

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（陕西卷）

理科数学

【试卷总评】2013 年高考理科数学陕西卷整体遵循考纲，体现新课标改革精神。试卷内容覆盖面广，涵盖了高中数学的主要内容，就考查知识而言，主干知识地位突出，重点内容仍重点考查。6 个主观题类型稳定，题序依次回归为：三角函数、数列、立体几何、概率统计、解析几何、函数与导数。

试题呈现出如下特点：

1. 比照 2012 年高考试卷，2013 年的高考真题体现出来的特色是：试题情景设计生活味浓厚，诸如：问卷调查、信号覆盖、投票选举等社会热点话题；试题背景设计数学味深刻，如高斯函数、柯西不等式、对数平均值不等式、以及高等数学里的中值定理影子；试题选材设计紧扣高中数学教材核心内容，如等比、等差数列公式的推导，椭圆第二定义。试题呈现设计简单、基础、基本，力求凸现核心内容。如压卷题里的指数函数。
2. 难度控制中等偏易，许多题目都是常见的、熟悉的。如理科第 1、2、6、7、9、11、12、13、14 题等。
3. 适度创新，增加亮点。试题的灵活性有所增加，新题型、改编题增多，如理科第 2 小题在算法中首次出现了 if-then 的条件语句；第 4、8、10 题给人的感觉也很清新灵活；选修题的命题角度有所转变。

各个知识块所占的分数如下：

函数	不等式	三角函数	数列	立体几何	解析几何	概率统计	算法、平面向量、复数、推理与证明	选修
24 分	15 分	17 分	12 分	17 分	18 分	22 分	20 分	5 分
(8,10,21)	(1,9,13)	(7,16)	(17)	(12,18)	(11,20)	(4,5,19)	(2,3,6,14)	(15)

整个试卷在明确考查“三基”（基础知识、基本技能、基本方法），“五能力”（思维能力、运算能力、空间想象能力、实践能力、创新能力）的基础上，更加突出中学数学主要知识的考查，更加突出数学思想方法的考查，更加突出数学与现实生活的联系。

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题.
2. 考生领到试卷后, 须按规定在试卷上填写姓名、准考证号, 并在答题卡上填涂对应的试卷类型信息.
3. 所有解答必须填写在答题卡上指定区域内. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分(共 50 分)

本解析为学科网名师解析团队原创, 授权学科网独家使用, 如有盗用, 依法追责!

一、选择题: 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求(本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分)

1. 设全集为 R , 函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 M , 则 $C_R M$ 为 ()

- (A) $[-1, 1]$ (B) $(-1, 1)$
(C) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【答案】: D

【解析】: $f(x)$ 的定义域为 $M = [-1, 1]$, 故 $C_R M = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, 选 D. 要注意避免出现 $x \leq \pm 1$ 及求补集时区间端点的取舍错误.

【学科网考点定位】本题考查函数的定义域、一元二次不等式的解法、集合运算等知识. 属于容易题.

2. 根据下列算法语句, 当输入 x 为 60 时, 输出 y 的值为 ()

- (A) 25
(B) 30
(C) 31
(D) 61

```
输入 x
If x ≤ 50 Then
    y = 0.5 * x
Else
    y = 25 + 0.6 * (x - 50)
End If
输出 y
```

【答案】: C

【解析】: $\because x = 60, \therefore y = 25 + 0.6 \times (60 - 50) = 31$, 故选择 C. 解答要注意条件的运用和判断.

【学科网考点定位】本题考查算法程序, 重点突出对条件语句的考查. 是容易题.

3. 设 a, b 为向量, 则 “ $|a \cdot b| = |a| |b|$ ” 是 “ $a \parallel b$ ” 的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

【答案】: C

【解析】: \vec{a}, \vec{b} 为向量, $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ 向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 0° 或 180° 则 “ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ” 的充分必要条件. 此类问题解答要注意掌握好命题条件和向量共线的基本知识.

【学科网考点定位】本题考查向量的数量积、向量夹角、向量模长和充要条件等知识. 属于容易题.

4. 某单位有 840 名职工, 现采用系统抽样方法, 抽取 42 人做问卷调查, 将 840 人按 1, 2, ..., 840 随机编号, 则抽取的 42 人中, 编号落入区间[481, 720]的人数为 ()

(A) 11

(B) 12

(C) 13

(D) 14

【答案】: B

【解析】: 840 人中按系统抽样抽取 42 人, 即每 20 人中抽取 1 人. 由题设可知区间[481, 720]长度为 240, 落在区间内的人数为 12 人. 此类问题主要掌握系统抽样方法就可解决.

【学科网考点定位】考查抽样方法中的系统抽样, 系统抽样也叫等距抽样. 属于容易题

5. 如图, 在矩形区域 ABCD 的 A, C 两点处各有一个通信基站, 假设其信号覆盖范围分别是扇形区域 ADE 和扇形区域 CBF(该矩形区域内无其他信号来源, 基站工作正常). 若在该矩形区域内随机地选一地点, 则该地点无信号的概率是 ()

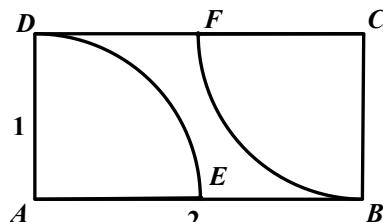
(A) $1 - \frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{2} - 1$

(C) $2 - \frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

【答案】: A



【解析】: 由题设可知矩形 ABCD 面积为 2, 曲边形 DEBF 的面积为 $2 - \frac{\pi}{2}$ 故所求概率为

$$\frac{2 - \frac{\pi}{2}}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

求成该点有信号的概率.

【学科网考点定位】本题考查几何概型, 是几何概型中的面积比问题, 涉及矩形和扇形面积的计算. 属于中档题.

6. 设 z_1, z_2 是复数, 则下列命题中的假命题是 ()

- (A) 若 $|z_1 - z_2| = 0$, 则 $\overline{z_1} = \overline{z_2}$
- (B) 若 $z_1 = \overline{z_2}$, 则 $\overline{z_1} = z_2$
- (C) 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$
- (D) 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1^2 = z_2^2$

【答案】D

【解析】设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$. 若 $|z_1 - z_2| = 0$, 则 $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$, $a = c, b = d$,

所以 $\overline{z_1} = \overline{z_2}$, 故 A 项正确; 若 $z_1 = \overline{z_2}$, 则 $a = c, b = -d$, 所以 $\overline{z_1} = z_2$, 故 B 项正确; 若 $|z_1| = |z_2|$,

则 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, 所以 $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$, 故 C 项正确;

$z_1^2 = (a^2 - b^2) + 2abi, z_2^2 = (c^2 - d^2) + 2cdi$, 在 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ 的条件下, 不能保证

$a^2 - b^2 = c^2 - d^2, 2ab = 2cd$, 故 D 项错误. 本题求解的关键是将复数设成代数形式, 要求考生对复数的核心知识熟练运用.

【学科网考点定位】本题考查复数代数形式的减法、乘法运算及共轭复数、复数的模、复数相等等概念, 属于中档题.

7. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b \cos C + c \cos B = a \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为
()

- (A) 锐角三角形 (B) 直角三角形 (C) 钝角三角形 (D) 不确定

【答案】B

【解析】因为 $b \cos C + c \cos B = a \sin A$, 所以由正弦定理得 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin^2 A$,
所以 $\sin(B + C) = \sin^2 A$, 所以 $\sin A = \sin^2 A$, 所以 $\sin A = 1$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 此类问题关键在于掌握正弦定理和三角恒等变换, 准确运算是关键.

【学科网考点定位】本题考查正弦定理和三角恒等变换, 涉及正弦定理的变式、两角和的正弦公式、三角形内角和定理、诱导公式和特殊角的三角函数值等知识, 属于中档题.

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{x}\right)^4, & x < 0, \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$, 则当 $x > 0$ 时, $f[f(x)]$ 表达式的展开式中常数项为 ()
- (A) -20 (B) 20 (C) -15 (D) 15

【答案】A

【解析】 $f[f(x)] = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^6$, 所以 $T_4 = C_6^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 (-\sqrt{x})^3 = -20$. 准确运用二项式定理是解题关键.

【学科网考点定位】本题考查分段函数和二项式定理. 属于中档题.

9. 在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积不小于 $300m^2$ 的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x (单位 m)的取值范围是 ()

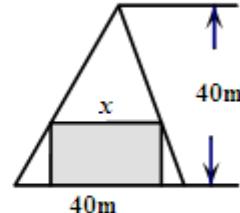
- (A) [15,20] (B) [12,25]
 (C) [10,30] (D) [20,30]

【答案】C

【解析】如图 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 设矩形的另一边长为 y , 则

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{40-y}{40}\right)^2, \text{ 所以 } y = 40-x, \text{ 又 } xy \geq 300, \text{ 所以}$$

$$x(40-x) \geq 300, \text{ 即 } x^2 - 40x + 300 \leq 0, \text{ 解得 } 10 \leq x \leq 30.$$



【学科网考点定位】本题考查平面几何知识和一元二次不等式的解法, 对考生的阅读理解能力、分析问题和解决问题的能力以及探究创新能力都有一定的要求. 属于难题.

10. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 则对任意实数 x, y , 有 ()

- (A) $[-x] = -[x]$ (B) $[2x] = 2[x]$
 (C) $[x+y] \leq [x]+[y]$ (D) $[x-y] \leq [x]-[y]$

【答案】D

【解析】取 $x = 2.5$, 则 $[-x] = [-2.5] = -3$, $-[x] = -[2.5] = -2$, 所以 A 项错误;

$[2x] = [5] = 5$, $2[x] = 2[2.5] = 4$, 所以 B 项错误; 再取 $y = 2.8$, 则

$[x+y] = [5.3] = 5$, $[x]+[y] = [2.5]+[2.8] = 2+2 = 4$, 所以 C 项错误.

【学科网考点定位】本题考查取整函数(即高斯函数), 分段函数思想. 属于难题.

第二部分(共 100 分)

本解析为学科网名师解析团队原创, 授权学科网独家使用, 如有盗用, 依法追责!

二、填空题：把答案填写在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 $\frac{5}{4}$ ，则 m 等于 _____.

【答案】9

【解析】由 $a^2 = 16$, $b^2 = m$ 得 $c^2 = 16 + m$ ，则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{16+m}}{4} = \frac{5}{4}$ ， $\therefore m = 9$. 本题解题的关键在于利用双曲线标准方程中 $c^2 = a^2 + b^2$ 和离心率的求解公式 $e = \frac{c}{a}$.

【学科网考点定位】本题主要考查了双曲线的标准方程以及离心率，属于容易题.

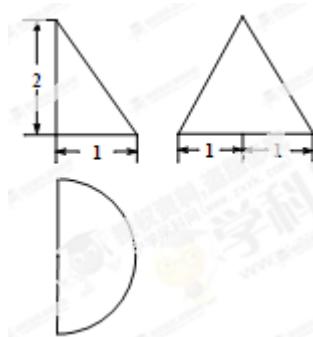
12. 某几何体的三视图如图所示，则其体积为 _____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】由三视图还原为实物图得半个圆锥，其体积

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} (\pi \cdot 1^2 \times 2) = \frac{\pi}{3}.$$

【学科网考点定位】本题主要考查了三视图还原为实物图的能力和圆锥的体积公式，属于容易题.



13. 若点 (x, y) 位于曲线 $y = |x - 1|$ 与 $y = 2$ 所围成的封闭区域，则 $2x - y$ 的最小值为 _____.

【答案】-4.

【解析】作出曲线 $y = |x - 1|$ 与 $y = 2$ 所表示的区域，令 $2x - y = z$ ，即 $y = 2x - z$ ，作直线

$$y = 2x,$$

在封闭区域内平行移动直线 $y = 2x$ ，当经过点 $(-1, 2)$ 时， z 取到最小值，此时最小值为 -4. 解题的关键在于画出曲线围成的封闭区域，并把求 $2x - y$ 的最小值转化为求 $y = 2x - z$ 所表示的直线截距的最大值，通过平移直线 $y = 2x$ 即可求解.

【学科网考点定位】本题主要考查了线性规划的最值问题，考查画图和转化能力，属于中等题.

14. 观察下列等式：

$$1^2 = 1$$

$$1^2 - 2^2 = -3$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 = 6$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 = -10$$

...

照此规律, 第 n 个等式可为_____.

【答案】 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ ($n \in N^*$),

【解析】观察上式等号左边的规律发现: 左边的项数依次加 1, 故第 n 个等式左边有 n 项, 每项所含的底数的绝对值也增加 1, 依次为 $1, 2, 3, \dots, n$, 指数都是 2, 符号成正负交替出现可以用 $(-1)^{n+1}$ 表示; 等式的右边数的绝对值是左边项的底数的和, 故等式的右边可以表示为 $(-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$, 所以第 n 个式子可为: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ ($n \in N^*$). 解题的关键在于:

1. 通过四个已知等式的比较发现隐藏在等式中的规律;
2. 符号成正负交替出现可以用 $(-1)^{n+1}$ 表示;
3. 表达的完整性, 不要遗漏了 $n \in N^*$.

【学科网考点定位】本题考查观察和归纳推理能力. 属于中等题.

15. (考生请注意: 请在下列三题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分)

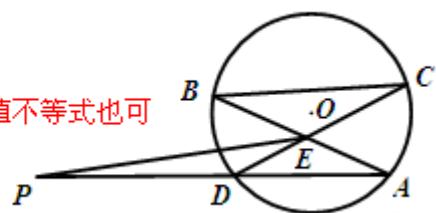
A. (不等式选做题) 已知 a, b, m, n 均为正数, 且 $a+b=1, mn=2$, 则 $(am+bn)(bm+an)$ 的最小值为_____.

【答案】2

【解析】由柯西不等式可得

$$(am+bn)(bm+an) \geq (\sqrt{am}\sqrt{an} + \sqrt{bm}\sqrt{bn})^2 = mn(a+b)^2 = 2$$

【学科网考点定位】本题考查代数式求最值问题, 既可以考虑用均值不等式也可以考虑用柯西不等式. 属于容易题.



B. (几何证明选做题) 如图, 弦 AB 与 CD 相交于 $\odot O$ 内一点 E ,
过 E 作 BC 的平行线与 AD 的延长线相交于点 P . 已知 $PD=2DA=2$,
则 $PE=$ _____.

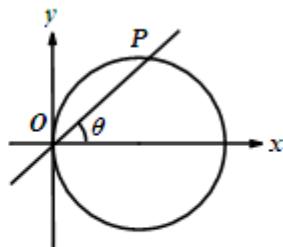
【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

易知 $\angle BCE = \angle PED = \angle BAP \therefore \triangle PDE \sim \triangle PEA$

$$\therefore \frac{PE}{PA} = \frac{PD}{PE} \quad \text{而 } PD = 2 DA = 2 \quad \therefore PA = 3$$

$$PE^2 = PA \cdot PD = 6 \quad \text{故 } PE = \sqrt{6}.$$



【学科网考点定位】本题考查平面几何证明，利用三角形相似即可求解，属于容易题。

C. (坐标系与参数方程选做题) 如图，以过原点的直线的倾斜角 θ 为参数，则圆 $x^2 + y^2 - x = 0$ 的参数方程为_____。

【答案】 $x = \cos^2 \theta, y = \sin \theta \cos \theta, 0 \leq \theta < \pi$.

【解析】 $x^2 + y^2 - x = 0, (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, 以 $(\frac{1}{2}, 0)$ 为圆心, $\frac{1}{2}$ 为半径, 且过原点的圆它的标准参数方程为 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha, y = \frac{1}{2} \sin \alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi$,, 由已知, 以过原点的直线倾斜角 θ 为参数, 则 $0 \leq \theta < \pi$,

所以 $0 \leq 2\theta < 2\pi$.

所以所求圆的参数方程为 $x = \cos^2 \theta, y = \sin \theta \cos \theta, 0 \leq \theta < \pi$.

【学科网考点定位】本题考查与圆的参数方程有关的问题，涉及圆的标准方程和参数方程等知识，属于容易题。

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程及演算步骤。（本大题共 6 小题，共 75 分）

16. (本小题满分 12 分)

已知向量 $\mathbf{a} = (\cos x, -\frac{1}{2}), \mathbf{b} = (\sqrt{3} \sin x, \cos 2x), x \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期。

(II) 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值。

【答案】 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

(I) $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 6 分

故当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)_{\max} = 1$ 10分

当 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ 即 $x=0$ 时, $f(x)_{\min} = -\frac{1}{2}$ 12分

【解析】本题主要考察的是向量的数量积运算和三角函数的周期，最值问题。正确运用公式

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, $x \in R$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$, $T = \left| \frac{2\pi}{\omega} \right|$ 以及函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 图像性质的熟练运用是解答关键. 本题属于高考的常考类型, 需要多加练习, 关注三角函数和定积分的结合也是热点之一.

【学科网考点定位】本题考查三角恒等变形、三角函数的性质等基础知识，简单题。

17. (本小题满分 12 分)

设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

(I) 推导 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式;

(II) 设 $q \neq 1$, 证明数列 $\{a_n + 1\}$ 不是等比数列.

【答案】：

(I) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 $S_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-1}$ (1)

将(1)式两边分别乘以 q 得

$$qS_n = a_1q + a_2q^2 + \dots + a_nq^n \quad \dots \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ 得 } (1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$\text{当 } q \neq 0 \text{ 时 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ 或 } S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

当 $q = 1$ 时, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, 所以 $S_n = na_1$

(II) 方法一:

$\because q \neq 1$, 假设数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列, 那么 $(a_2 + 1)^2 = (a_1 + 1) \cdot (a_3 + 1)$

即 $(a_1q+1)^2 = (a_1+1)(a_1q^2+1) \Rightarrow a_1(q-1)=0 \Rightarrow a_1=0$ 或 $q=1$, 均与题设矛盾, 故数列 $\{a_n+1\}$ 不可能为等比数列.

方法二: $\because q \neq 1$, 假设数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列, 那么 $(a_{k+1} + 1)^2 = (a_{k-1} + 1) \cdot (a_{k+1} + 1)$

即 $(a_1q^{k-1}+1)^2 = (a_1q^{k-2}+1) \cdot (a_1q^k+1) \Rightarrow a_1(q-1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ 或 $q = 1$, 均与题设矛盾, 故数列 $\{a_n+1\}$ 不可能为等比数列.

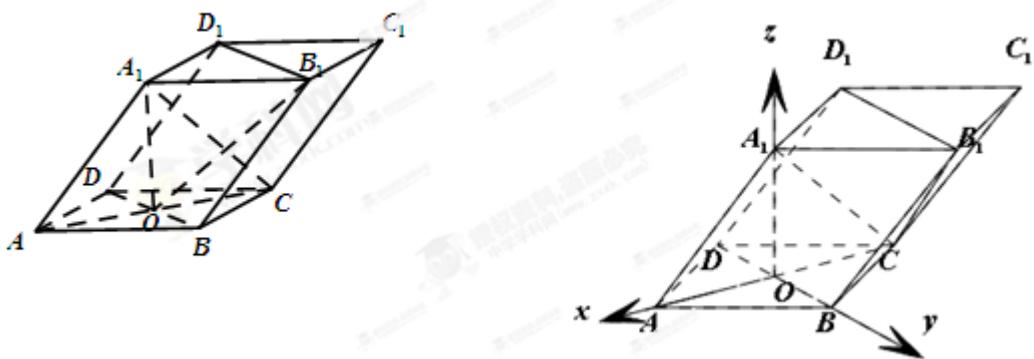
【解析】本题考查了等比数列前项和公式的推导，涉及参数 q 分类讨论及错位相减法，体现高考题型源于教材的基本理念.而在第二问中要求证明数列不是等比数列，既考查了对等比数列概念的理解，又涉及到了反证法的应用；知识有机结合，考查综合能力.问中对数列的证明可以采取特殊代替一般的方法，也可以通行通法的解题思想.判断一个数列是否是等比数列一定要关注首项的验证，负责容易错误.

【学科网考点定位】本题考查等比数列的前 n 项和公式推导和有关等比数列的证明. 突出对教材重要内容的考查, 引导回归教材, 重视教材. 属于容易题.

18. (本小题满分 12 分)

如图,四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, O 为底面中心, $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$,

$$AB = AA_1 = \sqrt{2}.$$



- (I) 证明: $A_1C \perp$ 平面 BB_1D_1D ;
 (II) 求平面 OCB_1 与平面 BB_1D_1D 的夹角 θ 的大小.

【答案】: 如图建立空间直角坐标系,

由 $AB = AA_1 = \sqrt{2}$ 可知 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $B_1(-1,1,1)$, $C(-1,0,0)$

$A_1(0,0,1)$, $D_1(-1,-1,1)$

$$(I) \overrightarrow{A_1C} = (-1, 0, -1), \overrightarrow{DB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BB_1} = (-1, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0, \text{即 } \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{BB_1}, \text{ 且 } DB \cap BB_1 = B$$

所以 $A_1C \perp$ 平面 BB_1D_1D

(II) 容易求得平面 OCB_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 1, -1)$, 平面 BB_1D_1D 的一个法向量为

$$\vec{m} = (1, 0, 1), \text{ 所求夹角余弦值为 } \cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{1}{2}. \text{ 所求夹角的大小为 } 60^\circ.$$

【解析】: 本题考查空间直线与平面的位置关系和二面角问题, 考查空间想象能力和推理论证能力、

对公式 $\cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{1}{2}$ 的熟练准确运用. 此类问题的易错点是未能合理的建立空间直角坐标

系, 找好线面的垂直关系. 空间向量的解决对法向量求解不准确, 二面角的锐角和钝角判断不准会导致结果错误.

【学科网考点定位】 本题考查空间直线与平面的位置关系和二面角问题, 考查空间想象能力和推理论证能力.

19. (本小题满分 12 分)

在一场娱乐晚会上, 有 5 位民间歌手(1 至 5 号)登台演唱, 由现场数百名观众投票选出最受欢迎歌手.

各位观众须彼此独立地在选票上选 3 名选手，其中观众甲是 1 号歌手的歌迷，他必选 1 号，不选 2 号，另在 3 至 5 号中随机选 2 名。观众乙和丙对 5 位歌手的演唱没有偏爱，因此在 1 至 5 号中随机选 3 名歌手。

(I) 求观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3 号歌手的概率；

(II) X 表示 3 号歌手得到观众甲、乙、丙的票数之和，求 X 的分布列和数学期望。

【答案】(I) 由于观众甲必选 1，不选 2，则观众甲选中 3 号歌手的概率为 $\frac{C_1^1 \cdot C_2^1}{C_3^2} = \frac{2}{3}$ ，观众乙

未选中 3 号歌手的概率为 $\frac{C_4^3}{C_5^3} = \frac{2}{5}$ ，甲乙选票彼此独立，故观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3

号歌手的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ 。

(II) X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3。由(I)知，观众甲选中 3 号歌手的概率为 $\frac{2}{3}$ ，观众乙选中 3 号歌手的概率为 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ ，则观众丙选中 3 号歌手的概率也为 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ ，则

$$P(X=0) = (1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{3}{5})^2 = \frac{4}{75}, P(X=1) = \frac{2}{3} \times (1 - \frac{3}{5})^2 + (1 - \frac{2}{3}) \times C_2^1 \times \frac{3}{5} \times (1 - \frac{3}{5}) = \frac{20}{75} = \frac{4}{15}.$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times C_2^1 \times \frac{3}{5} \times (1 - \frac{3}{5}) + (1 - \frac{2}{3}) \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{33}{75} = \frac{11}{25}, P(X=3) = \frac{2}{3} \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{18}{75} = \frac{6}{25}.$$

则 X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{6}{25}$

$$EX = 0 \times \frac{4}{75} + 1 \times \frac{4}{15} + 2 \times \frac{11}{25} + 3 \times \frac{6}{25} = \frac{28}{15}.$$

【解析】本题考查涉及排列组合、概率、随机变量分布列和期望问题，(I)问中考查了“观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3 号歌手”互斥事件同时发生的概率，也可以利用树形图解决。(II)问中要注意分布列性质运用，验证概率总合是否为 1。此类问题在高考中属于常考重点题型，必须熟练掌握。

【学科网考点定位】本题考查排列组合、概率、随机变量分布列和期望问题，属于中档题。

20. (本小题满分 13 分)

已知动圆过定点 A(4,0), 且在 y 轴上截得的弦 MN 的长为 8.

(I) 求动圆圆心的轨迹 C 的方程;

(II) 已知点 B(-1,0), 设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P, Q, 若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线, 证明直线 l 过定点.

【答案】: (I) 设动圆圆心 C 的坐标为 (x, y) 则 $(4-x)^2 + (0-y)^2 = 4^2 + x^2$, 整理得 $y^2 = 8x$. 所以, 所求动圆圆心的轨迹 C 的方程为 $y^2 = 8x$ ($x \neq 0$)

(II) 证明:

设直线 l 方程为 $y = kx + b$, 联立 $\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = kx + b \end{cases}$ 得 $k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 8x \Rightarrow k^2x^2 - (8 - 2kb)x + b^2 = 0$

(其中 $\Delta = -32kb + 64 > 0$)

设 $P(x_1, kx_1 + b), Q(x_2, kx_2 + b)$, 若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线, 则

$$k_{QB} + k_{PB} = \frac{kx_1 + b}{x_1 + 1} + \frac{kx_2 + b}{x_2 + 1} = \frac{(kx_1 + b)(x_2 + 1) + (kx_2 + b)(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{kx_1x_2 + (k + b)(x_1 + x_2) + 2b}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$
$$= \frac{8(k + b)}{k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = 0, \text{ 即 } k = -b \text{ 故直线 l 方程为 } y = k(x - 1), \text{ 直线 l 过定点 } (1, 0)$$

【解析】: 本题考查轨迹方程求法、直线方程、圆方程、直线与圆的位置关系及直线过定点问题. 第一问曲线轨迹方程的求解问题是高考的热点题型之一, 准确去除不满足条件的 $x \neq 0$ 点是关键. 第二问对角平分线的性质运用是关键, 对求定值问题的解决要控制好运算量, 同时注意好判别式

$\Delta = -32kb + 64 > 0$ 的条件, 以防多出结果. 圆锥曲线问题经常与向量、三角函数结合, 在训练中要注意. 本题无论是求圆心的轨迹方程, 还是求证直线过定点, 计算量都不太大, 对思维的要求挺高; 设计问题背景, 彰显应用魅力.

【学科网考点定位】 本题考查轨迹方程求法、直线方程、圆方程、直线与圆的位置关系及直线过定点问题, 属于中档题.

21. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

(I) 若直线 $y=kx+1$ 与 $f(x)$ 的反函数的图像相切, 求实数 k 的值;

(II) 设 $x>0$, 讨论曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2 (m>0)$ 公共点的个数.

(III) 设 $a < b$, 比较 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 与 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小, 并说明理由.

【答案】: 函数 $f(x)=e^x, x \in R \Rightarrow f'(x)=e^x$

(I). 函数

$\frac{1}{x_0}=k \Rightarrow kx_0=1$ $f(x)=e^x, x \in R$ 的反函数为 $y=\ln x, x>0, y'=\frac{1}{x}$,

设切点坐标为 (x_0, kx_0+1) 则 $\frac{1}{x_0}=k \Rightarrow kx_0=1$,

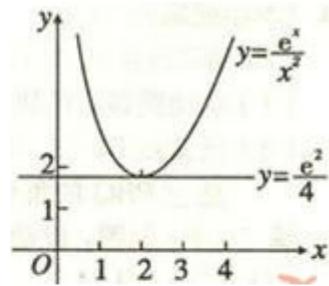
$$\ln x_0=2 \Rightarrow x_0=e^2 \Rightarrow k=\frac{1}{e^2}.$$

(II) 令 $f(x)=mx^2$ 即 $e^x=mx^2 (x>0) \Rightarrow m=\frac{e^x}{x^2} (x>0)$, 设 $g(x)=\frac{e^x}{x^2} (x>0)$

有 $g'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3} (x>0)$, 函数 $g(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递减, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增.

$g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{4}$, 所以 (1) $m > \frac{e^2}{4}$ 时, 两曲线有 2 个交点;

(2) $m=\frac{e^2}{4}$ 时, 两曲线有 1 个交点; (3) $m < \frac{e^2}{4}$ 时, 两曲线没有交点.



$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad & \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{e^a + e^b}{2} - \frac{e^a - e^b}{b-a} = e^a \left(\frac{1+e^{b-a}}{2} - \frac{1-e^{b-a}}{b-a} \right) \\
 & = e^a \frac{(b-a)(1+e^{b-a}) - 2(1-e^{b-a})}{2(b-a)} \\
 & \because a < b, \therefore b-a = t > 0 \\
 & \therefore \text{上式} = e^a \frac{t(1+e^t) - 2(1-e^t)}{2t} = \frac{e^a}{2t} \bullet [(t+2)e^t + t - 2] \\
 & \text{令 } g(t) = (t+2)e^t + t - 2, \text{ 则 } g'(t) = (t+3)e^t + 1 > 0 \text{ 恒成立} \\
 & \therefore g(t) > g(0) = 0 \quad \text{而 } \frac{e^a}{2t} > 0 \quad \therefore \frac{e^a}{2t} \bullet [(t+2)e^t + t - 2] > 0 \\
 & \text{故 } \frac{f(a)+f(b)}{2} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.
 \end{aligned}$$

【解析】本题考查函数、导数、不等式、参数等问题，属于难题。第二问运用数形结合思想解决问题，能够比较清晰的分类，做到不吃不漏。最后一问，考查函数的凹凸性，富有明显的几何意义，为考生探索结论提供了明确的方向，对代数手段的解决起到导航作用。

【学科网考点定位】本题考查考查函数的凹凸性、导数、不等式、参数等问题，属于难题。