

2011 年江西高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上，考生要认真核对答题卡粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第 II 卷用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效。
3. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回。

参考公式：

样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的回归方程： $y = a + bx$

$$\text{其中 } b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

锥体体积公式

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 为底面积， h 为高

第 I 卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $(x - i)i = y + 2i, x, y \in R$ ，则复数 $x + yi =$ ()

- A. $-2+i$ B. $2+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

2. 若全集 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, $M = \{2,3\}$, $N = \{1,4\}$, 则集合 $\{5,6\}$ 等于 ()

- A. $M \cup N$ B. $M \cap N$ C. $(C_U M) \cup (C_U N)$ D. $(C_U M) \cap (C_U N)$

3. 若 $f(x) = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}$, 则 $f(x)$ 的定义域为 ()

- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\frac{1}{2}, 2)$

4. 曲线 $y = e^x$ 在点 A $(0, 1)$ 处的切线斜率为 ()

- A. 1 B. 2 C. e D. $\frac{1}{e}$

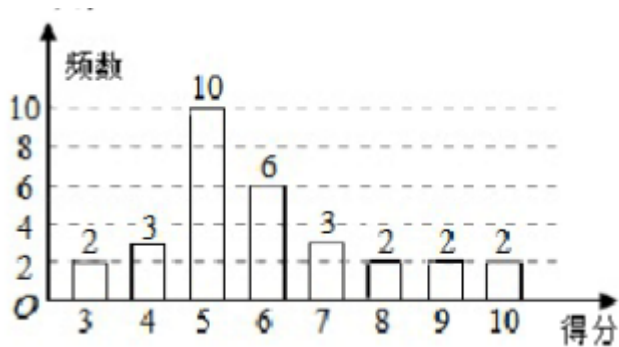
5. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差 $d = -2$, S_n 为其前 n 项和. 若 $S_{10} = S_{11}$, 则 $a_1 =$ ()

- A. 18 B. 20 C. 22 D. 24

6. 观察下列各式: 则 $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, \dots , 则 7^{2011} 的末两位数字为 ()

- A. 01 B. 43 C. 07 D. 49

7. 为了普及环保知识, 增强环保意识, 某大学随即抽取 30 名学生参加环保知识测试, 得分 (十分制) 如图所示, 假设得分值的中位数为 m_e , 众数为 m_o , 平均值为 \bar{x} , 则 ()



- A. $m_e = m_o = \bar{x}$ B. $m_e = m_o < \bar{x}$ C. $m_e < m_o < \bar{x}$ D. $m_o < m_e < \bar{x}$

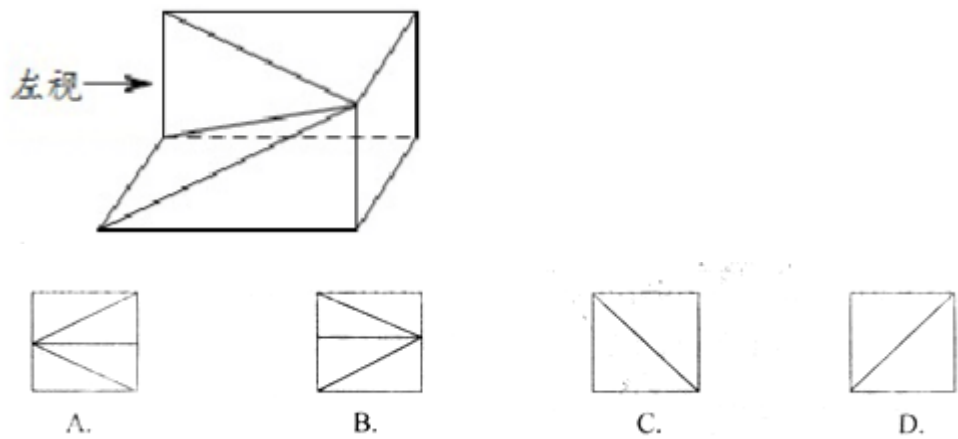
8. 为了解儿子身高与其父亲身高的关系, 随机抽取 5 对父子的身高数据如下:

父亲身高 x (cm)	174	176	176	176	178
儿子身高 y (cm)	175	175	176	177	177

则 y 对 x 的线性回归方程为

- A. $y = x - 1$ B. $y = x + 1$ C. $y = 88 + \frac{1}{2}x$ D. $y = 176$

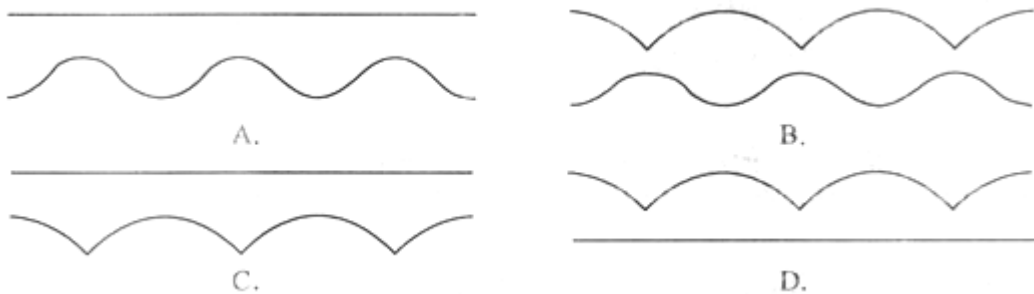
9. 将长方体截去一个四棱锥，得到的几何体如右图所示，则该几何体的左视图为（ ）



10. 如图，一个“凸轮”放置于直角坐标系 x 轴上方，其“底端”落在原点 O 处，一顶点及中心 M 在 y 轴正半轴上，它的外围由以正三角形的顶点为圆心，以正三角形的边长为半径的三段等弧组成。



今使“凸轮”沿 x 轴正向滚动前进，在滚动过程中“凸轮”每时每刻都有一个“最高点”，其中心也在不断移动位置，则在“凸轮”滚动一周的过程中，将其“最高点”和“中心点”所形成的图形按上、下放置，应大致为（ ）



第 II 卷

注意事项：

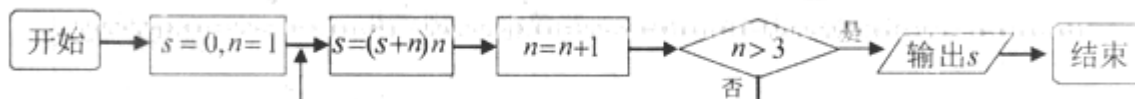
第 II 卷 2 页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效。

二. 填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知两个单位向量 \vec{e}_1 , \vec{e}_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 若向量 $\vec{b}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, 则 $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 =$ ____.

12. 若双曲线 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{m} = 1$ 的离心率 $e=2$, 则 $m=$ ____.

13. 下图是某算法的程序框图, 则程序运行后输出的结果是 ____.



14. 已知角 θ 的顶点为坐标原点, 始边为 x 轴的正半轴, 若 $p(4, y)$ 是角 θ 终边上一点, 且 $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

则 $y=$ ____.

15. 对于 $x \in R$, 不等式 $|x + 10| - |x - 2| \geq 8$ 的解集为 ____

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 12 分)

某饮料公司对一名员工进行测试以便确定其考评级别。公司准备了两种不同的饮料共 5

杯, 其颜色完全相同, 并且其中 3 杯为 A 饮料, 另外 2 杯为 B 饮料, 公司要求此员工

一一品尝后，从 5 杯饮料中选出 3 杯 A 饮料．若该员工 3 杯都选对，则评为优秀；若 3 杯选对 2 杯，则评为良好；否则评为及格．假设此人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力．

- (1) 求此人被评为优秀的概率；
- (2) 求此人被评为良好及以上的概率．

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中， A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，已知 $3a \cos A = c \cos B + b \cos C$ ．

- (1) 求 $\cos A$ 的值；
- (2) 若 $a = 1, \cos B + \cos C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，求边 c 的值．

18. (本小题满分 12 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = BC = 2$ ， P 为 AB 边上一动点， $PD \parallel BC$ 交 AC 于点 D ，现将 $\triangle PDA$ 沿 PD 翻折至 $\triangle PDA'$ ，使平面 $PDA' \perp$ 平面 $PBCD$ ．

- (1) 当棱锥 $A' - PBCD$ 的体积最大时，求 PA 的长；
- (2) 若点 P 为 AB 的中点， E 为 $A'C$ 的中点，求证： $A'B \perp DE$ ．

19. (本小题满分 12 分)

已知过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线交抛物线于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) 两点，且 $|AB| = 9$.

(1) 求该抛物线的方程；

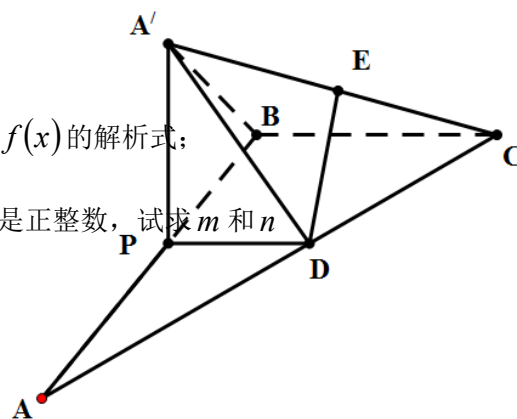
(2) O 为坐标原点， C 为抛物线上一点，若 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$ ，求 λ 的值.

20. (本小题满分 13 分)

设 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx$.

(1) 如果 $g(x) = f'(x) - 2x - 3$ 在 $x = -2$ 处取得最小值 -5 ，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 如果 $m + n < 10 (m, n \in \mathbb{N}_+)$ ， $f(x)$ 的单调递减区间的长度是正整数，试求 m 和 n 的值. (注：区间 (a, b) 的长度为 $b - a$)



21. (本小题满分 14 分)

(1) 已知两个等比数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，满足 $a_1 = a (a > 0), b_1 - a_1 = 1, b_2 - a_2 = 2, b_3 - a_3 = 3$,

若数列 $\{a_n\}$ 唯一，求 a 的值；

- (2) 是否存在两个等比数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，使得 $b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, b_4 - a_4$ 成公差 不为 0 的等差数列？若存在，求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式；若 不存在，说明理由。

2011 年江西高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上，考生要认真核对答题卡粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第 II 卷用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效。
3. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回。

参考公式：

样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的回归方程： $y = a + bx$

$$\text{其中 } b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

锥体体积公式

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 为底面积， h 为高

第 I 卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若 $(x-i)i = y+2i, x, y \in R$ ，则复数 $x+yi =$ ()

- A. $-2+i$ B. $2+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

答案：B

$$\because (x-i)i = y+2i, xi - i^2 = y+2i$$

解析： $\therefore y=1, x=2$

$$\therefore x+yi = 2+i$$

2. 若全集 $U = \{1,2,3,4,5,6\}, M = \{2,3\}, N = \{1,4\}$ ，则集合 $\{5,6\}$ 等于 ()

- A. $M \cup N$ B. $M \cap N$ C. $(C_U M) \cup (C_U N)$ D. $(C_U M) \cap (C_U N)$

答案：D

解析： $M \cup N = \{1,2,3,4\}, M \cap N = \Phi, (C_U M) \cup (C_U N) = \{1,2,3,4,5,6\}, (C_U M) \cap (C_U N) = \{5,6\}$

4. 若 $f(x) = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 ()

- B. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\frac{1}{2}, 2)$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) \neq 0, \therefore 2x+1 > 0, 2x+1 \neq 1$$

答案：C 解析：

$$\therefore x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$$

4. 曲线 $y = e^x$ 在点 A (0, 1) 处的切线斜率为 ()

- A. 1 B. 2 C. e D. $\frac{1}{e}$

答案：A 解析： $y' = e^x, x=0, e^0 = 1$

5. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d = -2$ ， S_n 为其前 n 项和. 若 $S_{10} = S_{11}$ ，则 $a_1 =$ ()

- A. 18 B. 20 C. 22 D. 24

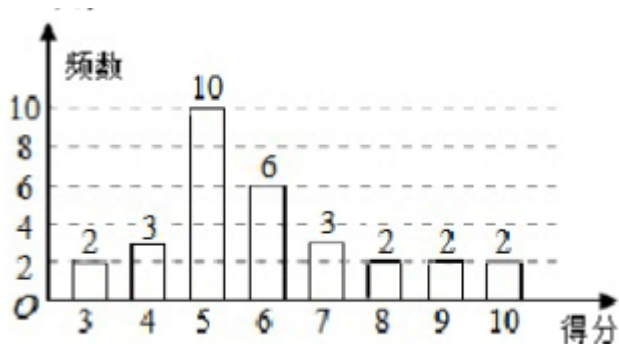
答案: B 解析: $\because S_{10} = S_{11}, \therefore a_{11} = 0$
 $a_{11} = a_1 + 10d, \therefore a_1 = 20$

6. 观察下列各式: 则 $7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401, \dots$, 则 7^{2011} 的末两位数字为 ()

A. 01 B. 43 C. 07 D. 49

答案: B 解析: $\because f(x) = 7^x, f(2) = 49, f(3) = 343, f(4) = 2401, f(5) = 16807$
 $2011 - 2 = 2009, \therefore f(2011) = ***343$

7. 为了普及环保知识, 增强环保意识, 某大学随即抽取 30 名学生参加环保知识测试, 得分 (十分制) 如图所示, 假设得分值的中位数为 m_e , 众数为 m_o , 平均值为 \bar{x} , 则 ()



A. $m_e = m_o = \bar{x}$ B. $m_e = m_o < \bar{x}$ C. $m_e < m_o < \bar{x}$ D. $m_o < m_e < \bar{x}$

答案: D 计算可以得知, 中位数为 5.5, 众数为 5 所以选 D

8. 为了解儿子身高与其父亲身高的关系, 随机抽取 5 对父子的身高数据如下:

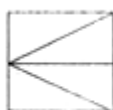
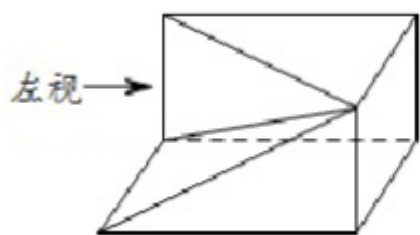
父亲身高 x (cm)	174	176	176	176	178
儿子身高 y (cm)	175	175	176	177	177

则 y 对 x 的线性回归方程为

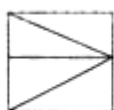
A. $y = x - 1$ B. $y = x + 1$ C. $y = 88 + \frac{1}{2}x$ D. $y = 176$

C 线性回归方程 $y = a + bx$, $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $a = \bar{y} - b\bar{x}$

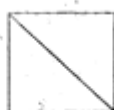
9. 将长方体截去一个四棱锥，得到的几何体如右图所示，则该几何体的左视图为（ ）



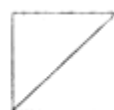
A.



B.

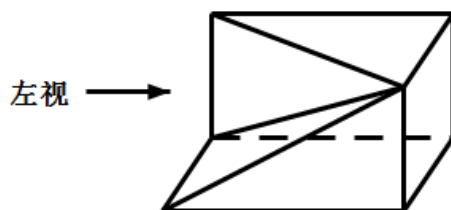
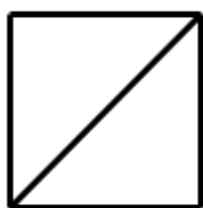


C.



D.

答案：D 左视图即是从正左方看，找特殊位置的可视点，连起来就可以得到答案。

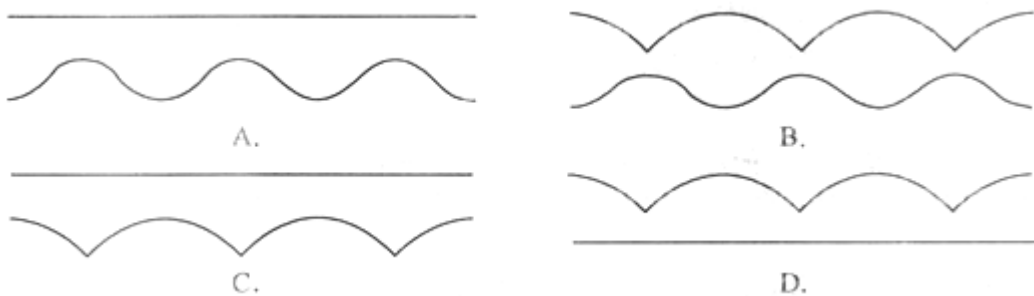


10. 如图，一个“凸轮”放置于直角坐标系 X 轴上方，其底面与 X 轴相切于点 O ，顶点及

中心 M 在 Y 轴正半轴上，它的外围由以正三角形的顶点为圆心，以正三角形的边长为半径的三段等弧组成。



今使“凸轮”沿 X 轴正向滚动前进，在滚动过程中“凸轮”每时每刻都有一个“最高点”，其中心也在不断移动位置，则在“凸轮”滚动一周的过程中，将其“最高点”和“中心点”所形成的图形按上、下放置，应大致为（ ）



答案：A 根据中心 M 的位置，可以知道中心并非是出于最低与最高中间的位置，而是稍微偏上，随着转动，M 的位置会先变高，当 C 到底时，M 最高，排除 CD 选项，而对于最高点，当 M 最高时，最高点的高度应该与旋转开始前相同，因此排除 B，选 A。

第 II 卷

注意事项：

第 II 卷 2 页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效。

二. 填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

12、11. 已知两个单位向量 \vec{e}_1 ， \vec{e}_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，若向量 $\vec{b}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ ， $\vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ ，则 $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案：-6. 解析：要求 $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2$ ，只需将题目已知条件带入，得：

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \cdot (3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) = 3|\vec{e}_1|^2 - 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - 8|\vec{e}_2|^2$$

$$\text{其中 } |\vec{e}_1|^2 = 1, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, |\vec{e}_2|^2 = 1,$$

$$\text{带入，原式} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot 1 = -6$$

(PS：这道题是道基础题，在我们做过的高考题中 2007 年广东文科的第四题，以及寒假题海班文科讲义 73

页的第十题，几乎是原题。考查的就是向量的基本运算。送分题(*^__^*))

13. 若双曲线 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{m} = 1$ 的离心率 $e=2$ ，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

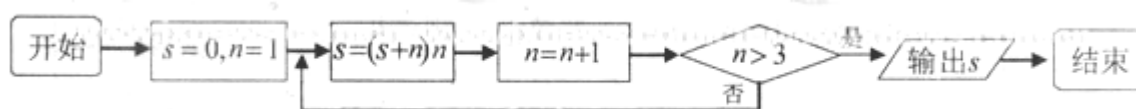
答案：48. 解析：根据双曲线方程： $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 知，

$$a^2 = 16, b^2 = m, \text{ 并在双曲线中有: } a^2 + b^2 = c^2, \therefore \text{离心率 } e = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 4 = \frac{16+m}{16},$$

$$\Rightarrow m = 48$$

(PS: 这道题虽然考的是解析几何，大家印象中的解几题感觉都很难，但此题是个灰常轻松得分题(～o～)zZ。你只需知道解几的一些基本定义，并且计算也不复杂。在 2008 年安徽文科的第 14 题以及 2009 福建文科的第 4 题，同时在我们寒假题海班讲义文科教材第 145 页的第 3 题，寒假理科教材第 149 页第 30 题都反复训练过。o(∩_∩)o。。所谓认真听课，勤做笔记，有的就是这个效果!!)

13. 下图是某算法的程序框图，则程序运行后输出的结果是_____.



答案：27. 解析：由框图的顺序， $s=0, n=1, s=(s+n)n=(0+1)*1=1, n=n+1=2$, 依次循环

$$S=(1+2)*2=6, n=3, \text{ 注意此刻 } 3>3 \text{ 仍然是否, 所以还要循环一次}$$

$$s=(6+3)*3=27, n=4, \text{ 此刻输出, } s=27.$$

(PS: 程序框图的题一直是大家的青睐，就是一个循环计算的过程。2010 天津文科卷的第 3 题，考题与此类似。在我们寒假文科讲义 117 页的第 2 题做过与此非常类似的，无非更改些数字。基础是关键!)

15. 已知角 θ 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴的正半轴，若 $p(4, y)$ 是角 θ 终边上一点，且 $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

则 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案：-8. 解析：根据正弦值为负数，判断角在第三、四象限，再加上横坐标为正，断定该角为第

$$\text{四象限角。} \sin \theta = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{y}{\sqrt{16+y^2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y = -8$$

(PS:大家可以看到，步骤越来越少，不就意味着题也越来越简单吗？并且此题在我们春季班教材3第10页的第5题，出现了一模一样。怎么能说高考题是难题偏题。)

15. 对于 $x \in R$ ，不等式 $|x+10|-|x-2| \geq 8$ 的解集为_____

答案： $\{x|x \geq 0\}$ 解析：两种方法，方法一：分三段，

$$\text{当 } x < -10 \text{ 时,} \quad -x-10+x-2 \geq 8, \quad \phi$$

$$\text{当 } -10 \leq x \leq 2 \text{ 时,} \quad x+10-x+2 \geq 8, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时,} \quad x+10-x+2 \geq 8, \quad x > 2$$

\therefore 综上： $x \geq 0$

方法二：用绝对值的几何意义，可以看成到两点-10和2的距离差大于等于8的所有点的集合，画出数轴线，找到0到-10的距离为 $d_1 = 10$ ，到2的距离为 $d_2 = 2$ ， $d_1 - d_2 = 8$ ，并当 x 往右移动，距离差会大于8，所以满足条件的 x 的范围是 $x \geq 0$ 。

(PS：此题竟出现在填空的最后一道压轴题，不知道神马情况。。。。更加肯定考试考的都是基础，并且!! 在我们除夕班的时候讲过一道一模一样的，只是换了数字而已的题型，在除夕教材第10页的15题。。太强悍啦!! 几乎每道都是咱上课讲过的题目~~所以，亲爱的童鞋们，现在的你上课还在聊Q，睡觉流口水吗??)

三.解答题：本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分12分)

某饮料公司对一名员工进行测试以便确定其考评级别。公司准备了两种不同的饮料共5杯，其颜色完全相同，并且其中3杯为A饮料，另外2杯为B饮料，公司要求此员工一一品尝后，从5杯饮料中选出3杯A饮料。若该员工3杯都选对，则评为优秀；若3

杯选对 2 杯，则评为良好；否则评为及格．假设此人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力．

(3) 求此人被评为优秀的概率；

(4) 求此人被评为良好及以上的概率．

解：(1) 员工选择的所有种类为 C_5^3 ，而 3 杯均选中共有 C_3^3 种，故概率为 $\frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$ ．

(2) 员工选择的所有种类为 C_5^3 ，良好以上有两种可能①：3 杯均选中共有 C_3^3 种；

②：3 杯选中 2 杯共有 $C_3^2 C_2^1$ 种．故概率为 $\frac{C_3^3 + C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{7}{10}$ ．

解析：本题考查的主要知识是排列组合与概率知识的结合，简单题。

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中， A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，已知 $3a \cos A = c \cos B + b \cos C$ ．

(1) 求 $\cos A$ 的值；

(2) 若 $a = 1, \cos B + \cos C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，求边 c 的值．

解：(1) 由 $3a \cos A = c \cos B + b \cos C$ 正弦定理得：

$$3 \sin A \cos A = \sin C \cos B + \sin B \cos C = \sin(B + C)$$

及： $3 \sin A \cos A = \sin A$ 所以 $\cos A = \frac{1}{3}$ 。

(2) 由 $\cos B + \cos C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cos(\pi - A - C) + \cos C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 展开易得：

$$\cos C + \sqrt{2} \sin C = \sqrt{3} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

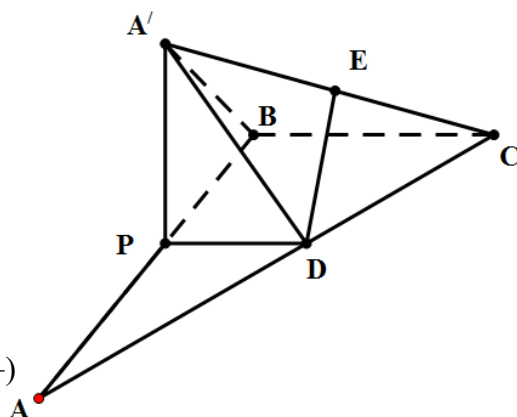
正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 本题考查的主要知识三角函数及解三角形问题，题目偏难。第一问主要涉及到正弦定理、诱导公式及三角形内角和为 180° 这两个知识点的考查属于一般难度；第二问同样是对正弦定理和诱导公式的考查但形势更为复杂。

18. (本小题满分 12 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = BC = 2$ ， P 为 AB 边上一动点， $PD \parallel BC$ 交 AC 于点 D ，现将 $\triangle PDA$ 沿 PD 翻折至 $\triangle PDA'$ ，使平面 $PDA' \perp$ 平面 $PBCD$ 。

- (1) 当棱锥 $A' - PBCD$ 的体积最大时，求 PA 的长；
- (2) 若点 P 为 AB 的中点， E 为 $A'C$ 的中点，求证： $A'B \perp DE$ 。



解：(1) 设 $PA = x$ ，则 $V_{A' - PBCD} = \frac{1}{3} PA \cdot S_{\text{底面}PDCB} = \frac{1}{3} x (2 - \frac{x^2}{x})$

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{3} x (2 - \frac{x^2}{2}) = \frac{2x}{3} - \frac{x^3}{6}, (x > 0)$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{2}{3} - \frac{x^2}{2}$$

x	$(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	
$f(x)$	单调递增	极大值	

由上表易知：当 $PA = x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，有 $V_{A'-PBCD}$ 取最大值。

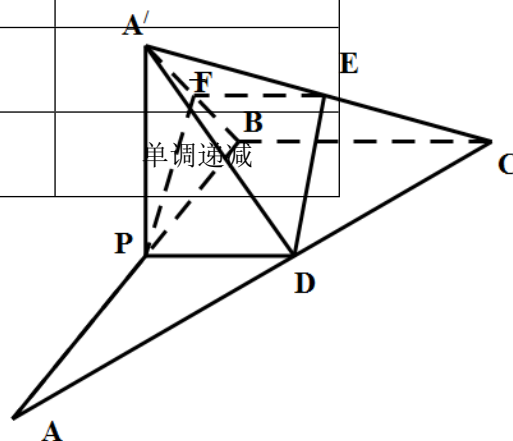
证明：

(2) 作 $A'B$ 得中点 F，连接 EF、FP

由已知得： $EF \parallel \frac{1}{2}BC \parallel PD \Rightarrow ED \parallel FP$

$\triangle A'PB$ 为等腰直角三角形， $A'B \perp PF$

所以 $A'B \perp DE$.



已知过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线交抛物线于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

($x_1 < x_2$) 两点，且 $|AB| = 9$ 。

(1) 求该抛物线的方程；

(2) O 为坐标原点， C 为抛物线上一点，若 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$ ，求 λ 的值。

解析：(1) 直线 AB 的方程是 $y = 2\sqrt{2}(x - \frac{p}{2})$ ，与 $y^2 = 2px$ 联立，从而有 $4x^2 - 5px + p^2 = 0$ ，

所以： $x_1 + x_2 = \frac{5p}{4}$ ，由抛物线定义得： $|AB| = x_1 + x_2 + p = 9$ ，所以 $p = 4$ ，

抛物线方程为： $y^2 = 8x$

(2)、由 $p = 4$ ， $4x^2 - 5px + p^2 = 0$ ，化简得 $x^2 - 5x + 4 = 0$ ，从而 $x_1 = 1, x_2 = 4, y_1 = -2\sqrt{2}, y_2 = 4\sqrt{2}$ ，从而 $A(1, -2\sqrt{2}), B(4, 4\sqrt{2})$

设 $\overrightarrow{OC} = (x_3, y_3) = (1, -2\sqrt{2}) + \lambda(4, 4\sqrt{2}) = (1 + 4\lambda, -2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\lambda)$ ，又 $y_3^2 = 8x_3$ ，即 $[2\sqrt{2}(2\lambda - 1)]^2 = 8(4\lambda + 1)$ ，即 $(2\lambda - 1)^2 = 4\lambda + 1$ ，解得 $\lambda = 0$ ，或 $\lambda = 2$

20. (本小题满分 13 分)

设 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx$ 。

(1) 如果 $g(x) = f'(x) - 2x - 3$ 在 $x = -2$ 处取得最小值 -5 ，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 如果 $m + n < 10 (m, n \in N_+)$ ， $f(x)$ 的单调递减区间的长度是正整数，试求 m 和 n

的值。(注：区间 (a, b) 的长度为 $b - a$)

解：(1) 已知 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx$ ， $\therefore f'(x) = x^2 + 2mx + n$

又 $\because g(x) = f'(x) - 2x - 3 = x^2 + (2m - 2)x + n - 3$ 在 $x = -2$ 处取极值，

则 $g'(-2) = 2(-2) + (2m-2) = 0 \Rightarrow m = 3$ ，又在 $x = -2$ 处取最小值-5.

则 $g(-2) = (-2)^2 + (-2) \times 4 + n - 3 = -5 \Rightarrow n = 2$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 2x$$

(2) 要使 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx$ 单调递减，则 $\therefore f'(x) = x^2 + 2mx + n < 0$

又递减区间长度是正整数，所以 $f'(x) = x^2 + 2mx + n = 0$ 两根设做 a, b 。即有：

$$b-a \text{ 为区间长度。又 } b-a = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{4m^2 - 4n} = 2\sqrt{m^2 - n} (m, n \in N_+)$$

又 $b-a$ 为正整数，且 $m+n < 10$ ，所以 $m=2, n=3$ 或， $m=3, n=5$ 符合。

21. (本小题满分 14 分)

(1) 已知两个等比数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，满足 $a_1 = a (a > 0), b_1 - a_1 = 1, b_2 - a_2 = 2, b_3 - a_3 = 3$ ，

若数列 $\{a_n\}$ 唯一，求 a 的值；

(2) 是否存在两个等比数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，使得 $b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, b_4 - a_4$ 成公差不为 0

的等差数列？若存在，求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式；若不存在，说明理由。

解：(1) $\{a_n\}$ 要唯一， \therefore 当公比 $q_1 \neq 0$ 时，由 $b_1 = 1 + a = 2, b_2 = 2 + a_2, b_3 = 3 + a_3$ 且

$$b_2^2 = b_1 b_3 \Rightarrow (2 + a q_1)^2 = (1 + a)(3 + a q_1^2) \Rightarrow a q_1^2 - 4a q_1 + 3a - 1 = 0,$$

$\therefore a > 0, \therefore a q_1^2 - 4a q_1 + 3a - 1 = 0$ 最少有一个根 (有两个根时，保证仅有一个正根)

$\therefore (4a)^2 - 4a(3a - 1) \geq 0 \Rightarrow 4a(a + 1) \geq 0$ ，此时满足条件的 a 有无数多个，不符合。

\therefore 当公比 $q_1 = 0$ 时，等比数列 $\{a_n\}$ 首项为 a ，其余各项均为常数 0，唯一，此时由

$$(2 + a q_1)^2 = (1 + a)(3 + a q_1^2) \Rightarrow a q_1^2 - 4a q_1 + 3a - 1 = 0, \text{ 可推得 } 3a - 1 = 0, a = \frac{1}{3} \text{ 符合}$$

综上： $a = \frac{1}{3}$ 。

（2）假设存在这样的等比数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 公比分别为 q_1, q_2 , 则由等差数列的性质可得：

$$(b_2 - a_2) + (b_3 - a_3) = (b_1 - a_1) + (b_4 - a_4), \text{ 整理得: } (b_1 - b_3)(q_2 - 1) = (a_1 - a_3)(q_1 - 1)$$

要使该式成立，则 $q_2 - 1 = q_1 - 1 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 = 1$ 或 $b_1 = b_3 = a_1 = a_3 = 0$ 此时数列 $b_2 - a_2, b_3 - a_3$ 公差

为 0 与题意不符，所以不存在这样的等比数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 。