2025年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷　回忆版）

数学

本试卷分第1卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟.第1卷1至3页第II卷4至6页.

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码.答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.在天津考生获取更多学习资料祝各位考生考试顺利！

第I卷（选择题）

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.

2．本卷共9小题，每小题5分，共45分.

参考公式：

·如果事件 A,B **互斥，那么** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

·如果事件 A,B **相互独立，那么** $P(AB)=P(A)\ P(B)$

·棱柱的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$**，其中S表示棱柱的底面面积，*h*表示棱柱的高.**

·圆锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$**，其中S表示圆锥的底面面积，*h*表示圆锥的高.**

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\},A=\{1,3\},B=\{2,3,5\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$（　　）

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{2,4\}$　　D. $\{4\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由集合的并集、补集的运算即可求解.

【详解】由 $A=\{1,3\},B=\{2,3,5\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$，

集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，

故 $\complement_U(A\cup B)=\{4\}$

故选：D.

2. 设 $x \in \mathbf{R}$，则“ $x=0$ ”是“ $\sin 2x=0$ ”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】通过判断是否能相互推出，由充分条件与必要条件的定义可得.

【详解】由 $x=0 \Rightarrow \sin 2x=\sin 0=0$，则“ $x=0$ ”是“ $\sin 2x=0$ ”的充分条件；

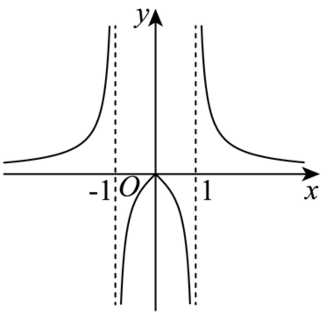
又当 $x=\pi$ 时， $\sin 2x=\sin 2\pi=0$，可知 $\sin 2x=0 \nRightarrow x=0$，

故“ $x=0$ ”不是“ $\sin 2x=0$ ”的必要条件，

综上可知，“ $x=0$ ”是“ $\sin 2x=0$ ”的充分不必要条件.

故选：A.

3. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象如下，则 $f\left(x\right)$ 的解析式可能为（　）



A. $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$　　B. $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$　　C. $f(x)=\dfrac{|x|}{1-x^2}$　　D. $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

【答案】D

【解析】

【分析】先由函数奇偶性排除 AB，再由 $x \in \left(0,1\right)$ 时函数值正负情况可得解.

【详解】由图可知函数为偶函数，而函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1-\left|x\right|}$ 和函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\left|x\right|-1}$ 为奇函数，故排除选项 AB；

又当 $x \in \left(0,1\right)$ 时 $1-x^2>0, x^2-1<0$，此时 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x\right|}{1-x^2}>0, f\left(x\right)=\dfrac{\left|x\right|}{x^2-1}<0$，

由图可知当 $x \in \left(0,1\right)$ 时， $f\left(x\right)<0$，故 C 不符合，D 符合.

故选：D

4. 若 m 为直线，α,β 为两个平面，则下列结论中正确的是（　）

A. 若 $m//\alpha,n\subset\alpha$，则 $m//n$

B. 若 $m\perp\alpha,m\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

C. 若 $m//\alpha,m\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $m\subset\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\beta$

【答案】C

【解析】

【分析】根据线面平行的定义可判断 A 的正误，根据空间中垂直关系的转化可判断 BCD 的正误.

【详解】对于 A，若 $m//\alpha,n\subset\alpha$，则 m,n 可平行或异面，故 A 错误；

对于 B，若 $m\perp\alpha,m\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$，故 B 错误；

对于 C，两条平行线有一条垂直于一个平面，则另一个必定垂直这个平面，

现 $m//a,m\perp\beta$，故 $a\perp\beta$，故 C 正确；

对于 D，$m\subset\alpha,\alpha\perp\beta$，则 m 与 β 可平行或相交或 $m\subset\beta$，故 D 错误；

故选：C.

5. 下列说法中错误的是（　）

A. 若 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(X\le\mu-\sigma)=P(X\ge\mu+\sigma)$

B. 若 X： $N\left(1,2^2\right)$，$Y\sim N\left(2,2^2\right)$，则 $P(X<1)<P(Y<2)$

C. $|r|$ 越接近 1，相关性越强

D. $|r|$ 越接近 0，相关性越弱

【答案】B

【解析】

【分析】根据正态分布以及相关系数的概念直接判断即可.

【详解】对于 A，根据正态分布对称性可知，$P\left(X\le\mu-\sigma\right)=P\left(X\ge\mu+\sigma\right)$，A 说法正确；

对于 B，根据正态分布对称性可知，$P\left(X<1\right)=P\left(Y<2\right)=0.5$，B 说法错误；

对于 C 和 D，相关系数 $|r|$ 越接近 0，相关性越弱，越接近 1，相关性越强，故 C 和 D 说法正确.

故选：B

6. $S_n=-n^2+8n$，则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为（　）

A. 112　　B. 48　　C. 80　　D. 64

【答案】C

【解析】

【分析】先由题设结合 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，再结合数列 $\{a_n\}$ 各项正负情况即可求解.

【详解】因为 $S_n=-n^2+8n$，

所以当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-1^2+8\times1=7$，

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-n^2+8n\right)-\left[-(n-1)^2+8(n-1)\right]=-2n+9$，

经检验，$a_1=7$ 满足上式，

所以 $a_n=-2n+9\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，令 $a_n=-2n+9\geq0\Rightarrow n\leq4$，$a_n=-2n+9\leq0\Rightarrow n\geq5$，

设数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和为 T_n，

则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 4 项和为 $T_4=S_4=-4^2+8\times4=16$

数列 $\{|a_n|\}$ 的前12项和为

$$T_{2n}=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{12}|=a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-a_6-\cdots-a_{12}$$

$$=2S_4-S_{12}=2\times16-\left(-12^2+8\times12\right)=80.$$

故选：C

7. 函数 $f(x)=0.3^x-\sqrt{x}$ 的零点所在区间是（　）

A. $(0,0.3)$　　B. $(0.3,0.5)$　　C. $(0.5,1)$　　D. $(1,2)$

【答案】B

【解析】

【分析】利用指数函数与幂函数的单调性结合零点存在性定理计算即可.

【详解】由指数函数、幂函数的单调性可知：$y=0.3^x$ 在 R 上单调递减，$y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)=0.3^x-\sqrt{x}$ 在定义域上单调递减，

显然 $f(0)=1>0, f(0.3)=0.3^{0.3}-0.3^{0.5}>0, f(0.5)=0.3^{0.5}-0.5^{0.5}<0$，

所以根据零点存在性定理可知 $f(x)$ 的零点位于 $(0.3,0.5)$.

故选：B

8. $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<\pi)$，在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，且$x=\frac{\pi}{12}$为它的一条对称轴，$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$是它的一个对称中心，当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)$的最小值为（　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $-\frac{1}{2}$　　　　C. 1　　　　D. 0

【答案】A

【解析】

【分析】利用正弦函数的对称性得出$\omega=4n+2$，根据单调性得出$0<\omega\le 2$，从而确定ω，结合对称轴与对称中心再求出φ，得出函数解析式，利用整体思想及正弦函数的性质即可得解.

【详解】设$f\left(x\right)$的最小正周期为T，根据题意有$\begin{cases}\frac{\pi}{12}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=m\pi\end{cases}$，$\left(m,k\in Z\right)$，

由正弦函数的对称性可知$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\left(2n+1\right)T}{4}\left(n\in Z\right)$，

即$\frac{\pi}{4}=\frac{2n\pi+\pi}{2\omega}$,$\therefore\omega=4n+2$，

又$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，则$\frac{T}{2}\ge\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$,$\therefore\frac{\pi}{\omega}\ge\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\omega\le 2$，

$\therefore\omega=2$，则$\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \varphi=m\pi-\frac{2\pi}{3}\end{cases}$，

$\because\varphi\in\left(-\pi,\pi\right)$，$\therefore k=0,m=1$时，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\therefore f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，

由正弦函数的单调性可知$f\left(x\right)_{\min}=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：A

9. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，以右焦点 F_2 为焦点的抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与双曲线交于第一象限的点 P，若 $|PF_1|+|PF_2|=3|F_1F_2|$，则双曲线的离心率 $e=$（   ）

A. 2　　　　B. 5　　　　C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$　　　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用抛物线与双曲线的定义与性质得出 $\begin{cases}|PF_1|=3c+a\\|PF_2|=3c-a=|PA|\end{cases}$，根据勾股定理从而确定 P 的坐标，利用点在双曲线上构造齐次方程计算即可.

【详解】根据题意可设 $F_2\left(\frac{p}{2},0\right)$，双曲线的半焦距为 c，$P\left(x_0,y_0\right)$，则 $p=2c$，

过 F_1 作 x 轴的垂线 l，过 P 作 l 的垂线，垂足为 A，显然直线 AF_1 为抛物线的准线，

则 $|PA|=|PF_2|$，

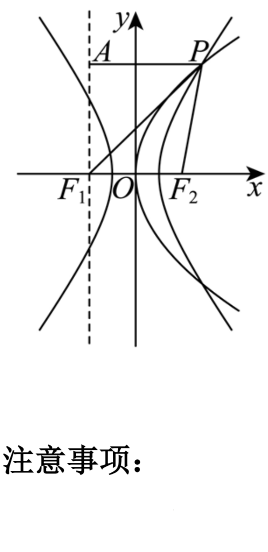
由双曲线的定义及已知条件可知 $\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=2a\\|PF_1|+|PF_2|=6c\end{cases}$，则 $\begin{cases}|PF_1|=3c+a\\|PF_2|=3c-a=|PA|\end{cases}$，

由勾股定理可知 $|AF_1|^2=y_0^2=|PF_1|^2-|PA|^2=12ac$，

易知 $y_0^2=4cx_0,\therefore x_0=3a$，即 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{9a^2}{a^2}-\frac{12ac}{c^2-a^2}=1$，

整理得 $2c^2-3ac-2a^2=0=\left(2c+a\right)\left(c-2a\right)$，$\therefore c=2a$，即离心率为 2.

故选：



第II卷（非选择题）

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上．

2．本卷共 11 小题，共 105 分．

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分．

10. 已知 i 是虚数单位，则 $\left|\frac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=$ ________.

【答案】$\sqrt{10}$

【解析】

【分析】先由复数除法运算化简 $\frac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，再由复数模长公式即可计算求解.

【详解】先由题得 $\frac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}(3+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}$，所以 $\left|\frac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

故答案为：$\sqrt{10}$

11. 在 $(x-1)^6$ 的展开式中，x^3 项的系数为________.

【答案】-20

【解析】

【分析】根据二项式定理相关知识直接计算即可.

【详解】$(x-1)^6$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r x^{6-r}\cdot(-1)^r$，

当 $r=3$ 时，$T_4=\mathrm{C}_6^3 x^3\cdot(-1)^3=-20x^3$，

即 $(x-1)^6$ 展开式中 x^3 的系数为 -20.

故答案为：-20

12. $l_1: x-y+6=0$，与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，与 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$ 交于 C、D 两点，$|AB|=3|CD|$，则 $r=$ ________.

【答案】2

【解析】

【分析】先根据两点间距离公式得出 $|AB|=6\sqrt{2}$，再计算出圆心到直线的距离 d，根据弦长公式 $|CD|=2\sqrt{r^2-d^2}$ 列等式求解即可.

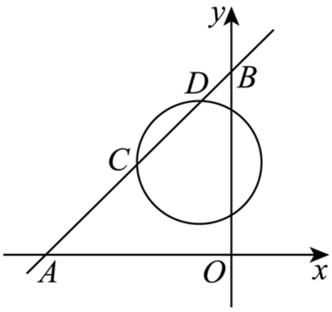
【详解】因为直线 $l_1: x-y+6=0$ 与 x 轴交于 $A(-6,0)$，与 y 轴交于 $B(0,6)$，所以

$|AB|=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$，所以$|CD|=2\sqrt{2}$，

圆$(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$的半径为r，圆心$(-1,3)$到直线$l_1: x-y+6=0$的距离为$d=\frac{|-1-3+6|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

故$|CD|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$，解得$r=2$；

故答案为：2.



13. 小桐操场跑圈，一周 2 次，一次 5 圈或 6 圈.第一次跑 5 圈或 6 圈的概率均为 0．5，若第一次跑 5 圈，则第二次跑 5 圈的概率为 0．4，6 圈的概率为 0．6；若第一次跑 6 圈，则第二次跑 5 圈的概率为 0．6，6 圈的概率为 0．4．小桐一周跑 11 圈的概率为________；若一周至少跑 11 圈为动量达标，则连续跑 4 周，记合格周数为 X，则期望$E(x)=$_______

【答案】　①. 0.6　②. 3.2

【解析】

【分析】先根据全概率公式计算求解空一，再求出概率根据二项分布数学期望公式计算求解.

【详解】设小桐一周跑 11 圈为事件 A，设第一次跑 5 圈为事件B，设第二次跑 5 圈为事件C，

则$P(A)=P(B)P(\bar{C}|B)+P(\bar{B})P(C|\bar{B})=0.5\times0.6+0.5\times0.6=0.6$；

若至少跑 11 圈为运动量达标为事件D，$P(D)=P(A)+P(\bar{B})P(\bar{C}|\bar{B})=0.6+0.5\times0.4=0.8$，

所以$X\sim B(4,0.8)$，$E(X)=4\times0.8=3.2$；

故答案为：0.6；3.2

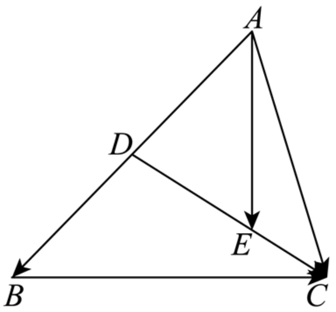
14. $\triangle ABC$中，D为AB边中点，$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AE}=$______（用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示），若$|\overrightarrow{AE}|=5$，$AE\perp CB$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=$_______

【答案】　①. $\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$；　②. -15

【解析】

【分析】根据向量的线性运算求解即可空一，应用数量积运算律计算求解空二.

【详解】如图，



因为$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，所以$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)$，所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

因为D为线段AB的中点，所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$；

又因为$\left|\overrightarrow{AE}\right|=5, AE\perp CB$，所以$\overrightarrow{AE}^2=\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)^2=\frac{1}{36}\vec{a}^2+\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{b}^2=25$，

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{6}\vec{a}^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{b}^2=0$，所以$\vec{a}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}=4\vec{b}^2$

所以$\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=180$，

所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1}{12}\vec{a}^2+\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{b}^2=\frac{1}{12}\left(\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}^2\right)$

$=\frac{1}{12}\left(\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}^2\right)=\frac{1}{12}\left(-\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}^2\right)=-15$.

故答案为：$\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$；$-15$.

15. 若$a,b\in\mathrm{R}$，对$\forall x\in[-2,2]$，均有$(2a+b)x^2+bx-a-1\le 0$恒成立，则$2a+b$的最小值为_______

【答案】-4

【解析】

【分析】先设$t=2a+b$，根据不等式的形式，为了消a可以取$x=-\frac{1}{2}$，得到$t\ge -4$，验证$t=-4$时，a,b是否可以取到，进而判断该最小值是否可取即可得到答案.

【详解】设$t=2a+b$，原题转化为求t的最小值，

原不等式可化为对任意的$-2\le x\le 2$，$tx^2+\left(t-2a\right)x-a-1\le 0$，

不妨代入$x=-\frac{1}{2}$，得$\frac{1}{4}t-\frac{1}{2}\left(t-2a\right)-a-1\le 0$，得$t\ge -4$，

当$t=-4$时，原不等式可化为$-4x^2+\left(-4-2a\right)x-a-1\le 0$，

即$-\left[2x+\left(\frac{1}{2}a+1\right)\right]^2+\frac{1}{4}a^2\le 0$，

观察可知，当$a=0$时，$-\left(2x+1\right)^2\le 0$对$-2\le x\le 2$一定成立，当且仅当$x=-\frac{1}{2}$取等号，

此时，$a=0,b=-4$，说明$t=-4$时，a,b均可取到，满足题意，

故$t=2a+b$的最小值为-4.

故答案为：-4

三、解答题：本大题共5小题，共75分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c．已知$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，$c-2b=1$，$a=\sqrt{7}$.

（1）求A的值；

（2）求c的值；

（3）求$\sin(A+2B)$的值.

【答案】（1）$\frac{\pi}{3}$

（2）3

（3）$\frac{4\sqrt{3}}{7}$

【解析】

【分析】（1）由正弦定理化边为角再化简可求；

（2）由余弦定理，结合（1）结论与已知代入可得关于b的方程，求解可得b，进而求得c；

（3）利用正弦定理先求B，再由二倍角公式分别求$\sin 2B,\cos 2B$，由两角和的正弦可得.

【小问1详解】

已知$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得$a\sin B=b\sin A=\sqrt{3}b\cos A$，显然$\cos A\ne 0$，

得$\tan A=\sqrt{3}$，由$0<A<\pi$，

故$A=\frac{\pi}{3}$；

【小问2详解】

由（1）知$\cos A=\frac{1}{2}$，且$c=2b+1$，$a=\sqrt{7}$，

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

则$7=b^2+(2b+1)^2-2\times\frac{1}{2}b(2b+1)=3b^2+3b+1$，

解得$b=1$（$b=-2$舍去），

故$c=3$；

【小问 3 详解】

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，且$b=1,a=\sqrt{7},\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

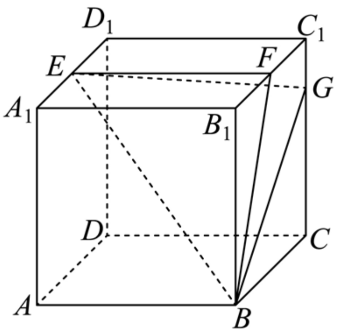
得$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，且$a>b$，则$B$为锐角，

故$\cos B=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$，故$\sin 2B=2\sin B\cos B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

且$\cos 2B=1-2\sin^2 B=1-2\times\left(\dfrac{\sqrt{21}}{14}\right)^2=\dfrac{11}{14}$；

故$\sin(A+2B)=\sin A\cos 2B+\cos A\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{11}{14}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

17. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 4，E、F分别为A_1D_1,C_1B_1中点，$CG=3GC_1$.



（1）求证：$GF\perp$平面FBE；

（2）求平面FBE与平面EBG夹角的余弦值；

（3）求三棱锥$D-FBE$的体积.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{4}{5}$

（3）$\dfrac{32}{3}$

【解析】

【分析】（1）法一、利用正方形的性质先证明$FG\perp BF$，再结合正方体的性质得出$EF\perp$平面BCC_1B_1，利用线面垂直的性质与判定定理证明即可；法二、建立空间直角坐标系，利用空间向量证明线面垂直即可；

（2）利用空间向量计算面面夹角即可；

（3）利用空间向量计算点面距离，再利用锥体的体积公式计算即可.

【小问 1 详解】

法一、在正方形 BCC_1B_1 中，

由条件易知 $\tan\angle C_1FG=\dfrac{C_1G}{C_1F}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{FB_1}{BB_1}=\tan\angle B_1BF$，所以 $\angle C_1FG=\angle B_1BF$，

则 $\angle B_1FB+\angle B_1BF=\dfrac{\pi}{2}=\angle C_1FG+\angle B_1FB$，

故 $\angle BFG=\pi-\left(\angle C_1FG+\angle B_1FB\right)=\dfrac{\pi}{2}$，即 $FG\perp BF$，

在正方体中，易知 $D_1C_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，且 $EF//D_1C_1$，

所以 $EF\perp$ 平面 BCC_1B_1，

又 $FG\subset$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore EF\perp FG$，

$\because EF\bigcap BF=F,EF$、$BF\subset$ 平面 BEF，$\therefore GF\perp$ 平面 BEF；

法二、如图以 D 为中心建立空间直角坐标系，

则 $B\left(4,4,0\right),E\left(2,0,4\right),F\left(2,4,4\right),G\left(0,4,3\right)$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\left(0,4,0\right),\overrightarrow{EB}=\left(2,4,-4\right),\overrightarrow{FG}=\left(-2,0,-1\right)$，

设 $\overrightarrow{m}=\left(a,b,c\right)$ 是平面 BEF 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{EF}=4b=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{EB}=2a+4b-4c=0\end{cases}$，令 $a=2$，则 $b=0,c=1$，所以 $\overrightarrow{m}=\left(2,0,1\right)$，

易知 $\overrightarrow{FG}=-\vec{m}$，则 $\overrightarrow{FG}$ 也是平面 BEF 的一个法向量，$\therefore GF\perp$ 平面 BEF；

【小问 2 详解】

同上法二建立的空间直角坐标系，

所以 $\overrightarrow{EG}=\left(-2,4,-1\right),\overrightarrow{BG}=\left(-4,0,3\right)$，

由（1）知 $\overrightarrow{FG}$ 是平面 BEF 的一个法向量，

设平面 BEG 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EG}=-2x+4y-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BG}=-4x+3z=0\end{cases}$，

令 $x=6$，则 $z=8,y=5$，即 $\vec{n}=\left(6,5,8\right)$，

设平面 BEF 与平面 BEG 的夹角为 α，

则 $\cos\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{FG},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{FG}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{FG}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{20}{\sqrt{5}\times\sqrt{125}}=\dfrac{4}{5}$；

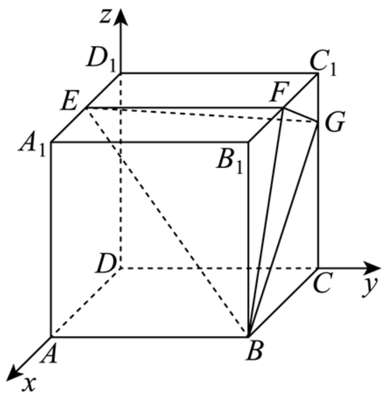
【小问 3 详解】

由（1）知 $EF\perp$ 平面 BCC_1B_1， $FB\subset$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore EF\perp FB$，

易知 $S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}EF\cdot BF=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{4^2+2^2}=4\sqrt{5}$，

又 $\overrightarrow{DE}=(2,0,4)$，则 D 到平面 BEF 的距离为 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{FG}\right|}{\left|\overrightarrow{FG}\right|}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$，

由棱锥的体积公式知：$V_{D-BEF}=\dfrac{1}{3}d\times S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{8}{\sqrt{5}}\times 4\sqrt{5}=\dfrac{32}{3}$.



18. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，右顶点为 A，P 为 $x=a$ 上一点，且直线 PF 的斜率为 $\dfrac{1}{3}$，$\triangle PFA$ 的面积为 $\dfrac{3}{2}$，离心率为 $\frac{1}{2}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）过点 P 的直线与椭圆有唯一交点 B（异于点 A），求证：PF 平分 $\angle AFB$.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据题意，利用椭圆的离心率得到 $a=2c$，再由直线 PF 的斜率得到 $m=c$，从而利用三角形的面积公式得到关于 c 的方程，解之即可得解；

（2）联立直线与椭圆方程，利用其位置关系求得 k，进而得到直线 PB 的方程与点 B 的坐标，法一：利用向量的夹角公式即可得证；法二：利用两直线的夹角公式即可得证；法三利用正切的倍角公式即可得证；法四：

利用角平分线的性质与点线距离公式即可得证.

【小问 1 详解】

依题意，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半焦距为 c，

则左焦点 $F(-c,0)$，右顶点 $A(a,0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=2c$，

因为 P 为 $x=a$ 上一点，设 $P(a,m)$，

又直线 PF 的斜率为 $\frac{1}{3}$，则 $\frac{m-0}{a-(-c)}=\frac{1}{3}$，即 $\frac{m}{a+c}=\frac{1}{3}$，

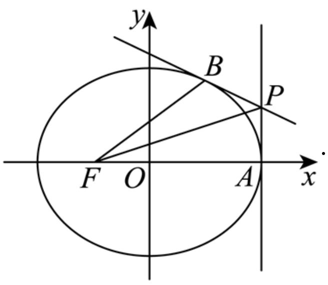
所以 $\frac{m}{2c+c}=\frac{1}{3}$，解得 $m=c$，则 $P(a,c)$，即 $P(2c,c)$，

因为 $\triangle PFA$ 的面积为 $\frac{3}{2}$，$|AF|=a-(-c)=a+c=3c$，高为 $|m|=c$，

所以 $S_{\triangle PFA}=\frac{1}{2}|AF||m|=\frac{1}{2}\times 3c\times c=\frac{3}{2}$，解得 $c=1$，

则 $a=2c=2$，$b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.



【小问 2 详解】

由（1）可知 $P(2,1)$，$F(-1,0)$，$A(2,0)$，

易知直线 PB 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+m$，则 $1=2k+m$，即 $m=1-2k$，

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，消去 y 得，$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

因为直线与椭圆有唯一交点，所以 $\Delta=\left(8k\cdot m\right)^2-4(3+4k^2)\cdot(4m^2-12)=0$，

即 $4k^2-m^2+3=0$，则 $4k^2-\left(1-2k\right)^2+3=0$，解得 $k=-\frac{1}{2}$，则 $m=2$，

所以直线 PB 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，

联立 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$，则 $B(1,\frac{3}{2})$，

以下分别用四种方法证明结论：

法一：则 $\overrightarrow{FB}=\left(2,\frac{3}{2}\right),\overrightarrow{FP}=(3,1),\overrightarrow{FA}=(3,0)$，

所以 $\cos\angle BFP=\frac{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FB}|\cdot|\overrightarrow{FP}|}=\frac{2\times3+\frac{3}{2}\times1}{\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\cos\angle PFA=\frac{\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FP}|}=\frac{3\times3+1\times0}{3\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

则 $\cos\angle BFP=\cos\angle PFA$，又 $\angle BFP,\angle PFA\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以 $\angle BFP=\angle PFA$，即 PF 平分 $\angle AFB$.

法二：所以 $k_{FB}=\frac{\frac{3}{2}-0}{1-(-1)}=\frac{3}{4}$，$k_{PF}=\frac{1-0}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$，$k_{AF}=0$，

由两直线夹角公式，得 $\tan\angle BFP=\left|\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}\right|=\frac{1}{3}$，$\tan\angle PFA=\left|\frac{\frac{1}{3}-0}{1+0}\right|=\frac{1}{3}$，

则 $\tan\angle BFP=\tan\angle PFA$，又 $\angle BFP,\angle PFA\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以 $\angle BFP=\angle PFA$，即 PF 平分 $\angle AFB$.

法三：则 $\tan\angle PFA=k_{PF}=\frac{1}{3}$，$\tan\angle BFP=k_{FB}=\frac{3}{4}$，

故 $\tan2\angle PFA=\frac{2\tan\angle PFA}{1-\tan^2\angle PFA}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}=\tan\angle BFP$，

又 $\angle BFP,\angle PFA\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以 $\angle BFP=\angle PFA$，即 PF 平分 $\angle AFB$.

法四：则 $k_{FB}=\dfrac{\frac{3}{2}-0}{1-(-1)}=\dfrac{3}{4}$，

所以直线 FB 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}(x+1)$，即 $3x-4y+3=0$，

则点 P 到直线 FB 的距离为 $d=\dfrac{|3\times2-4\times1+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$，

又点 P 到直线 FA 的距离也为1，

所以 PF 平分 $\angle AFB$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，$a_1=b_1=2,a_2=b_2+1,a_3=b_3$.

（1）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$I\in\{0,1\}$，有

$T_n=\{p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\ldots+p_{n-1}a_{n-1}b_{n-1}+p_na_nb_n \mid p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n\in I\}$，

（i）求证：对任意实数 $t\in T_n$，均有 $t<a_{n+1}b_{n+1}$；

（ii）求 T_n 所有元素之和.

【答案】（1）$a_n=3n-1,b_n=2^n$；

（2）（i）证明见解析；（ii）$2^{n-1}\cdot\left[8+(3n-4)2^{n+1}\right]$

【解析】

【分析】（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，数列 $\{b_n\}$ 公比为 $q(q\neq0)$，由题设列出关于 d 和 $q(q\neq0)$ 的方程求解，再结合等差和等比数列通项公式即可得解；

（2）（i）由题意结合（1）求出 $a_{n+1}b_{n+1}$ 和 $p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\ldots+p_{n-1}a_{n-1}b_{n-1}+p_na_nb_n$ 的最大值，再作差比较两者大小即可证明；

（ii）法一：根据 $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n$ 中全为 1、一个为 0 其余为 1、2 个为 0 其余为、⋯、全为 0 几个情况将 T_n 中的所有元素分系列，并求出各系列中元素的和，最后将所有系列所得的和加起来即可得解；

法二：根据 T_n 元素的特征得到 T_n 中的所有元素的和中各项 $a_ib_i\left(i\in\{1,2,\ldots,n\}\right)$ 出现的次数均为 2^{n-1} 次即可求解.

【小问 1 详解】

设数列$\{a_n\}$的公差为d，数列$\{b_n\}$公比为$q(q\neq 0)$，

则由题得$\begin{cases}2+d=2q+1\\2+2d=2q^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=3\\q=2\end{cases}$，

所以$a_n=2+3(n-1)=3n-1, b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$；

【小问 2 详解】

（i）证明：由（1）$p_na_nb_n=(3n-1)2^n p_n=0$或$p_na_nb_n=(3n-1)2^n>0$，$a_{n+1}b_{n+1}=(3n+2)2^{n+1}$，

当$p_na_nb_n=(3n-1)2^n>0$时，

设$S_n=p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+...+p_{n-1}a_{n-1}b_{n-1}+p_na_nb_n=2\times 2+5\times 2^2+...+(3n-4)2^{n-1}+(3n-1)2^n$，

所以$2S_n=2\times 2^2+5\times 2^3+...+(3n-4)2^n+(3n-1)2^{n+1}$，

所以$-S_n=4+3\times(2^2+2^3+...+2^n)-(3n-1)2^{n+1}$

$=4+3\times\dfrac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(3n-1)2^{n+1}=-8+(4-3n)2^{n+1}$，

所以$S_n=8+(3n-4)2^{n+1}$，为T_n中的最大元素，

此时$a_{n+1}b_{n+1}-S_n=(3n+2)2^{n+1}-\left[8+(3n-4)2^{n+1}\right]=6\cdot 2^{n+1}-8>0$恒成立，

所以对$\forall t\in T_n$，均有$t<a_{n+1}b_{n+1}$.

（ii）法一：由（i）得$S_n=8+(3n-4)2^{n+1}$，为T_n中的最大元素，

由题意可得T_n中的所有元素由以下系列中所有元素组成：

当$p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n$均为 1 时：此时该系列元素只有$S_n=8+(3n-4)2^{n+1}$即C_n^0个；

当$p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n$中只有一个为 0，其余均为 1 时：

此时该系列的元素有$S_n-a_1b_1,S_n-a_2b_2,S_n-a_3b_3,...,S_n-a_nb_n$共有$\mathrm{C}_n^1$个，

则这n个元素的和为$\mathrm{C}_n^1S_n-(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)=\left(\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^0\right)S_n$；

当$p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n$中只有 2 个为 0，其余均为 1 时：

此时该系列的元素为$S_n-a_ib_i-a_jb_j\left(i,j\in\{1,2,...,n\},i\neq j\right)$共有$\mathrm{C}_n^2$个，

则这n个元素的和为$\mathrm{C}_n^2S_n-\mathrm{C}_{n-1}^1(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)=\left(\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_{n-1}^1\right)S_n$；

当 $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n$ 中有 2 个为 0，其余均为 1 时：此时该系列的元素为

$S_n-a_ib_i-a_jb_j-a_kb_k\left(i,j,k\in\{1,2,\ldots,n\},i\ne j\ne k\right)$ 共有 C_n^3 个，

则这 n 个元素的和为 $\mathrm{C}_n^3S_n-\mathrm{C}_{n-1}^2\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)=\left(\mathrm{C}_n^3-\mathrm{C}_{n-1}^2\right)S_n$；

…

当 $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n$ 中有 $n-1$ 个为 0，1 个为 1 时：此时该系列的元素为 $a_1b_1,a_2b_2,\ldots,a_nb_n$ 共有 C_n^{n-1} 个，

则这 n 个元素的和为 $\mathrm{C}_n^{n-1}S_n-\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)=\left(\mathrm{C}_n^{n-1}-\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}\right)S_n$；

当 $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n$ 均为 0 时：此时该系列的元素为 $0=\left(\mathrm{C}_n^n-\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\right)S_n$ 即 $\mathrm{C}_n^n=1$ 个，

综上所述，T_n 中的所有元素之和为

$$S_n+\left(\mathrm{C}_n^1-1\right)S_n+\left(\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_{n-1}^1\right)S_n+\left(\mathrm{C}_n^3-\mathrm{C}_{n-1}^2\right)S_n+\ldots+\left(\mathrm{C}_n^{n-1}-\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}\right)S_n+0$$

$$=\left[\left(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\ldots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n\right)-\left(\mathrm{C}_{n-1}^0+\mathrm{C}_{n-1}^1+\ldots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}+\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\right)\right]S_n$$

$$=\left(2^n-2^{n-1}\right)S_n=2^{n-1}S_n=2^{n-1}\cdot\left[8+(3n-4)2^{n+1}\right]；$$

法二：由（i）得 $S_n=8+(3n-4)2^{n+1}$，为 T_n 中的最大元素，

由题意可得

$T_n=\left\{S_n,S_n-a_ib_i,S_n-a_ib_i-a_jb_j,S_n-a_ib_i-a_jb_j-a_kb_k,\ldots,a_ib_i+a_jb_j,a_ib_i,0\right\},\left(i,j,k\in\{1,2,\ldots,n\},i\ne j\ne k\right)$

，

所以 T_n 的所有的元素的和中各项 $a_ib_i\left(i\in\{1,2,\ldots,n\}\right)$ 出现的次数均为 $\mathrm{C}_{n-1}^0+\mathrm{C}_{n-1}^1+\ldots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}+\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$

次，

所以 T_n 中的所有元素之和为 $2^{n-1}\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)=2^{n-1}S_n=2^{n-1}\cdot\left[8+(3n-4)2^{n+1}\right]$.

20. 已知函数 $f(x)=ax-(\ln x)^2$

（1）$a=1$ 时，求 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）$f(x)$ 有 3 个零点，x_1,x_2,x_3 且 $\left(x_1<x_2<x_3\right)$.

（i）求 a 的取值范围；

（ii）证明 $\left(\ln x_2-\ln x_1\right)\cdot\ln x_3<\dfrac{4\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

【答案】（1）$y=x$

（2）（i）$\left(0,\dfrac{4}{e^2}\right)$；（ii）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）利用导数的几何意义，求导数值得斜率，由点斜式方程可得；

（2）（i）令 $f(x)=0$，分离参数得 $a=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$，作出函数 $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ 图象，数形结合可得 a 范围；（ii）

由（2）结合图象，可得 x_1,x_2,x_3 范围，整体换元 $\ln x_1=t_1,\ln x_2=t_2,\ln x_3=t_3$，转化为 $\begin{cases} ae^{t_1}=t_1^2① \\ ae^{t_2}=t_2^2② \\ ae^{t_3}=t_3^2③ \end{cases}$，结合由

②③ 可得 $\begin{cases} \ln a+t_2=2\ln t_2 \\ \ln a+t_3=2\ln t_3 \end{cases}$，两式作差，利用对数平均不等式可得 $t_1t_3<4$，再由 $t_1^2=ae^{t_1}<a$ 得 $-t_1<\sqrt{a}$，

结合 $a=\dfrac{t_3^2}{e^{t_3}}$ 减元处理，再构造函数求最值，放缩法可证明不等式.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$f(x)=x-(\ln x)^2$，$x>0$，

则 $f'(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$，则 $f'(1)=1$，且 $f(1)=1$，

则切点 $(1,1)$，且切线的斜率为 1，

故函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x$；

【小问 2 详解】

（i）令 $f(x)=ax-(\ln x)^2=0$，$x>0$，

得 $a=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$，

设 $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x},x>0$，

则 $g'(x)=\dfrac{\dfrac{2\ln x}{x}\cdot x-(\ln x)^2}{x^2}=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$，

由 $g'(x)=0$ 解得 $x=1$ 或 e^2，其中 $g(1)=0$，$g(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$；

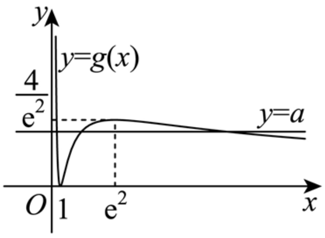
当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当$1<x<\mathrm{e}^2$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(1,\mathrm{e}^2)$上单调递增；

当$x>\mathrm{e}^2$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(\mathrm{e}^2,+\infty)$上单调递减；

且当$x\to 0$时，$g(x)\to+\infty$； 当$x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$；

如图作出函数$g(x)$的图象，



要使函数$f(x)$有 3 个零点，

则方程$a=g(x)$在$(0,+\infty)$内有3个根，即直线$y=a$与函数$g(x)$的图象有3个交点.

结合图象可知，$0<a<\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

故a的取值范围为$(0,\dfrac{4}{\mathrm{e}^2})$；

（ii）由图象可知，$0<x_1<1<x_2<\mathrm{e}^2<x_3$，

设$\ln x_1=t_1,\ln x_2=t_2,\ln x_3=t_3$，则$t_1<0<t_2<2<t_3$，

满足$\begin{cases}a\mathrm{e}^{t_1}=t_1^2① \\ a\mathrm{e}^{t_2}=t_2^2② \\ a\mathrm{e}^{t_3}=t_3^2③\end{cases}$，由②③ 可得$\begin{cases}\ln a+t_2=2\ln t_2 \\ \ln a+t_3=2\ln t_3\end{cases}$，

两式作差可得$t_3-t_2=2(\ln t_3-\ln t_2)$，

则由对数均值不等式可得$2=\dfrac{t_3-t_2}{\ln t_3-\ln t_2}>\sqrt{t_2t_3}$，

则$t_2t_3<4$，故要证$(\ln x_2-\ln x_1)\cdot\ln x_3<\dfrac{4\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，

即证$t_2t_3-t_1t_3<\dfrac{4\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，只需证$4-t_1t_3\le\dfrac{4\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，

即证$-t_1t_3\le\dfrac{4}{\mathrm{e}-1}$，又因为$t_1<0,t_1^2=a\mathrm{e}^{t_1}<a$，则$|t_1|=-t_1<\sqrt{a}$，

所以$-t_1t_3<\sqrt{a}t_3=\dfrac{t_3^2}{\mathrm{e}^{\frac{t_3}{2}}}$，故只需证$\dfrac{t_3^2}{\mathrm{e}^{\frac{t_3}{2}}}\le\dfrac{4}{\mathrm{e}-1}$，

设函数 $\varphi(t)=\dfrac{t^2}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}},t>2$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\mathrm{e}^t}=\dfrac{(2-\frac{1}{2}t)t}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}$，

当 $2<t<4$ 时，$\varphi'(t)>0$，则 $\varphi(t)$ 在 $(2,4)$ 上单调递增；

当 $t>4$ 时，$\varphi'(t)<0$，则 $\varphi(t)$ 在 $\left(4,+\infty\right)$ 上单调递减；

故 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(4)=\dfrac{16}{\mathrm{e}^2}$，即 $\varphi(t)\le\dfrac{16}{\mathrm{e}^2}$.

而由 $4\mathrm{e}^2-16\mathrm{e}+16=4(\mathrm{e}-2)^2>0$，

可知 $\dfrac{16}{\mathrm{e}^2}<\dfrac{4}{\mathrm{e}-1}$ 成立，故命题得证.