2011年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学Ⅰ

参考公式：

（1）样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，其中 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$．

（2）直棱柱的侧面积 $S=ch$，其中 c 为底面周长，h 为高.

（3）棱柱的体积 $V=Sh$，其中 S 为底面积，h 为高.

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

1．已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}$，$B=\{-1,0,2\}$，则 $A\bigcap B=$____▲____．

2．函数 $f(x)=\log_5(2x+1)$ 的单调增区间是____▲____．

3．设复数 z 满足 $i(z+1)=-3+2i$（i 为虚数单位），则 z 的实部是____▲____．

```
Read a，b
If a>b Then
  m←a
Else
  m←b
End If
Print m
```

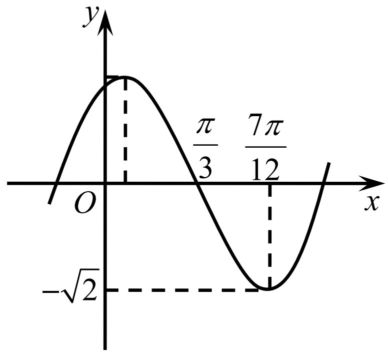
4．根据如图所示的伪代码，当输入 a,b 分别为2，3时，最后输出的 m 的值为____▲____．

5．从1，2，3，4这四个数中一次随机取两个数，则其中一个数是另一个的两倍的概率是____▲____．

6．某老师从星期一到星期五收到的信件数分别是10，6，8，5，6，则该组数据的方差 $s^2=$____▲____．

7．已知 $\tan(x+\frac{\pi}{4})=2$，则 $\frac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为____▲____．

8．在平面直角坐标系 xOy 中，过坐标原点的一条直线与函数 $f(x)=\frac{2}{x}$ 的图象交于 P、Q 两点，则线段 PQ 长的最小值是____▲____．



9．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A$，$\omega$，$\varphi$ 是常数，$A>0$，$\omega>0$）的部分图象如图所示，则 $f(0)$ 的

值是 ▲ .

10．已知$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是夹角为$\dfrac{2}{3}\pi$的两个单位向量，$\vec{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=k\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，若

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则实数k的值为 ▲ .

11．已知实数$a\neq 0$，函数$f(x)=\begin{cases}2x+a,x<1\\-x-2a,x\geq 1\end{cases}$，若$f(1-a)=f(1+a)$，则$a$的值

为

 ▲ .

12．在平面直角坐标系xOy中，已知点P是函数$f(x)=e^x(x>0)$的图象上的动点，该图象在P处的切线l交y轴于点M，过点P作l的垂线交y轴于点N，设线段MN的中点的纵坐标为t，则t的最大值是 ▲ .

13．设$1=a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_7$，其中$a_1,a_3,a_5,a_7$成公比为$q$的等比数列，$a_2,a_4,a_6$成公差为1的等差数列，则$q$的最小值是 ▲ .

14．设集合$A=\left\{(x,y)\mid\dfrac{m}{2}\leq(x-2)^2+y^2\leq m^2,\ x,y\in R\right\}$，$B=\{(x,y)\mid$

$2m\leq x+y\leq 2m+1,\ x,y\in R\}$，若$A\bigcap B\neq\varnothing$，则实数$m$的取值范围是 ▲

.

二、解答题：本大题共6小题，共计90分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分14分）

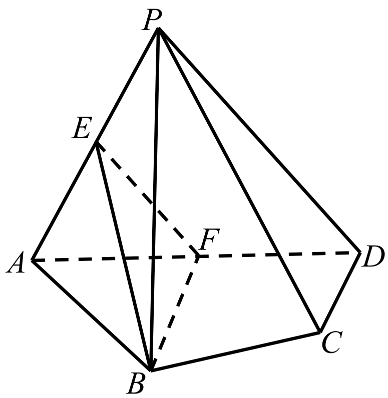
在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c．

（1）若$\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=2\cos A$，求$A$的值；

（2）若$\cos A=\dfrac{1}{3}$，$b=3c$，求$\sin C$的值．

16．（本小题满分14分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$AB=AD$，$\angle BAD=60^\circ$，E,F分别是



AP, AD 的中点．

求证：（1）直线 $EF//$ 平面 PCD；

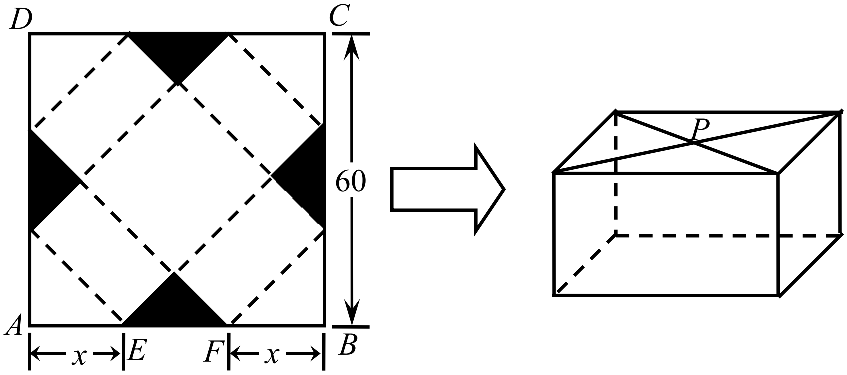
（2）平面 $BEF\perp$ 平面 PAD．

17．（本小题满分14分）

请你设计一个包装盒，如图所示，$ABCD$是边长为60cm的正方形硬纸片，切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形，再沿虚线折起，使得A，B，C，D四个点重合于图中的点P，正好形成一个正四棱柱形状的包装盒，E，F在AB上，是被切去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点．设$AE=FB=x$（cm）．

（1）某广告商要求包装盒的侧面积S（cm^2）最大，试问x应取何值？

（2）某厂商要求包装盒的容积V（cm^3）最大，试问x应取何值？并求出此时包装盒的高与底面边长的比值．



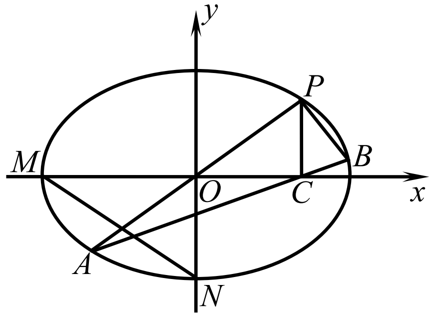
18．（本小题满分16分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，M, N 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的顶点，过坐标原点的直线交椭圆于 P, A 两点，其中点 P 在第一象限，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 C，连接 AC，并延长交椭圆于点 B．设直线 PA 的斜率为 k．

（1）当直线 PA 平分线段 MN，求 k 的值；

（2）当 $k=2$ 时，求点 P 到直线 AB 的距离 d

；



（3）对任意$k>0$，求证：$PA\perp PB$.

19．（本小题满分16分）

已知a,b是实数，函数$f(x)=x^3+ax$，$g(x)=x^2+bx$，$f'(x)$和$g'(x)$是$f(x)$和$g(x)$的导函数．若$f'(x)g'(x)\geq 0$在区间I上恒成立，则称$f(x)$和$g(x)$在区间I上单调性一致．

（1）设$a>0$，若$f(x)$和$g(x)$在区间$[-1,+\infty)$上单调性一致，求实数b的取值范围；

（2）设$a<0$且$a\neq b$，若$f(x)$和$g(x)$在以a,b为端点的开区间上单调性一致，求$|a-b|$的最大值．

20．（本小题满分16分）

设M为部分正整数组成的集合，数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，前n项的和为S_n，已知对任意整数$k\in M$，当$n>k$时，$S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$都成立．

（1）设$M=\{1\}$，$a_2=2$，求a_5的值；

（2）设$M=\{3,4\}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

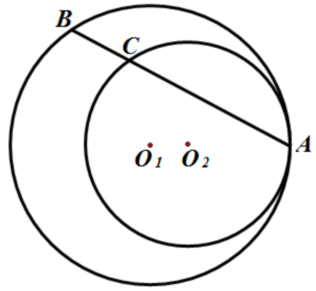
2011年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学Ⅱ（附加题）

21．[选做题]本题包括A、B、C、D四小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两题评分．
解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．选修4-1：几何证明选讲

（本小题满分10分）



如图，圆O_1与圆O_2内切于点A，其半径分别为r_1与r_2（$r_1>r_2$）．圆O_1的弦AB交圆O_2于点C（O_1不在AB上）．

求证：$AB:AC$为定值．

B．选修4-2：矩阵与变换

（本小题满分10分）

已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，向量$\beta=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$．求向量$\alpha$，使得$\boldsymbol{A}^2\alpha=\beta$．

C．选修4-4：坐标系与参数方程

（本小题满分10分）

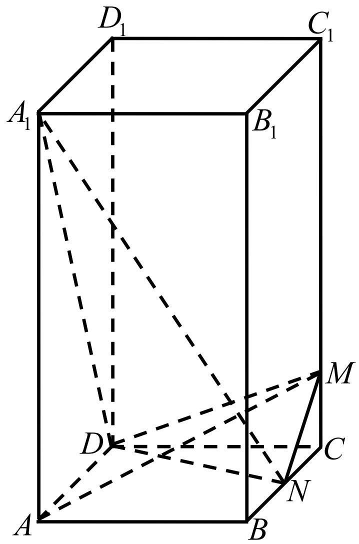
在平面直角坐标系xOy中，求过椭圆$\begin{cases}x=5\cos\varphi\\ y=3\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$为参数）的右焦点，且与直线$\begin{cases}x=4-2t\\ y=3-t\end{cases}$（$t$为参数）平行的直线的普通方程．

D．选修4-5：不等式选讲

（本小题满分10分）

解不等式：$x+|2x-1|<3$．

【必做题】第22题、第23题，每题10分，共计20分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．



22．（本小题满分10分）

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，$AB=1$，点 N 是 BC 的中点，点 M 在 CC_1 上．

设二面角 A_1-DN-M 的大小为 θ．

（1）当 $\theta=90^\circ$ 时，求 AM 的长；

（2）当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，求 CM 的长．

23．（本小题满分10分）

设整数 $n\geq 4$，$P(a,b)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点，其中 $a,b\in\{1,2,3,\ldots,n\}$，$a>b$．

（1）记 A_n 为满足 $a-b=3$ 的点 P 的个数，求 A_n；

（2）记 B_n 为满足 $\dfrac{1}{3}(a-b)$ 是整数的点 P 的个数，求 B_n．

数学Ⅰ试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法．每小题 5 分，共计 70 分．

1. $\{-1,2\}$　**2.** $(-\frac{1}{2},+\infty)$　**3.** 1　**4.** 3

5. $\frac{1}{3}$　**6.** 3.2　**7.** $\frac{4}{9}$　**8.** 4

9. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　**10.** $\frac{5}{4}$　**11.** $-\frac{3}{4}$　**12.** $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$

13. $\sqrt[3]{3}$　**14.** $[\frac{1}{2},2+\sqrt{2}]$

二、解答题

15. 本小题主要考查三角函数的基本关系式、两角和的正弦公式、解三角形，考查运算求解能力．满分 14 分．

解：(1) 由题设知 $\sin A\cos\frac{\pi}{6}+\cos A\sin\frac{\pi}{6}=2\cos A$．从而 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，所以 $\cos A\neq 0$，

$\tan A=\sqrt{3}$．因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．

(2) 由 $\cos A=\frac{1}{3}$，$b=3c$ 及 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $a^2=b^2-c^2$．

故 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $B=\frac{\pi}{2}$．　所以 $\sin C=\cos A=\frac{1}{3}$．

16. 本小题主要考查直线与平面、平面与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力．满分 14 分．

证明：(1) 在 $\triangle PAD$ 中，因为 E，F 分别为 AP，AD 的中点，所以 $EF/\!/PD$．

又因为 $EF\not\subset$ 平面 PCD，$PD\subset$ 平面 PCD，

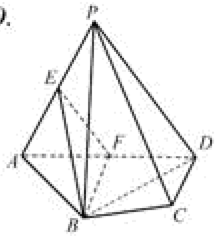
所以直线 $EF/\!/$ 平面 PCD．

(2) 连结 BD．因为 $AB=AD$，$\angle BAD=60°$，所以 $\triangle ABD$ 为正三角形．因为 F 是 AD 的中点，所以 $BF\perp AD$．

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$BF\subset$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，所以 $BF\perp$ 平面 PAD．

又因为 $BF\subset$ 平面 BEF，所以平面 $BEF\perp$ 平面 PAD．



（第 16 题）

17. 本小题主要考查函数的概念、导数等基础知识，考查数学建模能力、空间想象能力、数学阅读能力及解决实际问题的能力．满分 14 分．

解：设包装盒的高为 h(cm)，底面边长为 a(cm)．由已知得

$a=\sqrt{2}x$，$h=\frac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$．

(1) $S=4ah=8x(30-x)=-8(x-15)^2+1800$，

所以当 $x=15$ 时，S 取得最大值．

(2) $V=a^2h=2\sqrt{2}(-x^3+30x^2)$，$V'=6\sqrt{2}x(20-x)$．

由 $V'=0$ 得 $x=0$（舍）或 $x=20$．

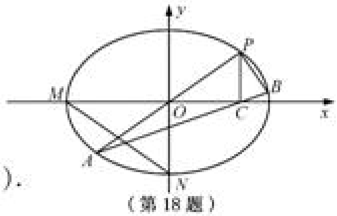
当 $x\in(0,20)$ 时，$V'>0$；当 $x\in(20,30)$ 时，$V'<0$．

所以当 $x=20$ 时，V 取得极大值，也是最大值．

此时$\frac{h}{a}=\frac{1}{2}$. 即包装盒的高与底面边长的比值为$\frac{1}{2}$.

18. **本小题主要考查椭圆的标准方程及几何性质、直线方程、直线的垂直关系、点到直线的距离等基础知识，考查运算求解能力和推理论证能力. 满分 16 分.**

解：(1) 由题设知，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，故 $M(-2,0)$，$N(0,-\sqrt{2})$，所以线段 MN 中点的坐标为 $(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$. 由于直线 PA 平分线段 MN，故直线 PA 过线段 MN 的中点，又直线 PA 过坐标原点，所以 $k=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



（第 18 题）

(2) 直线 PA 的方程为 $y=2x$，代入椭圆方程得

$\frac{x^2}{4}+\frac{4x^2}{2}=1$，解得 $x=\pm\frac{2}{3}$，因此 $P(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，$A(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3})$.

于是 $C(\frac{2}{3},0)$，直线 AC 的斜率为$\frac{0+\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=1$，故直线 AB 的方程为 $x-y-\frac{2}{3}=0$.

因此，$d=\frac{\left|\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(3) **解法一**：

将直线 PA 的方程 $y=kx$ 代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，解得 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$. 记$\mu=\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$，

则$P(\mu,\mu k)$，$A(-\mu,-\mu k)$. 于是$C(\mu,0)$. 故直线 AB 的斜率为$\frac{0+\mu k}{\mu+\mu}=\frac{k}{2}$，

其方程为$y=\frac{k}{2}(x-\mu)$，代入椭圆方程得$(2+k^2)x^2-2\mu k^2x-\mu^2(3k^2+2)=0$，

解得 $x=\frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2}$或 $x=-\mu$. 因此 $B(\frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2},\frac{\mu k^3}{2+k^2})$.

于是直线 PB 的斜率 $k_1=\frac{\frac{\mu k^3}{2+k^2}-\mu k}{\frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2}-\mu}=\frac{k^3-k(2+k^2)}{3k^2+2-(2+k^2)}=-\frac{1}{k}$.

因此 $k_1k=-1$，所以 $PA\perp PB$.

解法二：

设 $P(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_1\neq x_2$，$A(-x_1,-y_1)$，$C(x_1,0)$. 设直线 PB，AB 的斜率分别为 k_1，k_2. 因为 C 在直线 AB 上，所以 $k_2=\frac{0-(-y_1)}{x_1-(-x_1)}=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{k}{2}$. 从而

$$k_1k+1=2k_1k_2+1=2\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2-(-y_1)}{x_2-(-x_1)}+1$$
$$=\frac{2y_2^2-2y_1^2}{x_2^2-x_1^2}+1=\frac{(x_2^2+2y_2^2)-(x_1^2+2y_1^2)}{x_2^2-x_1^2}=\frac{4-4}{x_2^2-x_1^2}=0.$$

因此 $k_1k=-1$，所以 $PA\perp PB$.

19. **本小题主要考查函数的概念、性质及导数等基础知识，考查灵活运用数形结合、分类讨论的思想方法进行探索、分析与解决问题的综合能力. 满分 16 分.**

解：$f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2x+b$.

(1) 由题意知$f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在$[-1,+\infty)$上恒成立. 因为 $a>0$，故 $3x^2+a>0$，

进而 $2x+b\geqslant 0$，即 $b\geqslant -2x$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $b\geqslant 2$. 因此 b 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

(2) 令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$.

若 $b>0$，由 $a<0$ 得 $0\in(a,b)$. 又因为 $f'(0)g'(0)=ab<0$，所以函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 上不是单调性一致的. 因此 $b\leqslant 0$.

现设 $b\leqslant 0$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(-\infty,-\sqrt{-\frac{a}{3}})$ 时，$f'(x)>0$. 因此，当 $x\in(-\infty,-\sqrt{-\frac{a}{3}})$ 时，$f'(x)g'(x)<0$. 故由题设得 $a\geqslant-\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 且 $b\geqslant-\sqrt{-\frac{a}{3}}$，从而 $-\frac{1}{3}\leqslant a<0$，于是 $-\frac{1}{3}\leqslant b\leqslant 0$. 因此 $|a-b|\leqslant\frac{1}{3}$，且当 $a=-\frac{1}{3}$，$b=0$ 时等号成立.

又当 $a=-\frac{1}{3}$，$b=0$ 时，$f'(x)g'(x)=6x(x^2-\frac{1}{9})$，从而当 $x\in(-\frac{1}{3},0)$ 时 $f'(x)g'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\frac{1}{3},0)$ 上单调性一致. 因此 $|a-b|$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$.

20. 本小题考查数列的通项与前 n 项和的关系、等差数列的基本性质等基础知识，考查考生分析探究及逻辑推理的能力. 满分 16 分.

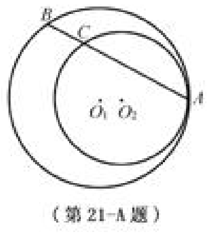
解：(1) 由题设知，当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n+1}+S_{n-1}=2(S_n+S_1)$，即 $(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=2S_1$.
从而 $a_{n+1}-a_n=2a_1=2$. 又 $a_2=2$，故当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=a_2+2(n-2)=2n-2$.
所以 a_5 的值为 8.

(2) 由题设知，当 $k\in M=\{3,4\}$ 且 $n>k$ 时，$S_{n+k}+S_{n-k}=2S_n+2S_k$ 且 $S_{n+1+k}+S_{n+1-k}=2S_{n+1}+2S_k$，两式相减得 $a_{n+1+k}+a_{n+1-k}=2a_{n+1}$，即 $a_{n+1+k}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_{n+1-k}$. 所以当 $n\geqslant 8$ 时，a_{n-6}，a_{n-3}，a_n，a_{n+3}，a_{n+6} 成等差数列，且 a_{n-6}，a_{n-2}，a_{n+2}，a_{n+6} 也成等差数列.
从而当 $n\geqslant 8$ 时，　　$2a_n=a_{n+3}+a_{n-3}=a_{n+6}+a_{n-6}$，　　(＊)
且 $a_{n+6}+a_{n-6}=a_{n+2}+a_{n-2}$. 所以当 $n\geqslant 8$ 时，$2a_n=a_{n+2}+a_{n-2}$，即 $a_{n+2}-a_n=a_n-a_{n-2}$. 于是当 $n\geqslant 9$ 时，a_{n-3}，a_{n-1}，a_{n+1}，a_{n+3} 成等差数列，从而 $a_{n+3}+a_{n-3}=a_{n+1}+a_{n-1}$，故由(＊)式知 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$，即 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$. 当 $n\geqslant 9$ 时，设 $d=a_n-a_{n-1}$.
当 $2\leqslant m\leqslant 8$ 时，$m+6\geqslant 8$，从而由(＊)式知 $2a_{m+6}=a_m+a_{m+12}$，故 $2a_{m+7}=a_{m+1}+a_{m+13}$.
从而 $2(a_{m+7}-a_{m+6})=a_{m+1}-a_m+(a_{m+13}-a_{m+12})$，于是 $a_{m+1}-a_m=2d-d=d$.
因此，$a_{n+1}-a_n=d$ 对任意 $n\geqslant 2$ 都成立. 又由 $S_{n+k}+S_{n-k}-2S_n=2S_k(k\in\{3,4\})$ 可知 $(S_{n+k}-S_n)-(S_n-S_{n-k})=2S_k$，故 $9d=2S_3$ 且 $16d=2S_4$. 解得 $a_4=\frac{7}{2}d$，从而 $a_2=\frac{3}{2}d$，$a_1=\frac{d}{2}$. 因此，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列. 由 $a_1=1$ 知 $d=2$.
所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.

数学Ⅱ（附加题）

21.【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答. 若多做，则按作答的前两题评分.
解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. 选修 4−1：几何证明选讲
（本小题满分 10 分）
如图，圆 O_1 与圆 O_2 内切于点 A，其半径分别为 r_1 与 $r_2(r_1>r_2)$. 圆 O_1 的弦 AB 交圆 O_2 于点 C（O_1 不在 AB 上）. 求证：$AB:AC$ 为定值.



（第 21-A 题）

B. 选修 4−2：矩阵与变换
（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $A^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

C. 选修 4-4：坐标系与参数方程

（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，求过椭圆 $\begin{cases}x=5\cos\varphi,\\y=3\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）的右焦点，且与直线 $\begin{cases}x=4-2t,\\y=3-t\end{cases}$（$t$ 为参数）平行的直线的普通方程.

D. 选修 4-5：不等式选讲

（本小题满分 10 分）

解不等式　$x+|2x-1|<3$.

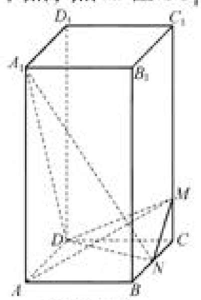
【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22.（本小题满分 10 分）

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，$AB=1$，点 N 是 BC 的中点，点 M 在 CC_1 上. 设二面角 A_1-DN-M 的大小为 θ.

（1）当 $\theta=90°$ 时，求 AM 的长；

（2）当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，求 CM 的长.



（第 22 题）

23.（本小题满分 10 分）

设整数 $n\geqslant 4$，$P(a,b)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点，其中 $a,b\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，$a>b$.

（1）记 A_n 为满足 $a-b=3$ 的点 P 的个数，求 A_n；

（2）记 B_n 为满足 $\dfrac{1}{3}(a-b)$ 是整数的点 P 的个数，求 B_n.

数学Ⅱ（附加题）参考答案

21.【选做题】

A. 选修 4-1：几何证明选讲

本小题主要考查两圆内切、相似比等基础知识，考查推理论证能力. 满分 10 分.

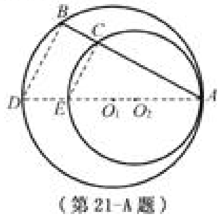
证明： 连结 AO_1，并延长分别交两圆于点 E 和点 D. 连结 BD，CE.

因为圆 O_1 与圆 O_2 内切于点 A，所以点 O_2 在 AD 上. 故 AD，AE 分别为圆 O_1，圆 O_2 的直径.

从而 $\angle ABD=\angle ACE=\dfrac{\pi}{2}$. 所以 $BD\parallel CE$，

于是 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{2r_1}{2r_2}=\dfrac{r_1}{r_2}$.

所以 $AB:AC$ 为定值.



（第 21-A 题）

B. 选修 4-2：矩阵与变换

本小题主要考查矩阵运算等基础知识，考查运算求解能力. 满分 10 分.

解： $A^2=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}$.

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. 由 $A^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，得 $\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，从而 $\begin{cases}3x+2y=1,\\4x+3y=2.\end{cases}$

解得 $x=-1$，$y=2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$.

C. 选修 4-4：坐标系与参数方程

本小题主要考查椭圆及直线的参数方程等基础知识，考查转化问题的能力. 满分 10 分.

解： 由题设知，椭圆的长半轴长 $a=5$，短半轴长 $b=3$，从而 $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$，所以右焦点为 $(4,0)$. 将已知直线的参数方程化为普通方程：$x-2y+2=0$.

故所求直线的斜率为$\frac{1}{2}$，因此其方程为 $y=\frac{1}{2}(x-4)$，即 $x-2y-4=0$.

D. 选修 4-5：不等式选讲

本小题主要考查解绝对值不等式的基础知识，考查分类讨论、运算求解能力. 满分 10 分.

解：原不等式可化为 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ x+(2x-1)<3;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-1<0,\\ x-(2x-1)<3.\end{cases}$

解得 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{4}{3}$ 或 $-2<x<\frac{1}{2}$.

所以原不等式的解集是 $\left\{x\mid -2<x<\frac{4}{3}\right\}$.

22.【必做题】**本小题主要考查空间向量的基础知识，考查运用空间向量解决问题的能力. 满分 10 分.**

解：建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$. 设 $CM=t\ (0\leqslant t\leqslant 2)$，则各点的坐标为$A(1,0,0)$，$A_1(1,0,2)$，$N(\frac{1}{2},1,0)$，$M(0,1,t)$. 所以 $\overrightarrow{DN}=(\frac{1}{2},1,0)$，$\overrightarrow{DM}=(0,1,t)$，$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,2)$.

设平面 DMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则

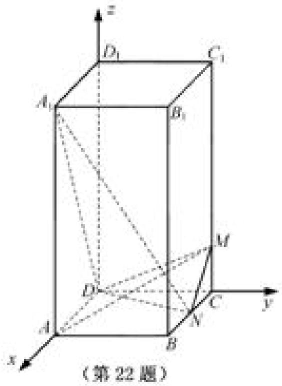
$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DN}=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DM}=0$. 即 $x_1+2y_1=0$，$y_1+tz_1=0$.

令 $z_1=1$，则 $y_1=-t$，$x_1=2t$. 所以 $\boldsymbol{n}_1=(2t,-t,1)$是平面 DMN 的一个法向量.

设平面 A_1DN 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$，$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DN}=0$. 即 $x_2+2z_2=0$，$x_2+2y_2=0$.

令 $z_2=1$，则 $x_2=-2$，$y_2=1$. 所以 $\boldsymbol{n}_2=(-2,1,1)$是平面 A_1DN 的一个法向量. 从而 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-5t+1$.



（第 22 题）

（1）因为 $\theta=90°$，所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-5t+1=0$，解得 $t=\frac{1}{5}$. 从而 $M(0,1,\frac{1}{5})$.

所以 $AM=\sqrt{1^2+1^2+(\frac{1}{5})^2}=\frac{\sqrt{51}}{5}$.

（2）因为 $|\boldsymbol{n}_1|=\sqrt{5t^2+1}$，$|\boldsymbol{n}_2|=\sqrt{6}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-5t+1}{\sqrt{6}\sqrt{5t^2+1}}$.

因为$\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\theta$ 或 $\pi-\theta$，所以 $\left|\frac{-5t+1}{\sqrt{6}\sqrt{5t^2+1}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6}$，解得 $t=0$ 或 $t=\frac{1}{2}$.

根据图形和(1)的结论可知 $t=\frac{1}{2}$，从而 CM 的长为$\frac{1}{2}$.

23.【必做题】**本小题主要考查计数原理，考查探究能力. 满分 10 分.**

解：(1)点 P 的坐标满足条件：$1\leqslant b=a-3\leqslant n-3$，所以 $A_n=n-3$.

(2)设 k 为正整数，记 $f_n(k)$ 为满足题设条件以及 $a-b=3k$ 的点 P 的个数. 只要讨论 $f_n(k)\geqslant 1$的情形. 由 $1\leqslant b=a-3k\leqslant n-3k$ 知 $f_n(k)=n-3k$，且 $k\leqslant\frac{n-1}{3}$.

设 $n-1=3m+r$，其中 $m\in\mathbf{N}^*$，$r\in\{0,1,2\}$，则 $k\leqslant m$. 所以

$$B_n=\sum_{k=1}^{m}f_n(k)=\sum_{k=1}^{m}(n-3k)=mn-\frac{3m(m+1)}{2}=\frac{m(2n-3m-3)}{2}.$$

将 $m=\frac{n-1-r}{3}$代入上式，化简得 $B_n=\frac{(n-1)(n-2)}{6}-\frac{r(r-1)}{6}$.

$$\text{所以 } B_n=\begin{cases}\dfrac{n(n-3)}{6}, & \dfrac{n}{3}\text{是整数},\\ \dfrac{(n-1)(n-2)}{6}, & \dfrac{n}{3}\text{不是整数}.\end{cases}$$