Flervariabelsanalys

Def (skalärprodukt): Låt $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ och $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+\dots+x_ny_n$ kallas **skalärprodukten**. Följande räkneregler gäller:

a) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$
b) $(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{z}=\vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z}$
c) $(c\vec{x})\cdot\vec{y}=c(\vec{x}\cdot\vec{y})$
d) $\vec{x}\cdot\vec{x}\geq 0$; $\vec{x}\cdot\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

Def (parallell, samma riktning): Låt $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är **parallella** om $\vec{x}=\lambda\vec{y}$ för något $\lambda\in\mathbb{R}$. Vi säger då att $\vec{x}$ och $\vec{y}$ har samma riktning. $\vec{x}\parallel\vec{y}$

Def (norm, längd): Låt $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. **Normen** eller **längden** av $\vec{x}$ skrivs som $|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

Def (ortogonal): Låt $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är **ortogonala** om $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$

Def (vinkel): Låt $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ och $\theta=\arccos\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}\right)\in[0,\pi]$, då är θ **vinkeln** mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$

SATS 1.1 (Cauchy-Schwartz olikhet): I $\mathbb{R}^n$ gäller $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\leq|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$ med likhet omm $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är parallella.

SATS 1.2 (Triangelolikheten): I $\mathbb{R}^n$ gäller $|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$ med likhet då $\vec{x}=\lambda\vec{y}:\lambda\geq 0$

SATS 1.α (Omvända Triangelolikheten): I $\mathbb{R}^n$ gäller $\big||\vec{x}|-|\vec{y}|\big|\leq|\vec{x}\pm\vec{y}|$

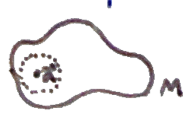
SATS 1.3: För varje $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ gäller $|x_k|\leq|\vec{x}|\leq|x_1|+\dots+|x_n|$ $\forall k=1,\dots,n$

Def (öppet klot): Mängden $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:|\vec{x}-\vec{a}|<r\}$ är ett **öppet klot** med centrum i $\vec{a}$

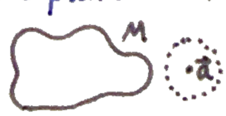
Def (omgivning): En mängd $U\subset\mathbb{R}^n$ är en **omgivning** av $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum i $\vec{a}$

Def (komplement): **Komplementet** till en mängd $M\subset\mathbb{R}^n$, betecknat CM, är $CM=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\vec{x}\notin M\}$

Def (inre punkt): Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. $\vec{a}$ är en **inre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring $\vec{a}$ som ligger i M.



Def (yttre punkt): Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. $\vec{a}$ är en **yttre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring $\vec{a}$ som ligger i CM



Def (randpunkt): Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. $\vec{a}$ är en **randpunkt** till M om varje öppet klot kring $\vec{a}$ skär både M och CM

Def (rand): Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. Mängden av randpunkter till M kallas för **randen** till M, betecknat ∂M.

Def (öppen mängd): En mängd M är **öppen** om $\partial M \subset CM$

Def (sluten mängd): En mängd M är **sluten** om $\partial M \subset M$

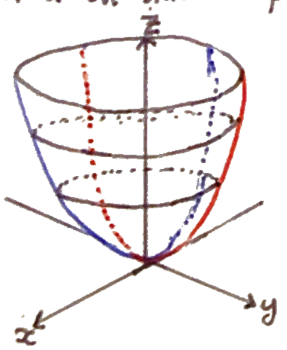
Def' (öppen mängd): En mängd M är **öppen** om det för varje $\vec{x} \in M$ finns ett öppet klot kring $\vec{x}$ som ligger i M

Def (begränsad): En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är **begränsad** om det finns ett $C>0$ så att $|\vec{x}|<C \quad \forall \vec{x} \in M$

Def (kompakt): En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är **kompakt** om M är både sluten och begränsad.

Att skissa $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

1) Bestäm (x,y) för $f(x,y)=0$
2) Bestäm (x,y) för $f(x,y)=C$ för några $C \in \mathbb{R}$
3) Rita ett snitt av planet $x=0$
4) Rita ett snitt av planet $y=0$

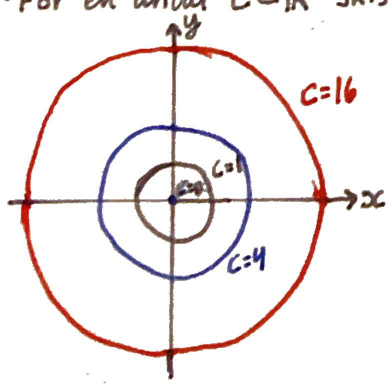


$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

Def (Eliptisk paraboloid): Grafer av denna form kallas för **eliptiska paraboloider**.

Att skissa $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med nivåkurvor:

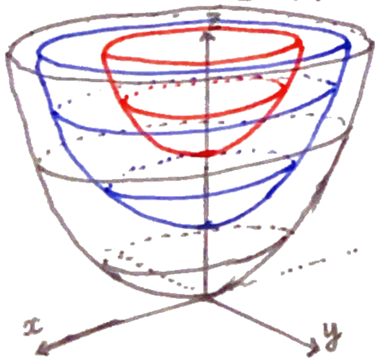
- För ett antal $C \in \mathbb{R}$ skissa kurvor $f(x,y)=C$



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Att skissa $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ med nivå ytor

- För ett antal $C \in \mathbb{R}$ skissa $f(x,y,z)=C$ i $\mathbb{R}^3$



$C=0$
$C=1$
$C=3$

$f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$
$f(x,y,z) = C$
$\Rightarrow z = x^2 + y^2 + C$

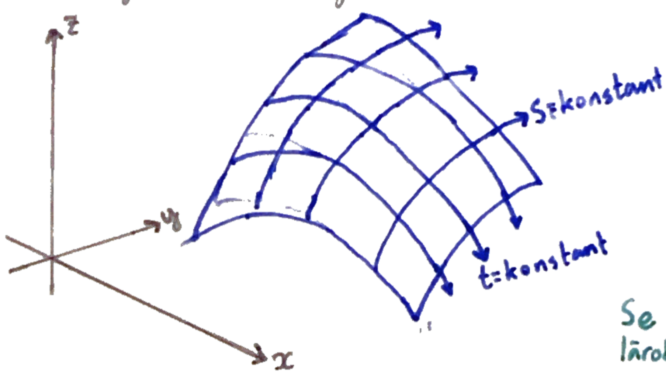
SATS 1.β: Låt $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. $\vec{f}(\vec{x})$ kan delas upp i p stycken funktioner $f_1, \dots, f_p : D \to \mathbb{R}$ så att $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x}))$

Def(kurva): En kurva är en funktion $\vec{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$

Def(yta): En yta är en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^p$ $p>2$. I $\mathbb{R}^3$ skrivs en yta f som $f(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ där $x,y,z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Man kan tänka sig att ytan är uppbyggd av två skaror av kurvor, nämligen parameterkurvorna

$$s \mapsto (x(s,t_0), y(s,t_0), z(s,t_0))$$
och
$$t \mapsto (x(s_0,t), y(s_0,t), z(s_0,t))$$

för $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Vanligtvis ritas några sådana kurvor när man skissar ytan

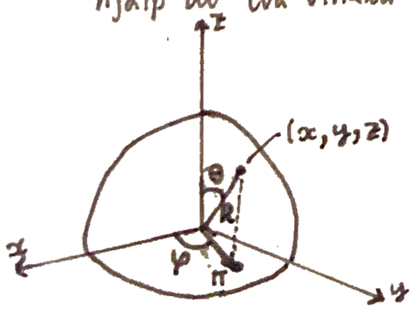


Se sid 29 & 30 i läroboken för bilder av ytor

Def(polära koordinater): Låt (x,y) vara de euklidiska koordinaterna för en punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Man kan skriva om $\vec{a}$ till polära koordinater (r, θ) där $r = |\vec{a}|$ och θ är vinkeln mellan $\vec{a}$ och x-axeln.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Def(sfäriska koordinater): Man kan parameterisera en sfär av radie $R>0$ med hjälp av två vinklar θ och φ



$\pi = R \cdot \sin\theta$
$x = \pi \cdot \cos\varphi$
$y = \pi \cdot \sin\varphi$

$$\begin{cases} x = R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = R \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Punkter i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som sfäriska koordinater (R, θ, φ)

Def (gränsvärde): Låt $\vec f : D \to \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt $\vec a$ vara en inre punkt eller randpunkt till D. $\vec f$ har **gränsvärdet** $\vec b \in \mathbb{R}^p$ då $\vec x \to \vec a$ om $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ sådan att för alla $\vec x \in D$ som uppfyller $0 < |\vec x - \vec a| < \delta$ har vi att $|\vec f(\vec x) - \vec b| < \varepsilon$

SATS 1.γ: Låt $\vec f = (f_1, \dots, f_p)$, $\vec x \in D_f$, $\vec a \in \partial D \cup D$ och $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$

- $|f_j(\vec x) - b_j| \leq |\vec f(\vec x) - \vec b| \leq |f_1(\vec x) - b_1 + f_2(\vec x) - b_2 + \dots + f_p(\vec x) - b_p|$ för $\forall j = 1, \dots, p$
- $\lim_{\vec x \to \vec a} f(\vec x) = \vec b \Leftrightarrow \lim_{\vec x \to \vec a} f_j(\vec x) = b_j \quad \forall j = 1, \dots, p$

SATS 1.δ: Följande regler gäller

- För $\vec f : D \to E$ och $\vec g : E \to \mathbb{R}^p$ där $\vec f(\vec x) \to b$ då $\vec x \to \vec a$ och $\vec g(\vec y) \to c$ då $\vec x \to \vec b$
  - $(\vec g \circ \vec f)(\vec x) = \vec g(\vec f(\vec x))$
  - $(\vec g \circ \vec f)(\vec x) \to \vec c$ då $\vec x \to \vec a$
- För $\vec f, \vec g : D \to \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ och gränsvärden för $\vec f$ och $\vec g$ existerar då $\vec x \to \vec a$
  - $\lim_{\vec x \to \vec a} (\vec f(\vec x) + \vec g(\vec x)) = \lim_{\vec x \to \vec a} \vec f(\vec x) + \lim_{\vec x \to \vec a} \vec g(\vec x)$
  - $\lim_{\vec x \to \vec a} (\vec f(\vec x) \cdot \vec g(\vec x)) = \lim_{\vec x \to \vec a} \vec f(\vec x) \cdot \lim_{\vec x \to \vec a} \vec g(\vec x)$
  - $\lim_{\vec x \to \vec a} \frac{\vec f(\vec x)}{\vec g(\vec x)} = \frac{\lim_{\vec x \to \vec a} \vec f(\vec x)}{\lim_{\vec x \to \vec a} \vec g(\vec x)}$ om $\lim_{\vec x \to \vec a} \vec g(\vec x) \neq \vec 0$
- Om $\lim_{\vec x \to \vec a} \vec f(\vec x) = \lim_{\vec x \to \vec a} \vec h(\vec x)$ och $|\vec f(\vec x)| \leq |\vec g(\vec x)| \leq |\vec h(\vec x)|$ för alla $\vec x \in D$ som uppfyller $|\vec x - \vec a| < \delta$ för något $\delta > 0$ har vi att $\lim_{\vec x \to \vec a} \vec g(\vec x) = \lim_{\vec x \to \vec a} \vec h(\vec x)$

Def (gränsvärde): Vi säger att $\vec f(\vec x) \to \vec b$ då $|\vec x| \to \infty$ om $\forall \varepsilon > 0$ finns $\omega > 0$ så att

$$\left.\begin{array}{l} |\vec x| > \omega \\ \vec x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec f(\vec x) - \vec b| < \varepsilon$$

Def (kontinuerlig): Låt $\vec f : D \to \mathbb{R}^p$ där $D \in \mathbb{R}^n$. Vi säger att $\vec f$ är **kontinuerlig** i $\vec a \in D$ om $\lim_{\vec x \to \vec a} \vec f(\vec x) = \vec f(\vec a)$

SATS 1.ε: Elementära funktioner (polynom, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$) och deras kompositioner/produkter är kontinuerliga.

SATS 1.4: Om $\vec f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ är kontinuerlig och D är kompakt så antar $\vec f$ sitt sitt största och minsta värde på D.

Def (likformigt kontinuerlig): Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. f är **likformigt kontinuerlig** på D om $\forall \varepsilon > 0$ så finns ett $\delta > 0$ så att för alla $\vec x, \vec y \in D$ som uppfyller $0 < |\vec x - \vec y| < \delta$ gäller $|f(\vec x) - f(\vec y)| < \varepsilon$

SATS 1.5: Om $f : D \to \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, är kontinuerlig och D är kompakt så är f likformigt kontinuerlig på D

Def (bågvis sammanhängande): $D \subset \mathbb{R}^n$ är **bågvis sammanhängande** om $\forall \vec a, \vec b \in D$ finns en kurva $t \mapsto \vec x(t)$, $t \in [0,1]$, så att $\vec x(0) = \vec a$, $\vec x(1) = \vec b$ och $\vec x(t) \in D$ för $\forall t \in [0,1]$

Def (partiell derivata): Låt $\vec a$ vara en inre punkt i definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$ till funktionen $f : D \to \mathbb{R}$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\vec a - h\vec e_j) - f(\vec a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

existerar så säger vi att f är **partiellt deriverbar** med avseende på x_j i punkten $\vec a$. Gränsvärdet kallas den **partiella derivatan** med avseende på x_j av f i punkten $\vec a$.

Beteckning för partiella derivator

- Partiella derivatan av f med avseende på x i (a,b):
  $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}$, $\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)$, $f'_x(a,b)$ eller $D_x f(a,b)$ / $\partial_x f(a,b)$

- Partiella derivatan av f med avseende på x
  $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}f$, f'_x eller $D_x f$ / $\partial_x f$

- Partiella derivatan av f med avseende på y i (a,b)
  $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}$, $\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)$, $f'_y(a,b)$ eller $D_y f(a,b)$ / $\partial_y f(a,b)$

- Partiella derivatan av f med avseende på y
  $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}f$, f'_y eller $D_y f$ / $\partial_y f$

SATS 2.α: Antag $f(x,y)$ är deriverbar på hela $\mathbb{R}^2$ och $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Då har vi att $f(x,y)=\varphi(y)$. Detta även för en funktion $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ som är deriverbar på hela $\mathbb{R}^n$ och $\frac{\partial g}{\partial x_j}=0$ $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$ att vi då har att $g(x_1,\dots,x_n)=\mu(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$

Def (differentierbar): Låt $f:D\to\mathbb{R}$, där $D\subset\mathbb{R}^n$, och låt $\vec{a}$ vara en inre punkt av D. f är differentierbar i punkten $\vec{a}$ om det finns konstanter $A_1,\dots,A_n$ och en funktion $\rho(\vec{h}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ som uppfyller $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\rho(\vec{h})=0$ sådan att $f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})=A_1h_1+\dots+A_nh_n+|\vec{h}|\cdot\rho(\vec{h})$ där $\vec{h}=(h_1,\dots,h_n)$.

Def (differentierbar): En funktion f är differentierbar i en öppen mängd D om f är differentierbar i varje punkt av D.

SATS 2.1: En differentierbar funktion är kontinuerlig.

SATS 2.2: En differentierbar funktion är partiellt deriverbar, och $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\vec{a}}=A_j$: $\forall j=1,\dots,n$

Observera: En partiellt deriverbar funktion är inte nödvändigtvis differentierbar.

SATS 2.β: Låt $f:D\to\mathbb{R}$, där $D\subset\mathbb{R}^n$, vara differentierbar i den inre punkten $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)\in D$. Tangenten z till f i punkten $(a_1,\dots,a_n, f(\vec{a}))$ beräknas som:
$z=f(\vec{a})+f'_{x_1}(\vec{a})\cdot(x_1-a_1)+\dots+f'_{x_n}(\vec{a})\cdot(x_n-a_n)$.

Def (klass C^1): Låt $f:D\to\mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i $\mathbb{R}^n$. f är av klass C^1 på D om f är partiellt deriverbar och alla partiella derivator är kontinuerliga i D. Man skriver $f\in C^1(D)$.

SATS 2.3: Varje funktion av klass C^1 på D är differentierbar i D

SATS 2.4 (kedjeregeln): Låt $f(\vec{x})=f(x_1,\dots,x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler, och antag att funktionerna $g_1(t),\dots,g_n(t)$ är deriverbara i intervallet $t\in(a,b)\subset\mathbb{R}$. Då är den sammansatta funktionen $f(\vec{g}(t))$, där $\vec{g}(t)=(g_1(t),\dots,g_n(t))$, också deriverbar i intervallet $t\in(a,b)$, och:

$$\frac{d}{dt}f(\vec{g}(t))=\partial_{x_1}f(\vec{g}(t))\cdot g_1'(t)+\dots+\partial_{x_n}f(\vec{g}(t))\cdot g_n'(t)$$

$$\vec{x}=g(t)\quad u=f(\vec{x})\Rightarrow\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}$$

SATS 2.γ (Allmänna kedjeregeln): Låt $\vec{t}=(t_1,\dots,t_q)\in D\subset\mathbb{R}^q$, $\vec{x}(\vec{t}):D\to P\subset\mathbb{R}^n$, och $u(\vec{x}):P\to\mathbb{R}$. Låt även $u(\vec{x})$ och $g_1(\vec{t}),\dots,g_n(\vec{t})$ alla vara av klass C^1. Då har vi att $u(\vec{x}(\vec{t}))$ är partiellt deriverbar med avseende på $t_j,\ \forall j=1,\dots,q$ och att
$$\frac{\partial u}{\partial t_j}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t_j}$$

Def (gradient): För differentierbara funktioner $f(\vec{x})=f(x_1,\dots,x_n)$ definierar vi **gradienten** av f i punkten $\vec{x}$ som vektorn
$$\text{grad } f(\vec{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$$

Def (nabla): $\vec{\nabla}$, eller **nabla**, definieras som $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ och man kan använda beteckningen $\text{grad } f(\vec{x})=\vec{\nabla}f(\vec{x})$. $\vec{\nabla}$ är en **linjär operator** d.v.s. en linjär funktion på rummet av funktioner.

SATS 2.5: Låt $D\subset\mathbb{R}^n$ vara en öppen och bågvis sammanhängande mängd och $f\in C^1(D)$. Om $\text{grad } f(\vec{x})=\vec{0}\ \ \forall\vec{x}\in D$ så är $f(\vec{x})$ konstant i D.

Def (derivata med avseende på riktning): Låt $\vec{v}=(v_1,\dots,v_n)$ ha längd 1, d.v.s. $|\vec{v}|=1$, $\vec{v}$ är då en **enhetsvektor**. **Derivatan** av f i punkt $\vec{a}$ med avseende på riktningen $\vec{v}$ är $f'_{\vec{v}}(\vec{a})=\lim_{t\to0}\frac{f(\vec{a}+t\vec{v})-f(\vec{a})}{t}$

SATS 2.6: Om f är differentierbar och $|\vec{v}|=1$, så har vi $f'_{\vec{v}}(\vec{a})=\text{grad } f(\vec{a})\cdot\vec{v}$

SATS 2.7: Gradienten $\text{grad } f(\vec{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen växer snabbast i punkten $\vec{a}$ och den maximala tillväxthastigheten är $|\text{grad } f'(\vec{a})|$.

SATS 2.8: Låt $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ vara en funktion av klassen C^1 och $\text{grad } f(\vec{x})\neq\vec{0}$. Då är vektorn $\text{grad } f(\vec{a})$ vinkelrät mot nivåytan $f(\vec{x})=f(\vec{a})$.

SATS 2.δ: Låt $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ vara en funktion av klassen C^1 och $\text{grad } f(\vec{x})\neq\vec{0}$. Då är vektorn $\text{grad } f(\vec{a})$ normalvektorn till den tangerande ytan till f i punkten $\vec{a}$.

Def (klass C^k): Låt $f:D\to\mathbb{R}$ där D är en öppen mängd i $\mathbb{R}^n$. Vi säger att f är av **klass C^k** om alla partiella derivator av ordning $\leq k$ existerar och är kontinuerliga.

SATS 2.9: För varje funktion $f(\vec{x})=f(x_1,\dots,x_n)$ av klass C^2 gäller att:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}.$$

SATS 2.10 (Taylors formel av andra ordningen i två variabler): Låt $f(x,y)$ vara en C^3-funktion i den öppna mängden D, och antag att punkten (a,b) tillhör D. Då är:
$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f'_x(a,b)\cdot h+f'_y(a,b)\cdot k+\tfrac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)\cdot h^2+2f''_{xy}(a,b)hk+f''_{yy}(a,b)\cdot k^2\right)+(h^2+k^2)^{3/2}\cdot B(h,k)$$
där $B(h,k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Def(lokalt maximum): Låt $f: D \to \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt maximum i $\vec{a} \in D$ om $\exists \delta > 0$ så att om $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ och $\vec{x} \in D$, så $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$.

Def(lokalt minimum): Låt $f: D \to \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt minimum i $\vec{a} \in D$ om $\exists \delta > 0$ så att om $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ och $\vec{x} \in D$, så $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$.

Def(lokal extrempunkt): Lokala maxima och minima kallas gemensamt för lokala extrempunkter.

SATS 2.11: Om $f: D \to \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, har en lokal extrempunkt i en inre punkt $\vec{a} \in D$ och f är partiellt deriverbar i $\vec{a}$ så har vi att $f'_{x_j}(\vec{a}) = 0$ för alla $j = 1, \dots, n$ d.v.s. $\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Def(stationär punkt): Låt $f: D \to \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, och $\vec{x} \in D$. $\vec{x}$ är en stationär punkt för f om $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{0}$.

Def(Taylor polynom i en stationär punkt): Låt $f: D \to \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i $\mathbb{R}^2$ och $f \in C^3(D)$. Vid en stationär punkt (a,b) till f gäller Taylor polynomet: $f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \sqrt{h^2+k^2} \cdot B(h,k)$, där $B(h,k)$ är begränsad runt $\vec{0}$ och $A = f''_{xx}(a,b)$; $B = f''_{xy}(a,b)$; $C = f''_{yy}(a,b)$.
$Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ sägs vara av kvadratisk form.

Def(positivt definit, negativt definit, indefinit, semidefinit): Låt $Q(h,k)$ vara av kvadratisk form. Då säger vi att:

- $Q(h,k)$ är positivt definit om $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$
- $Q(h,k)$ är positivt semidefinit om $Q(h,k) \geq 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$
- $Q(h,k)$ är negativt definit om $Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$
- $Q(h,k)$ är negativt semidefinit om $Q(h,k) \leq 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$
- $Q(h,k)$ är indefinit om $Q(h,k)$ antar både positiva och negativa värden för $(h,k) \neq (0,0)$

SATS 2.12: Låt $f: D \to \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i $\mathbb{R}^2$ och $f \in C^3(D)$, Låt även (a,b) vara en stationär punkt till f och $Q(h,k) = f''_{xx}(a,b) \cdot h^2 + 2 f''_{xy}(a,b) \cdot hk + f''_{yy}(a,b) \cdot k^2$. Då har vi att:

- Om $Q(h,k)$ är positivt definit så har f ett strängt lokalt minimum i (a,b)
- Om $Q(h,k)$ är negativt definit så har f ett strängt lokalt maximum i (a,b)
- Om $Q(h,k)$ är indefinit så har f varken ett maximum eller minimum i (a,b)

OBS: Om $Q(h,k)$ är positivt eller negativt semidefinit kan ingen slutsats tas huruvida f har en lokal extrempunkt i (a,b).

Def(kurva): En kurva är en funktion $\vec{x}: D \to \mathbb{R}^p$, där $D = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, och $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ där $x_1, \dots, x_p \in C^1(D)$.

Def(parameterisering): Låt $\varphi: [a,b] \to [\alpha, \beta]$ vara en strängt växande funktion så att $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$. Då identifierar vi $t \mapsto \vec{x}(t)$ och $s \mapsto \vec{x}(\varphi(s))$ är olika parameteriseringar av samma kurva.

Def(tangentvektor/riktningsvektor): Tangentvektorn till kurvan $\vec{x}$ i punkten $\vec{x}(t)$ är vektorn $\vec{x}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} = (x_1'(t), \dots, x_p'(t))$.
Observera att tangentvektorn beror på parameteriseringen.
Om $t = \varphi(s)$ har vi $(\vec{x}(\varphi(s)))'_s = \vec{x}'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$. Alltså samma riktning men olika längder.

Def(längd): Längden av kurvan $\vec{x}=\vec{x}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ ges av $\int_\alpha^\beta |\vec{x}'(t)|dt$.

SATS 3.α: Längden av en kurva beror ej på parameteriseringen.

Def(yta): En yta är en funktion $r: D \to \mathbb{R}^3$ med $D \subset \mathbb{R}^2$ så att
$r(s,t)=(x_1(s,t),\ x_2(s,t),\ x_3(s,t))$

Def(tangentplanet): Tangentplanet till $\vec{r}$ i punkten $\vec{r}(s,t)$ spänns upp av $\vec{r}_s'=(\partial_s x_1, \partial_s x_2, \partial_s x_3)$ och $\vec{r}_t'=(\partial_t x_1, \partial_t x_2, \partial_t x_3)$. Vektorn $(\vec{r}_s' \times \vec{r}_t')$ är en normalvektor till ytan i punkten $\vec{r}(s,t)$.

Def(funktionalmatris): Låt $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, funktionalmatrisen eller derivatan av $\vec{f}$ är matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Funktionalsmatrisen betecknas som: $\vec{f}'(\vec{x})$, $d\vec{f}(\vec{x})$, $D\vec{f}(\vec{x})$, $\frac{\partial(f_1,\dots,f_p)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$

SATS 3.β: Låt $\vec{f} \in C^1$, d.v.s. $f_1,\dots,f_p \in C^1$, då gäller för varje $f_j(\vec{x})$, $j=1,\dots,p$
$f_j(\vec{x}+\vec{h}) = f_j(\vec{x}) + f_{jx_1}'(\vec{x})\cdot h_1 + \dots + f_{jx_n}'(\vec{x})\cdot h_n + |\vec{h}|\cdot \rho_j(\vec{h})$ där $\rho_j(\vec{h}) \to 0$ då $\vec{h} \to \vec{0}$.
Alltså

$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{x}+\vec{h}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x}+\vec{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{1x_1}'(\vec{x}) & \cdots & f_{1x_n}'(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{px_1}'(\vec{x}) & \cdots & f_{px_n}'(\vec{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + |\vec{h}|\cdot \rho(\vec{h}),\ \text{där } \rho(\vec{h}) \to 0 \text{ då } \vec{h} \to \vec{0}$$

d.v.s.
$\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x})\cdot\vec{h} + |\vec{h}|\cdot\rho(\vec{h})$, där $\rho(\vec{h}) \to 0$ då $\vec{h} \to \vec{0}$

Def(linjärisering): Låt $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, och $\vec{x}$ vara en fixerad punkt i D. Den linjära funktionen av $\ell(\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(x)\cdot\vec{h}$ kallas för Linjäriseringen av $\vec{f}$ i punkten $\vec{x}$.

SATS 3.γ(kedjeregeln av funktionalmatriser): Låt $g: D_g \to D_f$ och $f: D_f \to \mathbb{R}^p$, där $D_g \subset \mathbb{R}^p$ och $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Då har vi
$(\vec{f}\circ\vec{g})'(t) = \vec{f}'(\vec{g}(t))\cdot\vec{g}'(t)$.

Def(funktionaldeterminant): Talet $\det(\vec{f}'(\vec{x}))$ kallas för funktionaldeterminanten eller Jacobis determinant av funktionen $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$

SATS 3.1: Funktionaldeterminanten för en sammansättning av två funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ är lika med produkten av de ingående funktionernas funktionaldeterminanter. Formelmässigt kan detta skrivas:
$\det(\vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))) = \det(f'(g(\vec{x})))\cdot\det(g'(\vec{x}))$

SATS 3.2 (Inversa funktionssatsen): Låt $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$ vara en C^1-funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ och $\vec{a}$ en punkt i definitionsmängden (som är en öppen mängd) sådan att $\det(\vec{f}'(\vec{a})) \neq 0$. Då finns öppna omgivningar U och V av $\vec{a}$ respektive $\vec{b}=\vec{f}(\vec{a})$ sådanna att avbildningen $\vec{f}: U \to V$ är bijektiv och inversen $\vec{f}^{-1}: V \to U$ en funktion av klassen C^1.

SATS 3.3 (Implicita funktionssatsen): Låt $F(x,y)$ vara en C^1-funktion och (a,b) en punkt på nivåkurvan $F(x,y)=C$. Om $F'_y(a,b)\neq 0$ så finns en öppen omgivning U av (a,b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 funktion $y=f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$$

SATS 3.δ: Låt $F(x,y,z)$ vara en C^1-funktion i en omgivning av $\vec{a}$, $F(\vec{a})=C$ och $F'_z(\vec{a})\neq 0$. Då kan man uttrycka nivåytan $F(x,y,z)=C$ i en omgivning av $\vec{a}$ som en C^1-funktion $z=z(x,y)$. Dessutom:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

SATS 3.ε: Betrakta systemet

$$\begin{cases} F(x,y,z)=C \\ G(x,y,z)=D \end{cases}$$

Där $F,G\in C^1$ kring en punkt $\vec{a}$ och $C,D\in\mathbb{R}$ så att $F(\vec{a})=C$ och $G(\vec{a})=D$.
Antag att determinanten

$$\frac{d(F,G)}{d(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0$$

i punkten $\vec{a}$. Då finns det en omgivning av $\vec{a}$ i vilket systemet bestämmer två C^1-funktioner

$$\begin{cases} x=f(z) \\ y=g(z) \end{cases}$$

Dessutom kan man via systemet

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=t \end{cases}$$

lokalt parameterisera skärningskurvan av det ursprungliga systemet med variabeln z. D.v.s.

$$\begin{cases} F(f(z),\,g(z),\,z)=C \\ G(f(z),\,g(z),\,z)=D \end{cases}$$

På samma sätt kan man parameterisera skärningskurvan med variablerna x och y.

SATS 4.α (optimering på kompakta områden): Låt $K\subset\mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd och låt $f:K\to\mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då antar f sitt största värde M på K. Dessutom om $f\in C^1(\mathrm{int}(K))$ så har vi att om $f(\vec{a})=M$ så är antingen:

i) $\vec{a}\in\mathrm{int}(K)$ och $\operatorname{grad} f(\vec{a})=0$

eller

ii) $\vec{a}\in\partial K$

SATS 4.β (optimering på icke-kompakta mängder): Låt $K\subset\mathbb{R}^n$ vara en icke-kompakt mängd och låt $f:K\to\mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion och $f\in C^1(\mathrm{int}(K))$. Om det finns en kompakt mängd $U\subset K$ sådan att för något $\vec{a}\in U$ har vi att $f(\vec{a})>f(\vec{x}):\forall\vec{x}\in K\setminus U$ så antar f sitt största värde i U och den punkten kan hittas med hjälp av SATS 4.α.

SATS 4.γ (minsta kvadratmetoden): Låt (a_i, b_i), $i=1,\dots,n$ vara punkter i $\mathbb{R}^2$ och $\exists i,j \in \{1,\dots,n\}$ så att $a_i \neq a_j$. Låt även $y=kx+l$ vara den linje som har minsta möjliga summa av vertikala avståndet av varje punkt och linjen. k och l kan bestämmas genom att hitta minsta värdet av $Q(k,l)=\sum(ka_i+l-b_i)^2$. k och l kan bestämmas entydigt ur **normalekvationerna** som ges av $\vec{\nabla}Q(k,l)=\vec{0}$:

$$\begin{cases} \left(\sum a_i^2\right)k + \left(\sum a_i\right)l = \sum a_i b_i \\ \left(\sum a_i\right)k + \quad n\, l = \sum b_i \end{cases}$$

SATS 4.1: Låt $f: D_f \to \mathbb{R}$ och $g: D_g \to \mathbb{R}$ vara funktioner i C^1 och D_f och D_g vara öppna mängder i $\mathbb{R}^2$. Antag att $f(x,y)$ maximeras eller minimeras under bi-vilkoret $g(x,y)=0$ i en inre punkt $(a,b) \in D_f \cap D_g$. Då är vektorerna $\vec{\nabla}f(a,b)$ och $\vec{\nabla}g(a,b)$ parallella.

Def(trappfunktion): Låt $\Delta = \{(x,y);\ x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$. $\Phi: \Delta \to \mathbb{R}$ är en **trappfunktion** om det finns en indelning av Δ i rektanglar Δ_{ij} som definieras som $\Delta_{ij} = \{(x,y);\ x\in[x_{i-1}, x_i],\ y\in[y_{j-1}, y_j]\}$ där $a=x_0<\dots<x_n=b$ och $c=y_0<\dots<y_m=d$ så att Φ har ett konstant värde c_{ij} på Δ_{ij}.

Def(dubbelintegral): **Dubbelintegralen** av Φ över Δ är

$$\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy := \sum_{ij} c_{ij}\,\mu(\Delta_{ij}) \quad \text{där } \mu(\Delta_{ij}) \text{ är arean av } \Delta_{ij}$$

SATS 6.α: För trappfunktioner Φ och Ψ, och $a, b \in \mathbb{R}$ gäller:

- $\iint_\Delta (a\Phi + b\Psi)\,dx\,dy = a\iint_\Delta \Phi\,dx\,dy + b\iint_\Delta \Psi\,dx\,dy$
- Om $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$: $\iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \Phi\,dx\,dy = \iint_{\Delta_1} \Phi\,dx\,dy + \iint_{\Delta_2} \Phi\,dx\,dy$
- Om $\Phi \leq \Psi$ på Δ: $\iint_\Delta \Phi\,dx\,dy \leq \iint_\Delta \Psi\,dx\,dy$
- $\left|\iint_\Delta \Phi\,dx\,dy\right| \leq \iint_\Delta |\Phi|\,dx\,dy$ (triangelolikheten för integraler)
- $\iint_\Delta \Phi\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d \Phi(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b \Phi(x,y)\,dx\right)dy$.

Def(Riemann integrerbar): En begränsad funktion $f(x,y)$ är **Riemann integrerbar** över en rektangel Δ om det för alla $\varepsilon>0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ sådanna att $\Phi \leq f \leq \Psi$ på Δ och

$$\iint_\Delta \Psi\,dx\,dy - \iint_\Delta \Phi\,dx\,dy < \varepsilon$$

SATS 6.1: Om f är integrerbar över Δ så finns det precis ett tal λ sådanna att

$\iint_\Delta \Phi\,dx\,dy \leq \lambda \leq \iint_\Delta \Psi\,dx\,dy$ för alla par av trappfunktioner som uppfyller $\Phi \leq f \leq \Psi$ på Δ.

Def(dubbelintegral): Talet λ från sats 6.1 kallas för **dubbelintegralen** av f över Δ och betecknas $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \lambda$.

SATS 6.2: Om f är integrerbar över $\Delta = \{(x,y);\ x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$ så gäller (om enkel integralerna existerar):

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

SATS 6.3: Om funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}$ så är f integrerbar över Δ, och enkelintegralerna i sats 6.2 existerar.

Def (integrerbar): Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd och $f : D \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Vi definierar $f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y) : (x,y) \in D \\ 0 \quad : (x,y) \notin D \end{cases}$

Vi säger att f är integrerbar över D om f_D är integrerbar över någon rektangel Δ där $D \subset \Delta$. Vi sätter

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f_D(x,y)\,dx\,dy$$

SATS 6.4: Antag att f är kontinuerlig på $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ där α och β är kontinuerliga på $[a,b]$. Då är f integrerbar på D och

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Def (area): Arean för ett område D definieras som $\text{Area}(D) := \iint_D 1\,dx\,dy$ (även kallat μ)

Def (nollmängd): En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ är en nollmängd om vi för alla $\varepsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar med en sammanlagd area mindre än ε.

Lemma 6.1: Grafen av en kontinuerlig funktion $\varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en nollmängd i $\mathbb{R}^2$.

Def (kvadrerbar): En mängd D är kvadrerbar om ∂D är en nollmängd.

Lemma 6.2: Antag att f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D. Då är f integrerbar över D.

Lemma 6.3: Varje begränsad funktion är integrerbar över en nollmängd N och

$$\iint_N f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

SATS 6.β (medelvärdessatsen för integraler): Låt f vara kontinuerlig på en kompakt, kvadrerbar, och bågvis sammanhängande mängd $D \subset \mathbb{R}^2$. Låt $m = \min_D f$ och $M = \max_D f$. Då finns en punkt $(a,b) \in D$ så att $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(a,b) \cdot \text{area}(D)$

SATS 6.5: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och D vara en kompakt mängd i $\mathbb{R}^2$. Då gäller $\sum_{i,j} f(\vec{x}_{ij}) \cdot \mu(\Delta_{ij}) \to \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ när indelningsfinhet går mot noll.

SATS 6.6: Låt $\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$ vara en bijektiv C^1-avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i (u,v) planet på ett motsvarande område D i (x,y) planet, sådan att $J(u,v) = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0$ i E. Då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(g(u,v), h(u,v)) \cdot |J(u,v)|\,du\,dv$$

Om funktionerna under integraltecknen är integrerbara över respektive område.

SATS 6.γ: Låt $g: D \to \mathbb{R}$ där D är en kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^2$ så att $g \in C^1(D)$ och låt $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ där $a = \inf_D g(x,y)$, $b = \sup_D g(x,y)$ och $h \in C^1(a,b)$. Låt även $G_u = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq u\}$. Antag att $A_u = \text{Area}(G_u)$ är C^1. Då gäller $\iint_D h(g(x,y))\,dxdy = \int_a^b h(u) \cdot A'(u)\,du$

Def (avskärning): Låt f vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område $\Omega \in \mathbb{R}^2$. En begränsad kvadrerbar delmängd D av Ω är en **avskärning** av Ω om f är begränsad på D.

Def (konvergent): Låt f vara en kontinuerlig funktion i ett öppet område $\Omega \in \mathbb{R}^2$. $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$ med $f(x,y) \geq 0$ är **konvergent** om mängden $M = \{\iint_D f(x,y)\,dxdy : D \text{ är en avskärning av } \Omega\}$ är uppåt begränsad, annars **divergent**. Om integralen är konvergent definierar vi $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \sup M$ och $\sup M = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ där $(D_n)_{n=1}^\infty$ är en **uttömande svit** av avskärningar, d.v.s. $D_{n-1} \subset D_n$ of för varje $D \subset \Omega$ finns D_n så att $D \subset D_n$.

SATS 6.δ: För generaliserade integraler med positiv integrand gäller att om den inre enkelintegralen (till exempel med avseende på x) är konvergent för varje fixerat y då är dubbelintegralen av f konvergent om och endast om den yttre integralen är konvergent (detta gäller även om den inre enkelintegralen ej konvergerar för enstaka värden av y). I så fall har vi $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$

Def (konvergent): Låt $f: \Omega \to \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ och låt

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & : f(x,y) \geq 0 \\ 0 & : f(x,y) < 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad f^-(x,y) = \begin{cases} 0 & : f(x,y) \geq 0 \\ -f(x,y) & : f(x,y) < 0 \end{cases}$$

Alltså att $f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$ och $|f(x,y)| = f^+(x,y) + f^-(x,y)$

Dubbelintegralen $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$ är **konvergent** om och endast om både $\iint_\Omega f^+(x,y)\,dxdy$ och $\iint_\Omega f^-(x,y)\,dxdy$ är konvergenta.

Det vill säga $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$ konvergerar $\Leftrightarrow \iint_\Omega |f(x,y)|\,dxdy$.

SATS 6.ε: Låt $f: \Omega \to \mathbb{R}$ och $g: \Omega \to \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ och $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$. Då har vi att

$$\iint_\Omega g(x,y)\,dxdy \text{ konvergerar} \Rightarrow \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy \text{ konvergerar.}$$

och

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy \text{ divergerar} \Rightarrow \iint_\Omega g(x,y)\,dxdy \text{ divergerar.}$$

SATS 6.ζ: Låt $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 > 1\}$. Då har vi att $\iint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$ konvergerar om och endast om $\alpha > 1$.

SATS 6.η: Låt $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$. Då har vi att $\iint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$ konvergerar om och endast om $\alpha < 1$.

SATS 5.1: Antag att funktionerna $f(s,x)$ och $f'_s(s,x)$ är kontinuerliga i området $\alpha < s < \beta$, $a < x < b$. Då är den s-beroende integralen $F(s) = \int_{x=a}^b f(s,x)\,dx$ deriverbar i $\alpha < s < \beta$ och $\frac{dF}{ds} = \int_a^b f'_s(s,x)\,dx$.

SATS 5.2: Antag att $f(s,x)$ och $f'_s(s,x)$ är kontinuerliga i $\alpha<s<\beta$, $A\leq x\leq B$. Låt vidare $b(s)$ vara en C^1-funktion i $\alpha<s<\beta$ med $A<b(s)<B$, och låt $A\leq a\leq B$. Då är den s-beroende integralen

$$F(s)=\int_a^{b(s)} f(s,x)\,dx \quad \text{deriverbar och} \quad F'(s)=\int_a^{b(s)} f'_s(s,x)\,dx+f(s,b(s))\,b'(s).$$

SATS 5.3: Antag att $f(s,x)$ och $f'_s(s,x)$ är kontinuerliga i $\alpha<s<\beta$, $x\geq a$. Antag vidare att den s-beroende integralen

$$F(s)=\int_a^{\infty} f(s,x)\,dx$$

är konvergent för $\alpha<s<\beta$, och att det i varje kompakt delintervall $\alpha_1<s<\beta_1$ av (α,β) finns en så kallad majorerande funktion $g(x)$ sådan att

(i) $|f'(s,x)|\leq g(x)$ för $\alpha_1\leq s\leq\beta_1$, $x\geq a$

(ii) $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ är konvergent

Då är $F(s)$ deriverbar i $\alpha<s<\beta$ och

$$F'(s)=\int_a^{\infty} f'_s(s,x)\,dx$$

SATS 7.α: Låt $D=\{(x,y,z):\alpha(x,y)\leq z\leq\beta(x,y),\ (x,y)\in E\}$. Då kan integralen av f i D beräknas som

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_E\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

SATS 7.β: Låt $D=\{(x,y,z):\alpha(x,y)\leq z\leq\beta(x,y)\}$ där $E=\{(x,y):\alpha(x,y)\leq\beta(x,y)\}$ är en begränsad, bågvis sammanhängande mängd. Då kan integralen av f i D beräknas som

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_E\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy.$$

SATS 7.γ: Låt $\vec{g}:E\to D$ vara en bijektiv C^1-avbildning, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\subset D$ och $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\subset E$ så att $\vec{x}=\vec{g}(\vec{u})=(g_1(\vec{u}),g_2(\vec{u}),g_3(\vec{u}))$ och att

$$J(\vec{u})=\frac{d(g_1,g_2,g_3)}{d(u_1,u_2,u_3)}\neq 0.$$ Då kan integralen av f i D beräknas som

$$\iiint_D f(\vec{x})\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\iiint_E f(\vec{g}(\vec{u}))\cdot|J(\vec{u})|\,du_1\,du_2\,du_3.$$

SATS 8.α: Låt $\vec{r}=\vec{r}(s,t)$, $(s,t)\in D$ vara en parameterframställning av en yta Y i $\mathbb{R}^3$. Man kan då beräkna arean av ytan Y som

$$\iint_Y dS=\iint_D|\vec{r}\,'_s\times\vec{r}\,'_t|\,ds\,dt.$$

Def (kurvintegral): Låt $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^2$ vara ett kontinuerligt vektorfält på en öppen mängd $D\subset\mathbb{R}$ så att för $\vec{r}=(x,y)$ är $\vec{F}(\vec{r})=(P(\vec{r}),Q(\vec{r}))=(P(x,y),Q(x,y))$. Låt även γ vara en C^1 kurva i D med parameterisering $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ och $t\in[\alpha,\beta]$. Kurvintegralen av $\vec{F}$ längs γ är $\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$.

Vi använder beteckningen $$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}=\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt=\int_\gamma P\,dx+Q\,dy$$

OBS: Riktningen av kurvan spelar roll.

Def (sluten, enkel): En kurva är sluten om dess start- och slutpunkterna sammanfaller. En kurva är enkel om den är sluten och inte skär sig själv.

Def(cirkulation): Om $\vec{F}$ är ett vektorfält och γ är en enkel kurva kallas $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$ för cirkulationen av vektorfältet $\vec{F}$ längs γ och betecknas $\oint_\gamma \vec{F} d\vec{r}$.

Def(positivt orienterad): Låt γ vara en enkel kurva i $\mathbb{R}^2$. Låt D vara den kompakta mängd som uppfyller $\partial D = \gamma$. γ sägs vara positivt orienterad om D är till vänster om γ med avseende på kurvans riktning, annars negativt orienterad. Om $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ är γ positivt orienterad om för D $\partial D = \gamma$ så ligger D till vänster om γ_1 och γ_2 med avseende på deras riktning.

SATS 9.1 (Greens formel): Antag att:
- P och Q är C^1-funktioner i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
- D är en kompakt mängd och $D \subset \Omega$
- ∂D utgörs av en eller flera styckvis C^1-kurvor som är positivt orienterade

Då gäller $$\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

SATS 9.α: Låt D vara en kompakt mängd i $\mathbb{R}^2$. Från Greens formel har vi
- Om $P=0$, $Q=x$ får vi $\text{Area}(D) = \iint_D dxdy = \int_{\partial D} x dy$
- Om $P=-y$, $Q=0$ får vi $\text{Area}(D) = \iint_D dxdy = \int_{\partial D} -y dx$
- Om $P = \frac{-y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$ får vi $\text{Area}(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y dx + x dy$

Där ∂D är positivt orienterad.

Def(flöde): Låt γ vara en C^1-kurva i $\mathbb{R}^2$ med parameterisering $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.
Då har vi $\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) & \text{är tangent till } \gamma \\ \vec{n} = \vec{n}(t) = (y'(t), -x'(t)) & \text{är en normal till } \gamma \end{cases}$
Låt även $\vec{N} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ vara enhetsnormalen. Låt $\vec{F} = (P, Q)$ vara ett vektorfält.
Flödet av $\vec{F}$ genom γ är $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \int_\gamma -Q dx + P dy$. ds kallas för ett längdelement.

Def(divergens): Låt D vara en kompakt mängd med randen $\partial D = \gamma$ där γ är positivt orienterad, och låt Ω vara en öppen mängd så att $D \subset \Omega$. För $\vec{F} = (P, Q)$ där $P, Q \in C^1(\Omega)$ har vi att flödet av $\vec{F}$ genom γ är
$$\int_{\partial D} -Q dx + P dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$
$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)$ kallas för divergensen av $\vec{F}$ och har notationen $\text{div}(\vec{F})$
Vidare:
- Om $\text{div}(\vec{F}) > 0$ är flödet av $\vec{F}$ ut från D större än flödet in mot D
- Om $\text{div}(\vec{F}) < 0$ är flödet av $\vec{F}$ ut från D mindre än flödet in mot D
- Om $\text{div}(\vec{F}) = 0$ är flödet av $\vec{F}$ ut från D lika med flödet in mot D

Def(oberoende av vägen): Kurvintegralen $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$ är oberoende av vägen i Ω om $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$ för varje sluten kurva C i Ω. Detta innebär att för alla kurvor $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega$ som går från $\vec{a}$ till $\vec{b}$ har vi $\int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r}$

Def(potentialfält/konservativt fält, potential): $\vec{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält eller konservativt fält om det finns en C^1 funktion U i Ω så att $\vec{F} = \text{grad}\, U$. U kallas då för en potential till $\vec{F}$

SATS 9.2: Låt $\vec{F} = (P, Q)$ vara ett potentialfält med potentialen U i det öppna området Ω. För varje kurva γ med startpunkt $\vec{a}$ och slutpunkt $\vec{b}$ i Ω gäller då att $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{b}) - U(\vec{a})$. Alltså är $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$ oberoende av vägen i Ω.

SATS 9.3: Låt $\vec{F}=(P,Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierad i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω. Om kurvintegralen $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$ är oberoende av vägen så har $\vec{F}$ en potential i Ω.

Def(exakt): Differentialformen $Pdx+Qdy$ är exakt i Ω om det finns en C^1-funktion U i Ω vars differential är $dU=Pdx+Qdy$, det vill säga $P=\frac{\partial U}{\partial x}$ och $Q=\frac{\partial U}{\partial y}$ eller $(P,Q)=\operatorname{grad}U$. Detta är synonymt med att $\vec{F}=(P,Q)$ är ett potentialfält med en potential U.

SATS 9.4: Antag att fältet $\vec{F}=(P,Q)$ har en potentialfunktion U av klass C^2 i Ω. Då är
$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $(x,y)\in\Omega$

Def(enkelt sammanhängande): En öppen mängd Ω är enkelt sammanhängande om Ω är bågvis sammanhängande och varje enkel sluten kurva γ i Ω avgränsar ett område D som uppfyller $D\subset\Omega$, d.v.s. Ω innehåller inga "hål".

SATS 9.5: Om $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ är ett enkelt sammanhängande område och $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ i Ω så har vektorfältet $\vec{F}=(P,Q)$ en potential i Ω

SATS 9.β: Låt Ω vara en öppen bågvis sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^2$ och $\vec{F}=(P,Q)$ är ett kontinuerligt vektorfält med $P,Q\in C^1(\Omega)$. Då är följande påståenden ekvivalenta:
- Det finns en funktion $U\in C^1(\Omega)$ så att $\vec{F}=\vec{\nabla}U$
- $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}=U(\vec{b})-U(\vec{a})$ för varje $\gamma\subset\Omega$ med startpunkt $\vec{a}$ och slutpunkt $\vec{b}$
- $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$ är oberoende av vägen i Ω för $\forall\gamma\subset\Omega$

Dessutom om $U\in C^2(\Omega)$ och Ω är enkelt sammanhängande är även nedanstående påståenden ekvivalenta med de ovanstående:
- $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$
- $\oint_\gamma \vec{F}d\vec{r}=0$ för alla enkla γ i Ω.

Def(arbete): Låt $\vec{F}$ vara ett vektorfält och γ vara en kurva med parameterisering $\vec{r}(t)$: $t\in[a,b]$. Arbetet som kraftfältet $\vec{F}$ gör på kurvan γ definieras som $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)dt$.

Def(positiv sida): Låt ytan $Y\subset\mathbb{R}^3$ ges av $\vec{r}=\vec{r}(s,t)$, $(s,t)\in D$. Den sidan som normalvektorn $\vec{n}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$ pekar ut från kallas för den positiva sidan av Y

Def(enhetsnormal): $\vec{N}=\frac{r_s'\times r_t'}{|r_s'\times r_t'|}$ kallas för ytans enhetsnormal.

Def(vektoriellt areaelement): $d\vec{S}=\vec{N}dS=(r_s'\times r_t')dsdt$ kallas för det vektoriella areaelementet för ytan.

Def(flöde): Låt ytan $Y\subset\mathbb{R}^3$ ges av $\vec{r}=\vec{r}(s,t)$, $(s,t)\in D$ och $\vec{F}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$.
$\Phi=\iint_Y \vec{F}d\vec{S}=\iint_D \vec{F}(\vec{r}(s,t))\cdot(r_s'\times r_t')dsdt$ kallas för flödet av vektorfältet $\vec{F}$ genom ytan Y.

SATS 10.1 (Gauss' sats/Divergenssatsen): Låt $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K\subset\Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor som är orienterade med utåtriktad normal så gäller det: $\iint_{\partial K}\vec{u}\cdot\vec{N}dS=\iiint_K \operatorname{div}(\vec{u})dx_1dx_2dx_3=\iiint_K\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3$

SATS 10.α: $\iint_{\partial K}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}d\vec{S}=\begin{cases}4\pi & \text{om } \vec{0}\in K\\ 0 & \text{om } \vec{0}\notin K\end{cases}$

Def (rotation): Rotationen av det 3-dimensionella vektorfältet $\vec{u}(\vec{x})=(u_1(\vec{x}),u_2(\vec{x}),u_3(\vec{x}))$ av tre variabler $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ är vektorfältet:

$$\operatorname{rot}(\vec{u}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix} = \vec{\nabla}\times\vec{u} = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

Annan notation: $\operatorname{curl}(\vec{u})$, $\vec{\nabla}\times\vec{u}$

Def (virvelfri): Ett vektorfält $\vec{u}$ är virvelfritt om $\operatorname{rot}(\vec{u})=\vec{0}$

Def (rand): Låt $Y\subset\mathbb{R}^3$ vara en C^1-yta given av $\vec{r}(s,t)$, där $(s,t)\in D$ och $D\subset\mathbb{R}^2$ är ett kompakt område med C^1-rand ∂D. Randen ∂Y av Y är bilden av ∂D under $\vec{r}$ med tillhörande orientering.

SATS 10.β: Låt $\vec{u}=\frac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$. Då är $\int_{\partial K}\vec{u}\,d\vec{r}=\begin{cases}2\pi & \text{om } \vec{0}\in K\\ 0 & \text{om } \vec{0}\notin K\end{cases}$

SATS 10.2 (Stokes' sats): Låt $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ vara ett C^1-fält i en öppen mängd $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, och Y är ett orienterat ytstycke i Ω med rand ∂Y så gäller att

$$\int_{\partial Y}\vec{u}\,d\vec{r}=\iint_Y \operatorname{rot}(\vec{u})\cdot\vec{N}\,dS$$

SATS 10.γ: Nabla $\vec{\nabla}$ är en funktion av $\vec{u}$ till ett vektorfält där $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$.
$\vec{\nabla}$ kan också ses som en vektor med följande egenskaper:

- $\vec{\nabla}\vec{u}=\operatorname{grad}(\vec{u})$
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=\operatorname{div}(\vec{u})$
- $\vec{\nabla}\times\vec{u}=\operatorname{rot}(\vec{u})$

SATS 10.3: Varje potentialfält är virvelfritt.

SATS 10.4: Om vektorfältet $\vec{u}$ är virvelfritt i ett öppet enkelt sammanhängande område Ω i $\mathbb{R}^3$ så har $\vec{u}$ en potential i Ω.