

Flervariabelsanalys

Def (skalärprodukt): Låt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ och $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ vara vektorer i \mathbb{R}^n . $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ kallas **skalärprodukten**. Följande räkneregler gäller:

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
- $(c\vec{x}) \cdot \vec{y} = c(\vec{x} \cdot \vec{y})$
- $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 ; \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Def (parallel, samma riktning): Låt $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. \vec{x} och \vec{y} är **parallel** om $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi säger då att \vec{x} och \vec{y} har samma riktning. $\vec{x} \parallel \vec{y}$.

Def (norm, längd): Låt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Normen eller längden av \vec{x} skrivs som $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Def (ortogonal): Låt $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. \vec{x} och \vec{y} är **ortogonala** om $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Def (vinkel): Låt $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ och $\theta = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \in [0, \pi]$, då är θ **vinkel** mellan \vec{x} och \vec{y}

SATS 1.1 (Cauchy-Schwartz olikhet): I \mathbb{R}^n gäller $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ med likhet om \vec{x} och \vec{y} är parallella.

SATS 1.2 (Triangelolikheten): I \mathbb{R}^n gäller $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ med likhet då $\vec{x} = \lambda \vec{y} : \lambda \geq 0$

SATS 1.3 (Omvända Triangelolikheten): I \mathbb{R}^n gäller $||\vec{x}| - |\vec{y}|| \leq |\vec{x} \pm \vec{y}|$

SATS 1.3: För varje $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gäller $|x_k| \leq |\vec{x}| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \quad \forall k=1, \dots, n$

Def (öppet klot): Mängden $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$ är ett **öppet klot** med centrum i \vec{a}

Def (omgivning): En mängd $U \subset \mathbb{R}^n$ är en **omgivning** av $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum i \vec{a}

Def (komplement): Komplementet till en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$, betecknat C_M , är $C_M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \notin M\}$

Def (inre punkt): Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . \vec{a} är en **inre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring \vec{a} som ligger i M .



Def (yttrre punkt): Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . \vec{a} är en **yttrre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring \vec{a} som ligger i C_M



Def (randpunkt): Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . a är en **randpunkt** till M om varje öppet klot kring a skär både M och C_M



Def (rand): Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . Mängden av randpunkter till M kallas för **randen** till M , betecknat ∂M .

Def (öppen mängd): En mängd M är **öppen** om $\partial M \subset M$

Def (sluten mängd): En mängd M är **sluten** om $\partial M \subset M$

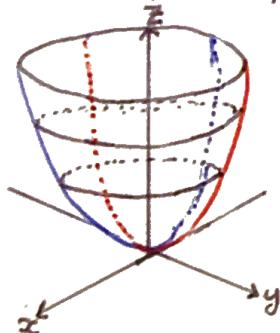
Def' (öppen mängd): En mängd M är **öppen** om det för varje $\bar{x} \in M$ finns ett öppet klot kring \bar{x} som ligger i M

Def (begränsad): En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är **begränsad** om det finns ett $C > 0$ så att $|x| < C \quad \forall x \in M$

Def (kompakt): En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är **kompakt** om M är både sluten och begränsad.

Att skissa $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

- 1) Bestäm (x, y) för $f(x, y) = 0$
- 2) Bestäm (x, y) för $f(x, y) = c$ för några $c \in \mathbb{R}$
- 3) Rita ett snitt av planet $x=0$
- 4) Rita ett snitt av planet $y=0$

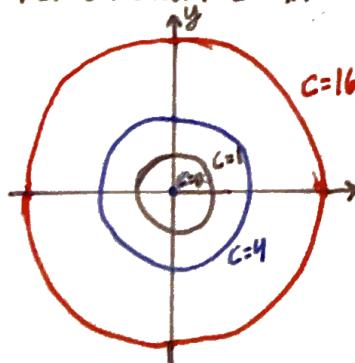


$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Def (Elliptisk paraboloid): Grafer av denna form kallas för **elliptiska paraboloider**.

Att skissa $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ med nivåkurvor:

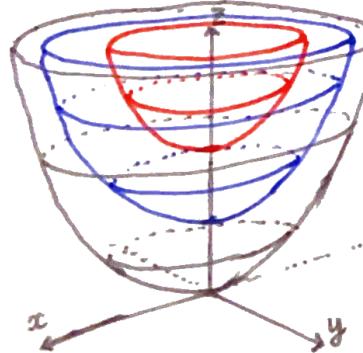
- För ett antal $c \in \mathbb{R}$ skissa kurvor $f(x, y) = c$



$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Att skissa $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ med nivå ytor

- För ett antal $C \in \mathbb{R}$ skissa $f(x, y, z) = C$ i \mathbb{R}^3



$$\begin{aligned} C=0 \\ C=1 \\ C=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= z - x^2 - y^2 \\ f(x, y, z) &= C \\ \Rightarrow z &= x^2 + y^2 + C \end{aligned}$$

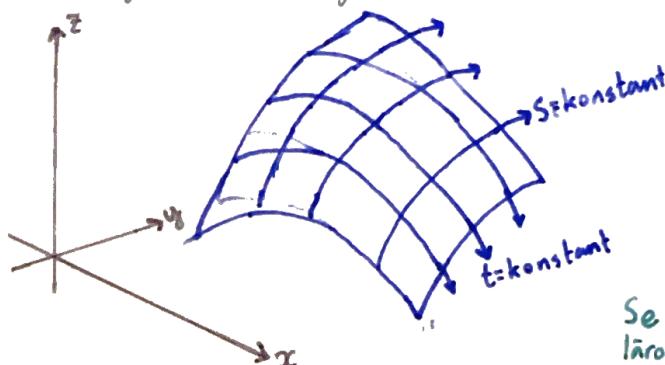
SATS 1.β: Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. $\vec{f}(\vec{x})$ kan delas upp i p stycken funktioner $f_1, \dots, f_p: D \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x}))$

Def(kurva): En kurva är en funktion $\vec{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$

Def(yta): En yta är en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p > 2$. I \mathbb{R}^3 skrivs en yta f som $f(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ där $x, y, z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Man kan tänka sig att ytan är uppbyggd av två slägor av kurvor, nämligen parameterkurvorna

$$\begin{aligned} s &\mapsto (x(s, t_0), y(s, t_0), z(s, t_0)) \\ \text{och} \quad t &\mapsto (x(s_0, t), y(s_0, t), z(s_0, t)) \end{aligned}$$

för $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Vanligtvis ritas några sådana kurvor när man skissar ytan

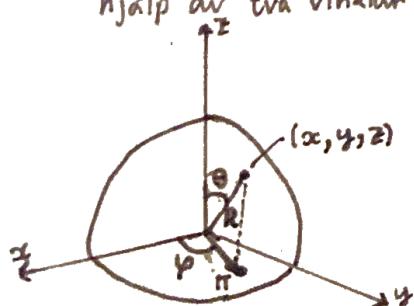


Se sid 29 & 30 i läroboken för bilder av ytor

Def(polära koordinater): Låt (x, y) vara de euklidiska koordinaterna för en punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Man kan skriva om \vec{a} till polära koordinater (r, θ) där $r = |\vec{a}|$ och θ är vinkeln mellan \vec{a} och x -axeln.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Def(sfäriska koordinater): Man kan parameterisera en sfär av radie $R > 0$ med hjälp av två vinkelar θ och φ



$$\begin{aligned} \pi &= R \cdot \sin \theta \\ x &= \pi \cdot \cos \varphi \\ y &= \pi \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad \begin{cases} x = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = R \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Punkter i \mathbb{R}^3 kan skrivas som sfäriska koordinater (R, θ, φ)

Def (gränsvärde): Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt \vec{a} vara en inre punkt eller randpunkt till D . f har gränsvärdet $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ om $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ sådan att för alla $\vec{x} \in D$ som uppfyller $0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ har vi att $|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \epsilon$

SATS 1.7: Låt $\vec{f} = (f_1, \dots, f_p)$, $\vec{x} \in D_f$, $\vec{a} \in \partial D \cup D$ och $\vec{b} = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\cdot |f_j(\vec{x}) - b_j| \leq |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| \leq |f_1(\vec{x}) - b_1 + f_2(\vec{x}) - b_2 + \dots + f_p(\vec{x}) - b_p| \text{ för } \forall j = 1, \dots, p$$

$$\cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j \quad \forall j = 1, \dots, p$$

SATS 1.8: Följande regler gäller

- För $\vec{f}: D \rightarrow E$ och $\vec{g}: E \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{b}$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ och $\vec{g}(\vec{y}) \rightarrow \vec{c}$ då $\vec{y} \rightarrow \vec{b}$
 $\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$
 $\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) \rightarrow \vec{c}$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$
- För $\vec{f}, \vec{g}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ och gränsvärdena för \vec{f} och \vec{g} existerar då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{\vec{f}(\vec{x})}{\vec{g}(\vec{x})} = \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})} \quad \text{om } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \neq \vec{0}$
- Om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{h}(\vec{x})$ och $|\vec{f}(\vec{x})| \leq |\vec{g}(\vec{x})| \leq |\vec{h}(\vec{x})|$ för alla $\vec{x} \in D$ som uppfyller $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ för något $\delta > 0$ har vi att $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{h}(\vec{x})$

Def (gränsvärde): Vi säger att $\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{b}$ då $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ om $\forall \epsilon > 0$ finns $w > 0$ så att $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{x}| > w \\ \vec{x} \in D_f \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \epsilon$

Def (kontinuerlig): Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att \vec{f} är kontinuerlig i $\vec{a} \in D$ om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$

SATS 1.6: Elementära funktioner (polynom, $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log x$) och deras kompositioner/produkter är kontinuerliga.

SATS 1.4: Om $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ är kontinuerlig och D är kompakt så antar \vec{f} sitt sätt största och minsta värde på D .

Def (likformigt kontinuerlig): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. f är likformigt kontinuerlig på D om $\forall \epsilon > 0$ så finns ett $\delta > 0$ så att för alla $\vec{x}, \vec{y} \in D$ som uppfyller $0 < |\vec{x} - \vec{y}| < \delta$ gäller $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \epsilon$

SATS 1.5: Om $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, är kontinuerlig och D är kompakt så är f likformigt kontinuerlig på D

Def (bägris sammanhängande): $D \subset \mathbb{R}^n$ är bägris sammanhängande om $\forall a, b \in D$ finns en kurva $t \mapsto \vec{x}(t)$, $t \in [0, 1]$, så att $\vec{x}(0) = a$, $\vec{x}(1) = b$ och $\vec{x}(t) \in D$ för $\forall t \in [0, 1]$

Def (partiell derivata): Låt \vec{a} vara en inre punkt i definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$ till funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} - h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} \text{ existerar så säger}$$

vi att f är partiellt derivbar med avseende på x_i i punkten \vec{a} . Gränsvärdet kallas den partiella derivatan med avseende på x_i av f i punkten \vec{a} .

Beteckning för partiella derivator

- Partiella derivatan av f med avseende på x i (a, b) :
 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}, \frac{\partial}{\partial x}f(a,b), f'_x(a,b)$ eller $D_x f(a,b) / \partial_x f(a,b)$
- Partiella derivatan av f med avseende på x
 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}f, f'_x$ eller $D_x f / \partial_x f$
- Partiella derivatan av f med avseende på y i (a, b)
 $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}, \frac{\partial}{\partial y}f(a,b), f'_y(a,b)$ eller $D_y f(a,b) / \partial_y f(a,b)$
- Partiella derivatan av f med avseende på y
 $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}f, f'_y$ eller $D_y f / \partial_y f$

SATS 2.α: Antag $f(x,y)$ är deriverbar på hela \mathbb{R}^2 och $\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Då har vi att $f(x,y)=\varphi(y)$. Detta även för en funktion $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som är deriverbar på hela \mathbb{R}^n och $\frac{\partial g}{\partial x_i}=0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ att vi då har att $g(x_1, \dots, x_n) = \mu(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Def (differentierbar): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, och låt \vec{a} vara en inre punkt av D . f är **differentierbar** i punkten \vec{a} om det finns konstanter A_1, \dots, A_n och en funktion $\varphi(\vec{h}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})}{\|\vec{h}\|} = \varphi(\vec{h}) = 0$ sådan att $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \|\vec{h}\| \cdot \varphi(\vec{h})$ där $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$.

Def (differentierbar): En funktion f är **differentierbar** i en öppen mängd D om f är differentierbar i varje punkt av D .

SATS 2.1: En differentierbar funktion är kontinuerlig.

SATS 2.2: En differentierbar funktion är partiellt deriverbar, och $\frac{\partial f}{\partial x_j}|_{\vec{a}} = A_j : \forall j=1, \dots, n$

Observera: En partiellt deriverbar funktion är inte nödvändigtvis differentierbar.

SATS 2.β: Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, vara differentierbar i den inre punkten $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Tangenten till f i-punkten $(a_1, \dots, a_n, f(\vec{a}))$ beräknas som:
 $z = f(\vec{a}) + f'_{x_1}(\vec{a}) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_n}(\vec{a}) \cdot (x_n - a_n)$.

Def (klass C^1): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i \mathbb{R}^n . f är av **klass C^1** på D om f är partiellt deriverbar och alla partiella derivator är kontinuerliga i D . Man skriver $f \in C^1(D)$.

SATS 2.3: Varje funktion av klass C^1 på D är differentierbar i D

SATS 2.4 (kedjeregeln): Låt $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler, och antag att funktionerna $g_1(t), \dots, g_n(t)$ är deriverbara i intervallet $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Då är den sammansatta funktionen $f(\vec{g}(t))$, där $\vec{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$, också deriverbar i intervallet $t \in (a, b)$, och:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \partial_{x_1} f(\vec{g}(t)) \cdot g'_1(t) + \dots + \partial_{x_n} f(\vec{g}(t)) \cdot g'_n(t)$$

$$\vec{x} = g(t) \quad u = f(\vec{x}) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

SATS 2.8 (Allmänna kedjeregeln): Låt $\vec{t} = (t_1, \dots, t_q) \in D \subset \mathbb{R}^q$, $\vec{x}(t) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, och $u(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Låt även $u(\vec{x})$ och $g_1(t), \dots, g_n(t)$ alla vara av klass C^1 . Då har vi att $u(\vec{x}(t))$ är partiellt deriverbar med avseende på $t_j, \forall j=1, \dots, q$ och att $\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j}$

Def (gradient): För differentierbara funktioner $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ definierar vi gradienten av f i punkten \vec{x} som vektorn

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

Def(nabla): $\vec{\nabla}$, eller nabla, definieras som $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ och man kan använda beteckningen $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})$. $\vec{\nabla}$ är en linjär operator d.v.s. en linjär funktion på rummet av funktioner.

SATS 2.5: Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen och bågvis sammanhängande mängd och $f \in C^1(D)$. Om $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in D$ så är $f(\vec{x})$ konstant i D .

Def (derivata med avseende på riktning): Låt $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ha längd 1, d.v.s. $|\vec{v}|=1$, \vec{v} är då en enhetsvektor. Derivatan av f i punkt \vec{a} med avseende på riktningen \vec{v} är $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}$

SATS 2.6: Om f är differentierbar och $|\vec{v}|=1$, så har vi $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$

SATS 2.7: Gradienten $\text{grad } f(\vec{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen växer snabbast i punkten \vec{a} och den maximala tillväxthastigheten är $|\text{grad } f(\vec{a})|$.

SATS 2.8: Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av klassen C^1 och $\text{grad } f(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Då är vektorn $\text{grad } f(\vec{a})$ vinkelrät mot niväytan $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

SATS 2.9: Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av klassen C^1 och $\text{grad } f(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Då är vektorn $\text{grad } f(\vec{a})$ normalvektorn till den tangerande ytan till f i punkten \vec{a} .

Def (klass C^k): Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ där D är en öppen mängd i \mathbb{R}^n . Vi säger att f är av klass C^k om alla partiella derivator av ordning $\leq k$ existerar och är kontinuerliga.

SATS 2.9: För varje funktion $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ av klass C^2 gäller att:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

SATS 2.10 (Taylors formel av andra ordningen i två variabler): Låt $f(x, y)$ vara en C^3 -funktion i den öppna mängden D , och antag att punkten (a, b) tillhör D . Då är:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k + \frac{1}{2} (f''_{xx}(a, b) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b) \cdot k^2) + (h^2 + k^2)^{3/2} \cdot B(h, k)$$

där $B(h, k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Def (lokalt maximum): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt maximum i $\vec{a} \in D$ om $\exists \delta > 0$ så att om $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ och $\vec{x} \in D$, så $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$.

Def (lokalt minimum): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt minimum i $\vec{a} \in D$ om $\exists \delta > 0$ så att om $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ och $\vec{x} \in D$, så $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$.

Def (lokala extrempunkter): Lokala maxima och minima kallas gemensamt för lokala extrempunkter.

SATS 2.11: Om $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, har en lokal extrempunkt i en inre punkt $\vec{a} \in D$ och f är partiellt deriverbar i \vec{a} så har vi att $f_{xj}'(\vec{a}) = 0$ för alla $j=1, \dots, n$ d.v.s. $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Def (stationär punkt): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, och $\vec{x} \in D$. \vec{x} är en stationär punkt för f om $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$.

Def (Taylor polynom i en stationär punkt): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i \mathbb{R}^2 och $f \in C^3(D)$. Vid en stationär punkt (a, b) till f gäller Taylor polynomet: $f(ath, btk) = f(a, b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot B(h, k)$, där $B(h, k)$ är begränsad runt 0 och $A = f_{xx}''(a, b)$; $B = f_{xy}''(a, b)$; $C = f_{yy}''(a, b)$. $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ sägs vara av kvadratisk form.

Def (positivt definit, negativt definit, indefinit, semidefinit): Låt $Q(h, k)$ vara av kvadratisk form. Då säger vi att:

- $Q(h, k)$ är positivt definit om $Q(h, k) > 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$ är positivt semidefinit om $Q(h, k) \geq 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$ är negativt definit om $Q(h, k) < 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$ är negativt semidefinit om $Q(h, k) \leq 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$ är indefinit om $Q(h, k)$ antar både positiva och negativa värden för $(h, k) \neq (0, 0)$

SATS 2.12: Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i \mathbb{R}^2 och $f \in C^3(D)$, låt även (a, b) vara en stationär punkt till f och $Q(h, k) = f_{xx}''(a, b) \cdot h^2 + 2f_{xy}''(a, b) \cdot hk + f_{yy}''(a, b) \cdot k^2$. Då har vi att:

- Om $Q(h, k)$ är positivt definit så har f ett strängt lokalt minimum i (a, b)
- Om $Q(h, k)$ är negativt definit så har f ett strängt lokalt maximum i (a, b)
- Om $Q(h, k)$ är indefinit så har f varken ett maximum eller minimum i (a, b)

OBS: Om $Q(h, k)$ är positivt eller negativt semidefinit kan ingen slutsats tas huruvida f har en lokal extrempunkt i (a, b) .

Def (kurva): En kurva är en funktion $\vec{x}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, och $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ där $x_1, \dots, x_p \in C^1(D)$.

Def (parameterisering): Låt $\Psi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ vara en strängt växande funktion så att $\Psi, \Psi^{-1} \in C^1$. Då identifierar vi $t \mapsto \vec{x}(t)$ och $s \mapsto \vec{x}(\Psi(s))$ är olika parameteriseringar av samma kurva.

Def (tangentvektor/riktningsvektor): Tangentvektorn till kurvan \vec{x} i punkten $\vec{x}(t)$ är vektorn $\vec{x}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} = (x'_1(t), \dots, x'_p(t))$.

Observera att tangentvektorn beror på parameteriseringen.

Om $t = \Psi(s)$ har vi $(\vec{x}(\Psi(s)))' = \vec{x}'(\Psi(s)) \cdot \Psi'(s)$. Alltså samma riktning men olika längder.

Def(längd): Längden av kurvan $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ ges av $\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{x}'(t)| dt$.

SATS 3.α: Längden av en kurva beror ej på parameteriseringen.

Def(yta): En yta är en funktion $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ med $D \subset \mathbb{R}^2$ så att
 $r(s, t) = (x_1(s, t), x_2(s, t), x_3(s, t))$

Def(tangentplanet): Tangentplanet till \vec{r} i punkten $\vec{r}(s, t)$ spänns upp av
 $\vec{r}'_s = (\partial_s x_1, \partial_s x_2, \partial_s x_3)$ och $\vec{r}'_t = (\partial_t x_1, \partial_t x_2, \partial_t x_3)$. Vektorn $(\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t)$ är
en normalvektor till ytan i punkten $\vec{r}(s, t)$.

Def(funktionalmatris): Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, funktionalmatrisen eller
derivatan av \vec{f} är matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Funktionalmatrisen betecknas som: $\vec{f}'(\vec{x})$, $d\vec{f}(\vec{x})$, $D\vec{f}(\vec{x})$, $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$

SATS 3.β: Låt $\vec{f} \in C^1$, d.v.s. $f_1, \dots, f_p \in C^2$, då gäller för varje $f_j(\vec{x})$, $j=1, \dots, p$
 $f_j(\vec{x} + \vec{h}) = f_j(\vec{x}) + f'_{j,x_1}(\vec{x}) \cdot h_1 + \dots + f'_{j,x_n}(\vec{x}) \cdot h_n + |\vec{h}| \cdot \rho_j(\vec{h})$ där $\rho_j(\vec{h}) \rightarrow 0$ då $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$.

Alltså

$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{x} + \vec{h}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x} + \vec{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{1,x_1}(\vec{x}) & \dots & f'_{1,x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{p,x_1}(\vec{x}) & \dots & f'_{p,x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + |\vec{h}| \cdot \rho(\vec{h}), \text{ där } \rho(\vec{h}) \rightarrow 0 \text{ då } \vec{h} \rightarrow \vec{0}$$

d.v.s.

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x}) \cdot \vec{h} + |\vec{h}| \cdot \rho(\vec{h}), \text{ där } \rho(\vec{h}) \rightarrow 0 \text{ då } \vec{h} \rightarrow \vec{0}$$

Def(linjärisering): Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, och \vec{x} vara en fixerad
punkt i D . Den linjära funktionen av $\ell(\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x}) \cdot \vec{h}$ kallas för
Linjäriseringen av \vec{f} i punkten \vec{x} .

SATS 3.δ (kedjeregeln av funktionalmatriser): Låt $g: D_g \rightarrow D_f$ och $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^p$,
där $D_g \subset \mathbb{R}^q$ och $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Då har vi
 $(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$.

Def(funktionaldeterminant): Talet $\det(\vec{f}'(\vec{x}))$ kallas för funktionaldeterminanten
eller Jacobis determinant av funktionen $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$

SATS 3.1: Funktionaldeterminanten för en sammansättning av två funktioner
från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m är lika med produkten av de ingående funktionernas
funktionaldeterminanter. Formelmässigt kan detta skrivas:

$$\det(\vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))) = \det(f'(\vec{g}(\vec{x}))) \cdot \det(g'(\vec{x}))$$

SATS 3.2 (Inversa funktionsatsen): Låt $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ vara en C^1 -funktion från \mathbb{R}^n till
 \mathbb{R}^m och å en punkt i definitionsmängden (som är en öppen mängd) sådan att
 $\det(\vec{f}'(\vec{x})) \neq 0$. Då finns öppna omgivningar U och V av å respektive $\vec{b} = \vec{f}(\vec{x})$
sådana att avbildningen $\vec{f}: U \rightarrow V$ är bijektiv och inversen $\vec{f}': V \rightarrow U$ en
funktion av klassen C^1 .

SATS 3.3 (Implicita funktionssatsen): Låt $F(x, y)$ vara en C^2 -funktion och (a, b) en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om $F'_y(a, b) \neq 0$ så finns en öppen omgivning U av (a, b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 -funktion $y = f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

SATS 3.5: Låt $F(x, y, z)$ vara en C^2 -funktion i en omgivning av \vec{a} , $F(\vec{a}) = C$ och $F'_z(\vec{a}) \neq 0$. Då kan man uttrycka nivåytan $F(x, y, z) = C$ i en omgivning av \vec{a} som en C^1 -funktion $z = z(x, y)$. Dessutom:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

SATS 3.6: Betrakta systemet

$$\begin{cases} F(x, y, z) = C \\ G(x, y, z) = D \end{cases}$$

Där $F, G \in C^1$ kring en punkt \vec{a} och $C, D \in \mathbb{R}$ så att $F(\vec{a}) = C$ och $G(\vec{a}) = D$

Antag att determinanten

$$\frac{d(F, G)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

i punkten \vec{a} . Då finns det en omgivning av \vec{a} i vilket systemet bestämmer två C^1 -funktioner

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}$$

Dessutom kan man via systemet

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = t \end{cases}$$

lokalt parameterisera skärningskurvan av det ursprungliga systemet med variabeln z . D.v.s.

$$\begin{cases} F(f(z), g(z), z) = C \\ G(f(z), g(z), z) = D \end{cases}$$

På samma sätt kan man parameterisera skärningskurvan med variablerna x och y .

SATS 4.α (optimering på kompakta områden): Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd och låt $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då antar f sitt största värde M på K . Dessutom om $f \in C^1(\text{int}(K))$ så har vi att om $f(\vec{a}) = M$ så är antingen:

- i) $\vec{a} \in \text{int}(K)$ och $\text{grad } f(\vec{a}) = 0$
eller
- ii) $\vec{a} \in \partial K$

SATS 4.β (optimering på icke-komackta mängder): Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara en icke-komackta mängd och låt $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion och $f \in C^1(\text{int}(K))$. Om det finns en kompakt mängd $U \subset K$ sådan att för något $\vec{a} \in U$ har vi att $f(\vec{a}) > f(\vec{x})$: $\forall \vec{x} \in K \setminus U$ så antar f sitt största värde i U och den punkten kan hittas med hjälp av SATS 4.α.

SATS 4.8 (minsta kvadratmetoden): Låt (a_i, b_i) , $i=1, \dots, n$ vara punkter i \mathbb{R}^2 och $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ så att $a_i \neq a_j$. Låt även $y = kx + l$ vara den linje som har minsta möjliga summa av vertikala avståndet av varje punkt och linjen. k och l kan bestämmas genom att hitta minsta värdet av $Q(k, l) = \sum (ka_i + l - b_i)^2$. k och l kan bestämmas entydigt ur normalekvationerna som ges av $\nabla Q(k, l) = 0$:

$$\begin{cases} (\sum a_i^2)k + (\sum a_i)l = \sum a_i b_i \\ (\sum a_i)k + n l = \sum b_i \end{cases}$$

SATS 4.9: Låt $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ och $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktioner i C^1 och D_f och D_g vara öppna mängder i \mathbb{R}^2 . Antag att $f(x, y)$ maximeras eller minimeras under $g(x, y) = 0$ i en inre punkt $(a, b) \in D_f \cap D_g$. Då är vektorerna $\nabla f(a, b)$ och $\nabla g(a, b)$ parallella.

Def(trappfunktion): Låt $\Delta = \{(x, y); x \in [a, b], y \in [c, d]\}$. $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ är en trappfunktion om det finns en indelning av Δ i rektanglar Δ_{ij} som definieras som $\Delta_{ij} = \{(x, y); x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]\}$ där $a = x_0 < \dots < x_n = b$ och $c = y_0 < \dots < y_m = d$ så att Φ har ett konstant värde c_{ij} på Δ_{ij} .

Def(dubbelintegral): Dubbelintegralen av Φ över Δ är

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy := \sum_{ij} c_{ij} \mu(\Delta_{ij}) \text{ där } \mu(\Delta_{ij}) \text{ är arean av } \Delta_{ij}$$

SATS 6.0: För trappfunktioner Φ och Ψ , och $a, b \in \mathbb{R}$ gäller:

- $\iint_{\Delta} (a\Phi + b\Psi) dx dy = a \iint_{\Delta} \Phi dx dy + b \iint_{\Delta} \Psi dx dy$
- Om $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$: $\iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \Phi dx dy = \iint_{\Delta_1} \Phi dx dy + \iint_{\Delta_2} \Phi dx dy$
- Om $\Phi \leq \Psi$ på Δ : $\iint_{\Delta} \Phi dx dy \leq \iint_{\Delta} \Psi dx dy$
- $|\iint_{\Delta} \Phi dx dy| \leq \iint_{\Delta} |\Phi| dx dy$ (triangelolikheten för integraler)
- $\iint_{\Delta} \Phi dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \Phi(x, y) dx \right) dy$.

Def(Riemann integrerbar): En begränsad funktion $f(x, y)$ är Riemann integrerbar över en rektangel Δ om det för alla $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ på Δ och

$$\iint_{\Delta} \Psi dx dy - \iint_{\Delta} \Phi dx dy < \epsilon$$

SATS 6.1: Om f är integrerbar över Δ så finns det precis ett tal λ sådana att

$$\iint_{\Delta} \Phi dx dy \leq \lambda \leq \iint_{\Delta} \Psi dx dy \text{ för alla par av trappfunktioner som uppfyller } \Phi \leq f \leq \Psi \text{ på } \Delta.$$

Def(dubbelintegral): Talet λ från sats 6.1 kallas för dubbelintegralen av f över Δ och betecknas $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \lambda$.

SATS 6.2: Om f är integrerbar över $\Delta = \{(x, y); x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ så gäller (om enkel integralerna existerar):

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

SATS 6.3: Om funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ så är f integrerbar över Δ , och enkelintegralerna i sats 6.2 existerar.

Def (integrerbar): Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd och $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Vi definierar $f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & : (x,y) \in D \\ 0 & : (x,y) \notin D \end{cases}$

Vi säger att f är integrerbar över D om f_D är integrerbar över någor rektangel Δ där $D \subset \Delta$. Vi sätter

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\Delta} f_D(x,y) dx dy$$

SATS 6.4: Antag att f är kontinuerlig på $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ där α och β är kontinuerliga på $[a,b]$. Då är f integrerbar på D och $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx$.

Def (area): Arean för ett område D definieras som $\text{Area}(D) := \iint_D 1 dx dy$ (även kallat μ)

Def (nollmängd): En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ är en nollmängd om vi för alla $\epsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar med en sammanlagd area mindre än ϵ .

Lemma 6.1: Grafen av en kontinuerlig funktion $\Psi: [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en nollmängd i \mathbb{R}^2 .

Def (kvadrerbar): En mängd D är kvadrerbar om ∂D är en nollmängd.

Lemma 6.2: Antag att f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D . Då är f integrerbar över D .

Lemma 6.3: Varje begränsad funktion är integrerbar över en nollmängd N och

$$\iint_N f(x,y) dx dy = 0$$

SATS 6.3 (medelvärdessatsen för integraler): Låt f vara kontinuerlig på en kompakt, kvadrerbar, och bågvis sammanhängande mängd $D \subset \mathbb{R}^2$. Låt $m = \inf_{D \subset \mathbb{R}^2} f$ och $M = \max_{D \subset \mathbb{R}^2} f$. Då finns en punkt $(a,b) \in D$ så att $\iint_D f(x,y) dx dy = f(a,b) \cdot \text{area}(D)$

SATS 6.5: Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och D vara en kompakt mängd i \mathbb{R}^2 . Då gäller $\sum_{i,j} f(\bar{x}_{ij}) \cdot \mu(\Delta_{ij}) \rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy$ när indelningsfintet går mot noll.

SATS 6.6: Låt $\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$ vara en bijektiv C^1 -avbildning av ett öppet begränsat

kvadrerbart område E i (u,v) planet på ett motsvarande område D i (x,y) planet, sådan att $J(u,v) = \frac{d(x,y)}{du, dv} \neq 0$ i E . Då är

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_E f(g(u,v), h(u,v)) \cdot |J(u,v)| du dv$$

Om funktionerna under integraltecknen är integrerbara över respektive område.

SATS 6.8: Låt $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ där D är en kvadrerbar mängd i \mathbb{R}^2 så att $g \in C^1(D)$ och låt $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ där $a = \inf_D g(x, y)$, $b = \sup_D g(x, y)$ och $h \in C^1(a, b)$. Låt även $G_u = \{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\}$. Antag att $A_u = \text{Area}(G_u)$ är C^1 . Då gäller $\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) \cdot A'(u) du$

Def (avskärning): Låt f vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. En begränsad kvadrerbar delmängd D av Ω är en **avskärning** av Ω om f är begränsad på D .

Def (konvergent): Låt f vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ med $f(x, y) \geq 0$ är **konvergent** om mängden $M = \{\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy : D \text{ är en avskärning av } \Omega\}$ är uppat begränsad, annars **divergent**. Om integralen är konvergent definierar vi $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sup M$ och $\sup M = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$ där $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ är en **utömmande svit** av avskärningar, d.v.s. $D_{n+1} \subset D_n$ of för varje $D \subset \Omega$ finns D_n så att $D \subset D_n$.

SATS 6.9: För generaliserade integraler med positiv integrand gäller, att om den inre enkelintegralen (till exempel med avseende på x) är konvergent för varje fixerat y , då är dubbeltintegralen av f konvergent om och endast om den yttre integralen är konvergent (detta gäller även om den inre enkelintegralen ej konvergerar för enstaka värden av y). I så fall har vi $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$

Def (konvergent): Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ och låt $f^+ = \begin{cases} f(x, y) & : f(x, y) \geq 0 \\ 0 & : f(x, y) < 0 \end{cases}$ och $f^- = \begin{cases} 0 & : f(x, y) \geq 0 \\ -f(x, y) & : f(x, y) < 0 \end{cases}$. Alltså att $f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$ och $|f(x, y)| = f^+(x, y) + f^-(x, y)$. Dubbelintegralen $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ är **konvergent** om och endast om både $\iint_{\Omega} f^+(x, y) dx dy$ och $\iint_{\Omega} f^-(x, y) dx dy$ är konvergenta. Det vill säga $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ konvergerar $\Leftrightarrow \iint_{\Omega} |f(x, y)| dx dy$.

SATS 6.E: Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ och $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ och $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$. Då har vi att $\iint_{\Omega} g(x, y) dx dy$ konvergerar $\Rightarrow \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ konvergerar och $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ divergerar $\Rightarrow \iint_{\Omega} g(x, y) dx dy$ divergerar.

SATS 6.Z: Låt $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$. Då har vi att $\iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha}} dx dy$ konvergerar om och endast om $\alpha > 1$.

SATS 6.Y: Låt $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Då har vi att $\iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha}} dx dy$ konvergerar om och endast om $\alpha < 1$.

SATS 5.1: Antag att funktionerna $f(s, x)$ och $f'_s(s, x)$ är kontinuerliga i området $\alpha < s < \beta$, $a < x < b$. Då är den s -beroende integralen

$$F(s) = \int_{x=a}^b f(s, x) dx \quad \text{deriverbar i } \alpha < s < \beta \text{ och } \frac{dF}{ds} = \int_a^b f'_s(s, x) dx.$$

SATS 5.2: Antag att $f(s, x)$ och $f'_s(s, x)$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta$, $A \leq x \leq B$. Låt vidare $b(s)$ vara en C^1 -funktion i $\alpha < s < \beta$ med $A < b(s) < B$, och låt $A \leq B$. Då är den s-beroende integralen

$$F(s) = \int_A^{b(s)} f(s, x) dx$$

deriverbar och $F'(s) = \int_A^{b(s)} f'_s(s, x) dx + f(s, b(s)) b'(s)$.

SATS 5.3: Antag att $f(s, x)$ och $f'_s(s, x)$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta$, $x \geq a$. Antag vidare att den s-beroende integralen

$$F(s) = \int_a^\infty f(s, x) dx$$

är konvergent för $\alpha < s < \beta$, och att det finns en kompakt delintervall $a < s < \beta$, av (α, β) finns en så kallad majorerande funktion $g(x)$ sådan att

(i) $|f'_s(s, x)| \leq g(x)$ för $\alpha \leq s \leq \beta$, $x \geq a$

(ii) $\int_a^\infty g(x) dx$ är konvergent

Då är $F(s)$ deriverbar i $\alpha < s < \beta$ och

$$F'(s) = \int_a^\infty f'_s(s, x) dx$$

SATS 7.α: Låt $D = \{(x, y, z) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in E\}$. Då kan integralen av f i D beräknas som

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

SATS 7.β: Låt $D = \{(x, y, z) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ där $E = \{(x, y) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ är en begränsad, både sammanhängande mängd. Då kan integralen av f i D beräknas som

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

SATS 7.γ: Låt $\vec{g} : E \rightarrow D$ vara en bijektiv C^1 -avbildning, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in D$ och $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in E$ så att $\vec{x} = \vec{g}(\vec{u}) = (g_1(\vec{u}), g_2(\vec{u}), g_3(\vec{u}))$ och att

$$J(\vec{u}) = \frac{d(g_1, g_2, g_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} \neq 0.$$

Då kan integralen av f i D beräknas som

$$\iiint_D f(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_E f(\vec{g}(\vec{u})) |J(\vec{u})| du_1 du_2 du_3.$$

SATS 8.α: Låt $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, $(s, t) \in D$ vara en parameterframställning av en yta Y i \mathbb{R}^3 . Man kan då beräkna arean av ytan Y som

$$\iint_Y dS = \iint_D |\vec{r}_s \times \vec{r}_t| ds dt.$$

Def(kurvintegral): Låt $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett kontinuerligt vektorfält på en öppen mängd $D \subset \mathbb{R}$ så att för $\vec{r} = (x, y)$ är $\vec{F}(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r})) = (P(x, y), Q(x, y))$. Låt även γ vara en C^1 -kurva i D med parameterisering $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ och $t \in [\alpha, \beta]$. Kurvintegralen av \vec{F} längs γ är $\int_\gamma \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$. Vi använder beteckningen $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_\gamma P dx + Q dy$

OBS: Riktningen av kurvan spelar roll.

Def(sluten, enkel): En kurva är sluten om dess start- och slutpunkterna sammanfaller. En kurva är enkel om den är sluten och inte skär sig själv.

Def(cirkulation): Om \vec{F} är ett vektorfält och γ är en enkel kurva kallas $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ för cirkulationen av vektorfältet \vec{F} längs γ och betecknas $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$.

Def(positivt orienterad): Låt γ vara en enkel kurva i \mathbb{R}^2 . Låt D vara den kompakta mängd som uppfyller $\partial D = \gamma$. γ sägs vara positivt orienterad om D är till vänster om γ med avseende på kurvans riktning, annars negativt orienterad. Om $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ är γ positivt orienterad om för D $\partial D = \gamma$ så ligger D till vänster om γ_1 och γ_2 med avseende på deras riktning.

SATS 9.1 (Greens formel): Antag att:

- P och Q är C^1 -funktioner i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
 - D är en kompakt mängd och $D \subset \Omega$
 - ∂D utgörs av en eller flera styckvis C^1 -kurvor som är positivt orienterade
- Då gäller $\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$