

2011年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（文科）

本试题共4页，21小题，满分150分，考试用时120分钟。

- 注意事项：**
- 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
 - 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
 - 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
 - 作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题号对应的信息点，再作答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。
 - 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式：锥体体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 为锥体的底面积， h 为锥体的高。

$$\text{线性回归方程 } \hat{y} = \hat{b}x + \hat{a} \text{ 中系数计算公式 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x},$$

$$\text{样本数据 } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ 的标准差, } s = \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]},$$

其中 \bar{x} , \bar{y} 表示样本均值。

$$n \text{ 是正整数, 则 } a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，满分50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 z 满足 $iz = 1$ ，其中 i 为虚数单位，则 $z =$
- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

【解析】A. 由题得 $z = \frac{1}{i} = \frac{-i}{i \times (-i)} = -i$ 所以选A。

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } x + y = 1\}$,

- 则 $A \cap B$ 的元素个数为
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【解析】C. 方法一：由题得 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, $A \cap B = \{(x, y) | (1, 0), (0, 1)\}$, 所

以选C.

方法二：直接作出单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $x + y = 1$, 观察得两曲线有两个交点，所以选C.

3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 0)$, $\mathbf{c} = (3, 4)$. 若 λ 为实数, $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) // \mathbf{c}$, 则 $\lambda =$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

【解析】B. $\vec{a} + \lambda\vec{b} = (1, 2) + (\lambda, 0) = (1 + \lambda, 2)$, $\because (\vec{a} + \lambda\vec{b}) // \vec{c}$

$$\therefore (1 + \lambda) \times 4 - 2 \times 3 = 0 \quad \therefore \lambda = \frac{1}{2}$$

所以选B.

4. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \lg(1+x)$ 的定义域是

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

【解析】C. 由题得 $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \therefore x > -1 \text{ 且 } x \neq 1 \quad \therefore \text{函数的定义域为 } (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 所以选

C.

5. 不等式 $2x^2 - x - 1 > 0$ 的解集是

- A. $(-\frac{1}{2}, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

【解析】D. 由题得 $2x^2 - x - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(2x+1) > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 1$, 则不等式的解集为

$$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$$

6. 已知平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ y \leq 2 \\ x \leq \sqrt{2}y \end{cases}$ 给定. 若 $M(x, y)$ 为 D 上的动

点, 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$, 则 $z = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}$ 的最大值为

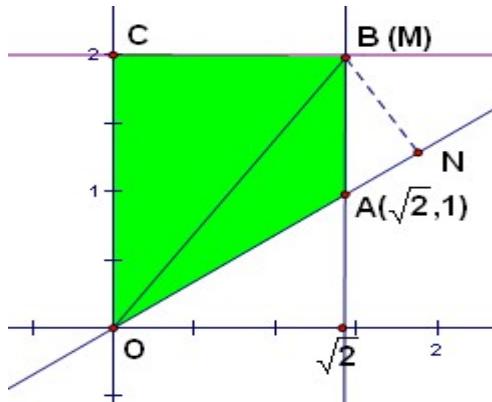
- A. 3 B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

【解析】B. 由题知不等式组表示的平面区域D是如图中的梯形OABC,

$z = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cos \angle AOM = \sqrt{3} |\overrightarrow{OM}| \cos \angle AOM = \sqrt{3} |\overrightarrow{ON}|$, 所以就是求 $|\overrightarrow{ON}|$

的最大值， $|\overrightarrow{ON}|$ 表示 \overrightarrow{OM} 在 \overrightarrow{OA} 方向上的投影，数形结合观察得当点M在点B的地方时， $|\overrightarrow{ON}|$ 才最大。

在 $\triangle AOM$ 中， $OA = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1} = \sqrt{3}$, $OB = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 4} = \sqrt{6}$, $AB = 2 - 1 = 1$, $\therefore \cos \angle AOM = \frac{\sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2 - 1^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, 所以 $z_{\max} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} = 4$, 所以选择B



7. 正五棱柱中，不同在任何侧面且不同在任何底面的两顶点的连线称为它的对角线，那么一个正五棱柱对角线的条数共有

- A. 20 B. 15 C. 12 D. 10

【解析】D 正五棱柱中，上底面中的每一个顶点均可与下底面中的两个顶点构成对角线，所以一个正五棱柱对角线的条数共有 $5 \times 2 = 10$ 条

8. 设圆C与圆 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 外切，与直线 $y=0$ 相切，则C的圆心轨迹为

- A. 抛物线 B. 双曲线 C. 椭圆 D. 圆

【解析】A. 设圆C圆心C(x, y)，半径为R, A(0, 3), 点C到直线y=0的距离为|CB|，由题得

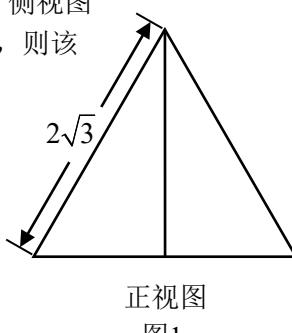
$$|CA| = R + 1 = y + 1 \quad \therefore \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 1 \quad \therefore y = \frac{1}{8}x^2 + 1, \text{ 所以圆C的圆心C轨迹是抛物线，}$$

所以选A.

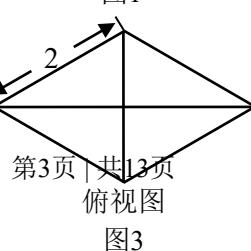
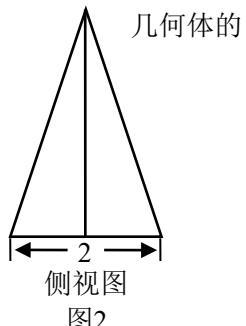
9. 如图1

3. 某几何体的正视图（主视图），侧视图是等边三角形，等腰三角形和菱形，则该体积为

- A. $4\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. 2



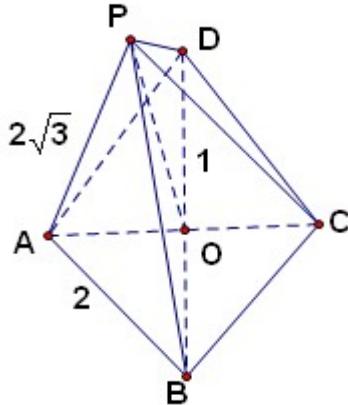
(左视图) 和俯视图分别



【解析】C. 由题得该几何体是如图所示的四棱锥P-ABCD，

$$AO = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}, \therefore \text{棱锥的高 } h = PO = \sqrt{2\sqrt{3}^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = 3 \quad \therefore V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times 2 \times 3 = 2\sqrt{3},$$

所以选择C.



10. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是 \mathbf{R} 上的任意实值函数, 如下定义两个函数 $(f \circ g)(x)$ 和 $(f \bullet g)(x)$: 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$; $(f \bullet g)(x) = f(x)g(x)$, 则下列等式恒成立的是

- A. $((f \circ g) \bullet h)(x) = ((f \bullet h) \circ (g \bullet h))(x)$
- B. $((f \bullet g) \circ h)(x) = ((f \circ h) \bullet (g \circ h))(x)$
- C. $((f \circ g) \circ h)(x) = ((f \circ g) \circ (g \circ h))(x)$
- D. $((f \bullet g) \bullet h)(x) = ((f \bullet g) \bullet (g \bullet h))(x)$

【解析】B. 对A选项 $((f \circ g) \bullet h)(x) = (f \circ g)(x)h(x) = f(g(x))h(x)$

$$\begin{aligned} ((f \bullet h) \circ (g \bullet h))(x) &= (f \bullet h)((g \bullet h)(x)) = (f \bullet h)((g(x) \bullet h(x))) \\ &= f(g(x) \bullet h(x))h(g(x) \bullet h(x)), \text{ 故排除A} \end{aligned}$$

对B选项 $((f \bullet g) \circ h)(x) = (f \bullet g)(h(x)) = f(h(x))g(h(x))$

$$((f \circ h) \bullet (g \circ h))(x) = (f \circ h)(x)(g \circ h)(x) = f(h(x))g(h(x)), \text{ 故选B}$$

对C选项 $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ (g \circ h))(x) &= (f \circ g)((g \circ h)(x)) = (f \circ g)(g(h(x))) \\ &= f(g(g(h(x)))), \text{ 故排除C} \end{aligned}$$

对D选项 $((f \bullet g) \bullet h)(x) = (f \bullet g)(x)h(x) = f(x)g(x)h(x)$

$$((f \bullet g) \bullet (g \bullet h))(x) = (f \bullet g)(x)(g \bullet h)(x) = f(x)g(x)g(x)h(x), \text{ 故排除D}$$

二、填空题: 本大题共5小题, 考生作答4小题, 每小题5分, 满分20分.

(一) 必做题(9 ~ 13题)

11. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 若 $a_2 = 2$, $a_4 - a_3 = 4$, 则此数列的公比 $q = \underline{\hspace{2cm}}$

【解析】2.

$$a_4 - a_3 = 4 \Rightarrow a_2 q^2 - a_2 q = 4 \Rightarrow 2q^2 - 2q - 4 = 0 \Rightarrow 2(q-2)(q+1) = 0 \Rightarrow q = 2 \text{ 或 } q = -1$$

$\because \{a_n\}$ 是递增的等比数列, $\therefore q = 2$

12. 设函数 $f(x) = x^3 \cos x + 1$. 若 $f(a) = 11$, 则 $f(-a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】-9

$$f(a) = a^3 \cos a + 1 = 11, \text{ 即 } f(a) = a^3 \cos a = 10,$$

$$\text{则 } f(-a) = (-a)^3 \cos(-a) + 1 = -a^3 \cos a + 1 = -10 + 1 = -9$$

13. 为了解篮球爱好者小李的投篮命中率与打篮球时间之间的关系, 下表记录了小李某月1号到5号每天打篮球时间 x (单位: 小时) 与当天投篮命中率 y 之间的关系:

| 时间 x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 命中率 y | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.6 | 0.4 |

小李这5天的平均投篮命中率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

; 用线性回归分析的方法, 预测小李该月6号打6小时篮球的投篮命中率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】0.5; 0.53 由题得小李这 5 天的平均投篮命中率为 $\frac{0.4 + 0.5 + 0.6 + 0.6 + 0.4}{5} = 0.5$

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3, \bar{y} = \frac{0.4+0.5+0.6+0.6+0.4}{5} = 0.5$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{(1-3)(0.4-0.5)+(2-3)(0.5-0.5)+(3-3)(0.6-0.5)+(4-3)(0.6-0.5)+(5-3)(0.4-0.5)}{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2} = 0.01$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 0.5 - 0.01 \cdot 3 = 0.47 \quad \therefore \hat{y} = \hat{b} x + \hat{a} = 0.01x + 0.47 \quad \therefore x=6 \text{ 时}, \hat{y}=0.01 \cdot 6 + 0.47=0.53$$

\therefore 第6个同学6号打篮球6个小时投篮的命中率为0.53.

(二) 选做题 (14 ~ 15题, 考生只能从中选做一题)

14. (坐标系与参数方程选做题) 已知两曲线参数方程分别为 $\begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta < \pi)$ 和

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4}t^2 \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbf{R}), \text{ 它们的交点坐标为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】 $(1, \frac{2\sqrt{5}}{5})$.

$$\begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \text{ 表示椭圆 } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 (-\sqrt{5} < x \leq \sqrt{5} \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1), \quad \begin{cases} x = \frac{5}{4}t^2 \\ y = t \end{cases} \text{ 表示抛物线}$$

$$y^2 = \frac{4}{5}x$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 (-\sqrt{5} < x \leq \sqrt{5} \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1) \\ y^2 = \frac{4}{5}x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ 或 } x = -5 \text{ (舍去)},$$

又因为 $0 \leq y \leq 1$, 所以它们的交点坐标为 $(1, \frac{2\sqrt{5}}{5})$

15. (几何证明选讲选做题) 如图4, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $CD = 2$, E, F 分别为 AD, BC 上的点, 且 $EF = 3$, $EF \parallel AB$, 则梯形 $ABFE$ 与梯形 $EFCD$ 的面积比为_____.

【解析】 $\frac{7}{5}$ 如图, 延长 AD, BC , $AD \cap BC = P$

$$\therefore \frac{CD}{EF} = \frac{2}{3}, \quad \therefore \frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle PEF}} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{2}{4}, \quad \therefore \frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle PEF}} = \frac{4}{16}$$

$$\therefore \frac{S_{\text{梯形}ABEF}}{S_{\text{梯形}EFCD}} = \frac{7}{5}$$

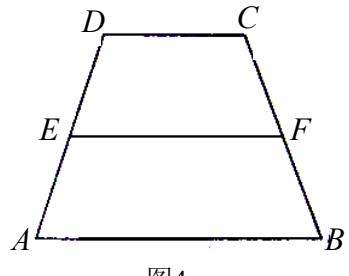
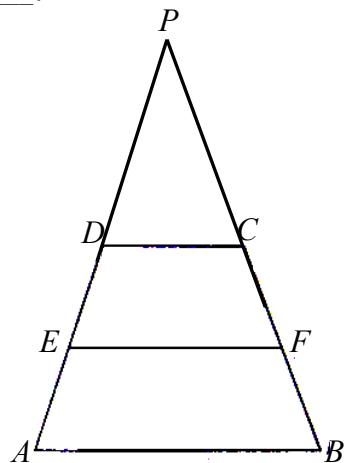


图4



三、解答题: 本大题共6小题, 满分80分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = 2 \sin(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6})$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(0)$ 的值;

(2) 设 $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(3\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{10}{13}$, $f(3\beta + 2\pi) = \frac{6}{5}$, 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值.

【解析】(1) $f(0) = 2 \sin(-\frac{\pi}{6}) = -1$

(2) $f(3\alpha + \frac{\pi}{2}) = 2 \sin[\frac{1}{3}(3\alpha + \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{6}] = 2 \sin \alpha = \frac{10}{13}$, 即 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

$f(3\beta + 2\pi) = 2 \sin[\frac{1}{3}(3\beta + 2\pi) - \frac{\pi}{6}] = 2 \sin(\beta + \frac{\pi}{2}) = \frac{6}{5}$, 即 $\cos \beta = \frac{3}{5}$

$\therefore \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{12}{13}$, $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} + \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{63}{65}$

17. (本小题满分13分)

在某次测验中, 有6位同学的平均成绩为75分. 用 x_n 表示编号为 n ($n=1, 2, \dots, 6$) 的同学所得成绩, 且前5位同学的成绩如下:

| 编号 n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|----|----|----|----|----|
| 成绩 x_n | 70 | 76 | 72 | 70 | 72 |

(1) 求第6位同学的成绩 x_6 , 及这6位同学成绩的标准差 s ;

(2) 从前5位同学中, 随机地选2位同学, 求恰有1位同学成绩在区间 (68, 75) 中的概率.

【解析】(1) $\frac{1}{6}(70 + 76 + 72 + 70 + 72 + x_6) = 75$, 解得 $x_6 = 90$

标准差 $s = \sqrt{\frac{1}{6}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_6 - \bar{x})^2]} = \sqrt{\frac{1}{6}(5^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + 3^2 + 15^2)} = 7$

(2) 前5位同学中随机选出的2位同学记为 (a, b) , $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 且 $a \neq b$

则基本事件有 $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$

共10种

这5位同学中, 编号为1、3、4、5号的同学成绩在区间 (68, 75) 中

设A表示随机事件“从前5位同学中随机选出2位同学, 恰有1位同学成绩在区间 (68, 75) 中”

则A中的基本事件有 $(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)$ 共4种, 则 $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

18. (本小题满分13分)

图5所示的几何体是将高为2, 底面半径为1的直圆柱沿过轴的平面切开后, 将其中一半沿切面向右水平平移后得到的. A, A', B, B' 分别为 $\widehat{CD}, \widehat{C'D'}, \widehat{DE}, \widehat{D'E'}$ 的中点, O_1, O'_1, O_2, O'_2 分别为 $CD, C'D', DE, D'E'$ 的中点.

(1) 证明: O'_1, A', O_2, B 四点共面;

(2) 设 G 为 AA' 中点, 延长 $A'O_1'$ 到 H' , 使得 $O_1'H' = A'O_1'$. 证明: BO_2' \perp 平面 $H'B'G$

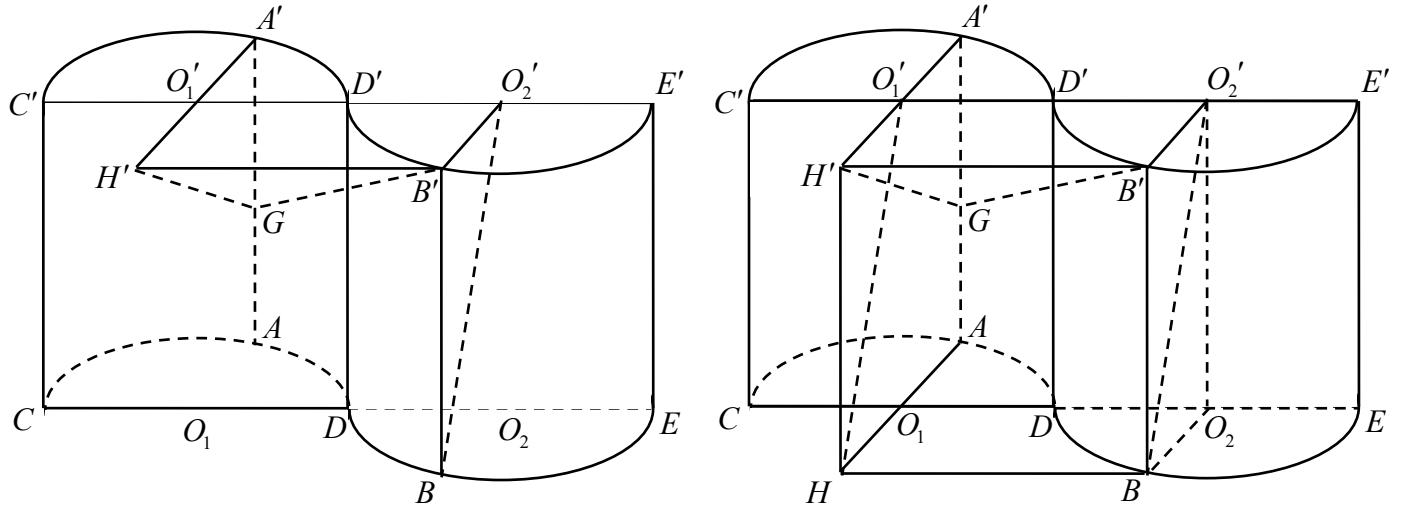


图5

【解析】 证明: (1) 连接 BO_2, O_2O_2' ,

依题意得 O_1, O_1', O_2, O_2' 是圆柱底面圆的圆心

$\therefore CD, C'D', DE, D'E'$ 是圆柱底面圆的直径

$\because A', B, B'$ 分别为 $\widehat{C'D'}, \widehat{DE}, \widehat{D'E'}$ 的中点

$\therefore \angle A'O_1'D' = \angle B'O_2'D' = 90^\circ$

$\therefore A'O_1' \parallel BO_2'$

$\because BB' \underline{\underline{\parallel}} O_2O_2'$, 四边形 $O_2O_2'B'B$ 是平行四边形

$\therefore BO_2 \parallel BO_2'$

$\therefore A'O_1' \parallel BO_2$

$\therefore O_1', A', O_2, B$ 四点共面

(2) 延长 $A'O_1$ 到 H , 使得 $O_1'H = A'O_1'$, 连接 HH', HO_1', HB

$\because O_1'H' = A'O_1'$

$\therefore O_1'H' \underline{\underline{\parallel}} O_2'B'$, 四边形 $O_1'O_2'B'H'$ 是平行四边形

$$\therefore O_1' O_2' \parallel H'B'$$

$$\because O_1' O_2' \perp O_2 O_2', \quad O_1' O_2' \perp B' O_2', \quad O_2 O_2' \cap B' O_2' = O_2'$$

$$\therefore O_1' O_2' \perp \text{面 } O_2 O_2' B' B$$

$$\therefore H'B' \perp \text{面 } O_2 O_2' B' B, \quad BO_2' \subset \text{面 } O_2 O_2' B' B$$

$$\therefore BO_2' \perp H'B'$$

易知四边形 $AA'H'H$ 是正方形，且边长 $AA' = 2$

$$\because \tan \angle HO_1'H' = \frac{HH'}{O_1'H'} = 2, \quad \tan \angle A'H'G = \frac{A'G}{A'H'} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \angle HO_1'H' \cdot \tan \angle A'H'G = 1$$

$$\therefore \angle HO_1'H' + \angle A'H'G = 90^\circ$$

$$\therefore HO_1' \perp H'G$$

易知 $O_1' O_2' \parallel HB$ ，四边形 $O_1' O_2' BH$ 是平行四边形

$$\therefore BO_2' \parallel HO_1'$$

$$\therefore BO_2' \perp H'G, \quad H'G \cap H'B' = H'$$

$$\therefore BO_2' \perp \text{平面 } H'B'G.$$

19. (本小题满分14分)

设 $a > 0$ ，讨论函数 $f(x) = \ln x + a(1-a)x^2 - 2(1-a)x$ 的单调性.

【解析】解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2a(1-a)x - 2(1-a) = \frac{2a(1-a)x^2 - 2(1-a)x + 1}{x}$$

$$\text{令 } g(x) = 2a(1-a)x^2 - 2(1-a)x + 1$$

$$\Delta = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 12a^2 - 16a + 4 = 4(3a-1)(a-1)$$

$$\textcircled{1} \quad \text{当 } 0 < a < \frac{1}{3} \text{ 时, } \Delta > 0, \quad \text{令 } f'(x) = 0, \quad \text{解得 } x = \frac{1-a \pm \sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$$

则当 $0 < x < \frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$ 或 $x > \frac{1-a+\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$ 时, $f'(x) > 0$

当 $\frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)} < x < \frac{1-a+\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$ 时, $f'(x) < 0$

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)})$, $(\frac{1-a+\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(\frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}, \frac{1-a+\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)})$ 上单调递减

② 当 $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ 时, $\Delta \leq 0$, $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

③ 当 $a > 1$ 时, $\Delta > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1-a \pm \sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$

$$\because x > 0, \therefore x = \frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$$

则当 $0 < x < \frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$ 时, $f'(x) > 0$

当 $x > \frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$ 时, $f'(x) < 0$

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}, +\infty)$ 上单

调递减

20. (本小题满分14分)

设 $b > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = b$, $a_n = \frac{nba_{n-1}}{a_{n-1} + n - 1}$ ($n \geq 2$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对于一切正整数 n , $2a_n \leq b^{n+1} + 1$.

【解析】 (1) 解: $\because a_n = \frac{nba_{n-1}}{a_{n-1} + n - 1}$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = \frac{ba_{n-1}}{a_{n-1} + n - 1}$$

$$\therefore \frac{n}{a_n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b}$$

① 当 $b=1$ 时, $\frac{n}{a_n} - \frac{n-1}{a_{n-1}} = 1$, 则 $\{\frac{n}{a_n}\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列

$$\therefore \frac{n}{a_n} = 1 + (n-1) \times 1 = n, \text{ 即 } a_n = 1$$

$$② \text{ 当 } b > 0 \text{ 且 } b \neq 1 \text{ 时, } \frac{n}{a_n} + \frac{1}{1-b} = \frac{1}{b} \left(\frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{1}{1-b} \right)$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } \frac{n}{a_n} + \frac{1}{1-b} = \frac{1}{b(1-b)}$$

$\therefore \{\frac{n}{a_n} + \frac{1}{1-b}\}$ 是以 $\frac{1}{b(1-b)}$ 为首项, $\frac{1}{b}$ 为公比的等比数列

$$\therefore \frac{n}{a_n} + \frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-b} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n$$

$$\therefore \frac{n}{a_n} = \frac{1}{(1-b)b^n} - \frac{1}{1-b} = \frac{1-b^n}{(1-b)b^n}$$

$$\therefore a_n = \frac{n(1-b)b^n}{1-b^n}$$

$$\text{综上所述 } a_n = \begin{cases} \frac{n(1-b)b^n}{1-b^n}, & b > 0 \text{ 且 } b \neq 1 \\ 1, & b = 1 \end{cases}$$

(2) 证明: ① 当 $b=1$ 时, $2a_n = b^{n+1} + 1 = 2$;

② 当 $b > 0$ 且 $b \neq 1$ 时, $1-b^n = (1-b)(1+b+\dots+b^{n-2}+b^{n-1})$

要证 $2a_n \leq b^{n+1} + 1$, 只需证 $\frac{2n(1-b)b^n}{1-b^n} \leq b^{n+1} + 1$,

即证 $\frac{2n(1-b)}{1-b^n} \leq b + \frac{1}{b^n}$

即证 $\frac{2n}{1+b+\dots+b^{n-2}+b^{n-1}} \leq b + \frac{1}{b^n}$

即证 $(b + \frac{1}{b^n})(1+b+\dots+b^{n-2}+b^{n-1}) \geq 2n$

$$\begin{aligned}
& \text{即证 } (b+b^2+\cdots+b^{n-1}+b^n)+\left(\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b}\right) \geq 2n \\
& \because (b+b^2+\cdots+b^{n-1}+b^n)+\left(\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b}\right) \\
& = (b+\frac{1}{b})+(b^2+\frac{1}{b^2})+\cdots+(b^{n-1}+\frac{1}{b^{n-1}})+(b^n+\frac{1}{b^n}) \\
& \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} + \cdots + 2\sqrt{b^{n-1} \cdot \frac{1}{b^{n-1}}} + 2\sqrt{b^n \cdot \frac{1}{b^n}} = 2n, \therefore \text{原不等式成立}
\end{aligned}$$

\therefore 对于一切正整数 n , $2a_n \leq b^{n+1} + 1$.

21. (本小题满分14分)

- 在平面直角坐标系 xOy 上, 直线 $l: x = -2$ 交 x 轴于点 A . 设 P 是 l 上一点, M 是线段 OP 的垂直平分线上一点, 且满足 $\angle MPO = \angle AOP$.
- (1) 当点 P 在 l 上运动时, 求点 M 的轨迹 E 的方程;
 - (2) 已知 $T(1, -1)$, 设 H 是 E 上动点, 求 $|HO| + |HT|$ 的最小值, 并给出此时点 H 的坐标;
 - (3) 过点 $T(1, -1)$ 且不平行于 y 轴的直线 l_1 与轨迹 E 有且只有两个不同的交点, 求直线 l_1 的斜率 k 的取值范围.

【解析】解: (1) 如图所示, 连接 OM , 则 $|PM| = |OM|$

$$\because \angle MPO = \angle AOP,$$

\therefore 动点 M 满足 $MP \perp l$ 或 M 在 x 的负半轴上, 设 $M(x, y)$

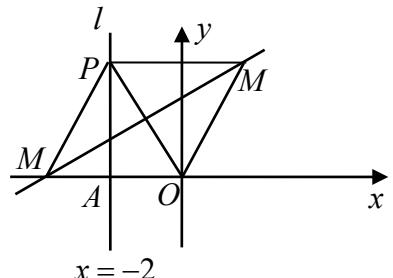
$$\textcircled{1} \quad \text{当 } MP \perp l \text{ 时, } |MP| = |x + 2|, |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|x + 2| = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ 化简得 } y^2 = 4x + 4 (x \geq -1)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{当 } M \text{ 在 } x \text{ 的负半轴上时, } y = 0 (x < -1)$$

综上所述, 点 M 的轨迹 E 的方程为 $y^2 = 4x + 4 (x \geq -1)$ 或 $y = 0 (x < -1)$

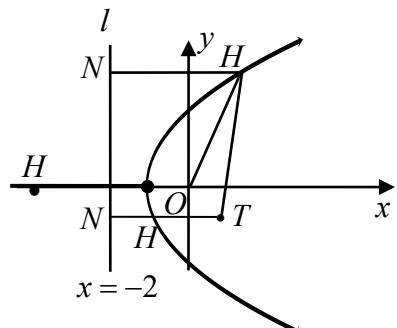
- (2) 由 (1) 知 M 的轨迹是顶点为 $(-1, 0)$, 焦点为原点的抛物线和 x 的负半轴 $y = 0 (x < -1)$



$$\text{由于 } l \text{ 是抛物线的准线, 根据抛物线的定义有 } |HO| = |HN|$$

$$\text{则 } |HO| + |HT| = |HN| + |HT|$$

当 N, H, T 三点共线时, $|HN| + |HT|$ 有最小值 $|TN| = 3$



求得此时 H 的坐标为 $(-\frac{3}{4}, -1)$

② 若 H 是 x 的负半轴 $y = 0 (x < -1)$ 上的动点

显然有 $|HO| + |HT| > 3$

综上所述, $|HO| + |HT|$ 的最小值为 3, 此时点 H 的坐标为 $(-\frac{3}{4}, -1)$

(3) 如图, 设抛物线顶点 $A(-1, 0)$, 则直线 AT 的斜率 $k_{AT} = -\frac{1}{2}$

\because 点 $T(1, -1)$ 在抛物线内部,

\therefore 过点 T 且不平行于 x, y 轴的直线 l_1 必与抛物线有两个交点

则直线 l_1 与轨迹 E 的交点个数分以下四种情况讨论:

① 当 $k \leq -\frac{1}{2}$ 时, 直线 l_1 与轨迹 E 有且只有两个不同的交点

② 当 $-\frac{1}{2} < k < 0$ 时, 直线 l_1 与轨迹 E 有且只有三个不同的交点

③ 当 $k = 0$ 时, 直线 l_1 与轨迹 E 有且只有一个交点

④ 当 $k > 0$ 时, 直线 l_1 与轨迹 E 有且只有两个不同的交点

综上所述, 直线 l_1 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, +\infty)$

