

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、选择题：（本大题共12题，1-6题每题4分，7-12题每题5分，共54分）

1. 已知集合 $A = (-\infty, 3)$ 、 $B = (2, +\infty)$ ，则 $A \cap B =$ _____.
2. 已知 $z \in \mathbb{C}$ 且满足 $\frac{1}{z} - 5 = i$ ，求 $z =$ _____.
3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 1, 0)$ ，则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 _____.
4. 已知二项式 $(2x+1)^5$ ，则展开式中含 x^2 项的系数为 _____.
5. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 2 \end{cases}$ ，求 $z = 2x - 3y$ 的最小值为 _____.
6. 已知函数 $f(x)$ 周期为1，且当 $0 < x \leq 1$ ， $f(x) = -\log_2 x$ ，则 $f(\frac{3}{2}) =$ _____.
7. 若 $x, y \in \mathbb{R}^+$ ，且 $\frac{1}{x} + 2y = 3$ ，则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 _____.
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n + a_n = 2$ ，则 $S_5 =$ _____.
9. 过 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 并垂直于 x 轴的直线分别与 $y^2 = 4x$ 交于 A, B ， A 在 B 上方， M 为抛物线上一点， $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + (\lambda - 2) \overrightarrow{OB}$ ，则 $\lambda =$ _____.
10. 某三位数密码锁，每位数字在0-9数字中选取，其中恰有两位数字相同的概率是 _____.
11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)， $P_n(n, a_n)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ 上，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n P_{n+1}| =$ _____.
12. 已知 $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - a \right|$ ($x > 1, a > 0$)，若 $a = a_0$ ， $f(x)$ 与 x 轴交点为 A ， $f(x)$ 为曲线 L ，在 L 上任意一点 P ，总存在一点 Q (P 异于 A) 使得 $AP \perp AQ$ 且 $|AP| = |AQ|$ ，则 $a_0 =$ _____.

二.选择题（本大题共4题，每题5分，共20分）

13. 已知直线方程 $2x - y + c = 0$ 的一个方向向量 \vec{d} 可以是 ()

- A. $(2, -1)$ B. $(2, 1)$ C. $(-1, 2)$ D. $(1, 2)$

14. 一个直角三角形的两条直角边长分别为1和2，将该三角形分别绕其两个直角边旋转得到的两个圆锥的体积之比为 ()

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

15. 已知 $\omega \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = (x-6)^2 \cdot \sin(\omega x)$ ，存在常数 $a \in \mathbb{R}$ ，使得 $f(x+a)$ 为偶函数，则 ω 可能的值为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{5}$

16. 已知 $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)$.

①存在 α 在第一象限，角 β 在第三象限；

②存在 α 在第二象限，角 β 在第四象限；

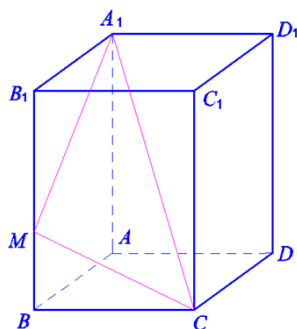
- A. ①②均正确； B. ①②均错误； C. ①对，②错； D. ①错，②对；

三.解答题（本大题共5题，共76分）

17. (本题满分14分) 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 为 BB_1 上一点，已知 $BM = 2$ ， $AD = 4$ ， $CD = 3$ ， $AA_1 = 5$.

(1) 求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角；

(2) 求点 A 到平面 A_1MC 的距离.



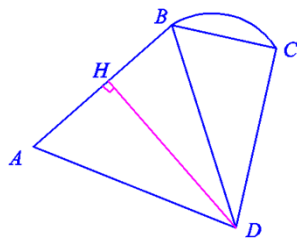
18. (本题满分14分) 已知 $f(x) = ax + \frac{1}{x+1}$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $a = 1$ 时，求不等式 $f(x) + 1 < f(x+1)$ 的解集；

(2) 若 $x \in [1, 2]$ 时， $f(x)$ 有零点，求 a 的范围.

19. (本题满分14分) 如图， $A - B - C$ 为海岸线， AB 为线段， \widehat{BC} 为四分之一圆弧， $BD = 39.2 \text{ km}$ ， $\angle BDC = 22^\circ$ ， $\angle CBD = 68^\circ$ ， $\angle BDA = 58^\circ$.

- (1) 求 \widehat{BC} 长度;
 (2) 若 $AB = 40\text{km}$, 求 D 到海岸线 $A-B-C$ 的最短距离. (精确到 0.001km)



20. (本题满分16分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, F_1, F_2 为左、右焦点, 直线 l 过 F_2 交椭圆于 A, B 两点.

- (1) 若 AB 垂直于 x 轴时, 求 $|AB|$;
 (2) 当 $\angle F_1AB = 90^\circ$ 时, A 在 x 轴上方时, 求 A, B 的坐标;
 (3) 若直线 AF_1 交 y 轴于 M , 直线 BF_1 交 y 轴于 N , 是否存在直线 l , 使 $S_{\triangle F_1AB} = S_{\triangle F_1MN}$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (本题满分18分)

数列 $\{a_n\}$ 有100项, $a_1 = a$, 对任意 $n \in [2, 100]$, 存在 $a_n = a_i + d, i \in [1, n-1]$, 若 a_k 与前 n 项中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P .

- (1) 若 $a_1 = 1$, 求 a_4 可能的值;
 (2) 若 $\{a_n\}$ 不为等差数列, 求证: $\{a_n\}$ 中存在满足性质 P ;
 (3) 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P , 这三项和为 C , 使用 a, d, c 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$.

