2023年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷满分150分.考试时间 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合$M=\{x\mid x+2\geq 0\}, N=\{x\mid x-1<0\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $\{x\mid -2\leq x<1\}$　　　　B. $\{x\mid -2<x\leq 1\}$

C. $\{x\mid x\geq -2\}$　　　　D. $\{x\mid x<1\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先化简集合M,N，然后根据交集的定义计算.

【详解】由题意，$M=\{x\mid x+2\geq 0\}=\{x\mid x\geq -2\}$，$N=\{x\mid x-1<0\}=\{x\mid x<1\}$，

根据交集的运算可知，$M\bigcap N=\{x\mid -2\leq x<1\}$.

故选：A

2. 在复平面内，复数z对应的点的坐标是$(-1,\sqrt{3})$，则z的共轭复数$\overline{z}=$（　　）

A. $1+\sqrt{3}i$　　　　B. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　　　D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数的几何意义先求出复数z，然后利用共轭复数的定义计算.

【详解】z在复平面对应的点是$(-1,\sqrt{3})$，根据复数的几何意义，$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，

由共轭复数的定义可知，$\overline{z}=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

故选：D

3. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\vec{a}+\vec{b}=(2,3),\vec{a}-\vec{b}=(-2,1)$，则$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=$（　　）

A. -2　　　　B. -1　　　　C. 0　　　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】利用平面向量数量积的运算律，数量积的坐标表示求解作答.

【详解】向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}=(2,3),\vec{a}-\vec{b}=(-2,1)$，

所以 $|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=2\times(-2)+3\times1=-1$.

故选：B

4. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $f(x)=-\ln x$

B. $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\dfrac{1}{x}$

D. $f(x)=3^{|x-1|}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用基本初等函数的单调性，结合复合函数的单调性判断 ABC，举反例排除 D 即可.

【详解】对于 A，因为 $y=\ln x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，$y=-x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f\left(x\right)=-\ln x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，故 A 错误；

对于 B，因为 $y=2^x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2^x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，故 B 错误；

对于 C，因为 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，$y=-x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，故 C 正确；

对于 D，因为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3^{\left|\frac{1}{2}-1\right|}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$f\left(1\right)=3^{|1-1|}=3^0=1,f\left(2\right)=3^{|2-1|}=3$，

显然 $f\left(x\right)=3^{|x-1|}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上不单调，D 错误.

故选：C.

5. $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中 x 的系数为（　　）.

A. -80

B. -40

C. 40

D. 80

【答案】D

【解析】

【分析】写出$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$的展开式的通项即可

【详解】$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\left(2x\right)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=\left(-1\right)^r2^{5-r}C_5^rx^{5-2r}$

令$5-2r=1$得$r=2$

所以$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$的展开式中$x$的系数为$\left(-1\right)^22^{5-2}C_5^2=80$

故选：D

【点睛】本题考查的是二项式展开式通项的运用，较简单.

6. 已知抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F，点M在C上．若M到直线$x=-3$的距离为5，则$|MF|=$

（　　）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】利用抛物线的定义求解即可.

【详解】因为抛物线$C:y^2=8x$的焦点$F\left(2,0\right)$，准线方程为$x=-2$，点M在C上，

所以M到准线$x=-2$的距离为$\left|MF\right|$，

又M到直线$x=-3$的距离为5，

所以$\left|MF\right|+1=5$，故$\left|MF\right|=4$.

故选：D.

7. 在$\triangle ABC$中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用正弦定理的边角变换与余弦定理即可得解.

【详解】因为$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，

所以由正弦定理得$(a+c)(a-c)=b(a-b)$，即$a^2-c^2=ab-b^2$，

则 $a^2+b^2-c^2=ab$，故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

故选：B.

8. 若 $xy\neq 0$，则“$x+y=0$”是“$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-2$”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】解法一：由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$ 化简得到 $x+y=0$ 即可判断；解法二：证明充分性可由 $x+y=0$ 得到 $x=-y$，代入 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 化简即可，证明必要性可由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$ 去分母，再用完全平方公式即可；解法三：证明充分性可由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 通分后用配凑法得到完全平方公式，再把 $x+y=0$ 代入即可，证明必要性可由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 通分后用配凑法得到完全平方公式，再把 $x+y=0$ 代入，解方程即可.

【详解】解法一：

因为 $xy\neq 0$，且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以 $x^2+y^2=-2xy$，即 $x^2+y^2+2xy=0$，即 $(x+y)^2=0$，所以 $x+y=0$.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

解法二：

充分性：因为 $xy\neq 0$，且 $x+y=0$，所以 $x=-y$，

所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{-y}{y}+\frac{y}{-y}=-1-1=-2$，

所以充分性成立；

必要性：因为 $xy\neq 0$，且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以 $x^2+y^2=-2xy$，即 $x^2+y^2+2xy=0$，即 $(x+y)^2=0$，所以 $x+y=0$.

所以必要性成立.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$” 的充要条件.

解法三：

充分性：因为 $xy\neq 0$，且 $x+y=0$，

所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{-2xy}{xy}=-2$，

所以充分性成立；

必要性：因为 $xy\neq 0$，且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2=-2$，

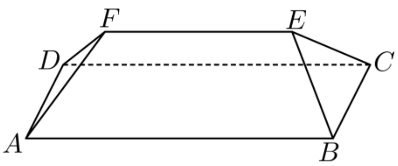
所以 $\frac{(x+y)^2}{xy}=0$，所以 $(x+y)^2=0$，所以 $x+y=0$，

所以必要性成立.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$” 的充要条件.

故选：C

9. 坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素．安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美．如图，某坡屋顶可视为一个五面体，其中两个面是全等的等腰梯形，两个面是全等的等腰三角形．若 $AB=25\text{m}, BC=AD=10\text{m}$，且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$，则该五面体的所有棱长之和为（　　）



A. 102m　　B. 112m

C. 117m　　D. 125m

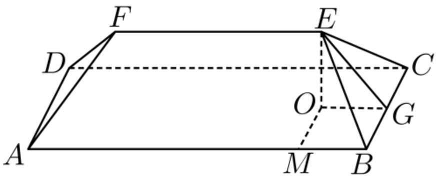
【答案】C

【解析】

【分析】先根据线面角的定义求得 $\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{\sqrt{14}}{5}$，从而依次求 EO，EG，EB，EF，再把所有棱长相加即可得解.

【详解】如图，过 E 做 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O，过 E 分别做 $EG\perp BC$，$EM\perp AB$，垂足分别为

G，M，连接OG,OM，



由题意得等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角分别为$\angle EMO$和$\angle EGO$，

所以$\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\dfrac{\sqrt{14}}{5}$.

因为$EO\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，所以$EO\perp BC$，

因为$EG\perp BC$，$EO,EG\subset$平面EOG，$EO\cap EG=E$，

所以$BC\perp$平面EOG，因为$OG\subset$平面EOG，所以$BC\perp OG$，.

同理：$OM\perp BM$，又$BM\perp BG$，故四边形$OMBG$是矩形，

所以由$BC=10$得$OM=5$，所以$EO=\sqrt{14}$，所以$OG=5$，

所以在直角三角形EOG中，$EG=\sqrt{EO^2+OG^2}=\sqrt{\left(\sqrt{14}\right)^2+5^2}=\sqrt{39}$

在直角三角形EBG中，$BG=OM=5$，$EB=\sqrt{EG^2+BG^2}=\sqrt{\left(\sqrt{39}\right)^2+5^2}=8$，

又因为$EF=AB-5-5=25-5-5=15$，

所有棱长之和为$2\times25+2\times10+15+4\times8=117\,\text{m}$.

故选：C

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n-6)^3+6(n=1,2,3,\cdots)$，则（　　）

A. 当$a_1=3$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在常数$M\leqslant0$，使得$a_n>M$恒成立

B. 当$a_1=5$时，$\{a_n\}$为递增数列，且存在常数$M\leq6$，使得$a_n<M$恒成立

C. 当$a_1=7$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在常数$M>6$，使得$a_n>M$恒成立

D. 当$a_1=9$时，$\{a_n\}$为递增数列，且存在常数$M>0$，使得$a_n<M$恒成立

【答案】B

【解析】

【分析】法 1：利用数列归纳法可判断 ACD 正误，利用递推可判断数列的性质，故可判断 B 的正误.

法 2：构造$f(x)=\dfrac{1}{4}(x-6)^3+6-x$，利用导数求得$f(x)$的正负情况，再利用数学归纳法判断得各选项$a_n$

所在区间，从而判断$\{a_n\}$的单调性；对于A，构造$h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-47(x\le 3)$，判断得$a_{n+1}<a_n-1$，进而取$m=-[M]+4$推得$a_n>M$不恒成立；对于B，证明$a_n$所在区间同时证得后续结论；对于C，记$m_0=\log_3\left[2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1\right]$，取$m=[m_0]+1$推得$a_n>M$不恒成立；对于D，构造$g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-49(x\ge 9)$，判断得$a_{n+1}>a_n+1$，进而取$m=[M]+1$推得$a_n<M$不恒成立.

【详解】法1：因为$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，故$a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3$，

对于A，若$a_1=3$，可用数学归纳法证明：$a_n-6\le -3$即$a_n\le 3$，

证明：当$n=1$时，$a_1-6=-3\le -3$，此时不等关系$a_n\le 3$成立；

设当$n=k$时，$a_k-6\le -3$成立，

则$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(-54,-\frac{27}{4}\right)$，故$a_{k+1}-6\le -3$成立，

由数学归纳法可得$a_n\le 3$成立.

而$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，

$\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\ge\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}>0$，$a_n-6<0$，故$a_{n+1}-a_n<0$，故$a_{n+1}<a_n$，

故$\{a_n\}$为减数列，注意$a_{k+1}-6\le -3<0$

故$a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2\le\frac{9}{4}(a_n-6)$，结合$a_{n+1}-6<0$，

所以$6-a_{n+1}\ge\frac{9}{4}(6-a_n)$，故$6-a_{n+1}\ge 3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，故$a_{n+1}\le 6-3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

若存在常数$M\leqslant 0$，使得$a_n>M$恒成立，则$6-3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}>M$，

故$\frac{6-M}{3}>\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，故$n<1+\log_{\frac{9}{4}}\frac{6-M}{3}$，故$a_n>M$恒成立仅对部分$n$成立，

故A不成立.

对于B，若$a_1=5,$可用数学归纳法证明：$-1\le a_n-6<0$即$5\le a_n<6$，

证明：当$n=1$时，$-1\le a_1-6=-1\le 0$，此时不等关系$5\le a_n<6$成立；

设当$n=k$时，$5\le a_k<6$成立，

则$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$，故$-1\le a_{k+1}-6<0$成立即

由数学归纳法可得$5\le a_{k+1}<6$成立.

而$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，

$\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1<0$，$a_n-6<0$，故$a_{n+1}-a_n>0$，故$a_{n+1}>a_n$，故$\{a_n\}$为增数列，

若$M=6$，则$a_n<6$恒成立，故B正确.

对于C，当$a_1=7$时， 可用数学归纳法证明：$0<a_n-6\le 1$即$6<a_n\le 7$，

证明：当$n=1$时，$0<a_1-6\le 1$，此时不等关系成立；

设当$n=k$时，$6<a_k\le 7$成立，

则$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，故$0<a_{k+1}-6\le 1$成立即$6<a_{k+1}\le 7$

由数学归纳法可得$6<a_n\le 7$成立.

而$a_{n+1}-a_n=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]<0$，故$a_{n+1}<a_n$，故$\{a_n\}$为减数列，

又$a_{n+1}-6=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2\le\frac{1}{4}(a_n-6)$，结合$a_{n+1}-6>0$可得：$a_{n+1}-6\le(a_1-6)\left(\frac{1}{4}\right)^n$，所以

$a_{n+1}\le 6+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

若$a_{n+1}\le 6+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，若存在常数$M>6$，使得$a_n>M$恒成立，

则$M-6\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$恒成立，故$n\le\log_{\frac{1}{4}}(M-6)$，$n$的个数有限，矛盾，故C错误.

对于D，当$a_1=9$时， 可用数学归纳法证明：$a_n-6\ge 3$即$a_n\ge 9$，

证明：当$n=1$时，$a_1-6=3\ge 3$，此时不等关系成立；

设当$n=k$时，$a_k\ge 9$成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3\geq\frac{27}{4}>3$，故 $a_{k+1}\geq 9$ 成立

由数学归纳法可得 $a_n\geq 9$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=\left(a_n-6\right)\left[\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^2-1\right]>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，故 $\left\{a_n\right\}$ 为增数列，

又 $a_{n+1}-6=\left(a_n-6\right)\times\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^2>\frac{9}{4}\left(a_n-6\right)$，结合 $a_n-6>0$ 可得：

$a_{n+1}-6>\left(a_1-6\right)\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}=3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，所以 $a_{n+1}\geq 6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

若存在常数 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立，则 $M>6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

故 $M>6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，故 $n<\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{M-6}{3}\right)+1$，这与 n 的个数有限矛盾，故 D 错误.

故选：B.

法 2：因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6-a_n=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-48$，

令 $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-48$，则 $f'\left(x\right)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

令 $f'\left(x\right)>0$，得 $0<x<6-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $x>6+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

令 $f'\left(x\right)<0$，得 $6-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<6+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,6-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(6+\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(6-\frac{2\sqrt{3}}{3},6+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，

令 $f\left(x\right)=0$，则 $\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-48=0$，即 $\frac{1}{4}\left(x-4\right)\left(x-6\right)\left(x-8\right)=0$，解得 $x=4$ 或 $x=6$ 或 $x=8$，

注意到 $4<6-\frac{2\sqrt{3}}{3}<5$，$7<6+\frac{2\sqrt{3}}{3}<8$，

所以结合 $f\left(x\right)$ 的单调性可知在 $\left(-\infty,4\right)$ 和 $\left(6,8\right)$ 上 $f\left(x\right)<0$，在 $\left(4,6\right)$ 和 $\left(8,+\infty\right)$ 上 $f\left(x\right)>0$，

对于 A，因为 $a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6$，则 $a_{n+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3$，

当 $n=1$ 时，$a_1=3$，$a_2-6=\frac{1}{4}(a_1-6)^3<-3$，则 $a_2<3$，

假设当 $n=k$ 时，$a_k<3$，

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3<\frac{1}{4}(3-6)^3<-3$，则 $a_{k+1}<3$，

综上：$a_n\le 3$，即 $a_n\in(-\infty,4)$，

因为在 $(-\infty,4)$ 上 $f(x)<0$，所以 $a_{n+1}<a_n$，则 $\{a_n\}$ 为递减数列，

因为 $a_{n+1}-a_n+1=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6-a_n+1=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-47$，

令 $h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-47(x\le 3)$，则 $h'(x)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

因为 $h'(x)$ 开口向上，对称轴为 $x=-\frac{-9}{2\times\frac{3}{4}}=6$，

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上单调递减，故 $h'(x)\ge h'(3)=\frac{3}{4}\times 3^2-9\times 3+26>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上单调递增，故 $h(x)\le h(3)=\frac{1}{4}\times 3^3-\frac{9}{2}\times 3^2+26\times 3-47<0$，

故 $a_{n+1}-a_n+1<0$，即 $a_{n+1}<a_n-1$，

假设存在常数 $M\leqslant 0$，使得 $a_n>M$ 恒成立，

取 $m=-[M]+4$，其中 $M-1<[M]\le M$，且 $[M]\in \mathrm{Z}$，

因为 $a_{n+1}<a_n-1$，所以 $a_2<a_1-1,a_3<a_2-1,\cdots,a_{-[M]+4}<a_{-[M]+3}-1$，

上式相加得，$a_{-[M]+4}<a_1-(-[M]+3)\le 3+M-3=M$，

则 $a_m=a_{[M]+4}<M$，与 $a_n>M$ 恒成立矛盾，故 A 错误；

对于 B，因为 $a_1=5$，

当 $n=1$ 时，$a_1=5<6$，$a_2=\frac{1}{4}(a_1-6)^3+6=\frac{1}{4}\times(5-6)^3+6<6$，

假设当 $n=k$ 时，$a_k<6$，

当$n=k+1$时，因为$a_k<6$，所以$a_k-6<0$，则$\left(a_k-6\right)^3<0$，

所以$a_{k+1}=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3+6<6$，

又当$n=1$时，$a_2-5=\frac{1}{4}\left(a_1-6\right)^3+1=\frac{1}{4}\times\left(5-6\right)^3+1>0$，即$a_2>5$，

假设当$n=k$时，$a_k\geq 5$，

当$n=k+1$时，因为$a_k\geq 5$，所以$a_k-6\geq -1$，则$\left(a_k-6\right)^3\geq -1$，

所以$a_{k+1}=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3+6\geq 5$，

综上：$5\leq a_n<6$，

因为在$\left(4,6\right)$上$f\left(x\right)>0$，所以$a_{n+1}>a_n$，所以$\left\{a_n\right\}$为递增数列，

此时，取$M=6$，满足题意，故B正确；

对于C，因为$a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6$，则$a_{n+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3$，

注意到当$a_1=7$时，$a_2=\frac{1}{4}\left(7-6\right)^3+6=\frac{1}{4}+6$，$a_3=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+6-6\right)^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^4+6$，

$$a_4=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4+6-6\right]^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^{13}+6$$

猜想当$n\geq 2$时，$a_k=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)}+6$，

当$n=2$与$n=3$时，$a_2=\frac{1}{4}+6$与$a_3=\left(\frac{1}{4}\right)^4+6$满足$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)}+6$，

假设当$n=k$时，$a_k=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)}+6$，

当$n=k+1$时，所以$a_{k+1}=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3+6=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)}+6-6\right]^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^{k+1}-1\right)}+6$，

综上：$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)}+6\left(n\geq 2\right)$，

易知$3^n-1>0$，则$0<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)}<1$，故$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)}+6\in\left(6,7\right)\left(n\geq 2\right)$，

所以$a_n \in (6,7]$，

因为在$(6,8)$上$f(x)<0$，所以$a_{n+1}<a_n$，则$\{a_n\}$为递减数列，

假设存在常数$M>6$，使得$a_n>M$恒成立，

记$m_0=\log_3\left[2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1\right]$，取$m=[m_0]+1$，其中$m_0-1<[m_0]\le m_0, m_0\in N^*$，

则$3^m>3^{m_0}=2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1$，

故$\frac{1}{2}(3^m-1)>\log_{\frac{1}{4}}(M-6)$，所以$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^m-1)}<M-6$，即$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^m-1)}+6<M$，

所以$a_m<M$，故$a_n>M$不恒成立，故C错误；

对于D，因为$a_1=9$，

当$n=1$时，$a_2-6=\frac{1}{4}(a_1-6)^3=\frac{27}{4}>3$，则$a_2>9$，

假设当$n=k$时，$a_k\ge 3$，

当$n=k+1$时，$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\ge\frac{1}{4}(9-6)^3>3$，则$a_{k+1}>9$，

综上：$a_n\ge 9$，

因为在$(8,+\infty)$上$f(x)>0$，所以$a_{n+1}>a_n$，所以$\{a_n\}$为递增数列，

因为$a_{n+1}-a_n-1=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6-a_n-1=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-49$，

令$g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-49\ (x\ge 9)$，则$g'(x)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

因为$g'(x)$开口向上，对称轴为$x=-\frac{-9}{2\times\frac{3}{4}}=6$，

所以$g'(x)$在$[9,+\infty)$上单调递增，故$g'(x)\ge g'(9)=\frac{3}{4}\times 9^2-9\times 9+26>0$，

所以$g(x)\ge g(9)=\frac{1}{4}\times 9^3-\frac{9}{2}\times 9^2+26\times 9-49>0$，

故$a_{n+1}-a_n-1>0$，即$a_{n+1}>a_n+1$，

假设存在常数$M>0$，使得$a_n<M$恒成立，

取 $m=[M]+1$，其中 $M-1<[M]\le M$，且 $[M]\in Z$，

因为 $a_{n+1}>a_n+1$，所以 $a_2>a_1+1,a_3>a_2+1,\cdots,a_{[M]+1}>a_{[M]}+1$，

上式相加得，$a_{[M]+1}>a_1+[M]>9+M-1>M$，

则 $a_m=a_{[M]+1}>M$，与 $a_n<M$ 恒成立矛盾，故 D 错误.

故选：B.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是根据首项给出与通项性质相关的相应的命题，再根据所得命题结合放缩法得到通项所满足的不等式关系，从而可判断数列的上界或下界是否成立.

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$____________.

【答案】1

【解析】

【分析】根据给定条件，把 $x=\frac{1}{2}$ 代入，利用指数、对数运算计算作答.

【详解】函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$，所以 $f(\frac{1}{2})=4^{\frac{1}{2}}+\log_2\frac{1}{2}=2-1=1$.

故答案为：1

12. 已知双曲线 C 的焦点为 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$，离心率为 $\sqrt{2}$，则 C 的方程为____________.

【答案】$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

【解析】

【分析】根据给定条件，求出双曲线 C 的实半轴、虚半轴长，再写出 C 的方程作答.

【详解】令双曲线 C 的实半轴、虚半轴长分别为 a,b，显然双曲线 C 的中心为原点，焦点在 x 轴上，其半焦距 $c=2$，

由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$，得 $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2}$，则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$，

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

故答案为：$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

13. 已知命题 p：若 α,β 为第一象限角，且 $\alpha>\beta$，则 $\tan\alpha>\tan\beta$．能说明 p 为假命题的一组 α,β 的值为 $\alpha=$__________，$\beta=$ __________.

【答案】　①. $\frac{9\pi}{4}$　②. $\frac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】根据正切函数单调性以及任意角的定义分析求解.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，若 $0<\alpha_0<\beta_0<\frac{\pi}{2}$，则 $\tan\alpha_0<\tan\beta_0$，

取 $\alpha=2k_1\pi+\alpha_0,\beta=2k_2\pi+\beta_0,k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，

则 $\tan\alpha=\tan\left(2k_1\pi+\alpha_0\right)=\tan\alpha_0,\tan\beta=\tan\left(2k_2\pi+\beta_0\right)=\tan\beta_0$，即 $\tan\alpha<\tan\beta$，

令 $k_1>k_2$，则 $\alpha-\beta=\left(2k_1\pi+\alpha_0\right)-\left(2k_2\pi+\beta_0\right)=2\left(k_1-k_2\right)\pi+\left(\alpha_0-\beta_0\right)$，

因为 $2\left(k_1-k_2\right)\pi\geq 2\pi,-\frac{\pi}{2}<\alpha_0-\beta_0<0$，则 $\alpha-\beta=2\left(k_1-k_2\right)\pi+\left(\alpha_0-\beta_0\right)>\frac{3\pi}{2}>0$，

即 $k_1>k_2$，则 $\alpha>\beta$.

不妨取 $k_1=1,k_2=0,\alpha_0=\frac{\pi}{4},\beta_0=\frac{\pi}{3}$，即 $\alpha=\frac{9\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{3}$ 满足题意.

故答案为：$\frac{9\pi}{4};\frac{\pi}{3}$.

14. 我国度量衡的发展有着悠久的历史，战国时期就已经出现了类似于砝码的、用来测量物体质量的“环权”．已知 9 枚环权的质量（单位：铢）从小到大构成项数为 9 的数列 $\left\{a_n\right\}$，该数列的前 3 项成等差数列，后 7 项成等比数列，且 $a_1=1,a_5=12,a_9=192$，则 $a_7=$__________；数列 $\left\{a_n\right\}$ 所有项的和为__________.

【答案】　①. 48　②. 384

【解析】

【分析】方法一：根据题意结合等差、等比数列的通项公式列式求解 d,q，进而可求得结果；方法二：根据等比中项求 a_7,a_3，在结合等差、等比数列的求和公式运算求解.

【详解】方法一：设前 3 项的公差为 d，后 7 项公比为 $q>0$，

则 $q^4=\frac{a_9}{a_5}=\frac{192}{12}=16$，且 $q>0$，可得 $q=2$，

则 $a_3=1+2d=\frac{a_5}{q^2}$，即 $1+2d=3$，可得 $d=1$，

空 1：可得 $a_3=3,a_7=a_3q^4=48$，

空 2：$a_1+a_2+\cdots+a_9=1+2+3+3\times2+\cdots+3\times2^6=3+\dfrac{3\left(1-2^7\right)}{1-2}=384$

方法二：空 1：因为$\{a_n\},3\le n\le7$为等比数列，则$a_7^2=a_5a_9=12\times192=48^2$，

且$a_n>0$，所以$a_7=48$；

又因为$a_5^2=a_3a_7$，则$a_3=\dfrac{a_5^2}{a_7}=3$；

空 2：设后 7 项公比为$q>0$，则$q^2=\dfrac{a_5}{a_3}=4$，解得$q=2$，

可得$a_1+a_2+a_3=\dfrac{3\left(a_1+a_3\right)}{2}=6,a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=\dfrac{a_3-a_9q}{1-q}=\dfrac{3-192\times2}{1-2}=381$，

所以$a_1+a_2+\cdots+a_9=6+381-a_3=384$.

故答案为：48；384.

15. 设$a>0$，函数$f(x)=\begin{cases}x+2,x<-a,\\\sqrt{a^2-x^2},-a\le x\le a,\\-\sqrt{x}-1,x>a.\end{cases}$，给出下列四个结论：

①$f(x)$在区间$(a-1,+\infty)$上单调递减；

②当$a\ge1$时，$f(x)$存在最大值；

③设$M\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)\left(x_1\le a\right),N\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)\left(x_2>a\right)$，则$|MN|>1$；

④设$P\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)\left(x_3<-a\right),Q\left(x_4,f\left(x_4\right)\right)\left(x_4\ge-a\right)$．若$|PQ|$存在最小值，则$a$的取值范围是$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

其中所有正确结论的序号是____________.

【答案】②③

【解析】

【分析】先分析$f\left(x\right)$的图像，再逐一分析各结论；对于①，取$a=\dfrac{1}{2}$，结合图像即可判断；对于②，分段讨论$f\left(x\right)$的取值范围，从而得以判断；对于③，结合图像可知$\left|MN\right|$的范围；对于④，取$a=\dfrac{4}{5}$，结合图

像可知此时$|PQ|$存在最小值，从而得以判断.

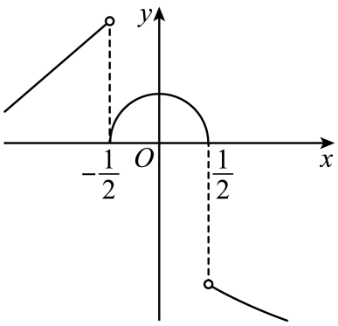
【详解】依题意，$a>0$，

当$x<-a$时，$f(x)=x+2$，易知其图像为一条端点取不到值的单调递增的射线；

当$-a\le x\le a$时，$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$，易知其图像是，圆心为$(0,0)$，半径为a的圆在x轴上方的图像（即半圆）；

当$x>a$时，$f(x)=-\sqrt{x}-1$，易知其图像是一条端点取不到值的单调递减的曲线；

对于①，取$a=\frac{1}{2}$，则$f(x)$的图像如下，



显然，当$x\in(a-1,+\infty)$，即$x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$f(x)$在$\left(-\frac{1}{2},0\right)$上单调递增，故①错误；

对于②，当$a\ge 1$时，

当$x<-a$时，$f(x)=x+2<-a+2\le 1$；

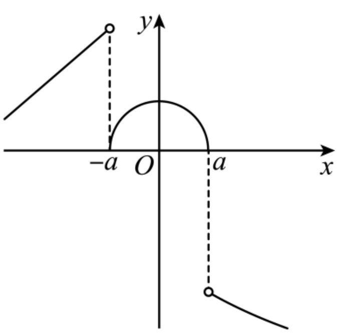
当$-a\le x\le a$时，$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$显然取得最大值a；

当$x>a$时，$f(x)=-\sqrt{x}-1<-\sqrt{a}-1\le -2$，

综上：$f(x)$取得最大值a，故②正确；

对于③，结合图像，易知在$x_1=a$，$x_2>a$且接近于$x=a$处，

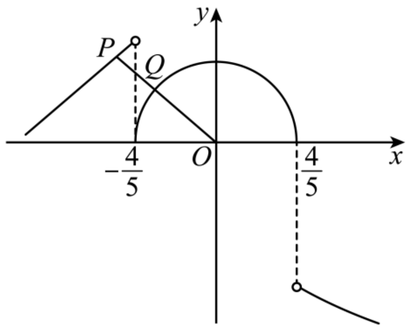
$M(x_1,f(x_1))(x_1\le a),N(x_2,f(x_2))(x_2>a)$的距离最小，



当 $x_1=a$ 时，$y=f\left(x_1\right)=0$，当 $x_2>a$ 且接近于 $x=a$ 处，$y_2=f\left(x_2\right)<-\sqrt{a}-1$，

此时，$\left|MN\right|>y_1-y_2>\sqrt{a}+1>1$，故③正确；

对于④，取 $a=\dfrac{4}{5}$，则 $f\left(x\right)$ 的图像如下，



因为 $P\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)\left(x_3<-a\right),Q\left(x_4,f\left(x_4\right)\right)\left(x_4\geq -a\right)$，

结合图像可知，要使 $\left|PQ\right|$ 取得最小值，则点 P 在 $f\left(x\right)=x+2\left(x<-\dfrac{4}{5}\right)$ 上，点 Q 在

$f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{16}{25}-x^2}\left(-\dfrac{4}{5}\leq x\leq \dfrac{4}{5}\right)$，

同时 $\left|PQ\right|$ 的最小值为点 O 到 $f\left(x\right)=x+2\left(x<-\dfrac{4}{5}\right)$ 的距离减去半圆的半径 a，

此时，因为 $f\left(x\right)=y=x+2\left(x<-\dfrac{4}{5}\right)$ 的斜率为 1，则 $k_{OP}=-1$，故直线 OP 的方程为 $y=-x$，

联立 $\begin{cases} y=-x \\ y=x+2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$，则 $P\left(-1,1\right)$，

显然 $P\left(-1,1\right)$ 在 $f\left(x\right)=x+2\left(x<-\dfrac{4}{5}\right)$ 上，满足 $\left|PQ\right|$ 取得最小值，

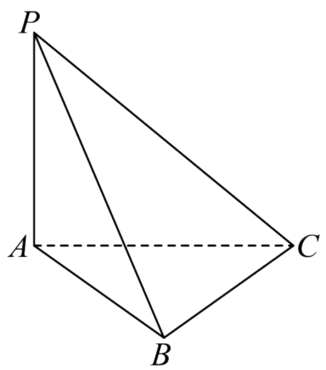
即 $a=\dfrac{4}{5}$ 也满足 $\left|PQ\right|$ 存在最小值，故 a 的取值范围不仅仅是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，故④错误.

故答案为：②③.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是分析得 $f\left(x\right)$ 的图像，特别是当 $-a\leq x\leq a$ 时，$f\left(x\right)=\sqrt{a^2-x^2}$ 的图像为半圆，解决命题④时，可取特殊值进行排除即可.

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$PA=AB=BC=1$，$PC=\sqrt{3}$．



（1）求证：$BC \perp$平面PAB；

（2）求二面角$A-PC-B$的大小.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】（1）先由线面垂直的性质证得$PA \perp BC$，再利用勾股定理证得$BC \perp PB$，从而利用线面垂直的判定定理即可得证；

（2）结合（1）中结论，建立空间直角坐标系，分别求得平面PAC与平面PBC的法向量，再利用空间向量夹角余弦的坐标表示即可得解.

【小问1详解】

因为$PA \perp$平面$ABC, BC \subset$平面ABC，

所以$PA \perp BC$，同理$PA \perp AB$，

所以$\triangle PAB$为直角三角形，

又因为$PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{2}$，$BC=1, PC=\sqrt{3}$，

所以$PB^2+BC^2=PC^2$，则$\triangle$PBC为直角三角形，故$BC \perp PB$，

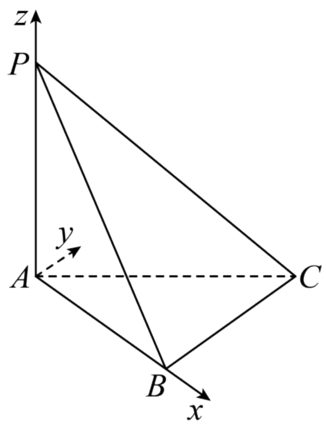
又因为$BC \perp PA$，$PA \cap PB=P$，

所以$BC \perp$平面PAB.

【小问2详解】

由（1）$BC \perp$平面PAB，又$AB \subset$平面PAB，则$BC \perp AB$，

以A为原点，AB为x轴，过A且与BC平行的直线为y轴，AP为z轴，建立空间直角坐标系，如图，



则 $A(0,0,0),P(0,0,1),C(1,1,0),B(1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1),\overrightarrow{AC}=(1,1,0),\overrightarrow{BC}=(0,1,0),\overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$，

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ m\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}z_1=0,\\ x_1+y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=-1$，所以 $\vec{m}=(1,-1,0)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ n\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y_2=0\\ x_2+y_2-z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=1$，则 $z_2=1$，所以 $\vec{n}=(1,0,1)$，

所以 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

又因为二面角 $A-PC-B$ 为锐二面角，

所以二面角 $A-PC-B$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.

17. 设函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（1）若 $f(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ 的值.

（2）已知 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 ω,φ 的值.

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$；

条件②：$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$；

条件③：$f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

【答案】（1）$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

（2）条件①不能使函数 $f(x)$ 存在；条件②或条件③可解得 $\omega=1$，$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.

【解析】

【分析】（1）把 $x=0$ 代入 $f(x)$ 的解析式求出 $\sin\varphi$，再由 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ 即可求出 φ 的值；

（2）若选条件①不合题意；若选条件②，先把 $f(x)$ 的解析式化简，根据 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的单调性及函数的最值可求出 T，从而求出 ω 的值；把 ω 的值代入 $f(x)$ 的解析式，由 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ 和 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ 即可求出 φ 的值；若选条件③：由 $f(x)$ 的单调性可知 $f(x)$ 在 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 处取得最小值 -1，则与条件②所给的条件一样，解法与条件②相同.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$

所以 $f(0)=\sin(\omega\cdot 0)\cos\varphi+\cos(\omega\cdot 0)\sin\varphi=\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

因为 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi),\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的最大值为 1，最小值为 -1.

若选条件①：因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最大值为 1，最小值为 -1，所以 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$ 无解，故条件①不

能使函数 $f(x)$ 存在；

若选条件②：因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-1$

所以 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$,所以 $T=2\pi$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$,

所以 $f(x)=\sin\left(x+\varphi\right)$,

又因为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-1$，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=-1$,

所以 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$,

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

所以 $\omega=1$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$；

若选条件③：因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，在 $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=-\frac{\pi}{3}$ 处取得最小值 -1，即 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-1$.

以下与条件②相同.

18. 为研究某种农产品价格变化的规律，收集得到了该农产品连续 40 天的价格变化数据，如下表所示．在描述价格变化时，用“+”表示“上涨”，即当天价格比前一天价格高；用“-”表示“下跌”，即当天价格比前一天价格低；用“0”表示“不变”，即当天价格与前一天价格相同.

时段	价格变化																			
第 1 天到第 20 天	-	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	-	-	+	-	+	0	0	+
第 21 天到第 40 天	0	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	+	-	-	-	+	0	-	+

用频率估计概率.

（1）试估计该农产品价格“上涨”的概率；

（2）假设该农产品每天的价格变化是相互独立的．在未来的日子里任取 4 天，试估计该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率；

（3）假设该农产品每天的价格变化只受前一天价格变化的影响．判断第 41 天该农产品价格“上涨”“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大.（结论不要求证明）

【答案】（1）0.4

（2）0.168

（3）不变

【解析】

【分析】（1）计算表格中的$+$的次数，然后根据古典概型进行计算；

（2）分别计算出表格中上涨，不变，下跌的概率后进行计算；

（3）通过统计表格中前一次上涨，后一次发生的各种情况进行推断第41天的情况.

【小问 1 详解】

根据表格数据可以看出，40天里，有16个$+$，也就是有16天是上涨的，

根据古典概型的计算公式，农产品价格上涨的概率为：$\dfrac{16}{40}=0.4$

【小问 2 详解】

在这40天里，有16天上涨，14天下跌，10天不变，也就是上涨，下跌，不变的概率分别是0.4，0.35，0.25，

于是未来任取4天，2天上涨，1天下跌，1天不变的概率是$\mathrm{C}_4^2\times0.4^2\times\mathrm{C}_2^1\times0.35\times0.25=0.168$

【小问 3 详解】

由于第40天处于上涨状态，从前39次的15次上涨进行分析，上涨后下一次仍上涨的有4次，不变的有9次，下跌的有2次，

因此估计第41次不变的概率最大.

19. 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$A$、$C$分别是$E$的上、下顶点，$B$，$D$分别是$E$的左、右顶点，$|AC|=4$.

（1）求E的方程；

（2）设P为第一象限内E上的动点，直线PD与直线BC交于点M，直线PA与直线$y=-2$交于点N．求证：$MN//CD$.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）结合题意得到$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$2b=4$，再结合$a^2-c^2=b^2$，解之即可；

（2）依题意求得直线 BC 、 PD 与 PA 的方程，从而求得点 M,N 的坐标，进而求得 k_{MN} ，再根据题意求得 k_{CD} ，得到 $k_{MN}=k_{CD}$ ，由此得解.

【小问 1 详解】

依题意，得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，则 $c=\frac{\sqrt{5}}{3}a$ ，

又 A,C 分别为椭圆上下顶点， $|AC|=4$ ，所以 $2b=4$ ，即 $b=2$ ，

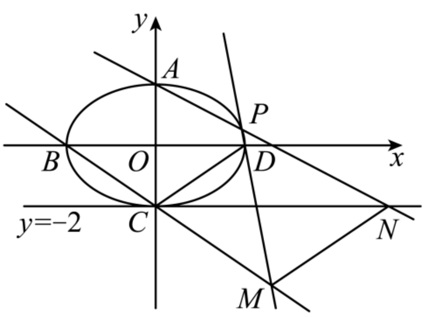
所以 $a^2-c^2=b^2=4$ ，即 $a^2-\frac{5}{9}a^2=\frac{4}{9}a^2=4$ ，则 $a^2=9$ ，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

【小问 2 详解】

因为椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ，所以 $A(0,2),C(0,-2),B(-3,0),D(3,0)$ ，

因为 P 为第一象限 E 上的动点，设 $P(m,n)(0<m<3,0<n<2)$ ，则 $\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{4}=1$ ，



易得 $k_{BC}=\frac{0+2}{-3-0}=-\frac{2}{3}$ ，则直线 BC 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x-2$ ，

$k_{PD}=\frac{n-0}{m-3}=\frac{n}{m-3}$ ，则直线 PD 的方程为 $y=\frac{n}{m-3}(x-3)$ ，

联立 $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-2 \\ y=\frac{n}{m-3}(x-3) \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=\frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6} \\ y=\frac{-12n}{3n+2m-6} \end{cases}$ ，即 $M\left(\frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6},\frac{-12n}{3n+2m-6}\right)$ ，

而 $k_{PA}=\frac{n-2}{m-0}=\frac{n-2}{m}$ ，则直线 PA 的方程为 $y=\frac{n-2}{m}x+2$ ，

令 $y=-2$ ，则 $-2=\frac{n-2}{m}x+2$ ，解得 $x=\frac{-4m}{n-2}$ ，即 $N\left(\frac{-4m}{n-2},-2\right)$ ，

又$\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{4}=1$，则$m^2=9-\frac{9n^2}{4}$，$8m^2=72-18n^2$，

所以$k_{MN}=\dfrac{\frac{-12n}{3n+2m-6}+2}{\frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6}-\frac{-4m}{n-2}}=\dfrac{(-6n+4m-12)(n-2)}{(9n-6m+18)(n-2)+4m(3n+2m-6)}$

$=\dfrac{-6n^2+4mn-8m+24}{9n^2+8m^2+6mn-12m-36}=\dfrac{-6n^2+4mn-8m+24}{9n^2+72-18n^2+6mn-12m-36}$

$=\dfrac{-6n^2+4mn-8m+24}{-9n^2+6mn-12m+36}=\dfrac{2(-3n^2+2mn-4m+12)}{3(-3n^2+2mn-4m+12)}=\dfrac{2}{3}$，

又$k_{CD}=\frac{0+2}{3-0}=\frac{2}{3}$，即$k_{MN}=k_{CD}$，

显然，MN与CD不重合，所以$MN // CD$.

20. 设函数$f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-x+1$.

（1）求a,b的值；

（2）设函数$g(x)=f'(x)$，求$g(x)$的单调区间；

（3）求$f(x)$的极值点个数.

【答案】（1）$a=-1,b=1$

（2）答案见解析　　（3）3 个

【解析】

【分析】（1）先对$f(x)$求导，利用导数的几何意义得到$f(1)=0$，$f'(1)=-1$，从而得到关于a,b的方程组，解之即可；

（2）由（1）得$g(x)$的解析式，从而求得$g'(x)$，利用数轴穿根法求得$g'(x)<0$与$g'(x)>0$的解，由此求得$g(x)$的单调区间；

（3）结合（2）中结论，利用零点存在定理，依次分类讨论区间$(-\infty,0)$，$(0,x_1)$，(x_1,x_2)与$(x_2,+\infty)$上$f'(x)$的零点的情况，从而利用导数与函数的极值点的关系求得$f(x)$的极值点个数.

【小问 1 详解】

因为$f(x)=x-x^3e^{ax+b},x\in R$，所以$f'(x)=1-(3x^2+ax^3)e^{ax+b}$，

因为$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-x+1$，

所以 $f(1)=-1+1=0$，$f'(1)=-1$，

则 $\begin{cases}1-1^3\times e^{a+b}=0\\1-(3+a)e^{a+b}=-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$，

所以 $a=-1,b=1$．

【小问 2 详解】

由（1）得 $g(x)=f'(x)=1-\left(3x^2-x^3\right)e^{-x+1}\left(x\in R\right)$，

则 $g'(x)=-x\left(x^2-6x+6\right)e^{-x+1}$，

令 $x^2-6x+6=0$，解得 $x=3\pm\sqrt{3}$，不妨设 $x_1=3-\sqrt{3}$，$x_2=3+\sqrt{3}$，则 $0<x_1<x_2$，

易知 $e^{-x+1}>0$ 恒成立，

所以令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$；令 $g'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x_1<x<x_2$；

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$，(x_1,x_2) 上单调递增，

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,3-\sqrt{3}\right)$ 和 $\left(3+\sqrt{3},+\infty\right)$，单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $\left(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)$.

【小问 3 详解】

由（1）得 $f(x)=x-x^3e^{-x+1}\left(x\in R\right)$，$f'(x)=1-\left(3x^2-x^3\right)e^{-x+1}$，

由（2）知 $f'(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$，(x_1,x_2) 上单调递增，

当 $x<0$ 时，$f'(-1)=1-4e^2<0$，$f'(0)=1>0$，即 $f'(-1)f'(0)<0$

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上存在唯一零点，不妨设为 x_3，则 $-1<x_3<0$，

此时，当 $x<x_3$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；当 $x_3<x<0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有一个极小值点；

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，

则 $f'(x_1)=f'\left(3-\sqrt{3}\right)<f'(1)=1-2<0$，故 $f'(0)f'(x_1)<0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上存在唯一零点，不妨设为 x_4，则 $0<x_4<x_1$，

此时，当 $0<x<x_4$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；当 $x_4<x<x_1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上有一个极大值点；

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递增，

则 $f'(x_2)=f'(3+\sqrt{3})>f'(3)=1>0$，故 $f'(x_1)f'(x_2)<0$，

所以 $f'(x)$ 在 (x_1,x_2) 上存在唯一零点，不妨设为 x_5，则 $x_1<x_5<x_2$，

此时，当 $x_1<x<x_5$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；当 $x_5<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递增；

所以 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上有一个极小值点；

当 $x>x_2=3+\sqrt{3}>3$ 时，$3x^2-x^3=x^2(3-x)<0$，

所以 $f'(x)=1-(3x^2-x^3)e^{-x+1}>0$，则 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上无极值点；

综上：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 (x_1,x_2) 上各有一个极小值点，在 $(0,x_1)$ 上有一个极大值点，共有 3 个极值点.

【点睛】关键点睛：本题第 3 小题的解题关键是判断 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 的正负情况，充分利用 $f'(x)$ 的单调性，寻找特殊点判断即可得解.

21. 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的项数均为 $m(m>2)$，且 $a_n,b_n\in\{1,2,\cdots,m\}$，$\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n,B_n，并规定 $A_0=B_0=0$. 对于 $k\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，定义 $r_k=\max\{i\mid B_i\le A_k,i\in\{0,1,2,\cdots,m\}\}$，其中，$\max M$ 表示数集 M 中最大的数.

（1）若 $a_1=2,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=3,b_3=3$，求 r_0,r_1,r_2,r_3 的值；

（2）若 $a_1\ge b_1$，且 $2r_j\le r_{j+1}+r_{j-1},j=1,2,\cdots,m-1,$，求 r_n；

（3）证明：存在 $p,q,s,t\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.

【答案】（1）$r_0=0$，$r_1=1$，$r_2=1$，$r_3=2$

（2）$r_n=n,n\in\mathbf{N}$

（3）证明见详解

【解析】

【分析】（1）先求 $A_0,A_1,A_2,A_3,B_0,B_1,B_2,B_3$，根据题意分析求解；

（2）根据题意题意分析可得 $r_{i+1}-r_i\ge 1$，利用反证可得 $r_{i+1}-r_i=1$，在结合等差数列运算求解；

（3）讨论 A_m, B_m 的大小，根据题意结合反证法分析证明.

【小问 1 详解】

由题意可知：$A_0=0, A_1=2, A_2=3, A_3=6, B_0=0, B_1=1, B_2=4, B_3=7$，

当 $k=0$ 时，则 $B_0=A_0=0, B_i>A_0, i=1,2,3$，故 $r_0=0$；

当 $k=1$ 时，则 $B_0<A_1, B_1<A_1, B_i>A_1, i=2,3$，故 $r_1=1$；

当 $k=2$ 时，则 $B_i\le A_2, i=0,1, B_2>A_2, B_3>A_2$，故 $r_2=1$；

当 $k=3$ 时，则 $B_i\le A_3, i=0,1,2, B_3>A_3$，故 $r_3=2$；

综上所述：$r_0=0$，$r_1=1$，$r_2=1$，$r_3=2$.

【小问 2 详解】

由题意可知：$r_n\le m$，且 $r_n\in\mathbf{N}$，

因为 $a_n\ge 1, b_n\ge 1$，则 $A_n\ge a_1=1, B_n\ge b_1=1$，当且仅当 $n=1$ 时，等号成立，

所以 $r_0=0, r_1=1$，

又因为 $2r_i\le r_{i-1}+r_{i+1}$，则 $r_{i+1}-r_i\ge r_i-r_{i-1}$，即 $r_m-r_{m-1}\ge r_{m-1}-r_{m-2}\ge\cdots\ge r_1-r_0=1$，

可得 $r_{i+1}-r_i\ge 1$，

反证：假设满足 $r_{n+1}-r_n>1$ 的最小正整数为 $1\le j\le m-1$，

当 $i\ge j$ 时，则 $r_{i+1}-r_i\ge 2$；当 $i\le j-1$ 时，则 $r_{i+1}-r_i=1$，

则 $r_m=\left(r_m-r_{m-1}\right)+\left(r_{m-1}-r_{m-2}\right)+\cdots+\left(r_1-r\right)_0+r_0\ge 2\left(m-j\right)+j=2m-j$，

又因为 $1\le j\le m-1$，则 $r_m\ge 2m-j\ge 2m-\left(m-1\right)=m+1>m$，

假设不成立，故 $r_{n+1}-r_n=1$，

即数列 $\left\{r_n\right\}$ 是以首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以 $r_n=0+1\times n=n, n\in\mathbf{N}$.

【小问 3 详解】

（i）若 $A_m\ge B_m$，构建 $S_n=A_n-B_{r_n}, 1\le n\le m$，由题意可得：$S_n\ge 0$，且 S_n 为整数，

反证，假设存在正整数 K，使得 $S_K\ge m$，

则 $A_K-B_{r_K}\ge m, A_K-B_{r_K+1}<0$，可得 $b_{r_K+1}=B_{r_K+1}-B_{r_K}=\left(A_K-B_{r_K}\right)-\left(A_K-B_{r_K+1}\right)>m$，

这与 $b_{r_K+1}\in\left\{1,2,\cdots,m\right\}$ 相矛盾，故对任意 $1\le n\le m, n\in\mathbf{N}$，均有 $S_n\le m-1$.

①若存在正整数N，使得$S_N=A_N-B_{r_N}=0$，即$A_N=B_{r_N}$，

可取$r=p=0,q=N,s=r_N$，使得$A_p+B_s=A_q+B_r$；

②若不存在正整数N，使得$S_N=0$，

因为$S_n\in\{1,2m\cdots,m-1\}$，且$1\le n\le m$，

所以必存在$1\le X<Y\le m$，使得$S_X=S_Y$，

即$A_X-B_{r_X}=A_Y-B_{r_Y}$，可得$A_X+B_{r_Y}=A_Y+B_{r_X}$，

可取$p=X,s=r_Y,q=Y,r=r_X$，使得$A_p+B_s=A_q+B_r$；

（ii）若$A_m<B_m$，构建$S_n=B_{r_n}-A_n,1\le n\le m$，由题意可得：$S_n\le 0$，且$S_n$为整数，

反证，假设存在正整数K，使得$S_K\le -m$，

则$B_{r_K}-A_K\le -m,B_{r_K+1}-A_K>0$，可得$b_{r_K+1}=B_{r_K+1}-B_{r_K}=\left(B_{r_K+1}-A_K\right)-\left(B_{r_K}-A_K\right)>m$，

这与$b_{r_K+1}\in\{1,2,\cdots,m\}$相矛盾，故对任意$1\le n\le m,n\in\mathbf{N}$，均有$S_n\ge 1-m$.

①若存在正整数N，使得$S_N=B_{r_N}-A_N=0$，即$A_N=B_{r_N}$，

可取$r=p=0,q=N,s=r_N$，使得$A_p+B_s=A_q+B_r$；

②若不存在正整数N，使得$S_N=0$，

因为$S_n\in\{-1,-2,\cdots,1-m\}$，且$1\le n\le m$，

所以必存在$1\le X<Y\le m$，使得$S_X=S_Y$，

即$B_{r_X}-A_X=B_{r_Y}-A_Y$，可得$A_X+B_{r_Y}=A_Y+B_{r_X}$，

可取$p=X,s=r_Y,q=Y,r=r_X$，使得$A_p+B_s=A_q+B_r$；

综上所述：存在$0\le p<q\le m,0\le r<s\le m$使得$A_p+B_s=A_q+B_r$.

【点睛】方法点睛：对于一些直接说明比较困难的问题，可以尝试利用反证法分析证明.