

2018年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅲ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. （5分）已知集合 $A=\{x|x-1\geq 0\}$ ， $B=\{0, 1, 2\}$ ，则 $A\cap B=$ （ ）

- A. $\{0\}$ B. $\{1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】37：集合思想；4A：数学模型法；5J：集合.

【分析】求解不等式化简集合A，再由交集的运算性质得答案.

【解答】解： $\because A=\{x|x-1\geq 0\}=\{x|x\geq 1\}$ ， $B=\{0, 1, 2\}$ ，

$\therefore A\cap B=\{x|x\geq 1\}\cap\{0, 1, 2\}=\{1, 2\}$.

故选：C.

【点评】本题考查了交集及其运算，是基础题.

2. （5分） $(1+i)(2-i)=$ （ ）

- A. $-3-i$ B. $-3+i$ C. $3-i$ D. $3+i$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】38：对应思想；4A：数学模型法；5N：数系的扩充和复数.

【分析】直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

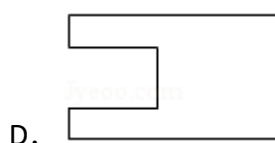
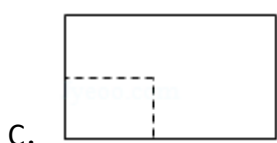
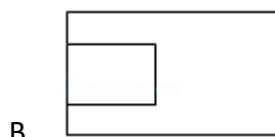
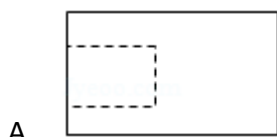
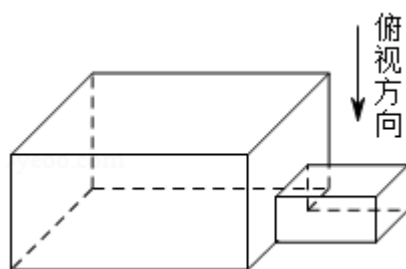
【解答】解： $(1+i)(2-i)=3+i$.

故选：D.

【点评】本题考查了复数代数形式的乘除运算，是基础题.

3. （5分）中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来. 构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可

以是（ ）



【考点】L7：简单空间图形的三视图.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离

【分析】直接利用空间几何体的三视图的画法，判断选项的正误即可.

【解答】解：由题意可知，如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，小的长方体，是榫头，从图形看出，轮廓是长方形，内含一个长方形，并且一条边重合，另外3边是虚线，所以木构件的俯视图是A.



故选：A.

【点评】本题看出简单几何体的三视图的画法，是基本知识的考查.

4. （5分）若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ，则 $\cos 2\alpha=（\quad）$

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $-\frac{7}{9}$

D. $-\frac{8}{9}$

【考点】GS：二倍角的三角函数.

【专题】11：计算题；34：方程思想；40：定义法；56：三角函数的求值.

【分析】 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ，由此能求出结果.

【解答】解：∵ $\sin \alpha = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

故选：B.

【点评】本题考查二倍角的余弦值的求法，考查二倍角公式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

5. (5分) 若某群体中的成员只用现金支付的概率为0.45，既用现金支付也用非现金支付的概率为0.15，则不用现金支付的概率为 ()

- A. 0.3 B. 0.4 C. 0.6 D. 0.7

【考点】C5：互斥事件的概率加法公式；CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；51：概率与统计.

【分析】直接利用互斥事件的概率的加法公式求解即可.

【解答】解：某群体中的成员只用现金支付，既用现金支付也用非现金支付，不用现金支付，是互斥事件，

所以不用现金支付的概率为： $1 - 0.45 - 0.15 = 0.4$.

故选：B.

【点评】本题考查互斥事件的概率的求法，判断事件是互斥事件是解题的关键，是基本知识的考查.

6. (5分) 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

【考点】H1：三角函数的周期性.

【专题】35：转化思想；49：综合法；57：三角函数的图像与性质.

【分析】利用同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦公式化简函数的解析式

，再利用正弦函数的周期性，得出结论.

【解答】解：函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{2} \sin 2x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}$
 $=\pi$,

故选：C.

【点评】本题主要考查同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦公式，正弦函数的周期性，属于基础题.

7. (5分) 下列函数中，其图象与函数 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的是 ()

A. $y=\ln(1-x)$ B. $y=\ln(2-x)$ C. $y=\ln(1+x)$ D. $y=\ln(2+x)$

【考点】3A：函数的图象与图象的变换.

【专题】35：转化思想；51：函数的性质及应用.

【分析】直接利用函数的图象的对称和平移变换求出结果.

【解答】解：首先根据函数 $y=\ln x$ 的图象，

则：函数 $y=\ln x$ 的图象与 $y=\ln(-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

由于函数 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

则：把函数 $y=\ln(-x)$ 的图象向右平移2个单位即可得到： $y=\ln(2-x)$.

即所求得解析式为： $y=\ln(2-x)$.

故选：B.

【点评】本题考查的知识要点：函数的图象的对称和平移变换.

8. (5分) 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴， y 轴交于A，B两点，点P在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 ()

A. $[2, 6]$ B. $[4, 8]$ C. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ D. $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

【考点】J9：直线与圆的位置关系.

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；5B：直线与圆.

【分析】求出A(-2, 0), B(0, -2), $|AB|=2\sqrt{2}$, 设P($2+\sqrt{2}\cos\theta$, $\sqrt{2}\sin\theta$), 点P到直线 $x+y+2=0$ 的距离: $d=\frac{|2+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}}\in[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$, 由此能求出 $\triangle ABP$ 面积的取值范围.

【解答】解: \because 直线 $x+y+2=0$ 分别与x轴, y轴交于A, B两点,

\therefore 令 $x=0$, 得 $y=-2$, 令 $y=0$, 得 $x=-2$,

\therefore A(-2, 0), B(0, -2), $|AB|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$,

\because 点P在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上, \therefore 设P($2+\sqrt{2}\cos\theta$, $\sqrt{2}\sin\theta$),

\therefore 点P到直线 $x+y+2=0$ 的距离:

$$d=\frac{|2+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}},$$

$$\because \sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[-1, 1], \therefore d=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}}\in[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}],$$

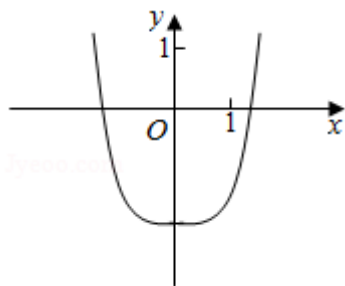
$\therefore \triangle ABP$ 面积的取值范围是:

$$[\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}, \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}]=[2, 6].$$

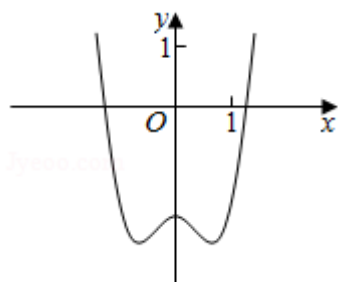
故选: A.

【点评】本题考查三角形面积的取值范围的求法, 考查直线方程、点到直线的距离公式、圆的参数方程、三角函数关系等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是中档题.

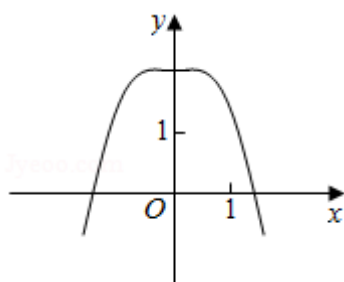
9. (5分) 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图象大致为()



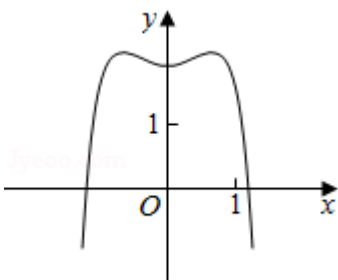
A.



B.



C.



D.

【考点】3A：函数的图象与图象的变换.

【专题】38：对应思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用.

【分析】根据函数图象的特点，求函数的导数利用函数的单调性进行判断即可

【解答】解：函数过定点 $(0, 2)$ ，排除A，B.

函数的导数 $f'(x) = -4x^3 + 2x = -2x(2x^2 - 1)$ ，

由 $f'(x) > 0$ 得 $2x(2x^2 - 1) < 0$ ，

得 $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，此时函数单调递增，

由 $f'(x) < 0$ 得 $2x(2x^2 - 1) > 0$ ，

得 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ ，此时函数单调递减，排除C，

也可以利用 $f(1) = -1 + 1 + 2 = 2 > 0$ ，排除A，B，

故选：D.

【点评】 本题主要考查函数的图象的识别和判断，利用函数过定点以及判断函数的单调性是解决本题的关键.

10. (5分) 已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{2}$, 则点(4, 0)到C的渐近线的距离为 ()
- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 利用双曲线的离心率求出a, b的关系, 求出双曲线的渐近线方程, 利用点到直线的距离求解即可.

【解答】 解: 双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{2}$,

可得 $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, 即: $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 2$, 解得 $a = b$,

双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的渐近线方程为: $y = \pm x$,

点(4, 0)到C的渐近线的距离为: $\frac{|\pm 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

故选: D.

【点评】 本题看出双曲线的简单性质的应用, 考查转化思想以及计算能力.

11. (5分) $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则C= ()
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【考点】 HR: 余弦定理.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；58：解三角形.

【分析】推导出 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}$ ，从而 $\sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \cos C$ ，由此能求出结果.

【解答】解：∵ $\triangle ABC$ 的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.

$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 的面积为 } & \frac{a^2+b^2-c^2}{4}, \\ \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = & \frac{a^2+b^2-c^2}{4}, \\ \therefore \sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = & \cos C, \\ \therefore 0 < C < \pi, \therefore C = & \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

故选：C.

【点评】本题考查三角形内角的求法，考查余弦定理、三角形面积公式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

12. (5分) 设A，B，C，D是同一个半径为4的球的球面上四点， $\triangle ABC$ 为等边三角形且面积为 $9\sqrt{3}$ ，则三棱锥D-ABC体积的最大值为 ()

- A. $12\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{3}$ C. $24\sqrt{3}$ D. $54\sqrt{3}$

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LG：球的体积和表面积.

【专题】11：计算题；31：数形结合；34：方程思想；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离.

【分析】求出， $\triangle ABC$ 为等边三角形的边长，画出图形，判断D的位置，然后求解即可.

【解答】解： $\triangle ABC$ 为等边三角形且面积为 $9\sqrt{3}$ ，可得 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times AB^2 = 9\sqrt{3}$ ，解得 $AB = 6$,

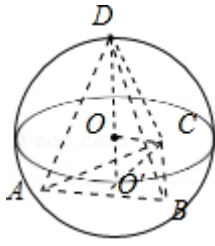
球心为O，三角形ABC的外心为O'，显然D在O'O的延长线与球的交点如图：

$$O'C = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 2\sqrt{3}, \quad OO' = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2,$$

则三棱锥D-ABC高的最大值为：6，

则三棱锥D-ABC体积的最大值为： $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^3 = 18\sqrt{3}$.

故选：B.



【点评】 本题考查球的内接多面体，棱锥的体积的求法，考查空间想象能力以及计算能力.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. (5分) 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -2)$, $\vec{c} = (1, \lambda)$. 若 $\vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\lambda = -\frac{1}{2}$.

【考点】 96: 平行向量（共线）； 9J: 平面向量的坐标运算.

【专题】 11: 计算题； 34: 方程思想； 40: 定义法； 5A: 平面向量及应用.

【分析】 利用向量坐标运算法则求出 $2\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$, 再由向量平行的性质能求出 λ 的值.

【解答】 解: \because 向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -2)$,

$$\therefore 2\vec{a} + \vec{b} = (4, 2),$$

$$\because \vec{c} = (1, \lambda), \vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{\lambda}{2},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】 本题考查实数值的求法，考查向量坐标运算法则、向量平行的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

14. (5分) 某公司有大量客户，且不同年龄段客户对其服务的评价有较大差异

. 为了解客户的评价，该公司准备进行抽样调查，可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，则最合适的抽样方法是分层抽样。

【考点】 B3：分层抽样方法；B4：系统抽样方法。

【专题】 11：计算题；38：对应思想；40：定义法；51：概率与统计。

【分析】 利用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样的定义、性质直接求解。

【解答】 解：某公司有大量客户，且不同年龄段客户对其服务的评价有较大差异，

为了解客户的评价，该公司准备进行抽样调查，

可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，

则最合适的抽样方法是分层抽样。

故答案为：分层抽样。

【点评】 本题考查抽样方法的判断，考查简单随机抽样、分层抽样和系统抽样的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题。

15. (5分) 若变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x+y+3 \geq 0 \\ x-2y+4 \geq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$
，则 $z=x+\frac{1}{3}y$ 的最大值是3。

【考点】 7C：简单线性规划。

【专题】 11：计算题；31：数形结合；34：方程思想；35：转化思想；49：综合法；5T：不等式。

【分析】 作出不等式组表示的平面区域；作出目标函数对应的直线；结合图象知当直线过 $(2, 3)$ 时， z 最大。

【解答】 解：画出变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x+y+3 \geq 0 \\ x-2y+4 \geq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$
表示的平面区域如图：由

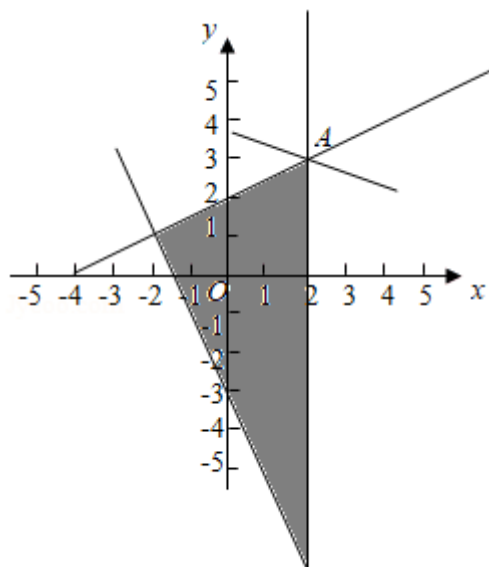
$$\begin{cases} x=2 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \text{ 解得 } A(2, 3) .$$

$z=x+\frac{1}{3}y$ 变形为 $y=-3x+3z$ ，作出目标函数对应的直线，

当直线过 $A(2, 3)$ 时，直线的纵截距最小， z 最大，

最大值为 $2+3\times\frac{1}{3}=3$,

故答案为: 3.



【点评】 本题考查画不等式组表示的平面区域、考查数形结合求函数的最值.

16. (5分) 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) = \underline{-2}$.

【考点】 3K: 函数奇偶性的性质与判断.

【专题】 11: 计算题; 33: 函数思想; 49: 综合法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 利用函数的奇偶性的性质以及函数值, 转化求解即可.

【解答】 解: 函数 $g(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$

满足 $g(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x) = -g(x)$,

所以 $g(x)$ 是奇函数.

函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$,

可得 $f(a) = 4 = \ln(\sqrt{1+a^2} - a) + 1$, 可得 $\ln(\sqrt{1+a^2} - a) = 3$,

则 $f(-a) = -\ln(\sqrt{1+a^2} - a) + 1 = -3 + 1 = -2$.

故答案为: -2.

【点评】 本题考查奇函数的简单性质以及函数值的求法，考查计算能力.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21

题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：共60分。

17. （12分）等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ， $a_5=4a_3$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m=63$ ，求 m .

【考点】 89：等比数列的前 n 项和.

【专题】 11：计算题； 35：转化思想； 49：综合法； 54：等差数列与等比数列

【分析】（1）利用等比数列通项公式列出方程，求出公比 $q=\pm 2$ ，由此能求出 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（2）当 $a_1=1$ ， $q=-2$ 时， $S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$ ，由 $S_m=63$ ，得 $S_m=\frac{1-(-2)^m}{3}=63$ ， $m\in\mathbb{N}$ ，

无解；当 $a_1=1$ ， $q=2$ 时， $S_n=2^n-1$ ，由此能求出 m .

【解答】解：（1） \because 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ， $a_5=4a_3$.

$$\therefore 1 \times q^4 = 4 \times (1 \times q^2),$$

解得 $q=\pm 2$,

当 $q=2$ 时， $a_n=2^{n-1}$,

当 $q=-2$ 时， $a_n=(-2)^{n-1}$,

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为， $a_n=2^{n-1}$ ，或 $a_n=(-2)^{n-1}$.

（2）记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

$$\text{当 } a_1=1, q=-2 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = \frac{1-(-2)^n}{3},$$

由 $S_m=63$ ，得 $S_m=\frac{1-(-2)^m}{3}=63$ ， $m\in\mathbb{N}$ ，无解；

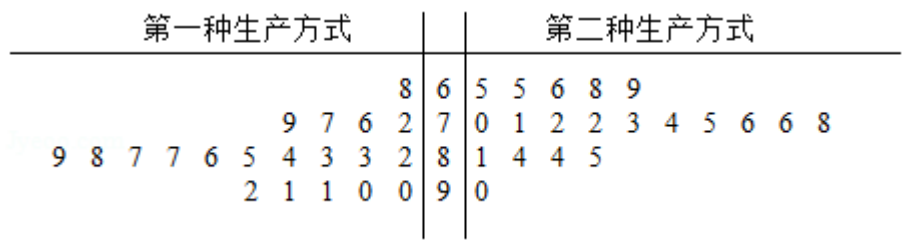
$$\text{当 } a_1=1, q=2 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1,$$

由 $S_m=63$ ，得 $S_m=2^m-1=63$ ， $m\in\mathbb{N}$ ，

解得m=6.

【点评】 本题考查等比数列的通项公式的求法，考查等比数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

18. （12分）某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率，选取40名工人，将他们随机分成两组，每组20人. 第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间（单位：min）绘制了如下茎叶图：



- (1) 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高？并说明理由；
- (2) 求40名工人完成生产任务所需时间的中位数m，并将完成生产任务所需时间超过m和不超过m的工人数填入下面的列联表：

	超过m	不超过m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

- (3) 根据（2）中的列联表，能否有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异？

附： $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

P（ $K^2\geq k$ ）	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【考点】 BL：独立性检验.

【专题】 38：对应思想； 4A：数学模型法； 5I：概率与统计.

【分析】 （1）根据茎叶图中的数据判断第二种生产方式的工作时间较少些，效率更高；

(2) 根据茎叶图中的数据计算它们的中位数，再填写列联表；

(3) 列联表中的数据计算观测值，对照临界值得出结论.

【解答】解：（1）根据茎叶图中的数据知，

第一种生产方式的工作时间主要集中在72~92之间，

第二种生产方式的工作时间主要集中在65~85之间，

所以第二种生产方式的工作时间较少些，效率更高；

（2）这40名工人完成生产任务所需时间按从小到大的顺序排列后，

排在中间的两个数据是79和81，计算它们的中位数为 $m = \frac{79+81}{2} = 80$ ；

由此填写列联表如下；

	超过m	不超过m	总计
第一种生产方式	15	5	20
第二种生产方式	5	15	20
总计	20	20	40

（3）根据（2）中的列联表，计算

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{40 \times (15 \times 15 - 5 \times 5)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 10 > 6.635,$$

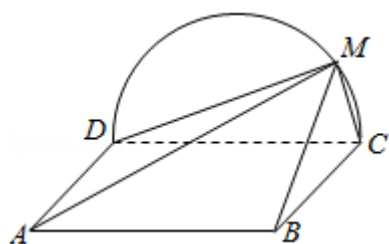
∴能有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

【点评】本题考查了列联表与独立性检验的应用问题，是基础题.

19. （12分）如图，矩形ABCD所在平面与半圆弧 \widehat{CD} 所在平面垂直，M是 \widehat{CD} 上异于C，D的点.

（1）证明：平面AMD⊥平面BMC；

（2）在线段AM上是否存在点P，使得MC∥平面PBD？说明理由.



【考点】LS：直线与平面平行；LY：平面与平面垂直.

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离.

【分析】（1）通过证明 $CD \perp AD$ ， $CD \perp DM$ ，证明 $CM \perp$ 平面 AMD ，然后证明平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ；

（2）存在 P 是 AM 的中点，利用直线与平面平行的判断定理说明即可.

【解答】（1）证明：矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弦 \widehat{CD} 所在平面垂直，所以 $AD \perp$ 半圆弦 \widehat{CD} 所在平面， $CM \subset$ 半圆弦 \widehat{CD} 所在平面，

$\therefore CM \perp AD$ ，

M 是 \widehat{CD} 上异于 C ， D 的点. $\therefore CM \perp DM$ ， $DM \cap AD = D$ ， $\therefore CM \perp$ 平面 AMD ， $CM \subset$ 平面 CMB ，

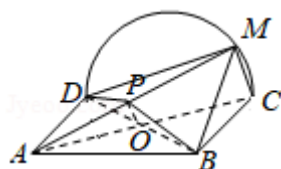
\therefore 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ；

（2）解：存在 P 是 AM 的中点，

理由：

连接 BD 交 AC 于 O ，取 AM 的中点 P ，连接 OP ，可得 $MC \parallel OP$ ， $MC \not\subset$ 平面 BDP ， $OP \subset$ 平面 BDP ，

所以 $MC \parallel$ 平面 PBD .



【点评】本题考查直线与平面垂直的判断定理以及性质定理的应用，直线与平面平行的判断定理的应用，考查空间想象能力以及逻辑推理能力.

20. （12分）已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A ， B 两点，线段 AB

的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$).

（1）证明： $k < -\frac{1}{2}$ ；

（2）设 F 为 C 的右焦点， P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$ ，证明： $2|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}|$

|.

【考点】K4：椭圆的性质；KL：直线与椭圆的综合.

【专题】35：转化思想；4P：设而不求法；5E：圆锥曲线中的最值与范围问题

.

【分析】（1）设A（ x_1 ， y_1 ），B（ x_2 ， y_2 ），利用点差法得 $6(x_1 - x_2) + 8m(y_1$

$$- y_2) = 0, k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{6}{8m} = -\frac{3}{4m}$$

又点M（1，m）在椭圆内，即 $\frac{1}{4} + \frac{m^2}{3} < 1$ ，（ $m > 0$ ），解得m的取值范围，即可得

$$k < -\frac{1}{2},$$

（2）设A（ x_1 ， y_1 ），B（ x_2 ， y_2 ），P（ x_3 ， y_3 ），可得 $x_1 + x_2 = 2$

由 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$ ，可得 $x_3 - 1 = 0$ ，由椭圆的焦半径公式得则 $|FA| = a - ex_1 = 2 - \frac{1}{2}x_1$

$$, |FB| = 2 - \frac{1}{2}x_2, |FP| = 2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2}. \text{ 即可证明 } |FA| + |FB| = 2|FP|.$$

【解答】解：（1）设A（ x_1 ， y_1 ），B（ x_2 ， y_2 ），

∵线段AB的中点为M（1，m），

$$\therefore x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2m$$

将A，B代入椭圆C： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 中，可得

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \\ 3x_2^2 + 4y_2^2 = 12 \end{cases},$$

两式相减可得， $3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$ ，

$$\text{即 } 6(x_1 - x_2) + 8m(y_1 - y_2) = 0,$$

$$\therefore k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{6}{8m} = -\frac{3}{4m}$$

点M（1，m）在椭圆内，即 $\frac{1}{4} + \frac{m^2}{3} < 1$ ，（ $m > 0$ ），

$$\text{解得 } 0 < m < \frac{3}{2}$$

$$\therefore k = -\frac{3}{4m} < -\frac{1}{2}.$$

(2) 证明: 设A (x_1 , y_1), B (x_2 , y_2), P (x_3 , y_3),
可得 $x_1+x_2=2$

$$\therefore \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}, F(1, 0), \therefore x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 = 0,$$

$$\therefore x_3 = 1$$

$$\text{由椭圆的焦半径公式得则 } |FA| = a - ex_1 = 2 - \frac{1}{2}x_1, |FB| = 2 - \frac{1}{2}x_2, |FP| = 2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{则 } |FA| + |FB| = 4 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3,$$

$$\therefore |FA| + |FB| = 2|FP|,$$

【点评】 本题考查直线与椭圆的位置关系的综合应用, 考查了点差法、焦半径公式, 考查分析问题解决问题的能力, 转化思想的应用与计算能力的考查.
属于中档题.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程;

(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.

【考点】 6D: 利用导数研究函数的极值; 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】 35: 转化思想; 49: 综合法; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (1) $f'(x) = \frac{(2ax+1)e^x - (ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2}$

由 $f'(0) = 2$, 可得切线斜率 $k=2$, 即可得到切线方程.

(2) 可得 $f'(x) = \frac{(2ax+1)e^x - (ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2} = -\frac{(ax+1)(x-2)}{e^x}$. 可得 $f(x)$ 在

$(-\infty, -\frac{1}{a})$, $(2, +\infty)$ 递减, 在 $(-\frac{1}{a}, 2)$ 递增, 注意到 $a \geq 1$ 时, 函数

$g(x) = ax^2 + x - 1$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, 且 $g(2) = 4a + 1 > 0$

只需 $(x)_{\min} = -e^{\frac{1}{a}} \geq -e$, 即可.

【解答】解: (1) $f'(x) = \frac{(2ax+1)e^x - (ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2} = -\frac{(ax+1)(x-2)}{e^x}$.

$\therefore f'(0) = 2$, 即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线斜率 $k=2$,

\therefore 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为 $y - (-1) = 2x$.

即 $2x - y - 1 = 0$ 为所求.

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 的定义域为: \mathbb{R} ,

可得 $f'(x) = \frac{(2ax+1)e^x - (ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2} = -\frac{(ax+1)(x-2)}{e^x}$.

令 $f'(x) = 0$, 可得 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{a} < 0$,

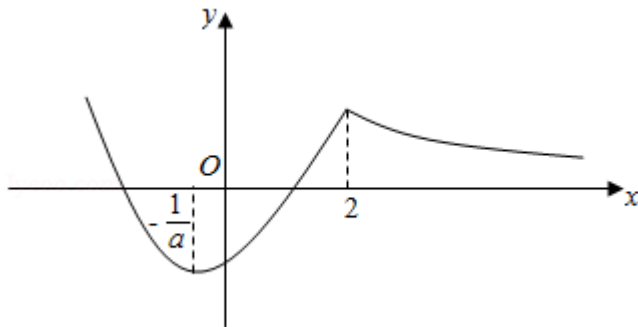
当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in (-\frac{1}{a}, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in (2, +\infty)$

时, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{a})$, $(2, +\infty)$ 递减, 在 $(-\frac{1}{a}, 2)$ 递增,

注意到 $a \geq 1$ 时, 函数 $g(x) = ax^2 + x - 1$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, 且 $g(2) = 4a + 1 > 0$

函数 $f(x)$ 的图象如下:



$\therefore a \geq 1, \therefore \frac{1}{a} \in (0, 1]$, 则 $f(-\frac{1}{a}) = -e^{\frac{1}{a}} \geq -e$,

$\therefore f(x)_{\min} = -e^{\frac{1}{a}} \geq -e$,

\therefore 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.

【点评】本题考查了导数的几何意义, 及利用导数求单调性、最值, 考查了数形结合思想, 属于中档题.

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修4-4：坐标系与参数方程] (10分)

22. (10分) 在平面直角坐标系xOy中，⊙O的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ ，(θ为参数)，过点(0, -√2)且倾斜角为α的直线l与⊙O交于A, B两点.

(1) 求α的取值范围；

(2) 求AB中点P的轨迹的参数方程.

【考点】QK：圆的参数方程.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；55：坐标系和参数方程.

【分析】(1) ⊙O的普通方程为 $x^2+y^2=1$ ，圆心为O(0, 0)，半径r=1，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线l的方程为 $x=0$ ，成立；当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，过点(0, -√2)且倾斜角为α的直线l的方程为 $y=\tan\alpha\cdot x+\sqrt{2}$ ，从而圆心O(0, 0)到直线l的距离 $d=\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}<1$ ，进而求出 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ ，由此能求出α的取值范围.

(2) 设直线l的方程为 $x=m(y+\sqrt{2})$ ，联立 $\begin{cases} x=m(y+\sqrt{2}) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ ，得 $(m^2+1)y^2+2\sqrt{2}m^2y+m^2-1=0$ ，由此利用韦达定理、中点坐标公式能求出AB中点P的轨迹的参数方程.

【解答】解：(1) ∵⊙O的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)，

∴⊙O的普通方程为 $x^2+y^2=1$ ，圆心为O(0, 0)，半径r=1，

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，过点(0, -√2)且倾斜角为α的直线l的方程为 $x=0$ ，成立；

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，过点(0, -√2)且倾斜角为α的直线l的方程为 $y=\tan\alpha\cdot x-\sqrt{2}$ ，

∴倾斜角为α的直线l与⊙O交于A, B两点，

∴圆心O(0, 0)到直线l的距离 $d=\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}<1$ ，

$$\therefore \tan^2 \alpha > 1, \therefore \tan \alpha > 1 \text{ 或 } \tan \alpha < -1,$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4},$$

综上 α 的取值范围是 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

(2) 由(1)知直线 l 的斜率不为0, 设直线 l 的方程为 $x=m(y+\sqrt{2})$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x=m(y+\sqrt{2}) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}, \text{ 得 } (m^2+1)y^2+2\sqrt{2}m^2y+2m^2-1=0,$$

$$\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}m^2}{m^2+1} \\ y_1y_2=\frac{2m^2-1}{m^2+1} \end{cases},$$

$$x_1+x_2=m(y_1+\sqrt{2})+m(y_2+\sqrt{2})=-\frac{2\sqrt{2}m^3}{m^2+1}+2\sqrt{2}m,$$

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\sqrt{2}m}{m^2+1}, \quad y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{\sqrt{2}m^2}{m^2+1},$$

$$\therefore AB \text{ 中点 } P \text{ 的轨迹的参数方程为 } \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}m}{m^2+1} \\ y=-\frac{\sqrt{2}m^2}{m^2+1} \end{cases}, \quad (m \text{ 为参数}), \quad (-1 < m < 1).$$

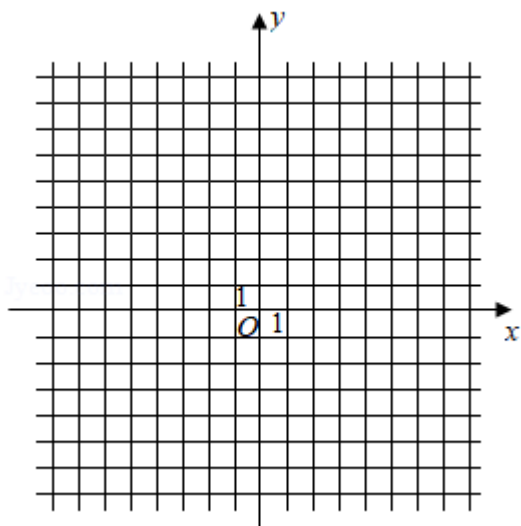
【点评】 本题考查直线的倾斜角的取值范围的求法, 考查线段的中点的参数方程的求法, 考查参数方程、直角坐标方程、韦达定理、中点坐标公式等基础知识, 考查数形结合思想的灵活运用, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是中档题.

[选修4-5: 不等式选讲] (10分)

23. 设函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \leq ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.



【考点】3B：分段函数的解析式求法及其图象的作法；5B：分段函数的应用．

【专题】31：数形结合；4R：转化法；51：函数的性质及应用；59：不等式的解法及应用．

【分析】（1）利用分段函数的性质将函数表示为分段函数形式进行作图即可．

（2）将不等式恒成立转化为图象关系进行求解即可．

【解答】解：（1）当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时， $f(x) = -(2x+1) - (x-1) = -3x$ ，

当 $-\frac{1}{2} < x < 1$ ， $f(x) = (2x+1) - (x-1) = x+2$ ，

当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = (2x+1) + (x-1) = 3x$ ，

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2, & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases} \text{ 对应的图象为:}$$

画出 $y=f(x)$ 的图象；

（2）当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x) \leq ax+b$ ，

当 $x=0$ 时， $f(0) = 2 \leq 0 \cdot a + b$ ， $\therefore b \geq 2$ ，

当 $x > 0$ 时，要使 $f(x) \leq ax+b$ 恒成立，

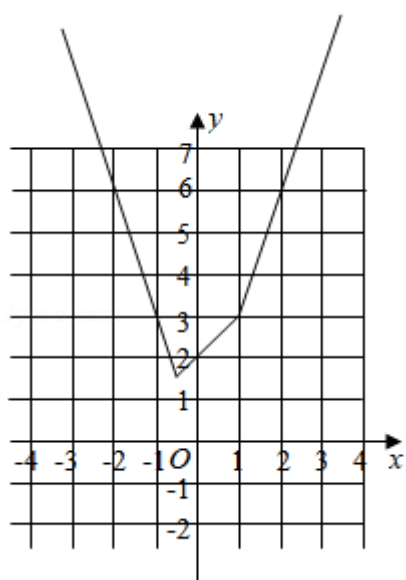
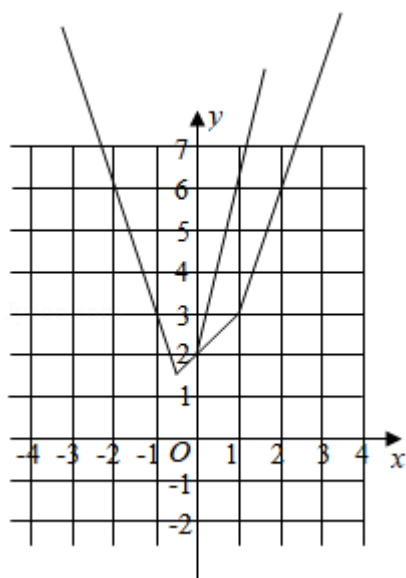
则函数 $f(x)$ 的图象都在直线 $y=ax+b$ 的下方或在直线上，

$\therefore f(x)$ 的图象与 y 轴的交点的纵坐标为 2，

且各部分直线的斜率的最大值为 3，

故当且仅当 $a \geq 3$ 且 $b \geq 2$ 时，不等式 $f(x) \leq ax+b$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立，

即 $a+b$ 的最小值为5.



【点评】 本题主要考查分段函数的应用，利用不等式和函数之间的关系利用数形结合是解决本题的关键.