

绝密★启用前

# 2016年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

## 数学试卷(文史类)

(满分150分，考试时间120分钟)

### 考生注意

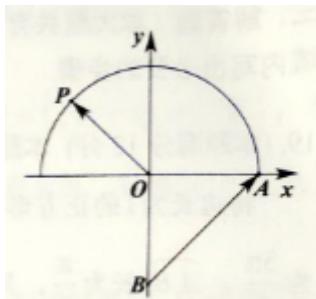
- 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
- 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
- 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
- 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

- 设  $x \in \mathbf{R}$ ，则不等式  $|x - 3| < 1$  的解集为 \_\_\_\_\_。
- 设  $z = \frac{3+2i}{i}$ ，其中  $i$  为虚数单位，则  $z$  的虚部等于 \_\_\_\_\_。
- 已知平行直线  $l_1 : 2x + y - 1 = 0$ ,  $l_2 : 2x + y + 1 = 0$ ，则  $l_1$  与  $l_2$  的距离是 \_\_\_\_\_。
- 某次体检，5位同学的身高（单位：米）分别为1.72, 1.78, 1.80, 1.69, 1.76，则这组数据的中位数是 \_\_\_\_\_（米）。
- 若函数  $f(x) = 4 \sin x + a \cos x$  的最大值为5，则常数  $a =$  \_\_\_\_\_。
- 已知点  $(3, 9)$  在函数  $f(x) = 1 + a^x$  的图像上，则  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_。
- 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ y \geq x + 1, \end{cases}$  则  $x - 2y$  的最大值为 \_\_\_\_\_。
- 方程  $3 \sin x = 1 + \cos 2x$  在区间  $[0, 2\pi]$  上的解为 \_\_\_\_\_。
- 在  $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^n$  的二项展开式中，所有项的二项式系数之和为256，则常数项等于 \_\_\_\_\_。
- 已知  $\triangle ABC$  的三边长分别为3, 5, 7，则该三角形的外接圆半径等于 \_\_\_\_\_。
- 某食堂规定，每份午餐可以在四种水果中任选两种，则甲、乙两同学各自所选的两种

水果相同的概率为\_\_\_\_\_.

12. 如图, 已知点 $O(0,0), A(1,0), B(0,-1)$ ,  $P$ 是曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{BA}$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.



13. 设 $a>0, b>0$ . 若关于 $x, y$ 的方程组 $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + by = 1 \end{cases}$ 无解, 则 $a + b$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

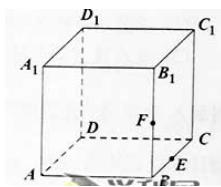
14. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 $k$ 个不同的数组成,  $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和. 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n \in \{2, 3\}$ , 则 $k$ 的最大值为\_\_\_\_\_.

二、选择题 (本大题共有4小题, 满分20分) 每题有且只有一个正确答案, 考生应在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得5分, 否则一律得零分.

15. 设 $a \in \mathbf{R}$ , 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的 ( ).

- (A) 充分非必要条件      (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件      (D) 既非充分也非必要条件

16. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,  $E, F$ 分别为 $BC, BB_1$ 的中点, 则下列直线中与直线 $EF$ 相交的是 ( ).



- (A) 直线 $AA_1$       (B) 直线 $A_1B_1$   
(C) 直线 $A_1D_1$       (D) 直线 $B_1C_1$

17. 设 $a \in \mathbf{R}, b \in [0, 2\pi]$ . 若对任意实数 $x$ 都有 $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(ax + b)$ , 则满足条件的有序实数对 $(a, b)$ 的对数为 ( ).

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4

18. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数. 对于命题: ①若 $f(x) + g(x)$ 、

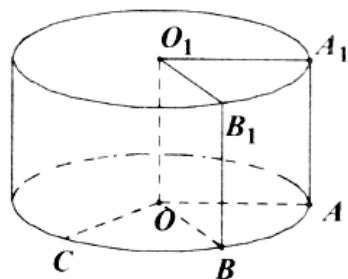
$f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$ 均是增函数，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 均是增函数；②若 $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数，下列判断正确的是（ ）。

- (A) ①和②均为真命题      (B) ①和②均为假命题  
 (C) ①为真命题，②为假命题    (D) ①为假命题，②为真命题

**三、解答题** (本题共有5题, 满分74分) 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19. (本题满分12分) 本题共有2个小题, 第1个小题满分6分, 第2个小题满分6分.

将边长为1的正方形 $AA_1O_1O$  (及其内部) 绕 $OO_1$ 旋转一周形成圆柱, 如图,  $\widehat{AC}$  长为 $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\widehat{A_1B_1}$  长为 $\frac{\pi}{3}$ , 其中 $B_1$ 与 $C$ 在平面 $AA_1O_1O$ 的同侧.

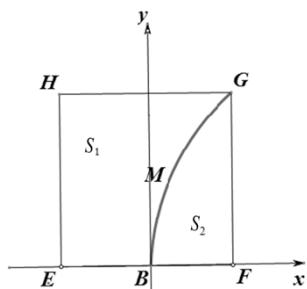


- (1) 求圆柱的体积与侧面积;  
 (2) 求异面直线 $O_1B_1$ 与 $OC$ 所成的角的大小.

20. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1个小题满分6分, 第2个小题满分8分.

有一块正方形菜地 $EFGH$ ,  $EH$ 所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到 $F$ 点或河边运走.

于是, 菜地分为两个区域 $S_1$ 和 $S_2$ , 其中 $S_1$ 中的蔬菜运到河边较近,  $S_2$ 中的蔬菜运到 $F$ 点较近, 而菜地内 $S_1$ 和 $S_2$ 的分界线 $C$ 上的点到河边与到 $F$ 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 $O$ 为 $EF$ 的中点, 点 $F$ 的坐标为 $(1,0)$ , 如图.



(1) 求菜地内的分界线  $C$  的方程;

(2) 菜农从蔬菜运量估计出  $S_1$  面积是  $S_2$  面积的两倍, 由此得到  $S_1$  面积的“经验值”为  $\frac{8}{3}$ . 设

$M$  是  $C$  上纵坐标为 1 的点, 请计算以  $EH$  为一边、另一边过点  $M$  的矩形的面积, 及五边形  $EOMGH$  的面积, 并判断哪一个更接近于  $S_1$  面积的“经验值”.

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 直线  $l$  过  $F_2$  且与双曲线交于  $A, B$

两点.

(1) 若  $l$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\triangle F_1AB$  是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程;

(2) 设  $b = \sqrt{3}$ , 若  $l$  的斜率存在, 且  $|AB|=4$ , 求  $l$  的斜率.

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

对于无穷数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$ , 记  $A = \{x | x = a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ ,  $B = \{x | x = b_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ , 若

同时满足条件: ①  $\{a_n\}, \{b_n\}$  均单调递增; ②  $A \cap B = \emptyset$  且  $A \cup B = \mathbb{N}^*$ , 则称  $\{a_n\}$

与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列.

(1) 若  $a_n = 2n-1$ ,  $b_n = 4n-2$ , 判断  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是否为无穷互补数列, 并说明理由;

(2) 若  $a_n = 2^n$  且  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列, 求数列  $\{b_n\}$  的前 16 项的和;

(3) 若  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列,  $\{a_n\}$  为等差数列且  $a_{16} = 36$ , 求  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  的通项公式.

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

已知  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \log_2(\frac{1}{x} + a)$ .

(1) 当  $a=1$  时, 解不等式  $f(x) > 1$ ;

(2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) + \log_2(x^2) = 0$  的解集中恰有一个元素, 求  $a$  的值;

(3) 设  $a > 0$ , 若对任意  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 函数  $f(x)$  在区间  $[t, t+1]$  上的最大值与最小值的差不超过1, 求  $a$  的取值范围.

