绝密★启用前

2019年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

答案解析版

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $M=\left\{x\left|-4<x<2\right.\right\}$，$N=\{x\left|x^2-x-6<0\right.\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x|-4<x<3\}$　　B. $\{x|-4<x<-2\}$　　C. $\{x|-2<x<2\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查集合的交集和一元二次不等式的解法，渗透了数学运算素养．采取数轴法，利用数形结合的思想解题．

【详解】由题意得，$M=\left\{x\left|-4<x<2\right.\right\},N=\left\{x\left|-2<x<3\right.\right\}$，则

$M\cap N=\left\{x\left|-2<x<2\right.\right\}$．故选C．

【点睛】不能领会交集的含义易致误，区分交集与并集的不同，交集取公共部分，并集包括二者部分．

2.设复数z满足$\left|z-\mathrm{i}\right|=1$，$z$在复平面内对应的点为$(x，y)$，则

A. $(x+1)^2+y^2=1$　　B. $(x-1)^2+y^2=1$　　C. $x^2+(y-1)^2=1$　　D. $x^2+(y+1)^2=1$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考点为复数的运算，为基础题目，难度偏易．此题可采用几何法，根据点（x，y）和点(0，1)之间的距离为1，可选正确答案C．

【详解】$z=x+yi, z-i==x+(y-1)i, |z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$, 则 $x^2+(y-1)^2=1$．故选C．

【点睛】本题考查复数的几何意义和模的运算，渗透了直观想象和数学运算素养．采取公式法或几何法，利用方程思想解题．

3.已知 $a=\log_2 0.2, b=2^{0.2}, c=0.2^{0.3}$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

【答案】B

【解析】

【分析】

运用中间量0比较 a，c，运用中间量1比较 b，c

【详解】$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0, b=2^{0.2}>2^0=1, 0<0.2^{0.3}<0.2^0=1$, 则

$0<c<1, a<c<b$．故选B．

【点睛】本题考查指数和对数大小的比较，渗透了直观想象和数学运算素养．采取中间变量法，利用转化与化归思想解题．

4.古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$≈0.618，称为黄金分割比例)，著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为105cm，头顶至脖子下端的长度为26 cm，则其身高可能是

A. 165 cm　　B. 175 cm　　C. 185 cm　　D. 190cm

【答案】B

【解析】

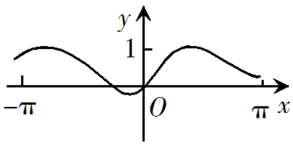
【分析】

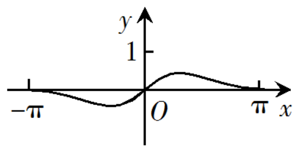
理解黄金分割比例的含义，应用比例式列方程求解．

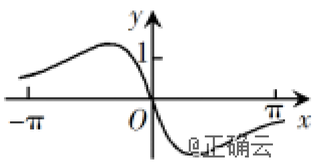
【详解】设人体脖子下端至腿根的长为x cm，肚脐至腿根的长为y cm，则$\frac{26}{x}=\frac{26+x}{y+105}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，得$x\approx 42.07cm, y\approx 5.15cm$．又其腿长为105cm，头顶至脖子下端的长度为26cm，所以其身高约为42．07+5．15+105+26=178．22，接近175cm．故选B．

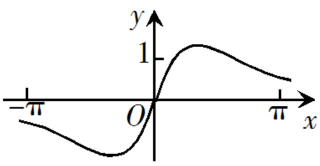
【点睛】本题考查类比归纳与合情推理，渗透了逻辑推理和数学运算素养．采取类比法，利用转化思想解题．

5.函数$f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$在[—π，π]的图像大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【分析】

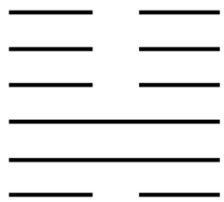
先判断函数的奇偶性，得$f(x)$是奇函数，排除A，再注意到选项的区别，利用特殊值得正确答案．

【详解】由 $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)+(-x)}{\cos(-x)+(-x)^2}=\dfrac{-\sin x-x}{\cos x+x^2}=-f(x)$，得 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称．又 $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1+\dfrac{\pi}{2}}{(\dfrac{\pi}{2})^2}=\dfrac{4+2\pi}{\pi^2}>1,\ f(\pi)=\dfrac{\pi}{-1+\pi^2}>0$．故选D．

【点睛】本题考查函数的性质与图象，渗透了逻辑推理、直观想象和数学运算素养．采取性质法或赋值法，利用数形结合思想解题．

6.我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —

”，如图就是一重卦．在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有3个阳爻的概率是



A. $\dfrac{5}{16}$　　B. $\dfrac{11}{32}$　　C. $\dfrac{21}{32}$　　D. $\dfrac{11}{16}$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查利用两个计数原理与排列组合计算古典概型问题，渗透了传统文化、数学计算等数学素养，“重卦”中每一爻有两种情况，基本事件计算是住店问题，该重卦恰有3个阳爻是相同元素的排列问题，利用直接法即可计算．

【详解】由题知，每一爻有2中情况，一重卦的6爻有 2^6 情况，其中6爻中恰有3个阳爻情况有 C_6^3，所以该重卦恰有3个阳爻的概率为 $\dfrac{C_6^3}{2^6}=\dfrac{5}{16}$，故选A．

【点睛】对利用排列组合计算古典概型问题，首先要分析元素是否可重复，其次要分析是排列问题还是组合问题．本题是重复元素的排列问题，所以基本事件的计算是“住店”问题，满足条件事件的计算是相同元素的排列问题即为组合问题．

7.已知非零向量**a**，**b**满足 $|a|=2|b|$，且（**a** -**b**）⊥**b**，则**a**与**b**的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

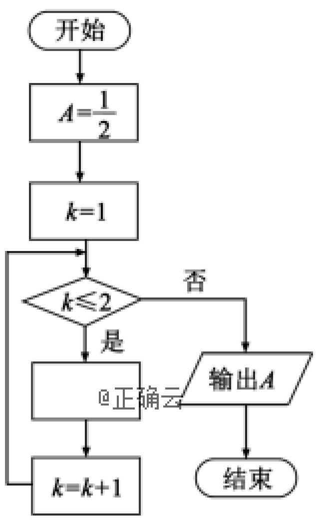
【分析】

本题主要考查利用平面向量数量积数量积计算向量长度、夹角与垂直问题，渗透了转化与化归、数学计算等数学素养．先由$(a-b)\perp b$得出向量a,b的数量积与其模的关系，再利用向量夹角公式即可计算出向量夹角．

【详解】因为$(a-b)\perp b$，所以$(a-b)\cdot b=a\cdot b-b^2$=0，所以$a\cdot b=b^2$，所以$\cos\theta=$ $\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{|b|^2}{2|b|^2}=\frac{1}{2}$，所以$a$与$b$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，故选B．

【点睛】对向量夹角的计算，先计算出向量的数量积及各个向量的摸，在利用向量夹角公式求出夹角的余弦值，再求出夹角，注意向量夹角范围为$[0,\pi]$．

8.如图是求$\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$的程序框图，图中空白框中应填入



A. $A=\frac{1}{2+A}$　　B. $A=2+\frac{1}{A}$　　C. $A=\frac{1}{1+2A}$　　D. $A=1+\frac{1}{2A}$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查算法中的程序框图，渗透阅读、分析与解决问题等素养，认真分析式子结构特征与程序框图结构，即可找出作出选择.

【详解】执行第1次，$A=\frac{1}{2},k=1\le 2$ 是，因为第一次应该计算 $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2+A}$，$k=k+1$ =2，循环，执行第2次，$k=2\le 2$，是，因为第二次应该计算 $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2+A}$，$k=k+1$=3，循环，执行第3次，$k=2\le 2$，否，输出，故循环体为 $A=\frac{1}{2+A}$，故选A

.

【点睛】秒杀速解 认真观察计算式子的结构特点，可知循环体为 $A=\frac{1}{2+A}$.

9.记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和．已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则

A. $a_n=2n-5$　　B. $a_n=3n-10$　　C. $S_n=2n^2-8n$　　D. $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

【答案】A

【解析】

【分析】

等差数列通项公式与前n项和公式．本题还可用排除，对B，$a_5=5$，

$S_4=\frac{4(-7+2)}{2}=-10\ne 0$，排除B，对C，

$S_4=0,a_5=S_5-S_4=2\times 5^2-8\times 5-0=10\ne 5$，排除C．对D，

$S_4=0,a_5=S_5-S_4=\frac{1}{2}\times 4^2-2\times 4-0=0\ne 5$，排除D，故选A.

【详解】由题知，$\begin{cases}S_4=4a_1+\frac{d}{2}\times 4\times 3=0\\ a_5=a_1+4d=5\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=-3\\ d=2\end{cases}$，$\therefore a_n=2n-5$，故选A.

【点睛】本题主要考查等差数列通项公式与前n项和公式，渗透方程思想与数学计算等素养．利用等差数列通项公式与前n项公式即可列出关于首项与公差的方程，解出首项与公差，在适当计算即可做了判断.

10.已知椭圆C的焦点为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过F_2的直线与C交于A，B两点.若$|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则C的方程为

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

【答案】B

【解析】

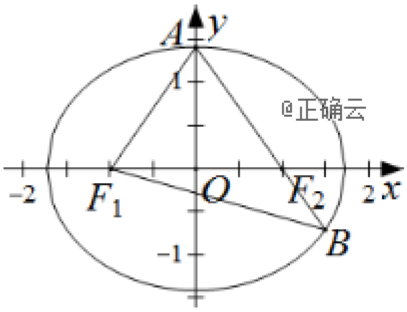
【分析】

可以运用下面方法求解：如图，由已知可设$|F_2B|=n$，则$|AF_2|=2n,|BF_1|=|AB|=3n$，由椭圆的定义有$2a=|BF_1|+|BF_2|=4n,\therefore|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$．在$\triangle AF_1F_2$和$\triangle BF_1F_2$中，由余弦定理得$\begin{cases}4n^2+4-2\cdot2n\cdot2\cdot\cos\angle AF_2F_1=4n^2,\\ n^2+4-2\cdot n\cdot2\cdot\cos\angle BF_2F_1=9n^2\end{cases}$，又$\angle AF_2F_1,\angle BF_2F_1$互补，$\therefore\cos\angle AF_2F_1+\cos\angle BF_2F_1=0$，两式消去$\cos\angle AF_2F_1,\cos\angle BF_2F_1$，得$3n^2+6=11n^2$，解得$n=\frac{\sqrt{3}}{2}$．$\therefore 2a=4n=2\sqrt{3},\therefore a=\sqrt{3},\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2,\therefore$所求椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，故选B.

【详解】如图，由已知可设$|F_2B|=n$，则$|AF_2|=2n,|BF_1|=|AB|=3n$，由椭圆的定义有$2a=|BF_1|+|BF_2|=4n,\therefore|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$．在$\triangle AF_1B$中，由余弦定理推论得$\cos\angle F_1AB=\frac{4n^2+9n^2-9n^2}{2\cdot2n\cdot3n}=\frac{1}{3}$．在$\triangle AF_1F_2$中，由余弦定理得$4n^2+4n^2-2\cdot2n\cdot2n\cdot\frac{1}{3}=4$，解得$n=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore 2a=4n=2\sqrt{3}$, $\therefore a=\sqrt{3}$, $\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2$, $\therefore$所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

故选B．



【点睛】本题考查椭圆标准方程及其简单性质，考查数形结合思想、转化与化归的能力，很好的落实了直观想象、逻辑推理等数学素养．

11.关于函数$f(x)=\sin|x|+|\sin\ x|$有下述四个结论：

①$f(x)$是偶函数　　②$f(x)$在区间（$\dfrac{\pi}{2},\pi$）单调递增

③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$有4个零点　④$f(x)$的最大值为2

其中所有正确结论的编号是

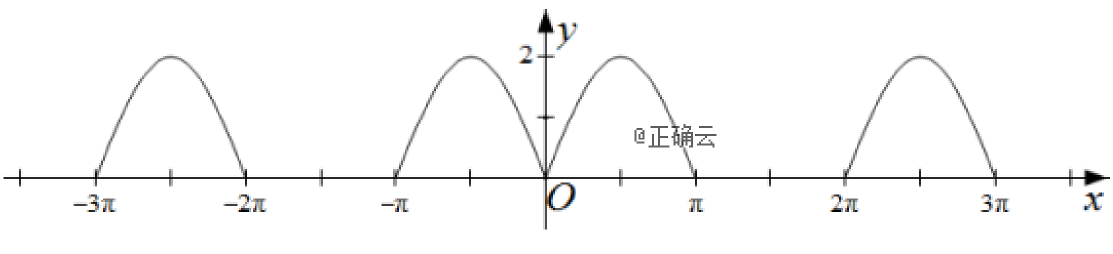
A. ①②④　　B. ②④　　C. ①④　　D. ①③

【答案】C

【解析】

【分析】

画出函数$f\left(x\right)=\sin\left|x\right|+\left|\sin x\right|$的图象，由图象可得①④正确，故选C．



【详解】$\because f\left(-x\right)=\sin\left|-x\right|+\left|\sin\left(-x\right)\right|=\sin\left|x\right|+\left|\sin x\right|=f\left(x\right)$，$\therefore f\left(x\right)$为偶函数，故①正确．当$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$时，$f\left(x\right)=2\sin x$，它在区间$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减，故②错误．当

$0\le x\le \pi$ 时，$f\left(x\right)=2\sin x$，它有两个零点：$0,\pi$；当 $-\pi\le x<0$ 时，

$f\left(x\right)=\sin\left(-x\right)-\sin x=-2\sin x$，它有一个零点：$-\pi$，故 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 有 3 个零点

：$-\pi,0,\pi$，故③错误．当 $x\in\left[2k\pi,2k\pi+\pi\right]\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 时，$f\left(x\right)=2\sin x$；当

$x\in\left[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi\right]\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 时，$f\left(x\right)=\sin x-\sin x=0$，又 $f\left(x\right)$ 为偶函数，

$\therefore f\left(x\right)$ 的最大值为 2，故④正确．综上所述，①④　正确，故选C．

【点睛】化简函数 $f\left(x\right)=\sin\left|x\right|+\left|\sin x\right|$，研究它的性质从而得出正确答案．

12.已知三棱锥*P*-

*ABC*的四个顶点在球*O*的球面上，*PA*=*PB*=*PC*，△*ABC*是边长为2的正三角形，*E*，*F*分别是

PA，*PB*的中点，∠*CEF*=90°，则球*O*的体积为

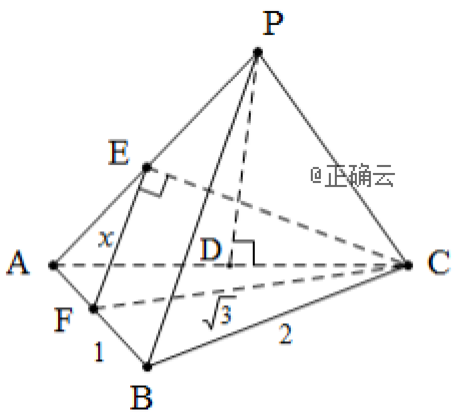
A. $8\sqrt{6}\pi$　　　　B. $4\sqrt{6}\pi$　　　　C. $2\sqrt{6}\pi$　　　　D. $\sqrt{6}\pi$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题也可用解三角形方法，达到求出棱长的目的．适合空间想象能力略差学生．



设 $PA=PB=PC=2x$，E,F 分别为 PA,AB 中点，

$\therefore EF//PB$，且 $EF=\dfrac{1}{2}PB=x$，$\because \Delta ABC$ 为边长为2的等边三角形，

$\therefore CF=\sqrt{3}$ 又 $\angle CEF=90^\circ$ $\therefore CE=\sqrt{3-x^2}$，$AE=\dfrac{1}{2}PA=x$

ΔAEC中余弦定理$\cos\angle EAC=\dfrac{x^2+4-\left(3-x^2\right)}{2\times 2\times x}$，作$PD\perp AC$于$D$，$\because PA=PC$

，

$\because D$为AC中点，$\cos\angle EAC=\dfrac{AD}{PA}=\dfrac{1}{2x}$，$\therefore\dfrac{x^2+4-3+x^2}{4x}=\dfrac{1}{2x}$，

$\therefore 2x^2+1=2\quad\therefore x^2=\dfrac{1}{2}\quad x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore PA=PB=PC=\sqrt{2}$，又$AB=BC=AC=2$，

$\therefore PA,PB,PC$两两垂直，$\therefore 2R=\sqrt{2+2+2}=\sqrt{6}$，$\therefore R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{6\sqrt{6}}{8}=\sqrt{6}\pi$，故选D.

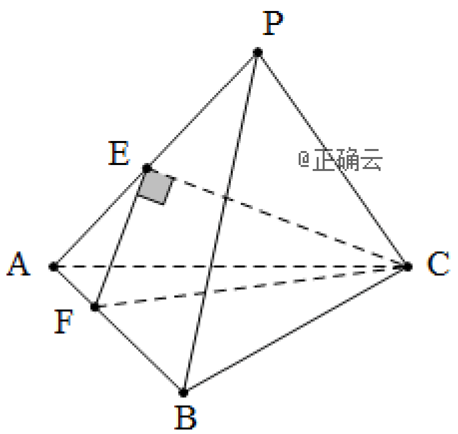
【详解】$\because PA=PB=PC$，ΔABC为边长为2的等边三角形，$\therefore P-ABC$为正三棱锥，

$\therefore PB\perp AC$，又E，F分别为PA、AB中点，

$\therefore EF//PB$，$\therefore EF\perp AC$，又$EF\perp CE$，$CE\cap AC=C$，$\therefore EF\perp$平面PAC，

$PB\perp$平面PAC，$\therefore\angle PAB=90^\circ$，$\therefore PA=PB=PC=\sqrt{2}$，$\therefore P-ABC$为正方体一部分

，$2R=\sqrt{2+2+2}=\sqrt{6}$，即$R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{6\sqrt{6}}{8}=\sqrt{6}\pi$，故选D.



【点睛】本题考查学生空间想象能力，补型法解决外接球问题．可通过线面垂直定理，得到三棱两两互相垂直关系，快速得到侧棱长，进而补型成正方体解决．

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为___________.

【答案】$3x-y=0$.

【解析】

【分析】

本题根据导数的几何意义，通过求导数，确定得到切线的斜率，利用直线方程的点斜式求得切线方程

【详解】详解：$y'=3(2x+1)e^x+3(x^2+x)e^x=3(x^2+3x+1)e^x$,

所以，$k=y'|_{x=0}=3$

所以，曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=3x$，即 $3x-y=0$.

【点睛】准确求导数是进一步计算的基础，本题易因为导数的运算法则掌握不熟，二导致计算错误．求导要“慢”，计算要准，是解答此类问题的基本要求．

14.记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和．若 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则S_5=____________.

【答案】$\frac{121}{3}$.

【解析】

【分析】

本题根据已知条件，列出关于等比数列公比 q 的方程，应用等比数列的求和公式，计算得到 S_5．题目的难度不大，注重了基础知识、基本计算能力的考查．

【详解】设等比数列的公比为 q，由已知 $a_1=\frac{1}{3},a_4{}^2=a_6$，所以 $(\frac{1}{3}q^3)^2=\frac{1}{3}q^5$，又 $q\neq0$，

所以 $q=3$，所以 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}(1-3^5)}{1-3}=\frac{121}{3}$.

【点睛】准确计算，是解答此类问题的基本要求．本题由于涉及幂的乘方运算、繁分式分式计算，部分考生易出现运算错误．

15.甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛

结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为0.6，客场取胜的概率为0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以4∶1获胜的概率是____________．

【答案】0.216.

【解析】

【分析】

本题应注意分情况讨论，即前五场甲队获胜的两种情况，应用独立事件的概率的计算公式求解．题目有一定的难度，注重了基础知识、基本计算能力及分类讨论思想的考查.

【详解】前五场中有一场客场输时，甲队以$4:1$获胜的概率是$0.6^3\times 0.5\times 0.5\times 2=0.108,$

前五场中有一场主场输时，甲队以$4:1$获胜的概率是$0.4\times 0.6^2\times 0.5^2\times 3=0.108,$

综上所述，甲队以$4:1$获胜的概率是$q\neq 00.108+0.108=0.216.$

【点睛】由于本题题干较长，所以，易错点之一就是能否静心读题，正确理解题意；易错点之二是思维的全面性是否具备，要考虑甲队以$4:1$获胜的两种情况；易错点之三是是否能够准确计算.

16.已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线与$C$的两条渐近线分别交于$A$，$B$两点．若$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则$C$的离心率为____________．

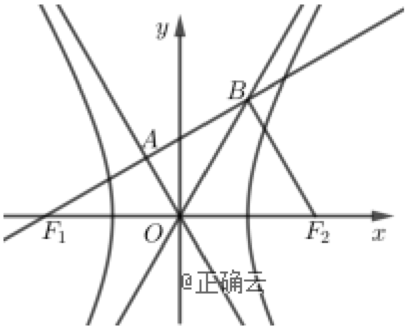
【答案】2.

【解析】

【分析】

本题考查平面向量结合双曲线的渐进线和离心率，渗透了逻辑推理、直观想象和数学运算素养．采取几何法，利用数形结合思想解题.

【详解】如图，



由$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, 得$F_1A=AB$. 又$OF_1=OF_2$, 得OA是三角形$F_1F_2B$的中位线，即$BF_2//OA, BF_2=2OA$. 由$\overrightarrow{F_1B}\bullet\overrightarrow{F_2B}=0$，得$F_1B\perp F_2B, OA\perp F_1A$, 则$OB=OF_1=OF_2$, 有$\angle OBF_2=\angle BF_2O=2\angle OBF_1=2\angle OF_1B$, $\angle AOB=\angle AOF_1$. 又OA与OB都是渐近线，得$\angle BOF_2=\angle AOF_1$, 则$\angle BOF_2=60^0$. 又渐近线OB的斜率为$\frac{b}{a}=\tan 60^0=\sqrt{3}$，所以该双曲线的离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$.

【点睛】此题若不能求出直角三角形的中位线的斜率将会思路受阻，即便知道双曲线渐近线斜率和其离心率的关系，也不能顺利求解，解题需要结合几何图形，关键得到$\angle BOF_2=\angle AOF_1=\angle BOA_2=60^0$, 即得到渐近线的倾斜角为$60^0$, 从而突破问题障碍.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17. $\vee ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，设$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求A；

（2）若$\sqrt{2}a+b=2c$，求$\sin C$.

【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$；（2）$\sin C=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

【解析】

【分析】

（1）利用正弦定理化简已知边角关系式可得：$b^2+c^2-a^2=bc$，从而可整理出$\cos A$，根据$A\in(0,\pi)$可求得结果；（2）利用正弦定理可得$\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$，利用$\sin B=\sin(A+C)$、两角和差正弦公式可得关于$\sin C$和$\cos C$的方程，结合同角三角函数关系解方程可求得结果.

【详解】（1）$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 B-2\sin B\sin C+\sin^2 C=\sin^2 A-\sin B\sin C$

即：$\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$

由正弦定理可得：$b^2+c^2-a^2=bc$

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$

$\because A\in(0,\pi)$ \ $A=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\because \sqrt{2}a+b=2c$，由正弦定理得：$\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$

又$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$A=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C=2\sin C$

整理可得：$3\sin C-\sqrt{6}=\sqrt{3}\cos C$

$\because \sin^2 C+\cos^2 C=1$ $\therefore (3\sin C-\sqrt{6})^2=3(1-\sin^2 C)$

解得：$\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$或$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

因为$\sin B=2\sin C-\sqrt{2}\sin A=2\sin C-\dfrac{\sqrt{6}}{2}>0$所以$\sin C>\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，故$\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

（2）法二：$\because \sqrt{2}a+b=2c$，由正弦定理得：$\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$

又$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$A=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C=2\sin C$

整理可得：$3\sin C-\sqrt{6}=\sqrt{3}\cos C$，即$3\sin C-\sqrt{3}\cos C=2\sqrt{3}\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{6}$

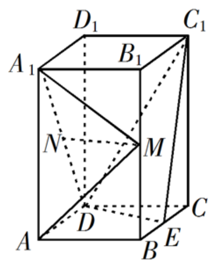
$\therefore \sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　$\therefore C=\dfrac{5\pi}{12}$ 或 $\dfrac{11\pi}{12}$

$\because A=\dfrac{\pi}{3}$ 且 $A+C<\pi$　　$\therefore C=\dfrac{5\pi}{12}$

$\therefore \sin C=\sin\dfrac{5\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

【点睛】本题考查利用正弦定理、余弦定理解三角形的问题，涉及到两角和差正弦公式、同角三角函数关系的应用，解题关键是能够利用正弦定理对边角关系式进行化简，得到余弦定理的形式或角之间的关系.

18.如图，直四棱柱$ABCD$－$A_1B_1C_1D_1$的底面是菱形，AA_1=4，AB=2，$\angle BAD$=60°，E，M，N分别是BC，BB_1，A_1D的中点.



（1）证明：$MN//$平面C_1DE；

（2）求二面角A-MA_1-N的正弦值.

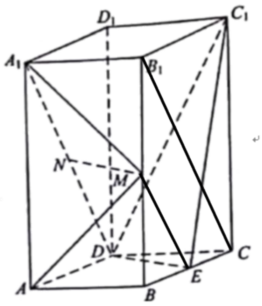
【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】

【分析】

（1）利用三角形中位线和 $A_1D\underline{\underline{//}}B_1C$ 可证得 $ME\underline{\underline{//}}ND$，证得四边形 $MNDE$ 为平行四边形，进而证得 $MN//DE$，根据线面平行判定定理可证得结论；（2）以菱形 $ABCD$ 对角线交点为原点可建立空间直角坐标系，通过取 AB 中点 F，可证得 $DF\perp$ 平面 AMA_1，得到平面 AMA_1 的法向量 $\overrightarrow{DF}$；再通过向量法求得平面 MA_1N 的法向量 $\vec{n}$，利用向量夹角公式求得两个法向量夹角的余弦值，进而可求得所求二面角的正弦值.

【详解】（1）连接ME，B_1C



$\because M$，E分别为BB_1，BC中点　$\therefore ME$为ΔB_1BC的中位线

$\therefore ME//B_1C$且$ME=\dfrac{1}{2}B_1C$

又N为A_1D中点，且$A_1D\underline{\underline{//}}B_1C$　$\therefore ND//B_1C$且$ND=\dfrac{1}{2}B_1C$

$\therefore ME\underline{\underline{//}}ND$　$\therefore$四边形$MNDE$为平行四边形

$\therefore MN//DE$，又$MN\not\subset$平面C_1DE，$DE\subset$平面C_1DE

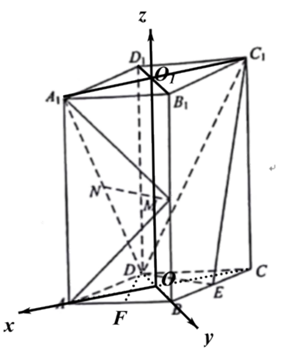
$\therefore MN//$平面C_1DE

（2）设$AC\cap BD=O$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$

由直四棱柱性质可知：$OO_1\perp$平面$ABCD$

$\because$四边形$ABCD$为菱形　$\therefore AC\perp BD$

则以O为原点，可建立如下图所示的空间直角坐标系：



则：$A\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$M\left(0,1,2\right)$，$A_1\left(\sqrt{3},0,4\right)$，D（0，-1,0）$N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},2\right)$

取 AB 中点 F，连接 DF，则 $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形且 $\angle BAD=60^\circ$ $\therefore \Delta BAD$ 为等边三角形 $\therefore DF\perp AB$

又 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，$DF\subset$ 平面 $ABCD$ $\therefore DF\perp AA_1$

$\therefore DF\perp$ 平面 ABB_1A_1，即 $DF\perp$ 平面 AMA_1

$\therefore \overrightarrow{DF}$ 为平面 AMA_1 的一个法向量，且 $\overrightarrow{DF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$

设平面 MA_1N 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，又 $\overrightarrow{MA_1}=\left(\sqrt{3},-1,2\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$

$\therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA_1}=\sqrt{3}x-y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=1$，$z=-1$ $\therefore \vec{n}=\left(\sqrt{3},1,-1\right)$

$\therefore \cos<\overrightarrow{DF},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{DF}\right|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$ $\therefore \sin<\overrightarrow{DF},\vec{n}>=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\therefore$ 二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为：$\frac{\sqrt{10}}{5}$

【点睛】本题考查线面平行关系的证明、空间向量法求解二面角的问题.求解二面角的关键是能够利用垂直关系建立空间直角坐标系，从而通过求解法向量夹角的余弦值来得到二面角的正弦值，属于常规题型.

19.已知抛物线C：y^2=3x的焦点为F，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线l与C的交点为A，B，与x轴的交点为P.

（1）若|AF|+|BF|=4，求l的方程；

（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求|$AB$|.

【答案】（1）$12x-8y-7=0$；（2）$\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

【解析】

【分析】

（1）设直线l：$y=\frac{3}{2}x+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$；根据抛物线焦半径公式可得$x_1+x_2=1$；联立直线方程与抛物线方程，利用韦达定理可构造关于m的方程，解方程求得结果；（2）设直线l：$x=\frac{2}{3}y+t$；联立直线方程与抛物线方程，得到韦达定理的形式；利用$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$可得$y_1=-3y_2$，结合韦达定理可求得$y_1y_2$；根据弦长公式可求得结果.

【详解】（1）设直线l方程为：$y=\frac{3}{2}x+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由抛物线焦半径公式可知：$|AF|+|BF|=x_1+x_2+\frac{3}{2}=4$　$\therefore x_1+x_2=\frac{5}{2}$

联立$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+m \\ y^2=3x \end{cases}$得：$9x^2+(12m-12)x+4m^2=0$

则$\Delta=(12m-12)^2-144m^2>0$　$\therefore m<\frac{1}{2}$

$\therefore x_1+x_2=-\frac{12m-12}{9}=\frac{5}{2}$，解得：$m=-\frac{7}{8}$

$\therefore$直线l的方程为：$y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$，即：$12x-8y-7=0$

（2）设$P(t,0)$，则可设直线l方程为：$x=\frac{2}{3}y+t$

联立$\begin{cases} x=\frac{2}{3}y+t \\ y^2=3x \end{cases}$得：$y^2-2y-3t=0$

则$\Delta=4+12t>0$　$\therefore t>-\frac{1}{3}$

$\therefore y_1+y_2=2$，$y_1y_2=-3t$

$\because \overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$　$\therefore y_1=-3y_2$　$\therefore y_2=-1$，$y_1=3$　$\therefore y_1y_2=-3$

则$|AB|=\sqrt{1+\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{13}}{3}\cdot\sqrt{4+12}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$

【点睛】本题考查抛物线的几何性质、直线与抛物线的综合应用问题，涉及到平面向量、弦长公式的应用.关键是能够通过直线与抛物线方程的联立，通过韦达定理构造等量关系.

20.已知函数$f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$为$f(x)$的导数．证明：

（1） $f'(x)$ 在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

（2） $f(x)$ 有且仅有2个零点.

【答案】（1）见解析；（2）见解析

【解析】

【分析】

（1）求得导函数后，可判断出导函数在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，根据零点存在定理可判断出 $\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $g'\left(x_0\right)=0$，进而得到导函数在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性，从而可证得结论；（2）由（1）的结论可知 $x=0$ 为 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,0\right]$ 上的唯一零点；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，首先可判断出在 $\left(0,x_0\right)$ 上无零点，再利用零点存在定理得到 $f\left(x\right)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性，可知 $f\left(x\right)>0$，不存在零点；当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，利用零点存在定理和 $f\left(x\right)$ 单调性可判断出存在唯一一个零点；当 $x\in\left(\pi,+\infty\right)$，可证得 $f\left(x\right)<0$；综合上述情况可证得结论.

【详解】（1）由题意知：$f\left(x\right)$ 定义域为：$\left(-1,+\infty\right)$ 且 $f'\left(x\right)=\cos x-\frac{1}{x+1}$

令 $g\left(x\right)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，$x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g'\left(x\right)=-\sin x+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}$，$x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$

$\because \frac{1}{\left(x+1\right)^2}$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{7}$，在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

$\therefore g'\left(x\right)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

又 $g'\left(0\right)=-\sin 0+1=1>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\left(\pi+2\right)^2}=\frac{4}{\left(\pi+2\right)^2}-1<0$

$\therefore \exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $g'\left(x_0\right)=0$

$\therefore$ 当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$g'(x)>0$；$x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$

即 $g(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递增；在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

则 $x=x_0$ 为 $g(x)$ 唯一的极大值点

即：$f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一的极大值点 x_0.

（2）由（1）知：$f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，$x\in(-1,+\infty)$

①当 $x\in(-1,0]$ 时，由（1）可知 $f'(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增

$\therefore f'(x)\le f'(0)=0\quad \therefore f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减

又 $f(0)=0$

$\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上的唯一零点

②当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

又 $f'(0)=0\quad \therefore f'(x_0)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，此时 $f(x)>f(0)=0$，不存在零点

又 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi+2}=-\frac{2}{\pi+2}<0$

$\therefore \exists x_1\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_1)=0$

$\therefore f(x)$ 在 (x_0,x_1) 上单调递增，在 $\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

又 $f(x_0)>f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{2e}{\pi+2}>\ln 1=0$

$\therefore f(x)>0$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，此时不存在零点

③当$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时，$\sin x$单调递减，$-\ln\left(x+1\right)$单调递减

$\therefore f\left(x\right)$在$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减

又$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，$f\left(\pi\right)=\sin\pi-\ln\left(\pi+1\right)=-\ln\left(\pi+1\right)<0$

即$f\left(\pi\right)\cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，又$f\left(x\right)$在$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减

$\therefore$ $f\left(x\right)$在$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上存在唯一零点

④当$x\in\left(\pi,+\infty\right)$时，$\sin x\in\left[-1,1\right]$，$\ln\left(x+1\right)>\ln\left(\pi+1\right)>\ln e=1$

$\therefore\sin x-\ln\left(x+1\right)<0$

即$f\left(x\right)$在$\left(\pi,+\infty\right)$上不存在零点

综上所述：$f\left(x\right)$有且仅有2个零点

【点睛】本题考查导数与函数极值之间的关系、利用导数解决函数零点个数的问题.解决零点问题的关键一方面是利用零点存在定理或最值点来说明存在零点，另一方面是利用函数的单调性说明在区间内零点的唯一性，二者缺一不可.

21.为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分．甲、乙两种药的治愈率分别记为α和β，一轮试验中甲药的得分记为X.

（1）求X的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$表示“甲药的累计得分为i时

，最终认为甲药比乙药更有效"的概率，则 $p_0=0$， $p_8=1$， $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$

$(i=1,2,\cdots,7)$，其中 $a=P(X=-1)$， $b=P(X=0)$， $c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5$，

$\beta=0.8$．

(i)证明：$\{p_{i+1}-p_i\}$ $(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列；

(ii)求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性．

【答案】（1）见解析；（2）（i）见解析；（ii）$p_4=\dfrac{1}{257}$．

【解析】

【分析】

（1）首先确定 X 所有可能的取值，再来计算出每个取值对应的概率，从而可得分布列；

（2）（i）求解出 a,b,c 的取值，可得 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,7\right)$，从而整理出符合等比数列定义的形式，问题得证；（ii）列出证得的等比数列的通项公式，采用累加的方式，结合 p_8 和 p_0 的值可求得 p_1；再次利用累加法可求出 p_4．

【详解】（1）由题意可知 X 所有可能的取值为：-1，0，1

$\therefore P\left(X=-1\right)=\left(1-\alpha\right)\beta$；$P\left(X=0\right)=\alpha\beta+\left(1-\alpha\right)\left(1-\beta\right)$；$P\left(X=1\right)=\alpha\left(1-\beta\right)$

则 X 的分布列如下：

X	-1	0	1
P	$\left(1-\alpha\right)\beta$	$\alpha\beta+\left(1-\alpha\right)\left(1-\beta\right)$	$\alpha\left(1-\beta\right)$

（2）$\because\alpha=0.5$，$\beta=0.8$

$\therefore a=0.5\times0.8=0.4$，$b=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5$，$c=0.5\times0.2=0.1$

（i）$\because p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,7\right)$

即 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,7\right)$

整理可得：$5p_i=4p_{i-1}+p_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,7\right)$ $\therefore p_{i+1}-p_i=4\left(p_i-p_{i-1}\right)\left(i=1,2,\cdots,7\right)$

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修4-4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为

$2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

（1）求C和l的直角坐标方程；

（2）求C上的点到l距离的最小值.

【答案】（1）$C: x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$；$l: 2x+\sqrt{3}y+11=0$；（2）$\sqrt{7}$

【解析】

【分析】

（1）利用代入消元法，可求得C的直角坐标方程；根据极坐标与直角坐标互化原则可得l的直角坐标方程；（2）利用参数方程表示出C上点的坐标，根据点到直线距离公式可将所求距离表示为三角函数的形式，从而根据三角函数的范围可求得最值.

【详解】（1）由$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$得：$t^2=\dfrac{1-x}{1+x}$，又$y^2=\dfrac{16t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$

$$\therefore y^2=\frac{16\times\dfrac{1-x}{1+x}}{\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}=4\left(1+x\right)\left(1-x\right)=4-4x^2$$

整理可得C的直角坐标方程为：$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

又$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$

$\therefore l$的直角坐标方程为：$2x+\sqrt{3}y+11=0$

（2）设C上点的坐标为：$\left(\cos\theta,2\sin\theta\right)$

则C上的点到直线l的距离 $d=\dfrac{\left|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+11\right|}{\sqrt{7}}=\dfrac{\left|4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+11\right|}{\sqrt{7}}$

当$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$时，$d$取最小值

则$d_{\min}=\sqrt{7}$

【点睛】本题考查参数方程、极坐标方程与直角坐标方程的互化、求解椭圆上的点到直线距离的最值问题.求解本题中的最值问题通常采用参数方程来表示椭圆上的点，将问题转化为三角函数的最值求解问题.

23.[选修4-5：不等式选讲]

已知a，b，c为正数，且满足abc=1．证明：

（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geq 24$．

【答案】（1）见解析；（2）见解析

【解析】

【分析】

（1）利用$abc=1$将所证不等式可变为证明：$a^2+b^2+c^2\geq bc+ac+ab$，利用基本不等式可证得$2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2ab+2bc+2ac$，从而得到结论；（2）利用基本不等式可得$\left(a+b\right)^3+\left(b+c\right)^3+\left(c+a\right)^3\geq 3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$，再次利用基本不等式可将式转化为$\left(a+b\right)^3+\left(b+c\right)^3+\left(c+a\right)^3\geq 24\sqrt{\left(abc\right)^2}$，在取等条件一致的情况下，可得结论.

【详解】（1）$\because abc=1$ $\quad\therefore\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\cdot abc=bc+ac+ab$

$\because 2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)\geq 2ab+2bc+2ac$

当且仅当$a=b=c$时取等号

$\therefore 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$，即：$a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

（2）$\because \left(a+b\right)^3+\left(b+c\right)^3+\left(c+a\right)^3 \geq 3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$，当且仅当$a=b=c$时取等号

又$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，$b+c\geq 2\sqrt{bc}$，$a+c\geq 2\sqrt{ac}$（当且仅当$a=b=c$时等号同时成立）

$\therefore \left(a+b\right)^3+\left(b+c\right)^3+\left(c+a\right)^3 \geq 3\times 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{bc}\times 2\sqrt{ac}=24\sqrt{\left(abc\right)^2}$

又$abc=1$　$\therefore \left(a+b\right)^3+\left(b+c\right)^3+\left(c+a\right)^3 \geq 24$

【点睛】本题考查利用基本不等式进行不等式的证明问题，考查学生对于基本不等式的变形和应用能力，需要注意的是在利用基本不等式时需注意取等条件能否成立.