

绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第II卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

·如果事件 A, B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

·棱柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 S 表示棱柱的底面面积， h 表示棱柱的高。

·棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面积， h 表示棱锥的高。

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{-1, 0, 2, 3\}$ ， $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 2\}$ ，则 $(A \cup B) \cap C =$

- (A) $\{-1, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$
(C) $\{-1, 0, 1\}$ (D) $\{2, 3, 4\}$

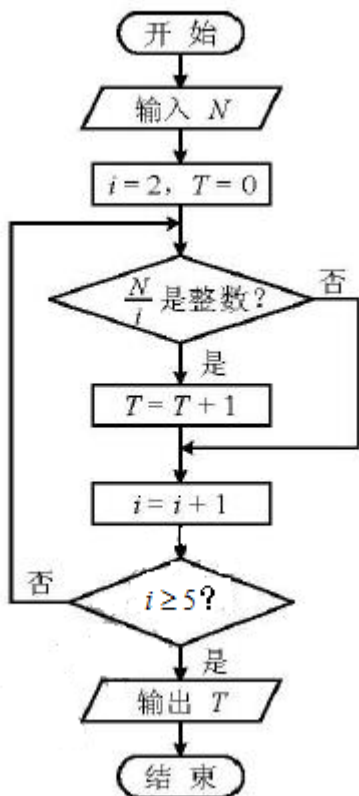
(2) 设变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x + y \leq 5, \\ 2x - y \leq 4, \\ -x + y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$$
 则目标函数 $z = 3x + 5y$ 的最大值为

- (A) 6 (B) 19
(C) 21 (D) 45

(3) 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^3 > 8$ ”是“ $|x| > 2$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(4) 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为20，则输出 T 的值为



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(5) 已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}$, $b = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- (A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$

(6) 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数

- (A) 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增 (B) 在区间 $[\frac{\pi}{4}, 0]$ 上单调递减
(C) 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增 (D) 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减

(7) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为2，过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于

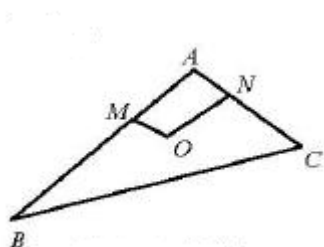
A, B 两点. 设 A, B 到双曲线的同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为

- (A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

(C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

(D) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

(8) 在如图的平面图形中, 已知 $OM = 1, ON = 2, \angle MON = 120^\circ, \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM}$ 的值为



(A) -15

(B) -9

(C) -6

(D) 0

第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

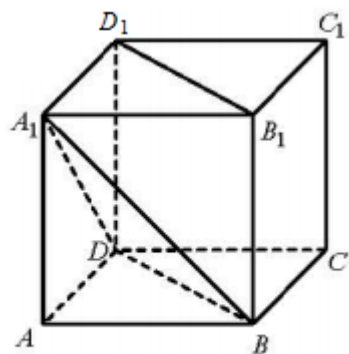
2. 本卷共12小题, 共110分。

二. 填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分。

(9) i 是虚数单位, 复数 $\frac{6+7i}{1+2i} =$ _____.

(10) 已知函数 $f(x) = e^x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为 _____.

(11) 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, 则四棱柱 $A_1-BB_1D_1D$ 的体积为 _____.



第(11)题图

(12) 在平面直角坐标系中, 经过三点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ 的圆的方程为 _____.

(13) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 _____.

(14) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a - 2, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若对任意 $x \in [-$

$3, +\infty)$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

三. 解答题: 本大题共6小题, 共80分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分13分)

已知某校甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数分别为240, 160, 160. 现采用分层抽样的方法从中抽取7名同学去某敬老院参加献爱心活动.

(I) 应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取多少人?

(II) 设抽出的7名同学分别用 A, B, C, D, E, F, G 表示, 现从中随机抽取2名同学承担敬老院的卫生工作.

(i) 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;

(ii) 设 M 为事件“抽取的2名同学来自同一年级”, 求事件 M 发生的概率.

(16) (本小题满分13分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 设 $a=2, c=3$, 求 b 和 $\sin(2A-B)$ 的值.

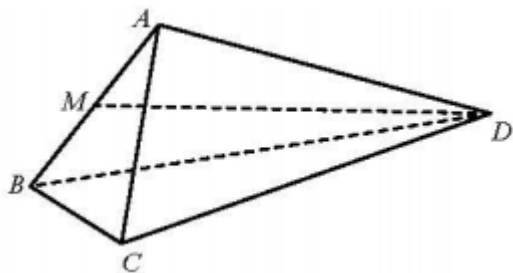
(17) (本小题满分13分)

如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , 点 M 为棱 AB 的中点, $AB=2, AD=2\sqrt{3}, \angle BAD=90^\circ$.

(I) 求证: $AD \perp BC$;

(II) 求异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值;

(III) 求直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值.



(18) (本小题满分13分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$); $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 其前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$). 已

知 $b_1=1$, $b_3=b_2+2$, $b_4=a_3+a_5$, $b_5=a_4+2a_6$.

(I) 求 S_n 和 T_n ;

(II) 若 $S_n + (T_1 + T_2 + \dots + T_n) = a_n + 4b_n$, 求正整数 n 的值.

(19) (本小题满分14分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A , 上顶点为 B . 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $|AB| = \sqrt{13}$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点, l 与直线 AB 交于点 M , 且点 P, M 均在第四象限. 若

$\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的2倍, 求 k 的值.

(20) (本小题满分14分)

设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.

(I) 若 $t_2 = 0, d = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值;

(III) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x_1 - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分, 满分40分.

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (1) C | (2) C | (3) A | (4) B |
| (5) D | (6) A | (7) A | (8) C |

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分, 满分30分.

- | | | |
|---------------------------|--------------------|-------------------------|
| (9) $4-i$ | (10) e | (11) $\frac{1}{3}$ |
| (12) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ | (13) $\frac{1}{4}$ | (14) $[\frac{1}{8}, 2]$ |

三、解答题

(15) 本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识. 考查运用概率知识解决简单实际问题的能力. 满分13分.

(I) 解：由已知，甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数之比为3:2:2，由于采用分层抽样的方法从中抽取7名同学，因此应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取3人，2人，2人。

(II) (i) 解：从抽出的7名同学中随机抽取2名同学的所有可能结果为

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{A, G\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{B, G\}$
 $, \{C, D\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{C, G\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{D, G\}, \{E, F\}, \{E, G\}, \{F, G\}$ ，共21种。

(ii) 解：由(I)，不妨设抽出的7名同学中，来自甲年级的是 A, B, C ，来自乙年级的是 D, E ，来自丙年级的是 F, G ，则从抽出的7名同学中随机抽取的2名同学来自同一年级的所有可能结果为 $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{D, E\}, \{F, G\}$ ，共5种。学@科网

所以，事件 M 发生的概率为 $P(M) = \frac{5}{21}$ 。

(16) 本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力。满分13分。

(I) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，可得 $b \sin A = a \sin B$ ，又由 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，得 $a \sin B = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，即 $\sin B = \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，可得 $\tan B = \sqrt{3}$ 。又因为 $B \in (0, \pi)$ ，可得 $B = \frac{\pi}{3}$ 。

(II) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a=2, c=3, B=\frac{\pi}{3}$ ，有 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 7$ ，故 $b = \sqrt{7}$ 。

由 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，可得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 。因为 $a < c$ ，故 $\cos A = \frac{2}{\sqrt{7}}$ 。因此 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ，

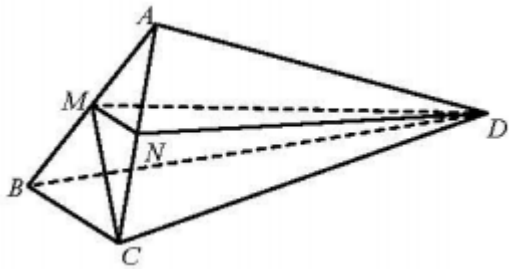
$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{1}{7}$ 。

所以， $\sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ 。

(17) 本小题主要考查异面直线所成的角、直线与平面所成的角、平面与平面垂直等基础知识。考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力。满分13分。

(I) 由平面 $ABC \perp$ 平面 ABD ，平面 $ABC \cap$ 平面 $ABD = AB$ ， $AD \perp AB$ ，可得 $AD \perp$ 平面 ABC ，故 $AD \perp BC$ 。

(II) 解：取棱 AC 的中点 N ，连接 MN, ND 。又因为 M 为棱 AB 的中点，故 $MN \parallel BC$ 。所以 $\angle DMN$ （或其补角）为异面直线 BC 与 MD 所成的角。



在 $\text{Rt}\triangle DAM$ 中, $AM=1$, 故 $DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{13}$. 因为 $AD\perp$ 平面 ABC , 故 $AD\perp AC$.

在 $\text{Rt}\triangle DAN$ 中, $AN=1$, 故 $DN=\sqrt{AD^2+AN^2}=\sqrt{13}$.

在等腰三角形 DMN 中, $MN=1$, 可得 $\cos\angle DMN=\frac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\frac{\sqrt{13}}{26}$.

所以, 异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{26}$.

(III) 解: 连接 CM . 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, M 为边 AB 的中点, 故 $CM\perp AB$, $CM=\sqrt{3}$. 又因为平面 $ABC\perp$ 平面 ABD , 而 $CM\subset$ 平面 ABC , 故 $CM\perp$ 平面 ABD . 所以, $\angle CDM$ 为直线 CD 与平面 ABD 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle CAD$ 中, $CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=4$.

在 $\text{Rt}\triangle CMD$ 中, $\sin\angle CDM=\frac{CM}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以, 直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(18) 本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等基础知识. 考查数列求和的基本方法和运算求解能力. 满分 13 分.

(I) 解: 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 由 $b_1=1$, $b_3=b_2+2$, 可得 $q^2-q-2=0$.

因为 $q>0$, 可得 $q=2$, 故 $b_n=2^{n-1}$. 所以 $T_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 由 $b_4=a_3+a_5$, 可得 $a_1+3d=4$. 由 $b_5=a_4+2a_6$, 可得 $3a_1+13d=16$,

从而 $a_1=1, d=1$, 故 $a_n=n$, 所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(II) 解: 由 (I), 知 $T_1+T_2+\cdots+T_n=(2^1+2^3+\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-n-2$.

由 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$ 可得 $\frac{n(n+1)}{2}+2^{n+1}-n-2=n+2^{n+1}$,

整理得 $n^2-3n-4=0$, 解得 $n=-1$ (舍), 或 $n=4$. 所以 n 的值为 4. 学&科网

(19) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的

性质.考查运算求解能力, 以及用方程思想解决问题的能力.满分14分.

(I) 解: 设椭圆的焦距为 $2c$, 由已知得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$, 又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $2a = 3b$. 由

$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}, \text{ 从而 } a = 3, b = 2.$$

所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(II) 解: 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 M 的坐标为 (x_2, y_2) , 由题意, $x_2 > x_1 > 0$,

点 Q 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$. 由 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的2倍, 可得 $|PM| = 2|PQ|$,

从而 $x_2 - x_1 = 2[x_1 - (-x_1)]$, 即 $x_2 = 5x_1$.

易知直线 AB 的方程为 $2x + 3y = 6$, 由方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ y = kx, \end{cases}$ 消去 y , 可得 $x_2 = \frac{6}{3k + 2}$. 由方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 可得 } x_1 = \frac{6}{\sqrt{9k^2 + 4}}. \text{ 由 } x_2 = 5x_1, \text{ 可得 } \sqrt{9k^2 + 4} = 5(3k + 2), \text{ 两边平方, 整理得}$$

$$18k^2 + 25k + 8 = 0, \text{ 解得 } k = -\frac{8}{9}, \text{ 或 } k = -\frac{1}{2}.$$

当 $k = -\frac{8}{9}$ 时, $x_2 = -9 < 0$, 不合题意, 舍去; 当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $x_2 = 12$, $x_1 = \frac{12}{5}$, 符合题意.

所以, k 的值为 $-\frac{1}{2}$.

(20) 本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法, 考查函数思想和分类讨论思想, 考查综合分析问题和解决问题的能量, 满分14分.

(I) 解: 由已知, 可得 $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$, 故 $f'(x) = 3x - 1$, 因此 $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, 又因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, 故所求切线方程为 $x + y = 0$.

(II) 解: 由已知可得

$$f(x) = (x - t_2 + 3)(x - t_2)(x - t_2 - 3) = (x - t_2)^3 - 9(x - t_2) = x^3 - 3t_2x^2 + (3t_2^2 - 9)x - t_2^2 + 9t_2.$$

故 $f'(x) = 3x^2 - 6t_2x + 3t_2^2 - 9$. 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = t_2 - \sqrt{3}$, 或 $x = t_2 + \sqrt{3}$.

当 x 变化时, $f(x)$, $f'(x)$ 的变化如下表:

x	$(-\infty, t_2 - \sqrt{3})$	$t_2 - \sqrt{3}$	$(t_2 - \sqrt{3}, t_2 + \sqrt{3})$	$t_2 + \sqrt{3}$	$(t_2 + \sqrt{3}, +\infty)$
-----	-----------------------------	------------------	------------------------------------	------------------	-----------------------------

)))
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(t_2-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^3-9\times(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$ ；函数小值为 $f(t_2+\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-9\times(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$.

(III) 解：曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于关于 x 的方程 $(x-t_2+d)(x-t_2)$

$(x-t_2-d)+ (x-t_2)+ 6\sqrt{3}=0$ 有三个互异的实数解，令 $u=x-t_2$ ，可得 $u^3+(1-d^2)u+6\sqrt{3}=0$.

设函数 $g(x)=$

$x^3+(1-d^2)x+6\sqrt{3}$ ，则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于函数 $y=g(x)$ 有三个零点.

$$g'(x)=3x^2+(1-d^2).$$

当 $d^2\leq 1$ 时， $g'(x)\geq 0$ ，这时 $g'(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，不合题意.

当 $d^2>1$ 时， $g'(x)=0$ ，解得 $x_1=-\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$ ， $x_2=\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$.

易得， $g(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递增，在 $[x_1, x_2]$ 上单调递减，在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增，

$$g(x) \text{ 的极大值 } g(x_1) = g\left(-\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3} > 0.$$

$$g(x) \text{ 的极小值 } g(x_2) = g\left(\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9} + 6\sqrt{3}.$$

若 $g(x_2)\geq 0$ ，由 $g(x)$ 的单调性可知函数 $y=f(x)$ 至多有两个零点，不合题意.

若 $g(x_2)< 0$ ，即 $(d^2-1)^{\frac{3}{2}}> 27$ ，也就是 $|d|>\sqrt{10}$ ，此时 $|d|>x_2$ ， $g(|d|)=|d|+6\sqrt{3}> 0$ ，且

$-2|d|<x_1$ ， $g(-2|d|)=-6|d|^3-2|d|+6\sqrt{3}<-62\sqrt{10}+6\sqrt{3}< 0$ ，从而由 $g(x)$ 的单调性，可知函数

$y=g(x)$ 在区间 $(-2|d|, x_1), (x_1, x_2), (x_2, |d|)$ 内各有一个零点，符合题意.学科.....网

所以 d 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{10})\cup(\sqrt{10}, +\infty)$.