

2017 年上海市春季高考数学试卷

2017.1

一. 填空题 (本大题共 12 题, 满分 54 分, 第 1~6 题每题 4 分, 第 7~12 题每题 5 分)

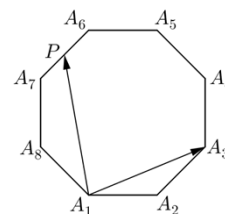
1. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{3, 4\}$, 则 $A \cup B =$ _____;
2. 不等式 $|x - 1| < 3$ 的解集为 _____;
3. 若复数 z 满足 $2\bar{z} - 1 = 3 + 6i$ (i 是虚数单位), 则 $z =$ _____;
4. 若 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ _____;
5. 若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + ay = 6 \end{cases}$ 无解, 则实数 $a =$ _____;
6. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项的和为 25, 则 $a_1 + a_5 =$ _____;
7. 若 P 、 Q 是圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ 上的动点, 则 $|PQ|$ 的最大值为 _____;
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{a_n} =$ _____;
9. 若 $(x + \frac{2}{x})^n$ 的二项展开式的各项系数之和为 729, 则该展开式中常数项的值为 _____;
10. 设椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 点 P 在该椭圆上, 则使得 $\triangle F_1 F_2 P$ 是等腰三角形的点 P 的个数是 _____;
11. 设 a_1 、 a_2 、 \cdots 、 a_6 为 1、2、3、4、5、6 的一个排列, 则满足 $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + |a_5 - a_6| = 3$ 的不同排列的个数为 _____;
12. 设 a 、 $b \in \mathbb{R}$, 若函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + b$ 在区间 $(1, 2)$ 上有两个不同的零点, 则 $f(1)$ 的取值范围为 _____;

二. 选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 函数 $f(x) = (x - 1)^2$ 的单调递增区间是 ()
A. $[0, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 1]$
14. 设 $a \in \mathbb{R}$, “ $a > 0$ ” 是 “ $\frac{1}{a} > 0$ ” 的 () 条件
A. 充分非必要 B. 必要非充分 C. 充要 D. 既非充分也非必要
15. 过正方体中心的平面截正方体所得的截面中, 不可能的图形是 ()
A. 三角形 B. 长方形 C. 对角线不相等的菱形 D. 六边形

16. 如图所示，正八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的边长为 2，若 P 为该正八边形边上的动点，则 $\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1P}$ 的取值范围为 ()

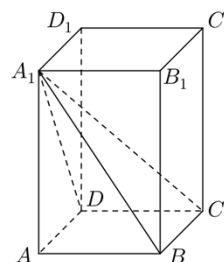
- A. $[0, 8+6\sqrt{2}]$ B. $[-2\sqrt{2}, 8+6\sqrt{2}]$
C. $[-8-6\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ D. $[-8-6\sqrt{2}, 8+6\sqrt{2}]$



三. 解答题 (本大题共 5 题, 共 14+14+14+16+18=76 分)

17. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2$ ， $AA_1=3$ ；

- (1) 求四棱锥 A_1-ABCD 的体积；
(2) 求异面直线 A_1C 与 DD_1 所成角的大小；



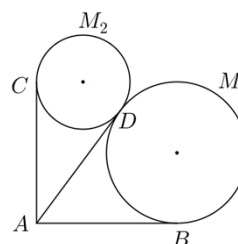
18. 设 $a \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1}$ ；

- (1) 求 a 的值，使得 $f(x)$ 为奇函数；
(2) 若 $f(x) < \frac{a+2}{2}$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立，求 a 的取值范围；

19. 某景区欲建造两条圆形观景步道 M_1 、 M_2 (宽度忽略不计)，如图所示，已知 $AB \perp AC$ ， $AB=AC=AD=60$ (单位：米)，要求圆 M_1 与 AB 、 AD 分别相切于点 B 、 D ，圆 M_2 与 AC 、 AD 分别相切于点 C 、 D ；

- (1) 若 $\angle BAD = 60^\circ$ ，求圆 M_1 、 M_2 的半径 (结果精确到 0.1 米)
(2) 若观景步道 M_1 与 M_2 的造价分别为每米 0.8 千元与每米 0.9 千元，如何设计圆 M_1 、

M_2 的大小，使总造价最低？最低总造价是多少？ (结果精确到 0.1 千元)



20. 已知双曲线 $\Gamma: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$, 直线 $l: y = kx + m (km \neq 0)$, l 与 Γ 交于 P 、

Q 两点, P' 为 P 关于 y 轴的对称点, 直线 $P'Q$ 与 y 轴交于点 $N(0, n)$:

(1) 若点 $(2, 0)$ 是 Γ 的一个焦点, 求 Γ 的渐近线方程;

(2) 若 $b = 1$, 点 P 的坐标为 $(-1, 0)$, 且 $\overrightarrow{NP'} = \frac{3}{2} \overrightarrow{P'Q}$, 求 k 的值;

(3) 若 $m = 2$, 求 n 关于 b 的表达式;

21. 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$;

(1) 解方程 $f(x) = 1$;

(2) 设 $x \in (-1, 1)$, $a \in (1, +\infty)$, 证明: $\frac{ax-1}{a-x} \in (-1, 1)$, 且 $f(\frac{ax-1}{a-x}) - f(x) = -f(\frac{1}{a})$;

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 中, $x_1 \in (-1, 1)$, $x_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{3x_n - 1}{3 - x_n}$, $n \in N^*$, 求 x_1 的取值范围, 使得 $x_3 \geq x_n$ 对任意 $n \in N^*$ 成立;

参考答案

一. 填空题

1. $\{1, 2, 3, 4\}$ 2. $(-2, 4)$ 3. $2-3i$ 4. $-\frac{1}{3}$ 5. 6 6. 10
7. 2 8. $\frac{3}{2}$ 9. 160 10. 6 11. 48 12. $(0, 1)$

二. 选择题

13. D 14. C 15. A 16. B

三. 解答题

17. (1) 4; (2) $\arctan \frac{2\sqrt{2}}{3}$;
18. (1) $a = -1$; (2) $[0, 2]$;
19. (1) M_1 半径 34.6, M_2 半径 16.1; (2) M_1 半径 30, M_2 半径 20, 造价 42.0 千元;
20. (1) $y = \pm\sqrt{3}x$; (2) $k = \pm\frac{1}{2}$; (3) 略;
21. (1) $x = \frac{1}{3}$; (2) 略; (3) 略;