Flervariabelsanalys

Def (skalärprodukt): Låt $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ och $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+\dots+x_ny_n$ kallas **skalärprodukten**. Följande räkneregler gäller:

a) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$
b) $(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{z}=\vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z}$
c) $(c\vec{x})\cdot\vec{y}=c(\vec{x}\cdot\vec{y})$
d) $\vec{x}\cdot\vec{x}\geq 0$; $\vec{x}\cdot\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

Def (parallell, samma riktning): Låt $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är **parallella** om $\vec{x}=\lambda\vec{y}$ för något $\lambda\in\mathbb{R}$. Vi säger då att $\vec{x}$ och $\vec{y}$ har samma riktning. $\vec{x}\parallel\vec{y}$

Def (norm, längd): Låt $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. **Normen** eller **längden** av $\vec{x}$ skrivs som $|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

Def (ortogonal): Låt $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är **ortogonala** om $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$

Def (vinkel): Låt $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ och $\theta=\arccos\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}\right)\in[0,\pi]$, då är θ **vinkeln** mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$

SATS 1.1 (Cauchy-Schwartz olikhet): I $\mathbb{R}^n$ gäller $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\leq|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$ med likhet omm $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är parallella.

SATS 1.2 (Triangelolikheten): I $\mathbb{R}^n$ gäller $|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$ med likhet då $\vec{x}=\lambda\vec{y}$: $\lambda\geq 0$

SATS 1.α (Omvända Triangelolikheten): I $\mathbb{R}^n$ gäller $\big||\vec{x}|-|\vec{y}|\big|\leq|\vec{x}\pm\vec{y}|$

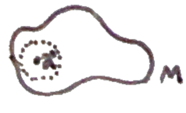
SATS 1.3: För varje $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ gäller $|x_k|\leq|\vec{x}|\leq|x_1|+\dots+|x_n|$ $\forall k=1,\dots,n$

Def (öppet klot): Mängden $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : |\vec{x}-\vec{a}|<r\}$ är ett **öppet klot** med centrum i $\vec{a}$

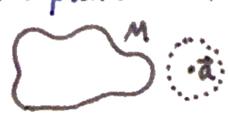
Def (omgivning): En mängd $U\subset\mathbb{R}^n$ är en **omgivning** av $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum i $\vec{a}$

Def (komplement): **Komplementet** till en mängd $M\subset\mathbb{R}^n$, betecknat CM, är $CM=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{x}\notin M\}$

Def (inre punkt): Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. $\vec{a}$ är en **inre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring $\vec{a}$ som ligger i M.



Def (yttre punkt): Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. $\vec{a}$ är en **yttre punkt** till M om om det finns ett öppet klot kring $\vec{a}$ som ligger i CM



Def (randpunkt): Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. $\vec{a}$ är en **randpunkt** till M om varje öppet klot kring $\vec{a}$ skär både M och CM

Def (rand): Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. Mängden av randpunkter till M kallas för **randen** till M, betecknat ∂M.

Def (öppen mängd): En mängd M är **öppen** om $\partial M \subset CM$

Def (sluten mängd): En mängd M är **sluten** om $\partial M \subset M$

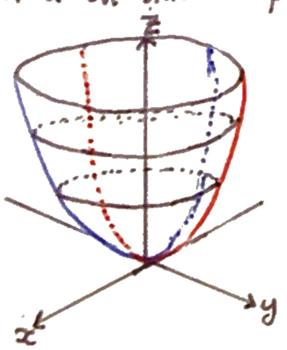
Def' (öppen mängd): En mängd M är **öppen** om det för varje $\vec{x} \in M$ finns ett öppet klot kring $\vec{x}$ som ligger i M

Def (begränsad): En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är **begränsad** om det finns ett $C > 0$ så att $|\vec{x}| < C \quad \forall \vec{x} \in M$

Def (kompakt): En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är **kompakt** om M är både sluten och begränsad.

Att skissa $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

1) Bestäm (x,y) för $f(x,y) = 0$
2) Bestäm (x,y) för $f(x,y) = C$ för några $C \in \mathbb{R}$
3) Rita ett snitt av planet $x = 0$
4) Rita ett snitt av planet $y = 0$

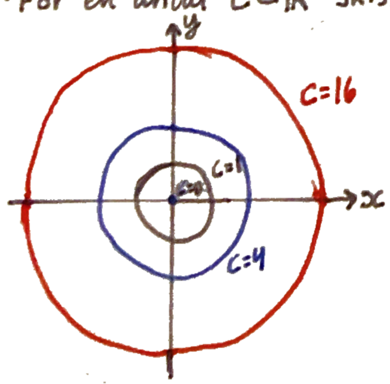


$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

Def (Eliptisk paraboloid): Grafer av denna form kallas för **eliptiska paraboloider**.

Att skissa $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med nivåkurvor:

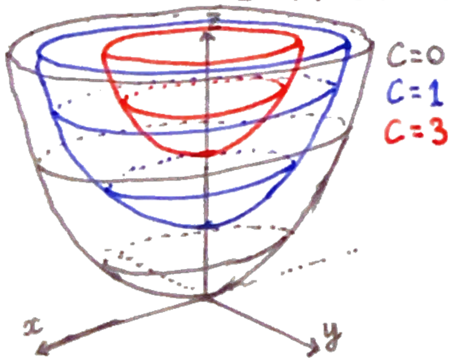
- För ett antal $C \in \mathbb{R}$ skissa kurvor $f(x,y) = C$



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Att skissa $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ med nivå ytor

- För ett antal $C \in \mathbb{R}$ skissa $f(x,y,z) = C$ i $\mathbb{R}^3$



$f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

$f(x,y,z) = C$

$\Rightarrow z = x^2 + y^2 + C$

SATS 1.β: Låt $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. $\vec{f}(\vec{x})$ kan delas upp i p stycken funktioner $f_1, \dots, f_p : D \to \mathbb{R}$ så att $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x}))$

Def(kurva): En kurva är en funktion $\vec{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$

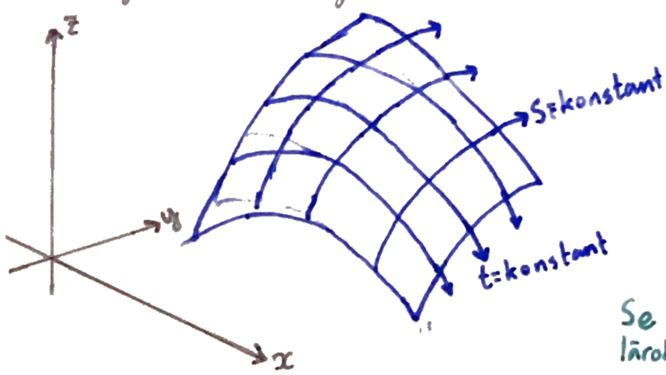
Def(yta): En yta är en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^p$ $p > 2$. I $\mathbb{R}^3$ skrivs en yta f som $f(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ där $x, y, z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Man kan tänka sig att ytan är uppbyggd av två skaror av kurvor, nämligen parameterkurvorna

$$s \mapsto (x(s,t_0), y(s,t_0), z(s,t_0))$$

och

$$t \mapsto (x(s_0,t), y(s_0,t), z(s_0,t))$$

för $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Vanligtvis ritas några sådana kurvor när man skissar ytan

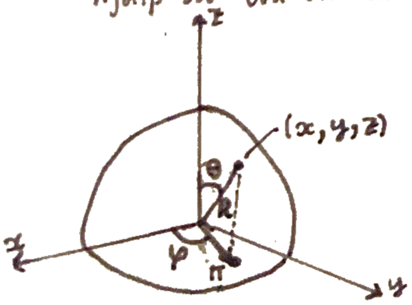


Se sid 29 & 30 i läroboken för bilder av ytor

Def(polära koordinater): Låt (x,y) vara de euklidiska koordinaterna för en punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Man kan skriva om $\vec{a}$ till polära koordinater (r, θ) där $r = |\vec{a}|$ och θ är vinkeln mellan $\vec{a}$ och x-axeln.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Def(sfäriska koordinater): Man kan parameterisera en sfär av radie $R > 0$ med hjälp av två vinklar θ och φ



$\pi = R \cdot \sin\theta$

$x = \pi \cdot \cos\varphi$

$y = \pi \cdot \sin\varphi$

$$\begin{cases} x = R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = R \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Punkter i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som sfäriska koordinater (R, θ, φ)

Def (gränsvärde): Låt $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt $\vec{a}$ vara en inre punkt eller randpunkt till D. $\vec{f}$ har **gränsvärdet** $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$ då $\vec{x} \to \vec{a}$ om $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ sådan att för alla $\vec{x} \in D$ som uppfyller $0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ har vi att $|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon$

SATS 1.γ: Låt $\vec{f} = (f_1, \dots, f_p)$, $\vec{x} \in D_f$, $\vec{a} \in \partial D \cup D$ och $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$

- $|f_j(\vec{x}) - b_j| \leq |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| \leq |f_1(\vec{x}) - b_1 + f_2(\vec{x}) - b_2 + \dots + f_p(\vec{x}) - b_p|$ för $\forall j = 1, \dots, p$
- $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b} \iff \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j \quad \forall j = 1, \dots, p$

SATS 1.δ: Följande regler gäller

- För $\vec{f}: D \to E$ och $\vec{g}: E \to \mathbb{R}^p$ där $\vec{f}(\vec{x}) \to b$ då $\vec{x} \to \vec{a}$ och $\vec{g}(\vec{y}) \to c$ då $\vec{x} \to \vec{b}$
  * $(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$
  * $(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) \to \vec{c}$ då $\vec{x} \to \vec{a}$
- För $\vec{f}, \vec{g}: D \to \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ och gränsvärden för $\vec{f}$ och $\vec{g}$ excisterar då $\vec{x} \to \vec{a}$
  * $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$
  * $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$
  * $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \dfrac{\vec{f}(\vec{x})}{\vec{g}(\vec{x})} = \dfrac{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})}$ om $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \neq \vec{0}$
- Om $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{h}(\vec{x})$ och $|\vec{f}(\vec{x})| \leq |\vec{g}(\vec{x})| \leq |\vec{h}(\vec{x})|$ för alla $\vec{x} \in D$ som uppfyller $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ för något $\delta > 0$ har vi att $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) = \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{h}(\vec{x})$

Def (gränsvärde): Vi säger att $\vec{f}(\vec{x}) \to \vec{b}$ då $|\vec{x}| \to \infty$ om $\forall \varepsilon > 0$ finns $\omega > 0$ så att

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{x}| > \omega \\ \vec{x} \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon$$

Def (kontinuerlig): Låt $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^p$ där $D \in \mathbb{R}^n$. Vi säger att $\vec{f}$ är **kontinuerlig** i $\vec{a} \in D$ om $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$

SATS 1.ε: Elementära funktioner (polynom, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$) och deras kompositioner/produkter är kontinuerliga.

SATS 1.4: Om $\vec{f}: D \to \mathbb{R}$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ är kontinuerlig och D är kompakt så antar $\vec{f}$ sitt sitt största och minsta värde på D.