2012 年浙江省高考数学（理科）试卷（解析版）

数　　学（理科）

选择题部分（共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个项是符合题目要求的。

1． 设集合 $A=\{x\,|\,1<x<4\}$，集合 $B=\{x\,|\,x^2-2x-3\le 0\}$，则 $A\cap(C_R B)=$

A． $(1,4)$　　**B．** $(3,4)$　　**C．** $(1,3)$　　**D．** $(1,2)\cup(3,4)$

【答案】B

2． 已知 i 是虚数单位，则 $\dfrac{3+i}{1-i}=$

A． $1-2i$　　**B．** $2-i$　　**C．** $2+i$　　**D．** $1+2i$

【答案】D

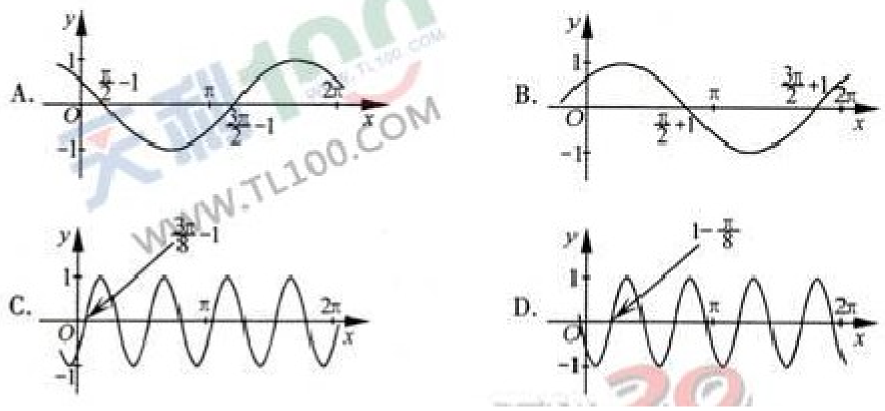
3． 设 $a\in R$，则“$a=1$”是“直线 l_1：$ax+2y-1=0$ 与直线 l_2：$x+(a+1)y+4=0$ 平行”的

A． 充分不必要条件　　**B．** 必要不充分条件

C． 充分必要条件　　**D．** 既不充分也不必要条件

【答案】A

4． 把函数 $y=\cos 2x+1$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），然后向左平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，得到的图像是



【答案】A

5．设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是两个非零向量

A．若$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

B．若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

C．若$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，则存在实数$\lambda$，使得$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

D．若存在实数λ，使得$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

【答案】C

6．若从1，2，3，…，9这9个整数中同时取4个不同的数，其和为偶数，则不同的取法共有

A．60种　　B．63种　　C．65种　　D．66种

【答案】D

7．设S_n是公差为d（$d\neq 0$）的无穷等差数列$\{a_n\}$的前n项和，则下列命题错误的是

A．若$d<0$，则数列$\{S_n\}$有最大项

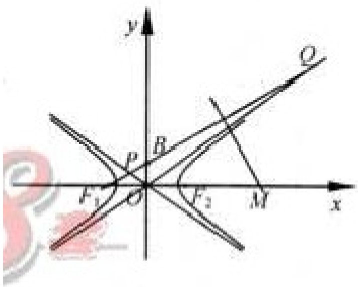
B．若数列$\{S_n\}$有最大项，则$d<0$

C．若数列$\{S_n\}$是递增数列，则对任意$n\in N^*$，均有$S_n>0$

D．若对任意$n\in N^*$，均有$S_n>0$，则数列$\{S_n\}$是递增数列

【答案】C

8．如图，F_1，F_2分别是双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左、右两焦点，$B$是虚轴的端点，直线$F_1B$与$C$的两条渐近线分别交于$P$，$Q$两点，线段$PQ$的垂直平分线与$x$轴交于点$M$．若$|MF_1|=|F_1F_2|$，则$C$的离心率是



（第8题图）

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

【答案】B

9．设$a>0$，$b>0$

A．若 $2^a+2a=2^b+3b$，则 $a>b$　　　　B．$2^a+2a=2^b+3b$ 若，则 $a<b$

C．若 $2^a-2a=2^b-3b$，则 $a>b$　　　　D．若 $2^a-2a=2^b-3b$，则 $a<b$

【答案】A

10．已知矩形 $ABCD$，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$．将 ΔABD 沿矩形的对角线 BD 所在的直线进行翻折，在翻折过程中，

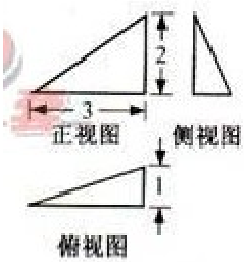
A．存在某个位置，使得直线 AC 与直线 BD 垂直
B．存在某个位置，使得直线 AB 与直线 CD 垂直
C．存在某个位置，使得直线 AD 与直线 BC 垂直
D．对任意位置，三对直线“AC 与 BD”，“AB 与 CD”，“AD 与 BC”均不垂直

【答案】B

非选择题部分（共 100 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分。

11．已知某三棱锥的三视图（单位：cm）如图所示，则该三棱锥的体积等于______cm^3．

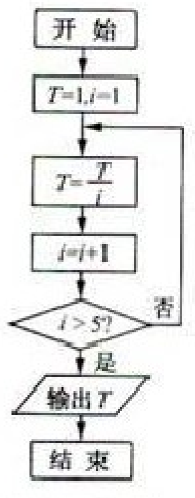


（第 11 题图）

【答案】1

12．若某程序框图如图所示，则该程序运行后输出的值是______．

【答案】$\frac{1}{120}$



（第 12 题图）

13．设公比为 $q(q>0)$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．

若 $S_2=3a_2+2$，$S_4=3a_4+2$，则 $q=$______．

【答案】$\frac{3}{2}$

14．若将函数 $f(x)=x^5$ 表示为

$f(x)=a_0+a_1(1+x)+a_2(1+x)^2+a_3(1+x)^3++a_4(1+x)^4++a_5(1+x)^5$，

其中 a_0，a_1，a_2，…，a_5 为实数，则 $a_3=$______．

【答案】10

15．在ΔABC中，M是BC的中点，$AM=3$，$BC=10$，

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

【答案】-16

16．定义：曲线C上的点到直线的距离的最小值称为曲线C到直线l的距离．已知曲线C_1：$y=x^2+a$到直线l：$y=x$的距离等于曲线C_2：$x^2+(y+4)^2=2$到直线l：$y=x$的距离，则实数$a=$______.

【答案】$\frac{9}{4}$

17．设$a\in R$，若$x>0$时均有$\left[(a-1)x-1\right]\left(x^2-ax-1\right)\geq 0$，

则$a=$______.

【答案】$\frac{3}{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 72 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18．（本题满分 14 分）在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c．已知$\cos A=\frac{2}{3}$，$\sin B=\sqrt{5}\cos C$.

（Ⅰ）求$\tan C$的值；

（Ⅱ）若$a=\sqrt{2}$，求ΔABC的面积.

【答案】本题主要考查三角恒等变换、正弦定理等知识，同时考查运算求解能力。满分 14 分。

（Ⅰ）因为$0<A<\pi$，$\cos A=\frac{2}{3}$，得

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

又 $$\sqrt{5}\cos C=\sin B=\sin(A+C)$$
$$=\sin A\cos C+\cos A\sin C$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\cos C+\frac{2}{3}\sin C$$

所以$\tan C=\sqrt{5}$

（Ⅱ）由$\tan C=\sqrt{5}$，得

$$\sin C=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}，\ \cos C=\frac{1}{\sqrt{6}}，$$

于是

$$\sin B=\sqrt{5}\cos C=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

由 $a=\sqrt{2}$ 及正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得

$$c=\sqrt{3}.$$

设 ΔABC 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

19.（本题满分 **14** 分）已知箱中装有 **4** 个白球和 **5** 个黑球，且规定：取出一个白球得 **2** 分，取出一个黑球得 **1** 分．现从箱中任取（无放回，且每球取道的机会均等）**3** 个球，记随机变量 X 为取出此 **3** 球所得分数之和．

（Ⅰ）求 X 的分布列；

（Ⅱ）求 X 的数学期望 $E(X)$．

【答案】本题主要考查随机事件的概率和随机变量的分布列、数学期望等概念，同时考查抽象概括、运算求解能力和应用意识。满分 **14** 分。

（Ⅰ）由题意得 X 取 **3**，**4**，**5**，**6**，且

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}，\qquad P(X=4)=\frac{C_4^1\cdot C_5^2}{C_9^3}=\frac{10}{21}，$$

$$P(X=5)=\frac{C_4^2\cdot C_5^2}{C_9^3}=\frac{5}{14}，\qquad P(X=6)=\frac{C_4^4}{C_9^3}=\frac{1}{21}.$$

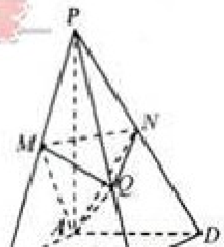
所以 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知

$$E(X)=3\cdot P(X=3)+4\cdot P(X=4)+5\cdot P(X=5)+6\cdot P(X=6)=\frac{13}{3}.$$

20.（本题满分 **15** 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是



边长为$2\sqrt{3}$的菱形，$\angle BAD=120°$，且$PA\perp$平面$ABCD$，

$PA=2\sqrt{6}$，M，N分别为PB，PD的中点．

（Ⅰ）证明：$MN\perp$平面$ABCD$；

（Ⅱ）过点A作$AQ\perp PC$，垂足为点Q，求二面角

$A-MN-Q$的平面角的余弦值．

【答案】本题主要考察空间点、线、面位置关系，二面角等基础知识，空间向量的应用，同时考查空间想像能力和运算求解能力。满分 **15** 分。

（Ⅰ）因为M，N分别是PB，PD的中点，所以MN是ΔPBD的中位线，所以

$$MM//BD$$

又因为$MN\not\subset$平面$ABCD$，所以

$$MM//\text{平面 }ABCD.$$

（Ⅱ）方法一：

连结AC交BD于O，以O为原点，OC，OD所在直线为x，y轴，建立空间直角坐标系$Oxyz$，如图所示

在菱形$ABCD$中，$\angle BAD=120°$，得

$AC=AB=2\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{3}AB=6$.

又因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以

$PA\perp AC$.

在直角ΔPAC中，$AC=2\sqrt{3}$，$PA=2\sqrt{6}$，$AQ\perp PC$，得

$QC=2$，$PQ=4$.

由此知各点坐标如下，

$A(-\sqrt{3},0,0)$，$B(0,-3,0)$，

$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,3,0)$，

$P(-\sqrt{3},0,2\sqrt{6})$，$M(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},\sqrt{6})$，

$N(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},\sqrt{6})$，$Q(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$.

设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面AMN的法向量．

由 $\overrightarrow{AM}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},\sqrt{6})$，$\overrightarrow{AN}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{6})$ 知

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y+\sqrt{6}z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+\sqrt{6}z=0\end{cases}$$

取 $x=-1$，得

$$\boldsymbol{m}=(2\sqrt{2},0,-1)$$

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 QMN 的法向量.

由 $\overrightarrow{QM}=(-\frac{5\sqrt{3}}{6},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{6}}{3})$，$\overrightarrow{QN}=(-\frac{5\sqrt{3}}{6},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{6}}{3})$ 知

$$\begin{cases}-\frac{5\sqrt{3}}{6}x-\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0\\ -\frac{5\sqrt{3}}{6}x+\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$$

取 $z=5$，得

$$\boldsymbol{n}=(2\sqrt{2},0,5)$$

于是

$$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{33}}{33}.$$

所以二面角 $A-MN-Q$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$.

方法二：

在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，得

$$AC=AB=BC=DA，BD=\sqrt{3}AB，$$

有因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以

$$PA\perp AB，PA\perp AC，PA\perp AD，$$

所以 $PB=PC=PD$.

所以 $\Delta PBC\cong\Delta PDC$.

而 M，N 分别是 PB，PD 的中点，所以

$MQ=NQ$，且 $AM=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}PD=AN$.

取线段 MN 的中点 E，连结 AE，EQ，则

$AE \perp MN$，$QE \perp MN$，

所以$\angle AEQ$为二面角$A-MN-Q$的平面角．

由$AB=2\sqrt{3}$，$PA=2\sqrt{6}$，故

在ΔAMN中，$AM=AN=3$，$MN=\frac{1}{2}BD=3$，得

$$AE=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

在直角ΔPAC中，$AQ \perp PC$，得

$$AQ=2\sqrt{2}，QG=2，PQ=4，$$

在ΔPBC中，$\cos\angle BPC=\frac{PB^2+PC^2-BC^2}{2PB\cdot PC}=\frac{5}{6}$，得

$$MQ=\sqrt{PM^2+PQ^2-2PM\cdot PQ\cos\angle BPC}=\sqrt{5}.$$

在等腰ΔMQN中，$MQ=NQ=\sqrt{5}$，$MN=3$，得

$$QE=\sqrt{MQ^2-ME^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

在ΔAEQ中，$AE=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$QE=\frac{\sqrt{11}}{2}$，$AQ=2\sqrt{2}$，得

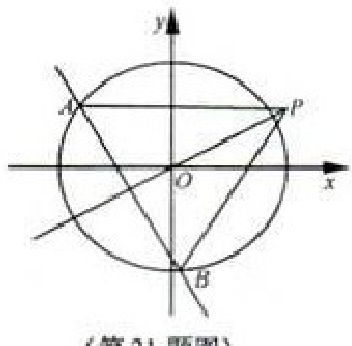
$$\cos\angle AEQ=\frac{AE^2+QE^2-AQ^2}{2AE\cdot QE}=\frac{\sqrt{33}}{33}.$$

所以二面角$A-MN-Q$的平面角的余弦值为$\frac{\sqrt{33}}{33}$．

21．（本题满分 **15** 分）如图，椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，其左焦点到点$P(2,1)$的距离为$\sqrt{10}$，不过原点$O$的直线$l$与$C$相交于$A$，$B$两点，且线段$AB$被直线$OP$平分．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）求ΔABP面积取最大值时直线l的方程．



（第 21 题图）

【答案】本题主要考查椭圆的几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识，同时考查解析几何的基本思想方法和综合解体能力。满分 **15** 分。

（Ⅰ）设椭圆左焦点为 $F(-c, 0)$，则由题意得

$$\begin{cases} \sqrt{(2+c)+1}=\sqrt{10} \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2} \end{cases},$$

得 $\begin{cases} c=1 \\ a=2 \end{cases}$

所以椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

（Ⅱ）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，线段 AB 的中点为 M．

当直线 AB 与 x 轴垂直时，直线 AB 的方程为 $x=0$，与不过原点的条件不符，舍去．故可设直线 AB 的方程为

$y=kx+m(m\neq 0)$，

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$ 消去 y，整理得

$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$， **（1）**

则

$$\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0,\quad \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2} \end{cases}$$

所以 AB 线段的中点 $M(-\dfrac{8km}{3+4k^2}, \dfrac{4m^2-12}{3+4k^2})$，

因为 M 在直线 OP 上，所以

$$\frac{3m}{3+4k^2}=\frac{-2km}{3+4k^2},$$

得

$m=0$（舍去）或 $k=-\dfrac{3}{2}$，

此时方程（**1**）为 $3x^2-3mx+m^2=0$，则

$$\Delta=3(12-m^2)>0，\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=\dfrac{m^2-3}{3}\end{cases}$$

所以

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{39}}{6}\cdot\sqrt{12-m^2}，$$

设点 P 到直线 AB 距离为 d，则

$$d=\frac{|8-2m|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{2|m-4|}{\sqrt{13}}，$$

设 ΔABP 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{(m-4)^2(12-m^2)}，$$

其中 $m\in(-2\sqrt{3},0)\cup(0,2\sqrt{3})$，

令 $u(m)=(12-m^2)(m-4)^2$， $m\in[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

$$u'(m)=-4(m-4)(m^2-2m-6)=-4(m-4)(m-1-\sqrt{7})(m-1+\sqrt{7})，$$

所以当且仅当 $m=1-\sqrt{7}$， $u(m)$ 取到最大值，

故当且仅当 $m=1-\sqrt{7}$， S 取到最大值.

综上，所求直线 l 方程为 $3x+2y+2\sqrt{7}-2=0$.

22.（本题满分 **14** 分）已知 $a>0$， $b\in R$，函数 $f(x)=4ax^3-2bx-a+b$.

（Ⅰ）证明：当 $0\le x\le 1$ 时，

（**i**）函数 $f(x)$ 的最大值为 $|2a-b|+a$；

（**ii**） $f(x)+|2a-b|+a\ge 0$；

（Ⅱ）若 $-1\le f(x)\le 1$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立，求 $a+b$ 的取值范围.

【答案】本题主要考查利用导函数研究函数的性质、线性规划等基础知识，同时考查推理论证能力，分类讨论等综合解题能力和创新意识。满分 **14** 分。

（Ⅰ）(**i**) $f'(x)=12ax^2-2b=12a(x^2-\dfrac{b}{6a})$

当 $b \le 0$ 时，有 $f'(x) \ge 0$，此时 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

所以当 $0 \le x \le 1$ 时，

$$f(x)_{\max} = \max\{f(0), f(1)\} = \max\{-a+b, 3a-b\} = \begin{cases} 3a-b, b \le 2a \\ -a+b, b > 2a \end{cases} = |2a-b|+a$$

（ii）由于 $0 \le x \le 1$，故

当 $b \le 2a$ 时，

$$f(x)+|2a-b|+a = f(x)+3a-b = 4ax^3-2bx+2a \ge 4ax^3-4ax+2a = 2a(2x^3-2x+1)$$

当 $b > 2a$ 时，

$$f(x)+|2a-b|+a = f(x)-a+b = 4ax^3+2b(1-x)-2a > 4ax^3+4a(1-x)-2a = 2a(2x^3-2x+1)$$

设 $g(x) = 2x^3-2x+1, 0 \le x \le 1$，则

$$g'(x) = 6x^2-2 = 6(x-\frac{\sqrt{3}}{3})(x+\frac{\sqrt{3}}{3})，$$

于是

x	0	$(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$	1
$g'(x)$			-	0	+
$g(x)$	1	减	极小值	增	1

所以，$g(x)_{\min} = g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1-\frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$，

所以

当 $0 \le x \le 1$ 时，$2x^3-2x+1>0$

故 $f(x)+|2a-b|+a = f(x)-a+b \ge 2a(2x^3-2x+1) \ge 0$

（Ⅱ）由（i）知，当 $0 \le x \le 1$，$f(x)_{\max} = |2a-b|+a$，所以

$$|2a-b|+a \le 1$$

若 $|2a-b|+a \le 1$，则由（ii）知

$$f(x) \ge -(|2a-b|+a) \ge -1$$

所以$-1\le f(x)\le 1$对任意$0\le x\le 1$恒成立的充要条件是

$$\begin{cases}|2a-b|+a\le 1\\ a>0\end{cases},$$

即$\begin{cases}2a-b\ge 0\\ 3a-b\le 1\\ a>0\end{cases}$，或$\begin{cases}2a-b<0\\ b-a\le 1\\ a>0\end{cases}$ （**1**）

在直角坐标系aOb中，（**1**）所表示的平面区域为如图所示的阴影部分，其中不包括线段BC，

作一组平行直线$a+b=t(t\in R)$，得

$$-1<a+b\le 3.$$

所以的取值范围是$(-1,3]$.