

Mekanik

Def (skalär): En skalär c är en storhet som är oberoende av koordinatsystemet

Def (vektor, belopp, längd, riktning): En vektor \vec{a} är en storhet som bestäms av:

- a) bellopet / längden $l\vec{a} = a$
- b) riktningen



Def (vektorsumma): Vektorsumman av $\vec{a} + \vec{b}$ definieras geometriskt som



. Notera att $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, d.v.s. vektorsumman är kommutativ.

Def (multiplikation): Multiplikation av en vektor \vec{a} med en skalär c är en ny vektor med

- a) bellopet $|c \cdot \vec{a}| = |c| \cdot |\vec{a}|$
- b) riktningen $\begin{cases} \text{samma som } a \text{ om } c > 0 \\ \text{motsatt av } a \text{ om } c < 0 \end{cases}$

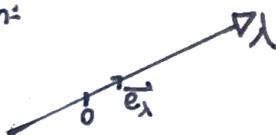
Def (enhetsvektor): En enhetsvektor \vec{e}_a är definierad som $\vec{e}_a = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$ och definierar en "ren" riktning.

Def (skalärprodukt): Skalärprodukten $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definieras som $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta$: $0 \leq \theta \leq \pi$ där θ är vinkeln mellan \vec{a} och \vec{b} . Skalärprodukten har egenskaperna:

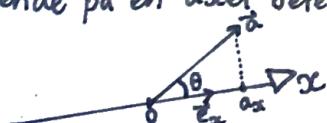
- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (kommutativ)
- b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Def (axel): En axel λ är en rät linje genom origo med riktning \vec{e}_λ .

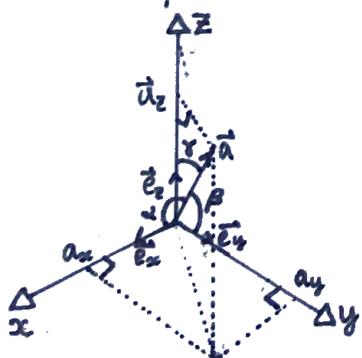
Notation:



Def (projektion, vektorkomponent): Projektionen eller vektorkomponenten med avseende på en axel betecknas $a_{\lambda} = \vec{a} \cdot \vec{e}_{\lambda} = a \cdot \cos \theta$



Def (vektorkomponenter): Vektorkomponenter i \mathbb{R}^3



$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = a \cos \alpha$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = a \cos \beta$$

$$a_z = \vec{a} \cdot \vec{e}_z = a \cos \gamma$$

$$a^2 = a^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

α, β, γ är beroende.

α, β, γ är riktningsvinkelar

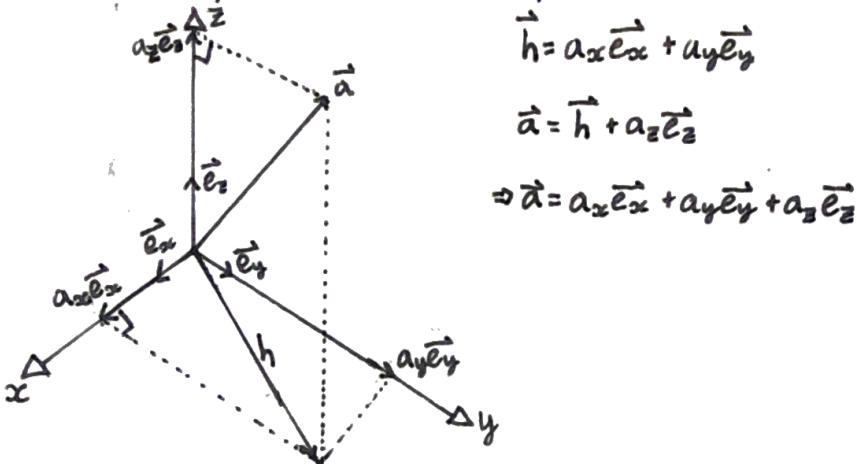
Vektorn \vec{a} har:

$$a) \text{Beloppet } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

b) Riktning bestämd av α, β, γ

Notera: Vektorkomponenter är beroende av koordinatsystemet, alltså ej skalärer.

Def (vektorkomponter): Vektorkomponter definieras som $a_x \vec{e}_x$ så att:



$$\vec{h} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \vec{h} + a_z \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

Beräkning av skalärprodukt med hjälp av vektor komponter:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) = \dots = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Def (vektorprodukt, kryssprodukt): Vektorprodukten eller kryssprodukten av \vec{a} och \vec{b} , skrivet $\vec{a} \times \vec{b}$, är en ny vektor med:

a) beloppet $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta$

b) riktningen $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ och högerhandsregeln

Vektorprodukten har egenskaperna:

- $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antisymmetrisk)

- Arean av parallelogrammet uppspänt av \vec{a} och \vec{b} är lika med $|\vec{a} \times \vec{b}|$



Beräkning av vektorprodukt med hjälp av vektorkomponter:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y = -\vec{e}_z \times \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \times (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z)$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z$$

Minnesregel: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Def (enhet): En fysikalisk storhet (längd, massa, acceleration, etc.) bestäms med hjälp av enheter.

storhet $\rightarrow L = 2 \text{ m}$ \leftarrow enhet

Def (måtsystem): Ett måtsystem är en sammansättning av enheter. T.ex. SI-systemet.

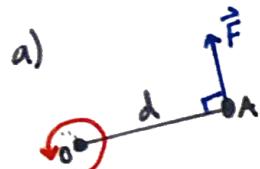
	storhet	dimension	enhet
grundstorheter	massa	M	kg
mätstörheter	tid	T	s
	längd	L	m
hastighet		LT^{-1}	ms^{-1}
acceleration		LT^{-2}	ms^{-2}
kraft		MLT^{-2}	$N (kg \cdot m/s^2)$
arbete		ML^2T^{-2}	J ($N \cdot m$)
effekt		ML^2T^{-3}	$W (J \cdot s^{-1})$

Def (kraft): Kraften \vec{F} defineras som:

a) en vektor \vec{F} .

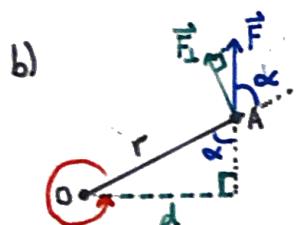
b) en tillordnad angreppspunkt A.

Kraftmoment (diagram)



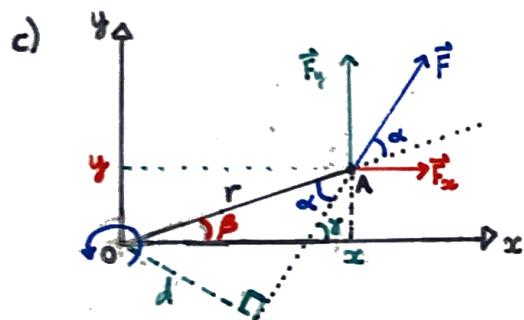
Def (hävarm): d kallas för hävarmen.

$$M_o = d \cdot F$$



$$\begin{cases} M_o = d \cdot F = r \cdot \sin(\alpha) \cdot F \\ M_o = r \cdot F_1 = r \cdot \sin(\alpha) \cdot F \end{cases}$$

$$\therefore M_o = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$



$$M_o = d \cdot F = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$

$$\alpha + \beta + (\pi - \gamma) = \pi$$

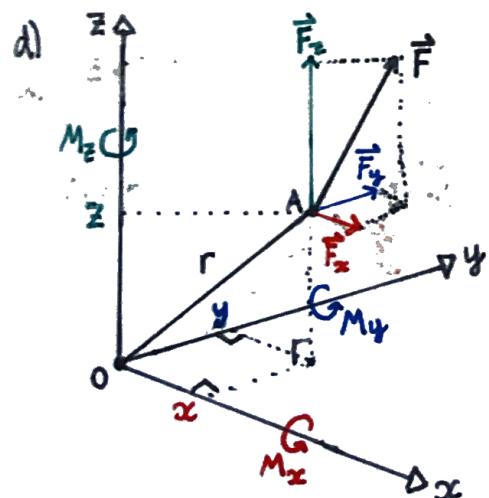
$$\Rightarrow \alpha = \gamma - \beta$$

$$\Rightarrow M_o = F \cdot r \cdot \sin(\gamma - \beta)$$

$$= F \cdot r (\sin(\gamma) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\gamma))$$

$$= F \cdot \sin(\gamma) \cdot r \cdot \cos(\beta) - F \cdot \cos(\gamma) \cdot r \cdot \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow M_o = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

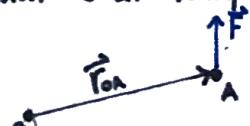


$$\begin{cases} M_x = y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ M_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{cases}$$

Def (kraftmoment): Kraftmomentet, eller kraftens vridande förmåga, definieras som:

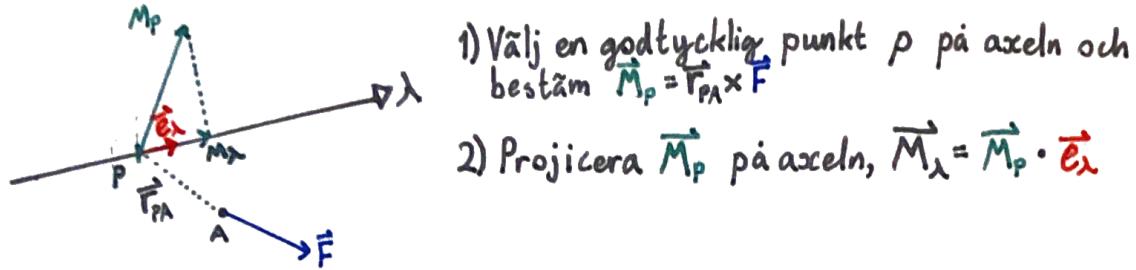
$$\vec{M}_o = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

där O är vridpunkten & A är angreppspunkten av \vec{F}



M_o har enheten Nm

Moment med avseende på en axel:

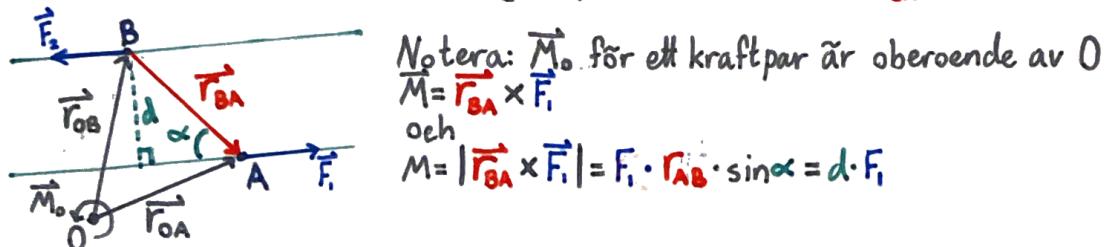


SATS: M_λ är oberoende av vilken punkt på axeln man väljer när man bestämmer momentet med avseende på axeln λ .

Def (kraftsystem): Ett kraftsystem består av krafter med sina angreppspunkter $\{\vec{F}_k, P_k\}$ $k=1, \dots, n$. Kraftsumman av ett kraftsystem definieras som $\vec{F} = \sum \vec{F}_k$

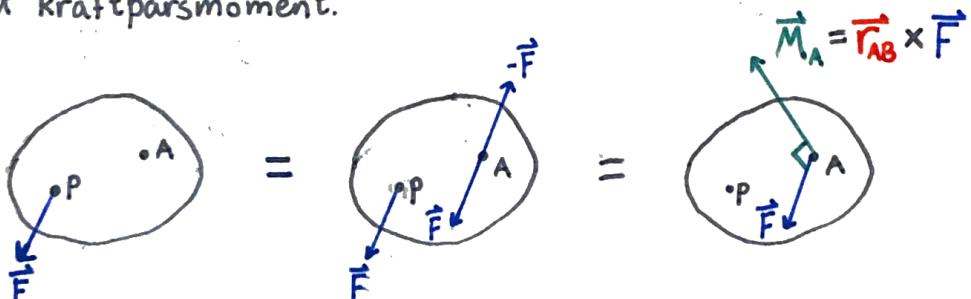
Def (kraftpar): Ett kraftpar är två krafter \vec{F}_1 och \vec{F}_2 med egenskapen $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, kraftsumman av ett kraftpar är noll. Kraftmomentet av kraftparet på en punkt O där angreppspunkten av \vec{F}_1 och \vec{F}_2 är A respektive B beräknas som:

$$\vec{M}_o = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{OB} \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_{OA} - \vec{r}_{OB}) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1$$



Att flytta en kraft:

Man får flytta en kraft till en ny punkt men man måste kompensera med ett kraftparsmoment.



Att flytta n krafter:

Följ ovan steg för alla krafter till en och samma punkt A och:

$$\{\vec{F} = \sum \vec{F}_k$$

$$\{\vec{M}_A = \sum \vec{r}_{AP_k} \times \vec{F}_k$$

$\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$ kallas för reduktionsresultatet.

Ett godtyckligt kraftsystem kan alltid reduceras till ett reduktionsresultat

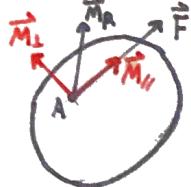
Sambandsformeln för kraftmomentet:

$$\vec{r}_{AP_k} \quad \vec{r}_{BP_k} \quad \vec{F}_k \quad \vec{M}_A = \sum \vec{r}_{AP_k} \times \vec{F}_k, \quad \vec{M}_B = \sum \vec{r}_{BP_k} \times \vec{F}_k, \quad \vec{r}_{AP_k} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP_k}$$

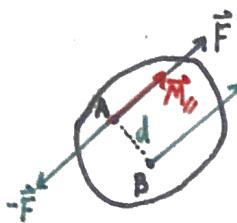
$$\therefore \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

Def(kraftskruv): Kraftskruven är enklaste möjliga reduktionsresultatet av ett kraftsystem med minsta möjliga kraftmomentet

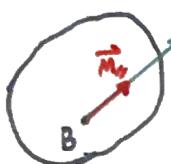
Att reducera ett reducerat kraftsystem till en kraftskruv



$$1) \text{Dela upp } \vec{M}_A = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp}$$



$$2) \text{Ersätt } \vec{M}_{\perp} \text{ med ett kraftpar } \{-\vec{F}, \vec{F}\} \text{ där } -\vec{F} \text{ angriper i punkten A och } \vec{F} \text{ angriper en punkt B så att } \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \vec{M}_{\perp}. d = \frac{M_L}{F}$$



$$3) \text{Addera krafterna } \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0} \text{ i A och flytta } \vec{M}_{\parallel} \text{ till B. Resultatet } \{\vec{F}, \vec{M}_{\parallel}\} \text{ är kraftskruven.}$$

Def(enkraftsresultant): Om $\vec{M}_{\parallel} = \vec{0}$, d.v.s. $\vec{M}_A \perp \vec{F}$, har vi endast kraftsumman \vec{F} kvar, vilken kallas för enkraftsresultant.

SATS: $\vec{F} \cdot \vec{M}_A = 0 \Leftrightarrow$ kraftsystemet har en resultant.

Exempel på system som alltid kan reduceras till en kraft (då $\vec{F} \neq \vec{0}$):

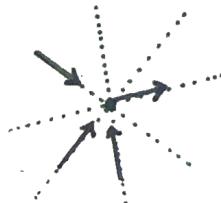
- Plana kraftsystem (alla krafter ligger på samma plan)



- Parallelkraftsystem (alla krafter är parallella)



- Sträkkraftsystem (alla kraffters verkningslinjer går genom samma punkt):



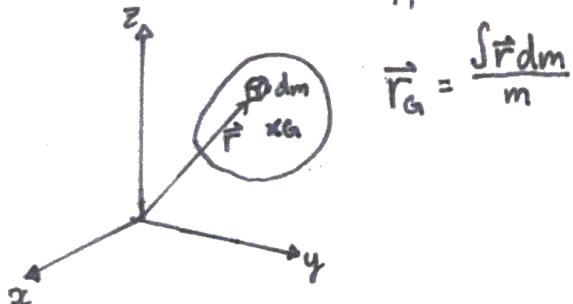
Sammanföllning av reduktionsresultat

- 1) Ett godtyckligt kraftsystem kan alltid reduceras till ett reduktionsresultat $\{\vec{F}, \vec{M}_o\}$
- 2) Reduktionsresultatet kan reduceras till en kraftskruv med minsta möjliga kraftmoment.
- 3) Om $\vec{F} \neq \vec{0}$ och $\vec{F} \cdot \vec{M}_o = 0 \Rightarrow$ kraftsystemet kan reduceras till en enkraftsresultant.
- 4) Om $\vec{F} = \vec{0}$ men $\vec{M}_o \neq \vec{0} \Rightarrow$ systemet kan reduceras till ett kraftpar.

Masscentrum för en samling partiklar med massa m_k och koordinatposition \vec{r}_k

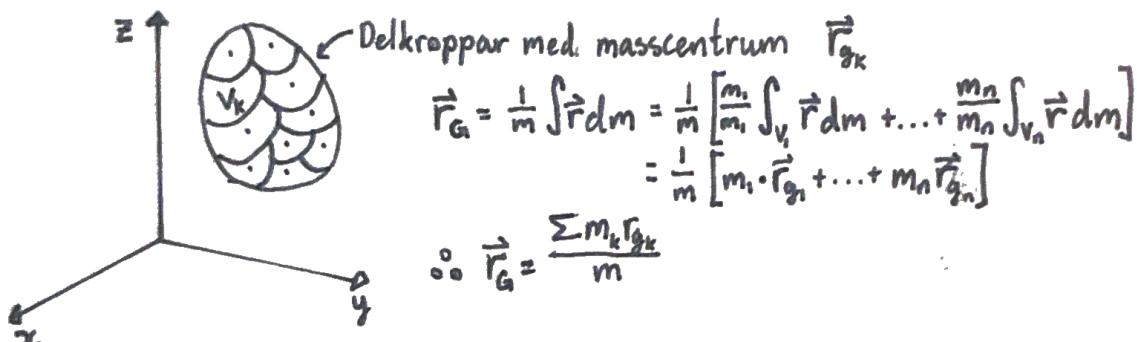
$$\text{Masscentrumet } \vec{r}_G = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{m} \text{ där } m = \sum m_k$$

Masscentrum för en stel kropp:



$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$$

Satsen för sammansatta kroppar:



Delkroppar med masscentrum \vec{r}_{Gk}

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm = \frac{1}{m} \left[\frac{m_1}{m} \int_{V_1} \vec{r} dm + \dots + \frac{m_n}{m} \int_{V_n} \vec{r} dm \right]$$

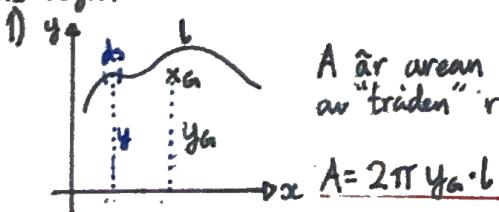
$$= \frac{1}{m} \left[m_1 \cdot \vec{r}_{G1} + \dots + m_n \vec{r}_{Gn} \right]$$

$$\therefore \vec{r}_G = \frac{\sum m_k \vec{r}_{Gk}}{m}$$

Algoritm för att beräkna masscentrum:

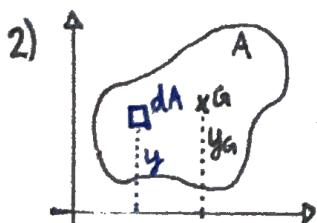
- 1) Inför ett lämpligt koordinatsystem.
- 2) Dela upp i små masselement med massa dm
 $dm = \rho dV$ ρ är densitet
- 3) Använd satsen för en sammansatt kropp
 $\vec{r}_G = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm$

Pappus regler:



A är arean av ytan av formen som skapas vid rotation av "träden" runt x-axeln $A = 2\pi y_G l$

$$A = 2\pi y_G l$$



Vär volymen av kroppen som skapas vid rotation av ytan runt x-axeln $V = 2\pi y_G A$

$$V = 2\pi y_G A$$