

上海市2019届秋季高考数学考试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共12题，1-6题每题4分，7-12题每题5分，共54分）

1. 已知集合 $A = (-\infty, 3)$ 、 $B = (2, +\infty)$ ，则 $A \cap B =$ _____.

【思路分析】然后根据交集定义得结果.

【解析】：根据交集概念，得出： $(2, 3)$.

【归纳与总结】本题主要考查集合的基本运算，比较基础.

2. 已知 $z \in \mathbb{C}$ 且满足 $\frac{1}{z} - 5 = i$ ，求 $z =$ _____.

【思路分析】解复数方程即可求解结果.

【解析】： $\frac{1}{z} = 5 + i$ ， $z = \frac{1}{5 + i} = \frac{5 - i}{(5 + i)(5 - i)} = \frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$.

【归纳与总结】本题主要考查复数的基本运算，比较基础.

3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 1, 0)$ ，则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 _____.

【思路分析】根据夹角运算公式 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ 求解.

【解析】： $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5}$.

【归纳与总结】本题主要考查空间向量数量积，比较基础.

4. 已知二项式 $(2x + 1)^5$ ，则展开式中含 x^2 项的系数为 _____.

【思路分析】根据二项式展开式通项公式求出取得含 x^2 项的项，再求系数.

【解析】： $T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \cdot 1^r = C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot x^{5-r}$

令 $5 - r = 2$ ，则 $r = 3$ ， x^2 系数为 $C_5^3 \cdot 2^2 = 40$.

【归纳与总结】本题主要考查项式展开式通项公式的应用，比较基础.

5. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ ，求 $z = 2x - 3y$ 的最小值为 _____.

【思路分析】由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，把最优解的坐标代入目标函数得答案.

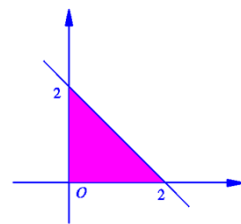
【解析】：线性规划作图：后求出边界点代入求最值，当 $x = 0$ ，

$y = 2$ 时，

$z_{\min} = -6$.

【归纳与总结】本题考查简单的线性规划，考查数形结合的解题思想方法，是中档题.

6. 已知函数 $f(x)$ 周期为1，且当 $0 < x \leq 1$ ， $f(x) = -\log_2 x$ ，则 $f(\frac{3}{2}) =$ _____.



【思路分析】直接利用函数周期为1，将转 $\frac{3}{2}$ 到已知范围 $0 < x \leq 1$ 内，代入函数解析式即可。

【解析】： $f(\frac{3}{2}) = f(\frac{1}{2}) = -\log_2 \frac{1}{2} = 1$ 。

【归纳与总结】本题考查函数图像与性质，是中档题。

7.若 $x, y \in R^+$ ，且 $\frac{1}{x} + 2y = 3$ ，则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____。

【思路分析】利用已知等式转化为一个变量或者转化为含有 $\frac{y}{x}$ 的式子求解

【解析】：法一： $3 = \frac{1}{x} + 2y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 2y}$ ， $\therefore \frac{y}{x} \leq \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8}$ ；

法二：由 $\frac{1}{x} = 3 - 2y$ ， $\frac{y}{x} = (3 - 2y) \cdot y = -2y^2 + 3y$ ($0 < y < \frac{3}{2}$)，求二次最值 $\left(\frac{y}{x}\right)_{\max} = \frac{9}{8}$ 。

【归纳与总结】本题考查基本不等式的应用，是中档题。

8.已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n + a_n = 2$ ，则 $S_5 =$ _____。

【思路分析】将和的关系转化为项的递推关系，得到数列为等比数列。

【解析】：由 $\begin{cases} S_n + a_n = 2 \\ S_{n-1} + a_{n-1} = 2 \end{cases}$ (n ≥ 2) 得： $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$ (n ≥ 2)

$\therefore \{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1 = 1$ ， $q = \frac{1}{2}$ ， $\therefore S_5 = \frac{1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^5]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{16}$ 。

9.过 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 并垂直于 x 轴的直线分别与 $y^2 = 4x$ 交于 A, B ， A 在 B 上方， M 为抛物线上一点， $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + (\lambda - 2)\overrightarrow{OB}$ ，则 $\lambda =$ _____。

【思路分析】根据等式建立坐标方程求解

【解析】：依题意求得： $A(1, 2)$ ， $B(1, -2)$ ，设 M 坐标 $M(x, y)$

有： $(x, y) = \lambda(1, 2) + (\lambda - 2) \cdot (1, -2) = (2\lambda - 2, 4)$ ，代入 $y^2 = 4x$ 有： $16 = 4 \cdot (2\lambda - 2)$

即： $\lambda = 3$ 。

【归纳与总结】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查数形结合的解题思想方法，是中档题。

10某三位数密码锁，每位数字在0-9数字中选取，其中恰有两位数字相同的概率是_____。

【思路分析】分别计算出总的排列数和恰有两位数字相同的种类求解。

【解析】：法一： $P = \frac{C_{10}^1 \cdot C_3^2 \cdot C_9^1}{10^3} = \frac{27}{100}$ (分子含义：选相同数字×选位置×选第三个数字)

法二： $P = 1 - \frac{C_{10}^1 + P_{10}^3}{10^3} = \frac{27}{100}$ (分子含义：三位数字都相同+三位数字都不同)

【归纳与总结】本题考查古典概型的求解，是中档题。

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) , $P_n(n, a_n)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n P_{n+1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【思路分析】利用点在曲线上得到 $|P_n P_{n+1}|$ 关于 n 的表达式, 再求极限.

【解析】: 法一: 由 $\frac{n^2}{8} - \frac{a_n^2}{2} = 1$ 得: $a_n = \sqrt{2(\frac{n^2}{6} - 1)}$, $\therefore P_n(n, \sqrt{2(\frac{n^2}{6} - 1)})$,

$P_{n+1}(n+1, \sqrt{2(\frac{(n+1)^2}{6} - 1)})$, 利用两点间距离公式求解极限. $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n P_{n+1}| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

法二 (极限法): 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $P_n P_{n+1}$ 与渐近线平行, $P_n P_{n+1}$ 在 x 轴投影为 1, 渐近线倾斜

角 θ 满足: $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $P_n P_{n+1} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【归纳与总结】本题考查数列极限的求解, 是中档题.

12. 已知 $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - a \right|$ ($x > 1, a > 0$), 若 $a = a_0$, $f(x)$ 与 x 轴交点为 A , $f(x)$ 为曲线 L , 在 L 上任意一点 P , 总存在一点 Q (P 异于 A) 使得 $AP \perp AQ$ 且 $|AP| = |AQ|$, 则 $a_0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【思路分析】

【解析】:

【归纳与总结】

二. 选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 已知直线方程 $2x - y + c = 0$ 的一个方向向量 \vec{d} 可以是 ()

- A. $(2, -1)$ B. $(2, 1)$ C. $(-1, 2)$ D. $(1, 2)$

【思路分析】根据直线的斜率求解.

【解析】: 依题意: $(2, -1)$ 为直线的一个法向量, \therefore 方向向量为 $(1, 2)$, 选 D.

【归纳与总结】本题考查直线方向向量的概念, 是基础题.

14. 一个直角三角形的两条直角边长分别为 1 和 2, 将该三角形分别绕其两个直角边旋转得到的两个圆锥的体积之比为 ()

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【思路分析】根据直线的斜率求解.

【解析】: 依题意: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = \frac{4}{3}\pi$, $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \frac{2}{3}\pi$, 选 B.

15. 已知 $\omega \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = (x-6)^2 \cdot \sin(\omega x)$, 存在常数 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 可能的值为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{5}$

【思路分析】根据选择项代入检验或者根据函数性质求解.

【解析】: 法一 (推荐): 依次代入选项的值, 检验 $f(x+a)$ 的奇偶性, 选 C;

法二： $f(x+a) = (x+a-6)^2 \cdot \sin[\omega(x+a)]$ ，若 $f(x+a)$ 为偶函数，则 $a=6$ ，且 $\sin[\omega(x+6)]$ 也为偶函数（偶函数 \times 偶函数=偶函数）， $\therefore 6\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ，当 $k=1$ 时， $\omega = \frac{\pi}{4}$ ，选C.

16.已知 $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)$.

①存在 α 在第一象限，角 β 在第三象限；

②存在 α 在第二象限，角 β 在第四象限；

A. ①②均正确； B. ①②均错误； C. ①对，②错； D. ①错，②对；

【思路分析】根据选择项代入检验或者根据函数性质求解.

【解析】：法一：（推荐）取特殊值检验法：例如：令 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ 和 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$ ，求 $\tan \beta$ 看是否存在.(考试中，若有解时则认为存在，取多组解时发现没有解，则可认为不存在)，选D.

法二：解： $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ ①

设 $\tan \alpha = x, \tan \beta = y$ ，则原式可化为 $xy = \frac{x+y}{1-xy}$ ，整理得 $x^2y^2 + y(1-x) + x = 0$ ，

以 y 为主元，则要使方程有解，需使 $\Delta = (1-x)^2 - 4x^3 = -4x^3 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$ 有解，

令 $f(x) = -4x^3 + x^2 - 2x + 1$ ，则 $f'(x) = -12x^2 + 2x - 2 < 0$ 恒成立

\therefore 函数 $f(x) = -4x^3 + x^2 - 2x + 1$ 在 R 上单调递减，又 $\because f(0) = 1 > 0, f(1) = -4 < 0$

\therefore 存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使 $f(x_0) = 0$ ，当 $x \leq x_0$ 时 $\Delta = f(x) \geq 0$

设方程 $x^2y^2 + y(1-x) + x = 0$ 的两根分别为 y_1, y_2 ，

当 $x < 0$ 时， $y_1 + y_2 = \frac{x-1}{x^2} < 0, y_1y_2 = \frac{1}{x} < 0$ ，故必有一负根，②对；

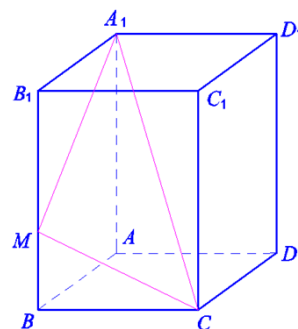
当 $0 < x \leq x_0$ 时， $y_1 + y_2 = \frac{x-1}{x^2} < 0, y_1y_2 = \frac{1}{x} > 0$ ，故两根均为负根，①错；选D.

三. 解答题（本大题共5题，共76分）

17. (本题满分14分) 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 为 BB_1 上一点，已知 $BM = 2$ ， $AD = 4$ ， $CD = 3$ ， $AA_1 = 5$.

(1) 求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角；

(2) 求点 A 到平面 A_1MC 的距离.



【思路分析】根据几何图形作出线面角度求解；建立坐标系计算平面的法向量求解..

【解析】：(1) 依题意： $A_1A \perp$ 面 $ABCD$ ，连接 AC ，则 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成夹角为 $\angle A_1CA$ ；

$\because A_1A=5, AC=\sqrt{3^2+4^2}=5, \therefore \triangle A_1CA$ 为等腰直角 \triangle , $\angle A_1CA=\frac{\pi}{4}$;

\therefore 直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

(2) 法一 (空间向量): 如图建立坐标系:

则: $A(0,0,0), C(3,4,0), A_1(0,0,5), M(3,0,2)$

$\overrightarrow{AC}=(3,4,0), \overrightarrow{A_1C}=(3,4,-5), \overrightarrow{MC}=(0,4,-2)$

\therefore 求平面 A_1MC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 3x + 4y - 5z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MC} = 4y - 2z = 0 \end{cases}, \text{ 得: } \vec{n} = (2, 1, 2)$$

$$A \text{ 到平面 } A_1MC \text{ 的距离为: } d = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{3 \times 2 + 4 \times 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{10}{3}$$

法二 (等体积法): 利用 $V_{A-A_1MC} = V_{C-A_1AM}$ 求解, 求 $S_{\triangle A_1MC}$ 时, 需要求出三边长 (不是特殊三角形), 利用 $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin C$ 求解.

【归纳与总结】本题考查点到平面的距离的求法, 考查异面直线所成角的正切值的求法, 考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

18. (本题满分14分) 已知 $f(x) = ax + \frac{1}{x+1} (a \in R)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)+1 < f(x+1)$ 的解集;

(2) 若 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x)$ 有零点, 求 a 的范围.

【思路分析】将不等式具体化, 直接解不等式; 分离参数得到新函数, 研究新函数的最值与值域.

【解析】: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$;

代入原不等式: $x + \frac{1}{x+1} + 1 < x + 1 + \frac{1}{x+2}$; 即: $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$

移项通分: $\frac{1}{(x+1)(x+2)} < 0$, 得: $-2 < x < -1$;

(2) 依题意: $f(x) = ax + \frac{1}{x+1} = 0$ 在 $x \in [1, 2]$ 上有解

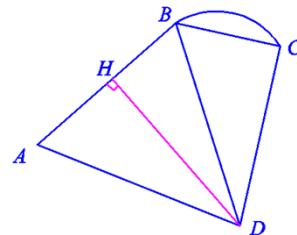
参编分离: $a = -\frac{1}{x(x+1)}$, 即求 $g(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$ 在 $x \in [1, 2]$ 值域,

$x(x+1)$ 在 $x \in [1, 2]$ 单调递增, $x(x+1) \in [2, 6]$;

$-\frac{1}{x(x+1)} \in [-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}]$, 故: $a \in [-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}]$.

【归纳与总结】本题考查了分式不等式的解法、分式函数最值与值域的求解, 也考查了转化与划归思想的应用.

19. (本题满分14分) 如图, $A-B-C$ 为海岸线, AB 为线段, \widehat{BC} 为四分之一圆弧, $BD = 39.2\text{km}$, $\angle BDC = 22^\circ$, $\angle CBD = 68^\circ$, $\angle BDA = 58^\circ$.



- (1) 求 \widehat{BC} 长度;
 (2) 若 $AB = 40\text{km}$, 求 D 到海岸线 $A-B-C$ 的最短距离. (精确到 0.001km)

【思路分析】根据弧长公式求解; 利用正弦定理解三角形.

【解析】: (1) 依题意: $BC = BD \cdot \sin 22^\circ$, 弧 BC 所在圆的半径 $R = BC \cdot \sin \frac{\pi}{4}$

$$\text{弧 } BC \text{ 长度为: } \frac{\pi}{2} R = \frac{\pi}{2} \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 3.141 \times 39.2 \times \sin 22^\circ = 16.310 \text{ km}$$

(2) 根据正弦定理: $\frac{BD}{\sin A} = \frac{AB}{\sin 58^\circ}$, 求得: $\sin A = \frac{39.2}{40} \times \sin 58^\circ = 0.831$, $A = 56.2^\circ$

$$\therefore \angle ABD = 180 - 56.2 - 58 = 65.8^\circ$$

$$DH = BD \times \sin \angle ABD = 35.752 \text{ km} < CD = 36.346 \text{ km}$$

$\therefore D$ 到海岸线最短距离为 35.752km .

【归纳与总结】本题考查了圆弧弧长求法、正弦定理在解三角形中的应用, 考查了数形结合思想的应用.

20. (本题满分16分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, F_1, F_2 为左、右焦点, 直线 l 过 F_2 交椭圆于 A, B 两点.

- (1) 若 AB 垂直于 x 轴时, 求 $|AB|$;
 (2) 当 $\angle F_1AB = 90^\circ$ 时, A 在 x 轴上方时, 求 A, B 的坐标;
 (3) 若直线 AF_1 交 y 轴于 M , 直线 BF_1 交 y 轴于 N , 是否存在直线 l , 使 $S_{\triangle F_1AB} = S_{\triangle F_1MN}$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

【思路分析】直接求出 A, B 坐标; 利用三角形面积公式和点在曲线上建立方程; 根据面积关系 $S_{\triangle F_1AB} = S_{\triangle F_1MN}$ 转化出关于点的坐标关系, 再求解出关于点直线斜率的方程.

【解析】: (1) 依题意: $F_2(2, 0)$, 当 $AB \perp x$ 轴, 则坐标 $A(2, \sqrt{2})$, $B(2, -\sqrt{2})$,
 $\therefore |AB| = 2\sqrt{2}$

(2) 法一 (秒杀): 焦点三角形面积公式: $S_{\triangle F_1AF_2} = b^2 \cdot \tan \frac{\theta}{2} = 4 \times \tan \frac{\pi}{4} = 4$;

$$\text{又: } |F_1F_2| = 2c = 4, \quad S_{\triangle F_1AF_2} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot y_A = 2y_A = 4, \quad \text{即 } y_A = 2$$

所以 A 在短轴端点, 即 $A(0, 2)$

$$\text{直线 } l_{AF} \text{ (即 } l_{AB} \text{) 方程为: } y = -x + 2, \text{ 联立: } \begin{cases} y = -x + 2 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } B(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}).$$

法二 (常规): 依题意: 设坐标 $A(x_1, y_1)$, $\therefore \angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{2}$ (注意: 用点 F_2 更方便计算)

则有: $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = (x_1 + 2, y_1) \cdot (x_1 - 2, y_1) = x_1^2 - 4 + y_1^2$

又A在椭圆上, 满足: $\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1$, 即: $y_1^2 = 4(1 - \frac{x_1^2}{8})$

$\therefore \overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = x_1^2 - 4 + 4(1 - \frac{x_1^2}{8}) = 0$, 解出: $x_1 = 0$, $A(0, 2)$

B点坐标求解方法同法一, $B(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$.

(3) 设坐标 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(0, y_3)$, $N(0, y_4)$, 直线 $l: x = my + 2$ (k 不存在时不满足题意)

则: $S_{\triangle F_1 AB} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| \cdot |y_1 - y_2| = 2 |y_1 - y_2|$;

$S_{\triangle F_1 MN} = \frac{1}{2} |F_1 O| \cdot |y_3 - y_4| = |y_3 - y_4|$;

联立方程: $\begin{cases} x = my + 2 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$, $(m^2 + 2)y^2 + 4my - 4 = 0$, 韦达定理: $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2 + 2} \\ y_1 y_2 = \frac{-4}{m^2 + 2} \end{cases}$

由直线 AF_1 方程: $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$ 得M纵坐标: $y_3 = \frac{2y_1}{x_1 + 2}$;

由直线 BF_1 方程: $y = \frac{y_2}{x_2 + 2}(x + 2)$ 得N纵坐标: $y_4 = \frac{2y_2}{x_2 + 2}$;

若 $S_{\triangle F_1 AB} = S_{\triangle F_1 MN}$, 即 $2|y_1 - y_2| = |y_3 - y_4|$

$|y_3 - y_4| = \left| \frac{2y_1}{x_1 + 2} - \frac{2y_2}{x_2 + 2} \right| = \left| \frac{2y_1}{my_1 + 4} - \frac{2y_2}{my_2 + 4} \right| = \left| \frac{8(y_1 - y_2)}{(my_1 + 4)(my_2 + 4)} \right| = 2|y_1 - y_2|$

$\therefore |(my_1 + 4)(my_2 + 4)| = 4$, $|m^2 y_1 y_2 + 4m(y_1 + y_2) + 16| = 4$, 代入韦达定理:

得: $\left| \frac{-4m^2}{m^2 + 2} + 4m \cdot \frac{-4m}{m^2 + 2} + 16 \right| = 4$, 解出: $m = \pm\sqrt{3}$

\therefore 存在直线 $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 或 $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ 满足题意.

【归纳与总结】本题考查椭圆的性质, 直线与椭圆的位置关系, 考查转化思想, 计算能力, 属于中档题.

21. (本题满分18分)

数列 $\{a_n\}$ 有100项, $a_1 = a$, 对任意 $n \in [2, 100]$, 存在 $a_n = a_i + d, i \in [1, n-1]$, 若 a_k 与前 n 项中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P .

(1) 若 $a_1 = 1$, 求 a_4 可能的值;

(2) 若 $\{a_n\}$ 不为等差数列, 求证: $\{a_n\}$ 中存在满足性质 P ;

(3) 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P ，这三项和为 C ，使用 a, d, c 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$ 。

【思路分析】根据定义式子代入即可求解 a_4 ；通过证明逆否命题证明；去掉具有 P 性质三项，求和

【解析】：(1) a_4 可能的值为 3, 5, 7；

(2) 要证明 $\{a_n\}$ 中存在满足性质 P ，

即证明：若数列 $\{a_n\}$ 中不存在满足性质 P 的项，则 a_n 为等差数列（原命题的逆否命题）

显然 $a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a_i + d, (i = 1, 2)$

$i = 1$ 时， $a_3 = a_1 + d = a_2$ ，满足性质 P ，不成立；

$i = 2$ 时， $a_3 = a_2 + d = a + 2d$ ， $a_4 = a_i + d, i = 1, 2, 3$ ，

同理 $i = 1$ 时， $a_4 = a_2$ 不成立； $i = 2$ 时， $a_4 = a_3$

所以 $a_4 = a_3 + d = a + 3d$

以此类推 $a_n = a_i + d, i \in [1, n-1]$ ，其中 $a_n = a_i + d, i \in [1, n-2]$ 时不成立

只有 $i = n-1$ ，即 $a_n = a_{n-1} + d$ 成立，即 $\{a_n\}$ 为等差数列，

即得证明： $\{a_n\}$ 不为等差数列， $\{a_n\}$ 中存在满足性质 P

(3) 将数列中具有性质 P 的三项去掉，形成一个新数列 $\{b_n\}$

$b_1 = a_1 = a, n \in [2, 97]$ 时， $b_n = a_i + d, i \in [1, n-1]$ ，且 $\{b_n\}$ 中元素满足性质 P 的项，

根据 (2) $\{b_n\}$ 为等差数列，所以

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{97} = 97b_1 + \frac{97 \times 96}{2} \times d$$

$$\text{即 } b_1 + b_2 + \cdots + b_{97} = 97a + 4656d$$

又因为三项去掉和为 c ，所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 97a + 4656d + c$

【归纳与总结】本题考查新定义“性质 P ”的理解和运用，考查等差数列和等比数列的定义和通项公式的运用，考查分类讨论思想方法，以及运算能力和推理能力，属于难题。