

# Sannolikhetsteori och Statistik

Def(utfall): Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas ett **utfall**. Betecknas  $w_1, w_2, \dots$

Def(utfallsrummet): Mängden av alla möjliga utfall kallas **utfallsrummet**. Betecknas  $\Omega$ .

Def(händelse): En **händelse** är en samling av utfall. Betecknas  $A, B, C, \dots$

Def(diskret, ändligt, kontinuerlig): Om antalet utfall är ändligt eller uppräkneligt ändligt, säges  $\Omega$  vara ett **diskret utfallsrum**. Om antalet är ändligt, säges  $\Omega$  speciellt vara ett **ändligt utfallsrum**. Om antalet utfall icke är ändligt eller uppräkneligt ändligt, säges  $\Omega$  vara ett **kontinuerligt utfallsrum**.

Notation:  $\cup$  och  $\cap$

$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  = minst en av händelserna  $A_1, \dots, A_n$  kommer inträffa

$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  = alla händelserna  $A_1, \dots, A_n$  inträffar.

Def(parvis oförenliga): Händelserna  $A_1, \dots, A_n$  säges vara **parvis oförenliga** om alla par  $A_i$  och  $A_j$  är oförenliga (**disjunkta**), dvs om det är omöjligt att två eller flera av händelserna inträffar samtidigt.

Def(komplement): Komplementet till  $A$  är  $A^c = \Omega \setminus A$ . Detta kan också betecknas som  $\bar{A}$ .

SATS 2.α (De Morgans lagar): Låt  $A, B, C$  vara händelser. Följande likheter gäller:

$$\cdot A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\cdot A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\cdot (\bigcup_{i=1}^n A_i)^* = \bigcap_{i=1}^n A_i^*$$

$$\cdot (\bigcap_{i=1}^n A_i)^* = \bigcup_{i=1}^n A_i^*$$

Def(sannolikhet): Låt  $A$  vara en händelse. Det finns ett tall  $P(A)$  som kallas **sannolikheten för  $A$** . Man söker välja  $P(A)$  så att den relativa frekvensen vid ett nägorlunda stort antal försök kommer i närheten  $P(A)$ .

Def(frekvenstolkningen): Låt  $a \in [0, 1]$ , om vi läter  $P(A) = a$  kan vi ge detta uttalande den påtagliga men samtidigt vaga **frekvenstolkningen**: Vid ett stort antal försök blir den relativa frekvensen av händelsen  $A$  nog ungefärlig lika med  $a$ .

SATS 2.β (Kolmogorovs axiomsystem): Följande axiom för sannolikhetsmätet  $P(\cdot)$  skall vara uppfyllda:

• Axiom 1: För varje händelse  $A$  gäller att  $0 \leq P(A) \leq 1$

• Axiom 2: För hela utfallsrummet  $\Omega$  gäller att  $P(\Omega) = 1$

• Axiom 3: **Additionsformeln**: Om  $A_1, A_2, \dots$  är en ändlig eller uppräkneligt ändlig följd av parvis oförenliga händelser gäller att

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Utfallsrummet  $\Omega$ , händelserna  $A, B, \dots$  och sannolikheterna  $P(\cdot)$  säges tillsammans utgöra ett **sannolikhetssrum**.

SATS 2.1 (Komplementsatsen): För komplementet  $A^*$  till A gäller att  $P(A^*) = 1 - P(A)$

SATS 2.2 (Additionssatsen för två händelser): För två godtyckliga händelser A och B gäller att  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

SATS 2.3 (Booles olikhet): För två godtyckliga händelser A och B gäller att  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ .

Def(likformigt sannolikhetsmått): Om  $P(w_i) = 1/m$  för  $i=1,\dots,m$  föreligger ett likformigt sannolikhetsmått.

SATS 2.4 (Den klassiska sannolikhetsdefinitionen): Vid likformigt sannolikhetsmått är sannolikheten för en händelse lika med kvoten mellan antalet för händelsens gynsamma fall och antalet möjliga fall.

SATS 2.8 (Multiplikationsprincipen): Om åtgärd 1 kan utföras på  $a_1$ , sätt och åtgärd 2 på  $a_2$  sätt, så finns det  $a_1 \cdot a_2$  sätt att utföra båda åtgärderna. Generalisering till tre åtgärder blir  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ .

SATS 2.5: Dragning med återläggning av k element ur n med hänsyn till ordning kan ske på  $n^k$  olika sätt

SATS 2.6: Dragning utan återläggning av k element ur n (med hänsyn till ordning) kan ske på  $n(n-1)\dots(n-k+1)$  olika sätt

Följdsats 2.6.1: Antalet permutationer av n element bland n är lika med  $n(n-1)\dots2 \cdot 1 = n!$  eller kortare: n element kan ordnas på  $n!$  olika sätt.

SATS 2.7: Dragning utan återläggning av k element ur n (utan hänsyn till ordning) kan ske på  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$  olika sätt

SATS 2.8 (Binomialteoremet): För varje positivt heltal n och för godtyckliga tal  $x$  och  $y$  gäller  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Def(betingad sannolikhet): Låt A och B vara två händelser. Uttrycket

$$P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

kallas den betingade sannolikheten för B givet att A har inträffat. Om  $P(A)=0$  läter vi  $P(B|A)$  vara obestämd.

Det gäller även att  $P(B^*|A) = 1 - P(B|A)$

$$\cdot P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$$

$$\begin{aligned} \text{Vi kan också skriva: } P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= P(B) \cdot P(A|B) \end{aligned}$$

SATS 2.9 (Lagen om total sannolikhet): Om händelserna  $H_1, \dots, H_n$  är parvis oförenliga och  $\bigcap H_i = \emptyset$ , gäller för varje händelse A att  $P(A) = \sum_{i=1}^n (P(H_i) P(A|H_i))$

SATS 2.10 (Bayes sats): Under samma villkor som i SATS 2.9 gäller

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^n (P(H_j) P(A|H_j))} = \frac{P(A \cap H_i)}{\sum_{j=1}^n (P(A \cap H_j))} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$

Def(beroende): Om  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  säges A och B vara oberoende händelser.

Def(beroende): Om:

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Säges  $A$ ,  $B$  och  $C$  vara **beroende** händelser

Om  $A$  och  $B$  är beroende så är  $A^*$  och  $B$  beroende.

SATS 2.11: Om händelserna  $A_1, A_2, \dots, A_n$  är beroende och  $P(A_i) = p_i$ , så är sannolikheten att minst en av dem inträffar  $1 - (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n)$

Följdsats 2.11.1: Om händelserna  $A_i$  är beroende och var och en inträffar med sannolikheten  $p$ , så är sannolikheten att minst en av dem inträffar lika med  $1 - (1-p)^n$ .

Def(stokastisk variabel): En **stokastisk variabel** (s.v) är en reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum.  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Def(diskret): En stokastisk variabel är **diskret** om den kan anta ett ändligt eller uppräkneligt ändligt antal olika värden.

Sannolikheterna  $p_x(x) = P(X=x)$ ,  $x=a_1, a_2, \dots$

där  $a_1, a_2, \dots$  är de (uppräkneligt många) tänkbara värdena som  $X$  kan anta, kallas **sannolikhetsfunktionen** för den s.v.  $X$

SATS 3.α: Låt  $A$  vara en delmängd av de tänkbara värdena som  $X$  kan anta, d.v.s  $A \subset V_x$ . Vi har då:  $P(X \in A) = \sum_{k \in A} p_x(k)$

Följdsats 3.α.1: Låt  $V_x = \mathbb{N}$ . Vi har då  $P(X \in V_x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_x(k) = 1$

Följdsats 3.α.2: Låt  $V_x = \mathbb{N}$ . Vi har då  $P(a < X \leq b) = \sum_{k=a}^b p_x(k)$  där  $a, b \in \mathbb{N}$

Def(tvåpunktsfördelad): Om den s.v.  $X$  antar endast två värdena  $a$  och  $b$  med sannolikheterna  $p$  respektive  $1-p$  säges  $X$  vara **tvåpunktsfördelad**. Alltså  $p_x(a) = p$ ,  $p_x(b) = 1-p$ . I specialfallet då  $a=1$  och  $b=0$  säger man oftast att  $X$  är **Bernoulli-fördelad**.

Def(likformigt fördelad): Om den s.v.  $X$  antar värdena  $1, 2, \dots, m$  med lika stor sannolikhet,  $\frac{1}{m}$ , säges  $X$  vara **likformigt fördelad**, eller mer specifikt har  $X$  en **likformig fördelning** över  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

Def(för-första-gången-fördelad): Om den s.v.  $X$  har sannolikhetsfunktionen  $p_x(k) = (1-p)^{k-1}p$ ,  $k=1, 2, \dots$  där  $p \in (0, 1)$  säges  $X$  vara **för-första-gången-fördelad**. Betecknas  $X \in \text{ffg}(p)$

Def(geometriskt fördelad): Om den s.v.  $X$  har sannolikhetsfunktionen  $p_x(k) = (1-p)^k p$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  där  $p \in (0, 1)$ , säges  $X$  vara **geometriskt fördelad**. Betecknas  $X \in \text{Ge}(p)$

Def(binomialfördelad): Om den s.v.  $X$  har sannolikhetsfunktionen

$p_x(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, n$  där  $n$  är ett positivt heltal och  $p \in (0, 1)$  säges  $X$  vara **binomialfördelad**. Betecknas  $X \in \text{Bin}(n, p)$ .

Enligt binomialtalen är

$$\sum_{k=0}^n p_x(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Def(hypergeometriskt fördelat): Om den s.v.  $X$  har sannolikhetsfunktionen

$$p_x(k) = \frac{\binom{v}{k} \binom{s}{n-k}}{\binom{v+s}{n}} \quad \text{där } k \text{ antar alla heltalsvärden sådana att } 0 \leq k \leq v, \\ 0 \leq n-k \leq s \quad \text{säges } X \text{ vara hypergeometriskt fördelat. Betecknas } X \in \text{Hyp}(N, n, p) \\ \text{där } N = v+s, \text{ och } p = \frac{v}{v+s}$$

Def(Poisson-fördelning): Om den s.v.  $X$  har sannolikhetsfunktionen

$$p_x(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad \mu > 0 \quad \text{säges } X \text{ vara Poisson-fördelad. Betecknas} \\ X \in \text{Po}(\mu)$$

Def(kontinuerlig): Om det finns en funktion  $f_x(x)$  sådan att  $P(X \in A) = \int_A f_x(x) dx$  för alla intervall  $A \subset \mathbb{R}$ , säges  $X$  vara en kontinuerlig s.v. Funktionen  $f_x(x)$  kallas täthetsfunktionen för  $X$ . Kan även kallas frekvensfunktion.

SATS 3.1: I varje punkt  $x$  där  $f_x(x)$  är kontinuerlig, gäller att

$$F'_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) = f_x(x)$$

Def(likformigt fördelat): Om den s.v.  $X$  har täthetsfunktionen

$$f_x(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{om } a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

säges  $X$  vara likformigt fördelat. Betecknas  $X \in U(a, b)$ .

Def(exponentialfördelat): Om den s.v.  $X$  har täthetsfunktionen

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

där  $\lambda > 0$  säges  $X$  vara exponentialfördelat. Betecknas  $X \in \text{Exp}(\lambda)$

Def(normalfördelat): Om den s.v.  $X$  har täthetsfunktionen

$$f_x = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

där  $\mu$  och  $\sigma$  är givna tal ( $\sigma > 0$ ), säges  $X$  vara normalfördelat. Betecknas  $X \in N(\mu, \sigma)$

Def(Weibull-fördelat): Om den s.v.  $X$  har täthetsfunktionen

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda c(\lambda x)^{c-1} e^{-(\lambda x)^c} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

där  $\lambda$  och  $c$  är positiva tal, säges  $X$  vara Weibull-fördelat

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda x)^c} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

Def(gammafunktionen): Vi definierar gammafunktionen  $T(c)$  som

$$T(c) = \int_0^\infty x^{c-1} e^{-x} dx.$$

Om  $c$  är ett heltal gäller  $T(c) = (c-1)!$

Def(gammafördelat): Om den s.v.  $X$  har täthetsfunktionen

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^c}{T(c)} \cdot x^{c-1} e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

där  $c > 0$  och  $\lambda > 0$ , säges  $X$  vara gammafördelat

Def(fördelningsfunktion):  $F_x(x) = P(X \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; kallas fördelningsfunktionen för den s.v.  $X$

SATS 3.β: För en kontinuerlig s.v. har vi:  $F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t)dt = P(X \leq x)$

SATS 3.γ: För en diskret s.v. har vi:  $F_x(k) = \sum_{j \leq k} p_x(j)$  för  $k=0, 1, 2, \dots$   
och omvänt följer:  $\begin{cases} F_x(0) & \text{om } k=0 \\ p_x(k) = F_x(k) - F_x(k-1) & \text{annars.} \end{cases}$

SATS 3.2: För en fördelningsfunktion  $F_x(x)$  gäller att

- $F_x(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{då } x \rightarrow -\infty \\ 1 & \text{då } x \rightarrow \infty \end{cases}$
- $F_x(x)$  är en växande funktion av  $x$ .
- $F_x(x)$  är kontinuerlig till höger för varje  $x$

SATS 3.3: Om  $a < b$  gäller att  $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_x(b) - F_x(a) = \int_a^b f_x(t)dt$

Def(kvantil): Lösningen  $x=x_\alpha$  till ekvationen  $F_x(x)=1-\alpha$  kallas  $\alpha$ -kvantilen för den s.v.  $X$ .  $\alpha$  anges ofta i procent.

Def(kvartil, median): Kvartilerna  $x_{0.25}, x_{0.5}$  och  $x_{0.75}$  kallas övre kvartilen, medianen respektive undre kvartilen.

SATS 3.δ: Om  $X$  är en heltalsvariabel med sannolikhetfunktionen  $p_x(j)$  så har den s.v.  $Y=g(X)$  sannolikhetfunktionen

$$p_Y(k) = \sum_{j: g(j)=k} p_X(j)$$

SATS 3.ε: Om  $X$  är kontinuerlig och  $Y=g(X)$  där  $g$  är strängt växande har vi  $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$

Om  $g$  är strängt avtagande har vi istället

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Def(tvådimensionell stokastisk variabel): En tvådimensionell stokastisk variabel är en funktion  $(X, Y)$  definierad på ett utfallsrum  $\Omega$  och som tar värden i  $\mathbb{R}^2$ .

Def(fördelningsfunktion): Funktionen  $F_{x,y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$  kallas fördelningsfunktionen för den tvådimensionella s.v.  $(X, Y)$ . Kan även kallas den simultana fördelningsfunktionen för  $X$  och  $Y$ .

Def(sannolikhetfunktion): Storheterna  $p_{x,y}(j,k) = P(X=j, Y=k)$ ,  $j=0,1,2,\dots$ ,  $k=0,1,2,\dots$  kallas sannolikhetfunktionen för den diskreta tvådimensionella s.v.  $(X, Y)$ . Kan även mer specifikt kallas den simultana sannolikhetfunktionen.

SATS 4.α: Sannolikheten  $P((X, Y) \in A)$  kan beräknas genom  $P((X, Y) \in A) = \sum_{(j,k) \in A} p_{x,y}(j,k)$   
Övrigt har vi att summan av alla sannolikheter är 1.  
Alltså  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{x,y}(j,k) = 1$ .

SATS 4.β: Fördelningsfunktionen för den diskreta tvådimensionella s.v.  $(X, Y)$  kan bestämmas som

$$F_{x,y}(x,y) = \sum_{j \leq x} \sum_{k \leq y} p_{x,y}(j,k).$$

Def(marginell sannolikhetfunktion): För den diskreta tvådimensionella s.v.  $(X, Y)$  har vi att den marginella sannolikhetfunktionen för  $X$  i punkten  $j$  definieras som  $p_{x,j}(j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{x,y}(j,k)$   $p_{y,k}(k)$  definieras på analogt vis.

Def(multinomialfördelning): Antag att ett slumpförsök har r olika utfall  $A_1, A_2, \dots, A_r$  med sannolikheter  $p_1, \dots, p_r$  där  $p_1 + \dots + p_r = 1$ . Låt  $X_j$  vara antalet gånger  $A_j$  inträffar vid n oberoende upprepningar av försöktet. Då gäller att  $X_j \sim \text{Bin}(n, p_j)$ . Då har vi att den simultana sannoliketsfunktionen för den r-dimensionella s.v.  $(X_1, \dots, X_r)$  ges av

$$P_{X_1, \dots, X_r}(k_1, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \quad \text{där } k_1, \dots, k_r \geq 0, k_1 + \dots + k_r = n.$$

Vi säger att  $(X_1, \dots, X_r)$  är multinomialfördelad. Lägg märke till  $X_1 + \dots + X_r = n$

$$P_{X_1, \dots, X_r}(k_1, \dots, k_r) = \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} p_2^{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} p_r^{k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

Def(täthetsfunktion): Om det finns en funktion  $f_{x,y}(x,y)$  sådan att

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{x,y}(x,y) dx dy,$$

för alla A säges den tvådimensionella s.v.  $(X,Y)$  vara kontinuerlig. Funktionen  $f_{x,y}(x,y)$  kallas täthetsfunktionen för  $(X,Y)$ .

Vi har då

$$F_{x,y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{x,y}(u,v) du dv$$

Som täthetsfunktion duger alla funktioner som uppfyller  $f(x,y) \geq 0$  för alla  $x,y$  och  $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1$ .

$f_{x,y}(x,y)$  kan kallas mer specifikt för den simultana täthetsfunktionen.

$$\text{Vi har slutligen } f_{x,y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{x,y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Def(marginell täthetsfunktion, marginell fördelningsfunktion): Den marginella fördelningsfunktionen för X respektive Y ges av

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) dy \quad \text{och} \quad f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) dx.$$

och den marginella fördelningsfunktionen för X respektive Y ges av

$$F_x(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{x,y}(x,y) \quad \text{och} \quad F_y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{x,y}(x,y)$$

Def(likformigt fördelad): En tvådimensionell s.v.  $(X,Y)$  är likformigt fördelad på området B, om för varje del A av detta område gäller att:

$$P((X,Y) \in A) = \frac{\text{Arean av } A}{\text{Arean av } B}$$

Def(oberoende): De s.v. X och Y kallas oberoende om  $P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C) P(Y \in D)$  för alla mängder C och D.

SATS 4.7: Låt  $Z = \max(X, Y)$  där X och Y är oberoende. Vi har då:

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z \text{ och } Y \leq z) = P(X \leq z) P(Y \leq z) = F_x(z) F_y(z)$$

SATS 4.8: Låt  $Z = \min(X, Y)$  där X och Y är oberoende. Vi har då:

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X > z \text{ och } Y > z) = 1 - P(X > z) P(Y > z)$$

$$\text{Alltså } F_z(z) = 1 - (1 - F_x(z))(1 - F_y(z))$$

SATS 4.9: Låt  $Z_1 = \max(X_1, \dots, X_n)$  och  $Z_2 = \min(X_1, \dots, X_n)$  där  $X_1, \dots, X_n$  är n oberoende s.v. Vi har då  $F_{Z_1} = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(z)$  och  $F_{Z_2} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(z))$

SATS 4.7: Låt  $X$  och  $Y$  vara diskreta s.v. som endast antar heltalsvärden och  $Z = X+Y$ .

Vi har då

$$p_Z(k) = P(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} p_{X,Y}(i,j) = \sum_{i=0}^k p_{X,Y}(i,k-i)$$

och

$$F_Z(z) = \sum_{i+j \leq z} p_{X,Y}(i,j).$$

SATS 4.8: Låt  $X$  och  $Y$  vara kontinuerliga s.v. och  $Z=X+Y$  har vi

$$F_Z(z) = P(X+Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Om  $X$  och  $Y$  är oberoende har vi då

$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left( \int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x) dx$$

SATS 4.9 (faltningssformel): Låt  $X$  och  $Y$  vara oberoende och  $Z=X+Y$ . Då är faltningssformeln:

- $p_Z(k) = \sum_{i=0}^k p_X(i) p_Y(k-i)$  då  $X$  och  $Y$  är diskreta s.v.
- $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$  då  $X$  och  $Y$  är kontinuerliga.

Def(väntevärde): Väntevärdet för den s.v.  $X$  definieras av

$$E(X) = \begin{cases} \sum_k k p_X(k) & \text{om } X \text{ är diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & \text{om } X \text{ är kontinuerlig.} \end{cases}$$

I bland kallas  $E$  även för förväntat värde.

SATS 5.1: Om  $Y=g(X)$  gäller det att

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_k g(k) p_X(k) & \text{då } Y \text{ och } X \text{ är diskreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{då } Y \text{ och } X \text{ är kontinuerliga.} \end{cases}$$

Förljdsats 5.1.1: Om  $Y=ax+b$  har vi att  $E(Y)=aE(X)+b$ .

SATS 5.2: Om  $Z=g(X,Y)$  gäller det att

$$E(Z) = \begin{cases} \sum_{j,k} g(j,k) p_{X,Y}(j,k) & \text{för diskreta s.v.} \\ \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy & \text{för kontinuerliga s.v.} \end{cases}$$

SATS 5.3: Om  $X$  och  $Y$  är s.v. med väntevärden  $E(X)$  och  $E(Y)$  och om  $a,b,c \in \mathbb{R}$  så gäller det att  $E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c$

SATS 5.4: Om  $X$  och  $Y$  är oberoende gäller det att  $E(XY)=E(X)E(Y)$

SATS 5.5: Om  $X_1, X_2, \dots, X_n$  är oberoende s.v. gäller  $E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n)$

Def(varians): Variansen  $V(X)$  för en s.v.  $X$  med  $E(X)=\mu$  är  $V(X)=E((X-\mu)^2)$

Alltså

$$V(X) = \begin{cases} \sum_k (k-\mu)^2 p_X(k) & \text{då } X \text{ är en diskret s.v.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx & \text{då } X \text{ är en kontinuerlig s.v.} \end{cases}$$

Def(standardavvikelse): Standardavvikelsen  $D(X)$  för en s.v.  $X$  är kvadratrotten ur variansen  $D(X)=\sqrt{V(X)}$

Def(variationskoefficient): Kvoten  $R(X)=D(X)/E(X)$  kallas variationskoefficienten.

SATS 5.6: Följande samband gäller:  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

SATS 5.7: Vid linjärtransformation gäller

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$D(aX+b) = |a| D(X)$$

Def(standardiserad): Om  $X$  är en s.v. med väntevärdelet  $E(X)=\mu$  och standardavvikelsen

$D(X)=\sigma$  kallas  $Y=(X-\mu)/\sigma$  en standardiserad s.v. vilket har egenskaperna

$$\begin{cases} E(Y)=0 \\ D(Y)=1 \end{cases}$$

Def(systematiskt fel, slumprässigt fel): Med systematiskt fel menas differensen mellan mätvärdets väntevärde och det korrekta värdet. Med slumprässigt fel menas differensen mellan mätvärdet och dess väntevärde.

Def(noggranhett, precision): Med god noggranhett avses ett litet systematiskt fel. Med god precision avses ett litet slumprässigt fel.