

2021年普通高等学校招生全国统一考试（甲卷）

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

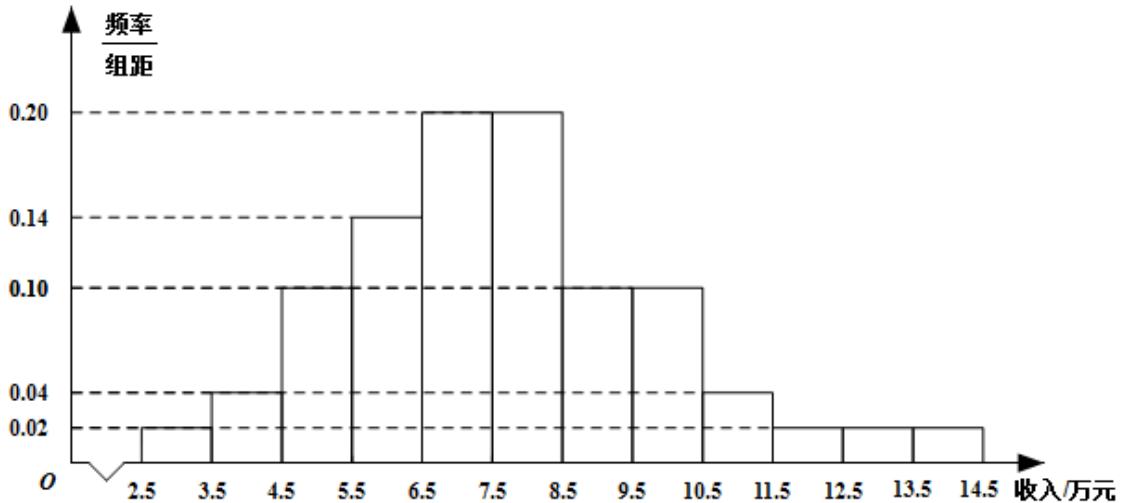
1. 设集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \left\{x \left| \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right.\right\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

A. $\left\{x \left| 0 < x \leq \frac{1}{3}\right.\right\}$ B. $\left\{x \left| \frac{1}{3} \leq x < 4\right.\right\}$

C. $\{x | 4 \leq x < 5\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$

2.

为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是（ ）

- A. 该地农户家庭年收入低于4.5万元的农户比率估计为6%
 - B. 该地农户家庭年收入不低于10.5万元的农户比率估计为10%
 - C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过6.5万元
 - D. 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于4.5万元至8.5万元之间
3. 已知 $(1-i)^2 z = 3 + 2i$ ，则 $z =$ ()

- A. $-1 - \frac{3}{2}i$
- B. $-1 + \frac{3}{2}i$
- C. $-\frac{3}{2} + i$
- D. $-\frac{3}{2} - i$

4.

青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量。通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录表的数据 V 的满足 $L = 5 + \lg V$ 。已知某同学视力的五分记录法的数据为4.9，则其视力的小数记录法的数据为（ ） ($\sqrt[10]{10} \approx 1.259$)

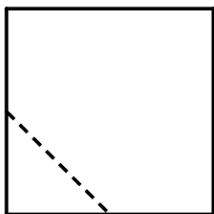
- A. 1.5
- B. 1.2
- C. 0.8
- D. 0.6

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点， P 为 C 上一点，且 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ, |PF_1| = 3|PF_2|$ ，则 C 的离心率为（ ）

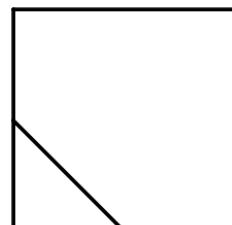
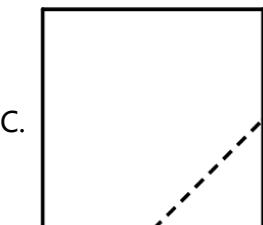
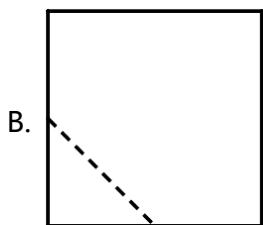
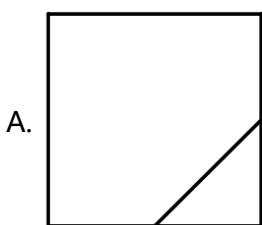
- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$
- C. $\sqrt{7}$
- D. $\sqrt{13}$

6.

在一个正方体中，过顶点A的三条棱的中点分别为E, F, G. 该正方体截去三棱锥A-EFG后，所得多面体的三视图中，正视图如图所示，则相应的侧视图是（ ）



正视图



7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项和为 S_n ，设甲： $q > 0$ ，乙： $\{S_n\}$ 是递增数列，则（ ）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

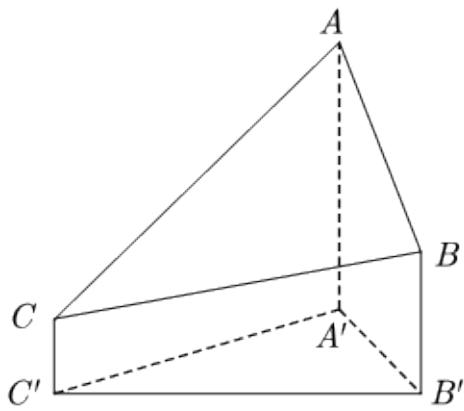
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8.

2020年12月8日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为8848.86（单位：m），三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一。如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A, B, C 三点，且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$ ， $\angle A'B'C' = 60^\circ$ 。由 C 点测得 B 点的仰角为 15° ， BB' 与 CC' 的差为100；由 B 点测得 A 点的仰角为 45° ，则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为（ $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）（ ）



- A. 346 B. 373 C. 446 D. 473

9. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha = (\)$

- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

10. 将4个1和2个0随机排成一行, 则2个0不相邻的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

11.

已知 A, B, C 是半径为1的球 O 的球面上的三个点, 且 $AC \perp BC, AC = BC = 1$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时,

$f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right) = (\)$

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为 _____.

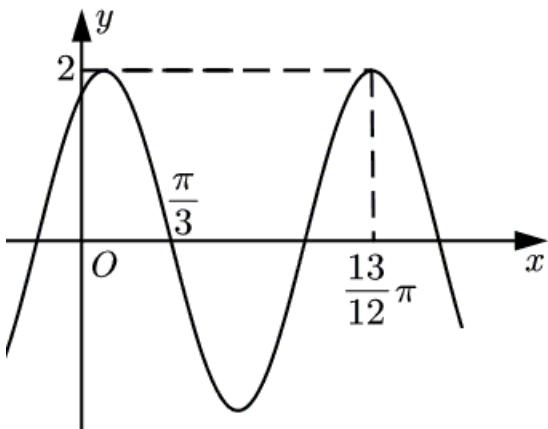
14. 已知向量 $\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (1, 0), \vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$. 若 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 $k =$ _____.

15. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且

$|PQ|=|F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

16. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示, 则满足条件

$$\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0 \text{ 的最小正整数 } x \text{ 为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$



三、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共60分.

17.

甲、乙两台机床生产同种产品, 产品按质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了200件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

(2) 能否有99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
-----------------	-------	-------	-------

k	3.841	6.635	10.828
-----	-------	-------	--------

18.

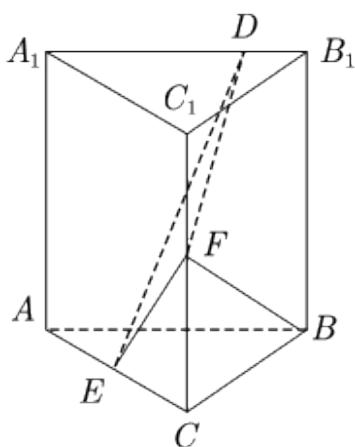
已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

19.

已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB = BC = 2$, E , F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点. $BF \perp A_1B_1$



(1) 证明: $BF \perp DE$;

(2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?

20. 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O . 焦点在 x 轴上, 直线 l : $x = 1$ 交 C 于 P , Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点

$M(2, 0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C , $\odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2 , A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

21. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为

$$\rho = 2\sqrt{2} \cos \theta.$$

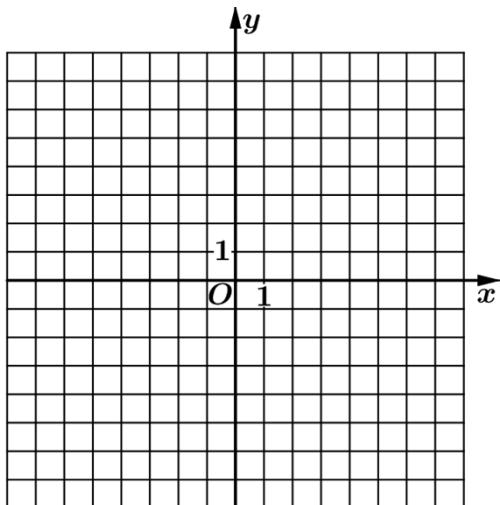
(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1, 0)$, M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2} \overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程,

并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

[选修4-5: 不等式选讲] (10分)

23. 已知函数 $f(x)=|x-2|$, $g(x)=|2x+3|-|2x-1|$.



(1) 画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像;

(2) 若 $f(x+a) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.