

绝密 ★ 启用前

## 2008年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

### 数学（文史类）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至10页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

### 第Ⅰ卷

注意事项：

1.答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、科目涂写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。

2.每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试卷上的无效。

3.本卷共10小题，每小题5分，共50分。

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么 球的表面积公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad S = 4\pi R^2.$$

如果事件A，B相互独立，那么 其中R表示球的半径.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

一、选择题：在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.

(1) 设集合  $U = \{x \in N \mid 0 < x \leq 8\}$ ， $S = \{1, 2, 4, 5\}$ ， $T = \{3, 5, 7\}$ ，则  $S \cap (\complement_U T) =$

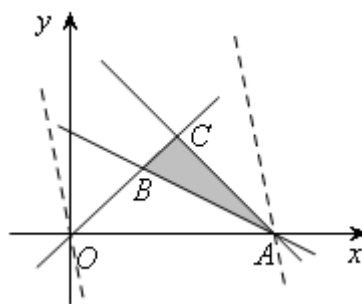
(A)  $\{1, 2, 4\}$  (B)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$  (C)  $\{1, 2\}$  (D)  $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

解析：因为  $\complement_U T = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ ，所以  $S \cap (\complement_U T) = \{1, 2, 4\}$ ，选A.

(2) 设变量  $x, y$  满足约束条件 
$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 1 \end{cases}$$
，则目标函数  $z = 5x + y$  的最大值为

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

解析：如图，由图象可知目标函数  $z = 5x + y$  过点  $A(1, 0)$  时  $z$  取得最大值， $z_{\max} = 5$ ，选D.



(3) 函数  $y = 1 + \sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 4$ ) 的反函数是

- (A)  $y = (x-1)^2$  ( $1 \leq x \leq 3$ )      (B)  $y = (x-1)^2$  ( $0 \leq x \leq 4$ )  
(C)  $y = x^2 - 1$  ( $1 \leq x \leq 3$ )      (D)  $y = x^2 - 1$  ( $0 \leq x \leq 4$ )

解析：当  $0 \leq x \leq 4$  时， $1 + \sqrt{x} \in [1, 3]$ ，解  $y = 1 + \sqrt{x}$  得  $f^{-1}(x) = (x-1)^2$ ，选A.

(4) 若等差数列  $\{a_n\}$  的前5项和  $S_5 = 25$ ，且  $a_2 = 3$ ，则  $a_7 =$

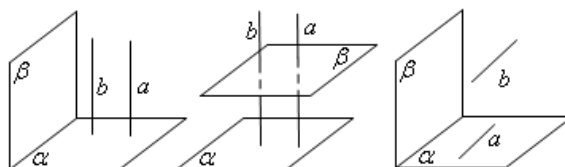
- (A) 12      (B) 13      (C) 14      (D) 15

解析： $S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(a_2 + a_4)}{2} \Rightarrow a_4 = 7$ ，所以  $a_7 = a_2 + 5d = a_2 + 5 \cdot \frac{a_4 - a_2}{2} = 13$ ，选B.

(5) 设  $a, b$  是两条直线， $\alpha, \beta$  是两个平面，则  $a \perp b$  的一个充分条件是

- (A)  $a \perp \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$       (B)  $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$   
(C)  $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$       (D)  $a \subset \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$

解析：选C，A、B、D的反例如图.



(6) 把函数  $y = \sin x$  ( $x \in R$ ) 的图象上所有点向左平行移动  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度，再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍（纵坐标不变），得到的图象所表示的函数是

- (A)  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ,  $x \in R$       (B)  $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ ,  $x \in R$   
(C)  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ,  $x \in R$       (D)  $y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ ,  $x \in R$

解析：选C,

$$y = \sin x \xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位}} y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{横坐标缩短到原来的 } \frac{1}{2} \text{ 倍}} y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}).$$

(7) 设椭圆  $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$  ( $m > 0, n > 0$ ) 的右焦点与抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点相同，离心

率为 $\frac{1}{2}$ ，则此椭圆的方程为

(A)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{64} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

解析：抛物线的焦点为 $(2,0)$ ，椭圆焦点在 $x$ 轴上，排除A、C，由 $e = \frac{1}{2}$ 排除D，选B.

(8) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ -x+2, & x > 0 \end{cases}$ ，则不等式  $f(x) \geq x^2$  的解集是

(A)  $[-1,1]$  (B)  $[-2,2]$  (C)  $[-2,1]$  (D)  $[-1,2]$

解析：依题意得  $\begin{cases} x \leq 0 \\ x+2 \geq x^2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x > 0 \\ -x+2 \geq x^2 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$  或  $0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ ，选A

.

(9) 设  $a = \sin \frac{5\pi}{7}$ ， $b = \cos \frac{2\pi}{7}$ ， $c = \tan \frac{2\pi}{7}$ ，则

(A)  $a < b < c$  (B)  $a < c < b$  (C)  $b < c < a$  (D)  $b < a < c$

解析：  $a = \sin \frac{2\pi}{7}$ ，因为  $\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ ，所以  $0 < \cos \frac{2\pi}{7} < \sin \frac{2\pi}{7} < 1 < \tan \frac{2\pi}{7}$ ，选

D.

(10) 设  $a > 1$ ，若对于任意的  $x \in [a, 2a]$ ，都有  $y \in [a, a^2]$  满足方程  $\log_a x + \log_a y = 3$

，这时  $a$  的取值集合为

(A)  $\{a \mid 1 < a \leq 2\}$  (B)  $\{a \mid a \geq 2\}$  (C)  $\{a \mid 2 \leq a \leq 3\}$  (D)  $\{2, 3\}$

解析：易得  $y = \frac{a^3}{x}$ ，在  $[a, 2a]$  上单调递减，所以  $y \in [\frac{a^2}{2}, a^2]$ ，故  $\begin{cases} \frac{a^2}{2} \geq a \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a \geq 2$ ，选

B.

## 第II卷

注意事项：

1. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。
2. 用钢笔或圆珠笔直接答在试卷上
3. 本卷共12小题，共100分。

二、填空题（本大题共6个小题，每小题4分，共24分.把答案填在题中横线上.）

(11) 一个单位共有职工200人，其中不超过45岁的有120人，超过45岁的有80人. 为了调查职工的健康状况，用分层抽样的方法从全体职工中抽取一个容量为25的样本，应抽取超过45岁的职工\_\_\_\_\_人.

解析：依题意知抽取超过45岁的职工为  $\frac{25}{200} \times 80 = 10$  .

(12)  $(x + \frac{2}{x})^5$  的二项展开式中,  $x^3$  的系数是\_\_\_\_\_ (用数字作答) .

解析:  $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \cdot (\frac{2}{x})^r = 2^r C_5^r x^{5-2r}$ ,  $r=1$ , 所以系数为10.

(13) 若一个球的体积为  $4\sqrt{3}\pi$ , 则它的表面积为\_\_\_\_\_.

解析: 由  $\frac{4\pi}{3} R^3 = 4\sqrt{3}\pi$  得  $R = \sqrt{3}$ , 所以  $S = 4\pi R^2 = 12\pi$  .

(14) 已知平面向量  $\vec{a} = (2, 4)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2)$ . 若  $\vec{c} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$ , 则  $|\vec{c}| =$ \_\_\_\_\_.

解析: 因为  $\vec{c} = (2, 4) - 6(-1, 2) = (8, -8)$ , 所以  $|\vec{c}| = 8\sqrt{2}$  .

(15) 已知圆C的圆心与点  $P(-2, 1)$  关于直线  $y = x + 1$  对称. 直线  $3x + 4y - 11 = 0$  与圆C相交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = 6$ , 则圆C的方程为\_\_\_\_\_.

解析: 圆心的坐标为  $(0, -1)$ , 所以  $r^2 = 3^2 + \frac{(-4-11)^2}{5^2} = 18$ , 圆的方程为

$$x^2 + (y+1)^2 = 18.$$

(16) 有4张分别标有数字1, 2, 3, 4的红色卡片和4张分别标有数字1, 2, 3, 4的蓝色卡片, 从这8张卡片中取出4张卡片排成一行. 如果取出的4张卡片所标数字之和等于10, 则不同的排法共有\_\_\_\_\_种 (用数字作答) .

解析: 数字之和为10的情况有4, 4, 1, 1、 4, 3, 2, 1、 3, 3, 2, 2.

所以共有  $2A_4^4 + 2^4 A_4^4 = 18A_4^4 = 432$  种不同排法.

### 三、解答题 (本题共6道大题, 满分76分)

(17) (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = 2\cos^2 \omega x + 2\sin \omega x \cos \omega x + 1$  ( $x \in R, \omega > 0$ ) 的最小值正周期是  $\frac{\pi}{2}$ .

(I) 求  $\omega$  的值;

(II) 求函数  $f(x)$  的最大值, 并且求使  $f(x)$  取得最大值的  $x$  的集合.

(17) 本小题主要考查特殊角三角函数值、两角和的正弦、二倍角的正弦与余弦、函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的性质等基础知识, 考查基本运算能力. 满分12分.

(I) 解:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + \sin 2\omega x + 1 \\
&= \sin 2\omega x + \cos 2\omega x + 2 \\
&= \sqrt{2} \left( \sin 2\omega x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\omega x \sin \frac{\pi}{4} \right) + 2 \\
&= \sqrt{2} \sin \left( 2\omega x + \frac{\pi}{4} \right) + 2
\end{aligned}$$

由题设, 函数  $f(x)$  的最小正周期是  $\frac{\pi}{2}$ , 可得  $\frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\omega = 2$ .

(II) 由 (I) 知,  $f(x) = \sqrt{2} \sin \left( 4x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$ .

当  $4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , 即  $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$  时,  $\sin \left( 4x + \frac{\pi}{4} \right)$  取得最大值 1, 所以函数

$f(x)$  的最大值是  $2 + \sqrt{2}$ , 此时  $x$  的集合为  $\left\{ x \mid x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

(18) (本小题满分 12 分)

甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球, 命中率分别为  $\frac{1}{2}$  与  $p$ , 且乙投球 2 次均未命中的概率为  $\frac{1}{16}$ .

(I) 求乙投球的命中率  $p$ ;

(II) 求甲投球 2 次, 至少命中 1 次的概率;

(III) 若甲、乙两人各投球 2 次, 求两人共命中 2 次的概率.

(18) 本小题主要考查随机事件、互斥事件、相互独立事件等概率的基础知识, 考查运用概率知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

(I) 解法一: 设“甲投球一次命中”为事件 A, “乙投球一次命中”为事件 B.

由题意得  $(1 - P(B))^2 = (1 - p)^2 = \frac{1}{16}$

解得  $p = \frac{3}{4}$  或  $\frac{5}{4}$  (舍去), 所以乙投球的命中率为  $\frac{3}{4}$ .

解法二: 设“甲投球一次命中”为事件 A, “乙投球一次命中”为事件 B.

由题意得  $P(\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{16}$ , 于是  $P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$  或  $P(\bar{B}) = -\frac{1}{4}$  (舍去), 故  $p = 1 - P(\bar{B}) = \frac{3}{4}$ .

所以乙投球的命中率为  $\frac{3}{4}$ .

(II) 解法一: 由题设和 (I) 知  $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ .

故甲投球2次至少命中1次的概率为  $1 - P(\bar{A} \cdot \bar{A}) = \frac{3}{4}$

解法二:

由题设和 (I) 知  $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$

故甲投球2次至少命中1次的概率为  $C_2^1 P(A)P(\bar{A}) + P(A)P(A) = \frac{3}{4}$

(III) 由题设和 (I) 知,  $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{4}, P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$

甲、乙两人各投球2次, 共命中2次有三种情况: 甲、乙两人各中一次; 甲中两次, 乙两次均不中; 甲两次均不中, 乙中2次。概率分别为

$$C_2^1 P(A)P(\bar{A}) \cdot C_2^1 P(B)P(\bar{B}) = \frac{3}{16},$$

$$P(A \cdot A)P(\bar{B} \cdot \bar{B}) = \frac{1}{64},$$

$$P(\bar{A} \cdot \bar{A})P(B \cdot B) = \frac{9}{64}$$

所以甲、乙两人各投两次, 共命中2次的概率为  $\frac{3}{16} + \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{11}{32}$ .

(19) (本小题满分12分)

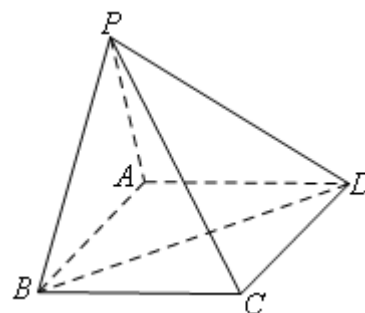
如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形. 已知

$AB = 3, AD = 2, PA = 2, PD = 2\sqrt{2}, \angle PAB = 60^\circ$ .

(I) 证明  $AD \perp$  平面  $PAB$ ;

(II) 求异面直线  $PC$  与  $AD$  所成的角的大小;

(III) 求二面角  $P-BD-A$  的大小.



(19) 本小题主要考查直线和平面垂直, 异面直线所成的角、二面角等基础知识, 考查空间想象能力, 运算能力和推理论证能力. 满分12分.

(I) 证明: 在  $\triangle PAD$  中, 由题设  $PA = 2, PD = 2\sqrt{2}$  可得

$PA^2 + AD^2 = PD^2$  于是  $AD \perp PA$ . 在矩形  $ABCD$  中,  $AD \perp AB$ . 又  $PA \cap AB = A$ ,

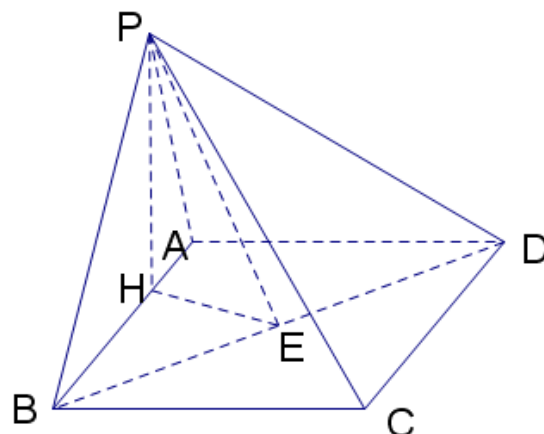
所以  $AD \perp$  平面  $PAB$ .

(II) 解: 由题设,  $BC \parallel AD$ , 所以  $\angle PCB$  (或其补角) 是异面直线  $PC$  与  $AD$  所成的角.

在  $\triangle PAB$  中, 由余弦定理得

$$PB = \sqrt{PA^2 + AB^2 - 2PA \cdot AB \cdot \cos PAB} = \sqrt{7}$$

由 (I) 知  $AD \perp$  平面  $PAB$ ,  $PB \subset$  平面  $PAB$ , 所以  $AD \perp PB$ , 因而  $BC \perp PB$ , 于是  $\triangle PBC$  是直角三



角形, 故  $\tan PCB = \frac{PB}{BC} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

所以异面直线  $PC$  与  $AD$  所成的角的大小为  $\arctan \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

(III) 解: 过点  $P$  做  $PH \perp AB$  于  $H$ , 过点  $H$  做  $HE \perp BD$  于  $E$ , 连结  $PE$   
因为  $AD \perp$  平面  $PAB$ ,  $PH \subset$  平面  $PAB$ , 所以  $AD \perp PH$ . 又  $AD \cap AB = A$ ,  
因而  $PH \perp$  平面  $ABCD$ , 故  $HE$  为  $PE$  再平面  $ABCD$  内的射影. 由三垂线定理可知,  
 $BD \perp PE$ , 从而  $\angle PEH$  是二面角  $P-BD-A$  的平面角。

由题设可得,

$$PH = PA \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}, AH = PA \cdot \cos 60^\circ = 1,$$

$$BH = AB - AH = 2, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{13},$$

$$HE = \frac{AD}{BD} \cdot BH = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\text{于是再 } RT\triangle PHE \text{ 中, } \tan PEH = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

所以二面角  $P-BD-A$  的大小为  $\arctan \frac{\sqrt{39}}{4}$ .

(20) (本小题满分12分)

在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , 且  $a_{n+1} = (1+q)a_n - qa_{n-1}$  ( $n \geq 2, q \neq 0$ ).

(I) 设  $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n \in N^*$ ), 证明  $\{b_n\}$  是等比数列;

(II) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(III) 若  $a_3$  是  $a_6$  与  $a_9$  的等差中项, 求  $q$  的值, 并证明: 对任意的  $n \in N^*$ ,  $a_n$  是  $a_{n+3}$  与  $a_{n+6}$  的等差中项.

(20) 本小题主要考查等差数列、等比数列的概念、等比数列的通项公式及前  $n$  项和公式, 考查运算能力和推理论证能力及分类讨论的思想方法. 满分12分.

(I) 证明: 由题设  $a_{n+1} = (1+q)a_n - qa_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ), 得

$$a_{n+1} - a_n = q(a_n - a_{n-1}), \text{ 即 } b_n = qb_{n-1}, n \geq 2.$$

又  $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ ,  $q \neq 0$ , 所以  $\{b_n\}$  是首项为1, 公比为  $q$  的等比数列.

(II) 解法: 由 (I)

$$a_2 - a_1 = 1,$$

$$a_3 - a_2 = q,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = q^2, \quad (n \geq 2).$$

将以上各式相加, 得  $a_n - a_1 = 1 + q + \cdots + q^{n-2} \quad (n \geq 2)$ .

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}, & q \neq 1, \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

上式对  $n = 1$  显然成立.

(III) 解: 由 (II), 当  $q = 1$  时, 显然  $a_3$  不是  $a_6$  与  $a_9$  的等差中项, 故  $q \neq 1$ .

$$\text{由 } a_3 - a_6 = a_9 - a_3 \text{ 可得 } q^5 - q^2 = q^2 - q^8, \text{ 由 } q \neq 0 \text{ 得 } q^3 - 1 = 1 - q^6, \quad \textcircled{1}$$

整理得  $(q^3)^2 + q^3 - 2 = 0$ , 解得  $q^3 = -2$  或  $q^3 = 1$  (舍去). 于是  $q = -\sqrt[3]{2}$ .

$$\text{另一方面, } a_n - a_{n+3} = \frac{q^{n+2} - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{q^{n-1}}{1 - q} (q^3 - 1),$$

$$a_{n+6} - a_n = \frac{q^{n+5} - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{q^{n-1}}{1 - q} (1 - q^6).$$

由①可得  $a_n - a_{n+3} = a_{n+6} - a_n, \quad n \in N^*.$

所以对任意的  $n \in N^*$ ,  $a_n$  是  $a_{n+3}$  与  $a_{n+6}$  的等差中项.

(21) (本小题满分14分)

已知函数  $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + b \quad (x \in R)$ , 其中  $a, b \in R$ .

(I) 当  $a = -\frac{10}{3}$  时, 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(II) 若函数  $f(x)$  仅在  $x = 0$  处有极值, 求  $a$  的取值范围;

(III) 若对于任意的  $a \in [-2, 2]$ , 不等式  $f(x) \leq 1$  在  $[-1, 1]$  上恒成立, 求  $b$  的取值范围.

(21) 本小题主要考查利用导数研究函数的单调性、函数的最大值、解不等式等基础知识, 考查综合分析和解决问题的能力. 满分14分.

(I) 解:  $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 4x = x(4x^2 + 3ax + 4).$

当  $a = -\frac{10}{3}$  时,  $f'(x) = x(4x^2 - 10x + 4) = 2x(2x - 1)(x - 2).$



令  $f'(x)=0$ ，解得  $x_1=0$ ， $x_2=\frac{1}{2}$ ， $x_3=2$ 。

当  $x$  变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$  的变化情况如下表：

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	—	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$ ， $(2, +\infty)$  内是增函数，在  $(-\infty, 0)$ ， $(\frac{1}{2}, 2)$  内是减函数。

(II) 解：  $f'(x)=x(4x^2+3ax+4)$ ，显然  $x=0$  不是方程  $4x^2+3ax+4=0$  的根。

为使  $f(x)$  仅在  $x=0$  处有极值，必须  $4x^2+3ax+4 \geq 0$  成立，即有  $\Delta=9a^2-64 \leq 0$ 。

解些不等式，得  $-\frac{8}{3} \leq a \leq \frac{8}{3}$ 。这时， $f(0)=b$  是唯一极值。

因此满足条件的  $a$  的取值范围是  $[-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}]$ 。

(III) 解：由条件  $a \in [-2, 2]$ ，可知  $\Delta=9a^2-64 < 0$ ，从而  $4x^2+3ax+4 > 0$  恒成立。

当  $x < 0$  时， $f'(x) < 0$ ；当  $x > 0$  时， $f'(x) > 0$ 。

因此函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最大值是  $f(1)$  与  $f(-1)$  两者中的较大者。

为使对任意的  $a \in [-2, 2]$ ，不等式  $f(x) \leq 1$  在  $[-1, 1]$  上恒成立，当且仅当  $\begin{cases} f(1) \leq 1 \\ f(-1) \leq 1 \end{cases}$ ，即

$$\begin{cases} b \leq -2-a \\ b \leq -2+a \end{cases}, \text{ 在 } a \in [-2, 2] \text{ 上恒成立.}$$

所以  $b \leq -4$ ，因此满足条件的  $b$  的取值范围是  $(-\infty, -4]$ 。

(22) (本小题满分14分)

已知中心在原点的双曲线C的一个焦点是  $F_1(-3, 0)$ ，一条渐近线的方程是  $\sqrt{5}x - 2y = 0$ 。

(I) 求双曲线C的方程；

(II) 若以  $k(k \neq 0)$  为斜率的直线  $l$  与双曲线C相交于两个不同的点M，N，且线段MN的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为  $\frac{81}{2}$ ，求  $k$  的取值范围。

(22) 本小题主要考查双曲线的标准方程和几何性质、直线方程、两条直线垂直、线段的

定比分点等基础知识，考查曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法，考查推理运算能力．满分14分．

(I) 解：设双曲线  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ )．由题设得

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 5 \end{cases}, \text{所以双曲线方程为} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

(II) 解：设直线 ①  $l$  的方程为  $y = kx + m$  ( $k \neq 0$ )．点  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  的

坐标满足方程组 ② 
$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$$

将①式代入②式，得  $\frac{x^2}{4} - \frac{(kx+m)^2}{5} = 1$ ，整理得  $(5-4k^2)x^2 - 8kmx - 4m^2 - 20 = 0$ ．

此方程有两个一等实根，于是  $5-4k^2 \neq 0$ ，且  $\Delta = (-8km)^2 + 4(5-4k^2)(4m^2+20) > 0$ ．

整理得  $m^2 + 5 - 4k^2 > 0$ ． ③

由根与系数的关系可知线段  $MN$  的中点坐标  $(x_0, y_0)$  满足

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4km}{5-4k^2}, \quad y_0 = kx_0 + m = \frac{5m}{5-4k^2}.$$

从而线段  $MN$  的垂直平分线方程为  $y - \frac{5m}{5-4k^2} = -\frac{1}{k}(x - \frac{4km}{5-4k^2})$ ．

此直线与  $x$  轴， $y$  轴的交点坐标分别为  $(\frac{9km}{5-4k^2}, 0)$ ,  $(0, \frac{9m}{5-4k^2})$ ．由题设可得

$$\frac{1}{2} \left| \frac{9km}{5-4k^2} \right| \cdot \left| \frac{9m}{5-4k^2} \right| = \frac{81}{2}. \text{整理得} m^2 = \frac{(5-4k^2)^2}{|k|}, \quad k \neq 0.$$

将上式代入③式得  $\frac{(5-4k^2)^2}{|k|} + 5 - 4k^2 > 0$ ，整理得  $(4k^2 - 5)(4k^2 - |k| - 5) > 0$ ， $k \neq 0$ ．

$$\text{解得 } 0 < |k| < \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } |k| > \frac{5}{4}.$$

所以  $k$  的取值范围是  $(-\infty, -\frac{5}{4}) \cup (-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{5}{4}, +\infty)$ ．