

Mekanik

Def (skalär): En skalär c är en storhet som är oberoende av koordinatsystemet

Def (vektor, belopp, längd, riktning): En vektor \vec{a} är en storhet som bestäms av:

- a) bellopet / längden $l\vec{a} = a$
- b) riktningen



Def (vektorsumma): Vektorsumman av $\vec{a} + \vec{b}$ definieras geometriskt som



. Notera att $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, d.v.s. vektorsumman är kommutativ.

Def (multiplikation): Multiplikation av en vektor \vec{a} med en skalär c är en ny vektor med

- a) bellopet $|c \cdot \vec{a}| = |c| \cdot |\vec{a}|$
- b) riktningen { samma som \vec{a} om $c > 0$
motsatt av \vec{a} om $c < 0$

Def (enhetsvektor): En enhetsvektor \vec{e}_a är definierad som $\vec{e}_a = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$ och definierar en "ren" riktning.

Def (skalärprodukt): Skalärprodukten $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definieras som $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta$: $0 \leq \theta \leq \pi$ där θ är vinkeln mellan \vec{a} och \vec{b} . Skalärprodukten har egenskaperna:

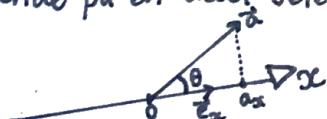
- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (kommutativ)
- b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Def (axel): En axel λ är en rät linje genom origo med riktning \vec{e}_λ .

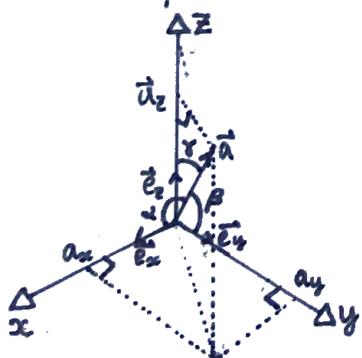
Notation:



Def (projektion, vektorkomponent): Projektionen eller vektorkomponenten med avseende på en axel betecknas $a_{\alpha} = \vec{a} \cdot \vec{e}_{\alpha} = a \cdot \cos \theta$



Def (vektorkomponenter): Vektorkomponenter i \mathbb{R}^3



$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = a \cos \alpha$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = a \cos \beta$$

$$a_z = \vec{a} \cdot \vec{e}_z = a \cos \gamma$$

$$a^2 = a^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

α, β, γ är beroende.

α, β, γ är riktningsvinkelar

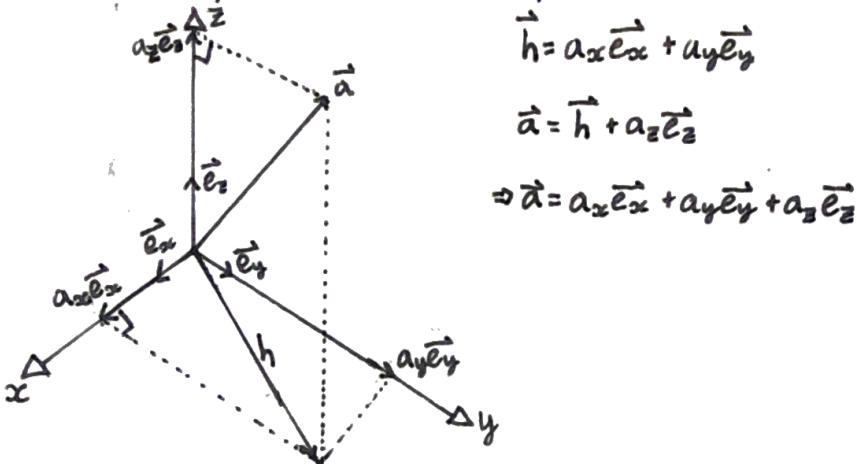
Vektorn \vec{a} har:

a) Beloppet $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

b) Riktning bestämd av α, β, γ

Notera: Vektorkomponenter är beroende av koordinatsystemet, alltså ej skalärer.

Def (vektorkomponter): Vektorkomponter definieras som $a_x \vec{e}_x$ så att:



$$\begin{aligned}\vec{h} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \\ \vec{a} &= \vec{h} + a_z \vec{e}_z \\ \Rightarrow \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z\end{aligned}$$

Beräkning av skalärprodukt med hjälp av vektor komponter:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) = \dots = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Def (vektorprodukt, kryssprodukt): Vektorprodukten eller kryssprodukten av \vec{a} och \vec{b} , skrivet $\vec{a} \times \vec{b}$, är en ny vektor med:

a) beloppet $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta$

b) riktningen $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ och högerhandsregeln

Vektorprodukten har egenskaperna:

- $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antisymmetrisk)
- Arean av parallelogrammet uppspänt av \vec{a} och \vec{b} är lika med $|\vec{a} \times \vec{b}|$
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta = a \cdot \{\text{höjden av parallelogrammet}\}$



Beräkning av vektorprodukt med hjälp av vektorkomponter:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y = -\vec{e}_z \times \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x = -\vec{e}_x \times \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \times (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z\end{aligned}$$

Minnesregel: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Def (enhet): En fysikalisk storhet (längd, massa, acceleration, etc.) bestäms med hjälp av enheter.

storhet $\rightarrow L = 2 \text{ m} \leftarrow$ enhet

Def (måtsystem): Ett måtsystem är en sammansättning av enheter. T.ex. SI-systemet.

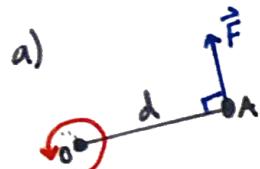
	storhet	dimension	enhet
grundstorheter	massa	M	kg
mätstörheter	tid	T	s
	längd	L	m
hastighet		LT^{-1}	ms^{-1}
acceleration		LT^{-2}	ms^{-2}
kraft		MLT^{-2}	$N (kg \cdot m/s^2)$
arbete		ML^2T^{-2}	J ($N \cdot m$)
effekt		ML^2T^{-3}	$W (J \cdot s^{-1})$

Def (kraft): Kraften \vec{F} defineras som:

a) en vektor \vec{F} .

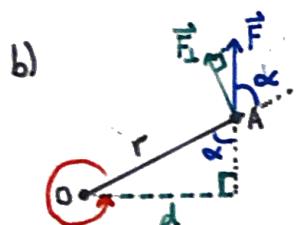
b) en tillordnad angreppspunkt A.

Kraftmoment (diagram)



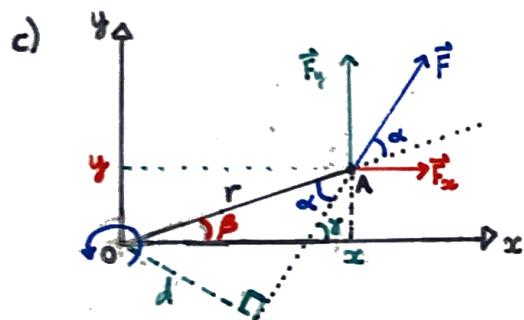
Def (hävarm): d kallas för hävarmen.

$$M_o = d \cdot F$$



$$\begin{cases} M_o = d \cdot F = r \cdot \sin(\alpha) \cdot F \\ M_o = r \cdot F_1 = r \cdot \sin(\alpha) \cdot F \end{cases}$$

$$\therefore M_o = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$



$$M_o = d \cdot F = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$

$$\alpha + \beta + (\pi - \gamma) = \pi$$

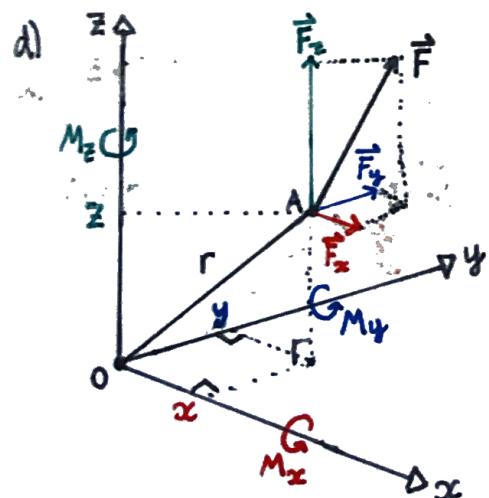
$$\Rightarrow \alpha = \gamma - \beta$$

$$\Rightarrow M_o = F \cdot r \cdot \sin(\gamma - \beta)$$

$$= F \cdot r (\sin(\gamma) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\gamma))$$

$$= F \cdot \sin(\gamma) \cdot r \cdot \cos(\beta) - F \cdot \cos(\gamma) \cdot r \cdot \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow M_o = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$



$$\begin{cases} M_x = y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ M_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{cases}$$

Def (kraftmoment): Kraftmomentet, eller kraftens vridande förmåga, definieras som:

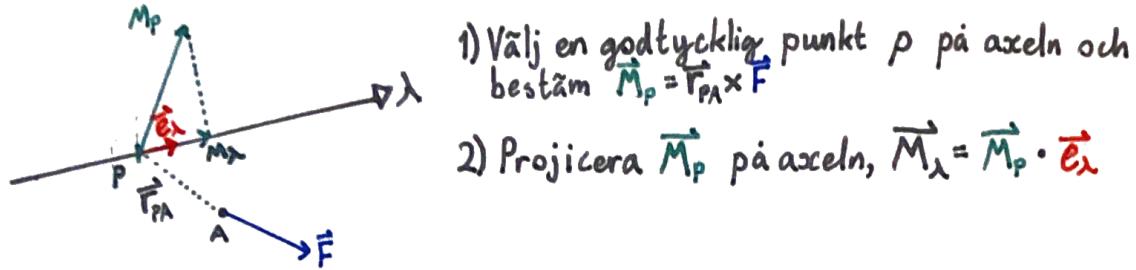
$$\vec{M}_o = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

där O är vridpunkten & A är angreppspunkten av \vec{F}



M_o har enheten Nm

Moment med avseende på en axel:

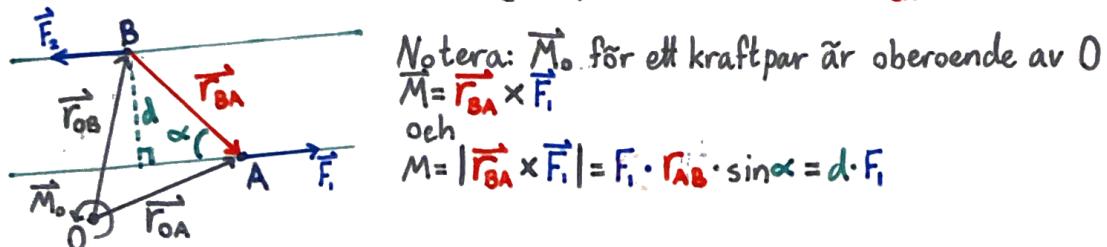


SATS: M_λ är oberoende av vilken punkt på axeln man väljer när man bestämmer momentet med avseende på axeln λ .

Def (kraftsystem): Ett kraftsystem består av krafter med sina angreppspunkter $\{\vec{F}_k, P_k\}$ $k=1, \dots, n$. Kraftsumman av ett kraftsystem definieras som $\vec{F} = \sum \vec{F}_k$

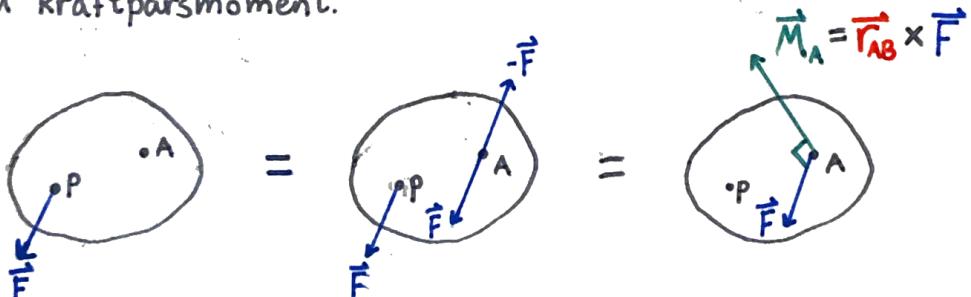
Def (kraftpar): Ett kraftpar är två krafter \vec{F}_1 och \vec{F}_2 med egenskapen $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, kraftsumman av ett kraftpar är noll. Kraftmomentet av kraftparet på en punkt O där angreppspunkten av \vec{F}_1 och \vec{F}_2 är A respektive B beräknas som:

$$\vec{M}_o = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{OB} \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_{OA} - \vec{r}_{OB}) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1$$



Att flytta en kraft:

Man får flytta en kraft till en ny punkt men man måste kompensera med ett kraftparsmoment.



Att flytta n krafter:

Följ ovan steg för alla krafter till en och samma punkt A och:

$$\{\vec{F} = \sum \vec{F}_k$$

$$\{\vec{M}_A = \sum \vec{r}_{AP_k} \times \vec{F}_k$$

$\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$ kallas för reduktionsresultatet.

Ett godtyckligt kraftsystem kan alltid reduceras till ett reduktionsresultat

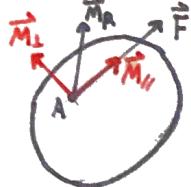
Sambandsformeln för kraftmomentet:

$$\vec{M}_A = \sum \vec{r}_{AP_k} \times \vec{F}_k, \quad \vec{M}_B = \sum \vec{r}_{BP_k} \times \vec{F}_k, \quad \vec{r}_{AP_k} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP_k}$$

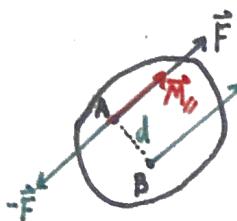
$$\therefore \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

Def(kraftskruv): Kraftskruven är enklaste möjliga reduktionsresultatet av ett kraftsystem med minsta möjliga kraftmomentet

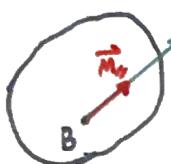
Att reducera ett reducerat kraftsystem till en kraftskruv



$$1) \text{Dela upp } \vec{M}_A = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp}$$



$$2) \text{Ersätt } \vec{M}_{\perp} \text{ med ett kraftpar } \{-\vec{F}, \vec{F}\} \text{ där } -\vec{F} \text{ angriper i punkten A och } \vec{F} \text{ angriper en punkt B så att } \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \vec{M}_{\perp}. d = \frac{M_L}{F}$$



$$3) \text{Addera krafterna } \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0} \text{ i A och flytta } \vec{M}_{\parallel} \text{ till B. Resultatet } \{\vec{F}, \vec{M}_{\parallel}\} \text{ är kraftskruven.}$$

Def(enkraftsresultant): Om $\vec{M}_{\parallel} = \vec{0}$, d.v.s. $\vec{M}_A \perp \vec{F}$, har vi endast kraftsumman \vec{F} kvar, vilken kallas för enkraftsresultant.

SATS: $\vec{F} \cdot \vec{M}_A = 0 \Leftrightarrow$ kraftsystemet har en resultant.

Exempel på system som alltid kan reduceras till en kraft (då $\vec{F} \neq \vec{0}$):

- Plana kraftsystem (alla krafter ligger på samma plan)



- Parallelkraftsystem (alla krafter är parallella)



- Sträkkraftsystem (alla kraffters verkningslinjer går genom samma punkt):



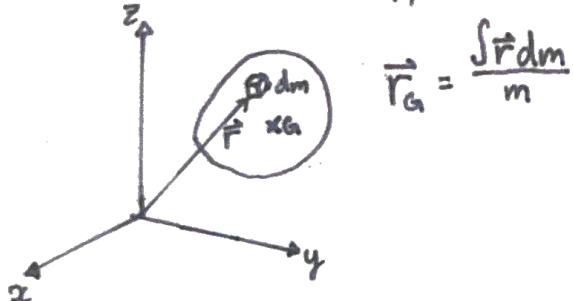
Sammanföllning av reduktionsresultat

- 1) Ett godtyckligt kraftsystem kan alltid reduceras till ett reduktionsresultat $\{\vec{F}, \vec{M}_o\}$
- 2) Reduktionsresultatet kan reduceras till en kraftskruv med minsta möjliga kraftmoment.
- 3) Om $\vec{F} \neq \vec{0}$ och $\vec{F} \cdot \vec{M}_o = 0 \Rightarrow$ kraftsystemet kan reduceras till en enkraftsresultant.
- 4) Om $\vec{F} = \vec{0}$ men $\vec{M}_o \neq \vec{0} \Rightarrow$ systemet kan reduceras till ett kraftpar.

Masscentrum för en samling partiklar med massa m_k och koordinatposition \vec{r}_k

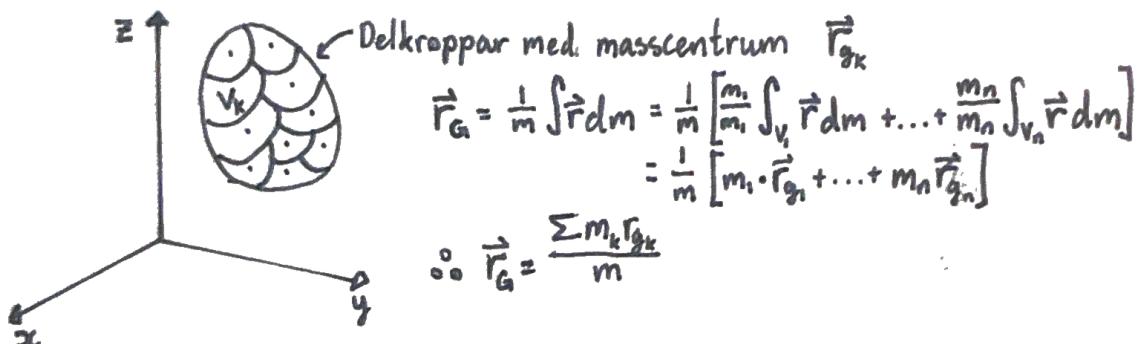
$$\text{Masscentrumet } \vec{r}_G = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{m} \text{ där } m = \sum m_k$$

Masscentrum för en stel kropp:



$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$$

Satsen för sammansatta kroppar:



Delkroppar med masscentrum \vec{r}_{Gk}

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm = \frac{1}{m} \left[\frac{m_1}{m} \int_{V_1} \vec{r} dm + \dots + \frac{m_n}{m} \int_{V_n} \vec{r} dm \right]$$

$$= \frac{1}{m} \left[m_1 \cdot \vec{r}_{G1} + \dots + m_n \vec{r}_{Gn} \right]$$

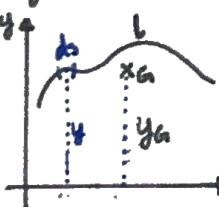
$$\therefore \vec{r}_G = \frac{\sum m_k \vec{r}_{Gk}}{m}$$

Algoritm för att beräkna masscentrum:

- 1) Inför ett lämpligt koordinatsystem.
- 2) Dela upp i små masselement med massa dm
 $dm = \rho dV$ ρ är densitet
- 3) Använd satsen för en sammansatt kropp
 $\vec{r}_G = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm$

Pappus regler:

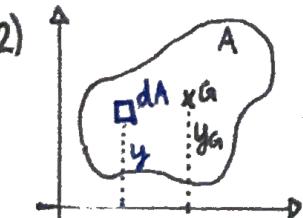
1)



A är arean av ytan av formen som skapas vid rotation av "träden" runt x-axeln $A = 2\pi \int y dx$

$$A = 2\pi y_a \cdot b$$

2)



V är volymen av kroppen som skapas vid rotation av ytan runt x-axeln $V = 2\pi \int y dx$

$$V = 2\pi y_a A$$

Masscentrum för vanliga kroppar

- Triangel med hörn (x_1, y_1) , (x_2, y_2) & (x_3, y_3)

$$\begin{cases} x_G = (x_1 + x_2 + x_3)/3 \\ y_G = (y_1 + y_2 + y_3)/3 \end{cases}$$
 - Halvcirkelbåge med ändar $(-R, 0)$ och $(R, 0)$ och höjdpunkt $(0, R)$

$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$
 - Halvcirkel med ändar $(-R, 0)$ och $(R, 0)$ och höjdpunkt $(0, R)$

$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$
 - Kon med radie R och höjd H vilandes på x och y axeln

$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{H}{4} \end{cases}$$
 - Halvklot med radie R vilandes på x och y axeln

$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{3R}{8} \end{cases}$$

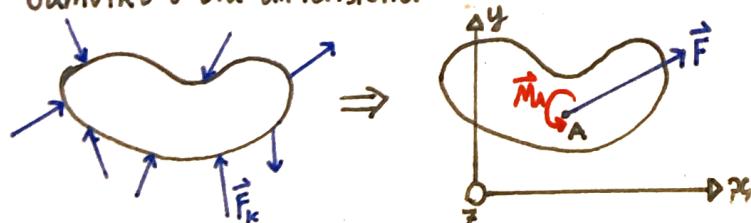
Def(stel kropp): En stel kropp är en massbelagd domän där avståndet mellan två godtyckliga punkter A och B är konstant.

Def (jämviktsläge): Ett jämviktsläge är ett läge som är konstant i tiden relativt en referensram.

SATS (jämviktsvilkor): Ett kraftsystem på stela kroppar är i jämviktsläge om det för varje delsystem gäller att summan av alla yttre krafter $\vec{F} = \vec{0}$ och $\vec{M}_A = \vec{0}$ för någon godtycklig punkt A.

Def(friläggning): Att frilägga ett system är processen att ersätta kontakten mellan kroppar i systemet med motsvarande krafter och kraftmoment.

Jämvikt i två dimensioner:



Jämviktsvilkor:

Alternativa jämviktsvilkor:

80

$$\begin{cases} F_{x_0} = 0 \\ F_y = 0 \\ M_{x_0} = 0 \end{cases}$$

(2)

(2) En kraft + Två moment

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{xz}=0 \\ M_{Az}=0 \\ M_{Bz}=0 \end{array} \right.$$

\vec{F}_{AB} får ej vara \parallel med \vec{F}

(3)

Tre moment

A, B och C får ej ligga på en rät linje.

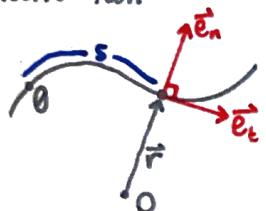
Def (ortsvektor): Partikelbanan, d.v.s. den kurva längs vilken en partikel rör sig i rummet kan beskrivas med hjälp av ortsvektorn $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. $\vec{r}(t)$ är partikelns kartesiska koordinater vid tidpunkten t .

Def (hastighet): Hastigheten av en partikel definieras som $\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$.

Def (acceleration): Accelerationen av en partikel definieras som $\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$. Accelerationen kan delas upp i två vektor komponenter \vec{a}_t som är parallell med \vec{v} och \vec{a}_n som är orthogonal mot \vec{v} .

Naturliga komponenter

Plant fall:



O är en bestämd punkt på partikelbanan och s är båglängden från O till partikeln. s är beroende av tid d.v.s. $s = s(t)$

Ortsvektorn är då beroende av s , $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

Vi har då hastigheten $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \vec{e}_t$ där $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_t$

$$\vec{e}_t = 1 \Rightarrow v = \dot{s} \text{ och } \vec{v} = \dot{s} \vec{e}_t = v \vec{e}_t$$

Från produktregeln får vi accelerationen: $\vec{a} = \ddot{s} \vec{e}_t + \dot{s}^2 \frac{d\vec{e}_t}{ds}$

$\frac{d\vec{e}_t}{ds}$ är en ny vektor med riktning \vec{e}_n och belopp $\frac{1}{\rho}$ där ρ är krökningen, d.v.s radien av cirkeln som bäst passar partikelbanan vid \vec{r} .



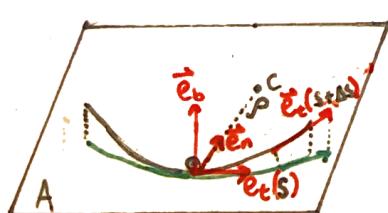
\vec{e}_n pekar på den cirkelns mittpunkt.

$$\begin{aligned} \text{Alltså } \vec{a} &= \ddot{s} \vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{e}_n \\ &= v \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_t = v \vec{e}_t \\ \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \end{cases}$$

- Tangentialaccelerationen \vec{a}_t beror på fartändringen v
- Normalaccelerationen \vec{a}_n beror på farten v och kurvans krökning ρ .

Allmänt 3D fall:



Det oskulerande planet A spänns upp av $\vec{e}_t(s)$ och $\vec{e}_t(s+\Delta s)$. \vec{e}_n är parallell med A.

$$\begin{cases} \vec{a} = v \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \\ a_t = v \\ a_n = v^2/\rho \\ a_b = 0 \\ \vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n \end{cases}$$

Beräkning av krökningsradien ρ :

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{e}_t; \quad \vec{a} = \ddot{s} \vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{e}_n$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \frac{\dot{s}^3}{\rho} \vec{e}_b \Rightarrow \rho = \frac{|\dot{s}|}{|\vec{r} \times \vec{r}'|}$$

Om man istället för t betraktar partikelbanan med hjälp av en annan parameter u , $\vec{r} = \vec{r}(s(u))$ kan det ovanstående uttrycket skrivas som:

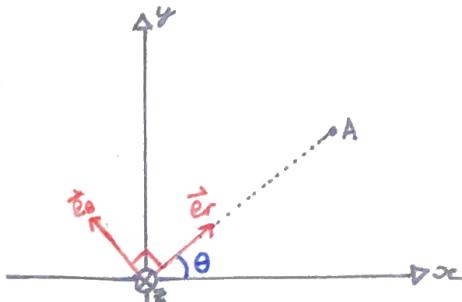
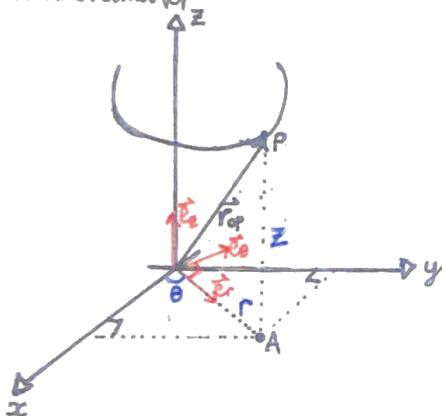
$$\rho = \frac{|\dot{s}|}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}$$

Om partikelbanan beskrivs som $y = y(x)$; $\vec{r} = (x, y(x), 0)$, $\vec{r}' = (1, y'(x), 0)$, $\vec{r}'' = (0, y''(x), 0)$ och $\vec{r}' \times \vec{r}'' = (0, 0, y''(x))$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow s' = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\therefore \rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Cylinderkoordinater



$$\begin{cases} \vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \vec{e}_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Ortsvektorn: $\vec{r}_{op} = r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{e}_z$

Hastigheten: $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$

$$v_r = \dot{r}; v_\theta = r \dot{\theta}; v_z = \dot{z}$$

Accelerationen: $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2; a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}; a_z = \ddot{z}$$

Den fysikaliska innebörden av accelerationstermerna:

Radiella komponenten: $\vec{a}_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r$

a) $\ddot{r} = v_r$ - Beror på ändringen av den radiella hastigheten.

b) $-r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v_\theta \vec{e}_\theta$ - Beror på ändringen av den transversala hastighetens riktning.

Transversala komponenten: $(r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta$

a) $r \ddot{\theta}$ - Beror på ändringen av vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ (vinkelacceleration)

b) $\dot{r} \dot{\theta}$ - Beror på ändringen av v_θ med avståndet r

c) $r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \dot{r} \vec{e}_r = v_r \vec{e}_r$ - Beror på ändringen av den radiella hastighetens riktning.

Vertikala komponenten: $\vec{a}_z = \ddot{z} \vec{e}_z$

a) $\ddot{z} = \dot{v}_z$ - Beror endast på ändringen av den vertikala komponenten av hastigheten

Newton's lagar:

Newton's första lag (tröghetslagen): Då massan m är konstant för en partikel med hastighet \vec{v} har vi $\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$

Def(rörelsemängd): Rörelsemängden \vec{p} för en partikel är $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

Newton's andra lag (rörelsemängslagen): Ändringen per tid av partikelnas rörelsemängd är lika med summan av de krafter som verkar på partikeln och sker i den riktning längs vilken denna kraftsumma verkar. Alltså $\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}}$

Dessutom $\vec{p} = m\vec{v} + m\vec{v} = m\vec{v} + m\vec{a}$. Om m är konstant har vi: $\boxed{\vec{p} = m\vec{a} = \vec{F}}$

Newton's tredje lag (lagen om verkan och motverkan): För varje kraftverkan från en kropp A på kroppen B finns en lika stor och motriktad reaktionskraft från kroppen B på kroppen A.

Def(kinetisk energi): Den kinetiska energin av en partikel beräknas som $T = \frac{1}{2}mv^2$

Def(arbete): Arbetet en kraft utför på en partikel som reser i en bana från \vec{r}_1 till \vec{r}_2 beräknas som:

$$U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

SATS (Lagen om den kinetiska energin): $\boxed{U_{1-2} = T_2 - T_1}$

Def(effekt): Effekten P definieras som arbete per tidsenhet; $P = \frac{dU}{dt}$ och $U_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} P dt$.

Def(konservativ): Kraften \vec{F} är konservativ om arbetsintegralen $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$ är oberoende av integrationsvägen.

SATS: Om \vec{F} är konservativ har vi $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$

Def(potentiell energi): För ett konservativt kraftfält \vec{F} är den potentiella energin V av en partikel i punkten \vec{r} definierad som $\boxed{V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}}$ där \vec{r}_0 är en fast punkt.

SATS (Potentiell energi för tyngdkrafen): Låt $\vec{F} = -mg\hat{e}_z$, $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ och $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ där $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Vi har då

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} -mg\hat{e}_z \cdot (dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z) = \int_{z_0}^z mg dz = mgz - mgz_0 = mgz + C. \quad \boxed{V = mgz + C}$$

SATS (Potentiell energi för allmänna gravitationskrafen): Låt $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{e}_r$ och $\vec{r} = r\hat{e}_r$ alltså $d\vec{r} = dr\hat{e}_r + r d\hat{e}_r$ där $d\hat{e}_r \perp \hat{e}_r$. Vi har då

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_0}^r G \frac{mM}{r^2} dr = - \frac{GmM}{r} + \frac{GmM}{r_0} = - \frac{GmM}{r} + C$$

$$\{ \text{Normera: } V \rightarrow 0 \text{ då } r \rightarrow \infty \Rightarrow C = 0 \} \quad \boxed{V = - \frac{GmM}{r}}.$$

SATS (Potentiell energi nära jordytan): Låt z vara en partikel med massa m s avstånd från jordytan och R vara Jordens radie. Vi har $GM = gR^2$. nära Jordens yta. Från allmänna gravitationskraftens potentiella energi har vi då att för relativt små z , alltså $\frac{z}{R} \ll 0$, är potentiella energin

$$V = mgz - mgR$$

SATS (Potentiell energi för fjäderkraften): Låt $\vec{F} = -k(r-l_0)\hat{e}_r$, där l_0 är fjäderns utsprida längd, och $\vec{r} = r\hat{e}_r$, alltså $d\vec{r} = dr\hat{e}_r + rd\hat{e}_r$ där $d\hat{e}_r \perp \hat{e}_r$. Vi har då att den potentiella energin för fjäder kraften beräknas som

$$V(\vec{r}) = - \int_{l_0}^r \vec{F} d\vec{r} = \int_{l_0}^r k(r-l_0) dr = \frac{1}{2} k (r-l_0)^2 = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$$

Alltså $V = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$

SATS (Mekaniska energilagen): Låt \vec{F} vara konservativt. Vi har då de två nedanstående likheterna:

- $U_{i-2} = V_i - V_2$

- $T_i + V_i = T_2 + V_2 = E$ där E är den mekaniska energin.

SATS (Kosmiska hastigheter I och II): De kosmiska hastigheterna v_I och v_{II} är hastigheten för omlopps bana nära jorden respektive flykhastigheten från jorden och

- $v_I = \sqrt{gR} \approx 8 \text{ km/s}$
- $v_{II} = \sqrt{2gR} \approx 11,3 \text{ km/s}$

Och de har förhållandet

- $v_{II} = \sqrt{2} v_I$

Def (rörelsemängdsmoment): Rörelsemängdsmomentet i origo \vec{H}_o för ett system med n partiklar med massa m_j , ortsvektor \vec{r}_j och hastighet \vec{v}_j för $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ definieras som

$$\vec{H}_o = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j$$

SATS (Momentekvationen): Låt ett system ha rörelsemängdsmomentet \vec{H}_o och kraftmomentet \vec{M}_o . Vi har då

$$\dot{\vec{H}}_o = \vec{M}_o$$

Def (kraftimpuls): Integralen $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$ kallas kraftimpulsen i intervallet (t_0, t_1)

Def (momentimpuls): Integralen $\int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_o dt$ kallas momentimpulsen i intervallet (t_0, t_1)

SATS (Kraftimpulslagen): Låt $\Delta \vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$. Vi har då

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$$

SATS (Momentimpulslagen): Låt $\Delta \vec{H}_o = \vec{H}_o(t_1) - \vec{H}_o(t_0)$. Vi har då

$$\Delta \vec{H}_o = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_o dt$$

SATS: "Vanliga" krafter, som till exempel tyngdkraft eller fjäderkraft, är betydligt mindre än stötkrafterna och kan därför försummas vid behandling av stötförlopp.

SATS (Stötpulslagen): Betrakta en stöt mellan två partiklar med ingående hastighet \vec{v}_1 , respektive \vec{v}_2 och slutgiltig hastighet \vec{v}'_1 och \vec{v}'_2 . Låt \vec{S}_{12} vara stötkraften på partikel 1 från partikel 2. Impulslagen på partikel 1 ger:

$$\Delta \vec{p}_1 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau (\vec{S}_{12} + \vec{F}) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \vec{S}_{12} dt = \vec{I}_{12}$$

Alltså $\boxed{\Delta \vec{p}_1 = \vec{I}_{12}}$

Följdsats (Stötpulslagen för hela systemet): Låt $\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2$. Newtons tredje lag ger att $\vec{S}_{12} + \vec{S}_{21} = 0$. Detta ger oss:

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau (\vec{S}_{12} + \vec{S}_{21}) dt = \int_0^\tau 0 dt = 0$$

Alltså:

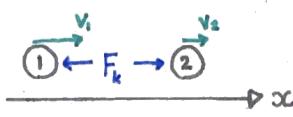
$$\Delta \vec{p} = 0 \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad \text{eller} \quad \boxed{\vec{p} = \vec{p}'}$$

Studstalet e

En stöt kan delas in i två faser:

- Kompressionsfas då partiklarna deformeras av en kraft \vec{F}_k
- Expansionsfas då partiklarna återgår till sin ursprungliga fas och trycks ifrån varandra med en kraft \vec{F}_e

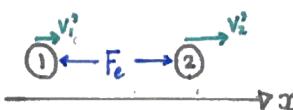
Kompressionsfas:
 $0 \leq t < t_0$



Mellanstadie:
 $t = t_0$



Expansionsfas:
 $t_0 < t \leq t_1$



Def(studstal): Studstalet e definieras som

Användning av impulslagen för partikel 1 och partikel 2 ger

$$e = \frac{v'_{1x} - v_{1x}}{v_{0x} - v_{1x}} \quad (1)$$

respektive

$$e = \frac{v'_{2x} - v_{2x}}{v_{0x} - v_{2x}} \quad (2)$$

(1) och (2) ger tillsammans

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_e dt}{\int_{t_0}^{t_1} F_k dt}$$

$$\boxed{e = \frac{v'_{2x} - v_{2x}}{v_{0x} - v_{2x}}}$$

Def(centralkraft, kraftcentrum): \vec{F} kallas för en centralkraft om dess verkningslinje går genom en och samma fixa punkt vilket kallas för kraftcentrum.

SATS: Vid centralrörelse är partikelbanan plan. [Bevis på sidan 327, uppl. 2]

Def(sektorhastighet): Sektorhastigheten A syftar på arean per tid som en partikels ortsvektor täcker och beräknas:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|$$

SATS (Keplers andra lag): Vid rörelse under inverkan av en centralkraft är sektorhastigheten konstant. Det vill säga med $h = |\vec{r} \times \vec{v}| (= r^2 \dot{\theta}$ i cylinderkoord.) är h konstant och

$$\dot{A} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{konst.}$$

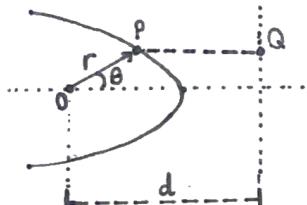
[Bevis på sidan 328, uppl. 2]

SATS (Binets formel): Låt $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$. Vi har då

[Bevis på sidan 330, uppl. 2]

$$a_r = -h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{du^2} + u \right)$$

Def(Konisk sektion, direktris, brännpunkt, excentricitet):



En konisk sektion definieras som en kurva där kvoten av avståndet från en godtycklig punkt P på kurvan till en fix punkt och en fix linje är konstant,

$$e = \frac{OP}{PQ}$$

Linjen kallas för direktris och punkten O för brännpunkten eller fokus. Själva kvoten e kallas för kurvans excentricitet.

Vi får $e = \frac{r}{d - r \cos \theta}$

Och kurvan definieras av funktionen

$$r(\theta) = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

Kurvan antar:

- en ellips då $0 < e < 1$ (cirkel då $e=0$)
- en parabel då $e=1$
- en hyperbel då $e > 1$

SATS (Keplers första lag): Planetbanorna är ellipser med med solen i brännpunkten. Planetbanorna kan beskrivas som:

$$r(\theta) = \frac{h^2 / GM}{1 + \frac{Ch^2}{GM} \cos \theta}$$

Där C är en integrationskonstant. Alltså $e = \frac{Ch^2}{GM}$ och $d = \frac{1}{C}$

[Bevis på sidan 331-333, uppl. 2]

SATS (Sambandet mellan energin E och banans form): Vid centralrörelse har vi $E = k^2(e^2 - 1)$ där k är en konstant.

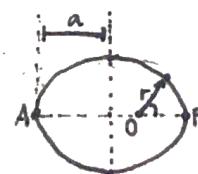
Från detta får vi:

$E > 0 \Rightarrow e > 1 \Rightarrow$	Hyperbolisk bana
$E = 0 \Rightarrow e = 1 \Rightarrow$	Parabolisk bana
$E < 0 \Rightarrow e < 1 \Rightarrow$	Elliptisk bana

SATS (Avstånd på en ellips): Vi har att avstånden:

$$OP = (1-e)a$$

$$OA = a + ae = (1+e)a$$



SATS (Ellipsens ekvation): Ellipsens ekvation kan skrivas som
[Bevis på sidan 334, uppl. 2]

$$r = a \frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}$$

SATS (Keplers tredje lag): Kvadraten på planetens omloppstid T är proportionell mot kuben på storaxelns längd, d.v.s. $T^2 \propto a^3$

Mer specifikt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^{3/2}}{GM}}$$

[Bevis på sidan 334-335, uppl. 2]

SATS (Energin på en elliptisk bana): Energin på en elliptisk bana kan skrivas som

$$E = -G \frac{mM}{2a}$$

[Bevis på sidan 339, uppl. 2]

SATS (Hastigheten på en elliptisk bana): Hastigheten på en elliptisk bana kan skrivas som

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}$$

[Bevis på sidan 339, uppl. 2]

Harmonisk Oscillator

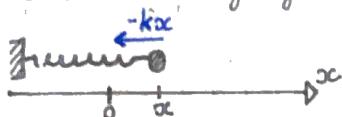
Def (harmonisk oscillator): En **harmonisk oscillator** är ett oscillerande system som inte dämpas, alltså en fri, odämpad svängning.

Def (svängningsekvation, vinkelfrekvens): En harmonisk oscillators **svängningsekvation** är en omformulering av kraftekvationen i oscillationens riktning x , i formen $\ddot{x} + \omega_n^2 x = d$ där d är en konstant.

I det enklaste fallet av en partikel på en lätta fjäder på en friktionsfri yta parallell med marken får vi kraftekvationen

$$\rightarrow: m\ddot{x} = -kx$$

Och då är svängningsekvationen: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$



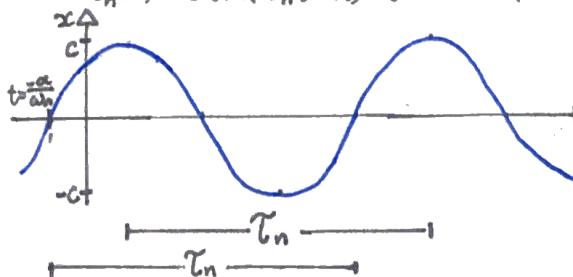
I detta fall är $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ω_n kallas för **vinkelfrekvensen**.

SATS: Den allmänna homogena lösningen till svängningsekvationen är:

$$x_h(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad \text{där } A, B \in \mathbb{R}$$

eller

$$x_h(t) = C \sin(\omega_n t + \alpha) \quad \text{där } C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{och } \tan \alpha = \frac{B}{A}$$

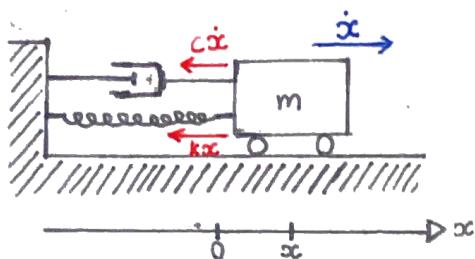


C kallas **amplituden** och α kallas **fasvinkel**

Def: Avståndet (tiden) T_n kallas för **perioden** och beräknas som

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Fri Dämpad Svängning



Def(fri dämpad svängning): En fri dämpad svängning är en svängning som dämpas av en kraft $c\dot{x}$ som beror på svängningens hastighet.
 c kallas för dämpningskoefficienten.

Svängnings ekvationen och karaktäristiska polynomet

Kraftekvationen ger svängnings ekvationen: $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Vi inför dämpningskvoten ζ (zeta) så att $2\zeta\omega_n = \frac{c}{m}$

Vi har då svängningsekvationen:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

Och följaktligen den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$

Vilket har rötterna $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

Beroende på ζ delas svängningens rörelse in i tre fall:

Fall 1: $\zeta > 1$; stark dämpning.

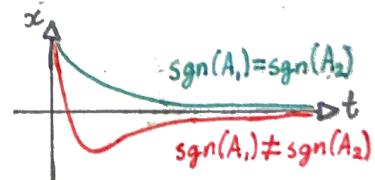
Vi har två reella rötter $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

Som ger

$$x(t) = A_1 e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + A_2 e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

Eller:

$$x(t) = e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t} (A_1 + A_2 e^{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t})$$

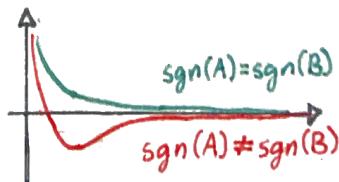


Fall 2: $\zeta = 1$; kritisk dämpning

Vi har en dubbelrot $\lambda_{1,2} = -\omega_n$

Som ger

$$x(t) = (At + B) e^{-\omega_n t}$$



Notera att vid både stark dämpning och kritisk dämpning är $x(t) = 0$ för max ett värde av t. Alltså är dessa fall inte periodiska rörelser.

SATS: Fallet kritisk dämpning relaxerar till jämviktsläge $x=0$ snabbare än stark och svag dämpning.

Fall 3: $\zeta < 1$; svag dämpning

Vi har två komplexa rötter $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Vi inför vinkelvinklens vid svag dämpning:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Vi får då $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$

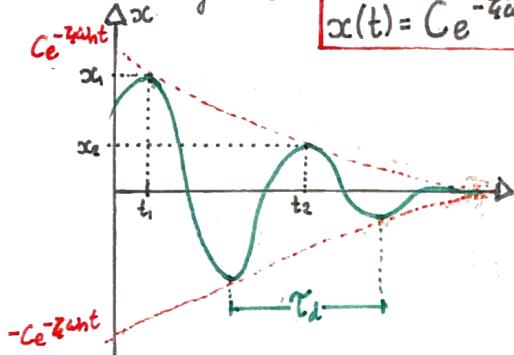
Som i sin tur ger

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t)$$

Vi läter $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
 $\tan \alpha = \frac{A}{B}$

Vilket ger oss:

$$x(t) = C e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \alpha)$$



$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

SATS: Perioden T_d beror på dämpningen ζ .

Def(logaritmiskt dekrement): Låt $t_2 = t_1 + T_d$, $x_1 = x(t_1)$ och $x_2 = x(t_2)$.

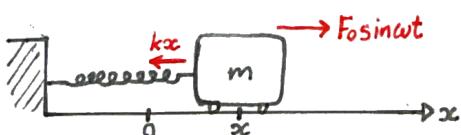
Det logaritmiska dekrementet δ är den naturliga logaritmen av kvoten mellan x_1 och x_2 . Alltså

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

SATS: Vi har förhållandet $\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$ [Bevis på sidan 362, uppl. 2]

Påvingad Odämpad Svängning

Def(påvingad svängning): Ett system som utför svängningar under inverkan av en periodisk påvingad kraft sätter sig ha en påvingad svängning.



Den periodiska kraften har amplituden F_0 och vinkelvinklens ω .

Kraftekvation $\rightarrow: m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin \omega t$

Svängningsekvation: $\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

Den generella lösningen $x(t)$ beräknas som $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
 $x_h(t)$ har tidigare beräknats.

$x_p(t)$ fås av ansatsen $x_p(t) = X \sin \omega t$ där amplituden X är:

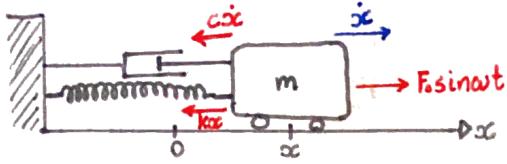
$$X = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Def(förstoringsfaktor, resonans, resonanskatastrof): Förstorings faktorn M definieras som

$$M = \frac{X}{(X)\omega_0} ; \text{ i fullt ovan har vi } M = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Då $\omega \rightarrow \omega_n$ ökar X obegränsat, detta kallas resonans. Då $\omega = \omega_n$ uppstår en resonanskatastrof. Med ansats $x_p(t) = X t \cos \omega t$ får vi då $X = \frac{F_0}{2m\omega}$

Påvingad Dämpad Svängning



$$\text{Kraftekvation} \rightarrow: m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F_0 \sin \omega t$$

$$\text{Svängningsekvation} \rightarrow: \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = F_0 \sin \omega t \quad (1)$$

Def(transient): Den allmänna lösningen $x(t)$ till (1) beräknas som $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

För alla $\zeta > 0$ vet vi att $x_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, därför kallas $x_h(t)$ för den **transienta**, eller försinnande, delen. $x_p(t)$ kommer däremot att representera den beständende delen.

$x_p(t)$ beräknas med ansatsen $x_p(t) = X \sin(\omega t - \alpha)$.

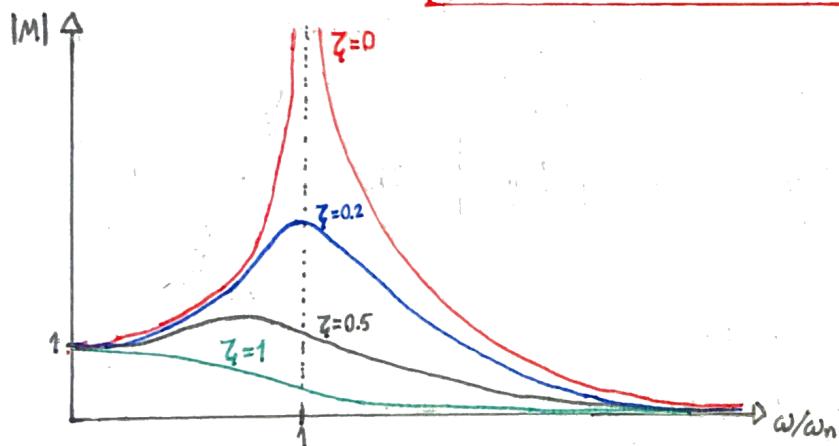
Med derivering och insättning får vi:

$$\tan \alpha = \frac{2\zeta \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

$$X = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + 4\zeta^2 (\omega / \omega_n)^2}}$$

Vi får förstoringsfaktorn:

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + 4\zeta^2 (\omega / \omega_n)^2}}$$



OBS: För att undvika stora amplitudér kan man undvika resonans eller öka dämpningen.