

绝密★使用完毕前

2011年普通高等学校招生全国统一考试

数 学 (理) (北京卷)

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共40分)

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $P = \{x | x^2 \leq 1\}$, $M = \{a\}$. 若 $P \cup M = P$, 则 a 的取值范围是

- (A) $(-\infty, -1]$ (B) $[1, +\infty)$ (C) $[-1, 1]$ (D) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(2) 复数 $\frac{i-2}{1+2i} =$

- (A) i (B) $-i$ (C) $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ (D) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

(3) 在极坐标系中，圆 $\rho = -2 \sin \theta$ 的圆心的极坐标是

- (A) $(1, \frac{\pi}{2})$ (B) $(1, -\frac{\pi}{2})$ (C) $(1, 0)$ (D) $(1, \pi)$

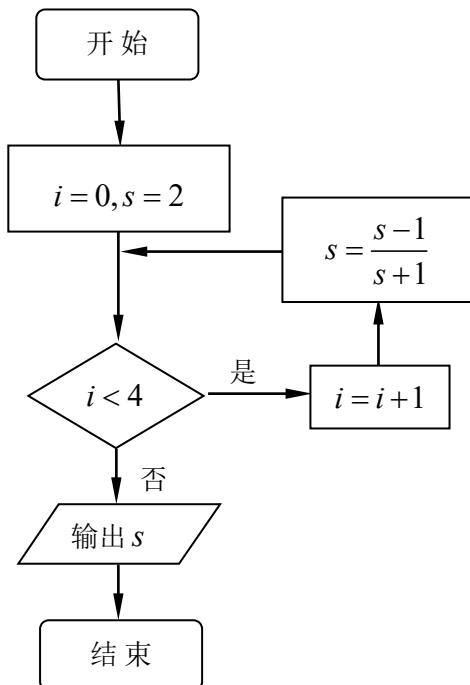
(4) 执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为

- (A) -3

- (B) $-\frac{1}{2}$

- (C) $\frac{1}{3}$

- (D) 2



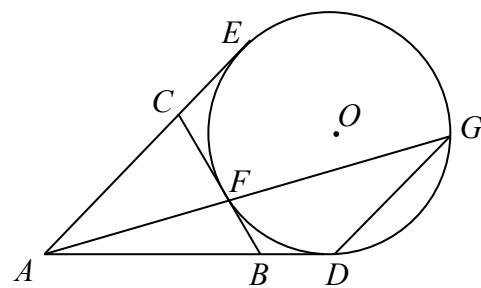
(5) 如图, AD, AE, BC 分别与圆 O 切于点 D, E, F , 延长 AF 与圆 O 交于另一点 G 。

给出下列三个结论:

$$\textcircled{1} \quad AD + AE = AB + BC + CA;$$

$$\textcircled{2} \quad AF \cdot AG = AD \cdot AE;$$

$$\textcircled{3} \quad \triangle AFB \sim \triangle ADG$$



其中, 正确结论的序号是

(A) $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ (B) $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$

(C) $\textcircled{1}$ $\textcircled{3}$ (D) $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$

(6) 根据统计, 一名工人组装第 x 件某产品所用的时间(单位:分钟)为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases}$$

(A, c 为常数)。已知工人组装第4件产品用时30分钟, 组装第 A 件产品用时15分钟,

那么 c 和 A 的值分别是

(A) 75, 25 (B) 75, 16 (C) 60, 25 (D) 60, 16

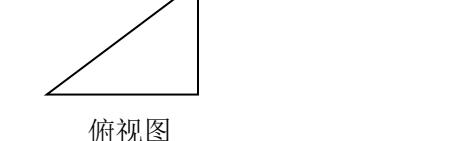
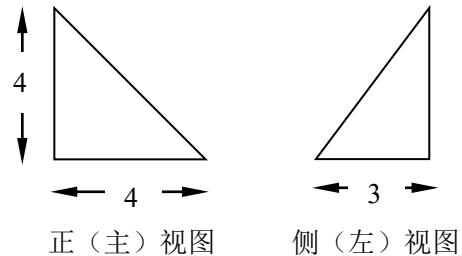
(7) 某四面体的三视图如图所示, 该四面体四个面的面积中最大的是

(A) 8

(B) $6\sqrt{2}$

(C) 10

(D) $8\sqrt{2}$



(8) 设 $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(t+4,4)$, $D(t,4)$ ($t \in \mathbb{R}$), 记 $N(t)$ 为平行四边形内

部(不含边界)的整点的个数, 其中整点是指横、纵坐标都是整数的点, 则函数 $N(t)$ 的

值域为

(A) {9, 10, 11} (B) {9, 10, 12} (C) {9, 11, 12} (D) {10, 11, 12}

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

(9) 在 ΔABC 中，若 $b=5, \angle B=\frac{\pi}{4}$, $\tan A=2$, 则 $\sin A=$ ____; $a=$ _____。

(10) 已知向量 $a=(\sqrt{3}, 1)$, $b=(0, -1)$, $c=(k, \sqrt{3})$, 若 $a-2b$ 与 c 共线，则 $k=$ ___。

(11) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_4=-4$, 则公比 $q=$ _____;

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=$ _____。

(12) 用数字2, 3组成四位数，且数字2, 3至少都出现一次，这样的四位数共有____个。
(用数字作答)

(13) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$ 过关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有两个不同的实根，则实数 k 的取值范围是_____。

(14) 曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ 的距离的积等于常数 $a^2(a>1)$ 的点

的轨迹，给出下列三个结论：

- ① 曲线 C 过坐标原点；
- ② 曲线 C 关于坐标原点对称；

③ 若点 P 在曲线 C 上，则 ΔF_1PF_2 的面积不大于 $\frac{1}{2}a^2$ ；

其中，所有正确结论的序号是_____。

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题共13分)

已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$,

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值；

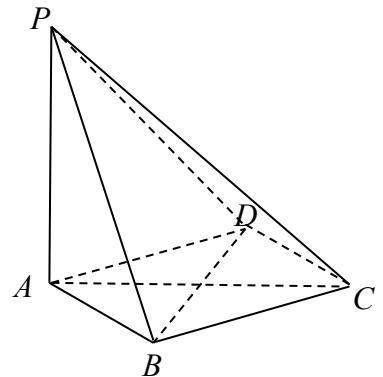
(16) (本小题共14分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是菱形， $AB = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$ 。

(I) 求证： $BD \perp$ 平面 PAC

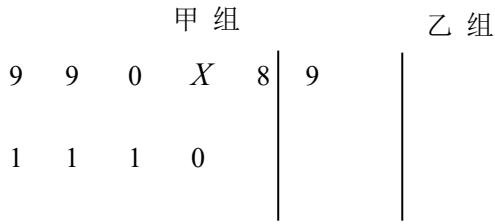
(II) 若 $PA = AB$ ，求 PB 与 AC 所成角的余弦值；

(III) 当平面 PBC 与平面 PDC 垂直时，求 PA 的长；



(17) (本小题共13分)

以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学植树的棵数，乙组记录中有一个数据记录模糊无法确认，在图中以 X 表示。



(I) 如果 $X = 8$ ，求乙组同学植树棵树的平均数和方差；

(II) 如果 $X = 9$ ，分别从甲、乙两组中随机选取一名学生，求这两名同学的植树总棵数 Y 的分布列和数学期望；

注： 方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，其中 \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数

(18) (本小题共13分)

已知函数 $f(x) = (x - k)^2 e^{\frac{x}{k}}$ 。

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(x) \leq \frac{1}{e}$ ，求 k 的取值范围；

(19) (本小题共14分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，过点 $(m, 0)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A, B 两点

,

(I) 求椭圆 G 的焦点坐标及离心率；

(II) 将 $|AB|$ 表示为 m 的函数，并求 $|AB|$ 的最大值；

(20) (本小题共13分)

若数列 $A_n : a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) 满足 $|a_{k+1} - a_k| = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$)，则称 A_n 为 E 数列，记 $S(A_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

(I) 写出一个满足 $a_1 = a_5 = 0$ ，且 $S(A_5) > 0$ 的 E 数列 A_5 ；

(II) 若 $a_1 = 12, n = 2000$ ，证明 E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$ ；

(III) 对任意给定的整数 n ($n \geq 2$)，是否存在首项为0的 E 数列 A_n ，使得 $S(A_n) = 0$ ，如果存在，写出一个满足条件的 E 数列 A_n ；如果不存在，说明理由。

、