

2016年天津市高考数学试卷（文科）

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

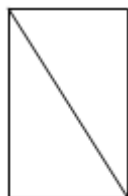
1. （5分）（2016•天津）已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ， $B=\{y|y=2x-1, x\in A\}$ ，则 $A\cap B=$ （ ）

A. $\{1, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

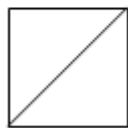
2. （5分）（2016•天津）甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$ ，甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$ ，则甲不输的概率为（ ）

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

3. （5分）（2016•天津）将一个长方体沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥，得到的几何体的正视图与俯视图如图所示，则该几何体的侧（左）视图为（ ）



正视图



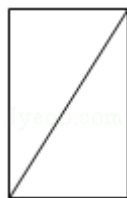
俯视图



A.



B.



C.



D.

4. （5分）（2016•天津）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ （ $a>0, b>0$ ）的焦距为 $2\sqrt{5}$ ，且双曲线的一条渐近线与直线 $2x+y=0$ 垂直，则双曲线的方程为（ ）

A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{3x^2}{20} - \frac{3y^2}{5} = 1$ D. $\frac{3x^2}{5} - \frac{3y^2}{20} = 1$

5. （5分）（2016•天津）设 $x>0, y\in\mathbb{R}$ ，则“ $x>y$ ”是“ $x>|y|$ ”的（ ）

A. 充要条件 B. 充分不必要条件

C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

6. (5分) (2016•天津) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 若实数 a 满足 $f(2^{|a|-1}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

7. (5分) (2016•天津) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形, 点D、E分别是边AB、BC的中点, 连接DE并延长到点F, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为()

- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{11}{8}$

8. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbb{R}$, 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是()

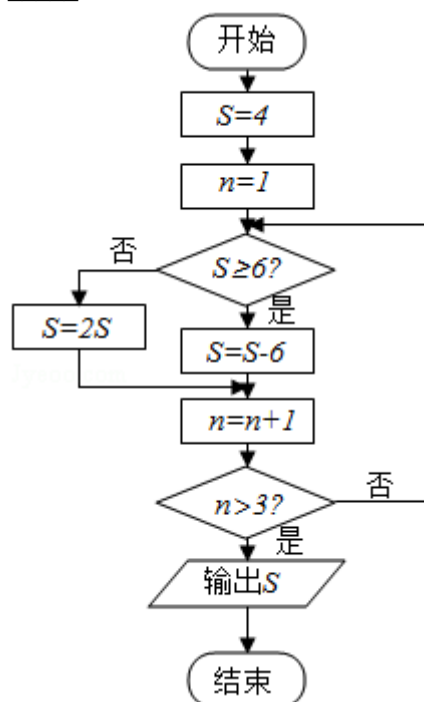
- A. $(0, \frac{1}{8}]$ B. $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$ C. $(0, \frac{5}{8}]$ D. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

二、填空题本大题6小题, 每题5分, 共30分

9. (5分) (2016•天津) i 是虚数单位, 复数 z 满足 $(1+i)z=2$, 则 z 的实部为_____.

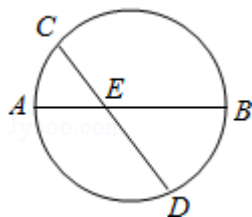
10. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = (2x+1)e^x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(0)$ 的值为_____.

11. (5分) (2016•天津) 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为_____.



12. (5分) (2016•天津) 已知圆C的圆心在x轴正半轴上, 点 $(0, \sqrt{5})$ 圆C上, 且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 则圆C的方程为_____.

13. (5分) (2016•天津) 如图, AB是圆的直径, 弦CD与AB相交于点E, $BE=2AE=2$, $BD=ED$, 则线段CE的长为_____.



14. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)

在 \mathbb{R} 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共6小题, 80分

15. (13分) (2016•天津) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin 2B = \sqrt{3} b \sin A$.

(1) 求 B ;

(2) 已知 $\cos A = \frac{1}{3}$, 求 $\sin C$ 的值.

16. (13分) (2016•天津) 某化工厂生产甲、乙两种混合肥料, 需要 A, B, C 三种主要原料, 生产1扯皮甲种肥料和生产1车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如表所示:

原料 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有 A 种原料200吨, B 种原料360吨, C 种原料300吨, 在此基础上生产甲、乙两种肥料. 已知生产1车皮甲种肥料, 产生的利润为2万元; 生产1车皮乙种肥料, 产生的利润为3万元. 分别用 x, y 表示计划生产甲、乙两种肥料的车皮数.

(1) 用 x, y 列出满足生产条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

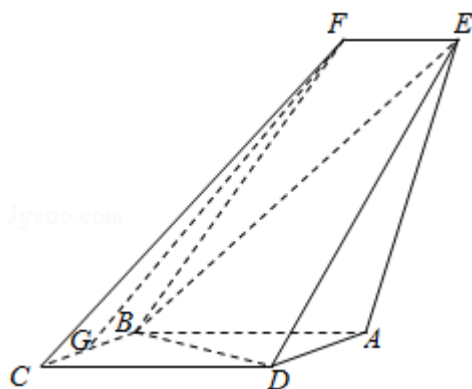
(2) 问分别生产甲、乙两种肥料, 求出此最大利润.

17. (13分) (2016•天津) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$, $E \parallel AB$, $AB=2$, $DE=3$, $BC=EF=1$, $AE=\sqrt{6}$, $\angle BAD=60^\circ$, G 为 BC 的中点.

(1) 求证: $FG \parallel$ 平面 BED ;

(2) 求证: 平面 $BED \perp$ 平面 AED ;

(3) 求直线 EF 与平面 BED 所成角的正弦值.



18. (13分) (2016•天津) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$, $S_6 = 63$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和.

19. (14分) (2016•天津) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 已知

$$\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|},$$

其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H , 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA = \angle MAO$, 求直线 l 的斜率.

20. (14分) (2016•天津) 设函数 $f(x) = x^3 - ax - b$, $x \in \mathbb{R}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 0$;

(3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

2016年天津市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

1. （5分）（2016•天津）已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ， $B=\{y|y=2x-1, x\in A\}$ ，则 $A\cap B=$ （ ）

A. $\{1, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

【分析】根据题意，将集合B用列举法表示出来，可得 $B=\{1, 3, 5\}$ ，由交集的定义计算可得答案.

【解答】解：根据题意，集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ，而 $B=\{y|y=2x-1, x\in A\}$ ，

则 $B=\{1, 3, 5\}$ ，

则 $A\cap B=\{1, 3\}$ ，

故选：A.

【点评】本题考查集合的运算，注意集合B的表示方法.

2. （5分）（2016•天津）甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$ ，甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$ ，则甲不输的概率为（ ）

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

【分析】利用互斥事件的概率加法公式即可得出.

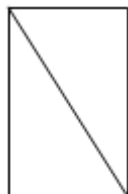
【解答】解： \because 甲不输与甲、乙两人下成和棋是互斥事件.

\therefore 根据互斥事件的概率计算公式可知：甲不输的概率 $P=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

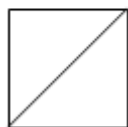
故选：A.

【点评】本题考查互斥事件与对立事件的概率公式，关键是判断出事件的关系，然后选择合适的概率公式，属于基础题.

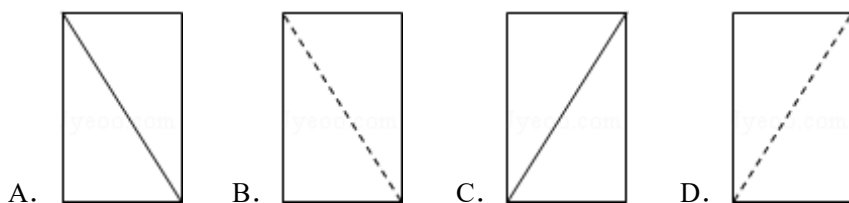
3. （5分）（2016•天津）将一个长方体沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥，得到的几何体的正视图与俯视图如图所示，则该几何体的侧（左）视图为（ ）



正视图

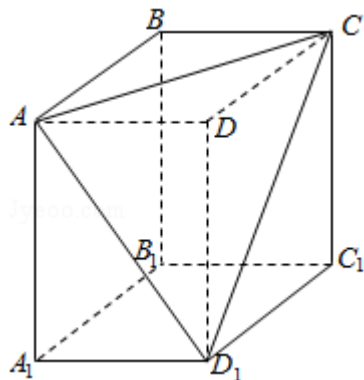


俯视图



【分析】根据主视图和俯视图作出几何体的直观图，找出所切棱锥的位置，得出答案.

【解答】解：由主视图和俯视图可知切去的棱锥为 $D - AD_1C$,



棱 CD_1 在左侧面的投影为 BA_1 ,
故选B.

【点评】本题考查了棱锥，棱柱的结构特征，三视图，考查空间想象能力，属于基础题.

4. (5分) (2016•天津) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且双曲线的一条渐近线与直线 $2x + y = 0$ 垂直, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
C. $\frac{3x^2}{20} - \frac{3y^2}{5} = 1$ D. $\frac{3x^2}{5} - \frac{3y^2}{20} = 1$

【分析】利用双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且双曲线的一条渐近线与直线 $2x + y = 0$ 垂直, 求出几何量 a, b, c , 即可求出双曲线的方程.

【解答】解: \because 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$,

$$\therefore c = \sqrt{5},$$

\because 双曲线的一条渐近线与直线 $2x + y = 0$ 垂直,

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a = 2b,$$

$$\because c^2 = a^2 + b^2,$$

∴a=2, b=1,

∴双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

故选: A.

【点评】本题考查双曲线的方程与性质, 考查待定系数法的运用, 确定双曲线的几何量是关键.

5. (5分) (2016•天津) 设 $x>0, y\in\mathbb{R}$, 则“ $x>y$ ”是“ $x>|y|$ ”的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【分析】直接根据必要性和充分判断即可.

【解答】解: 设 $x>0, y\in\mathbb{R}$, 当 $x=0, y=-1$ 时, 满足 $x>y$ 但不满足 $x>|y|$, 故由 $x>0, y\in\mathbb{R}$, 则“ $x>y$ ”推不出“ $x>|y|$ ”,

而“ $x>|y|$ ” \Rightarrow “ $x>y$ ”,

故“ $x>y$ ”是“ $x>|y|$ ”的必要不充分条件,

故选: C.

【点评】本题考查了不等式的性质、充要条件的判定, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

6. (5分) (2016•天津) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

【分析】根据函数的对称性可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减, 故只需令 $2^{|a-1|} < \sqrt{2}$ 即可.

【解答】解: ∵ $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

∴ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

∴ $2^{|a-1|} > 0, f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$,

∴ $2^{|a-1|} < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.

∴ $|a-1| < \frac{1}{2}$,

解得 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$.

故选: C.

【点评】本题考查了函数的单调性, 奇偶性的性质, 属于中档题.

7. (5分) (2016•天津) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形, 点D、E分别是边AB、BC的中点, 连接DE并延长到点F, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{11}{8}$

【分析】由题意画出图形, 把 \overrightarrow{AF} 、 \overrightarrow{BC} 都用 \overrightarrow{BA} 、 \overrightarrow{BC} 表示, 然后代入数量积公式得答案.

【解答】解: 如图,


$$\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= -\frac{5}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{8}.$$

【点评】 本题考查平面向量的数量积运算，考查向量加减法的三角形法则，是中档题.

在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{8}]$ B. $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$ C. $(0, \frac{5}{8}]$ D. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

【分析】函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$, 由 $f(x) = 0$, 可得 $\sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) = 0$, 解得 x

$$= \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega} \notin (\pi, 2\pi), \text{ 因此 } \omega \notin (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{8}, \frac{5}{4}) \cup (\frac{9}{8}, \frac{9}{4}) \cup \dots = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup$$

 $(\frac{5}{8}, +\infty)$, 即可得出.

【解答】解：函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos \omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$,

由 $f(x) = 0$, 可得 $\sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) = 0$,

$$\text{解得 } x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega} \notin (\pi, 2\pi),$$

$$\therefore \omega \notin (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{8}, \frac{5}{4}) \cup (\frac{9}{8}, \frac{9}{4}) \cup \dots = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{8}, +\infty),$$

∵ $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点,

$$\therefore \omega \in (0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}].$$

故选: D.

【点评】本题考查了三角函数的图象与性质、不等式的解法, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

二、填空题本大题6小题, 每题5分, 共30分

9. (5分) (2016•天津) i 是虚数单位, 复数 z 满足 $(1+i)z=2$, 则 z 的实部为 1.

【分析】把已知等式变形, 然后利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【解答】解: 由 $(1+i)z=2$,

$$\text{得 } z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i,$$

∴ z 的实部为 1.

故答案为: 1.

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算, 考查了复数的基本概念, 是基础题.

10. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = (2x+1)e^x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(0)$ 的值为 3.

【分析】先求导, 再带值计算.

【解答】解: ∵ $f(x) = (2x+1)e^x$,

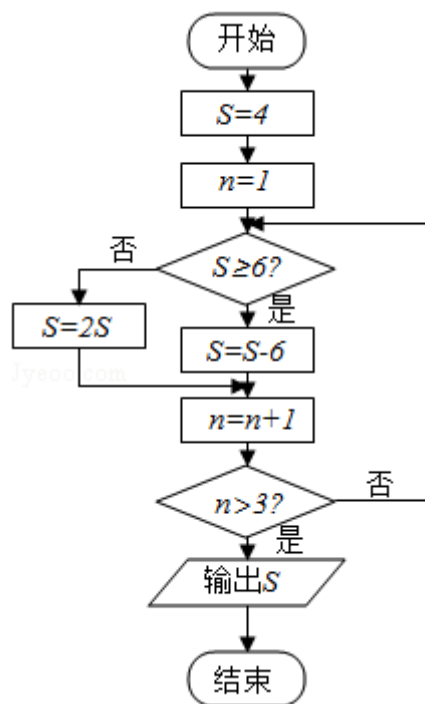
$$\therefore f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x,$$

$$\therefore f'(0) = 2e^0 + (2 \times 0 + 1)e^0 = 2 + 1 = 3.$$

故答案为: 3.

【点评】本题考查了导数的运算法则, 属于基础题.

11. (5分) (2016•天津) 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为 4.



【分析】根据循环结构，结合循环的条件，求出最后输出S的值.

【解答】解：第一次循环：S=8，n=2；

第二次循环：S=2，n=3；

第三次循环：S=4，n=4，

结束循环，输出S=4，

故答案为：4.

【点评】本题主要考查程序框图，循环结构，注意循环的条件，属于基础题.

12. (5分) (2016•天津) 已知圆C的圆心在x轴正半轴上，点 $(0, \sqrt{5})$ 圆C上，且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，则圆C的方程为 $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

【分析】由题意设出圆的方程，把点M的坐标代入圆的方程，结合圆心到直线的距离列式求解.

【解答】解：由题意设圆的方程为 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ ($a > 0$)，

由点M $(0, \sqrt{5})$ 在圆上，且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，

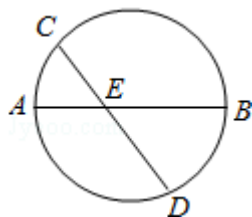
$$\text{得} \begin{cases} a^2 + 5 = r^2 \\ \frac{|2a|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}, \text{解得} a=2, r=3.$$

∴圆C的方程为： $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

故答案为： $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

【点评】本题考查圆的标准方程，训练了点到直线的距离公式的应用，是中档题.

13. (5分) (2016•天津) 如图，AB是圆的直径，弦CD与AB相交于点E，BE=2AE=2，BD=ED，则线段CE的长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



【分析】由 $BD=ED$ ，可得 $\triangle BDE$ 为等腰三角形，过 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ，由相交弦定理求得 DH ，在 $Rt\triangle DHE$ 中求出 DE ，再由相交弦定理求得 CE 。

【解答】解：如图，

过 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ，

$\because BE=2AE=2$ ， $BD=ED$ ，

$\therefore BH=HE=1$ ，则 $AH=2$ ， $BH=1$ ，

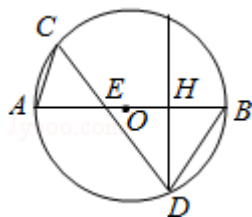
$\therefore DH^2=AH \cdot BH=2$ ，则 $DH=\sqrt{2}$ ，

在 $Rt\triangle DHE$ 中，则 $DE=\sqrt{DH^2+HE^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$ ，

由相交弦定理可得： $CE \cdot DE=AE \cdot EB$ ，

$$\therefore CE=\frac{AE \cdot EB}{DE}=\frac{1 \times 2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。



【点评】本题考查与圆有关的比例线段，考查相交弦定理的应用，是中档题。

14. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+(4a-3)x+3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1)+1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$)

在 R 上单调递减，且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-\frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围

是 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 。

【分析】由减函数可知 $f(x)$ 在两段上均为减函数，且在第一段的最小值大于或等于第二段上的最大值，作出 $|f(x)|$ 和 $y=2-\frac{x}{3}$ 的图象，根据交点个数判断 $3a$ 与 2 的大小关系，列出不等式组解出。

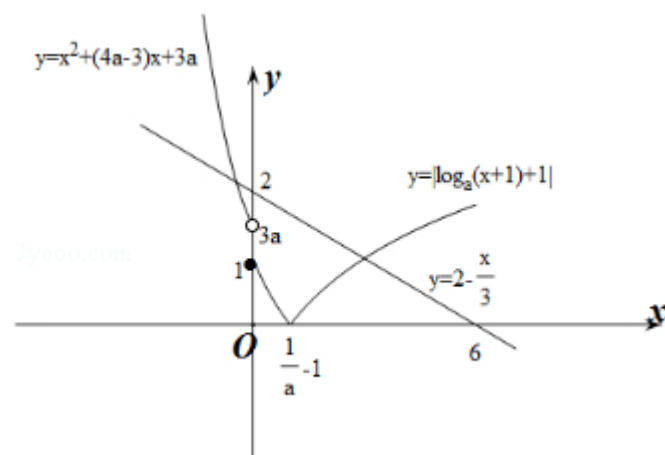
【解答】解： $\because f(x)$ 是 R 上的单调递减函数，

$\therefore y=x^2+(4a-3)x+3a$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减， $y=\log_a(x+1)+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的最小值大于或等于 $f(0)$ 。

$$\therefore \begin{cases} \frac{3-4a}{2} \geq 0 \\ 0 < a < 1 \\ 3a \geq 1 \end{cases}, \text{解得 } \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{4}.$$

作出 $y=|f(x)|$ 和 $y=2-\frac{x}{3}$ 的函数草图如图所示:



$\therefore |f(x)|=2-\frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解,

$$\therefore 3a < 2, \text{即 } a < \frac{2}{3}.$$

$$\text{综上, } \frac{1}{3} \leq a < \frac{2}{3}.$$

$$\text{故答案为 } \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

【点评】 本题考查了分段函数的单调性, 函数零点的个数判断, 结合函数函数图象判断端点值的大小是关键, 属于中档题.

三、解答题: 本大题共6小题, 80分

15. (13分) (2016•天津) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin 2B = \sqrt{3} b \sin A$.

(1) 求 B ;

(2) 已知 $\cos A = \frac{1}{3}$, 求 $\sin C$ 的值.

【分析】 (1) 利用正弦定理将边化角即可得出 $\cos B$;

(2) 求出 $\sin A$, 利用两角和的正弦函数公式计算.

【解答】 解: (1) $\because a \sin 2B = \sqrt{3} b \sin A$,
 $\therefore 2 \sin A \sin B \cos B = \sqrt{3} \sin B \sin A$,
 $\therefore \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore B = \frac{\pi}{6}.$

(2) $\because \cos A = \frac{1}{3}, \therefore \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3},$

$$\therefore \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{6}+1}{6}.$$

【点评】本题考查了正弦定理解三角形，两角和的正弦函数，属于基础题.

16. (13分) (2016•天津) 某化工厂生产甲、乙两种混合肥料，需要A, B, C三种主要原料，生产1车皮甲种肥料和生产1车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如表所示：

原料 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有A种原料200吨，B种原料360吨，C种原料300吨，在此基础上生产甲、乙两种肥料.

已知生产1车皮甲种肥料，产生的利润为2万元；生产1车皮乙种肥料，产生的利润为3万元、分别用 x, y 表示计划生产甲、乙两种肥料的车皮数.

(1) 用 x, y 列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域；

(2) 问分别生产甲、乙两种肥料，求出此最大利润.

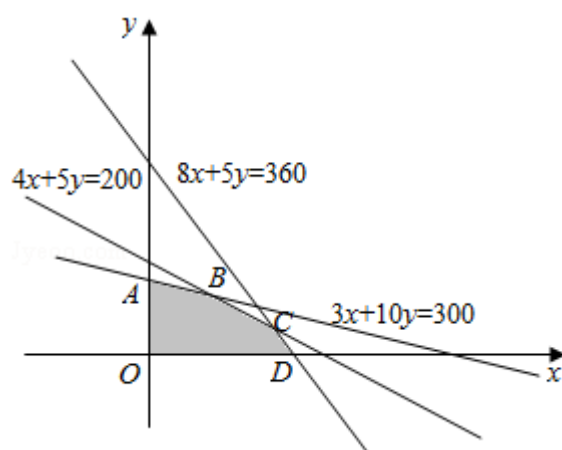
【分析】(1) 根据原料的吨数列出不等式组，作出平面区域；

(2) 令利润 $z=2x+3y$ ，则 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ ，结合可行域找出最优解的位置，列方程组解出最优解.

【解答】解：(1) x, y 满足的条件关系式为：

$$\begin{cases} 4x+5y \leq 200 \\ 8x+5y \leq 360 \\ 3x+10y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

作出平面区域如图所示：



(2) 设利润为 z 万元，则 $z=2x+3y$.

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}.$$

\therefore 当直线 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}$ 经过点B时，截距 $\frac{z}{3}$ 最大，即 z 最大.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} 4x+5y=200 \\ 3x+10y=300 \end{cases} \text{ 得 } B(20, 24).$$

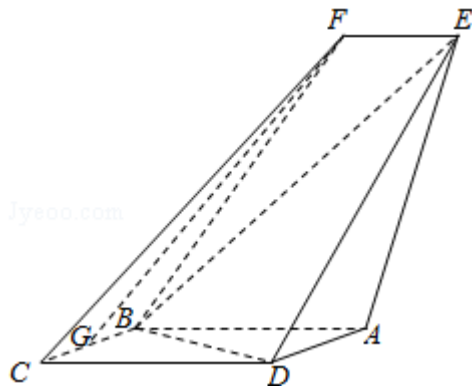
∴z的最大值为 $2 \times 20 + 3 \times 24 = 112$.

答：当生产甲种肥料20吨，乙种肥料24吨时，利润最大，最大利润为112万元.

【点评】本题考查了简单的线性规划的应用，抽象概括能力和计算求解能力，属于中档题.

17. (13分) (2016•天津) 如图，四边形ABCD是平行四边形，平面AED⊥平面ABCD，E F∥AB，AB=2，DE=3，BC=EF=1， $AE=\sqrt{6}$ ，∠BAD=60°，G为BC的中点.

- (1) 求证：FG∥平面BED；
- (2) 求证：平面BED⊥平面AED；
- (3) 求直线EF与平面BED所成角的正弦值.



【分析】(1) 利用中位线定理，和平行公理得到四边形OGEF是平行四边形，再根据线面平行的判定定理即可证明；

(2) 根据余弦定理求出 $BD=\sqrt{3}$ ，继而得到 $BD \perp AD$ ，再根据面面垂直的判定定理即可证明；

(3) 先判断出直线EF与平面BED所成的角即为直线AB与平面BED所形成的角，再根据余弦定理和解直角三角形即可求出答案.

【解答】证明：(1) BD的中点为O，连接OE，OG，在△BCD中，

∵G是BC的中点，

∴ $OG \parallel DC$ ，且 $OG = \frac{1}{2}DC = 1$ ，

又∵ $EF \parallel AB$ ， $AB \parallel DC$ ，

∴ $EF \parallel OG$ ，且 $EF = OG$ ，

即四边形OGEF是平行四边形，

∴ $FG \parallel OE$ ，

∵ $FG \not\subset$ 平面BED， $OE \subset$ 平面BED，

∴ $FG \parallel$ 平面BED；

(2) 证明：在△ABD中， $AD=1$ ， $AB=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ，

由余弦定理可得 $BD=\sqrt{3}$ ，仅而 $\angle ADB=90^\circ$ ，

即 $BD \perp AD$ ，

又∵平面AED⊥平面ABCD，

$BD \subset$ 平面ABCD，平面AED∩平面ABCD=AD，

∴ $BD \perp$ 平面AED，

∵ $BD \subset$ 平面BED，

∴平面BED⊥平面AED.

(Ⅲ) $\because EF \parallel AB$,

\therefore 直线EF与平面BED所成的角即为直线AB与平面BED所形成的角,

过点A作 $AH \perp DE$ 于点H, 连接BH,

又平面BED \cap 平面AED = ED,

由(2)知 $AH \perp$ 平面BED,

\therefore 直线AB与平面BED所成的角为 $\angle ABH$,

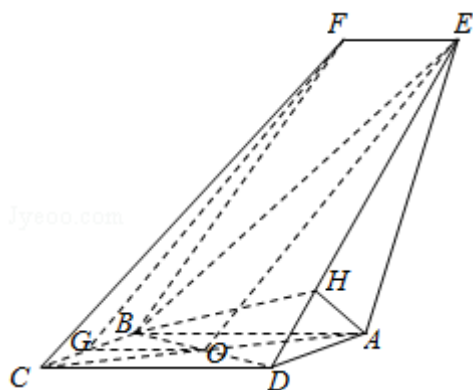
在 $\triangle ADE$, $AD=1$, $DE=3$, $AE=\sqrt{6}$, 由余弦定理得 $\cos \angle ADE = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \sin \angle ADE = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore AH = AD \cdot \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{在 Rt} \triangle AHB \text{ 中, } \sin \angle ABH = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{6},$$

\therefore 直线EF与平面BED所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{5}}{6}$



【点评】 本题考查了直线与平面的平行和垂直, 平面与平面的垂直, 直线与平面所成的角, 考查了空间想象能力, 运算能力和推理论证能力, 属于中档题.

18. (13分) (2016•天津) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前n项和为 S_n ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$, $S_6=63$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前2n项和.

【分析】 (1) 根据等比数列的通项公式列方程解出公比q, 利用求和公式解出 a_1 , 得出通项公式;

(2) 利用对数的运算性质求出 b_n , 使用分项求和法和平方差公式计算.

【解答】 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为q, 则 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 q} = \frac{2}{a_1 q^2}$, 即 $1 - \frac{1}{q} = \frac{2}{q^2}$,

解得 $q=2$ 或 $q=-1$.

若 $q = -1$ ，则 $S_6 = 0$ ，与 $S_6 = 63$ 矛盾，不符合题意. $\therefore q = 2$ ，

$$\therefore S_6 = \frac{a_1(1-2^6)}{1-2} = 63, \therefore a_1 = 1.$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1}.$$

(2) $\because b_n$ 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项，

$$\therefore b_n = \frac{1}{2} (\log_2 a_n + \log_2 a_{n+1}) = \frac{1}{2} (\log_2 2^{n-1} + \log_2 2^n) = n - \frac{1}{2}.$$

$$\therefore b_{n+1} - b_n = 1.$$

$\therefore \{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，以 1 为公差的等差数列.

设 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 n 项和为 T_n ，则

$$T_n = (-b_1^2 + b_2^2) + (-b_3^2 + b_4^2) + \dots + (-b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2)$$

$$= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \dots + b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2$$

$$= \frac{b_1^2 + b_{2n}^2}{2} \cdot 2n = \frac{\frac{1}{4} + 2n - \frac{1}{4}}{2} \cdot 2n$$

$$= 2n^2.$$

【点评】 本题考查了等差数列，等比数列的性质，分项求和的应用，属于中档题.

19. (14分) (2016•天津) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为 F ，右顶点为 A ，已知

$$\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|},$$
 其中 O 为原点， e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于 B (B 不在 x 轴上)，垂直于 l 的直线与 l 交于点 M ，与 y 轴交于点 H ，若 $BF \perp HF$ ，且 $\angle MOA = \angle MAO$ ，求直线 l 的斜率.

【分析】 (1) 由题意画出图形，把 $|OF|$ 、 $|OA|$ 、 $|FA|$ 代入 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$ ，转化为关于 a 的方程，解方程求得 a 值，则椭圆方程可求;

(2) 由已知设直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$ ，($k \neq 0$)，联立直线方程和椭圆方程，化为关于 x 的一元二次方程，利用根与系数的关系求得 B 的坐标，再写出 MH 所在直线方程，求出 H 的坐标，由 $BF \perp HF$ ，得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HF} = (1 - x_1, -y_1) \cdot (1, -y_H) = 0$ ，整理得到 M 的坐标与 k 的关系，由 $\angle MOA = \angle MAO$ ，得到 $x_0 = 1$ ，转化为关于 k 的等式求得 k 的值.

【解答】 解: (1) 由 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$,

$$\text{得 } \frac{1}{\sqrt{a^2 - 3}} + \frac{1}{a} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{a^2 - 3}}{a}}{a - \sqrt{a^2 - 3}},$$

$$\text{即 } \frac{a+\sqrt{a^2-3}}{a\sqrt{a^2-3}} = \frac{3\sqrt{a^2-3}}{a(a-\sqrt{a^2-3})},$$

$$\therefore a[a^2 - (a^2 - 3)] = 3a(a^2 - 3), \text{ 解得 } a=2.$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

(2) 由已知设直线 \$l\$ 的方程为 \$y=k(x-2)\$, \$(k \neq 0)\$,

设 \$B(x_1, y_1)\$, \$M(x_0, k(x_0-2))\$,

$$\because \angle MOA = \angle MAO,$$

$$\therefore x_0 = 1,$$

再设 \$H(0, y_H)\$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0.$$

$$\Delta = (-16k^2)^2 - 4(3+4k^2)(16k^2 - 12) = 144 > 0.$$

$$\text{由根与系数的关系得 } 2x_1 = \frac{16k^2 - 12}{3+4k^2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{8k^2 - 6}{3+4k^2}, \quad y_1 = k(x_1 - 2) = \frac{-12k}{3+4k^2},$$

$$MH \text{ 所在直线方程为 } y - k(x_0 - 2) = -\frac{1}{k}(x - x_0),$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 得 } y_H = (k + \frac{1}{k})x_0 - 2k,$$

$$\because BF \perp HF,$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HF} = (1 - x_1, -y_1) \cdot (1, -y_H) = 0,$$

$$\text{即 } 1 - x_1 + y_1 y_H = 1 - \frac{8k^2 - 6}{3+4k^2} - \frac{12k}{3+4k^2} \left[(k + \frac{1}{k})x_0 - 2k \right] = 0,$$

$$\text{整理得: } x_0 = \frac{9+20k^2}{12(k^2+1)} = 1, \text{ 即 } 8k^2 = 3.$$

$$\therefore k = -\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 或 } k = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

【点评】 本题考查椭圆方程的求法，考查直线与椭圆位置关系的应用，体现了“整体运算”思想方法和“设而不求”的解题思想方法，考查运算能力，是难题.

20. (14分) (2016•天津) 设函数 \$f(x) = x^3 - ax - b\$, \$x \in \mathbb{R}\$, 其中 \$a, b \in \mathbb{R}\$.

(1) 求 \$f(x)\$ 的单调区间;

(2) 若 \$f(x)\$ 存在极值点 \$x_0\$, 且 \$f(x_1) = f(x_0)\$, 其中 \$x_1 \neq x_0\$, 求证: \$x_1 + 2x_0 = 0\$;

(3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【分析】(1) 求出 $f(x)$ 的导数, 讨论 $a \leq 0$ 时 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上递增; 当 $a > 0$ 时, 由导数大于 0, 可得增区间; 导数小于 0, 可得减区间;

(2) 由条件判断出 $a > 0$, 且 $x_0 \neq 0$, 由 $f'(x_0) = 0$ 求出 x_0 , 分别代入解析式化简 $f(x_0)$, $f(-2x_0)$, 化简整理后可得证;

(3) 设 $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值 M , 根据极值点与区间的关系对 a 分三种情况讨论, 运用 $f(x)$ 单调性和前两问的结论, 求出 $g(x)$ 在区间上的取值范围, 利用 a 的范围化简整理后求出 M , 再利用不等式的性质证明结论成立.

【解答】解: (1) 若 $f(x) = x^3 - ax - b$, 则 $f'(x) = 3x^2 - a$, 分两种情况讨论:

①、当 $a \leq 0$ 时, 有 $f'(x) = 3x^2 - a \geq 0$ 恒成立,

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$,

②、当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 3x^2 - a = 0$, 解得 $x = -\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 或 $x = \frac{\sqrt{3a}}{3}$,

当 $x > \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 或 $x < -\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $f'(x) = 3x^2 - a > 0$, $f(x)$ 为增函数,

当 $-\frac{\sqrt{3a}}{3} < x < \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $f'(x) = 3x^2 - a < 0$, $f(x)$ 为减函数,

故 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty)$, 减区间为 $(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3})$;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 则必有 $a > 0$, 且 $x_0 \neq 0$,

由题意可得, $f'(x) = 3x^2 - a$, 则 $x_0^2 = \frac{a}{3}$,

进而 $f(x_0) = x_0^3 - ax_0 - b = -\frac{2a}{3}x_0 - b$,

又 $f(-2x_0) = -8x_0^3 + 2ax_0 - b = -\frac{8}{3}x_0^3 + 2ax_0 - b = f(x_0)$,

由题意及 (I) 可得: 存在唯一的实数 x_1 , 满足 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$,

则有 $x_1 = -2x_0$, 故有 $x_1 + 2x_0 = 0$;

(III) 设 $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值 M , $\max\{x, y\}$ 表示 x, y 两个数的最大值, 下面分三种情况讨论:

① 当 $a \geq 3$ 时, $-\frac{\sqrt{3a}}{3} \leq -1 < 1 \leq \frac{\sqrt{3a}}{3}$,

由 (I) 知 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的取值范围是 $[f(1), f(-1)]$,

因此 $M = \max\{|f(1)|, |f(-1)|\} = \max\{|1 - a - b|, |-1 + a - b|\}$

$$= \max\{|a - 1 + b|, |a - 1 - b|\} = \begin{cases} a - 1 + b, & b \geq 0 \\ a - 1 - b, & b < 0 \end{cases}$$

所以 $M = a - 1 + |b| \geq 2$

② 当 $\frac{3}{4} \leq a < 3$ 时, $-\frac{2\sqrt{3a}}{3} \leq -1 < -\frac{\sqrt{3a}}{3} < \frac{\sqrt{3a}}{3} < 1 \leq \frac{2\sqrt{3a}}{3}$,

由 (I)、(II) 知, $f(-1) \geq f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3a}}{3})$, $f(1) \leq f(\frac{2\sqrt{3a}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的取值范围是 $[f(\frac{\sqrt{3a}}{3}), f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})]$,

因此 $M = \max\{|f(\frac{\sqrt{3a}}{3})|, |f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})|\} = \max\{|\frac{2a}{9}\sqrt{3a} - b|, |\frac{2a}{9}\sqrt{3a} + b|\}$
 $= \max\{|\frac{2a}{9}\sqrt{3a} + b|, |\frac{2a}{9}\sqrt{3a} - b|\} = \frac{2a}{9}\sqrt{3a} + |b| \geq \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{3 \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}$,

③ 当 $0 < a < \frac{3}{4}$ 时, $-1 < -\frac{2\sqrt{3a}}{3} < \frac{2\sqrt{3a}}{3} < 1$,

由 (I)、(II) 知, $f(-1) < f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3a}}{3})$, $f(1) > f(\frac{2\sqrt{3a}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的取值范围是 $[f(-1), f(1)]$,

因此 $M = \max\{|f(-1)|, |f(1)|\} = \max\{|-1 + a - b|, |1 - a - b|\}$
 $= \max\{|1 - a + b|, |1 - a - b|\} = 1 - a + |b| > \frac{1}{4}$,

综上所述, 当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【点评】 本题考查导数的运用: 求单调区间和最值, 不等式的证明, 注意运用分类讨论的思想方法和转化思想, 考查分析法在证明中的应用, 以及化简整理、运算能力, 属于难题.

