

2014 年普通高等学校招生全国统一考试 (江西卷)

数学 (文科)

一、选择题：

1. 若复数 z 满足 $z(1+i)=2i$ (i 为虚数单位), 则 $|z| = (\quad)$

- A.1 B.2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

试题分析：因为 $z(1+i)=2i$, 所以 $z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i(1-i)}{2} = 1-i$, 因此 $|z| = |1-i| = \sqrt{2}$.

考点：复数的模

2. 设全集为 R , 集合 $A = \{x | x^2 - 9 < 0\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 5\}$, 则 $A \cap (C_R B) = (\quad)$

- A. $(-3, 0)$ B. $(-3, -1)$ C. $(-3, -1]$ D. $(-3, 3)$

【答案】C

【解析】

试题分析：因为 $A = \{x | x^2 - 9 < 0\} = (-3, 3)$, $B = \{x | -1 < x \leq 5\}$, $C_R B = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$, 所以

$A \cap (C_R B) = (-3, -1]$.

考点：集合的运算

3. 掷两颗均匀的骰子, 则点数之和为 5 的概率等于 ()

- A. $\frac{1}{18}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$

【答案】B

【解析】

试题分析：掷两颗均匀的骰子, 共有 36 种基本事件, 点数之和为 5 的事件有 $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$ 这四种, 因此所求概率为 $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, 选 B.

考点：古典概型概率

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a \cdot 2^x, & x \geq 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ ($a \in R$), 若 $f[f(-1)] = 1$, 则 $a = (\quad)$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C.1 D.2

【答案】A

【解析】

试题分析：因为 $f(-1)=2$, 所以 $f[f(-1)]=4a=1$, $a=\frac{1}{4}$.

考点：分段函数

5. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c ，若 $3a=2b$ ，则 $\frac{2\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A}$ 的值为（ ）

- A. $-\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C.1 D. $\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

试题分析：由正弦定理得： $\frac{2\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A} = \frac{2b^2 - a^2}{a^2} = 2(\frac{b}{a})^2 - 1$, 又 $3a=2b$ ，所以

$$\frac{2\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A} = 2 \times \frac{9}{4} - 1 = \frac{7}{2}.$$
 选 D.

考点：正弦定理

6. 下列叙述中正确的是（ ）

- A. 若 $a,b,c \in R$ ，则 " $ax^2 + bx + c \geq 0$ " 的充分条件是 " $b^2 - 4ac \leq 0$ "
B. 若 $a,b,c \in R$ ，则 " $ab^2 > cb^2$ " 的充要条件是 " $a > c$ "
C. 命题 “对任意 $x \in R$ ，有 $x^2 \geq 0$ ” 的否定是 “存在 $x \in R$ ，有 $x^2 \geq 0$ ”
D. l 是一条直线， α, β 是两个不同的平面，若 $l \perp \alpha, l \perp \beta$ ，则 $\alpha // \beta$

【答案】D

【解析】

试题分析：当 $a < 0$ 时， " $b^2 - 4ac \leq 0$ " 推不出 " $ax^2 + bx + c \geq 0$ "， A 错，当 $b=0$ 时， " $a > c$ " 推不出 " $ab^2 > cb^2$ "， B 错，命题 “对任意 $x \in R$ ，有 $x^2 \geq 0$ ” 的否定是 “存在 $x \in R$ ，有 $x^2 < 0$ ”， C 错，因为与同一直线垂直的两平面平行，所以 D 正确。

考点：充要关系

7. 某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这4个变量之间的关系，随机抽查52名中学生，得到统计数据如表1至表4，这与性别有关联的可能性最大的变量是（ ）

表1	不及格	及格	总计
男	6	14	20
女	10	22	32
总计	16	36	52

A. 成绩

表2	不及格	及格	总计
男	4	16	20
女	12	20	32
总计	16	36	52

B. 视力

表3	不及格	及格	总计
男	8	12	20
女	8	24	32
总计	16	36	52

C. 智商

表4	不及格	及格	总计
男	14	6	20
女	2	30	32
总计	16	36	52

D. 阅读量

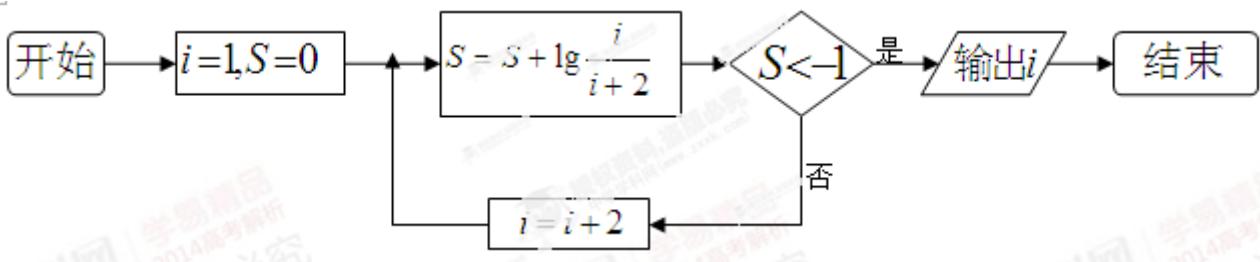
【答案】D

【解析】

试题分析：根据公式 $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 分别计算得：A. $\frac{64}{16 \times 36 \times 20 \times 32}$, B. $\frac{112^2}{16 \times 36 \times 20 \times 32}$, C. $\frac{96^2}{16 \times 36 \times 20 \times 32}$, D. $\frac{408^2}{16 \times 36 \times 20 \times 32}$, 选项D的值最大，所以与性别有关联的可能性最大为D.

考点：关联判断

8. 阅读如下程序框图，运行相应的程序，则程序运行后输出的结果为（ ）



- A.7 B.9 C.10 D.11

【答案】B

【解析】

试题分析：第一次循环： $i=1, S = \lg \frac{1}{3}$ ，第二次循环： $i=3, S = \lg \frac{1}{3} + \lg \frac{3}{5} = \lg \frac{1}{5}$ ，

第三次循环： $i=5, S = \lg \frac{1}{5} + \lg \frac{5}{7} = \lg \frac{1}{7}$ ，第四次循环： $i=7, S = \lg \frac{1}{7} + \lg \frac{7}{9} = \lg \frac{1}{9}$ ，

第五次循环： $i=9, S = \lg \frac{1}{9} + \lg \frac{9}{11} = \lg \frac{1}{11} < -1$ ，结束循环，输出 $i=9$ 。选 B。

考点：循环结构流程图

9. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右顶点作 x 轴的垂线与 C 的一条渐近线相交于 A 。若以 C 的右焦点为圆心、半径为 4 的圆经过 A 、 O 两点（ O 为坐标原点），则双曲线 C 的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ B. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】A

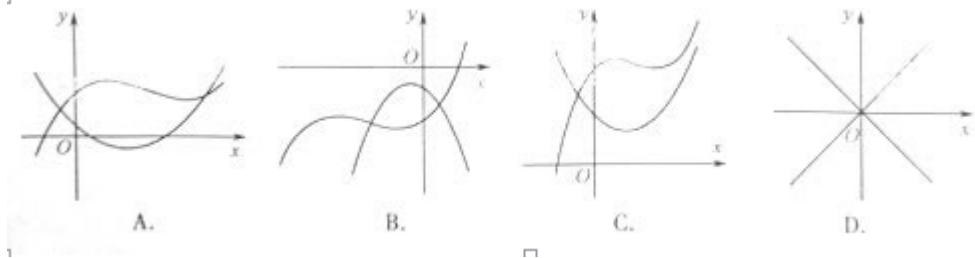
【解析】

试题分析：因为 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，所以 $A(a, b)$ 或 $A(a, -b)$ 。因此 $OA=c=4$ ，从而三角形 OAC

为正三角形，即 $\tan 60^\circ = \frac{b}{a}$ ， $a=2$ ， $b=2\sqrt{3}$ ，双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 。

考点：双曲线的渐近线

10. 在同一直角坐标系中，函数 $y=ax^2-x+\frac{a}{2}$ 与 $y=a^2x^3-2ax^2+x+a$ ($a \in R$) 的图像不可能的是（ ）



【答案】B

【解析】

试题分析：当 $a=0$ 时，两函数图像为 D 所示，当 $a \neq 0$ 时，由 $y'=3a^2x^2-4ax+1=0$ 得： $x=\frac{1}{a}$ 或 $x=\frac{1}{3a}$ ，
 $y=ax^2-x+\frac{a}{2}$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{2a}$. 当 $a < 0$ 时，由 $\frac{1}{a} < \frac{1}{2a} < \frac{1}{3a}$ 知 B 不对. 当 $a > 0$ 时，由 $\frac{1}{a} > \frac{1}{2a} > \frac{1}{3a}$ 知 A, C 正确.

考点：利用导数研究函数图像

二. 填空题：

11. 若曲线 $y=x\ln x$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x-y+1=0$ ，则点 P 的坐标是_____.

【答案】 (e, e)

【解析】

试题分析：因为 $y'=\ln x+1$ ，设切点 (a, b) ，则 $k=\ln a+1=2, a=e$, 又 $b=a\ln a=e$, $P(e, e)$.

考点：利用导数求切点

12. 已知单位向量 \vec{e}_1, \vec{e}_2 的夹角为 α ，且 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ，若向量 $\vec{a}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$ ，则 $|\vec{a}|=$ _____.

【答案】 3

【解析】

试题分析：因为 $|\vec{a}|^2=(3\vec{e}_1-2\vec{e}_2)^2=9\vec{e}_1^2-12\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2+4\vec{e}_2^2=9-12 \times \cos \alpha + 4=13-12 \times \frac{1}{3}=9$ ，所以 $|\vec{a}|=3$.

考点：向量数量积

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=7$ ，公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取最大值，

则 d 的取值范围_____.

【答案】 $(-1, -\frac{7}{8})$

【解析】

试题分析：由题意得： $a_8 > 0, a_9 < 0$ ，所以 $7+7d > 0, 7+8d < 0$ ，即 $-1 < d < -\frac{7}{8}$.

考点：等差数列性质

14. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 ，作 F_2 作 x 轴的垂线与 C 交于

A, B 两点， F_1B 与 y 轴交于点 D ，若 $AD \perp F_1B$ ，则椭圆 C 的离心率等于_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

试题分析：因为 OD 平行于 F_1B ，所以 D 为 F_1B 中点，又 $AD \perp F_1B$ ，所以 $AF_1 = AB = 2AF_2$ ，设 $AF_2 = m$ ，则

$$AF_1 = 2m, F_1F_2 = \sqrt{3}m, \text{因此 } e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{F_1F_2}{AF_1 + AF_2} = \frac{\sqrt{3}m}{2m + m} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

考点：椭圆的离心率

15. $x, y \in R$ ，若 $|x| + |y| + |x-1| + |y-1| \leq 2$ ，则 $x+y$ 的取值范围为_____.

【答案】 $[0, 2]$

【解析】

试题分析：因为 $|x| + |x-1| \geq |x - (x-1)| = 1, |y| + |y-1| \geq |y - (y-1)| = 1$ ，当且仅当 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 取等号，所以 $|x| + |y| + |x-1| + |y-1| \geq 2$ ，又 $|x| + |y| + |x-1| + |y-1| \leq 2$ ，所以 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ，因此 $x+y$ 的取值范围为 $[0, 2]$.

考点：含绝对值不等式的性质

三、解答题

16. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (a + 2\cos^2 x)\cos(2x + \theta)$ 为奇函数，且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ，其中 $a \in R, \theta \in (0, \pi)$.

(1) 求 a, θ 的值；

(2) 若 $f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = -\frac{2}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，求 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】(1) $\alpha = -1, \theta = \frac{\pi}{2}$, (2) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

【解析】

试题分析：(1)根据奇偶性定义，可得等量关系： $f(-x) = -f(x)$, 即

$$(a+2\cos^2 x)\cos(-2x+\theta) = -(a+2\cos^2 x)\cos(2x+\theta), \text{ 因为 } x \in R, \text{ 所以}$$

$$\cos(-2x+\theta) = -\cos(2x+\theta), \cos 2x \cos \theta = 0, \cos \theta = 0. \text{ 学科网又 } \theta \in (0, \pi), \text{ 所以 } \theta = \frac{\pi}{2}. \text{ 因为 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ 所以}$$

$$\left(a+2\cos^2 \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0, a = -1. \text{ (2) 由 (1) 得:}$$

$$f(x) = (-1+2\cos^2 x)\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x(-\sin 2x) = -\frac{1}{2}\sin 4x, \text{ 所以由 } f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = -\frac{2}{5}, \text{ 得}$$

$$-\frac{1}{2}\sin \alpha = -\frac{2}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ 又 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 所以 } \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \text{ 因此}$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha = \frac{4-3\sqrt{3}}{10}.$$

试题解析：(1) 因为函数 $f(x) = (a+2\cos^2 x)\cos(2x+\theta)$ 为奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$, 即

$$(a+2\cos^2 x)\cos(-2x+\theta) = -(a+2\cos^2 x)\cos(2x+\theta), \text{ 因为 } x \in R, \text{ 所以}$$

$$\cos(-2x+\theta) = -\cos(2x+\theta), \cos 2x \cos \theta = 0, \cos \theta = 0. \text{ 又 } \theta \in (0, \pi), \text{ 所以 } \theta = \frac{\pi}{2}. \text{ 因为 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ 所以}$$

$$\left(a+2\cos^2 \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0, a = -1. \text{ (2) 由 (1) 得:}$$

$$f(x) = (-1+2\cos^2 x)\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x(-\sin 2x) = -\frac{1}{2}\sin 4x, \text{ 所以由 } f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = -\frac{2}{5}, \text{ 得}$$

$$-\frac{1}{2}\sin \alpha = -\frac{2}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ 又 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 所以 } \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \text{ 因此}$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha = \frac{4-3\sqrt{3}}{10}.$$

考点：函数奇偶性，同角三角函数关系，二倍角公式

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}, n \in N^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明：对任意 $n > 1$, 都有 $m \in N^*$, 使得 a_1, a_n, a_m 成等比数列.

【答案】(1) $a_n = 3n - 2$, (2) 详见解析.

【解析】

试题分析: (1) 由和项求通项, 主要根据 $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 进行求解. 因为 $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$, 所以当 $n \geq 2$ 时

$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n - 2$. 又 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1 = 3 \times 1 - 2$, 所以 $a_n = 3n - 2$. (2) 证明存在性问题, 实质是确定 m .

要使得 a_1, a_n, a_m 成等比数列, 只需要 $a_n^2 = a_1 a_m$, 即 $(3n-2)^2 = 1 \times (3m-2)$, $m = 3n^2 - 4n + 2$. 而此时 $m \in N^*$, 且 $m > n$, 所以对任意 $n > 1$, 都有 $m \in N^*$, 使得 a_1, a_n, a_m 成等比数列.

试题解析: (1) 因为 $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$, 所以当 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n - 2$. 又 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1 = 3 \times 1 - 2$, 所以 $a_n = 3n - 2$.

(2) 要使得 a_1, a_n, a_m 成等比数列, 学科网只需要 $a_n^2 = a_1 a_m$, 即

$(3n-2)^2 = 1 \times (3m-2)$, $m = 3n^2 - 4n + 2$. 而此时 $m \in N^*$, 且 $m > n$, 所以对任意 $n > 1$, 都有 $m \in N^*$, 使得 a_1, a_n, a_m 成等比数列.

考点: 由和项求通项, 等比数列

18. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = (4x^2 + 4ax + a^2)\sqrt{x}$, 其中 $a < 0$.

(1) 当 $a = -4$ 时, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最小值为 8, 求 a 的值.

【答案】(1) $(0, \frac{2}{5})$ 和 $(2, +\infty)$, (2) -10 .

【解析】

试题分析: (1) 利用导数求函数单调区间, 首先确定定义域: $[0, +\infty)$, 然后对函数求导, 在定义域内求导函数的零点: $f'(x) = (8x + 4a)\sqrt{x} + \frac{4x^2 + 4ax + a^2}{2\sqrt{x}} = \frac{20x^2 + 12ax + a^2}{2\sqrt{x}} = \frac{(10x + a)(2x + a)}{2\sqrt{x}}$, 当 $a = -4$ 时,

$f'(x) = \frac{2(5x - 2)(x - 2)}{\sqrt{x}}$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{2}{5}$ 或 $x = 2$, 列表分析得单调增区间: $(0, \frac{2}{5})$ 和 $(2, +\infty)$, (2) 已知

函数最值, 求参数, 解题思路还是从求最值出发. 由 (1) 知,

$f'(x) = (8x + 4a)\sqrt{x} + \frac{4x^2 + 4ax + a^2}{2\sqrt{x}} = \frac{20x^2 + 12ax + a^2}{2\sqrt{x}} = \frac{(10x + a)(2x + a)}{2\sqrt{x}}$, 所以导函数的零点为 $x = -\frac{a}{10}$ 或

$x = -\frac{a}{2}$, 列表分析可得: 函数增区间为 $(0, -\frac{a}{10})$ 和 $(-\frac{a}{2}, +\infty)$, 减区间为 $(-\frac{a}{10}, -\frac{a}{2})$. 由于 $f(-\frac{a}{2}) = 0$, 所以

$-\frac{a}{2} \notin [1, 4]$, 当 $0 < -\frac{a}{2} < 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 4 + 4a + a^2 = 8, a = -2 \pm 2\sqrt{2}$, (舍), 当 $-\frac{a}{2} > 4$ 时,

$f(x)_{\min} = \min\{f(1), f(4)\}$, 由于 $f(1) \neq 8$, 所以 $f(4) = 2(64 + 16a + a^2) = 8$, 且 $f(4) < f(1)$, 解得 $a = -10$ 或 $a = -6$ (舍), 当 $a = -10$ 时, $f(x)$ 在 $(1, 4)$ 上单调递减, 满足题意, 综上 $a = -10$.

试题解析: (1) 定义域: $[0, +\infty)$, 而 $f'(x) = (8x + 4a)\sqrt{x} + \frac{4x^2 + 4ax + a^2}{2\sqrt{x}} = \frac{20x^2 + 12ax + a^2}{2\sqrt{x}} = \frac{(10x + a)(2x + a)}{2\sqrt{x}}$,

当 $a = -4$ 时, $f'(x) = \frac{2(5x - 2)(x - 2)}{\sqrt{x}}$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{2}{5}$ 或 $x = 2$, 列表:

x	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

所以单调增区间为: $(0, \frac{2}{5})$ 和 $(2, +\infty)$, (2) 由 (1) 知,

$f'(x) = (8x + 4a)\sqrt{x} + \frac{4x^2 + 4ax + a^2}{2\sqrt{x}} = \frac{20x^2 + 12ax + a^2}{2\sqrt{x}} = \frac{(10x + a)(2x + a)}{2\sqrt{x}}$, 所以导函数的零点为 $x = -\frac{a}{10}$ 或

$x = -\frac{a}{2}$, 列表分析可得: 函数增区间为 $(0, -\frac{a}{10})$ 和 $(-\frac{a}{2}, +\infty)$, 减区间为 $(-\frac{a}{10}, -\frac{a}{2})$. 由于 $f(-\frac{a}{2}) = 0$, 所以

$-\frac{a}{2} \notin [1, 4]$, 当 $0 < -\frac{a}{2} < 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 4 + 4a + a^2 = 8, a = -2 \pm 2\sqrt{2}$, (舍), 当 $-\frac{a}{2} > 4$ 时,

$f(x)_{\min} = \min\{f(1), f(4)\}$, 由于 $f(1) \neq 8$, 所以 $f(4) = 2(64 + 16a + a^2) = 8$, 且 $f(4) < f(1)$, 解得 $a = -10$ 或

$a = -6$ (舍), 当 $a = -10$ 时, $f(x)$ 在 $(1, 4)$ 上单调递减, 满足题意, 综上 $a = -10$.

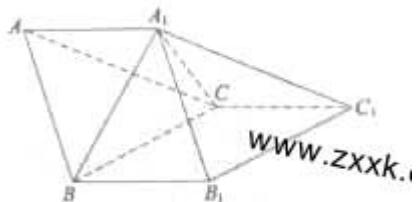
考点: 利用导数求函数单调区间, 利用导数求函数最值

19. (本小题满分 12 分)

如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp BC, A_1B \perp BB_1$.

(1) 求证: $A_1C_1 \perp CC_1$;

(2) 若 $AB = 2, AC = \sqrt{3}, BC = \sqrt{7}$, 问 AA_1 为何值时, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 体积最大, 并求此最大值。



【答案】(1) 详见解析, (2) $AA_1 = \frac{\sqrt{42}}{7}$ 时, 体积 V 取到最大值 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

【解析】

试题分析：(1) 证明线线垂直，一般利用线面垂直判定及性质定理进行多次转化证明。由 $AA_1 \perp BC$ 知 $BB_1 \perp BC$ ，又 $BB_1 \perp A_1B$ ，故 $BB_1 \perp$ 平面 BCA_1 ，即 $BB_1 \perp AC$ ，又 $BB_1 \parallel CC_1$ ，所以 $AC \perp CC_1$ 。(2) 研究三棱柱体积，关键明确底面上的高，本题由(1)知： $BB_1 \perp$ 平面 BCA_1 ，因此将三棱柱体积转化为等高同底的三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 体积(三倍关系)，而三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 体积又等于三棱锥 $B-A_1B_1C$ 体积，三棱锥 $B-A_1B_1C$ 体积等于 $\frac{1}{3}BB_1 \times S_{\triangle A_1BC}$ ，设 $AA_1 = x$ ，不难计算 $S_{\triangle A_1BC} = \frac{\sqrt{12-7x^2}}{2}$ 。三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为

$$V = 3 \times \frac{1}{3}BB_1 \times S_{\triangle A_1BC} = \frac{x\sqrt{12-7x^2}}{2} \text{，故当 } x = \sqrt{\frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \text{ 时，即 } AA_1 = \frac{\sqrt{42}}{7} \text{ 时，体积 } V \text{ 取到最大值 } \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

试题解析：

(1) 证明：由 $AA_1 \perp BC$ 知 $BB_1 \perp BC$ ，又 $BB_1 \perp A_1B$ ，故 $BB_1 \perp$ 平面 BCA_1 ，即 $BB_1 \perp AC$ ，又 $BB_1 \parallel CC_1$ ，所以 $AC \perp CC_1$ 。(2) 设 $AA_1 = x$ ，在 $Rt\triangle A_1BB_1$ 中 $BA_1 = \sqrt{A_1B^2 - BB_1^2} = \sqrt{4-x^2}$ ，同理 $A_1C = \sqrt{A_1C_1^2 - CC_1^2} = \sqrt{3-x^2}$ ，在 $\triangle A_1BC$ 中， $\cos \angle BAC = \frac{A_1B^2 + A_1C^2 - BC^2}{2A_1B \cdot A_1C} = -\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)(3-x^2)}}$ ， $\sin \angle BAC = \sqrt{\frac{12-7x^2}{(4-x^2)(3-x^2)}}$ ，所以 $S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2}A_1B \cdot A_1C \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{12-7x^2}}{2}$ 。从而三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为

$$V = 3 \times \frac{1}{3}BB_1 \times S_{\triangle A_1BC} = \frac{x\sqrt{12-7x^2}}{2} \text{ 因 } x\sqrt{12-7x^2} = \sqrt{12x^2 - 7x^4} = \sqrt{-7(x^2 - \frac{6}{7})^2 + \frac{36}{7}} \text{，故当 } x = \sqrt{\frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \text{ 时，即 } AA_1 = \frac{\sqrt{42}}{7} \text{ 时，体积 } V \text{ 取到最大值 } \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

考点：线面垂直判定与性质定理，三棱柱的体积

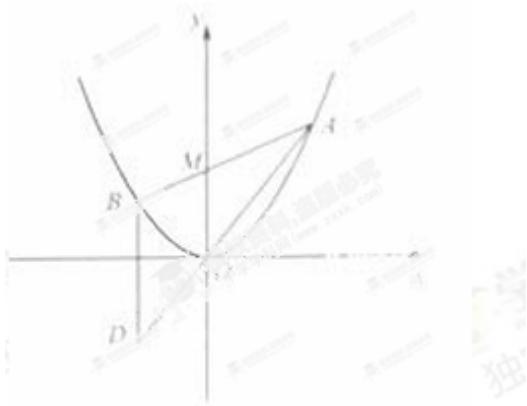
20. (本小题满分 13 分)

如图，已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ ，过点 $M(0, 2)$ 任作一直线与 C 相交于 A, B 两点，过点 B 作 y 轴的平行线与直线 AO 相交于点 D (O 为坐标原点)。

(1) 证明：动点 D 在定直线上；

(2) 作 C 的任意一条切线 l (不含 x 轴) 与直线 $y = 2$ 相交于点 N_1 ，与(1)中的定直线相交于点 N_2 ，

证明： $|MN_2|^2 - |MN_1|^2$ 为定值，并求此定值。



【答案】(1) 详见解析, (2) 8.

【解析】

试题分析: (1) 证明动点 D 在定直线上, 实质是求动点 D 的轨迹方程, 本题解题思路为根据条件求出动点 D 的坐标, 进而探求动点 D 轨迹: 依题意可设 AB 方程为 $y = kx + 2$, 代入 $x^2 = 4y$, 得 $x^2 = 4(kx + 2)$, 即 $x^2 - 4kx - 8 = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有: $x_1 x_2 = -8$, 直线 AO 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$, BD 的方程为 $x = x_2$; 解得交点 D 的坐标为 $(x_2, \frac{y_1 x_2}{x_1})$, 注意到 $x_1 x_2 = -8$ 及 $x_1^2 = 4y_1$, 则有 $y = \frac{y_1 x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 x_2}{4x_1} = \frac{x_1 x_2}{4} = -2$, 因此 D 点在定直线 $y = -2(x \neq 0)$ 上.

(2) 本题以算代证, 从切线方程出发, 分别表示出 N_1, N_2 的坐标, 再化简 $MN_2^2 - MN_1^2$.

设切线 l 的方程为 $y = ax + b(a \neq 0)$, 代入 $x^2 = 4y$ 得 $x^2 = 4(ax + b)$, 即 $x^2 - 4ax - 4b = 0$, 由 $\Delta = 0$ 得 $(4a)^2 + 16b = 0$, 化简整理得 $b = -a^2$, 故切线 l 的方程可写为 $y = ax - a^2$, 分别令 $y = 2, y = -2$ 得 N_1, N_2 的坐标为 $N_1(\frac{2}{a} + a, 2), N_2(-\frac{2}{a} + a, -2)$, 则 $MN_2^2 - MN_1^2 = (\frac{2}{a} - a)^2 + 4^2 - (-\frac{2}{a} + a)^2 = 8$, 即 $MN_2^2 - MN_1^2$ 为定值 8.

试题解析: (1) 解: 依题意可设 AB 方程为 $y = kx + 2$, 代入 $x^2 = 4y$, 得 $x^2 = 4(kx + 2)$, 即 $x^2 - 4kx - 8 = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有: $x_1 x_2 = -8$, 直线 AO 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$, BD 的方程为 $x = x_2$; 解得交点 D 的坐标为 $(x_2, \frac{y_1 x_2}{x_1})$, 注意到 $x_1 x_2 = -8$ 及 $x_1^2 = 4y_1$, 则有 $y = \frac{y_1 x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 x_2}{4x_1} = \frac{x_1 x_2}{4} = -2$, 因此 D 点在定直线 $y = -2(x \neq 0)$ 上.

(2) 依题设, 切线 l 的斜率存在且不等于零, 设切线 l 的方程为 $y = ax + b(a \neq 0)$, 代入 $x^2 = 4y$ 得 $x^2 = 4(ax + b)$, 即 $x^2 - 4ax - 4b = 0$, 由 $\Delta = 0$ 得 $(4a)^2 + 16b = 0$, 化简整理得 $b = -a^2$, 故切线 l 的方程可写为 $y = ax - a^2$, 分别令 $y = 2, y = -2$ 得 N_1, N_2 的坐标为 $N_1(\frac{2}{a} + a, 2), N_2(-\frac{2}{a} + a, -2)$, 则

$$MN_2^2 - MN_1^2 = \left(\frac{2}{a} - a\right)^2 + 4^2 - \left(\frac{2}{a} + a\right)^2 = 8, \text{ 即 } MN_2^2 - MN_1^2 \text{ 为定值 8.}$$

考点：曲线的交点，曲线的切线方程

21. (本小题满分 14 分)

将连续正整数 $1, 2, \dots, n (n \in N^*)$ 从小到大排列构成一个数 $123\dots n$, $F(n)$ 为这个数的位数(如 $n=12$ 时, 此数为 123456789101112 , 共有 15 个数字, $f(12)=15$), 现从这个数中随机取一个数字, $p(n)$ 为恰好取到 0 的概率.

(1) 求 $p(100)$;

(2) 当 $n \leq 2014$ 时, 求 $F(n)$ 的表达式;

(3) 令 $g(n)$ 为这个数中数字 0 的个数, $f(n)$ 为这个数中数字 9 的个数, $h(n) = f(n) - g(n)$,

$S = \{n \mid h(n) = 1, n \leq 100, n \in N^*\}$, 求当 $n \in S$ 时 $p(n)$ 的最大值.

【答案】(1) $p(100) = \frac{11}{192}$; (2) $F(n) = \begin{cases} n, & 1 \leq n \leq 9 \\ 2n-9, & 10 \leq n \leq 99 \\ 3n-108, & 100 \leq n \leq 999 \\ 4n-1107, & 1000 \leq n \leq 2014 \end{cases}$ (3) $\frac{1}{19}$.

【解析】

试题分析: (1) 解概率应用题, 关键要正确理解事件. 当 $n=100$ 时, 这个数中有 9 个一位数, 90 个二位数, 一个三位数, 总共有 192 个数字, 其中数字 0 的个数为 $9+2=11$, 所以恰好取到 0 的概率为 $p(100) = \frac{11}{192}$; (2)

按 (1) 的思路, 可分类写出 $F(n)$ 的表达式: $F(n) = \begin{cases} n, & 1 \leq n \leq 9 \\ 2n-9, & 10 \leq n \leq 99 \\ 3n-108, & 100 \leq n \leq 999 \\ 4n-1107, & 1000 \leq n \leq 2014 \end{cases}$, (3) 同 (1) 的思路, 分

一位数, 二位数, 三位数进行讨论即可, 当 $n=b (1 \leq b \leq 9, b \in N^*)$, $g(n)=0$; 当

$n=10k+b, (1 \leq k \leq 9, 0 \leq b \leq 9, k \in N^*, b \in N)$, $g(n)=k$, 当 $n=1000$, $g(n)=11$; 即

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n=b, 1 \leq b \leq 9, b \in N^*, \\ k, & n=10k+b, 1 \leq k \leq 9, 0 \leq b \leq 9, k \in N^*, b \in N, \text{ 同理有} \\ 11, & n=1000 \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & 1 \leq n \leq 8 \\ k, & n = 10k + b - 1, 1 \leq k \leq 8, 0 \leq b \leq 9, k \in N^*, b \in N, \\ & n - 80, 89 \leq n \leq 98 \\ 20, & n = 99, 100 \end{cases}$$

由 $h(n) = f(n) - g(n) = 1$, 可知 $S = \{9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 90\}$, 当 $n = 9$ 时, $P(9) = 0$, 当 $n = 90$ 时,

$P(90) = \frac{g(90)}{F(90)} = \frac{9}{171} = \frac{1}{19}$, 当 $n = 10k + 9 (1 \leq k \leq 8, k \in N^*)$ 时, $P(n) = \frac{g(n)}{F(n)} = \frac{k}{2n-9} = \frac{k}{20k+9}$, 由 $y = \frac{k}{20k+9}$, 关于 k 单调递增, 故当 $n = 10k + 9 (1 \leq k \leq 8, k \in N^*)$, $P(n)$ 最大值为 $P(89) = \frac{8}{169}$. 又 $\frac{8}{169} < \frac{1}{19}$, 所以当 $n \in S$ 时, $P(n)$ 最大值为 $\frac{1}{19}$.

试题解析: (1) 解: 当 $n=100$ 时, 这个数中总共有 192 个数字, 其中数字 0 的个数为 11, 所以恰好取到 0

的概率为 $p(100) = \frac{11}{192}$; (2) $F(n) = \begin{cases} n, & 1 \leq n \leq 9 \\ 2n-9, & 10 \leq n \leq 99 \\ 3n-108, & 100 \leq n \leq 999 \\ 4n-1107, & 1000 \leq n \leq 2014 \end{cases}$ (3) 当 $n = b (1 \leq b \leq 9, b \in N^*)$, $g(n) = 0$; 当

$n = 10k + b, (1 \leq k \leq 9, 0 \leq b \leq 9, k \in N^*, b \in N)$, $g(n) = k$, 当 $n = 1000$, $g(n) = 11$; 即

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n = b, 1 \leq b \leq 9, b \in N^* \\ k, & n = 10k + b, 1 \leq k \leq 9, 0 \leq b \leq 9, k \in N^*, b \in N, \text{ 同理有} \\ 11, & n = 1000 \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & 1 \leq n \leq 8 \\ k, & n = 10k + b - 1, 1 \leq k \leq 8, 0 \leq b \leq 9, k \in N^*, b \in N, \\ & n - 80, 89 \leq n \leq 98 \\ 20, & n = 99, 100 \end{cases}$$

由 $h(n) = f(n) - g(n) = 1$, 可知 $n = 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 90$, 所以当 $n \leq 100$ 时,

$S = \{9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 90\}$, 当 $n = 9$ 时, $P(9) = 0$, 当 $n = 90$ 时, $P(90) = \frac{g(90)}{F(90)} = \frac{9}{171} = \frac{1}{19}$, 当 $n = 10k + 9 (1 \leq k \leq 8, k \in N^*)$ 时, $P(n) = \frac{g(n)}{F(n)} = \frac{k}{2n-9} = \frac{k}{20k+9}$, 由 $y = \frac{k}{20k+9}$, 关于 k 单调递增, 故当 $n = 10k + 9 (1 \leq k \leq 8, k \in N^*)$, $P(n)$ 最大值为 $P(89) = \frac{8}{169}$. 又 $\frac{8}{169} < \frac{1}{19}$, 所以当 $n \in S$ 时, $P(n)$ 最大值为 $\frac{1}{19}$.

考点: 古典概型概率