

2013 年普通高等学校招生全国统一考试(江西卷)

数学(理科)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。第 I 卷 1 至 2 页, 第 II 卷 3 至 4 页。全卷满分 150 分。考试时间 120 分钟。

考生注意:

1. 答题前, 考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。第 II 卷用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答, 若在试题卷上答题, 答案无效。
4. 考试结束, 监考员将试题卷、答题卡一并收回。

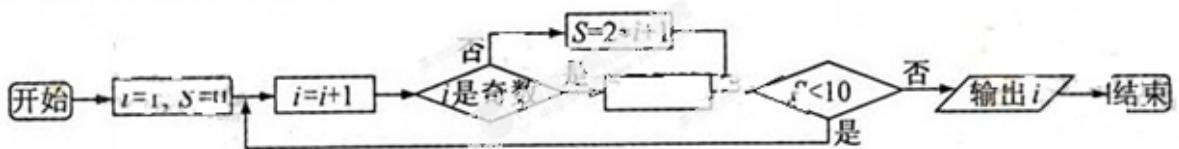
第 I 卷(选择题 共 50 分)

一、选择题: 本大题共 10 小题。每小题 5 分, 共 50 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $M=\{1, 2, zi\}$, i 为虚数单位, $N=\{3, 4\}$, $M \cap N=\{4\}$, 则复数 $z=$ ()
A. $-2i$ B. $2i$ C. $-4i$ D. $4i$
2. 函数 $y=\sqrt{x} \ln(1-x)$ 的定义域为 ()
A. $(0, 1)$ B. $[0, 1)$ C. $(0, 1]$ D. $[0, 1]$
3. 等比数列 $x, 3x+3, 6x+6, \dots$ 的第四项等于 ()
A. -24 B. 0 C. 12 D. 24
4. 总体由编号为 01, 02, ..., 19, 20 的 20 个个体组成。利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右一次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 ()

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4934	8200	3623	4869	6938	7481

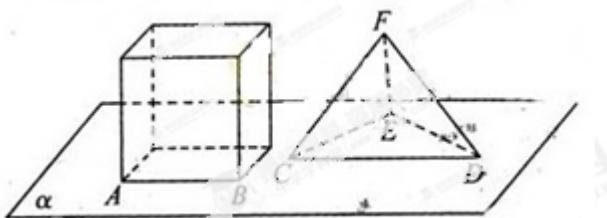
A. 08 B. 07 C. 02 D. 01
5. $(x^2 - \frac{1}{x^3})^5$ 展开式中的常数项为 ()
A. 80 B. -80 C. 40 D. -40
6. $S_1 = \int_1^2 x^2 dx$, $S_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$, $S_3 = \int_1^2 e^x dx$, 若 , 则 s_1, s_2, s_3 的大小关系为 ()
A. $s_1 < s_2 < s_3$ B. $s_2 < s_1 < s_3$ C. $s_2 < s_3 < s_1$ D. $s_3 < s_2 < s_1$
7. 阅读如下程序框图, 如果输出 $i=5$, 那么在空白矩形框中应填入的语句为



- A. $S=2*i-2$ B. $S=2*i-1$ C. $S=2*i$ D. $S=2*i+4$

8. 如果，正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上，且 $AB//CD$ ，正方体的六个面所在的平面与直线 CE, EF 相交的平面个数分别记为 m, n ，那么 $m+n=$ ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

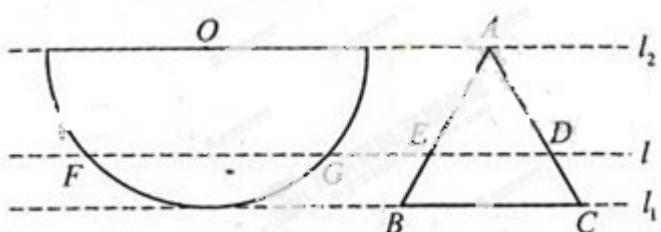


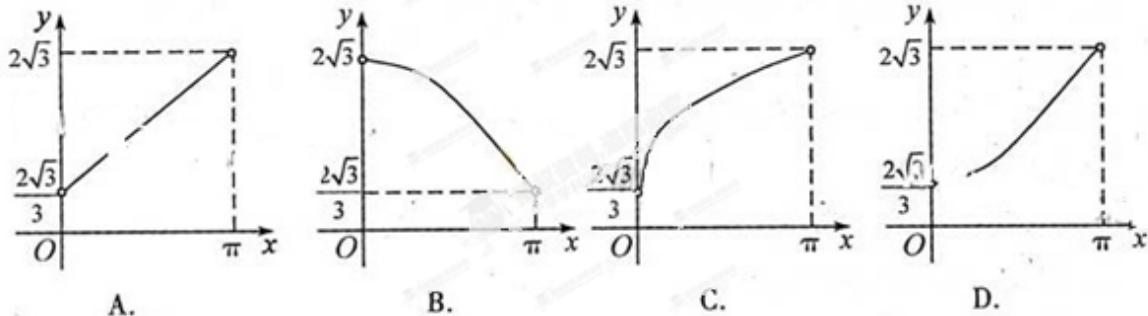
9. 过点 $(\sqrt{2}, 0)$ 引直线 ℓ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 交于 A, B 两点， O 为坐标原点，当 $\triangle AOB$ 的面积取最大值时，直线 ℓ 的斜率等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\sqrt{3}$

10. 如图，半径为 1 的半圆 O 与等边三角形 ABC 夹在两平行线 ℓ_1, ℓ_2 之间， $\ell // \ell_1$ ， ℓ 与半圆相交于 F, G 两点，与三角形 ABC 两边相交于 E, D 两点。

设弧 FG 的长为 $x(0 < x < \pi)$ ， $y=EB+BC+CD$ ，若 ℓ 从 ℓ_1 平行移动到 ℓ_2 ，则函数 $y=f(x)$ 的图像大致是





第II卷

注意事项：

第卷共2页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答。若在试题卷上作答，答案无效。

二. 填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分

11. 函数 $y = \sin 2x + 2\sqrt{3} \sin^2 x$ 的最小正周期 T 为_____.

12. 设 e_1, e_2 为单位向量。且 e_1, e_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，若 $a = e_1 + 3e_2$, $b = 2e_1$ ，则向量 a 在 b 方向上的

射影为_____.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导，且 $f(e^x) = x + e^x$ ，则 $f'(1) =$ _____.

14. 抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，其准线与双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ 相交于 A, B 两点，若 $\triangle ABF$

为等边三角形，则 $p =$ _____.

三. 选做题：请在下列两题中任选一题作答，若两题都做按其中一题评阅计分。本题共5分。

15 (1) (坐标系与参数方程选做题) 设曲线 C 的参数方程为： $x = t, y = t^2$ (t 为参数)，若以直角坐标系的原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，则曲线 C 的极坐标方程为_____.

(2) (不等式选做题) 在实数范围内，不等式 $|x - 2| - 1 \leq 1$ 的解集为_____.

四. 解答题：本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $\cos C + (\cos A - \sqrt{3} \sin A) \cos B = 0$.

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $a+c=1$ ，求 b 的取值范围。

17. (本小题满分12分)

正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足： $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$

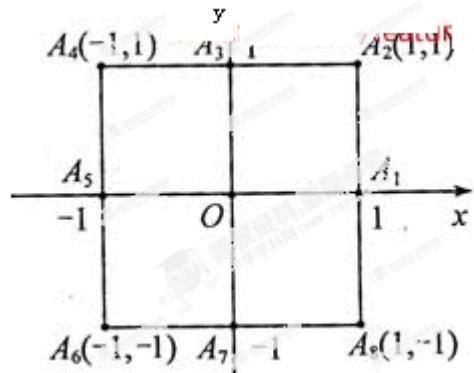
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

(2) 令 $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 证明: 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $T_n < \frac{5}{64}$.

18. (本小题满分 12 分)

小波以游戏方式决定是参加学校合唱团还是参加学校排球队, 游戏规则为: 以 0 为起点, 再从 A_1 ,

$A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ (如图) 这 8 个点中任取两点分别分终点得到两个向量, 记这两个向量的数量积为 X . 若 $X=0$ 就参加学校合唱团, 否则就参加学校排球队.

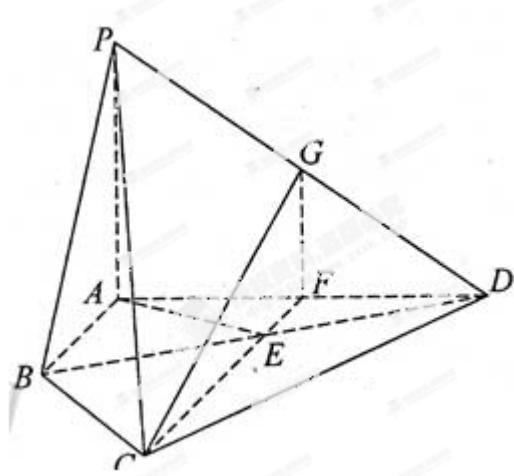


- (1) 求小波参加学校合唱团的概率;
- (2) 求 X 的分布列和数学期望。

19 (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 BD 的中点, G 为 PD 的中点, $\triangle DAB \cong \triangle$

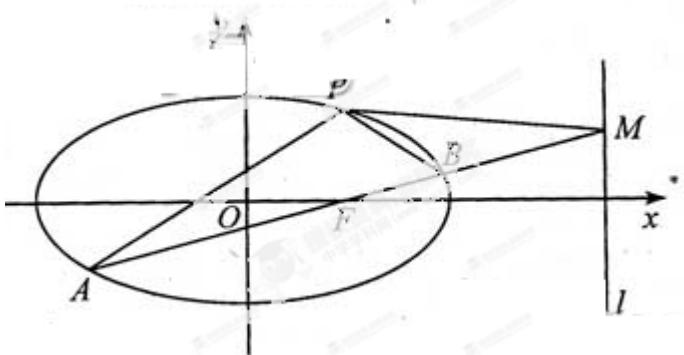
DCB , $EA=EB=AB=1$, $PA=\frac{3}{2}$, 连接 CE 并延长交 AD 于 F



- (2) 求证: $AD \perp$ 平面 CFG ;
- (3) 求平面 BCP 与平面 DCP 的夹角的余弦值.

20. (本小题满分 13 分)

如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P(1, \frac{3}{2})$ ，离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，直线 l 的方程为 $x=4$.



(2) 求椭圆 C 的方程；

(3) AB 是经过右焦点 F 的任一弦（不经过点 P ），设直线 AB 与直线 l 相交于点 M ，记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问：是否存在常数 λ ，使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$ ？若存在，求 λ 的值；若不存在，说明理由.

21. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = a(1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|)$, a 为常数且 $a > 0$.

(1) 证明：函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称；

(2) 若 x_0 满足 $f(f(x_0)) = x_0$, 但 $f(x_0) \neq x_0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的二阶周期点，如果 $f(x)$ 有两个二阶周期点 x_1, x_2 , 试确定 a 的取值范围；

(3) 对于 (2) 中的 x_1, x_2 , 和 a , 设 x_3 为函数 $f(f(x))$ 的最大值点, $A(x_1, f(f(x_1))), B(x_2, f(f(x_2))), C(x_3, 0)$, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S(a)$, 讨论 $S(a)$ 的单调性.

