绝密★启用前

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数学试题（理工农医类）

第 I 卷(选择题 共 50 分)

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求的.

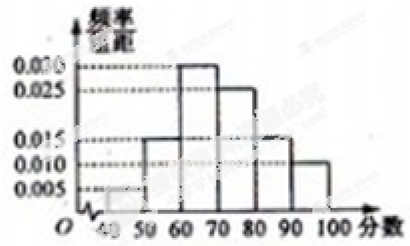
1.已知复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=1+2i$（i 为虚数单位），则 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A.第一象限　B.第二象限　C.第三象限　D.第四象限

2.已知集合 $A=\{1,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的（　　）

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

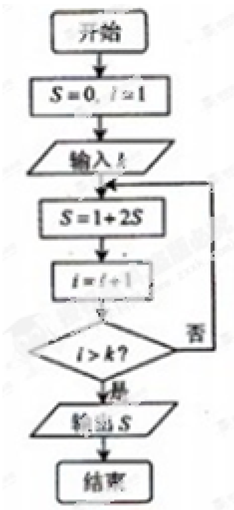


3.双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的顶点到渐进线的距离等于（　　）

A. $\frac{2}{5}$　B. $\frac{4}{5}$　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

4.某校从高一年级学生中随机抽取部分学生，将他们的模块测试成绩分成 6 组：[40,50), [50,60), [60,70), [70,80), [80,90), [90,100]加以统计，得到如图所示的频率分布直方图。已知高一年级共有学生 600 名，据此估计，该模块测试成绩不少于 60 分的学生人数为（　　）

A.588　B.480　C.450　D.120



5.满足 $a,b\in\{-1,0,1,2\}$，且关于 x 的方程 $ax^2+2x+b=0$ 有实数解的有序数对的个数为（　　）

A. 14　B. 13　C. 12　D. 10

6.阅读如图所示的程序框图，若编入的 $k=10$，则该算法的功能是（　　）

A. 计算数列 $\{2^{n-1}\}$ 的前 10 项和　B.计算数列 $\{2^{n-1}\}$ 的前 9 项和

C. 计算数列 $\{2^n -1\}$ 的前 10 项和　D. 计算数列 $\{2^n -1\}$ 的前 9 项和

7. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$,则该四边形的面积为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C.5　　D.10

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$x_0(x_0\neq 0)$是 $f(x)$ 的极大值点，以下结论

一定正确的是（　　）

(2) $\forall x\in R, f(x)\leq f(x_0)$　　B. $-x_0$ 是 $f(\text{-}x)$ 的极小值点

C. $-x_0$ 是 $\text{-}f(x)$ 的极小值点　　D. $-x_0$ 是 $\text{-}f(\text{-}x)$ 的极小值点

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$的公比为 q，记 $b_n=a_{m(n-1)+1}+a_{m(n-1)+2}+\cdots+a_{m(n-1)+m}$，$b_n=a_{m(n-1)+1}*a_{m(n-1)+2}*\cdots*a_{m(n-1)+m}$，$(m,n\in N^*)$，则以下结论一定正确的是（　　）

A. 数列$\{b_n\}$为等差数列，公差为q^m　　B. 数列$\{b_n\}$为等比数列，公比为q^{2m}

C. 数列$\{c_n\}$为等比数列，公比为q^{m^2}　　D. 数列$\{c_n\}$为等比数列，公比为q^{m^m}

10. 设 S,T 是 R 的两个非空子集，如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足：$(i)\ T=\{f(x)|x\in S\}$；(ii) 对任意 $x_1,x_2\in S$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称这两个集合"保序同构"，以下集合对不是"保序同构"的是（　　）

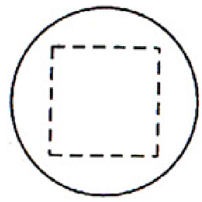
A. $A=N^*, B=N$　　B. $A=\{x|-1\leq x\leq 3\}, B=\{x|x=-8或0<x\leq 10\}$

C. $A=\{x|0<x<1\}, B=R$　　D. $A=Z, B=Q$

第II卷（非选择题　共 100 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．把答案填写在答题卡的相应位置.

11. 利用计算机产生$0\sim1$之间的均匀随机数a，则事件‘$3a-1<0$’的概率为_________.



12. 已知某一多面体内接于球构成一个简单组合体，如果该组合体的正视图、俯视图、均如图所示，且图中的四边形是边长为 2 的正方形，则该球的表面积是_________.

13. 如图，在ΔABC中，已知点D在BC边上，$AD\perp AC$，$\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$AB=3\sqrt{2}$，$AD=3$，则$BD$的长为________.

14. 椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，焦距为$2c$，若直线$y=\sqrt{3}(x+c)$与椭圆的一个交点满足$\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$，则该椭圆的离心率等于_____.

15. 当$x\in R,|x|<1$时，有如下表达式：

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

两边同时积分得：$\int_0^{\frac{1}{2}}1dx+\int_0^{\frac{1}{2}}xdx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx+\cdots\int_0^{\frac{1}{2}}x^ndx+\cdots=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx$

从而得到如下等式：

$$1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+\frac{1}{n+1}\times(\frac{1}{2})^{n+1}+\cdots=\ln 2.$$

请根据以上材料所蕴含的数学思想方法，计算：

$C_n^0\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}C_n^1\times(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3}C_n^2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n\times(\frac{1}{2})^{n+1}=$___________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（本小题满分 13 分）

某联欢晚会举行抽奖活动，举办方设置了甲、乙两种抽奖方案，方案甲的中奖率为$\frac{2}{3}$，中奖可以获得 2 分；方案乙的中奖率为$\frac{2}{5}$，中奖可以获得 3 分；未中奖则不得分。每人有且只有一次抽奖机会，每次抽奖中奖与否互不影响，晚会结束后凭分数兑换奖品。

（1）若小明选择方案甲抽奖，小红选择方案乙抽奖，记他们的累计得分为X，求$X\leq 3$的概率；

（2）若小明、小红两人都选择方案甲或都选择方案乙进行抽奖，问：他们选择何种方案抽奖，累计得分的数学期望较大？

17.（本小题满分 13 分）

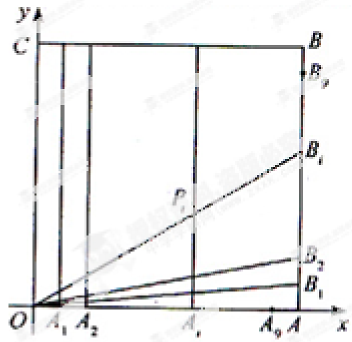
已知函数$f(x)=x-a\ln x(a\in R)$

（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 的极值.

18.（本小题满分 13 分）

如图，在正方形 $OABC$ 中，O 为坐标原点，点 A 的坐标为 $(10,0)$，点 C 的坐标为 $(0,10)$，分别将线段 OA 和 AB 十等分，分点分别记为 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_9$，连接 OB_i，过 A_i 作 x 轴的垂线与 OB_i 交于点 P_i $(i\in N^*,1\le i\le 9)$。



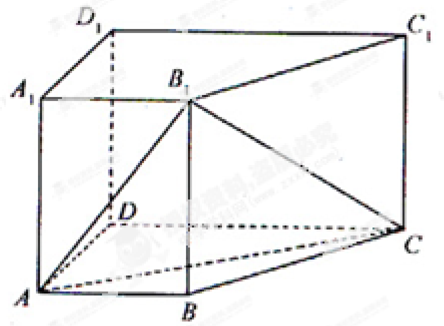
（1）求证：点 P_i $(i\in N^*,1\le i\le 9)$ 都在同一条抛物线上，并求抛物线 E 的方程；

（2）过点 C 作直线 l 与抛物线 E 交于不同的两点 M,N，若 ΔOCM 与 ΔOCN 的面积之比为 4:1，求直线 l 的方程。

19.（本小题满分 13 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，

$AB // DC, AA_1=1, AB=3k, AD=4k, BC=5k, DC=6k, (k>0)$



（1）求证：$CD\perp$ 平面 ADD_1A_1

（2）若直线 AA_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值为 $\frac{6}{7}$，求 k 的值

（3）现将与四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 形状和大小完全相同的两个四棱柱拼成一个新的四棱柱，规定：若拼成的新四棱柱形状和大小完全相同，则视为同一种拼接方案，问共有几种不同的拼接方案？在这些拼接成的新四棱柱中，记其中最小的表面积为 $f(k)$，写出 $f(k)$ 的解析式。（直接写出答案，不必说明理由）

20.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin(wx+\varphi)(w>0,0<\varphi<\pi)$ 的周期为 π，图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$，将函数

$f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向右平移个 $\frac{\pi}{2}$ 单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象。

（1）求函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式

（2）是否存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，使得 $f(x_0),g(x_0),f(x_0)g(x_0)$ 按照某种顺序成等差数列？若存在，请确定 x_0 的个数，若不存在，说明理由；

（3）求实数 a 与正整数 n，使得 $F(x)=f(x)+ag(x)$ 在 $\left(0,n\pi\right)$ 内恰有 2013 个零点

21. 本小题设有(1)、(2)、(3)三个选考题，每题 7 分，请考生任选 2 题作答，满分 14 分.如果多做，则按所做的前两题计分.

(1). (本小题满分 7 分) 选修 4-2：矩阵与变换

已知直线 $l:ax+y=1$ 在矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ 对应的变换作用下变为直线 $l':x+by=1$

（I）求实数 a,b 的值

（II）若点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 l 上，且 $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，求点 P 的坐标

(2).(本小题满分 7 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.已知点 A 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=a$，且点 A 在直线 l 上。

（Ⅰ）求 a 的值及直线 l 的直角坐标方程;

（Ⅱ）圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos a,\\ y=\sin a\end{cases}(a\text{为参数})$，试判断直线 l 与圆 C 的位置关系.

(3).(本小题满分 7 分) 选修 4-5：不等式选讲

设不等式 $|x-2|<a(a\in N^*)$ 的解集为 A,且 $\frac{3}{2}\in A,\frac{1}{2}\notin A$

（Ⅰ）求 a 的值

（Ⅱ）求函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$ 的最小值