

2009年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）
数学I

参考公式：

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \text{ 其中 } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分。

1. 若复数 $z_1 = 4 + 29i, z_2 = 6 + 9i$ ，其中 i 是虚数单位，则复数 $(z_1 - z_2)i$ 的实部为_____

2. 已知向量 \mathbf{a} 和向量 \mathbf{b} 的夹角为 30° , $|\mathbf{a}|=2, |\mathbf{b}|=\sqrt{3}$ ，则向量 \mathbf{a} 和向量 \mathbf{b} 的数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____

3. 函数 $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 6$ 的单调减区间为_____

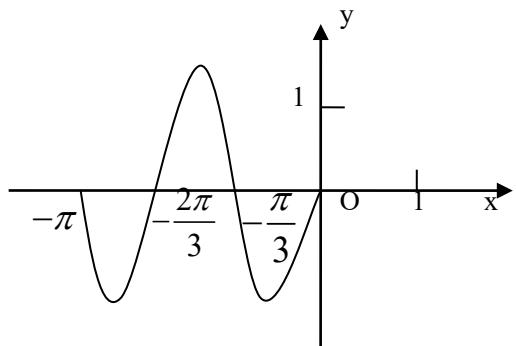
4. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 为常数，

$A > 0, \omega > 0$) 在闭区间 $[-\pi, 0]$ 上的图象如图所示，则 $\omega =$ _____.

5. 现有5根竹竿，它们的长度（单位：m）分别为2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9，若从中一次随机抽取2根竹竿，则它们的长度恰好相差0.3m的概率为_____.

6. 某校甲、乙两个班级各有5名编号为1, 2, 3, 4, 5的学生进行投篮练习，每人投10次，投中的次数如下表：

学生	1号	2号	3号	4号	5号
甲班	6	7	7	8	7
乙班	6	7	6	7	9



则以上两组数据的方差中较小的一个为 $S^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 右图是一个算法的流程图，最后输出的 $W = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 在平面上，若两个正三角形的边长的比为1:2，则它们的面积比为1:4，类似地，在空间，若两个正四面体的棱长的比为1:2，则它们的体积比为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 在平面直角坐标系 xoy 中，点P在曲线 $C: y = x^3 - 10x + 3$ 上，且在第二象限内，已知曲线C在点P处的切线的斜率为2，则点P的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，函数 $f(x) = a^x$ ，若实数 m, n 满足

$f(m) > f(n)$ ，则 m, n 的大小关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$

11. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 2\}$ ， $B = (-\infty, a)$ ，若 $A \subseteq B$ 则

实数 a 的取值范围是 $(c, +\infty)$ ，其中 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设 α 和 β 为不重合的两个平面，给出下列命题：(1) 若 α 内的两条相交直线分别平行于 β 内的两条直线，则 α 平行于 β ；(2) 若 α 外一条直线 l 与 α 内的一条直线平行，则 l 和 α 平行；(3) 设 α 和 β 相交于直线 l ，若 α 内有一条直线垂直于 l ，则 α 和 β 垂直；(4) 直线 l 与 α 垂直的充分必要条件是 l 与 α 内的两条直线垂直.

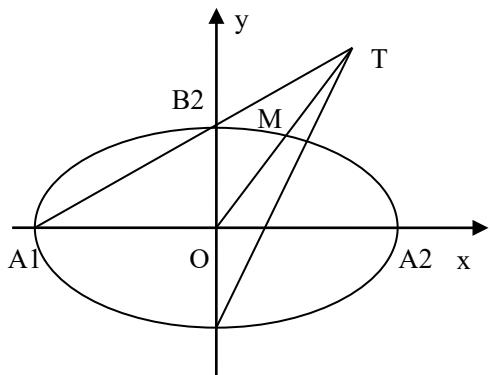
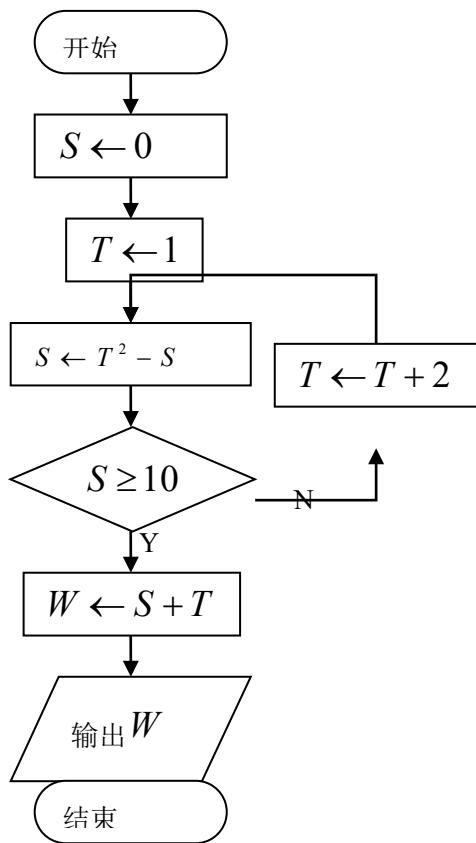
上面命题中，真命题的序号 $\underline{\hspace{2cm}}$ (写出所有真命题的序号).

13. 如图，在平面直角坐标系 xoy 中， A_1, A_2, B_1, B_2 为椭圆

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点， F 为其右焦点，直线

A_1B_2 与直线 B_1F 相交于点T，线段 OT 与椭圆的交点 M 恰为线段 OT 的中点，则该椭圆的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列， $|q| > 1$ ，令



$b_n = a_n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) 若数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53, -23, 19, 37, 82\}$ 中, 则 $6q =$

二、解答题: 本大题共6小题, 共计90分。

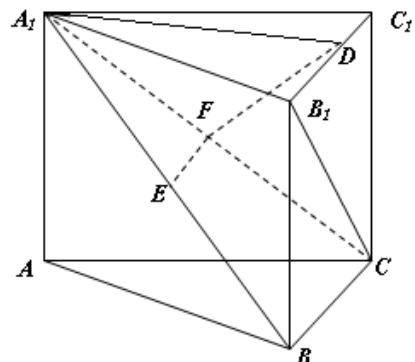
15. (本小题满分14分)

设向量 $\mathbf{a} = (4 \cos \alpha, \sin \alpha), \mathbf{b} = (\sin \beta, 4 \cos \beta), \mathbf{c} = (\cos \beta, -4 \sin \beta)$ (1) 若 \mathbf{a} 与 $\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ 垂直, 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值; (2) 求 $|\mathbf{b} + \mathbf{c}|$ 的最大值; (3) 若 $\tan \alpha \tan \beta = 16$, 求证: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

16. (本小题满分14分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E, F 分别是 A_1B, A_1C 的中点, 点 D 在 B_1C_1 上, $A_1D \perp B_1C$

求证: (1) $EF \parallel$ 平面 ABC (2) 平面 $A_1FD \perp$ 平面 BB_1C_1C



17. (本小题满分14分)

设 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 满足 $a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2, S_7 = 7$ (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n ; (2) 试求所有的正整数 m

, 使得 $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项.

18. (本小题满分16分)

在平面直角坐标系 xoy 中, 已知圆 $C_1: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$ 和圆

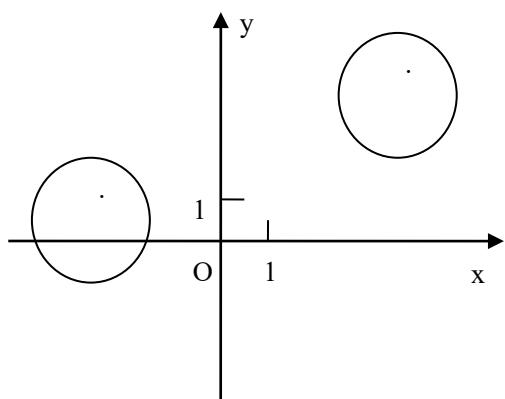
$C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$ (1) 若直线 l 过点 $A(4, 0)$, 且被

圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程; (2) 设 P 为平面上的

点, 满足: 存在过点 P 的无穷多对互相垂的直线 l_1 和 l_2 , 它们分别

与圆 C_1 和圆 C_2 相交, 且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆

C_2 截得的弦长相等, 试求所有满足条件的点 P 的坐标.



19.(本小题满分16分)

按照某学者的理论，假设一个人生产某产品单件成本为 a 元，如果他卖出该产品的单价为 m 元，则他的

$$\frac{m}{m+a}$$

满意度为 $\frac{m}{m+a}$ ；如果他买进该产品的单价为 n 元，则他的满意度为 $\frac{n}{n+a}$.如果一个人对两种交易(卖出或买进)的满意度分别为 h_1 和 h_2 ，则他对这两种交易的综合满意度为 $\sqrt{h_1 h_2}$.

现假设甲生产A、B两种产品的单件成本分别为12元和5元，乙生产A、B两种产品的单件成本分别为3元和20元，设产品A、B的单价分别为 m_A 元和 m_B 元，甲买进A与卖出B的综合满意度为 $h_{\text{甲}}$ ，乙卖出A与买进B的综合满意度为 $h_{\text{乙}}$

求 $h_{\text{甲}}$ 和 $h_{\text{乙}}$ 关于 m_A 、 m_B 的表达式；当 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ 时，求证： $h_{\text{甲}} = h_{\text{乙}}$ ；

设 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ ，当 m_A 、 m_B 分别为多少时，甲、乙两人的综合满意度均最大？最大的综合满意度为多少？

记(2)中最大的综合满意度为 h_0 ，试问能否适当选取 m_A 、 m_B 的值，使得 $h_{\text{甲}} \geq h_0$ 和 $h_{\text{乙}} \geq h_0$ 同时成立，但等号不同时成立？试说明理由。

求 $h_{\text{甲}}$ 和 $h_{\text{乙}}$ 关于 m_A 、 m_B 的表达式；当 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ 时，求证： $h_{\text{甲}} = h_{\text{乙}}$ ；

设 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ ，当 m_A 、 m_B 分别为多少时，甲、乙两人的综合满意度均最大？最大的综合满意度为多少？

记(2)中最大的综合满意度为 h_0 ，试问能否适当选取 m_A 、 m_B 的值，使得 $h_{\text{甲}} \geq h_0$ 和 $h_{\text{乙}} \geq h_0$ 同时成立，但等号不同时成立？试说明理由。

20. (本小题满分16分)设 a 为实数，函数 $f(x) = 2x^2 + (x-a)|x-a|$.若 $f(0) \geq 1$ ，求 a 的取值范围；求 $f(x)$ 的最小值；设函数 $h(x) = f(x), x \in (a, +\infty)$ ，直接写出(不需给出演算步骤)不等式 $h(x) \geq 1$ 的解集.

数学II (附加题)

参考公式: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

21.[选做题]在A、B、C、D四小题中只能选做两题, 每小题10分, 共计20分。请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

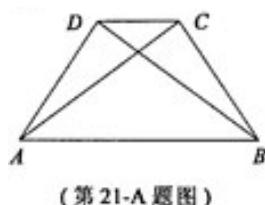
A. 选修4 - 1: 几何证明选讲

如图, 在四边形ABCD中, $\triangle ABC \cong \triangle BAD$.

求证: $AB \parallel CD$.

[解析]

四边形、全等三角形的有关知识, 考查推理论证能力。满分10



本小题主要考查
分。

证明: 由 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ 得 $\angle ACB = \angle BDA$, 故A、B、C、D四点共圆, 从而 $\angle CBA = \angle CDB$ 。再由 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ 得 $\angle CAB = \angle DBA$ 。因此 $\angle DBA = \angle CDB$, 所以 $AB \parallel CD$ 。

B. 选修4 - 2: 矩阵与变换

求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

[解析] 本小题主要考查逆矩阵的求法, 考查运算求解能力。满分10分。

解: 设矩阵A的逆矩阵为 $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, 则 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

即 $\begin{bmatrix} 3x+2z & 3y+2w \\ 2x+z & 2y+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 故 $\begin{cases} 3x+2z=1, \\ 2x+z=0, \end{cases} \begin{cases} 3y+2w=0, \\ 2y+w=1, \end{cases}$

解得: $x=-1, z=2, y=2, w=-3$,

从而A的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

C. 选修4 - 4: 坐标系与参数方程

已知曲线C的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}, \\ y = 3(t + \frac{1}{t}) \end{cases}$ (t为参数, $t > 0$).

求曲线C的普通方程。

[解析] 本小题主要考查参数方程和普通方程的基本知识, 考查转化问题的能力。满分10分。

解: 因为 $x^2 = t + \frac{1}{t} - 2$, 所以 $x^2 + 2 = t + \frac{1}{t} = \frac{y}{3}$,

故曲线C的普通方程为: $3x^2 - y + 6 = 0$.

D. 选修4-5: 不等式选讲

设 $a \geq b > 0$, 求证: $3a^3 + 2b^3 \geq 3a^2b + 2ab^2$.

[解析] 本小题主要考查比较法证明不等式的常见方法, 考查代数式的变形能力。满分10分。

证明: $3a^3 + 2b^3 - (3a^2b + 2ab^2) = 3a^2(a - b) + 2b^2(b - a) = (3a^2 - 2b^2)(a - b)$.

因为 $a \geq b > 0$, 所以 $a - b \geq 0$, $3a^2 - 2b^2 > 0$, 从而 $(3a^2 - 2b^2)(a - b) \geq 0$,

即 $3a^3 + 2b^3 \geq 3a^2b + 2ab^2$.

[必做题]第22题、第23题, 每题10分, 共计20分。请在**答题卡指定区域**内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

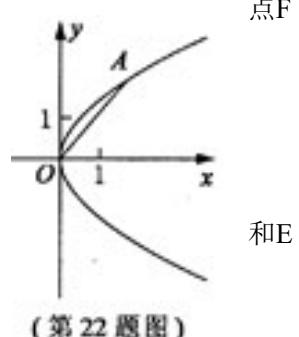
22. (本题满分10分)

在平面直角坐标系 xoy 中, 抛物线C的顶点在原点, 经过点A(2, 2), 其焦点F在 x 轴上。

- (1) 求抛物线C的标准方程;
- (2) 求过点F, 且与直线OA垂直的直线的方程;
- (3) 设过点 $M(m, 0)$ ($m > 0$) 的直线交抛物线C于D、E两点, $ME = 2DM$, 记D、E两点间的距离为 $f(m)$, 求 $f(m)$ 关于 m 的表达式。

[解析]

[必做题]本小题主要考查直线、抛物线及两点间的距离公式等基本知识, 考查运算求解能力。满分10分。

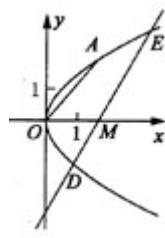


(第22题图)

[必做

解：(1) 由题意，可设抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 2px$. 因为点 $A(2, 2)$ 在抛物线 C 上，所以 $p = 1$. 因此，抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 2x$.

(2) 由(1) 可得焦点 F 的坐标是 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，又直线 OA 的斜率为 $\frac{2}{2} = 1$ ，故与直线 OA 垂直的直线的斜率为 -1 . 因此，所求直线的方程是 $x + y - \frac{1}{2} = 0$.



(3) 解法一：

设点 D 和 E 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，直线 DE 的方程是 $y = k(x - m)$ ，
 $k \neq 0$. 将 $x = \frac{y}{k} + m$ 代入 $y^2 = 2x$ ，有 $ky^2 - 2y - 2km = 0$ ，解得 $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2mk^2}}{k}$.

由 $ME = 2DM$ 知 $1 + \sqrt{1+2mk^2} = 2(\sqrt{1+2mk^2} - 1)$ ，化简得 $k^2 = \frac{4}{m}$. 因此

$$\begin{aligned} DE^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (1 + \frac{1}{k^2})(y_1 - y_2)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \frac{4(1+2mk^2)}{k^2} = \frac{9}{4}(m^2 + 4m). \end{aligned}$$

所以 $f(m) = \frac{3}{2}\sqrt{m^2 + 4m}$ ($m > 0$).

解法二：

设 $D(\frac{s^2}{2}, s)$, $E(\frac{t^2}{2}, t)$. 由点 $M(m, 0)$ 及 $\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{DM}$ 得

$$\frac{1}{2}t^2 - m = 2(m - \frac{s^2}{2}), t - 0 = 2(0 - s).$$

因此 $t = -2s, m = s^2$. 所以

$$f(m) = DE = \sqrt{\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2}\right)^2 + (-2s - s)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{m^2 + 4m} (m > 0).$$

23. (本题满分10分)

对于正整数 $n \geq 2$ ，用 T_n 表示关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有实数根的有序数组 (a, b) 的组数，

其中 $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ (a 和 b 可以相等)；对于随机选取的 $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ (a 和 b 可以相等)，记

P_n 为关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有实数根的概率。

(1) 求 T_{n^2} 和 P_{n^2} ；

(2) 求证：对任意正整数 $n \geq 2$ ，有 $P_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

[解析] [必做题] 本小题主要考查概率的基本知识和记数原理，考查探究能力。满分10分。

(1) 解:因为方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有实数根,所以 $\Delta = 4a^2 - 4b \geq 0$,即 $b \leq a^2$.

(i) 当 $n \leq a \leq n^2$ 时,有 $n^2 \leq a^2$,又 $b \in \{1, 2, \dots, n^2\}$,故总有 $b \leq a^2$,此时, a 有 $n^2 - n + 1$ 种取法, b 有 n^2 种取法,所以共有 $(n^2 - n + 1)n^2$ 组有序数组 (a, b) 满足条件;

(ii) 当 $1 \leq a \leq n - 1$ 时,满足 $1 \leq b \leq a^2$ 的 b 有 a^2 个,故共有 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ 组有序数组 (a, b) 满足条件.

由(i)(ii)可得 $T_{n^2} = (n^2 - n + 1)n^2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(6n^3 - 4n^2 + 3n + 1)}{6}$,

$$\text{从而 } P_{n^2} = \frac{T_{n^2}}{n^4} = \frac{6n^3 - 4n^2 + 3n + 1}{6n^3}.$$

(2) 证明:我们只需证明:对于随机选取的 $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$, 方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 无

实数根的概率 $1 - P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$. 若方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 无实数根,则

$\Delta = 4a^2 - 4b < 0$,即 $a^2 < b$. 由 $b \leq n$ 知 $a < \sqrt{n}$. 因此,满足 $a^2 < b$ 的有序数

组 (a, b) 的组数小于 $n\sqrt{n}$,从而,方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 无实数根的概率

$$1 - P_n < \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ 所以 } P_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

参考答案

1. 【答案】-20

【解析】略

2. 【答案】3

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

【解析】

3. 【答案】(-1,11)

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 30x - 33 = 3(x-11)(x+1)$, 由 $(x-11)(x+1) < 0$ 得单调减区间为

$(-1, 11)$.

4. 【答案】3

【解析】 $\frac{3}{2}T = \pi$, $T = \frac{2}{3}\pi$, 所以 $\omega = 3$,

5. 【答案】0.2

【解析】略

$$\frac{2}{5}$$

6. 【答案】

【解析】略

7. 【答案】22

【解析】略

8. 【答案】1: 8

【解析】略

9. 【答案】 $(-2,15)$

【解析】略

10. 【答案】 $m < n$

【解析】略

11. 【答案】4

【解析】由 $\log_2 x \leq 2$ 得 $0 < x \leq 4$, $A = (0, 4]$; 由 $A \subseteq B$ 知 $a > 4$, 所以 $c = 4$ 。

12. 【答案】(1) (2)

【解析】略

13. 【答案】 $e = 2\sqrt{7} - 5$

【解析】用 a, b, c 表示交点T, 得出M坐标, 代入椭圆方程即可转化解得离心率.

14. 【答案】-9

【解析】将各数按照绝对值从小到大排列, 各数减1, 观察即可得解.

15. 【解析】由 \mathbf{a} 与 $\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ 垂直,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

$$\text{即 } 4\sin(\alpha + \beta) - 8\cos(\alpha + \beta) = 0, \tan(\alpha + \beta) = 2;$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = (\sin \beta + \cos \beta, 4\cos \beta - 4\sin \beta)$$

$$|\mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = \sin^2 \beta + 2\sin \beta \cos \beta + \cos^2 \beta + 16\cos^2 \beta - 32\cos \beta \sin \beta + 16\sin^2 \beta$$

$$= 17 - 30\sin \beta \cos \beta = 17 - 15\sin 2\beta, \text{ 最大值为 } 32, \text{ 所以 } |\mathbf{b} + \mathbf{c}| \text{ 的最大值为 } 4\sqrt{2}.$$

$$\text{由 } \tan \alpha \tan \beta = 16 \text{ 得 } \sin \alpha \sin \beta = 16 \cos \alpha \cos \beta, \text{ 即 } 4\cos \alpha \cdot 4\cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0,$$

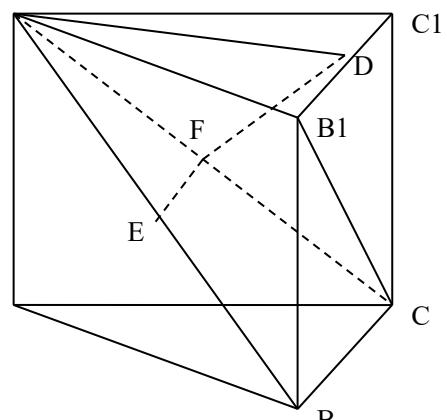
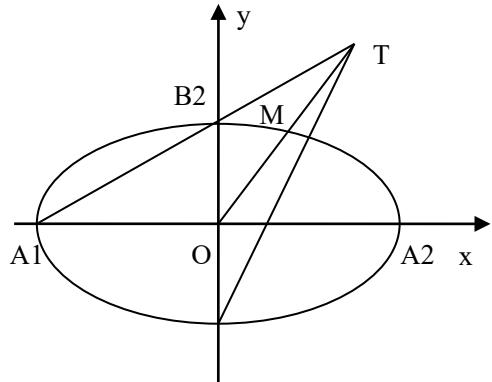
所以 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

16. 【解析】证明: (1) 因为 E, F 分别是 A_1B, A_1C 的中

点, 所以 $EF \parallel BC$, 又 $EF \not\subset \text{面 } ABC$,

$BC \subset \text{面 } ABC$, 所以 $EF \parallel \text{平面 } ABC$;

(2) 因为直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 所以



$BB_1 \perp \text{面}A_1B_1C_1$, $BB_1 \perp A_1D$, 又 $A_1D \perp B_1C$, 所以 $A_1D \perp \text{面}BB_1C_1C$, 又 $A_1D \subset \text{面}A_1FD$, 所以 $\text{平面}A_1FD \perp \text{平面}BB_1C_1C$ 。

17. (1) 设公差为 d , 则 $a_2^2 - a_5^2 = a_4^2 - a_3^2$, 由性质得 $-3d(a_4 + a_3) = d(a_4 + a_3)$, 因为 $d \neq 0$

, 所【解析】以 $a_4 + a_3 = 0$, 即 $2a_1 + 5d = 0$, 又由 $S_7 = 7$ 得 $7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = 7$, 解得 $a_1 = -5$,

$d = 2$ 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 7$, 前 n 项和 $S_n = n^2 - 6n$ 。

$$(2) \quad \frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = \frac{(2m-7)(2m-5)}{(2m-3)}, \text{ 令 } 2m-3=t, \quad \frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = \frac{(t-4)(t-2)}{t} = t + \frac{8}{t} - 6, \text{ w}$$

.w.w.k.s.5.u.c.o.m .

因为 t 是奇数, 所以 t 可取的值为 ± 1 , 当 $t=1$, $m=2$ 时, $t + \frac{8}{t} - 6 = 3$, $2 \times 5 - 7 = 3$, 是数列

$\{a_n\}$ 中的项; $t=-1$, $m=1$ 时, $t + \frac{8}{t} - 6 = -15$, 数列 $\{a_n\}$ 中的最小项是 -5 , 不符合。

所以满足条件的正整数 $m=2$ 。

$$18. \text{【解析】(1)} \quad y=0 \text{ 或 } y=-\frac{7}{24}(x-4),$$

(2) P在以C1C2的中垂线上, 且与C1、C2等腰直角三角形, 利用几何关系计算可得点P坐标为 $(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$ 或

$$(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$19. \text{【解析】(1)} \quad h_{\oplus} = \sqrt{\frac{m_A}{m_A + 12} \cdot \frac{m_B}{m_B + 5}}, h_{\ominus} = \sqrt{\frac{m_A}{m_A + 3} \cdot \frac{m_B}{m_B + 20}}, (m_A \in [3, 12], m_B \in [5, 20])$$

当 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ 时,

$$h_{\text{甲}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{5}m_B}{\frac{3}{5}m_B + 12} \cdot \frac{m_B}{m_B + 5}} = \sqrt{\frac{m_B^2}{(m_B + 20)(m_B + 5)}}, \quad h_{\text{乙}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{5}m_B}{\frac{3}{5}m_B + 3} \cdot \frac{m_B}{m_B + 20}} = \sqrt{\frac{m_B^2}{(m_B + 5)(m_B + 20)}},$$

显然 $h_{\text{甲}} = h_{\text{乙}}$

$$(2) \text{ 当 } m_A = \frac{3}{5}m_B \text{ 时, } h_{\text{甲}} = \sqrt{\frac{m_B^2}{(m_B + 20)(m_B + 5)}} = \sqrt{\frac{1}{(1 + \frac{20}{m_B})(1 + \frac{5}{m_B})}} = \sqrt{\frac{1}{100(\frac{1}{m_B})^2 + 25\frac{1}{m_B} + 1}},$$

由 $m_B \in [5, 20]$ 得 $\frac{1}{m_B} \in [\frac{1}{20}, \frac{1}{5}]$, 故当 $\frac{1}{m_B} = \frac{1}{20}$ 即 $m_B = 20, m_A = 12$ 时, 甲乙两人同时取到最大的综

合满意度为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

20. 【解析】 (1) 若 $f(0) \geq 1$, 则 $-a | a | \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow a \leq -1$

$$(2) \text{ 当 } x \geq a \text{ 时, } f(x) = 3x^2 - 2ax + a^2, \quad f(x)_{\min} = \begin{cases} f(a), a \geq 0 \\ f(\frac{a}{3}), a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2a^2, a \geq 0 \\ \frac{2a^2}{3}, a < 0 \end{cases}$$

$$\text{当 } x \leq a \text{ 时, } f(x) = x^2 + 2ax - a^2, \quad f(x)_{\min} = \begin{cases} f(-a), a \geq 0 \\ f(a), a < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2a^2, a \geq 0 \\ 2a^2, a < 0 \end{cases}$$

$$f(x)_{\min} = \begin{cases} -2a^2, a \geq 0 \\ \frac{2a^2}{3}, a < 0 \end{cases}$$

综上

$$(3) x \in (a, +\infty) \text{ 时, } h(x) \geq 1 \text{ 得 } 3x^2 - 2ax + a^2 - 1 \geq 0, \quad \Delta = 4a^2 - 12(a^2 - 1) = 12 - 8a^2$$

$$\text{当 } a \leq -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 或 } a \geq \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 时, } \Delta \leq 0, x \in (a, +\infty);$$

$$\text{当 } -\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 时, } \Delta > 0, \text{ 得 } \begin{cases} (x - \frac{a - \sqrt{3 - 2a^2}}{3})(x - \frac{a + \sqrt{3 - 2a^2}}{3}) \geq 0 \\ x > a \end{cases}$$

$$1) \quad a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ 时, } x \in (a, +\infty)$$

$$2) \quad a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ 时, } x \in \left[\frac{a + \sqrt{3 - 2a^2}}{3}, +\infty\right)$$

$$3) \quad a \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ 时, } x \in \left(a, \frac{a - \sqrt{3 - 2a^2}}{3}\right] \cup \left[\frac{a + \sqrt{3 - 2a^2}}{3}, +\infty\right)$$