

# 2022 年普通高等学校招生全国统一考试

## 文科数学

注意事项：

- 答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上、写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \left\{x \mid 0 \leq x < \frac{5}{2}\right\}$ , 则  $A \cap B = (\quad)$
- A.  $\{0, 1, 2\}$       B.  $\{-2, -1, 0\}$       C.  $\{0, 1\}$       D.  $\{1, 2\}$

【答案】A

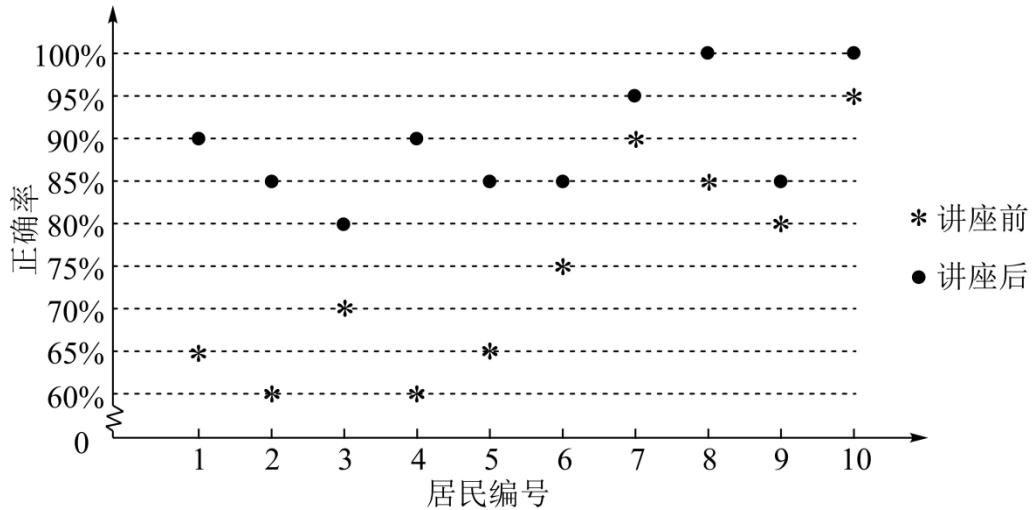
【解析】

【分析】根据集合的交集运算即可解出。

【详解】因为  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \left\{x \mid 0 \leq x < \frac{5}{2}\right\}$ , 所以  $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ 。

故选：A。

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识。为了解讲座效果，随机抽取 10 位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则 ( )

- A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%
- B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%
- C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差
- D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

【答案】B

【解析】

【分析】由图表信息，结合中位数、平均数、标准差、极差的概念，逐项判断即可得解.

【详解】讲座前中位数为  $\frac{70\% + 75\%}{2} > 70\%$ , 所以 A 错;

讲座后问卷答题的正确率只有一个是 80%, 4 个 85%, 剩下全部大于等于 90%, 所以讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%, 所以 B 对;

讲座前问卷答题的正确率更加分散, 所以讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差, 所以 C 错;

讲座后问卷答题的正确率的极差为  $100\% - 80\% = 20\%$ ,

讲座前问卷答题的正确率的极差为  $95\% - 60\% = 35\% > 20\%$ , 所以 D 错.

故选:B.

3. 若  $z = 1+i$ . 则  $|iz + 3\bar{z}| = ( )$

- A.  $4\sqrt{5}$
- B.  $4\sqrt{2}$
- C.  $2\sqrt{5}$
- D.  $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

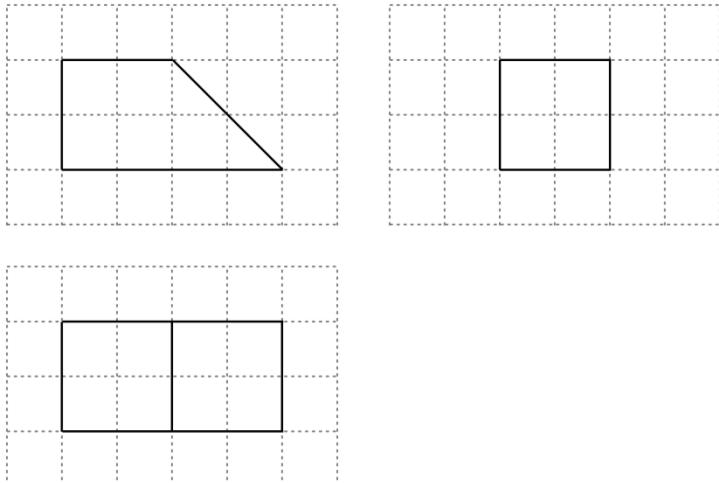
【分析】根据复数代数形式的运算法则，共轭复数的概念以及复数模的计算公式即可求出.

【详解】因为  $z = 1+i$ ，所以  $iz + 3\bar{z} = i(1+i) + 3(1-i) = 2 - 2i$ ，所以  $|iz + 3\bar{z}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ .

故选：D.

4. 如图，网格纸上绘制的是一个几何体的三视图，网格小正方形的边长为1，则该几何体的体积为

( )



A. 8

B. 12

C. 16

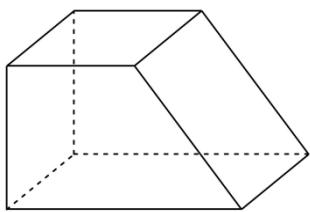
D. 20

【答案】B

【解析】

【分析】由三视图还原几何体，再由棱柱的体积公式即可得解.

【详解】由三视图还原几何体，如图，



则该直四棱柱的体积  $V = \frac{2+4}{2} \times 2 \times 2 = 12$ .

故选：B.

5. 将函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的图像向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度后得到曲线  $C$ , 若  $C$  关于  $y$  轴对称, 则  $\omega$  的最小值是 ( )

A.  $\frac{1}{6}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{2}$

**【答案】C**

**【解析】**

**【分析】** 先由平移求出曲线  $C$  的解析式, 再结合对称性得  $\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 即可求出  $\omega$  的最小值.

**【详解】** 由题意知: 曲线  $C$  为  $y = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin(\omega x + \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$ , 又  $C$  关于  $y$  轴对称, 则

$$\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

解得  $\omega = \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z}$ , 又  $\omega > 0$ , 故当  $k = 0$  时,  $\omega$  的最小值为  $\frac{1}{3}$ .

故选: C.

6. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片中无放回随机抽取 2 张, 则抽到的 2 张卡片上的数字之积是 4 的倍数的概率为 ( )

A.  $\frac{1}{5}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{2}{5}$       D.  $\frac{2}{3}$

**【答案】C**

**【解析】**

**【分析】** 先列举出所有情况, 再从中挑出数字之积是 4 的倍数的情况, 由古典概型求概率即可.

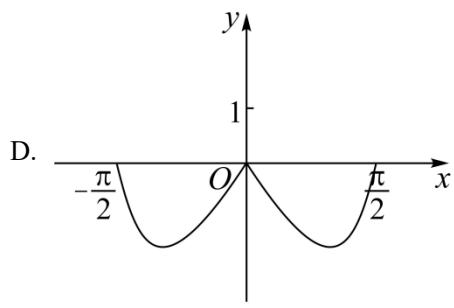
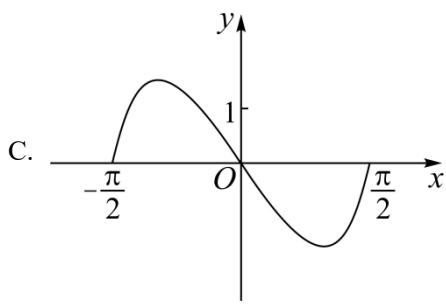
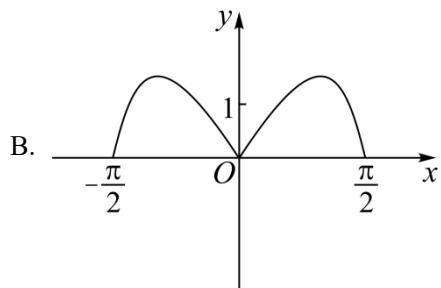
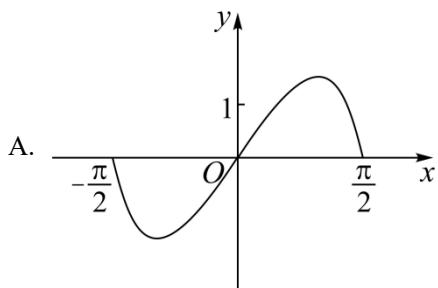
**【详解】** 从 6 张卡片中无放回抽取 2 张, 共有

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$  15 种情况,

其中数字之积为 4 的倍数的有  $(1, 4), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 5), (4, 6)$  6 种情况, 故概率为  $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ .

故选: C.

7. 函数  $y = (3^x - 3^{-x}) \cos x$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  的图象大致为 ( )



【答案】A

【解析】

【分析】由函数的奇偶性结合指数函数、三角函数的性质逐项排除即可得解.

【详解】令  $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

则  $f(-x) = (3^{-x} - 3^x) \cos(-x) = -(3^x - 3^{-x}) \cos x = -f(x)$ ,

所以  $f(x)$  为奇函数, 排除 BD;

又当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $3^x - 3^{-x} > 0, \cos x > 0$ , 所以  $f(x) > 0$ , 排除 C.

故选: A.

8. 当  $x=1$  时, 函数  $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$  取得最大值  $-2$ , 则  $f'(2) = (\quad)$

- |         |                   |                  |        |
|---------|-------------------|------------------|--------|
| A. $-1$ | B. $-\frac{1}{2}$ | C. $\frac{1}{2}$ | D. $1$ |
|---------|-------------------|------------------|--------|

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可知  $f(1) = -2$ ,  $f'(1) = 0$  即可解得  $a, b$ , 再根据  $f'(x)$  即可解出.

【详解】因为函数  $f(x)$  定义域为  $(0, +\infty)$ , 所以依题可知,  $f(1) = -2$ ,  $f'(1) = 0$ , 而

$f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$ , 所以  $b = -2, a - b = 0$ , 即  $a = -2, b = -2$ , 所以  $f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$ , 因此函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上递增, 在  $(1, +\infty)$  上递减,  $x = 1$  时取最大值, 满足题意, 即有  $f'(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ .

故选: B.

9. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $B_1D$  与平面  $ABCD$  和平面  $AA_1B_1B$  所成的角均为  $30^\circ$ , 则 ( )

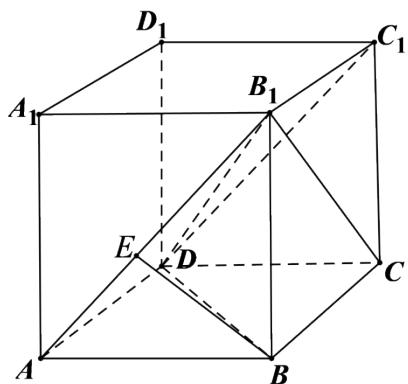
- A.  $AB = 2AD$
- B.  $AB$  与平面  $AB_1C_1D$  所成的角为  $30^\circ$
- C.  $AC = CB_1$
- D.  $B_1D$  与平面  $BB_1C_1C$  所成的角为  $45^\circ$

【答案】D

【解析】

【分析】根据线面角的定义以及长方体的结构特征即可求出.

【详解】如图所示:



不妨设  $AB = a, AD = b, AA_1 = c$ , 依题以及长方体的结构特征可知,  $B_1D$  与平面  $ABCD$  所成角为

$\angle B_1DB$ ,  $B_1D$  与平面  $AA_1B_1B$  所成角为  $\angle DB_1A$ , 所以  $\sin 30^\circ = \frac{c}{B_1D} = \frac{b}{B_1D}$ , 即  $b = c$ ,

$$B_1D = 2c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \text{ 解得 } a = \sqrt{2}c.$$

对于 A,  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $AB = \sqrt{2}AD$ , A 错误;

对于 B, 过 B 作  $BE \perp AB_1$  于 E, 易知  $BE \perp$  平面  $AB_1C_1D$ , 所以  $AB$  与平面  $AB_1C_1D$  所成角为  $\angle BAE$ ,

因为  $\tan \angle BAE = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $\angle BAE \neq 30^\circ$ , B 错误;

对于 C,  $AC = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}c$ ,  $CB_1 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}c$ ,  $AC \neq CB_1$ , C 错误;

对于 D,  $B_1D$  与平面  $BB_1C_1C$  所成角为  $\angle DB_1C$ ,  $\sin \angle DB_1C = \frac{CD}{B_1D} = \frac{a}{2c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 而

$0 < \angle DB_1C < 90^\circ$ , 所以  $\angle DB_1C = 45^\circ$ . D 正确.

故选: D.

10. 甲、乙两个圆锥的母线长相等, 侧面展开图的圆心角之和为  $2\pi$ , 侧面积分别为  $S_{\text{甲}}$  和  $S_{\text{乙}}$ , 体积分别为

$V_{\text{甲}}$  和  $V_{\text{乙}}$ . 若  $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$ , 则  $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = (\quad)$

- A.  $\sqrt{5}$       B.  $2\sqrt{2}$       C.  $\sqrt{10}$       D.  $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】设母线长为  $l$ , 甲圆锥底面半径为  $r_1$ , 乙圆锥底面圆半径为  $r_2$ , 根据圆锥的侧面积公式可得

$r_1 = 2r_2$ , 再结合圆心角之和可将  $r_1, r_2$  分别用  $l$  表示, 再利用勾股定理分别求出两圆锥的高, 再根据圆锥的体积公式即可得解.

【详解】解: 设母线长为  $l$ , 甲圆锥底面半径为  $r_1$ , 乙圆锥底面圆半径为  $r_2$ ,

$$\text{则 } \frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l} = \frac{r_1}{r_2} = 2,$$

所以  $r_1 = 2r_2$ ,

$$\text{又 } \frac{2\pi r_1}{l} + \frac{2\pi r_2}{l} = 2\pi,$$

$$\text{则 } \frac{r_1 + r_2}{l} = 1,$$

$$\text{所以 } r_1 = \frac{2}{3}l, r_2 = \frac{1}{3}l,$$

$$\text{所以甲圆锥的高 } h_1 = \sqrt{l^2 - \frac{4}{9}l^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}l,$$

$$\text{乙圆锥的高 } h_2 = \sqrt{l^2 - \frac{1}{9}l^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}l,$$

$$\text{所以 } \frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{\frac{4}{9}l^2 \times \frac{\sqrt{5}}{3}l}{\frac{1}{9}l^2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}l} = \sqrt{10}.$$

故选：C.

11. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{3}$ ,  $A_1, A_2$  分别为  $C$  的左、右顶点,  $B$  为  $C$  的上顶点. 若  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$ , 则  $C$  的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{16} = 1$       B.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$       C.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$       D.  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

**【答案】B**

**【解析】**

**【分析】** 根据离心率及  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$ , 解得关于  $a^2, b^2$  的等量关系式, 即可得解.

**【详解】** 解: 因为离心率  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{3}$ , 解得  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9}$ ,  $b^2 = \frac{8}{9}a^2$ ,

$A_1, A_2$  分别为  $C$  的左右顶点, 则  $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ ,

$B$  为上顶点, 所以  $B(0, b)$ .

所以  $\overrightarrow{BA_1} = (-a, -b), \overrightarrow{BA_2} = (a, -b)$ , 因为  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$

所以  $-a^2 + b^2 = -1$ , 将  $b^2 = \frac{8}{9}a^2$  代入, 解得  $a^2 = 9, b^2 = 8$ ,

故椭圆的方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ .

故选：B.

12. 已知  $9^m = 10, a = 10^m - 11, b = 8^m - 9$ , 则 ( )

- A.  $a > 0 > b$       B.  $a > b > 0$       C.  $b > a > 0$       D.  $b > 0 > a$

**【答案】A**

**【解析】**

**【分析】** 根据指对互化以及对数函数的单调性即可知  $m = \log_9 10 > 1$ , 再利用基本不等式, 换底公式可得

$m > \lg 11, \log_8 9 > m$ , 然后由指数函数的单调性即可解出.

**【详解】**由 $9^m = 10$ 可得 $m = \log_9 10 = \frac{\lg 10}{\lg 9} > 1$ , 而

$$\lg 9 \lg 11 < \left( \frac{\lg 9 + \lg 11}{2} \right)^2 = \left( \frac{\lg 99}{2} \right)^2 < 1 = (\lg 10)^2, \text{ 所以 } \frac{\lg 10}{\lg 9} > \frac{\lg 11}{\lg 10}, \text{ 即 } m > \lg 11, \text{ 所以}$$

$$a = 10^m - 11 > 10^{\lg 11} - 11 = 0.$$

$$\text{又 } \lg 8 \lg 10 < \left( \frac{\lg 8 + \lg 10}{2} \right)^2 = \left( \frac{\lg 80}{2} \right)^2 < (\lg 9)^2, \text{ 所以 } \frac{\lg 9}{\lg 8} > \frac{\lg 10}{\lg 9}, \text{ 即 } \log_8 9 > m,$$

$$\text{所以 } b = 8^m - 9 < 8^{\log_8 9} - 9 = 0. \text{ 综上, } a > 0 > b.$$

故选: A.

**二、填空题:** 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $\vec{a} = (m, 3), \vec{b} = (1, m+1)$ . 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【答案】**  $-\frac{3}{4}$  #  $-0.75$

**【解析】**

**【分析】** 直接由向量垂直的坐标表示求解即可.

**【详解】** 由题意知:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = m + 3(m+1) = 0$ , 解得  $m = -\frac{3}{4}$ .

故答案为:  $-\frac{3}{4}$ .

14. 设点  $M$  在直线  $2x + y - 1 = 0$  上, 点  $(3, 0)$  和  $(0, 1)$  均在  $\odot M$  上, 则  $\odot M$  的方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**【答案】**  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

**【解析】**

**【分析】** 设出点  $M$  的坐标, 利用  $(3, 0)$  和  $(0, 1)$  均在  $\odot M$  上, 求得圆心及半径, 即可得圆的方程.

**【详解】** 解: ∵点  $M$  在直线  $2x + y - 1 = 0$  上,

∴设点  $M$  为  $(a, 1-2a)$ , 又因为点  $(3, 0)$  和  $(0, 1)$  均在  $\odot M$  上,

∴点  $M$  到两点的距离相等且为半径  $R$ ,

$$\therefore \sqrt{(a-3)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{a^2 + (-2a)^2} = R,$$

$$a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 4a + 1 = 5a^2, \text{ 解得 } a = 1,$$

$$\therefore M(1, -1), R = \sqrt{5},$$

$\odot M$  的方程为  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$ .

故答案为:  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

15. 记双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率为  $e$ , 写出满足条件“直线  $y = 2x$  与  $C$  无公共点”的  $e$  的一个值\_\_\_\_\_.

【答案】2 (满足  $1 < e \leq \sqrt{5}$  皆可)

【解析】

【分析】根据题干信息, 只需双曲线渐近线  $y = \pm \frac{b}{a}x$  中  $0 < \frac{b}{a} \leq 2$  即可求得满足要求的  $e$  值.

【详解】解:  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ , 所以  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ,

结合渐近线的特点, 只需  $0 < \frac{b}{a} \leq 2$ , 即  $\frac{b^2}{a^2} \leq 4$ ,

可满足条件“直线  $y = 2x$  与  $C$  无公共点”

所以  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \leq \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ,

又因为  $e > 1$ , 所以  $1 < e \leq \sqrt{5}$ ,

故答案为: 2 (满足  $1 < e \leq \sqrt{5}$  皆可)

16. 已知  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在边  $BC$  上,  $\angle ADB = 120^\circ$ ,  $AD = 2$ ,  $CD = 2BD$ . 当  $\frac{AC}{AB}$  取得最小值时,  
 $BD =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】

【分析】设  $CD = 2BD = 2m > 0$ , 利用余弦定理表示出  $\frac{AC^2}{AB^2}$  后, 结合基本不等式即可得解.

【详解】设  $CD = 2BD = 2m > 0$ ,

则在  $\triangle ABD$  中,  $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos \angle ADB = m^2 + 4 + 2m$ ,

在  $\triangle ACD$  中,  $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cos \angle ADC = 4m^2 + 4 - 4m$ ,

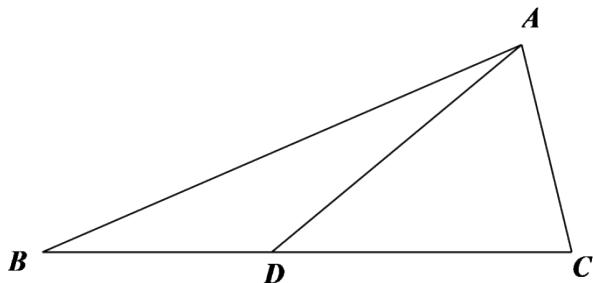
所以  $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{4m^2 + 4 - 4m}{m^2 + 4 + 2m} = \frac{4(m^2 + 4 + 2m) - 12(1+m)}{m^2 + 4 + 2m} = 4 - \frac{12}{(m+1) + \frac{3}{m+1}}$

$$\geq 4 - \frac{12}{2\sqrt{(m+1) \cdot \frac{3}{m+1}}} = 4 - 2\sqrt{3},$$

当且仅当  $m+1 = \frac{3}{m+1}$  即  $m = \sqrt{3} - 1$  时，等号成立，

所以当  $\frac{AC}{AB}$  取最小值时， $m = \sqrt{3} - 1$ .

故答案为： $\sqrt{3} - 1$ .



**三、解答题：**共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. 甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营，为了解这两家公司长途客车的运行情况，随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次，得到下面列联表：

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

(1) 根据上表，分别估计这两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率；

(2) 能否有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关？

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$$P(K^2 \geq k) \quad 0.100 \quad 0.050 \quad 0.010$$

$$k \quad 2.706 \quad 3.841 \quad 6.635$$

**【答案】**(1)  $A$ ,  $B$  两家公司长途客车准点的概率分别为  $\frac{12}{13}$ ,  $\frac{7}{8}$

(2) 有

**【解析】**

**【分析】**(1) 根据表格中数据以及古典概型的概率公式可求得结果;

(2) 根据表格中数据及公式计算  $K^2$ , 再利用临界值表比较即可得结论.

**【小问 1 详解】**

根据表中数据,  $A$  共有班次 260 次, 准点班次有 240 次,

设  $A$  家公司长途客车准点事件为  $M$ ,

$$\text{则 } P(M) = \frac{240}{260} = \frac{12}{13};$$

$B$  共有班次 240 次, 准点班次有 210 次,

设  $B$  家公司长途客车准点事件为  $N$ ,

$$\text{则 } P(N) = \frac{210}{240} = \frac{7}{8}.$$

$A$  家公司长途客车准点的概率为  $\frac{12}{13}$ ;

$B$  家公司长途客车准点的概率为  $\frac{7}{8}$ .

**【小问 2 详解】**

列联表

	准点班次数	未准点班次数	合计
$A$	240	20	260
$B$	210	30	240
合计	450	50	500

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{500 \times (240 \times 30 - 210 \times 20)^2}{260 \times 240 \times 450 \times 50} \approx 3.205 > 2.706,$$

根据临界值表可知, 有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关.

18. 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 已知  $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$ .

- (1) 证明:  $\{a_n\}$  是等差数列;  
(2) 若  $a_4, a_7, a_9$  成等比数列, 求  $S_n$  的最小值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2)  $-78$ .

【解析】

【分析】(1) 依题意可得  $2S_n + n^2 = 2na_n + n$ , 根据  $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ , 作差即可得到  $a_n - a_{n-1} = 1$ ,

从而得证;

(2) 由 (1) 及等比中项的性质求出  $a_1$ , 即可得到  $\{a_n\}$  的通项公式与前  $n$  项和, 再根据二次函数的性质计算可得.

【小问 1 详解】

解: 因为  $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$ , 即  $2S_n + n^2 = 2na_n + n$  ①,

当  $n \geq 2$  时,  $2S_{n-1} + (n-1)^2 = 2(n-1)a_{n-1} + (n-1)$  ②,

① - ② 得,  $2S_n + n^2 - 2S_{n-1} - (n-1)^2 = 2na_n + n - 2(n-1)a_{n-1} - (n-1)$ ,

即  $2a_n + 2n - 1 = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} + 1$ ,

即  $2(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} = 2(n-1)$ , 所以  $a_n - a_{n-1} = 1$ ,  $n \geq 2$  且  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

所以  $\{a_n\}$  是以 1 为公差的等差数列.

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可得  $a_4 = a_1 + 3$ ,  $a_7 = a_1 + 6$ ,  $a_9 = a_1 + 8$ ,

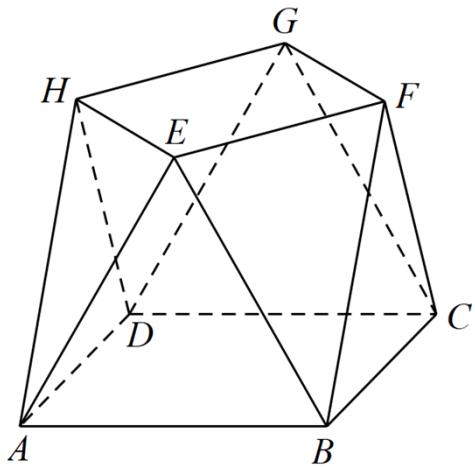
又  $a_4, a_7, a_9$  成等比数列, 所以  $a_7^2 = a_4 \cdot a_9$ ,

即  $(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 3) \cdot (a_1 + 8)$ , 解得  $a_1 = -12$ ,

所以  $a_n = n - 13$ , 所以  $S_n = -12n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{25}{2}n = \frac{1}{2}\left(n - \frac{25}{2}\right)^2 - \frac{625}{8}$ ,

所以, 当  $n = 12$  或  $n = 13$  时  $(S_n)_{\min} = -78$ .

19. 小明同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒，包装盒如图所示：底面  $ABCD$  是边长为 8 (单位：cm) 的正方形， $\triangle EAB, \triangle FBC, \triangle GCD, \triangle HDA$  均为正三角形，且它们所在的平面都与平面  $ABCD$  垂直。



- (1) 证明： $EF // \text{平面 } ABCD$ ；  
(2) 求该包装盒的容积 (不计包装盒材料的厚度)。

**【答案】**(1) 证明见解析；

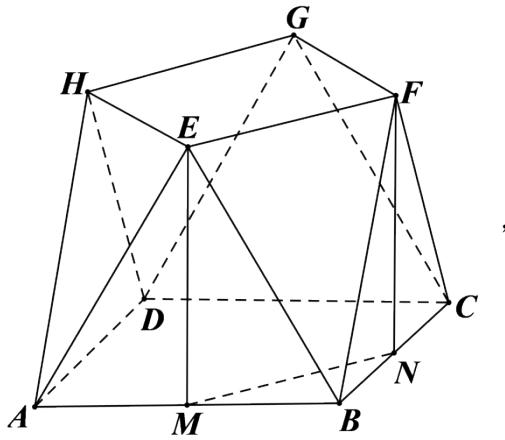
(2)  $\frac{640}{3}\sqrt{3}$ .

**【解析】**

**【分析】**(1) 分别取  $AB, BC$  的中点  $M, N$ ，连接  $MN$ ，由平面知识可知  $EM \perp AB, FN \perp BC$ ， $EM = FN$ ，依题从而可证  $EM \perp \text{平面 } ABCD, FN \perp \text{平面 } ABCD$ ，根据线面垂直的性质定理可知  $EM // FN$ ，即可知四边形  $EMNF$  为平行四边形，于是  $EF // MN$ ，最后根据线面平行的判定定理即可证出；

(2) 再分别取  $AD, DC$  中点  $K, L$ ，由 (1) 知，该几何体的体积等于长方体  $KMNL-EFGH$  的体积加上四棱锥  $B-MNFE$  体积的 4 倍，即可解出。

**【小问 1 详解】**

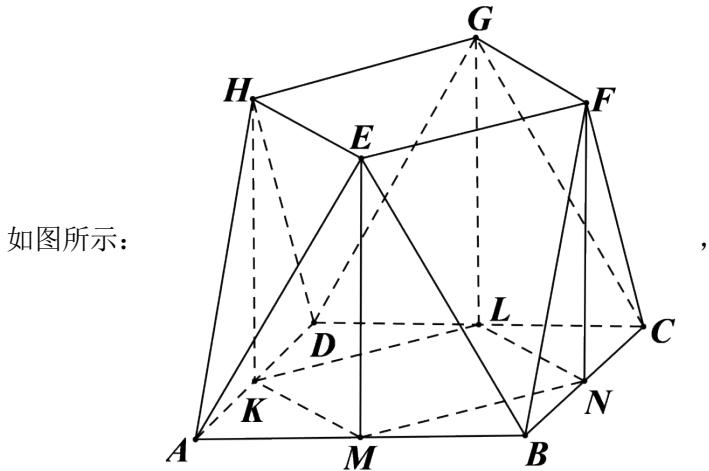


分别取  $AB, BC$  的中点  $M, N$ ，连接  $MN$ ，因为  $\triangle EAB, \triangle FBC$  为全等的正三角形，所以

$EM \perp AB, FN \perp BC, EM = FN$ , 又平面  $EAB \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $EAB \cap$  平面  $ABCD = AB$ ,

$EM \subset$  平面  $EAB$ , 所以  $EM \perp$  平面  $ABCD$ , 同理可得  $FN \perp$  平面  $ABCD$ , 根据线面垂直的性质定理可知  $EM // FN$ , 而  $EM = FN$ , 所以四边形  $EMNF$  为平行四边形, 所以  $EF // MN$ , 又  $EF \not\subset$  平面  $ABCD$ ,  $MN \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $EF //$  平面  $ABCD$ .

## 【小问 2 详解】



分别取  $AD, DC$  中点  $K, L$ , 由(1)知,  $EF // MN$  且  $EF = MN$ , 同理有,  $HE // KM$ ,  $HE = KM$ ,

$HG \parallel KL$ ,  $HG = KL$ ,  $GF \parallel LN$ ,  $GF = LN$ , 由平面知识可知,  $BD \perp MN$ ,  $MN \perp MK$ ,

$KM = MN = NL = LK$ ，所以该几何体的体积等于长方体  $KMNL-EFGH$  的体积加上四棱锥  $B-MNFE$  体积的 4 倍。

因为  $MN = NL = LK = KM = 4\sqrt{2}$ ,  $EM = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ , 点 B 到平面  $MNFE$  的距离即为点 B 到直线  $MN$  的距离  $d$ ,  $d = 2\sqrt{2}$ , 所以该几何体的体积

$$V = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \times 4\sqrt{3} + 4 \times \frac{1}{3} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 128\sqrt{3} + \frac{256}{3}\sqrt{3} = \frac{640}{3}\sqrt{3}.$$

20. 已知函数  $f(x) = x^3 - x$ ,  $g(x) = x^2 + a$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_1, f(x_1))$  处的切线也是曲线  $y = g(x)$  的切线.

(1) 若  $x_1 = -1$ , 求  $a$ ;

(2) 求  $a$  的取值范围.

**【答案】**(1) 3      (2)  $[-1, +\infty)$

### 【解析】

**【分析】**(1) 先由  $f(x)$  上的切点求出切线方程, 设出  $g(x)$  上的切点坐标, 由斜率求出切点坐标, 再由函数值求出  $a$  即可;

(2) 设出  $g(x)$  上的切点坐标, 分别由  $f(x)$  和  $g(x)$  及切点表示出切线方程, 由切线重合表示出  $a$ , 构造函数, 求导求出函数值域, 即可求得  $a$  的取值范围.

### 【小问 1 详解】

由题意知,  $f(-1) = -1 - (-1) = 0$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 1$ ,  $f'(-1) = 3 - 1 = 2$ , 则  $y = f(x)$  在点  $(-1, 0)$  处的切线方程为  $y = 2(x + 1)$ ,

即  $y = 2x + 2$ , 设该切线与  $g(x)$  切于点  $(x_2, g(x_2))$ ,  $g'(x) = 2x$ , 则  $g'(x_2) = 2x_2 = 2$ , 解得  $x_2 = 1$ , 则  $g(1) = 1 + a = 2 + 2$ , 解得  $a = 3$ ;

### 【小问 2 详解】

$f'(x) = 3x^2 - 1$ , 则  $y = f(x)$  在点  $(x_1, f(x_1))$  处的切线方程为  $y - (x_1^3 - x_1) = (3x_1^2 - 1)(x - x_1)$ , 整理得

$$y = (3x_1^2 - 1)x - 2x_1^3,$$

设该切线与  $g(x)$  切于点  $(x_2, g(x_2))$ ,  $g'(x) = 2x$ , 则  $g'(x_2) = 2x_2$ , 则切线方程为

$$y - (x_2^2 + a) = 2x_2(x - x_2), \text{ 整理得 } y = 2x_2x - x_2^2 + a,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 3x_1^2 - 1 = 2x_2 \\ -2x_1^3 = -x_2^2 + a \end{cases}, \text{ 整理得 } a = x_2^2 - 2x_1^3 = \left(\frac{3x_1^2}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - 2x_1^3 = \frac{9}{4}x_1^4 - 2x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4},$$

令  $h(x) = \frac{9}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ , 则  $h'(x) = 9x^3 - 6x^2 - 3x = 3x(3x+1)(x-1)$ , 令  $h'(x) > 0$ , 解得

$$-\frac{1}{3} < x < 0 \text{ 或 } x > 1,$$

令  $h'(x) < 0$ , 解得  $x < -\frac{1}{3}$  或  $0 < x < 1$ , 则  $x$  变化时,  $h'(x), h(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	↘	$\frac{5}{27}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-1	↗

则  $h(x)$  的值域为  $[-1, +\infty)$ , 故  $a$  的取值范围为  $[-1, +\infty)$ .

21. 设抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 点  $D(p, 0)$ , 过  $F$  的直线交  $C$  于  $M, N$  两点. 当直线  $MD$  垂直于  $x$  轴时,  $|MF| = 3$ .

- (1) 求  $C$  的方程;
- (2) 设直线  $MD, ND$  与  $C$  的另一个交点分别为  $A, B$ , 记直线  $MN, AB$  的倾斜角分别为  $\alpha, \beta$ . 当  $\alpha - \beta$  取得最大值时, 求直线  $AB$  的方程.

【答案】(1)  $y^2 = 4x$ ;

(2)  $AB: x = \sqrt{2}y + 4$ .

### 【解析】

【分析】(1) 由抛物线的定义可得  $|MF| = p + \frac{p}{2}$ , 即可得解;

(2) 设点的坐标及直线  $MN: x = my + 1$ , 由韦达定理及斜率公式可得  $k_{MN} = 2k_{AB}$ , 再由差角的正切公式及基本不等式可得  $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 设直线  $AB: x = \sqrt{2}y + n$ , 结合韦达定理可解.

### 【小问 1 详解】

抛物线的准线为  $x = -\frac{p}{2}$ , 当  $MD$  与  $x$  轴垂直时, 点  $M$  的横坐标为  $p$ ,

此时  $|MF| = p + \frac{p}{2} = 3$ , 所以  $p = 2$ ,

所以抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ ；

【小问 2 详解】

设  $M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ ,  $N\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$ ,  $A\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right)$ ,  $B\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right)$ , 直线  $MN: x = my + 1$ ,

由  $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$  可得  $y^2 - 4my - 4 = 0$ ,  $\Delta > 0$ ,  $y_1 y_2 = -4$ ,

由斜率公式可得  $k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}$ ,  $k_{AB} = \frac{y_3 - y_4}{\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}} = \frac{4}{y_3 + y_4}$ ,

直线  $MD: x = \frac{x_1 - 2}{y_1} \cdot y + 2$ , 代入抛物线方程可得  $y^2 - \frac{4(x_1 - 2)}{y_1} \cdot y - 8 = 0$ ,

$\Delta > 0$ ,  $y_1 y_3 = -8$ , 所以  $y_3 = 2y_2$ , 同理可得  $y_4 = 2y_1$ ,

所以  $k_{AB} = \frac{4}{y_3 + y_4} = \frac{4}{2(y_1 + y_2)} = \frac{k_{MN}}{2}$

又因为直线  $MN$ 、 $AB$  的倾斜角分别为  $\alpha$ ,  $\beta$ ,

所以  $k_{AB} = \tan \beta = \frac{k_{MN}}{2} = \frac{\tan \alpha}{2}$ ,

若要使  $\alpha - \beta$  最大, 则  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

设  $k_{MN} = 2k_{AB} = 2k > 0$ , 则  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{k}{1 + 2k^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k} \cdot 2k}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,

当且仅当  $\frac{1}{k} = 2k$  即  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 等号成立,

所以当  $\alpha - \beta$  最大时,  $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 设直线  $AB: x = \sqrt{2}y + n$ ,

代入抛物线方程可得  $y^2 - 4\sqrt{2}y - 4n = 0$ ,

$\Delta > 0$ ,  $y_3 y_4 = -4n = 4y_1 y_2 = -16$ , 所以  $n = 4$ ,

所以直线  $AB: x = \sqrt{2}y + 4$ .

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是利用抛物线方程对斜率进行化简，利用韦达定理得出坐标间的关

系.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$  ( $t$  为参数), 曲线  $C_2$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = -\frac{2+s}{6} \\ y = -\sqrt{s} \end{cases}$$
 ( $s$  为参数).

(1) 写出  $C_1$  的普通方程;

(2) 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_3$  的极坐标方程为  $2\cos\theta - \sin\theta = 0$ ,

求  $C_3$  与  $C_1$  交点的直角坐标, 及  $C_3$  与  $C_2$  交点的直角坐标.

【答案】(1)  $y^2 = 6x - 2$  ( $y \geq 0$ );

(2)  $C_3, C_1$  的交点坐标为  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ,  $(1, 2)$ ,  $C_3, C_2$  的交点坐标为  $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ ,  $(-1, -2)$ .

【解析】

【分析】(1) 消去  $t$ , 即可得到  $C_1$  的普通方程;

(2) 将曲线  $C_2, C_3$  的方程化成普通方程, 联立求解即解出.

【小问 1 详解】

因为  $x = \frac{2+t}{6}$ ,  $y = \sqrt{t}$ , 所以  $x = \frac{2+y^2}{6}$ , 即  $C_1$  的普通方程为  $y^2 = 6x - 2$  ( $y \geq 0$ ).

【小问 2 详解】

因为  $x = -\frac{2+s}{6}$ ,  $y = -\sqrt{s}$ , 所以  $6x = -2 - y^2$ , 即  $C_2$  的普通方程为  $y^2 = -6x - 2$  ( $y \leq 0$ ),

由  $2\cos\theta - \sin\theta = 0 \Rightarrow 2\rho\cos\theta - \rho\sin\theta = 0$ , 即  $C_3$  的普通方程为  $2x - y = 0$ .

联立  $\begin{cases} y^2 = 6x - 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ , 解得:  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ , 即交点坐标为  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ,  $(1, 2)$ ;

联立  $\begin{cases} y^2 = -6x - 2 \quad (y \leq 0) \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ , 解得:  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ , 即交点坐标为  $(-\frac{1}{2}, -1)$ ,  $(-1, -2)$ .

### [选修 4-5: 不等式选讲]

23. 已知  $a, b, c$  均为正数, 且  $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$ , 证明:

$$(1) \ a + b + 2c \leq 3;$$

$$(2) \text{ 若 } b = 2c, \text{ 则 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3.$$

**【答案】**(1) 见解析      (2) 见解析

#### 【解析】

**【分析】**(1) 根据  $a^2 + b^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + (2c)^2$ , 利用柯西不等式即可得证;

(2) 由 (1) 结合已知可得  $0 < a + 4c \leq 3$ , 即可得到  $\frac{1}{a+4c} \geq \frac{1}{3}$ , 再根据权方和不等式即可得证.

#### 【小问 1 详解】

证明: 由柯西不等式有  $[a^2 + b^2 + (2c)^2] \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right) \geq (a + b + 2c)^2$ ,

所以  $a + b + 2c \leq 3$ ,

当且仅当  $a = b = 2c = 1$  时, 取等号,

所以  $a + b + 2c \leq 3$ ;

#### 【小问 2 详解】

证明: 因为  $b = 2c$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , 由 (1) 得  $a + b + 2c = a + 4c \leq 3$ ,

即  $0 < a + 4c \leq 3$ , 所以  $\frac{1}{a+4c} \geq \frac{1}{3}$ ,

由权方和不等式知  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{4c} \geq \frac{(1+2)^2}{a+4c} = \frac{9}{a+4c} \geq 3$ ,

当且仅当  $\frac{1}{a} = \frac{2}{4c}$ , 即  $a = 1$ ,  $c = \frac{1}{2}$  时取等号,

所以  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$ .

