2010年江西高考文科数学真题及答案

绝密★启用前

2010年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至4页，共150分。

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上，考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第Ⅱ卷用黑色墨水签字笔在答题卡上作答。若在试题卷上作答，答案无效。
3. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回。

参考公式

如果事件A,B互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件A,B，相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是p，那么

n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

第Ⅰ卷

一．选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．对于实数a,b,c，“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

2．若集合$A=\{x\,\|x|\le 1\}$，$B=\{x|x\ge 0\}$，则$A\cap B=$

A．$\{x|-1\le x\le 1\}$　B．$\{x|x\ge 0\}$　C．$\{x|0\le x\le 1\}$　D．$\varnothing$

3．$(1-x)^{10}$展开式中x^3项的系数为

A．-720　B．720　C．120　D．-120

4．若$f(x)=ax^4+bx^2+c$满足$f'(1)=2$，则$f'(-1)=$

A．-4　B．-2　C．2　D．4

5．不等式$|x-2|>x-2$的解集是

A．$(-\infty,2)$　B．$(-\infty,+\infty)$　C．$(2,+\infty)$　D．$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

6．函数 $y=\sin^2 x+\sin x-1$ 的值域为

A．$[-1,1]$　　B．$[-\frac{5}{4},-1]$　　C．$[-\frac{5}{4},1]$　　D．$[-1,\frac{5}{4}]$

7．等比数列 $\{a_n\}$ 中，$|a_1|=1,a_5=-8a_2,a_5>a_2$，则 $a_n=$

A．$(-2)^{n-1}$　　B．$-(-2^{n-1})$　　C．$(-2)^n$　　D．$-(-2)^n$

8．若函数 $y=\frac{ax}{1+x}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 a 为

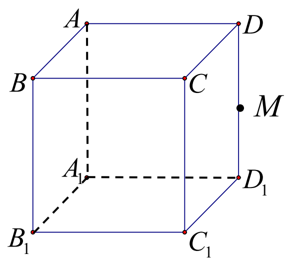
A．1　　B．-1　　C．±1　　D．任意实数

9．有 n 位同学参加某项选拔测试，每位同学能通过测试的概率都是 p $(0<p<1)$，假设每位同学能否通过测试是相互独立的，则至少有一位同学通过测试的概率为

A．$(1-p)^n$　　B．$1-p^n$　　C．p^n　　D．$1-(1-p)^n$

10．直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 M、N 两点，若 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$，则 k 的取值范围是

A．$[-\frac{3}{4},0]$　　B．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　C．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　D．$[-\frac{2}{3},0]$



11．如图，M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点，给出下列命题

①过 M 点有且只有一条直线与直线 AB 、B_1C_1 都相交；

②过 M 点有且只有一条直线与直线 AB 、B_1C_1 都垂直；

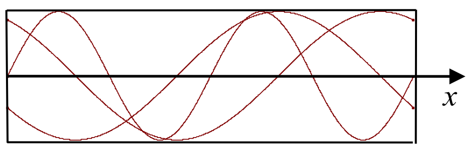
③过 M 点有且只有一个平面与直线 AB 、B_1C_1 都相交；

④过 M 点有且只有一个平面与直线 AB 、B_1C_1 都平行.

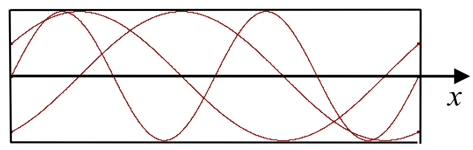
其中真命题是：

A．②③④　　B．①③④　　C．①②④　　D．①②③

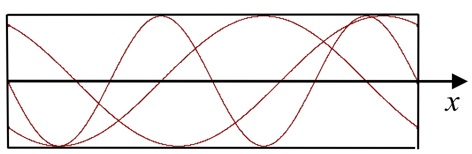
12．如图，四位同学在同一个坐标系中分别选定了一个适当的区间，各自作出三个函数 $y=\sin 2x$，$y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$，$y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的图像如下。结果发现其中有一位同学作出的图像有错误，那么有错误的图像是



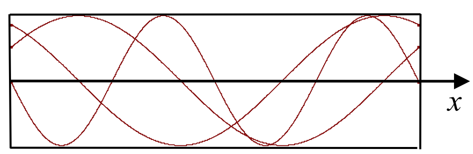
A



B



C



D

2010年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学

第Ⅱ卷

注意事项：

第Ⅱ卷2页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，若在试题上作答，答案无效。

二. 填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分。请把答案填在答题卡上

13．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60°$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影是__________；

【答案】1

【解析】考查向量的投影定义，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影等于$\vec{b}$的模乘以两向量夹角的余弦值

14．将5位志愿者分成3组，其中两组各2人，另一组1人，分赴世博会的三个不同场馆服务，不同的分配方案有__________种（用数字作答）；

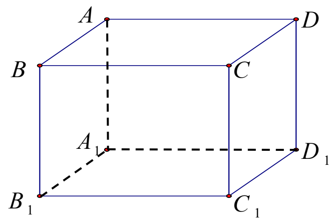
【答案】90

【解析】考查排列组合里分组分配问题，

15．点$A(x_0,y_0)$在双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{32}=1$的右支上，若点$A$到右焦点的距离等于$2x_0$，则$x_0=$__________；

【答案】2

【解析】考查双曲线的比值定义，利用点A到右焦点比上到右准线的距离等于离心率得出$x_0=2$



16．长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点均在同一个球面上，$AB=AA_1=1$，

$BC=\sqrt{2}$，则A，B两点间的球面距离为________________.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】考查球面距离，可先利用长方体三边长求出球半径，在三角形中求出球心角，再利用球面距离公式得出答案

三. 解答题：本大题共6小题，共74分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤

17．（本小题满分12分）

设函数$f(x)=6x^3+3(a+2)x^2+2ax$.

（1）若$f(x)$的两个极值点为x_1,x_2，且$x_1x_2=1$，求实数a的值；

（2）是否存在实数a，使得$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的单调函数？若存在,求出a的值；若不存在，说明理由.

【解析】考查函数利用导数处理函数极值单调性等知识

解：　$f'(x)=18x^2+6(a+2)x+2a$

（1）由已知有 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，从而 $x_1x_2=\dfrac{2a}{18}=1$，所以 $a=9$；

（2）由 $\Delta=36(a+2)^2-4\times18\times2a=36(a^2+4)>0$，

所以不存在实数 a，使得 $f(x)$ 是 R 上的单调函数.

18.（本小题满分 12 分）

某迷宫有三个通道，进入迷宫的每个人都要经过一扇智能门。首次到达此门，系统会随机（即等可能）为你打开一个通道.若是 1 号通道，则需要 1 小时走出迷宫；若是 2 号、3 号通道，则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门.再次到达智能门时，系统会随机打开一个你未到过的通道，直至走出迷宫为止.

(1)求走出迷宫时恰好用了 1 小时的概率；

(2)求走出迷宫的时间超过 3 小时的概率.

【解析】考查数学知识的实际背景，重点考查相互独立事件的概率乘法公式计算事件的概率、随机事件的数学特征和对思维能力、运算能力、实践能力的考查。

解：(1)设 A 表示走出迷宫时恰好用了 1 小时这一事件，则 $P(A)=\dfrac{1}{3}$.

(2) 设 B 表示走出迷宫的时间超过 3 小时这一事件，则 $P(B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(1+\cot x)\sin^2 x-2\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$.

（1）若 $\tan\alpha=2$，求 $f(\alpha)$；

（2）若 $x\in[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}]$，求 $f(x)$ 的取值范围.

【解析】考查三角函数的化简、三角函数的图像和性质、三角函数值域问题。依托三角函数化简，考查函数值域，作为基本的知识交汇问题，考查基本三角函数变换，属于中等题.

解：（1） $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{2}$$

由 $\tan\alpha=2$ 得 $\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$，

$$\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5},$$

所以 $f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$.

（2）由（1）得 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$

由 $x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$ 得 $2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{4}]$，所以 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

从而 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\in[0,\frac{1+\sqrt{2}}{2}]$.

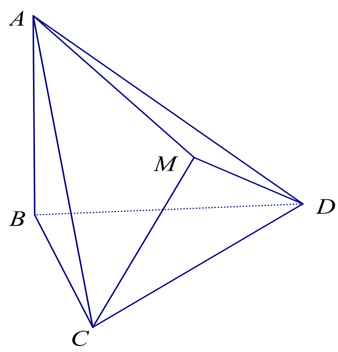
20.（本小题满分 12 分）

如图，ΔBCD 与 ΔMCD 都是边长为 2 的正三角形，平面 $MCD\perp$ 平面 BCD， $AB\perp$ 平面 BCD，

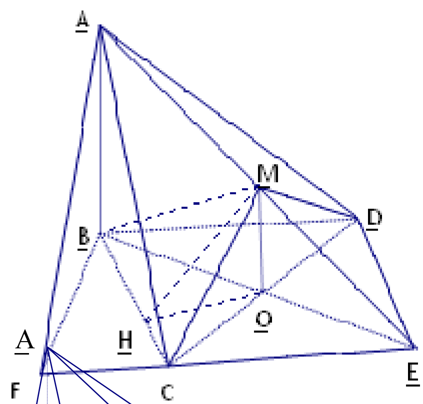
$AB=2\sqrt{3}$.

（1）求直线 AM 与平面 BCD 所成的角的大小；

（2）求平面 ACM 与平面 BCD 所成的二面角的正弦值.



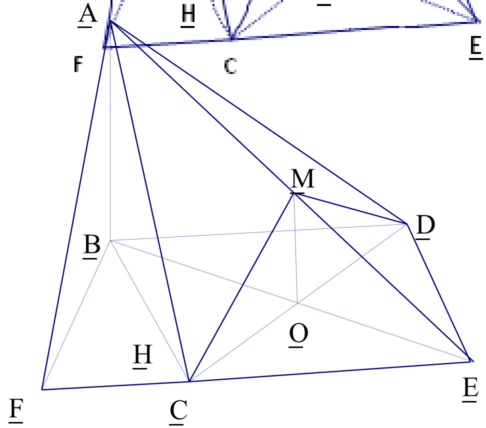
【解析】本题主要要考查了考查立体图形的空间感、线面角、二面角、空间向量、二面角平面角的判断有关知识，同时也考查了空间想象能力和推理能力



解法一：（1）取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$.

又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD，所以 $MO\parallel AB$，A、B、O、M 共面. 延长 AM、BO 相交于 E，则 $\angle AEB$ 就是 AM 与平面 BCD 所成的角.

$OB=MO=\sqrt{3}$，$MO\parallel AB$，则 $\frac{EO}{EB}=\frac{MO}{AB}=\frac{1}{2}$，$EO=OB=\sqrt{3}$，所以 $EB=2\sqrt{3}=AB$，故 $\angle AEB=45^\circ$.



（2）CE 是平面 ACM 与平面 BCD 的交线.

由（1）知，O 是 BE 的中点，则 $BCED$ 是菱形.

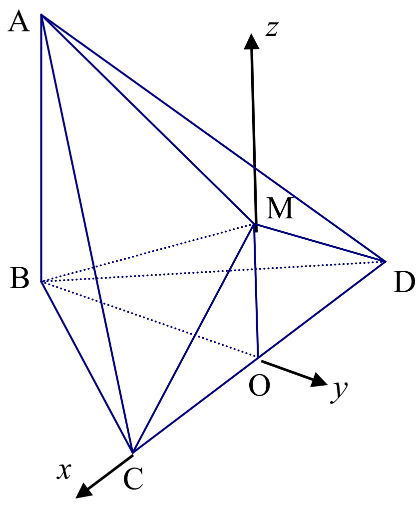
作 $BF\perp EC$ 于 F，连 AF，则 $AF\perp EC$，$\angle AFB$ 就是二面角 A-EC-B 的平面角，设为 θ.

因为 $\angle BCE=120^\circ$，所以 $\angle BCF=60^\circ$.

$BF=BC\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

$\tan\theta=\frac{AB}{BF}=2$，$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

所以，所求二面角的正弦值是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



解法二：取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$，又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD.

以 O 为原点，直线 OC、BO、OM 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系如图.

$OB=OM=\sqrt{3}$，则各点坐标分别为 O（0，0，0），C（1，0，0），M（0，0，$\sqrt{3}$），B（0，$-\sqrt{3}$，0），A（0，$-\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$），

（1）设直线 AM 与平面 BCD 所成的角为 α.

因 $\overrightarrow{AM}=$（0，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$），平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$. 则有

$$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}，所以 \alpha=45^\circ.$$

（2）$\overrightarrow{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CA}=(-1,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

设平面 ACM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CM}\\ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CA}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0\\ -x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$. 解得 $x=\sqrt{3}z$，$y=z$，

取 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,1)$. 又平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，则 $\cos<\overrightarrow{n_1},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

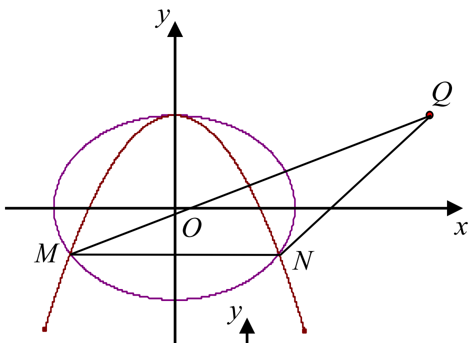
设所求二面角为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-(\dfrac{1}{\sqrt{5}})^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

21.（本小题满分 12 分）

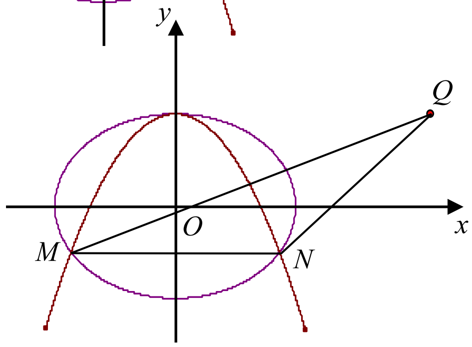
已知抛物线 C_1：$x^2+by=b^2$ 经过椭圆 C_2：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点.

(1) 求椭圆 C_2 的离心率；

(2) 设 $Q(3,b)$，又 M,N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点，若 ΔQMN 的重心在抛物线 C_1 上，求 C_1 和 C_2 的方程.



【解析】考查椭圆和抛物线的定义、基本量，通过交点三角形来确认方程。



解：（1）因为抛物线 C_1 经过椭圆 C_2 的两个焦点 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，

所以 $c^2+b\times0=b^2$，即 $c^2=b^2$，由 $a^2=b^2+c^2=2c^2$ 得椭圆 C_2 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）由（1）可知$a^2=2b^2$，椭圆C_2的方程为：

$$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

联立抛物线C_1的方程$x^2+by=b^2$得：$2y^2-by-b^2=0$，

解得：$y=-\frac{b}{2}$或$y=b$（舍去），所以$x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}b$ ，

即$M(-\frac{\sqrt{6}}{2}b,-\frac{b}{2}),N(\frac{\sqrt{6}}{2}b,-\frac{b}{2})$，所以$\Delta QMN$的重心坐标为$(1,0)$.

因为重心在C_1上，所以$1^2+b\times 0=b^2$，得$b=1$. 所以$a^2=2$.

所以抛物线C_1的方程为：$x^2+y=1$，

椭圆C_2的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

22.（本小题满分 14 分）

正实数数列$\{a_n\}$中, $a_1=1,a_2=5$, 且$\{a_n^2\}$成等差数列.

(1) 证明数列$\{a_n\}$中有无穷多项为无理数；

(2) 当n为何值时，a_n为整数，并求出使$a_n<200$的所有整数项的和.

【解析】考查等差数列及数列分组求和知识

证明:（1）由已知有：$a_n^2=1+24(n-1)$，从而$a_n=\sqrt{1+24(n-1)}$，

方法一：取$n-1=24^{2k-1}$，则$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ （$k\in N^*$）

用反证法证明这些a_n都是无理数.

假设$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$为有理数，则a_n必为正整数，且$a_n>24^k$，

故$a_n-24^k\geq 1$. $a_n-24^k>1$, 与$(a_n-24^k)(a_n+24^k)=1$矛盾，

所以$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ （$k\in N^*$）都是无理数，即数列$\{a_n\}$中有无穷多项为无理数；

方法二：因为$a_{n+1}^2=1+24n,\ (n\in N)$，当$n$的末位数字是$3,4,8,9$时，$1+24n$的末位数字是$3$和$7$，

它不是整数的平方，也不是既约分数的平方，故此时 $a_{n+1}=\sqrt{1+24n}$ 不是有理数，因这种 n 有无穷多，故这种无理项 a_{n+1} 也有无穷多.

(2) 要使 a_n 为整数，由 $(a_n-1)(a_n+1)=24(n-1)$ 可知：

a_n-1, a_n+1 同为偶数，且其中一个必为 3 的倍数，所以有 $a_n-1=6m$ 或 $a_n+1=6m$

当 $a_n=6m+1$ 时，有 $a_n^2=36m^2+12m+1=1+12m(3m+1)$ （$m\in N$）

又 $m(3m+1)$ 必为偶数，所以 $a_n=6m+1$ （$m\in N$）满足 $a_n^2=1+24(n-1)$

即 $n=\dfrac{m(3m+1)}{2}+1$ （$m\in N$）时，a_n 为整数；

同理 $a_n=6m-1(m\in N^*)$ 有 $a_n^2=36m^2-12m+1=1+12m(3m-1)$ （$m\in N^*$）

也满足 $a_n^2=1+24(n-1)$，即 $n=\dfrac{m(3m-1)}{2}+1$ （$m\in N^*$）时，a_n 为整数；

显然 $a_n=6m-1(m\in N^*)$ 和 $a_n=6m+1$ （$m\in N$）是数列中的不同项；

所以当 $n=\dfrac{m(3m+1)}{2}+1$ （$m\in N$）和 $n=\dfrac{m(3m-1)}{2}+1$ （$m\in N^*$）时，a_n 为整数；

由 $a_n=6m+1<200$ （$m\in N$）有 $0\le m\le 33$，

由 $a_n=6m-1<200$ （$m\in N^*$）有 $1\le m\le 33$.

设 a_n 中满足 $a_n<200$ 的所有整数项的和为 S，则

$$S=(5+11+\cdots+197)+(1+7+\cdots+199)=\frac{5+197}{2}\times 33+\frac{1+199}{2}\times 34=6733$$

绝密★启用前　　秘密★启用后

2010 年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	B	A	C	A	B	D	B	C	C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.

13．1　　　　　　14．90　　　　　　15．2　　　　　　16．$\dfrac{\pi}{3}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分.

17.（本小题满分 12 分）

解： $f'(x)=18x^2+6(a+2)x+2a$

（1）由已知有 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，从而 $x_1x_2=\dfrac{2a}{18}=1$，所以 $a=9$；

（2）由 $\Delta=36(a+2)^2-4\times18\times2a=36(a^2+4)>0$，

所以不存在实数 a，使得 $f(x)$ 是 R 上的单调函数.

18.（本小题满分 12 分）

解：(1)设 A 表示走出迷宫时恰好用了 1 小时这一事件，则 $P(A)=\dfrac{1}{3}$.

(2) 设 B 表示走出迷宫的时间超过 3 小时这一事件，则 $P(B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$.

19.（本小题满分 12 分）

解：（1） $f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+\cos 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{2}$$

由 $\tan\alpha=2$ 得 $\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$，

$$\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5},$$

所以 $f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$.

（2）由（1）得 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{2}$

由 $x\in[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}]$ 得 $2x+\dfrac{\pi}{4}\in[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{5\pi}{4}]$，所以 $\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})\in[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]$

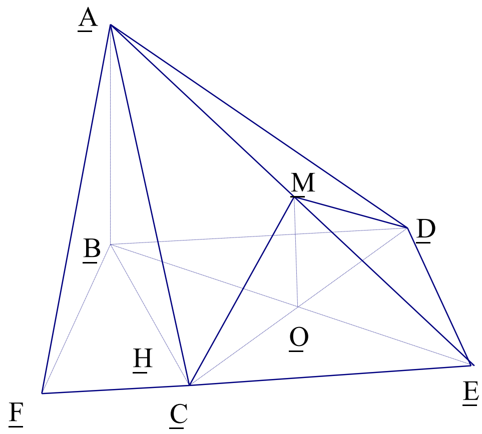
从而 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{2}\in[0,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}]$.

20.（本小题满分 12 分）

解法一：（1）取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$.

又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD，所以 $MO// AB$，A、B、O、M 共面. 延长 AM、BO 相交于 E，则 $\angle AEB$ 就是 AM 与平面 BCD 所成的角.

OB=MO=$\sqrt{3}$，MO// AB，则 $\frac{EO}{EB}=\frac{MO}{AB}=\frac{1}{2}$， $EO=OB=\sqrt{3}$，



所以 $EB=2\sqrt{3}=AB$，故 $\angle AEB=45^{\circ}$.

（2）CE 是平面 ACM 与平面 BCD 的交线.

由（1）知，O 是 BE 的中点，则 $BCED$ 是菱形.

作 $BF\perp EC$ 于 F，连 AF，则 $AF\perp EC$，$\angle AFB$ 就是二面角 A-EC-B 的平面角，设为 θ.

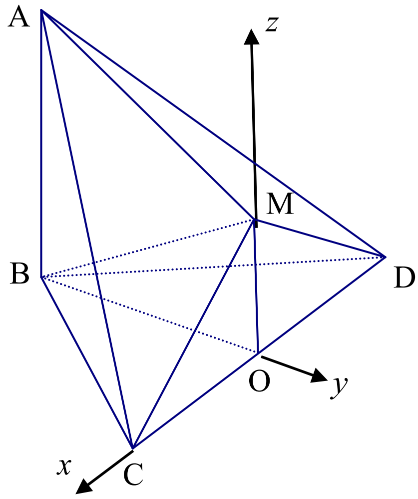
因为 $\angle BCE$=120°，所以 $\angle BCF$=60°.

$BF=BC\cdot\sin 60^{\circ}=\sqrt{3}$，

$\tan\theta=\frac{AB}{BF}=2$，$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

所以，所求二面角的正弦值是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

解法二：取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$，又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD.



以 O 为原点，直线 OC、BO、OM 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系如图.

OB=OM=$\sqrt{3}$，则各点坐标分别为 O（0，0，0），C（1，0，0），M（0，0，$\sqrt{3}$），B（0，$-\sqrt{3}$，0），A（0，$-\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$），

（1）设直线 AM 与平面 BCD 所成的角为 α.

因 $\overrightarrow{AM}$ =（0，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$），平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$． 则有 $\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\alpha=45^{\circ}$.

（2）$\overrightarrow{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CA}=(-1,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

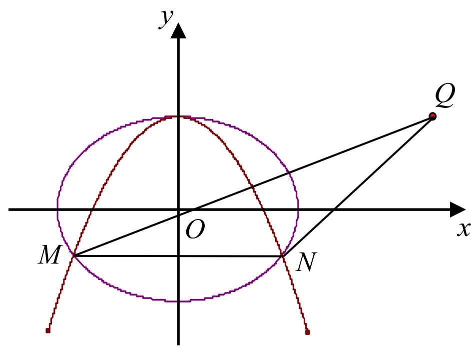
设平面 ACM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CM}\\\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CA}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0\\-x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$. 解得 $x=\sqrt{3}z$，$y=z$，

取 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,1)$. 又平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，则 $\cos<\overrightarrow{n_1},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

设所求二面角为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{5}})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

21. （本小题满分 12 分）

解：（1）因为抛物线 C_1 经过椭圆 C_2 的两个焦点 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，



所以 $c^2+b\times 0=b^2$，即 $c^2=b^2$，由 $a^2=b^2+c^2=2c^2$ 得椭圆 C_2 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）由（1）可知 $a^2=2b^2$，椭圆 C_2 的方程为：

$$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

联立抛物线 C_1 的方程 $x^2+by=b^2$ 得：$2y^2-by-b^2=0$，

解得：$y=-\dfrac{b}{2}$ 或 $y=b$（舍去），所以 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}b$ ，

即 $M(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}b,-\dfrac{b}{2}),N(\dfrac{\sqrt{6}}{2}b,-\dfrac{b}{2})$，所以 ΔQMN 的重心坐标为 $(1,0)$.

因为重心在 C_1 上，所以 $1^2+b\times 0=b^2$，得 $b=1$. 所以 $a^2=2$.

所以抛物线 C_1 的方程为：$x^2+y=1$，

椭圆 C_2 的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

22.（本小题满分 14 分）

证明：（1）由已知有：$a_n^2=1+24(n-1)$，从而 $a_n=\sqrt{1+24(n-1)}$，

方法一：取 $n-1=24^{2k-1}$，则 $a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ （$k\in N^*$）

用反证法证明这些 a_n 都是无理数.

假设 $a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ 为有理数，则 a_n 必为正整数，且 $a_n>24^k$，

故 $a_n-24^k\geq 1$. $a_n-24^k>1$, 与 $(a_n-24^k)(a_n+24^k)=1$ 矛盾，

所以 $a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ （$k\in N^*$）都是无理数，即数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项为无理数;

方法二：因为 $a_{n+1}^2=1+24n,\ (n\in N)$，当 n 的末位数字是 $3,4,8,9$ 时，$1+24n$ 的末位数字是 3 和 7，

它不是整数的平方，也不是既约分数的平方，故此时 $a_{n+1}=\sqrt{1+24n}$ 不是有理数，因这种 n 有无穷多，故这种无理项 a_{n+1} 也有无穷多.

(2) 要使 a_n 为整数，由 $(a_n-1)(a_n+1)=24(n-1)$ 可知：

a_n-1, a_n+1 同为偶数，且其中一个必为 3 的倍数，所以有 $a_n-1=6m$ 或 $a_n+1=6m$

当 $a_n=6m+1$ 时，有 $a_n^2=36m^2+12m+1=1+12m(3m+1)$（$m\in N$）

又 $m(3m+1)$ 必为偶数，所以 $a_n=6m+1$（$m\in N$）满足 $a_n^2=1+24(n-1)$

即 $n=\dfrac{m(3m+1)}{2}+1$（$m\in N$）时，a_n 为整数；

同理 $a_n=6m-1(m\in N^*)$ 有 $a_n^2=36m^2-12m+1=1+12m(3m-1)$（$m\in N^*$）

也满足 $a_n^2=1+24(n-1)$，即 $n=\dfrac{m(3m-1)}{2}+1$（$m\in N^*$）时，a_n 为整数；

显然 $a_n=6m-1(m\in N^*)$ 和 $a_n=6m+1$（$m\in N$）是数列中的不同项；

所以当 $n=\dfrac{m(3m+1)}{2}+1$（$m\in N$）和 $n=\dfrac{m(3m-1)}{2}+1$（$m\in N^*$）时，a_n 为整数；

由 $a_n=6m+1<200$（$m\in N$）有 $0\le m\le 33$，

由 $a_n=6m-1<200$（$m\in N^*$）有 $1\le m\le 33$.

设 a_n 中满足 $a_n<200$ 的所有整数项的和为 S，则

$$S=(5+11+\cdots+197)+(1+7+\cdots+199)=\frac{5+197}{2}\times 33+\frac{1+199}{2}\times 34=6733$$

2010 年江西高考文科数学真题及答案

绝密★启用前

2010 年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 4 页，共 150 分。

考生注意：

4. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上，考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
5. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦

干净后，再选涂其他答案标号。第Ⅱ卷用黑色墨水签字笔在答题卡上作答。若在试题卷上作答，答案无效。

6. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回。

参考公式

如果事件 A,B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A,B，相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

第Ⅰ卷

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．对于实数 a,b,c，“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】主要考查不等式的性质。当 C=0 时显然左边无法推导出右边，但右边可以推出左边

2．若集合 $A=\{x||x|\le 1\}$，$B=\{x|x\ge 0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{x|-1\le x\le 1\}$　B．$\{x|x\ge 0\}$　C．$\{x|0\le x\le 1\}$　D．$\varnothing$

【答案】C

【解析】考查集合与简单不等式。解决有关集合的问题关键是把握住集合中的元素，由题知集合 A 是由大于等于-1 小于等于 1 的数构成的集合，所以不难得出答案

3．$(1-x)^{10}$ 展开式中 x^3 项的系数为

A．-720　B．720　C．120　D．-120

【答案】D

【解析】考查二项式定理展开式中特定项问题，解决此类问题主要是依据二项展开式的通项，由

4．若 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ 满足 $f'(1)=2$，则 $f'(-1)=$

A．-4　B．-2　C．2　D．4

【答案】B

【解析】考查函数的奇偶性，求导后导函数为奇函数，所以选择 B

5．不等式 $|x-2|>x-2$ 的解集是

A．$(-\infty,2)$　B．$(-\infty,+\infty)$　C．$(2,+\infty)$　D．$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

【答案】A

【解析】考查含绝对值不等式的解法，对于含绝对值不等式主要是去掉绝对值后再求解，可以通过绝对值的意义、零点分区间法、平方等方法去掉绝对值。

但此题利用代值法会更好

6．函数 $y=\sin^2 x+\sin x-1$ 的值域为

A．$[-1,1]$　　B．$[-\frac{5}{4},-1]$　　C．$[-\frac{5}{4},1]$　　D．$[-1,\frac{5}{4}]$

【答案】C

【解析】考查二次函数型值域问题。通过函数形状发现此函数很像二次函数，故令 $\sin X=t$ 可得 $y=t^2+t-1$ 从而求解出二次函数值域

7．等比数列 $\{a_n\}$ 中，$|a_1|=1, a_5=-8a_2, a_5>a_2$，则 $a_n=$

A．$(-2)^{n-1}$　　B．$-(-2^{n-1})$　　C．$(-2)^n$　　D．$-(-2)^n$

【答案】A

【解析】考查等比数列的通项公式。用代特值法解决会更好。

8．若函数 $y=\frac{ax}{1+x}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 a 为

A．1　　B．-1　　C．±1　　D．任意实数

【答案】B

【解析】考查反函数，因为图像本身关于直线 $y=x$ 对称故可知原函数与反函数是同一函数，所以先求反函数再与原函数比较系数可得答案。

或利用反函数的性质，依题知（1，a/2）与（a/2，1）皆在原函数图故可得 a=-1

9．有 n 位同学参加某项选拔测试，每位同学能通过测试的概率都是 p $(0<p<1)$，假设每位同学能否通过测试是相互独立的，则至少有一位同学通过测试的概率为

A．$(1-p)^n$　　B．$1-p^n$　　C．p^n　　D．$1-(1-p)^n$

【答案】D

【解析】考查 n 次独立重复事件中 A 事件恰好发生 K 次的公式，可先求 n 次测试中没有人通过的概率再利用对立事件得答案 D

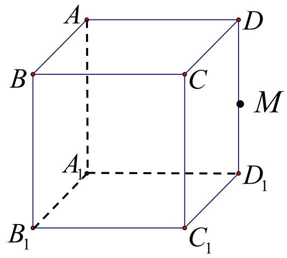
10．直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 M、N 两点，若 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$，则 k 的取值范围是

A．$[-\frac{3}{4},0]$　　B．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　C．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　D．$[-\frac{2}{3},0]$

【答案】B

【解析】考查相交弦问题。法一、可联立方程组利用弦长公式求 $|MN|$ 再结合 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$ 可得答案

法二、利用圆的性质知：圆心到直线的距离的平方加上弦长的一半的平方等于半径的平方求出 $|MN|$ 再结合 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$ 可得答案



11．如图，M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点，给出下列命题

①过 M 点有且只有一条直线与直线 AB、B_1C_1 都相交；

②过 M 点有且只有一条直线与直线 AB 、 B_1C_1 都垂直；

③过 M 点有且只有一个平面与直线 AB 、 B_1C_1 都相交；

④过 M 点有且只有一个平面与直线 AB 、 B_1C_1 都平行.

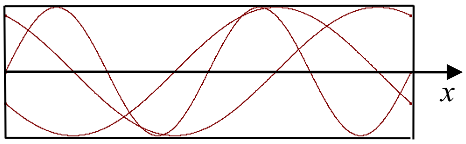
其中真命题是：

A．②③④　　　B．①③④　　　C．①②④　　　D．①②③

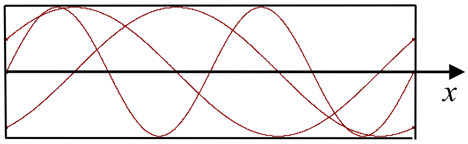
【答案】C

【解析】考查立体几何图形中相交平行垂直性质

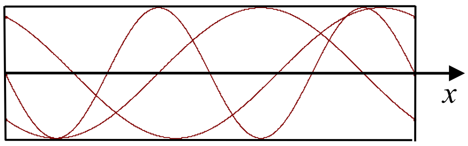
12．如图，四位同学在同一个坐标系中分别选定了一个适当的区间，各自作出三个函数 $y=\sin 2x$ ，$y=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$ ，$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图像如下。结果发现其中有一位同学作出的图像有错误，那么有错误的图像是



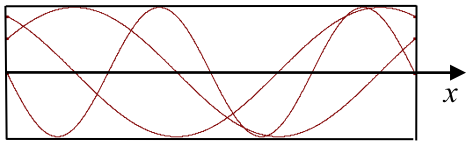
A



B



C



D

【答案】C

【解析】考查三角函数图像，通过三个图像比较不难得出答案 C

绝密★启用前

2010 年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学

第Ⅱ卷

注意事项：

第Ⅱ卷 2 页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，若在试题上作答，答案无效。

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。请把答案填在答题卡上

13．已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=2$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$ ，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影是__________；

【答案】1

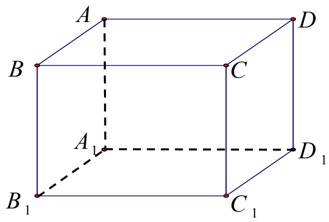
【解析】考查向量的投影定义， $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影等于 $\vec{b}$ 的模乘以两向量夹角的余弦值

14．将 5 位志愿者分成 3 组，其中两组各 2 人，另一组 1 人，分赴世博会的三个不同场馆服务，不同的分配方案有__________种（用数字作答）；

【答案】90
【解析】考查排列组合里分组分配问题，

15．点 $A(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 的右支上，若点 A 到右焦点的距离等于 $2x_0$，则 $x_0=$__________；

【答案】2
【解析】考查双曲线的比值定义，利用点 A 到右焦点比上到右准线的距离等于离心率得出 $x_0=2$



16．长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点均在同一个球面上，$AB=AA_1=1$，

$BC=\sqrt{2}$，则 A，B 两点间的球面距离为________________.

【答案】$\frac{\pi}{2}$
【解析】考查球面距离，可先利用长方体三边长求出球半径，在三角形中求出球心角，再利用球面距离公式得出答案

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤

17.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=6x^3+3(a+2)x^2+2ax$.

（1）若 $f(x)$ 的两个极值点为 x_1, x_2，且 $x_1x_2=1$，求实数 a 的值；

（2）是否存在实数 a，使得 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数？若存在, 求出 a 的值；若不存在，说明理由.

【解析】考查函数利用导数处理函数极值单调性等知识
解： $f'(x)=18x^2+6(a+2)x+2a$
（1）由已知有 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，从而 $x_1x_2=\frac{2a}{18}=1$，所以 $a=9$；
（2）由 $\Delta=36(a+2)^2-4\times18\times2a=36(a^2+4)>0$，
所以不存在实数 a，使得 $f(x)$ 是 R 上的单调函数.

18.（本小题满分 12 分）

某迷宫有三个通道，进入迷宫的每个人都要经过一扇智能门。首次到达此门，系统会随机（即等可能）为你打开一个通道. 若是 1 号通道，则需要 1 小时走出迷宫；若是 2 号、3 号通道，则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门. 再次到达智能门时，系统会随机打开一个你未到过的通道，直至走出迷宫为止.

(1) 求走出迷宫时恰好用了 1 小时的概率；

(2) 求走出迷宫的时间超过 3 小时的概率.

【解析】考查数学知识的实际背景，重点考查相互独立事件的概率乘法公式计算事件的概率、随机事件的数学特征和对思维能力、运算能力、实践能力的考查。

解：(1)设 A 表示走出迷宫时恰好用了 1 小时这一事件，则 $P(A)=\frac{1}{3}$.

(2) 设 B 表示走出迷宫的时间超过 3 小时这一事件，则 $P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(1+\cot x)\sin^2 x-2\sin(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4})$.

（1）若 $\tan\alpha=2$，求 $f(\alpha)$；

（2）若 $x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$，求 $f(x)$ 的取值范围.

【解析】考查三角函数的化简、三角函数的图像和性质、三角函数值域问题。依托三角函数化简，考查函数值域，作为基本的知识交汇问题，考查基本三角函数变换，属于中等题.

解：（1） $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos 2x=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{2}$$

由 $\tan\alpha=2$ 得 $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{4}{5}$，

$$\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5},$$

所以 $f(\alpha)=\frac{3}{5}$.

（2）由（1）得 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$

由 $x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$ 得 $2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{4}]$，所以 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

从而 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\in[0,\frac{1+\sqrt{2}}{2}]$.

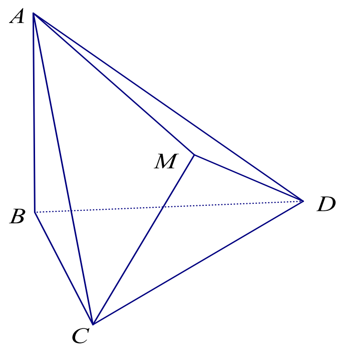
20.（本小题满分 12 分）

如图，ΔBCD 与 ΔMCD 都是边长为 2 的正三角形，平面 $MCD\perp$ 平面 BCD， $AB\perp$ 平面 BCD，

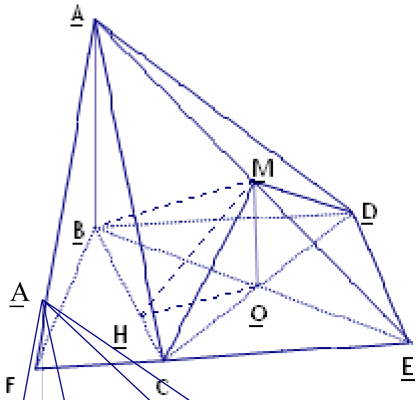
$AB=2\sqrt{3}$.

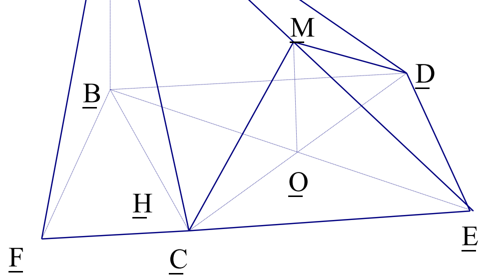
（1）求直线 AM 与平面 BCD 所成的角的大小；

（2）求平面 ACM 与平面 BCD 所成的二面角的正弦值.



【解析】本题主要考查了考查立体图形的空间感、线面角、二面角、空间向量、二面角平面角的判断有关知识，同时也考查了空间想象能力和推理能力





解法一：（1）取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$.

又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD，所以 $MO// AB$，A、B、O、M 共面. 延长 AM、BO 相交于 E，则 $\angle AEB$ 就是 AM 与平面 BCD 所成的角.

$OB=MO=\sqrt{3}$，$MO// AB$，则 $\dfrac{EO}{EB}=\dfrac{MO}{AB}=\dfrac{1}{2}$，$EO=OB=\sqrt{3}$，所以 $EB=2\sqrt{3}=AB$，故 $\angle AEB=45^\circ$.

（2）CE 是平面 ACM 与平面 BCD 的交线.

由（1）知，O 是 BE 的中点，则 $BCED$ 是菱形.

作 $BF\perp EC$ 于 F，连 AF，则 $AF\perp EC$，$\angle AFB$ 就是二面角 $A\text{-}EC\text{-}B$ 的平面角，设为 θ.

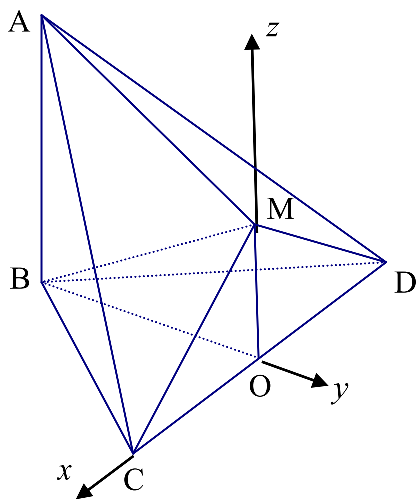
因为 $\angle BCE=120^\circ$，所以 $\angle BCF=60^\circ$.

$BF=BC\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

$\tan\theta=\dfrac{AB}{BF}=2$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

所以，所求二面角的正弦值是 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

解法二：取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$，又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD.



以 O 为原点，直线 OC、BO、OM 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系如图.

$OB=OM=\sqrt{3}$，则各点坐标分别为 O（0，0，0），C（1，0，0），M（0，0，$\sqrt{3}$），B（0，$-\sqrt{3}$，0），A（0，$-\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$），

（1）设直线 AM 与平面 BCD 所成的角为 α.

因 $\overrightarrow{AM}=$（0，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$），平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$. 则有 $\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\alpha=45^\circ$.

（2）$\overrightarrow{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CA}=(-1,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

设平面 ACM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CM}\\ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CA}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0\\ -x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$. 解得 $x=\sqrt{3}z$， $y=z$，

取 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,1)$. 又平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，则 $\cos<\overrightarrow{n_1},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

设所求二面角为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-(\dfrac{1}{\sqrt{5}})^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

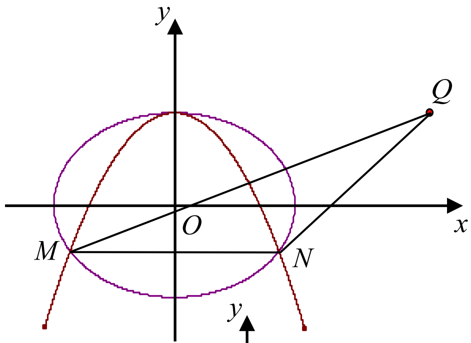
21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 C_1： $x^2+by=b^2$ 经过椭圆 C_2： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点.

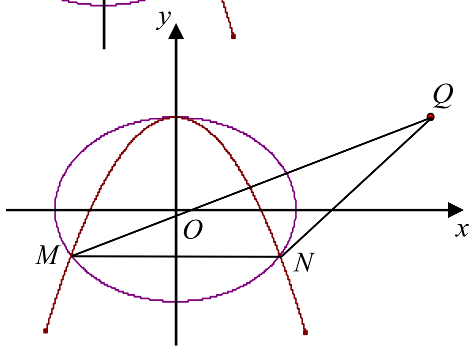
（1）求椭圆 C_2 的离心率；

（2）设 $Q(3,b)$，又 M,N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点，

若 ΔQMN 的重心在抛物线 C_1 上，求 C_1 和 C_2 的方程.



【解析】考查椭圆和抛物线的定义、基本量，通过交点三角形来确认方程。



解：（1）因为抛物线 C_1 经过椭圆 C_2 的两个焦点 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，

所以 $c^2+b\times0=b^2$，即 $c^2=b^2$，由 $a^2=b^2+c^2=2c^2$ 得椭圆 C_2 的

离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）由（1）可知 $a^2=2b^2$，椭圆 C_2 的方程为：

$$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

联立抛物线 C_1 的方程 $x^2+by=b^2$ 得： $2y^2-by-b^2=0$，

解得： $y=-\dfrac{b}{2}$ 或 $y=b$（舍去），所以 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}b$ ，

即 $M(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}b,-\dfrac{b}{2}),N(\dfrac{\sqrt{6}}{2}b,-\dfrac{b}{2})$，所以 ΔQMN 的重心坐标为 $(1,0)$.

因为重心在 C_1 上，所以 $1^2+b\times0=b^2$，得 $b=1$. 所以 $a^2=2$.

所以抛物线C_1的方程为：$x^2+y=1$，

椭圆C_2的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

22.（本小题满分 14 分）

正实数数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_2=5$，且$\{a_n^2\}$成等差数列.

(1) 证明数列$\{a_n\}$中有无穷多项为无理数；

(2)当n为何值时，a_n为整数，并求出使$a_n<200$的所有整数项的和.

【解析】考查等差数列及数列分组求和知识

证明：（1）由已知有：$a_n^2=1+24(n-1)$，从而$a_n=\sqrt{1+24(n-1)}$，

方法一：取$n-1=24^{2k-1}$，则$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ （$k\in N^*$）

用反证法证明这些a_n都是无理数.

假设$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$为有理数，则a_n必为正整数，且$a_n>24^k$，

故$a_n-24^k\geq 1$. $a_n-24^k>1$，与$(a_n-24^k)(a_n+24^k)=1$矛盾，

所以$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ （$k\in N^*$）都是无理数，即数列$\{a_n\}$中有无穷多项为无理数；

方法二：因为$a_{n+1}^2=1+24n,\ (n\in N)$，当$n$的末位数字是$3,4,8,9$时，$1+24n$的末位数字是$3$和$7$，它不是整数的平方，也不是既约分数的平方，故此时$a_{n+1}=\sqrt{1+24n}$不是有理数，因这种$n$有无穷多，故这种无理项$a_{n+1}$也有无穷多.

(2) 要使a_n为整数，由$(a_n-1)(a_n+1)=24(n-1)$可知：

a_n-1,a_n+1同为偶数，且其中一个必为 3 的倍数，所以有$a_n-1=6m$或$a_n+1=6m$

当$a_n=6m+1$时，有$a_n^2=36m^2+12m+1=1+12m(3m+1)$（$m\in N$）

又$m(3m+1)$必为偶数，所以$a_n=6m+1$（$m\in N$）满足$a_n^2=1+24(n-1)$

即$n=\dfrac{m(3m+1)}{2}+1$（$m\in N$）时，a_n为整数；

同理 $a_n=6m-1(m\in N^*)$ 有 $a_n^2=36m^2-12m+1=1+12m(3m-1)$（$m\in N^*$）

也满足 $a_n^2=1+24(n-1)$，即 $n=\dfrac{m(3m-1)}{2}+1$（$m\in N^*$）时，a_n 为整数；

显然 $a_n=6m-1(m\in N^*)$ 和 $a_n=6m+1$（$m\in N$）是数列中的不同项；

所以当 $n=\dfrac{m(3m+1)}{2}+1$（$m\in N$）和 $n=\dfrac{m(3m-1)}{2}+1$（$m\in N^*$）时，a_n 为整数；

由 $a_n=6m+1<200$（$m\in N$）有 $0\le m\le 33$，

由 $a_n=6m-1<200$（$m\in N^*$）有 $1\le m\le 33$.

设 a_n 中满足 $a_n<200$ 的所有整数项的和为 S，则

$$S=(5+11+\cdots+197)+(1+7+\cdots+199)=\frac{5+197}{2}\times 33+\frac{1+199}{2}\times 34=6733$$

绝密★启用前　　秘密★启用后

2010年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学参考答案

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	B	A	C	A	B	D	B	C	C

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分.

13．1　　14．90　　15．2　　16．$\dfrac{\pi}{3}$

三、解答题：本大题共6小题，共74分.

17.（本小题满分12分）

解：　$f'(x)=18x^2+6(a+2)x+2a$

（1）由已知有 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，从而 $x_1x_2=\dfrac{2a}{18}=1$，所以 $a=9$；

（2）由 $\Delta=36(a+2)^2-4\times 18\times 2a=36(a^2+4)>0$，

所以不存在实数 a，使得 $f(x)$ 是 R 上的单调函数.

18.（本小题满分12分）

解：(1)设A表示走出迷宫时恰好用了1小时这一事件，则 $P(A)=\dfrac{1}{3}$.

(2) 设B表示走出迷宫的时间超过3小时这一事件，则 $P(B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$.

19.（本小题满分 12 分）

解：（1） $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{2}$$

由 $\tan\alpha=2$ 得 $\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$，

$$\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5},$$

所以 $f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$.

（2）由（1）得 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{2}$

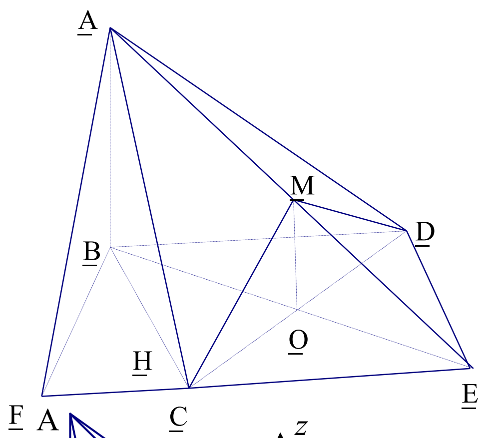
由 $x\in[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}]$ 得 $2x+\dfrac{\pi}{4}\in[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{5\pi}{4}]$，所以 $\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})\in[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]$

从而 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{2}\in[0,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}]$.

20.（本小题满分 12 分）

解法一：（1）取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$.

又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD，所以 $MO//AB$，A、B、O、M 共面. 延长 AM、BO 相交于 E，则 $\angle AEB$ 就是 AM 与平面 BCD 所成的角.



$OB=MO=\sqrt{3}$，$MO//AB$，则 $\dfrac{EO}{EB}=\dfrac{MO}{AB}=\dfrac{1}{2}$，$EO=OB=\sqrt{3}$，

所以 $EB=2\sqrt{3}=AB$，故 $\angle AEB=45^\circ$.

（2）CE 是平面 ACM 与平面 BCD 的交线.

由（1）知，O 是 BE 的中点，则 $BCED$ 是菱形.

作 $BF\perp EC$ 于 F，连 AF，则 $AF\perp EC$，$\angle AFB$ 就是二面角 $A-EC-B$ 的平面角，设为 θ.

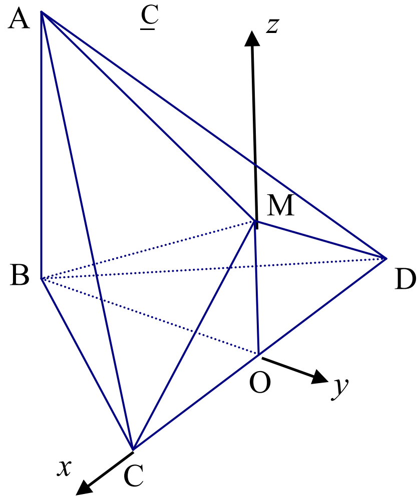
因为 $\angle BCE=120°$，所以 $\angle BCF=60°$.

$$BF=BC\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3},$$

$$\tan\theta=\frac{AB}{BF}=2,\quad \sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

所以，所求二面角的正弦值是 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

解法二：取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$，又平面



$MCD\perp$平面BCD, 则 $MO\perp$平面BCD.

以 O 为原点，直线 OC、BO、OM 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系如图.

$OB=OM=\sqrt{3}$，则各点坐标分别为 O（0，0，0），C（1，0，0），M（0，0，$\sqrt{3}$），B（0，$-\sqrt{3}$，0），A（0，$-\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$），

（1）设直线 AM 与平面 BCD 所成的角为 α.

因 $\overrightarrow{AM}=$（0，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$），平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$. 则有

$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha=45^\circ$.

（2）$\overrightarrow{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CA}=(-1,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

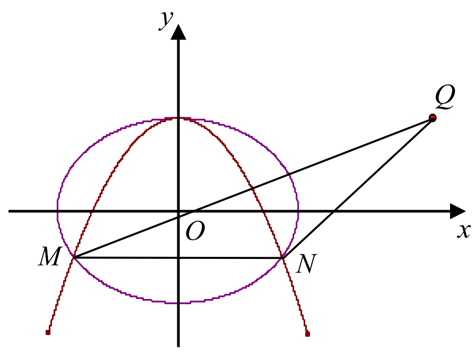
设平面 ACM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CM}\\ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CA}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0\\ -x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$. 解得 $x=\sqrt{3}z$，$y=z$，

取 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,1)$. 又平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，则 $\cos<\overrightarrow{n_1},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

设所求二面角为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-(\dfrac{1}{\sqrt{5}})^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

21. （本小题满分 12 分）

解：（1）因为抛物线 C_1 经过椭圆 C_2 的两个焦点 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，



所以 $c^2+b\times0=b^2$，即 $c^2=b^2$，由 $a^2=b^2+c^2=2c^2$ 得椭圆 C_2 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）由（1）可知 $a^2=2b^2$，椭圆 C_2 的方程为：

$$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

联立抛物线 C_1 的方程 $x^2+by=b^2$ 得：$2y^2-by-b^2=0$，

解得：$y=-\dfrac{b}{2}$ 或 $y=b$（舍去），所以 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}b$，

即 $M(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}b,-\dfrac{b}{2}),N(\dfrac{\sqrt{6}}{2}b,-\dfrac{b}{2})$，所以 ΔQMN 的重心坐标为 $(1,0)$.

因为重心在C_1上，所以$1^2+b\times 0=b^2$，得$b=1$. 所以$a^2=2$.

所以抛物线C_1的方程为：$x^2+y=1$，

椭圆C_2的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

22．（本小题满分 14 分）

证明：（1）由已知有：$a_n^2=1+24(n-1)$，从而$a_n=\sqrt{1+24(n-1)}$，

方法一：取$n-1=24^{2k-1}$，则$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ （$k\in N^*$）

用反证法证明这些a_n都是无理数.

假设$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$为有理数，则a_n必为正整数，且$a_n>24^k$，

故$a_n-24^k\geq 1$. $a_n-24^k>1$, 与$(a_n-24^k)(a_n+24^k)=1$矛盾，

所以$a_n=\sqrt{1+24^{2k}}$ （$k\in N^*$）都是无理数，即数列$\{a_n\}$中有无穷多项为无理数；

方法二：因为$a_{n+1}^2=1+24n,\ (n\in N)$，当$n$的末位数字是$3,4,8,9$时，$1+24n$的末位数字是$3$和$7$，它不是整数的平方，也不是既约分数的平方，故此时$a_{n+1}=\sqrt{1+24n}$不是有理数，因这种$n$有无穷多，故这种无理项$a_{n+1}$也有无穷多.

⑵ 要使a_n为整数，由$(a_n-1)(a_n+1)=24(n-1)$可知：

a_n-1, a_n+1同为偶数，且其中一个必为 3 的倍数，所以有$a_n-1=6m$或$a_n+1=6m$

当$a_n=6m+1$时，有$a_n^2=36m^2+12m+1=1+12m(3m+1)$（$m\in N$）

又$m(3m+1)$必为偶数，所以$a_n=6m+1$（$m\in N$）满足$a_n^2=1+24(n-1)$

即$n=\dfrac{m(3m+1)}{2}+1$（$m\in N$）时，a_n为整数；

同理$a_n=6m-1(m\in N^*)$有$a_n^2=36m^2-12m+1=1+12m(3m-1)$（$m\in N^*$）

也满足$a_n^2=1+24(n-1)$，即$n=\dfrac{m(3m-1)}{2}+1$（$m\in N^*$）时，a_n为整数；

显然$a_n=6m-1(m\in N^*)$和$a_n=6m+1$（$m\in N$）是数列中的不同项；

所以当$n=\frac{m(3m+1)}{2}+1$（$m\in N$）和$n=\frac{m(3m-1)}{2}+1$（$m\in N^*$）时，a_n为整数；

由$a_n=6m+1<200$（$m\in N$）有$0\le m\le 33$，

由$a_n=6m-1<200$（$m\in N^*$）有$1\le m\le 33$.

设a_n中满足$a_n<200$的所有整数项的和为S，则

$$S=(5+11+\cdots+197)+(1+7+\cdots+199)=\frac{5+197}{2}\times 33+\frac{1+199}{2}\times 34=6733$$