

**2009年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）**  
**数学I**

参考公式：

样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , 其中  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分。

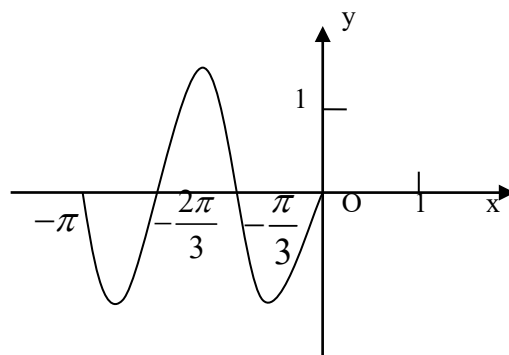
1. 若复数  $z_1 = 4 + 29i, z_2 = 6 + 9i$ ，其中  $i$  是虚数单位，则复数  $(z_1 - z_2)i$  的实部为\_\_\_\_\_

2. 已知向量  $\mathbf{a}$  和向量  $\mathbf{b}$  的夹角为  $30^\circ$ ， $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = \sqrt{3}$ ，则向量  $\mathbf{a}$  和向量  $\mathbf{b}$  的数量积  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$  \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ .

3. 函数  $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 6$  的单调减区间为\_\_\_\_\_

4. 函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A, \omega, \varphi$  为常数，

$A > 0, \omega > 0$ ) 在闭区间  $[-\pi, 0]$  上的图象如图所示，则  
 $\omega =$  \_\_\_\_\_ .



5. 现有5根竹竿，它们的长度（单位：m）分别为2.5，2.6，2.7，2.8，2.9，若从中一次随机抽取2根竹竿，则它们的长度恰好相差0.3m的概率为\_\_\_\_\_ .

6. 某校甲、乙两个班级各有5名编号为1，2，3，4，5的学生进行投篮练习，每人投10次，投中的次数如下表：

学生	1号	2号	3号	4号	5号
甲班	6	7	7	8	7
乙班	6	7	6	7	9

则以上两组数据的方差中较小的一个为  $s^2 =$  \_\_\_\_\_ .

7.右图是一个算法的流程图,最后输出的  $W =$  \_\_\_\_\_ .

8.在平面上,若两个正三角形的边长的比为1: 2,则它们的面积比为1: 4,类似地,在空间,若两个正四面体的棱长的比为1: 2,则它们的体积比为\_\_\_\_\_ .

9.在平面直角坐标系  $xOy$  中,点P在曲线  $C: y = x^3 - 10x + 3$  上,且在第二象限内,已知曲线C在点P处的切线的斜率为2,则点P的坐标为\_\_\_\_\_.

10.已知  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 函数  $f(x) = a^x$ , 若实数  $m, n$  满足  $f(m) > f(n)$ , 则  $m, n$  的大小关系为\_\_\_\_\_.

11.已知集合  $A = \{x | \log_2 x \leq 2\}$ ,  $B = (-\infty, a)$ , 若  $A \subseteq B$  则实数  $a$  的取值范围是  $(c, +\infty)$ , 其中  $c =$  \_\_\_\_\_ .

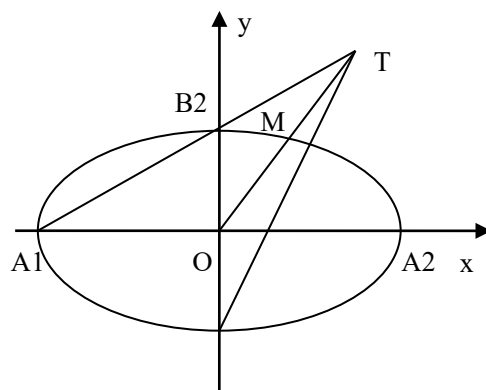
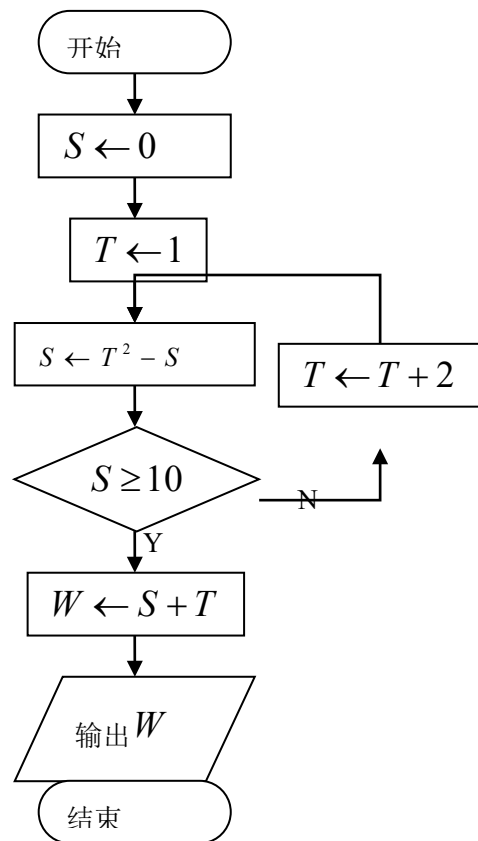
12.设  $\alpha$  和  $\beta$  为不重合的两个平面,给出下列命题: (1) 若  $\alpha$  内的两条相交直线分别平行于  $\beta$  内的两条直线,则  $\alpha$  平行于  $\beta$ ; (2) 若  $\alpha$  外一条直线  $l$  与  $\alpha$  内的一条直线平行,则  $l$  和  $\alpha$  平行; (3) 设  $\alpha$  和  $\beta$  相交于直线  $l$ , 若  $\alpha$  内有一条直线垂直于  $l$ , 则  $\alpha$  和  $\beta$  垂直; (4) 直线  $l$  与  $\alpha$  垂直的充分必要条件是  $l$  与  $\alpha$  内的两条直线垂直.

上面命题中,真命题的序号\_\_\_\_\_ (写出所有真命题的序号).

13. 如图,在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  为椭圆

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的四个顶点,  $F$  为其右焦点, 直线  $A_1B_2$  与直线  $B_1F$  相交于点T, 线段  $OT$  与椭圆的交点  $M$  恰为线段  $OT$  的中点, 则该椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.

14. 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列,  $|q| > 1$ , 令



$b_n = a_n + 1 (n=1, 2, \dots)$  若数列  $\{b_n\}$  有连续四项在集合  $\{-53, -23, 19, 37, 82\}$  中, 则  $6q =$

二、解答题：本大题共6小题，共计90分。

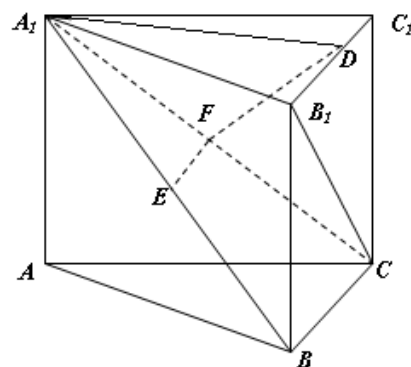
15. （本小题满分14分）

设向量  $\mathbf{a} = (4\cos\alpha, \sin\alpha), \mathbf{b} = (\sin\beta, 4\cos\beta), \mathbf{c} = (\cos\beta, -4\sin\beta)$  (1) 若  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$  垂直, 求  $\tan(\alpha + \beta)$  的值; (2) 求  $|\mathbf{b} + \mathbf{c}|$  的最大值; (3) 若  $\tan\alpha \tan\beta = 16$ , 求证:  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ .

16. （本小题满分14分）

如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $E, F$  分别是  $A_1B, A_1C$  的中点, 点  $D$  在  $B_1C_1$  上,  $A_1D \perp B_1C$

求证: (1)  $EF \parallel$  平面  $ABC$  (2) 平面  $A_1FD \perp$  平面  $BB_1C_1C$



17. （本小题满分14分）

设  $\{a_n\}$  是公差为零的等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 满足

$a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2, S_7 = 7$  (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式及前  $n$  项和  $S_n$ ; (2) 试求所有的正整数  $m$

, 使得  $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$  为数列  $\{a_n\}$  中的项.

18. （本小题满分16分）

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知圆  $C_1: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$  和圆

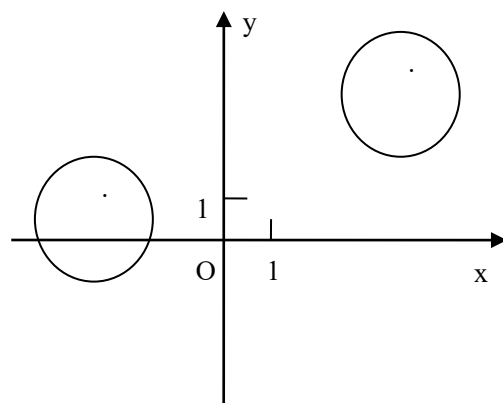
$C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$  (1) 若直线  $l$  过点  $A(4, 0)$ , 且被

圆  $C_1$  截得的弦长为  $2\sqrt{3}$ , 求直线  $l$  的方程; (2) 设  $P$  为平面上的

点, 满足: 存在过点  $P$  的无穷多对互相垂直的直线  $l_1$  和  $l_2$ , 它们分别

与圆  $C_1$  和圆  $C_2$  相交, 且直线  $l_1$  被圆  $C_1$  截得的弦长与直线  $l_2$  被圆

$C_2$  截得的弦长相等, 试求所有满足条件的点  $P$  的坐标.



19.(本小题满分16分)

按照某学者的理论,假设一个人生产某产品单件成本为 $a$ 元,如果他卖出该产品的单价为 $m$ 元,则他的

满意度为 $\frac{m}{m+a}$ ;如果他买进该产品的单价为 $n$ 元,则他的满意度为 $\frac{n}{n+a}$ .如果一个人对两种交易(卖出或买进)的满意度分别为 $h_1$ 和 $h_2$ ,则他对这两种交易的综合满意度为 $\sqrt{h_1 h_2}$ .

现假设甲生产A、B两种产品的单件成本分别为12元和5元,乙生产A、B两种产品的单件成本分别为3元和20元,设产品A、B的单价分别为 $m_A$ 元和 $m_B$ 元,甲买进A与卖出B的综合满意度为 $h_{\text{甲}}$ ,乙卖出A与买进B的综合满意度为 $h_{\text{乙}}$

求 $h_{\text{甲}}$ 和 $h_{\text{乙}}$ 关于 $m_A$ 、 $m_B$ 的表达式;当 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ 时,求证: $h_{\text{甲}} = h_{\text{乙}}$ ;

设 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ ,当 $m_A$ 、 $m_B$ 分别为多少时,甲、乙两人的综合满意度均最大?最大的综合满意度为多少?

记(2)中最大的综合满意度为 $h_0$ ,试问能否适当选取 $m_A$ 、 $m_B$ 的值,使得 $h_{\text{甲}} \geq h_0$ 和 $h_{\text{乙}} \geq h_0$ 同时成立,但等号不同时成立?试说明理由。

求 $h_{\text{甲}}$ 和 $h_{\text{乙}}$ 关于 $m_A$ 、 $m_B$ 的表达式;当 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ 时,求证: $h_{\text{甲}} = h_{\text{乙}}$ ;

设 $m_A = \frac{3}{5}m_B$ ,当 $m_A$ 、 $m_B$ 分别为多少时,甲、乙两人的综合满意度均最大?最大的综合满意度为多少?

记(2)中最大的综合满意度为 $h_0$ ,试问能否适当选取 $m_A$ 、 $m_B$ 的值,使得 $h_{\text{甲}} \geq h_0$ 和 $h_{\text{乙}} \geq h_0$ 同时成立,但等号不同时成立?试说明理由。

20. (本小题满分16分)设 $a$ 为实数,函数 $f(x) = 2x^2 + (x-a)|x-a|$ .若 $f(0) \geq 1$ ,求 $a$ 的取值范围;求 $f(x)$ 的最小值;设函数 $h(x) = f(x), x \in (a, +\infty)$ ,直接写出(不需给出演算步骤)不等式 $h(x) \geq 1$ 的解集.

## 数学II（附加题）

参考公式： $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

21.[选做题]在A、B、C、D四小题中只能选做两题，每小题10分，共计20分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A.选修4-1：几何证明选讲

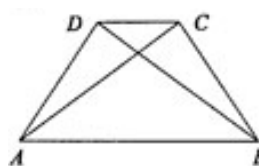
如图，在四边形ABCD中， $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ .

求证： $AB \parallel CD$ .

[解析]

四边形、全等三角形的有关知识，考查推理论证能力。满分10

证明：由 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ 得 $\angle ACB = \angle BDA$ ，故A、B、C、D四点共圆，从而 $\angle CBA = \angle CDB$ 。再由 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ 得 $\angle CAB = \angle DBA$ 。因此 $\angle DBA = \angle CDB$ ，所以 $AB \parallel CD$ 。



(第21-A题图)

本小题主要考查分。

B.选修4-2：矩阵与变换

求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  的逆矩阵.

[解析] 本小题主要考查逆矩阵的求法，考查运算求解能力。满分10分。

解：设矩阵A的逆矩阵为  $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ ，则  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

即  $\begin{bmatrix} 3x+2z & 3y+2w \\ 2x+z & 2y+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，故  $\begin{cases} 3x+2z=1, \\ 2x+z=0, \end{cases} \begin{cases} 3y+2w=0, \\ 2y+w=1, \end{cases}$

解得： $x = -1, z = 2, y = 2, w = -3$ ,

从而A的逆矩阵为  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ .

C.选修4-4：坐标系与参数方程

已知曲线C的参数方程为 
$$\begin{cases} x = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \\ y = 3(t + \frac{1}{t}) \end{cases}, (t \text{ 为参数}, t > 0).$$

求曲线C的普通方程。

[解析] 本小题主要考查参数方程和普通方程的基本知识，考查转化问题的能力。满分10分。

解：因为  $x^2 = t + \frac{1}{t} - 2$ , 所以  $x^2 + 2 = t + \frac{1}{t} = \frac{y}{3}$ ,

故曲线C的普通方程为：  $3x^2 - y + 6 = 0$ 。

D. 选修4-5：不等式选讲

设  $a \geq b > 0$ , 求证：  $3a^3 + 2b^3 \geq 3a^2b + 2ab^2$ 。

[解析] 本小题主要考查比较法证明不等式的常见方法，考查代数式的变形能力。满分10分。

证明：  $3a^3 + 2b^3 - (3a^2b + 2ab^2) = 3a^2(a-b) + 2b^2(b-a) = (3a^2 - 2b^2)(a-b)$ 。

因为  $a \geq b > 0$ , 所以  $a-b \geq 0$ ,  $3a^2 - 2b^2 > 0$ , 从而  $(3a^2 - 2b^2)(a-b) \geq 0$ ,

即  $3a^3 + 2b^3 \geq 3a^2b + 2ab^2$ 。

[必做题]第22题、第23题，每题10分，共计20分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

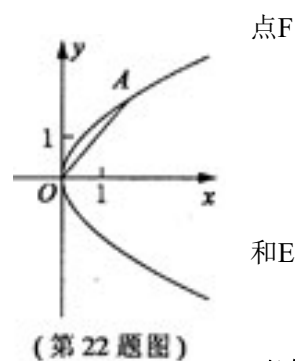
22. (本题满分10分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线C的顶点在原点，经过点A (2, 2)，其焦点在  $x$  轴上。

(1) 求抛物线C的标准方程；

(2) 求过点F，且与直线OA垂直的直线的方程；

(3) 设过点  $M(m, 0) (m > 0)$  的直线交抛物线C于D、E两点， $ME = 2DM$ ，记D、E两点间的距离为  $f(m)$ ，求  $f(m)$  关于  $m$  的表达式。

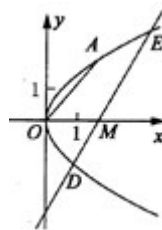


[解析]

[必做题]本小题主要考查直线、抛物线及两点间的距离公式等基本知识，考查运算求解能力。满分10分。

解:(1) 由题意,可设抛物线  $C$  的标准方程为  $y^2 = 2px$ . 因为点  $A(2,2)$  在抛物线  $C$  上,所以  $p = 1$ . 因此,抛物线  $C$  的标准方程为  $y^2 = 2x$ .

(2) 由(1) 可得焦点  $F$  的坐标是  $(\frac{1}{2}, 0)$ , 又直线  $OA$  的斜率为  $\frac{2}{2} = 1$ , 故与直线  $OA$  垂直的直线的斜率为  $-1$ . 因此, 所求直线的方程是  $x + y - \frac{1}{2} = 0$ .



(3) 解法一:

设点  $D$  和  $E$  的坐标分别为  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 直线  $DE$  的方程是  $y = k(x - m)$ ,

$k \neq 0$ . 将  $x = \frac{y}{k} + m$  代入  $y^2 = 2x$ , 有  $ky^2 - 2y - 2km = 0$ , 解得  $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2mk^2}}{k}$ .

由  $ME = 2DM$  知  $1 + \sqrt{1 + 2mk^2} = 2(\sqrt{1 + 2mk^2} - 1)$ , 化简得  $k^2 = \frac{4}{m}$ . 因此

$$\begin{aligned} DE^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (1 + \frac{1}{k^2})(y_1 - y_2)^2 \\ &= (1 + \frac{1}{k^2}) \frac{4(1 + 2mk^2)}{k^2} = \frac{9}{4}(m^2 + 4m). \end{aligned}$$

所以  $f(m) = \frac{3}{2}\sqrt{m^2 + 4m} \ (m > 0)$ .

解法二:

设  $D(\frac{s^2}{2}, s)$ ,  $E(\frac{t^2}{2}, t)$ . 由点  $M(m, 0)$  及  $\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{DM}$  得

$$\frac{1}{2}t^2 - m = 2(m - \frac{s^2}{2}), \quad t - 0 = 2(0 - s).$$

因此  $t = -2s, m = s^2$ . 所以

$$f(m) = DE = \sqrt{(2s^2 - \frac{s^2}{2})^2 + (-2s - s)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{m^2 + 4m} \ (m > 0).$$

23. (本题满分10分)

对于正整数  $n \geq 2$ , 用  $T_n$  表示关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  有实数根的有序数组  $(a, b)$  的组数,

其中  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  ( $a$  和  $b$  可以相等); 对于随机选取的  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  ( $a$  和  $b$  可以相等), 记

$P_n$  为关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  有实数根的概率。

(1) 求  $T_n$  和  $P_n$ ;

(2) 求证: 对任意正整数  $n \geq 2$ , 有  $P_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

[解析] [必做题] 本小题主要考查概率的基本知识和记数原理, 考查探究能力. 满分10分。

(1) 解: 因为方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  有实数根, 所以  $\Delta = 4a^2 - 4b \geq 0$ , 即  $b \leq a^2$ .

(i) 当  $n \leq a \leq n^2$  时, 有  $n^2 \leq a^2$ , 又  $b \in \{1, 2, \dots, n^2\}$ , 故总有  $b \leq a^2$ , 此时,  $a$  有  $n^2 - n + 1$  种取法,  $b$  有  $n^2$  种取法, 所以共有  $(n^2 - n + 1)n^2$  组有序数组  $(a, b)$  满足条件;

(ii) 当  $1 \leq a \leq n - 1$  时, 满足  $1 \leq b \leq a^2$  的  $b$  有  $a^2$  个, 故共有  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$  组有序数组  $(a, b)$  满足条件.

由(i)(ii) 可得  $T_{n^2} = (n^2 - n + 1)n^2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(6n^3 - 4n^2 + 3n + 1)}{6}$ ,

从而  $P_{n^2} = \frac{T_{n^2}}{n^4} = \frac{6n^3 - 4n^2 + 3n + 1}{6n^3}$ .

(2) 证明: 我们只需证明: 对于随机选取的  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  无实数根的概率  $1 - P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ . 若方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  无实数根, 则

$\Delta = 4a^2 - 4b < 0$ , 即  $a^2 < b$ . 由  $b \leq n$  知  $a < \sqrt{n}$ . 因此, 满足  $a^2 < b$  的有序数组  $(a, b)$  的组数小于  $n\sqrt{n}$ , 从而, 方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  无实数根的概率

$1 - P_n < \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 所以  $P_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

## 参考答案

1. 【答案】-20

【解析】略

2. 【答案】3

$$a \cdot b = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

【解析】

3. 【答案】(-1,11)

【解析】  $f'(x) = 3x^2 - 30x - 33 = 3(x-11)(x+1)$ , 由  $(x-11)(x+1) < 0$  得单调减区间为  $(-1,11)$ .

4. 【答案】3

【解析】  $\frac{3}{2}T = \pi$ ,  $T = \frac{2}{3}\pi$ , 所以  $\omega = 3$ ,

5. 【答案】0.2

【解析】略

6. 【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】略

7. 【答案】22

【解析】略



8.【答案】1: 8

【解析】略

9.【答案】 $(-2,15)$

【解析】略

10.【答案】 $m < n$

【解析】略

11.【答案】4

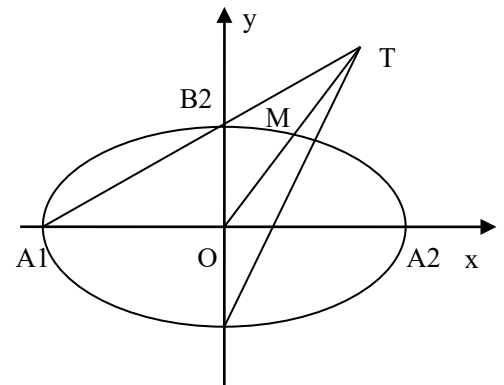
【解析】由  $\log_2 x \leq 2$  得  $0 < x \leq 4$ ,  $A = (0,4]$ ; 由  $A \subseteq B$  知  $a > 4$ , 所以  $c = 4$ 。

12.【答案】(1) (2) . .

【解析】略

13.【答案】 $e = 2\sqrt{7} - 5$

【解析】用  $a, b, c$  表示交点T, 得出M坐标, 代入椭圆方程即可转化解得离心率.



14.【答案】-9

【解析】将各数按照绝对值从小到大排列, 各数减1, 观察即可得解.

15.【解析】由  $a$  与  $b - 2c$  垂直,

$$a \cdot (b - 2c) = a \cdot b - 2a \cdot c = 0,$$

$$\text{即 } 4\sin(\alpha + \beta) - 8\cos(\alpha + \beta) = 0, \quad \tan(\alpha + \beta) = 2;$$

$$b + c = (\sin \beta + \cos \beta, 4\cos \beta - 4\sin \beta)$$

$$|b + c|^2 = \sin^2 \beta + 2\sin \beta \cos \beta + \cos^2 \beta + 16\cos^2 \beta - 32\cos \beta \sin \beta + 16\sin^2 \beta$$

$$= 17 - 30\sin \beta \cos \beta = 17 - 15\sin 2\beta, \text{ 最大值为 } 32, \text{ 所以 } |b + c| \text{ 的最大值为 } 4\sqrt{2}.$$

$$\text{由 } \tan \alpha \tan \beta = 16 \text{ 得 } \sin \alpha \sin \beta = 16\cos \alpha \cos \beta, \text{ 即 } 4\cos \alpha \cdot 4\cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0,$$

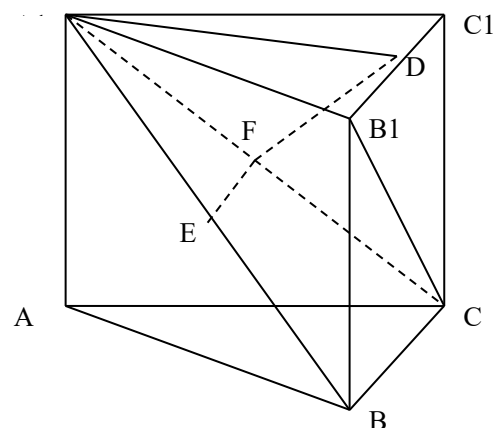
所以  $a \parallel b$ .

16.【解析】证明: (1) 因为  $E, F$  分别是  $A_1B, A_1C$  的中

点, 所以  $EF \parallel BC$ , 又  $EF \not\subset$  面  $ABC$ ,

$BC \subset$  面  $ABC$ , 所以  $EF \parallel$  平面  $ABC$ ;

(2) 因为直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$ , 所以



$BB_1 \perp \text{面} A_1B_1C_1$ ,  $BB_1 \perp A_1D$ , 又  $A_1D \perp B_1C$ , 所以  $A_1D \perp \text{面} BB_1C_1C$ , 又  $A_1D \subset \text{面} A_1FD$ , 所以  $\text{平面} A_1FD \perp \text{平面} BB_1C_1C$ 。

17. (1) 设公差为  $d$ , 则  $a_2^2 - a_5^2 = a_4^2 - a_3^2$ , 由性质得  $-3d(a_4 + a_3) = d(a_4 + a_3)$ , 因为  $d \neq 0$

, 所以【解析】以  $a_4 + a_3 = 0$ , 即  $2a_1 + 5d = 0$ , 又由  $S_7 = 7$  得  $7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = 7$ , 解得  $a_1 = -5$ ,

$d = 2$  所以  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2n - 7$ , 前  $n$  项和  $S_n = n^2 - 6n$ 。

(2)  $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = \frac{(2m-7)(2m-5)}{(2m-3)}$ ,  $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}} = \frac{(t-4)(t-2)}{t} = t + \frac{8}{t} - 6$ , w  
.w.w.k.s.5.u.c.o.m .

因为  $t$  是奇数, 所以  $t$  可取的值为  $\pm 1$ , 当  $t = 1$ ,  $m = 2$  时,  $t + \frac{8}{t} - 6 = 3$ ,  $2 \times 5 - 7 = 3$ , 是数列

$\{a_n\}$  中的项;  $t = -1$ ,  $m = 1$  时,  $t + \frac{8}{t} - 6 = -15$ , 数列  $\{a_n\}$  中的最小项是  $-5$ , 不符合。

所以满足条件的正整数  $m = 2$ 。

18. 【解析】(1)  $y = 0$  或  $y = -\frac{7}{24}(x - 4)$ ,

(2) P 在以  $C_1C_2$  的中垂线上, 且与  $C_1$ 、 $C_2$  等腰直角三角形, 利用几何关系计算可得点 P 坐标为  $(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$  或  $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ 。

19. 【解析】(1)  $h_{\text{甲}} = \sqrt{\frac{m_A}{m_A + 12} \cdot \frac{m_B}{m_B + 5}}, h_{\text{乙}} = \sqrt{\frac{m_A}{m_A + 3} \cdot \frac{m_B}{m_B + 20}}, (m_A \in [3, 12], m_B \in [5, 20])$

当  $m_A = \frac{3}{5}m_B$  时,

$$h_{\text{甲}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{5}m_B}{\frac{3}{5}m_B + 12} \cdot \frac{m_B}{m_B + 5}} = \sqrt{\frac{m_B^2}{(m_B + 20)(m_B + 5)}}, h_{\text{乙}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{5}m_B}{\frac{3}{5}m_B + 3} \cdot \frac{m_B}{m_B + 20}} = \sqrt{\frac{m_B^2}{(m_B + 5)(m_B + 20)}},$$

显然  $h_{\text{甲}} = h_{\text{乙}}$

(2) 当  $m_A = \frac{3}{5}m_B$  时, 
$$h_{\text{甲}} = \sqrt{\frac{m_B^2}{(m_B + 20)(m_B + 5)}} = \sqrt{\frac{1}{(1 + \frac{20}{m_B})(1 + \frac{5}{m_B})}} = \sqrt{\frac{1}{100(\frac{1}{m_B})^2 + 25\frac{1}{m_B} + 1}},$$

由  $m_B \in [5, 20]$  得  $\frac{1}{m_B} \in [\frac{1}{20}, \frac{1}{5}]$ , 故当  $\frac{1}{m_B} = \frac{1}{20}$  即  $m_B = 20, m_A = 12$  时, 甲乙两人同时取到最大的综

合满意度为  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

20. 【解析】(1) 若  $f(0) \geq 1$ , 则  $-a|a| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow a \leq -1$

(2) 当  $x \geq a$  时,  $f(x) = 3x^2 - 2ax + a^2$ , 
$$f(x)_{\min} = \begin{cases} f(a), a \geq 0 \\ f(\frac{a}{3}), a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2a^2, a \geq 0 \\ \frac{2a^2}{3}, a < 0 \end{cases}$$

当  $x \leq a$  时,  $f(x) = x^2 + 2ax - a^2$ , 
$$f(x)_{\min} = \begin{cases} f(-a), a \geq 0 \\ f(a), a < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2a^2, a \geq 0 \\ 2a^2, a < 0 \end{cases}$$

综上 
$$f(x)_{\min} = \begin{cases} -2a^2, a \geq 0 \\ \frac{2a^2}{3}, a < 0 \end{cases}$$

(3)  $x \in (a, +\infty)$  时,  $h(x) \geq 1$  得  $3x^2 - 2ax + a^2 - 1 \geq 0$ ,  $\Delta = 4a^2 - 12(a^2 - 1) = 12 - 8a^2$

当  $a \leq -\frac{\sqrt{6}}{2}$  或  $a \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$  时,  $\Delta \leq 0, x \in (a, +\infty)$ ;

当  $-\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2}$  时,  $\Delta > 0$ , 得 
$$\begin{cases} (x - \frac{a - \sqrt{3 - 2a^2}}{3})(x - \frac{a + \sqrt{3 - 2a^2}}{3}) \geq 0 \\ x > a \end{cases}$$

$$1) \quad a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ 时, } x \in (a, +\infty)$$

$$2) \quad a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ 时, } x \in \left[\frac{a + \sqrt{3 - 2a^2}}{3}, +\infty\right)$$

$$3) \quad a \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ 时, } x \in \left(a, \frac{a - \sqrt{3 - 2a^2}}{3}\right] \cup \left[\frac{a + \sqrt{3 - 2a^2}}{3}, +\infty\right)$$