2021年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学

第一部分（选择题共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-1,2)$　　B. $(-1,2]$　　C. $[0,1)$　　D. $[0,1]$

2. 在复平面内，复数 z 满足 $(1-i)z=2$，则 $z=$（　）

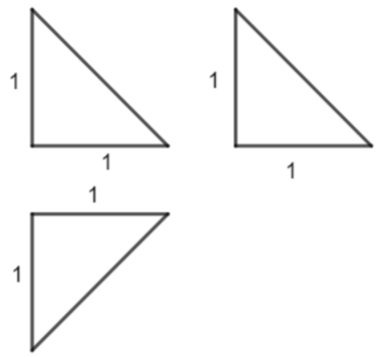
A. $2+i$　　B. $2-i$　　C. $1-i$　　D. $1+i$

3.

已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0,1]$ 的函数，那么“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为（　）



A. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$　　B. 4　　C. $3+\sqrt{3}$　　D. 2

5. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，且离心率为 2，则该双曲线的标准方程为（　）

A. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　C. $x^2-\dfrac{\sqrt{3}y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{3}-y^2=1$

6. $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列，其中 $\dfrac{a_k}{b_k}\left(1\le k\le 5\right)$ 为常值，$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则 $b_3=$（

）

A. 64　　B. 128　　C. 256　　D. 512

7. 函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$，试判断函数的奇偶性及最大值（　）

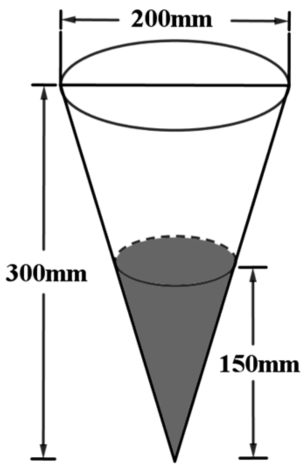
A. 奇函数，最大值为2

B. 偶函数，最大值为2

C. 奇函数，最大值为$\frac{9}{8}$

D. 偶函数，最大值为$\frac{9}{8}$

8. 定义：24小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度．其中小雨（$<10\text{mm}$），中雨（$10\text{mm}-25\text{mm}$），大雨（$25\text{mm}-50\text{mm}$），暴雨（$50\text{mm}-100\text{mm}$），小明用一个圆锥形容器接了24小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级（ ）



A. 小雨　　B. 中雨　　C. 大雨　　D. 暴雨

9. 已知圆 $C: x^2+y^2=4$，直线 $l: y=kx+m$，当 k 变化时，l 截得圆 C 弦长的最小值为2，则 $m=$（　）

A. ± 2　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. $\pm\sqrt{5}$

10. 数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列，且 $a_1\geq 3$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则 n 的最大值为（　）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

第二部分（非选择题共110分）

二、填空题5小题，每小题5分，共25分．

11. $(x^3-\frac{1}{x})^4$ 展开式中常数项为__________.

12.

已知抛物线 $C: y^2=4x$，焦点为 F，点 M 为抛物线 C 上的点，且 $|FM|=6$，则 M 的横坐标是_______；

作$MN\perp x$轴于N，则$S_{\triangle FMN}=$_______.

13. $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(2,-1)$，$\vec{c}=(0,1)$，则$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$_______；$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_______.

14. 若点$P(\cos\theta,\sin\theta)$与点$Q(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$关于$y$轴对称，写出一个符合题意的$\theta=$___.

15. 已知函数$f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若$k=0$，则$f(x)$有两个零点；

②$\exists k<0$，使得$f(x)$有一个零点；

③$\exists k<0$，使得$f(x)$有三个零点；

④$\exists k>0$，使得$f(x)$有三个零点.

以上正确结论得序号是_______.

三、解答题共6小题，共85分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

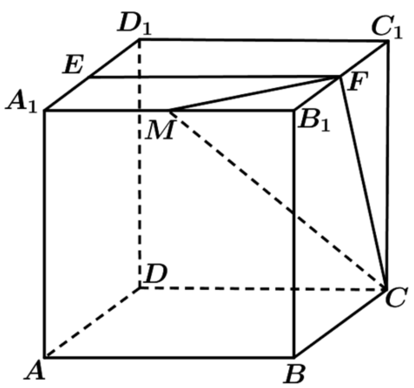
16. 已知在$\triangle ABC$中，$c=2b\cos B$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

（1）求B的大小；

（2）在下列三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，并求出BC边上的中线的长度.

①$c=\sqrt{2}b$；②周长为$4+2\sqrt{3}$；③面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

17. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点E为A_1D_1中点，直线B_1C_1交平面CDE于点F.



（1）证明：点 F 为 B_1C_1 的中点；

（2）若点 M 为棱 A_1B_1 上一点，且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.

18.

为加快新冠肺炎检测效率，某检测机构采取“k合1检测法”，即将k个人的拭子样本合并检测，若为阴性，则可以确定所有样本都是阴性的；若为阳性，则还需要对本组的每个人再做检测．现有100人，已知其中2人感染病毒.

（1）①若采用“10合1检测法”，且两名患者在同一组，求总检测次数；

②已知10人分成一组，分10组，两名感染患者在同一组的概率为$\frac{1}{11}$，定义随机变量X为总检测次数，求检测次数X的分布列和数学期望$E(X)$；

（2）若采用“5合1检测法”，检测次数Y的期望为$E(Y)$，试比较$E(X)$和$E(Y)$的大小(直接写出结果).

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{3-2x}{x^2+a}$.

（1）若 $a=0$，求 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处切线方程；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间，以及最大值和最小值.

20. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(0,-2)$，以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

（1）求椭圆E的标准方程；

（2）过点P(0，-3)的直线l斜率为k，交椭圆E于不同的两点B，C，直线AB，AC交y=-3于点M、N，直线AC交y=-3于点N，若|PM|+|PN|≤15，求k的取值范围.

21. 定义 R_p 数列 $\left\{a_n\right\}$：对实数p，满足：① $a_1+p\geq 0$，$a_2+p=0$；② $\forall n\in N^*,a_{4n-1}<a_{4n}$；③ $a_{m+n}\in\left\{a_m+a_n+p,a_m+a_n+p+1\right\}$，$m,n\in N^*$.

（1）对于前4项2，-2，0，1的数列，可以是 R_2 数列吗？说明理由；

（2）若 $\left\{a_n\right\}$ 是 R_0 数列，求 a_5 的值；

（3）是否存在p，使得存在 R_p 数列 $\left\{a_n\right\}$，对 $\forall n\in N^*,S_n\geq S_{10}$？若存在，求出所有这样的$p$；若不存在，说明理由.