

绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第II卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

如果事件 A ， B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

如果事件 A ， B 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$.

棱柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 S 表示棱柱的底面面积， h 表示棱柱的高.

棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积， h 表示棱锥的高.

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1) 设全集为 \mathbf{R} ，集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ， $B = \{x | x \geq 1\}$ ，则 $A \cap (C_{\mathbf{R}} B) =$

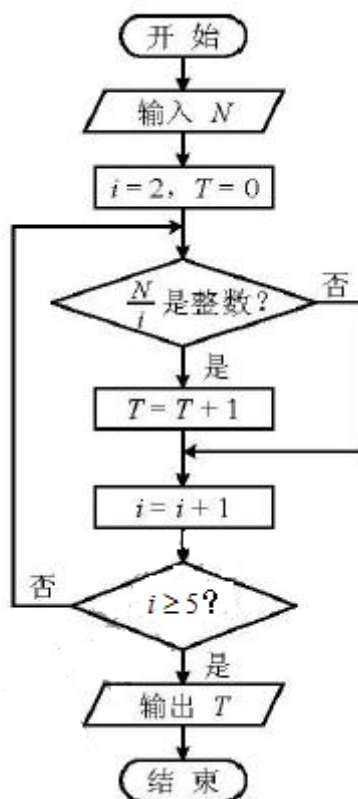
- (A) $\{x | 0 < x \leq 1\}$ (B) $\{x | 0 < x < 1\}$
(C) $\{x | 1 \leq x < 2\}$ (D) $\{x | 0 < x < 2\}$

(2) 设变量 x ， y 满足约束条件
$$\begin{cases} x + y \leq 5, \\ 2x - y \leq 4, \\ -x + y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$$
则目标函数 $z = 3x + 5y$ 的最大值为

- (A) 6 (B) 19 (C) 21 (D) 45

(3) 阅读如图的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为 20，则输出 T 的值为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4



(4) 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ ”是“ $x^3 < 1$ ”的

- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件
(D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知 $a = \log_2 e$ ， $b = \ln 2$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ，则 a, b, c 的大小关系为

- (A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$

(6) 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数

- (A) 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增 (B) 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上单调递减

(C)在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增

(D)在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

(7)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为2, 过右焦点且垂直于x轴的直线与双曲线交于A, B两点.

设A, B到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为

(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

(B) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

(C) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$

(D) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

(8)如图, 在平面四边形ABCD中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$.

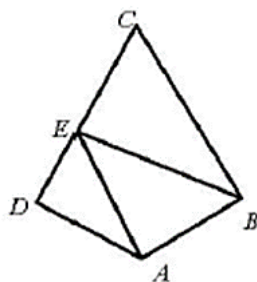
若点E为边CD上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为

(A) $\frac{21}{16}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{25}{16}$

(D) 3



第(8)题图

第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共12小题, 共110分。

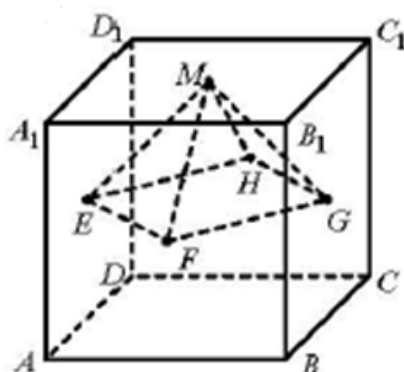
二. 填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分。

(9) i是虚数单位, 复数 $\frac{6+7i}{1+2i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 在 $(x - \frac{1}{2\sqrt{x}})^5$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.

(11)

已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 E, F, G, H, M (如图)，则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为_____.



第(11)题图

(12) 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的圆心为 C ，直线 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 与该圆相交于 A, B 两点，则

$\triangle ABC$ 的面积为_____.

(13) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，且 $a - 3b + 6 = 0$ ，则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为_____.

(14) 已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有2个互异的实数解，

则 a 的取值范围是_____.

三.解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分13分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 设 $a=2, c=3$ ，求 b 和 $\sin(2A - B)$ 的值.

(16)(本小题满分13分)

已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为24, 16, 16.

现采用分层抽样的方法从中抽取7人，进行睡眠时间的调查.

(I) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?

(II) 若抽出的7人中有4人睡眠不足，3人睡眠充足，现从这7人中随机抽取3人做进一步的身体检查.

(i) 用 X 表示抽取的3人中睡眠不足的员工人数，求随机变量 X 的分布列与数学期望；

(ii) 设 A 为事件“抽取的3人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工”，求事件 A 发生的概率.

(17)(本小题满分13分)

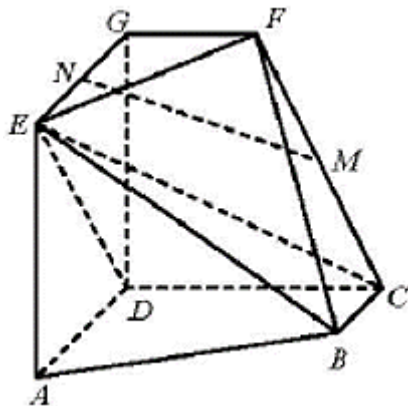
如图， $AD \parallel BC$ 且 $AD=2BC$ ， $AD \perp CD$ ， $EG \parallel AD$ 且 $EG=AD$ ， $CD \parallel FG$ 且 $CD=2FG$ ，

$DG \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DA=DC=DG=2$.

(I) 若 M 为 CF 的中点， N 为 EG 的中点，求证： $MN \parallel$ 平面 CDE ；

(II) 求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值；

(III) 若点 P 在线段 DG 上，且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° ，求线段 DP 的长.



(18)(本小题满分13分)

设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列.

已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, \quad a_4 = b_3 + b_5, \quad a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

(i) 求 T_n ；

(ii) 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(19)(本小题满分14分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B .

已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，点 A 的坐标为 $(b, 0)$ ，且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 。

(I) 求椭圆的方程；

(II) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P ，且 l 与直线 AB 交于点 Q 。

若 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ (O 为原点)，求 k 的值。

(20)(本小题满分14分)

已知函数 $f(x) = a^x$ ， $g(x) = \log_a x$ ，其中 $a > 1$ 。

(I) 求函数 $h(x) = f(x) - x \ln a$ 的单调区间；

(II) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$

处的切线平行，证明 $x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$ ；

(III) 证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l ，使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线，也是曲线 $y = g(x)$ 的切线。