

Flervariabelsanalys

Def (skalärprodukt): Låt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ och $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ vara vektorer i \mathbb{R}^n . $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ kallas **skalärprodukten**. Följande räkneregler gäller:

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
- $(c\vec{x}) \cdot \vec{y} = c(\vec{x} \cdot \vec{y})$
- $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 ; \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Def (parallel, samma riktning): Låt $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. \vec{x} och \vec{y} är **parallel** om $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi säger då att \vec{x} och \vec{y} har samma riktning. $\vec{x} \parallel \vec{y}$.

Def (norm, längd): Låt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Normen eller längden av \vec{x} skrivs som $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Def (ortogonal): Låt $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. \vec{x} och \vec{y} är **ortogonala** om $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Def (vinkel): Låt $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ och $\theta = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \in [0, \pi]$, då är θ **vinkel** mellan \vec{x} och \vec{y}

SATS 1.1 (Cauchy-Schwartz olikhet): I \mathbb{R}^n gäller $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ med likhet om \vec{x} och \vec{y} är parallella.

SATS 1.2 (Triangelolikheten): I \mathbb{R}^n gäller $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ med likhet då $\vec{x} = \lambda \vec{y} : \lambda \geq 0$

SATS 1.3 (Omvända Triangelolikheten): I \mathbb{R}^n gäller $||\vec{x}| - |\vec{y}|| \leq |\vec{x} \pm \vec{y}|$

SATS 1.3: För varje $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gäller $|x_k| \leq |\vec{x}| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \quad \forall k=1, \dots, n$

Def (öppet klot): Mängden $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$ är ett **öppet klot** med centrum i \vec{a}

Def (omgivning): En mängd $U \subset \mathbb{R}^n$ är en **omgivning** av $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum i \vec{a}

Def (komplement): Komplementet till en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$, betecknat C_M , är $C_M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \notin M\}$

Def (inre punkt): Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . \vec{a} är en **inre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring \vec{a} som ligger i M .



Def (yttrre punkt): Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . \vec{a} är en **yttrre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring \vec{a} som ligger i C_M



Def (randpunkt): Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . a är en **randpunkt** till M om varje öppet klot kring a skär både M och C_M



Def (rand): Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . Mängden av randpunkter till M kallas för **randen** till M , betecknat ∂M .

Def (öppen mängd): En mängd M är **öppen** om $\partial M \subset M$

Def (sluten mängd): En mängd M är **sluten** om $\partial M \subset M$

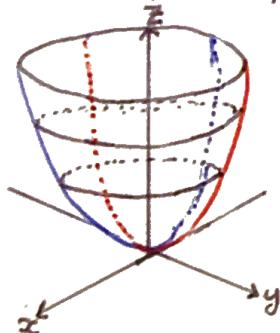
Def' (öppen mängd): En mängd M är **öppen** om det för varje $\bar{x} \in M$ finns ett öppet klot kring \bar{x} som ligger i M

Def (begränsad): En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är **begränsad** om det finns ett $C > 0$ så att $|x| < C \quad \forall x \in M$

Def (kompakt): En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är **kompakt** om M är både sluten och begränsad.

Att skissa $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

- 1) Bestäm (x, y) för $f(x, y) = 0$
- 2) Bestäm (x, y) för $f(x, y) = c$ för några $c \in \mathbb{R}$
- 3) Rita ett snitt av planet $x=0$
- 4) Rita ett snitt av planet $y=0$

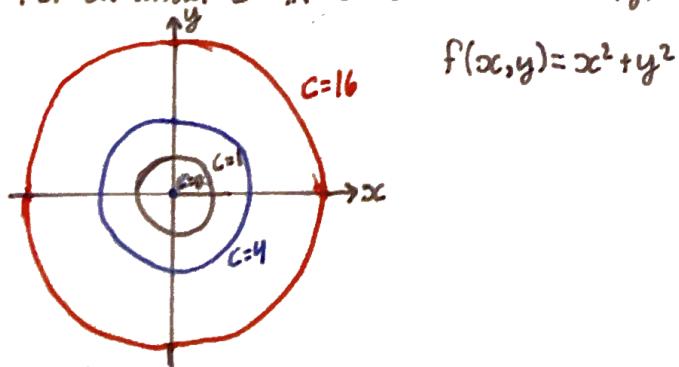


$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Def (Elliptisk paraboloid): Grafer av denna form kallas för **elliptiska paraboloider**.

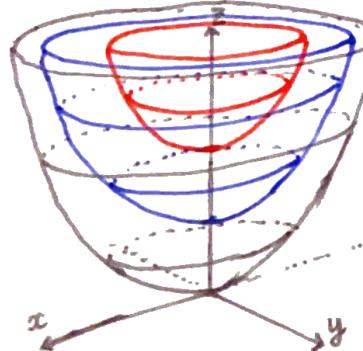
Att skissa $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ med nivåkurvor:

- För ett antal $c \in \mathbb{R}$ skissa kurvor $f(x, y) = c$



Att skissa $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ med nivå ytor

- För ett antal $C \in \mathbb{R}$ skissa $f(x, y, z) = C$ i \mathbb{R}^3



$$\begin{aligned} C=0 \\ C=1 \\ C=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= z - x^2 - y^2 \\ f(x, y, z) &= C \\ \Rightarrow z &= x^2 + y^2 + C \end{aligned}$$

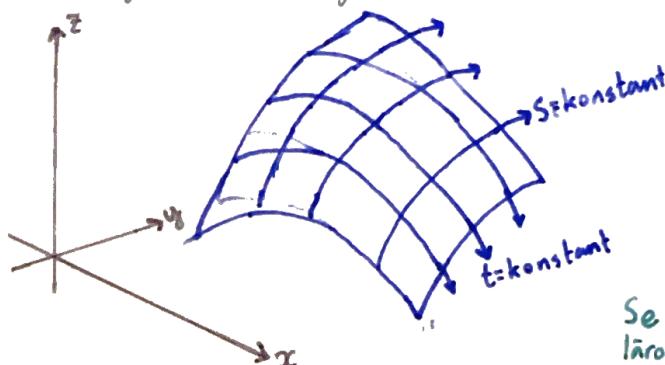
SATS 1.β: Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. $\vec{f}(\vec{x})$ kan delas upp i p stycken funktioner $f_1, \dots, f_p: D \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x}))$

Def(kurva): En kurva är en funktion $\vec{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$

Def(yta): En yta är en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p > 2$. I \mathbb{R}^3 skrivs en yta f som $f(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ där $x, y, z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Man kan tänka sig att ytan är uppbyggd av två slägor av kurvor, nämligen parameterkurvorna

$$\begin{aligned} s &\mapsto (x(s, t_0), y(s, t_0), z(s, t_0)) \\ \text{och} \quad t &\mapsto (x(s_0, t), y(s_0, t), z(s_0, t)) \end{aligned}$$

för $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Vanligtvis ritas några sådana kurvor när man skissar ytan

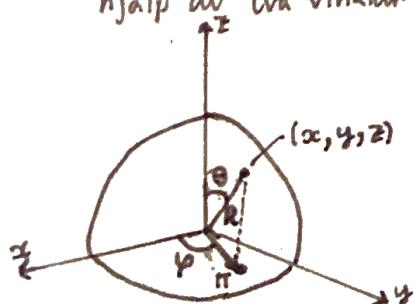


Se sid 29 & 30 i läroboken för bilder av ytor

Def(polära koordinater): Låt (x, y) vara de euklidiska koordinaterna för en punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Man kan skriva om \vec{a} till polära koordinater (r, θ) där $r = |\vec{a}|$ och θ är vinkeln mellan \vec{a} och x -axeln.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Def(sfäriska koordinater): Man kan parameterisera en sfär av radie $R > 0$ med hjälp av två vinklar θ och φ



$$\begin{aligned} \pi &= R \cdot \sin \theta \\ x &= \pi \cdot \cos \varphi \\ y &= \pi \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad \begin{cases} x = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = R \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Punkter i \mathbb{R}^3 kan skrivas som sfäriska koordinater (R, θ, φ)

Def (gränsvärde): Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt \vec{a} vara en inre punkt eller randpunkt till D . f har gränsvärdet $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ om $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ sådan att för alla $\vec{x} \in D$ som uppfyller $0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ har vi att $|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \epsilon$

SATS 1.7: Låt $\vec{f} = (f_1, \dots, f_p)$, $\vec{x} \in D_f$, $\vec{a} \in \partial D \cup D$ och $\vec{b} = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\cdot |f_j(\vec{x}) - b_j| \leq |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| \leq |f_1(\vec{x}) - b_1 + f_2(\vec{x}) - b_2 + \dots + f_p(\vec{x}) - b_p| \text{ för } \forall j = 1, \dots, p$$

$$\cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j \quad \forall j = 1, \dots, p$$

SATS 1.8: Följande regler gäller

- För $\vec{f}: D \rightarrow E$ och $\vec{g}: E \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{b}$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ och $\vec{g}(\vec{y}) \rightarrow \vec{c}$ då $\vec{y} \rightarrow \vec{b}$
 $\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$
 $\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) \rightarrow \vec{c}$ då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$
- För $\vec{f}, \vec{g}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ och gränsvärdena för \vec{f} och \vec{g} existerar då $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{\vec{f}(\vec{x})}{\vec{g}(\vec{x})} = \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})} \quad \text{om } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \neq \vec{0}$
- Om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{h}(\vec{x})$ och $|\vec{f}(\vec{x})| \leq |\vec{g}(\vec{x})| \leq |\vec{h}(\vec{x})|$ för alla $\vec{x} \in D$ som uppfyller $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ för något $\delta > 0$ har vi att $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{h}(\vec{x})$

Def (gränsvärde): Vi säger att $\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{b}$ då $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ om $\forall \epsilon > 0$ finns $w > 0$ så att $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{x}| > w \\ \vec{x} \in D_f \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \epsilon$

Def (kontinuerlig): Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att \vec{f} är kontinuerlig i $\vec{a} \in D$ om $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$

SATS 1.6: Elementära funktioner (polynom, $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log x$) och deras kompositioner/produkter är kontinuerliga.

SATS 1.4: Om $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$ är kontinuerlig och D är kompakt så antar \vec{f} sitt sätt största och minsta värde på D .

Def (likformigt kontinuerlig): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$. f är likformigt kontinuerlig på D om $\forall \epsilon > 0$ så finns ett $\delta > 0$ så att för alla $\vec{x}, \vec{y} \in D$ som uppfyller $0 < |\vec{x} - \vec{y}| < \delta$ gäller $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \epsilon$

SATS 1.5: Om $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, är kontinuerlig och D är kompakt så är f likformigt kontinuerlig på D

Def (bägris sammanhängande): $D \subset \mathbb{R}^n$ är bägris sammanhängande om $\forall a, b \in D$ finns en kurva $t \mapsto \vec{x}(t)$, $t \in [0, 1]$, så att $\vec{x}(0) = a$, $\vec{x}(1) = b$ och $\vec{x}(t) \in D$ för $\forall t \in [0, 1]$

Def (partiell derivata): Låt \vec{a} vara en inre punkt i definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$ till funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} - h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} \text{ existerar så säger}$$

vi att f är partiellt derivbar med avseende på x_i i punkten \vec{a} . Gränsvärdet kallas den partiella derivatan med avseende på x_i av f i punkten \vec{a} .

Beteckning för partiella derivator

- Partiella derivatan av f med avseende på x i (a, b) :
 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}, \frac{\partial}{\partial x}f(a,b), f'_x(a,b)$ eller $D_x f(a,b) / \partial_x f(a,b)$
- Partiella derivatan av f med avseende på x
 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}f, f'_x$ eller $D_x f / \partial_x f$
- Partiella derivatan av f med avseende på y i (a, b)
 $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}, \frac{\partial}{\partial y}f(a,b), f'_y(a,b)$ eller $D_y f(a,b) / \partial_y f(a,b)$
- Partiella derivatan av f med avseende på y
 $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}f, f'_y$ eller $D_y f / \partial_y f$

SATS 2.α: Antag $f(x,y)$ är deriverbar på hela \mathbb{R}^2 och $\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Då har vi att $f(x,y)=\varphi(y)$. Detta även för en funktion $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som är deriverbar på hela \mathbb{R}^n och $\frac{\partial g}{\partial x_i}=0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ att vi då har att $g(x_1, \dots, x_n) = \mu(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Def (differentierbar): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, och låt \vec{a} vara en inre punkt av D . f är **differentierbar** i punkten \vec{a} om det finns konstanter A_1, \dots, A_n och en funktion $\varphi(\vec{h}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})}{\|\vec{h}\|} = \varphi(\vec{h}) = 0$ sådan att $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \|\vec{h}\| \cdot \varphi(\vec{h})$ där $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$.

Def (differentierbar): En funktion f är **differentierbar** i en öppen mängd D om f är differentierbar i varje punkt av D .

SATS 2.1: En differentierbar funktion är kontinuerlig.

SATS 2.2: En differentierbar funktion är partiellt deriverbar, och $\frac{\partial f}{\partial x_j}|_{\vec{a}} = A_j : \forall j=1, \dots, n$

Observera: En partiellt deriverbar funktion är inte nödvändigtvis differentierbar.

SATS 2.β: Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, vara differentierbar i den inre punkten $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Tangenten till f i-punkten $(a_1, \dots, a_n, f(\vec{a}))$ beräknas som:
 $z = f(\vec{a}) + f'_x(\vec{a}) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_n}(\vec{a}) \cdot (x_n - a_n)$.

Def (klass C^1): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i \mathbb{R}^n . f är av **klass C^1** på D om f är partiellt deriverbar och alla partiella derivator är kontinuerliga i D . Man skriver $f \in C^1(D)$.

SATS 2.3: Varje funktion av klass C^1 på D är differentierbar i D

SATS 2.4 (kedjeregeln): Låt $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler, och antag att funktionerna $g_1(t), \dots, g_n(t)$ är deriverbara i intervallet $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Då är den sammansatta funktionen $f(\vec{g}(t))$, där $\vec{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$, också deriverbar i intervallet $t \in (a, b)$, och:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \partial_{x_1} f(\vec{g}(t)) \cdot g'_1(t) + \dots + \partial_{x_n} f(\vec{g}(t)) \cdot g'_n(t)$$

$$\vec{x} = g(t) \quad u = f(\vec{x}) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

SATS 2.8 (Allmänna kedjeregeln): Låt $\vec{t} = (t_1, \dots, t_q) \in D \subset \mathbb{R}^q$, $\vec{x}(t) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, och $u(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Låt även $u(\vec{x})$ och $g_1(t), \dots, g_n(t)$ alla vara av klass C^1 . Då har vi att $u(\vec{x}(t))$ är partiellt deriverbar med avseende på $t_j, \forall j=1, \dots, q$ och att $\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j}$

Def (gradient): För differentierbara funktioner $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ definierar vi gradienten av f i punkten \vec{x} som vektorn

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

Def(nabla): $\vec{\nabla}$, eller nabla, definieras som $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ och man kan använda beteckningen $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})$. $\vec{\nabla}$ är en linjär operator d.v.s. en linjär funktion på rummet av funktioner.

SATS 2.5: Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen och bågvis sammanhängande mängd och $f \in C^1(D)$. Om $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in D$ så är $f(\vec{x})$ konstant i D .

Def (derivata med avseende på riktning): Låt $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ha längd 1, d.v.s. $|\vec{v}|=1$, \vec{v} är då en enhetsvektor. Derivatan av f i punkt \vec{a} med avseende på riktningen \vec{v} är $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}$

SATS 2.6: Om f är differentierbar och $|\vec{v}|=1$, så har vi $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$

SATS 2.7: Gradienten $\text{grad } f(\vec{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen växer snabbast i punkten \vec{a} och den maximala tillväxthastigheten är $|\text{grad } f(\vec{a})|$.

SATS 2.8: Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av klassen C^1 och $\text{grad } f(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Då är vektorn $\text{grad } f(\vec{a})$ vinkelrät mot nivåytan $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

SATS 2.9: Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av klassen C^1 och $\text{grad } f(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Då är vektorn $\text{grad } f(\vec{a})$ normalvektorn till den tangerande ytan till f i punkten \vec{a} .

Def (klass C^k): Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ där D är en öppen mängd i \mathbb{R}^n . Vi säger att f är av klass C^k om alla partiella derivator av ordning $\leq k$ existerar och är kontinuerliga.

SATS 2.9: För varje funktion $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ av klass C^2 gäller att:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

SATS 2.10 (Taylors formel av andra ordningen i två variabler): Låt $f(x, y)$ vara en C^3 -funktion i den öppna mängden D , och antag att punkten (a, b) tillhör D . Då är:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k + \frac{1}{2} (f''_{xx}(a, b) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b) \cdot k^2) + (h^2 + k^2)^{3/2} \cdot B(h, k)$$

där $B(h, k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Def (lokalt maximum): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt maximum i $\vec{a} \in D$ om $\exists \delta > 0$ så att om $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ och $\vec{x} \in D$, så $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$.

Def (lokalt minimum): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. f har ett lokalt minimum i $\vec{a} \in D$ om $\exists \delta > 0$ så att om $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ och $\vec{x} \in D$, så $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$.

Def (lokala extrempunkter): Lokala maxima och minima kallas gemensamt för lokala extrempunkter.

SATS 2.11: Om $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, har en lokal extrempunkt i en inre punkt $\vec{a} \in D$ och f är partiellt deriverbar i \vec{a} så har vi att $f_{xj}'(\vec{a}) = 0$ för alla $j=1, \dots, n$ d.v.s. $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Def (stationär punkt): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, och $\vec{a} \in D$. \vec{a} är en stationär punkt för f om $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Def (Taylor polynom i en stationär punkt): Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i \mathbb{R}^2 och $f \in C^3(D)$. Vid en stationär punkt (a, b) till f gäller Taylor polynomet: $f(ath, btk) = f(a, b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot B(h, k)$, där $B(h, k)$ är begränsad runt 0 och $A = f_{xx}''(a, b)$; $B = f_{xy}''(a, b)$; $C = f_{yy}''(a, b)$. $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ sägs vara av kvadratisk form.

Def (positivt definit, negativt definit, indefinit, semidefinit): Låt $Q(h, k)$ vara av kvadratisk form. Då säger vi att:

- $Q(h, k)$ är positivt definit om $Q(h, k) > 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$ är positivt semidefinit om $Q(h, k) \geq 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$ är negativt definit om $Q(h, k) < 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$ är negativt semidefinit om $Q(h, k) \leq 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$
- $Q(h, k)$ är indefinit om $Q(h, k)$ antar både positiva och negativa värden för $(h, k) \neq (0, 0)$

SATS 2.12: Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd i \mathbb{R}^2 och $f \in C^3(D)$, låt även (a, b) vara en stationär punkt till f och $Q(h, k) = f_{xx}''(a, b) \cdot h^2 + 2f_{xy}''(a, b) \cdot hk + f_{yy}''(a, b) \cdot k^2$. Då har vi att:

- Om $Q(h, k)$ är positivt definit så har f ett strängt lokalt minimum i (a, b)
- Om $Q(h, k)$ är negativt definit så har f ett strängt lokalt maximum i (a, b)
- Om $Q(h, k)$ är indefinit så har f varken ett maximum eller minimum i (a, b)

OBS: Om $Q(h, k)$ är positivt eller negativt semidefinit kan ingen slutsats tas huruvida f har en lokal extrempunkt i (a, b) .

Def (kurva): En kurva är en funktion $\vec{x}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, och $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ där $x_1, \dots, x_p \in C^1(D)$.

Def (parameterisering): Låt $\Psi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ vara en strängt växande funktion så att $\Psi, \Psi^{-1} \in C^1$. Då identifierar vi $t \mapsto \vec{x}(t)$ och $s \mapsto \vec{x}(\Psi(s))$ är olika parameteriseringar av samma kurva.

Def (tangentvektor/riktningsvektor): Tangentvektorn till kurvan \vec{x} i punkten $\vec{x}(t)$ är vektorn $\vec{x}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} = (x'_1(t), \dots, x'_p(t))$.

Observera att tangentvektorn beror på parameteriseringen.

Om $t = \Psi(s)$ har vi $(\vec{x}(\Psi(s)))' = \vec{x}'(\Psi(s)) \cdot \Psi'(s)$. Alltså samma riktning men olika längder.

Def(längd): Längden av kurvan $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ ges av $\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{x}'(t)| dt$.

SATS 3.α: Längden av en kurva beror ej på parameteriseringen.

Def(yta): En yta är en funktion $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ med $D \subset \mathbb{R}^2$ så att
 $r(s, t) = (x_1(s, t), x_2(s, t), x_3(s, t))$

Def(tangentplanet): Tangentplanet till \vec{r} i punkten $\vec{r}(s, t)$ spänns upp av
 $\vec{r}'_s = (\partial_s x_1, \partial_s x_2, \partial_s x_3)$ och $\vec{r}'_t = (\partial_t x_1, \partial_t x_2, \partial_t x_3)$. Vektorn $(\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t)$ är
en normalvektor till ytan i punkten $\vec{r}(s, t)$.

Def(funktionalmatris): Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, funktionalmatrisen eller
derivatan av \vec{f} är matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Funktionalmatrisen betecknas som: $\vec{f}'(\vec{x})$, $d\vec{f}(\vec{x})$, $D\vec{f}(\vec{x})$, $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$

SATS 3.β: Låt $\vec{f} \in C^1$, d.v.s. $f_1, \dots, f_p \in C^2$, då gäller för varje $f_j(\vec{x})$, $j=1, \dots, p$
 $f_j(\vec{x} + \vec{h}) = f_j(\vec{x}) + f'_{j,x_1}(\vec{x}) \cdot h_1 + \dots + f'_{j,x_n}(\vec{x}) \cdot h_n + |\vec{h}| \cdot \rho_j(\vec{h})$ där $\rho_j(\vec{h}) \rightarrow 0$ då $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$.

Alltså

$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{x} + \vec{h}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x} + \vec{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{1,x_1}(\vec{x}) & \dots & f'_{1,x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{p,x_1}(\vec{x}) & \dots & f'_{p,x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + |\vec{h}| \cdot \rho(\vec{h}), \text{ där } \rho(\vec{h}) \rightarrow 0 \text{ då } \vec{h} \rightarrow \vec{0}$$

d.v.s.

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x}) \cdot \vec{h} + |\vec{h}| \cdot \rho(\vec{h}), \text{ där } \rho(\vec{h}) \rightarrow 0 \text{ då } \vec{h} \rightarrow \vec{0}$$

Def(linjärisering): Låt $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$, och \vec{x} vara en fixerad
punkt i D . Den linjära funktionen av $\ell(\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x}) \cdot \vec{h}$ kallas för
Linjäriseringen av \vec{f} i punkten \vec{x} .

SATS 3.δ (kedjeregeln av funktionalmatriser): Låt $g: D_g \rightarrow D_f$ och $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^p$,
där $D_g \subset \mathbb{R}^q$ och $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Då har vi
 $(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$.

Def(funktionaldeterminant): Talet $\det(\vec{f}'(\vec{x}))$ kallas för funktionaldeterminanten
eller Jacobis determinant av funktionen $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$

SATS 3.1: Funktionaldeterminanten för en sammansättning av två funktioner
från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m är lika med produkten av de ingående funktionernas
funktionaldeterminanter. Formelmässigt kan detta skrivas:
 $\det(\vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))) = \det(f'(\vec{g}(\vec{x}))) \cdot \det(g'(\vec{x}))$

SATS 3.2 (Inversa funktionsatsen): Låt $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ vara en C^1 -funktion från \mathbb{R}^n till
 \mathbb{R}^m och \vec{a} en punkt i definitionsmängden (som är en öppen mängd) sådan att
 $\det(\vec{f}'(\vec{a})) \neq 0$. Då finns öppna omgivningar U och V av \vec{a} respektive $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$
sådana att avbildningen $\vec{f}: U \rightarrow V$ är bijektiv och inversen $\vec{f}': V \rightarrow U$ en
funktion av klassen C^1 .

SATS 3.3 (Implicita funktionssatsen): Låt $F(x,y)$ vara en C^2 -funktion och (a,b) en punkt på nivåkurvan $F(x,y)=C$. Om $F'_y(a,b) \neq 0$ så finns en öppen omgivning U av (a,b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 -funktion $y=f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$