

2012 年高考重庆文科数学试卷解析（教师版）

试卷总评

2012 年高考重庆卷数学文理科的特点是“稳中有降、梯度合理、试题亲切、背景公平”。

稳中有降：

1、整份试题继承了去年试题的框架结构，全面考查了《考试大纲》各部分的内容，函数、三角函数、不等式、数列、圆锥曲线等仍是稳定的主干考点；

2、客观题（选择、填空）的压轴题都较往年降低了难度，连接解答题的难度也略低于往年，试题面向全体考生，体现了向新课改主干知识平稳过渡。

梯度合理：

整份试题层次分明，问题设置科学、合理，对数学基础、数学水平、数学能力不同的学生有着较好的区分度，部分试题设计巧妙，能考察学生综合分析以及继续学习的潜能，不仅有利于优秀学生的发挥，也有利于数学中等生取得满意的成绩。

试题亲切：全卷试题表述清晰、富有数学美感，考生审题无文字障碍；淡化特殊技巧，回归常态，运算量适中；试题紧扣教材，对高中主干知识考察的明晰且突出，经典数学问题的重构与改编所考察的数学思想与方法体现出了命题者的匠心独用。

背景公平：

全卷无偏、难、怪、繁的试题，体现数学应用意识的一些题目选材自然、具有生活体验，如学生轮流投篮胜负的探讨、学校课表安排等题目，这些题目对城乡学生的审题、分析以至于解题过程均体现出公平的认知背景，同时也较好地体现了新课改中数学文化的渗透。

值得一提的是，命题者注重文理科差异，命题具有针对性。（21 道试题中有 9 道是同源题目，其他均采用了不同的试题，考察体现了文理科学生的数学学习能力差异）

总之，整份试题应该说是一份对如何考查双基内容作出了完美的诠释的试题，不仅是一份有利于高校选拔人才的试卷，更对高中数学课堂教学改革起到了风向标的引领作用。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

（1）命题“若 p 则 q ”的逆命题是

（A）若 q 则 p （B）若 $\neg p$ 则 $\neg q$

（C）若 $\neg q$ 则 $\neg p$ （D）若 p 则 $\neg q$

【答案】：A

【解析】：根据原命题与逆命题的关系可得：“若 p ，则 q ”的逆命题是“若 q ，则 p ”故选 A.

【考点定位】 本题主要考查四种命题之间的关系.

(2) 不等式 $\frac{x-1}{x+2} < 0$ 的解集是为

- (A) $(1, +\infty)$ (B) $(-\infty, -2)$ (C) $(-2, 1)$ (D) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

【答案】： C

【解析】： $\frac{x-1}{x+2} < 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1$

【考点定位】 本题考查解分式不等式时，利用等价变形转化为整式不等式解.

(3) 设 A, B 为直线 $y = x$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两个交点，则 $|AB| =$

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

【答案】： D

【解析】： 直线 $y = x$ 过圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心 $C(0, 0)$ 则 $|AB| = 2$

【考点定位】 本题考查圆的性质，属于基础题.

(4) $(1-3x)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为

- (A) -270 (B) -90 (C) 90 (D) 270

【答案】： A

【解析】： $T_4 = C_5^3(-3x)^3 = -270x^3$

【考点定位】 本题考查二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题；

(5) $\frac{\sin 47^\circ - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ}$

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】： C

【解析】： $\frac{\sin 47^\circ - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ} = \frac{\sin(30^\circ + 17^\circ) - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ}$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cos 17^\circ + \cos 30^\circ \sin 17^\circ - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ} = \frac{\sin 30^\circ \cos 17^\circ}{\cos 17^\circ} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

【考点定位】本题考查三角恒等变化，其关键是利用 $47^\circ = 30^\circ + 17^\circ$

(6) 设 $x \in R$ ，向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) 10

【答案】: B

【解析】: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 则 $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$,

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |(2, 1) + (1, -2)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

【考点定位】本题主要考查向量的数量积运算及向量垂直的充要条件，本题属于基础题只要计算正确即可得到满分。

(7) 已知 $a = \log_2 3 + \log_2 \sqrt{3}$, $b = \log_2 9 - \log_2 \sqrt{3}$, $c = \log_3 2$ 则 a, b, c 的大小关系是

(A) $a = b < c$ (B) $a = b > c$ (C) $a < b < c$ (D) $a > b > c$

【答案】: B

【解析】: $a = \log_2 3 + \log_2 \sqrt{3} = \log_2 3 + \frac{1}{2} \log_2 3 = \frac{3}{2} \log_2 3$,

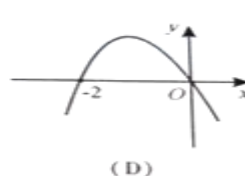
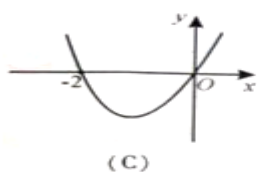
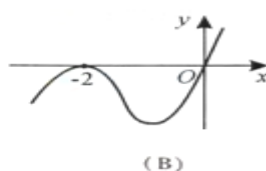
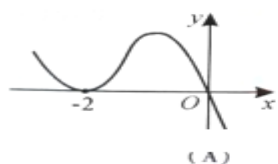
$$b = \log_2 9 - \log_2 \sqrt{3} = 2 \log_2 3 - \frac{1}{2} \log_2 3 = \frac{3}{2} \log_2 3, \quad c = \log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3} \text{ 则}$$

$$a = b > c$$

【考点定位】本题考查对数函数运算。

(8) 设函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数 $f'(x)$ ，且函数 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值，则

函数 $y = xf'(x)$ 的图象可能是



【答案】: C

【解析】: 由函数 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值可知 $x < -2$, $f'(x) < 0$, 则 $xf'(x) > 0$;

$x > -2$, $f'(x) > 0$ 则 $-2 < x < 0$ 时 $xf'(x) < 0$, $x > 0$ 时 $xf'(x) > 0$

【考点定位】 本题考查函数的图象, 函数单调性与导数的关系, 属于基础题.

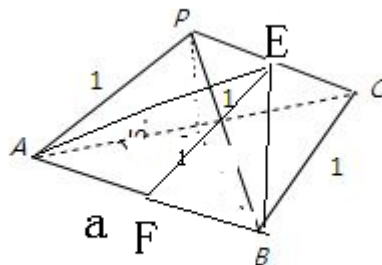
(9) 设四面体的六条棱的长分别为 $1, 1, 1, 1, \sqrt{2}$ 和 a 且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面, 则 a 的取值范围是

- (A) $(0, \sqrt{2})$ (B) $(0, \sqrt{3})$ (C) $(1, \sqrt{2})$ (D) $(1, \sqrt{3})$

【答案】: A

【解析】: $BE = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BF < BE$,

$AB = 2BF < \sqrt{2}$,



【考点定位】 本题考查棱锥的结构特征, 考查空间想

象能力, 极限思想的应用, 是中档题..

(10) 设函数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 3^x - 2$, 集

合 $M = \{x \in R \mid f(g(x)) > 0\}$,

$N = \{x \in R \mid g(x) < 2\}$, 则 $M \cap N$ 为

- (A) $(1, +\infty)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(-1, 1)$ (D) $(-\infty, 1)$

【答案】: D

【解析】: 由 $f(g(x)) > 0$ 得 $g^2(x) - 4g(x) + 3 > 0$ 则 $g(x) < 1$ 或 $g(x) > 3$ 即 $3^x - 2 < 1$ 或

$3^x - 2 > 3$ 所以 $x < 1$ 或 $x > \log_3 5$; 由 $g(x) < 2$ 得 $3^x - 2 < 2$ 即 $3^x < 4$ 所以 $x < \log_3 4$ 故

$M \cap N = (-\infty, 1)$

【考点定位】 本题考查了利用直接代入法求解函数的解析式以及指数不等式的解法. 本题以函数为载体, 考查复合函数, 关键是函数解析式的确定.

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分, 把答案填在答题卡的相应位置.

(11) 首项为 1, 公比为 2 的等比数列的前 4 项和 $S_4 =$ _____

【答案】: 15

【解析】: $S_4 = \frac{1-2^4}{1-2} = 15$

【考点定位】 本题考查等比数列的前 n 项和公式

(12) 函数 $f(x) = (x+a)(x-4)$ 为偶函数, 则实数 $a =$ _____

【答案】: 4

【解析】: 由函数 $f(x)$ 为偶函数得 $f(a) = f(-a)$ 即 $(a+a)(a-4) = (-a+a)(-a-4)$ 所以 $a = 4$

【考点定位】 本题考查函数奇偶性的应用. 若已知一个函数为偶函数, 则应有其定义域关于原点对称, 且对定义域内的一切 a 都有 $f(a) = f(-a)$ 成立.

(13) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 且 $a=1$, $b=2$, $\cos C = \frac{1}{4}$, 则 $\sin B =$ _____

【答案】: $\frac{\sqrt{15}}{4}$

【解析】: $a=1$, $b=2$, $\cos C = \frac{1}{4}$, 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{4} = 4$

则 $c = 2$, 即 $B = C$ 故 $\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

【考点定位】 利用同角三角函数间的基本关系求出 $\sin B$ 的值本题的突破点, 然后利用正弦定理建立已知和未知之间的关系. 同时要求学生牢记特殊角的三角函数值.

(14) 设 P 为直线 $y = \frac{b}{3a}x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左支的交点, F_1 是左焦点,

PF_1 垂直于 x 轴, 则双曲线的离心率 $e =$ _____

【答案】: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【解析】：由 $\begin{cases} y = \frac{b}{3a}x \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{2}}{4}a \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4}b \end{cases}$ 又 PF_1 垂直于 x 轴，所以 $\frac{3\sqrt{2}}{4}a = c$ 则 $e = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

【考点定位】本题考查了双曲线的焦点、离心率，考查了两条直线垂直的条件，考查了方程思想。

(15) 某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其它三门艺术课各 1 节，则在课表上的相邻两节文化课之间至少间隔 1 节艺术课的概率为_____ (用数字作答)。

【答案】： $\frac{1}{5}$

【解析】：语文、数学、外语三门文化课两两不相邻排法可分为两步解决，先把其它三门艺术课排列有 A_3^3 种排法，第二步把语文、数学、外语三门文化课插入由那三个隔开的四个空中，有 A_4^3 种排法，故所有的排法种数有 $A_3^3 \times A_4^3 = 144$ ，在课表上的相邻两节文化课之间至少间隔 1 节艺术课的概率为 $p = \frac{A_3^3 \times A_4^3}{A_6^6} = \frac{1}{5}$

【考点定位】本题在计数时根据具体情况选用了插空法，做题时要注意体会这些方法的原理及其实际意义。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 13 分，(I) 小问 6 分，(II) 小问 7 分) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1 + a_3 = 8, a_2 + a_4 = 12$ ，(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；(II) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 a_1, a_k, S_{k+2} 成等比数列，求正整数 k 的值。

【答案】：(I) $a_n = 2n$ (II) $k = 6$

【解析】：(I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由题意知 $\begin{cases} 2a_1 + 2d = 8 \\ 2a_1 + 4d = 12 \end{cases}$ 解得 $a_1 = 2, d = 2$

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1) = 2n$

(II) 由 (I) 可得 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2 + 2n)n}{2} = n(1+n)$ 因 a_1, a_k, S_{k+2} 成等比数列，

所以 $a_k^2 = a_1 S_{k+2}$ 从而 $(2k)^2 = 2(k+2)(k+3)$ ，即 $k^2 - 5k - 6 = 0$

解得 $k=6$ 或 $k=-1$ (舍去), 因此 $k=6$ 。

17. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x)=ax^3+bx+c$ 在 $x=2$ 处取得极值为 $c-16$

(1) 求 a 、 b 的值; (2) 若 $f(x)$ 有极大值 28, 求 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最大值。

【答案】: (I) $\frac{13}{27}$ (II) $\frac{4}{27}$

【解析】: (I) 因 $f(x)=ax^3+bx+c$ 故 $f'(x)=3ax^2+b$ 由于 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处取得极值

$$\text{故有} \begin{cases} f'(2)=0 \\ f(2)=c-16 \end{cases} \text{即} \begin{cases} 12a+b=0 \\ 8a+2b+c=c-16 \end{cases}, \text{化简得} \begin{cases} 12a+b=0 \\ 4a+b=-8 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=1 \\ b=-12 \end{cases}$$

(II) 由 (I) 知 $f(x)=x^3-12x+c$, $f'(x)=3x^2-12$

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=-2, x_2=2$ 当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x) > 0$ 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上为增函数;

当 $x \in (-2, 2)$ 时, $f'(x) < 0$ 故 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上为减函数

当 $x \in (2, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数。

由此可知 $f(x)$ 在 $x_1=-2$ 处取得极大值 $f(-2)=16+c$, $f(x)$ 在 $x_2=2$ 处取得极小值

$f(2)=c-16$ 由题设条件知 $16+c=28$ 得 $c=12$ 此时

$f(-3)=9+c=21, f(3)=-9+c=3, f(2)=c-16=-4$ 因此 $f(x)$ 上 $[-3,3]$ 的最小值为 $f(2)=-4$

【考点定位】 本题主要考查函数的导数与极值, 最值之间的关系, 属于导数的应用. (1) 先对函数 $f(x)$ 进行求导, 根据 $f'(2)=0=0$, $f(2)=c-16$, 求出 a, b 的值. (1) 根据函数 $f(x)=x^3-3ax^2+2bx$ 在 $x=1$ 处有极小值 -1 先求出函数中的参数 a, b 的值, 再令导数等于 0, 求出极值点, 判断极值点左右两侧导数的正负, 当左正右负时有极大值, 当左负右正时有极小值. 再代入原函数求出极大值和极小值. (2) 列表比较函数的极值与端点函数值的大小, 端点函数值与极大值中最大的为函数的最大值, 端点函数值与极小值中最小的为函数的最小值.

18. (本小题满分 13 分, (I) 小问 7 分, (II) 小问 6 分)

甲、乙两人轮流投篮，每人每次投一球，约定甲先投且先投中者获胜，一直每人都已投球 3 次时投篮结束，设甲每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{3}$ ，乙每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{2}$ ，且各次投篮互不影响。（I）求乙获胜的概率；（II）求投篮结束时乙只投了 2 个球的概率。

【答案】：（I） $\frac{13}{27}$ （II） $\frac{4}{27}$

【解析】：设 A_k, B_k 分别表示甲、乙在第 k 次投篮中，则 $p(A_k) = \frac{1}{3}, p(B_k) = \frac{1}{2}, (k=1, 2, 3)$

（I）记“乙获胜”为事件 C ，由互斥事件有一个发生的概率与相互独立事件同时发生的概率计算公式知 $p(C) = p(\overline{A_1}B_1) + p(\overline{A_1}\overline{B_1}A_2B_2) + p(\overline{A_1}\overline{B_1}\overline{A_2}B_3)$

$$= p(\overline{A_1})p(B_1) + p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})p(A_2)p(B_2) + p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})p(\overline{A_2})p(B_3)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{2})^2 + (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{2})^3 = \frac{13}{27}$$

（II）记“投篮结束时乙只投了 2 个球”为事件 D ，则由互斥事件有一个发生的概率与相互独立事件同时发生的概率计算公式知 $p(D) = p(\overline{A_1}\overline{B_1}A_2B_2) + p(\overline{A_1}\overline{B_1}\overline{A_2}B_3)$

$$= p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})p(A_2)p(B_2) + p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})p(\overline{A_2})p(B_3)$$

$$= (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{2})^2 + (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{2})^2 \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

19.（本小题满分 12 分，（I）小问 5 分，（II）小问 7 分）设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$

（其中 $A > 0, \omega > 0, -\pi < \varphi < \pi$ ）在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处取得最大值 2，其图象与轴的相邻两个交点的距离为 $\frac{\pi}{2}$

（I）求 $f(x)$ 的解析式；（II）求函数 $g(x) = \frac{6 \cos^4 x - \sin^2 x - 1}{f(x + \frac{\pi}{6})}$ 的值域。

【答案】：（I） $\varphi = \frac{\pi}{6}$ （II） $[1, \frac{7}{4}] \cup (\frac{7}{4}, \frac{5}{2}]$

【解析】：（I）由题设条件知 $f(x)$ 的周期 $T = \pi$ ，即 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ，解得 $\omega = 2$

因 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处取得最大值 2，所以 $A = 2$ ，从而 $\sin(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = 1$ ，

所以 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，又由 $-\pi < \varphi < \pi$ 得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$

故 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$

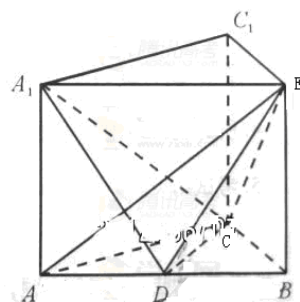
$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad g(x) &= \frac{6\cos^4 x - \sin^2 x - 1}{2\sin(2x + \frac{\pi}{2})} = \frac{6\cos^4 x + \cos^2 x - 2}{2\cos 2x} = \frac{(2\cos^2 x - 1)(3\cos^2 x + 2)}{2(2\cos^2 x - 1)} \\
 &= \frac{3}{2}\cos^2 x + 1 \quad (\cos^2 x \neq \frac{1}{2}) \text{ 因 } \cos^2 x \in [0, 1], \text{ 且 } \cos^2 x \neq \frac{1}{2} \\
 \text{故 } g(x) \text{ 的值域为 } &[1, \frac{7}{4}) \cup (\frac{7}{4}, \frac{5}{2}]
 \end{aligned}$$

(20) (本小题满分 12 分, (I) 小问 4 分, (II) 小问 8 分) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=4$, $AC=BC=3$, D 为 AB 的中点。(I) 求异面直线 CC_1 和 AB 的距离;

(II) 若 $AB_1 \perp A_1C$, 求二面角 A_1-CD-B_1 的平面角的余弦值。

【答案】: (I) (II) $\frac{1}{3}$

【解析】: (I) 如图 1, 因 $AC=BC$, D 为 AB 的中点, 故 $CD \perp AB$ 。又直三棱柱中, $CC_1 \perp$ 面 ABC , 故 $CC_1 \perp CD$,



所以异面直线 CC_1 和 AB 的距离为 $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{5}$

(II): 由 $CD \perp AB, CD \perp BB_1$, 故 $CD \perp$ 面 A_1ABB_1 , 从而 $CD \perp DA_1$, $CD \perp DB_1$ 故 $\angle A_1DB_1$ 为所求的二面角 A_1-CD-B_1 的平面角。

因 A_1D 是 A_1C 在面 A_1ABB_1 上的射影, 又已知 $AB_1 \perp A_1C$, 由三垂线定理的逆定理得

$AB_1 \perp A_1D$, 从而 $\angle A_1AB_1$, $\angle A_1DA$ 都与 $\angle B_1AB$ 互余, 因此 $\angle A_1AB_1 = \angle A_1DA$, 所以

$$Rt\triangle A_1AD \cong Rt\triangle B_1A_1A, \text{ 因此 } \frac{AA_1}{AD} = \frac{A_1B_1}{AA_1} \text{ 得 } AA_1^2 = AD \cdot A_1B_1 = 8$$

$$\text{从而 } A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}, B_1D = A_1D = 2\sqrt{3}$$

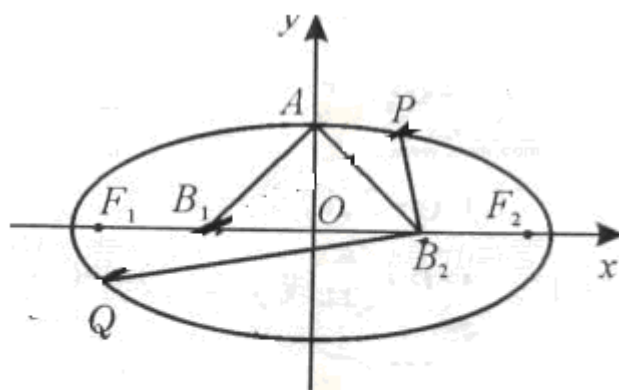
所以在 $\triangle A_1DB_1$ 中, 由余弦定理得

$$\cos A_1DB_1 = \frac{A_1D^2 + DB_1^2 - A_1B_1^2}{2A_1D \cdot DB_1} = \frac{1}{3}$$

(21) (本小题满分 12 分, (I) 小问 5 分,

(II) 小问 7 分)

已知椭圆的中心为原点 O , 长轴在 x 轴



上，上顶点为 A ，左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，线段 OF_1, OF_2 的中点分别为 B_1, B_2 ，且 $\triangle AB_1B_2$ 是面积为 4 的直角三角形。（Ⅰ）求该椭圆的离心率和标准方程；（Ⅱ）过 B_1 作直线交椭圆于 P, Q ， $PB_2 \perp QB_2$ ，求 $\triangle PB_2Q$ 的面积

【答案】：（Ⅰ） $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ （Ⅱ） $\frac{16\sqrt{10}}{9}$

【解析】：（Ⅰ）如答（21）图，设所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，

右焦点为 $F_2(c, 0)$ 因 $\triangle AB_1B_2$ 是直角三角形且 $|AB_1| = |AB_2|$ ，故 $\angle B_1AB_2$ 为直角，从而

$|OA| = |OB_2|$ ，即 $b = \frac{c}{2}$ ，结合 $c^2 = a^2 - b^2$ 得 $4b^2 = a^2 - b^2$ 。故 $a^2 = 5b^2$ ， $c^2 = 4b^2$

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，在 $Rt\triangle AB_1B_2$ 中， $OA \perp B_1B_2$ 故

$$S_{\triangle AB_1B_2} = \frac{1}{2} \cdot |B_1B_2| \cdot |OA| = |OB_2| \cdot |OA| = \frac{c}{2} \cdot b = b^2$$

由题设条件 $S_{\triangle AB_1B_2} = 4$ 得 $b^2 = 4$ ，从而 $a^2 = 5b^2 = 20$ 因此所求 椭圆的标准方程为：

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $B_1(-2, 0), B_2(2, 0)$ ，由题意，直线 PQ 的倾斜角不为 0，故可设直线 PQ

的方程为 $x = my - 2$ ，代入椭圆方程 $(m^2 + 5)y^2 - 4my - 16 = 0$ (*) 设

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，则 y_1, y_2 是上面方程的两根，因此

$y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2 + 5}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-16}{m^2 + 5}$ 又 $\overrightarrow{B_1P} = (x_1 - 2, y_1), \overrightarrow{B_2P} = (x_2 - 2, y_2)$ ，所以

$$\overrightarrow{B_1P} \cdot \overrightarrow{B_2P} = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = (my_1 - 4)(my_2 - 4) + y_1 y_2 = (m^2 + 1)y_1 y_2$$

$$-4m(y_1 + y_2) + 16 = \frac{-16(m^2 + 1)}{m^2 + 5} - \frac{16m^2}{m^2 + 5} + 16 = -\frac{16m^2 - 64}{m^2 + 5} \text{ 由 } PB_2 \perp QB_2, \text{ 知}$$

$$\overrightarrow{B_2P} \cdot \overrightarrow{B_2Q} = 0, \text{ 即 } 16m^2 - 64 = 0, \text{ 解得 } m = \pm 2$$

当 $m = 2$ 时, 方程 (*) 化为: $9y^2 - 8y - 16 = 0$

$$\text{故 } y_1 = \frac{4 + 4\sqrt{10}}{9}, y_2 = \frac{4 - 4\sqrt{10}}{9}, |y_1 - y_2| = \frac{8\sqrt{10}}{9}$$

$$\square PB_2Q \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |B_1B_2| |y_1 - y_2| = \frac{16\sqrt{10}}{9} \text{ 当 } m = -2 \text{ 时, 同理可得 (或由对称性可}$$

$$\text{得) } \square PB_2Q \text{ 的面积 } S = \frac{16\sqrt{10}}{9} \text{ 综上所述, } \square PB_2Q \text{ 的面积为 } \frac{16\sqrt{10}}{9}.$$