Sannolikhetsteori och Statistik

Def (utfall): Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas ett utfall. Betecknas $\omega_1, \omega_2, \ldots$

Def (utfallsrummet): Mängden av alla möjliga utfall kallas utfallsrummet. Betecknas Ω.

Def (händelse): En händelse är en samling av utfall. Betecknas $A, B, C, \ldots$

Def (diskret, ändligt, kontinuerligt): Om antalet utfall är ändligt eller uppräkneligt oändligt, säges Ω vara ett diskret utfallsrum. Om antalet är ändligt, säges Ω speciellt vara ett ändligt utfallsrum. Om antalet utfall icke är ändligt eller uppräkneligt oändligt, säges Ω vara ett kontinuerligt utfallsrum.

Notation: $\cup$ och $\cap$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \text{minst en av händelserna } A_1, \ldots, A_n \text{ kommer inträffa}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \text{alla händelserna } A_1, \ldots, A_n \text{ inträffar.}$$

Def (parvis oförenliga): Händelserna $A_1, \ldots, A_n$ säges vara parvis oförenliga om alla par A_i och A_j är oförenliga (disjunkta), dvs om det är omöjligt att två eller flera av händelserna inträffar samtidigt.

Def (komplement): Komplementet till A är $A^* = \Omega \setminus A$. Detta kan också betecknas som $\complement A$.

SATS 2.α (De Morgans lagar): Låt A, B, C vara händelser. Följande likheter gäller:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^*$
- $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^* = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^*$

Def (sannolikhet): Låt A vara en händelse. Det finns ett tal $P(A)$ som kallas sannolikheten för A. Man söker välja $P(A)$ så att den relativa frekvensen vid ett någorlunda stort antal försök kommer i närheten $P(A)$.

Def (frekvenstolkningen): Låt $a \in [0,1]$, om vi låter $P(A) = a$ kan vi ge detta uttalande den påtagliga men samtidigt vaga frekvenstolkningen: Vid ett stort antal försök blir den relativa frekvensen av händelsen A nog ungefär lika med a.

SATS 2.β (Kolmogrovs axiomsystem): Följande axiom för sannolikhetsmåttet $P(\cdot)$ skall vara uppfyllda:

- Axiom 1. För varje händelse A gäller att $0 \le P(A) \le 1$
- Axiom 2. För hela utfallsrummet Ω gäller att $P(\Omega) = 1$
- Axiom 3. Additionsformeln: Om $A_1, A_2, \ldots$ är en ändlig eller uppräckneligt oändlig följd av parvis oförenliga händelser gäller att
  $$P(A_1 \cup A_2 \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Utfallsrummet Ω, händelserna $A, B, \ldots$ och sannolikheterna $P(\cdot)$ säges tillsammans utgöra ett sannolikhetsrum.

SATS 2.1 (Komplementsatsen): För komplementet A^* till A gäller att $P(A^*) = 1 - P(A)$

SATS 2.2 (Additionssatsen för två händelser): För två godtyckliga händelser A och B gäller att $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

SATS 2.3 (Booles olikhet): För två godtyckliga händelser A och B gäller att $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Def (likformigt sannolikhetsmått): Om $P(\omega_i) = 1/m$ för $i = 1, \ldots, m$ föreligger ett likformigt sannolikhetsmått.

SATS 2.4 (Den klassiska sannolikhetsdefinitionen): Vid likformigt sannolikhetsmått är sannolikheten för en händelse lika med kvoten mellan antalet för händelsens gynsamma fall och antalet möjliga fall.

SATS 2.8 (Multiplikationsprincipen): Om åtgärd 1 kan utföras på a_1 sätt och åtgärd 2 på a_2 sätt, så finns det $a_1 \cdot a_2$ sätt att utföra båda åtgärderna. Generalisering till tre åtgärder blir $a_1 a_2 a_3$.

SATS 2.5: Dragning med återläggning av k element ur n med hänsyn till ordning kan ske på n^k olika sätt

SATS 2.6: Dragning utan återläggning av k element ur n (med hänsyn till ordning) kan ske på $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ olika sätt

Följdsats 2.6.1: Antalet permutationer av n element bland n är lika med $n(n-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ eller kortare: n element kan ordnas på $n!$ olika sätt.

SATS 2.7: Dragning utan återläggning av k element ur n (utan hänsyn till ordning) kan ske på $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ olika sätt

SATS 2.8 (Binomialteoremet): För varje positivt heltal n och för godtyckliga tal x och y gäller $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Def (betingad sannolikhet): Låt A och B vara två händelser. Uttrycket

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

kallas den betingande sannolikheten för B givet att A har inträffat. Om $P(A) = 0$ låter vi $P(B|A)$ vara obestämd.

Det gäller även att
- $P(B^*|A) = 1 - P(B|A)$
- $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$

Vi kan också skriva: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
$= P(B) \cdot P(A|B)$

SATS 2.9 (Lagen om total sannolikhet): Om händelserna $H_1, \ldots, H_n$ är parvis oförenliga och $\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, gäller för varje händelse A att $P(A) = \sum_{i=1}^{n} (P(H_i) P(A|H_i))$

SATS 2.10 (Bayes sats): Under samma villkor som i SATS 2.9 gäller

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n}(P(H_j)P(A|H_j))} = \frac{P(A \cap H_i)}{\sum_{j=1}^{n}(P(A \cap H_j))} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$

Def (oberoende): Om $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ säges A och B vara oberoende händelser.

Def(oberoende): Om:
- $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
- $P(A\cap C)=P(A)P(C)$
- $P(B\cap C)=P(B)P(C)$
- $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

Säges A, B och C vara oberoende händelser
Om A och B är oberoende så är A^* och B oberoende.

SATS 2.11: Om händelserna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är oberoende och $P(A_i)=p_i$, så är sannolikheten att minst en av dem inträffar $1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$

Följdsats 2.11.1: Om händelserna A_i är oberoende och var och en inträffar med sannolikheten p, så är sannolikheten att minst en av dem inträffar lika med $1-(1-p)^n$.

Def (stokastisk variabel): En stokastisk variabel (s.v) är en reelvärd funktion definierad på ett utfallsrum. $X:\Omega\to\mathbb{R}$

Def (diskret): En stokastisk variabel är diskret om den kan anta ett ändligt eller uppräkneligt oändligt antal olika värden.
Storheterna $p_X(x)=P(X=x)$, $x=a_1,a_2,\ldots$
där $a_1,a_2,\ldots$ är de (uppräkneligt många) tänkbara värdena som X kan anta, kallas sannolikhetsfunktionen för den s.v. X

SATS 3.α: Låt A vara en delmängd av de tänkbara värdena som X kan anta, d.v.s $A\subset V_X$. Vi har då: $P(X\in A)=\sum_{k\in A} p_X(k)$

Följdsats 3.α.1: Låt $V_X=\mathbb{N}$. Vi har då $P(X\in V_X)=\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k)=1$

Följdsats 3.α.2: Låt $V_X=\mathbb{N}$. Vi har då $P(a<X\leq b)=\sum_{k=a+1}^{b} p_X(k)$ där $a,b\in\mathbb{N}$

Def (tvåpunktsfördelad): Om den s.v. X antar endast två värdena a och b med sannolikheterna p respektive 1-p säges X vara tvåpunktsfördelad. Alltså $p_X(a)=p$, $p_X(b)=1-p$.
I specialfallet då a=1 och b=0 säger man ofta att X är Bernoulli-fördelad.

Def (likformigt fördelad): Om den s.v. X antar värdena $1,2,\ldots,m$ med lika stor sannolikhet, $1/m$, säges X vara likformigt fördelad, eller mer specifikt har X en likformig fördelning över $\{1,2,\ldots,m\}$.

Def (för-första-gången-fördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen
$p_X(k)=(1-p)^{k-1}p$, $k=1,2,\ldots$ där $p(0,1)$ säges X vara för-första-gången-fördelad. Betecknas $X\in ffg(p)$

Def (geometriskt fördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen $p_X(k)=(1-p)^k p$, $k=0,1,2,\ldots$ där $p\in(0,1)$, säges X vara geometriskt fördelad. Betecknas $X\in Ge(p)$

Def (binomialfördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$p_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,2,\ldots,n$ där n är ett positivt heltal och $p\in(0,1)$
säges X vara binomialfördelad. Betecknas $X\in Bin(n,p)$.
Enligt binomialtheoremet är
$\sum_{k=0}^{n} p_X(k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(p+(1-p))^n=1^n=1$

Def(hypergeometriskt fördelad): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = \binom{v}{k}\binom{s}{n-k}\Big/\binom{v+s}{n}$$ där k antar alla heltalsvärden sådana att $0 \le k \le v$, $0 \le n-k \le s$ säges X vara hypergeometriskt fördelad. Betecknas $X \in Hyp(N, n, p)$ där $N = s+v$, och $p = \frac{v}{v+s}$

Def(Poisson-fördelning): Om den s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu > 0$$ säges X vara Poisson-fördelad. Betecknas $X \in Po(\mu)$

Def(kontinuerlig): Om det finns en funktion $f_X(x)$ sådan att $P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$ för alla intervall $A \subset \mathbb{R}$, säges X vara en kontinuerlig s.v. Funktionen $f_X(x)$ kallas täthetsfunktionen för X. Kan även kallas frekvensfunktion.

SATS 3.1: I varje punkt x där $f_X(x)$ är kontinuerlig, gäller att
$$F_X'(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$$

Def(likformigt fördelad): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{om } a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$
säges X vara likformigt fördelad. Betecknas $X \in U(a,b)$.

Def(exponentialfördelad): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \le 0 \end{cases}$$
där $\lambda > 0$ säges X vara exponentialfördelad. Betecknas $X \in Exp(\lambda)$

Def(normalfördelad): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$
där μ och σ är givna tal ($\sigma > 0$), säges X vara normalfördelad. Betecknas $X \in N(\mu, \sigma)$

Def(Weibull-fördelad): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda c(\lambda x)^{c-1} e^{-(\lambda x)^c} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$
där λ och c är positiva tal, säges X vara Weibull-fördelad
Och
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda x)^c} & \text{om } x \ge 0 \end{cases}$$

Def(gammafunktionen): Vi definierar gammafunktionen $\Gamma(c)$ som

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty x^{c-1} e^{-x}\,dx.$$
Om c är ett heltal gäller $\Gamma(c) = (c-1)!$

Def(gammafördelad): Om den s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} \cdot x^{c-1} e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \le 0 \end{cases}$$
där $c > 0$ och $\lambda > 0$, säges X vara gammafördelad

Def(fördelningsfunktion): $F_X(x) = P(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$, kallas fördelningsfunktionen för den s.v. X

SATS 3.β: För en kontinuerlig s.v. har vi: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = P(X \le x)$

SATS 3.γ: För en diskret s.v har vi: $F_X(k) = \sum_{j \le k} p_X(j)$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$
och omvänt följer:
$$p_X(k) = \begin{cases} F_X(0) & \text{om } k=0 \\ F_X(k) - F_X(k-1) & \text{annars.} \end{cases}$$

SATS 3.2: För en fördelningsfunktion $F_X(x)$ gäller att

- $F_X(x) \to \begin{cases} 0 & \text{då } x \to -\infty \\ 1 & \text{då } x \to \infty \end{cases}$
- $F_X(x)$ är en växande funktion av x.
- $F_X(x)$ är kontinuerlig till höger för varje x

SATS 3.3: Om $a<b$ gäller att $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)dt$

Def(kvantil): Lösningen $x = x_\alpha$ till ekvationen $F_X(x) = 1-\alpha$ kallas **α-kvantilen** för den s.v. X. α anges ofta i procent.

Def(kvartil, median): Kvantilerna $x_{0.25}$, $x_{0.5}$ och $x_{0,75}$ kallas **övre kvartilen**, **medianen** respektive **undre kvartilen**.

SATS 3.δ: Om X är en heltalsvariabel med sannolikhetsfunktionen $p_X(j)$ så har den s.v. $Y = g(X)$ sannolikhetsfunktionen

$$p_Y(k) = \sum_{j: g(j)=k} p_X(j)$$

SATS 3.ε: Om X är kontinuerlig och $Y = g(X)$ där g är strängt växande har vi
$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$
Om g är strängt avtagande har vi istället
$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$

Def(tvådimensionell stokastisk variabel): En **tvådimensionell stokastisk variabel** är en funktion (X,Y) definierad på ett utfallsrum Ω och som tar värden i $\mathbb{R}^2$.

Def(fördelningsfunktion): Funktionen $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ kallas **fördelningsfunktionen** för den tvådimensionella s.v. (X,Y). Kan även kallas den **simultana fördelningsfunktionen** för X och Y.

Def(sannolikhetsfunktion): Storheterna $p_{X,Y}(j,k) = P(X=j, Y=k)$, $j = 0,1,2,\ldots$, $k = 0,1,2,\ldots$ kallas **sannolikhetsfunktionen** för den diskreta tvådimensionella s.v. (X,Y). Kan även mer specifikt kallas den **simultana sannolikhetsfunktionen**.

SATS 4.α: Sannolikheten $P((X,Y) \in A)$ kan beräknas genom $P((X,Y) \in A) = \sum_{(j,k) \in A} p_{X,Y}(x,y)$
Övrigt har vi att summan av alla sannolikheter är 1.
Alltså $\sum_{j=0} \sum_{k=0} p_{X,Y}(j,k) = 1$.

SATS 4.β: Fördelningsfunktionen för den diskreta tvådimensionella s.v. (X,Y) kan bestämmas som
$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{j \le x} \sum_{k \le y} p_{X,Y}(j,k).$$

Def(marginell sannolikhetsfunktion): För den diskreta tvådimensionella s.v. (X,Y) har vi att den **marginella sannolikhetfunktionen** för X i punkten j definieras som $p_X(j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j,k)$
$p_Y(k)$ definieras på analogt vis.

Def (multinomialfördelning): Antag att ett slumpförsök har r olika utfall $A_1, A_2, \dots, A_r$ med sannolikheter $p_1, \dots, p_r$ där $p_1 + \dots + p_r = 1$. Låt X_j vara antalet gånger A_j inträffar vid n oberoende upprepningar av försöktet. Då gäller att $X_j \in Bin(n, p_j)$. Då har vi att den simultana sannolikhetsfunktionen för den r-dimensionella s.v. $(X_1, \dots, X_r)$ ges av

$$p_{X_1,\dots,X_r}(k_1,\dots,k_r) \overset{*}{=} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \quad \text{där } k_1,\dots,k_r \geq 0, \; k_1 + \dots + k_r = n.$$

Vi säger att $(X_1, \dots, X_r)$ är multinomialfördelad. Lägg märke till $X_1 + \dots + X_r = n$

$$^* p_{X_1,\dots,X_r}(k_1,\dots,k_r) = \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} p_r^{k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

Def (täthetfunktion): Om det finns en funktion $f_{X,Y}(x,y)$ sådan att

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

för alla A säges den tvådimensionella s.v. (X,Y) vara kontinuerlig. Funktionen $f_{X,Y}(x,y)$ kallas täthetsfunktionen för (X,Y).

Vi har då

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$ om A är kvartsplanet snett ner till vänster från punkten (x,y)

Som täthetsfunktion duger alla funktioner som uppfyller

$f(x,y) \geq 0$ för alla x, y och $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

$f_{X,Y}(x,y)$ kan kallas mer specifikt för den simultana täthetsfunktionen.

Vi har slutligen

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Def (marginell täthetsfunktion, marginell fördelningsfunktion): Den marginella fördelningsfunktionen för X respektive Y ges av

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \quad \text{och} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx.$$

och den marginella fördelningsfunktionen för X respektive Y ges av

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) \quad \text{och} \quad F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$$

Def (likformigt fördelad): En tvådimensionell s.v. (X,Y) är likformigt fördelad på området B, om för varje del A av detta område gäller att:

$$P((X,Y) \in A) = \frac{\text{Arean av } A}{\text{Arean av } B}$$

Def (oberoende): De s.v. X och Y kallas oberoende om $P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C)\,P(Y \in D)$ för alla mängder C och D.

SATS 4.γ: Låt $Z = \max(X,Y)$ där X och Y är oberoende. Vi har då:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z \text{ och } Y \leq z) = P(X \leq z)\,P(Y \leq z) = F_X(z)\,F_Y(z)$$

SATS 4.δ: Låt $Z = \min(X,Y)$ där X och Y är oberoende. Vi har då:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X > z \text{ och } Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z)$$

Alltså $F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$

SATS 4.ε: Låt $Z_1 = \max(X_1, \dots, X_n)$ och $Z_2 = \min(X_1, \dots, X_n)$ där $X_1, \dots, X_n$ är n oberoende s.v. Vi har då $F_{Z_1} = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(z)$ och $F_{Z_2} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(z))$

SATS 4.ζ: Låt X och Y vara diskreta s.v. som endast antar heltalsvärden och $Z=X+Y$.
Vi har då
$$p_Z(k)=P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k} p_{X,Y}(i,j)=\sum_{i=0}^{k} p_{X,Y}(i,k-i)$$
och
$$F_Z(z)=\sum_{i+j\leq z} p_{X,Y}(i,j).$$

SATS 4.η: Låt X och Y vara kontinuerliga s.v. och $Z=X+Y$ har vi
$$F_Z(z)=P(X+Y\leq z)=\iint_{x+y\leq z} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
Om X och Y är oberoende har vi då
$$F_Z(z)=\iint_{x+y\leq z} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,dy\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(z-x)\,dx$$

SATS 4.θ (faltningsformel): Låt X och Y vara oberoende och $Z=X+Y$. Då är faltningsformeln:

- $p_Z(k)=\sum_{i=0}^{k} p_X(i)p_Y(k-i)$ då X och Y är diskreta s.v.
- $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$ då X och Y är kontinuerliga.

Def (väntevärde): Väntevärdet för den s.v. X definieras av
$$E(X)=\begin{cases}\sum_k k\,p_X(k) & \text{om } X \text{ är diskret}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx & \text{om } X \text{ är kontinuerlig}\end{cases}$$
Ibland kallas E även för förväntat värde.

SATS 5.1: Om $Y=g(X)$ gäller det att
$$E(Y)=\begin{cases}\sum_k g(k)\,p_X(k) & \text{då } Y \text{ och } X \text{ är diskreta}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,dx & \text{då } Y \text{ och } X \text{ är kontinuerliga.}\end{cases}$$

Följdsats 5.1.1: Om $Y=aX+b$ har vi att $E(Y)=aE(X)+b$.

SATS 5.2: Om $Z=g(X,Y)$ gäller det att
$$E(Z)=\begin{cases}\sum_{j,k} g(j,k)\,p_{X,Y}(j,k) & \text{för diskreta s.v.}\\ \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy & \text{för kontinuerliga s.v.}\end{cases}$$

SATS 5.3: Om X och Y är s.v. med väntevärden $E(X)$ och $E(Y)$ och om $a,b,c\in\mathbb{R}$ så gäller det att $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$

SATS 5.4: Om X och Y är oberoende gäller det att $E(XY)=E(X)E(Y)$

SATS 5.5: Om $X_1,X_2,\dots,X_n$ är oberoende s.v. gäller $E(X_1X_2\dots X_n)=E(X_1)E(X_2)\dots E(X_n)$

Def (varians): Variansen $V(X)$ för en s.v. X med $E(X)=\mu$ är $V(X)=E((X-\mu)^2)$
Alltså
$$V(X)=\begin{cases}\sum_k (k-\mu)^2 p_X(k) & \text{då } X \text{ är en diskret s.v.}\\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx & \text{då } X \text{ är en kontinuerlig s.v.}\end{cases}$$

Def (standardavvikelse): Standardavvikelsen $D(X)$ för en s.v. X är kvadratroten ur variansen $D(X)=\sqrt{V(X)}$

Def (variationskoefficient): Kvoten $R(X)=D(X)/E(X)$ kallas variationskoefficienten.

SATS 5.6: Följande samband gäller: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

SATS 5.7: Vid linjärtransformation gäller

$E(aX+b) = aE(X)+b$

$V(aX+b) = a^2V(X)$

$D(aX+b) = |a|D(X)$

Def (standardiserad): Om X är en s.v. med väntevärdet $E(X)=\mu$ och standardavvikelsen $D(X)=\sigma$ kallas $Y=(X-\mu)/\sigma$ en standardiserad s.v. vilket har egenskaperna

$$\begin{cases} E(Y)=0 \\ D(Y)=1 \end{cases}$$

Def (systematiskt fel, slumpmässigt fel): Med systematiskt fel menas differensen mellan mätvärdets väntevärde och det korrekta värdet. Med slumpmässigt fel menas differensen mellan mätvärdet och dess väntevärde.

Def (noggranhet, precision): Med god noggranhet avses ett litet systematiskt fel. Med god precision avses ett litet slumpmässigt fel.