

2011年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学（文）

本试卷共5页，150分.考试时间长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U=\mathbb{R}$,集合 $P=\{x \mid x^2 \leq 1\}$,那么 $\complement_U P =$

A. $(-\infty, -1]$

B. $[1, +\infty)$

C. $[-1, 1]$

D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

2. 复数 $\frac{i-2}{1+2i} =$

A. i

B. $-i$

C. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

D. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3. 如果 $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} y < 0$, 那么

A. $y < x < 1$

B. $x < y < 1$

C. $1 < x < y$

D. $1 < y < x$

4. 若 p 是真命题， q 是假命题，则

A. $p \wedge q$ 是真命题

B. $p \vee q$ 是假命题

C. $\neg p$ 是真命题

D. $\neg q$ 是真命题

5. 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的表面积是

A. 32

B. $16+16\sqrt{2}$

C. 48

D. $16+32\sqrt{2}$

6. 执行如图所示的程序框图，若输入 A 的值为2，则输出的 P 值为

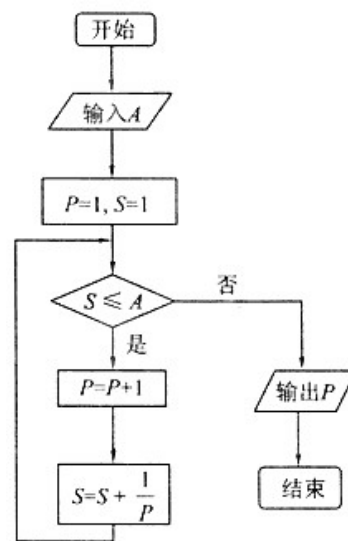
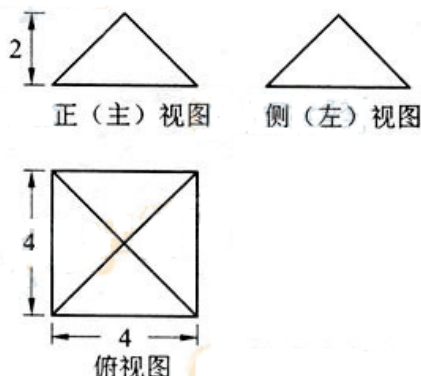
A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

7. 某车间分批生产某种产品，每批的生产准备费用为800元.若每批生产



x件, 则平均仓储时间为 $\frac{x}{8}$ 天, 且每件产品每天的仓储费用为1元.为使平均每件产品的生产

准备费用与仓储费用之和最小, 每批应生产产品

- A. 60件 B. 80件 C. 100件 D. 120件

8. 已知点A(0,2), B(2,0). 若点C在函数y

x的图像上, 则使得 $\triangle ABC$ 的面积为2的点C的个数为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共6小题, 每小题5分, 共30分.

9. 在 $\triangle ABC$ 中.若 $b=5$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\sin A = \frac{1}{3}$, 则 $a =$ _____.

10. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的一条渐近线的方程为 $y = 2x$, 则 $b =$ _____.

11. 已知向量 $a = (\sqrt{3}, 1)$, $b = (0, -1)$, $c = (k, \sqrt{3})$.若 $a -$

$2b$ 与 c 共线, 则 $k =$ _____.

12. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 4$, 则公比 $q =$ _____ ; $a_1 + a_2 + \dots + a_n =$

_____.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$ 若关于x

的方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根, 则实数k的取值范围是_____

14. 设A(0,0), B(4,0), C(t+4,3), D(t,3) ($t \in \mathbb{R}$).记 $N(t)$ 为平行四边形ABCD内部(不含边界)的整点的个数, 其中整点是指横、纵坐标都是整数的点, 则 $N(0) =$ _____

$N(t)$ 的所有可能取值为_____

三、解答题6小题, 共80分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (本小题共13分)

已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期:

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

16. (本小题共13分)

以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学的植树棵数.乙组记录中有一个数据模糊,无法确认,在图中以 x 表示.

| 甲组 | | | | 乙组 | |
|----|---|--|---|-----|---|
| 9 | 9 | | 0 | x | 8 |
| 1 | 1 | | 1 | 0 | 9 |

(1) 如果 $x=8$, 求乙组同学植树棵数的平均数和方差;

(2) 如果 $x=9$, 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 求这两名同学的植树总棵数为19的概率.

(注: 方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)

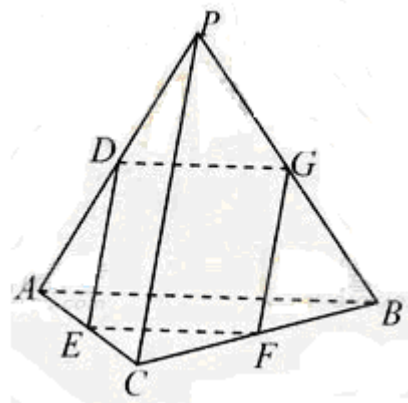
17. (本小题共14分)

如图, 在四面体 $PABC$ 中, $PC \perp AB$, $PA \perp BC$, 点 D, E, F, G 分别是棱 AP, AC, BC, PB 的中点.

(I) 求证: $DE \parallel$ 平面 BCP ;

(II) 求证: 四边形 $DEFG$ 为矩形;

(III) 是否存在点 Q , 到四面体 $PABC$ 六条棱的中点的距离相等? 说明理由.



18. (本小题共13分)

已知函数 $f(x) = (x-k)e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值.

19. (本小题共14分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 右焦点为 $(2\sqrt{2}, 0)$, 斜率为 l 的直线

l 与椭圆 G 交于 A 、 B 两点, 以 AB 为底边作等腰三角形, 顶点为 $P(-3, 2)$.

- (I) 求椭圆 G 的方程;
- (II) 求 $\triangle PAB$ 的面积.

20. (本小题共13分)

若数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 满足 $|a_{k+1} - a_k| = 1 (k = 1, 2, \dots, n-1)$, 则称 A_n 为 E 数列, 记

$$S(A_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

- (I) 写出一个 E 数列 A_5 满足 $a_1 = a_3 = 0$;
- (II) 若 $a_1 = 12$, $n = 2000$, 证明: E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$;
- (III) 在 $a_1 = 4$ 的 E 数列 A_n 中, 求使得 $S(A_n) = 0$ 成立得 n 的最小值.

参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

(1) D (2) A (3) D (4) D

(5) B (6) C (7) B (8) A

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

(9) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

(10) 2

(11) 1

(12) $2 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2}$

(13) (0, 1)

(14) 6, 6, 7, 8,

三、解答题（共6小题，共80分）

(15)（共13分）

解：（I）因为 $f(x) = 4\cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$

$$= 4\cos x (\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x) - 1$$

$$= \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$$

$$= \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$$

$$= 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π

（II）因为 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$.

于是，当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 取得最大值2；

当 $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$, 即 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 取得最小值-1.

(16)（共13分）

解（1）当 $x=8$ 时，由茎叶图可知，乙组同学的植树棵数是：8, 8, 9, 10,

所以平均数为

$$\bar{x} = \frac{8+8+9+10}{4} = \frac{35}{4};$$

方差为

$$s^2 = \frac{1}{4}[(8-\frac{35}{4})^2 + (9-\frac{35}{4})^2 + (10-\frac{35}{4})^2] = \frac{11}{16}.$$

(Ⅱ) 记甲组四名同学为 A_1, A_2, A_3, A_4 , 他们植树的棵数依次为9, 9, 11, 11; 乙组四名同学为 B_1, B_2, B_3, B_4 , 他们植树的棵数依次为9, 8, 9, 10, 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 所有可能的结果有16个, 它们是:

$(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_1, B_4),$
 $(A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (A_2, B_4),$
 $(A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_3, B_3), (A_3, B_4),$
 $(A_4, B_1), (A_4, B_2), (A_4, B_3), (A_4, B_4),$

用C表示: “选出的两名同学的植树总棵数为19”这一事件, 则C中的结果有4个, 它们是: $(A_1, B_4), (A_2, B_4), (A_3, B_2), (A_4, B_2)$, 故所求概率为 $P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

(17) (共14分)

证明: (Ⅰ) 因为D, E分别为AP, AC的中点,
 所以 $DE \parallel PC$.

又因为 $DE \not\subset$ 平面BCP,
 所以 $DE \parallel$ 平面BCP.

(Ⅱ) 因为D, E, F, G分别为
 AP, AC, BC, PB的中点,
 所以 $DE \parallel PC \parallel FG, DG \parallel AB \parallel EF$.
 所以四边形DEFG为平行四边形,

又因为 $PC \perp AB$,
 所以 $DE \perp DG$,

所以四边形DEFG为矩形.

(Ⅲ) 存在点Q满足条件, 理由如下:
 连接DF, EG, 设Q为EG的中点

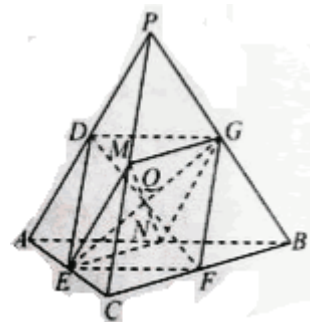
由(Ⅱ)知, $DF \cap EG = Q$, 且 $QD = QE = QF = QG = \frac{1}{2} EG$.

分别取PC, AB的中点M, N, 连接ME, EN, NG, MG, MN.

与(Ⅱ)同理, 可证四边形MENG为矩形, 其对角线点为EG的中点Q,

且 $QM = QN = \frac{1}{2} EG$,

所以Q为满足条件的点.



(18) (共13分)

解: (Ⅰ) $f'(x) = (x - k + 1)e^x$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = k - 1$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下:

| | | | |
|---------|--------------------|---------|----------------------|
| x | $(-\infty, k - k)$ | $k - 1$ | $((k - 1, +\infty))$ |
| $f'(x)$ | — | 0 | + |

$$f(x) \nearrow -e^{k-1} \nearrow$$

所以, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, k-1)$; 单调递增区间是 $(k-1, +\infty)$

(II) 当 $k-1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(0) = -k$;

当 $0 < k-1 < 1$, 即 $1 < k < 2$ 时,

由 (I) 知 $f(x)$ 在 $[0, k-1]$ 上单调递减, 在 $(k-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$

上的最小值为 $f(k-1) = -e^{k-1}$;

当 $k-1 \geq 1$, 即 $k \geq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(1) = (1-k)e$.

(19) (共14分)

解: (I) 由已知得 $c = 2\sqrt{2}, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

解得 $a = 2\sqrt{3}$.

又 $b^2 = a^2 - c^2 = 4$.

所以椭圆G的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(II) 设直线 l 的方程为 $y = x + m$.

$$\text{由} \begin{cases} y = x + m \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{得}$$

$$4x^2 + 6mx + 3m^2 - 12 = 0.$$

设A、B的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) (x_1 < x_2)$, AB中点为 $E(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3m}{4},$$

$$y_0 = x_0 + m = \frac{m}{4}$$

因为AB是等腰△PAB的底边，
所以PE⊥AB.

$$\text{所以PE的斜率 } k = \frac{2 - \frac{m}{4}}{-3 + \frac{3m}{4}} = -1.$$

解得m=2。

此时方程①为 $4x^2 + 12x = 0$.

解得 $x_1 = -3, x_2 = 0$.

所以 $y_1 = -1, y_2 = 2$.

所以 $|AB| = 3\sqrt{2}$.

此时，点P（-3，2）到直线AB： $x - y + 2 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-3 - 2 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{所以}\triangle PAB\text{的面积}S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{9}{2}.$$

（20）（共13分）

解：（Ⅰ）0，1，0，1，0是一具满足条件的E数列A₅.

（答案不唯一，0，-1，0，1，0；0，±1，0，1，2；0，±1，0，-1，-2；0，±1，0，-1，

-2，0，±1，0，-1，0都是满足条件的E的数列A₅）

（Ⅱ）必要性：因为E数列A₅是递增数列，

所以 $a_{k+1} - a_k = 1 (k = 1, 2, \dots, 1999)$.

所以A₅是首项为12，公差为1的等差数列.

所以 $a_{2000} = 12 + (2000 - 1) \times 1 = 2011$.

充分性，由于 $a_{2000} - a_{1000} \leq 1$,

$$a_{2000} - a_{1000} \leq 1$$

.....

$$a_2 - a_1 \leq 1$$

所以 $a_{2000} - a_1 \leq 1999$ ，即 $a_{2000} \leq a_1 + 1999$.

又因为 $a_1 = 12$ ， $a_{2000} = 2011$,

所以 $a_{2000} = a_1 + 1999$.

故 $a_{n+1} - a_n = 1 > 0 (k = 1, 2, \dots, 1999)$, 即A_n是递增数列.

综上，结论得证.

（Ⅲ）对首项为4的E数列A_k，由于

$$a_2 \geq a_1 - 1 = 3,$$

$$a_3 \geq a_2 - 1 \geq 2,$$

.....

$$a_5 \geq a_7 - 1 \geq -3.$$

.....

所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k > 0 (k = 2, 3, \cdots, 8)$

所以对任意的首项为4的E数列 A_m ，若 $S(A_m) = 0$,

则必有 $n \geq 9$.

又 $a_1 = 4$ 的E数列 $A_1 : 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$ 满足 $S(A_1) = 0$,

所以n是最小值是9.