

2015 年普通高等学校招生全国统一考试 (四川)

数学 (理科)

第 I 卷 (共 50 分)

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | (x+1)(x-2) < 0\}$ ，集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$ ，则 $A \cup B = (\quad)$

- (A) $\{x | -1 < x < 3\}$ (B) $\{x | -1 < x < 1\}$ (C) $\{x | 1 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$

【答案】A

【解析】学科网

$A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | 1 < x < 3\}$, ∴ $A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}$, 选 A.

【考点定位】集合的基本运算。

【名师点睛】集合的概念及运算一直是高考的热点，几乎是每年必考内容，属于容易题。一般是结合不等式，函数的定义域值域考查，解题的关键是结合韦恩图或数轴解答。

2. 设 i 是虚数单位，则复数 $i^3 - \frac{2}{i} (\quad)$

- (A) $-i$ (B) $-3i$ (C) i (D) $3i$

【答案】C

【解析】

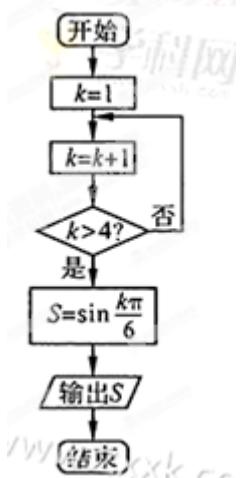
$$i^3 - \frac{2}{i} = -i - \frac{2i}{i^2} = -i + 2i = i, \text{ 选 C.}$$

【考点定位】复数的基本运算。

【名师点睛】复数的概念及运算也是高考的热点，几乎是每年必考内容，属于容易题。一般来说，掌握复数的基本概念及四则运算即可。

3. 执行如图所示的程序框图，输出 S 的值是()

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$



【答案】D

【解析】

这是一个循环结构，每次循环的结果依次为： $k=2, k=3, k=4, k=5$ ，大于4，所以输出的 $S = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ，

选D.

【考点定位】程序框图.

【名师点睛】程序框图也是高考的热点，几乎是每年必考内容，多半是考循环结构，基本方法是将每次循环的结果一一列举出来.

4.下列函数中，最小正周期为且图象关于原点对称的函数是（ ）

- (A) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$ (B) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ (C) $y = \sin 2x + \cos 2x$ (D) $y = \sin x + \cos x$

【答案】A

【解析】对于选项 A，因为 $y = -\sin 2x, T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，且图象关于原点对称，故选 A.

【考点定位】三角函数的性质.

【名师点睛】本题不是直接据条件求结果，而是从4个选项中找出符合条件的一项，故一般是逐项检验，但这类题常常可采用排除法.很明显，C、D选项中的函数既不是奇函数也不是偶函数，而B选项中的函数是偶函数，故均可排除，所以选A.

5.过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，交该双曲线的两条渐近线于 A，B 两点，则 $|AB| =$

（ ）

- (A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】双曲线的右焦点为 $F(2, 0)$, 过 F 与 x 轴垂直的直线为 $x=2$, 渐近线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 0$, 将 $x=2$

代入 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 0$ 得: $y^2 = 12$, $y = \pm 2\sqrt{3}$, $|AB| = 4\sqrt{3}$. 选 D. 学科网

【考点定位】 双曲线.

【名师点睛】 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, 将直线 $x=2$ 代入这个渐近线方程, 便可得

交点 A、B 的纵坐标, 从而快速得出 $|AB|$ 的值.

6. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 其中比 40000 大的偶数共有 ()

- (A) 144 个 (B) 120 个 (C) 96 个 (D) 72 个

【答案】B

【解析】

据题意, 万位上只能排 4、5. 若万位上排 4, 则有 $2 \times A_4^3$ 个; 若万位上排 5, 则有 $3 \times A_4^3$ 个. 所以共有 $2 \times A_4^3 + 3 \times A_4^3 = 5 \times 24 = 120$ 个. 选 B.

【考点定位】 排列组合.

【名师点睛】 利用排列组合计数时, 关键是正确进行分类和分步, 分类时要注意不重不漏. 在本题中, 万位与个位是两个特殊位置, 应根据这两个位置的限制条件来进行分类.

7. 设四边形 ABCD 为平行四边形, $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = 4$. 若点 M, N 满足 $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{NC}$, 则

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NM} = ()$$

- (A) 20 (B) 15 (C) 9 (D) 6

【答案】C

【解析】

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 所以

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{1}{4}(4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}) \cdot \frac{1}{12}(4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{48}(16\overrightarrow{AB}^2 - 9\overrightarrow{AD}^2) = \frac{1}{48}(16 \times 36 - 9 \times 16) = 9, \text{ 选 C.}$$

【考点定位】 平面向量.

【名师点睛】 涉及图形的向量运算问题, 一般应选两个向量作为基底, 选基底的原则是这两个向量有尽量多的已知元素. 本题中, 由于 $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = 4$ 故可选 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 作为基底.

8. 设 a, b 都是不等于 1 的正数, 则 “ $3^a > 3^b > 3$ ” 是 “ $\log_a 3 < \log_b 3$ ” 的 ()

- (A) 充要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】学科网

若 $3^a > 3^b > 3$, 则 $a > b > 1$, 从而有 $\log_a 3 < \log_b 3$, 故为充分条件. 若 $\log_a 3 < \log_b 3$ 不一定有 $a > b > 1$, 比如 $a = \frac{1}{3}, b = 3$, 从而 $3^a > 3^b > 3$ 不成立. 故选 B.

【考点定位】命题与逻辑.

【名师点睛】充分性必要性的判断问题, 首先是分清条件和结论, 然后考察条件推结论, 结论推条件是否成立. 这类问题往往与函数、三角、不等式等数学知识结合起来考.

9. 如果函数 $f(x) = \frac{1}{2}(m-2)x^2 + (n-8)x + 1 (m \geq 0, n \geq 0)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递减, 则 mn 的最大值为 ()

- (A) 16 (B) 18 (C) 25 (D) $\frac{81}{2}$

【答案】B

【解析】

$m \neq 2$ 时, 抛物线的对称轴为 $x = -\frac{n-8}{m-2}$. 据题意, 当 $m > 2$ 时, $-\frac{n-8}{m-2} \geq 2$ 即

$2m+n \leq 12 \Leftrightarrow \sqrt{2m \cdot n} \leq \frac{2m+n}{2} \leq 6 \Leftrightarrow mn \leq 18$. 由 $2m=n$ 且 $2m+n=12$ 得 $m=3, n=6$. 当 $m < 2$ 时, 抛

物线开口向下, 据题意得, $-\frac{n-8}{m-2} \leq \frac{1}{2}$ 即 $m+2n \leq 18 \Leftrightarrow \sqrt{2n \cdot m} \leq \frac{2n+m}{2} \leq 9 \Leftrightarrow mn \leq \frac{81}{2}$. 由 $2n=m$ 且

$m+2n=18$ 得 $m=9 > 2$, 故应舍去. 要使得 mn 取得最大值, 应有 $m+2n=18 (m < 2, n > 8)$. 所以 $mn = (18-2n)n < (18-2 \times 8) \times 8 = 16$, 所以最大值为 18. 选 B..

【考点定位】函数与不等式的综合应用.

【名师点睛】首先弄清抛物线的开口方向和对称轴, 结合所给单调区间找到 m, n 满足的条件, 然后利用基本不等式求解. 本题将函数的单调性与基本不等式结合考查, 检测了学生综合运用知识解题的能力. 在知识的交汇点命题, 这是高考的一个方向, 这类题往往以中高档题的形式出现.

10. 设直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, 与圆 $(x-5)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切于点 M, 且 M 为线段 AB 的中点. 若这样的直线 l 恰有 4 条, 则 r 的取值范围是 ()

- (A) $(1, 3)$ (B) $(1, 4)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(2, 4)$

【答案】D

【解析】

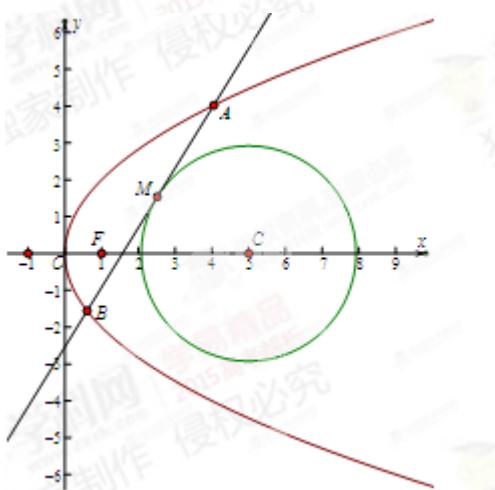
显然当直线 l 的斜率不存在时，必有两条直线满足题设.当直线 l 的斜率存在时，设斜率为 k .设

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 \neq x_2, M(x_0, y_0)$ ，则 $\begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases}$ ，相减得 $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 4(x_1 - x_2)$.由于 $x_1 \neq x_2$ ，

所以 $\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2$ ，即 $ky_0 = 2$.圆心为 $C(5, 0)$ ，由 $CM \perp AB$ 得 $k \cdot \frac{y_0 - 0}{x_0 - 5} = -1$, $ky_0 = 5 - x_0$ ，所以

$2 = 5 - x_0, x_0 = 3$ ，即点 M 必在直线 $x = 3$ 上.将 $x = 3$ 代入 $y^2 = 4x$ 得 $y^2 = 12$, $\therefore -2\sqrt{3} < y_0 < 2\sqrt{3}$.因为点

M 在圆 $(x - 5)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 上，所以 $(x_0 - 5)^2 + y_0^2 = r^2, r^2 = y_0^2 + 4 < 12 + 4 = 16$.又 $y_0^2 + 4 > 4$ (由于斜率不存在，故 $y_0 \neq 0$ ，所以不取等号)，所以 $4 < y_0^2 + 4 < 16, \therefore 2 < r < 4$.选 D. 学科网



【考点定位】直线与圆锥曲线，不等式.

【名师点睛】首先应结合图形进行分析.结合图形易知，只要圆的半径小于 5，那么必有两条直线（即与 x 轴垂直的两条切线）满足题设，因此只需直线的斜率存在时，再有两条直线满足题设即可.接下来要解决的问题是当直线的斜率存在时，圆的半径的范围是什么.涉及直线与圆锥曲线的交点及弦的中点的问题，常常采用“点差法”.在本题中利用点差法可得，中点必在直线 $x = 3$ 上，由此可确定中点的纵坐标 y_0 的范围，利用这个范围即可得到 r 的取值范围.

第II卷 (共 100 分)

二、填空题 (每题 5 分，满分 25 分，将答案填在答题纸上)

11. 在 $(2x-1)^5$ 的展开式中，含 x^2 的项的系数是_____ (用数字作答).

【答案】-40.

【解析】

$(2x-1)^5 = -(1-2x)^5$, 所以 x^2 的系数为 $-C_5^2 \times (-2)^2 = -40$.

【考点定位】二项式定理.

【名师点睛】涉及二项式定理的题，一般利用其通项公式求解.

12. $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【解析】 法一、 $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

法二、 $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) + \sin(45^\circ + 30^\circ) = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

法三、 $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【考点定位】三角恒等变换及特殊角的三角函数值.

【名师点睛】这是一个来自于课本的题，这告诉我们一定要立足于课本.首先将两个角统一为一个角，然后再化为一个三角函数一般地，有 $a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$. 第二种方法是直接凑为特殊角，利用特殊角的三角函数值求解.

13. 某食品的保鲜时间 y (单位：小时) 与储存温度 x (单位： ${}^\circ\text{C}$) 满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ ($e = 2.718\cdots$ 为自然对数的底数， k 、 b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间设计 192 小时，在 22°C 的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33°C 的保鲜时间是 _____ 小时.

【答案】 24

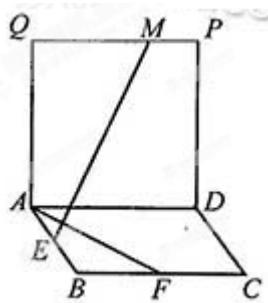
【解析】 学科网

由题意得： $\begin{cases} e^b = 192 \\ e^{22k+b} = 48 \end{cases}$, ∴ $e^{22k} = \frac{48}{192} = \frac{1}{4}$, $e^{11k} = \frac{1}{2}$, 所以 $x=33$ 时， $y = e^{33k+b} = (e^{11k})^3 \cdot e^b = \frac{1}{8} \times 192 = 24$.

【考点定位】函数及其应用.

【名师点睛】这是一个函数应用题，利用条件可求出参数 k 、 b ，但在实际应用中往往是利用整体代换求解（不要总是想把参数求出来）. 本题利用整体代换，使问题大大简化.

14. 如图，四边形 ABCD 和 ADPQ 均为正方形，它们所在的平面互相垂直，动点 M 在线段 PQ 上，E、F 分别为 AB、BC 的中点. 设异面直线 EM 与 AF 所成的角为 θ ，则 $\cos \theta$ 的最大值为 _____.



【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

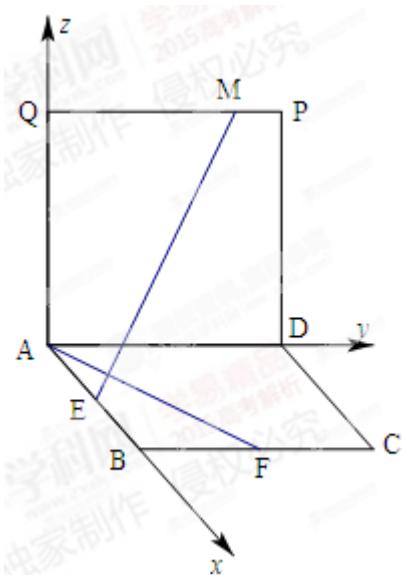
建立坐标系如图所示.设 $AB = 1$, 则 $\overline{AF} = (1, \frac{1}{2}, 0)$, $E(\frac{1}{2}, 0, 0)$. 设 $M(0, y, 1)(0 \leq y \leq 1)$, 则 $\overline{EM} = (-\frac{1}{2}, y, 1)$,

由于异面直线所成角的范围为 $(0, \frac{\pi}{2}]$, 所以

$$\cos \theta = \frac{\left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + y^2 + 1}} = \frac{2(1-y)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4y^2 + 5}} \cdot [\frac{2(1-y)}{\sqrt{4y^2 + 5}}]^2 = 1 - \frac{8y+1}{4y^2+5}, \quad \text{令 } 8y+1=t, 1 \leq t \leq 9, \text{ 则}$$

$$\frac{8y+1}{4y^2+5} = \frac{16}{t+81-2t} \geq \frac{1}{5}, \quad \text{当 } t=1 \text{ 时取等号. 所以}$$

$$\cos \theta = \frac{\left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + y^2 + 1}} = \frac{2(1-y)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4y^2 + 5}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}, \quad \text{当 } y=0 \text{ 时, 取得最大值. 学科网}$$



【考点定位】1、空间两直线所成的角；2、不等式.

【名师点睛】空间的角与距离的问题，只要便于建立坐标系均可建立坐标系，然后利用公式求解。解本题要注意，空间两直线所成的角是不超过 90 度的。几何问题还可结合图形分析何时取得最大值。当点 M 在 P 处时，EM 与 AF 所成角为直角，此时余弦值为 0（最小），当 M 点向左移动时，EM 与 AF 所成角逐渐变小，点 M 到达 Q 点时，角最小，从而余弦值最大。

15. 已知函数 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 + ax$ (其中 $a \in R$)。对于不相等的实数 x_1, x_2 , 设 $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$,

$$n = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

现有如下命题：

- (1) 对于任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $m > 0$;
- (2) 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $n > 0$;
- (3) 对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = n$;
- (4) 对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = -n$.

其中的真命题有_____ (写出所有真命题的序号)。

【答案】①④

【解析】学科网

设 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x_1, g(x_1))$, $D(x_2, g(x_2))$.

对(1), 从 $y = 2^x$ 的图象可看出, $m = k_{AB} > 0$ 恒成立, 故正确。

对(2), 直线 CD 的斜率可为负, 即 $n < 0$, 故不正确。

对(3), 由 $m=n$ 得 $f(x_1) - f(x_2) = g(x_1) - g(x_2)$, 即 $f(x_1) - g(x_1) = f(x_2) - g(x_2)$.

令 $h(x) = f(x) - g(x) = 2^x - x^2 - ax$, 则 $h'(x) = 2^x \ln 2 - 2x - a$.

由 $h'(x) = 0$ 得: $2^x \ln 2 = 2x + a$, 作出 $y = 2^x \ln 2$, $y = 2x + a$ 的图象知, 方程 $2^x \ln 2 = 2x + a$ 不一定有解, 所以 $h(x)$ 不一定有极值点, 即对于任意的 a , 不一定存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $h(x_1) = h(x_2)$, 即不一定存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = n$. 故不正确。

对(4), 由 $m=-n$ 得 $f(x_1) - f(x_2) = g(x_2) - g(x_1)$, 即 $f(x_1) + g(x_1) = f(x_2) + g(x_2)$.

令 $h(x) = f(x) + g(x) = 2^x + x^2 + ax$, 则 $h'(x) = 2^x \ln 2 + 2x + a$.

由 $h'(x) = 0$ 得: $2^x \ln 2 = -2x - a$, 作出 $y = 2^x \ln 2$, $y = -2x - a$ 的图象知, 方程 $2^x \ln 2 = -2x - a$ 必一定有解, 所以 $h(x)$ 一定有极值点, 即对于任意的 a , 一定存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $h(x_1) = h(x_2)$, 即一定存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = -n$. 故正确。

所以(1)(4)

【考点定位】 函数与不等式的综合应用。

【名师点睛】四川高考数学15题历来是一个异彩纷呈的题，个中精彩读者可从解析中慢慢体会。解决本题的关键是转化思想，通过转化使问题得以解决。

三、解答题（本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

16. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n - a_1$ ，且 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n ，求得 $|T_n - 1| < \frac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值。

【答案】(1) $a_n = 2^n$ ；(2) 10。

【解析】(1) 由已知 $S_n = 2a_n - a_1$ ，有 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}(n > 1)$ ，

即 $a_n = 2a_{n-1}(n > 1)$ 。

从而 $a_2 = 2a_1, a_3 = 4a_1$ 。

又因为 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列，即 $a_1 + a_3 = 2(a_2 + 1)$ 。

所以 $a_1 + 4a_1 = 2(2a_1 + 1)$ ，解得 $a_1 = 2$ 。

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为2，公比为2的等比数列。

故 $a_n = 2^n$ 。

(2) 由(1)得 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}$ 。

所以 $T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ 。

由 $|T_n - 1| < \frac{1}{1000}$ ，得 $|1 - \frac{1}{2^n} - 1| < \frac{1}{1000}$ ，即 $2^n > 1000$ 。

因为 $2^9 = 512 < 1000 < 1024 = 2^{10}$ ，

所以 $n \geq 10$ 。

于是，使 $|T_n - 1| < \frac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值为10。[学科网](#)

【考点定位】本题考查等差数列与等比数列的概念、等比数列通项公式与前 n 项和公式等基础知识，考查运算求解能力。

【名师点睛】凡是有 S_n 与 a_n 间的关系，都是考虑消去 S_n 或 a_n （多数时候是消去 S_n ，得 a_n 与 a_{n-1} 间的递推关系）。在本题中，得到 a_n 与 a_{n-1} 间的递推关系式后，便知道这是一个等比数列，利用等比数列的相关公式即可求解。等差数列与等比数列是高考中的必考内容，多属容易题，考生应立足得满分。

17. 某市 A, B 两所中学的学生组队参加辩论赛, A 中学推荐 3 名男生, 2 名女生, B 中学推荐了 3 名男生, 4 名女生, 两校推荐的学生一起参加集训, 由于集训后队员的水平相当, 从参加集训的男生中随机抽取 3 人, 女生中随机抽取 3 人组成代表队

- (1) 求 A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率.
- (2) 某场比赛前, 从代表队的 6 名队员中随机抽取 4 人参赛, 设 X 表示参赛的男生人数, 求 X 的分布列和数学期望.

【答案】(1) A 中学至少 1 名学生入选的概率为 $p = \frac{99}{100}$.

(2) X 的分布列为:

X	1	2	3
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

X 的期望为 $E(X) = 2$.

【解析】(1) 由题意, 参加集训的男女生各有 6 名.

参赛学生全从 B 中抽取 (等价于 A 中没有学生入选代表队) 的概率为 $\frac{C_3^3 C_4^3}{C_6^3 C_6^3} = \frac{1}{100}$.

因此, A 中学至少 1 名学生入选的概率为 $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

(2) 根据题意, X 的可能取值为 1, 2, 3.

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^3}{C_6^4} = \frac{1}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_3^2}{C_6^4} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_3^1}{C_6^4} = \frac{1}{5},$$

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

因此, X 的期望为 $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$.

【考点定位】本题考查随机事件的概率、古典概型、随机变量的分布列、数学期望等基础知识, 考查运算

求解能力、应用意识，考查运用概率与统计的知识与方法分析和解决实际问题的能力。

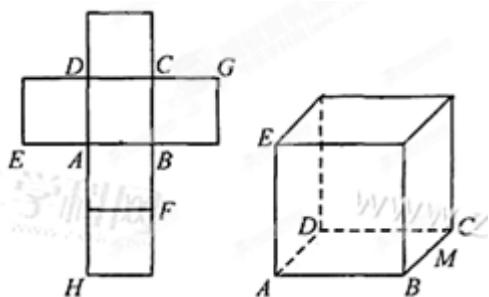
【名师点睛】应用问题一定要注意弄清题意，找出题中的关键字词。在本题中，就要分清楚集训队与代表队的区别。求概率时，如果直接求比较复杂，就应该先求其对立事件的概率。超几何分布和二项分布是中学中的两个重要概率分布，考生必须牢固掌握。本题的概率分布就是一个超几何分布问题。

18.一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示，在正方体中，设 BC 的中点为 M ， GH 的中点为 N

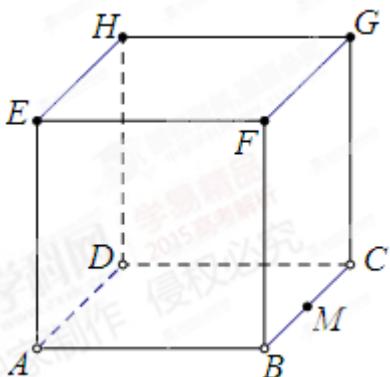
(1) 请将字母 F, G, H 标记在正方体相应的顶点处(不需说明理由)

(2) 证明：直线 $MN // \text{平面 } BDH$

(3) 求二面角 $A-EG-M$ 的余弦值。



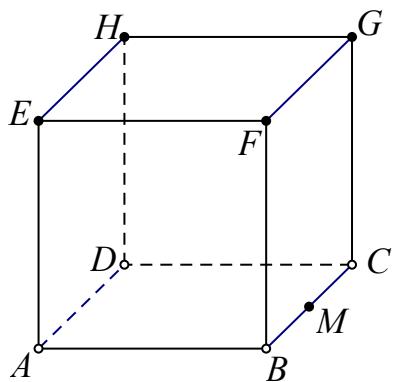
【答案】(1) 点 F, G, H 的位置如图所示。



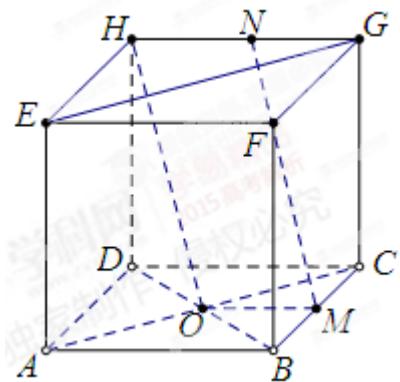
(2) 详见解析. (3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】学科网

(1) 点 F, G, H 的位置如图所示。



(2) 连结 BD，设 O 为 BD 的中点.



因为 M、N 分别是 BC、GH 的中点，

所以 $OM \parallel CD$ ，且 $OM = \frac{1}{2}CD$ ，

$NH \parallel CD$ ，且 $NH = \frac{1}{2}CD$ ，

所以 $OM \parallel NH$, $OM = NH$ ，

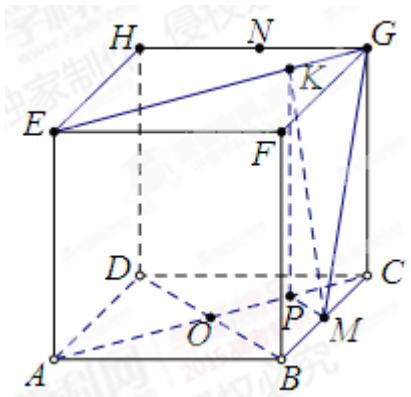
所以 $MNHO$ 是平行四边形，

从而 $MN \parallel OH$ ，

又 $MN \subset \text{平面 } BDH$, $OH \subset \text{平面 } BDH$ ，

所以 $MN \parallel \text{平面 } BDH$.

(3) 连结 AC，过 M 作 $MP \perp AC$ 于 P.



在正方形 $ABCD-EFGH$ 中， $AC \parallel EG$ ，

所以 $MP \perp EG$ 。

过 P 作 $PK \perp EG$ 于 K ，连结 KM ，

所以 $EG \perp \text{平面 } PKM$ ，

从而 $KM \perp EG$ 。

所以 $\angle PKM$ 是二面角 $A-EG-M$ 的平面角。

设 $AD=2$ ，则 $CM=1$, $PK=2$ ，

在 $Rt\triangle CMP$ 中， $PM = CM \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

在 $Rt\triangle KMP$ 中， $KM = \sqrt{PK^2 + PM^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

所以 $\cos \angle PKM = \frac{PK}{KM} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

即二面角 $A-EG-M$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

(另外，也可利用空间坐标系求解)

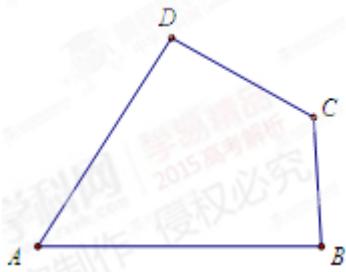
【考点定位】本题主要考查简单空间图形的直观图、空间线面平行的判定与性质、空间面面夹角的计算等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力。

【名师点睛】立体几何解答题的考查内容，不外乎线面、面面位置关系及空间夹角与距离的计算。(1)注意 $ABCD$ 是底面，将平面展开图还原可得点 F 、 G 、 H 的位置。(2)根据直线与平面平行的判定定理，应考虑证明 MN 平行于平面 BDH 内的一条直线。连结 O 、 M ，易得 $MNHO$ 是平行四边形，从而 $MN \parallel OH$ ，进而证得 $MN \parallel$ 平面 BDH 。(3)要作出二面角 $A-EG-M$ 的平面角，首先要过 M 作平面 $AEGC$ 的垂线，然后再过垂足作棱 EG 的垂线，再将垂足与点 M 连结，即可得二面角 $A-EG-M$ 的平面角。

19. 如图， A ， B ， C ， D 为平面四边形 $ABCD$ 的四个内角。

(1) 证明： $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$ ；

(2) 若 $A + C = 180^\circ$, $AB = 6$, $BC = 3$, $CD = 4$, $AD = 5$, 求 $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2}$ 的值.



【答案】(1) 详见解析; (2) $\frac{4\sqrt{10}}{3}$.

$$\text{【解析】(1)} \quad \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}.$$

(2) 由 $A + C = 180^\circ$, 得 $C = 180^\circ - A$, $D = 180^\circ - B$.

$$\begin{aligned} \text{由 (1), 有 } & \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2} \\ &= \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos(180^\circ - A)}{\sin(180^\circ - A)} + \frac{1 - \cos(180^\circ - B)}{\sin(180^\circ - B)} \\ &= \frac{2}{\sin A} + \frac{2}{\sin B} \end{aligned}$$

连结 BD ,

在 $\triangle ABD$ 中, 有 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A$,

在 $\triangle BCD$ 中, 有 $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C$,

所以 $AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C$,

$$\text{则 } \cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2}{2(AB \cdot AD + BC \cdot CD)} = \frac{6^2 + 5^2 - 3^2 - 4^2}{2(6 \times 5 + 3 \times 4)} = \frac{3}{7},$$

$$\text{于是 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - (\frac{3}{7})^2} = \frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

连结 AC，同理可得

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AD^2 - CD^2}{2(AB \cdot BC + AD \cdot CD)} = \frac{6^2 + 3^2 - 5^2 - 4^2}{2(6 \times 3 + 5 \times 4)} = \frac{1}{19},$$

于是 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - (\frac{1}{19})^2} = \frac{6\sqrt{10}}{19}.$

所以 $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2}$

$$= \frac{2}{\sin A} + \frac{2}{\sin B}$$

$$= \frac{14}{2\sqrt{10}} + \frac{2 \times 19}{2\sqrt{10}}$$

$$= \frac{4\sqrt{10}}{3}.$$

【考点定位】本题考查二倍角公式、诱导公式、余弦定理、简单的三角恒等变换等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查函数与方程、化归与转化等数学思想。

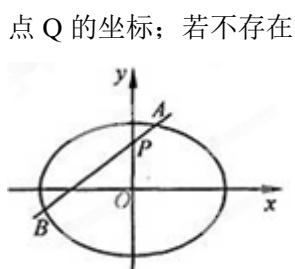
【名师点睛】本题第（1）小题为课本必修 4 第 142 页练习 1，体现了立足课本的要求。高考中常常将三角恒等变换与解三角形结合起来考，本题即是如此。本题的关键体现在以下两点，一是利用角的关系消角，体现了消元的思想；二是用余弦定理列方程组求三角函数值，体现了方程思想。

20. 如图，椭圆 E： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，过点 P(0,1) 的动直线 l 与椭圆相交于 A, B

两点，当直线 l 平行于 x 轴时，直线 l 被椭圆 E 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ 。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，是否存在与点 P 不同的定点 Q，使得 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。



【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ；(2) 存在，Q 点的坐标为 Q(0, 2)。

【解析】(1) 由已知, 点 $(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆 E 上.

因此, $\begin{cases} \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ a^2 - b^2 = c^2, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$

解得 $a = 2, b = \sqrt{2}$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 当直线 l 与 x 轴平行时, 设直线 l 与椭圆相交于 C、D 两点.

如果存在定点 Q 满足条件, 则 $\frac{|QC|}{|QD|} = \frac{|PC|}{|PD|} = 1$, 即 $|QC| = |QD|$.

所以 Q 点在 y 轴上, 可设 Q 点的坐标为 $(0, y_0)$.

当直线 l 与 x 轴垂直时, 设直线 l 与椭圆相交于 M、N 两点.

则 $M(0, \sqrt{2}), N(0, -\sqrt{2})$,

由 $\frac{|QM|}{|QN|} = \frac{|PM|}{|PN|}$, 有 $\frac{|y_0 - \sqrt{2}|}{|y_0 + \sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$, 解得 $y_0 = 1$ 或 $y_0 = 2$.

所以, 若存在不同于点 P 的定点 Q 满足条件, 则 Q 点的坐标只可能为 $Q(0, 2)$.

下面证明: 对任意的直线 l, 均有 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|PA|}{|PB|}$.

当直线 l 的斜率不存在时, 由上可知, 结论成立.

当直线 l 的斜率存在时, 可设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$, A、B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

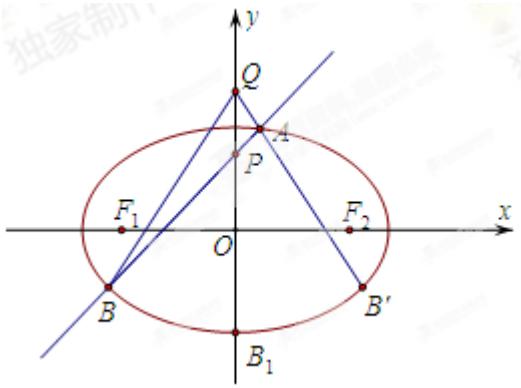
联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx + 1 \end{cases}$, 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kx - 2 = 0$.

其判别式 $\Delta = 16k^2 + 8(2k^2 + 1) > 0$,

所以, $x_1 + x_2 = -\frac{4k}{2k^2 + 1}, x_1 x_2 = -\frac{2}{2k^2 + 1}$.

因此 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2k$.

易知, 点 B 关于 y 轴对称的点的坐标为 $B'(-x_2, y_2)$.



$$\text{又 } k_{QA} = \frac{y_1 - 2}{x_1} = k - \frac{1}{x_1}, k_{QB'} = \frac{y_2 - 2}{-x_2} = -k + \frac{1}{x_2} = k - \frac{1}{x_1},$$

所以 $k_{QA} = k_{QB'}$, 即 Q, A, B' 三点共线.

$$\text{所以 } \frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|QA|}{|QB'|} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|PA|}{|PB|}.$$

故存在与 P 不同的定点 $Q(0, 2)$, 使得 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立.

【考点定位】本题考查椭圆的标准方程与几何性质、直线方程、直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合、化归与转化、特殊与一般、分类与整合等数学思想。

【名师点睛】高考中解几题一般都属于难题的范畴，考生应立足于拿稳第（1）题的分和第（2）小题的步骤分。解决直线与圆锥曲线相交的问题，一般是将直线方程与圆锥曲线的方程联立，再根据根与系数的关系解答。本题是一个探索性问题，对这类问题一般是根据特殊情况找出结果，然后再证明其普遍性。解决本题的关键是通过作 B 的对称点将问题转化。

21. 已知函数 $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 评论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一解。

【答案】(1) 当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}), (\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减; 当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增。(2) 详见解析。

【解析】(1) 由已知, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$g(x) = f'(x) = 2x - 2a - 2\ln x - 2\left(1 + \frac{a}{x}\right),$$

$$\text{所以 } g'(x) = 2 - \frac{2}{x} + \frac{2a}{x^2} = \frac{2(x - \frac{1}{2})^2 + 2(a - \frac{1}{4})}{x^2}.$$

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

在区间 $(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减;

当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 $f'(x) = 2x - 2a - 2\ln x - 2\left(1 + \frac{a}{x}\right) = 0$, 解得 $a = \frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}$.

$$\text{令 } \varphi(x) = -2\left(x + \frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)\ln x + x^2 - 2\left(\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)x - 2\left(\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)^2 + \frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}.$$

$$\text{则 } \varphi(1) = 1 > 0, \varphi(e) = -\frac{e(e-2)}{1+e^{-1}} - 2\left(\frac{e-2}{1+e^{-1}}\right)^2 < 0,$$

故存在 $x_0 \in (1, e)$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$.

$$\text{令 } a_0 = \frac{x_0-1-\ln x_0}{1+x_0^{-1}}, u(x) = x-1-\ln x (x \geq 1),$$

由 $u'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ 知, 函数 $u(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } 0 = \frac{u(1)}{1+1} < \frac{u(x_0)}{1+x_0^{-1}} = a_0 < \frac{u(e)}{1+e^{-1}} = \frac{e-2}{1+e^{-1}} < 1.$$

即 $a_0 \in (0, 1)$.

当 $a = a_0$ 时, 有 $f'(x_0) = 0, f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$.

由(1)知, 函数 $f'(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

故当 $x \in (1, x_0)$ 时, 有 $f'(x) < 0$, 从而 $f(x) > f(x_0) = 0$;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 有 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x) > f(x_0) = 0$;

所以, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$.

综上所述, 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.

【考点定位】本题考查导数的运算、导数在研究函数中的应用、函数的零点等基础知识, 考查推理论证能

力、运算求解能力、创新意识，考查函数与方程、数形结合、分类与整合，化归与转化等数学思想。

【名师点睛】本题作为压轴题，难度系数应在 0.3 以下。导数与微积分作为大学重要内容，在中学要求学生掌握其基础知识，在高考题中也必有体现。一般地，只要掌握了课本知识，是完全可以解决第（1）题的，所以对难度最大的最后一个题，任何人都不能完全放弃，这里还有不少的分是志在必得的。解决函数题需要的一个重要数学思想是数形结合，联系图形大胆猜想。在本题中，结合待证结论，可以想象出 $f(x)$ 的大致图象，要使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立，且 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一解，则这个解 x_0 应为极小值点，且极小值为 0，当 $x \in (1, x_0)$ 时， $f(x)$ 的图象递减；当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 的图象单调递增，顺着这个思想，便可找到解决方法。