{b}-A\hat{x}\|\leq\|\vec{b}-A\vec{x}\|$ för alla $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

SATS 6.13: En vektor $\hat{x}$ är en minsta kvadrat lösning av $A\vec{x}=\vec{b}$ om och endast om $A^TA\hat{x}=A^T\vec{b}$

Def (normal ekvation): Ekvationen $A^TA\hat{x}=A^T\vec{b}$ kallas för **normalekvationen** till $A^TA\hat{x}=A^T\vec{b}$

SATS 6.14: Låt A vara en $m\times n$ matris. Då är de följande påståendena ekvivalenta:
a) $A\vec{x}=\vec{b}$ har en unik minsta kvadratlösning
b) Kolumnerna av A är linjärt oberoende
c) Matrisen A^TA är inverterbar
Isåfall är den enda minsta kvadratlösningen $\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$

SATS 6.15: Om $A=QR$ är en QR-faktorisering och A har linjärt oberoende kolumner, då finns det precis en minsta kvadratlösning till $A\vec{x}=\vec{b}$, nämligen $\hat{x}=R^{-1}Q^T\vec{b}$

Def (inre produktrum): Låt V vara ett vektorrum. Då är V ett **inreproduktrum** om det finns en funktion: $\langle\_,\_\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ kallad **inreprodukt** som uppfyller följande axiom för alla $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ och $c\in\mathbb{R}$
a) $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\langle\vec{v},\vec{u}\rangle$
b) $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle+\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$
c) $\langle c\vec{u},\vec{v}\rangle=c\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$
d) $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle\geq 0$, och $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=0$ om och endast om $\vec{u}=\vec{0}$

Def (längd, avstånd, ortogonalitet):
Längd: $\|\vec{v}\|=\sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$
Avstånd: $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{\langle\vec{u}-\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\rangle}$
Ortogonalitet: $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$

SATS 6.16 (Cauchy-Schwartz inequality): Låt V vara ett inre produktrum. För alla $\vec{u},\vec{v}\in V$ har vi att $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|\leq\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

SATS 6.17 (triangle inequality): Låt V vara ett inre produktrum. För alla $\vec{u},\vec{v}\in V$ har vi att $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

Def (symmetrisk): En $n\times n$ matris A är **symmetrisk** om $A=A^T$

SATS 7.1: Om A är en symmetrisk matris och $\vec{v}_1$ & $\vec{v}_2$ är egenvektorer av A till olika egenvärden λ_1 & λ_2, $\lambda_1\neq\lambda_2$, då är $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ ortogonala

Def (ortogonalt diagonaliserbar): En $n\times n$ matris A sägs vara **ortogonalt diagonaliserbar** om det finns en ortogonal matris P ($P^{-1}=P^T$) och en diagonalmatris D sådan att $A=PDP^T=PDP^{-1}$

SATS 7.2: En $n\times n$ matris A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är symmetrisk.

SATS 7.3 (spektralsatsen för symmetriska matriser): En symmetrisk $n \times n$ matris A har följande egenskaper

a) A har n reella egenvärden (med multiplicitet)

b) För varje egenvärde λ är den algebraiska multipliciteten lika med dimensionen av det associerade egenrummet

c) Egenvektorer med olika egenvärden är ortogonala.

d) A är ortogonalt diagonaliserbar

Def (spektraluppdelning): Om $A = PDP^T$ där P är en ortogonal matris med kolumnerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, som är egenvektorer med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, då har vi:

$$A = PDP^T = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} = [\lambda_1 \vec{u}_1 \dots \lambda_n \vec{u}_n] \cdot \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T$$

detta är **spektraluppdelningen** av A och $\vec{u}_i \vec{u}_i^T$ är $n \times n$ matriser av rank 1.

$(\vec{u}_i \vec{u}_i^T)\vec{x} = \text{proj}_W \vec{x}$ där $W = \text{span}\{\vec{u}_i\}$

$(\vec{u}_i \vec{u}_i^T)\vec{x} = \vec{u}_i(\vec{u}_i^T \vec{x}) = \vec{u}_i(\vec{u}_i \cdot \vec{x}) = (\vec{u}_i \cdot \vec{x}) \cdot \vec{u}_i = \frac{\vec{u}_i \cdot \vec{x}}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i} \vec{u}_i$ då $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$

Def (kvadratisk form): En **kvadratisk form** är en funktion $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådan att $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ för alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ där $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är symmetrisk. Matrisen A kallas **matrisen för den kvadratiska formen**.

Def (variabelsubstitution): Låt $\vec{x}$ vara en vektor av variabler i $\mathbb{R}^n$. En ekvation $\vec{x} = P\vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} = P^{-1}\vec{x}$ där P är inverterbar och $\vec{y}$ är en vektor av variabler i $\mathbb{R}^n$, kallas för **variabelbyte** eller **variabelsubsitution**.

Mer exakt: $\vec{x}^T A \vec{x} = (P\vec{y})^T A (P\vec{y}) = \vec{y}^T P^T A P \vec{y}$. Enligt spektralsatsen finns det en ortogonal matris $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sådan att $P^T A P = D \Rightarrow \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y}$

SATS 7.4: Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara en symmetrisk matris. Då finns det ett ortogonalt basbyte $\vec{x} = P\vec{y} : P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ då P är ortogonal sådan att den kvadratiska formen $\vec{x}^T A \vec{x}$ transformeras till $\vec{y}^T D \vec{y}$ där D är en diagonalmatris. Mer exakt har $\vec{y}^T D \vec{y}$ inga blandade produkter, dvs $\vec{y}_i \cdot \vec{y}_j : i \neq j$.

Def (positiv definit, negativ definit, indefinit): En kvadratisk form Q heter

a) **Positiv definit** om $Q(\vec{x}) > 0$ för alla $\vec{x} \neq \vec{0}$

b) **Negativ definit** om $Q(\vec{x}) < 0$ för alla $\vec{x} \neq \vec{0}$

c) **Indefinit** om $Q(\vec{x})$ antar både positiva och negativa värden.

SATS 7.5: Om $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$. Då är Q

a) Positivt definit om och endast om alla egenvärden av A är positiva

b) Negativt definit om och endast om alla egenvärden av A är negativa.

c) Indefinit om och endast om A har både positiva och negativa egenvärden.

Def (vinkel): Låt V vara vektorrummet $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ med vanlig inreprodukt. **Vinkeln** θ mellan två vektorer $\vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ definieras som $\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} : 0 \leq \theta \leq \pi$

SATS Ω.1 (cosinussatsen): Låt V vara vektorrummet $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ med vanlig inreprodukt. För vektorer $\vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ har vi $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$

Def (kryssprodukt): För två vektorer $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = [v_1 \; v_2 \; v_3]^T$ och $\vec{w} = [w_1 \; w_2 \; w_3]^T$, är den så kallade **kryssprodukten** $\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ definierad som:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -v_1 w_3 + v_3 w_1 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

SATS Ω.2: Låt $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ vara vektorer och $c\in\mathbb{R}$

a) $\vec{0}\times\vec{v}=\vec{0}=\vec{v}\times\vec{0}$
b) $\vec{v}\times(\vec{u}+\vec{w})=\vec{v}\times\vec{u}+\vec{v}\times\vec{w}$
c) $(\vec{w}+\vec{u})\times\vec{v}=\vec{w}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{v}$
d) $\vec{v}\times\vec{w}=-\vec{w}\times\vec{v}$
e) $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0 \Leftrightarrow \vec{v}\times\vec{w}$ är ortogonal med $\vec{v}$ och $\vec{w}$.
f) $c\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(c\vec{v})\times\vec{w}=\vec{v}\times(c\vec{w})$
g) $\|\vec{v}\times\vec{w}\|^2=\|\vec{v}\|^2\cdot\|\vec{w}\|^2-(\vec{v}\cdot\vec{w})^2$
h) Om $\vec{v},\vec{w}\neq\vec{0}$, $\|\vec{v}\times\vec{w}\|=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\sin\theta$ där θ är vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$
i) $(\vec{v},\vec{w},\vec{v}\times\vec{w})$ är höger orienterad.

$0\leq\theta\leq\pi$

VARNING! Kryssprodukten är <u>inte</u>
- Kommutativ $\vec{v}\times\vec{w}\neq\vec{w}\times\vec{v}$
- associativ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\neq\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

SATS Ω.3: Låt $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ vara vektorer.

a) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ är lika med arean av parallellogrammet som spänns upp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.
b) $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ är lika med volymen av en parallellepiped som spänns upp av $\vec{u},\vec{v}$ och $\vec{w}$.

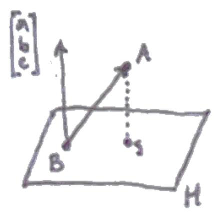
Def (linje, riktningsvektor, parameterform): En **linje** är ett translaterat endimensionellt delrum, alltså $L=\{\vec{v}+\vec{s}:\vec{v}\in L_0\}$ där $\vec{s}=[s_1\ s_2\ s_3]^T$ och L_0 är ett endimensionellt vektorrum. Om $L_0=\text{span}\{\vec{v}\}$ kallas $\vec{v}$ för **riktningsvektorn** av L och $L=\{t\cdot\vec{v}+\vec{s}:t\in\mathbb{R}\}$ är linjen i **parameterform**.
Genom två olika punkter $P=(p_1,p_2,p_3)$ och $Q=(q_1,q_2,q_3)$ finns det precis en linje som innehåller P och Q nämligen $L=\{t\cdot\vec{QP}+\vec{0Q}:t\in\mathbb{R}\}$ där $\vec{QP}=\vec{P}-\vec{Q}$ och $\vec{0Q}=\vec{Q}-\vec{0}$

Def (plan): Ett **plan** är ett translaterat två-dimensionellt delrum, alltså $H=\{\vec{v}+\vec{s}:\vec{v}\in H_0\}$ där $\vec{s}=[s_1\ s_2\ s_3]^T\in\mathbb{R}^3$ och H_0 är ett tvådimensionellt vektorrum.
Om $H_0=\text{span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ då är $H=\{t_1\vec{v}_1+t_2\vec{v}_2+\vec{s}:t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$ parameterformen.
Genom tre punkter P, Q och R finns det precis ett plan genom dem. Nämligen $H=\{t_1\vec{PQ}+t_2\vec{PR}+\vec{0P}:t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$. Till varje plan finns det $a,b,c\in\mathbb{R}$, inte alla noll och $d\in\mathbb{R}$ sådan att $H=\{\vec{x}=[x_1\ x_2\ x_3]^T:ax_1+bx_2+cx_3=d\}$. Det finns precis ett plan parallellt till H genom origo, nämligen $H_0=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3:ax_1+bx_2+cx_3=0\}$ vilket är samma som $H_0=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3:[a\ b\ c]^T\vec{x}=0\}$

Def (normalvektor, normalform): Vektorn $[a\ b\ c]^T$ kallas för en **normalvektor** och $H=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3:[a\ b\ c]^T\vec{x}=d\}$ är **normalformen** av H. Om $H=\{t_1\vec{v}_1+t_2\vec{v}_2+\vec{s}:t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$ då är $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ en normalvektor och $H=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3:(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\vec{x}=(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot\vec{s}\}$.

Def (avstånd): **Avståndet** av en punkt $A=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ och ett plan $H=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3:ax_1+bx_2+cx_3=d\}$ kan beräknas på följande sätt:

1) Ta en punkt $B=(b_1,b_2,b_3)\in H$
2) Projicera vektorn $\vec{BA}$ på $W=\text{span}\{[a\ b\ c]^T\}$
3) Beräkna längden $\text{proj}_W\vec{BA}=\text{proj}_W[a_1-b_1\ \ a_2-b_2\ \ a_3-b_3]^T$



Den närmsta punkten S till A i H kan beräknas:

$$S=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}-\text{proj}_W\begin{bmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{bmatrix}$$