2018年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学Ⅰ

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1．本试卷共4页，均为非选择题(第1题~第20题，共20题)。本卷满分为160分，考试时间为120分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一片交回。

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。

3．请认真核对监考员从答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。

4．作答试题，必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

参考公式：

锥体的体积$V=\frac{1}{3}Sh$，其中S是锥体的底面积，h是锥体的高．

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

1．已知集合$A=\{0,1,2,8\}$，$B=\{-1,1,6,8\}$，那么$A\cap B=$__▲__．

2．若复数z满足$\mathrm{i}\cdot z=1+2\mathrm{i}$，其中i是虚数单位，则$z$的实部为__▲__．

3．已知5位裁判给某运动员打出的分数的茎叶图如图所示，那么这5位裁判打出的分数的平均数为__▲__．

8	99
9	011

（第3题）

4．一个算法的伪代码如图所示，执行此算法，最后输出的S的值为__▲__．

```
I←1
S←1
While  I<6
  I←I+2
  S←2S
End  While
Print  S
```

（第 4 题）

5．函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为__▲__.

6．某兴趣小组有2名男生和3名女生，现从中任选2名学生去参加活动，则恰好选中2名女生的概率为

__▲__.

7．已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则 φ 的值是__▲__.

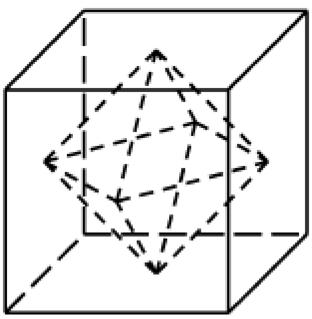
8．在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则其离心率的值是__▲__.

9．函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)(x\in\mathbf{R})$，且在区间 $(-2,2]$ 上，$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2},0<x\le 2,\\ |x+\frac{1}{2}|,-2<x\le 0,\end{cases}$

则 $f(f(15))$ 的值为

__▲__.

10．如图所示，正方体的棱长为2，以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为__▲__.



（第 10 题）

11．若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为_▲_.

12．在平面直角坐标系 xOy 中，A为直线 $l:y=2x$ 上在第一象限内的点，$B(5,0)$，以AB为直径的圆C与直线l交于另一点D．若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则点$A$的横坐标为_▲_.

13．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为_▲_.

14．已知集合 $A=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x=2^n,n\in\mathbf{N}^*\}$．将 $A\cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前n项和，则使得 $S_n>12a_{n+1}$ 成立的n的最小值为_▲_.

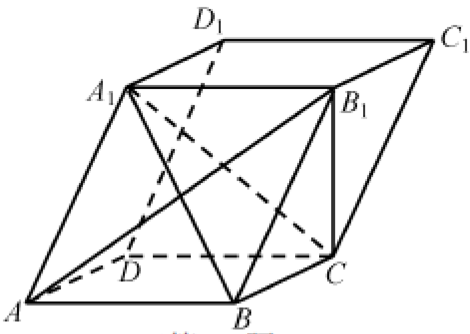
二、解答题：本大题共6小题，共计90分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分14分）

在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB,AB_1\perp B_1C_1$．

求证：（1）AB// 平面A_1B_1C；

（2）平面$ABB_1A_1\perp$平面A_1BC．



（第 15 题）

16．（本小题满分14分）

已知 α,β 为锐角，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

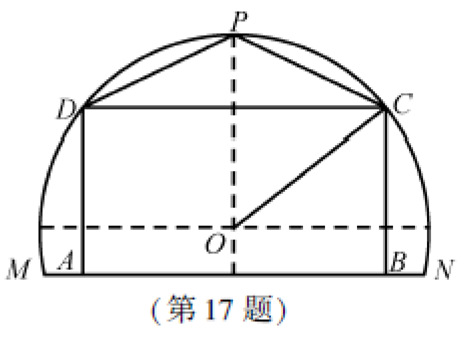
（1）求 $\cos 2\alpha$ 的值；

（2）求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值．

17．（本小题满分14分）

某农场有一块农田，如图所示，它的边界由圆O的一段圆弧 MPN（P为此圆弧的中点）和线段MN构成．已知圆O的半径为40米，点P到MN的距离为50米．现规划在此农田上修建两个温室大棚，大棚Ⅰ内的地块形状为矩形$ABCD$，大棚Ⅱ内的地块形状为 $\triangle CDP$，要求 A,B 均在线段 MN 上，C,D 均在圆弧上．设OC与MN所成的角为 θ．

（1）用 θ 分别表示矩形 $ABCD$ 和 $\triangle CDP$ 的面积，并确定 $\sin\theta$



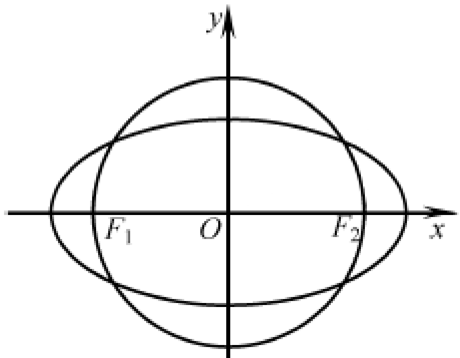
（第 17 题）

的取值范围；

（2）若大棚Ⅰ内种植甲种蔬菜，大棚Ⅱ内种植乙种蔬菜，且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为$4:3$．求当θ为何值时，能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大．

18．（本小题满分16分）

如图，在平面直角坐标系xOy中，椭圆C过点$(\sqrt{3},\frac{1}{2})$，焦点$F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$，圆$O$的直径为$F_1F_2$．



（第18题）

（1）求椭圆C及圆O的方程；

（2）设直线l与圆O相切于第一象限内的点P.

①若直线l与椭圆C有且只有一个公共点，求点P的坐标；

②直线l与椭圆C交于A,B两点．若$\triangle OAB$的面积为$\frac{2\sqrt{6}}{7}$，求直线l的方程.

19．（本小题满分16分）

记$f'(x),g'(x)$分别为函数$f(x),g(x)$的导函数．若存在$x_0\in\mathbf{R}$，满足$f(x_0)=g(x_0)$且$f'(x_0)=g'(x_0)$，则称x_0为函数$f(x)$与$g(x)$的一个“S点”．

（1）证明：函数$f(x)=x$与$g(x)=x^2+2x-2$不存在“S点”；

（2）若函数$f(x)=ax^2-1$与$g(x)=\ln x$存在“S点”，求实数a的值；

（3）已知函数$f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\frac{b\mathrm{e}^x}{x}$．对任意$a>0$，判断是否存在$b>0$，使函数$f(x)$与$g(x)$在区间$(0,+\infty)$内存在“$S$点”，并说明理由.

20．（本小题满分16分）

设$\{a_n\}$是首项为a_1，公差为d的等差数列，$\{b_n\}$是首项为b_1，公比为q的等比数列.

（1）设$a_1=0,b_1=1,q=2$，若$|a_n-b_n|\le b_1$对$n=1,2,3,4$均成立，求d的取值范围；

（2）若$a_1=b_1>0,m\in\mathbf{N}^*,q\in(1,\sqrt[m]{2}]$，证明：存在$d\in\mathbf{R}$，使得$|a_n-b_n|\le b_1$对$n=2,3,\cdots,m+1$均成立，并求$d$的取值范围（用$b_1,m,q$表示）．

数学Ⅰ试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法．每小题5分，共计70分．

1．{1，8}　　2．2　　3．90　　4．8

5．[2，+∞）　　6．$\frac{3}{10}$　　7．$-\frac{\pi}{6}$　　8．2

9．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　10．$\frac{4}{3}$　　11．−3　　12．3

13．9　　14．27

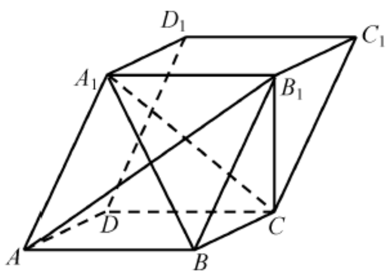
二、解答题

15．本小题主要考查直线与直线、直线与平面以及平面与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力．满分14分．

证明：（1）在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AB /\!/ A_1B_1$.

因为$AB\not\subset$平面A_1B_1C，$A_1B_1\subset$平面A_1B_1C，

所以$AB /\!/$平面A_1B_1C.



（第 15 题）

（2）在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，四边形ABB_1A_1为平行四边形.

又因为$AA_1=AB$，所以四边形ABB_1A_1为菱形，

因此$AB_1\perp A_1B$.

又因为$AB_1\perp B_1C_1$，$BC /\!/ B_1C_1$，

所以$AB_1\perp BC$.

又因为$A_1B\cap BC=B$，$A_1B\subset$平面A_1BC，$BC\subset$平面A_1BC，

所以$AB_1\perp$平面A_1BC.

因为$AB_1\subset$平面ABB_1A_1，

所以平面$ABB_1A_1\perp$平面A_1BC.

16．本小题主要考查同角三角函数关系、两角和（差）及二倍角的三角函数，考查运算求解能力．满分14分．

解：（1）因为$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，所以$\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$.

因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$，

因此，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

（2）因为α,β为锐角，所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

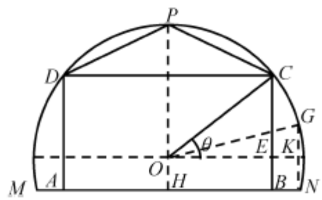
又因为$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

因此$\tan(\alpha+\beta)=-2$.

因为$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$，所以$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{24}{7}$，

因此，$\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\tan(\alpha+\beta)}=-\dfrac{2}{11}$．

17．本小题主要考查三角函数的应用、用导数求最值等基础知识，考查直观想象和数学建模及运用数学知识分析和解决实际问题的能力．满分14分．



（第 17 题）

解：（1）连结PO并延长交MN于H，则$PH\perp MN$，所以OH=10．

过O作$OE\perp BC$于E，则$OE\parallel MN$，所以$\angle COE=\vartheta$，

故OE=40cosϑ，EC=40sinϑ，

则矩形$ABCD$的面积为2×40cosϑ（40sinϑ+10）=800（4sinϑcosϑ+cosϑ），

$\triangle CDP$的面积为$\dfrac{1}{2}$×2×40cosϑ（40–40sinϑ）=1600（cosϑ–sinϑcosϑ）．

过N作$GN\perp MN$，分别交圆弧和OE的延长线于G和K，则$GK=KN$=10．

令$\angle GOK=\vartheta_0$，则sinϑ_0=$\dfrac{1}{4}$，$\vartheta_0\in$（0，$\dfrac{\pi}{6}$）．

当$\vartheta\in[\vartheta_0$，$\dfrac{\pi}{2}$）时，才能作出满足条件的矩形$ABCD$，

所以sinϑ的取值范围是[$\dfrac{1}{4}$，1）．

答：矩形$ABCD$的面积为800（4sinϑcosϑ+cosϑ）平方米，$\triangle CDP$的面积为1600（cosϑ–sinϑcosϑ），sinϑ的取值范围是[$\dfrac{1}{4}$，1）．

（2）因为甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为4∶3，

设甲的单位面积的年产值为4k，乙的单位面积的年产值为3k（k>0），

则年总产值为4k×800（4sinϑcosϑ+cosϑ）+3k×1600（cosϑ–sinϑcosϑ）

=8000k（sinϑcosϑ+cosϑ），$\vartheta\in[\vartheta_0$，$\dfrac{\pi}{2}$）．

设f（ϑ）= sinϑcosϑ+cosϑ，$\vartheta\in[\vartheta_0$，$\dfrac{\pi}{2}$），

则$f'(\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta=-(2\sin^2\theta+\sin\theta-1)=-(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)$．

令$f'(\theta)$=0，得ϑ=$\dfrac{\pi}{6}$，

当$\vartheta\in$（ϑ_0，$\dfrac{\pi}{6}$）时，$f'(\theta)$>0，所以f（ϑ）为增函数；

当$\vartheta\in$（$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$）时，$f'(\theta)$<0，所以f（ϑ）为减函数，

因此，当ϑ=$\dfrac{\pi}{6}$时，f（ϑ）取到最大值．

答：当$\vartheta=\dfrac{\pi}{6}$时，能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大．

18．本小题主要考查直线方程、圆的方程、圆的几何性质、椭圆方程、椭圆的几何性质、直线与圆及椭圆的位置关系等知识，考查分析问题能力和运算求解能力．满分16分．

解：（1）因为椭圆C的焦点为$F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$，

可设椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．又点$(\sqrt{3},\dfrac{1}{2})$在椭圆$C$上，

所以$\begin{cases}\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=3,\end{cases}$，解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$

因此，椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．

因为圆O的直径为F_1F_2，所以其方程为$x^2+y^2=3$．

（2）①设直线l与圆O相切于$P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则${x_0}^2+{y_0}^2=3$，

所以直线l的方程为$y=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$，即$y=-\dfrac{x_0}{y_0}x+\dfrac{3}{y_0}$．

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=-\dfrac{x_0}{y_0}x+\dfrac{3}{y_0},\end{cases}$，消去$y$，得

$(4{x_0}^2+{y_0}^2)x^2-24x_0x+36-4{y_0}^2=0$．（*）

因为直线l与椭圆C有且只有一个公共点，

所以$\Delta=(-24x_0)^2-4(4{x_0}^2+{y_0}^2)(36-4{y_0}^2)=48{y_0}^2({x_0}^2-2)=0$．

因为$x_0,y_0>0$，所以$x_0=\sqrt{2},y_0=1$．

因此，点P的坐标为$(\sqrt{2},1)$．

②因为三角形OAB的面积为$\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，所以$\dfrac{1}{2}AB\cdot OP=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，从而$AB=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$．

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由（*）得$x_{1,2}=\dfrac{24x_0\pm\sqrt{48{y_0}^2({x_0}^2-2)}}{2(4{x_0}^2+{y_0}^2)}$，

所以$AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

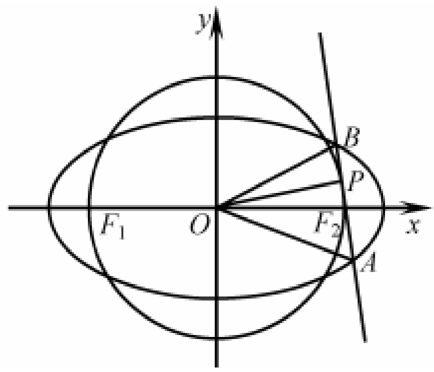
$=(1+\frac{x_0^{\ 2}}{y_0^{\ 2}})\cdot\frac{48y_0^{\ 2}(x_0^{\ 2}-2)}{(4x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2})^2}$.

因为 $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=3$，

所以 $AB^2=\frac{16(x_0^{\ 2}-2)}{(x_0^{\ 2}+1)^2}=\frac{32}{49}$，即 $2x_0^{\ 4}-45x_0^{\ 2}+100=0$，

解得 $x_0^{\ 2}=\frac{5}{2}$（$x_0^{\ 2}=20$ 舍去），则 $y_0^{\ 2}=\frac{1}{2}$，因此P的坐标为$(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

综上，直线l的方程为 $y=-\sqrt{5}x+3\sqrt{2}$.



19．本小题主要考查利用导数研究初等函数的性质，考查综合运用数学思想方法分析与解决问题以及逻辑推理能力．满分16分．

解：（1）函数$f(x)=x$，$g(x)=x^2+2x-2$，则$f'(x)=1$，$g'(x)=2x+2$.

由$f(x)=g(x)$且$f'(x)=g'(x)$，得

$\begin{cases}x=x^2+2x-2\\1=2x+2\end{cases}$，此方程组无解，

因此，$f(x)$与$g(x)$不存在“S”点.

（2）函数 $f(x)=ax^2-1$，$g(x)=\ln x$，

则 $f'(x)=2ax$，$g'(x)=\frac{1}{x}$.

设x_0为$f(x)$与$g(x)$的“S”点，由$f(x_0)=g(x_0)$且$f'(x_0)=g'(x_0)$，得

$\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0\\2ax_0=\frac{1}{x_0}\end{cases}$，即$\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0\\2ax_0^2=1\end{cases}$，（*）

得 $\ln x_0=-\frac{1}{2}$，即 $x_0=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，则 $a=\frac{1}{2(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})^2}=\frac{\mathrm{e}}{2}$.

当$a=\frac{e}{2}$时，$x_0=e^{-\frac{1}{2}}$满足方程组（*），即x_0为f（x）与g（x）的“S”点.

因此，a的值为$\frac{e}{2}$.

（3）对任意$a>0$，设$h(x)=x^3-3x^2-ax+a$.

因为$h(0)=a>0$，$h(1)=1-3-a+a=-2<0$，且h（x）的图象是不间断的，

所以存在$x_0\in$（0，1），使得$h(x_0)=0$，令$b=\frac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}$，则$b>0$.

函数$f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\frac{be^x}{x}$，

则$f'(x)=-2x$，$g'(x)=\frac{be^x(x-1)}{x^2}$.

由f（x）$=g$（x）且f'（x）$=g'$（x），得

$$\begin{cases}-x^2+a=\frac{be^x}{x}\\-2x=\frac{be^x(x-1)}{x^2}\end{cases}，即\begin{cases}-x^2+a=\frac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}\cdot\frac{e^x}{x}\\-2x=\frac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}\cdot\frac{e^x(x-1)}{x^2}\end{cases}\quad(**)$$

此时，x_0满足方程组（**），即x_0是函数f（x）与g（x）在区间（0，1）内的一个“S点”.

因此，对任意$a>0$，存在$b>0$，使函数f（x）与g（x）在区间（0，+∞）内存在“S点”.

20．本小题主要考查等差和等比数列的定义、通项公式、性质等基础知识，考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力．满分16分．

解：（1）由条件知：$a_n=(n-1)d,b_n=2^{n-1}$.

因为$|a_n-b_n|\le b_1$对n=1，2，3，4均成立，

即$|(n-1)d-2^{n-1}|\le 1$对n=1，2，3，4均成立，

即1≤1，1≤d≤3，3≤2d≤5，7≤3d≤9，得$\frac{7}{3}\le d\le\frac{5}{2}$.

因此，d的取值范围为$[\frac{7}{3},\frac{5}{2}]$.

（2）由条件知：$a_n=b_1+(n-1)d,b_n=b_1q^{n-1}$.

若存在d，使得$|a_n-b_n|\le b_1$（n=2，3，…，m+1）成立，

即 $|b_1+(n-1)d-b_1q^{n-1}|\le b_1(n=2,3,\cdots,m+1)$，

即当 $n=2,3,\cdots,m+1$ 时，d满足 $\dfrac{q^{n-1}-2}{n-1}b_1\le d\le\dfrac{q^{n-1}}{n-1}b_1$.

因为 $q\in(1,\sqrt[m]{2}]$，则 $1<q^{n-1}\le q^m\le 2$，

从而 $\dfrac{q^{n-1}-2}{n-1}b_1\le 0$，$\dfrac{q^{n-1}}{n-1}b_1>0$，对 $n=2,3,\cdots,m+1$ 均成立.

因此，取d=0时，$|a_n-b_n|\le b_1$ 对 $n=2,3,\cdots,m+1$ 均成立.

下面讨论数列 $\{\dfrac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$ 的最大值和数列 $\{\dfrac{q^{n-1}}{n-1}\}$ 的最小值（$n=2,3,\cdots,m+1$）.

①当 $2\le n\le m$ 时，$\dfrac{q^n-2}{n}-\dfrac{q^{n-1}-2}{n-1}=\dfrac{nq^n-q^n-nq^{n-1}+2}{n(n-1)}=\dfrac{n(q^n-q^{n-1})-q^n+2}{n(n-1)}$，

当 $1<q\le 2^{\frac{1}{m}}$ 时，有 $q^n\le q^m\le 2$，从而 $n(q^n-q^{n-1})-q^n+2>0$.

因此，当 $2\le n\le m+1$ 时，数列 $\{\dfrac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$ 单调递增，

故数列 $\{\dfrac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$ 的最大值为 $\dfrac{q^m-2}{m}$.

②设 $f(x)=2^x(1-x)$，当x>0时，$f'(x)=(\ln 2-1-x\ln 2)2^x<0$，

所以 $f(x)$ 单调递减，从而 $f(x)$<f（0）=1.

当 $2\le n\le m$ 时，$\dfrac{\frac{q^n}{n}}{\frac{q^{n-1}}{n-1}}=\dfrac{q(n-1)}{n}\le 2^{\frac{1}{n}}(1-\dfrac{1}{n})=f(\dfrac{1}{n})<1$，

因此，当 $2\le n\le m+1$ 时，数列 $\{\dfrac{q^{n-1}}{n-1}\}$ 单调递减，

故数列 $\{\dfrac{q^{n-1}}{n-1}\}$ 的最小值为 $\dfrac{q^m}{m}$.

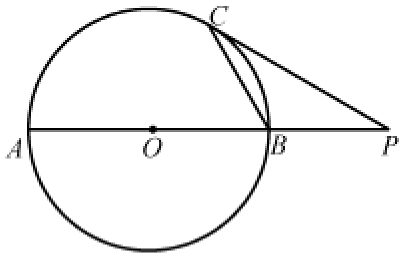
因此，d的取值范围为 $[\dfrac{b_1(q^m-2)}{m},\dfrac{b_1q^m}{m}]$.

数学Ⅱ(附加题)

21．【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两小题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．[选修4—1：几何证明选讲](本小题满分10分)

如图，圆O的半径为2，AB为圆O的直径，P为AB延长线上一点，过P作圆O的切线，切点为C．若 $PC=2\sqrt{3}$，求 BC 的长．



(第21-A题)

B．[选修4—2：矩阵与变换](本小题满分10分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

（2）若点P在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的变换作用下得到点 $P'(3,1)$，求点P的坐标．

C．[选修4—4：坐标系与参数方程](本小题满分10分)

在极坐标系中，直线l的方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=2$，曲线$C$的方程为 $\rho=4\cos\theta$，求直线l被曲线C截得的弦长．

D．[选修4—5：不等式选讲](本小题满分10分)

若x，y，z为实数，且$x+2y+2z=6$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值．

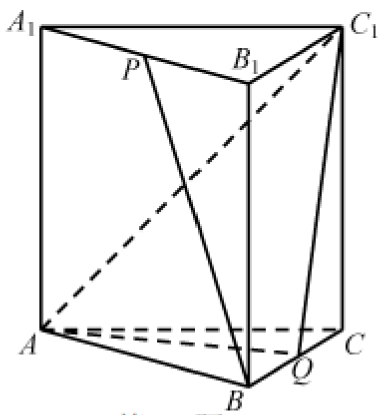
【必做题】第22题、第23题，每题10分，共计20分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22．（本小题满分10分）

如图，在正三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=2$，点P，Q分别为A_1B_1，BC的中点．

（1）求异面直线BP与AC_1所成角的余弦值；

（2）求直线CC_1与平面AQC_1所成角的正弦值．



(第22题)

23．(本小题满分10分)

设 $n\in\mathbf{N}^*$，对1，2，…，n的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$，如果当$s<t$时，有 $i_s>i_t$，则称 (i_s,i_t) 是排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个逆序，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的所有逆序的总个数称为其

逆序数．例如：对1，2，3的一个排列231，只有两个逆序(2，1)，(3，1)，则排列231的逆序数为2．记 $f_n(k)$ 为1，2，…，n的所有排列中逆序数为k的全部排列的个数．

（1）求 $f_3(2), f_4(2)$ 的值；

（2）求 $f_n(2)(n \geq 5)$ 的表达式(用n表示)．

数学Ⅱ(附加题)参考答案

21．【选做题】

A．[选修4—1：几何证明选讲]

本小题主要考查圆与三角形等基础知识，考查推理论证能力．满分10分．

证明：连结OC．因为PC与圆O相切，所以$OC\perp PC$．

又因为$PC=2\sqrt{3}$，$OC=2$，

所以$OP=\sqrt{PC^2+OC^2}=4$．

又因为$OB=2$，从而B为Rt△OCP斜边的中点，所以$BC=2$．

B．[选修4—2：矩阵与变换]

本小题主要考查矩阵的运算、线性变换等基础知识，考查运算求解能力．满分10分．

解：（1）因为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A})=2\times2-1\times3=1\neq0$，所以$\boldsymbol{A}$可逆，

从而$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$．

（2）设$P(x，y)$，则$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$，所以$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$，

因此，点P的坐标为(3，−1)．

C．[选修4—4：坐标系与参数方程]

本小题主要考查曲线的极坐标方程等基础知识，考查运算求解能力．满分10分．

解：因为曲线C的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$，

所以曲线C的圆心为（2，0），直径为4的圆．

因为直线l的极坐标方程为$\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=2$，

则直线l过A（4，0），倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，

所以A为直线l与圆C的一个交点．

设另一个交点为B，则$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$．

连结OB，因为OA为直径，从而$\angle OBA=\frac{\pi}{2}$，

所以 $AB=4\cos\dfrac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$.

因此，直线l被曲线C截得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

D．[选修4—5：不等式选讲]

本小题主要考查柯西不等式等基础知识，考查推理论证能力．满分10分．

证明：由柯西不等式，得 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\ge(x+2y+2z)^2$.

因为 $x+2y+2z=6$ ，所以 $x^2+y^2+z^2\ge 4$ ，

当且仅当 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$ 时，不等式取等号，此时 $x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=\dfrac{4}{3}$，

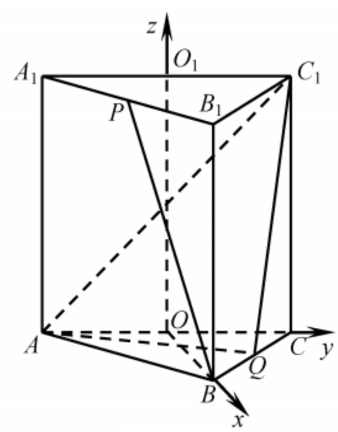
所以 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为4．

22．【必做题】**本小题主要考查空间向量、异面直线所成角和线面角等基础知识，考查运用空间向量解决问题的能力．满分10分．**

解：如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，设AC，A_1C_1的中点分别为O，O_1，则$OB\perp OC$，$OO_1\perp OC$，$OO_1\perp OB$，以 $\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}\}$ 为基底，建立空间直角坐标系$O-xyz$.

因为$AB=AA_1=2$，

所以 $A(0,-1,0),B(\sqrt{3},0,0),C(0,1,0),A_1(0,-1,2),B_1(\sqrt{3},0,2),C_1(0,1,2)$.



（1）因为P为A_1B_1的中点，所以 $P(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},2)$ ，

从而 $\overrightarrow{BP}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},2),\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$ ，

故 $|\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AC_1}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{|-1+4|}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$.

因此，异面直线BP与AC_1所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$.

（2）因为Q为BC的中点，所以$Q(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$，

因此$\overrightarrow{AQ}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$.

设$\boldsymbol{n}$=（x，y，z）为平面AQC_1的一个法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AQ}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}y=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$

不妨取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$，

设直线CC_1与平面AQC_1所成角为θ，

则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\times 2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以直线CC_1与平面AQC_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

23．【必做题】本小题主要考查计数原理、排列等基础知识，考查运算求解能力和推理论证能力．满分10分．

解：（1）记$\tau(abc)$为排列*abc*的逆序数，对1，2，3的所有排列，有

$\tau(123)=0$，$\tau(132)=1$，$\tau(213)=1$，$\tau(231)=2$，$\tau(312)=2$，$\tau(321)=3$，

所以$f_3(0)=1$，$f_3(1)=f_3(2)=2$.

对1，2，3，4的排列，利用已有的1，2，3的排列，将数字4添加进去，4在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_4(2)=f_3(2)+f_3(1)+f_3(0)=5$.

（2）对一般的n（n≥4）的情形，逆序数为0的排列只有一个：12…n，所以$f_n(0)=1$.

逆序数为1的排列只能是将排列12…n中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，所以$f_n(1)=n-1$.

为计算$f_{n+1}(2)$，当1，2，…，n的排列及其逆序数确定后，将n+1添加进原排列，n+1在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_{n+1}(2)=f_n(2)+f_n(1)+f_n(0)=f_n(2)+n$.

当n≥5时，

$$f_n(2)=[f_n(2)-f_{n-1}(2)]+[f_{n-1}(2)-f_{n-2}(2)]+\ldots+[f_5(2)-f_4(2)]+f_4(2)$$

$$=(n-1)+(n-2)+\ldots+4+f_4(2)=\frac{n^2-n-2}{2},$$

因此，n≥5时，$f_n(2)=\frac{n^2-n-2}{2}$.