2023年上海市春季高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，第 1 题至第 6 题每个空格填对得 4 分，第 7 题至第 12 题每个空格填对得 5 分，否则一律得零分.

1．【解答】解：集合 $A=\{1，2\}$，$B=\{1，a\}$，且 $A=B$，

则 $a=2$.

故答案为：2.

2．【解答】解：因为向量 $\overrightarrow{a}=(3，4)$，$\overrightarrow{b}=(1，2)$，

所以 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(3-2\times1，4-2\times2)=(1，0)$.

故答案为：$(1，0)$.

3．【解答】解：因为 $|x-1|\leq2$，

所以 $-2\leq x-1\leq2$，

所以 $-1\leq x\leq3$，

故答案为：$[-1，3]$.

4．【解答】解：根据圆 C 的一般方程为 $x^2+2x+y^2=0$，可得圆 C 的标准方程为 $(x+1)^2+y^2=1$，

故圆 C 的圆心为（0，-1），半径为 1，

故答案为：1.

5．【解答】解：由题意知 $P(A)+P(\overline{A})=1$，所以 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.5$，

故答案为：0.5.

6．【解答】解：正实数 a、b 满足 $a+4b=1$，则 $ab=\frac{1}{4}\times a\cdot4b\leqslant\frac{1}{4}\times(\frac{a+4b}{2})^2=\frac{1}{16}$，当且仅当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{8}$ 时等号成立.

故答案为：$\frac{1}{16}$.

7．【解答】解：极差为 $186-154=32$，组距为 5，且第一组下限为 153.5，

$\frac{32}{5}=6.4$，故组数为 7 组，

故答案为： 7.

8．【解答】解：根据题意及二项式定理可得：

$a_0+a_4=C_4^0+C_4^4\cdot(-2)^4=17$.

故答案为： 17.

9．【解答】解：当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=2\Leftrightarrow \log_2(x+1)=2$，解得 $x=3$；

当 $x<0$ 时，$g(x)=f(-x)=2^x+1=2$，解得 $x=0$（舍）；

所以 $g(x)=2$ 的解为： $x=3$.

故答案为： $x=3$.

10．【解答】解：从 10 人中任选 3 人的事件个数为 $C_{10}^3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$，

恰有 1 名男生 2 名女生的事件个数为 $C_4^1C_6^2=4\times\frac{6\times5}{2\times1}=60$，

则恰有 1 名男生 2 名女生的概率为 $\frac{60}{120}=0.5$，

故答案为： 0.5.

11．【解答】解：设 $z_1-1=\cos\theta+i\sin\theta$,则 $z_1=1+\cos\theta+i\sin\theta$,

因为 $z_1=i\cdot\overline{z_2}$，所以 $z_2=\sin\theta+i(\cos\theta+1)$，

所以$|z_1-z_2|=\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta+1)^2+(\sin\theta-\cos\theta-1)^2}$

$=\sqrt{2[\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-1]^2}=\sqrt{2}\,|\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-1|$.

显然当 $\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，原式取最小值 0，

当 $\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=-1$ 时，原式取最大值 $2+\sqrt{2}$，

故$|z_1-z_2|$的取值范围为$[0，2+\sqrt{2}]$.

故答案为： $[0，2+\sqrt{2}]$.

12．【解答】解：由题知$\overrightarrow{OA}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{OB}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{OC}=(0,1,0)$，

再设$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$,且 x，y，$z>0$，$x^2+y^2+z^2=1$，

代入已知的不等式得 $y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\leqslant z$,可得 $x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}y$，$z\geq y$，

所以 $1=x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}y^2+y^2+y^2$,解得 $y^2\leqslant\frac{3}{7}$，

故$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=y\leqslant\frac{\sqrt{21}}{7}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，第 13 题至第 14 题选对得 4 分，第 15 题至第 16 题选对得 5 分，否则一律得零分.

13．【解答】解：对于 A，由正弦函数的性质可知， $y=\sin x$ 为奇函数；

对于 B，由正弦函数的性质可知， $y=\cos x$ 为偶函数；

对于 C，由幂函数的性质可知， $y=x^3$ 为奇函数；

对于 D，由指数函数的性质可知， $y=2^x$ 为非奇非偶函数.

故选： B.

14．【解答】解：显然 2021 年相对于 2020 年进出口额增量增加特别明显，故最后一年的增长率最大， A 对；

统计图中的每一年条形图的高度逐年增加，故 B 对；

2020 年相对于 2019 的进口总额是减少的，故 C 错；

显然进出口总额 2021 年的增长率最大，而 2020 年相对于 2019 年的增量比 2019 年相对于 2018 年的增量小，且计算增长率时前者的分母还大，故 2020 年的增长率最小， D 对.

故选： C.

15．【解答】解：对于 A，当 P 是 A_1C_1 的中点时， BP 与 DD_1 是相交直线；

对于 B，根据异面直线的定义知， BP 与 AC 是异面直线；

对于 C，当点 P 与 C_1 重合时， BP 与 AD_1 是平行直线；

对于 D，当点 P 与 C_1 重合时， BP 与 B_1C 是相交直线.

故选： B.

16．【解答】解：由对任意正整数 $k>2022$，都有$|S_k|>|S_{k+1}|$，可以知道 a_{2022}，a_{2033}，a_{2024}，

，a_n 不可能为等差数列，

因为若 $d=0$，$a_n=0$，则$|S_k|=|S_{k+1}|$，矛盾；

若 $d=0$，$a_n<0$，当 $n\to+\infty$，$S_n\to-\infty$，k 使得$|S_{k+1}|>|S_k|$，矛盾；

若 $d=0$，$a_n>0$，当 $n\to+\infty$，$S_n\to+\infty$,必有 k 使得$|S_{k+1}|>|S_k|$，矛盾；

若 $d>0$，当 $n\to+\infty$，$a_n\to+\infty$，$S_n\to+\infty$必有 k 使得$|S_{k+1}|>|S_k|$，矛盾；

若 $d<0$，当 $n\to+\infty$，$a_n\to-\infty$，$S_n\to-\infty$,必有 k 使得$|S_{k+1}|>|S_k|$，矛盾；

所以选项 B 中的 a_2，a_4，a_6，…，a_{2n} 为等差数列与上述推理矛盾，故不可能正确；

选项 D 中的 a_{2022}，a_{2023}，a_{2024}，…，a_n 为等差数列与上述推理矛盾，故不可能正确；

选项 A 中的 a_1，a_3，a_5，…，a_{2n-1} 为等差数列与上述推理矛盾，故不可能正确；

事实上，只需取 $a_1=a_2=\cdots=a_{2022}=-1$，$a_n=(\frac{1}{2})^n$，$n\geqslant 2023$，$n\in N$即可

.

故选：C.

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17．【解答】解：（1）连接 AM，PM，

$\because PA\perp$平面 ABC，

$\therefore\angle PMA$ 为直线 PM 与平面 ABC 所成的角，

在$\triangle PAM$ 中，$\because AB\perp AC$，$\therefore BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because M$ 为 BC 中点，$\therefore AM=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$，

$\therefore\tan\angle PMA=\frac{6}{5}$，即直线 PM 与平面 ABC 所成角为 $\arctan\frac{6}{5}$；

（2）由 $ME\parallel$平面 PAB，$MF\parallel$平面 PAB，$ME\cap MF=M$，

$\therefore$平面 $MEF\parallel$平面 PAB，$\because ME\subset$平面 MEF，$\therefore ME\parallel$平面 PAB，

$\because PA\perp$平面 ABC，$AC\subset$平面 ABC，

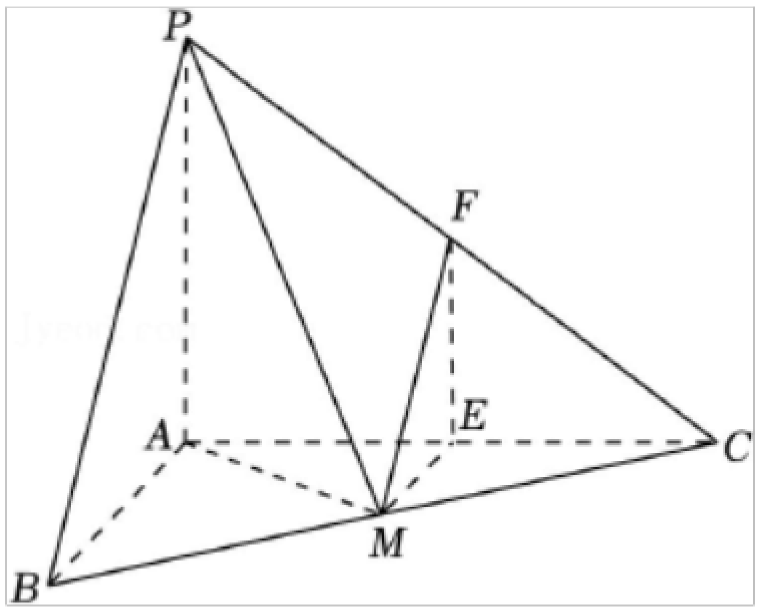
$\therefore PA\perp AC$，$\because AB\perp AC$，$PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$平面 PAB，

$\therefore AC\perp$平面 PAB，$\therefore AE$ 为直线 ME 到平面 PAB 的距离，

$\because ME\parallel$平面 PAB，$ME\subset$平面 ABC，平面 $ABC\cap$平面 $PAB=AB$，

$\therefore ME\parallel AB$，$\because M$ 为 BC 中点，$\therefore E$ 为 AC 中点，$\therefore AE=2$，

$\therefore$直线 ME 到平面 PAB 的距离为 2.



18．【解答】解：（1）因为 $A+C=120°$,且 $a=2c$，

由正弦定理可得 $\sin A=2\sin C=2\sin（120°-A）=\sqrt{3}\cos A+\sin A$，

所以 $\cos A=0$，

由 A 为三角形内角可得 $A=90°$，$C=30°$，$B=60°$，

因为 $b=2$，

所以 $c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；

（2）若 $A-C=15°$，$a=\sqrt{2}c\sin A$，

由正弦定理得 $\sin A=\sqrt{2}\sin C\sin A$，

由 A 为三角形内角可得 $\sin A>0$，

所以 $\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由题意可得 C 为锐角，

所以 $C=45°$，$A=60°$，$B=75°$，

由正弦定理可得，$\dfrac{a}{\sin 60°}=\dfrac{2}{\sin 75°}=\dfrac{8}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$，

所以 $a=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$，

所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\times 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3-\sqrt{3}$．

19．【解答】解：（1）$S=\dfrac{F_0}{V_0}=\dfrac{\pi R^2+2\pi R\cdot H}{\pi R^2\cdot H}=\dfrac{R+2H}{RH}$；

（2）由题意，建筑体 3n 米，底面面积 $A=\dfrac{T}{n}$，

∴体积 $V_0=3n\cdot A=3T$，

由 $f=\dfrac{L^2}{A}=18$，∴底面周长 $L=\sqrt{\dfrac{18T}{n}}$，

$\therefore F_0 = L \cdot 3n + A = \sqrt{\frac{18T}{n}} \cdot 3n + \frac{T}{n}$,

$\therefore$ “体形系数” $S = \frac{F_0}{V_0} = \sqrt{\frac{18n}{T}} + \frac{1}{3n} = \frac{3\sqrt{2n}}{100} + \frac{1}{3n}$，$n \in N^*$,

计算可得 $n = 6$ 时，S 最小.

20. 【解答】解：(1) 若 $m = 2$，则 $a^2 = 4$，$b^2 = 3$，$\therefore a = 2$，$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$，$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$;

(2) 由已知得 A_1 $(m, 0)$，A_2 $(m, 0)$，设 E $(p, 1)$，

$\therefore \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{3} = 1$，即 $p^2 = \frac{2}{3}m^2$,

$\therefore \overrightarrow{EA_1} = (m - p, -1)$，$\overrightarrow{EA_2} = (-m - p, -1)$，$\therefore \overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} = (m - p, -1) \cdot (-m - p, -1) = p^2 - m^2 + 1 = -2$,

$\because p^2 = \frac{2}{3}m^2$，代入求得 $m = 3$;

(3) 设直线 $y = \sqrt{3}x + t$，联立椭圆可得 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{(\sqrt{3}x + t)^2}{3} = 1$,

整理得 $(3 + 3m^2)x^2 + 2\sqrt{3}tm^2x + (t^2 - 3)m^2 = 0$,

由 $\triangle \geq 0$，$\therefore t^2 \leq 3m^2 + 3$,

联立双曲线可得 $\frac{(\sqrt{3}x + t)^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$，整理得 $(3 - m^2)x^2 + 2\sqrt{3}tx + (t^2 - 5m^2) = 0$,

由 $\Delta = 0$，$t^2 = 5m^2 - 15$,

$\therefore 5m^2 - 15 \leq 3m^2 + 3$,

$\therefore -3 \leq m \leq 3$,

又 $5m^2 - 15 \geq 0$，$\therefore m \geq \sqrt{3}$，$\because m \neq \sqrt{3}$,

综上所述：$m \in (\sqrt{3}, 3]$.

21. 【解答】解：(1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$，设 $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^3 - 3x^2$,

$h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$，当 $x \in [0, 1]$ 时，易知 $h'(x) = 6x(x - 1) \leq 0$，即 $h(x)$ 单调减,

$\therefore h(x)_{max} = h(0) = 0$，即 $f(x) - g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$，

$\therefore g(x)$ 是 $f(x)$ 的“控制函数“;

（2）$f(x)=-x^2+x$，$f(\frac{1}{4})=\frac{3}{16}$，$f'(x)=-2x+1$，$f'(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$，

$\therefore h(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4})+\frac{3}{16}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$，$f(x)-h(x)=-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}=-(x-\frac{1}{4})^2\leqslant 0$.

$\therefore f(x)\le h(x)$，即 $y=h(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的“控制函数”，

又 $f(\frac{1}{4})=h(\frac{1}{4})=\frac{3}{16}$，且 $g(\frac{1}{4})\geqslant f(\frac{1}{4})=\frac{3}{16}$，$\therefore \overline{f}(\frac{1}{4})=\frac{3}{16}$;

证明：（3）$f(x)=ax^3-(a+1)x^2+x$，$f'(x)=3ax^2-2(a+1)x+1$，

$y=f(x)$ 在 $x=x_0$（$x_0\in(0,1)$）处的切线为 $t(x)$，

$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$，$t(x_0)=f(x_0)$，$t(1)=0\Rightarrow f(1)=0$，

$f'(x_0)=3ax_0^2-2(a+1)x_0+1\Rightarrow f'(x_0)(1-x_0)=f(1)-f(x_0)=(1-x_0)[a(1+x_0+x_0^2)-(a+1)(1+x_0)+1]$

$\Rightarrow 3ax_0^2-2(a+1)x_0+1=ax_0^2-x_0\Rightarrow(2ax_0-1)(x_0-1)=0$，$x_0\neq 1\Rightarrow a=\frac{1}{2x_0}\in(\frac{1}{2},+\infty)\Rightarrow x_0=\frac{1}{2a}$

$f'(x_0)=3ax_0^2-2(a+1)x_0+1=3a(\frac{1}{2a})^2-2(a+1)(\frac{1}{2a})+1=-\frac{1}{4a}$,

$f(x_0)=a(\frac{1}{2a})^3-(a+1)(\frac{1}{2a})^2+\frac{1}{2a}=\frac{2a-1}{8a^2}$,

$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-\frac{1}{4a}(x-\frac{1}{2a})+\frac{2a-1}{8a^2}\Rightarrow t(x)=-\frac{1}{4a}(x-1)$,

) < ≥ > 恒成立，

函数 $t(x)$ 必是函数 $y=f(x)$ 的“控制函数”，

$\forall g(x)=kx+m\geqslant f(x)\Rightarrow\forall\overline{f}(x)\geqslant f(x)$，$\overline{f}(x)=f(x)$，$x\in(0,1)$是函数 $y=f(x)$ 的“控制函数”，

此时“控制函数“$g(x)$ 必与 $y=f(x)$ 相切于 x 点，$t(x)$ 与 $y=f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2a}$处相切，且过点（1，0），

在 $(\frac{1}{2a},1)$之间的点不可能使得 $y=f(x)$ 在 $(\frac{1}{2a},1)$切线下方，所以 $\overline{f}(c)=f(c)\Rightarrow c=\frac{1}{2a}=x_0$或 $c=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$（$x_0\in(0,1)$）处的切线过点（1，0），且 $c\in[x_0,1]$，

当且仅当 $c=x_0$ 或 $c=1$时，$\overline{f}(c)=f(c)$.