2011 年浙江省高考数学试卷（理科）解析卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，满分 50 分）

1、（2011•浙江）设函数 f（x）=$\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$，若 f（a）=4，则实数 a=（　　）

A、－4 或－2　　B、－4 或 2

C、－2 或 4　　D、－2 或 2

考点：分段函数的解析式求法及其图象的作法。

专题：计算题。

分析：分段函数分段处理，我们利用分类讨论的方法，分 a≤0 与 a＞0 两种情况，根据各段上函数的解析式，分别构造关于 a 的方程，解方程即可求出满足条件 的 a 值.

解答：解：当 a≤0 时

若 f（a）=4，则－a=4，解得 a=－4

当 a＞0 时

若 f（a）=4，则 a^2=4，解得 a=2 或 a=－2（舍去）

故实数 a=－4 或 a=2

故选 B

点评：本题考查的知识点是分段函数，分段函数分段处理，这是研究分段函数图象和性质最核心的理念，具体做法是：分段函数的定义域、值域是各段上 x、y 取值范围的并集，分段函数的奇偶性、单调性要在各段上分别论证；分段函数的最大值，是各段上最大值中的最大者.

2、（2011•浙江）把复数 z 的共轭复数记作$\overline{Z}$，i 为虚数单位．若 z=1+i，则（1+z）•$\overline{Z}$=（　　）

A、3－i　　B、3+i

C、1+3i　　D、3

考点：复数代数形式的混合运算。

专题：计算题。

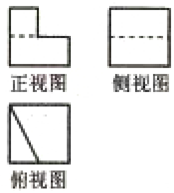
分析：求出$\overline{Z}$，然后代入（1+z）•$\overline{Z}$，利用复数的运算法则展开化简为：a+bi（a，b∈R）的形式，即可得到答案.

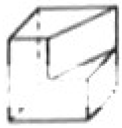
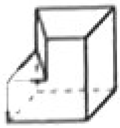
解答：解：∵复数 z=1+i，i 为虚数单位，$\overline{Z}$=1－i，则（1+z）•$\overline{Z}$=（2+i）（1－i）=3－i

故选 A.

点评：本题考查复数代数形式的混合运算，共轭复数，考查计算能力，是基础题，常考题型.

3、（2011•浙江）若某几何体的三视图如图所示，则这个几何体的直观图可以是（　　）



A、　B、

C、　D、

考点：由三视图还原实物图。

分析：根据已知中的三视图，结合三视图中有两个三角形即为锥体，有两个矩形即为柱体，有两个梯形即为台体，将几何体分解为简单的几何体分析后，即可得到答案．

解答：解：由已知中三视图的上部分有两个矩形，一个三角形

故该几何体上部分是一个三棱柱

下部分是三个矩形

故该几何体下部分是一个四棱柱

故选 D

点评：本题考查的知识点是由三视图还原实物图，如果三视图均为三角形，则该几何体必为三棱锥；如果三视图中有两个三角形和一个多边形，则该几何体为 N 棱锥（N 值由另外一个视图的边数确定）；如果三视图中有两个为矩形和一个多边形，则该几何体为 N 棱柱（N 值由另外一个视图的边数确定）；如果三视图中有两个为梯形和一个多边形，则该几何体为 N 棱柱（N 值由另外一个视图的边数确定）；如果三视图中有两个三角形和一个圆，则几何体为圆锥．如果三视图中有两个矩形和一个圆，则几何体为圆柱．如果三视图中有两个梯形和一个圆，则几何体为圆台．

4、（2011•浙江）下列命题中错误的是（　　）

A、如果平面 α⊥平面 β，那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β　　B、如果平面 α 不垂直于平面 β，那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β

C、如果平面 α⊥平面 γ，平面 β⊥平面 γ，α∩β=l，那么 l⊥平面 γ　　D、如果平面 α⊥平面 β，那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β

考点：平面与平面垂直的性质。

专题：常规题型。

分析：本题考查的是平面与平面垂直的性质问题．在解答时：A 注意线面平行的定义再结合实物即可获得解答；B 反证法即可获得解答；C 利用面面垂直的性质通过在一个面内作交线的垂线，然后用线面垂直的判定定理即可获得解答；D 结合实物举反例即可．

解答：解：由题意可知：

A、结合实物：教室的门面与地面垂直，门面的上棱对应的直线就与地面平行，故此命题成立；

B、假若平面 α 内存在直线垂直于平面 β，根据面面垂直的判定定理可知两平面垂直．故此命题成立；

C、结合面面垂直的性质可以分别在 α、β 内作异于 l 的直线垂直于交线，再由线面垂直的性质定理可知所作的垂线平行，进而得到线面平行再由线面平行的性质可知所作的直线与 l 平行，又∵两条平行线中的一条垂直于平面那么另一条也垂直于平面，故命题成立；

D、举反例：教室内侧墙面与地面垂直，而侧墙面内有很多直线是不垂直与地面的．故此命题错误．

故选 D．

点评：本题考查的是平面与平面垂直的性质问题．在解答的过程当中充分体现了面面垂直、线面垂直、线面平行的定义判定定理以及性质定理的应用．值得同学们体会和反思．

5、（2011•浙江）设实数 x、y 满足不等式组$\begin{cases} x+2y-5>0 \\ 2x+y-7>0 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$，若 x、y 为整数，则 3x+4y 的最小值是（　　）

A、14　　B、16

C、17　　D、19

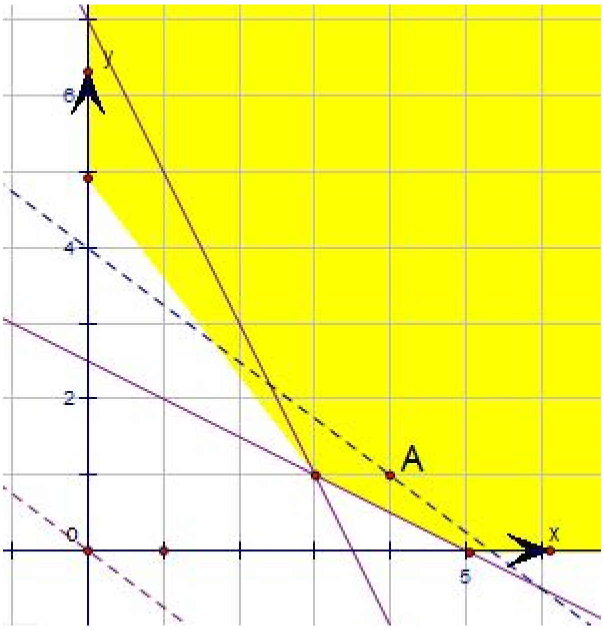
考点：简单线性规划。

专题：计算题。

分析：本题考察的知识点是简单线性规划的应用，我们要先画出满足约束条件$\begin{cases} x+2y-5>0 \\ 2x+y-7>0 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$的平面区域，然后分析平面区域里各个整点，然后将其代入 3x+4y 中，求出 3x+4y 的最小值．

解答：解：依题意作出可行性区域$\begin{cases} x+2y-5>0 \\ 2x+y-7>0 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$如图，目标函数 z=3x+4y 在点（4，1）处取到最小值 z=16．

故选 B．



点评：在解决线性规划的小题时，常用“角点法”，其步骤为：①由约束条件画出可行域⇒②求出可行域各个角点的坐标⇒③将坐标逐一代入目标函数⇒④验证，求出最优解．

6、（2011•浙江）若 $0<a<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=$（　　）

A、$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B、$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C、$\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D、$-\frac{\sqrt{6}}{9}$

考点：三角函数的恒等变换及化简求值。

专题：计算题。

分析：先利用同角三角函数的基本关系分别求得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 和 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$ 的值，进而利用 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]$ 通过余弦的两角和公式求得答案．

解答：解：∵$0<a<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，

$\therefore\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

故选 C

点评：本题主要考查了三角函数的恒等变换及化简求值．关键是根据 cos（$\alpha+\frac{\beta}{2}$）=cos[（$\frac{\pi}{4}+\alpha$）－（$\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$）]，巧妙利用两角和公式进行求解．

7、（2011•浙江）若 a、b 为实数，则“0＜ab＜1”是“a＜$\frac{1}{b}$”或“b＞$\frac{1}{a}$”的（　　）

A、充分而不必要条件　　B、必要而不充分条件

C、充分必要条件　　D、既不充分也不必要条件

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断；不等关系与不等式。

专题：计算题。

分析：因为“0＜ab＜1”⇒“a＜$\frac{1}{b}$”或“b＞$\frac{1}{a}$”．“a＜$\frac{1}{b}$”或“b＞$\frac{1}{a}$”不能推出“0＜ab＜1”，所以“0＜ab＜1”是“a＜$\frac{1}{b}$”或“b＞$\frac{1}{a}$”的充分而不必要条件．

解答：解：∵a、b 为实数，0＜ab＜1，

∴“0＜a＜$\frac{1}{b}$”或“0＞b＞$\frac{1}{a}$”

∴“0＜ab＜1”⇒“a＜$\frac{1}{b}$”或“b＞$\frac{1}{a}$”．

“a＜$\frac{1}{b}$”或“b＞$\frac{1}{a}$”不能推出“0＜ab＜1”，

所以“0＜ab＜1”是“a＜$\frac{1}{b}$”或“b＞$\frac{1}{a}$”的充分而不必要条件．

故选 A．

点评：本题考查充分分条件、必要条件和充要条件，解题时要注意基本不等式的合理运用．

8、（2011•浙江）已知椭圆$\frac{x^2}{k+8}+\frac{y^2}{9}=1$的离心率 e=$\frac{1}{2}$，则 k 的值为（　　）

A、4 或$\frac{5}{4}$　　B、4

C、4 或－$\frac{5}{4}$　　D、－$\frac{5}{4}$

考点：椭圆的简单性质；圆锥曲线的综合。

专题：计算题。

分析：分椭圆的焦点在 x 轴时和椭圆的焦点在 y 轴时两种情况进行讨论，分别表示出椭圆的离心率求得 k．

解答：解：当椭圆的焦点在 x 轴时，a^2=k+8，b^2=9

$\therefore c^2=k-1$，由 $e=\frac{1}{2}$求得 k=4，

当椭圆的焦点在 y 轴时，$b^2=k+8$，$a^2=9$

$\therefore c^2=1-k$，$\frac{1-k}{9}=\frac{1}{4}$，求得 $k=-\frac{5}{4}$

故选 C.

点评：本题主要考查了椭圆的简单性质．本题易出现漏解．排除错误的办法是：因为 1+k 与 9 的大小关系不定，所以椭圆的焦点可能在 x 轴上，也可能在 y 轴上．故必须进行讨论．

9、（2011•浙江）有 5 本不同的书，其中语文书 2 本，数学书 2 本，物理书 1 本．若将其随机地摆放到书架的同一层上，则同一科目的书都不相邻的概率是（　　）

A、$\frac{1}{5}$　　B、$\frac{2}{5}$

C、$\frac{3}{5}$　　D、$\frac{4}{5}$

考点：等可能事件的概率。

专题：计算题。

分析：本题是一个等可能事件的概率，试验发生包含的事件是把 5 本书随机的摆到一个书架上，共有 A_5^5 种结果，满足条件的事件是同一科目的书都不相邻，共有 $C_2^1A_2^2A_3^3$ 种结果，得到概率．

解答：解：由题意知本题是一个等可能事件的概率，

试验发生包含的事件是把 5 本书随机的摆到一个书架上，共有 $A_5^5=120$ 种结果，

下分类研究同类数不相邻的排法种数

假设第一本是语文书（或数学书），第二本是数学书（或语文书）则有 4×2×2×2×1=32 种可能；

假设第一本是语文书（或数学书），第二本是物理书，则有 4×1×2×1×1=8 种可能；

假设第一本是物理书，则有 1×4×2×1×1=8 种可能．

$\therefore$同一科目的书都不相邻的概率 $P=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$，

故选 B.

点评：本题考查等可能事件的概率，是一个基础题，本题是浙江卷理科的一道选择题目，这种题目可以作为选择或填空出现，也可以作为一道解答题目出现．

10、（2011•浙江）设 a，b，c 为实数，f（x）=（x+a）（x^2+bx+c），g（x）=（ax+1）（cx^2+bx+1）．记集合 S={x|f（x）=0，x∈R}，T={x|g（x）=0，x∈R}．若{S}，{T}分别为集合 S，T 的元素个数，则下列结论不可能的是（　　）

A、{S}=1 且{T}=0　　B、{S}=1 且{T}=1

C、{S}=2 且{T}=2　　D、{S}=2 且{T}=3

考点：集合的包含关系判断及应用。

专题：计算题。

分析：通过给 a，b，c 赋特值，得到 A，B，C 三个选项有正确的可能，故本题可以通过排除法得到答案.

解答：解：∵f（x）=（x+a）（x^2+bx+c），当 f（x）=0 时至少有一个根 x=﹣a

当 b^2﹣4c=0 时，f（x）=0 还有一根 $x=-\frac{b}{2}$ 只要 b≠﹣2a，f（x）=0 就有 2 个根；当 b=﹣2a，f（x）=0 是一个根

当 b^2﹣4c＜0 时，f（x）=0 只有一个根；

当 b^2﹣4c＞0 时，f（x）=0 只有二个根或三个根

当 a=b=c=0 时{S}=1，{T}=0

当 a＞0，b=0，c＞0 时，{S}=1 且{T}=1

当 a=c=1，b=﹣2 时，有{S}=2 且{T}=2

故选 D

点评：本题考查解决选择题时，常通过举特例，利用排除法将一定不正确的选项排除，从而选出正确选项，排除法是解决直接求解有困难的选择题的一个好方法，合理恰当的运用，可以提高解题的速度.

二、填空题（共 7 小题，每小题 4 分，满分 28 分）

11、（2011•浙江）若函数 f（x）=x^2﹣|x+a|为偶函数，则实数 a=__0__.

考点：偶函数。

专题：计算题。

分析：根据 f（x）为偶函数，利用偶函数的定义，得到等式恒成立，求出 a 的值.

解答：解：∵f（x）为偶函数

∴f（﹣x）=f（x）恒成立

即 x^2﹣|x+a|=x^2﹣|x﹣a|恒成立

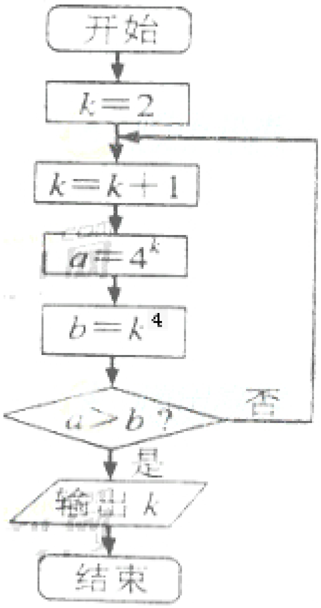
即|x+a|=|x﹣a|恒成立

所以 a=0

故答案为：0

点评：本题考查偶函数的定义：f（x）=f（﹣x）对于定义域内的 x 恒成立.

12、（2011•浙江）某程序框图如图所示，则该程序运行后输出的 k 的值是__5__.



考点：程序框图。

专题：图表型。

分析：分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是利用循环计算并输出k值．模拟程序的运行过程，用表格对程序运行过程中各变量的值进行分析，不难得到最终的输出结果．

解答：解：程序在运行过程中各变量的值如下表示：

第一圈　k=3　$a=4^3b=3^4$

第二圈　k=4　$a=4^4b=4^4$

第三圈　k=5　$a=4^5b=54$

此时 a＞b，退出循环，k 值为 5

故答案为：5．

点评：对于流程图处理方法是：①分析流程图（或伪代码），从流程图（或伪代码）中即要分析出计算的类型，又要分析出参与计算的数据（如果参与运算的数据比较多，也可使用表格对数据进行分析管理）⇒②建立数学模型，根据第一步分析的结果，选择恰当的数学模型③解模．

13、（2011•浙江）若二项式（$x-\frac{a}{\sqrt{x}}$）^{n}（a＞0）的展开式中 x 的系数为 A，常数项为 B，若 B=4A，则 a 的值是__2__．

考点：二项式系数的性质。

专题：计算题。

分析：利用二项展开式的通项公式求出通项，令 x 的指数为 1，0 求出 A，B；列出方程求出 a．

解答：解：展开式的通项为$T_{r+1}=(-a)^rC_n^rx^{n-\frac{3r}{2}}$

令$n-\frac{3r}{2}=1$得 $r=\frac{2n-2}{3}$

所以 A= $(-a)^{\frac{2n-2}{3}}C_n^{\frac{2n-2}{3}}$

令$n-\frac{3r}{2}=0$得$r=\frac{2n}{3}$

所以 B= $(-a)^{\frac{2n}{3}}C_n^{\frac{2n}{3}}$

∵B=4A

∴ $(-a)^{\frac{2n}{3}}C_n^{\frac{2n}{3}}=4(-a)^{\frac{2n-2}{3}}C_n^{\frac{2n-2}{3}}$

解得 a=2

故答案为：2

点评：本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题．

14、（2011•浙江）若平面向量 α，β 满足|α|=1，|β|≤1，且以向量 α，β 为邻边的平行四边形的面积为$\frac{1}{2}$，则 α 和 β 的夹角 θ 的范围是__[30°，150°]__．

考点：数量积表示两个向量的夹角。

专题：计算题。

分析：根据平行四边形的面积，得到对角线分成的两个三角形的面积，利用正弦定理写出三角形面积的表示式，表示出要求角的正弦值，根据角的范围写出符合条件的角．

解答：解：∵$\frac{1}{2}|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin\theta=\frac{1}{4}$

∴$\sin\theta=\frac{1}{2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$，

∵$|\vec{\alpha}|=1$，$|\vec{\beta}|\le 1$，

∴$\sin\theta\geq\frac{1}{2}$，

∵θ∈[0，π]

∴θ∈[30°，150°]，

故答案为：[30°，150°]，或$[\frac{\pi}{6}，\frac{5\pi}{6}]$，

点评：本题考查两个向量的夹角，考查利用正弦定理表示三角形的面积，考查不等式的变化，是一个比较简单的综合题目．

15、（2011•浙江）某毕业生参加人才招聘会，分别向甲、乙、丙三个公司投递了个人简历，假定该毕业生得到甲公司面试的概率为$\frac{2}{3}$，得到乙、丙公司面试的概率均为P，且三个公司是否让其面试是相互独立的．记X为该毕业生得到面试的公司个数．若P（X=0）=$\frac{1}{12}$，则随机变量X的数学期望E（X）=__$\frac{5}{3}$__．

考点：离散型随机变量的期望与方差；离散型随机变量及其分布列。

专题：计算题。

分析：根据该毕业生得到面试的机会为0时的概率，做出得到乙、丙公司面试的概率，根据题意得到X的可能取值，结合变量对应的事件写出概率和做出期望．

解答：解：由题意知X为该毕业生得到面试的公司个数，则X的可能取值是0，1，2，3，

∵P（X=0）=$\frac{1}{12}$，

∴$\frac{1}{3}(1-p)^2=\frac{1}{12}$，

∴p=$\frac{1}{2}$，

p（x=1）=$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{12}$

P（X=2）=$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$，

p（x=3）=$1-\frac{1}{12}-\frac{4}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}$，

∴EX=$1\times\frac{4}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{2}{12}=\frac{5}{3}$，

故答案为：$\frac{5}{3}$

点评：本题考查离散型随机变量的分布列和离散型随机变量的期望，考查生活中常见的一种题目背景，是一个基础题目．

16、（2011•浙江）设x，y为实数，若$4x^2+y^2+xy=1$，则2x+y的最大值是__$\frac{2\sqrt{10}}{5}$__．

考点：基本不等式。

专题：计算题；转化思想。

分析：设t=2x+y，将已知等式用t表示，整理成关于x的二次方程，二次方程有解，判别式大于等于0，求出t的范

围，求出 2x+y 的最大值．

解答：解：∵$4x^2+y^2+xy=1$

∴$(2x+y)^2-3xy=1$

令 $t=2x+y$ 则 $y=t-2x$

∴$t^2-3(t-2x)x=1$

即 $6x^2-3tx+t^2-1=0$

∴$\triangle=9t^2-24(t^2-1)=-15t^2+24\ge 0$

解得 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}\le t\le\frac{2\sqrt{10}}{5}$

∴2x+y 的最大值是$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

故答案为$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

点评：本题考查利用换元转化为二次方程有解、二次方程解的个数由判别式决定．

17、（2011•浙江）一个椭圆的焦点将其准线间的距离三等分，则椭圆的离心率为__$\frac{\sqrt{3}}{3}$__．

考点：椭圆的简单性质。

专题：计算题。

分析：根据题意分别表示出椭圆的焦距和准线间的距离的三分之一，建立等式求得 a 和 c 的关系，则椭圆的离心率可得．

解答：解：∵$2c=\frac{a^2}{c}\times 2\times\frac{1}{3}$

∴$3c^2=a^2$，

∴$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$

点评：本题主要考查了椭圆的简单性质．求椭圆的离心率问题，通常有两种处理方法，一是求 a，求 c，再求比．二是列含 a 和 c 的齐次方程，再化含 e 的方程，解方程即可．

三、解答题（共 5 小题，满分 72 分）

18、（2011•浙江）在△ABC 中，角 A，B，C，所对的边分别为 a，b，c．已知 $\sin A+\sin C=p\sin B$（$p\in R$）．且 $ac=\frac{1}{4}b^2$．

（Ⅰ）当 $p=\frac{5}{4}$，b=1 时，求 a，c 的值；

（Ⅱ）若角 B 为锐角，求 p 的取值范围．

考点：解三角形。

专题：计算题。

分析：（Ⅰ）利用正弦定理把题设等式中的角的正弦转化成边，解方程组求得 a 和 c 的值．

（Ⅱ）先利用余弦定理求得 a，b 和 c 的关系，把题设等式代入表示出 p^2，进而利用 cosB 的范围确定 p^2 的范围，进而确定 pd 范围．

解答：（Ⅰ）解：由题设并利用正弦定理得 $\begin{cases} a+c=\frac{5}{4} \\ ac=\frac{1}{4} \end{cases}$

故可知 a，c 为方程 $x^2-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}=0$ 的两根，

进而求得 a=1，$c=\frac{1}{4}$或 $a=\frac{1}{4}$，b=1

（Ⅱ）解：由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=p^2b^2-\frac{1}{2}b^2\cos B-\frac{1}{2}b^2$，

即 $p^2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos B$，

因为 $0<\cos B<1$，

所以 $p^2\in(\frac{3}{2}，2)$，由题设知 $p>0$，所以$\frac{\sqrt{6}}{2}<p<\sqrt{2}$

点评：本题主要考查了解三角形问题．学生能对正弦定理和余弦定理的公式及变形公式熟练应用．

19、（2011•浙江）已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的首项 a_1 为 a（a∈R）设数列的前 n 项和为 S_n，且$\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}$，$\frac{1}{a_4}$成等比数列．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式及 S_n；

（Ⅱ）记 $A_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\ldots+\frac{1}{S_n}$，$B_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2^{n-1}}}$，当 $a\geq 2$ 时，试比较 A_n 与 B_n 的大小．

考点：数列与不等式的综合；数列的求和；等差数列的性质。

专题：计算题；证明题。

分析：（Ⅰ）设出等差数列的公差，利用等比中项的性质，建立等式求得 d，则数列的通项公式和前 n 项的和可得．

（Ⅱ）利用（Ⅰ）的 a_n 和 S_n，代入不等式，利用裂项法和等比数列的求和公式整理 A_n 与 B_n，最后对 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况分情况进行比较．

解答：解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由$\left(\frac{1}{a_2}\right)^2=\frac{1}{a_1}\bullet\frac{1}{a_4}$,

得$(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$，因为 $d\neq0$，所以 $d=a_1=a$

所以 $a_n=na$，$S_n=\frac{(n+1)na}{2}$

（Ⅱ）解：$\because\frac{1}{S_n}=\frac{2}{a}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore A_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\ldots+\frac{1}{S_n}=\frac{2}{a}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$\because a_{2^n-1}=2^{n-1}a$，所以

$B_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2^n-1}}=\frac{1}{a}\bullet\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{a}\bullet\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

当 $n\geq2$ 时，$2^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n>n+1$，即 $1-\frac{1}{n+1}<1-\frac{1}{2^n}$

所以，当 $a>0$ 时，$A_n<B_n$；当 $a<0$ 时，$A_n>B_n$.

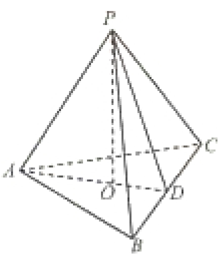
点评：本题主要考查了等差数列的性质．涉及了等差数列的通项公式，求和公式以及数列的求和的方法，综合考查了基础知识的运用．

20、（2011•浙江）如图，在三棱锥 P﹣ABC 中，AB=AC，D 为 BC 的中点，PO⊥平面 ABC，垂足 O 落在线段 AD 上，已知

BC=8，PO=4，AO=3，OD=2

（Ⅰ）证明：AP⊥BC；

（Ⅱ）在线段 AP 上是否存在点 M，使得二面角 A﹣MC﹣β 为直二面角？若存在，求出 AM 的长；若不存在，请说明理由．



考点：直线与平面垂直的性质；与二面角有关的立体几何综合题。

分析：以 O 为原点，以 AD 方向为 Y 轴正方向，以射线 OP 的方向为 Z 轴正方向，建立空间坐标系，我们易求出几何体中各个顶点的坐标．

（I）我们易求出$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BC}$的坐标，要证明 AP⊥BC，即证明$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BC}$=0；

（II）要求满足条件使得二面角 A﹣MC﹣β 为直二面角的点 M，即求平面 BMC 和平面 APC 的法向量互相垂直，由此求出 M 点的坐标，然后根据空间两点之间的距离公式，即可求出 AM 的长．

解答：解：以 O 为原点，以 AD 方向为 Y 轴正方向，以射线 OP 的方向为 Z 轴正方向，建立空间坐标系，

则 O（0，0，0），A（0，﹣3，0），B（4，2，0），C（﹣4，2，0），P（0，0，4）

（I）则$\overrightarrow{AP}$=（0，3，4），$\overrightarrow{BC}$=（﹣8，0，0）

由此可得$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BC}$=0

∴$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$

即 AP⊥BC

（II）设$\overrightarrow{PM}$=λ$\overrightarrow{PA}$，λ≠1，则$\overrightarrow{PM}$=λ（0，﹣3，﹣4）

$\overrightarrow{BM}$=$\overrightarrow{BP}$+$\overrightarrow{PM}$=$\overrightarrow{BP}$+λ$\overrightarrow{PA}$=（﹣4，﹣2，4）+λ（0，﹣3，﹣4）

$\overrightarrow{AC}$=（﹣4，5，0），$\overrightarrow{BC}$=（﹣8，0，0）

设平面 BMC 的法向量$\overrightarrow{a}$=（a，b，c）

则$\begin{cases}\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{a}=0\\ \overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{a}=0\end{cases}$

$\begin{cases}-4a-(2+3\lambda)b+(4-4\lambda)c=0\\ -8a=0\end{cases}$

令 b=1，则$\overrightarrow{a}$=（0，1，$\frac{2+3\lambda}{4-4\lambda}$）

平面 APC 的法向量$\overrightarrow{b}$=（x，y，z）

则$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{b}=0\\ \overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{b}=0\end{cases}$

即$\begin{cases}3y+4z=0\\ -4x+5y=0\end{cases}$

令 x=5

则$\vec{b}$=（5，4，﹣3）

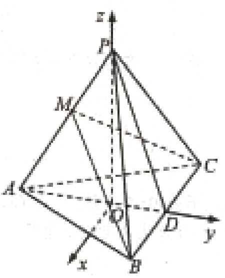
由$\vec{a}\bullet\vec{b}$=0

得 $4-3\bullet\frac{2+3\lambda}{4-4\lambda}=0$

解得 $\lambda=\frac{2}{5}$

故 AM=3

综上所述，存在点 M 符合题意，此时 AM=3

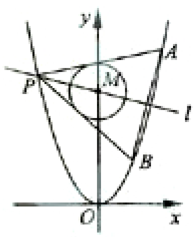


点评：本题考查的知识点是线线垂直的判定，与二面角有关的立体几何综合题，其中建立空间坐标系，求出相关向量，然后将垂直问题转化为向量垂直即向量内积等 0 是解答本题的关键.

21、（2011•浙江）已知抛物线 C_1：$x^2=y$，圆 C_2：$x^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为点 M

（Ⅰ）求点 M 到抛物线 C_1 的准线的距离；

（Ⅱ）已知点 P 是抛物线 C_1 上一点（异于原点），过点 P 作圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于 A，B 两点，若过 M，P 两点的直线 l 垂足于 AB，求直线 l 的方程.



考点：圆与圆锥曲线的综合。

专题：综合题。

分析：(I）由题意抛物线 C_1：$x^2=y$，可以知道其准线方程为$y=-\frac{1}{4}$，有圆 C_2：$x^2+(y-4)^2=1$ 的方程可以知道圆心坐标为（0，4），所求易得到所求的点到线的距离；

（II）由于已知点 P 是抛物线 C_1 上一点（异于原点），所以可以设出点 P 的坐标，利用过点 P 作圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于 A，B 两点，也可以设出点 A，B 的坐标，再设出过 P 的圆 C_2 的切线方程，利用交与抛物线 C_2 两点，联立两个方程，利用根与系数之间的关系整体得到两切线的斜率的式子，有已知的 MP⊥AB，得到方程进而求解．

解答：解：（I）由题意画出简图为：

由于抛物线 C_1：$x^2=y$，

利用抛物线的标准方程易知其准线方程为：$y=-\frac{1}{4}$，

利用圆 C_2：$x^2+(y-4)^2=1$ 的方程得起圆心 M（0，4），

利用点到直线的距离公式可以得到距离为$\frac{17}{4}$．

（II）设点 $P(x_0，x_0^2)$，$A(x_1，x_1^2)$，$B(x_2，x_2^2)$；

由题意得：$x_0\neq0$，$x_2\neq\pm1$，$x_1\neq x_2$，

设过点 P 的圆 c_2 的切线方程为：$y-x_0^2=k(x-x_0)$ 即 $y=kx-kx_0+x_0^2$①

则$\frac{|kx_0+4-x_0^2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即 $(x_0^2-1)k^2+2x_0(4-x_0^2)k+(x_0^2-4)^2-1=0$，

设 PA，PB 的斜率为 k_1，k_2（$k_1\neq k_2$），则 k_1，k_2 应该为上述方程的两个根，

$$\therefore k_1+k_2=\frac{2x_0^2(x_0^2-4)}{x_0^2-1}，k_1\bullet k_2=\frac{(x_0^2-4)^2-1}{x_0^2-1};$$

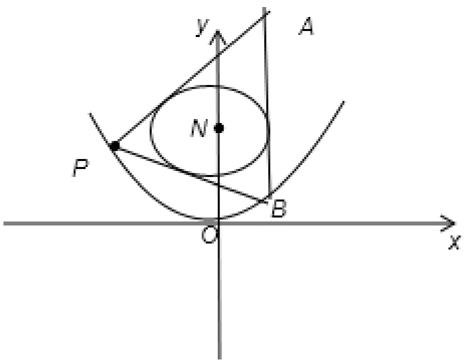
代入①得：$x^2-kx+kx_0-x_0^2=0$ 则 x_1，x_2 应为此方程的两个根，

故 $x_1=k_1-x_0$，$x_2=k_2-x_0$

$\therefore k_{AB}=x_1+x_2=k_1+k_2-2x_0=\frac{2x_0(x_0^2-4)}{x_0^2-1}-2x_0，k_{MP}=\frac{x_0^2-4}{x_0}$

由于 MP⊥AB，$\therefore k_{AB}\bullet K_{MP}=-1\Rightarrow x_0^2=\frac{23}{5}$

故 P $\left(\pm\sqrt{\frac{23}{5}}，\frac{23}{5}\right)$ $\therefore$直线l的方程为：$y=\pm\frac{3\sqrt{115}}{115}x+4$.



点评：此题重点考查了抛物线即圆的标准方程，还考查了相应的曲线性质即设出直线方程，利用根与系数的思想整体代换，进而解出点的坐标，理应直线与圆相切得到要求的直线方程．

22、（2011•浙江）设函数 $f(x)=(x-a)^2\ln x$，$a\in R$

（Ⅰ）若 $x=e$ 为 $y=f(x)$ 的极值点，求实数 a；

（Ⅱ）求实数 a 的取值范围，使得对任意的 $x\in(0,3a]$，恒有 $f(x)\le 4e^2$ 成立．

注：e 为自然对数的底数．

考点：函数在某点取得极值的条件；导数在最大值、最小值问题中的应用。

专题：计算题。

分析：(I) 利用极值点处的导数值为 0，求出导函数，将 $x=e$ 代入等于 0，求出 a，再将 a 的值代入检验．

(II) 对 a 分类讨论，求出 $f(x)$ 的最大值，令最大值小于 $4e^2$，解不等式求出 a 的范围．

解答：解：(I) 求导得 $f'(x)=2(x-a)\ln x+\frac{(x-a)^2}{x}=(x-a)(2\ln x+1-\frac{a}{x})$，

因为 $x=e$ 是 $f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(e)=0$

解得 $a=e$ 或 $a=3e$．

经检验，符合题意，

所以 $a=e$，或 $a=3e$

(II) ①当 $0<3a\le 1$ 时，对于任意的实数 $x\in(0,3a]$，恒有 $f(x)\le 0<4e^2$ 成立，即 $0<a\le\frac{1}{3}$ 符合题意

②当 $3a>1$ 时即 $a>\frac{1}{3}$ 时，由①知，$x\in(0,1]$ 时，不等式恒成立，故下研究函数在 $(1,3a]$ 上的最大值，

首先有 $f(3a)=(3a-a)^2\ln 3a=4a^2\ln 3a$ 此值随着 a 的增大而增大，故应有

$4a^2\ln 3a\le 4e^2$ 即 $a^2\ln 3a\le e^2$，

故参数的取值范围是 $0<a\le\frac{1}{3}$ 或 $a>\frac{1}{3}$ 且 $a^2\ln 3a\le e^2$，

点评：本题考查函数的极值点的导数值为 0、解不等式恒成立的参数范围常转化为求函数的最值．