2015年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）（理科）

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知$\dfrac{(1-i)^2}{z}=1+i$（i为虚数单位），则复数$z=$（　　）

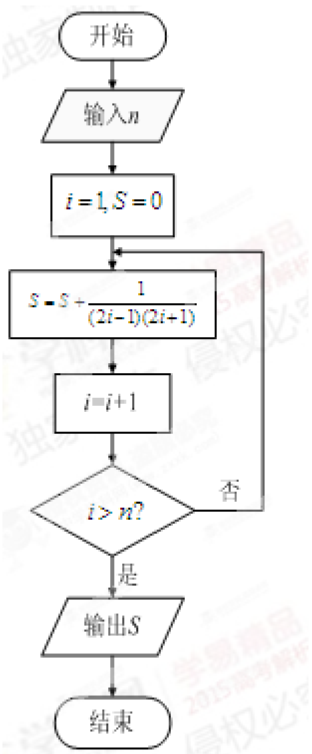
A.$1+i$　　　　B.$1-i$　　　　C.$-1+i$　　　　D.$-1-i$

2.设A，B是两个集合，则“$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的（　　）

A.充分不必要条件　　　B.必要不充分条件　　　C.充要条件　　　D.既不充分也不必要条件

3.执行如图所示的程序框图，如果输入$n=3$，则输出的$S=$(　　)

A.$\dfrac{6}{7}$　　　　B.$\dfrac{3}{7}$　　　　C.$\dfrac{8}{9}$　　　　D.$\dfrac{4}{9}$



4.若变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\ge -1\\2x-y\le 1\\y\le 1\end{cases}$，则$z=3x-y$的最小值为（　　）

A.-7　　　　B.-1　　　　C.1　　　　D.2

5.设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，则 $f(x)$ 是（　　）

A.奇函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数　B. 奇函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

C. 偶函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数　D. 偶函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

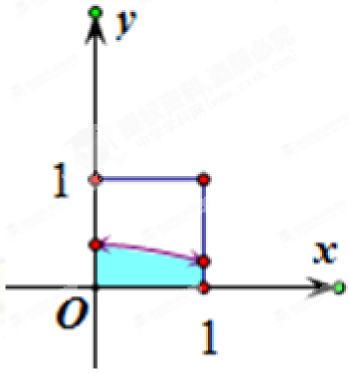
6.已知 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30，则 $a=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　B. $-\sqrt{3}$　C.6　D-6

7.在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点，则落入阴影部分（曲线 C 为正态分布 N(0,1)的密度曲线）的点的个数的估计值为（　　）

A.2386　B.2718　C.3413　D.4772

附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9544$



8.已知点 A，B，C 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，且 $AB\perp BC$，若点 P 的坐标为 $(2,0)$，则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ 的最大值为（　　）

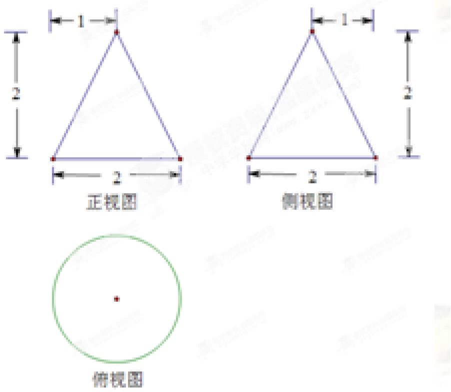
A.6　B.7　C.8　D.9

9.将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\varphi(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像，若对满足 $|f(x_1)-g(x_2)|=2$ 的 x_1，x_2，有 $|x_1-x_2|_{\min}=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\varphi=$（　　）

A. $\dfrac{5\pi}{12}$　B. $\dfrac{\pi}{3}$　C. $\dfrac{\pi}{4}$　D. $\dfrac{\pi}{6}$

10.某工件的三视图如图 3 所示，现将该工件通过切割，加工成一个体积尽可能大的长方体新工件，并使新工件的一个面落在原工件的一个面内，则原工件材料的利用率为（材料利用率=$\dfrac{新工件的体积}{原工件的体积}$）（　　）

A. $\dfrac{8}{9\pi}$　　B. $\dfrac{16}{9\pi}$　　C. $\dfrac{4(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$　　D. $\dfrac{12(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$



二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.$\int_0^2 (x-1)dx=$________.

12.在一次马拉松比赛中，35 名运动员的成绩（单位：分钟）的茎叶图如图所示，若将运动员按成绩由好到差编为$1\sim35$号，再用系统抽样方法从中抽取 7 人，则其中成绩在区间$[139,151]$上的运动员人数是 ______.

13	0 0 3 4 5 6 6 8 8 8 9
14	1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 5 5 6 6 7 8
15	0 1 2 2 3 3 3

13.设F是双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的一个焦点，若$C$上存在点$P$，使线段$PF$的中点恰为其虚轴的一个端点，则$C$的离心率为________.

14.设S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=1$，且$3S_1$，$2S_2$，S_3成等差数列，则$a_n=$______.

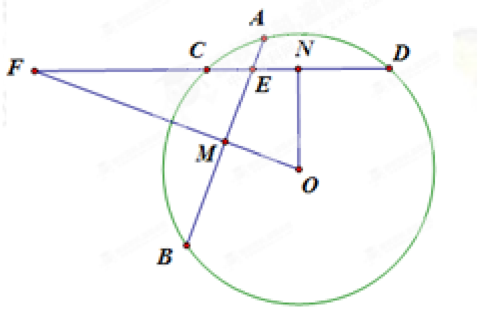
15.已知$f(x)=\begin{cases}x^3, x\le a\\ x^2, x>a\end{cases}$，若存在实数$b$，使函数$g(x)=f(x)-b$有两个零点，则$a$的取值范围是___________.

三．解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（1）如图，在圆O中，相交于点E的两弦AB，CD的中点分别是M，N，直线MO与直线CD相交于点F，证明：

（1）$\angle MEN+\angle NOM=180^\circ$；

（2）　　$FE\cdot FN=FM\cdot FO$



（Ⅱ）已知直线$l:\begin{cases} x=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta$.

（1）　将曲线C的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）　设点M的直角坐标为$(5,\sqrt{3})$，直线l与曲线C的交点为A，B，求$|MA|\cdot|MB|$的值.

（Ⅲ）设$a>0,b>0$，且$a+b=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

（1）$a+b\geq 2$；

（2）$a^2+a<2$与$b^2+b<2$不可能同时成立.

17.设ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$a=b\tan A$，且B为钝角.

（1）证明：$B-A=\dfrac{\pi}{2}$；

（2）求$\sin A+\sin C$的取值范围.

18.某商场举行有奖促销活动，顾客购买一定金额商品后即可抽奖，每次抽奖都从装有4个红球、6个白球

的甲箱和装有5个红球、5个白球的乙箱中，各随机摸出1个球，在摸出的2个球中，若都是红球，则获一等奖；若只有1个红球，则获二等奖；若没有红球，则不获奖.

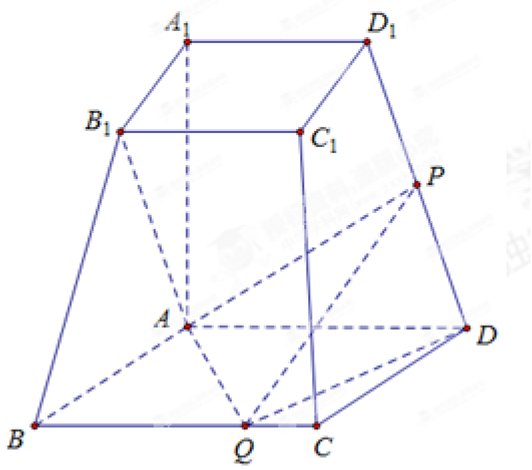
（1）求顾客抽奖1次能获奖的概率；

（2）若某顾客有3次抽奖机会，记该顾客在3次抽奖中获一等奖的次数为X，求X的分布列和数学期望.

19.如图，已知四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$上、下底面分别是边长为3和6的正方形，$AA_1=6$，且$AA_1\perp$底面$ABCD$，点P，Q分别在棱DD_1，BC上.

（1）若P是DD_1的中点，证明：$AB_1\perp PQ$；

（2）若$PQ//$平面ABB_1A_1，二面角$P-QD-A$的余弦值为$\dfrac{3}{7}$，求四面体$ADPQ$的体积.



20.已知抛物线$C_1:x^2=4y$的焦点F也是椭圆$C_2:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点，$C_1$与$C_2$的公共弦

的长为$2\sqrt{6}$.

（1）求C_2的方程；

（2）过点F的直线l与C_1相交于A，B两点，与C_2相交于C，D两点，且$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$同向

（ⅰ）若$|AC|=|BD|$，求直线l的斜率

（ⅱ）设C_1在点A处的切线与x轴的交点为M，证明：直线l绕点F旋转时，ΔMFD总是钝角三角形

21.已知$a>0$，函数$f(x)=e^{ax}\sin x(x\in[0,+\infty))$，记$x_n$为$f(x)$的从小到大的第$n$ $(n\in N^*)$个极值点，证明：

（1）数列$\{f(x_n)\}$是等比数列

（2）若$a\geq\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}$，则对一切$n\in N^*$，$x_n<|f(x_n)|$恒成立.