

绝密★启用前

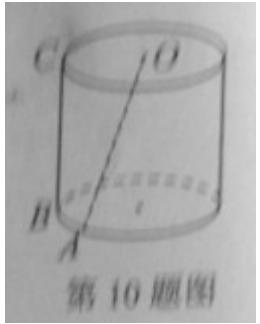
2013年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）
数学试卷（文史类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 不等式 $\frac{x}{2x-1} < 0$ 的解为_____.
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 30$ ，则 $a_2 + a_3 =$ _____.
3. 设 $m \in \mathbf{R}$ ， $m^2 + m - 2 + (m^2 - 1)i$ 是纯虚数，其中 i 是虚数单位，则 $m =$ _____.
4. 若 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ， $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ，则 $y =$ _____.
5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 所对的边分别是 a 、 b 、 c 。若 $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0$ ，则角 C 的大小是_____.
6. 某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%。在一次考试中，男、女生平均分数分别为75、80，则这次考试该年级学生平均分数为_____.
7. 设常数 $a \in \mathbf{R}$ 。若 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为-10，则 $a =$ _____.
8. 方程 $\frac{9}{3^x - 1} + 1 = 3^x$ 的实数解为_____.
9. 若 $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{3}$ ，则 $\cos(2x - 2y) =$ _____.
10. 已知圆柱 Ω 的母线长为 l ，底面半径为 r ， O 是上地面圆心， A 、 B 是下底面圆心上两个不同的点， BC 是母线，如图。若直线 OA 与 BC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$ ，则 $\frac{l}{r} =$ _____。

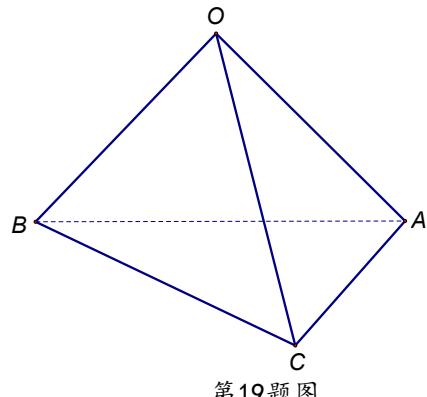
第10题图
11. 盒子中装有编号为1,2,3,4,5,6,7的七个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是_____。（结果用最简分数表示）。
12. 设 AB 是椭圆 Γ 的长轴，点 C 在 Γ 上，且 $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$ 。若 $AB = 4$ ， $BC = \sqrt{2}$ ，则 Γ 的两个焦点之间的距离为_____。
13. 设常数 $a > 0$ ，若 $9x + \frac{a^2}{x} \geq a + 1$ 对一切正实数 x 成立，则 a 的取值范围为_____。
14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为1。记以 A 为起点，其余顶点为终点的向量分别为 \vec{a}_1 、

\vec{a}_2 、 \vec{a}_3 ；以 C 为起点，其余顶点为终点的向量分别为 \vec{c}_1 、 \vec{c}_2 、 \vec{c}_3 。若 $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ 且 $i \neq j, k \neq l$ ，则 $(\vec{a}_i + \vec{a}_j) \cdot (\vec{c}_k + \vec{c}_l)$ 的最小值是____。

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分.

三. 解答题(本大题共有5题, 满分74分) 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域写出必要的步骤.

- 如图, 正三棱锥 $O-ABC$ 底面边长为 2, 高为 1, 求该三棱锥的体积及表面积.



第19题图

20. (本题满分14分) 本题共有2个小题. 第1小题满分5分, 第2小题满分9分.

甲厂以 x 千米/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求 $1 \leq x \leq 10$ ），每小时可获得的利润是 $100(5x+1-\frac{3}{x})$ 元。

- (1) 求证: 生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a\left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$;
 (2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该如何选取何种生产速度? 并求此最大利润.

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题. 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x)$, 其中常数 $\omega > 0$.

(1) 令 $\omega = 1$, 判断函数 $F(x) = f(x) + f(x + \frac{\pi}{2})$ 的奇偶性并说明理由;

(2) 令 $\omega = 2$, 将函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再往上平移 1 个单位, 得到

函数 $y = g(x)$ 的图像. 对任意的 $a \in R$, 求 $y = g(x)$ 在区间 $[a, a + 10\pi]$ 上零点个数的所有可能值.

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题. 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分8分.

已知函数 $f(x) = 2 - |x|$. 无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n), n \in N^*$.

(1) 若 $a_1 = 0$, 求 a_2, a_3, a_4 ;

(2) 若 $a_1 > 0$, 且 a_1, a_2, a_3 成等比数列, 求 a_1 的值;

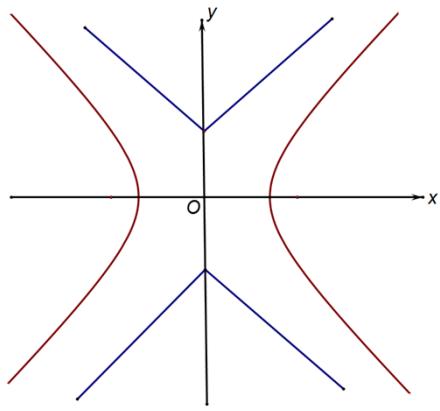
(3) 是否存在 a_1 , 使得 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ 成等差数列? 若存在, 求出所有这样的 a_1 ; 若不存在, 说明理由.

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题. 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分9分.

如图, 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, 曲线

$C_2: |y| = |x| + 1$. P 是平面内一点, 若存在过点 P 的直线与 C_1, C_2 都有公共点, 则称 P 为“ $C_1 - C_2$ 型点”.

(1) 在正确证明 C_1 的左焦点是“ $C_1 - C_2$ 型点”时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);



- (2) 设直线 $y = kx$ 与 C_2 有公共点, 求证 $|k| > 1$, 进而证明原点不是“ $C_1 - C_2$ 型点”;
- (3) 求证: 圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内的点都不是“ $C_1 - C_2$ 型点”.

