2008高考湖南理科数学试题及全解全析

一、选择题:本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，

只有一项是符合题目要求的.

1．复数 $(i-\frac{1}{i})^3$ 等于(　　)

A.8　　B.－8　　C.8i　　D.－8i

2．“$|x-1|<2$ 成立”是“$x(x-3)<0$ 成立”的(　　)

A．充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C．充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

3.已知变量x、y满足条件 $\begin{cases} x \ge 1, \\ x-y \le 0, \\ x+2y-9 \le 0, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值是(　　)

A.2　　B.5　　C.6　　D.8

4.设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,9)$,若 $P(\xi > c+1) = P(\xi < c-1)$,则c= (　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

5.设有直线m、n和平面 α 、β ,下列四个命题中，正确的是(　　)

A.若$m \parallel \alpha$,$n \parallel \alpha$,则$m \parallel n$

B.若$m \subset \alpha$,$n \subset \alpha$,$m \parallel \beta$,$n \parallel \beta$,则$\alpha \parallel \beta$

C.若$\alpha \perp \beta$，$m \subset \alpha$,则$m \perp \beta$

D.若$\alpha \perp \beta$，$m \perp \beta$，$m \not\subset \alpha$,则$m \parallel \alpha$

6.函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是(　　)

A.1　　B.$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D.$1+\sqrt{3}$

7.设D、E、F分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB上的点，且 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$,

$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$, 则 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ (　　)

A.反向平行　　　　　　　　　　　　B.同向平行

C.互相垂直　　　　　　　　　　　　D.既不平行也不垂直

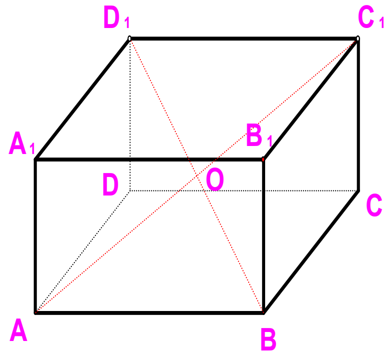
8.若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$>0,$b$>0）上横坐标为$\frac{3a}{2}$的点到右焦点的距离大于它到左准线的距离，则双曲线离心率的取值范围是(　　)

A.(1,2)　　B.(2,+∞)　　C.(1,5)　　D. (5,+∞)

9.长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的8个顶点在同一球面上，且AB=2,AD=$\sqrt{3}$,AA_1=1,

则顶点A、B间的球面距离是(　　)

A.$2\sqrt{2}\pi$　　B.$\sqrt{2}\pi$　　C.$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$



10.设［x］表示不超过x的最大整数（如［2］=2,［$\frac{5}{4}$］=1）,对于给定的$n\in\mathbf{N}^*$,

定义$C_n^x=\frac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)},x\in[1,+\infty)$,则当$x\in\left[\frac{3}{2},3\right)$时，函数$C_8^x$的值域是(　　)

A.$\left[\frac{16}{3},28\right]$　　　　　　　　B.$\left[\frac{16}{3},56\right)$

C.$\left(4,\frac{28}{3}\right)\cup[28,56)$　　　　　　D.$\left(4,\frac{16}{3}\right]\cup\left(\frac{28}{3},28\right]$

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。把答案填在对应题号后的横线上。

11.$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+3x-4}=$______.

12.已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$>$b$>0）的右焦点为F,右准线为$l$,离心率$e$=$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

过顶点$A(0,b)$作$AM\perp l$,垂足为M，则直线FM的斜率等于______.

13.设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$,且函数 $y=x-f(x)$ 的图象过点(1,2),

则函数 $y=f^{-1}(x)-x$ 的图象一定过点___.

14.已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-ax}}{a-1}(a\neq 1)$.

（1）若$a>0$,则 $f(x)$ 的定义域是______;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数，则实数a的取值范围是_______.

15.对有$n(n\geq 4)$个元素的总体 $\{1,2,\cdots,n\}$ 进行抽样，先将总体分成两个子总体

$\{1,2,\cdots,m\}$ 和 $\{m+1,m+2,\cdots,n\}$ (m是给定的正整数，且$2\leq m\leq n-2$),再从

每个子总体中各随机抽取2个元素组成样本.用 P_{ij} 表示元素i和j同时出现在样

本中的概率，则 P_{1n} =______; 所有 P_{ij} $(1\leq i<j\leq n)$ 的和等于______.

三、解答题：本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（本小题满分12分）

甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试，面试合格者可正式签约，甲表示只要面试合格就签约.乙、丙则约定：两人面试都合格就一同签约，否则两人都不签约.设每人面试合格的概率都是$\dfrac{1}{2}$，且面试是否合格互不影响.求：

（I）至少有1人面试合格的概率;

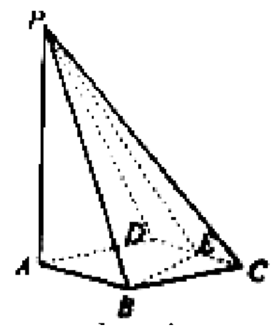
（II）签约人数ξ的分布列和数学期望.

17.（本小题满分12分）

如图所示，四棱锥P-$ABCD$的底面$ABCD$是边长为1的菱形，$\angle BCD=60°$，E是CD的中点，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=2$.

（I）证明：平面$PBE\perp$平面PAB;

（II）求平面PAD和平面PBE所成二面角（锐角）的大小.



18.（本小题满分12分）

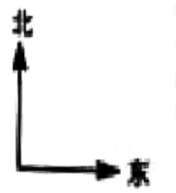
数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=(1+\cos^2\frac{n\pi}{2})a_n+\sin^2\frac{n\pi}{2},n=1,2,3,\cdots$.

(I) 求a_3,a_4, 并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(II) 设$b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}},S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$.证明：当$n\ge 6$时,$|S_n-2|<\frac{1}{n}$.

19.（本小题满分13分）

在一个特定时段内，以点E为中心的7海里以内海域被设为警戒水域.点E正北55海里处有一个雷达观测站A.某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点A北偏东45°且与点A相距40$\sqrt{2}$海里的位置B，经过40分钟又测得该船已行驶到点A北偏东$45^\circ+\theta$(其中$\sin\theta=\frac{\sqrt{26}}{26}$，$0^\circ<\theta<90^\circ$)且与点$A$相距$10\sqrt{13}$海里的位置$C$.



（I）求该船的行驶速度（单位：海里/小时）；

（II）若该船不改变航行方向继续行驶.判断它是否会进入警戒水域，并说明理由.

20.（本小题满分13分）

若A、B是抛物线$y^2=4x$上的不同两点，弦AB（不平行于y轴）的垂直平分线与x轴相交于点P，则称弦AB是点P的一条“相关弦”.已知当$x>2$时，点P（x,0）存在无穷多条“相关弦”.给定$x_0>2$.

（I）证明：点P（x_0,0）的所有“相关弦” 中的中点的横坐标相同；

(II) 试问：点P（x_0,0）的“相关弦”的弦长中是否存在最大值？若存在，求其最大值（用x_0表示）：若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

（II）若不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+a} \le e$ 对任意的 $n \in N^*$ 都成立（其中e是自然对数的底数）.

求a的最大值.

一、选择题:本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．复数 $(i-\frac{1}{i})^3$ 等于(　　)

A.8　　　　B.－8　　　　C.8i　　　　D.－8i

【答案】D

【解析】由 $(i-\frac{1}{i})^3=(\frac{-2}{i})^3=-8\cdot\frac{i}{i^4}=-8i$,易知D正确.

2．“$|x-1|<2$ 成立”是“$x(x-3)<0$ 成立”的(　　)

A．充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

【答案】B

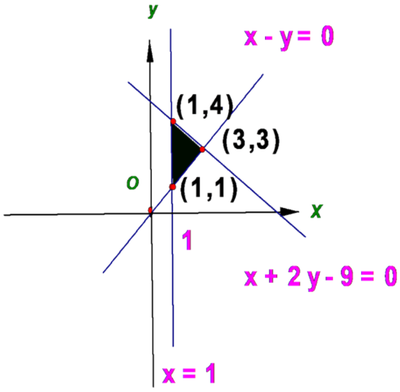
【解析】由 $|x-1|<2$ 得 $-1<x<3$，由 $x(x-3)<0$ 得 $0<x<3$，所以易知选B.

3.已知变量x、y满足条件 $\begin{cases} x\ge 1, \\ x-y\le 0, \\ x+2y-9\le 0, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值是(　　)

A.2　　B.5　　　　C.6　　　　D.8

【答案】C

【解析】如图得可行域为一个三角形，其三个顶点分别为 $(1,1),(1,4),(3,3)$, 代入验证知在点 $(3,3)$ 时，$x+y$ 最大值是 $3+3=6$.



故选C.

4.设随机变量ξ服从正态分布$N(2,9)$,若$P(\xi > c+1)=P(\xi < c-1)$,则$c$=(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【答案】B

【解析】$\because N(2,3^2)\Rightarrow P(\xi > c+1)=1-P(\xi \le c+1)=\Phi(\frac{c+1-2}{3})$,

$P(\xi < c-1)=\Phi(\frac{c-1-2}{3}), \therefore \Phi(\frac{c-3}{3})+\Phi(\frac{c-1}{3})=1,$

$\Rightarrow 1-\Phi(\frac{3-c}{3})+\Phi(\frac{c-1}{3})=1,$ 解得c=2, 所以选B.

5.设有直线m、n和平面α、β,下列四个命题中，正确的是(　　)

A.若$m\parallel\alpha$,$n\parallel\alpha$,则$m\parallel n$

B.若$m\subset\alpha$,$n\subset\alpha$,$m\parallel\beta$,$n\parallel\beta$,则$\alpha\parallel\beta$

C.若$\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$,则$m\perp\beta$

D.若$\alpha\perp\beta$，$m\perp\beta$，$m\not\subset\alpha$,则$m\parallel\alpha$

【答案】D

【解析】由立几知识, 易知D正确.

6.函数$f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值是(　　)

A.1　　B.$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D.$1+\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】由 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}+\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,

$\because \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}, \therefore f(x)_{\max}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.故选C.

7.设D、E、F分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB上的点，且$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA},$

$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,则$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$与$\overrightarrow{BC}$(　　)

A.反向平行　　B.同向平行

C.互相垂直　　D.既不平行也不垂直

【答案】A

【解析】由定比分点的向量式得: $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}{1+2}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, 以上三式相加得

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 所以选A.

8.若双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）上横坐标为$\dfrac{3a}{2}$的点到右焦点的距离大于它到左准线的距离，则双曲线离心率的取值范围是(　　)

A.(1,2)　　B.(2,+∞)　　C.(1,5)　　D. (5,+∞)

【答案】B

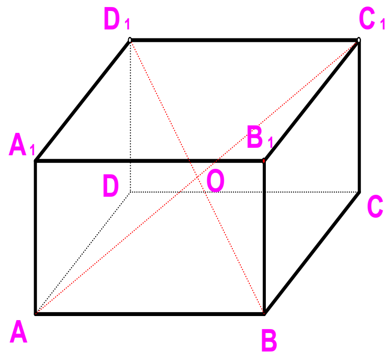
【解析】$\because ex_0-a=e\times\dfrac{3}{2}a-a>\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{3}{2}a, \Rightarrow 3e^2-5e-2>0, \therefore e>2$ 或

$e<-\dfrac{1}{3}$(舍去), $\therefore e\in(2,+\infty]$, 故选B.

9.长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的8个顶点在同一球面上，且$AB=2,AD=\sqrt{3},AA_1=1$,

则顶点A、B间的球面距离是(　　)

A.$2\sqrt{2}\pi$　　B.$\sqrt{2}\pi$　　C.$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　D.$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$



【答案】C

【解析】$\because BD_1=AC_1=2R=2\sqrt{2}, \therefore R=\sqrt{2}$, 设

$BD_1\cap AC_1=O$, 则 $OA=OB=R=\sqrt{2}$,

$\Rightarrow \angle AOB=\dfrac{\pi}{2}, \therefore l=R\theta=\sqrt{2}\times\dfrac{\pi}{2}$, 故选C.

10.设［x］表示不超过x的最大整数（如［2］=2, ［$\dfrac{5}{4}$］=1）,对于给定的$n\in\mathbf{N}^*$,

定义 $C_n^x=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}, x\in[1,+\infty)$,则当$x\in\left[\dfrac{3}{2},3\right)$时，函数 C_8^x 的值域是(　　)

A.$\left[\dfrac{16}{3},28\right]$　　B.$\left[\dfrac{16}{3},56\right)$

C.$\left(4,\dfrac{28}{3}\right)\cup[28,56)$　　D.$\left(4,\dfrac{16}{3}\right]\cup\left(\dfrac{28}{3},28\right]$

【答案】D

【解析】当$x\in\left[\frac{3}{2},2\right)$时，$C_8^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$, 当$x\to 2$时，$[x]=1$, 所以$C_8^x=\frac{8}{2}=4$;

当$[2,3)$时，$C_8^2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$, 当$x\to 3$时，$[x]=2$, $C_8^x=\frac{8\times 7}{3\times 2}=\frac{28}{3}$,

故函数C_8^x的值域是$\left(4,\frac{16}{3}\right]\cup\left(\frac{28}{3},28\right]$. 选D.

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。把答案填在对应题号后的横线上。

11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+3x-4}=$ ______ .

【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+3x-4}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x+4)}=\frac{1}{5}$.

12. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点为F,右准线为$l$,离心率$e=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

过顶点$A(0,b)$作AM⊥l,垂足为M，则直线FM的斜率等于______.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\because M(\frac{a^2}{c},b),\ e=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow a=\sqrt{5}c, b=2c, \therefore k_{FM}=\frac{b-0}{\frac{a^2}{c}-c}=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$.

13. 设函数$y=f(x)$存在反函数$y=f^{-1}(x)$,且函数$y=x-f(x)$的图象过点(1,2),

则函数$y=f^{-1}(x)-x$的图象一定过点___.

【答案】(-1, 2)

【解析】由函数$y=x-f(x)$的图象过点(1,2)得: $f(1)=-1$, 即函数$y=f(x)$过点$(1,-1)$,

则其反函数过点$(-1,1)$,所以函数$y=f^{-1}(x)-x$的图象一定过点$(-1,2)$.

14. 已知函数$f(x)=\frac{\sqrt{3-ax}}{a-1}(a\neq 1)$.

（1）若$a>0$,则$f(x)$的定义域是______;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数，则实数a的取值范围是______.

【答案】$\left(-\infty,\dfrac{3}{a}\right]$, $(-\infty,0)\cup(1,3]$

【解析】（1）当a＞0时，由 $3-ax\geq 0$ 得 $x\leq\dfrac{3}{a}$,所以 $f(x)$ 的定义域是$\left(-\infty,\dfrac{3}{a}\right]$;

(2) 当a＞1时，由题意知$1<a\leq 3$;当0<a<1时，为增函数,不合;

当a<0时，$f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数.故填$(-\infty,0)\cup(1,3]$.

15.对有n(n≥4)个元素的总体$\{1,2,\cdots,n\}$进行抽样，先将总体分成两个子总体$\{1,2,\cdots,m\}$和$\{m+1,m+2,\cdots,n\}$ (m是给定的正整数，且2≤m≤n-2),再从每个子总体中各随机抽取2个元素组成样本.用 P_{ij} 表示元素i和j同时出现在样本中的概率，则 P_{1n}=_____; 所有 P_{ij} (1≤i＜j≤n) 的和等于______.

【答案】$\dfrac{4}{m(n-m)}$ ， 6

【解析】$P_{1n}=\dfrac{C_{m-1}^{1}\cdot C_{n-m-1}^{1}}{C_m^2\cdot C_{n-m}^2}=\dfrac{4(m-1)(n-m-1)}{m(m-1)(n-m)(n-m-1)}=\dfrac{4}{m(n-m)}$;第二空可分:

①当 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 时, $P_{ij}=\dfrac{C_m^2}{C_m^2}=1$;

②当 $i,j\in\{m+1,m+2,\cdots,n\}$ 时, $P_{ij}=1$;

③当$i\in\{1,2,\cdots,m\}$, $j\in\{m+1,m+2,\cdots,n\}$ 时, $P_{ij}=m(n-m)\times\dfrac{4}{m(n-m)}=4$;

所以 $P_{ij}=1+1+4=6$. **也可用特殊值法或i和j同时出现6次.**

三、解答题：本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（本小题满分12分）

甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试，面试合格者可正式签约，甲表示只要面试合格就签约.乙、丙则约定：两人面试都合格就一同签约，否则两人都不签约.设每人面试合格的概率都是$\dfrac{1}{2}$，且面试是否合格互不影响.求：

（I）至少有1人面试合格的概率;

（II）签约人数ξ的分布列和数学期望.

解: 用A，B，C分别表示事件甲、乙、丙面试合格.由题意知A，B，C相互独立，

且P（A）$=P$（B）$=P$（C）$=\dfrac{1}{2}$.

（I）至少有1人面试合格的概率是

$$1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-(\frac{1}{2})^3=\frac{7}{8}.$$

（II）ξ的可能取值为0，1，2，3.

$$P(\xi=0)=P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)+P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$$

$$=P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$=(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}.$$

$$P(\xi=1)=P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})$$

$$=P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$=(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}.$$

$$P(\xi=2)=P(\overline{A}BC)=P(\overline{A})P(B)P(C)=\frac{1}{8}.$$

$$P(\xi=3)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}.$$

所以，ξ的分布列是

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

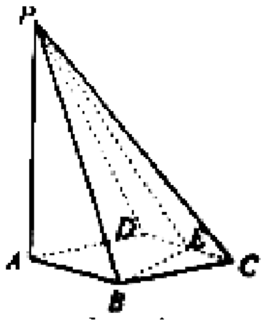
ξ的期望$E\xi=0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}=1.$

17.（本小题满分12分）

如图所示，四棱锥P-$ABCD$的底面$ABCD$是边长为1的菱形，$\angle BCD=60°$，E是CD的中点，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=2$.

（I）证明：平面$PBE\perp$平面PAB;

（II）求平面PAD和平面PBE所成二面角（锐角）的大小.



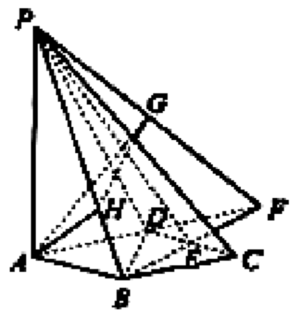
解: 解法一（I）如图所示，连结BD，由$ABCD$是菱形且$\angle BCD=60°$知，

$\triangle BCD$是等边三角形.因为E是CD的中点，所以$BE\perp CD$,又$AB\parallel CD$,

所以$BE\perp AB$.又因为$PA\perp$平面$ABCD$，$BE\subset$平面$ABCD$，所以

$PA\perp BE$.而$PA\cap AB=A$,因此$BE\perp$平面PAB.

又$BE\subset$平面PBE，所以平面$PBE\perp$平面PAB.



（II）延长AD、BE相交于点F，连结PF.

过点A作$AH\perp PB$于H，由（I）知

平面$PBE\perp$平面PAB,所以$AH\perp$平面PBE.

在$Rt\triangle ABF$中，因为$\angle BAF=60°$，

所以，$AF=2AB=2=AP$.

在等腰$Rt\triangle PAF$中，取PF的中点G，连接AG.

则$AG\perp PF$.连结HG，由三垂线定理的逆定理得，

$PF\perp HG$.所以$\angle AGH$是平面PAD和平面PBE所成二面角的平面角（锐角）.

在等腰$Rt\triangle PAF$中，$AG=\frac{\sqrt{2}}{2}PA=\sqrt{2}.$

在$Rt\triangle PAB$中，$AH=\frac{AP\bullet AB}{PB}=\frac{AP\bullet AB}{\sqrt{AP^2+AB^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

所以，在$Rt\triangle AHG$中，$\sin\angle AGH=\frac{AH}{AG}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$

故平面PAD和平面PBE所成二面角（锐角）的大小是$\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}.$

解法二: 如图所示，以A为原点，建立空间直角坐标系.则相关

各点的坐标分别是A（0，0，0），B（1，0，0），

$C(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, P（0，0，2），$E(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

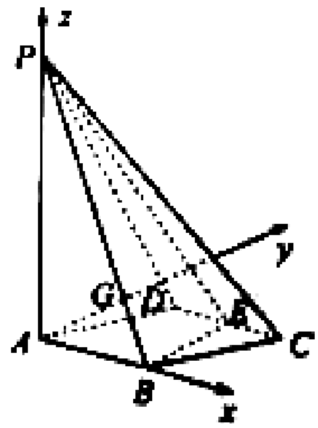
（I）因为 $\overline{BE}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，

平面PAB的一个法向量是 $\overline{n_0}=(0,1,0)$，

所以 $\overline{BE}$和$\overline{n_0}$ 共线.从而$BE\perp$平面PAB.

又因为 $BE\subset$ 平面PBE，

故平面$PBE\perp$平面PAB.



(II) 易知 $\overrightarrow{PB}=(1,0,-2),\overrightarrow{BE}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，　$\overrightarrow{PA}=(0,0,-2),\overrightarrow{AD}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$

设 $\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面PBE的一个法向量，则由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{PB}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得

$\begin{cases}x_1+0\times y_1-2z_1=0,\\ 0\times x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+0\times z_2=0.\end{cases}$ 所以 $y_1=0,x_1=2z_1$.故可取$\overrightarrow{n_1}=(2,0,1)$.

设$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面PAD的一个法向量，则由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\bullet\overrightarrow{PA}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\bullet\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ 得

$\begin{cases}0\times x_2+0\times y_2-2z_2=0,\\ \frac{1}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+0\times z_2=0.\end{cases}$ 所以 $z_2=0,x_2=-\sqrt{3}y_2$.故可取 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},-1,0)$.

于是，$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\bullet|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times 2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

故平面PAD和平面PBE所成二面角（锐角）的大小是 $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

18.（本小题满分12分）

数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=(1+\cos^2\frac{n\pi}{2})a_n+\sin^2\frac{n\pi}{2},n=1,2,3,\cdots$.

(I) 求 a_3,a_4, 并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(II) 设 $b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}},S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$.证明：当 $n\geq 6$时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}$.

解：(I)因为$a_1=1,a_2=2,$所以$a_3=(1+\cos^2\frac{\pi}{2})a_1+\sin^2\frac{\pi}{2}=a_1+1=2,$

$$a_4=(1+\cos^2\pi)a_2+\sin^2\pi=2a_2=4.$$

一般地，当$n=2k-1(k\in \mathrm{N}^*)$时，$a_{2k+1}=[1+\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2}]a_{2k-1}+\sin^2\frac{2k-1}{2}\pi$

$=a_{2k-1}+1$，即$a_{2k+1}-a_{2k-1}=1.$

所以数列$\{a_{2k-1}\}$是首项为1、公差为1的等差数列，因此$a_{2k-1}=k.$

当$n=2k(k\in \mathrm{N}^*)$时，$a_{2k+2}=(1+\cos^2\frac{2k\pi}{2})a_{2k}+\sin^2\frac{2k\pi}{2}=2a_{2k}.$

所以数列$\{a_{2k}\}$是首项为2、公比为2的等比数列，因此$a_{2k}=2^k.$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2},n=2k-1(k\in \mathrm{N}^*),\\ 2^{\frac{n}{2}},n=2k(k\in \mathrm{N}^*).\end{cases}$

(II)由(I)知，$b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}=\frac{n}{2^2},S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n},$　　①

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$$　　②

①-②得，$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}.$

$$=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^2]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}.$$

所以$S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$

要证明当$n\geq 6$时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}$成立，只需证明当$n\geq 6$时，$\frac{n(n+2)}{2^n}<1$成立.

证法一

(1)当$n=6$时，$\frac{6\times(6+2)}{2^6}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}<1$成立.

(2)假设当$n=k(k\geq 6)$时不等式成立，即$\frac{k(k+2)}{2^k}<1.$

则当$n=k+1$时，$\frac{(k+1)(k+3)}{2^{k+1}}=\frac{k(k+2)}{2^k}\times\frac{(k+1)(k+3)}{2k(k+2)}<\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)\cdot 2k}<1.$

由(1)、(2)所述，当$n\geqslant 6$时，$\frac{n(n+1)}{2^2}<1$.即当$n\geqslant 6$时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}.$

证法二

令 $c_n=\dfrac{n(n+2)}{2^2}(n\ge 6)$，则 $c_{n+1}-c_n=\dfrac{(n+1)(n+3)}{2^{n+1}}-\dfrac{n(n+2)}{2^2}=\dfrac{3-n^2}{2^{n+1}}<0.$

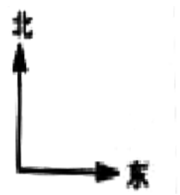
所以当 $n\ge 6$ 时，$c_{n+1}<c_n$. 因此当 $n\ge 6$ 时，$c_n\le c_6=\dfrac{6\times 8}{64}=\dfrac{3}{4}<1.$

于是当 $n\ge 6$ 时，$\dfrac{n(n+2)}{2^2}<1.$

综上所述，当 $n\ge 6$ 时，$\left|S_n-2\right|<\dfrac{1}{n}.$

19.（本小题满分13分）

在一个特定时段内，以点E为中心的7海里以内海域被设为警戒水域.点E正北55海里处有一个雷达观测站*A*.某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点*A*北偏东 45° 且与点*A*相距40 $\sqrt{2}$ 海里的位置B，经过40分钟又测得该船已行驶到点*A*北偏东 $45^{\circ}+\theta$ (其中 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{26}$，$0^{\circ}<\theta<90^{\circ}$)且与点*A*相距 $10\sqrt{13}$ 海里的位置*C*.



（I）求该船的行驶速度（单位：海里/小时）；

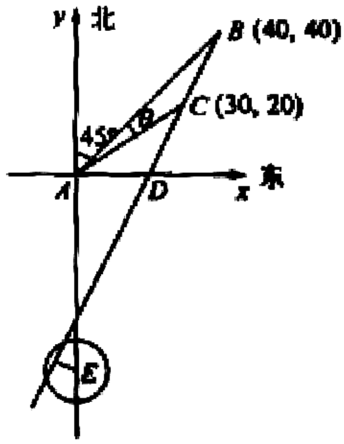
（II）若该船不改变航行方向继续行驶.判断它是否会进入警戒水域，并说明理由.

解:（I）如图，$AB=40\sqrt{2}$，$AC=10\sqrt{13}$，

$$\angle BAC=\theta,\sin\theta=\frac{\sqrt{26}}{26}.$$

由于 $0^{\circ}<\theta<90^{\circ}$,所以 $\cos\theta=\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{26}}{26})^2}=\dfrac{5\sqrt{26}}{26}.$

由余弦定理得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\bullet AC\bullet\cos\theta}=10\sqrt{5}.$



所以船的行驶速度为 $\dfrac{10\sqrt{5}}{\frac{2}{3}}=15\sqrt{5}$（海里/小时）.

（II）解法一　如图所示，以*A*为原点建立平面直角坐标系，设点*B*、*C*的坐标分别是*B*（x_1，y_2），*C*（x_1，y_2），*BC*与*x*轴的交点为*D*.

由题设有，$x_1=y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ AB=40,

$x_2=AC\cos\angle CAD=10\sqrt{13}\cos(45^{\circ}-\theta)=30$,

$y_2 = AC\sin\angle CAD = 10\sqrt{13}\sin(45^\circ-\theta)=20.$

所以过点B、C的直线l的斜率$k=\dfrac{20}{10}=2$,直线l的方程为$y=2x-40$.

又点E（0，-55）到直线l的距离$d=\dfrac{|0+55-40|}{\sqrt{1+4}}=3\sqrt{5}<7.$

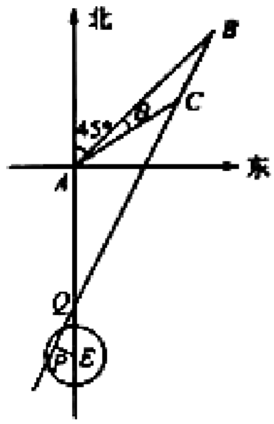
所以船会进入警戒水域.

解法二：如图所示，设直线AE与BC的延长线相交于点Q.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得，

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{40^2\times 2+10^2\times 5-10^2\times 13}{2\times 40\sqrt{2}\times 10\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$



从而$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\sqrt{1-\dfrac{9}{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}.$

在ΔABQ中，由正弦定理得，

$$AQ=\frac{AB\sin\angle ABC}{\sin(45^\circ-\angle ABC)}=\frac{40\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{10}}{10}}=40.$$

由于$AE=55>40=AQ$，所以点Q位于点A和点E之间，且$QE=AE-AQ=15$.

过点E作$EP\perp BC$于点P，则EP为点E到直线BC的距离.

在$\text{Rt}\,\Delta QPE$中，$PE=QE\cdot\sin\angle PQE=QE\cdot\sin\angle AQC=QE\cdot\sin(45^\circ-\angle ABC)$

$$=15\times\frac{\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}<7.$$

所以船会进入警戒水域.

20.（本小题满分13分）

若A、B是抛物线$y^2=4x$上的不同两点，弦AB（不平行于y轴）的垂直平分线与x轴相交于点P，则称弦AB是点P的一条“相关弦”.已知当$x>2$时，点P（x,0）存在无穷多条“相关弦”.给定$x_0>2$.

（I）证明：点P（x_0,0）的所有“相关弦” 中的中点的横坐标相同；

(II) 试问：点P（x_0,0）的“相关弦”的弦长中是否存在最大值？

若存在，求其最大值（用x_0表示）：若不存在，请说明理由.

解:（I）设AB为点P（x_0,0）的任意一条“相关弦”，且点A、B的坐标分别是（x_1,y_1）、（x_2,y_2）（$x_1\neq x_2$）,则$y_1^2=4x_1$, $y_2^2=4x_2$,

两式相减得（y_1+y_2）（y_1-y_2）=4（x_1-x_2）.因为$x_1\neq x_2$,所以$y_1+y_2\neq 0$.

设直线AB的斜率是k，弦AB的中点是M（x_m, y_m）,则

k=$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{2}{y_m}$.从而$AB$的垂直平分线$l$的方程为 $y-y_m=-\dfrac{y_m}{2}(x-x_m)$.

又点P（x_0,0）在直线l上，所以 $-y_m=-\dfrac{y_m}{2}(x_0-x_m)$.

而 $y_m\neq 0$, 于是 $x_m=x_0-2$. 故点P（x_0,0）的所有“相关弦”的中点的横坐标都是x_0-2.

(II) 由(I)知，弦AB所在直线的方程是 $y-y_m=k(x-x_m)$，代入 $y^2=4x$ 中，

整理得 $k^2x^2+2[k(y_m-kx_m)-2]x+(y_m-kx_m)^2=0.$ （·）

则 x_1、x_2 是方程（·）的两个实根，且 $x_1\cdot x_2=\dfrac{(y_m-kx_m)^2}{k^2}$.

设点P的“相关弦”AB的弦长为l，则

$$l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2$$

$$=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=4(1+k^2)(x_m{}^2-x_1x_2)$$

$$=4(1+\frac{4}{y_m^2})[x_m^2-\frac{(y_m-\frac{2}{y_m}x_m)^2}{\frac{4}{y_m^2}}]$$

$$=(4+y_m^2)(4x_m-y_m^2)=-y_m^4+4y_m^2(x_m-1)+16x_m$$

$$=4(x_m+1)^2-[y_m^2-2(x_m-1)]^2=4(x_0-1)^2-[y_m^2-2(x_0-3)]^2.$$

因为0< y_m^2 <4x_m=4(x_m-2) =4x_0-8,于是设t= y_m^2 ,则$t\in$(0,4x_0-8).

记l^2=$g(t)$=-[t-2(x_0-3)]^2+4(x_0-1)^2.

若x_0>3,则2(x_0-3) $\in$(0, 4x_0-8),所以当t=2(x_0-3),即 y_m^2=2(x_0-3)时,

l有最大值2(x_0-1).

若2<x_0<3,则2(x_0-3)$\leq$0,$g(t)$在区间（0，4 x_0-8）上是减函数，

所以0<l^2<16(x_0-2),l不存在最大值.

综上所述，当x_0>3时，点P（x_0,0）的“相关弦”的弦长中存在最大值，且最大值为2（x_0-1）；当2< $x_0\leq$3时，点P（x_0,0）的“相关弦”的弦长中不存在最大值.

21.（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=\ln^2(1+x)-\dfrac{x^2}{1+x}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

（II）若不等式 $(1+\dfrac{1}{n})^{n+a}\le e$ 对任意的 $n\in N^*$ 都成立（其中e是自然对数的底数）.

求a的最大值.

解:（I）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}-\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}=\frac{2(1+x)\ln(1+x)-x^2-2x}{(1+x)^2}.$$

设 $g(x)=2(1+x)\ln(1+x)-x^2-2x$, 则 $g'(x)=2\ln(1+x)-2x$.

令 $h(x)=2\ln(1+x)-2x$, 则 $h'(x)=\dfrac{2}{1+x}-2=\dfrac{-2x}{1+x}$.

当 $-1<x<0$ 时， $h'(x)>0$, $h(x)$ 在（-1，0）上为增函数，

当x＞0时，$h'(x)<0$, $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

所以$h(x)$在x=0处取得极大值，而$h(0)$=0,所以 $g'(x)<0(x\ne 0)$，

函数$g(x)$在 $(-1,+\infty)$ 上为减函数.

于是当 $-1<x<0$ 时， $g(x)>g(0)=0$,

当x＞0时， $g(x)<g(0)=0$.

所以，当 $-1<x<0$ 时， $f'(x)>0$, $f(x)$ 在（-1，0）上为增函数.

当x＞0时， $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（-1，0），单调递减区间为 $(0,+\infty)$.

（II）不等式 $(1+\dfrac{1}{n})^{n+a}\le e$ 等价于不等式 $(n+a)\ln(1+\dfrac{1}{n})\le 1$. 由 $1+\dfrac{1}{n}>1$ 知，

$a\le\dfrac{1}{\ln(1+\dfrac{1}{n})}-n.$ 设 $G(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]$, 则

$$G'(x)=-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

由（I）知，$\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}\le 0$, 即 $(1+x)\ln^2(1+x)-x^2\le 0$.

所以 $G'(x)<0,\ x\in(0,1]$, 于是 $G(x)$ 在 $(0,1]$ 上为减函数.

故函数 G（x）在 $(0,1]$ 上的最小值为 $G(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$.

所以 a 的最大值为 $\frac{1}{\ln 2}-1$.