

# Flervariabelsanalys: Definitioner

arbete	17	omgivning	3
area	13	ortogonal	3
avskärning	14	parallel	3
bägvis sammanhangande	6	parameterisering	9
begränsad	4	partiell derivata	6
cirkulation	16	polära koordinater	5
divergens	16	positiv sida	17
derivata med avseende på riktning	8	positivt definit	9
differentierbar	7	positivt orienterad	16
dubbelintegral		potential	16
generell	12	potential fält	16
trappfunktion	12	rand	
enhetsnormal	17	mängd	4
enkel	15	yta	18
enkelt sammanhangande	17	randpunkt	4
exakt	17	Riemann integrerbar	12
flöde		riktningsvektor	9
kurva	16	rotation	18
yta	17	samma riktning	3
funktionaldeterminant	10	semi definit	9
funktionalmatrix	10	sfäriska koordinater	5
gradient	8	skalarprodukt	3
gränsvärde	6	sluten	15
indefinit	9	stationär punkt	9
inne punkt	3	tangentplanet	10
integrerbar	13	tangentvektor	9
klass $C^k$	8	Taylorpolynom i en stationär punkt	9
kompakt	4	trappfunktion	12
komplement	3	vektorriktat areaelement	17
konservativt fält	16	vinkel	3
kontinuerlig	6	virvelfri	18
konvergent	14	yta	5,10
kurva	5,9	yttre punkt	3
kurvintegral	15	öppen mängd	4
kvadrerbar	13	öppet klot	3
längd			
vektor	3		
kurva	10		
likformigt kontinuerlig	6		
linjärisering	10		
lokal extempunkt	9		
lokalt maximum	9		
lokalt minimum	9		
nabla	8		
negativt definit	9		
nollmängd	13		
norm	3		
oberoende av vägen	16		

# Flervariabelsanalys: Satser

1.1: Cauchy-Schwartz olikhet	3	6.6	13
1.2: Triangelolikheten	3	6.8	14
1. $\alpha$ : Omvända Triangelolikheten	3	6.3	14
1.3	3	6.8	14
1. $\beta$	5	6.3	14
1. $\gamma$	6	6.7	14
1. $\delta$	6	7.0	15
1. $\epsilon$	6	7.3	15
1.4	6	7.7	15
1.5	6	8.0	15
2. $\alpha$	7	9.1: Greens Formel	16
2.1	7	9.0	16
2.2	7	9.2	16
2. $\beta$	7	9.3	17
2.3	7	9.4	17
2.4: Kedjeregeln	7	9.5	17
2. $\gamma$ : Allmänna Kedjeregeln	8	9.3	17
2.5	8	10.1: Gauss' Sats / Divergenssatsen	17
2.6	8	10.0	17
2.7	8	10.3	18
2.8	8	10.2: Stokes' Sats	18
2.9	8	10.8	18
2.10	8	10.3	18
2.11	9		
2.12	9		
3. $\alpha$	10	Annat:	
3. $\beta$	10	Skissa ytor och kurvor	4,5
3. $\gamma$ : Kedjeregeln av Funktionalmatriser	10	Beteckning av partiella derivator	7
3.1	10	Lemma 6.1	13
3.2: Inversa Funktionssatsen	10	Lemma 6.2	13
3.3: Implicita Funktionssatsen	11	Lemma 6.3	13
3. $\delta$	11		
3. $\epsilon$	11		
4. $\alpha$ : Optimering på Komakta Områden	11		
4. $\beta$ : Optimering på icke-Komakta Områden	11		
4. $\gamma$ : Minstakvaratmetoden	12		
4.1	12		
5.1	14		
5.2	15		
5.3	15		
6. $\alpha$	12		
6.1	12		
6.2	12		
6.3	13		
6.4	13		
6. $\beta$ : Medelvärdessatsen för Integraler	13		
6.5	13		

# Flervariabelsanalys

Def (skalärprodukt): Låt  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  och  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$ .  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  kallas **skalärprodukten**. Följande räkneregler gäller:

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
- $(c\vec{x}) \cdot \vec{y} = c(\vec{x} \cdot \vec{y})$
- $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 ; \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Def (parallel, samma riktning): Låt  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ .  $\vec{x}$  och  $\vec{y}$  är parallella om  $\vec{x} = \lambda \vec{y}$  för något  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Vi säger då att  $\vec{x}$  och  $\vec{y}$  har samma riktning.  $\vec{x} \parallel \vec{y}$ .

Def (norm, längd): Låt  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Normen eller längden av  $\vec{x}$  skrivs som  $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Def (ortogonal): Låt  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ .  $\vec{x}$  och  $\vec{y}$  är ortogonala om  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Def (vinkel): Låt  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  och  $\theta = \arccos(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}) \in [0, \pi]$ , då är  $\theta$  vinkeln mellan  $\vec{x}$  och  $\vec{y}$ .

SATS 1.1 (Cauchy-Schwartz olikhet): I  $\mathbb{R}^n$  gäller  $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$  med likhet om  $\vec{x}$  och  $\vec{y}$  är parallella.

SATS 1.2 (Triangelolikheten): I  $\mathbb{R}^n$  gäller  $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$  med likhet då  $\vec{x} = \lambda \vec{y} : \lambda \geq 0$

SATS 1.3 (Omvända Triangelolikheten): I  $\mathbb{R}^n$  gäller  $||\vec{x}| - |\vec{y}|| \leq |\vec{x} \pm \vec{y}|$

SATS 1.4: För varje  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  gäller  $|x_k| \leq |\vec{x}| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \quad \forall k=1, \dots, n$

Def (öppet klot): Mängden  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$  är ett öppet klot med centrum i  $\vec{a}$

Def (omgivning): En mängd  $U \subset \mathbb{R}^n$  är en **omgivning** av  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  om  $U$  innehåller något öppet klot med centrum i  $\vec{a}$

Def (komplement): Komplementet till en mängd  $M \subset \mathbb{R}^n$ , betecknat  $C_M$ , är  $C_M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \notin M\}$

Def (inre punkt): Låt  $M$  vara en mängd i  $\mathbb{R}^n$ .  $\vec{a}$  är en **inre punkt** till  $M$  om det finns ett öppet klot kring  $\vec{a}$  som ligger i  $M$ .



Def (yttre punkt): Låt  $M$  vara en mängd i  $\mathbb{R}^n$ .  $\vec{a}$  är en **yttre punkt** till  $M$  om det finns ett öppet klot kring  $\vec{a}$  som ligger i  $C_M$



Def (randpunkt): Låt  $M$  vara en mängd i  $\mathbb{R}^n$ .  $\vec{a}$  är en **randpunkt** till  $M$  om varje öppet klot kring  $\vec{a}$  skär både  $M$  och  $C\setminus M$



Def (rand): Låt  $M$  vara en mängd i  $\mathbb{R}^n$ . Mängden av randpunkter till  $M$  kallas för **randen** till  $M$ , betecknat  $\partial M$ .

Def (öppen mängd): En mängd  $M$  är **öppen** om  $\partial M \subset M$

Def (sluten mängd): En mängd  $M$  är **sluten** om  $\partial M \subset M$

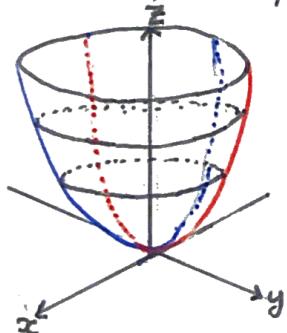
Def' (öppen mängd): En mängd  $M$  är **öppen** om det för varje  $\vec{x} \in M$  finns ett öppet klot kring  $\vec{x}$  som ligger i  $M$

Def (begränsad): En mängd  $M \subset \mathbb{R}^n$  är **begränsad** om det finns ett  $C > 0$  så att  $|\vec{x}| < C \quad \forall \vec{x} \in M$

Def (kompakt): En mängd  $M \subset \mathbb{R}^n$  är **kompakt** om  $M$  är både sluten och begränsad.

Att skissa  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

- 1) Bestäm  $(x, y)$  för  $f(x, y) = 0$
- 2) Bestäm  $(x, y)$  för  $f(x, y) = C$  för några  $C \in \mathbb{R}$
- 3) Rita ett snitt av planet  $x=0$
- 4) Rita ett snitt av planet  $y=0$

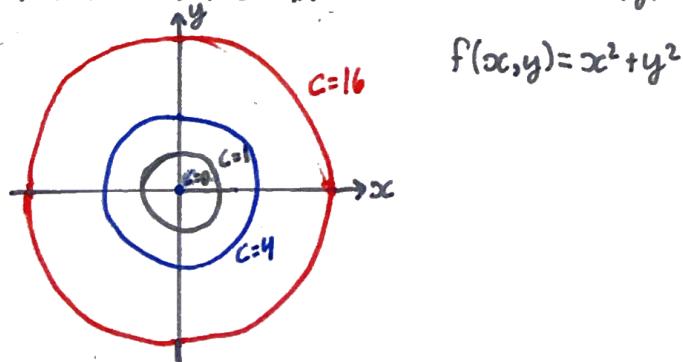


$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Def (Elliptisk paraboloid): Grafer av denna form kallas för **elliptiska paraboloider**.

Att skissa  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  med nivåkurvor:

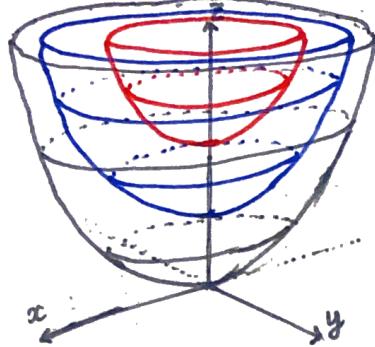
- För ett antal  $C \in \mathbb{R}$  skissa kurvor  $f(x, y) = C$



$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Att skissa  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  med nivå ytor

- För ett antal  $C \in \mathbb{R}$  skissa  $f(x, y, z) = C$  i  $\mathbb{R}^3$



$$\begin{aligned} C=0 \\ C=1 \\ C=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= z - x^2 - y^2 \\ f(x, y, z) &= C \\ \Rightarrow z &= x^2 + y^2 + C \end{aligned}$$

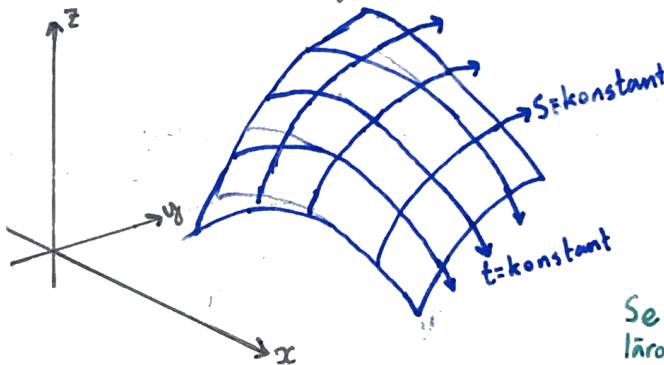
SATS 1.β: Låt  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  där  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $\vec{f}(\vec{x})$  kan delas upp i  $p$  stycken funktioner  $f_1, \dots, f_p: D \rightarrow \mathbb{R}$  så att  $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x}))$

Def(kurva): En kurva är en funktion  $\vec{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$

Def(yta): En yta är en funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $p > 2$ . I  $\mathbb{R}^3$  skrivs en yta  $f$  som  $f(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$  där  $x, y, z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Man kan tänka sig att ytan är uppbyggd av två slägor av kurvor, nämligen parameterkurvorna

$$\begin{aligned} s &\mapsto (x(s, t_0), y(s, t_0), z(s, t_0)) \\ \text{och} \quad t &\mapsto (x(s_0, t), y(s_0, t), z(s_0, t)) \end{aligned}$$

för  $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ . Vanligtvis ritas några sådana kurvor när man skissar ytan

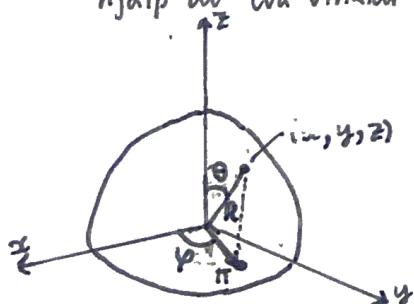


Se sid 29 & 30 i läroboken för bilder av ytor

Def(polära koordinater): Låt  $(x, y)$  vara de euklidiska koordinaterna för en punkt  $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ . Man kan skriva om  $\vec{a}$  till polära koordinater  $(r, \theta)$  där  $r = |\vec{a}|$  och  $\theta$  är vinkeln mellan  $\vec{a}$  och  $x$ -axeln.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Def(sfäriska koordinater): Man kan parameterisera en sfär av radie  $R > 0$  med hjälp av två vinkelar  $\theta$  och  $\varphi$



$$\begin{aligned} \pi &= R \cdot \sin \theta \\ x &= \pi \cdot \cos \varphi \\ y &= \pi \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z &= R \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad \begin{cases} x = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = R \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Punkter i  $\mathbb{R}^3$  kan skrivas som sfäriska koordinater  $(R, \theta, \varphi)$

5

Def (gränsvärde): Låt  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  där  $D \subset \mathbb{R}^n$  och låt  $\vec{a}$  vara en inre punkt eller randpunkt till  $D$ .  $f$  har gränsvärde  $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$  då  $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$  om  $\forall \epsilon > 0$   $\exists \delta > 0$  sådan att för alla  $\vec{x} \in D$  som uppfyller  $0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$  har vi att  $|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \epsilon$

SATS 1.7: Låt  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_p)$ ,  $\vec{x} \in D_f$ ,  $\vec{a} \in D \cup \partial D$  och  $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\cdot |f_j(\vec{x}) - b_j| \leq |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| \leq |f_1(\vec{x}) - b_1 + f_2(\vec{x}) - b_2 + \dots + f_p(\vec{x}) - b_p| \text{ för } \forall j = 1, \dots, p$$

$$\cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j \quad \forall j = 1, \dots, p$$

SATS 1.8: Följande regler gäller

- För  $\vec{f}: D \rightarrow E$  och  $\vec{g}: E \rightarrow \mathbb{R}^p$  där  $\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow b$  då  $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$  och  $\vec{g}(\vec{y}) \rightarrow c$  då  $\vec{y} \rightarrow \vec{b}$   
 $\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$   
 $\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) \rightarrow \vec{c}$  då  $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$
- För  $\vec{f}, \vec{g}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  där  $D \subset \mathbb{R}^n$  och gränsvärden för  $\vec{f}$  och  $\vec{g}$  existerar då  $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$   
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$   
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$   
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{\vec{f}(\vec{x})}{\vec{g}(\vec{x})} = \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})} \quad \text{om } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \neq \vec{0}$
- Om  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{h}(\vec{x})$  och  $|\vec{f}(\vec{x})| \leq |\vec{g}(\vec{x})| \leq |\vec{h}(\vec{x})|$  för alla  $\vec{x} \in D$  som uppfyller  $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$  för något  $\delta > 0$  har vi att  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{h}(\vec{x})$

Def (gränsvärde): Vi säger att  $\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{b}$  då  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  om  $\forall \epsilon > 0$  finns  $w > 0$  så att  $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{x}| > w \\ \vec{x} \in D_f \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \epsilon$

Def (kontinuerlig): Låt  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  där  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Vi säger att  $\vec{f}$  är kontinuerlig i  $\vec{a} \in D$  om  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$

SATS 1.6: Elementära funktioner (polynom,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $a^x$ ,  $\log x$ ) och deras kompositioner/produkter är kontinuerliga.

SATS 1.4: Om  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  där  $D \subset \mathbb{R}^n$  är kontinuerlig och  $D$  är kompakt så antar  $\vec{f}$  sitt sätt största och minsta värde på  $D$ .

Def (likformigt kontinuerlig): Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  där  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  är likformigt kontinuerlig på  $D$  om  $\forall \epsilon > 0$  så finns ett  $\delta > 0$  så att för alla  $\vec{x}, \vec{y} \in D$  som uppfyller  $0 < |\vec{x} - \vec{y}| < \delta$  gäller  $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \epsilon$

SATS 1.5: Om  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ , är kontinuerlig och  $D$  är kompakt så är  $f$  likformigt kontinuerlig på  $D$

Def (bägvis sammanhängande):  $D \subset \mathbb{R}^n$  är bägvis sammanhängande om  $\forall a, b \in D$  finns en kurva  $t \mapsto \vec{x}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , så att  $\vec{x}(0) = a$ ,  $\vec{x}(1) = b$  och  $\vec{x}(t) \in D$  för  $\forall t \in [0, 1]$

Def (partiell derivata): Låt  $\vec{a}$  vara en inre punkt i definitionsmängden  $D \subset \mathbb{R}^n$  till funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} - h\vec{e}_j) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

existerar så säger vi att  $f$  är partiellt deriverbar med avseende på  $x_j$  i punkten  $\vec{a}$ . Gränsvärdet kallas den partiella derivatan med avseende på  $x_j$  av  $f$  i punkten  $\vec{a}$ .

### Beteckning för partiella derivator

- Partiella derivatan av  $f$  med avseende på  $x$  i  $(a, b)$ :  
 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}, \frac{\partial}{\partial x}f(a,b), f'_x(a,b)$  eller  $D_x f(a,b) / \partial_x f(a,b)$
- Partiella derivatan av  $f$  med avseende på  $x$   
 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}f, f'_x$  eller  $D_x f / \partial_x f$
- Partiella derivatan av  $f$  med avseende på  $y$  i  $(a, b)$   
 $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}, \frac{\partial}{\partial y}f(a,b), f'_y(a,b)$  eller  $D_y f(a,b) / \partial_y f(a,b)$
- Partiella derivatan av  $f$  med avseende på  $y$   
 $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}f, f'_y$  eller  $D_y f / \partial_y f$

SATS 2.α: Antag  $f(x,y)$  är deriverbar på hela  $\mathbb{R}^2$  och  $\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ . Då har vi att  $f(x,y)=\varphi(y)$ . Detta även för en funktion  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  som är deriverbar på hela  $\mathbb{R}^n$  och  $\frac{\partial g}{\partial x_i}=0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n$  att vi då har att  $g(x_1, \dots, x_n)=\mu(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Def (differentierbar): Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ , och låt  $\vec{a}$  vara en inre punkt av  $D$ .  $f$  är differentierbar i punkten  $\vec{a}$  om det finns konstanter  $A_1, \dots, A_n$  och en funktion  $\varphi(\vec{h}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  som uppfyller  $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})}{\|\vec{h}\|} = \varphi(\vec{h})$  sådan att  $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \|\vec{h}\| \cdot \varphi(\vec{h})$  där  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$ .

Def (differentierbar): En funktion  $f$  är differentierbar i en öppen mängd  $D$  om  $f$  är differentierbar i varje punkt av  $D$ .

SATS 2.1: En differentierbar funktion är kontinuerlig.

SATS 2.2: En differentierbar funktion är partiellt deriverbar, och  $\frac{\partial f}{\partial x_j}|_{\vec{a}} = A_j : \forall j=1, \dots, n$

Observera: En partiellt deriverbar funktion är inte nödvändigtvis differentierbar.

SATS 2.β: Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ , vara differentierbar i den inre punkten  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ . Tangenten  $\Xi$  till  $f$  i punkten  $(\vec{a}, f(\vec{a}))$  beräknas som:  
 $\Xi = f(\vec{a}) + f'_{x_1}(\vec{a}) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_n}(\vec{a}) \cdot (x_n - a_n)$ .

Def (klass  $C^1$ ): Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D$  är en öppen mängd i  $\mathbb{R}^n$ .  $f$  är av klass  $C^1$  på  $D$  om  $f$  är partiellt deriverbar och alla partiella derivator är kontinuerliga i  $D$ . Man skriver  $f \in C^1(D)$ .

SATS 2.3: Varje funktion av klass  $C^1$  på  $D$  är differentierbar i  $D$

SATS 2.4 (kedjeregeln): Låt  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  vara en differentierbar funktion av  $n$  variabler, och antag att funktionerna  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  är deriverbara i intervallet  $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ . Då är den sammansatta funktionen  $f(\vec{g}(t))$ , där  $\vec{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ , också deriverbar i intervallet  $t \in (a, b)$ , och:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \partial_{x_1} f(\vec{g}(t)) \cdot g'_1(t) + \dots + \partial_{x_n} f(\vec{g}(t)) \cdot g'_n(t)$$

$$\vec{x} = g(t) \quad u = f(\vec{x}) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

**SATS 2.8 (Allmänna kedjeregeln):** Låt  $\vec{t} = (t_1, \dots, t_q) \in D \subset \mathbb{R}^q$ ,  $\vec{x}(\vec{t}) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , och  $u(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Låt även  $u(\vec{x})$  och  $g_1(\vec{t}), \dots, g_n(\vec{t})$  alla vara av klassen  $C^1$ . Då har vi att  $u(\vec{x}(\vec{t}))$  är partiellt deriverbar med avseende på  $t_j, \forall j=1, \dots, q$  och att  $\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j}$

**Def (gradient):** För differentierbara funktioner  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  definierar vi gradienten av  $f$  i punkten  $\vec{x}$  som vektorn

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

**Def(nabla):**  $\vec{\nabla}$ , eller nabla, definieras som  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  och man kan använda beteckningen  $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})$ .  $\vec{\nabla}$  är en linjär operator d.v.s. en linjär funktion på rummet av funktioner.

**SATS 2.5:** Låt  $D \subset \mathbb{R}^n$  vara en öppen och bågvis sammankopplad mängd och  $f \in C^1(D)$ . Om  $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in D$  så är  $f(\vec{x})$  konstant i  $D$ .

**Def (derivata med avseende på riktning):** Låt  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  ha längd 1, d.v.s.  $|\vec{v}| = 1$ ,  $\vec{v}$  är då en enhetsvektor. Derivatan av  $f$  i punkt  $\vec{a}$  med avseende på riktningen  $\vec{v}$  är  $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}$

**SATS 2.6:** Om  $f$  är differentierbar och  $|\vec{v}| = 1$ , så har vi  $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$

**SATS 2.7:** Gradienten  $\text{grad } f(\vec{a})$  pekar i den riktning i vilken funktionen växer snabbast i punkten  $\vec{a}$  och den maximala tillväxthastigheten är  $|\text{grad } f(\vec{a})|$ .

**SATS 2.8:** Låt  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vara en funktion av klassen  $C^1$  och  $\text{grad } f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ . Då är vektorn  $\text{grad } f(\vec{a})$  vinkelrät mot niväytan  $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$ .

**SATS 2.9:** Låt  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vara en funktion av klassen  $C^1$  och  $\text{grad } f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ . Då är vektorn  $\text{grad } f(\vec{a})$  normalvektorn till den tangerande ytan till  $f$  i punkten  $\vec{a}$ .

**Def (klass  $C^k$ ):** Låt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  där  $D$  är en öppen mängd i  $\mathbb{R}^n$ . Vi säger att  $f$  är av klass  $C^k$  om alla partiella derivator av ordning  $\leq k$  existerar och är kontinuerliga.

**SATS 2.9:** För varje funktion  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  av klass  $C^2$  gäller att:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

**SATS 2.10 (Taylors formel av andra ordningen i två variabler):** Låt  $f(x, y)$  vara en  $C^3$ -funktion i den öppna mängden  $D$ , och antag att punkten  $(a, b)$  tillhör  $D$ . Då är:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k + \frac{1}{2}(f''_{xx}(a, b) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b) \cdot k^2) + (h^2 + k^2)^{3/2} \cdot B(h, k)$$

där  $B(h, k)$  är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Def (lokalt maximum): Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  har ett lokalt maximum i  $\vec{a} \in D$  om  $\exists \delta > 0$  så att om  $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$  och  $\vec{x} \in D$ , så  $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ .

Def (lokalt minimum): Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  har ett lokalt minimum i  $\vec{a} \in D$  om  $\exists \delta > 0$  så att om  $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$  och  $\vec{x} \in D$ , så  $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$ .

Def (lokala extrempunkter): Lokala maxima och minima kallas gemensamt för lokala extrempunkter.

SATS 2.11: Om  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ , har en lokal extrempunkt i en inre punkt  $\vec{a} \in D$  och  $f$  är partiellt deriverbar i  $\vec{a}$  så har vi att  $f_{xj}''(\vec{a}) = 0$  för alla  $j=1, \dots, n$  d.v.s.  $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ .

Def (stationär punkt): Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ , och  $\vec{x} \in D$ .  $\vec{x}$  är en stationär punkt för  $f$  om  $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ .

Def (Taylor polynom i en stationär punkt): Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D$  är en öppen mängd i  $\mathbb{R}^2$  och  $f \in C^3(D)$ . Vid en stationär punkt  $(a, b)$  till  $f$  gäller Taylor polynomet:  $f(ath, btk) = f(a, b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot B(h, k)$ , där  $B(h, k)$  är begränsad runt  $0$  och  $A = f_{xx}''(a, b)$ ;  $B = f_{xy}''(a, b)$ ;  $C = f_{yy}''(a, b)$ .  $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$  sägs vara av kvadratisk form.

Def (positivt definit, negativt definit, indefinit, semidefinit): Låt  $Q(h, k)$  vara av kvadratisk form. Då säger vi att:

- $Q(h, k)$  är positivt definit om  $Q(h, k) > 0$  för alla  $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$  är positivt semidefinit om  $Q(h, k) \geq 0$  för alla  $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$  är negativt definit om  $Q(h, k) < 0$  för alla  $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$  är negativt semidefinit om  $Q(h, k) \leq 0$  för alla  $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$  är indefinit om  $Q(h, k)$  antar både positiva och negativa värden för  $(h, k) \neq (0, 0)$

SATS 2.12: Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , där  $D$  är en öppen mängd i  $\mathbb{R}^2$  och  $f \in C^3(D)$ , låt även  $(a, b)$  vara en stationär punkt till  $f$  och  $Q(h, k) = f_{xx}''(a, b) \cdot h^2 + f_{xy}''(a, b) \cdot hk + f_{yy}''(a, b) \cdot k^2$ . Då har vi att:

- Om  $Q(h, k)$  är positivt definit så har  $f$  ett strängt lokalt minimum i  $(a, b)$
- Om  $Q(h, k)$  är negativt definit så har  $f$  ett strängt lokalt maximum i  $(a, b)$
- Om  $Q(h, k)$  är indefinit så har  $f$  varken ett maximum eller minimum i  $(a, b)$

OBS: Om  $Q(h, k)$  är positivt eller negativt semidefinit kan ingen slutsats tas huruvida  $f$  har en lokal extrempunkt i  $(a, b)$ .

Def (kurva): En kurva är en funktion  $\vec{x}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ , där  $D = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ , och  $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$  där  $x_1, \dots, x_p \in C^1(D)$ .

Def (parameterisering): Låt  $\Psi: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$  vara en strängt växande funktion så att  $\Psi, \Psi^{-1} \in C^1$ . Då identifierar vi  $t \mapsto \vec{x}(t)$  och  $s \mapsto \vec{x}(\Psi(s))$  är olika parameteriseringar av samma kurva.

Def (tangentvektor/riktningsvektor): Tangentvektorn till kurvan  $\vec{x}$  i punkten  $\vec{x}(t)$  är vektorn  $\vec{x}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} = (x'_1(t), \dots, x'_p(t))$ .

Observera att tangentvektorn beror på parameteriseringen.

Om  $t = \Psi(s)$  har vi  $(\vec{x}(\Psi(s)))'_s = \vec{x}'(\Psi(s)) \cdot \Psi'(s)$ . Alltså samma riktning men olika längder.

Def(längd): Längden av kurvan  $\vec{s} = \vec{s}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  ges av  $\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{s}'(t)| dt$ .

SATS 3.α: Längden av en kurva beror ej på parameteriseringen.

Def(yta): En yta är en funktion  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  med  $D \subset \mathbb{R}^2$  så att  $r(s, t) = (x_1(s, t), x_2(s, t), x_3(s, t))$

Def(tangentplanet): Tangentplanet till  $\vec{r}$  i punkten  $\vec{r}(s, t)$  spänns upp av  $\vec{r}'_s = (\partial_s x_1, \partial_s x_2, \partial_s x_3)$  och  $\vec{r}'_t = (\partial_t x_1, \partial_t x_2, \partial_t x_3)$ . Vektorn  $(\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t)$  är en normalvektor till ytan i punkten  $\vec{r}(s, t)$ .

Def(funktionalmatris): Låt  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ ; funktionalmatrisen eller derivatan av  $\vec{f}$  är matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Funktionalmatrisen betecknas som:  $\vec{f}'(\vec{x})$ ,  $d\vec{f}(\vec{x})$ ,  $D\vec{f}(\vec{x})$ ,  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$

SATS 3.β: Låt  $\vec{f} \in C^1$ , d.v.s.  $f_1, \dots, f_p \in C^2$ , då gäller för varje  $f_j(\vec{x})$ ,  $j=1, \dots, p$   $f_j(\vec{x} + \vec{h}) = f_j(\vec{x}) + f'_{j, x_1}(\vec{x}) \cdot h_1 + \dots + f'_{j, x_n}(\vec{x}) \cdot h_n + |\vec{h}| \cdot \rho_j(\vec{h})$  där  $\rho_j(\vec{h}) \rightarrow 0$  då  $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$ .

Alltså

$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{x} + \vec{h}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x} + \vec{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{1, x_1}(\vec{x}) & \dots & f'_{1, x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{p, x_1}(\vec{x}) & \dots & f'_{p, x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + |\vec{h}| \cdot \rho(\vec{h}), \text{ där } \rho(\vec{h}) \rightarrow 0 \text{ då } \vec{h} \rightarrow \vec{0}$$

d.v.s.

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x}) \cdot \vec{h} + |\vec{h}| \cdot \rho(\vec{h}), \text{ där } \rho(\vec{h}) \rightarrow 0 \text{ då } \vec{h} \rightarrow \vec{0}$$

Def(linjärisering): Låt  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ , där  $D \subset \mathbb{R}^n$ , och  $\vec{x}$  vara en fixerad punkt i  $D$ . Den linjära funktionen av  $\ell(\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x}) \cdot \vec{h}$  kallas för Linjäriseringen av  $\vec{f}$  i punkten  $\vec{x}$ .

SATS 3.γ (kedjeregeln av funktionalmatriser): Låt  $g: D_g \rightarrow D_f$  och  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^p$ , där  $D_g \subset \mathbb{R}^m$  och  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ . Då har vi  $(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$ .

Def(funktionaldeterminant): Talet  $\det(\vec{f}'(\vec{x}))$  kallas för funktionaldeterminanten eller Jacobis determinant av funktionen  $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$

SATS 3.1: Funktionaldeterminanten för en sammansättning av två funktioner från  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^m$  är lika med produkten av de ingående funktionernas funktionaldeterminanter. Formelmässigt kan detta skrivas:

$$\det(\vec{f}(g(\vec{x}))) = \det(f'(g(\vec{x}))) \cdot \det(g'(\vec{x}))$$

SATS 3.2 (Inversa funktionssatsen): Låt  $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$  vara en  $C^1$ -funktion från  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^m$  och  $\vec{a}$  en punkt i definitionsmängden (som är en öppen mängd) sådan att  $\det(\vec{f}'(\vec{a})) \neq 0$ . Då finns öppna omgivningar  $U$  och  $V$  av  $\vec{a}$  respektive  $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$  sådana att avbildningen  $\vec{f}: U \rightarrow V$  är bijektiv och inversen  $\vec{f}': V \rightarrow U$  en funktion av klassen  $C^1$ .

SATS 3.3 (Implicita funktionssatsen): Låt  $F(x, y)$  vara en  $C^1$ -funktion och  $(a, b)$  en punkt på nivåkurvan  $F(x, y) = C$ . Om  $F'_y(a, b) \neq 0$  så finns en öppen omgivning  $U$  av  $(a, b)$  sådan att restriktionen av nivåkurvan till  $U$  implicit definierar en  $C^1$ -funktion  $y = f(x)$ . För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

SATS 3.5: Låt  $F(x, y, z)$  vara en  $C^1$ -funktion i en omgivning av  $\vec{a}$ ,  $F(\vec{a}) = C$  och  $F'_z(\vec{a}) \neq 0$ . Då kan man uttrycka nivåytan  $F(x, y, z) = C$  i en omgivning av  $\vec{a}$  som en  $C^1$ -funktion  $z = \bar{z}(x, y)$ . Dessutom:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

SATS 3.6: Betrakta systemet

$$\begin{cases} F(x, y, z) = C \\ G(x, y, z) = D \end{cases}$$

Där  $F, G \in C^1$  kring en punkt  $\vec{a}$  och  $C, D \in \mathbb{R}$  så att  $F(\vec{a}) = C$  och  $G(\vec{a}) = D$   
Antag att determinanten

$$\frac{d(F, G)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

i punkten  $\vec{a}$ . Då finns det en omgivning av  $\vec{a}$  i vilket systemet bestämmer två  $C^1$ -funktioner

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}$$

Dessutom kan man via systemet

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = t \end{cases}$$

lokalt parameterisera skärningskurvan av det ursprungliga systemet med variabeln  $z$ . D.v.s.

$$\begin{cases} F(f(z), g(z), z) = C \\ G(f(z), g(z), z) = D \end{cases}$$

På samma sätt kan man parameterisera skärningskurvan med variablerna  $x$  och  $y$ .

SATS 4.α (Optimering på kompakta områden): Låt  $K \subset \mathbb{R}^n$  vara en kompakt mängd och låt  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  vara kontinuerlig. Då antar  $f$  sitt största värde  $M$  på  $K$ . Dessutom om  $f \in C^1(\text{int}(K))$  så har vi att om  $f(\vec{a}) = M$  så är antingen:

- i)  $\vec{a} \in \text{int}(K)$  och  $\text{grad } f(\vec{a}) = 0$
- eller
- ii)  $\vec{a} \in \partial K$

SATS 4.β (Optimering på icke-komackta mängder): Låt  $K \subset \mathbb{R}^n$  vara en icke-kompakt mängd och låt  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion och  $f \in C^1(\text{int}(K))$ . Om det finns en kompakt mängd  $U \subset K$  sådan att för något  $\vec{a} \in U$  har vi att  $f(\vec{a}) > f(\vec{z})$ :  $\forall \vec{z} \in K \setminus U$  så antar  $f$  sitt största värde i  $U$  och den punkten kan hittas med hjälp av SATS 4.α.

\*:  $f'(\vec{z})$  och  $g'(\vec{z})$  i  $\vec{a}$  kan hittas genom att lösa systemet

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}|_{\vec{a}} & \frac{\partial F}{\partial y}|_{\vec{a}} \\ \frac{\partial G}{\partial x}|_{\vec{a}} & \frac{\partial G}{\partial y}|_{\vec{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(\vec{z})|_{\vec{a}} \\ g'(\vec{z})|_{\vec{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F}{\partial z}|_{\vec{a}} \\ -\frac{\partial G}{\partial z}|_{\vec{a}} \end{bmatrix}$$
||

SATS 4.8 (minsta kvadratmetoden): Låt  $(a_i, b_i)$ ,  $i=1, \dots, n$  vara punkter i  $\mathbb{R}^2$  och  $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$  så att  $a_i \neq a_j$ . Låt även  $y = kx + l$  vara den linje som har minsta möjliga summa av vertikala avståndet av varje punkt och linjen.  $k$  och  $l$  kan bestämmas genom att hitta minsta värdet av  $Q(k, l) = \sum (ka_i + l - b_i)^2$ .  $k$  och  $l$  kan bestämmas entydigt ur normalekvationerna som ges av  $\nabla Q(k, l) = \vec{0}$ :

$$\begin{cases} (\sum a_i^2)k + (\sum a_i)l = \sum a_i b_i \\ (\sum a_i)k + n l = \sum b_i \end{cases}$$

SATS 4.1: Låt  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$  vara funktioner i  $C^1$  och  $D_f$  och  $D_g$  vara öppna mängder i  $\mathbb{R}^2$ . Antag att  $f(x, y)$  maximeras eller minimeras under  $bi$ -vilkoret  $g(x, y) = 0$  i en inre punkt  $(a, b) \in D_f \cap D_g$ . Då är vektorerna  $\nabla f(a, b)$  och  $\nabla g(a, b)$  parallella.

Def(trappfunktion): Låt  $\Delta = \{(x, y); x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ .  $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  är en trappfunktion om det finns en indelning av  $\Delta$  i rektanglar  $\Delta_{ij}$  som definieras som  $\Delta_{ij} = \{(x, y); x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]\}$  där  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  och  $c = y_0 < \dots < y_m = d$  så att  $\Phi$  har ett konstant värde  $c_{ij}$  på  $\Delta_{ij}$ .

Def(dubbelintegral): Dubbelintegralen av  $\Phi$  över  $\Delta$  är

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy := \sum_{ij} c_{ij} \mu(\Delta_{ij}) \text{ där } \mu(\Delta_{ij}) \text{ är arean av } \Delta_{ij}$$

SATS 6.0: För trappfunktioner  $\Phi$  och  $\Psi$ , och  $a, b \in \mathbb{R}$  gäller:

- $\iint_{\Delta} (a\Phi + b\Psi) dx dy = a \iint_{\Delta} \Phi dx dy + b \iint_{\Delta} \Psi dx dy$
- Om  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ :  $\iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \Phi dx dy = \iint_{\Delta_1} \Phi dx dy + \iint_{\Delta_2} \Phi dx dy$
- Om  $\Phi \leq \Psi$  på  $\Delta$ :  $\iint_{\Delta} \Phi dx dy \leq \iint_{\Delta} \Psi dx dy$
- $|\iint_{\Delta} \Phi dx dy| \leq \iint_{\Delta} |\Phi| dx dy$  (triangelolikheten för integraler)
- $\iint_{\Delta} \Phi dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d \Phi(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b \Phi(x, y) dx \right) dy$ .

Def(Riemann integrerbar): En begränsad funktion  $f(x, y)$  är Riemann integrerbar över en rektangel  $\Delta$  om det för alla  $\epsilon > 0$  finns trappfunktioner  $\Phi$  och  $\Psi$  sådana att  $\Phi \leq f \leq \Psi$  på  $\Delta$  och

$$\iint_{\Delta} \Psi dx dy - \iint_{\Delta} \Phi dx dy < \epsilon$$

SATS 6.1: Om  $f$  är integrerbar över  $\Delta$  så finns det precis ett tal  $\lambda$  sådana att

$$\iint_{\Delta} \Phi dx dy \leq \lambda \leq \iint_{\Delta} \Psi dx dy \text{ för alla par av trappfunktioner som uppfyller } \Phi \leq f \leq \Psi \text{ på } \Delta.$$

Def(dubbelintegral): Talet  $\lambda$  från sats 6.1 kallas för dubbelintegralen av  $f$  över  $\Delta$  och betecknas  $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \lambda$ .

SATS 6.2: Om  $f$  är integrerbar över  $\Delta = \{(x, y); x \in [a, b], y \in [c, d]\}$  så gäller (om enkel integralerna existerar):

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

12

SATS 6.3: Om funktionen  $f(x,y)$  är kontinuerlig på den kompakta rektangeln  $\Delta = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$  så är  $f$  integrerbar över  $\Delta$ , och enkelintegralerna i sats 6.2 existerar.

Def (integrerbar): Låt  $D \subset \mathbb{R}^2$  vara en begränsad mängd och  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  vara en begränsad funktion. Vi definierar  $f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & : (x,y) \in D \\ 0 & : (x,y) \notin D \end{cases}$

Vi säger att  $f$  är integrerbar över  $D$  om  $f_D$  är integrerbar över någon rektangel  $\Delta$  där  $D \subset \Delta$ . Vi sätter

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\Delta} f_D(x,y) dx dy$$

SATS 6.4: Antag att  $f$  är kontinuerlig på  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$  där  $\alpha$  och  $\beta$  är kontinuerliga på  $[a,b]$ . Då är  $f$  integrerbar på  $D$  och  $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx$ .

Def (area): Arean för ett område  $D$  definieras som  $\text{Area}(D) := \iint_D 1 dx dy$  (även kallat  $\mu$ )

Def (nollmängd): En mängd  $N \subset \mathbb{R}^2$  är en nollmängd om vi för alla  $\epsilon > 0$  kan täcka över  $N$  med ändligt många axelparallella rektanglar med en sammanlagd area mindre än  $\epsilon$ .

Lemma 6.1: Grafen av en kontinuerlig funktion  $\Psi: [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är en nollmängd i  $\mathbb{R}^2$ .

Def (kvadrerbar): En mängd  $D$  är kvadrerbar om  $\partial D$  är en nollmängd.

Lemma 6.2: Antag att  $f$  är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd  $D$ . Då är  $f$  integrerbar över  $D$ .

Lemma 6.3: Varje begränsad funktion är integrerbar över en nollmängd  $N$  och

$$\iint_N f(x,y) dx dy = 0$$

SATS 6.3 (medelvärdessatsen för integraler): Låt  $f$  vara kontinuerlig på en kompakt, kvadrerbar, och bågvis sammanhängande mängd  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Låt  $m = \inf_{D \times D} f$  och  $M = \sup_{D \times D} f$ . Då finns en punkt  $(a,b) \in D$  så att  $\iint_D f(x,y) dx dy = f(a,b) \cdot \text{area}(D)$

SATS 6.5: Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  vara kontinuerlig och  $D$  vara en kompakt mängd i  $\mathbb{R}^2$ . Då gäller  $\sum_{i,j} f(\bar{x}_{ij}) \cdot \mu(\Delta_{ij}) \rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy$  när indelningsfinhet går mot noll.

SATS 6.6: Låt  $\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$  vara en bijektiv  $C^2$ -avbildning av ett öppet, begränsat

kvadrerbart område  $E$  i  $(u,v)$  planet på ett motsvarande område  $D$  i  $(x,y)$  planet, sådan att  $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$  i  $E$ . Då är

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_E f(g(u,v), h(u,v)) \cdot |J(u,v)| du dv$$

Om funktionerna under integraltecknen är integrerbara över respektive område.

SATS 6.8: Låt  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  där  $D$  är en kvarterbar mängd i  $\mathbb{R}^2$  så att  $g \in C^1(D)$  och låt  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  där  $a = \inf_D g(x, y)$ ,  $b = \sup_D g(x, y)$  och  $h \in C^1(a, b)$ . Låt även  $G_u = \{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\}$ . Antag att  $A_u = \text{Area}(G_u)$  är  $C^1$ . Då gäller  $\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) \cdot A'(u) du$

Def(avskärning): Låt  $f$  vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . En begränsad kvarterbar delmängd  $D$  av  $\Omega$  är en **avskärning** av  $\Omega$  om  $f$  är begränsad på  $D$ .

Def (konvergent): Låt  $f$  vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  med  $f(x, y) \geq 0$  är **konvergent** om mängden  $M = \{\iint_{D_n} f(x, y) dx dy : D_n \text{ är en avskärning av } \Omega\}$  är upptat begränsad, annars **divergent**. Om integralen är konvergent definierar vi  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sup M$  och  $\sup M = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$  där  $(D_n)_{n=1}^{\infty}$  är en **utömande svit** av avskärningar, d.v.s.  $D_{n+1} \subseteq D_n$  of för varje  $D \subset \Omega$  finns  $D_n$  så att  $D \subseteq D_n$ .

SATS 6.9: För generaliserade integraler med positiv integrand gäller att om den inre enkelintegralen (till exempel med avseende på  $x$ ) är konvergent för varje fixerat  $y$ , då är dubbelintegralen av  $f$  konvergent om och endast om den yttre integralen är konvergent (detta gäller även om den inre enkelintegralen ej konvergerar för enstaka värden av  $y$ ). I så fall har vi  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$

Def(konvergent): Låt  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  där  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  och låt  $f^+ = \begin{cases} f(x, y) & : f(x, y) \geq 0 \\ 0 & : f(x, y) < 0 \end{cases}$  och  $f^- = \begin{cases} 0 & : f(x, y) \geq 0 \\ -f(x, y) & : f(x, y) < 0 \end{cases}$   
Alltså att  $f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$  och  $|f(x, y)| = f^+(x, y) + f^-(x, y)$   
Dubbelintegralen  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  är **konvergent** om och endast om både  $\iint_{\Omega} f^+(x, y) dx dy$  och  $\iint_{\Omega} f^-(x, y) dx dy$  är konvergenta.  
Det vill säga  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  konvergerar  $\Leftrightarrow \iint_{\Omega} |f(x, y)| dx dy$ .

SATS 6.10: Låt  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  där  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  och  $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$   
Då har vi att  $\iint_{\Omega} g(x, y) dx dy$  konvergerar  $\Rightarrow \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  konvergerar.  
och  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  divergerar  $\Rightarrow \iint_{\Omega} g(x, y) dx dy$  divergerar.

SATS 6.11: Låt  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$ . Då har vi att  $\iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha}} dx dy$  konvergerar om och endast om  $\alpha > 1$ .

SATS 6.12: Låt  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ . Då har vi att  $\iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha}} dx dy$  konvergerar om och endast om  $\alpha < 1$ .

SATS 5.1: Antag att funktionerna  $f(s, x)$  och  $f'_s(s, x)$  är kontinuerliga i området  $\alpha < s < \beta$ ,  $a < x < b$ . Då är den  $s$ -beroende integralen

$$F(s) = \int_{x=a}^b f(s, x) dx \quad \text{deriverbar i } \alpha < s < \beta \text{ och } \frac{dF}{ds} = \int_a^b f'_s(s, x) dx.$$

SATS 5.2: Antag att  $f(s, x)$  och  $f'_s(s, x)$  är kontinuerliga i  $\alpha < s < \beta$ ,  $A \leq x \leq B$ . Låt vidare  $b(s)$  vara en  $C^1$ -funktion i  $\alpha < s < \beta$  med  $A < b(s) < B$ , och låt  $A \leq B$ . Då är den s-beroende integralen

$$F(s) = \int_a^{b(s)} f(s, x) dx$$

deriverbar och  $F'(s) = \int_a^{b(s)} f'_s(s, x) dx + f(s, b(s)) b'(s)$ .

SATS 5.3: Antag att  $f(s, x)$  och  $f'_s(s, x)$  är kontinuerliga i  $\alpha < s < \beta$ ,  $x \geq a$ . Antag vidare att den s-beroende integralen

$$F(s) = \int_a^\infty f(s, x) dx$$

är konvergent för  $\alpha < s < \beta$ , och att det till varje kompakt delintervall  $a < s < \beta$ , av  $(\alpha, \beta)$  finns en så kallad majorerande funktion  $g(x)$  sådan att

(i)  $|f'(s, x)| \leq g(x)$  för  $\alpha \leq s \leq \beta$ ,  $x \geq a$

(ii)  $\int_a^\infty g(x) dx$  är konvergent

Då är  $F(s)$  deriverbar i  $\alpha < s < \beta$  och

$$F'(s) = \int_a^\infty f'_s(s, x) dx$$

SATS 7.α: Låt  $D = \{(x, y, z) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in E\}$ . Då kan integralen av  $f$  i  $D$  beräknas som

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left( \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

SATS 7.β: Låt  $D = \{(x, y, z) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$  där  $E = \{(x, y) : \alpha(x, y) \leq \beta(x, y)\}$  är en begränsad, både sammanhängande mängd. Då kan integralen av  $f$  i  $D$  beräknas som

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left( \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

SATS 7.γ: Låt  $\vec{g} : E \rightarrow D$  vara en bijektiv  $C^1$ -avbildning,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in D$  och  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in E$  så att  $\vec{x} = \vec{g}(\vec{u}) = (g_1(\vec{u}), g_2(\vec{u}), g_3(\vec{u}))$  och att

$$J(\vec{u}) = \frac{d(g_1, g_2, g_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} \neq 0. \quad \text{Då kan integralen av } f \text{ i } D \text{ beräknas som}$$

$$\iiint_D f(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_E f(\vec{g}(\vec{u})) \cdot |J(\vec{u})| du_1 du_2 du_3.$$

SATS 8.α: Låt  $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$ ,  $(s, t) \in D$  vara en parameterframställning av en yta  $Y$  i  $\mathbb{R}^3$ . Man kan då beräkna arean av ytan  $Y$  som

$$\iint_Y dS = \iint_D |\vec{r}_s \times \vec{r}_t| ds dt.$$

Def(kurvintegral): Låt  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara ett kontinuerligt vektorfält på en öppen mängd  $D \subset \mathbb{R}$  så att för  $\vec{r} = (x, y)$  är  $\vec{F}(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r})) = (P(x, y), Q(x, y))$ . Låt även  $\gamma$  vara en  $C^1$  kurva i  $D$  med parameterisering  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  och  $t \in [\alpha, \beta]$ . Kurvintegralen av  $\vec{F}$  längs  $\gamma$  är  $\int_\gamma \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$ . Vi använder beteckningen  $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int P dx + Q dy$ .

OBS: Rikningen av kurvan spelar roll.

Def(sluten, enkel): En kurva är sluten om dess start- och slutpunkterna sammantfaller. En kurva är enkel om den är sluten och inte skär sig själv.

**Def(cirkulation):** Om  $\vec{F}$  är ett vektorfält och  $\gamma$  är en enkel kurva kallas  $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$  för cirkulationen av vektorfältet  $\vec{F}$  längs  $\gamma$  och betecknas  $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ .

**Def(positivt orienterad):** Låt  $\gamma$  vara en enkel kurva i  $\mathbb{R}^2$ . Låt  $D$  vara den kompakta mängden som uppfyller  $\partial D = \gamma$ .  $\gamma$  sägs vara positivt orienterad om  $D$  är till vänster om  $\gamma$  med avseende på kurvans riktning, annars negativt orienterad. Om  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  är  $\gamma$  positivt orienterad om för  $D$   $\partial D = \gamma$  så ligger  $D$  till vänster om  $\gamma_1$  och  $\gamma_2$  med avseende på deras riktning.

**SATS 9.1 (Greens formel):** Antag att:

- $P$  och  $Q$  är  $C^1$ -funktioner i en öppen mängd  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
  - $D$  är en kompakt mängd och  $D \subset \Omega$
  - $\partial D$  utgörs av en eller flera styckvis  $C^1$ -kurvor som är positivt orienterade
- Då gäller  $\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

**SATS 9.2:** Låt  $D$  vara en kompakt mängd i  $\mathbb{R}^2$ . Från Greens formel har vi

- Om  $P=0, Q=x$  får vi  $\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \int_{\partial D} x dy$
- Om  $P=-y, Q=0$  får vi  $\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \int_{\partial D} -y dx$
- Om  $P=\frac{x}{2}, Q=\frac{y}{2}$  får vi  $\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy$

Där  $\partial D$  är positivt orienterad.

**Def(flöde):** Låt  $\gamma$  vara en  $C^1$ -kurva i  $\mathbb{R}^2$  med parameterisering  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ .

Då har vi  $\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) \\ \vec{n} = \vec{n}(t) = (y'(t), -x'(t)) \end{cases}$  är tangent till  $\gamma$   
 $\vec{n}$  är en normal till  $\gamma$

Låt även  $\vec{N} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$  vara enhetsnormalen. Låt  $\vec{F} = (P, Q)$  vara ett vektorfält.

Flödet av  $\vec{F}$  genom  $\gamma$  är  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \int_{\gamma} -Q dx + P dy$ . ds kallas för ett längdelement.

**Def(divergens):** Låt  $D$  vara en kompakt mängd med randen  $\partial D = \gamma$  där  $\gamma$  är positivt orienterad, och låt  $\Omega$  vara en öppen mängd så att  $D \subset \Omega$ . För  $\vec{F} = (P, Q)$  där  $P, Q \in C^1(\Omega)$  har vi att flödet av  $\vec{F}$  genom  $\gamma$  är

$$\int_{\partial D} -Q dx + P dy = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

$\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)$  kallas för divergensen av  $\vec{F}$  och har notationen  $\text{div}(\vec{F})$

Vidare:

- Om  $\text{div}(\vec{F}) > 0$  är flödet av  $\vec{F}$  ut från  $D$  större än flödet in mot  $D$
- Om  $\text{div}(\vec{F}) < 0$  är flödet av  $\vec{F}$  ut från  $D$  mindre än flödet in mot  $D$
- Om  $\text{div}(\vec{F}) = 0$  är flödet av  $\vec{F}$  ut från  $D$  lika med flödet in mot  $D$

**Def (oberoende av vägen):** Kurvintegralen  $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$  är oberoende av vägen i  $\Omega$  om  $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 0$  för varje sluten kurva  $\gamma$  i  $\Omega$ . Detta innebär att för alla kurvor  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega$  som går från  $a$  till  $b$  har vi  $\int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r}$

**Def(potential fält/konservativt fält, potential):**  $\vec{F} = (P, Q)$  är ett potentialfält eller konservativt fält om det finns en  $C^1$ -funktion  $U$  i  $\Omega$  så att  $\vec{F} = \text{grad } U$ .  $U$  kallas då för en potential till  $\vec{F}$

**SATS 9.2:** Låt  $\vec{F} = (P, Q)$  vara ett potentialfält med potentialen  $U$  i det öppna området  $\Omega$ . För varje kurva  $\gamma$  med startpunkt  $a$  och slutpunkt  $b$  i  $\Omega$  gäller då att  $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = U(b) - U(a)$ . Alltså är  $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$  oberoende av vägen i  $\Omega$ .

SATS 9.3: Låt  $\vec{F} = (P, Q)$  vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd  $\Omega$ . Om kurvintegralen  $\int_C \vec{F} d\vec{r}$  är oberoende av vägen så har  $\vec{F}$  en potential i  $\Omega$ .

Def(exakt): Differentialformen  $P dx + Q dy$  är exakt i  $\Omega$  om det finns en  $C^1$ -funktion  $U$  i  $\Omega$  vars differential är  $dU = P dx + Q dy$ , det vill säga  $P = \frac{\partial U}{\partial x}$  och  $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$  eller  $(P, Q) = \text{grad } U$ . Detta är synonymt med att  $\vec{F} = (P, Q)$  är ett potentialfält med en potential  $U$ .

SATS 9.4: Antag att fältet  $\vec{F} = (P, Q)$  har en potentialfunktion  $U$  av klass  $C^2$  i  $\Omega$ . Då är  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $(x, y) \in \Omega$

Def(enkelt sammanhängande): En öppen mängd  $\Omega$  är enkelt sammanhängande om  $\Omega$  är bågvis sammanhängande och varje enkel slutna kurva  $\gamma$  i  $\Omega$  avgränsar ett område  $D$  som uppfyller  $D \subset \Omega$ , d.v.s.  $\Omega$  innehåller inga "hål".

SATS 9.5: Om  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  är ett enkelt sammanhängande område och  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  i  $\Omega$  så har vektorfältet  $\vec{F} = (P, Q)$  en potential i  $\Omega$ .

SATS 9.6: Låt  $\Omega$  vara en öppen bågvis sammanhängande mängd i  $\mathbb{R}^2$  och  $\vec{F} = (P, Q)$  är ett kontinuerligt vektorfält med  $P, Q \in C^1(\Omega)$ . Då är följande påståenden ekvivalenta:

- Det finns en funktion  $U \in C^2(\Omega)$  så att  $\vec{F} = \nabla U$
- $\int_C \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{b}) - U(\vec{a})$  för varje  $\gamma \subset \Omega$  med startpunkt  $\vec{a}$  och slutpunkt  $\vec{b}$
- $\int_C \vec{F} d\vec{r}$  är oberoende av vägen i  $\Omega$  för  $\gamma \subset \Omega$

Dessutom om  $U \in C^2(\Omega)$  och  $\Omega$  är enkelt sammanhängande är även nedanstående påståenden ekvivalenta med de ovanstående:

- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$  för alla enkla  $\gamma \subset \Omega$ .

Def(arbete): Låt  $\vec{F}$  vara ett vektorfält och  $\gamma$  vara en kurva med parameterisering  $\vec{r}(t): t \in [a, b]$ . Arbetet som kraftfältet  $\vec{F}$  gör på kurvan  $\gamma$  definieras som  $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$ .

Def(positiv sida): Låt ytan  $Y \subset \mathbb{R}^3$  ges av  $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$ ,  $(s, t) \in D$ . Den sidan som normalvektorn  $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$  pekar ut från kallas för den positiva sidan av  $Y$ .

Def(enhetssnormal):  $\vec{N} = \frac{\vec{r}_s' \times \vec{r}_t'}{\|\vec{r}_s' \times \vec{r}_t'\|}$  kallas för ytans enhetsnormal.

Def(vektoriellt areaelement):  $d\vec{S} = \vec{N} dS = (\vec{r}_s' \times \vec{r}_t') ds dt$  kallas för det vektoriella arelementet för ytan.

Def(flöde): Låt ytan  $Y \subset \mathbb{R}^3$  ges av  $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$ ,  $(s, t) \in D$  och  $\vec{F}$  vara ett vektorfält i  $\mathbb{R}^3$ .  $\Phi = \iint_D \vec{F} d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot (\vec{r}_s' \times \vec{r}_t') ds dt$  kallas för flödet av vektorfältet  $\vec{F}$  genom ytan  $Y$ .

SATS 10.1 (Gauss' sats/Divergenssatsen): Låt  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  vara ett  $C^1$ -fält definierat i en öppen mängd  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Om det kompakta området  $K \subset \Omega$  har en rand  $\partial K$  som består av en eller flera  $C^1$ -ytor som är orienterade med utåtriktad normal så gäller det:  $\iint_{\partial K} \vec{u} \cdot \vec{N} dS = \iiint_K \text{div}(\vec{u}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_K \left( \frac{\partial u_x}{\partial x_1} + \frac{\partial u_y}{\partial x_2} + \frac{\partial u_z}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$

SATS 10.a:  $\iint_{\partial K} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{om } \vec{o} \in K \\ 0 & \text{om } \vec{o} \notin K \end{cases}$

Def(rotation): Rotationen av det 3-dimensionella vektorfältet  $\vec{u}(\vec{x}) = (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}))$  av tre variabler  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  är vektorfältet:

$$\text{rot}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

Annan notation:  $\text{curl}(\vec{u})$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{u}$

Def(virvelfri): Ett vektorfält  $\vec{u}$  är virvelfritt om  $\text{rot}(\vec{u}) = \vec{0}$

Def(rand): Låt  $Y \subset \mathbb{R}^3$  vara en  $C^1$ -yta given av  $\vec{r}(s, t)$ , där  $(s, t) \in D$  och  $D \subset \mathbb{R}^2$  är ett kompakt område med  $C^1$ -rand  $\partial D$ . Randen  $\partial Y$  av  $Y$  är bilden av  $\partial D$  under  $\vec{r}$  med tillhörande orientering.

SATS 10.β: Låt  $\vec{u} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$ . Då är  $\int_K \vec{u} d\vec{r} = \begin{cases} 2\pi & \text{om } \vec{o} \in K \\ 0 & \text{om } \vec{o} \notin K \end{cases}$

SATS 10.2 (Stokes' sats): Låt  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  vara ett  $C^1$ -fält i en öppen mängd  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , och  $Y$  är ett orienterat ytstycke i  $\Omega$  med rand  $\partial Y$  så gäller att  $\int_{\partial Y} \vec{u} d\vec{r} = \iint_Y \text{rot}(\vec{u}) \cdot \vec{N} dS$

SATS 10.γ: Nabla  $\vec{\nabla}$  är en funktion av  $\vec{u}$  till ett vektorfält där  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ .  $\vec{\nabla}$  kan också ses som en vektor med följande egenskaper:

- $\vec{\nabla} \vec{u} = \text{grad}(\vec{u})$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \text{div}(\vec{u})$
- $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \text{rot}(\vec{u})$

SATS 10.3: Varje potentialfält är virvelfritt.

SATS 10.4: Om vektorfältet  $\vec{u}$  är virvelfritt i ett öppet enkelt sammanhängande område  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  så har  $\vec{u}$  en potential i  $\Omega$ .