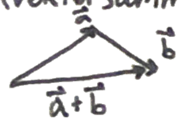
Mekanik

Def (skalär): En **skalär** c är en storhet som är <u>oberoende</u> av koordinatsystemet

Def (vektor, belopp, längd, riktning): En **vektor** $\vec{a}$ är en storhet som bestäms av:
a) **beloppet / längden** $|\vec{a}|=a$
b) **riktningen**

Def (vektorsumma): **Vektorsumman** av $\vec{a}+\vec{b}$ definieras geometriskt som



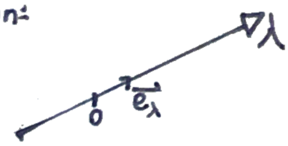
. Notera att $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, d.v.s. vektorsumman är kommutativ.

Def (multiplikation): **Multiplikation** av en vektor $\vec{a}$ med en skalär c är en ny vektor med
a) beloppet $|c\cdot\vec{a}| = |c|\cdot\vec{a}$
b) riktningen $\begin{cases} \text{samma som } a \text{ om } c>0 \\ \text{motsatt av } a \text{ om } c<0 \end{cases}$

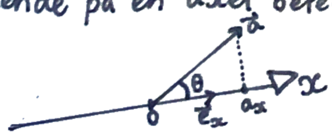
Def (enhetsvektor): En **enhetsvektor** $\vec{e}_a$ är definierad som $\vec{e}_a=\frac{1}{a}\cdot\vec{a}$ och definierar en "ren" riktning.

Def (skalärprodukt): **Skalärprodukten** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ definieras som $\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\theta$: $0\le\theta\le\pi$ där θ är vinkeln mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Skalärprodukten har egenskaperna:
a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (kommutativ)
b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

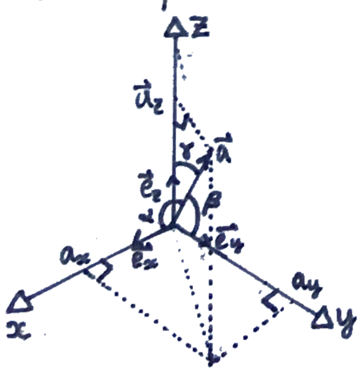
Def (axel): En **axel** λ är en rät linje genom origo med riktning $\vec{e}_\lambda$.
Notation:



Def (projektion, vektorkomponent): **Projektionen** eller **vektorkomponenten** med avseende på en axel betecknas $a_x=\vec{a}\cdot\vec{e}_x=a\cdot\cos\theta$



Def (vektorkomponenter): **Vektorkomponenter** i $\mathbb{R}^3$



$a_x=\vec{a}\cdot\vec{e}_x=a\cos\alpha$
$a_y=\vec{a}\cdot\vec{e}_y=a\cos\beta$
$a_z=\vec{a}\cdot\vec{e}_z=a\cos\gamma$

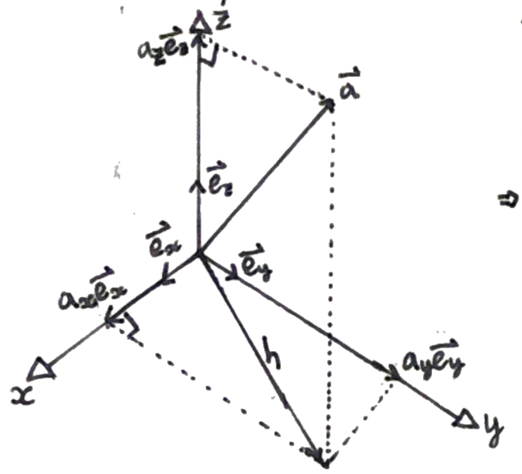
$a^2=a^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$
$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
$\Rightarrow \alpha,\beta,\gamma$ är beroende.

α,β,γ är **riktningsvinklar**

Vektorn $\vec{a}$ har:
a) Beloppet $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
b) Riktning bestämd av α,β,γ

Notera: Vektorkomponenter är beroende av koordinatsystemet, alltså ej skalärer.

Def (vektorkomposanter): Vektorkomposanter definieras som $a_\lambda \vec{e}_\lambda$ så att:



$$\vec{h} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \vec{h} + a_z\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

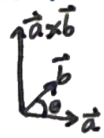
Beräkning av skalärprodukt med hjälp av vektor komposanter:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)\cdot(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) = \ldots = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Def (vektorprodukt, kryssprodukt): Vektorprodukten eller kryssprodukten av $\vec{a}$ och $\vec{b}$, skrivet $\vec{a}\times\vec{b}$, är en ny vektor med:

a) beloppet $|\vec{a}\times\vec{b}| = a\cdot b\cdot \sin\theta$

b) riktningen $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$ och högerhandsregeln



Vektorprodukten har egenskaperna:

- $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (antisymmetrisk)
- Arean av parallellogrammet uppspänt av $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är lika med $|\vec{a}\times\vec{b}|$
  $|\vec{a}\times\vec{b}| = a\cdot b\cdot\sin\theta = a\cdot\{\text{höjden av parallellogrammet}\}$

Beräkning av vektorprodukt med hjälp av vektorkomposanter:

$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y = \vec{e}_z = -\vec{e}_y\times\vec{e}_x$$
$$\vec{e}_x\times\vec{e}_z = -\vec{e}_y = -\vec{e}_z\times\vec{e}_x$$
$$\vec{e}_y\times\vec{e}_z = \vec{e}_x = -\vec{e}_z\times\vec{e}_y$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)\times(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z)$$
$$\vdots$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z$$

Minnesregel: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Def (enhet): En fysikalisk storhet (längd, massa, accelleration, etc.) bestäms med hjälp av enheter.

$$\text{storhet} \rightarrow L = \underset{\text{mätetal}}{2}\ m \leftarrow \text{enhet}$$

Def (måttsystem): Ett måttsystem är en sammansättning av enheter. T.ex. SI-systemet.

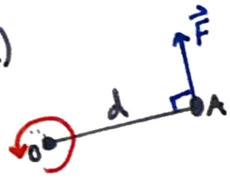
	storhet	dimension	enhet
Grundstorheter	massa	M	kg
	tid	T	s
	längd	L	m
Härledda storheter	hastighet	LT^{-1}	ms^{-1}
	acceleration	LT^{-2}	ms^{-2}
	kraft	MLT^{-2}	N ($kgms^{-2}$)
	arbete	ML^2T^{-2}	J (N·m)
	effekt	ML^2T^{-3}	W (Js^{-1})

Def (kraft): **Kraften** $\vec{F}$ definieras som:

a) en vektor $\vec{F}$.
b) en tillordnad angreppspunkt A.

Kraftmoment (diagram)

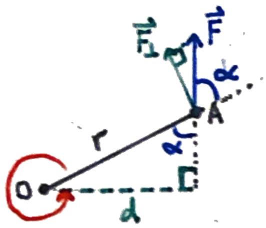
a)



Def (hävarm): d kallas för **hävarmen**.

$M_o = d \cdot F$

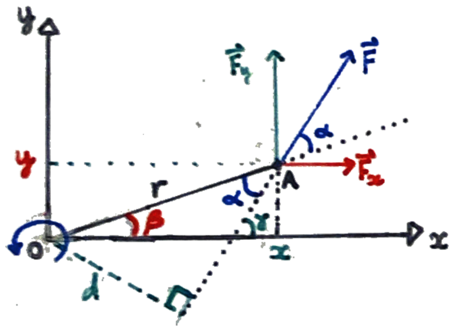
b)



$$\begin{cases} M_o = d \cdot F = r \cdot \sin(\alpha) \cdot F \\ M_o = r \cdot F_\perp = r \cdot \sin(\alpha) \cdot F \end{cases}$$

$$\therefore M_o = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$

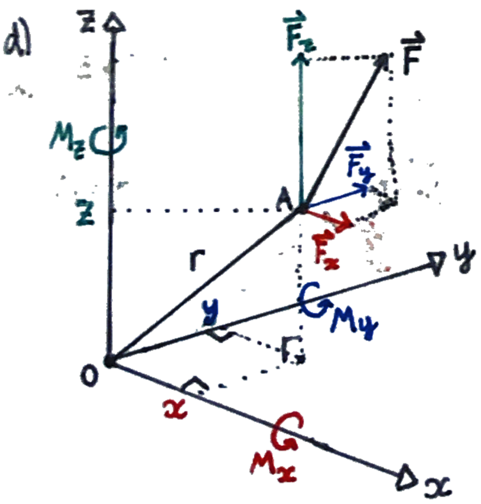
c)



$$M_o = d \cdot F = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$
$$\alpha + \beta + (\pi - \gamma) = \pi$$
$$\Rightarrow \alpha = \gamma - \beta$$
$$\Rightarrow M_o = F \cdot r \cdot \sin(\gamma - \beta)$$
$$= F \cdot r(\sin(\gamma)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\gamma))$$
$$= \underbrace{F \cdot \sin(\gamma)}_{F_y} \cdot \underbrace{r \cdot \cos(\beta)}_{x} - \underbrace{F \cdot \cos(\gamma)}_{F_x} \cdot \underbrace{r \cdot \sin(\beta)}_{y}$$

$$\Rightarrow M_o = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

d)

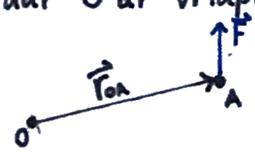


$$\begin{cases} M_x = y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ M_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{cases}$$

Def (kraftmoment): **Kraftmomentet**, eller kraftens vridande förmåga, definieras som:

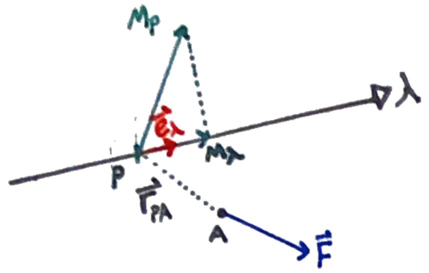
$$\vec{M}_o = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

där O är vridpunkten & A är angreppspunkten av $\vec{F}$



M_o har enheten Nm

Moment med avseende på en axel:



1) Välj en godtycklig punkt P på axeln och bestäm $\vec{M}_P = \vec{r}_{PA} \times \vec{F}$

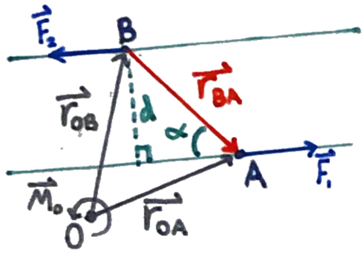
2) Projicera $\vec{M}_P$ på axeln, $\vec{M}_\lambda = \vec{M}_P \cdot \vec{e}_\lambda$

SATS: M_λ är oberoende av vilken punkt på axeln man väljer när man bestämmer momentet med avseende på axeln λ.

Def (kraftsystem): Ett **kraftsystem** består av krafter med sina angreppspunkter $\{\vec{F}_k, P_k\}$ $k=1,\dots,n$. **Kraftsumman** av ett kraftsystem definieras som $\vec{F} = \sum \vec{F}_k$

Def (kraftpar): Ett **kraftpar** är två krafter $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$ med egenskapen $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, kraftsumman av ett kraftpar är noll. Kraftmomentet av kraftparet på en punkt O där angreppspunkten av $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$ är A respektive B beräknas som:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{OB} \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_{OA} - \vec{r}_{OB}) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1$$



Notera: $\vec{M}_O$ för ett kraftpar är oberoende av O

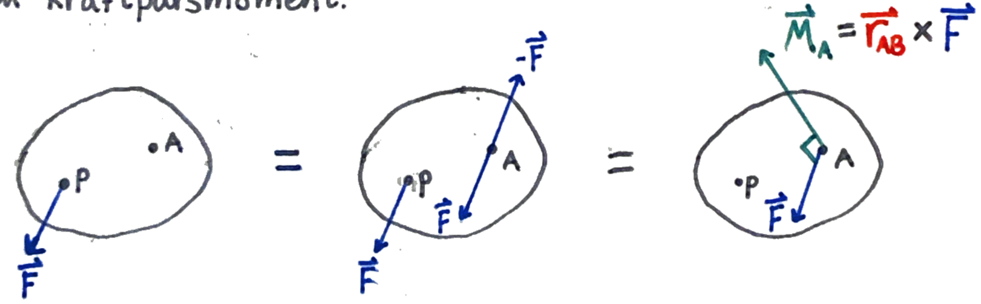
$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1$

och

$M = |\vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1| = F_1 \cdot r_{AB} \cdot \sin\alpha = d \cdot F_1$

Att flytta en kraft:

Man får flytta en kraft till en ny punkt men man måste kompensera med ett kraftparsmoment.



Att flytta n krafter:

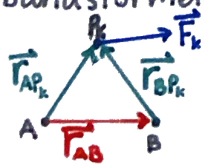
Följ ovan steg för alla krafter till en och samma punkt A och:

$$\begin{cases} \vec{F} = \sum \vec{F}_k \\ \vec{M}_A = \sum \vec{r}_{AP_k} \times \vec{F}_k \end{cases}$$

$\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$ kallas för **reduktionsresultatet**.

Ett godtyckligt kraftsystem kan alltid reduceras till ett reduktionsresultat

Sambandsformeln för kraftmomentet:

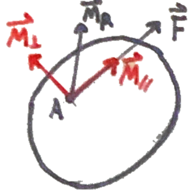


$\vec{M}_A = \sum \vec{r}_{AP_k} \times \vec{F}_k$, $\vec{M}_B = \sum \vec{r}_{BP_k} \times \vec{F}_k$, $\vec{r}_{AP_k} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP_k}$

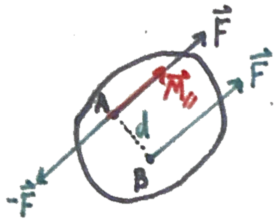
$$\therefore \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

Def(kraftskruv): **Kraftskruven** är enklaste möjliga reduktionsresultatet av ett kraftsystem med minsta möjliga kraftmomentet

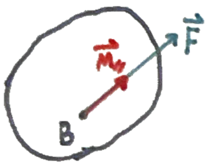
Att reducera ett reducerat kraftsystem till en kraftskruv



1) Dela upp $\vec{M}_A = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_\perp$



2) Ersätt $\vec{M}_\perp$ med ett kraftpar $\{-\vec{F}, \vec{F}\}$ där $-\vec{F}$ angriper i punkten A och $\vec{F}$ angriper en punkt B så att $\vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \vec{M}_\perp$. $d = \frac{M_\perp}{F}$



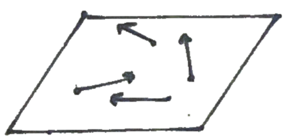
3) Addera krafterna $\vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$ i A och flytta $\vec{M}_{\parallel}$ till B.
Resultatet $\{\vec{F}, \vec{M}_{\parallel}\}$ är kraftskruven.

Def(enkraftsresultant): Om $\vec{M}_{\parallel} = \vec{0}$, d.v.s. $\vec{M}_A \perp \vec{F}$, har vi endast kraftsumman $\vec{F}$ kvar, vilken kallas för **enkraftsresultant**.

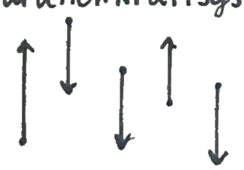
SATS: $\vec{F} \cdot \vec{M}_A = 0 \Leftrightarrow$ kraftsystemet har en resultant.

Exempel på system som alltid kan reduceras till en kraft (då $\vec{F} \neq \vec{0}$):

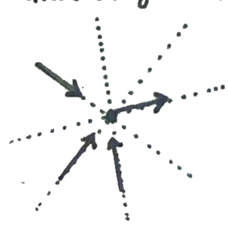
- Plana kraftsystem (alla krafter ligger på samma plan)



- Parallellkraftsystem (alla krafter är parallella)



- Strålkraftsystem (alla krafters verkningslinjer går genom samma punkt):



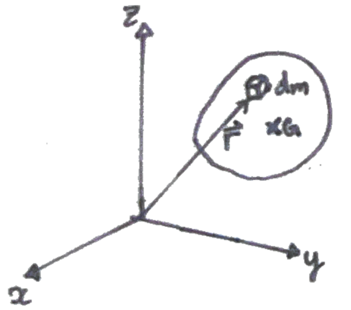
Sammanfattning av reduktionsresultat

1) Ett godtyckligt kraftsystem kan alltid reduceras till ett reduktionsresultat $\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$
2) Reduktionsresultatet kan reduceras till en kraftskruv med minsta möjliga kraftmoment.
3) Om $\vec{F} \neq \vec{0}$ och $\vec{F} \cdot \vec{M}_0 = 0 \Rightarrow$ kraftsystemet kan reduceras till en enkraftsresultant.
4) Om $\vec{F} = \vec{0}$ men $\vec{M}_0 \neq \vec{0} \Rightarrow$ systemet kan reduceras till ett kraftpar.

Masscentrum för en samling partiklar med massa m_k och koordinatposition $\vec{r}_k$

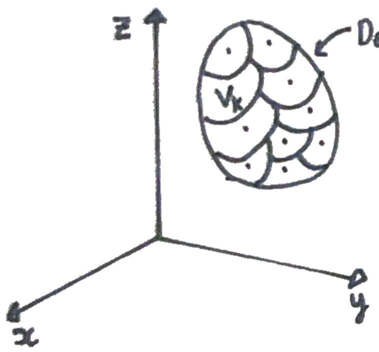
Masscentrumet
$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_k \cdot \vec{r}_k}{m} \quad \text{där } m = \sum m_k$$

Masscentrum för en stel kropp:



$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\,dm}{m}$$

Satsen för sammansatta kroppar:



Delkroppar med masscentrum $\vec{r}_{g_k}$

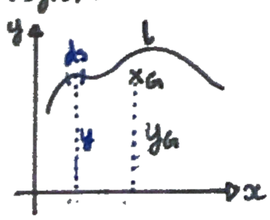
$$\vec{r}_G = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{m}\left[\frac{m_1}{m_1}\int_{V_1}\vec{r}\,dm + \ldots + \frac{m_n}{m_n}\int_{V_n}\vec{r}\,dm\right]$$
$$= \frac{1}{m}\left[m_1 \cdot \vec{r}_{g_1} + \ldots + m_n \vec{r}_{g_n}\right]$$
$$\therefore \vec{r}_G = \frac{\sum m_k r_{g_k}}{m}$$

Algoritm för att beräkna masscentrum:

1) Inför ett lämpligt koordinatsystem.
2) Dela upp i små masselement med massa dm
   $dm = \rho\, dV$ ρ är densitet
3) Använd satsen för en sammansatt kropp
   $\vec{r}_G = \frac{1}{m}\int \vec{r}_g\, dm$

Pappus regler:

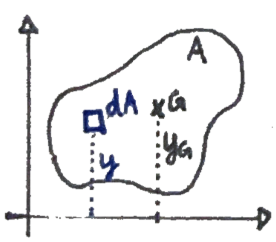
1)



A är arean av ytan av formen som skapas vid rotation av "tråden" runt x-axeln $A = 2\pi \int y\,ds$

$A = 2\pi\, y_G \cdot L$

2)



V är volymen av kroppen som skapas vid rotation av ytan runt x-axeln $V = 2\pi \int y\,dA$

$V = 2\pi\, y_G A$

Masscentrum för vanliga kroppar

- Triangel med hörn (x_1,y_1), (x_2,y_2) & (x_3,y_3)
  $\begin{cases} x_G = (x_1+x_2+x_3)/3 \\ y_G = (y_1+y_2+y_3)/3 \end{cases}$

- Halvcirkelbåge med ändar $(-R,0)$ och $(R,0)$ och höjdpunkt $(0,R)$
  $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$

- Halvcirkel med ändar $(-R,0)$ och $(R,0)$ och höjdpunkt $(0,R)$
  $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$

- Kon med radie R och höjd H vilandes på x och y axeln
  $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{H}{4} \end{cases}$

- Halvklot med radie R vilandes på x och y axeln
  $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{3R}{8} \end{cases}$

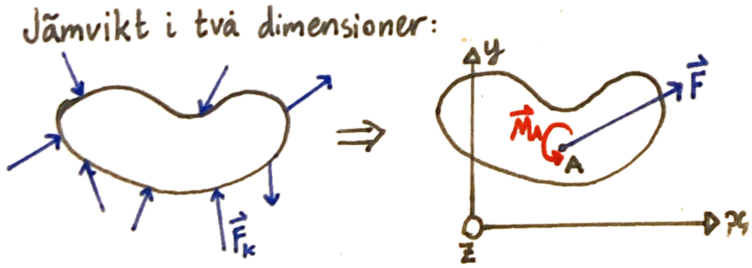
Def(stel kropp): En **stel kropp** är en massbelagd domän där avståndet mellan två godtyckliga punkter A och B är konstant.

Def(jämviktsläge): Ett **jämviktsläge** är ett läge som är konstant i tiden relativt en referensram.

SATS (jämviktsvilkor): Ett kraftsystem på stela kroppar är i jämviktsläge om det för varje delsystem gäller att summan av alla yttre krafter $\vec{F}=\vec{0}$ och $\vec{M}_A=\vec{0}$ för någon godtycklig punkt A.

Def(friläggning): Att **frilägga** ett system är processen att ersätta kontakten mellan kroppar i systemet med motsvarande krafter och kraftmoment.

Jämvikt i två dimensioner:



Jämviktsvillkor:
$\begin{cases} \vec{e}_x : F_x = 0 \\ \vec{e}_y : F_y = 0 \\ \vec{e}_z : M_{Az} = 0 \end{cases}$

Alternativa jämviktsvilkor:

(1) Två krafter + Ett moment	(2) En kraft + Två moment	(3) Tre moment
$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_{Az} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} F_x = 0 \\ M_{Az} = 0 \\ M_{Bz} = 0 \end{cases}$ $\vec{r}_{AB}$ får ej vara // med $\vec{F}$	$\begin{cases} M_{Az} = 0 \\ M_{Bz} = 0 \\ M_{Cz} = 0 \end{cases}$ A, B och C får ej ligga på en rät linje.

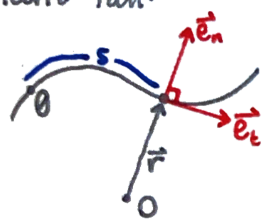
Def (ortsvektor): Partikelbanan, d.v.s. den kurva längs vilken en partikel rör sig i rummet kan beskrivas med hjälp av ortsvektorn $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. $\vec{r}(t)$ är partikelns kartesiska koordinater vid tidpunkten t.

Def (hastighet): Hastigheten av en partikel definieras som $\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$.

Def (acceleration): Accelerationen av en partikel definieras som $\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$. Accelerationen kan delas upp i två vektor komponenter $\vec{a}_t$ som är parallell med $\vec{v}$ och $\vec{a}_n$ som är orthogonal mot $\vec{v}$

Naturliga komponenter

Plant fall:



0 är en bestämd punkt på partikelbanan och s är båglängden från 0 till partikeln. s är beroende av tid d.v.s. $s = s(t)$

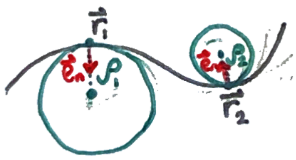
Ortsvektorn är då beroende av s, $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

Vi har då hastigheten $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \vec{e}_t$ där $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_t$

$e_t = 1 \Rightarrow v = \dot{s}$ och $\boxed{\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t = v\vec{e}_t}$

Från produktregeln får vi accelerationen $\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \dot{s}^2 \frac{d\vec{e}_t}{ds}$

$\frac{d\vec{e}_t}{ds}$ är en ny vektor med riktning $\vec{e}_n$ och belopp $\frac{1}{\rho}$ där ρ är krökningen, d.v.s radien av cirkeln som bäst passar partikelbanan vid $\vec{r}$.



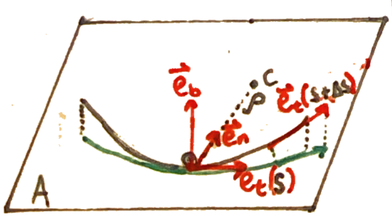
$\vec{e}_n$ pekar på den cirkelns mittpunkt.

Alltså $\boxed{\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{e}_n \\ &= \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \end{aligned}}$

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \dot{v}\vec{e}_t \\ \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \end{cases}$$

- Tangentialaccelerationen $\vec{a}_t$ beror på fartändringen $\dot{v}$
- Normalaccelerationen $\vec{a}_n$ beror på farten v och kurvans krökning ρ.

Allmänt 3D fall:



Det oskulerande planet A spänns upp av $\vec{e}_t(s)$ och $\vec{e}_t(s+\Delta s)$

$\vec{e}_n$ är parallell med A

$$\begin{cases} \vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \\ a_t = \dot{v} \\ a_n = v^2/\rho \\ a_b = 0 \\ \vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n \end{cases}$$

Beräkning av krökningsradien ρ:

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t \; ; \quad \vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \frac{\dot{s}^3}{\rho}\vec{e}_b \Rightarrow \rho = \frac{|\dot{s}^3|}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}$$

Om man istället för t betracktar partikelbanan med hjälp av en annan parameter u, $\vec{r}=\vec{r}(s(u))$ kan det ovanstående uttrycket skrivas som:

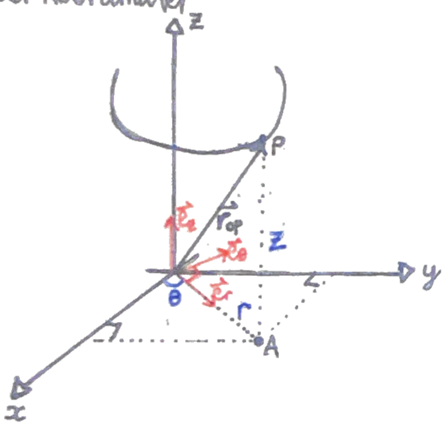
$$\boxed{\rho = \frac{|s'^3|}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}}$$

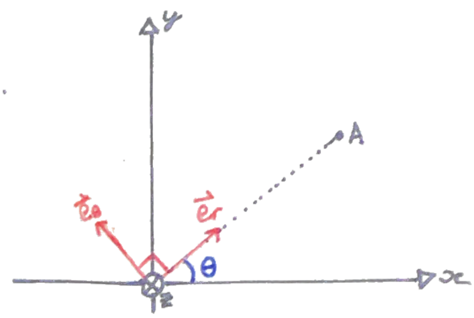
Om partikelbanan beskrivs som $y=y(x)$; $\vec{r}=(x,y(x),0)$, $\vec{r}'=(1,y'(x),0)$, $\vec{r}''=(0,y''(x),0)$ och $\vec{r}'\times\vec{r}''=(0,0,y''(x))$

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow s' = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\therefore \boxed{\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}}$$

Cylinderkoordinater





$$\begin{cases} \vec{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \vec{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \vec{e}_z = (0,0,1) \end{cases}$$

Ortsvektorn: $\boxed{\vec{r}_{op} = r\cdot\vec{e}_r + z\cdot\vec{e}_z}$

Hastigheten: $\boxed{\begin{array}{l} \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \\ v_r = \dot{r} \; ; \; v_\theta = r\dot{\theta} \; ; v_z = \dot{z} \end{array}}$

Accelerationen: $\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \; ; \; a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \; ; \; a_z = \ddot{z} \end{array}}$

Den fysikalisa innebörden av accelerationstermerna:

- Radiella komponenten: $\vec{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r$
  - a) $\ddot{r} = \dot{v}_r$ – Beror på ändringen av den radiella hastigheten.
  - b) $-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r = r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta = v_\theta\dot{\vec{e}}_\theta$ – Beror på ändringen av den transversella hastighetens riktning.
- Transversella komponenten: $(r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$
  - a) $r\ddot{\theta}$ – Beror på ändringen av vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ (vinkelacceleration)
  - b) $\dot{r}\dot{\theta}$ – Beror på ändringen av v_θ med avståndet r
  - c) $\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \dot{r}\dot{\vec{e}}_r = v_r\dot{\vec{e}}_r$ – Beror på ändringen av den radiella hastighetens riktning.
- Vertikala komponenten: $\vec{a}_z = \ddot{z}\vec{e}_z$
  - a) $\ddot{z} = \dot{v}_z$ – Beror endast på ändringen av den vertikala komponenten av hastigheten

Newtons lagar:

Newtons första lag (tröghetslagen): Då ~~massan~~ m är konstant för en partikel med hastighet $\vec{v}$ har vi $\boxed{\vec{F}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}=\text{konstant}}$

Def (rörelsemängd): Rörelsemängden $\vec{p}$ för en partikel är $\boxed{\vec{p}=m\vec{v}}$

Newtons andra lag (rörelsemängslagen): Ändringen per tid av partikelns rörelsemängd är lika med summan av de krafter som verkar på partikeln och sker i den riktning längs vilken denna kraftsumma verkar. Alltså

$$\boxed{\dot{\vec{p}}=\vec{F}}$$

Dessutom $\dot{\vec{p}} = \dot{m}\vec{v}+m\dot{\vec{v}} = \dot{m}\vec{v}+m\vec{a}$. Om m är konstant har vi:

$$\boxed{\dot{\vec{p}}=m\vec{a}=\vec{F}}$$

Newtons tredje lag (lagen om verkan och motverkan): För varje kraftverkan från en kropp A på kroppen B finns en lika stor och motriktad reaktionskraft från kroppen B på kroppen A.

Def (kinetisk energi): Den kinetiska energin av en partikel beräknas som $T=\frac{1}{2}mv^2$

Def (arbete): Arbetet en kraft utför på en partikel som reser i en bana från $\vec{r}_1$ till $\vec{r}_2$ beräknas som

$$U_{1-2}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\,d\vec{r}=\int_{v_1}^{v_2}mv\,dv=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

SATS (Lagen om den kinetiska energin): $\boxed{U_{1-2}=T_2-T_1}$

Def (effekt): Effekten P definieras som arbete per tidsenhet; $P=\frac{dU}{dt}$ och $U_{1-2}=\int_{t_1}^{t_2}P\,dt$.

Def (konservativ): Kraften $\vec{F}$ är konservativ om arbetsintegralen $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\,d\vec{r}$ är oberoende av integrationsvägen.

SATS: Om $\vec{F}$ är konservativ har vi $\oint_C \vec{F}\,d\vec{r}=0$

Def (potentiell energi): För ett konservativt kraftfält $\vec{F}$ är den potentiella energin V av en partikel i punkten $\vec{r}$ definierad som $\boxed{V(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\,d\vec{r}}$

där $\vec{r}_0$ är en fast punkt.

SATS (Potentiell energi för tyngdkraften): Låt $\vec{F}=-mg\vec{e}_z$, $\vec{r}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ och $\vec{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ där $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{R}$. Vi har då

$$V(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}-mg\vec{e}_z\cdot(dx\vec{e}_x+dy\vec{e}_y+dz\vec{e}_z)=\int_{z_0}^{z}mg\,dz=mgz-mgz_0=mgz+C.\quad\boxed{V=mgz+C}$$

SATS (Potentiell energi för allmänna gravitationskraften): Låt $\vec{F}=-G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r$ och $\vec{r}=r\vec{e}_r$ alltså $d\vec{r}=dr\vec{e}_r+rd\vec{e}_r$ där $d\vec{e}_r\perp\vec{e}_r$. Vi har då

$$V(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\,d\vec{r}=\int_{r_0}^{r}G\frac{mM}{r^2}dr=-\frac{GmM}{r}+\frac{GmM}{r_0}=-\frac{GmM}{r}+C$$

$\{$Normera: $V\to 0$ då $r\to\infty\Rightarrow C=0\}$ $\boxed{V=-\frac{GmM}{r}}$.

SATS (Potentiell energi nära jordytan): Låt z vara en partikel med massa m's avstånd från jordytan och R vara jordens radie. Vi har $GM = gR^2$ nära jordens yta. Från allmänna gravitationskraftens potentiella energi har vi då att för relativt små z, alltså $\frac{z}{R} << 0$, är potentiella energin

$$\boxed{V = mgz - mgR}$$

SATS (Potentiell energi för fjäderkraften): Låt $\vec{F} = -k(r - L_0)\vec{e}_r$, där L_0 är fjäderns ospända längd, och $\vec{r} = r\vec{e}_r$, alltså $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r$ där $d\vec{e}_r \perp \vec{e}_r$. Vi har då att den potentiella energin för fjäder kraften beräknas som

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{L_0}^{r} k(r - L_0)\, dr = \frac{1}{2}k(r - L_0)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$$

Alltså $\boxed{V = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2}$

SATS (Mekaniska energilagen): Låt $\vec{F}$ vara konservativt. Vi har då de två nedanstående likheterna:

- $\boxed{U_{1-2} = V_1 - V_2}$
- $\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E}$ där E är den mekaniska energin.

SATS (Kosmiska hastigheter I och II): De kosmiska hastigheterna v_I och v_{II} är hastigheten för omloppsbana nära jorden respektive flykthastigheten från jorden och

- $v_I = \sqrt{gR} \approx 8 \text{km/s}$
- $v_{II} = \sqrt{2gR} \approx 11{,}3 \text{km/s}$

Och de har förhållandet

- $v_{II} = \sqrt{2}\, v_I$

Def (rörelsemängdsmoment): **Rörelsemängdsmomentet** i origo $\vec{H}_0$ för ett system med n partiklar med massa m_j, ortsvektor $\vec{r}_j$ och hastighet $\vec{v}_j$ för $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definieras som

$$\boxed{\vec{H}_0 = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j}$$

SATS (Momentekvationen): Låt ett system ha rörelsemängdsmomentet $\vec{H}_0$ och kraftmomentet $\vec{M}_0$. Vi har då $\boxed{\dot{\vec{H}}_0 = \vec{M}_0}$

Def (kraftimpuls): Integralen $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$ kallas **kraftimpulsen** i intervallet (t_0, t_1)

Def (momentimpuls): Integralen $\int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_0 dt$ kallas **momentimpulsen** i intervallet (t_0, t_1)

SATS (Kraftimpulslagen): Låt $\Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$. Vi har då $\boxed{\Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt}$

SATS (Momentimpulslagen): Låt $\Delta\vec{H}_0 = \vec{H}_0(t_1) - \vec{H}_0(t_0)$. Vi har då $\boxed{\Delta\vec{H}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_0 dt}$

SATS: "Vanliga" krafter, som tillexempel tyngdkraft eller fjäderkraft, är betydligt mindre än stötkrafterna och kan därför försummas vid behandling av stötförlopp.

SATS (Stötimpulslagen): Betrakta en stöt mellan två partiklar med ingående hastighet $\vec{v}_1$ respektive $\vec{v}_2$ och slutgiltig hastighet $\vec{v}_1'$ och $\vec{v}_2'$. Låt $\vec{S}_{12}$ vara stötkraften på partikel 1 från partikel 2. Impulslagen på partikel 1 ger:

$$\Delta\vec{p}_1 = \lim_{\tau\to 0}\int_0^{\tau}(\vec{S}_{12}+\vec{F})dt = \lim_{\tau\to 0}\int_0^{\tau}\vec{S}_{12}dt = \vec{I}_{12}$$

Alltså $\boxed{\Delta\vec{p}_1 = \vec{I}_{12}}$

Följdsats (Stötimpulslagen för hela systemet): Låt $\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2$. Newtons tredje lag ger att $\vec{S}_{12}+\vec{S}_{21}=0$. Detta ger oss:

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \lim_{\tau\to 0}\int_0^{\tau}(\vec{S}_{12}+\vec{S}_{21})dt = \int_0^{\tau}0\,dt = 0$$

Alltså:

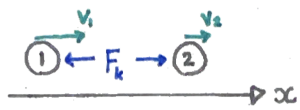
$\Delta p = 0$

$$\Rightarrow \boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'} \quad \text{eller} \quad \boxed{\vec{p} = \vec{p}'}$$

Studstalet e

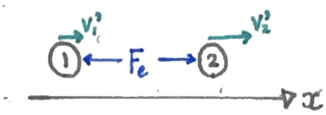
En stöt kan delas in i två faser:
- Kompressionsfas då partiklarna deformeras av en kraft F_k
- Expansionsfas då partiklarna återgår till sin ursprungliga fas och trycks ifrån varandra med en kraft F_e

Kompressionsfas: $0 \leq t < t_0$



Mellanstadie: $t = t_0$

Expansionsfas: $t_0 < t \leq t_1$



Def (studstal): Studstalet e definieras som

$$\boxed{e = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_e\,dt}{\int_0^{t_0} F_k\,dt}}$$

Användning av impulslagen för partikel 1 och partikel 2 ger

$$e = \frac{v_{1x}' - v_{0x}}{v_{0x} - v_{1x}} \quad (1)$$

respektive

$$e = \frac{v_{2x}' - v_{0x}}{v_{0x} - v_{2x}} \quad (2)$$

(1) och (2) ger tillsammans $\boxed{e = \dfrac{v_{2x}' - v_{1x}'}{v_{1x} - v_{2x}}}$

Def(centralkraft, kraftcentrum): $\vec{F}$ kallas för en centralkraft om dess verkningslinje går genom en och samma fixa punkt vilket kallas för kraftcentrum.

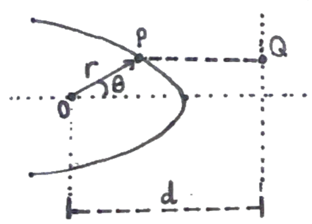
SATS: Vid centralrörelse är partikelbanan plan. [Bevis på sidan 327, uppl. 2]

Def(sektorhastighet): Sektorhastigheten $\dot{A}$ syftar på arean per tid som en partikels ortsvektor täcker. och beräknas: $\boxed{\dot{A} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|}$

SATS(Keplers andra lag): Vid rörelse under inverkan av en centralkraft är sektorhastigheten konstant. Det vill säga med $h = |\vec{r} \times \vec{v}|$ ($= r^2\dot{\theta}$ i cylinderkoord.) är h konstant och $\boxed{\dot{A} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{konst.}}$
[Bevis på sidan 328, uppl. 2]

SATS(Binets formel): Låt $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$. Vi har då $\boxed{a_r = -h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)}$
[Bevis på sidan 330, uppl. 2]

Def(Konisk sektion, direktris, brännpunkt, excentricitet):



En konisk sektion definieras som en kurva där kvoten av avståndet från en godtycklig punkt P på kurvan till en fix punkt och en fix linje är konstant,

$$e = \frac{OP}{PQ}$$

Linjen kallas för direktris och punkten O för brännpunkten eller fokus. Själva kvoten e kallas för kurvans excentricitet.
Vi får $e = \frac{r}{d - r\cos\theta}$
Och kurvan definieras av funktionen $\boxed{r(\theta) = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}}$
Kurvan antar:
- en ellips då $0 \leq e < 1$ (cirkel då $e = 0$)
- en parabel då $e = 1$
- en hyperbel då $e > 1$

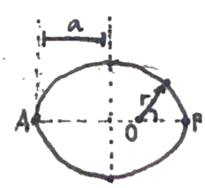
SATS(Keplers första lag): Planetbanorna är ellipser med med solen i brännpunkten.
Planetbanorna kan beskrivas som: $\boxed{r(\theta) = \frac{h^2/GM}{1 + \frac{Ch^2}{GM}\cos\theta}}$

Där C är en integrationskonstant. Alltså $e = \frac{Ch^2}{GM}$ och $d = \frac{1}{C}$
[Bevis på sidan 331-333, uppl. 2]

SATS(Sambandet mellan energin E och banans form): Vid centralrörelse har vi $E = k^2(e^2 - 1)$ där k är en konstant.
Från detta får vi:

$$\begin{cases} E > 0 \Rightarrow e > 1 \Rightarrow \text{Hyperbolisk bana} \\ E = 0 \Rightarrow e = 1 \Rightarrow \text{Parabolisk bana} \\ E < 0 \Rightarrow e < 1 \Rightarrow \text{Elliptisk bana} \end{cases}$$

SATS(Avstånd på en ellips): Vi har att avstånden:
$OP = (1 - e)a$
$OA = a + ae = (1 + e)a$



SATS (Ellipsens ekvation): Ellipsens ekvation kan skrivas som $\boxed{r = a\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}}$
[Bevis på sidan 334, uppl. 2]

SATS (Keplers tredje lag): Kvadraten på planetens omloppstid τ är proportionell mot kuben på storaxelns längd d.v.s. $\tau^2 \propto a^3$
Mer specifikt: $\boxed{\tau = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}}$

[Bevis på sidan 334-335, uppl. 2]

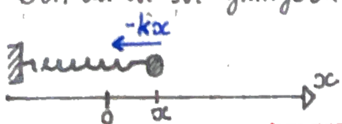
SATS (Energin på en eliptisk bana): Energin på en eliptisk bana kan skrivas som
$\boxed{E = -G\frac{mM}{2a}}$ [Bevis på sidan 339, uppl. 2]

SATS (Hastigheten på en eliptisk bana): Hastigheten på en eliptisk bana kan skrivas som
$\boxed{v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}}$ [Bevis på sidan 339, uppl. 2]

Harmonisk Oscillator

Def (harmonisk oscillator): En harmonisk oscillator är ett oscillerande system som inte dämpas, alltså en fri, odämpad svängning.

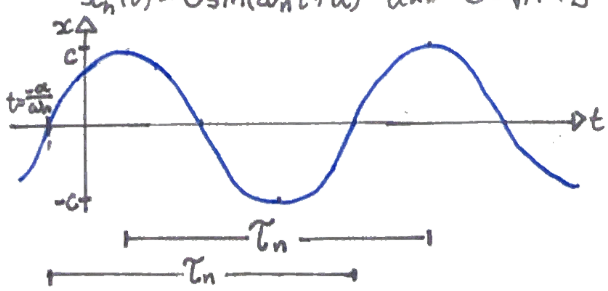
Def (svägnings ekvation, vinkelfrekvens): En harmonisk oscillators svängningsekvation är en omformulering av kraftekvationen i oscillationens rikting x, i formen $\ddot{x} + \omega_n^2 x = d$ där d är en konstant.
I det enklaste fallet av en partikel på en lätt fjäder på en friktionsfri yta parallell med marken får vi kraftekvationen
$\rightarrow$: $m\ddot{x} = -k$
Och då är svängningsekvationen: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$



I detta fall är $\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, ω_n kallas för vinkelfrekvensen.

SATS: Den allmänna homogena lösningen till svängningsekvationen är:

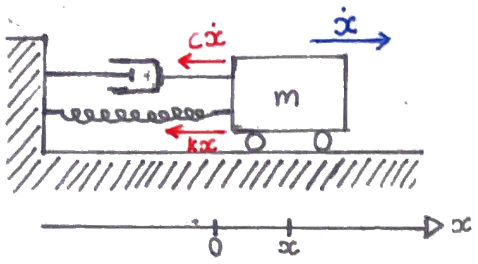
$x_h(t) = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t$ där $A, B \in \mathbb{R}$
eller
$x_h(t) = C\sin(\omega_n t + \alpha)$ där $C = \sqrt{A^2+B^2}$ och $\tan\alpha = \frac{B}{A}$



C kallas amplituden och
α kallas fasvinkeln

Def: Avståndet (tiden) τ_n kallas för perioden och beräknas som $\boxed{\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}}$

Fri Dämpad Svängning



Def(fri dämpad svängning): En fri dämpad svängning är en svängning som dämpas av en kraft $c\dot{x}$ som beror på svängningens hastighet.
c kallas för dämpnings koefficienten.

Svängnings ekvationen och kararaktäristiska polynomet

Kraftekvationen ger svängnings ekvationen: $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
Vi inför dämpningskvoten ζ (zeta) så att $2\zeta\omega_n = \frac{c}{m}$
Vi har då svängningsekvationen:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0}$$

Och följdaktligen den karaktäristiska ekvationen $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$

Vilket har rötterna $\boxed{\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$

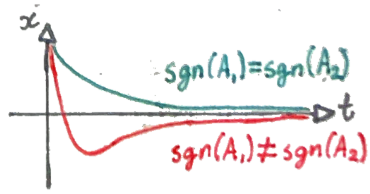
Beroende på ζ delas svängningens rörelse in i tre fall:

Fall 1: $\zeta > 1$; stark dämpning.
Vi har två reella rötter $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$
Som ger

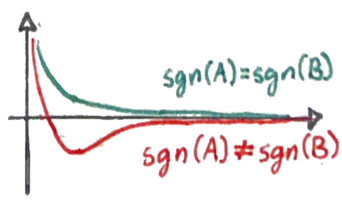
$$x(t) = A_1 e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + A_2 e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

Eller:

$$\boxed{x(t) = e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t}\left(A_1 + A_2 e^{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\right)}$$



Fall 2: $\zeta = 1$; kritisk dämpning
Vi har en dubbelrot $\lambda_{1,2} = -\omega_n$
Som ger $\boxed{x(t) = (At+B)e^{-\omega_n t}}$



Notera att vid både stark dämpning och kritisk dämpning är $x(t)=0$ för max ett värde av t. Alltså är dessa fall inte periodiska rörelser.

SATS: Fallet kritisk dämpning relaxerar till jämviktsläge $x=0$ snabbare än stark och svag dämpning.

Fall 3: $\zeta < 1$; svag dämpning

Vi har två komplexa rötter $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Vi inför vinkelfrekvensen vid svag dämpning: $\boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

Vi får då $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$

Som i sin tur ger

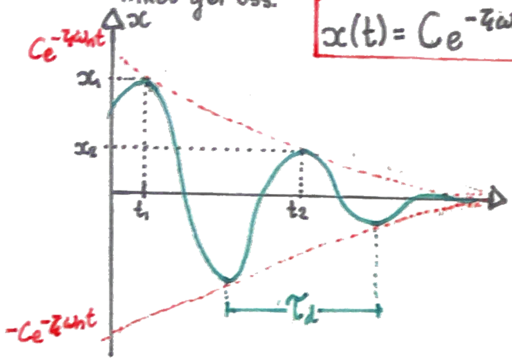
$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t)$$

Vi låter $C = \sqrt{A^2+B^2}$

$\tan\alpha = \frac{A}{B}$

Vilket ger oss:

$$\boxed{x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \alpha)}$$



$$\boxed{\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

SATS: Perioden τ_d beror på dämpningen ζ.

Def (logaritmiskt dekrement): Låt $t_2 = t_1 + \tau_n$, $x_1 = x(t_1)$ och $x_2 = x(t_2)$.
Det logaritmiska dekrementet δ är den naturliga logaritmen av kvoten mellan x_1 och x_2. Alltså $\boxed{\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}$

SATS: Vi har förhållandet $\boxed{\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}}$ [Bevis på sidan 362, uppl. 2]