Sannolikhetsteori och Statistik

Def (utfall): Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas ett **utfall**. Betecknas $\omega_1, \omega_2, \ldots$

Def (utfallsrummet): Mängden av alla möjliga utfall kallas **utfallsrummet**. Betecknas Ω.

Def (händelse): En **händelse** är en samling av utfall. Betecknas $A, B, C, \ldots$

Def (diskret, ändligt, kontinuerlig): Om antalet utfall är ändligt eller uppräkneligt oändligt, säges Ω vara ett **diskret** utfallsrum. Om antalet är ändligt, säges Ω speciellt vara ett **ändligt** utfallsrum. Om antalet utfall icke är ändligt eller uppräkneligt oändligt, säges Ω vara ett **kontinuerligt** utfallsrum.

Notation: $\cup$ och $\cap$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \text{minst en av händelserna } A_1, \ldots, A_n \text{ kommer inträffa}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \text{alla händelserna } A_1, \ldots, A_n \text{ inträffar.}$$

Def (parvis oförenliga): Händelserna $A_1, \ldots, A_n$ säges vara **parvis oförenliga** om alla par A_i och A_j är oförenliga (**disjunkta**), dvs om det är omöjligt att två eller flera av händelserna inträffar samtidigt.

Def (komplement): Komplementet till A är $A^* = \Omega \setminus A$. Detta kan också betecknas som $\complement A$.

SATS 2.α (De Morgans lagar): Låt A, B, C vara händelser. Följande likheter gäller:
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$
- $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^*$
- $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^* = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^*$

Def (sannolikhet): Låt A vara en händelse. Det finns ett tal $P(A)$ som kallas **sannolikheten** för A. Man söker välja $P(A)$ så att den relativa frekvensen vid ett någorlunda stort antal försök kommer i närheten $P(A)$.

Def (frekvenstolkningen): Låt $a \in [0,1]$, om vi låter $P(A) = a$ kan vi ge detta uttalande den påtagliga men samtidigt vaga **frekvenstolkningen**: Vid ett stort antal försök blir den relativa frekvensen av händelsen A nog ungefär lika med a.

SATS 2.β (Kolmogrovs axiomsystem): Följande axiom för sannolikhetsmåttet $P(\cdot)$ skall vara uppfyllda:
- Axiom 1. För varje händelse A gäller att $0 \le P(A) \le 1$
- Axiom 2. För hela utfallsrummet Ω gäller att $P(\Omega) = 1$
- Axiom 3. **Additionsformeln**: Om $A_1, A_2, \ldots$ är en ändlig eller uppräckneligt oändlig följd av parvis oförenliga händelser gäller att
  $$P(A_1 \cup A_2 \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Utfallsrummet Ω, händelserna $A, B, \ldots$ och sannolikheterna $P(\cdot)$ säges tillsammans utgöra ett sannolikhetsrum.

SATS 2.1 (Komplementsatsen): För komplementet A^* till A gäller att $P(A^*) = 1 - P(A)$

SATS 2.2 (Additionssatsen för två händelser): För två godtyckliga händelser A och B gäller att $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

SATS 2.3 (Booles olikhet): För två godtyckliga händelser A och B gäller att $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Def (likformigt sannolikhetsmått): Om $P(\omega_i) = 1/m$ för $i = 1, \ldots, m$ föreligger ett likformigt sannolikhetsmått.

SATS 2.4 (Den klassiska sannolikhetsdefinitionen): Vid likformigt sannolikhetsmått är sannolikheten för en händelse lika med kvoten mellan antalet för händelsens gynsamma fall och antalet möjliga fall.

SATS 2.8 (Multiplikationsprincipen): Om åtgärd 1 kan utföras på a_1 sätt och åtgärd 2 på a_2 sätt, så finns det $a_1 \cdot a_2$ sätt att utföra båda åtgärderna. Generalisering till tre åtgärder blir $a_1 a_2 a_3$.

SATS 2.5: Dragning med återläggning av k element ur n med hänsyn till ordning kan ske på n^k olika sätt

SATS 2.6: Dragning utan återläggning av k element ur n (med hänsyn till ordning) kan ske på $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ olika sätt

Följdsats 2.6.1: Antalet permutationer av n element bland n är lika med $n(n-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ eller kortare: n element kan ordnas på $n!$ olika sätt.

SATS 2.7: Dragning utan återläggning av k element ur n (utan hänsyn till ordning) kan ske på $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ olika sätt

SATS 2.8 (Binomialteoremet): För varje positivt heltal n och för godtyckliga tal x och y gäller $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Def (betingad sannolikhet): Låt A och B vara två händelser. Uttrycket

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

kallas den betingande sannolikheten för B givet att A har inträffat. Om $P(A) = 0$ låter vi $P(B \mid A)$ vara obestämd.

Det gäller även att
- $P(B^* \mid A) = 1 - P(B \mid A)$
- $P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(B \cap C \mid A)$

Vi kan också skriva:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

SATS 2.9 (Lagen om total sannolikhet): Om händelserna $H_1, \ldots, H_n$ är parvis oförenliga och $\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, gäller för varje händelse A att $P(A) = \sum_{i=1}^{n} (P(H_i) P(A \mid H_i))$

SATS 2.10 (Bayes sats): Under samma villkor som i SATS 2.9 gäller

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} (P(H_j) P(A \mid H_j))} = \frac{P(A \cap H_i)}{\sum_{j=1}^{n} (P(A \cap H_j))} = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}$$

Def (oberoende): Om $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ säges A och B vara oberoende händelser.

Def(oberoende): Om:
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Säges A, B och C vara oberoende händelser
Om A och B är oberoende så är A^* och B oberoende.

SATS 2.11: Om händelserna $A_1, A_2, \dots, A_n$ är oberoende och $P(A_i) = p_i$, så är sannolikheten att minst en av dem inträffar $1-(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n)$

Följdsats 2.11.1: Om händelserna A_i är oberoende och var och en inträffar med sannolikheten p, så är sannolikheten att minst en av dem inträffar lika med $1-(1-p)^n$.

Def (stokastisk variabel): En stokastisk variabel (s.v) är en reelvärd funktion definierad på ett utfallsrum. $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Def (diskret): En stokastisk variabel är diskret om den kan anta ett ändligt eller uppräkneligt oändligt antal olika värden.
Storheterna $p_X(x) = P(X=x)$, $x = a_1, a_2, \dots$
där $a_1, a_2, \dots$ är de (uppräkneligt många) tänkbara värdena som X kan anta, kallas sannolikhetsfunktionen för den s.v. X

SATS 3.α: Låt A vara en delmängd av de tänkbara värdena som X kan anta, d.v.s $A \subset V_X$. Vi har då: $P(X \in A) = \sum_{k \in A} p_X(k)$

Följdsats 3.α.1: Låt $V_X = \mathbb{N}$. Vi har då $P(X \in V_X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$

Följdsats 3.α.2: Låt $V_X = \mathbb{N}$. Vi har då $P(a < X \leq b) = \sum_{k=a+1}^{b} p_X(k)$ där $a, b \in \mathbb{N}$

Def (tvåpunktsfördelad): Om den s.v. X antar endast två värdena a och b med sannolikheterna p respektive $1-p$ säges X vara tvåpunksfördelad. Alltså $p_X(a) = p$, $p_X(b) = 1-p$.
I specialfallet då $a=1$ och $b=0$ säger man ofta att X är Bernoulli-fördelad.

Def (likformigt fördelad): Om den s.v. X antar värdena $1, 2, \dots, m$ med lika stor sannolikhet, $1/m$, säges X vara likformigt fördelad, eller mer specifikt har X en likformig fördelning över $\{1, 2, \dots, m\}$.

Def (för-första-gången-fördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen
$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \dots$ där $p(0,1)$ säges X vara för-första-gången-fördelad. Betecknas $X \in ffg(p)$

Def (geometriskt fördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen $p_X(k) = (1-p)^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$ där $p \in (0,1)$, säges X vara geometriskt fördelad. Betecknas $X \in Ge(p)$

Def (binomialfördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ där n är ett positivt heltal och $p \in (0,1)$
säges X vara binomialfördelad. Betecknas $X \in Bin(n,p)$.
Enligt binomialtheoremet är
$\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$

Def(hypergeometriskt fördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$p_X(k) = \binom{v}{k}\binom{s}{n-k} \Big/ \binom{v+s}{n}$ där k antar alla heltalsvärden sådana att $0 \leq k \leq v$, $0 \leq n-k \leq s$ säges X vara hypergeometriskt fördelad. Betecknas $X \in Hyp(N, n, p)$ där $N = s+v$, och $p = \frac{v}{v+s}$

Def(Poisson-fördelning): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu > 0$ säges X vara Poisson-fördelad. Betecknas $X \in Po(\mu)$

Def(kontinuerlig): Om det finns en funktion $f_X(x)$ sådan att $P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$ för alla intervall $A \subset \mathbb{R}$, säges X vara en kontinuerlig s.v. Funktionen $f_X(x)$ kallas täthetsfunktionen för X. Kan även kallas frekvensfunktion.

SATS 3.1: I varje punkt x där $f_X(x)$ är kontinuerlig, gäller att

$F_X'(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$