绝密★启用前

2012年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）

1．计算：$\dfrac{3-i}{1+i}$=_______（i为虚数单位）.

2．若集合 $A=\{x\,|\,2x-1>0\}$，$B=\{x\,|\,|x|<1\}$，则 $A\cap B$=________ .

3．函数 $f(x)=\begin{vmatrix}\sin x & 2\\ -1 & \cos x\end{vmatrix}$的最小正周期是________ .

4．若 $\vec{n}=(2,1)$ 是直线 l 的一个方向向量，则 l 的倾斜角的大小为_________

（结果用反三角函数值表示）.

5．一个高为2的圆柱，底面周长为2π，该诉表面积为________.

6．方程 $4^x-2^{x+1}-3=0$ 的解是________.

7．有一列正方体，棱长组成以1为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，体积分别记为

$V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n)=$________ .

8．在 $(x-\dfrac{1}{x})^6$ 的二项展开式中，常数项等于 ________ .

9．已知 $y=f(x)$ 是奇函数.　　若 $g(x)=f(x)+2$ 且 $g(1)=1$.，则 $g(-1)=$

.

10．满足约束条件 $|x|+2|y|\le 2$ 的目标函数 $z=y-x$ 的最小值是________ .

11．三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛.若每人只选择一个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是______（结果用最简分数表示）.

12．在知形$ABCD$中，边AB、AD的长分别为2、1．若M、N分别是边BC、CD上的点，且满足$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是________．

13．已知函数$y=f(x)$的图像是折线段ABC，若中$A(0,0)$，$B(\frac{1}{2},1)$，$C(1,0)$.

函数$y=xf(x)\ (0\le x\le 1)$的图像与x轴围成的图形的面积为_______．

14．已知$f(x)=\frac{1}{1+x}$. 各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+2}=f(a_n)$. 若

$a_{2010}=a_{2012}$，则$a_{20}+a_{11}$的值是________.

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）

15．若$1+\sqrt{2}\,i$是关于x的实系数方程$x^2+bx+c=0$的一个复数根，则（　）

（A）$b=2,c=3$.　（B）$b=2,c=-1$.　（C）$b=-2,c=-1$.　（D）$b=-2,c=3$.

16．对于常数m、n，“$mn>0$”是“方程$mx^2+ny^2=1$的曲线是椭圆”的（　）

（A）充分不必要条件.　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件.　（D）既不充分也不必要条件.

17．在ΔABC中，若$\sin^2A+\sin^2B<\sin^2C$，则ΔABC的形状是（　）

（A）钝角三角形.　（B）直角三角形　（C）锐角三角形.（D）不能确定.

18．若$S_n=\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{7}\ (n\in N^*)$，则在$S_1,S_2,\cdots,S_{100}$中，正数的个数是（　）

（A）16.　（B）72.　（C）86.

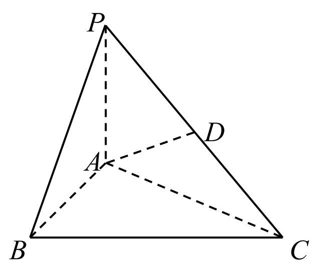
（D）100.

三、解答题（本大题共有5题，满分74分）

19．如图，在三棱锥P-ABC中，$PA\perp$底面ABC，D是PC的中点. 已知$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，$PA=2$. 求：

（1）三棱锥P-ABC的体积；（6分）

（2）异面直线BC与AD所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）.（6分）



20．已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$．

（1）若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$，求 x 的取值范围；（6分）

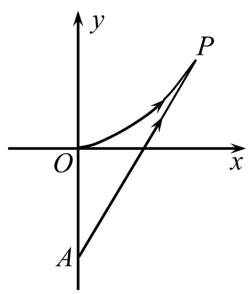
（2）若 $g(x)$ 是以2为周期的偶函数，且当 $0\le x\le 1$ 时，有 $g(x)=f(x)$，求函数 $y=g(x)\ (x\in[1,2])$ 的反函数.（8分）

21．海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为y轴正方向建立平面直角坐标系（以1海里为单位长度），则救援船恰在失事船的正南方向12海里A处，如图.

现假设：①失事船的移动路径可视为抛物线 $y=\frac{12}{49}x^2$；②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援；③救援船出发 t 小时后，失事船所在位置的横坐标为 $7t$．

（1）当 $t=0.5$ 时，写出失事船所在位置P的纵坐标. 若此时两船恰好会合，求救援船速度的大小和方向；（6分）

（2）问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船？（8分）



22．在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C:2x^2-y^2=1$．

（1）设 F 是 C 的左焦点，M 是 C 右支上一点.
若 $|MF|=2\sqrt{2}$，求过 M 点的坐标；（5分）（2）过 C 的左顶点作 C 的两条渐近线的平行线，求这两组平行线围成的平行四边形的面积；（5分）

（3）设斜率为 $k\ (|k|<\sqrt{2})$ 的直线 l 交 C 于 P、Q 两点，若 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，求证：$OP\perp OQ$；（6分）

23．对于项数为 m 的有穷数列数集 $\{a_n\}$，记 $b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$（$k$=1, 2, …, m），即 b_k 为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中的最大值，并称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列. 如1, 3, 2, 5, 5的控制数列是1, 3, 3, 5, 5.

（1）若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的控制数列为2, 3, 4, 5, 5，写出所有的 $\{a_n\}$；（4分）

（2）设 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列，满足 $a_k+b_{m-k+1}=C$（C 为常数，k=1, 2, …, m）

.

求证：$b_k = a_k$（k=1, 2, …, m）；（6分）

（3）设m=100，常数$a \in (\frac{1}{2}, 1)$. 若$a_n = an^2 - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n$，$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的控制数列，求$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{100} - a_{100})$.

2012年上海高考数学（文科）试卷解答

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）

1．计算：$\dfrac{3-i}{1+i}$=<u> 1−2i </u>（i为虚数单位）.

2．若集合 $A=\{x\mid 2x-1>0\}$，$B=\{x\mid |x|<1\}$，则 $A\bigcap B$=<u>$(\frac{1}{2},1)$</u> .

3．函数 $f(x)=\begin{vmatrix}\sin x & 2\\ -1 & \cos x\end{vmatrix}$的最小正周期是<u> π </u> .

4．若$\vec{n}=(2,1)$是直线l的一个方向向量，则l的倾斜角的大小为<u>$\arctan\frac{1}{2}$</u>（结果用反三角
函数值表示）.

5．一个高为2的圆柱，底面周长为2π，该诉表面积为<u> 6π </u>.

6．方程$4^x-2^{x+1}-3=0$的解是<u>$\log_2 3$</u>.

7．有一列正方体，棱长组成以1为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，体积分别记为

$V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n)=$<u>$\frac{8}{7}$</u> .

8．在$(x-\dfrac{1}{x})^6$的二项展开式中，常数项等于<u> −20 </u> .

9．已知$y=f(x)$是奇函数．若$g(x)=f(x)+2$且$g(1)=1$.，则$g(-1)=$<u> 3</u>
.

10．满足约束条件$|x|+2|y|\le 2$的目标函数$z=y-x$的最小值是<u> −2 </u> .

11．三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人只选择一个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是<u>$\frac{2}{3}$</u>（结果用最简分数表示）.

12．在知形$ABCD$中，边AB、AD的长分别为2、1．若M、N分别是边BC、CD上的点，且满足$\dfrac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是<u> [1, 4] </u> .

13．已知函数$y=f(x)$的图像是折5线段ABC，若中$A(0,0)$，$B(\frac{1}{2},1)$，$C(1,0)$.

函数$y=xf(x)\ (0\le x\le 1)$的图像与x轴围成的图形的面积为<u>$\frac{1}{4}$</u> .

14．已知$f(x)=\frac{1}{1+x}$. 各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+2}=f(a_n)$. 若

$a_{2010} = a_{2012}$，则 $a_{20} + a_{11}$ 的值是 $\underline{\frac{13\sqrt{5}+3}{26}}$.

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）

15．若 $1+\sqrt{2}\,i$ 是关于x的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个复数根，则 （ D ）

（A） $b=2, c=3$.　　（B） $b=2, c=-1$.　　（C） $b=-2, c=-1$.（D） $b=-2, c=3$.

16．对于常数 m 、n ，“$mn>0$”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 的曲线是椭圆”的 （ B ）

（A）充分不必要条件.　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件.　　（D）既不充分也不必要条件.

17．在 ΔABC 中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$，则 ΔABC 的形状是 （ A ）

（A）钝角三角形.　　（B）直角三角形.　　（C）锐角三角形.

（D）不能确定.

18．若 $S_n=\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{7}\ (n\in N^*)$，则在 $S_1, S_2, \cdots, S_{100}$ 中，正数的

个数是 （ C ）

（A）16.　　（B）72.　　（C）86.

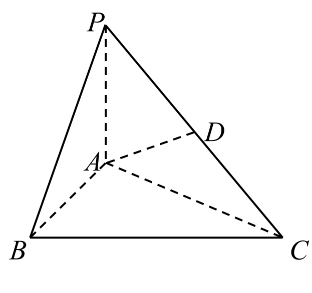
（D）100.

三、解答题（本大题共有5题，满分74分）

19．如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$底面ABC，D是PC的中点. 已知$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，$PA=2$. 求：

（1）三棱锥$P-ABC$的体积；（6分）

（2）异面直线BC与AD所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）.（6分）

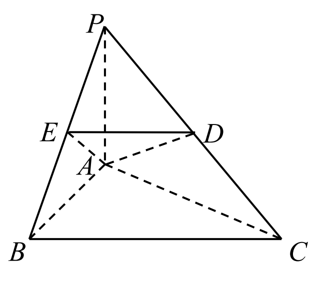


[解]（1） $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，　　2分

三棱锥$P-ABC$的体积为

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\times PA=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$　　6分

（2）取PB的中点E，连接DE、AE，则$ED\parallel BC$，所以$\angle ADE$（或其补角）是异面直线BC与AD所成的角.　　8分



在三角形ADE中，DE=2，AE=$\sqrt{2}$，AD=2，

$\cos\angle ADE=\frac{2^2+2^2-2}{2\times2\times2}=\frac{3}{4}$，所以$\angle ADE$=$\arccos\frac{3}{4}$.

因此，异面直线BC与AD所成的角的大小是$\arccos\frac{3}{4}$.　　　　12分

20．已知函数$f(x)=\lg(x+1)$.

（1）若$0<f(1-2x)-f(x)<1$，求x的取值范围；（6分）

（2）若$g(x)$是以2为周期的偶函数，且当$0\le x\le1$时，有$g(x)=f(x)$，求函数$y=g(x)\ (x\in[1,2])$的反函数.（8分）

[解]（1）由$\begin{cases}2-2x>0\\ x+1>0\end{cases}$，得$-1<x<1$.

由$0<\lg(2-2x)-\lg(x+1)=\lg\frac{2-2x}{x+1}<1$得$1<\frac{2-2x}{x+1}<10$.

……3分

因为$x+1>0$，所以$x+1<2-2x<10x+10$，$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$.

由$\begin{cases}-1<x<1\\ -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}\end{cases}$得$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$.　　　　……6分

（2）当$x\in[1,2]$时，$2-x\in[0,1]$，因此

$y=g(x)=g(x-2)=g(2-x)=f(2-x)=\lg(3-x)$.

……10分

由单调性可得$y\in[0,\lg2]$.

因为$x=3-10^y$，所以所求反函数是$y=3-10^x$，$x\in[0,\lg2]$.

……14分

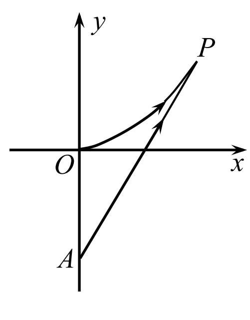
21．海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为y轴

正方向建立平面直角坐标系（以1海里为单位长度），则救援船恰在失事船的正南方向12海

里A处，如图．现假设：①失事船的移动路径可视为抛物线

$y=\frac{12}{49}x^2$；②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援；③救

援船出发t小时后，失事船所在位置的横坐标为$7t$.



（1）当$t=0.5$时，写出失事船所在位置P的纵坐标．若此时两船恰好会合，求救援船速度的大小和方向；（6分）

（2）问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船？（8分）

[解]（1）$t=0.5$时，P的横坐标x_P=$7t=\frac{7}{2}$，代入抛物线方程$y=\frac{12}{49}x^2$

中，得P的纵坐标y_P=3.　　　　　　　　　　　……2分

由$|AP|=\frac{\sqrt{949}}{2}$，得救援船速度的大小为$\sqrt{949}$海里/时.　　　……4分

由$\tan\angle OAP=\frac{\frac{7}{2}}{3+12}=\frac{7}{30}$，得$\angle OAP=\arctan\frac{7}{30}$，故救援船速度的方向为北偏东$\arctan\frac{7}{30}$弧度.　　　　　　　　　　……6分

（2）设救援船的时速为v海里，经过t小时追上失事船，此时位置为$(7t,12t^2)$.

由$vt=\sqrt{(7t)^2+(12t^2+12)^2}$，整理得$v^2=144(t^2+\frac{1}{t^2})+337$. ……10分

因为$t^2+\frac{1}{t^2}\geq 2$，当且仅当t=1时等号成立，

所以$v^2\geq 144\times 2+337=25^2$，即$v\geq 25$.

因此，救援船的时速至少是25海里才能追上失事船.　　……14分

22．在平面直角坐标系xOy中，已知双曲线$C:2x^2-y^2=1$.

（1）设F是C的左焦点，M是C右支上一点.

若$|MF|=2\sqrt{2}$，求过M点的坐标；（5分）（2）过C的左顶点作C的两条渐近线的平行线，求这两组平行线围成的平行四边形的面积；（5分）

（3）设斜率为k ($|k|<\sqrt{2}$)的直线l2交C于P、Q两点，若l与圆$x^2+y^2=1$相切，求证：$OP\perp OQ$；（6分）

[解]（1）双曲线$C:\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-y^2=1$，左焦点$F(-\frac{\sqrt{6}}{2},0)$.

设$M(x,y)$，则$|MF|^2=(x+\frac{\sqrt{6}}{2})^2+y^2=(\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2$，

……2分

由M是右支上一点，知$x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$|MF|=\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，得$x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以$M(\frac{\sqrt{6}}{2},\pm\sqrt{2})$.　　　　　　　　　　　　　　……5分

（2）左顶点$A(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，渐近线方程：$y=\pm\sqrt{2}x$.

过A与渐近线$y=\sqrt{2}x$平行的直线方程为：$y=\sqrt{2}(x+\frac{\sqrt{2}}{2})$，即$y=\sqrt{2}x+1$.

解方程组$\begin{cases}y=-\sqrt{2}\ x\\ y=\sqrt{2}\ x+1\end{cases}$，得$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{4}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$.

……8分

所求平行四边形的面积为 $S=|OA||y|=\frac{\sqrt{2}}{4}$.　　　　……10分

（3）设直线PQ的方程是 $y=kx+b$. 因直线与已知圆相切，故 $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

即 $b^2=k^2+1$ (*).

由 $\begin{cases} y=kx+b \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases}$，得 $(2-k^2)x^2-2kbx-b^2-1=0$.

设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2kb}{2-k^2} \\ x_1x_2=\frac{-1-b^2}{2-k^2} \end{cases}$.

$y_1y_2=(kx_1+b)(kx_2+b)$，所以

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2$

$\frac{(1+k^2)(-1-b^2)}{2-k^2}+\frac{2k^2b^2}{2-k^2}=\frac{-1+b^2-k^2}{2-k^2}$.

由(*)知 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，所以 $OP\perp OQ$.　　　　……16分

23．对于项数为m的有穷数列数集 $\{a_n\}$，记 $b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$（$k$=1, 2, …, m），即 b_k

为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中的最大值，并称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列. 如1, 3, 2, 5, 5的控制数列是

1, 3, 3, 5, 5.

（1）若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的控制数列为2, 3, 4, 5, 5，写出所有的 $\{a_n\}$；（4分）

（2）设 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列，满足 $a_k+b_{m-k+1}=C$（C为常数，k=1, 2, …, m）.

求证：$b_k=a_k$（k=1, 2, …, m）；（6分）

（3）设m=100，常数 $a\in(\frac{1}{2},1)$. 若 $a_n=an^2-(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n$，$\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列，

求 $(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_{100}-a_{100})$.

[解]（1）数列 $\{a_n\}$ 为：2, 3, 4, 5, 1；2, 3, 4, 5, 2；2, 3, 4, 5, 3；

2, 3, 4, 5, 4；2, 3, 4, 5, 5. ……4分

（2）因为 $b_k = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，$b_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\}$，

所以 $b_{k+1} \ge b_k$. ……6分

因为 $a_k + b_{m-k+1} = C$，$a_{k+1} + b_{m-k} = C$，

所以 $a_{k+1} - a_k = b_{m-k+1} - b_{m-k} \ge 0$，即 $a_{k+1} \ge a_k$.

……8分

因此，$b_k = a_k$. ……10分

（3）对 $k = 1, 2, \cdots, 25$，$a_{4k-3} = a(4k-3)^2 + (4k-3)$；

$a_{4k-2} = a(4k-2)^2 + (4k-2)$；

$a_{4k-1} = a(4k-1)^2 - (4k-1)$；$a_{4k} = a(4k)^2 - (4k)$.

比较大小，可得 $a_{4k-2} > a_{4k-3}$. ……12分

因为 $\frac{1}{2} < a < 1$，所以 $a_{4k-1} - a_{4k-2} = (a-1)(8k-3) < 0$，即

$a_{4k-2} > a_{4k-1}$；

$a_{4k} - a_{4k-2} = 2(2a-1)(4k-1) > 0$，即

$a_{4k} > a_{4k-2}$.

又 $a_{4k+1} > a_{4k}$，

从而 $b_{4k-3} = a_{4k-3}$，$b_{4k-2} = a_{4k-2}$，$b_{4k-1} = a_{4k-2}$，$b_{4k} = a_{4k}$.

……15分

因此 $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{100} - a_{100})$

$=$

$(b_3 - a_3) + (b_7 - a_7) + (b_{10} - a_{10}) + \cdots + (b_{4k-1} - a_{4k-1}) + \cdots + (b_{99} - a_{99})$

$=$

$(a_2 - a_3) + (a_6 - a_7) + (a_9 - a_{10}) + \cdots + (a_{4k-2} - a_{4k-1}) + \cdots + (a_{98} - a_{99})$

$$=\sum_{k=1}^{25}(a_{4k-2}-a_{4k-1})=(1-a)\sum_{k=1}^{25}(8k-3)=2525(1-a).$$

……18分