2024年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟．第I卷1至3页，第II卷4至6页．

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码．答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

祝各位考生考试顺利！

第I卷（选择题）

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．

2．本卷共9小题，每小题5分，共45分．

参考公式：

·如果事件 A，B **互斥，那么** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

·如果事件 A，B **相互独立，那么** $P(AB)=P(A)P(B)$．

·球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，**其中** R **表示球的半径．**

·圆锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，**其中** S **表示圆锥的底面面积，** h **表示圆锥的高．**

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{2,4\}$　　D. $\{1\}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据集合交集的概念直接求解即可.

【详解】因为集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，

所以 $A\cap B=\{2,3,4\}$，

故选：B

2. 设$a,b\in\mathbf{R}$，则“$a^3=b^3$”是“$3^a=3^b$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

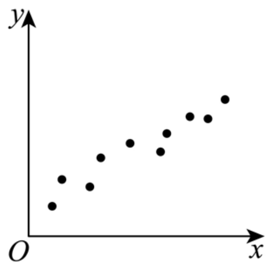
【解析】

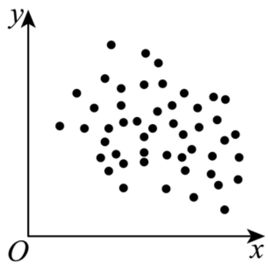
【分析】说明二者与同一个命题等价，再得到二者等价，即是充分必要条件.

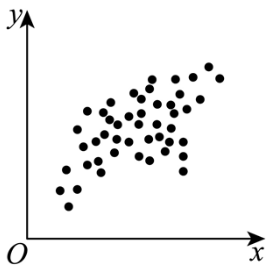
【详解】根据立方的性质和指数函数的性质，$a^3=b^3$和$3^a=3^b$都当且仅当$a=b$，所以二者互为充要条件.

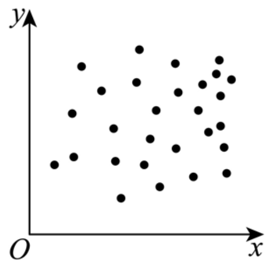
故选：C.

3. 下列图中，相关性系数最大的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由点的分布特征可直接判断

【详解】观察4幅图可知，A图散点分布比较集中，且大体接近某一条直线，线性回归模型拟合效果比较好，呈现明显的正相关，$|r|$值相比于其他3图更接近1.

故选：A

4. 下列函数是偶函数的是（　　）

A. $y=\dfrac{e^x-x^2}{x^2+1}$　　B. $y=\dfrac{\cos x+x^2}{x^2+1}$　　C. $y=\dfrac{e^x-x}{x+1}$　　D. $y=\dfrac{\sin x+4x}{e^{|x|}}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据偶函数的判定方法一一判断即可.

【详解】对 A，设 $f\left(x\right)=\frac{e^{x}-x^{2}}{x^{2}+1}$，函数定义域为 R，但 $f\left(-1\right)=\frac{e^{-1}-1}{2}$，$f\left(1\right)=\frac{e-1}{2}$，则 $f\left(-1\right)\neq f\left(1\right)$，故 A 错误；

对 B，设 $g\left(x\right)=\frac{\cos x+x^{2}}{x^{2}+1}$，函数定义域为 R，

且 $g\left(-x\right)=\frac{\cos\left(-x\right)+\left(-x\right)^{2}}{\left(-x\right)^{2}+1}=\frac{\cos x+x^{2}}{x^{2}+1}=g\left(x\right)$，则 $g\left(x\right)$ 为偶函数，故 B 正确；

对 C，设 $h\left(x\right)=\frac{e^{x}-x}{x+1}$，函数定义域为 $\left\{x\mid x\neq-1\right\}$，不关于原点对称，则 $h\left(x\right)$ 不是偶函数，故 C 错误；

对 D，设 $\varphi\left(x\right)=\frac{\sin x+4x}{e^{|x|}}$，函数定义域为 R，因为 $\varphi\left(1\right)=\frac{\sin 1+4}{e}$，$\varphi\left(-1\right)=\frac{-\sin 1-4}{e}$，

则 $\varphi\left(1\right)\neq\varphi\left(-1\right)$，则 $\varphi\left(x\right)$ 不是偶函数，故 D 错误.

故选：B.

5. 若 $a=4.2^{-0.3}$，$b=4.2^{0.3}$，$c=\log_{4.2}0.2$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

【答案】B

【解析】

【分析】利用指数函数和对数函数的单调性分析判断即可.

【详解】因为 $y=4.2^{x}$ 在 R 上递增，且 $-0.3<0<0.3$，

所以 $0<4.2^{-0.3}<4.2^{0}<4.2^{0.3}$，

所以 $0<4.2^{-0.3}<1<4.2^{0.3}$，即 $0<a<1<b$，

因为 $y=\log_{4.2}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $0<0.2<1$，

所以 $\log_{4.2}0.2<\log_{4.2}1=0$，即 $c<0$，

所以 $b>a>c$，

故选：B

6. 若 m,n 为两条不同的直线，α 为一个平面，则下列结论中正确的是（　）

A. 若$m//\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m//n$　　B. 若$m//\alpha,n//\alpha$，则$m//n$

C. 若$m//\alpha,n\perp\alpha$，则$m\perp n$　　D. 若$m//\alpha,n\perp\alpha$，则m与n相交

【答案】C

【解析】

【分析】根据线面平行的性质可判断 AB 的正误，根据线面垂直的性质可判断 CD 的正误.

【详解】对于 A，若$m//\alpha$，$n\subset\alpha$，则m,n平行或异面，故 A 错误.

对于 B，若$m//\alpha,n//\alpha$，则m,n平行或异面或相交，故 B 错误.

对于 C，$m//\alpha,n\perp\alpha$，过m作平面β，使得$\beta\cap\alpha=s$，

因为$m\subset\beta$，故$m//s$，而$s\subset\alpha$，故$n\perp s$，故$m\perp n$，故 C 正确.

对于 D，若$m//\alpha,n\perp\alpha$，则m与n相交或异面，故 D 错误.

故选：C.

7. 已知函数$f\left(x\right)=\sin3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$．则函数在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$的最小值是（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】先由诱导公式化简，结合周期公式求出ω，得$f\left(x\right)=-\sin2x$，再整体求出$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$时，$2x$的范围，结合正弦三角函数图象特征即可求解.

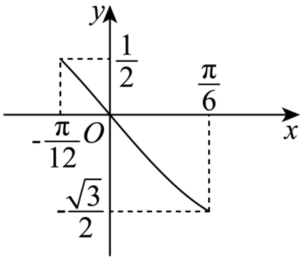
【详解】$f\left(x\right)=\sin3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(3\omega x+\pi\right)=-\sin3\omega x$，由$T=\frac{2\pi}{3\omega}=\pi$得$\omega=\frac{2}{3}$，

即$f\left(x\right)=-\sin2x$，当$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$时，$2x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，

画出$f\left(x\right)=-\sin2x$图象，如下图，

由图可知，$f\left(x\right)=-\sin2x$在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$上递减，

所以，当$x=\frac{\pi}{6}$时，$f\left(x\right)_{\min}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



故选：A

8. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2.P 是双曲线右支上一点，且直线 PF_2 的斜率为 2．$\triangle PF_1F_2$ 是面积为 8 的直角三角形，则双曲线的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$　　B. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$　　C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$

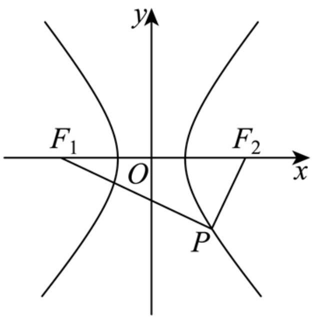
【答案】C

【解析】

【分析】可利用 $\triangle PF_1F_2$ 三边斜率问题与正弦定理，转化出三边比例，设 $|PF_2|=m$，由面积公式求出 m，由勾股定理得出 c，结合第一定义再求出 a.

【详解】如下图：由题可知，点 P 必落在第四象限，$\angle F_1PF_2=90°$，设 $|PF_2|=m$，

$\angle PF_2F_1=\theta_1,\angle PF_1F_2=\theta_2$，由 $k_{PF_2}=\tan\theta_1=2$，求得 $\sin\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$，



因为 $\angle F_1PF_2=90°$，所以 $k_{PF_1}\cdot k_{PF_2}=-1$，求得 $k_{PF_1}=-\frac{1}{2}$，即 $\tan\theta_2=\frac{1}{2}$，

$\sin\theta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$，由正弦定理可得：$|PF_1|:|PF_2|:|F_1F_2|=\sin\theta_1:\sin\theta_2:\sin 90°=2:1:\sqrt{5}$，

则由 $|PF_2|=m$ 得 $|PF_1|=2m,|F_1F_2|=2c=\sqrt{5}m$，

由 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}m\cdot 2m=8$ 得 $m=2\sqrt{2}$，

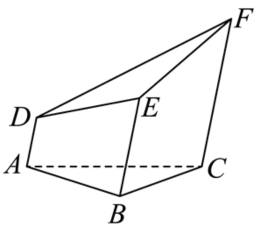
则$|PF_2|=2\sqrt{2},|PF_1|=4\sqrt{2},|F_1F_2|=2c=2\sqrt{10},c=\sqrt{10}$，

由双曲线第一定义可得：$|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$，$a=\sqrt{2},b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{8}$，

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$.

故选：C

9. 一个五面体$ABC-DEF$．已知$AD\parallel BE\parallel CF$，且两两之间距离为1．并已知$AD=1$，$BE=2$，$CF=3$．则该五面体的体积为（　）



A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】采用补形法，补成一个棱柱，求出其直截面，再利用体积公式即可.

【详解】用一个完全相同的五面体$HIJ-LMN$（顶点与五面体$ABC-DEF$一一对应）与该五面体相嵌，

使得D,N；E,M；F,L重合，

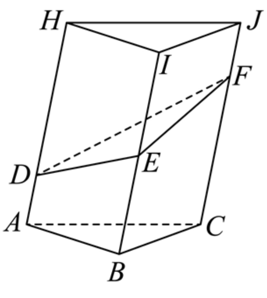
因为$AD\parallel BE\parallel CF$，且两两之间距离为1．$AD=1,BE=2,CF=3$，

则形成的新组合体为一个三棱柱，

该三棱柱的直截面（与侧棱垂直的截面）为边长为1的等边三角形，侧棱长为$1+3=2+2=3+1=4$，

$$V_{ABC-DEF}=\frac{1}{2}V_{ABC-HIJ}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选：C.



第II卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上．

2．本卷共 11 小题，共 105 分．

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分．

10. 已知 i 是虚数单位，复数 $\left(\sqrt{5}+\mathrm{i}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\mathrm{i}\right)=$______.

【答案】$7-\sqrt{5}\mathrm{i}$

【解析】

【分析】借助复数的乘法运算法则计算即可得.

【详解】$\left(\sqrt{5}+\mathrm{i}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\mathrm{i}\right)=5+\sqrt{5}\mathrm{i}-2\sqrt{5}\mathrm{i}+2=7-\sqrt{5}\mathrm{i}$.

故答案为：$7-\sqrt{5}\mathrm{i}$.

11. 在 $\left(\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{x^3}{3}\right)^6$ 的展开式中，常数项为______.

【答案】20

【解析】

【分析】根据题意结合二项展开式的通项分析求解即可.

【详解】因为 $\left(\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{x^3}{3}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\left(\dfrac{3}{x^3}\right)^{6-r}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)^r=3^{6-2r}\mathrm{C}_6^r x^{6(r-3)}, r=0,1,\cdots,6$，

令 $6\left(r-3\right)=0$，可得 $r=3$，

所以常数项为 $3^0\mathrm{C}_6^3=20$.

故答案为：20.

12. $(x-1)^2+y^2=25$ 的圆心与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 重合，A 为两曲线的交点，则原点到直线 AF 的距离为______.

【答案】$\dfrac{4}{5}$ ##0.8

【解析】

【分析】先求出圆心坐标，从而可求焦准距，再联立圆和抛物线方程，求 A 及 AF 的方程，从而可求原点到直线 AF 的距离.

【详解】圆 $(x-1)^2+y^2=25$ 的圆心为 $F\left(1,0\right)$，故 $\frac{p}{2}=1$ 即 $p=2$，

由 $\begin{cases}\left(x-1\right)^2+y^2=25\\ y^2=4x\end{cases}$ 可得 $x^2+2x-24=0$，故 $x=4$ 或 $x=-6$（舍），

故 $A\left(4,\pm4\right)$，故直线 $AF: y=\pm\frac{4}{3}\left(x-1\right)$ 即 $4x-3y-4=0$ 或 $4x+3y-4=0$，

故原点到直线 AF 的距离为 $d=\frac{|4|}{5}=\frac{4}{5}$，

故答案为：$\frac{4}{5}$

13. A,B,C,D,E 五种活动，甲、乙都要选择三个活动参加.（1）甲选到 A 的概率为______；已知乙选了 A 活动，他再选择 B 活动的概率为______.

【答案】 ①. $\frac{3}{5}$ ②. $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】结合列举法或组合公式和概率公式可求甲选到 A 的概率；采用列举法或者条件概率公式可求乙选了 A 活动，他再选择 B 活动的概率.

【详解】解法一：列举法

从五个活动中选三个的情况有：

$ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE,CDE$,共 10 种情况，

其中甲选到 A 有 6 种可能性：ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE，

则甲选到 A 得概率为：$P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$；

乙选 A 活动有 6 种可能性：ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE，

其中再选则 B 有 3 种可能性：ABC,ABD,ABE，

故乙选了 A 活动，他再选择 B 活动的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

解法二：

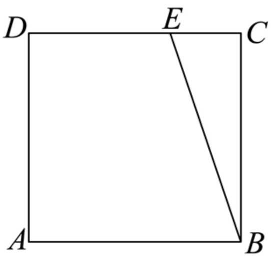
设甲、乙选到 A 为事件 M，乙选到 B 为事件 N，

则甲选到 A 的概率为 $P\left(M\right)=\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_5^3}=\frac{3}{5}$；

乙选了 A 活动，他再选择 B 活动的概率为 $P\left(N|M\right)=\frac{P\left(MN\right)}{P\left(M\right)}=\frac{\frac{C_3^1}{C_5^3}}{\frac{C_4^2}{C_5^3}}=\frac{1}{2}$

故答案为：$\frac{3}{5}$；$\frac{1}{2}$

14. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 为线段 CD 的三等分点， $CE=\frac{1}{2}DE,\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda+\mu=$______；若 F 为线段 BE 上的动点，G 为 AF 中点，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的最小值为______.



【答案】 ①. $\frac{4}{3}$ ②. $-\frac{5}{18}$

【解析】

【分析】解法一：以 $\left\{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right\}$ 为基底向量，根据向量的线性运算求 $\overrightarrow{BE}$，即可得 $\lambda+\mu$，设 $\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BE}$，求 $\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DG}$，结合数量积的运算律求 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的最小值；解法二：建系标点，根据向量的坐标运算求 $\overrightarrow{BE}$，即可得 $\lambda+\mu$，设 $F\left(a,-3a\right),a\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$，求 $\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DG}$，结合数量积的坐标运算求 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的最小值.

【详解】解法一：因为 $CE=\frac{1}{2}DE$，即 $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$，则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，

可得 $\lambda=\frac{1}{3},\mu=1$，所以 $\lambda+\mu=\frac{4}{3}$；

由题意可知：$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=1,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

因为 F 为线段 BE 上的动点，设 $\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}k\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC},k\in\left[0,1\right]$，

则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1}{3}k-1\right)\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}$，

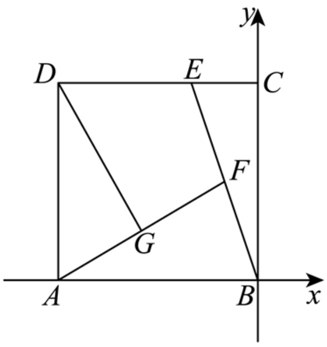
又因为 G 为 AF 中点，则 $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}k-1\right)\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{2}k-1\right)\overrightarrow{BC}$，

可得 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}=\left[\left(\frac{1}{3}k-1\right)\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}k-1\right)\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{2}k-1\right)\overrightarrow{BC}\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}k-1\right)^2+k\left(\frac{1}{2}k-1\right)=\frac{5}{9}\left(k-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{3}{10}$,

又因为$k\in[0,1]$，可知：当$k=1$时，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$取到最小值$-\frac{5}{18}$；

解法二：以B为坐标原点建立平面直角坐标系，如图所示，



则$A(-1,0),B(0,0),C(0,1),D(-1,1),E\left(-\frac{1}{3},1\right)$,

可得$\overrightarrow{BA}=(-1,0),\overrightarrow{BC}=(0,1),\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{3},1\right)$,

因为$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}=(-\lambda,\mu)$，则$\begin{cases}-\lambda=-\frac{1}{3}\\ \mu=1\end{cases}$，所以$\lambda+\mu=\frac{4}{3}$；

因为点F在线段$BE:y=-3x,x\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$上，设$F(a,-3a),a\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$,

且G为AF中点，则$G\left(\frac{a-1}{2},-\frac{3}{2}a\right)$,

可得$\overrightarrow{AF}=(a+1,-3a),\overrightarrow{DG}=\left(\frac{a+1}{2},-\frac{3}{2}a-1\right)$,

则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}=\frac{(a+1)^2}{2}+(-3a)\left(-\frac{3}{2}a-1\right)=5\left(a+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{3}{10}$,

且$a\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$，所以当$a=-\frac{1}{3}$时，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$取到最小值为$-\frac{5}{18}$；

故答案为：$\frac{4}{3}$；$-\frac{5}{18}$.

15. 若函数$f(x)=2\sqrt{x^2-ax}-|ax-2|+1$有唯一零点，则$a$的取值范围为______.

【答案】$(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$

【解析】

【分析】结合函数零点与两函数的交点的关系，构造函数 $g(x)=2\sqrt{x^2-ax}$ 与 $h(x)=\begin{cases}ax-3,x\geq\dfrac{2}{a}\\1-ax,x<\dfrac{2}{a}\end{cases}$，则两函数图象有唯一交点，分 $a=0$、$a>0$ 与 $a<0$ 进行讨论，当 $a>0$ 时，计算函数定义域可得 $x\geq a$ 或 $x\leq 0$，计算可得 $a\in(0,2]$ 时，两函数在 y 轴左侧有一交点，则只需找到当 $a\in(0,2]$ 时，在 y 轴右侧无交点的情况即可得；当 $a<0$ 时，按同一方式讨论即可得.

【详解】令 $f(x)=0$，即 $2\sqrt{x^2-ax}=|ax-2|-1$，

由题可得 $x^2-ax\geq 0$，

当 $a=0$ 时，$x\in\mathbf{R}$，有 $2\sqrt{x^2}=|-2|-1=1$，则 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，不符合要求，舍去；

当 $a>0$ 时，则 $2\sqrt{x^2-ax}=|ax-2|-1=\begin{cases}ax-3,x\geq\dfrac{2}{a}\\1-ax,x<\dfrac{2}{a}\end{cases}$，

即函数 $g(x)=2\sqrt{x^2-ax}$ 与函数 $h(x)=\begin{cases}ax-3,x\geq\dfrac{2}{a}\\1-ax,x<\dfrac{2}{a}\end{cases}$ 有唯一交点，

由 $x^2-ax\geq 0$，可得 $x\geq a$ 或 $x\leq 0$，

当 $x\leq 0$ 时，则 $ax-2<0$，则 $2\sqrt{x^2-ax}=|ax-2|-1=1-ax$，

即 $4x^2-4ax=(1-ax)^2$，整理得 $\left(4-a^2\right)x^2-2ax-1=[(2+a)x+1][(2-a)x-1]=0$，

当 $a=2$ 时，即 $4x+1=0$，即 $x=-\dfrac{1}{4}$，

当 $a\in(0,2)$，$x=-\dfrac{1}{2+a}$ 或 $x=\dfrac{1}{2-a}>0$（正值舍去），

当 $a\in(2,+\infty)$ 时，$x=-\dfrac{1}{2+a}<0$ 或 $x=\dfrac{1}{2-a}<0$，有两解，舍去，

即当 $a\in(0,2]$ 时，$2\sqrt{x^2-ax}-|ax-2|+1=0$ 在 $x\leq 0$ 时有唯一解，

则当 $a\in(0,2]$ 时，$2\sqrt{x^2-ax}-|ax-2|+1=0$ 在 $x\geq a$ 时需无解，

当 $a\in(0,2]$，且 $x\geq a$ 时，

由函数 $h(x)=\begin{cases}ax-3,x\geq \dfrac{2}{a}\\1-ax,x<\dfrac{2}{a}\end{cases}$ 关于 $x=\dfrac{2}{a}$ 对称，令 $h(x)=0$，可得 $x=\dfrac{1}{a}$ 或 $x=\dfrac{3}{a}$，

且函数 $h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{2}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{2}{a},\dfrac{3}{a}\right)$ 上单调递增，

令 $g(x)=y=2\sqrt{x^2-ax}$，即 $\dfrac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}{\dfrac{a^2}{4}}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$，

故 $x\geq a$ 时，$g(x)$ 图象为双曲线 $\dfrac{(x)^2}{\dfrac{a^2}{4}}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 右支的 x 轴上方部分向右平移 $\dfrac{a}{2}$ 所得，

由 $\dfrac{(x)^2}{\dfrac{a^2}{4}}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{a}{\dfrac{a}{2}}x=\pm 2x$，

即 $g(x)$ 部分的渐近线方程为 $y=2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$，其斜率为 2，

又 $a\in(0,2]$，即 $h(x)=\begin{cases}ax-3,x\geq \dfrac{2}{a}\\1-ax,x<\dfrac{2}{a}\end{cases}$ 在 $x\geq\dfrac{2}{a}$ 时的斜率 $a\in(0,2]$，

令 $g(x)=2\sqrt{x^2-ax}=0$，可得 $x=a$ 或 $x=0$（舍去），

且函数 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

故有 $\begin{cases}\dfrac{1}{a}<a\\\dfrac{3}{a}>a\end{cases}$，解得 $1<a<\sqrt{3}$，故 $1<a<\sqrt{3}$ 符合要求；

当 $a<0$ 时，则 $2\sqrt{x^2-ax}=|ax-2|-1=\begin{cases}ax-3,x\leq \dfrac{2}{a}\\1-ax,x>\dfrac{2}{a}\end{cases}$，

即函数 $g\left(x\right)=2\sqrt{x^{2}-ax}$ 与函数 $h\left(x\right)=\begin{cases}ax-3,x\le\dfrac{2}{a}\\1-ax,x>\dfrac{2}{a}\end{cases}$ 有唯一交点，

由 $x^{2}-ax\ge 0$，可得 $x\ge 0$ 或 $x\le a$，

当 $x\ge 0$ 时，则 $ax-2<0$，则 $2\sqrt{x^{2}-ax}=\left|ax-2\right|-1=1-ax$，

即 $4x^{2}-4ax=\left(1-ax\right)^{2}$，整理得 $\left(4-a^{2}\right)x^{2}-2ax-1=\left[\left(2+a\right)x+1\right]\left[\left(2-a\right)x-1\right]=0$，

当 $a=-2$ 时，即 $4x-1=0$，即 $x=\dfrac{1}{4}$，

当 $a\in\left(-2,0\right)$，$x=-\dfrac{1}{2+a}<0$（负值舍去）或 $x=\dfrac{1}{2-a}0$，

当 $a\in\left(-\infty,2\right)$ 时，$x=-\dfrac{1}{2+a}>0$ 或 $x=\dfrac{1}{2-a}>0$，有两解，舍去，

即当 $a\in\left[-2,0\right)$ 时，$2\sqrt{x^{2}-ax}-\left|ax-2\right|+1=0$ 在 $x\ge 0$ 时有唯一解，

则当 $a\in\left[-2,0\right)$ 时，$2\sqrt{x^{2}-ax}-\left|ax-2\right|+1=0$ 在 $x\le a$ 时需无解，

当 $a\in\left[-2,0\right)$，且 $x\le a$ 时，

由函数 $h\left(x\right)=\begin{cases}ax-3,x\le\dfrac{2}{a}\\1-ax,x>\dfrac{2}{a}\end{cases}$ 关于 $x=\dfrac{2}{a}$ 对称，令 $h\left(x\right)=0$，可得 $x=\dfrac{1}{a}$ 或 $x=\dfrac{3}{a}$，

且函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{2}{a},\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{3}{a},\dfrac{2}{a}\right)$ 上单调递增，

同理可得：$x\le a$ 时，$g\left(x\right)$ 图象为双曲线 $\dfrac{\left(x\right)^{2}}{\dfrac{a^{2}}{4}}-\dfrac{y^{2}}{a^{2}}=1$ 左支的 x 轴上方部分向左平移 $\dfrac{a}{2}$ 所得，

$g\left(x\right)$ 部分的渐近线方程为 $y=-2\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$，其斜率为 -2，

又 $a\in\left[-2,0\right)$，即 $h\left(x\right)=\begin{cases}ax-3,x\ge\dfrac{2}{a}\\1-ax,x<\dfrac{2}{a}\end{cases}$ 在 $x<\dfrac{2}{a}$ 时的斜率 $a\in\left[-2,0\right)$，

令 $g\left(x\right)=2\sqrt{x^{2}-ax}=0$，可得 $x=a$ 或 $x=0$（舍去），

且函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，

故有 $\begin{cases}\dfrac{1}{a}>a\\ \dfrac{3}{a}<a\end{cases}$，解得 $-\sqrt{3}<a<-1$，故 $-\sqrt{3}<a<-1$ 符合要求；

综上所述，$a\in\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$.

故答案为：$\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$.

【点睛】关键点点睛：本题关键点在于将函数 $f(x)$ 的零点问题转化为函数 $g(x)=2\sqrt{x^2-ax}$ 与函数

$h(x)=\begin{cases}ax-3,x\geq\dfrac{2}{a}\\ 1-ax,x<\dfrac{2}{a}\end{cases}$ 的交点问题，从而可将其分成两个函数研究.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{9}{16}$，$b=5,\dfrac{a}{c}=\dfrac{2}{3}$.

（1）求 a；

（2）求 $\sin A$；

（3）求 $\cos(B-2A)$.

【答案】（1）4

（2）$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

（3）$\dfrac{57}{64}$

【解析】

【分析】（1）$a=2t,c=3t$，利用余弦定理即可得到方程，解出即可；

（2）法一：求出 $\sin B$，再利用正弦定理即可；法二：利用余弦定理求出 $\cos A$，则得到 $\sin A$；

（3）法一：根据大边对大角确定 A 为锐角，则得到 $\cos A$，再利用二倍角公式和两角差的余弦公式即可；法二：直接利用二倍角公式和两角差的余弦公式即可.

【小问 1 详解】

设 $a=2t,c=3t$，$t>0$，则根据余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即$25=4t^2+9t^2-2\times 2t\times 3t\times \frac{9}{16}$，解得$t=2$（负舍）；

则$a=4,c=6$.

【小问 2 详解】

法一：因为B为三角形内角，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，

再根据正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{4}{\sin A}=\frac{5}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$，解得$\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

法二：由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times 5\times 6}=\frac{3}{4}$，

因为$A\in\left(0,\pi\right)$，则$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

【小问 3 详解】

法一：因为$\cos B=\frac{9}{16}>0$，且$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

由（2）法一知$\sin B=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，

因为$a<b$，则$A<B$，所以$\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$，

则$\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$， $\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$

$\cos\left(B-2A\right)=\cos B\cos 2A+\sin B\sin 2A=\frac{1}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{57}{64}$.

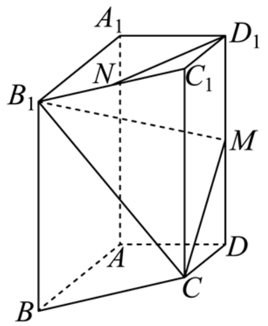
法二： $\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

则$\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$，

因为B为三角形内角，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，

所以$\cos\left(B-2A\right)=\cos B\cos 2A+\sin B\sin 2A=\frac{9}{16}\times\frac{1}{8}+\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{57}{64}$

17. 已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB//CD$，$A_1A\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp AB$，其中 $AB=AA_1=2,AD=DC=1$．N 是 B_1C_1 的中点，M 是 DD_1 的中点．



（1）求证 $D_1N//$ 平面 CB_1M；

（2）求平面 CB_1M 与平面 BB_1CC_1 的夹角余弦值；

（3）求点 B 到平面 CB_1M 的距离．

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$

（3）$\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$

【解析】

【分析】（1）取 CB_1 中点 P，连接 NP，MP，借助中位线的性质与平行四边形性质定理可得 $D_1N//MP$，结合线面平行判定定理即可得证；

（2）建立适当空间直角坐标系，计算两平面的空间向量，再利用空间向量夹角公式计算即可得解；

（3）借助空间中点到平面的距离公式计算即可得解.

【小问 1 详解】

取 CB_1 中点 P，连接 NP，MP，

由 N 是 B_1C_1 的中点，故 $NP//CC_1$，且 $NP=\dfrac{1}{2}CC_1$，

由 M 是 DD_1 的中点，故 $D_1M=\dfrac{1}{2}DD_1=\dfrac{1}{2}CC_1$，且 $D_1M//CC_1$，

则有 $D_1M//NP$、$D_1M=NP$，

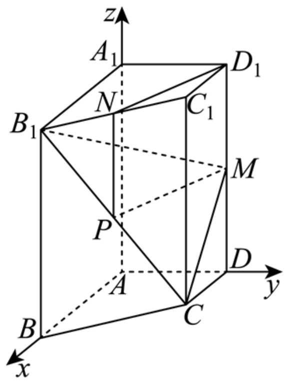
故四边形 D_1MPN 是平行四边形，故 $D_1N//MP$，

又 $MP\subset$ 平面 CB_1M ， $D_1N\not\subset$ 平面 CB_1M ，

故 $D_1N//$ 平面 CB_1M ；

【小问 2 详解】

以 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系，



有 $A(0,0,0)$、$B(2,0,0)$、$B_1(2,0,2)$、$M(0,1,1)$、$C(1,1,0)$、$C_1(1,1,2)$，

则有 $\overrightarrow{CB_1}=(1,-1,2)$、$\overrightarrow{CM}=(-1,0,1)$、$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，

设平面 CB_1M 与平面 BB_1CC_1 的法向量分别为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$、$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CB_1}=x_1-y_1+2z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}=-x_1+z_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=x_2-y_2+2z_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=2z_2=0\end{cases}$，

分别取 $x_1=x_2=1$，则有 $y_1=3$、$z_1=1$、$y_2=1$，$z_2=0$，

即 $\vec{m}=(1,3,1)$、$\vec{n}=(1,1,0)$，

则 $\cos\vec{m},\vec{n}=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1+3}{\sqrt{1+9+1}\cdot\sqrt{1+1}}=\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$，

故平面 CB_1M 与平面 BB_1CC_1 的夹角余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$；

【小问 3 详解】

由 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，平面 CB_1M 的法向量为 $\vec{m}=(1,3,1)$，

则有 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BB_1}\cdot\vec{m}\right|}{|\vec{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{1+9+1}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$，

即点 B 到平面 CB_1M 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 椭圆的离心率 $e=\frac{1}{2}$. 左顶点为 A，下顶点为 B，C 是线段 OB 的中点，其中 $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆方程.

（2）过点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ 的动直线与椭圆有两个交点 P，Q. 在 y 轴上是否存在点 T 使得 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\le 0$ 恒成立. 若存在求出这个 T 点纵坐标的取值范围，若不存在请说明理由.

【答案】（1）$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$

（2）存在 $T(0,t)\left(-3\le t\le\frac{3}{2}\right)$，使得 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\le 0$ 恒成立.

【解析】

【分析】（1）根据椭圆的离心率和三角形的面积可求基本量，从而可得椭圆的标准方程.

（2）设该直线方程为：$y=kx-\frac{3}{2}$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),T(0,t)$， 联立直线方程和椭圆方程并消元，结合韦达定理和向量数量积的坐标运算可用 k,t 表示 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}$，再根据 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\le 0$ 可求 t 的范围.

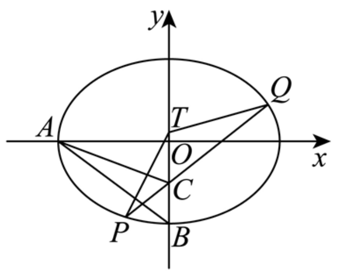
【小问 1 详解】

因为椭圆的离心率为 $e=\frac{1}{2}$， 故 $a=2c$， $b=\sqrt{3}c$，其中 c 为半焦距，

所以 $A(-2c,0),B(0,-\sqrt{3}c),C\left(0,-\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$， 故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2c\times\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

故 $c=\sqrt{3}$，所以 $a=2\sqrt{3}$， $b=3$，故椭圆方程为：$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

【小问 2 详解】



若过点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ 的动直线的斜率存在，则可设该直线方程为：$y=kx-\frac{3}{2}$，

设$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right),T\left(0,t\right)$，

由$\begin{cases}3x^2+4y^2=36\\ y=kx-\dfrac{3}{2}\end{cases}$可得$\left(3+4k^2\right)x^2-12kx-27=0$，

故$\Delta=144k^2+108\left(3+4k^2\right)=324+576k^2>0$且$x_1+x_2=\dfrac{12k}{3+4k^2},x_1x_2=-\dfrac{27}{3+4k^2}$，

而$\overrightarrow{TP}=\left(x_1,y_1-t\right),\overrightarrow{TQ}=\left(x_2,y_2-t\right)$，

故$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=x_1x_2+\left(y_1-t\right)\left(y_2-t\right)=x_1x_2+\left(kx_1-\dfrac{3}{2}-t\right)\left(kx_2-\dfrac{3}{2}-t\right)$

$=\left(1+k^2\right)x_1x_2-k\left(\dfrac{3}{2}+t\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(\dfrac{3}{2}+t\right)^2$

$=\left(1+k^2\right)\times\left(-\dfrac{27}{3+4k^2}\right)-k\left(\dfrac{3}{2}+t\right)\times\dfrac{12k}{3+4k^2}+\left(\dfrac{3}{2}+t\right)^2$

$=\dfrac{-27k^2-27-18k^2-12k^2t+3\left(\dfrac{3}{2}+t\right)^2+\left(3+2t\right)^2k^2}{3+4k^2}$

$=\dfrac{\left[\left(3+2t\right)^2-12t-45\right]k^2+3\left(\dfrac{3}{2}+t\right)^2-27}{3+4k^2}$，

因为$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\le 0$恒成立，故$\begin{cases}\left(3+2t\right)^2-12t-45\le 0\\ 3\left(\dfrac{3}{2}+t\right)^2-27\le 0\end{cases}$，解得$-3\le t\le\dfrac{3}{2}$.

若过点$\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$的动直线的斜率不存在，则$P\left(0,3\right),Q\left(0,-3\right)$或$P\left(0,-3\right),Q\left(0,3\right)$，

此时需$-3\le t\le 3$，两者结合可得$-3\le t\le\dfrac{3}{2}$.

综上，存在$T\left(0,t\right)\left(-3\le t\le\dfrac{3}{2}\right)$，使得$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\le 0$恒成立.

【点睛】思路点睛：圆锥曲线中的范围问题，往往需要用合适的参数表示目标代数式，表示过程中需要借助韦达定理，此时注意直线方程的合理假设.

19. 已知数列$\left\{a_n\right\}$是公比大于 0 的等比数列．其前n项和为S_n．若$a_1=1,S_2=a_3-1$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$前n项和S_n；

（2）设 $b_n=\begin{cases}k,n=a_k\\b_{n-1}+2k,a_k<n<a_{k+1}\end{cases}$，$b_1=1$，其中 k 是大于 1 的正整数.

（i）当 $n=a_{k+1}$ 时，求证：$b_{n-1}\ge a_k\cdot b_n$；

（ii）求 $\sum\limits_{i=1}^{S_n}b_i$.

【答案】（1）$S_n=2^n-1$

（2）①证明见详解；② $\sum\limits_{i=1}^{S_n}b_i=\dfrac{(3n-1)4^n+1}{9}$

【解析】

【分析】（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q>0$，根据题意结合等比数列通项公式求 q，再结合等比数列求和公式分析求解；

（2）①根据题意分析可知 $a_k=2^{k-1},b_n=k+1$，$b_{n-1}=k\left(2^k-1\right)$，利用作差法分析证明；②根据题意结合等差数列求和公式可得 $\sum\limits_{i=2^{k-1}}^{2^k-1}b_i=\frac{1}{9}\left[(3k-1)4^k-(3k-4)4^{k-1}\right]$，再结合裂项相消法分析求解.

【小问 1 详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q>0$，

因为 $a_1=1,S_2=a_3-1$，即 $a_1+a_2=a_3-1$，

可得 $1+q=q^2-1$，整理得 $q^2-q-2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-1$（舍去），

所以 $S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

【小问 2 详解】

（i）由（1）可知 $a_n=2^{n-1}$，且 $k\in\mathrm{N}^*,k\ge2$，

当 $n=a_{k+1}=2^k\ge4$ 时，则 $\begin{cases}a_k=2^{k-1}<2^k-1=n-1\\n-1=a_{k+1}-1<a_{k+1}\end{cases}$，即 $a_k<n-1<a_{k+1}$

可知 $a_k=2^{k-1},b_n=k+1$，

$b_{n-1}=b_{a_k}+\left(a_{k+1}-a_k-1\right)\cdot2k=k+2k\left(2^{k-1}-1\right)=k\left(2^k-1\right)$，

可得 $b_{n-1}-a_k\cdot b_n=k\left(2^k-1\right)-(k+1)2^{k-1}=(k-1)2^{k-1}-k\ge2(k-1)-k=k-2\ge0$，

当且仅当$k=2$时，等号成立，

所以$b_{n-1}\ge a_k\cdot b_n$；

（ii）由（1）可知：$S_n=2^n-1=a_{n+1}-1$，

若$n=1$，则$S_1=1,b_1=1$；

若$n\ge 2$，则$a_{k+1}-a_k=2^{k-1}$，

当$2^{k-1}<i\le 2^k-1$时，$b_i-b_{i-1}=2k$，可知$\{b_i\}$为等差数列，

可得$\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1}b_i=k\cdot 2^{k-1}+2k\frac{2^{k-1}\left(2^{k-1}-1\right)}{2}=k\cdot 4^{k-1}=\frac{1}{9}\left[(3k-1)4^k-(3k-4)4^{k-1}\right]$，

所以$\sum_{i=1}^{S_n}b_i=1+\frac{1}{9}\left[5\times 4^2-2\times 4+8\times 4^3-5\times 4^2+\cdots+(3n-1)4^n-(3n-4)4^{n-1}\right]=\frac{(3n-1)4^n+1}{9}$，

且$n=1$，符合上式，综上所述：$\sum_{i=1}^{S_n}b_i=\frac{(3n-1)4^n+1}{9}$.

【点睛】关键点点睛：1.分析可知当$2^{k-1}<i\le 2^k-1$时，$b_i-b_{i-1}=2k$，可知$\{b_i\}$为等差数列；

2.根据等差数列求和分析可得$\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1}b_i=\frac{1}{9}\left[(3k-1)4^k-(3k-4)4^{k-1}\right]$.

20. 设函数$f(x)=x\ln x$.

（1）求$f(x)$图象上点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）若$f(x)\ge a\left(x-\sqrt{x}\right)$在$x\in(0,+\infty)$时恒成立，求$a$的取值范围；

（3）若$x_1,x_2\in(0,1)$，证明$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|x_1-x_2\right|^{\frac{1}{2}}$.

【答案】（1）$y=x-1$

（2）$\{2\}$

（3）证明过程见解析

【解析】

【分析】（1）直接使用导数的几何意义；

（2）先由题设条件得到$a=2$，再证明$a=2$时条件满足；

（3）先确定$f(x)$的单调性，再对x_1,x_2分类讨论.

【小问1详解】

由于 $f(x)=x\ln x$，故 $f'(x)=\ln x+1$.

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，所以所求的切线经过 $(1,0)$，且斜率为 1，故其方程为 $y=x-1$.

【小问 2 详解】

设 $h(t)=t-1-\ln t$，则 $h'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$，从而当 $0<t<1$ 时 $h'(t)<0$，当 $t>1$ 时 $h'(t)>0$.

所以 $h(t)$ 在 $(0,1]$ 上递减，在 $[1,+\infty)$ 上递增，这就说明 $h(t)\geq h(1)$，即 $t-1\geq\ln t$，且等号成立当且仅当 $t=1$.

设 $g(t)=a(t-1)-2\ln t$，则

$$f(x)-a\left(x-\sqrt{x}\right)=x\ln x-a\left(x-\sqrt{x}\right)=x\left(a\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)-2\ln\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x\cdot g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的取值范围是 $(0,+\infty)$，所以命题等价于对任意 $t\in(0,+\infty)$，都有 $g(t)\geq 0$.

一方面，若对任意 $t\in(0,+\infty)$，都有 $g(t)\geq 0$，则对 $t\in(0,+\infty)$ 有

$$0\leq g(t)=a(t-1)-2\ln t=a(t-1)+2\ln\frac{1}{t}\leq a(t-1)+2\left(\frac{1}{t}-1\right)=at+\frac{2}{t}-a-2,$$

取 $t=2$，得 $0\leq a-1$，故 $a\geq 1>0$.

再取 $t=\sqrt{\dfrac{2}{a}}$，得 $0\leq a\cdot\sqrt{\dfrac{2}{a}}+2\sqrt{\dfrac{a}{2}}-a-2=2\sqrt{2a}-a-2=-\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)^2$，所以 $a=2$.

另一方面，若 $a=2$，则对任意 $t\in(0,+\infty)$ 都有 $g(t)=2(t-1)-2\ln t=2h(t)\geq 0$，满足条件.

综合以上两个方面，知 a 的取值范围是 $\{2\}$.

【小问 3 详解】

先证明一个结论：对 $0<a<b$，有 $\ln a+1<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\ln b+1$.

证明：前面已经证明不等式 $t-1\geq\ln t$，故 $\dfrac{b\ln b-a\ln a}{b-a}=\dfrac{a\ln b-a\ln a}{b-a}+\ln b=\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1}+\ln b<1+\ln b$，

且 $\dfrac{b\ln b-a\ln a}{b-a}=\dfrac{b\ln b-b\ln a}{b-a}+\ln a=\dfrac{-\ln\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}+\ln a>\dfrac{-\left(\frac{a}{b}-1\right)}{1-\frac{a}{b}}+\ln a=1+\ln a$，

所以$\ln a+1<\dfrac{b\ln b-a\ln a}{b-a}<\ln b+1$，即$\ln a+1<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\ln b+1$.

由$f'(x)=\ln x+1$，可知当$0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时$f'(x)<0$，当$x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$上递减，在$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上递增.

不妨设$x_1\le x_2$，下面分三种情况（其中有重合部分）证明本题结论.

情况一：当$\dfrac{1}{\mathrm{e}}\le x_1\le x_2<1$时，有

$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=f(x_2)-f(x_1)<(\ln x_2+1)(x_2-x_1)<x_2-x_1<\sqrt{x_2-x_1}$，结论成立；

情况二：当$0<x_1\le x_2\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=f(x_1)-f(x_2)=x_1\ln x_1-x_2\ln x_2$.

对任意的$c\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$，设$\varphi(x)=x\ln x-c\ln c-\sqrt{c-x}$，则$\varphi'(x)=\ln x+1+\dfrac{1}{2\sqrt{c-x}}$.

由于$\varphi'(x)$单调递增，且有

$$\varphi'\left(\frac{c}{2\mathrm{e}^{1+\frac{1}{\sqrt{2c}}}}\right)=\ln\frac{c}{2\mathrm{e}^{1+\frac{1}{\sqrt{2c}}}}+1+\frac{1}{2\sqrt{c-\dfrac{c}{2\mathrm{e}^{1+\frac{1}{\sqrt{2c}}}}}}<\ln\frac{1}{\mathrm{e}^{1+\frac{1}{\sqrt{2c}}}}+1+\frac{1}{2\sqrt{c-\dfrac{c}{2}}}=-1-\frac{1}{\sqrt{2c}}+1+\frac{1}{\sqrt{2c}}=0,$$

且当$x\ge c-\dfrac{1}{4\left(\ln\dfrac{2}{c}-1\right)^2}$，$x>\dfrac{c}{2}$时，由$\dfrac{1}{2\sqrt{c-x}}\ge\ln\dfrac{2}{c}-1$可知

$$\varphi'(x)=\ln x+1+\frac{1}{2\sqrt{c-x}}>\ln\frac{c}{2}+1+\frac{1}{2\sqrt{c-x}}=\frac{1}{2\sqrt{c-x}}-\left(\ln\frac{2}{c}-1\right)\ge0.$$

所以$\varphi'(x)$在$(0,c)$上存在零点x_0，再结合$\varphi'(x)$单调递增，即知$0<x<x_0$时$\varphi'(x)<0$，$x_0<x<c$时

$\varphi'(x)>0$.

故$\varphi(x)$在$(0,x_0]$上递减，在$[x_0,c]$上递增.

①当$x_0\le x\le c$时，有$\varphi(x)\le\varphi(c)=0$；

②当$0<x<x_0$时，由于$\sqrt{c}\ln\dfrac{1}{c}=-2f\left(\sqrt{c}\right)\le-2f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$，故我们可以取$q\in\left(\sqrt{c}\ln\dfrac{1}{c},1\right)$.

从而当$0<x<\dfrac{c}{1-q^2}$时，由$\sqrt{c-x}>q\sqrt{c}$，可得

$$\varphi(x)=x\ln x-c\ln c-\sqrt{c-x}<-c\ln c-\sqrt{c-x}<-c\ln c-q\sqrt{c}=\sqrt{c}\left(\sqrt{c}\ln\frac{1}{c}-q\right)<0.$$

再根据$\varphi(x)$在$(0,x_0]$上递减，即知对$0<x<x_0$都有$\varphi(x)<0$；

综合①②可知对任意$0<x\le c$，都有$\varphi(x)\le 0$，即$\varphi(x)=x\ln x-c\ln c-\sqrt{c-x}\le 0$.

根据$c\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$和$0<x\le c$的任意性，取$c=x_2$，$x=x_1$，就得到$x_1\ln x_1-x_2\ln x_2-\sqrt{x_2-x_1}\le 0$.

所以$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=f(x_1)-f(x_2)=x_1\ln x_1-x_2\ln x_2\le\sqrt{x_2-x_1}$.

情况三：当$0<x_1\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}\le x_2<1$时，根据情况一和情况二的讨论，可得

$$\left|f(x_1)-f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right|\le\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}}-x_1}\le\sqrt{x_2-x_1}，\quad\left|f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)-f(x_2)\right|\le\sqrt{x_2-\frac{1}{\mathrm{e}}}\le\sqrt{x_2-x_1}.$$

而根据$f(x)$的单调性，知$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f(x_1)-f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\right|$或$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)-f(x_2)\right|$.

故一定有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\sqrt{x_2-x_1}$成立.

综上，结论成立.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于第 3 小问中，需要结合$f(x)$的单调性进行分类讨论.