

# 2013年上海市秋季高考理科数学

## 一、填空题

1. 计算:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+20}{3n+13} = \underline{\hspace{2cm}}$

【解答】根据极限运算法则,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+20}{3n+13} = \frac{1}{3}$ .

2. 设  $m \in R$ ,  $m^2 + m - 2 + (m^2 - 1)i$  是纯虚数, 其中  $i$  是虚数单位, 则  $m = \underline{\hspace{2cm}}$

【解答】 $\begin{cases} m^2 + m - 2 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = -2$ .

3. 若  $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix}$ , 则  $x + y = \underline{\hspace{2cm}}$

【解答】 $x^2 + y^2 = -2xy \Rightarrow x + y = 0$ .

4. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对应边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 若  $3a^2 + 2ab + 3b^2 - 3c^2 = 0$ , 则角  $C$  的大小是  $\underline{\hspace{2cm}}$  (结果用反三角函数值表示)

【解答】 $3a^2 + 2ab + 3b^2 - 3c^2 = 0 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + \frac{2}{3}ab$ , 故

$\cos C = -\frac{1}{3}$ ,  $C = \pi - \arccos \frac{1}{3}$ .

5. 设常数  $a \in R$ , 若  $\left( x^2 + \frac{a}{x} \right)^5$  的二项展开式中  $x^7$  项的系数为  $-10$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$

【解答】 $T_{r+1} = C_5^r (x^2)^{5-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r, 2(5-r)-r=7 \Rightarrow r=1$ , 故  $C_5^1 a = -10 \Rightarrow a = -2$ .

6. 方程  $\frac{3}{3^x - 1} + \frac{1}{3} = 3^{x-1}$  的实数解为  $\underline{\hspace{2cm}}$

【解答】原方程整理后变为  $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 8 = 0 \Rightarrow 3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4$ .

7. 在极坐标系中, 曲线  $\rho = \cos \theta + 1$  与  $\rho \cos \theta = 1$  的公共点到极点的距离为  $\underline{\hspace{2cm}}$

【解答】联立方程组得  $\rho(\rho - 1) = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , 又  $\rho \geq 0$ , 故所求为  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

8. 盒子中装有编号为  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  的九个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是  $\underline{\hspace{2cm}}$  (结果用最简分数表示)

【解答】9个数5个奇数, 4个偶数, 根据题意所求概率为  $1 - \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{13}{18}$ .

9. 设  $AB$  是椭圆  $\Gamma$  的长轴, 点  $C$  在  $\Gamma$  上, 且  $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$ , 若  $AB = 4$ ,  $BC = \sqrt{2}$ , 则  $\Gamma$  的两个焦点之间的距离为  $\underline{\hspace{2cm}}$

【解答】不妨设椭圆  $\Gamma$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 于是可算得  $C(1, 1)$ , 得

$b^2 = \frac{4}{3}, 2c = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ .

10. 设非零常数  $d$  是等差数列  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{19}$  的公差, 随机变量  $\xi$  等可能地取值  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{19}$ , 则方差  $D\xi = \underline{\hspace{2cm}}$

【解答】  $E\xi = x_{10}$ ,  $D\xi = \sqrt{\frac{d^2}{19}(9^2 + 8^2 + \dots + 1^2 + 0^2 + 1^2 + \dots + 9^2)} = \sqrt{30}|d|$ .

11. 若  $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 2x + \sin 2y = \frac{2}{3}$ , 则  $\sin(x+y) = \underline{\hspace{2cm}}$

【解答】  $\cos(x-y) = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 2x + \sin 2y = 2\sin(x+y)\cos(x-y) = \frac{2}{3}$ , 故

$$\sin(x+y) = \frac{2}{3}.$$

12. 设  $a$  为实常数,  $y = f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x < 0$  时,  $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} + 7$ ,

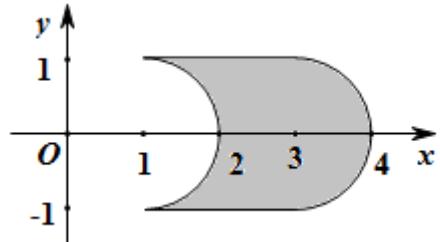
若  $f(x) \geq a+1$  对一切  $x \geq 0$  成立, 则  $a$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$

【解答】  $f(0) = 0$ , 故  $0 \geq a+1 \Rightarrow a \leq -1$ ; 当  $x > 0$  时,  $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} - 7 \geq a+1$

$$\text{即 } 6|a| \geq a+8, \text{ 又 } a \leq -1, \text{ 故 } a \leq -\frac{8}{7}.$$

13. 在  $xOy$  平面上, 将两个半圆弧  $(x-1)^2 + y^2 = 1(x \geq 1)$

和  $(x-3)^2 + y^2 = 1(x \geq 3)$ 、两条直线  $y=1$  和  $y=-1$  围成的封闭图形记为  $D$ , 如图中阴影部分. 记  $D$  绕  $y$  轴旋转一周而成的几何体为  $\Omega$ , 过  $(0, y)(|y| \leq 1)$  作  $\Omega$  的水平截面, 所得截面面积为  $4\pi\sqrt{1-y^2} + 8\pi$ , 试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体, 得出  $\Omega$  的体积值为  $\underline{\hspace{2cm}}$



【解答】根据提示, 一个半径为 1, 高为  $2\pi$  的圆柱平放, 一个高为 2, 底面面积  $8\pi$  的长方体, 这两个几何体与  $\Omega$  放在一起, 根据祖暅原理, 每个平行水平面的截面面积都相等, 故它们的体积相等, 即  $\Omega$  的体积值为  $\pi \cdot 1^2 \cdot 2\pi + 2 \cdot 8\pi = 2\pi^2 + 16\pi$ .

14. 对区间  $I$  上有定义的函数  $g(x)$ , 记  $g(I) = \{y \mid y = g(x), x \in I\}$ , 已知定义域为  $[0, 3]$  的函数  $y = f(x)$  有反函数  $y = f^{-1}(x)$ , 且  $f^{-1}([0, 1]) = [1, 2], f^{-1}((2, 4]) = [0, 1]$ , 若方程  $f(x) - x = 0$  有解  $x_0$ , 则  $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$

【解答】根据反函数定义, 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) \in (2, 4]$ ;  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x) \in [0, 1]$ , 而  $y = f(x)$  的定义域为  $[0, 3]$ , 故当  $x \in [2, 3]$  时,  $f(x)$  的取值应在集合  $(-\infty, 0) \cup [1, 2] \cup (4, +\infty)$ , 故若  $f(x_0) = x_0$ , 只有  $x_0 = 2$ .

## 二、选择题

15. 设常数  $a \in \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x \mid (x-1)(x-a) \geq 0\}, B = \{x \mid x \geq a-1\}$ , 若  $A \cup B = \mathbf{R}$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )

- (A)  $(-\infty, 2)$       (B)  $(-\infty, 2]$       (C)  $(2, +\infty)$       (D)  $[2, +\infty)$

【解答】集合  $A$  讨论后利用数轴可知,  $\begin{cases} a \geq 1 \\ a-1 \leq 1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a \leq 1 \\ a-1 \leq a \end{cases}$ , 解答选项为 B.

16. 钱大姐常说“便宜没好货”, 她这句话的意思是: “不便宜”是“好货”的 ( )  
(A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

【解答】根据等价命题, 便宜  $\Rightarrow$  没好货, 等价于, 好货  $\Rightarrow$  不便宜, 故选 B.

17. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_n = 2^n - 1$ , 若一个 7 行 12 列的矩阵的第 i 行第 j 列的元素

$a_{i,j} = a_i \cdot a_j + a_i + a_j$ , ( $i = 1, 2, \dots, 7; j = 1, 2, \dots, 12$ ) 则该矩阵元素能取到的不同数值的个数为 ( )

**【解答】**  $a_{i,j} = a_i \cdot a_j + a_i + a_j = 2^{i+j} - 1$ , 而  $i + j = 2, 3, \dots, 19$ , 故不同数值个数为18个, 选A.

18. 在边长为1的正六边形ABCDEF中，记以A为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}$ ；以D为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{d_3}, \overrightarrow{d_4}, \overrightarrow{d_5}$ .若m,M 分别为 $(\overrightarrow{a_i} + \overrightarrow{a_j} + \overrightarrow{a_k}) \cdot (\overrightarrow{d_r} + \overrightarrow{d_s} + \overrightarrow{d_t})$ 的最小值、最大值，其中 $\{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $\{r, s, t\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，则m,M 满足 ( ) .

- (A)  $m = 0, M > 0$       (B)  $m < 0, M > 0$       (C)  $m < 0, M = 0$       (D)  
 $m < 0, M < 0$

**【解答】**作图知, 只有  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} > 0$ , 其余均有  $\overrightarrow{a}_i \cdot \overrightarrow{d}_r \leq 0$ , 故选D.

### 三、解答题

19. (本题满分12分) 如图, 在长方体ABCD-

$A_1B_1C_1D_1$ 中,  $AB=2, AD=1, A_1A=1$ , 证明直线 $BC_1$ 平行于平面 $DA_1C$ , 并求直线 $BC_1$ 到平面 $D_1AC$ 的距离.

**【解答】**因为ABCD-A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>为长方体，故 $AB \parallel C_1D_1$ ,  $AB = C_1D_1$ ，故ABC<sub>1</sub>D<sub>1</sub>为平行四边形，故 $BC_1 \parallel AD_1$ ，显然B不在平面D<sub>1</sub>AC上，于是直线BC<sub>1</sub>平行于平面DA<sub>1</sub>C；

直线 $BC_1$ 到平面 $D_1AC$ 的距离即为点B到平面 $D_1AC$ 的距离设为 $h$

考虑三棱锥 $ABCD_1$ 的体积，以 $ABC$ 为底面，可得 $V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2\right) \times 1 = \frac{1}{3}$

而  $\Delta AD_1C$  中,  $AC = D_1C = \sqrt{5}$ ,  $AD_1 = \sqrt{2}$ , 故  $S_{\Delta AD_1C} = \frac{3}{2}$

所以,  $V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times h = \frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{3}$ , 即直线 $BC_1$ 到平面 $D_1AC$ 的距离为 $\frac{2}{3}$ .

20. (6分+8分) 甲厂以 $x$  千克/小时的速度运输生产某种产品(生产条件要求

$1 \leq x \leq 10$  ) , 每小时可获得利润是  $100(5x+1-\frac{3}{x})$  元.

(1)要使生产该产品2小时获得的利润不低于3000元,求x的取值范围;

(2)要使生产900千克该产品获得的利润最大,问:甲厂应该选取何种生产速度?并求最大利润.

【解答】(1)根据题意,  $200(5x+1-\frac{3}{x}) \geq 3000 \Rightarrow 5x-14-\frac{3}{x} \geq 0$

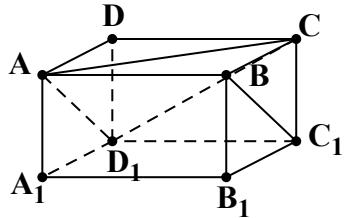
又  $1 \leq x \leq 10$ ，可解得  $3 \leq x \leq 10$

$$(2) \text{ 设利润为 } y \text{ 元, 则 } y = \frac{900}{x} \cdot 100 \left(5x + 1 - \frac{3}{x}\right) = 9 \times 10^4 \left[-3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{61}{12}\right]$$

故  $x = 6$  时,  $v_{\max} = 457500$  元.

21. (6分+8分) 已知函数  $f(x) = 2 \sin(\varphi x)$ , 其中常数  $\varphi > 0$ :

(1) 若  $y = f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]$  上单调递增, 求  $\omega$  的取值范围;



(2) 令  $\omega=2$ , 将函数  $y=f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 再向上平移 1 个单位, 得到函数  $y=g(x)$  的图像, 区间  $[a,b]$  ( $a,b \in \mathbb{R}$  且  $a < b$ ) 满足:  $y=g(x)$  在  $[a,b]$  上至少含有 30 个零点, 在所有满足上述条件的  $[a,b]$  中, 求  $b-a$  的最小值.

【解答】(1) 因为  $\omega>0$ , 根据题意有

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4}\omega \geq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{2\pi}{3}\omega \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < \omega \leq \frac{3}{4}$$

$$(2) f(x)=2\sin(2x), \quad g(x)=2\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$$

$$g(x)=0 \Rightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3} \text{ 或 } x=k\pi-\frac{7}{12}\pi, k \in \mathbb{Z},$$

即  $g(x)$  的零点相离间隔依次为  $\frac{\pi}{3}$  和  $\frac{2\pi}{3}$ ,

故若  $y=g(x)$  在  $[a,b]$  上至少含有 30 个零点, 则  $b-a$  的最小值为  $14 \times \frac{2\pi}{3} + 15 \times \frac{\pi}{3} = \frac{43\pi}{3}$

22. (3分+5分+8分) 如图, 已知曲线  $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ , 曲线

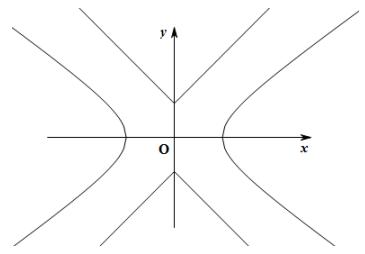
$C_2: |y| = |x| + 1$ ,  $P$ 是平面上一点, 若存在过点  $P$ 的直线与  $C_1, C_2$  都有公共点, 则称  $P$ 为“ $C_1-C_2$ 型点”.

(1)在正确证明  $C_1$  的左焦点是“ $C_1-$

$C_2$ 型点”时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);

(2)设直线  $y = kx$  与  $C_2$  有公共点, 求证  $|k| > 1$ , 进而证明原点不是“ $C_1-C_2$ 型点”;

(3)求证: 圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内的点都不是“ $C_1-C_2$ 型点”.



【解答】: (1)  $C_1$  的左焦点为  $F(-\sqrt{3}, 0)$ , 过  $F$  的直线  $x = -\sqrt{3}$  与  $C_1$  交于  $(-\sqrt{3}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,

与  $C_2$  交于  $(-\sqrt{3}, \pm(\sqrt{3}+1))$ , 故  $C_1$  的左焦点为“ $C_1-C_2$ 型点”, 且直线可以为  $x = -\sqrt{3}$ ;

(2) 直线  $y = kx$  与  $C_2$  有交点, 则

$$\begin{cases} y = kx \\ |y| = |x| + 1 \end{cases} \Rightarrow (|k| - 1)|x| = 1, \text{ 若方程组有解, 则必须 } |k| > 1;$$

直线  $y = kx$  与  $C_2$  有交点, 则

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (1 - 2k^2)x^2 = 2, \text{ 若方程组有解, 则必须 } k^2 < \frac{1}{2}$$

故直线  $y = kx$  至多与曲线  $C_1$  和  $C_2$  中的一条有交点, 即原点不是“ $C_1-C_2$ 型点”。

(3) 显然过圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内一点的直线  $l$  若与曲线  $C_1$  有交点, 则斜率必存在;

根据对称性, 不妨设直线  $l$  斜率存在且与曲线  $C_2$  交于点  $(t, t+1)(t \geq 0)$ , 则

$$l: y = (t+1) = k(x-t) \Rightarrow kx - y + (1+t-kt) = 0$$

直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内部有交点, 故  $\frac{|1+t-kt|}{\sqrt{k^2+1}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{化简得, } (1+t-kt)^2 < \frac{1}{2}(k^2+1) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

若直线  $l$  与曲线  $C_1$  有交点, 则

$$\begin{cases} y = kx - kt + t + 1 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (k^2 - \frac{1}{2})x^2 + 2k(1+t-kt)x + (1+t-kt)^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 4k^2(1+t-kt)^2 - 4(k^2 - \frac{1}{2})[(1+t-kt)^2 + 1] \geq 0 \Rightarrow (1+t-kt)^2 \geq 2(k^2 - 1)$$

$$\text{化简得, } (1+t-kt)^2 \geq 2(k^2 - 1) \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\text{由(1)(2)得, } 2(k^2 - 1) \leq (1+t-kt)^2 < \frac{1}{2}(k^2+1) \Rightarrow k^2 < 1$$

但此时, 因为  $t \geq 0, [1+t(1-k)]^2 \geq 1, \frac{1}{2}(k^2+1) < 1$ , 即(1)式不成立;

当  $k^2 = \frac{1}{2}$  时, (1)式也不成立

综上，直线 $l$ 若与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内有交点，则不可能同时与曲线 $C_1$ 和 $C_2$ 有交点，

即圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内的点都不是“ $C_1-C_2$ 型点”。

23. (3分+6分+9分) 给定常数 $c > 0$ ，定义函数 $f(x) = 2|x+c+4|-|x+c|$ ，数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n), n \in N^*$ .

(1) 若 $a_1 = -c-2$ ，求 $a_2$ 及 $a_3$ ； (2) 求证：对任意 $n \in N^*$ ,  $a_{n+1} - a_n \geq c$ ；

(3) 是否存在 $a_1$ ，使得 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 成等差数列？若存在，求出所有这样的 $a_1$ ，若不存在，说明理由。

【解答】：(1) 因为 $c > 0$ ， $a_1 = -(c+2)$ ，故 $a_2 = f(a_1) = 2|a_1+c+4|-|a_1+c| = 2$

,

$$a_3 = f(a_2) = 2|a_2+c+4|-|a_2+c| = c+10$$

(2) 要证明原命题，只需证明 $f(x) \geq x+c$ 对任意 $x \in R$ 都成立，

$$f(x) \geq x+c \Leftrightarrow 2|x+c+4|-|x+c| \geq x+c$$

即只需证明 $2|x+c+4| \geq |x+c| + x + c$

若 $x+c \leq 0$ ，显然有 $2|x+c+4| \geq |x+c| + x + c = 0$ 成立；

若 $x+c > 0$ ，则 $2|x+c+4| \geq |x+c| + x + c \Leftrightarrow x+c+4 > x+c$ 显然成立

综上， $f(x) \geq x+c$ 恒成立，即对任意的 $n \in N^*$ ,  $a_{n+1} - a_n \geq c$

(3) 由(2)知，若 $\{a_n\}$ 为等差数列，则公差 $d \geq c > 0$ ，故n无限增大时，总有 $a_n > 0$

$$\text{此时, } a_{n+1} = f(a_n) = 2(a_n+c+4)-(a_n+c) = a_n+c+8$$

即 $d = c+8$

$$\text{故 } a_2 = f(a_1) = 2|a_1+c+4|-|a_1+c| = a_1+c+8,$$

$$\text{即 } 2|a_1+c+4| = |a_1+c| + a_1+c+8,$$

当 $a_1+c \geq 0$ 时，等式成立，且 $n \geq 2$ 时， $a_n > 0$ ，此时 $\{a_n\}$ 为等差数列，满足题意；

若 $a_1+c < 0$ ，则 $|a_1+c+4| = 4 \Rightarrow a_1 = -c-8$ ，

此时， $a_2 = 0, a_3 = c+8, \dots, a_n = (n-2)(c+8)$ 也满足题意；

综上，满足题意的 $a_1$ 的取值范围是 $[-c, +\infty) \cup \{-c-8\}$ 。

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题。第1小题满分6分，第2小题满分5分，第3小题满分8分。

如图，已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ ，曲线 $C_2: |y| = |x| + 1$ 。 $P$ 是平面内一点，若存

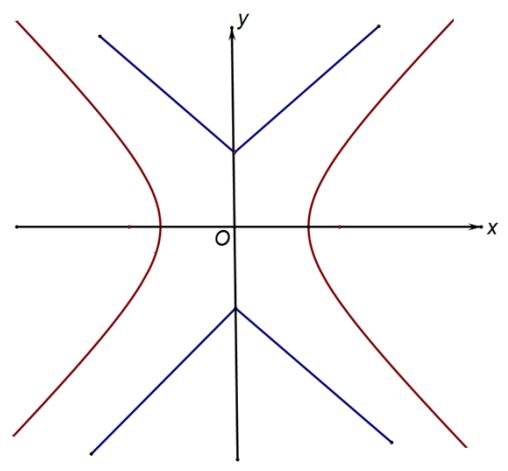
在过点 $P$ 的直线与 $C_1$ 、 $C_2$ 都有公共点，则称 $P$ 为“ $C_1-C_2$ 型点”。

(1) 在正确证明 $C_1$ 的左焦点是“ $C_1-C_2$ 型点”时，要使

用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；

(2) 设直线 $y=kx$ 与 $C_2$ 有公共点，求证 $|k| > 1$ ，进而证明原点不是“ $C_1-C_2$ 型点”；

(3) 求证：圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内的点都不是“ $C_1-C_2$ 型点”



22. 解: (1)  $C_1$ 的左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$ , 过F的直线 $x = -\sqrt{3}$ 与 $C_1$ 交于 $(-\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ , 与 $C_2$ 交于 $(-\sqrt{3}, \pm(\sqrt{3}+1))$ , 故 $C_1$ 的左焦点为“ $C_1-C_2$ 型点”, 且直线可以为 $x = -\sqrt{3}$ ;

(2) 直线  $y = kx$  与  $C_2$  有交点, 则

$$\begin{cases} y = kx \\ |y| = |x| + 1 \end{cases} \Rightarrow (|k| - 1)|x| = 1, \text{ 若方程组有解, 则必须 } |k| > 1;$$

直线  $y = kx$  与  $C_2$  有交点，则

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (1 - 2k^2)x^2 = 2, \text{ 若方程组有解, 则必须 } k^2 < \frac{1}{2}$$

故直线  $y = kx$  至多与曲线  $C_1$  和  $C_2$  中的一条有交点，即原点不是“ $C_1$ - $C_2$ 型点”。

(3) 显然过圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内一点的直线  $l$  若与曲线  $C_1$  有交点，则斜率必存在；

根据对称性，不妨设直线  $l$  斜率存在且与曲线  $C_2$  交于点  $(t, t+1)$  ( $t \geq 0$ )，则

$$l : y = (t+1) = k(x-t) \Rightarrow kx - y + (1+t-kt) = 0$$

直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内部有交点，故  $\frac{|1+t-kt|}{\sqrt{k^2+1}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

若直线  $l$  与曲线  $C_1$  有交点，则

$$\begin{cases} y = kx - kt + t + 1 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(k^2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + 2k(1+t-kt)x + (1+t-kt)^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 4k^2(1+t-kt)^2 - 4(k^2 - \frac{1}{2})[(1+t-kt)^2 + 1] \geq 0 \Rightarrow (1+t-kt)^2 \geq 2(k^2 - 1)$$

化简得,  $(1+t-kt)^2 \geq 2(k^2 - 1) \dots \dots \dots$  ②

由①②得,  $2(k^2 - 1) \leq (1+t-tk)^2 < \frac{1}{2}(k^2 + 1) \Rightarrow k^2 < 1$

但此时, 因为  $t \geq 0$ ,  $[1+t(1-k)]^2 \geq 1$ ,  $\frac{1}{2}(k^2+1) < 1$ , 即①式不成立;

当  $k^2 = \frac{1}{2}$  时, ①式也不成立

综上，直线 $l$ 若与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内有交点，则不可能同时与曲线 $C_1$ 和 $C_2$ 有交点。

即圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内的点都不是“ $C_1$ - $C_2$ 型点”。

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题. 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分9分.

给定常数  $c > 0$ , 定义函数  $f(x) = 2|x + c + 4| - |x + c|$ . 数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  满足  $a_{n+1} = f(a_n), n \in N^*$ .

(1) 若  $a_1 = -c - 2$ , 求  $a_2$  及  $a_3$ ;

(2) 求证: 对任意  $n \in N^*$ ,  $a_{n+1} - a_n \geq c$ ;

(3) 是否存在  $a_1$ , 使得  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$  成等差数列? 若存在, 求出所有这样的  $a_1$ ; 若不存在, 说明理由.

23. 解: (1) 因为  $c > 0$ ,  $a_1 = -(c+2)$ , 故  $a_2 = f(a_1) = 2|a_1 + c + 4| - |a_1 + c| = 2$ ,  $a_3 = f(a_2) = 2|a_2 + c + 4| - |a_2 + c| = c + 10$

(2) 要证明原命题, 只需证明  $f(x) \geq x + c$  对任意  $x \in R$  都成立,

$$f(x) \geq x + c \Leftrightarrow 2|x + c + 4| - |x + c| \geq x + c$$

即只需证明  $2|x + c + 4| \geq |x + c| + x + c$

若  $x + c \leq 0$ , 显然有  $2|x + c + 4| \geq |x + c| + x + c = 0$  成立;

若  $x + c > 0$ , 则  $2|x + c + 4| \geq |x + c| + x + c \Leftrightarrow x + c + 4 > x + c$  显然成立

综上,  $f(x) \geq x + c$  恒成立, 即对任意的  $n \in N^*$ ,  $a_{n+1} - a_n \geq c$

(3) 由 (2) 知, 若  $\{a_n\}$  为等差数列, 则公差  $d \geq c > 0$ , 故  $n$  无限增大时, 总有  $a_n > 0$

此时,  $a_{n+1} = f(a_n) = 2(a_n + c + 4) - (a_n + c) = a_n + c + 8$

即  $d = c + 8$

故  $a_2 = f(a_1) = 2|a_1 + c + 4| - |a_1 + c| = a_1 + c + 8$ ,

即  $2|a_1 + c + 4| = |a_1 + c| + a_1 + c + 8$ ,

当  $a_1 + c \geq 0$  时, 等式成立, 且  $n \geq 2$  时,  $a_n > 0$ , 此时  $\{a_n\}$  为等差数列, 满足题意;

若  $a_1 + c < 0$ , 则  $|a_1 + c + 4| = 4 \Rightarrow a_1 = -c - 8$ ,

此时,  $a_2 = 0, a_3 = c + 8, \dots, a_n = (n-2)(c+8)$  也满足题意;

综上, 满足题意的  $a_1$  的取值范围是  $[-c, +\infty) \cup \{-c - 8\}$ 。