

Sannolikhetsteori och Statistik

Def(utfall): Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas ett **utfall**. Betecknas w_1, w_2, \dots

Def(utfallsrummet): Mängden av alla möjliga utfall kallas **utfallsrummet**. Betecknas Ω .

Def(händelse): En **händelse** är en samling av utfall. Betecknas A, B, C, \dots

Def(diskret, ändligt, kontinuerlig): Om antalet utfall är ändligt eller uppräkneligt ändligt, säges Ω vara ett **diskret utfallsrum**. Om antalet är ändligt, säges Ω speciellt vara ett **ändligt utfallsrum**. Om antalet utfall icke är ändligt eller uppräkneligt ändligt, säges Ω vara ett **kontinuerligt utfallsrum**.

Notation: \cup och \cap

$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ = minst en av händelserna A_1, \dots, A_n kommer inträffa

$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ = alla händelserna A_1, \dots, A_n inträffar.

Def(parvis oförenliga): Händelserna A_1, \dots, A_n säges vara **parvis oförenliga** om alla par A_i och A_j är oförenliga (**disjunkta**), dvs om det är omöjligt att två eller flera av händelserna inträffar samtidigt.

Def(komplement): Komplementet till A är $A^c = \Omega \setminus A$. Detta kan också betecknas som \bar{A} .

SATS 2.α (De Morgans lagar): Låt A, B, C vara händelser. Följande likheter gäller:

$$\cdot A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\cdot A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\cdot (\bigcup_{i=1}^n A_i)^* = \bigcap_{i=1}^n A_i^*$$

$$\cdot (\bigcap_{i=1}^n A_i)^* = \bigcup_{i=1}^n A_i^*$$

Def(sannolikhet): Låt A vara en händelse. Det finns ett tall $P(A)$ som kallas **sannolikheten för A** . Man söker välja $P(A)$ så att den relativa frekvensen vid ett nägorlunda stort antal försök kommer i närheten $P(A)$.

Def(frekvenstolkningen): Låt $a \in [0, 1]$, om vi läter $P(A) = a$ kan vi ge detta uttalande den påtagliga men samtidigt vaga **frekvenstolkningen**: Vid ett stort antal försök blir den relativa frekvensen av händelsen A nog ungefärlig med a .

SATS 2.β (Kolmogorovs axiomsystem): Följande axiom för sannolikhetsmätet $P(\cdot)$ skall vara uppfyllda:

• Axiom 1: För varje händelse A gäller att $0 \leq P(A) \leq 1$

• Axiom 2: För hela utfallsrummet Ω gäller att $P(\Omega) = 1$

• Axiom 3: **Additionsformeln**: Om A_1, A_2, \dots är en ändlig eller uppräkneligt ändlig följd av parvis oförenliga händelser gäller att

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Utfallsrummet Ω , händelserna A, B, \dots och sannolikheterna $P(\cdot)$ säges tillsammans utgöra ett **sannolikhetssrum**.

SATS 2.1 (Komplementsatsen): För komplementet A^* till A gäller att $P(A^*) = 1 - P(A)$

SATS 2.2 (Additionssatsen för två händelser): För två godtyckliga händelser A och B gäller att $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

SATS 2.3 (Booles olikhet): För två godtyckliga händelser A och B gäller att $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Def(likformigt sannolikhetsmått): Om $P(w_i) = 1/m$ för $i=1,\dots,m$ föreligger ett likformigt sannolikhetsmått.

SATS 2.4 (Den klassiska sannolikhetsdefinitionen): Vid likformigt sannolikhetsmått är sannolikheten för en händelse lika med kvoten mellan antalet för händelsens gynsamma fall och antalet möjliga fall.

SATS 2.8 (Multiplikationsprincipen): Om åtgärd 1 kan utföras på a_1 , sätt och åtgärd 2 på a_2 sätt, så finns det $a_1 \cdot a_2$ sätt att utföra båda åtgärderna. Generalisering till tre åtgärder blir $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$.

SATS 2.5: Dragning med återläggning av k element ur n med hänsyn till ordning kan ske på n^k olika sätt

SATS 2.6: Dragning utan återläggning av k element ur n (med hänsyn till ordning) kan ske på $n(n-1)\dots(n-k+1)$ olika sätt

Följdsats 2.6.1: Antalet permutationer av n element bland n är lika med $n(n-1)\dots2 \cdot 1 = n!$ eller kortare: n element kan ordnas på $n!$ olika sätt.

SATS 2.7: Dragning utan återläggning av k element ur n (utan hänsyn till ordning) kan ske på $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ olika sätt

SATS 2.8 (Binomialteoremet): För varje positivt heltal n och för godtyckliga tal x och y gäller $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Def(betingad sannolikhet): Låt A och B vara två händelser. Uttrycket

$$P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

kallas den betingade sannolikheten för B givet att A har inträffat. Om $P(A)=0$ läter vi $P(B|A)$ vara obestämd.

Det gäller även att $P(B^*|A) = 1 - P(B|A)$

$$\cdot P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$$

$$\begin{aligned} \text{Vi kan också skriva: } P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= P(B) \cdot P(A|B) \end{aligned}$$

SATS 2.9 (Lagen om total sannolikhet): Om händelserna H_1, \dots, H_n är parvis oförenliga och $\bigcap H_i = \emptyset$, gäller för varje händelse A att $P(A) = \sum_{i=1}^n (P(H_i) P(A|H_i))$

SATS 2.10 (Bayes sats): Under samma villkor som i SATS 2.9 gäller

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^n (P(H_j) P(A|H_j))} = \frac{P(A \cap H_i)}{\sum_{j=1}^n (P(A \cap H_j))} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$

Def(beroende): Om $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ säges A och B vara oberoende händelser.

Def(beroende): Om:

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Säges A , B och C vara **beroende** händelser

Om A och B är beroende så är A^* och B beroende.

SATS 2.11: Om händelserna A_1, A_2, \dots, A_n är beroende och $P(A_i) = p_i$, så är sannolikheten att minst en av dem inträffar $1 - (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n)$

Följdsats 2.11.1: Om händelserna A_i är beroende och var och en inträffar med sannolikheten p , så är sannolikheten att minst en av dem inträffar lika med $1 - (1-p)^n$.

Def(stokastisk variabel): En **stokastisk variabel** (s.v.) är en reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Def(diskret): En stokastisk variabel är **diskret** om den kan anta ett ändligt eller uppräkneligt ändligt antal olika värden.

Sannolikheterna $p_x(x) = P(X=x)$, $x=a_1, a_2, \dots$

där a_1, a_2, \dots är de (uppräkneligt många) tänkbara värdena som X kan anta, kallas **sannolikhetsfunktionen** för den s.v. X

SATS 3.α: Låt A vara en delmängd av de tänkbara värdena som X kan anta, d.v.s $A \subset V_x$. Vi har då: $P(X \in A) = \sum_{k \in A} p_x(k)$

Följdsats 3.α.1: Låt $V_x = \mathbb{N}$. Vi har då $P(X \in V_x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_x(k) = 1$

Följdsats 3.α.2: Låt $V_x = \mathbb{N}$. Vi har då $P(a < X \leq b) = \sum_{k=a}^b p_x(k)$ där $a, b \in \mathbb{N}$

Def(tvåpunktsfördelad): Om den s.v. X antar endast två värdena a och b med sannolikheterna p respektive $1-p$ säges X vara **tvåpunktsfördelad**. Alltså $p_x(a) = p$, $p_x(b) = 1-p$. I specialfallet då $a=1$ och $b=0$ säger man oftast att X är **Bernoulli-fördelad**.

Def(likformigt fördelad): Om den s.v. X antar värdena $1, 2, \dots, m$ med lika stor sannolikhet, $\frac{1}{m}$, säges X vara **likformigt fördelad**, eller mer specifikt har X en **likformig fördelning** över $\{1, 2, \dots, m\}$.

Def(för-första-gången-fördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen $p_x(k) = (1-p)^{k-1}p$, $k=1, 2, \dots$ där $p \in (0, 1)$ säges X vara **för-första-gången-fördelad**. Betecknas $X \in \text{ffg}(p)$

Def(geometriskt fördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen $p_x(k) = (1-p)^k p$, $k=0, 1, 2, \dots$ där $p \in (0, 1)$, säges X vara **geometriskt fördelad**. Betecknas $X \in \text{Ge}(p)$

Def(binomialfördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$p_x(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$ där n är ett positivt heltal och $p \in (0, 1)$ säges X vara **binomialfördelad**. Betecknas $X \in \text{Bin}(n, p)$.

Enligt binomialtalen är

$$\sum_{k=0}^n p_x(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Def(hypergeometriskt fördelat): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_x(k) = \frac{\binom{v}{k} \binom{s}{n-k}}{\binom{v+s}{n}} \quad \text{där } k \text{ antar alla heltalsvärden sådana att } 0 \leq k \leq v, \\ 0 \leq n-k \leq s \quad \text{säges } X \text{ vara hypergeometriskt fördelat. Betecknas } X \in \text{Hyp}(N, n, p) \\ \text{där } N = v+s, \text{ och } p = \frac{v}{v+s}$$

Def(Poisson-fördelning): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_x(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad \mu > 0 \quad \text{säges } X \text{ vara Poisson-fördelad. Betecknas} \\ X \in \text{Po}(\mu)$$

Def(kontinuerlig): Om det finns en funktion $f_x(x)$ sådan att $P(X \in A) = \int_A f_x(x) dx$ för alla intervall $A \subset \mathbb{R}$, säges X vara en kontinuerlig s.v. Funktionen $f_x(x)$ kallas täthetsfunktionen för X . Kan även kallas frekvensfunktion.

SATS 3.1: I varje punkt x där $f_x(x)$ är kontinuerlig, gäller att

$$F'_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) = f_x(x)$$

Def(likformigt fördelat): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_x(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{om } a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

säges X vara likformigt fördelat. Betecknas $X \in U(a, b)$.

Def(exponentialfördelat): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

där $\lambda > 0$ säges X vara exponentialfördelat. Betecknas $X \in \text{Exp}(\lambda)$

Def(normalfördelat): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_x = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

där μ och σ är givna tal ($\sigma > 0$), säges X vara normalfördelat. Betecknas $X \in N(\mu, \sigma)$

Def(Weibull-fördelat): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda c(\lambda x)^{c-1} e^{-(\lambda x)^c} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

där λ och c är positiva tal, säges X vara Weibull-fördelat

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda x)^c} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

Def(gammafunktionen): Vi definierar gammafunktionen $T(c)$ som

$$T(c) = \int_0^\infty x^{c-1} e^{-x} dx.$$

Om c är ett heltal gäller $T(c) = (c-1)!$

Def(gammafördelat): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^c}{T(c)} \cdot x^{c-1} e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

där $c > 0$ och $\lambda > 0$, säges X vara gammafördelat

Def(fördelningsfunktion): $F_x(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$; kallas fördelningsfunktionen för den s.v. X

SATS 3.β: För en kontinuerlig s.v. har vi: $F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t)dt = P(X \leq x)$

SATS 3.γ: För en diskret s.v. har vi: $F_x(k) = \sum_{j \leq k} p_x(j)$ för $k=0, 1, 2, \dots$
 och omvänt följer: $\begin{cases} F_x(0) & \text{om } k=0 \\ p_x(k) = F_x(k) - F_x(k-1) & \text{annars.} \end{cases}$

SATS 3.2: För en fördelningsfunktion $F_x(x)$ gäller att

- $F_x(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{då } x \rightarrow -\infty \\ 1 & \text{då } x \rightarrow \infty \end{cases}$
- $F_x(x)$ är en växande funktion av x .
- $F_x(x)$ är kontinuerlig till höger för varje x

SATS 3.3: Om $a < b$ gäller att $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_x(b) - F_x(a) = \int_a^b f_x(t)dt$

Def(kvantil): Lösningen $x=x_\alpha$ till ekvationen $F_x(x)=1-\alpha$ kallas α -kvantilen för den s.v. X . α anges ofta i procent.

Def(kvartil, median): Kvartilerna $x_{0.25}, x_{0.5}$ och $x_{0.75}$ kallas övre kvartilen, medianen respektive undre kvartilen.

SATS 3.δ: Om X är en heltalsvariabel med sannolikhetfunktionen $p_x(j)$ så har den s.v. $Y=g(X)$ sannolikhetfunktionen

$$p_Y(k) = \sum_{j: g(j)=k} p_X(j)$$

SATS 3.ε: Om X är kontinuerlig och $Y=g(X)$ där g är strängt växande har vi $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$

Om g är strängt avtagande har vi istället

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Def(tvådimensionell stokastisk variabel): En tvådimensionell stokastisk variabel är en funktion (X, Y) definierad på ett utfallsrum Ω och som tar värden i \mathbb{R}^2 .

Def(fördelningsfunktion): Funktionen $F_{x,y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ kallas fördelningsfunktionen för den tvådimensionella s.v. (X, Y) . Kan även kallas den simultana fördelningsfunktionen för X och Y .

Def(sannolikhetfunktion): Storheterna $p_{x,y}(j,k) = P(X=j, Y=k)$, $j=0,1,2,\dots$, $k=0,1,2,\dots$ kallas sannolikhetfunktionen för den diskreta tvådimensionella s.v. (X, Y) . Kan även mer specifikt kallas den simultana sannolikhetfunktionen.

SATS 4.α: Sannolikheten $P((X, Y) \in A)$ kan beräknas genom $P((X, Y) \in A) = \sum_{(j,k) \in A} p_{x,y}(j,k)$
 Övrigt har vi att summan av alla sannolikheter är 1.
 Alltså $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{x,y}(j,k) = 1$.

SATS 4.β: Fördelningsfunktionen för den diskreta tvådimensionella s.v. (X, Y) kan bestämmas som

$$F_{x,y}(x,y) = \sum_{j \leq x} \sum_{k \leq y} p_{x,y}(j,k).$$

Def(marginell sannolikhetfunktion): För den diskreta tvådimensionella s.v. (X, Y) har vi att den marginella sannolikhetfunktionen för X i punkten j definieras som $p_{x,j}(j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{x,y}(j,k)$ $p_{y,k}(k)$ definieras på analogt vis.

Def (multinomialfördelning): Antag att ett slumpförsök har r olika utfall A_1, A_2, \dots, A_r med sannolikheter p_1, \dots, p_r där $p_1 + \dots + p_r = 1$. Låt X_j vara antalet gånger A_j inträffar vid n oberoende upprepningar av försöktet. Då gäller att $X_j \sim \text{Bin}(n, p_j)$. Då har vi att den simultana sannolikhetsfunktionen för den r-dimensionella s.v. (X_1, \dots, X_r) ges av

$$P_{X_1, \dots, X_r}(k_1, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \quad \text{där } k_1, \dots, k_r \geq 0, k_1 + \dots + k_r = n.$$

Vi säger att (X_1, \dots, X_r) är multinomialfördelad. Lägg märke till $X_1 + \dots + X_r = n$

$$P_{X_1, \dots, X_r}(k_1, \dots, k_r) = \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} p_2^{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} p_r^{k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

Def (täthetsfunktion): Om det finns en funktion $f_{x,y}(x,y)$ sådan att

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{x,y}(x,y) dx dy,$$

för alla A säges den tvådimensionella s.v. (X,Y) vara kontinuerlig. Funktionen $f_{x,y}(x,y)$ kallas täthetsfunktionen för (X,Y) .

Vi har då

$$F_{x,y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{x,y}(u,v) du dv \quad \text{om A är kvartsplanet snett ner till vänster från punkten (x,y)}$$

Som täthetsfunktion duger alla funktioner som uppfyller

$f(x,y) \geq 0$ för alla x,y och $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1$.

$f_{x,y}(x,y)$ kan kallas mer specifikt för den simultana täthetsfunktionen.

$$\text{Vi har slutligen } f_{x,y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{x,y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Def (marginell täthetsfunktion, marginell fördelningsfunktion): Den marginella fördelningsfunktionen för X respektive Y ges av

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) dy \quad \text{och } f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) dx.$$

och den marginella fördelningsfunktionen för X respektive Y ges av

$$F_x(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{x,y}(x,y) \quad \text{och } F_y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{x,y}(x,y)$$

Def (likformigt fördelad): En tvådimensionell s.v. (X,Y) är likformigt fördelad på området B, om för varje del A av detta område gäller att:

$$P((X,Y) \in A) = \frac{\text{Arean av } A}{\text{Arean av } B}$$

Def (oberoende): De s.v. X och Y kallas oberoende om $P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C) P(Y \in D)$ för alla mängder C och D.

SATS 4.7: Låt $Z = \max(X, Y)$ där X och Y är oberoende. Vi har då:

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z \text{ och } Y \leq z) = P(X \leq z) P(Y \leq z) = F_x(z) F_y(z)$$

SATS 4.8: Låt $Z = \min(X, Y)$ där X och Y är oberoende. Vi har då:

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X > z \text{ och } Y > z) = 1 - P(X > z) P(Y > z)$$

$$\text{Alltså } F_z(z) = 1 - (1 - F_x(z))(1 - F_y(z))$$

SATS 4.9: Låt $Z_1 = \max(X_1, \dots, X_n)$ och $Z_2 = \min(X_1, \dots, X_n)$ där X_1, \dots, X_n är n oberoende s.v. Vi har då $F_{Z_1} = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(z)$ och $F_{Z_2} = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_{X_j}(z))$

SATS 4.7: Låt X och Y vara diskreta s.v. som endast antar heltalsvärden och $Z=X+Y$.

Vi har då

$$p_Z(k) = P(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} p_{X,Y}(i,j) = \sum_{i=0}^k p_{X,Y}(i,k-i)$$

och

$$F_Z(z) = \sum_{i+j \leq z} p_{X,Y}(i,j).$$

SATS 4.8: Låt X och Y vara kontinuerliga s.v. och $Z=X+Y$ har vi

$$F_Z(z) = P(X+Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Om X och Y är oberoende har vi då

$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x) dx$$

SATS 4.9 (faltningssformel): Låt X och Y vara oberoende och $Z=X+Y$. Då är faltningssformeln:

- $p_Z(k) = \sum_{i=0}^k p_X(i) p_Y(k-i)$ då X och Y är diskreta s.v.
- $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$ då X och Y är kontinuerliga.

Def(väntevärde): Väntevärdet för den s.v. X definieras av

$$E(X) = \begin{cases} \sum_k k p_X(k) & \text{om } X \text{ är diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & \text{om } X \text{ är kontinuerlig.} \end{cases}$$

I bland kallas E även för förväntat värde.

SATS 5.1: Om $Y=g(X)$ gäller det att

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_k g(k) p_X(k) & \text{då } Y \text{ och } X \text{ är diskreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{då } Y \text{ och } X \text{ är kontinuerliga.} \end{cases}$$

Förljdsats 5.1.1: Om $Y=ax+b$ har vi att $E(Y)=aE(X)+b$.

SATS 5.2: Om $Z=g(X,Y)$ gäller det att

$$E(Z) = \begin{cases} \sum_{j,k} g(j,k) p_{X,Y}(j,k) & \text{för diskreta s.v.} \\ \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy & \text{för kontinuerliga s.v.} \end{cases}$$

SATS 5.3: Om X och Y är s.v. med väntevärden $E(X)$ och $E(Y)$ och om $a,b,c \in \mathbb{R}$ så gäller det att $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$

SATS 5.4: Om X och Y är oberoende gäller det att $E(XY)=E(X)E(Y)$

SATS 5.5: Om X_1, X_2, \dots, X_n är oberoende s.v. gäller $E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n)$

Def(varians): Variansen $V(X)$ för en s.v. X med $E(X)=\mu$ är $V(X)=E((X-\mu)^2)$

Alltså

$$V(X) = \begin{cases} \sum_k (k-\mu)^2 p_X(k) & \text{då } X \text{ är en diskret s.v.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx & \text{då } X \text{ är en kontinuerlig s.v.} \end{cases}$$

Def(standardavvikelse): Standardavvikelsen $D(X)$ för en s.v. X är kvadratrotten ur variansen $D(X)=\sqrt{V(X)}$

Def(variationskoefficient): Kvoten $R(X)=D(X)/E(X)$ kallas variationskoefficienten.

SATS 5.6: Följande samband gäller: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

SATS 5.7: Vid linjärtransformation gäller

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$D(aX+b) = |a| D(X)$$

Def(standardiserad): Om X är en s.v. med väntevärdelet $E(X)=\mu$ och standardavvikelsen

$D(X)=\sigma$ kallas $Y=(X-\mu)/\sigma$ en standardiserad s.v. vilket har egenskaperna

$$\begin{cases} E(Y)=0 \\ D(Y)=1 \end{cases}$$

Def(systematiskt fel, slumpmässigt fel): Med systematiskt fel menas differensen mellan mätvärdets väntevärde och det korrekta värdet. Med slumpmässigt fel menas differensen mellan mätvärdet och dess väntevärde.

Def(noggranhett, precision): Med god noggranhett avses ett litet systematiskt fel. Med god precision avses ett litet slumpmässigt fel!

Def(kovarians): Kovariansen $C(X,Y)$ mellan X och Y är

$$C(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$$

Alltså från sats 5.2:

$$C(X,Y) = \begin{cases} \sum_j \sum_k (j-\mu_X)(k-\mu_Y) p_{X,Y}(j,k) \\ \iint_{\mathbb{R}^2} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{X,Y}(x,y) dx dy \end{cases}$$

SATS 5.8: Följande samband gäller:

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

$$\text{där } E(XY) = \begin{cases} \sum_{j,k} j \cdot k \cdot p_{X,Y}(k) \\ \iint_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{X,Y}(x,y) dx dy \end{cases}$$

SATS 5.9: Kovariansen bör vara positiv om det finns ett beroende mellan X och Y sådant att det finns en tendens hos variablerna att samtidigt avvika åt samma håll från sina respektive väntevärden. Om variablerna dock inte tenderar att avvika åt olika håll från väntevärdena bör kovariansen vara negativ.

Detta påstående kommer från undersökning av produkten $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$.

Def(korrelationskoefficienten): Korrelationskoefficienten för X och Y definieras av

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

Def(okorrelerade): Om $C(X,Y)=0$ säges X och Y vara okorrelerade.

SATS 5.9: Om X och Y är oberoende så är de också okorrelerade.

OBS: Att X och Y är okorrelerade innebär inte att de är oberoende!

SATS 5.β: För alla s.v. X och Y har vi: $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

Om $\rho(X,Y)$ antar ett:

- Negativt värde nära -1 är X och Y starkt negativt korrelerade
- Negativt värde nära 0 är X och Y svagt negativt korrelerade
- Positivt värde nära 0 är X och Y svagt positivt korrelerade
- Positivt värde nära 1 är X och Y starkt positivt korrelerade

SATS 5.10: För alla s.v. X och Y gäller att

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X,Y)$$

Följdsats 5.10.1: För oberoende s.v. X och Y gäller att

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

$$D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)}$$

$$V(X-Y) = V(X+Y)$$

SATS 5.11: För alla s.v. X_1, \dots, X_n gäller att

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) + b\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i E(X_i)\right) + b$$

och

$$V\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} a_i a_k C(X_i, X_k)$$

Följdsats 5.11.1: För oberoende s.v. X_1, \dots, X_n gäller att

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) + b\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i E(X_i)\right) + b$$

och

$$V\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i)$$

Följdsats 5.11.2: Om X_1, \dots, X_n är en s.v. med samma väntevärde μ så gäller att

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\mu$$

Och om X_1, \dots, X_n är oberoende och har samma standardavvikelse σ gäller även

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\sigma^2 \quad \text{och} \quad D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sigma\sqrt{n}$$

Följdsats 5.11.3: Om X_1, \dots, X_n är oberoende s.v. var och en med väntevärde μ och standardavvikelsen σ och

$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ är deras aritmetiska medelvärde, så gäller att

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \sigma^2/n \quad \text{och} \quad D(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$$

SATS 5.12 (Stora talens lag): Låt X_1, X_2, \dots vara oberoende och likafördelade s.v., var och en med väntevärde μ , och sätt

$$\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$$

Då gäller, för alla $\epsilon > 0$, att

$$P(\mu - \epsilon < \bar{X}_n < \mu + \epsilon) \rightarrow 1 \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

SATS 5.13 (Markovs olikhet): För $a > 0$ och $Y \geq 0$ gäller $P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$

SATS 5.14 (Tjebysjous olikhet): Låt X vara en s.v. med väntevärde μ och standardavvikelse $\sigma > 0$. Då gäller, för varje $k > 0$, att $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$

Def(standardiserad normalfördelad): Låt $X \in N(0, 1)$. Vi säger då att X är en standardiserad normalfördelad s.v. Täthetsfunktionen för denna s.v. brukar betecknas $\varphi(x)$ och fördelningofunktionen $\Phi(x)$. Man har följaktligen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} ; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

SATS 6.α: Låt $X \in N(0, 1)$. Vi har då $\varphi(-x) = \varphi(x)$ och $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Def(kvantilen): α -kvantilen för en standardiserad normalfördelning betecknas λ_α . D.v.s. $P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$. Vi har även $\lambda_{1-\alpha} = -\lambda_\alpha$ p.g.a symmetri kring 0.

SATS 6.β: Låt $X \in N(0, 1)$. Då har vi $P(-\lambda_\alpha < X < \lambda_\alpha) = 1 - 2\alpha$

SATS 6.γ: Låt $X \in N(0, 1)$. Då har vi $E(X) = 0$ och $D(X) = 1$

SATS 6.1: $X \in N(\mu, \sigma)$ om och endast om $Y = (X - \mu)/\sigma \in N(0, 1)$. Dessutom gäller att $f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ och $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

SATS 6.2: Om $X \in N(\mu, \sigma)$, så gäller att $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, och $D(X) = \sigma$

SATS 6.δ: Om $X \in N(\mu, \sigma)$ så gäller att $P(\mu + k_1\sigma < X < \mu + k_2\sigma) = \Phi(k_2) - \Phi(k_1)$

SATS 6.3: Om $X \in N(\mu, \sigma)$, så gäller att $Y = aX + b \in N(a\mu + b, |a|\sigma)$

SATS 6.4: Om $X \in N(\mu_X, \sigma_X)$ och $Y \in N(\mu_Y, \sigma_Y)$, där X och Y är oberoende, så gäller att
 $X + Y \in N(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$
 $X - Y \in N(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$

SATS 6.5: Om X_1, X_2, \dots, X_n är oberoende och respektive $N(\mu_1, \sigma_1), \dots, N(\mu_n, \sigma_n)$ och talen a_1, \dots, a_n och b är givna, så gäller
 $\sum a_i X_i + b \in N\left(\sum a_i \mu_i + b, \sqrt{\sum a_i^2 \sigma_i^2}\right)$

Följdsats 6.5.1: Om X_1, X_2, \dots, X_n är oberoende $N(\mu, \sigma)$ och $\bar{X} = \sum X_i/n$ är deras aritmetiska medelvärde, så gäller att $\bar{X} \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

Följdsats 6.5.2: Om X_1, X_2, \dots, X_{n_1} är $N(\mu_1, \sigma_1)$ och Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} är $N(\mu_2, \sigma_2)$ och alla variabler är oberoende, så gäller att

$$\bar{X} - \bar{Y} \in N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2})$$

Def(χ^2 -fördelad): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{f/2-1}}{\Gamma(f/2)} 2^{f/2} e^{-x/2} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

säges X vara χ^2 -fördelad med f frihetsgrader. Betecknas $X \in \chi^2(f)$

SATS 6.6: Om X_1, X_2, \dots, X_f är oberoende och $N(0, 1)$, så gäller att $\sum_{i=1}^f X_i^2 \in \chi^2(f)$.

SATS 6.8 (Centrala gränsvärdesatsen): Om X_1, X_2, \dots är en oändlig följd av oberoende likafördelade s.v med μ och standardavvikelsen $\sigma > 0$, så gäller för
 $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ att $P(a < \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a)$ då $n \rightarrow \infty$.

Def (asymptotiskt normalfördelat): Om $Z_n, n=1,2,\dots$, är en oändlig följd av s.v. och man kan finna tal A_n och $B_n, n=1,2,\dots$ sådana att

$$P(a < \frac{Z_n - A_n}{B_n} \leq b) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) \text{ då } n \rightarrow \infty$$

säges Z_n vara **asymptotiskt normalfördelat** med parametrarna A_n och B_n .
 Betecknas $Z_n \in AsN(A_n, B_n)$

Notera: SATS 6.8 säger att $Y_n \in AsN(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

Följdsats 6.8.1: Om X_1, X_2, \dots är en följd av oberoende likafördelade s.v med vänsterände μ och standardavvikelsen $\sigma > 0$ så gäller att $(X_1 + \dots + X_n)/n \in AsN(\mu, \sigma/\sqrt{n})$