2008年普通高等学校招生全国统一考试

（广东卷）

数学(理科)

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知$0<a<2$，复数z的实部为a，虚部为1，则$|z|$的取值范围是（ C ）

A．$(1,5)$　　B．$(1,3)$　　C．$(1,\sqrt{5})$　　D．$(1,\sqrt{3})$

【解析】$|z|=\sqrt{a^2+1}$，而$0<a<2$，即$1<a^2+1<5$，$\therefore 1<|z|<\sqrt{5}$

2．记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=\dfrac{1}{2}$，$S_4=20$，则$S_6=$（ D ）

A．16　　B．24　　C．36　　D．48

【解析】$S_4=2+6d=20$，$\therefore d=3$，故$S_6=3+15d=48$

3．某校共有学生2000名，各年级男、女生人数如表1．已知在全校学生中随机抽取1名，抽到二年级女生的概率是0.19．现用分层抽样的方法在全校抽取64名学生，则应在三年级抽取的学生人数为（ C ）

A．24　　B．18　　C．16　　D．12

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

表1

【解析】依题意我们知道二年级的女生有380人，那么三年级的学生的人数应该是500，即总体中各个年级的人数比例为$3:3:2$，故在分层抽样中应在三年级抽取的学生人数为$64\times\dfrac{2}{8}=16$

4．若变量x，y满足$\begin{cases}2x+y\leqslant 40,\\ x+2y\leqslant 50,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$则$z=3x+2y$的最大值是（ C ）

A．90　　B．80　　C．70　　D．40

【解析】画出可行域,利用角点法易得答案C.

5．将正三棱柱截去三个角（如图1所示A，B，C分别是$\triangle GHI$三边的中点）得到几何体如图2，则该几何体按图2所示方向的侧视图（或称左视图）为（ A ）

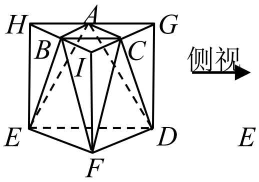


图1

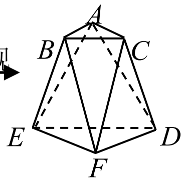
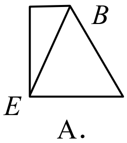
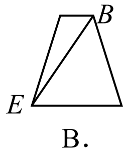


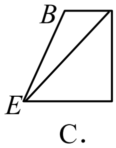
图2



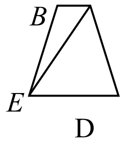
A.



B.



C.



D

【解析】解题时在图2的右边放扇墙(心中有墙),可得答案A.

6．已知命题 p:所有有理数都是实数，命题 q:正数的对数都是负数，则下列命题中为真命题的是（ D ）

A．$(\neg p)\vee q$　　B．$p\wedge q$　　C．$(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D．$(\neg p)\vee(\neg q)$

【解析】不难判断命题 p 为真命题，命题 q 为假命题，从而上述叙述中只有 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 为真命题

7．设 $a\in\mathbf{R}$，若函数 $y=e^{ax}+3x$，$x\in\mathbf{R}$ 有大于零的极值点，则（ B ）

A．$a>-3$　　B．$a<-3$　　C．$a>-\dfrac{1}{3}$　　D．$a<-\dfrac{1}{3}$

【解析】$f'(x)=3+ae^{ax}$，若函数在 $x\in R$ 上有大于零的极值点，即 $f'(x)=3+ae^{ax}=0$ 有正根。当有 $f'(x)=3+ae^{ax}=0$ 成立时,显然有 $a<0$,此时 $x=\dfrac{1}{a}\ln(-\dfrac{3}{a})$，由 $x>0$ 我们马上就能得到参数 a 的范围为 $a<-3$.

8．在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线与 CD 交于点 F．若 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AF}=$（ B ）

A．$\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B．$\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　C．$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　D．$\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$

【解析】此题属于中档题.解题关键是利用平面几何知识得出 $DF:FC=1:2$,然后利用向量的加减法则易得答案B.

二、填空题：本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分.

（一）必做题（9~12题）

9．阅读图3的程序框图，若输入 $m=4$，$n=6$，则输出 $a=$__，$i=$_

（注：框图中的赋值符号“=”也可以写成“←”或“:=”）

【解析】要结束程序的运算，就必须通过 n 整除 a 的条件运算，而同时 m 也整除 a，那么 a 的最小值应为 m 和 n 的最小公倍数12，即此时有 $i=3$。

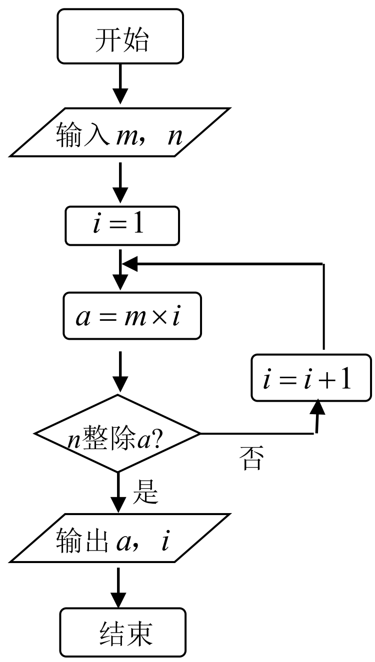


图3

10．已知 $(1+kx^2)^6$（k 是正整数）的展开式中，x^8 的系数小于120，则 $k=$____.

【解析】$(1+kx^2)^6$ 按二项式定理展开的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(kx^2)^r=C_6^rk^rx^{2r}$，

我们知道 x^8 的系数为 $C_6^4k^4=15k^4$，即 $15k^4<120$，也即 $k^4<8$，

而 k 是正整数，故 k 只能取1。

11．经过圆 $x^2+2x+y^2=0$ 的圆心 C，且与直线 $x+y=0$ 垂直的直线

方程是 ______.

【解析】易知点C为$(-1,0)$，而直线与$x+y=0$垂直，我们设待求的

直线的方程为$y=x+b$，将点C的坐标代入马上就能求出参数b的

值为$b=1$，故待求的直线的方程为$x-y+1=0$。

12．已知函数$f(x)=(\sin x-\cos x)\sin x$，$x\in\mathbf{R}$，则$f(x)$的最小正周期是______.

【解析】$f(x)=\sin^2 x-\sin x\cos x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\dfrac{1}{2}\sin 2x$,此时可得函数的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$。

二、选做题（13—15题，考生只能从中选做两题）

13．（坐标系与参数方程选做题）已知曲线C_1，C_2的极坐标方程分别为$\rho\cos\theta=3$，$\rho=4\cos\theta\left(\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则曲线$C_1$与$C_2$交点的极坐标为______.

【解析】我们通过联立解方程组$\begin{cases}\rho\cos\theta=3\\ \rho=4\cos\theta\end{cases}(\rho\geq 0,0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2})$解得$\begin{cases}\rho=2\sqrt{3}\\ \theta=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$,即两曲线的交点为$(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6})$。

14．（不等式选讲选做题）已知$a\in\mathbf{R}$，若关于x的方程$x^2+x+\left|a-\dfrac{1}{4}\right|+|a|=0$有实根，则$a$的取值范围是____.

【解析】方程即$\left|a-\dfrac{1}{4}\right|+|a|=-x^2-x\in[0,\dfrac{1}{4}]$,利用绝对值的几何意义(或零点分段法进行求解)可得实数a的取值范围为$\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$

15．（几何证明选讲选做题）已知PA是圆O的切线，切点为A，$PA=2$．AC是圆O的直径，PC与圆O交于点B，$PB=1$，则圆O的半径$R=$______.

【解析】依题意，我们知道$\Delta PBA\sim\Delta PAC$，

由相似三角形的性质我们有$\dfrac{PA}{2R}=\dfrac{PB}{AB}$,

即$R=\dfrac{PA\bullet AB}{2PB}=\dfrac{2\times\sqrt{2^2-1^2}}{2\times 1}=\sqrt{3}$。

三、解答题：本大题共6小题，满分80分．解答须写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16．（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=A\sin(x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi)$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值是1，其图像经过点 $M\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；（2）已知 α，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$，$f(\beta)=\dfrac{12}{13}$，求 $f(\alpha-\beta)$ 的值.

【解析】（1）依题意有 $A=1$，则 $f(x)=\sin(x+\varphi)$，

将点 $M(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2})$ 代入得 $\sin(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=\dfrac{1}{2}$，

而 $0<\varphi<\pi$，$\therefore\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{5}{6}\pi$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，

故 $f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})=\cos x$；

（2）依题意有 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\cos\beta=\dfrac{12}{13}$，而 $\alpha,\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-(\dfrac{3}{5})^2}=\dfrac{4}{5},\sin\beta=\sqrt{1-(\dfrac{12}{13})^2}=\dfrac{5}{13}$，

$f(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{12}{13}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{56}{65}$。

17．（本小题满分13分）

随机抽取某厂的某种产品200件，经质检，其中有一等品126件、二等品50件、三等品20件、次品4件．已知生产1件一、二、三等品获得的利润分别为6万元、2万元、1万元，而1件次品亏损2万元．设1件产品的利润（单位：万元）为 ξ.

（1）求 ξ 的分布列；（2）求1件产品的平均利润（即 ξ 的数学期望）；

（3）经技术革新后，仍有四个等级的产品，但次品率降为1%，一等品率提高为70%. 如果此时要求1件产品的平均利润不小于4.73万元，则三等品率最多是多少？

【解析】ξ 的所有可能取值有6，2，1，-2；$P(\xi=6)=\dfrac{126}{200}=0.63$，

$P(\xi=2)=\dfrac{50}{200}=0.25$

$P(\xi=1)=\dfrac{20}{200}=0.1$，$P(\xi=-2)=\dfrac{4}{200}=0.02$

故 ξ 的分布列为：

ξ	6	2	1	-2
P	0.63	0.25	0.1	0.02

（2）$E\xi=6\times0.63+2\times0.25+1\times0.1+(-2)\times0.02=4.34$

（3）设技术革新后的三等品率为x，则此时1件产品的平均利润为

$E(x)=6\times0.7+2\times(1-0.7-0.01-x)+(-2)\times0.01=4.76-x(0\le x\le0.29)$

依题意，$E(x)\ge4.73$，即$4.76-x\ge4.73$，解得$x\le0.03$ 所以三等品率最多为3%

18．（本小题满分14分）

设$b>0$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为$x^2=8(y-b)$．如图4所示，过点$F(0，b+2)$作$x$轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为$G$，已知抛物线在点$G$的切线经过椭圆的右焦点$F_1$．

（1）求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

（2）设$A，B$分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点P，使得$\triangle ABP$为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）．

【解析】（1）由$x^2=8(y-b)$得$y=\dfrac{1}{8}x^2+b$，

当$y=b+2$得$x=\pm4$，

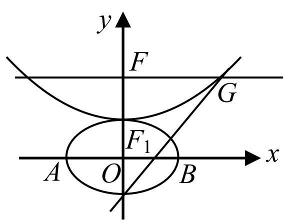


图4

$\therefore$G点的坐标为$(4,b+2)$，$y'=\dfrac{1}{4}x$，$y'|_{x=4}=1$，

过点G的切线方程为$y-(b+2)=x-4$即$y=x+b-2$，

令$y=0$得$x=2-b$，$\therefore F_1$点的坐标为$(2-b,0)$，

由椭圆方程得F_1点的坐标为$(b,0)$，

$\therefore 2-b=b$即$b=1$，即椭圆和抛物线的方程分别为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$和$x^2=8(y-1)$；

（2）$\because$过A作x轴的垂线与抛物线只有一个交点P，

$\therefore$以$\angle PAB$为直角的$Rt\Delta ABP$只有一个，

同理$\therefore$ 以$\angle PBA$为直角的$Rt\Delta ABP$只有一个。

若以$\angle APB$为直角，设P点坐标为$(x,\dfrac{1}{8}x^2+1)$，A、B两点的坐标分别为$(-\sqrt{2},0)$和$(\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=x^2-2+(\frac{1}{8}x^2+1)^2=\frac{1}{64}x^4+\frac{5}{4}x^2-1=0$。

关于x^2的二次方程有一大于零的解，$\therefore x$有两解，即以$\angle APB$为直角的$Rt\Delta ABP$有两个，

因此抛物线上存在四个点使得ΔABP为直角三角形。

19．（本小题满分14分）

设$k\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x<1\\ -\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$，$F(x)=f(x)-kx$，$x\in\mathbf{R}$，试讨论函数$F(x)$的单调性.

【解析】$F(x)=f(x)-kx=\begin{cases}\frac{1}{1-x}-kx, & x<1,\\ -\sqrt{x-1}-kx, & x\geq 1,\end{cases}$ $F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}-k, & x<1,\\ -\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-k, & x\geq 1,\end{cases}$

对于$F(x)=\frac{1}{1-x}-kx(x<1)$，

当$k\leq 0$时，函数$F(x)$在$(-\infty,1)$上是增函数；

当$k>0$时，函数$F(x)$在$(-\infty,1-\frac{1}{\sqrt{k}})$上是减函数，在$(1-\frac{1}{\sqrt{k}},1)$上是增函数；

对于$F(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-k(x\geq 1)$，

当$k\geq 0$时，函数$F(x)$在$\left[1,+\infty\right)$上是减函数；

当$k<0$时，函数$F(x)$在$\left[1,1+\frac{1}{4k^2}\right)$上是减函数，在$\left[1+\frac{1}{4k^2},+\infty\right)$上是增函数。

20．（本小题满分14分）

如图5所示，四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是半径为R的圆的内接四边形，其中BD是圆的直径，$\angle ABD=60^\circ$，$\angle BDC=45^\circ$，PD垂直底面$ABCD$，$PD=2\sqrt{2}R$，E，F分别是PB，CD上的点，且$\frac{PE}{EB}=\frac{DF}{FC}$，过点$E$作$BC$的平行线交$PC$于$G$.

（1）求BD与平面ABP所成角θ的正弦值；

（2）证明：$\triangle EFG$是直角三角形；

（3）当$\frac{PE}{EB}=\frac{1}{2}$时，求$\triangle EFG$的面积.

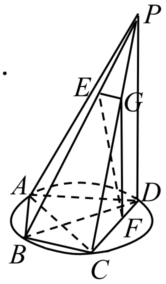


图5

【解析】（1）在 $Rt\Delta BAD$ 中，$\because \angle ABD=60^\circ$，$\therefore AB=R, AD=\sqrt{3}R$

而PD垂直底面ABCD，$PA=\sqrt{PD^2+AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}R)^2+(\sqrt{3}R)^2}=\sqrt{11}R$

$PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}R)^2+(2R)^2}=2\sqrt{3}R$,

在 ΔPAB 中，$PA^2+AB^2=PB^2$, 即 ΔPAB 为以 $\angle PAB$ 为直角的直角三角形。

设点 D 到面 PAB 的距离为 H ,

由 $V_{P-ABD}=V_{D-PAB}$ 有 $PA\bullet AB\bullet H=AB\bullet AD\bullet PD$,

即

$$H=\frac{AD\bullet PD}{PA}=\frac{\sqrt{3}R\bullet 2\sqrt{2}R}{\sqrt{11}R}=\frac{2\sqrt{66}}{11}R$$

$$\sin\theta=\frac{H}{BD}=\frac{\sqrt{66}}{11};$$

(2) $EG//BC, \therefore \frac{PE}{EB}=\frac{PG}{GC}$, 而 $\frac{PE}{EB}=\frac{DF}{FC}$, 即 $\frac{PG}{GC}=\frac{DF}{DC}, \therefore GF//PD$,

$\therefore GF\perp BC$,

$\therefore GF\perp EG$, $\therefore \Delta EFG$ 是直角三角形；

（3）$\frac{PE}{EB}=\frac{1}{2}$ 时 $\frac{EG}{BC}=\frac{PE}{PB}=\frac{1}{3}$, $\frac{GF}{PD}=\frac{CF}{CD}=\frac{2}{3}$,

即 $EG=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}\times 2R\times\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{3}R, GF=\frac{2}{3}PD=\frac{2}{3}\times 2\sqrt{2}R=\frac{4\sqrt{2}}{3}R$,

$\therefore \Delta EFG$ 的面积 $S_{\Delta EFG}=\frac{1}{2}EG\bullet GF=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}R\times\frac{4\sqrt{2}}{3}R=\frac{4}{9}R^2$

21．（本小题满分12分）

设 p，q 为实数，α，β 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实根，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=p$，$x_2=p^2-q$，$x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}$（$n=3,4,\ldots$）.

（1）证明：$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$；

（2）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（3）若 $p=1$，$q=\frac{1}{4}$，求 $\{x_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【解析】（1）由求根公式，不妨设 $\alpha<\beta$，得 $\alpha=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}, \beta=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=p$，

$\alpha\beta=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\times\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=q$

（2）设 $x_n-sx_{n-1}=t(x_{n-1}-sx_{n-2})$，则 $x_n=(s+t)x_{n-1}-stx_{n-2}$，

由 $x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}$ 得 $\begin{cases}s+t=p\\ st=q\end{cases}$，

消去 t，得 $s^2-ps+q=0$，$\therefore s$ 是方程 $x^2-px+q=0$ 的根，

由题意可知，$s_1=\alpha,s_2=\beta$

①当 $\alpha\neq\beta$ 时，此时方程组 $\begin{cases}s+t=p\\ st=q\end{cases}$ 的解记为 $\begin{cases}s_1=\alpha\\ t_1=\beta\end{cases}$ 或 $\begin{cases}s_2=\beta\\ t_2=\alpha\end{cases}$

$\therefore x_n-\alpha x_{n-1}=\beta(x_{n-1}-\alpha x_{n-2}),\ x_n-\beta x_{n-1}=\alpha(x_{n-1}-\beta x_{n-2})$，

即 $\{x_n-t_1x_{n-1}\}$、$\{x_n-t_2x_{n-1}\}$ 分别是公比为 $s_1=\alpha$、$s_2=\beta$ 的等比数列，

由等比数列性质可得 $x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2},x_n-\beta x_{n-1}=(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}$，

两式相减，得 $(\beta-\alpha)x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}-(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}$

$\because x_2=p^2-q,x_1=p$，$\therefore x_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$，$x_1=\alpha+\beta$

$\therefore (x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}=\beta^2\bullet\beta^{n-2}=\beta^n$，$(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}=\alpha^2\bullet\alpha^{n-2}=\alpha^n$

$\therefore (\beta-\alpha)x_{n-1}=\beta^n-\alpha^n$，

即 $\therefore x_{n-1}=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$，$\therefore x_n=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$

②当 $\alpha=\beta$ 时，即方程 $x^2-px+q=0$ 有重根，$\therefore p^2-4q=0$，

即 $(s+t)^2-4st=0$，得 $(s-t)^2=0,\therefore s=t$，不妨设 $s=t=\alpha$，

由①可知

$x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}$，$\because \alpha=\beta$，$\therefore x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\alpha^{n-2}=\alpha^n$

即 $\therefore x_n=\alpha x_{n-1}+\alpha^n$，等式两边同时除以 α^n，得 $\frac{x_n}{\alpha^n}=\frac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}}+1$，即 $\frac{x_n}{\alpha^n}-\frac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}}=1$

$\therefore$ 数列 $\{\frac{x_n}{\alpha^n}\}$ 是以1为公差的等差数列，

$\therefore \frac{x_n}{\alpha^n} = \frac{x_1}{\alpha} + (n-1)\times 1 = \frac{2\alpha}{\alpha} + n - 1 = n+1, \therefore x_n = n\alpha^n + \alpha^n$

综上所述， $x_n = \begin{cases} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, (\alpha \neq \beta) \\ n\alpha^n + \alpha^n, (\alpha = \beta) \end{cases}$

（3）把 $p = 1$， $q = \frac{1}{4}$ 代入 $x^2 - px + q = 0$，得 $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$，解得 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$\therefore x_n = n \bullet (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n$

$$S_n = \left((\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots + (\frac{1}{2})^n \right) + \left((\frac{1}{2}) + 2\bullet(\frac{1}{2})^2 + 3\bullet(\frac{1}{2})^3 + \ldots + n\bullet(\frac{1}{2})^n \right)$$

$$= 1 - (\frac{1}{2})^n + \left((\frac{1}{2}) + 2\bullet(\frac{1}{2})^2 + 3\bullet(\frac{1}{2})^3 + \ldots + n\bullet(\frac{1}{2})^n \right)$$

$$= 1 - (\frac{1}{2})^n + 2 - (\frac{1}{2})^{n-1} - n(\frac{1}{2})^n$$

$$= 3 - (n+3)(\frac{1}{2})^n$$