2009年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

一、选择题（每小题 5 分.）

（1）　i 是虚数单位，$\frac{5i}{2-i}=$

（A）1+2i　　（B）-1-2i　　（C）1-2i　　（D）-1+2i

（2）设变量 x，y 满足约束条件：$\begin{cases} x+y\geq 3 \\ x-y\geq -1 \\ 2x-y\leq 3 \end{cases}$.则目标函数 z=2x+3y 的最小值为

（A）6　　（B）7　　（C）8　　（D）23

（3）命题“存在 $x_0\in$ R，$2^{x_0}\leq 0$”的否定是

（A）不存在 $x_0\in$ R, $2^{x_0}>0$　　（B）存在 $x_0\in$ R, $2^{x_0}\geq 0$

（C）对任意的 $x\in$ R, $2^x\leq 0$　　（D）对任意的 $x\in$ R, $2^x>0$

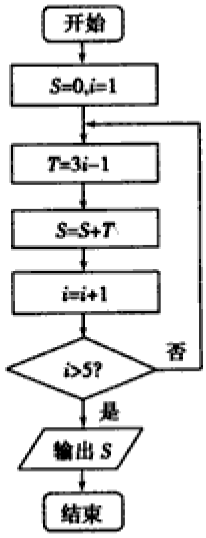
（4）设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x-\ln x(x>0)$, 则 $y=f(x)$

A 在区间 $(\frac{1}{e},1),(1,e)$ 内均有零点。

B 在区间 $(\frac{1}{e},1),(1,e)$ 内均无零点。

C 在区间 $(\frac{1}{e},1)$ 内有零点，在区间 $(1,e)$ 内无零点。

D 在区间 $(\frac{1}{e},1)$ 内无零点，在区间 $(1,e)$ 内有零点。



（5）阅读右图的程序框图，则输出的 S=

A　26　　B 35　　C 40　　D 57

(6) 设 $a>0,b>0.$ 若 $\sqrt{3}$ 是 3^a 与 3^b 的等比中项，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为

A　8　　B　4　　C 1　　D $\frac{1}{4}$

（7）已知函数 $f(x)=\sin(\varpi x+\frac{\pi}{4})(x\in R,\varpi>0)$ 的最小正周期为 π，为了得到函数

$g(x)=\cos\varpi x$ 的图象，只要将 $y=f(x)$ 的图象

A 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度　　B 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

C 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度　　D 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

（8）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, x\geq 0,\\ 4x-x^2, x<0,\end{cases}$ 若 $f(2-a^2)>f(a)$, 则实数 a 的取值范围是

A $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B $(-1,2)$　　C $(-2,1)$　　D $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

（9）．设抛物线 y^2=2x 的焦点为 F，过点 M（$\sqrt{3}$，0）的直线与抛物线相交于 A，B 两点，与抛物线的准线相交于 C，$|BF|$=2，则 ΔBCF 与 ΔACF 的成面积之比 $\frac{S_{\Delta BCF}}{S_{\Delta ACF}}=$

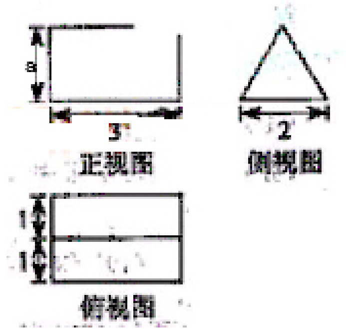
（A）$\dfrac{4}{5}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{4}{7}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

（10）.0＜b＜1+a, 若关于 x 的不等式 $(x-b)^2>(ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个，则

（A）-1＜a＜0　　（B）0＜a＜1　　（C）1＜a＜3　　（D）3＜a＜6

二．填空题：（6 小题，每题 4 分，共 24 分）

（11）某学院的 A，B，C 三个专业共有 1200 名学生，为了调查这些学生勤工俭学的情况，拟采用分层抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本。已知该学院的 A 专业有 380 名学生，B 专业有 420 名学生，则在该学院的 C 专业应抽取____名学生。



（12）如图是一个几何体的三视图，若它的体积是 $3\sqrt{3}$，则 a=_______

(13) 设直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \end{cases}$（t 为参数），直线 l_2 的方程为 y=3x+4 则 l_1 与 l_2 的距离为_______

(14)若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0$（a>0）的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$，则 a=__________

(15)在四边形 ABCD 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$=（1，1），$\dfrac{1}{|\overrightarrow{BA}|}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{BC}|}\overrightarrow{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}$，则四边形 ABCD 的面积是_________

（16）用数字 0，1，2，3，4，5，6 组成没有重复数字的四位数，其中个位、十位和百位上的数字之和为偶数的四位数共有________个（用数字作答）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（满分 12 分）在⊿ABC 中，BC=$\sqrt{5}$，AC=3，sinC=2sinA

(I) 求 AB 的值：

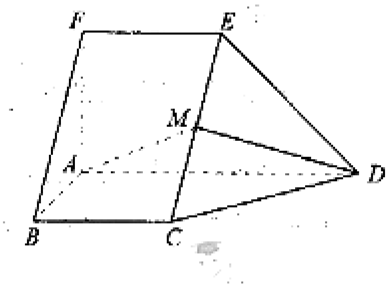
(II) 求 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值

（18）（满分 12 分）在 10 件产品中，有 3 件一等品，4 件二等品，3 件三等品。从这 10 件产品中任取 3 件，求：

（I） 取出的 3 件产品中一等品件数 X 的分布列和数学期望;

（II） 取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数的概率。

（19）（满分 12 分）如图，在五面体 ABCDEF 中，FA ⊥平面 ABCD, AD//BC//FE，AB⊥AD，M 为 EC 的中点，AF=AB=BC=FE=



$\frac{1}{2}$ AD

(I) 求异面直线 BF 与 DE 所成的角的大小；
(II) 证明平面 AMD⊥平面 CDE；
（III）求二面角 A-CD-E 的余弦值

（20）（满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x^2+ax-2a^2+3a)e^x(x\in R)$, 其中 $a\in R$

（1） 当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$ 处的切线的斜率；

（2） 当 $a\neq\frac{2}{3}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值。

（21）（满分 14 分）

以知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-c,0)$和$F_2(c,0)(c>0)$，过点 $E(\frac{a^2}{c},0)$ 的直线与椭圆相交与 A,B 两点，且 $F_1A//F_2B,|F_1A|=2|F_2B|$。

（1） 求椭圆的离心率
（2） 求直线 AB 的斜率；
（3） 设点 C 与点 A 关于坐标原点对称，直线 F_2B 上有一点 $H(m,n)(m\neq 0)$ 在Δ AF_1C 的外接圆上，求 $\frac{n}{m}$ 的值

（22）（满分 14 分）已知等差数列{a_n}的公差为 d（d≠0），等比数列{b_n}的公比为 q（q>1）。设 $s_n=a_1b_1+a_2b_2$ …..+ a_nb_n ,$T_n=a_1b_1-a_2b_2$+…..+$(-1)^{n-1}$ a_nb_n ,n∈ N^+

(I) 若 $a_1=b_1=1$，d=2，q=3，求 S_3 的值；

(II) 若 b_1=1，证明（1-q）S_{2n}-（1+q）$T_{2n}=\frac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}$，n∈ N^+；

(III) 若正数 n 满足 2≤n≤q，设 $k_1,k_2,...,k_n$和$l_1,l_2,...,l_n$是1,2,...，n 的两个不同的排列，

$c_1=a_{k_1}b_1+a_{k_2}b_2+...+a_{k_n}b_n$， $c_2=a_{l_1}b_1+a_{l_2}b_2+...+a_{l_n}b_n$ 证明 $c_1\neq c_2$。

2009年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一． 选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分50分。

（1）D （2）B （3）D （4）D （5） C

（6）B （7）A （8）C （9）A （10）C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，满分24分。

（11） 40 （12）$\sqrt{3}$ （13） $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

（14） 1 （15） （16）324

三．解答题

（17）本小题主要考查正弦定理、余弦定理、同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦与余弦、两角差的正弦等基础知识，考查基本运算能力。满分12分。

（Ⅰ）解：在△ABC中，根据正弦定理，$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$

于是 AB=$\frac{\sin C}{\sin A}BC=2BC=2\sqrt{5}$

（Ⅱ）解：在△ABC中，根据余弦定理，得 cosA=$\frac{AB^2+AC^2-BD^2}{2AB\bullet AC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

于是 sinA=$\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

从而 sin2A=2sinAcosA=$\frac{4}{5}$,cos2A=cos²A-sin²A=$\frac{3}{5}$

所以 sin(2A-$\frac{\pi}{4}$)=sin2Acos$\frac{\pi}{4}$-cos2Asin$\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

(18)本小题主要考查古典概型及计算公式、离散型随机变量的分布列和数学期望、互斥事件等基础知识，考查运用概率知识解决实际问题的能力。满分12分。

（Ⅰ）解：由于从10件产品中任取3件的结果为C_3^k，从10件产品中任取3件，其中恰有k件一等品的结果数为$C_3^kC_7^{3-k}$，那么从10件产品中任取3件，其中恰有k件一等品的概率为P(X=k)= $\frac{C_3^kC_7^{3-k}}{C_{10}^3}$,k=0,1,2,3.

所以随机变量X的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{120}$

X的数学期望 EX=$0\times\frac{7}{24}+1\times\frac{21}{40}+2\times\frac{7}{40}+3\times\frac{1}{120}=\frac{9}{10}$

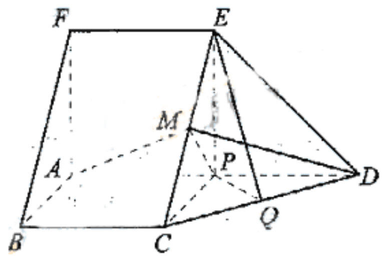
（Ⅱ）解：设“取出的3件产品中一等品件数多于二等品件数”为事件A，“恰好取出1件一等品和2件三等品”为事件A_1“恰好取出2件一等品“为事件A_2，”恰好取出3件一等品”为事件A_3由于事件A_1，A_2，A_3彼此互斥，且A=$A_1\cup A_2\cup A_3$而

$P(A_1)\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{40}$, P($A_2$)=P(X=2)= $\dfrac{7}{40}$, P(A3)=P(X=3)= $\dfrac{1}{120}$,

所以取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数的概率为

P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)= $\dfrac{3}{40}+\dfrac{7}{40}+\dfrac{1}{120}=\dfrac{31}{120}$

(19)本小题要考查异面直线所成的角、平面与平面垂直、二面角等基础知识，考查用空间向量解决立体几何问题的方法，考查空间想像能力、运算能力和推理论证能力。满分 12 分.



方法一：（Ⅰ）解：由题设知，BF//CE，所以∠CED（或其补角）为异面直线 BF 与 DE 所成的角。设 P 为 AD 的中点，连结 EP，PC。因为 FE $\underset{=}{\parallel}$ AP，所以 FA $\underset{=}{\parallel}$ EP，同理 AB $\underset{=}{\parallel}$ PC。又 FA⊥平面 ABCD，所以 EP⊥平面 ABCD。而 PC，AD 都在平面 ABCD 内, 故 EP ⊥PC，EP ⊥AD 。由 AB ⊥AD，可得 PC ⊥AD 设 FA=a， 则 EP=PC=PD=a,CD=DE=EC=$\sqrt{2}a$， 故 ∠CED=60°。所以异面直线 BF 与 DE 所成的角的大小为 60°

（II）证明：因为

$DC=DE$且M为CE的中点，所以DM $\perp$ CE.连结MP，则MP $\perp$ CE.

又MP $\cap$ DM $=$ M，故CE $\perp$ 平面AMD.而CE $\subset$ 平面CDE，所以平面AMD $\perp$ 平面CDE.

（III）解：设Q为CD的中点，连结PQ，EQ.因为CE $=$ DE，所以EQ $\perp$ CD.因为

PC $=$ PD，所以PQ $\perp$ CD，故$\angle$EQP为二面角A $-$ CD $-$ E的平面角.

由（I）可得，$EP\perp PQ$，$\mathrm{EQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，$PQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a.$

于是在RtΔEPQ中，$\cos\angle EQP=\dfrac{PQ}{EQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，.

方法二：如图所示，建立空间直角坐标系，

点 A 为坐标原点。设 $AB=1$，依题意得 $\mathrm{B}(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，　$D(0,2,0)$，　$E(0,1,1)$，

$\mathrm{F}(0,0,1)$，

$\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2}\right)$.

（I）解：$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(-1,0,1)$，　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(0,-1,1)$，

于是 $\cos\left\langle \overrightarrow{BF},\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right\rangle = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BF}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{DE}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|} = \dfrac{0+0+1}{\sqrt{2}\bullet\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}.$

所以异面直线 BF 与 DE 所成的角的大小为 60^0 .

（II）证明：由 $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2}\right)$， $\overrightarrow{\mathrm{CE}} = (-1,0,1)$， $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,2,0)$，可得 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ ，

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$.因此，$\mathrm{CE}\perp\mathrm{AM}$，$\mathrm{CE}\perp\mathrm{AD}$.又 $\mathrm{AM}\cap\mathrm{AD} = \mathrm{A}$，故 $\mathrm{CE}\perp$ 平面AMD.

而 $\mathrm{CE}\subset$ 平面CDE，所以平面AMD $\perp$ 平面CDE.

（III）解：设平面CDE的法向量为 $u = (x，y，z)$，则 $\begin{cases} u\bullet\overrightarrow{CE} = 0, \\ u\bullet\overrightarrow{\mathrm{D}E} = 0. \end{cases}$

于是 $\begin{cases} -x+z = 0, \\ -y+z = 0. \end{cases}$ 令 $x = 1$，可得 $u = (1,1,1)$.

又由题设，平面 ACD 的一个法向量为 $v = (0,0,1)$.

所以，$\cos\langle u，v\rangle = \dfrac{u\bullet v}{|u||v|} = \dfrac{0+0+1}{\sqrt{3}\bullet 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

（20）本小题主要考查导数的几何意义、导数的运算、利用导数研究函数的单调性与极值等基础知识，考查运算能力及分类讨论的思想方法。满分 12 分。

（I）解：当 $a = 0$ 时，$f(x) = x^2e^x$，$f'(x) = (x^2+2x)e^x$，故 $f'(1) = 3e.$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 $3e.$

（II）解：$f'(x) = \left[x^2+(a+2)x-2a^2+4a\right]e^x.$

令 $f'(x) = 0$，解得 $x = -2a$，或 $x = a-2$.由 $a\neq\dfrac{2}{3}$ 知，$-2a\neq a-2.$

以下分两种情况讨论。

（1）若 $a>\dfrac{2}{3}$，则 $-2a<a-2$. 当 x 变化时，$f'(x)，f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2a)$	$-2a$	$(-2a，a-2)$	$a-2$	$(a-2,+\infty)$
	+	0	—	0	+
	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2a)$,$(a-2,+\infty)$ 内是增函数，在 $(-2a，a-2)$ 内是减函数.

函数$f(x)$在$x=-2a$处取得极大值$f(-2a)$，且$f(-2a)=3ae^{-2a}$.

函数$f(x)$在$x=a-2$处取得极小值$f(a-2)$，且$f(a-2)=(4-3a)e^{a-2}$.

（2）若$a<\frac{2}{3}$，则$-2a>a-2$，当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty，a-2)$	$a-2$	$(a-2,-2a)$	$-2a$	$(-2a,+\infty)$
	+	0	—	0	+
	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$在$(-\infty，a-2)$,$(-2a,+\infty)$内是增函数，在$(a-2,-2a)$内是减函数。

函数$f(x)$在$x=a-2$处取得极大值$f(a-2)$，且$f(a-2)=(4-3a)e^{a-2}$.

函数$f(x)$在$x=-2a$处取得极小值$f(-2a)$，且$f(-2a)=3ae^{-2a}$.

（21）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、圆的方程等基础知识，考查用代数方法研究圆锥曲线的性质及数形结合的思想，考查运算能力和推理能力，满分 14 分

（I）　　解：由$F_1A \parallel F_2B$且$|F_1A|=2|F_2B|$，得$\left|\frac{EF_2}{EF_1}\right|=\left|\frac{F_2B}{F_1A}\right|=\frac{1}{2}$，从而$\frac{\frac{a^2}{c}-c}{\frac{a^2}{c}+c}=\frac{1}{2}$

整理，得$a^2=3c^2$，故离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

解：由（I）得$b^2=a^2-c^2=2c^2$，所以椭圆的方程可写为$2x^2+3y^2=6c^2$

设直线 AB 的方程为$y=k\left(x-\frac{a^2}{c}\right)$，即$y=k(x-3c)$.

由已知设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则它们的坐标满足方程组$\begin{cases} y=k(x-3c) \\ 2x^2+3y^2=6c^2 \end{cases}$

消去 y 整理，得$(2+3k^2)x^2-18k^2cx+27k^2c^2-6c^2=0$.

依题意，$\Delta=48c^2(1-3k^2)>0$，得$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$

而　　$x_1+x_2=\frac{18k^2c}{2+3k^2}$　　　　①

$$x_1x_2=\frac{27k^2c^2-6c^c}{2+3k^2} \qquad ②$$

由题设知，点 B 为线段 AE 的中点，所以

$$x_1+3c=2x_2 \qquad ③$$

联立①③解得　$x_1=\frac{9k^2c-2c}{2+3k^2}$，$x_2=\frac{9k^2c+2c}{2+3k^2}$

将 x_1,x_2 代入②中，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(III)解法一：由（II）可知 $x_1=0,x_2=\frac{3c}{2}$

当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时，得 $A(0,\sqrt{2}c)$，由已知得 $C(0,-\sqrt{2}c)$.

线段 AF_1 的垂直平分线 l 的方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}c=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{c}{2}\right)$ 直线 l 与 x 轴的交点 $\left(\frac{c}{2},0\right)$ 是 ΔAF_1C 外接圆的圆心，因此外接圆的方程为 $\left(\mathrm{x}-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{c}{2}+c\right)^2$.

直线 F_2B 的方程为 $y=\sqrt{2}(x-c)$，于是点 H（m，n）的坐标满足方程组

$$\begin{cases}\left(m-\frac{c}{2}\right)^2+n^2=\frac{9c^2}{4}\\ n=\sqrt{2}(m-c)\end{cases}，\quad 由 m\neq 0, 解得\begin{cases}m=\frac{5}{3}c\\ n=\frac{2\sqrt{2}}{3}c\end{cases} 故 \frac{n}{m}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时，同理可得 $\frac{n}{m}=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$

解法二：由（II）可知 $x_1=0,x_2=\frac{3c}{2}$

当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时，得 $A(0,\sqrt{2}c)$,由已知得 $C(0,-\sqrt{2}c)$

由椭圆的对称性可知 B，F_2，C 三点共线，因为点 H（m，n）在 ΔAF_1C 的外接圆上，

且 $F_1A // F_2B$，所以四边形 AF_1CH 为等腰梯形.

由直线 F_2B 的方程为 $y=\sqrt{2}(x-c)$,知点 H 的坐标为 $(m,\sqrt{2}m-\sqrt{2}c)$.

因为 $|AH|=|CF_1|$，所以 $m^2+(\sqrt{2}m-\sqrt{2}c-\sqrt{2}c)^2=a^2$，解得 m=c（舍），或 $m=\frac{5}{3}c$.

则 $n=\frac{2\sqrt{2}}{3}c$，所以 $\frac{n}{m}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时同理可得 $\frac{\mathrm{n}}{m}=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$

（22）本小题主要考查等差数列的通项公式、等比数列的通项公式与前 n 项和公式等基础知识，考查运算能力，推理论证能力及综合分析和解决问题的能力的能力，满分 14 分。

（Ⅰ）解：由题设，可得 $a_n=2n-1,b_n=3^{n-1},n\in N^*$

所以，$S_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=1\times1+3\times3+5\times9=55$

（Ⅱ）证明：由题设可得 $b_n=q^{n-1}$ 则

$$S_{2n}=a_1+a_2q+a_3q^2+.....+a_{2n}q^{2n-1}, \qquad ①$$

$$T_{2n}=a_1-a_2q+a_3q^2-a_4q^3+.....-a_{2n}q^{2n-1}, \qquad ②$$

$$S_{2n}-T_{2n}=2(a_2q+a_4q^3+...-a_{2n}q^{2n-1})$$

① 式减去②式，得

① 式加上②式，得

$$S_{2n}+T_{2n}=2(a_1+a_3q^2+....+a_{2n-1}q^{2n-2}) \qquad ③$$

② 式两边同乘 q，得

$$q(S_{2n}+T_{2n})=2(a_1q+a_3q^3+....+a_{2n-1}q^{2n-1})$$

所以，

$$(1-q)S_{2n}-(1+q)T_{2n}=(S_{2n}-T_{2n})-q(S_{2n}+T_{2n})$$

$$=2d(q+q^3+\mathrm{K}+q^{2n-1})$$

$$=\frac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2},n\in N^*$$

(III) 证明：$c_1-c_2=(a_{k_1}-a_{l_1})b_1+(a_{k_2}-a_{l_2})b_2+\mathrm{K}+(a_{k_n}-a_{l_n})b_n$

$$=(k_1-l_1)db_1+(k_2-l_2)db_1q+\mathrm{K}+(k_n-l_n)db_1q^{n-1}$$

因为 $d\neq0,b_1\neq0,$ 所以

$$\frac{c_1-c_2}{db_1}=(k_1-l_1)+(k_2-l_2)q+\cdots+(k_n-l_n)q^{n-1}$$

（1）　若 $k_n \neq l_n$，取 i=n

（2）　若 $k_n = l_n$，取 i 满足 $k_i \neq l_i$ 且 $k_j = l_j, i+1 \le j \le n$

由（1）, (2) 及题设知，$1<i\le n$ 且

$$\frac{c_1-c_2}{db_1}=(k_1-l_1)+(k_2-l_2)q+\cdots(k_{i-1}-l_{i-1})q^{i-2}+(k_i-l_i)q^{i-1}$$

① 当 $k_i<l_i$ 时，得 $k_i-l_i\le -1$,由 $q\ge n$，得 $k_i-l_i\le q-1, i=1,2,3.....i-1$

即 $k_1-l_1\le q-1$，$(k_2-l_2)q\le q(q-1)\cdots$，$(k_{i-1}-l_{i-1})q^{i-2}\le q^{i-2}(q-1)$

又 $(k_i-l_i)q^{i-1}\le -q^{i-1}$, 所以

$$\frac{c_1-c_2}{db_1}=(q-1)+(q-1)q+\cdots(q-1)q^{i-2}-q^{i-1}=(q-1)\frac{1-q^{i-1}}{1-q}$$

因此 $c_1-c_2\neq 0$, 即 $c_1\neq c_2$

② 当 $k_i>l_i$ 同理可得 $\frac{c_1-c_2}{db_1}<-1$，因此 $c_1\neq c_2$

综上，$c_1\neq c_2$

选择填空解析

2008 年天津市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，满分 50 分）

1．（5 分）（2008•天津）i 是虚数单位，$\frac{i^3(i+1)}{i-1}$=（　　）

A．﹣1　B．1　　C．﹣i　D．i

【考点】复数代数形式的混合运算．

【分析】复数的分子复杂，先化简，然后再化简整个复数，可得到结果．

【解答】解：$\frac{i^3(i+1)}{i-1}=\frac{-i(i+1)}{i-1}=\frac{1-i}{i-1}=-1$，

故选 A．

【点评】本题考查复数的代数形式的运算，i 的幂的运算，是基础题．

2．（5 分）（2008•天津）设变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 1\\x+2y\geqslant 1\end{cases}$，则目标函数 z=5x+y 的最大值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【考点】简单线性规划的应用．

【专题】计算题．

【分析】本题主要考查线性规划的基本知识，先画出约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 1\\x+2y\geqslant 1\end{cases}$的可行域，再求出可行域中各角点的坐标，将各点坐标代入目标函数的解析式，分析后易得目标函数 Z=5x+y 的最小值．

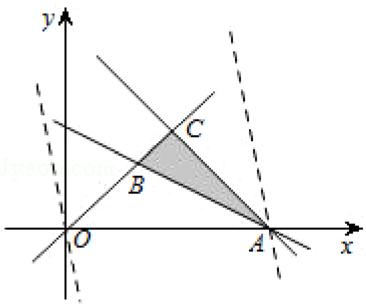
【解答】解：满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 1\\x+2y\geqslant 1\end{cases}$的可行域如图，

由图象可知：

目标函数 z=5x+y 过点 A（1，0）时

z 取得最大值，$z_{max}=5$，

故选 D．



【点评】在解决线性规划的问题时，我们常用“角点法”，其步骤为：①由约束条件画出可行域⇒②求出可行域各个角点的坐标⇒③将坐标逐一代入目标函数⇒④验证，求出最优解．

3．（5 分）（2008•天津）设函数 $f(x)=\cos^2(x+\frac{\pi}{4})-\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$，$x\in R$，则函数 f（x）是（　　）

A．最小正周期为 π 的奇函数　B．最小正周期为 π 的偶函数

C．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数　D．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

【考点】二倍角的余弦；三角函数的周期性及其求法；余弦函数的奇偶性．

【分析】首先利用余弦的二倍角公式把原函数转化为 y=Asinωx 的形式，然后由 y=Asinωx 的性质得出相应的结论．

【解答】解：$f(x)=\cos^2(x+\frac{\pi}{4})-\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$

$=\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}-\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}$

$=-\sin 2x$

所以 T=π，且为奇函数．

故选 A．

【点评】本题考查余弦的二倍角公式及函数 y=Asinωx 的性质．

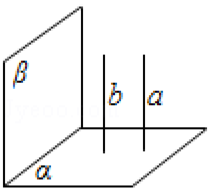
4．（5 分）（2008•天津）设 a，b 是两条直线，α，β 是两个平面，则 a⊥b 的一个充分条件是（　　）

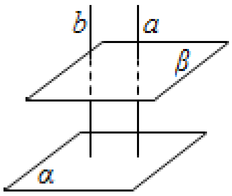
A．a⊥α，b∥β，α⊥β　B．a⊥α，b⊥β，α∥β　C．a⊂α，b⊥β，α∥β　D．a⊂α，b∥β，α⊥β

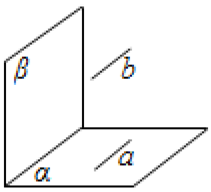
【考点】空间中直线与直线之间的位置关系；必要条件、充分条件与充要条件的判断．

【分析】根据题意分别画出错误选项的反例图形即可．

【解答】解：A、B、D 的反例如图．







故选 C．

【点评】本题考查线面垂直、平行的性质及面面垂直、平行的性质，同时考查充分条件的含义及空间想象能力．

5．（5 分）（2008•天津）设椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2-1}=1$（m>1）上一点 P 到其左焦点的距离为 3，到右焦点的距离为 1，则 P 点到右准线的距离为（　　）

A．6　B．2　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【考点】椭圆的简单性质．

【专题】计算题．

【分析】根据椭圆定义，求出 m，利用第二定义求出到右准线的距离，注意右焦点右准线的对应关系．

【解答】解：由椭圆第一定义知 a=2，所以 $m^2=4$，

椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow\frac{1}{d}=e=\frac{1}{2}$

所以 d=2，故选 B

【点评】本题考查了椭圆的第一定义以及第二定义的应用

6．（5 分）（2008•天津）设集合 $S=\{x||x-2|>3\}$，$T=\{x|a<x<a+8\}$，$S\cup T=R$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$-3<a<-1$　B．$-3\le a\le -1$　　C．$a\le -3$ 或 $a\ge -1$　　D．$a<-3$ 或 $a>-1$

【考点】集合的包含关系判断及应用．

【分析】根据题意，易得 $S=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，又有 $S\cup T=R$，可得不等式组，解可得答案．

【解答】解：根据题意，$S=\{x||x-2|>3\}=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，

又有 $S\cup T=R$，

所以$\begin{cases}a<-1\\a+8>5\end{cases}\Rightarrow -3<a<-1$，

故选 A．

【点评】本题考查集合间的相互包含关系及运算，应注意不等式的正确求解，并结合数轴判断集合间的关系．

7．（5 分）（2008•天津）设函数 $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ $(0\le x<1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，则（　　）

A．$f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最大值为 1

B．$f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最小值为 0

C．$f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最大值为 1

D．$f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最小值为 0

【考点】反函数．

【分析】根据本题所给出的选项，利用排除法比较方便，这样可以简化直接求解带来的繁琐．

【解答】解：$\because y=-\sqrt{x}+1$ 为减函数，

由复合函数单调性知 $f(x)$ 为增函数，

$\therefore f^{-1}(x)$ 单调递增，排除 B、C；

又 $f^{-1}(x)$ 的值域为 $f(x)$ 的定义域，

$\therefore f^{-1}(x)$ 最小值为 0

故选 D

【点评】本题很好的利用了排除法，显得小巧灵活，如果求出反函数再去研究，就会麻烦多了，可以比较一下感受感受，所以筛选法、排除法、验证法都是很好的解题方法，平时要用．

8．（5 分）（2008•天津）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<0\\x-1, & x\ge 0\end{cases}$，则不等式 $x+(x+1)f(x+1)\le 1$ 的解集是（　　）

A．$\{x|-1\le x\le \sqrt{2}-1\}$　　B．$\{x|x\le 1\}$　C．$\{x|x\le \sqrt{2}-1\}$　D．$\{x|-\sqrt{2}-1\le x\le \sqrt{2}-1\}$

【考点】分段函数的解析式求法及其图象的作法．

【分析】对 $f(x+1)$ 中的 x 分两类，即当 $x+1<0$，和 $x+1\ge 0$ 时分别解不等式可得结果．

【解答】解：依题意得$\begin{cases}x+1<0\\x+(x+1)(-x)\leqslant 1\end{cases}$或$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\x+(x+1)x\leqslant 1\end{cases}$

所以$\begin{cases}x<-1\\x\in R\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant -1\\-\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\end{cases}$$\Rightarrow x<-1$或$-1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\Rightarrow x\leqslant \sqrt{2}-1$

故选：C．

【点评】本题考查分断函数，不等式组的解法，分类讨论的数学思想，是基础题．

9．（5 分）（2008•天津）已知函数 f（x）是定义在 R 上的偶函数，且在区间[0，+∞）上是增函数．令 a=f（$\sin\frac{2\pi}{7}$），b=f（$\cos\frac{5\pi}{7}$），c=f（$\tan\frac{5\pi}{7}$），则（　　）

A．b＜a＜c　B．c＜b＜a　C．b＜c＜a　D．a＜b＜c

【考点】偶函数；不等式比较大小．

【专题】压轴题．

【分析】通过奇偶性将自变量调整到同一单调区间内，根据单调性比较 a、b、c 的大小．

【解答】解：$b=f\left(-\cos\frac{5\pi}{7}\right)=f\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)$，$c=f\left(-\tan\frac{5\pi}{7}\right)=f\left(\tan\frac{2\pi}{7}\right)$

因为$\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$，又由函数在区间[0，+∞）上是增函数，

所以$0<\cos\frac{2\pi}{7}<\sin\frac{2\pi}{7}<1<\tan\frac{2\pi}{7}$，所以 b＜a＜c，

故选 A

【点评】本题属于单调性与增减性的综合应用，解决此类题型要注意：

（1）通过周期性、对称性、奇偶性等性质将自变量调整到同一单调区间内，再比较大小．

（2）培养数形结合的思想方法．

10．（5 分）（2008•天津）有 8 张卡片分别标有数字 1，2，3，4，5，6，7，8，从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列，要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5，则不同的排法共有（　　）

A．1344 种　B．1248 种　C．1056 种　D．960 种

【考点】排列、组合的实际应用．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】根据题意，分 2 步进行，首先确定中间行的数字只能为 1，4 或 2，3，然后确定其余 4 个数字的排法数，使用排除法，用总数减去不合题意的情况数，可得其情况数目，由乘法原理计算可得答案．

【解答】解：根据题意，要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5，则中间行的数字只能为 1，4 或 2，3，共有 $C_2^1A_2^2=4$ 种排法，

然后确定其余 4 个数字，其排法总数为 $A_6^4=360$，

其中不合题意的有：中间行数字和为 5，还有一行数字和为 5，有 4 种排法，

余下两个数字有 $A_4^2=12$ 种排法，

所以此时余下的这 4 个数字共有 360﹣4×12=312 种方法；

由乘法原理可知共有 4×312=1248 种不同的排法，

故选 B．

【点评】本题考查排列、组合的综合应用，注意特殊方法的使用，如排除法.

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

11．（4 分）（2008•天津）$(x-\frac{2}{\sqrt{x}})^5$的二项展开式中，x^2 的系数是__40__（用数字作答）.

【考点】二项式定理.

【专题】计算题.

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第 r+1 项，令 x 的指数为 2 求出 x^2 的系数.

【解答】解：$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-\frac{2}{\sqrt{x}})^r=(-2)^r C_5^r x^{5-\frac{3}{2}r}$，

令$5-\frac{3}{2}r=2$

所以 r=2，

所以 x^2 的系数为$(-2)^2C_5^2=40$.

故答案为 40

【点评】本题考查二项展开式的通项公式是解决二项展开式的特定项问题的工具.

12．（4 分）（2008•天津）一个正方体的各顶点均在同一球的球面上，若该球的体积为$4\sqrt{3}\pi$，则该正方体的表面积为__24__.

【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积；球的体积和表面积.

【专题】计算题；综合题.

【分析】由题意球的直径等于正方体的体对角线的长，求出球的半径，再求正方体的棱长，然后求正方体的表面积.

【解答】解：设球的半径为 R，由$\frac{4\pi}{3}R^3=4\sqrt{3}\pi$ 得 $R=\sqrt{3}$，

所以 a=2，表面积为 $6a^2=24$.

故答案为：24

【点评】本题考查球的内接体，球的表面积，考查空间想象能力，计算能力，是基础题.

13．（4 分）（2008•天津）已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 y=x 对称．直线 4x﹣3y﹣2=0 与圆 C 相交于 A、B 两点，且|AB|=6，则圆 C 的方程为 $x^2+(y-1)^2=10$.

【考点】抛物线的应用；圆的标准方程；直线和圆的方程的应用.

【专题】计算题.

【分析】先根据抛物线方程求得焦点坐标，进而求得圆心，进而求得圆心到直线 4x﹣3y﹣2=0 的距离，根据勾股定理求得圆的半径．则圆的方程可得.

【解答】解：依题意可知抛物线的焦点为（1，0），

∵圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 y=x 对称.

所以圆心坐标为（0，1），

$$\therefore r^2=3^2+\frac{(0-3-2)^2}{5^2}=10,$$

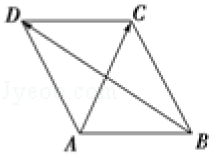
圆 C 的方程为 $x^2+(y-1)^2=10$

故答案为 $x^2+(y-1)^2=10$

【点评】本题主要考查了抛物线的应用．涉及了圆的基本性质，对称性问题，点到直线的距离，数形结合思想等问题．

14．（4 分）（2008•天津）如图，在平行四边形 ABCD 中，

$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,2)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$__3__．



【考点】平面向量数量积的运算．

【分析】选一对不共线的向量做基底，在平行四边形中一般选择以最左下角定点为起点的一对边做基底，把基底的坐标求出来，代入数量积的坐标公式进行运算，得到结果．

【解答】解：令 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，

则 $\begin{cases}a+b=(1,2)\\-a+b=(-3,2)\end{cases}\Rightarrow a=(2,0)$，$b=(-1,2)$

$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=b\cdot(a+b)=3$．

故答案为：3

【点评】用基底表示向量，然后进行运算，比较困难．要启发学生在理解数量积的运算特点的基础上，逐步把握数量积的运算律，引导学生注意数量积性质的相关问题的特点，以熟练地应用数量积的性质．

15．（4 分）（2008•天津）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3^{n+1}}(n\in N*)$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$__$\frac{7}{6}$__．

【考点】数列的求和；极限及其运算．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】首先由 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3^{n+1}}(n\in N*)$ 求 a_n 可以猜想到用错位相加法把中间项消去，即可得到 a_n 的表达式，再求极限即可．

【解答】解：因为

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}+a_{n-2})++(a_2-a_1)+a_1=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{3^2}+1$$

所以 a_n 是一个等比数列的前 n 项和，所以 $a_n=\frac{1-q^n}{1-q}$，且 q=2．代入，

所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1+\dfrac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{7}{6}$.

所以答案为$\dfrac{7}{6}$

【点评】此题主要考查数列的求和问题，用到错位相加法的思想，需要注意.

16. （4 分）（2008•天津）设 a＞1，若仅有一个常数 c 使得对于任意的 x∈[a，2a]，都有 y∈[a，a^2]满足方程 $\log_a x+\log_a y=c$，这时 a 的取值的集合为__{2}__.

【考点】对数的运算性质；函数单调性的性质.

【专题】计算题；压轴题.

【分析】由 $\log_a x+\log_a y=c$ 可以用 x 表达出 y，转化为函数的值域问题求解.

【解答】解：∵$\log_a x+\log_a y=c$，

$\therefore \log_a^{xy}=c$

$\therefore xy=a^c$

得$y=\dfrac{a^c}{x}$，单调递减，所以当 x∈[a，2a]时，$y\in[\dfrac{a^{c-1}}{2},\ a^{c-1}]$

所以$\begin{cases}\dfrac{a^{c-1}}{2}\geqslant a\\ a^{c-1}\leqslant a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c\geqslant 2+\log_a 2\\ c\leqslant 3\end{cases}$，因为有且只有一个常数 c 符合题意，所以

$2+\log_a 2=3$，解得 a=2，所以 a 的取值的集合为{2}.

故答案为：{2}

【点评】本题考查函数与方程思想，需要有较强的转化问题的能力.