Numerisk Analys

Metod (Eulers metod): Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & : t \in [t_0, b] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

För en given funktion f.
Definiera **steglängden** $h > 0$ som ett litet tal.
Från Taylors formel $y(a+h) \approx y(a) + hy'(a)$ får vi **Eulers metod**:

$$\begin{cases} y_{k+1} := y_k + hf(t_k, y_k) \\ t_{k+1} := t_k + h \end{cases}$$

Och får $y_n \approx y(t_n)$

Anmärkning: Approximationen $y_n \approx y(t_n)$ blir generellt bättre för mindre h.

Def (globala felet): Det **globala felet** definieras som skillnaden mellan den exakta och den uppskattade lösningen

$$g_k := |y(t_k) - y_k|$$

Anmärkning: Då vi oftast inte vet $y(t)$ och därför inte heller $y(t_k)$ kan denna definition sällan användas för att uppskatta det globala felet.

Def (lokala felet): Det **lokala felet** e_i är skillnaden mellan den uppskattade lösningen och en exakt lösning med initialvillkor y_{i-1}, dvs:

$$e_i = |z(t_i) - y_i|$$

där

$$\begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(t_{i-1}) = y_{i-1} \\ t \in [t_{i-1}, t_i] \end{cases}$$

Def (Lipschitz kontinuerlig): En funktion $f(t,y)$ är **Lipschitz kontinuerlig** i y för $t \in [a,b]$ om det finns en konstant L s.a.

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

för alla $t \in [a,b]$ och y_1, y_2.

Anmärkning: Ibland säger man endast att $f(t,y)$ är Lipschitz.

SATS 6.2: Om f är Lipschitz då existerar det preci. en lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \\ t \in [a,b] \end{cases}$$

SATS 6.3: Antag att f är Lipschitz i y för $t \in [a,b]$. Om $Y(t)$ och $Z(t)$ löser $y' = f(t,y)$ då gäller att

$$|Y(t) - Z(t)| \leq e^{L(t-a)}|Y(a) - Z(a)|$$

SATS 6.4: Antag att f är Lipschitz kontinuerlig i variabeln y, och att det lokala felet för en ODE-lösare begränsas av $e_i \leq Ch^{k+1}$ för något C. Då begränsas det globala felet av

$$g_i \leq \frac{C}{L}\left(e^{L(t_i-a)} - 1\right)h^k$$

Def (ordning): En ODE-lösare vars globala fel är $O(h^k)$ då $h \to 0$ säges ha **ordning** k.

Metod (Trapetsmetoden): Betrakta begynnelse värdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

För en given funktion f

Definiera steglängden $h>0$ som ett litet tal

Trapetsmetoden är då:

$t_{i+1} = t_i + h$

$y'_{i+1} = t_i + hf(t_i, y_i)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y'_{i+1})\right)$$

Och $y_n \approx y(t_n)$

Metod (Runge-Kutta ordning 4): Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

För en given funktion f

Definiera steglängden $h>0$ som ett litet tal

Metoden Runge-Kutta ordning 4 är då:

$t_{i+1} = t_i + h$

$s_1 = f(t_i, y_i)$

$s_2 = f(t_i + 0.5h,\ y_i + 0.5hs_1)$

$s_3 = f(t_i + 0.5h,\ y_i + 0.5hs_2)$

$s_4 = f(t_i + h,\ y_i + hs_3)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \quad \text{och} \quad y_n \approx y(t_n)$$

SATS 6.α:
- Eulers metod har ordning 1
- Trapetsmetoden har ordning 2
- Runge-Kutta har ordning 4.

Def (konvergenshastighet): Konvergenshastigheten av en given metod representerar hur snabbt det globala felet i en viss tidpunkt går mot noll då h går mot noll.

SATS 6.β: Om vi halverar steglängden h för en metod av ordning k kommer det globala felet minska med en approximativ faktor 2^k.

Anmärkning: Konvergenshastigheten beror på en metods ordning.

Anmärkning: Med g som globala felet kommer $\log(g)$ som en funktion av $\log(h)$ bilda en rät linje med lutning k.

Metod (Bakåt Euler): Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ För en given funktion f

Definiera steglängden $h>0$ som ett litet tal

Metoden Bakåt Euler är då:

$t_{i+1} = t_i + h$

$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$ OBS: Implicit!

$y_n \approx y(t_n)$

Bakåt Euler har ordning 1.

Def(absolut stabil): Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \lambda y & : \lambda < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En lösning $\{y_n\}_{n \geq 0}$ sägs vara absolut stabil för ett fixt h om $\lim_{n \to \infty} y_n \to 0$

Def(stabilitetsområde): Stabilitetsområdet A är de tal $h \cdot \lambda$ för vilka lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \lambda y & : \lambda < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

är absolut stabil.

SATS 6.7: Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \lambda y & : \lambda < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Stabilitetsområdet för

- Eulers metod är $h\lambda \in (-2, 0)$
- Runge-Kutta ordning 4 är ungefär $\lambda h \in (-2.7853, 0)$
- Bakåt Euler har $|1 - \lambda h| > 1$ och då $\lambda h < 0$, alltså stabil för alla h.

Def(styv): Om ett begynnelsevärdesproblem kräver små h för att undvika instabilitet av explicita metoder så säger man att problemet är styvt.

Def(störning): Antag att F representerar någon numerisk metod på ett begynnelsevärdesproblem så att $F(x) = y$ där x är initialdata och y är approximationen av lösningen av problemet i en viss tidpunkt.
Låt $\tilde{x}$ vara indata påverkad av en liten störning ε_x, alltså $\tilde{x} := x + \varepsilon_x$
Vi definierar nu $\tilde{y} := F(\tilde{x}) = F(x + \varepsilon_x)$
Effekten, ε_y, av störningen definieras som $\varepsilon_y := \tilde{y} - y$

SATS 6.8: Från Taylorutveckling får vi $\varepsilon_y \approx \varepsilon_x F'(x)$
Anmärkning: Då det oftast saknas en formel för $F(x)$ är det svårt att hitta $F'(x)$.

Def(absolutstabil): En numerisk lösning till

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

är absolutstabil om effekten av en liten störning försvinner då $n \to \infty$

Def(rot): En funktion $f(x)$ har en rot i $x = r$ om $f(r) = 0$.

SATS 1.2: Låt f vara en kontinuerlig funktion i $[a, b]$ som uppfyller $f(a)f(b) < 0$.
Då $\exists r \in (a, b) \mid f(r) = 0$.

Metod (Bisektionsmetoden): För en kontinuerlig funktion $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$: $f(a)f(b)<0$ kan vi approximera en rot för f, $r \in (a,b)$, med hjälp av bisektionsmetoden:

1) $c_{min} = a$
2) $c_{max} = b$
3) $c_{mid} = (c_{max} + c_{min})/2$
4) Om $f(c_{mid}) = 0$: returnera $r = c_{mid}$
5) Om $f(c_{min})f(c_{mid}) < 0$:

   $c_{max} = c_{mid}$

   Annars:

   $c_{min} = c_{mid}$

6) Gå till (3).

Repetera 3-6 tills antingen (4) returnerar r eller ett önskat antal repetitioner har gjorts, då kan vi konstatera $r \in (c_{min}, c_{max})$

Def (fixpunkt): Låt g vara en godtycklig funktion. r är en fixpunkt till g om $g(r) = r$.

Metod (Fixpunktsiteration): Om vi söker en fixpunkt till g kan man använda fixpunktsiteration:

1) Välj x_0 som startpunkt (gissning)
2) $x_{i+1} = g(x_i)$ för $i = 1, 2, 3, \ldots$

SATS 1.α: Om g är en kontinuerlig funktion och x_i konvergerar till r då är r en fixpunkt till g.

Anmärkning: huruvida x_i konvergerar beror på g'

Def (linjär konvergens, konvergenshastighet): Låt $e_i := |x_i - r|$ vara felet efter i iterationer för någon metod som söker värdet r.

Om $\lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = S < 1$ så har metoden linjär konvergens med konvergenshastighet (en: rate) S

Anmärkning: Mindre $S \Rightarrow$ Snabbare konvergens

Anmärkning: Om vi har konvergens så är $\lim_{i \to \infty} e_i = 0$

SATS 1.6: Antag att g är en kontinuerligt deriverbar funktion och $g(r) = r$ & $S = |g'(r)| < 1$. Då konvergerar fixpunktsiterationer runt r givet att x_0 är tillräckligt nära r, med rate S.

SATS 1.β: Om vi söker r för vilket $f(r) = 0$ kan man använda fixpunktsiteration på $g(x) = x + f(x)$.

Metod (Newtons metod): Om vi har en deriverbar funktion och söker en rot r för f kan vi använda Newtons metod:

1) Välj x_0 som startpunkt (gissning)
2) $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ för $i = 1, 2, 3, \ldots$

Anmärkning: Newtons metod sätter x_{i+1} som roten till tangentlinjen för $f(x_i)$.

Def (kvadratisk konvergens): Låt $e_i := |x_i - r|$ vara felet efter i iterationer för någon metod som söker värdet r. En metod har kvadratisk konvergens om $\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = M < \infty$

Anmärkning: En metod med kvadratisk konvergens konvergerar snabbare än en metod med linjär konvergens.

Anmärkning: Mindre $M \Rightarrow$ metoden konvergerar generellt snabbare.

SATS 1.11: Om f är två gånger deriverbar, $f(r)=0$ och $f'(r)\neq 0$ är Newtons metod kvadratiskt konvergent och $\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \frac{f''(r)}{2f'(r)}$

Anmärkning: Om $f'(r)=0$ så kan Newtons metod fortfarande konvergera fast långsammare