

2014年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷文科）

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | (x+1)(x-2) \leq 0\}$ ，集合 B 为整数集，则 $A \cap B = (\quad)$
- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

【答案】D

【解析】

试题分析： $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $\therefore A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 选D.

【考点定位】集合的基本运算.

2. 在“世界读书日”前夕，为了了解某地 5000 名居民某天的阅读时间，从中抽取了 200 名居民的阅读时间进行统计分析。在这个问题中，5000 名居民的阅读时间的全体是（ ）
- A. 总体 B. 个体
C. 样本的容量 D. 从总体中抽取的一个样本

【答案】A

【解析】

试题分析：从 5000 份中抽取 200 份，样本的容量是 200，抽取的 200 份是一个样本，每个居民学科网的阅读时间就是一个个体，5000 名居民的阅读时间的全体是总体. 所以选A.

【考点定位】统计基本概念.

3. 为了得到函数 $y = \sin(x+1)$ 的图象，只需把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有的点（ ）
- A. 向左平行移动 1 个单位长度 B. 向右平行移动 1 个单位长度
C. 向左平行移动 π 个单位长度 D. 向右平行移动 π 个单位长度

【答案】A

【解析】

试题分析：只需把 $y = \sin x$ 的图象上所有的点向左平移 1 个单位，便得函数 $y = \sin(x+1)$ 的图象. 选A.

【考点定位】三角函数图象的变换.

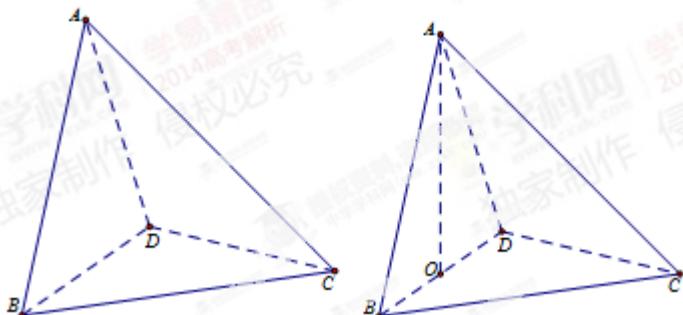
4. 某三棱锥的侧视图、俯视图如图所示，则该三棱锥的体积是（ ）（锥体体积公式： $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 为底面面积， h 为高）学科网
- A. 3 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1



【答案】D

【解析】

试题分析：根据所给侧视图和俯视图，该三棱锥的直观图如下图所示。从俯视图可知，三棱锥的顶点 A 在底面内的投影 O 为边 BD 的中点，所以 AO 即为三棱锥的高，其体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \sqrt{3} = 1$ 。选 D。



【考点定位】三角函数图象的变换。

5. 若 $a > b > 0$, $c < d < 0$, 则一定有 ()

- A. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ B. $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ C. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ D. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

【答案】B

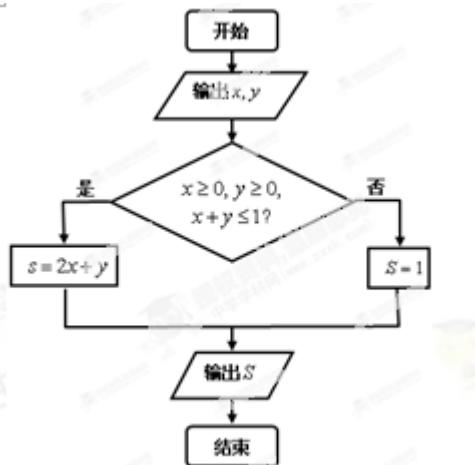
【解析】

试题分析： $\because c < d < 0$, $\therefore -c > -d > 0$, $-\frac{1}{d} > -\frac{1}{c} > 0$, 又 $a > b > 0$, $\therefore -\frac{a}{d} > -\frac{b}{c} > 0$, $\therefore \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ 。选 B

【考点定位】不等式的基本性质。

6. 执行如图 1 所示的程序框图，如果输入的 $x, y \in R$ ，则输出的 S 的最大值为 ()

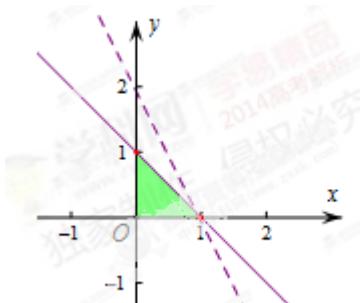
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



【答案】C

【解析】

试题分析：该程序执行以下运算：已知 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ ，求 $S = 2x + y$ 的最大值。作出 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ 表示的区域如图所示，由图可知，当 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 时， $S = 2x + y$ 最大，最大值为 $S = 2 + 0 = 2$ 。选 C。



【考点定位】程序框图与线性规划。

7. 已知 $b > 0$ ， $\log_5 b = a$ ， $\lg b = c$ ， $5^d = 10$ ，则下列等式一定成立的是（ ）

- A、 $d = ac$ B、 $a = cd$ C、 $c = ad$ D、 $d = a + c$

【答案】B

【解析】

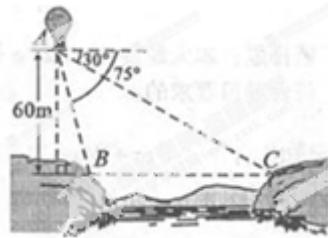
试题分析： $\log_5 b = a, \lg b = c$ 相除得 $\frac{\log_5 b}{\lg b} = \frac{a}{c}, \log_5 10 = \frac{a}{c}$ ，又 $5^d = 10, \therefore \log_5 10 = d$ ，所以

$$d = \frac{a}{c} \Rightarrow cd = a \text{ 选 B.}$$

【考点定位】指数运算与对数运算。

8. 如图，从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B，C 的俯角分别为 75° ， 30° ，此时气球的高是 60m，则河流的宽度 BC 等于（ ）

- A. $240(\sqrt{3}-1)m$ B. $180(\sqrt{2}-1)m$ C. $120(\sqrt{3}-1)m$ D. $30(\sqrt{3}+1)m$



【答案】C.

【解析】

试题分析: $AC = 120$, $AB = \frac{60}{\sin 75^\circ}$, $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$,

所以 $BC = \frac{AB \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{60 \times \sqrt{2}}{\sin(30^\circ + 45^\circ)} = 120(\sqrt{3}-1)$. 选 C

【考点定位】解三角形.

9. 设 $m \in R$, 过定点 A 的动直线 $x + my = 0$ 和过定点 B 的动直线 $mx - y - m + 3 = 0$ 交于点 $P(x, y)$, 则

$|PA| + |PB|$ 的取值范围是 () 学科网

- A、 $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$ B、 $[\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$ C、 $[\sqrt{10}, 4\sqrt{5}]$ D、 $[2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$

【答案】B

【解析】

试题分析: 易得 $A(0, 0), B(1, 3)$. 设 $P(x, y)$, 则消去 m 得: $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$, 所以点 P 在以 AB 为直径的圆上, $PA \perp PB$, 所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = 10$, 令 $|PA| = \sqrt{10} \sin \theta, |PB| = \sqrt{10} \cos \theta$, 则

$|PA| + |PB| = \sqrt{10} \sin \theta + \sqrt{10} \cos \theta = 2\sqrt{5} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$. 因为 $|PA| \geq 0, |PB| \geq 0$, 所以 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 所以

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 1, \quad \sqrt{10} \leq |PA| + |PB| \leq 2\sqrt{5} \text{ 选 B.}$$

法二、因为两直线的斜率互为负倒数, 所以 $PA \perp PB$, 点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆以下同法一.

【考点定位】1、直线与圆; 2、三角代换.

10. 已知 F 是抛物线 $y^2 = x$ 的焦点, 点 A, B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$ (其中 O 为坐标原点), 则 ΔABO 与 ΔAFO 面积之和的最小值是 ()

- A. 2 B. 3 C. $\frac{17\sqrt{2}}{8}$ D. $\sqrt{10}$

【答案】B

【解析】

试题分析: 据题意得 $F(\frac{1}{4}, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 = y_1^2, x_2 = y_2^2$, $y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2 = 2, y_1 y_2 = -2$ 或

$y_1y_2=1$, 因为 A, B 位于 x 轴两侧所以 . 所以 $y_1y_2=-2$ 两面积之和为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1| + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times |y_1| = \frac{1}{2}|y_1^2y_2 - y_2^2y_1| + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times |y_1| = |y_2 - y_1| + \frac{1}{8} \times |y_1| = \left| \frac{2}{y_1} + y_1 \right| + \frac{1}{8} \times |y_1| = \left| \frac{2}{y_1} + \frac{9}{8}y_1 \right| \\ &= \left| \frac{2}{y_1} \right| + \left| \frac{9}{8}y_1 \right| \geq 3. \end{aligned}$$

【考点定位】1、抛物线；2、三角形的面积；3、重要不等式.

第II卷 (非选择题 共100分)

注意事项：

必须使用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上题目所示的答题区域内作答。作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚。答在试题卷、草稿纸上无效。

第II卷共 11 小题。

二. 填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的离心率等于 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【解析】

试题分析： $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{4+1}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

【考点定位】双曲线及其离心率.

12. 复数 $\frac{2-2i}{1+i} =$ _____.

【答案】 $-2i$.

【解析】

试题分析： $\frac{2-2i}{1+i} = \frac{2(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -2i$.

【考点定位】复数的基本运算.

13. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的周期为 2 的函数，当 $x \in [-1, 1]$ 时， $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$ ，则

$f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____.

【答案】1

【解析】

试题分析: $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \times \frac{1}{4} + 2 = 1$.

【考点定位】周期函数及分段函数.

14. 平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (4, 2)$, $\vec{c} = m\vec{a} + \vec{b}$ ($m \in R$), 且 \vec{c} 与 \vec{a} 的夹角等于 \vec{c} 与 \vec{b} 的夹角, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2.

【解析】

试题分析: 由题意得: $\frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}| |\vec{a}|} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{c}| |\vec{b}|} \Rightarrow \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \frac{5m+8}{\sqrt{5}} = \frac{8m+20}{2\sqrt{5}} \Rightarrow m=2$.

法二、设起点在原点时, 向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 的终点分别对应点 A、B、C, 显然 OA、OB 关于直线 $y=x$ 对称, 又因为 \vec{c} 与 \vec{a} 的夹角等于 \vec{c} 与 \vec{b} 的夹角, 故点 C 必在直线 $y=x$ 上, 由此可得 $m=2$.

【考点定位】向量的夹角及向量的坐标运算.

15. 以 A 表示值域为 R 的函数组成的集合, B 表示具有如下性质的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: 对于函数 $\varphi(x)$, 存在一个正数 M , 使得函数 $\varphi(x)$ 的值域包含于区间 $[-M, M]$. 例如, 当 $\varphi_1(x) = x^3$, $\varphi_2(x) = \sin x$ 时, $\varphi_1(x) \in A$, $\varphi_2(x) \in B$. 现有如下命题:

- ① 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 则“ $f(x) \in A$ ”的充要条件是“ $\forall b \in R$, $\exists a \in D$, $f(a) = b$ ”;
- ② 若函数 $f(x) \in B$, 则 $f(x)$ 有最大值和最小值;
- ③ 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域相同, 且 $f(x) \in A$, $g(x) \in B$, 则 $f(x) + g(x) \notin B$;
- ④ 若函数 $f(x) = a \ln(x+2) + \frac{x}{x^2+1}$ ($x > -2$, $a \in R$) 有最大值, 则 $f(x) \in B$.

其中的真命题有_____. (写出所有真命题的序号)

【答案】①③④

【解析】

试题分析: 对①, 若对任意的 $b \in R$, 都 $\exists a \in D$, 使得 $f(a) = b$, 则 $f(x)$ 的值域必为 R ; 反之, $f(x)$ 的值域为 R , 则对任意的 $b \in R$, 都 $\exists a \in D$, 使得 $f(a) = b$. 故正确.

对②, 比如函数 $f(x) = x$ ($-1 < x < 1$) 属于 B , 但是它既无最大值也无最小值. 故错误.

对③, 因为 $f(x) \in (-\infty, +\infty)$, 而 $g(x)$ 有界, 故 $f(x) + g(x) \in (-\infty, +\infty)$, 所以 $f(x) + g(x) \notin B$. 故正确.

对④, $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$. 当 $a > 0$ 或 $a < 0$ 时 $a \ln x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x)$ 均无最大值. 所以若 $f(x)$ 有最大值, 则 $a=0$, 此时 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f(x) \in B$. 故正确.

【考点定位】1、新定义; 2、函数的定义域值域.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答须写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 12 分) 一个盒子里装有三张卡片, 分别标记有数字 1, 2, 3, 这三张卡片除标记的数字

外完全相同。随机有放回地抽取3次，每次抽取1张，将抽取的卡片上的数字依次记为 a ， b ， c 。

- (I) 求“抽取的卡片上的数字满足 $a+b=c$ ”的概率；
(II) 求“抽取的卡片上的数字 a ， b ， c 不完全相同”的概率。

【答案】(1) $\frac{1}{9}$ ；(2) $\frac{8}{9}$.

【解析】

试题分析：共有9张卡片，有放回地取3次，则每次都有9种选择，将所有可能结果一一列举出来，共有27种不同的结果。(1) 满足 $a+b=c$ 的结果包括 $(1,1,2), (1,2,3), (2,1,3)$ ，共3种，故所求概率为 $\frac{1}{9}$ ；(2) 根据正难则反的原则，我们可以先考虑其对立事件，即 a, b, c 完全相同的结果，它包括 $(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3)$ ，共3种，故所求概率为 $1 - \frac{3}{27} = \frac{8}{9}$ 。

试题解析：(1) 由题意得， (a, b, c) 的所有可能为：

$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,3), (1,3,1), (1,3,2), (1,3,3),$
 $(2,1,1), (2,1,2), (2,1,3), (2,2,1), (2,2,2), (2,2,3), (2,3,1), (2,3,2), (2,3,3),$
 $(3,1,1), (3,1,2), (3,1,3), (3,2,1), (3,2,2), (3,2,3), (3,3,1), (3,3,2), (3,3,3)$ ，共27种。

设“抽取的卡片上的数字满足 $a+b=c$ ”为事件A，则事件A包括 $(1,1,2), (1,2,3), (2,1,3)$ ，共3种，所以 $P(A) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ 。

因此“抽取的卡片上的数字满足 $a+b=c$ ”的概率为 $\frac{1}{9}$ 。

(2) 设“抽取的卡片上的数字 a, b, c 不完全相同”为事件B，

则事件 \bar{B} 包括 $(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3)$ ，共3种，

所以 $P(B) = 1 - \frac{3}{27} = \frac{8}{9}$ 。

因此“抽取的卡片上的数字 a, b, c 不完全相同”的概率为 $\frac{8}{9}$ 。

【考点定位】古典概型及随机事件的概率。

17. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4})$ 。

- (1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

- (2) 若 α 是第二象限角， $f(\frac{\alpha}{3}) = \frac{4}{5} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cos 2\alpha$ ，求 $\cos \alpha - \sin \alpha$ 的值。

【答案】(1) $-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi (k \in \mathbb{Z})$; (2) $-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【解析】

试题分析:(1)将 $3x+\frac{\pi}{4}$ 看作一个整体,根据正弦函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间便可得 $f(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{4})$

的单调递增区间.(2)将 $\frac{\alpha}{3}$ 代入 $f(\frac{\alpha}{3})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$ 得 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$.求三角函数值时,首先考虑统一角,故利用和角公式和倍角公式化为单角 α 的三角函数得:

$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{5}(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)$.注意这里不能将 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 约了.接下来分 $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$ 和 $\sin \alpha + \cos \alpha \neq 0$ 两种情况求值.

试题解析: (1) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi (k \in \mathbb{Z})$;

(2)由题设得: $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$,

即 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{5}(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)$,

若 $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$, 则 $\cos \alpha - \sin \alpha = -\sqrt{2}$,

若 $\sin \alpha + \cos \alpha \neq 0$, 则 $1 = \frac{4}{5}(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 \Rightarrow \cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

综上得, $\cos \alpha - \sin \alpha$ 的值为 $-\sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

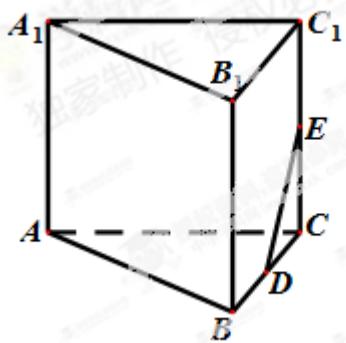
【考点定位】三角函数的性质、三角恒等变换及三角函数的求值.

18. (本小题满分 12 分)

在如图所示的多面体中,四边形 ABB_1A_1 和 ACC_1A_1 都为矩形.

(I) 若 $AC \perp BC$, 证明: 直线 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;

(II) 设 D , E 分别是线段 BC , CC_1 的中点, 在线段 AB 上是否存在一点 M , 使直线 $DE //$ 平面 A_1MC ? 请证明你的结论.

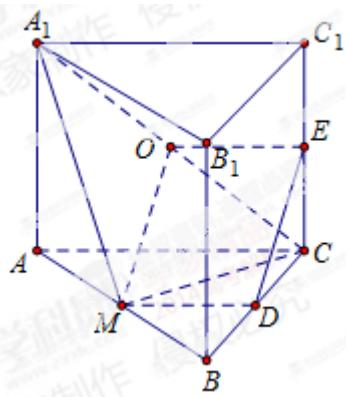


【答案】(1) 证明详见解析; (2) 存在, M 为线段 AB 的中点时, 直线 $DE \parallel$ 平面 A_1MC .

【解析】

试题分析: (1) 证直线垂直平面, 就是证直线垂直平面内的两条相交直线. 已经有 $AC \perp BC$ 了, 那么再在平面内找一条直线与 BC 垂直. 据题意易得, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp BC$. 由此得 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

(2) 首先连结 A_1C , 取 A_1C 的中点 O. 考虑到 D, E 分别是线段 BC , CC_1 的中点, 故在线段 AB 上取中点 M, 易得 $DE \parallel MO$. 从而得直线 $DE \parallel$ 平面 A_1MC .



试题解析: (I) 因为四边形 ABB_1A_1 和 ACC_1A_1 都是矩形,

所以 $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AC$.

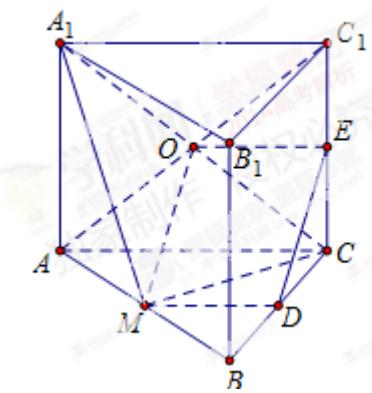
因为 AB , AC 为平面 ABC 内的两条相交直线,

所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC .

因为直线 $BC \subset$ 平面 ABC 内, 所以 $AA_1 \perp BC$.

又由已知, $AC \perp BC$, AA_1, AC 为平面 ACC_1A_1 内的两条相交直线,

所以, $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .



(2) 取线段AB的中点M，连接 A_1M, MC, A_1C, AC_1 ，设O为 A_1C, AC_1 的交点.

由已知，O为 AC_1 的中点.

连接MD, OE，则MD, OE分别为 $\triangle ABC, \triangle ACC_1$ 的中位线.

所以， $MD \parallel \frac{1}{2}AC, OE \parallel \frac{1}{2}AC, \therefore MD \parallel OE$ ，

连接OM，从而四边形MDEO为平行四边形，则 $DE \parallel MO$.

因为直线 $DE \subset$ 平面 A_1MC ， $MO \subset$ 平面 A_1MC ，

所以直线 $DE \parallel$ 平面 A_1MC .

即线段AB上存在一点M(线段AB的中点)，使得直线 $DE \parallel$ 平面 A_1MC .

【考点定位】空间直线与平面的位置关系.

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为d，点 (a_n, b_n) 在函数 $f(x) = 2^x$ 的图象上($n \in N^*$).

(1) 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(2) 若 $a_1 = 1$ ，学科网函数 $f(x)$ 的图象在点 (a_2, b_2) 处的切线在x轴上的截距为 $2 - \frac{1}{\ln 2}$ ，求数列 $\{a_n b_n^2\}$

的前n项和 S_n .

【答案】(1) 详见解析; (2) $T_n = \frac{(3n-1)4^{n+1} + 4}{9}$.

【解析】

试题分析: 据题设可得, $b_n = 2^{a_n}$. (1) 当 $n \geq 1$ 时, 将 b_{n+1}, b_n 相除, 可得商为常数, 从而证得其为等比数列. (2) 首先可求出 $f(x) = 2^x$ 在 (a_2, b_2) 处的切线为 $y - b_2 = 2^{a_2} \ln 2(x - a_2)$, 令 $y = 0$ 得 $-b_2 = (2^{a_2} \ln 2) \times (x - a_2)$, $x = a_2 - \frac{1}{\ln 2}$, ∵ $a_2 = 2$, 由此可求出 $a_n = n$, $b_n = 2^n$. 所以 $a_n b_n^2 = n \cdot 4^n$, 这个数列用错位相消法可得前 n 项和 T_n .

试题解析: (1) 由已知, $b_n = 2^{a_n} > 0$.

当 $n \geq 1$ 时, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2^{a_{n+1}-a_n} = 2^d$.

所以, 数列是首项为 2^a , 公比为 2^d 的等比数列.

(2) $f(x) = 2^x$ 求导得 $f'(x) = 2^x \ln 2$, 所以 $f(x) = 2^x$ 在 (a_2, b_2) 处的切线为 $y - b_2 = 2^{a_2} \ln 2(x - a_2)$, 令 $y = 0$ 得 $-b_2 = (2^{a_2} \ln 2) \times (x - a_2)$, $x = a_2 - \frac{1}{\ln 2}$, ∵ $a_2 = 2$,

所以 $d = 2 - 1 = 1$, ∵ $a_n = n$, $b_n = 2^n$. 所以 $a_n b_n^2 = n \cdot 4^n$,

其前 n 项和: $T_n = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \cdots + (n-1) \cdot 4^{n-1} + n \cdot 4^n$ ①

两边乘以 4 得: $4T_n = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 + \cdots + (n-1) \cdot 4^n + n \cdot 4^{n+1}$ ②

① - ② 得: $T_n - 4T_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n - n \cdot 4^{n+1} = \frac{4^{n+1} - 4}{3} - n \cdot 4^{n+1}$, 所以 $T_n = \frac{(3n-1)4^{n+1} + 4}{9}$.

【考点定位】 等差数列与等比数列及其前 n 项和, 导数的几何意义.

20. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F(-2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 O 为坐标原点, T 为直线 $x = -3$ 上任意一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q. 当四边形 OPTQ 是平行四边形时, 求四边形 OPTQ 的面积.

【答案】(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$; (2) $2\sqrt{3}$

【解析】

试题分析: (1) 由已知得: $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $c = 2$, 所以 $a = \sqrt{6}$, 再由 $a^2 = b^2 + c^2$ 可得 b , 从而得椭圆的标准方程.

(2) 椭圆方程化为 $x^2 + 3y^2 = 6$. 设 PQ 的方程为 $x = my - 2$, 代入椭圆方程得: $(m^2 + 3)y^2 - 4my - 2 = 0$.

面积 $S_{OPTQ} = 2S_{OPQ} = 2 \times \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2|$, 而 $|y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{\left(\frac{4m}{m^2+3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-2}{m^2+3}}$, 所以只要求出 m 的值即可得面积. 因为四边形 OPTQ 是平行四边形, 所以 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QT}$, 即 $(x_1, y_1) = (-3 - x_2, m - y_2)$.

再结合韦达定理即可得 m 的值.

试题解析: (1) 由已知得: $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $c = 2$, 所以 $a = \sqrt{6}$

又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得 $b = \sqrt{2}$, 所以椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 椭圆方程化为 $x^2 + 3y^2 = 6$.

设 T 点的坐标为 $(-3, m)$, 则直线 TF 的斜率 $k_{TF} = \frac{m-0}{-3-(-2)} = -m$.

当 $m \neq 0$ 时, 直线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = \frac{1}{m}$, 直线 PQ 的方程是 $x = my - 2$

当 $m = 0$ 时, 直线 PQ 的方程是 $x = -2$, 也符合 $x = my - 2$ 的形式.

将 $x = my - 2$ 代入椭圆方程得: $(m^2 + 3)y^2 - 4my - 2 = 0$.

其判别式 $\Delta = 16m^2 + 8(m^2 + 3) > 0$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2+3}$, $y_1 y_2 = \frac{-2}{m^2+3}$, $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) - 4 = \frac{-12}{m^2+3}$.

因为四边形 OPTQ 是平行四边形, 所以 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QT}$, 即 $(x_1, y_1) = (-3 - x_2, m - y_2)$.

所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-12}{m^2+3} = -3 \\ y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2+3} = m \end{cases}$, 解得 $m = \pm 1$.

此时四边形 OPTQ 的面积

$$S_{OPTQ} = 2S_{OPQ} = 2 \times \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = 2 \sqrt{\left(\frac{4m}{m^2+3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-2}{m^2+3}} = 2\sqrt{3}.$$

【考点定位】1、直线及椭圆的方程；2、直线与圆锥曲线的位置关系；3、三角形的面积.

21. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1$, 其中 $a, b \in R$, $e = 2.71828\cdots$ 为自然对数的底数。

(I) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值;

(II) 若 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点, 证明: $e - 2 < a < 1$.

【答案】(I) 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \geq g(0) = 1 - b$; 当 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e}{2}$ 时, $g(x) \geq 2a - 2a\ln(2a) - b$;

当 $a > \frac{e}{2}$ 时, $g(x) \geq e - 2a - b$. (II) a 的范围为 $(0,1)$.

【解析】

试题分析: (I) 易得 $g(x) = e^x - 2ax - b$, $g'(x) = e^x - 2a$, 再对分 a 情况确定 $g(x)$ 的单调区间, 根据 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性即可得 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值. (II) 设 x_0 为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的一个零点, 注意到 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. 联系到函数的学科网图象可知, 导函数 $g(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 内存在零点 x_1 , $g(x)$ 在区间 $(x_0, 1)$ 内存在零点 x_2 , 即 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有两个零点. 由(I) 可知, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 及 $a \geq \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$

在 $(0,1)$ 内都不可能有两个零点. 所以 $\frac{1}{2} < a < \frac{e}{2}$. 此时, $g(x)$ 在 $[0, \ln 2a]$ 上单调递减, 在 $[\ln 2a, 1]$ 上单调递增, 因此 $x_1 \in (0, \ln(2a)]$, $x_2 \in (\ln(2a), 1)$, 且必有 $g(0) = 1 - b > 0$, $g(1) = e - 2a - b > 0$. 由 $f(1) = e - a - b - 1 = 0$ 得: $b = e - a - 1$, 代入这两个不等式即可得 a 的取值范围.

试题解析: (I) $g(x) = e^x - 2ax - b$, $g'(x) = e^x - 2a$

① 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) = e^x - 2a > 0$, 所以 $g(x) \geq g(0) = 1 - b$.

② 当 $a > 0$ 时, 由 $g'(x) = e^x - 2a > 0$ 得 $e^x > 2a$, $x > \ln(2a)$.

若 $a > \frac{1}{2}$, 则 $\ln(2a) > 0$; 若 $a > \frac{e}{2}$, 则 $\ln(2a) > 1$.

所以当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(0) = 1 - b$.

当 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[0, \ln 2a]$ 上单调递减, 在 $[\ln 2a, 1]$ 上单调递增, 所以

$$g(x) \geq g(\ln 2a) = 2a - 2a \ln 2a - b.$$

当 $a > \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 所以 $g(x) \geq g(1) = e - 2a - b$.

(II) 设 x_0 为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的一个零点, 则由 $f(0) = f(x_0) = 0$ 可知,

$f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上不可能单调递增, 也不可能单调递减.

则 $g(x)$ 不可能恒为正, 也不可能恒为负.

故 $g(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 内存在零点 x_1 .

同理 $g(x)$ 在区间 $(x_0, 1)$ 内存学科网在零点 x_2 .

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有两个零点.

由 (I) 知, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个零点.

当 $a \geq \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个零点.

所以 $\frac{1}{2} < a < \frac{e}{2}$.

此时, $g(x)$ 在 $[0, \ln 2a]$ 上单调递减, 在 $[\ln 2a, 1]$ 上单调递增,

因此 $x_1 \in (0, \ln(2a))$, $x_2 \in (\ln(2a), 1)$, 必有

$$g(0) = 1 - b > 0, g(1) = e - 2a - b > 0.$$

由 $f(1) = e - a - b - 1 = 0$ 得: $a + b = e - 1 < 2$, 有

$$g(0) = 1 - b = a - e + 2 > 0, g(1) = e - 2a - b = 1 - a > 0.$$

解得 $e - 2 < a < 1$.

所以, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点时, $e - 2 < a < 1$.

【考点定位】 导数的应用及函数的零点. 考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识, 考查函数与方程、数形结合、分类与整合、化归与转化等数学思想, 并考查思维的严谨性.