

## 2012 年普通高等学校招生统一考试（江西卷）数学试题卷（理）学生版

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，第 I 卷第 1 至 2 页，第 II 卷第 3 至第 4 页。满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写答题卡上。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第 II 卷用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答题无效。
3. 考试结束，务必将试卷和答题卡一并上交。

参考公式：

锥体体积公式  $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中  $S$  为底面积， $h$  为高。

### 第 I 卷

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $A = \{-1, 1\}$ ,  $B = \{0, 2\}$ , 则集合  $\{z \mid z = x+y, x \in A, y \in B\}$  中的元素的个数为  
A. 5    B. 4    C. 3    D. 2
2. 下列函数中，与函数  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  定义域相同的函数为  
A.  $y = \frac{1}{\sin x}$     B.  $y = \frac{\ln x}{x}$     C.  $y = xe^x$     D.  $\frac{\sin x}{x}$
3. 若函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ \lg x, & x > 1 \end{cases}$ , 则  $f(f(10)) =$   
A.  $\lg 101$     B. 2    C. 1    D. 0
4. 若  $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 4$ , 则  $\sin 2\theta =$   
A.  $\frac{1}{5}$     B.  $\frac{1}{4}$     C.  $\frac{1}{3}$     D.  $\frac{1}{2}$

5.下列命题中，假命题为

- A. 存在四边相等的四边形不是正方形  
B.  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1, z_2$  为实数的充分必要条件是  $z_1, z_2$  互为共轭复数  
C. 若  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $x+y > 2$ , 则  $x, y$  至少有一个大于 1  
D. 对于任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$  都是偶数  
6. 观察下列各式:  $a+b=1$ ,  $a^2+b^2=3$ ,  $a^3+b^3=4$ ,  $a^4+b^4=7$ ,  $a^5+b^5=11$ , ..., 则  $a^{10}+b^{10}=$   
A. 28    B. 76    C. 123    D. 199

7. 在直角三角形 ABC 中, 点 D 是斜边 AB 的中点, 点 P 为线段 CD 的中点, 则

$$\frac{|PA|^2 + |PB|^2}{|PC|^2} =$$

- A. 2    B. 4    C. 5    D. 10

8. 某农户计划种植黄瓜和韭菜, 种植面积不超过 50 亩, 投入资金不超过 54 万元, 假设种植黄瓜和韭菜的产量、成本和售价如下表

	年产量/亩	年种植成本/亩	每吨售价
黄瓜	4 吨	1.2 万元	0.55 万元
韭菜	6 吨	0.9 万元	0.3 万元

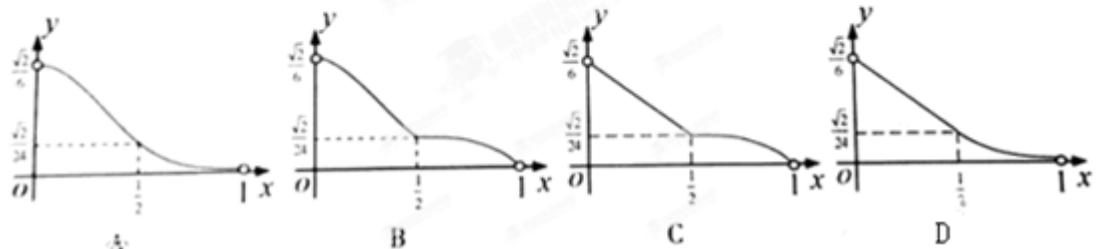
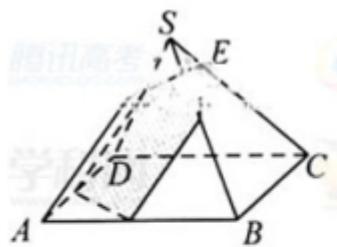
为使一年的种植总利润(总利润=总销售收入-总种植成本)最大, 那么黄瓜和韭菜的种植面积(单位: 亩)分别为

- A. 50, 0    B. 30, 20    C. 20, 30    D. 0, 50

9. 样本  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的平均数为  $\bar{x}$ , 样本  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  的平均数为  $\bar{y}$  ( $\bar{x} \neq \bar{y}$ )。若样本  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$  的平均数  $\bar{z} = a\bar{x} + (1-a)\bar{y}$ , 其中  $0 < a < \frac{1}{2}$ , 则  $n, m$  的大小关系为

- A.  $n < m$     B.  $n > m$     C.  $n = m$     D. 不能确定

10. 如图, 已知正四棱锥 S-ABCD 所有棱长都为 1, 点 E 是侧棱 SC 上一动点, 过点 E 垂直于 SC 的截面将正四棱锥分成上、下两部分。记  $SE=x$  ( $0 < x < 1$ ), 截面下面部分的体积为  $V(x)$ , 则函数  $y=V(x)$  的图像大致为



## 2012 年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）理科数学

### 第 II 卷

注：第 II 卷共 2 页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答。若在试题卷上作答，答案无效。

**二。填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

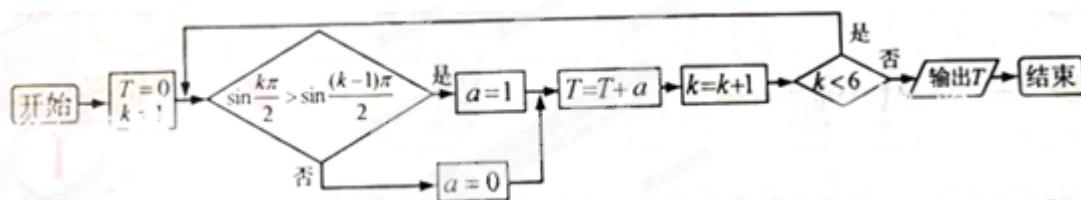
11. 计算定积分  $\int_{-1}^1 (x^2 + \sin x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 设数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  都是等差数列，若  $a_1+b_1=7$ ,  $a_3+b_3=21$ , 则  $a_5+b_5=\underline{\hspace{2cm}}$

13. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右顶点分别是  $A, B$ , 左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ . 若  $|AF_1|$ ,

$|F_1F_2|$ ,  $|F_2B|$  成等比数列，则此椭圆的离心率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 下图为某算法的程序框图，则程序运行后输出的结果是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



**三、选做题：**请在下列两题中任选一题作答。若两题都做，则按第一题评阅计分。本题共 5 分。

15. (1) (坐标系与参数方程选做题) 曲线 C 的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则曲线 C 的极坐标方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. (2) (不等式选做题) 在实数范围内, 不等式  $|2x-1|+|2x+1|\leq 6$  的解集为\_\_\_\_\_。

四. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = -\frac{1}{2}n^2 + kn$  (其中  $k \in \mathbb{N}$ ), 且  $S_n$  的最大值为 8.

(1) 确定常数  $k$ , 求  $a_n$ ; (2) 求数列  $\left\{\frac{9-2a_n}{2^n}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

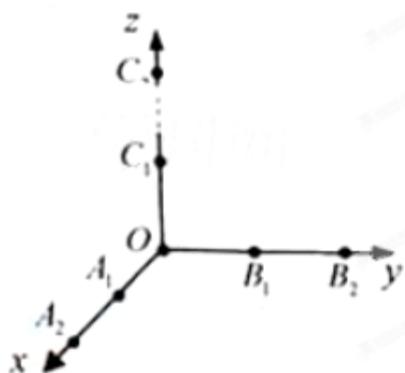
17. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $A = \frac{\pi}{4}$ ,  $b \sin\left(\frac{\pi}{4} + C\right) - c \sin\left(\frac{\pi}{4} + B\right) = a$

(1) 求证:  $B - C = \frac{\pi}{2}$  (2) 若  $a = \sqrt{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积。

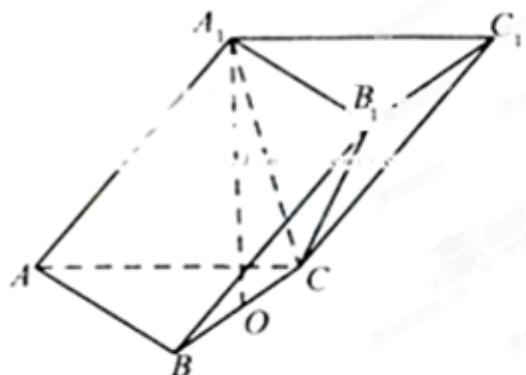
18. (本题满分 12 分)

如图, 从  $A_1(1,0,0)$ ,  $A_2(2,0,0)$ ,  $B_1(0,1,0)$ ,  $B_2(0,2,0)$ ,  $C_1(0,0,1)$ ,  $C_2(0,0,2)$  这 6 个点中随机选取 3 个点, 将这 3 个点及原点  $O$  两两相连构成一个“立体”, 记该“立体”的体积为随机变量  $V$  (如果选取的 3 个点与原点在同一个平面内, 此时“立体”的体积  $V=0$ ).



(1) 求  $V=0$  的概率; (2) 求  $V$  的分布列及数学期望  $EV$ .

19. (本题满分 12 分) 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 已知  $AB=AC=AA_1=\sqrt{5}$ ,  $BC=4$ , 点  $A_1$  在底面  $ABC$  的投影是线段  $BC$  的中点  $O$ .



- (1) 证明在侧棱  $AA_1$  上存在一点  $E$ , 使得  $OE \perp$  平面  $BB_1C_1C$ , 并求出  $AE$  的长;
- (2) 求平面  $A_1B_1C$  与平面  $BB_1C_1C$  夹角的余弦值。

20. (本题满分 13 分)

已知三点  $O(0,0)$ ,  $A(-2,1)$ ,  $B(2,1)$ , 曲线  $C$  上任意一点  $M(x, y)$  满足

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + 2$ . 求曲线  $C$  的方程; (2) 动点  $Q(x_0, y_0)$  ( $-2 < x_0 < 2$ ) 在曲线  $C$  上, 曲线  $C$  在点  $Q$  处的切线为  $L$ , 问: 是否存在定点  $P(0, t)$  ( $t < 0$ ), 使得  $L$  与  $PA$ ,  $PB$  都相交, 交点分别为  $D, E$ , 且  $\triangle QAB$  与  $\triangle PDE$  的面积之比是常数? 若存在, 求  $t$  的值。若不存在, 说明理由。

21. (本小题满分 14 分) 若函数  $h(x)$  满足

- (1)  $h(0)=1$ ,  $h(1)=0$ ; (2) 对任意  $a \in [0,1]$ , 有  $h(h(a))=a$ ; (3) 在  $(0,1)$  上单调递减。

则称  $h(x)$  为补函数。已知函数  $h(x) = \left(\frac{1-x^p}{1+\lambda x^p}\right)^{\frac{1}{p}}$  ( $\lambda > -1, p > 0$ )。

- (1) 判断函数  $h(x)$  是否为补函数, 并证明你的结论;
- (2) 若存在  $m \in [0,1]$ , 使得  $h(m)=m$ , 若  $m$  是函数  $h(x)$  的中介元, 记  $p = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 时  $h(x)$  的中介元为  $x_n$ , 且  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ , 若对任意的  $n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $S_n < \frac{1}{2}$ , 求  $\lambda$  的取值范围;
- (3) 当  $\lambda=0$ ,  $x \in (0,1)$  时, 函数  $y=h(x)$  的图像总在直线  $y=1-x$  的上方, 求  $p$  的取值范围。