

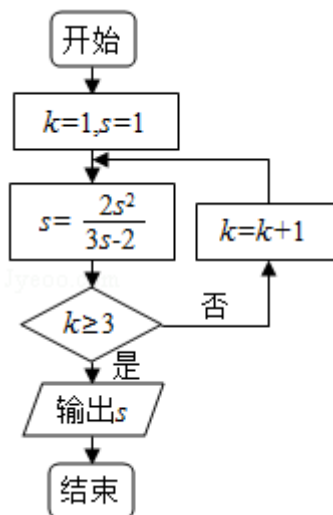
2019年北京市高考数学试卷（理科）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. （5分）已知复数 $z=2+i$ ，则 $z \cdot \bar{z} =$ （ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. 5

2. （5分）执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为（ ）



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. （5分）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \end{cases}$ （ t 为参数），则点 $(1, 0)$ 到直线 l 的距离是（ ）

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{6}{5}$

4. （5分）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ （ $a > b > 0$ ）的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，则（ ）

- A. $a^2 = 2b^2$ B. $3a^2 = 4b^2$ C. $a = 2b$ D. $3a = 4b$

5. （5分）若 x, y 满足 $|x| \leq 1 - y$ ，且 $y \geq -1$ ，则 $3x + y$ 的最大值为（ ）

- A. -7 B. 1 C. 5 D. 7

6. （5分）在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述。两颗星的星等与亮度

满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ ，其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k （ $k=1, 2$ ）。已知太阳的星等是

-26.7，天狼星的星等是-1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为（ ）

A. $10^{10.1}$

B. 10.1

C. $\lg 10.1$

D. $10^{-10.1}$

7. (5分) 设点 A, B, C 不共线, 则“ \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

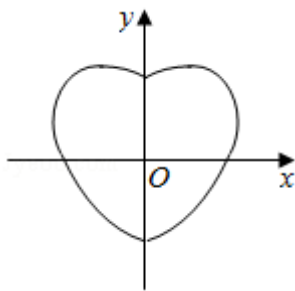
8. (5分) 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 曲线 $C: x^2 + y^2 = 1 + |x|y$ 就是其中之一 (如图). 给出下列三个结论:

① 曲线 C 恰好经过6个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);

② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$;

③ 曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于3.

其中, 所有正确结论的序号是 ()



A. ①

B. ②

C. ①②

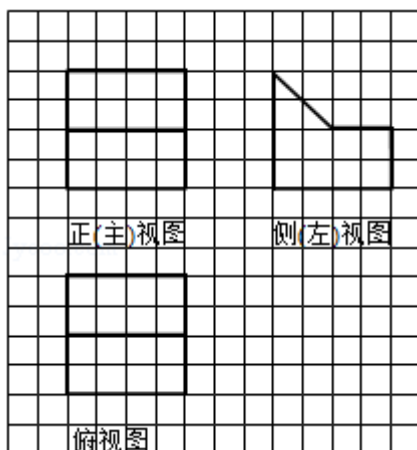
D. ①②③

二、填空题共6小题, 每小题5分, 共30分。

9. (5分) 函数 $f(x) = \sin^2 2x$ 的最小正周期是_____.

10. (5分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = -3$, $S_5 = -10$, 则 $a_5 =$ _____, S_n 的最小值为_____.

11. (5分) 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为1, 那么该几何体的体积为_____.



12. (5分) 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

- ① $l \perp m$; ② $m \parallel \alpha$; ③ $l \perp \alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: _____

13. (5分) 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____

; 若 $f(x)$ 是 R 上的增函数, 则 a 的取值范围是_____.

14. (5分) 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为60元/盒、65元/盒、80元/盒、90元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到120元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的80%.

①当 $x=10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各1盒, 需要支付_____元;

②在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为_____.

三、解答题共6小题, 共80分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (13分) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b-c=2$, $\cos B = -\frac{1}{2}$.

(I) 求 b, c 的值;

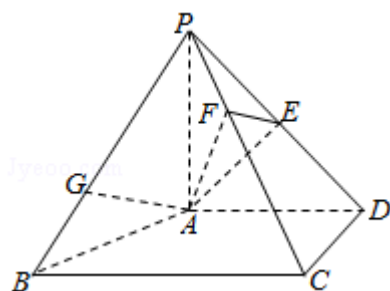
(II) 求 $\sin(B-C)$ 的值.

16. (14分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $PA=AD=CD=2$, $BC=3$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$.

(I) 求证: $CD \perp$ 平面 PAD ;

(II) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值;

(III) 设点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内, 说明理由.



17. (13分) 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A , B 两种移动支付的使用情况, 从全校学生中随机抽取了100人, 发现样本中 A , B 两种支付方式都不使用的有5人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付方式 \ 支付金额 (元)	(0, 1000]	(1000, 2000]	大于2000
仅使用 A	18人	9人	3人
仅使用 B	10人	14人	1人

(I) 从全校学生中随机抽取1人, 估计该学生上个月 A , B 两种支付方式都使用的概率;

(II) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取1人, 以 X 表示这2人中上个月支付金额大于1000元的人数, 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 A 的学生中, 随机抽查3人, 发现他们本月的支付金额都大于2000元. 根据抽查结果, 能否认为样本

仅使用4的学生中本月支付金额大于2000元的人数有变化？说明理由.

18. (14分) 已知抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$.

(I) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(II) 设 O 为原点, 过抛物线 C 的焦点作斜率不为0的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N , 直线 $y = -1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B . 求证: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

19. (13分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为1的切线方程;

(II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$;

(III) 设 $F(x) = |f(x) - (x+a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$.

(a). 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

20. (13分) 已知数列 $\{a_n\}$, 从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、 \cdots 、第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \cdots < i_m$), 若 $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_m}$, 则称新数列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列.
- 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为1的递增子列.
- (I) 写出数列1, 8, 3, 7, 5, 6, 9的一个长度为4的递增子列;
- (II) 已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0} , 长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0} . 若 $p < q$, 求证: $a_{n_0} < a_{n_0}$;
- (III) 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且任意两项均不相等. 若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s - 1$, 且长度为 s 末项为 $2s - 1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 ($s=1, 2, \cdots$), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.