

2015年江苏省高考数学试卷

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共计70分）

1. （5分）（2015•江苏）已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 5\}$, 则集合 $A \cup B$ 中元素的个数为_____.

2. （5分）（2015•江苏）已知一组数据4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为_____.

3. （5分）（2015•江苏）设复数 z 满足 $z^2=3+4i$ (i 是虚数单位), 则 z 的模为_____.

4. （5分）（2015•江苏）根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 S 为_____.

```
S ← 1
I ← 1
While I < 8
    S ← S + 2
    I ← I + 3
End While
Print S
```

5. （5分）（2015•江苏）袋中有形状、大小都相同的4只球, 其中1只白球、1只红球、2只黄球, 从中一次随机摸出2只球, 则这2只球颜色不同的概率为_____.

6. （5分）（2015•江苏）已知向量 $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(1, -2)$, 若 $m\vec{a}+n\vec{b}=(9, -8)$ ($m, n \in \mathbb{R}$), 则 $m - n$ 的值为_____.

7. （5分）（2015•江苏）不等式 $2^{-x^2-x} < 4$ 的解集为_____.

8. （5分）（2015•江苏）已知 $\tan \alpha = -2$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{7}$, 则 $\tan \beta$ 的值为_____.

9. （5分）（2015•江苏）现有橡皮泥制作的底面半径为5, 高为4的圆锥和底面半径为2, 高为8的圆柱各一个, 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个, 则新的底面半径为_____.

10. （5分）（2015•江苏）在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 $(1, 0)$ 为圆心且与直线 $mx - y - 2m - 1 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) 相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为_____.

11. (5分) (2015•江苏) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且 $a_{n+1} - a_n = n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前10项的和为_____.

12. (5分) (2015•江苏) 在平面直角坐标系 xOy 中, P 为双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 右支上的一个动点, 若点 P 到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离大于 c 恒成立, 则实数 c 的最大值为_____.

13. (5分) (2015•江苏) 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$, 则方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为_____.

14. (5分) (2015•江苏) 设向量 $\vec{a}_k = (\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6})$ ($k=0, 1, 2, \dots, 12$), 则 $\sum_{k=0}^{11} (a_k \cdot a_{k+1})$ 的值为_____.

二、解答题 (本大题共6小题, 共计90分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

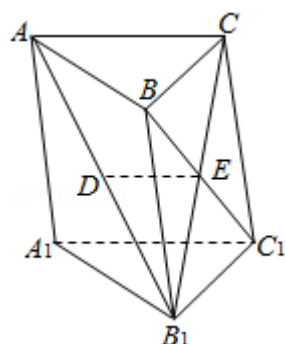
15. (14分) (2015•江苏) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$, $AC=3$, $A=60^\circ$.

- (1) 求 BC 的长;
- (2) 求 $\sin 2C$ 的值.

16. (14分) (2015•江苏) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AC \perp BC$, $BC = CC_1$, 设 AB_1 的中点为 D , $B_1C \cap BC_1 = E$.

求证:

- (1) $DE \parallel$ 平面 AA_1C_1C ;
- (2) $BC_1 \perp AB_1$.



17. (14分) (2015•江苏) 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路, 记两条相互垂直的公路为 l_1 , l_2 , 山区边界曲线为 C , 计划修建的公路为 l , 如图所示, M , N 为 C 的两个端点, 测得点 M 到 l_1 , l_2 的距离分别为5千米和40千米, 点 N 到 l_1 , l_2 的距离分别为20千米和2.5千米,

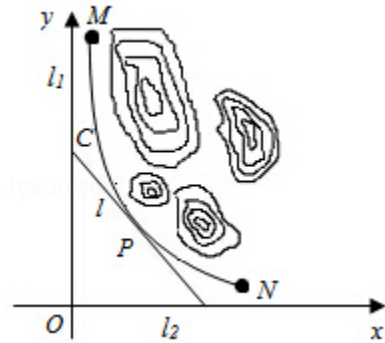
以 l_2 , l_1 在的直线分别为 x , y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy , 假设曲线 C 符合函数 $y = \frac{a}{x^2 + b}$ (其中 a , b 为常数) 模型.

(1) 求 a , b 的值;

(2) 设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t .

①请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域;

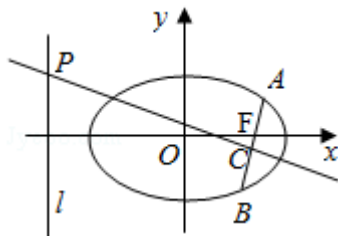
②当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度.



18. (16分) (2015•江苏) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且右焦点 F 到左准线 l 的距离为3.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过 F 的直线与椭圆交于 A , B 两点, 线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P , C , 若 $PC = 2AB$, 求直线 AB 的方程.



19. (16分) (2015•江苏) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $b = c - a$ (实数 c 是与 a 无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$, 求 c 的值.

20. (16分) (2015•江苏) 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是各项为正数且公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列.

(1) 证明: $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$ 依次构成等比数列;

(2) 是否存在 a_1, d , 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列? 并说明理由;

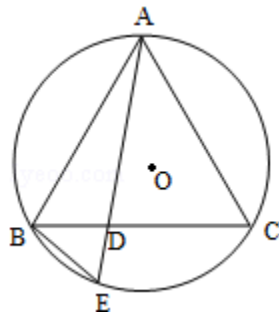
(3) 是否存在 a_1, d 及正整数 n, k , 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列? 并说明理由。

三、附加题(本大题包括选做题和必做题两部分)【选做题】本题包括21-

24题, 请选定其中两小题作答, 若多做, 则按作答的前两小题评分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤【选修4-1: 几何证明选讲】

21. (10分) (2015•江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的弦 AE 交 BC 于点 D .

求证: $\triangle ABD \sim \triangle AEC$.



【选修4-2: 矩阵与变换】

22. (10分) (2015•江苏) 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 向量 $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ 的属于特征值 -2 的一个特征向量, 求矩阵 A 以及它的另一个特征值.

【选修4-4: 坐标系与参数方程】

23. (2015•江苏) 已知圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$, 求圆 C 的半径.

[选修4-5: 不等式选讲]

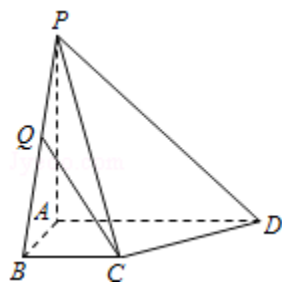
24. (2015•江苏) 解不等式 $|x+2x+3| \geq 2$.

【必做题】每题10分, 共计20分, 解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤

25. (10分) (2015•江苏) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $PA = AD = 2$, $AB = BC = 1$.

(1) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值;

(2) 点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成的角最小时, 求线段 BQ 的长.



26. (10分) (2015•江苏) 已知集合 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y_n=\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 设 $S_n=\{(a, b) | a \text{ 整除 } b \text{ 或 } b \text{ 整除 } a, a \in X, b \in Y_n\}$, 令 $f(n)$ 表示集合 S_n 所含元素的个数.

(1) 写出 $f(6)$ 的值;

(2) 当 $n \geq 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.

2015年江苏省高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题(本大题共14小题, 每小题5分, 共计70分)

1. (5分)

考点 并集及其运算.

:

专题 集合.

:

分析 求出 $A \cup B$, 再明确元素个数

:

解答 解: 集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 5\}$, 则 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

所以 $A \cup B$ 中元素的个数为5;

故答案为: 5

点评 题考查了集合的并集的运算, 根据定义解答, 注意元素不重复即可, 属于基础题

:

2. (5分)

考点 众数、中位数、平均数.

:

专题 概率与统计.

:

分析 直接求解数据的平均数即可.

:

解答 解: 数据4, 6, 5, 8, 7, 6,

:

那么这组数据的平均数为： $\frac{4+6+5+8+7+6}{6}=6$.

故答案为：6.

点评 本题考查数据的均值的求法，基本知识的考查.

:

3. (5分)

考点 复数求模.

:

专题 数系的扩充和复数.

:

分析 直接利用复数的模的求解法则，化简求解即可.

:

解答 解：复数 z 满足 $z^2=3+4i$,

可得 $|z||z|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\therefore |z|=\sqrt{5}$.

故答案为： $\sqrt{5}$.

点评 本题考查复数的模的求法，注意复数的模的运算法则的应用，考查计算能力.

:

4. (5分)

考点 伪代码.

:

专题 图表型；算法和程序框图.

:

分析 模拟执行程序框图，依次写出每次循环得到的 I ， S 的值，当 $I=10$ 时不满足条件 $I<8$ ，

退出循环，输出 S 的值为7.

解答 解：模拟执行程序，可得

$S=1$ ， $I=1$

满足条件 $I<8$ ， $S=3$ ， $I=4$

满足条件 $I<8$ ， $S=5$ ， $I=7$

满足条件 $I<8$ ， $S=7$ ， $I=10$

不满足条件 $I<8$ ，退出循环，输出 S 的值为7.

故答案为：7.

点评 本题主要考查了循环结构的程序，正确判断退出循环的条件是解题的关键，属于基

础题.

5. (5分)

考点 古典概型及其概率计算公式.

:

专题 概率与统计.

:

分析 根据题意，把4个小球分别编号，用列举法求出基本事件数，计算对应的概率即可.

:

解答 解：根据题意，记白球为A，红球为B，黄球为 C_1 、 C_2 ，则

一次取出2只球，基本事件为AB、 AC_1 、 AC_2 、 BC_1 、 BC_2 、 C_1C_2 共6种，

其中2只球的颜色不同的是AB、AC₁、AC₂、BC₁、BC₂共5种；

所以所求的概率是 $P=\frac{5}{6}$.

故答案为： $\frac{5}{6}$.

点评 本题考查了用列举法求古典概型的概率的应用问题，是基础题目.

:

6. (5分)

考点 平面向量的基本定理及其意义.

:

专题 平面向量及应用.

:

分析 直接利用向量的坐标运算，求解即可.

:

解答 解：向量 $\vec{a}=(2, 1)$ ， $\vec{b}=(1, -2)$ ，若 $m\vec{a}+n\vec{b}=(9, -8)$

:

可得 $\begin{cases} 2m+n=9 \\ m-2n=-8 \end{cases}$ ，解得 $m=2, n=5$ ，

$\therefore m-n=-3$.

故答案为：-3.

点评 本题考查向量的坐标运算，向量相等条件的应用，考查计算能力.

:

7. (5分)

考点 指、对数不等式的解法.

:

专题 函数的性质及应用；不等式的解法及应用.

:

分析 利用指数函数的单调性转化为 $x^2-x<2$ ，求解即可.

:

解答 解： $\because 2-x^2-x<4$ ，

:

$\therefore x^2-x<2$ ，

即 $x^2-x-2<0$ ，

解得： $-1<x<2$

故答案为： $(-1, 2)$

点评 本题考查了指数函数的性质，二次不等式的求解，属于简单的综合题目，难度不大

:

8. (5分)

考点 两角和与差的正切函数.

:

专题 三角函数的求值.

:

分析 直接利用两角和的正切函数，求解即可.

:

解答
： 解： $\tan\alpha = -2$, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{1}{7}$,

$$\text{可知} \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{1}{7},$$

$$\text{即} \frac{-2 + \tan\beta}{1 + 2\tan\beta} = \frac{1}{7},$$

解得 $\tan\beta = 3$.

故答案为：3.

点评 本题考查两角和的正切函数，基本知识的考查.

：

9. (5分)

考点 棱柱、棱锥、棱台的体积.

：

专题 计算题；空间位置关系与距离.

：

分析 由题意求出原来圆柱和圆锥的体积，设出新的圆柱和圆锥的底面半径 r ，求出体积，

： 由前后体积相等列式求得 r .

解答
： 解：由题意可知，原来圆锥和圆柱的体积和为： $\frac{1}{3} \times 25\pi \times 4 + 4\pi \times 8 = \frac{196\pi}{3}$.

设新圆锥和圆柱的底面半径为 r ,

$$\text{则新圆锥和圆柱的体积和为: } \frac{1}{3} \times 4\pi r^2 + 8\pi r^2 = \frac{28\pi r^2}{3}.$$

$$\therefore \frac{28\pi r^2}{3} = \frac{196\pi}{3}, \text{ 解得: } r = \sqrt{7}.$$

故答案为： $\sqrt{7}$.

点评 本题考查了圆柱与圆锥的体积公式，是基础的计算题.

：

10. (5分)

考点 圆的标准方程；圆的切线方程.

：

专题 计算题；直线与圆.

：

分析 求出圆心到直线的距离 d 的最大值，即可求出所求圆的标准方程.

：

解答
： 解：圆心到直线的距离 $d = \frac{|-m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{m + \frac{1}{m}}} \leq \sqrt{2}$,

$\therefore m=1$ 时，圆的半径最大为 $\sqrt{2}$,

\therefore 所求圆的标准方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

故答案为： $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

点评 本题考查所圆的标准方程，考查点到直线的距离公式，考查学生的计算能力，比较

： 基础.

11. (5分)

考点 数列的求和；数列递推式.

:

专题 等差数列与等比数列.

:

分析

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且 $a_{n+1}-a_n=n+1$ ($n\in\mathbb{N}^*$), 利用“累加求和”可得 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

:

再利用“裂项求和”即可得出.

解答

解: \because 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且 $a_{n+1}-a_n=n+1$ ($n\in\mathbb{N}^*$),

:

\therefore 当 $n\geq 2$ 时, $a_n=(a_n-a_{n-1})+\dots+(a_2-a_1)+a_1=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

当 $n=1$ 时, 上式也成立,

$$\therefore a_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

$$\therefore \text{数列}\left\{\frac{1}{a_n}\right\}\text{的前}n\text{项的和}S_n=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2n}{n+1}.$$

$$\therefore \text{数列}\left\{\frac{1}{a_n}\right\}\text{的前}10\text{项的和为}\frac{20}{11}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{20}{11}.$$

点评 本题考查了数列的“累加求和”方法、“裂项求和”方法、等差数列的前 n 项和公式, 考

查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

12. (5分)

考点 双曲线的简单性质.

:

专题 计算题; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

:

分析

双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线方程为 $x\pm y=0$, c 的最大值为直线 $x-y+1=0$ 与直线 $x-y=0$ 的

距离.

解答

解: 由题意, 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线方程为 $x\pm y=0$,

:

因为点 P 到直线 $x-y+1=0$ 的距离大于 c 恒成立,

所以 c 的最大值为直线 $x-y+1=0$ 与直线 $x-y=0$ 的距离, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

点评 本题考查双曲线的性质, 考查学生的计算能力, 比较基础.

:

13. (5分)

考点 根的存在性及根的个数判断.

:

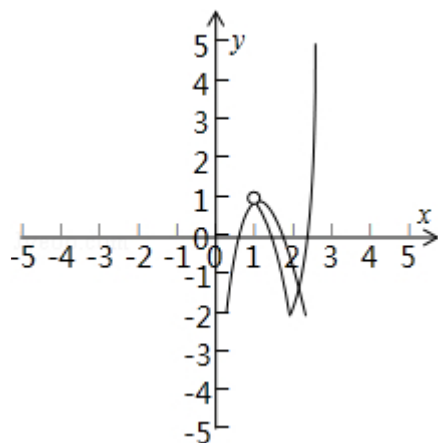
专题 综合题；函数的性质及应用．

：

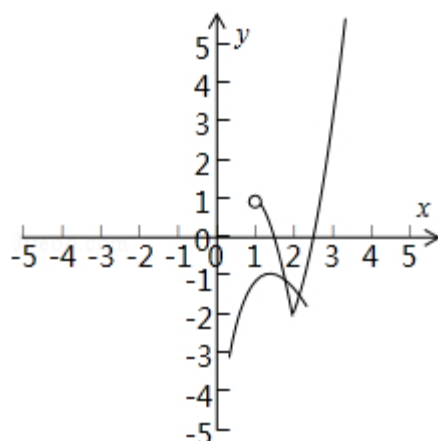
分析：由 $|f(x) + g(x)| = 1$ 可得 $g(x) = -f(x) \pm 1$ ，分别作出函数的图象，即可得出结论．

解答解：由 $|f(x) + g(x)| = 1$ 可得 $g(x) = -f(x) \pm 1$ ．

： $g(x)$ 与 $h(x) = -f(x) + 1$ 的图象如图所示，图象有两个交点；



$g(x)$ 与 $\varphi(x) = -f(x) - 1$ 的图象如图所示，图象有两个交点；



所以方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为4．

故答案为：4．

点评 本题考查求方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数，考查数形结合的数学思想，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

14. (5分)

考点：数列的求和．

专题：等差数列与等比数列；平面向量及应用．

分析：利用向量数量积运算性质、两角和差的正弦公式、积化和差公式、三角函数的周期性即可得出．

解答解： $\vec{a}_k \cdot \vec{a}_{k+1} = \cos \frac{k\pi}{6} \cdot \cos \frac{(k+1)\pi}{6} +$
 $(\sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6}) (\sin \frac{(k+1)\pi}{6} + \cos \frac{(k+1)\pi}{6})$
 $= \cos \frac{k\pi}{6} \cdot \cos \frac{(k+1)\pi}{6} + \sin \frac{k\pi}{6} \sin \frac{(k+1)\pi}{6} + \sin \frac{k\pi}{6} \cos \frac{(k+1)\pi}{6} +$

$$\begin{aligned}
& \cos \frac{k\pi}{6} \sin \frac{(k+1)\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6} \cos \frac{(k+1)\pi}{6} \\
&= \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2k+1}{6} \pi + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2k+1}{2} \pi + \cos \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{2k+1}{6} \pi + \frac{1}{2} \cos \frac{2k+1}{6} \pi, \\
&\therefore \sum_{k=0}^{11} (a_k \cdot a_{k+1}) = 12 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} + \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{9\pi}{6} + \right. \\
&\quad \left. \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{13\pi}{6} + \dots + \sin \frac{23\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{3\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{6} + \right. \\
&\quad \left. \cos \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{9\pi}{6} + \cos \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{13\pi}{6} + \dots + \cos \frac{23\pi}{6} \right) \\
&= 9\sqrt{3} + 0 + 0 \\
&= 9\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

故答案为： $9\sqrt{3}$.

点评： 本题考查了向量数量积运算性质、两角和差的正弦公式、积化和差公式、三角函数的周期性，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

二、解答题（本大题共6小题，共计90分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15. （14分）

考点 余弦定理的应用；二倍角的正弦.

：

专题 解三角形.

：

分析 （1）直接利用余弦定理求解即可.

： （2）利用正弦定理求出C的正弦函数值，然后利用二倍角公式求解即可.

解答 解：（1）由余弦定理可得： $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 4 + 8 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7$,

：

所以 $BC = \sqrt{7}$.

（2）由正弦定理可得： $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, 则 $\sin C = \frac{AB}{BC} \cdot \sin A = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

$\because AB < BC$, $\therefore C$ 为锐角,

则 $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

因此 $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{7} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

点评 本题考查余弦定理的应用，正弦定理的应用，二倍角的三角函数，注意角的范围的解题的关键.

16. （14分）

考点 直线与平面平行的判定；直线与平面垂直的性质.

:

专题 证明题；空间位置关系与距离.

:

分析 (1) 根据中位线定理得 $DE \parallel AC$ ，即证 $DE \parallel$ 平面 AA_1C_1C ；

: (2) 先由直三棱柱得出 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ，即证 $AC \perp CC_1$ ；再证明 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，即证 $BC_1 \perp AC$ ；最后证明 $BC_1 \perp$ 平面 B_1AC ，即可证出 $BC_1 \perp AB_1$.

解答 证明：(1) 根据题意，得：

: E为 B_1C 的中点，D为 AB_1 的中点，所以 $DE \parallel AC$ ；

又因为 $DE \not\subset$ 平面 AA_1C_1C ， $AC \subset$ 平面 AA_1C_1C ，

所以 $DE \parallel$ 平面 AA_1C_1C ；

(2) 因为棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ，

因为 $AC \subset$ 平面 ABC ，

所以 $AC \perp CC_1$ ；

又因为 $AC \perp BC$ ，

$CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，

$BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，

$BC \cap CC_1 = C$ ，

所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ；

又因为 $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，

所以 $BC_1 \perp AC$ ；

因为 $BC = CC_1$ ，所以矩形 BCC_1B_1 是正方形，

所以 $BC_1 \perp$ 平面 B_1AC ；

又因为 $AB_1 \subset$ 平面 B_1AC ，

所以 $BC_1 \perp AB_1$.

点评 本题考查了直线与直线，直线与平面以及平面与平面的位置关系，也考查了空间想象

: 能力和推理论证能力的应用问题，是基础题目.

17. (14分)

考点 函数与方程的综合运用.

:

专题 综合题；导数的综合应用.

:

分析 (1) 由题意知，点M，N的坐标分别为 $(5, 40)$ ， $(20, 2.5)$ ，将其分别代入 $y =$

: $\frac{a}{x^2 + b}$ ，建立方程组，即可求a，b的值；

(2) ①求出切线l的方程，可得A，B的坐标，即可写出公路l长度的函数解析式 $f(t)$ ，并写出其定义域；

②设 $g(t) = t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4}$ ，利用导数，确定单调性，即可求出当t为何值时，公路l

的长度最短，并求出最短长度.

解答 解：(1) 由题意知，点M，N的坐标分别为 $(5, 40)$ ， $(20, 2.5)$ ，

:

将其分别代入 $y=\frac{a}{x^2+b}$, 得
$$\begin{cases} \frac{a}{25+b}=40 \\ \frac{a}{400+b}=2.5 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} a=1000, \\ b=0 \end{cases},$$

(2) ①由(1) $y=\frac{1000}{x^2}$ ($5 \leq x \leq 20$), $P(t, \frac{1000}{t^2})$,

$$\therefore y' = -\frac{2000}{t^3},$$

\therefore 切线l的方程为 $y - \frac{1000}{t^2} = -\frac{2000}{t^3}(x - t)$

设在点P处的切线l交x, y轴分别于A, B点, 则A($\frac{3t}{2}, 0$), B($0, \frac{3000}{t^2}$),

$$\therefore f(t) = \sqrt{(\frac{3t}{2})^2 + (\frac{3000}{t^2})^2} = \frac{3}{2} \sqrt{t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4}}, t \in [5, 20];$$

②设 $g(t) = t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4}$, 则 $g'(t) = 2t - \frac{16 \times 10^6}{t^5} = 0$, 解得 $t = 10\sqrt{2}$,

$t \in (5, 10\sqrt{2})$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 是减函数; $t \in (10\sqrt{2}, 20)$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 是增函数,

从而 $t = 10\sqrt{2}$ 时, 函数 $g(t)$ 有极小值也是最小值,

$$\therefore g(t)_{\min} = 300,$$

$$\therefore f(t)_{\min} = 15\sqrt{3},$$

答: $t = 10\sqrt{2}$ 时, 公路l的长度最短, 最短长度为 $15\sqrt{3}$ 千米.

点评 本题考查利用数学知识解决实际问题, 考查导数知识的综合运用, 确定函数关系,

: 正确求导是关键.

18. (16分)

考点 直线与圆锥曲线的综合问题; 椭圆的标准方程.

:

专题 直线与圆; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

:

分析 (1) 运用离心率公式和准线方程, 可得a, c的方程, 解得a, c, 再由a, b, c的关系

: , 可得b, 进而得到椭圆方程;

(2) 讨论直线AB的斜率不存在和存在, 设出直线方程, 代入椭圆方程, 运用韦达定理和弦长公式, 以及两直线垂直的条件和中点坐标公式, 即可得到所求直线的方程.

解答

: 解: (1) 由题意可得, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{且 } c + \frac{a^2}{c} = 3, \text{ 解得 } c = 1, a = \sqrt{2},$$

则 $b = 1$, 即有椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) 当 $AB \perp x$ 轴, $AB = \sqrt{2}$, $CP = 3$, 不合题意;

当 AB 与 x 轴不垂直, 设直线 $AB: y = k(x - 1)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,
将 AB 方程代入椭圆方程可得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2(k^2 - 1) = 0$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{2(k^2 - 1)}{1 + 2k^2},$$

$$\text{则 } C\left(\frac{2k^2}{1 + 2k^2}, \frac{-k}{1 + 2k^2}\right), \text{ 且 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} =$$

$$\frac{2\sqrt{2}(1 + k^2)}{1 + 2k^2},$$

若 $k = 0$, 则 AB 的垂直平分线为 y 轴, 与左准线平行, 不合题意;

$$\text{则 } k \neq 0, \text{ 故 } PC: y + \frac{k}{1 + 2k^2} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{2k^2}{1 + 2k^2}\right), \quad P\left(-2, \frac{2 + 5k^2}{k(1 + 2k^2)}\right),$$

$$\text{从而 } |PC| = \frac{2(3k^2 + 1)\sqrt{1 + k^2}}{|k|(1 + 2k^2)},$$

$$\text{由 } |PC| = 2|AB|, \text{ 可得 } \frac{2(3k^2 + 1)\sqrt{1 + k^2}}{|k|(1 + 2k^2)} = \frac{4\sqrt{2}(1 + k^2)}{1 + 2k^2}, \text{ 解得 } k = \pm 1,$$

此时 AB 的方程为 $y = x - 1$ 或 $y = -x + 1$.

点评 本题考查椭圆的方程和性质, 主要考查椭圆的离心率和方程的运用, 联立直线方程;
:, 运用韦达定理和弦长公式, 同时考查两直线垂直和中点坐标公式的运用, 属于中档题.

19. (16分)

考点 利用导数研究函数的单调性; 函数零点的判定定理.

:

专题 综合题; 导数的综合应用.

:

分析 (1) 求导数, 分类讨论, 利用导数的正负, 即可得出 $f(x)$ 的单调性;

:

(2) 由 (1) 知, 函数 $f(x)$ 的两个极值为 $f(0) = b$, $f\left(-\frac{2a}{3}\right) = \frac{4}{27}a^3 + b$, 则函

数 $f(x)$ 有三个不同的零点等价于 $f(0)f\left(-\frac{2a}{3}\right) = b\left(\frac{4}{27}a^3 + b\right) < 0$, 进一步转

化为 $a > 0$ 时, $\frac{4}{27}a^3 - a + c > 0$ 或 $a < 0$ 时, $\frac{4}{27}a^3 - a + c < 0$. 设 $g(a) = \frac{4}{27}a^3 - a + c$,

利用条件即可求 c 的值.

解答 解：（1） $\because f(x) = x^3 + ax^2 + b$,

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax$,

令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = 0$ 或 $-\frac{2a}{3}$.

$a = 0$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

$a > 0$ 时, $x \in (-\infty, -\frac{2a}{3}) \cup (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in (-\frac{2a}{3}, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{2a}{3})$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac{2a}{3}, 0)$ 上单调递减;

$a < 0$ 时, $x \in (-\infty, 0) \cup (-\frac{2a}{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in (0, -\frac{2a}{3})$ 时, $f'(x) < 0$,

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(-\frac{2a}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, -\frac{2a}{3})$ 上单调递减;

（2）由（1）知, 函数 $f(x)$ 的两个极值为 $f(0) = b$, $f(-\frac{2a}{3}) = \frac{4}{27}a^3 + b$, 则函

数 $f(x)$ 有三个不同的零点等价于 $f(0) \cdot f(-\frac{2a}{3}) = b(\frac{4}{27}a^3 + b) < 0$,

$\therefore b = c - a$,

$\therefore a > 0$ 时, $\frac{4}{27}a^3 - a + c > 0$ 或 $a < 0$ 时, $\frac{4}{27}a^3 - a + c < 0$.

设 $g(a) = \frac{4}{27}a^3 - a + c$,

\therefore 函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$,

\therefore 在 $(-\infty, -3)$ 上, $g(a) < 0$ 且在 $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ 上 $g(a) > 0$ 均恒成立,

$\therefore g(-3) = c - 1 \leq 0$, 且 $g(\frac{3}{2}) = c - 1 \geq 0$,

$\therefore c = 1$,

此时 $f(x) = x^3 + ax^2 + 1 - a = (x+1)[x^2 + (a-1)x + 1 - a]$,

\therefore 函数有三个零点,

$\therefore x^2 + (a-1)x + 1 - a = 0$ 有两个异于 -1 的不等实根,

$\therefore \Delta = (a-1)^2 - 4(1-a) > 0$, 且 $(-1)^2 - (a-1) + 1 - a \neq 0$,

解得 $a \in (-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$,

综上 $c = 1$.

点评 本题考查导数知识的综合运用, 考查函数的单调性, 考查函数的零点, 考查分类讨

: 论的数学思想, 难度大.

20. (16分)

考点 等比关系的确定; 等比数列的性质.

:

专题 等差数列与等比数列.

:

分析 (1) 根据等比数列和等差数列的定义即可证明;

: (2) 利用反证法, 假设存在 a_1, d 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列, 推出矛盾, 否定假设, 得到结论;

(3) 利用反证法, 假设存在 a_1, d 及正整数 n, k , 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列, 得到 $a_1^n (a_1+2d)^{n+2k} = (a_1+2d)^{2(n+k)}$, 且 $(a_1+d)^{n+k} (a_1+3d)^{n+3k} = (a_1+2d)^{2(n+2k)}$, 利用等式以及对数的性质化简整理得到 $\ln(1+3t) \ln(1+2t) + 3\ln(1+2t) \ln(1+t) = 4\ln(1+3t) \ln(1+t)$, (**), 多次构造函数, 多次求导, 利用零点存在定理, 推出假设不成立.

解答

: 解: (1) 证明: $\because \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1} - a_n} = 2^d$, ($n=1, 2, 3, \dots$) 是同一个常数,

$\therefore 2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$ 依次构成等比数列;

(2) 令 $a_1+d=a$, 则 a_1, a_2, a_3, a_4 分别为 $a-d, a, a+d, a+2d$ ($a>d, a>-2d, d \neq 0$)

假设存在 a_1, d 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列,

则 $a^4 = (a-d)(a+d)^3$, 且 $(a+d)^6 = a^2(a+2d)^4$,

令 $t = \frac{d}{a}$, 则 $1 = (1-t)(1+t)^3$, 且 $(1+t)^6 = (1+2t)^4$, ($-\frac{1}{2} < t < 1, t \neq 0$),

化简得 $t^3 + 2t^2 - 2 = 0$ (*), 且 $t^2 = t+1$, 将 $t^2 = t+1$ 代入(*)式,

$t(t+1) + 2(t+1) - 2 = t^2 + 3t = t+1 + 3t = 4t+1 = 0$, 则 $t = -\frac{1}{4}$,

显然 $t = -\frac{1}{4}$ 不是上面方程的解, 矛盾, 所以假设不成立,

因此不存在 a_1, d , 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列.

(3) 假设存在 a_1, d 及正整数 n, k , 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列,

则 $a_1^n (a_1+2d)^{n+2k} = (a_1+2d)^{2(n+k)}$, 且 $(a_1+d)^{n+k} (a_1+3d)^{n+3k} = (a_1+2d)^{2(n+2k)}$,

分别在两个等式的两边同除以 $a_1^{2(n+k)}, a_1^{2(n+2k)}$, 并令 $t = \frac{d}{a_1}$, ($t > -\frac{1}{3}, t \neq 0$)

,

则 $(1+2t)^{n+2k} = (1+t)^{2(n+k)}$, 且 $(1+t)^{n+k} (1+3t)^{n+3k} = (1+2t)^{2(n+2k)}$,

将上述两个等式取对数, 得 $(n+2k) \ln(1+2t) = 2(n+k) \ln(1+t)$,

且 $(n+k) \ln(1+t) + (n+3k) \ln(1+3t) = 2(n+2k) \ln(1+2t)$,

化简得 $2k[\ln(1+2t) - \ln(1+t)] = n[2\ln(1+t) - \ln(1+2t)]$,

且 $3k[\ln(1+3t) - \ln(1+t)] = n[3\ln(1+t) - \ln(1+3t)]$,

再将这两式相除, 化简得,

$$\ln(1+3t) \ln(1+2t) + 3\ln(1+2t) \ln(1+t) = 4\ln(1+3t) \ln(1+t), \quad (**)$$

$$\text{令 } g(t) = 4\ln(1+3t) \ln(1+t) - \ln(1+3t) \ln(1+2t) + 3\ln(1+2t) \ln(1+t),$$

$$\text{则 } g'(t) = \frac{2}{(1+t)(1+2t)(1+3t)} [(1+3t)^2 \ln(1+3t) - 3(1+2t)^2 \ln(1+2t) + 3(1+t)^2 \ln(1+t)],$$

$$\text{令 } \varphi(t) = (1+3t)^2 \ln(1+3t) - 3(1+2t)^2 \ln(1+2t) + 3(1+t)^2 \ln(1+t),$$

$$\text{则 } \varphi'(t) = 6[(1+3t) \ln(1+3t) - 2(1+2t) \ln(1+2t) + 3(1+t) \ln(1+t)],$$

$$\text{令 } \varphi_1(t) = \varphi'(t), \text{ 则 } \varphi_1'(t) = 6[3\ln(1+3t) - 4\ln(1+2t) + \ln(1+t)],$$

$$\text{令 } \varphi_2(t) = \varphi_1'(t), \text{ 则 } \varphi_2'(t) = \frac{12}{(1+t)(1+2t)(1+3t)} > 0,$$

$$\text{由 } g(0) = \varphi(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(t) > 0,$$

知 $g(t), \varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 在 $(-\frac{1}{3}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上均单调,

故 $g(t)$ 只有唯一的零点 $t=0$, 即方程 $(**)$ 只有唯一解 $t=0$, 故假设不成立,

所以不存在 a_1, d 及正整数 n, k , 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列.

点评: 本题主要考查等差数列、等比数列的定义和性质, 函数与方程等基础知识, 考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力, 属于难题.

三、附加题(本大题包括选做题和必做题两部分) 【选做题】 本题包括21-

24题, 请选定其中两小题作答, 若多做, 则按作答的前两小题评分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤 【选修4-1: 几何证明选讲】

21. (10分)

考点 相似三角形的判定.

:

专题 推理和证明.

:

分析 直接利用已知条件, 推出两个三角形的三个角对应相等, 即可证明三角形相似.

:

解答 证明: $\because AB=AC, \therefore \angle ABD=\angle C$, 又 $\because \angle C=\angle E, \therefore \angle ABD=\angle E$, 又 $\angle BAE$ 是公共角,

:

可知: $\triangle ABD \sim \triangle AEB$.

点评 本题考查圆的基本性质与相似三角形等基础知识, 考查逻辑推理能力.

:

【选修4-2: 矩阵与变换】

22. (10分)

考点 特征值与特征向量的计算.

:

专题 矩阵和变换.

:

分析 利用 $A\vec{\alpha} = -2\vec{\alpha}$, 可得 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, 通过令矩阵A的特征多项式为0即得结论.

:

解答

: 解: 由已知, 可得 $A\vec{\alpha} = -2\vec{\alpha}$, 即 $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\text{则} \begin{cases} x-1=-2 \\ y=2 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{矩阵} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

从而矩阵A的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)$,

\therefore 矩阵A的另一个特征值为1.

点评 本题考查求矩阵及其特征值, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

:

【选修4-4: 坐标系与参数方程】

23. (2015•江苏)

考点 简单曲线的极坐标方程.

:

专题 计算题; 坐标系和参数方程.

:

分析 先根据 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 求出圆的直角坐标方程, 求出半径.

:

解答 解: 圆的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$, 可得 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta - 4 = 0$

:

,

化为直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4 = 0$,

化为标准方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 6$,

圆的半径 $r = \sqrt{6}$.

点评 本题主要考查把极坐标方程化为直角坐标方程的方法, 以及求点的极坐标的方法,

: 关键是利用公式 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 比较基础,

[选修4-5: 不等式选讲]

24. (2015•江苏)

考点 绝对值不等式的解法.

:

专题 不等式.

:

分析 思路1 (公式法): 利用 $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$, 或 $f(x) \leq -g(x)$;

:

思路2 (零点分段法): 对x的值分“ $x \geq -\frac{3}{2}$ ”, “ $x < -\frac{3}{2}$ ”进行讨论求解.

解答 解法1: $x + |2x+3| \geq 2$ 变形为 $|2x+3| \geq 2-x$,

: 得 $2x+3 \geq 2-x$, 或 $2x+3 \geq -(2-x)$,

$$\text{即} x \geq -\frac{1}{3}, \text{或} x \leq -5,$$

即原不等式的解集为 $\{x|x \geq -\frac{1}{3}, \text{ 或 } x \leq -5\}$.

解法2: 令 $|2x+3|=0$, 得 $x = -\frac{3}{2}$.

①当 $x \geq -\frac{3}{2}$ 时, 原不等式化为 $x + (2x+3) \geq 2$, 即 $x \geq -\frac{1}{3}$,

所以 $x \geq -\frac{1}{3}$;

②当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, 原不等式化为 $x - (2x+3) \geq 2$, 即 $x \leq -5$,

所以 $x \leq -5$.

综上, 原不等式的解集为 $\{x|x \geq -\frac{1}{3}, \text{ 或 } x \leq -5\}$.

点评 本题考查了含绝对值不等式的解法. 本解答给出的两种方法是常见的方法, 不管用哪种方法, 其目的是去绝对值符号. 若含有一个绝对值符号, 利用公式法要快捷一些, 其套路为: $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$, 或 $f(x) \leq -g(x)$; $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$. 可简记为: 大于号取两边, 小于号取中间. 使用零点分段法时, 应注意: 同一类中取交集, 类与类之间取并集.

【必做题】 每题10分, 共计20分, 解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤

25. (10分) (

考点 二面角的平面角及求法; 点、线、面间的距离计算.

专题 空间位置关系与距离; 空间角.

分析 以A为坐标原点, 以AB、AD、AP所在直线分别为x、y、z轴建系A-xyz.

(1) 所求值即为平面PAB的一个法向量与平面PCD的法向量的夹角的余弦值的绝对值, 计算即可;

(2) 利用换元法可得 $\cos^2 \langle \overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{DP} \rangle \leq \frac{9}{10}$, 结合函数 $y = \cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的单调性, 计算即得结论.

解答 解: 以A为坐标原点, 以AB、AD、AP所在直线分别为x、y、z轴建系A-xyz如图, 由题可知 $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$.

(1) $\because AD \perp$ 平面PAB, $\therefore \overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$, 是平面PAB的一个法向量,

$\therefore \overrightarrow{PC} = (1, 1, -2)$, $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$,

设平面PCD的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases},$$

取 $y = 1$, 得 $\vec{n} = (1, 1, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AD}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

\therefore 平面PAB与平面PCD所成两面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$(2) \because \overrightarrow{BP} = (-1, 0, 2), \text{ 设 } \overrightarrow{BQ} = \lambda \overrightarrow{BP} = (-\lambda, 0, 2\lambda) \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{CB} = (0, -1, 0), \text{ 则 } \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ} = (-\lambda, -1, 2\lambda),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{DP} = (0, -2, 2), \text{ 从而 } \cos \langle \overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{DP} \rangle = \frac{\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{CQ}| |\overrightarrow{DP}|} = \frac{1+2\lambda}{\sqrt{2+10\lambda^2}},$$

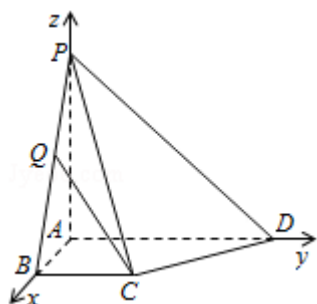
设 $1+2\lambda=t, t \in [1, 3]$,

$$\text{则 } \cos^2 \langle \overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{DP} \rangle = \frac{2t^2}{5t^2 - 10t + 9} = \frac{2}{9\left(\frac{1}{t} - \frac{5}{9}\right)^2 + \frac{20}{9}} < \frac{9}{10},$$

当且仅当 $t = \frac{9}{5}$, 即 $\lambda = \frac{2}{5}$ 时, $|\cos \langle \overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{DP} \rangle|$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

因为 $y = \cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是减函数, 此时直线CQ与DP所成角取得最小值.

$$\text{又 } \because BP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \therefore BQ = \frac{2}{5}BP = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



点评 本题考查求二面角的三角函数值, 考查用空间向量解决问题的能力, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

26. (10分)

考点 数学归纳法.

:

专题 综合题; 点列、递归数列与数学归纳法.

:

分析 (1) $f(6) = 6 + 2 + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} = 13$;

:

(2) 根据数学归纳法的证明步骤, 分类讨论, 即可证明结论.

解答 解: (1) $f(6) = 6 + 2 + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} = 13$;

:

$$(2) \text{ 当 } n \geq 6 \text{ 时, } f(n) = \begin{cases} n+2+\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{3}\right), & n=6t \\ n+2+\left(\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{3}\right), & n=6t+1 \\ n+2+\left(\frac{n}{2}+\frac{n-2}{3}\right), & n=6t+2 \\ n+2+\left(\frac{n-1}{2}+\frac{n}{3}\right), & n=6t+3 \\ n+2+\left(\frac{n}{2}+\frac{n-1}{3}\right), & n=6t+4 \\ n+2+\left(\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{3}\right), & n=6t+5 \end{cases}.$$

下面用数学归纳法证明:

① $n=6$ 时, $f(6)=6+2+\frac{6}{2}+\frac{6}{3}=13$, 结论成立;

② 假设 $n=k$ ($k \geq 6$) 时, 结论成立, 那么 $n=k+1$ 时, S_{k+1} 在 S_k 的基础上新增加的元素在 $(1, k+1)$, $(2, k+1)$, $(3, k+1)$ 中产生, 分以下情形讨论:

1) 若 $k+1=6t$, 则 $k=6(t-1)+5$, 此时有 $f(k+1)=f(k)+3=(k+1)+2+\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{3}$, 结论成立;

2) 若 $k+1=6t+1$, 则 $k=6t$, 此时有 $f(k+1)=f(k)+1=k+2+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+1=(k+1)+2+\frac{(k+1)-1}{2}+\frac{(k+1)-1}{3}$, 结论成立;

3) 若 $k+1=6t+2$, 则 $k=6t+1$, 此时有 $f(k+1)=f(k)+2=k+2+\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{3}+2=(k+1)+2+\frac{k+1}{2}+\frac{(k+1)-2}{3}$, 结论成立;

4) 若 $k+1=6t+3$, 则 $k=6t+2$, 此时有 $f(k+1)=f(k)+2=k+2+\frac{k}{2}+\frac{k-2}{3}+2=(k+1)+2+\frac{(k+1)-1}{2}+\frac{k+1}{3}$, 结论成立;

5) 若 $k+1=6t+4$, 则 $k=6t+3$, 此时有 $f(k+1)=f(k)+2=k+2+\frac{k-1}{2}+\frac{k}{3}+2=(k+1)+2+\frac{k+1}{2}+\frac{(k+1)-1}{3}$, 结论成立;

6) 若 $k+1=6t+5$, 则 $k=6t+4$, 此时有 $f(k+1)=f(k)+2=k+2+\frac{k}{2}+\frac{k-1}{3}+2=(k+1)+2+\frac{(k+1)-1}{2}+\frac{(k+1)-2}{3}$, 结论成立.

综上所述, 结论对满足 $n \geq 6$ 的自然数 n 均成立.

点评 本题考查数学归纳法, 考查学生分析解决问题的能力, 正确归纳是关键.

:

