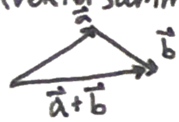
Mekanik

Def (skalär): En skalär c är en storhet som är oberoende av koordinatsystemet

Def (vektor, belopp, längd, riktning): En vektor $\vec{a}$ är en storhet som bestäms av:
a) beloppet / längden $|\vec{a}| = a$
b) riktningen

Def (vektorsumma): Vektorsumman av $\vec{a}+\vec{b}$ definieras geometriskt som



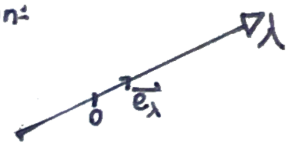
. Notera att $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, d.v.s. vektorsumman är kommutativ.

Def (multiplikation): Multiplikation av en vektor $\vec{a}$ med en skalär c är en ny vektor med
a) beloppet $|c\cdot\vec{a}| = |c|\cdot\vec{a}$
b) riktningen $\begin{cases} \text{samma som } a \text{ om } c>0 \\ \text{motsatt av } a \text{ om } c<0 \end{cases}$

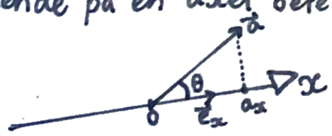
Def (enhetsvektor): En enhetsvektor $\vec{e}_a$ är definierad som $\vec{e}_a = \frac{1}{a}\cdot\vec{a}$ och definierar en "ren" riktning.

Def (skalärprodukt): Skalärprodukten $\vec{a}\cdot\vec{b}$ definieras som $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\theta$: $0\le\theta\le\pi$ där θ är vinkeln mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Skalärprodukten har egenskaperna:
a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (kommutativ)
b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

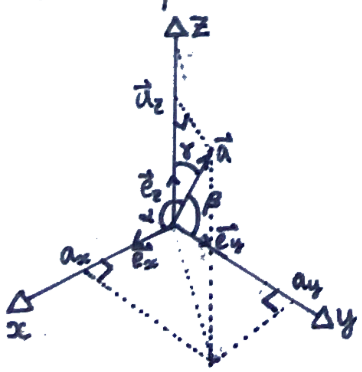
Def (axel): En axel λ är en rät linje genom origo med riktning $\vec{e}_\lambda$.
Notation:



Def (projektion, vektorkomponent): Projektionen eller vektorkomponenten med avseende på en axel betecknas $a_x = \vec{a}\cdot\vec{e}_x = a\cdot\cos\theta$



Def (vektorkomponenter): Vektorkomponenter i $\mathbb{R}^3$



$a_x = \vec{a}\cdot\vec{e}_x = a\cos\alpha$
$a_y = \vec{a}\cdot\vec{e}_y = a\cos\beta$
$a_z = \vec{a}\cdot\vec{e}_z = a\cos\gamma$

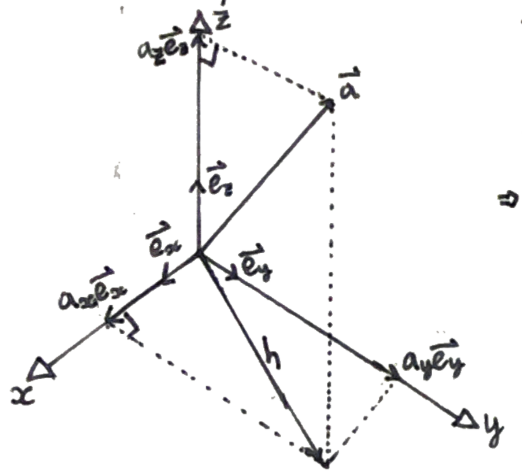
$a^2 = a^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$
$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$
$\Rightarrow \alpha,\beta,\gamma$ är beroende.

α,β,γ är riktningsvinklar

Vektorn $\vec{a}$ har:
a) Beloppet $a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
b) Riktning bestämd av α,β,γ

Notera: Vektorkomponenter är beroende av koordinatsystemet, alltså ej skalärer.

Def (vektorkomposanter): **Vektorkomposanter** definieras som $a_\lambda \vec{e}_\lambda$ så att:



$$\vec{h} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \vec{h} + a_z\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

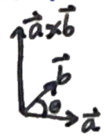
Beräkning av skalärprodukt med hjälp av vektor komposanter:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)\cdot(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) = \ldots = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Def (vektorprodukt, kryssprodukt): **Vektorprodukten** eller **kryssprodukten** av $\vec{a}$ och $\vec{b}$, skrivet $\vec{a}\times\vec{b}$, är en ny vektor med:

a) beloppet $|\vec{a}\times\vec{b}| = a\cdot b\cdot \sin\theta$

b) riktningen $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$ och högerhandsregeln



Vektorprodukten har egenskaperna:

- $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$
- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (antisymmetrisk)
- Arean av parallellogrammet uppspänt av $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är lika med $|\vec{a}\times\vec{b}|$
  $|\vec{a}\times\vec{b}| = a\cdot b\cdot\sin\theta = a\cdot\{\text{höjden av parallellogrammet}\}$

Beräkning av vektorprodukt med hjälp av vektorkomposanter:

$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y = \vec{e}_z = -\vec{e}_y\times\vec{e}_x$$
$$\vec{e}_x\times\vec{e}_z = -\vec{e}_y = -\vec{e}_z\times\vec{e}_x$$
$$\vec{e}_y\times\vec{e}_z = \vec{e}_x = -\vec{e}_z\times\vec{e}_y$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)\times(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z)$$
$$\vdots$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{e}_x + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{e}_y + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{e}_z$$

Minnesregel: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Def (enhet): En fysikalisk storhet (längd, massa, accelleration, etc.) bestäms med hjälp av **enheter**.

$$\text{storhet}\rightarrow L = \overset{\text{mätetal}}{2}\ m \leftarrow \text{enhet}$$

Def (måttsystem): Ett **måttsystem** är en sammansättning av enheter. T.ex. SI-systemet.

	storhet	dimension	enhet
Grundstorheter	massa	M	kg
	tid	T	s
	längd	L	m
Härledda storheter	hastighet	LT^{-1}	ms^{-1}
	acceleration	LT^{-2}	ms^{-2}
	kraft	MLT^{-2}	N ($kgms^{-2}$)
	arbete	ML^2T^{-2}	J (N·m)
	effekt	ML^2T^{-3}	W (Js^{-1})

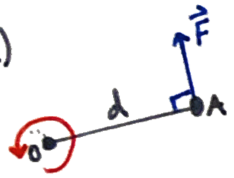
Def (kraft): **Kraften** $\vec{F}$ definieras som:

a) en vektor $\vec{F}$.

b) en tillordnad angreppspunkt A.

Kraftmoment (diagram)

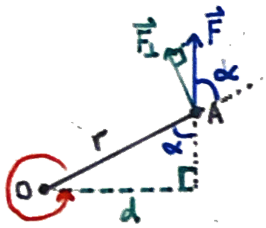
a)



Def (hävarm): d kallas för **hävarmen**.

$M_0 = d \cdot F$

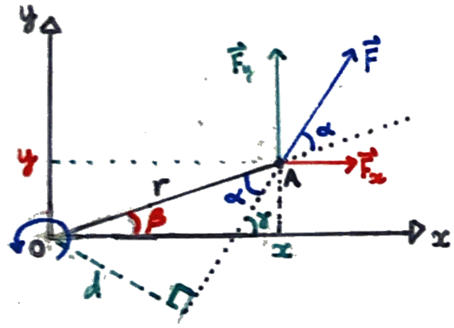
b)



$$\begin{cases} M_0 = d \cdot F = r \cdot \sin(\alpha) \cdot F \\ M_0 = r \cdot F_\perp = r \cdot \sin(\alpha) \cdot F \end{cases}$$

$$\therefore M_0 = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$

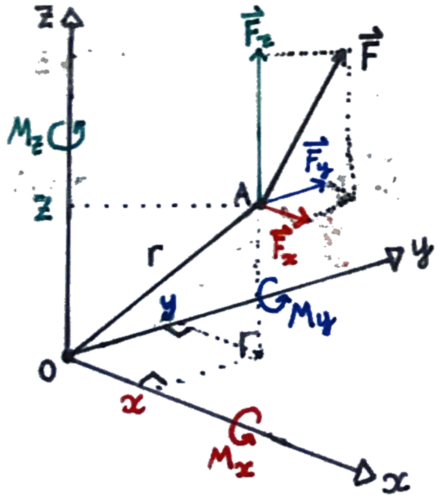
c)



$$M_0 = d \cdot F = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$
$$\alpha + \beta + (\pi - \gamma) = \pi$$
$$\Rightarrow \alpha = \gamma - \beta$$
$$\Rightarrow M_0 = F \cdot r \cdot \sin(\gamma - \beta)$$
$$= F \cdot r \left(\sin(\gamma)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\gamma) \right)$$
$$= \underbrace{F \cdot \sin(\gamma)}_{F_y} \cdot \underbrace{r \cdot \cos(\beta)}_{x} - \underbrace{F \cdot \cos(\gamma)}_{F_x} \cdot \underbrace{r \cdot \sin(\beta)}_{y}$$

$$\Rightarrow M_0 = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

d)

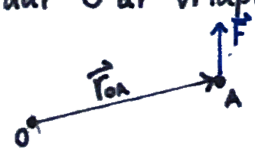


$$\begin{cases} M_x = y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ M_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{cases}$$

Def (kraftmoment): **Kraftmomentet**, eller kraftens vridande förmåga, definieras som:

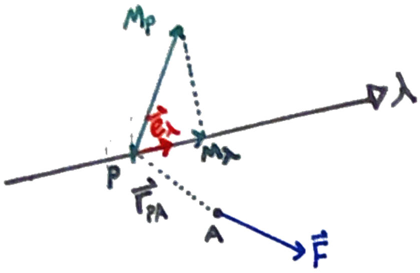
$$\vec{M_0} = \vec{r_{0A}} \times \vec{F}$$

där 0 är vridpunkten & A är angreppspunkten av $\vec{F}$



$\vec{M_0}$ har enheten Nm

Moment med avseende på en axel:



1) Välj en godtycklig punkt p på axeln och bestäm $\vec{M}_p = \vec{r}_{PA} \times \vec{F}$

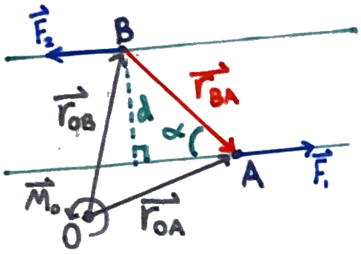
2) Projicera $\vec{M}_p$ på axeln, $\vec{M}_\lambda = \vec{M}_p \cdot \vec{e}_\lambda$

SATS: M_λ är oberoende av vilken punkt på axeln man väljer när man bestämmer momentet med avseende på axeln λ.

Def (kraftsystem): Ett **kraftsystem** består av krafter med sina angreppspunkter $\{\vec{F}_k, P_k\}$ $k=1,\dots,n$. **Kraftsumman** av ett kraftsystem definieras som $\vec{F} = \Sigma \vec{F}_k$

Def (kraftpar): Ett **kraftpar** är två krafter $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$ med egenskapen $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, kraftsumman av ett kraftpar är noll. Kraftmomentet av kraftparet på en punkt O där angreppspunkten av $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$ är A respektive B beräknas som:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{0B} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{0B} \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_{0A} - \vec{r}_{0B}) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1$$



Notera: $\vec{M}_0$ för ett kraftpar är oberoende av O

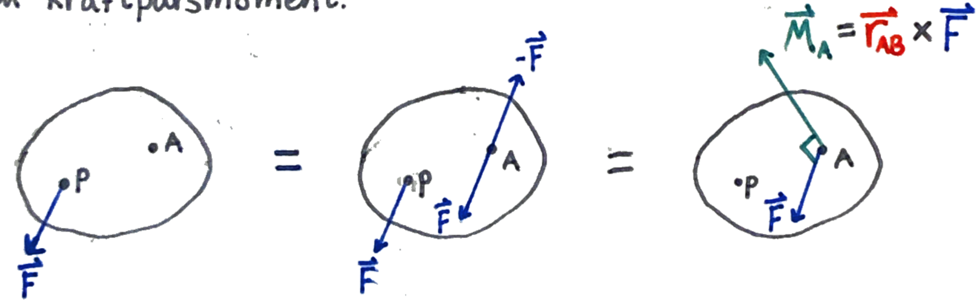
$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1$

och

$M = |\vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1| = F_1 \cdot r_{AB} \cdot \sin\alpha = d \cdot F_1$

Att flytta en kraft:

Man får flytta en kraft till en ny punkt men man måste kompensera med ett kraftparsmoment.



Att flytta n krafter:

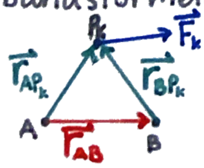
Följ ovan steg för alla krafter till en och samma punkt A och:

$$\begin{cases} \vec{F} = \Sigma \vec{F}_k \\ \vec{M}_A = \Sigma \vec{r}_{AP_k} \times \vec{F}_k \end{cases}$$

$\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$ kallas för **reduktionsresultatet**.

Ett godtyckligt kraftsystem kan alltid reduceras till ett reduktionsresultat

Sambandsformeln för kraftmomentet:

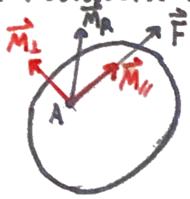


$\vec{M}_A = \Sigma \vec{r}_{AP_k} \times \vec{F}_k$, $\vec{M}_B = \Sigma \vec{r}_{BP_k} \times \vec{F}_k$, $\vec{r}_{AP_k} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP_k}$

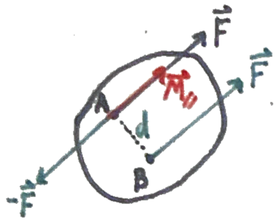
$$\therefore \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

Def(kraftskruv): Kraftskruven är enklaste möjliga reduktionsresultatet av ett kraftsystem med minsta möjliga kraftmomentet

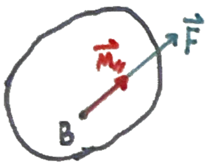
Att redycera ett reducerat kraftsystem till en kraftskruv



1) Dela upp $\vec{M}_A = \vec{M}_\parallel + \vec{M}_\perp$



2) Ersätt $\vec{M}_\perp$ med ett kraftpar $\{-\vec{F}, \vec{F}\}$ där $-\vec{F}$ angriper i punkten A och $\vec{F}$ angriper en punkt B så att $\vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \vec{M}_\perp$. $d = \frac{M_\perp}{F}$



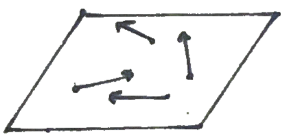
3) Addera kra terna $\vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$ i A och flytta $\vec{M}_\parallel$ till B.
Resultatet $\{\vec{F}, \vec{M}_\parallel\}$ är kraftskruven.

Def(enkraftsresultant): Om $\vec{M}_\parallel = \vec{0}$, d.v.s. $\vec{M}_A \perp \vec{F}$, har vi endast kraftsumman $\vec{F}$ kvar, vilken kallas för enkraftsresultant.

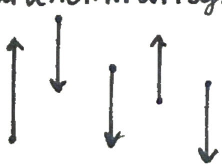
SATS: $\vec{F} \cdot \vec{M}_A = 0 \Leftrightarrow$ kraftsystemet har en resultant.

Exempel på system som alltid kan reduceras till en kraft (då $\vec{F} \neq \vec{0}$):

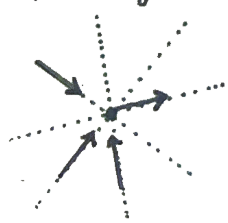
- Plana kraftsystem (alla krafter ligger på samma plan)



- Parallellkraftsystem (alla krafter är parallella)



- Strålkraftsystem (alla krafters verkningslinjer går genom samma punkt):

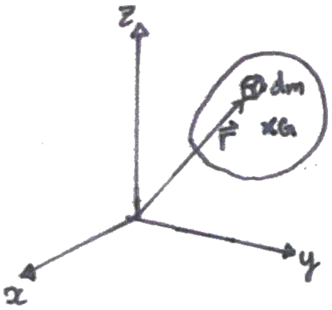


Sammanfattning av reduktionsresultat
1) Ett godtyckligt kraftsystem kan alltid reduceras till ett reduktionsresultat $\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$
2) Reduktionsresultatet kan reduceras till en kraftskruv med minsta möjliga kraftmoment.
3) Om $\vec{F} \neq \vec{0}$ och $\vec{F} \cdot \vec{M}_0 = 0 \Rightarrow$ kraftsystemet kan reduceras till en enkraftsresultant.
4) Om $\vec{F} = \vec{0}$ men $\vec{M}_0 \neq \vec{0} \Rightarrow$ systemet kan reduceras till ett kraftpar.

Masscentrum för en samling partiklar med massa m_k och koordinatposition $\vec{r}_k$

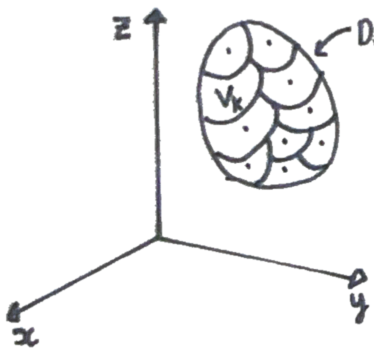
Masscentrumet $\vec{r}_G = \frac{\sum m_k \cdot \vec{r}_k}{m}$ där $m = \sum m_k$

Masscentrum för en stel kropp:



$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\, dm}{m}$$

Satsen för sammansatta kroppar:



Delkroppar med masscentrum $\vec{r}_{g_k}$

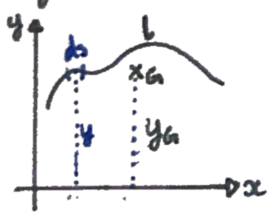
$$\vec{r}_G = \frac{1}{m}\int \vec{r}\, dm = \frac{1}{m}\left[\frac{m_1}{m_1}\int_{V_1} \vec{r}\, dm + \ldots + \frac{m_n}{m_n}\int_{V_n} \vec{r}\, dm\right]$$
$$= \frac{1}{m}\left[m_1 \cdot \vec{r}_{g_1} + \ldots + m_n \vec{r}_{g_n}\right]$$

$$\therefore \vec{r}_G = \frac{\sum m_k r_{g_k}}{m}$$

Algoritm för att beräkna masscentrum:
1) Inför ett lämpligt koordinatsystem.
2) Dela upp i små masselement med massa dm
   $dm = \rho\, dV$ ρ är densitet
3) Använd satsen för en sammansatt kropp
   $\vec{r}_G = \frac{1}{m}\int \vec{r}_g\, dm$

Pappus regler:

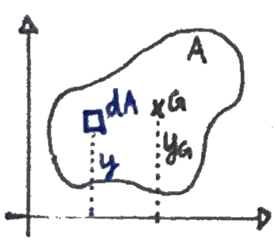
1)



A är arean av ytan av formen som skapas vid rotation av "tråden" runt x-axeln $A = 2\pi \int y\, ds$

$A = 2\pi\, y_G \cdot L$

2)



V är volymen av kroppen som skapas vid rotation av ytan runt x-axeln $V = 2\pi \int y\, dA$

$V = 2\pi\, y_G A$

Masscentrum för vanliga kroppar

- Triangel med hörn (x_1, y_1), (x_2, y_2) & (x_3, y_3)
$$\begin{cases} x_G = (x_1 + x_2 + x_3)/3 \\ y_G = (y_1 + y_2 + y_3)/3 \end{cases}$$

- Halvcirkelbåge med ändar $(-R, 0)$ och $(R, 0)$ och höjdpunkt $(0, R)$
$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$

- Halvcirkel med ändar $(-R, 0)$ och $(R, 0)$ och höjdpunkt $(0, R)$
$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

- Kon med radie R och höjd H vilandes på x och y axeln
$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{H}{4} \end{cases}$$

- Halvklot med radie R vilandes på x och y axeln
$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{3R}{8} \end{cases}$$

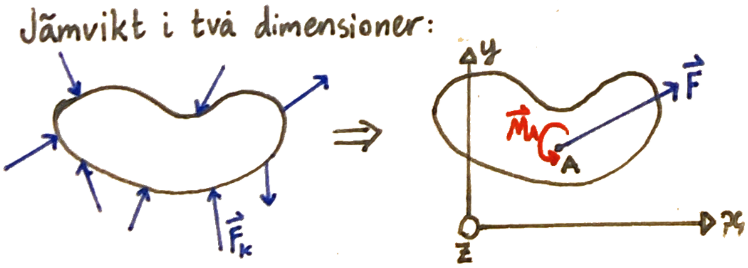
Def (stel kropp): En **stel kropp** är en massbelagd domän där avståndet mellan två godtyckliga punkter A och B är konstant.

Def (jämviktsläge): Ett **jämviktsläge** är ett läge som är konstant i tiden relativt en referensram.

SATS (jämviktsvilkor): Ett kraftsystem på stela kroppar är i jämviktsläge om det för varje delsystem gäller att summan av alla yttre krafter $\vec{F} = \vec{0}$ och $\vec{M}_A = \vec{0}$ för någon godtycklig punkt A.

Def (frilägganing): Att **frilägga** ett system är processen att ersätta kontakten mellan kroppar i systemet med motsvarande krafter och kraftmoment.

Jämvikt i två dimensioner:



Jämviktsvillkor:
$$\begin{cases} \vec{e}_x : F_x = 0 \\ \vec{e}_y : F_y = 0 \\ \vec{e}_z : M_{Az} = 0 \end{cases}$$

Alternativa jämviktsvilkor:

(1) Två krafter + Ett moment	(2) En kraft + Två moment	(3) Tre moment
$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_{Az} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} F_x = 0 \\ M_{Az} = 0 \\ M_{Bz} = 0 \end{cases}$ $\vec{r}_{AB}$ får ej vara // med $\vec{F}$	$\begin{cases} M_{Az} = 0 \\ M_{Bz} = 0 \\ M_{Cz} = 0 \end{cases}$ A, B och C får ej ligga på en rät linje.

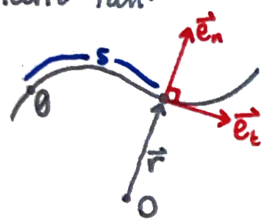
Def (ortsvektor): Partikelbanan, d.v.s. den kurva längs vilken en partikel rör sig i rummet kan beskrivas med hjälp av **ortsvektorn** $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. $\vec{r}(t)$ är partikelns kartesiska koordinater vid tidpunkten t.

Def(hastighet): **Hastigheten** av en partikel definieras som $\vec{v}=\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$.

Def(acceleration): **Accelerationen** av en partikel definieras som $\vec{a}=\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{\vec{r}}=(\ddot{x}(t),\ddot{y}(t),\ddot{z}(t))$. Accelerationen kan delas upp i två vektor komponenter $\vec{a}_t$ som är parallell med $\vec{v}$ och $\vec{a}_n$ som är orthogonal mot $\vec{v}$

Naturliga komponenter

Plant fall:



0 är en bestämd punkt på partikelbanan och s är båglängden från 0 till partikeln. s är beroende av tid d.v.s. $s=s(t)$

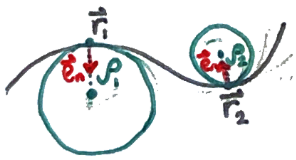
Ortsvektorn är då beroende av s, $\vec{r}=\vec{r}(s(t))$

Vi har då hastigheten $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\dot{s}\cdot\vec{e}_t$ där $\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{e}_t$

$e_t=1 \Rightarrow v=\dot{s}$ och $\boxed{\vec{v}=\dot{s}\vec{e}_t=v\vec{e}_t}$

Från produktregeln får vi accelerationen $\vec{a}=\ddot{s}\vec{e}_t+\dot{s}^2\frac{d\vec{e}_t}{ds}$

$\frac{d\vec{e}_t}{ds}$ är en ny vektor med riktning $\vec{e}_n$ och belopp $\frac{1}{\rho}$ där ρ är **krökningen**, d.v.s radien av cirkeln som bäst passar partikelbanan vid $\vec{r}$.



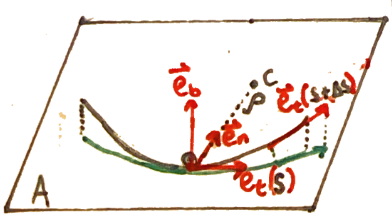
$\vec{e}_n$ pekar på den cirkelns mittpunkt.

Alltså $$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=\ddot{s}\vec{e}_t+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{e}_n\\&=\dot{v}\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n\end{aligned}}$$

$$\begin{cases}\vec{a}_t=\dot{v}\vec{e}_t\\ \vec{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n\end{cases}$$

- Tangentialaccelerationen $\vec{a}_t$ beror på fartändringen $\dot{v}$
- Normalaccelerationen $\vec{a}_n$ beror på farten v och kurvans krökning ρ.

Allmänt 3D fall:



Det **oskulerande** planet A spänns upp av $\vec{e}_t(s)$ och $\vec{e}_t(s+\Delta s)$

$\vec{e}_n$ är parallell med A

$$\begin{cases}\vec{a}=\dot{v}\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n\\ a_t=\dot{v}\\ a_n=v^2/\rho\\ a_b=0\\ \vec{e}_b=\vec{e}_t\times\vec{e}_n\end{cases}$$

Beräkning av krökningsradien ρ:

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{e}_t \ ; \quad \vec{a} = \ddot{s}\,\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{e}_n$$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \frac{\dot{s}^3}{\rho}\,\vec{e}_b \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{|\dot{s}^3|}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}$$

Om man istället för t betracktar partikelbanan med hjälp av en annan parameter u, $\vec{r} = \vec{r}(s(u))$ kan det ovanstående uttrycket skrivas som:

$$\boxed{\rho = \frac{|s'^3|}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}}$$

Om partikelbanan beskrivs som $y = y(x)$; $\vec{r} = (x, y(x), 0)$, $\vec{r}\,' = (1, y'(x), 0)$, $\vec{r}\,'' = (0, y''(x), 0)$ och $\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = (0, 0, y''(x))$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow s' = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}}$$