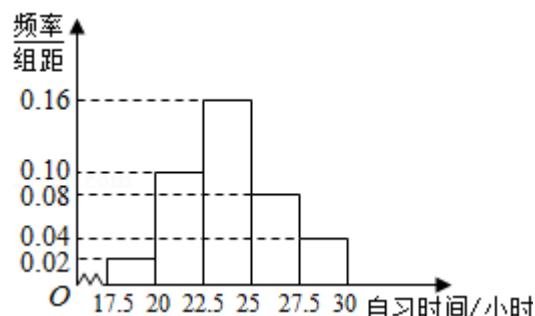


2016 年山东省高考数学试卷（理科）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，每小题给出四个选项，只有一个选项符合题目要求。

1. (5 分) (2016•山东) 若复数 z 满足 $2z + \overline{z} = 3 - 2i$ ，其中 i 为虚数单位，则 $z = (\quad)$
A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1+2i$ D. $-1-2i$
2. (5 分) (2016•山东) 设集合 $A = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x^2 - 1 < 0\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$
A. $(-1, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$
3. (5 分) (2016•山东) 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间（单位：小时），制成了如图所示的频率分布直方图，其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$ ，样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30]$. 根据直方图，这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ()

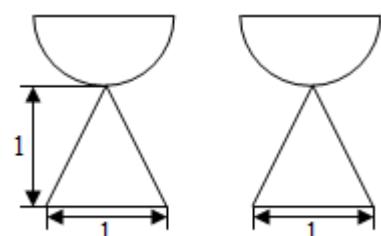


- A. 56 B. 60 C. 120 D. 140

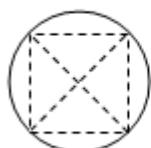
4. (5 分) (2016•山东) 若变量 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \leqslant 2 \\ 2x-3y \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最大值是 ()

- A. 4 B. 9 C. 10 D. 12

5. (5 分) (2016•山东) 一个由半球和四棱锥组成的几何体，其三视图如图所示。则该几何体的体积为 ()



正(主)视图 侧(左)视图



俯视图

- A. $\frac{1+2\pi}{3}$ B. $\frac{1+\sqrt{2}\pi}{3}$ C. $\frac{1+\sqrt{2}\pi}{6}$ D. $\frac{1+\sqrt{2}\pi}{6}$

6. (5分)(2016•山东)已知直线 a , b 分别在两个不同的平面 α , β 内. 则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面 α 和平面 β 相交”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. (5分)(2016•山东)函数 $f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$ 的最小正周期是()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

8. (5分)(2016•山东)已知非零向量 \vec{m} , \vec{n} 满足 $4|\vec{m}|=3|\vec{n}|$, $\cos<\vec{m}, \vec{n}>=\frac{1}{3}$. 若 $\vec{n} \perp (t\vec{m}+\vec{n})$, 则实数 t 的值为()

- A. 4 B. -4 C. $\frac{9}{4}$ D. $-\frac{9}{4}$

9. (5分)(2016•山东)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R . 当 $x < 0$ 时, $f(x)=x^3-1$; 当

$-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x+\frac{1}{2})=f(x-\frac{1}{2})$. 则 $f(6)=$ ()

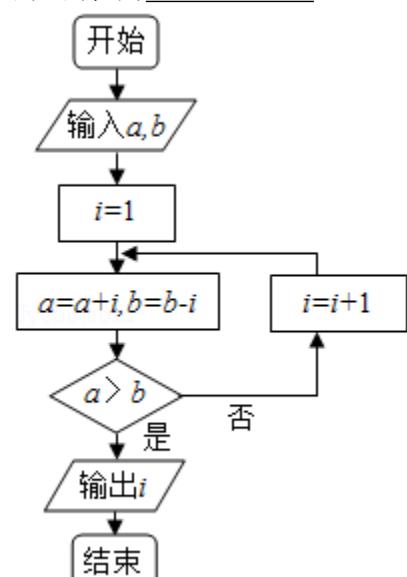
- A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

10. (5分)(2016•山东)若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y=f(x)$ 具有T性质. 下列函数中具有T性质的是()

- A. $y=\sin x$ B. $y=\ln x$ C. $y=e^x$ D. $y=x^3$

二、填空题: 本大题共5小题, 每小题5分, 共25分.

11. (5分)(2016•山东)执行如图的程序框图, 若输入的 a , b 的值分别为0和9, 则输出的 i 的值为_____.



12. (5分)(2016•山东)若 $(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式中 x^5 的系数是 -80, 则实数 $a=$ _____.

13. (5分) (2016·山东) 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 若矩形ABCD的四个顶点在E上, AB, CD的中点为E的两个焦点, 且 $2|AB|=3|BC|$, 则E的离心率是_____.

14. (5分) (2016·山东) 在 $[-1, 1]$ 上随机地取一个数k, 则事件“直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交”发生的概率为_____.

15. (5分) (2016·山东) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$, 其中 $m > 0$, 若存在实数b, 使得关于x的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根, 则m的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共6小题, 共75分.

16. (12分) (2016·山东) 在 $\triangle ABC$ 中, 角A, B, C的对边分别为a, b, c, 已知 $2(\tan A + \tan B) = \frac{\tan A + \tan B}{\cos B \cos A}$.

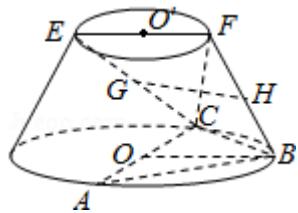
(I) 证明: $a+b=2c$;

(II) 求 $\cos C$ 的最小值.

17. (12分) (2016·山东) 在如图所示的圆台中, AC是下底面圆O的直径, EF是上底面圆O'的直径, FB是圆台的一条母线.

(I) 已知G, H分别为EC, FB的中点, 求证: GH//平面ABC;

(II) 已知 $EF=FB=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$, $AB=BC$, 求二面角F-BC-A的余弦值.



18. (12分) (2016·山东) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前n项和 $S_n=3n^2+8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n=b_n+b_{n+1}$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 令 $c_n=\frac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前n项和 T_n .

19. (12分) (2016·山东) 甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动, 每轮活动由甲、乙各猜一个成语, 在一轮活动中, 如果两人都猜对, 则“星队”得3分; 如果只有一个人猜对, 则“星队”得1分; 如果两人都没猜对, 则“星队”得0分. 已知甲每轮猜对的概率是 $\frac{3}{4}$, 乙每轮猜对

的概率是 $\frac{2}{3}$; 每轮活动中甲、乙猜对与否互不影响. 各轮结果亦互不影响. 假设“星队”参加两轮活动, 求:

(I) “星队”至少猜对3个成语的概率;

(II) “星队”两轮得分之和为X的分布列和数学期望 EX .

20. (13分) (2016·山东) 已知 $f(x)=a(x-\ln x)+\frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a=1$ 时, 证明 $f(x) > f(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 成立.

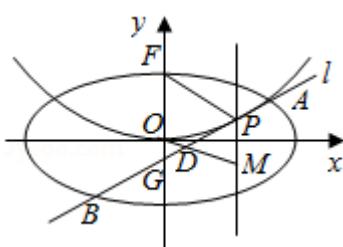
21. (14分) (2016•山东) 平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 抛物线 $E: x^2 = 2y$ 的焦点 F 是 C 的一个顶点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 P 是 E 上的动点, 且位于第一象限, E 在点 P 处的切线 l 与 C 交于不同的两点 A, B , 线段 AB 的中点为 D , 直线 OD 与过 P 且垂直于 x 轴的直线交于点 M .

(i) 求证: 点 M 在定直线上;

(ii) 直线 l 与 y 轴交于点 G , 记 $\triangle PFG$ 的面积为 S_1 , $\triangle PDM$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值及取得最大值时点 P 的坐标.



2016年山东省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，每小题给出四个选项，只有一个选项符合题目要求。

1. (5分) (2016·山东) 若复数 z 满足 $2z + \overline{z} = 3 - 2i$ ，其中 i 为虚数单位，则 $z = (\quad)$
A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1+2i$ D. $-1-2i$

【考点】复数代数形式的乘除运算。

【专题】计算题；规律型；转化思想；数系的扩充和复数。

【分析】设出复数 z ，通过复数方程求解即可。

【解答】解：复数 z 满足 $2z + \overline{z} = 3 - 2i$ ，

设 $z = a + bi$ ，

可得： $2a + 2bi + a - bi = 3 - 2i$ 。

解得 $a = 1$, $b = -2$.

$z = 1 - 2i$.

故选：B.

【点评】本题考查复数的代数形式混合运算，考查计算能力。

2. (5分) (2016·山东) 设集合 $A = \{y|y=2^x, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x|x^2 - 1 < 0\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$
A. $(-1, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

【考点】并集及其运算。

【专题】计算题；集合思想；数学模型法；集合。

【分析】求解指数函数的值域化简 A，求解一元二次不等式化简 B，再由并集运算得答案。

【解答】解： $\because A = \{y|y=2^x, x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$,

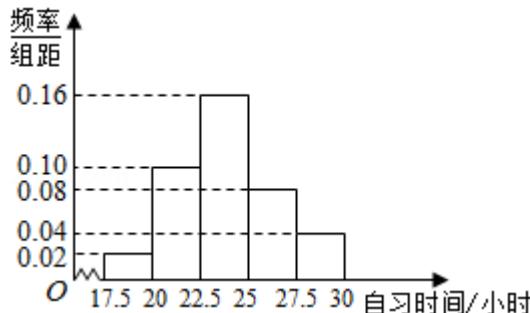
$B = \{x|x^2 - 1 < 0\} = (-1, 1)$,

$\therefore A \cup B = (0, +\infty) \cup (-1, 1) = (-1, +\infty)$.

故选：C.

【点评】本题考查并集及其运算，考查了指数函数的值域，考查一元二次不等式的解法，是基础题。

3. (5分) (2016·山东) 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间（单位：小时），制成了如图所示的频率分布直方图，其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$ ，样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30]$. 根据直方图，这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ()



- A. 56 B. 60 C. 120 D. 140

【考点】频率分布直方图.

【专题】计算题; 图表型; 概率与统计.

【分析】根据已知中的频率分布直方图, 先计算出自习时间不少于 22.5 小时的频率, 进而可得自习时间不少于 22.5 小时的频数.

【解答】解: 自习时间不少于 22.5 小时的频率为: $(0.16+0.08+0.04) \times 2.5=0.7$, 故自习时间不少于 22.5 小时的频率为: $0.7 \times 200=140$,

故选: D

【点评】本题考查的知识点是频率分布直方图, 难度不大, 属于基础题目.

4. (5 分) (2016•山东) 若变量 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \leqslant 2 \\ 2x-3y \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最大值是 ()

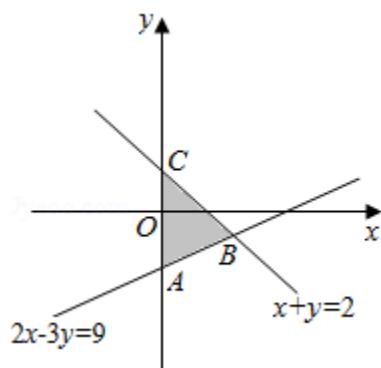
- A. 4 B. 9 C. 10 D. 12

【考点】简单线性规划.

【专题】计算题; 对应思想; 数形结合法; 不等式.

【分析】由约束条件作出可行域, 然后结合 x^2+y^2 的几何意义, 即可行域内的动点与原点距离的平方求得 x^2+y^2 的最大值.

- 【解答】**解: 由约束条件 $\begin{cases} x+y \leqslant 2 \\ 2x-3y \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ 作出可行域如图,



$\therefore A(0, -3), C(0, 2)$,

$\therefore |OA| > |OC|$,

$$\text{联立} \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=9 \end{cases}, \text{解得 } B(3, -1).$$

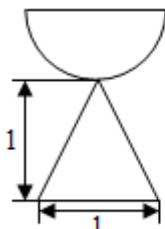
$$\therefore |OB|^2 = (\sqrt{3^2 + (-1)^2})^2 = 10,$$

$\therefore x^2+y^2$ 的最大值是 10.

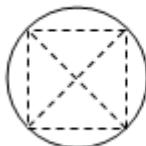
故选: C.

【点评】本题考查简单的线性规划, 考查了数形结合的解题思想方法和数学转化思想方法, 是中档题.

5. (5分) (2016•山东) 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为 ()



正(主)视图 侧(左)视图



俯视图

- A. $\frac{1+2\pi}{3}$ B. $\frac{1+\sqrt{2}\pi}{3}$ C. $\frac{1+\sqrt{2}\pi}{6}$ D. $1+\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

【考点】由三视图求面积、体积.

【专题】计算题; 空间位置关系与距离; 立体几何.

【分析】由已知中的三视图可得: 该几何体上部是一个半球, 下部是一个四棱锥, 进而可得答案.

【解答】解: 由已知中的三视图可得: 该几何体上部是一个半球, 下部是一个四棱锥, 半球的直径为棱锥的底面对角线,

由棱锥的底面棱长为 1, 可得 $2R=\sqrt{2}$.

故 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故半球的体积为: $\frac{2}{3}\pi \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}$,

棱锥的底面面积为: 1, 高为 1,

故棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}$,

故组合体的体积为: $\frac{1+\sqrt{2}\pi}{6}$,

故选: C

【点评】本题考查的知识点是由三视图, 求体积和表面积, 根据已知的三视图, 判断几何体的形状是解答的关键.

6. (5分) (2016•山东) 已知直线 a , b 分别在两个不同的平面 α , β 内. 则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面 α 和平面 β 相交”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断.

【专题】探究型; 空间位置关系与距离; 简易逻辑.

【分析】根据空间直线与直线, 平面与平面位置关系的几何特征, 结合充要条件的定义, 可得答案.

【解答】解: 当“直线 a 和直线 b 相交”时, “平面 α 和平面 β 相交”成立,

当“平面 α 和平面 β 相交”时，“直线 a 和直线 b 相交”不一定成立，
故“直线 a 和直线 b 相交”是“平面 α 和平面 β 相交”的充分不必要条件，
故选：A

【点评】本题考查的知识点是充要条件，空间直线与平面的位置关系，难度不大，属于基础题。

7. (5分) (2016•山东) 函数 $f(x) = (\sqrt{3}\sin x + \cos x)(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$ 的最小正周期是()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

【考点】三角函数中的恒等变换应用；三角函数的周期性及其求法.

【专题】计算题；转化思想；转化法；三角函数的图像与性质.

【分析】利用和差角及二倍角公式，化简函数的解析式，进而可得函数的周期.

【解答】解：数 $f(x) = (\sqrt{3}\sin x + \cos x)(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6}) \cdot 2\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 2\sin$

$$(2x + \frac{\pi}{3}),$$

$$\therefore T = \pi,$$

故选：B

【点评】本题考查的知识点是和差角及二倍角公式，三角函数的周期，难度中档.

8. (5分) (2016•山东) 已知非零向量 \vec{m} , \vec{n} 满足 $4|\vec{m}|=3|\vec{n}|$, $\cos<\vec{m}, \vec{n}>=\frac{1}{3}$. 若 $\vec{n} \perp$

$$(\vec{m}+t\vec{n})$$
, 则实数 t 的值为()

- A. 4 B. -4 C. $\frac{9}{4}$ D. $-\frac{9}{4}$

【考点】平面向量数量积的运算.

【专题】计算题；转化思想；平面向量及应用.

【分析】若 $\vec{n} \perp (\vec{m}+t\vec{n})$, 则 $\vec{n} \cdot (\vec{m}+t\vec{n}) = 0$, 进而可得实数 t 的值.

【解答】解： $\because 4|\vec{m}|=3|\vec{n}|$, $\cos<\vec{m}, \vec{n}>=\frac{1}{3}$, $\vec{n} \perp (\vec{m}+t\vec{n})$,

$$\therefore \vec{n} \cdot (\vec{m}+t\vec{n}) = \vec{m} \cdot \vec{n} + t\vec{n} \cdot \vec{n} = t|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \frac{1}{3} + t|\vec{n}|^2 = (\frac{t}{3} + t)|\vec{n}|^2 = 0,$$

$$\text{解得: } t = -4,$$

故选：B.

【点评】本题考查的知识点是平面向量数量积的运算，向量垂直的充要条件，难度不大，属于基础题.

9. (5分) (2016•山东) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R . 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$; 当

$-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x + \frac{1}{2}) = f(x - \frac{1}{2})$. 则 $f(6) =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

【考点】抽象函数及其应用.

【专题】综合题；转化思想；综合法；函数的性质及应用.

【分析】求得函数的周期为1，再利用当 $-1 \leq x \leq 1$ 时， $f(-x) = -f(x)$ ，得到 $f(1) = -f(-1)$ ，当 $x < 0$ 时， $f(x) = x^3 - 1$ ，得到 $f(-1) = -2$ ，即可得出结论.

【解答】解： \because 当 $x > \frac{1}{2}$ 时， $f(x + \frac{1}{2}) = f(x - \frac{1}{2})$ ，

\therefore 当 $x > \frac{1}{2}$ 时， $f(x+1) = f(x)$ ，即周期为1.

$\therefore f(6) = f(1)$ ，

\because 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时， $f(-x) = -f(x)$ ，

$\therefore f(1) = -f(-1)$ ，

\because 当 $x < 0$ 时， $f(x) = x^3 - 1$ ，

$\therefore f(-1) = -2$ ，

$\therefore f(1) = -f(-1) = 2$ ，

$\therefore f(6) = 2$.

故选：D.

【点评】本题考查函数值的计算，考查函数的周期性，考查学生的计算能力，属于中档题.

10.（5分）（2016•山东）若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称 $y=f(x)$ 具有T性质. 下列函数中具有T性质的是（ ）

- A. $y=\sin x$ B. $y=\ln x$ C. $y=e^x$ D. $y=x^3$

【考点】利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】转化思想；转化法；函数的性质及应用；导数的概念及应用.

【分析】若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则函数 $y=f(x)$ 的导函数上存在两点，使这点的导函数值乘积为-1，进而可得答案.

【解答】解：函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，

则函数 $y=f(x)$ 的导函数上存在两点，使这点的导函数值乘积为-1，

当 $y=\sin x$ 时， $y'=\cos x$ ，满足条件；

当 $y=\ln x$ 时， $y'=\frac{1}{x} > 0$ 恒成立，不满足条件；

当 $y=e^x$ 时， $y'=e^x > 0$ 恒成立，不满足条件；

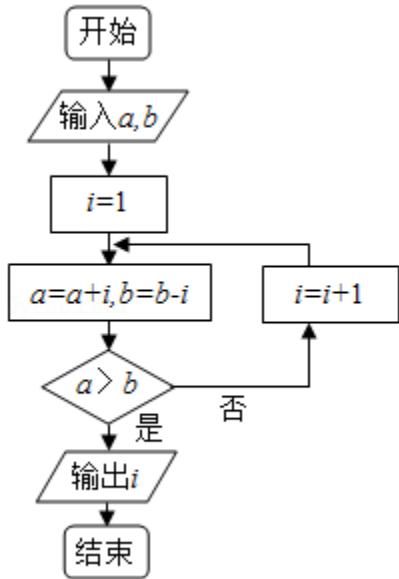
当 $y=x^3$ 时， $y'=3x^2 > 0$ 恒成立，不满足条件；

故选：A

【点评】本题考查的知识点是利用导数研究曲线上某点切线方程，转化思想，难度中档.

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

11.（5分）（2016•山东）执行如图的程序框图，若输入的 a ， b 的值分别为0和9，则输出的 i 的值为3.



【考点】程序框图.

【专题】计算题；操作型；算法和程序框图.

【分析】根据已知的程序框图可得，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 i 的值，模拟程序的运行过程，可得答案.

【解答】解： \because 输入的 a ， b 的值分别为 0 和 9， $i=1$.

第一次执行循环体后： $a=1$ ， $b=8$ ，不满足条件 $a < b$ ，故 $i=2$ ；

第二次执行循环体后： $a=3$ ， $b=6$ ，不满足条件 $a < b$ ，故 $i=3$ ；

第三次执行循环体后： $a=6$ ， $b=3$ ，满足条件 $a < b$ ，

故输出的 i 值为：3，

故答案为：3

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环次数不多，或有规律可循时，可采用模拟程序法进行解答.

12. (5 分) (2016•山东) 若 $(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式中 x^5 的系数是 -80，则实数 $a = \underline{\quad -2 \quad}$.

【考点】二项式系数的性质.

【专题】二项式定理.

【分析】利用二项展开式的通项公式 $T_{r+1} = C_5^r (ax^2)^{5-r} (\frac{1}{\sqrt{x}})^r$ ，化简可得求的 x^5 的系数.

【解答】解： $(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式的通项公式 $T_{r+1} = C_5^r (ax^2)^{5-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$

$$^{5-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_5^r a^{5-r} x^{10-\frac{5r}{2}}$$

令 $10 - \frac{5r}{2} = 5$ ，解得 $r=2$.

$\therefore (ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式中 x^5 的系数是 -80

$$\therefore C_5^2 a^3 = -80,$$

得 $a = -2$.

【点评】考查了利用二项式定理的性质求二项式展开式的系数，属常规题型.

13. (5分) (2016·山东) 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)，若矩形ABCD的四个顶点在E上，AB, CD的中点为E的两个焦点，且 $2|AB|=3|BC|$ ，则E的离心率是 2.

【考点】 双曲线的简单性质.

【专题】 方程思想；分析法；圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 可令 $x=c$ ，代入双曲线的方程，求得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$ ，再由题意设出A, B, C, D的坐标，由 $2|AB|=3|BC|$ ，可得a, b, c的方程，运用离心率公式计算即可得到所求值.

【解答】 解：令 $x=c$ ，代入双曲线的方程可得 $y=\pm b\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\pm\frac{b^2}{a}$ ，

由题意可设 $A(-c, \frac{b^2}{a})$, $B(-c, -\frac{b^2}{a})$, $C(c, -\frac{b^2}{a})$, $D(c, \frac{b^2}{a})$,

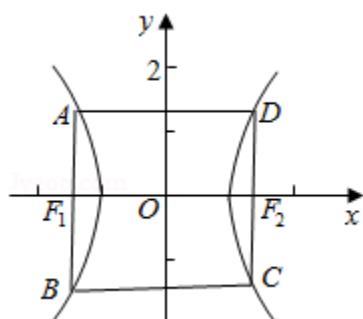
由 $2|AB|=3|BC|$ ，可得

$$2 \cdot \frac{2b^2}{a} = 3 \cdot 2c, \text{ 即为 } 2b^2 = 3ac,$$

由 $b^2 = c^2 - a^2$, $e = \frac{c}{a}$ ，可得 $2e^2 - 3e - 2 = 0$,

解得 $e=2$ (负的舍去).

故答案为：2.



【点评】 本题考查双曲线的离心率的求法，注意运用方程的思想，正确设出A, B, C, D的坐标是解题的关键，考查运算能力，属于中档题.

14. (5分) (2016·山东) 在 $[-1, 1]$ 上随机地取一个数 k ，则事件“直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交”发生的概率为 $\frac{3}{4}$.

【考点】 几何概型.

【专题】 计算题；转化思想；综合法；概率与统计.

【分析】 利用圆心到直线的距离小于半径可得到直线与圆相交，可求出满足条件的 k ，最后根据几何概型的概率公式可求出所求.

【解答】 解：圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 的圆心为 $(5, 0)$ ，半径为 3.

圆心到直线 $y=kx$ 的距离为 $\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

要使直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交, 则 $\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}} < 3$, 解得 $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}$.

\therefore 在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个数 k , 使直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交相交的概率为

$$\frac{\frac{3}{4} - (-\frac{3}{4})}{1+1} = \frac{3}{4}$$

故答案为: $\frac{3}{4}$.

【点评】本题主要考查了几何概型的概率, 以及直线与圆相交的性质, 解题的关键弄清概率类型, 同时考查了计算能力, 属于基础题.

15. (5分) (2016•山东) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$, 其中 $m > 0$, 若存在实

数 b , 使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是 (3, +∞).

【考点】根的存在性及根的个数判断.

【专题】转化思想; 数形结合法; 函数的性质及应用.

【分析】作出函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$ 的图象, 依题意, 可得 $4m - m^2 < m$ ($m > 0$), 解之即可.

【解答】解: 当 $m > 0$ 时, 函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$ 的图象如下:

$\because x > m$ 时, $f(x) = x^2 - 2mx + 4m = (x-m)^2 + 4m - m^2 > 4m - m^2$,

\therefore 要使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根,

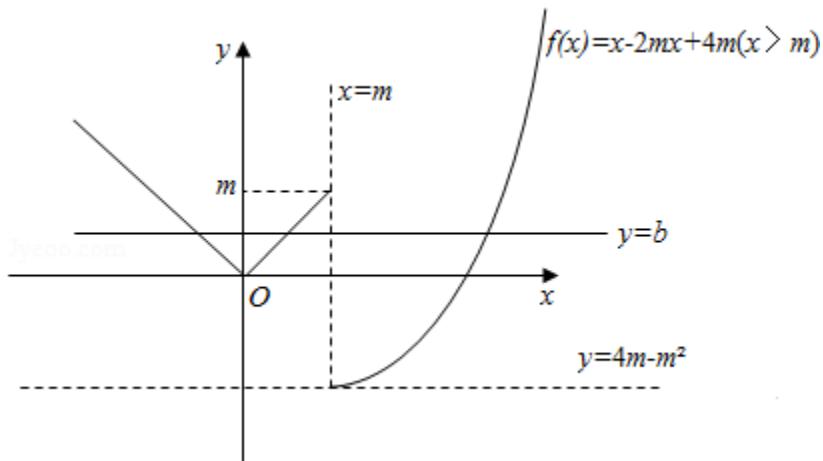
必须 $4m - m^2 < m$ ($m > 0$),

即 $m^2 > 3m$ ($m > 0$),

解得 $m > 3$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $(3, +\infty)$,

故答案为: $(3, +\infty)$.



【点评】本题考查根的存在性及根的个数判断，数形结合思想的运用是关键，分析得到 $4m - m^2 < m$ 是难点，属于中档题.

三、解答题：本大题共6小题，共75分。

16. (12分) (2016•山东) 在 $\triangle ABC$ 中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知2

$$(\tan A + \tan B) = \frac{\tan A + \tan B}{\cos B \cos A}$$

(I) 证明： $a+b=2c$ ；

(II) 求 $\cos C$ 的最小值.

【考点】三角函数中的恒等变换应用；正弦定理；余弦定理.

【专题】计算题；证明题；综合法；解三角形.

【分析】(I) 由切化弦公式 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$, 带入

$2(\tan A + \tan B) = \frac{\tan A}{\cos B} + \frac{\tan B}{\cos A}$ 并整理可得 $2(\sin A \cos B + \cos A \sin B) = \sin A + \sin B$, 这样根据两角和的正弦公式即可得到 $\sin A + \sin B = 2 \sin C$, 从而根据正弦定理便可得出 $a+b=2c$ ；

(II) 根据 $a+b=2c$, 两边平方便得 $a^2+b^2+2ab=4c^2$, 从而得出 $a^2+b^2=4c^2-2ab$, 并由不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 得出 $c^2 \geq ab$, 也就得到了 $\frac{c^2}{ab} \geq 1$, 这样由余弦定理便可得出 $\cos C = \frac{3c^2}{2ab} - 1$, 从而得出 $\cos C$ 的范围，进而便可得出 $\cos C$ 的最小值.

【解答】解：(I) 证明：由 $2(\tan A + \tan B) = \frac{\tan A}{\cos B} + \frac{\tan B}{\cos A}$ 得：

$$2\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}\right) = \frac{\sin A}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B}{\cos A \cos B};$$

\therefore 两边同乘以 $\cos A \cos B$ 得， $2(\sin A \cos B + \cos A \sin B) = \sin A + \sin B$ ；

$$\therefore 2 \sin(A+B) = \sin A + \sin B;$$

即 $\sin A + \sin B = 2 \sin C$ (1)；

根据正弦定理， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ；

$$\therefore \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \text{带入 (1) 得: } \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} = \frac{2c}{2R};$$

$$\therefore a+b=2c;$$

(II) $a+b=2c$;

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4c^2;$$

$\therefore a^2 + b^2 = 4c^2 - 2ab$, 且 $4c^2 \geq 4ab$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号;

又 $a, b > 0$;

$$\therefore \frac{c^2}{ab} \geq 1;$$

$$\therefore \text{由余弦定理, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3c^2 - 2ab}{2ab} = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{ab} - 1 \geq \frac{1}{2};$$

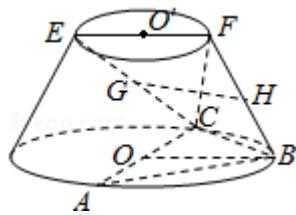
$\therefore \cos C$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

【点评】考查切化弦公式, 两角和的正弦公式, 三角形的内角和为 π , 以及三角函数的诱导公式, 正余弦定理, 不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 的应用, 不等式的性质.

17. (12分) (2016·山东) 在如图所示的圆台中, AC 是下底面圆 O 的直径, EF 是上底面圆 O' 的直径, FB 是圆台的一条母线.

(I) 已知 G, H 分别为 EC, FB 的中点, 求证: GH \parallel 平面 ABC;

(II) 已知 $EF=FB=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$, $AB=BC$, 求二面角 F - BC - A 的余弦值.



【考点】二面角的平面角及求法; 直线与平面平行的判定.

【专题】证明题; 转化思想; 向量法; 空间位置关系与距离; 空间角.

【分析】(I) 取 FC 中点 Q, 连结 GQ、QH, 推导出平面 GQH \parallel 平面 ABC, 由此能证明 GH \parallel 平面 ABC.

(II) 由 $AB=BC$, 知 $BO \perp AC$, 以 O 为原点, OA 为 x 轴, OB 为 y 轴, OO' 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法能求出二面角 F - BC - A 的余弦值.

【解答】证明: (I) 取 FC 中点 Q, 连结 GQ、QH,

$\because G, H$ 为 EC、FB 的中点,

$$\therefore GQ \parallel \frac{1}{2}EF, QH \parallel \frac{1}{2}BC,$$

$$\text{又} \because EF \parallel BO, \therefore GQ \parallel \frac{1}{2}BO,$$

\therefore 平面 GQH \parallel 平面 ABC,

$\because GH \subset$ 平面 GQH, $\therefore GH \parallel$ 平面 ABC.

解: (II) $\because AB=BC$, $\therefore BO \perp AC$,

$\therefore OO' \perp$ 面 ABC,

\therefore 以 O 为原点, OA 为 x 轴, OB 为 y 轴, OO' 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 A ($2\sqrt{3}, 0, 0$), C ($-2\sqrt{3}, 0, 0$), B ($0, 2\sqrt{3}, 0$), O' ($0, 0, 3$), F ($0, \sqrt{3}, 3$),

$$\overrightarrow{FC} = (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -3), \overrightarrow{CB} = (2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 0),$$

由题意可知面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{OO'} = (0, 0, 3)$,

设 $\vec{n} = (x_0, y_0, z_0)$ 为面 FCB 的法向量,

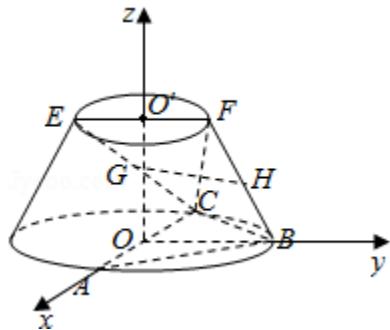
$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{FC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -2\sqrt{3}x_0 - \sqrt{3}y_0 - 3z_0 = 0 \\ 2\sqrt{3}x_0 + 2\sqrt{3}y_0 = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } x_0=1, \text{ 则 } \vec{n} = (1, -1, -\frac{\sqrt{3}}{3}),$$

$$\therefore \cos \angle \overrightarrow{OO'} \cdot \vec{n} = \frac{\overrightarrow{OO'} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{OO'}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

\because 二面角 F - BC - A 的平面角是锐角,

\therefore 二面角 F - BC - A 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.



【点评】本题考查线面平行的证明, 考查二面角的余弦值的求法, 是中档题, 解题时要认真审题, 注意向量法的合理运用.

18. (12分) (2016•山东) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 令 $c_n = \frac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【考点】数列的求和; 数列递推式.

【专题】综合题; 转化思想; 综合法; 等差数列与等比数列.

【分析】(I) 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 再求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 求出数列 $\{c_n\}$ 的通项, 利用错位相减法求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【解答】解: (I) $S_n = 3n^2 + 8n$,

$\therefore n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 6n + 5$,

$n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 11$, $\therefore a_n = 6n + 5$;

$\because a_n = b_n + b_{n+1}$,

$\therefore a_{n-1} = b_{n-1} + b_n$,

$\therefore a_n - a_{n-1} = b_{n+1} - b_{n-1}$.

$\therefore 2d = 6$,

$\therefore d = 3$,

$$\therefore a_1 = b_1 + b_2,$$

$$\therefore 11 = 2b_1 + 3,$$

$$\therefore b_1 = 4,$$

$$\therefore b_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1;$$

$$(II) c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n} = \frac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n} = 6(n+1) \cdot 2^n,$$

$$\therefore T_n = 6[2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + (n+1) \cdot 2^n] \quad (1),$$

$$\therefore 2T_n = 6[2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1}] \quad (2),$$

$$(1) - (2) \text{ 可得 } -T_n = 6[2 \cdot 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - (n+1) \cdot 2^{n+1}] = 12 + 6 \times \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} - 6(n+1) \cdot 2^{n+1} =$$

$$(-6n) \cdot 2^{n+1} = -3n \cdot 2^{n+2},$$

$$\therefore T_n = 3n \cdot 2^{n+2}.$$

【点评】本题考查数列的通项与求和，着重考查等差数列的通项与错位相减法的运用，考查分析与运算能力，属于中档题。

19. (12分) (2016·山东) 甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动，每轮活动由甲、乙各猜一个成语，在一轮活动中，如果两人都猜对，则“星队”得3分；如果只有一个人猜对，则“星队”得1分；如果两人都没猜对，则“星队”得0分。已知甲每轮猜对的概率是 $\frac{3}{4}$ ，乙每轮猜对的概率是 $\frac{2}{3}$ ；每轮活动中甲、乙猜对与否互不影响。各轮结果亦互不影响。假设“星队”参加两轮活动，求：

(I) “星队”至少猜对3个成语的概率；

(II) “星队”两轮得分之和为X的分布列和数学期望EX。

【考点】离散型随机变量的期望与方差；列举法计算基本事件数及事件发生的概率；离散型随机变量及其分布列。

【专题】计算题；分类讨论；分类法；概率与统计。

【分析】(I) “星队”至少猜对3个成语包含“甲猜对1个，乙猜对2个”，“甲猜对2个，乙猜对1个”，“甲猜对2个，乙猜对2个”三个基本事件，进而可得答案；

(II) 由已知可得：“星队”两轮得分之和为X可能为：0, 1, 2, 3, 4, 6，进而得到X的分布列和数学期望。

【解答】解：(I) “星队”至少猜对3个成语包含“甲猜对1个，乙猜对2个”，“甲猜对2个，乙猜对1个”，“甲猜对2个，乙猜对2个”三个基本事件，故概率

$$P = C_2^1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

(II) “星队”两轮得分之和为X可能为：0, 1, 2, 3, 4, 6，

$$\text{则 } P(X=0) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{144},$$

$$\begin{aligned}
 P(X=1) &= 2 \times \left[\frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \right] = \frac{10}{144}, \\
 P(X=2) &= \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} + \\
 &\quad \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{25}{144}, \\
 P(X=3) &= 2 \times \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{12}{144}, \\
 P(X=4) &= 2 \times \left[\frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] = \frac{60}{144} \\
 P(X=6) &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{36}{144}
 \end{aligned}$$

故 X 的分布列如下图所示:

X	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{12}{144}$	$\frac{60}{144}$	$\frac{36}{144}$

$$\therefore \text{数学期望 } EX = 0 \times \frac{1}{144} + 1 \times \frac{10}{144} + 2 \times \frac{25}{144} + 3 \times \frac{12}{144} + 4 \times \frac{60}{144} + 6 \times \frac{36}{144} = \frac{552}{144} = \frac{23}{6}$$

【点评】本题考查离散型随机变量的分布列和数学期望，属中档题.

20. (13分) (2016·山东) 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a=1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 成立.

【考点】利用导数求闭区间上函数的最值; 利用导数研究函数的单调性.

【专题】综合题; 函数思想; 综合法; 导数的概念及应用.

【分析】(I) 求出原函数的导函数, 然后对 a 分类分析导函数的符号, 由导函数的符号确定原函数的单调性;

(II) 构造函数 $F(x) = f(x) - f'(x)$, 令 $g(x) = x - \ln x$, $h(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1$. 则

$F(x) = f(x) - f'(x) = g(x) + h(x)$, 利用导数分别求 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的最小值得到 $F(x) > \frac{3}{2}$ 恒成立. 由此可得 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 成立.

【解答】(I) 解: 由 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$,

$$\begin{aligned}
 \text{得 } f'(x) &= a\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{2x^2 - (2x-1) \cdot 2x}{x^4} \\
 &= \frac{ax-a+2-2x}{x^3} = \frac{ax^3 - ax^2 + 2x - 2x}{x^3} = \frac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3} \quad (x>0).
 \end{aligned}$$

若 $a \leq 0$, 则 $ax^2 - 2 < 0$ 恒成立,

∴当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数;

当 $a > 0$, 若 $0 < a < 2$, 当 $x \in (0, 1)$ 和 $(\frac{\sqrt{2a}}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

当 $x \in (1, \frac{\sqrt{2a}}{a})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数;

若 $a = 2$, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

若 $a > 2$, 当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2a}}{a})$ 和 $(1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

当 $x \in (\frac{\sqrt{2a}}{a}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数;

(II) 解: ∵ $a=1$,

$$\text{令 } F(x) = f(x) - f'(x) = x - \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} = x - \ln x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1.$$

$$\text{令 } g(x) = x - \ln x, h(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1.$$

$$\text{则 } F(x) = f(x) - f'(x) = g(x) + h(x),$$

$$\text{由 } g'(x) = \frac{x-1}{x} \geq 0, \text{ 可得 } g(x) \geq g(1) = 1, \text{ 当且仅当 } x=1 \text{ 时取等号};$$

$$\text{又 } h'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 6}{x^4}, \text{ 设 } \phi(x) = -3x^2 - 2x + 6, \text{ 则 } \phi(x) \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上单调递减},$$

$$\text{且 } \phi(1) = 1, \phi(2) = -10,$$

∴在 $[1, 2]$ 上存在 x_0 , 使得 $x \in (1, x_0)$ 时 $\phi(x_0) > 0$, $x \in (x_0, 2)$ 时, $\phi(x_0) < 0$,

∴函数 $\phi(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递增; 在 $(x_0, 2)$ 上单调递减,

$$\text{由于 } h(1) = 1, h(2) = \frac{1}{2}, \text{ 因此 } h(x) \geq h(2) = \frac{1}{2}, \text{ 当且仅当 } x=2 \text{ 取等号},$$

$$\therefore f(x) - f'(x) = g(x) + h(x) \geq g(1) + h(2) = \frac{3}{2},$$

∴ $F(x) > \frac{3}{2}$ 恒成立.

即 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 成立.

【点评】本题考查利用导数加以函数的单调性, 考查了利用导数求函数的最值, 考查了分类讨论的数学思想方法和数学转化思想方法, 是压轴题.

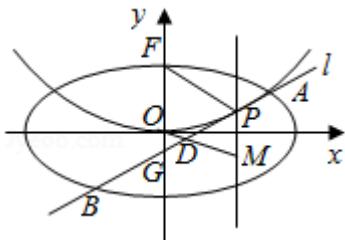
21. (14分) (2016•山东) 平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 抛物线 $E: x^2 = 2y$ 的焦点 F 是 C 的一个顶点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 P 是 E 上的动点, 且位于第一象限, E 在点 P 处的切线 l 与 C 交于不同的两点 A , B , 线段 AB 的中点为 D , 直线 OD 与过 P 且垂直于 x 轴的直线交于点 M .

(i) 求证: 点 M 在定直线上;

(ii) 直线 l 与 y 轴交于点 G , 记 $\triangle PFG$ 的面积为 S_1 , $\triangle PDM$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值及取得最大值时点 P 的坐标.



【考点】椭圆的简单性质.

【专题】方程思想; 分析法; 直线与圆; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】(I) 运用椭圆的离心率公式和抛物线的焦点坐标, 以及椭圆的 a , b , c 的关系, 解得 a , b , 进而得到椭圆的方程;

(II) (i) 设 $P(x_0, y_0)$, 运用导数求得切线的斜率和方程, 代入椭圆方程, 运用韦达定理, 可得中点 D 的坐标, 求得 OD 的方程, 再令 $x=x_0$, 可得 $y=-\frac{1}{4}$. 进而得到定直线;

(ii) 由直线 l 的方程为 $y=x_0x - y_0$, 令 $x=0$, 可得 $G(0, -y_0)$, 运用三角形的面积公式,

可得 $S_1 = \frac{1}{2}|FG| \cdot |x_0| = \frac{1}{2}x_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + y_0\right)$, $S_2 = \frac{1}{2}|PM| \cdot |x_0 - \frac{4x_0y_0}{1+4x_0^2}|$, 化简整理, 再 $1+2x_0^2=t$

($t \geq 1$), 整理可得 t 的二次方程, 进而得到最大值及此时 P 的坐标.

【解答】解: (I) 由题意可得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 抛物线 $E: x^2 = 2y$ 的焦点 F 为 $(0, \frac{1}{2})$,

即有 $b = \frac{1}{2}$, $a^2 - c^2 = \frac{1}{4}$,

解得 $a=1$, $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

可得椭圆的方程为 $x^2 + 4y^2 = 1$;

(II) (i) 证明: 设 $P(x_0, y_0)$, 可得 $x_0^2 = 2y_0$,

由 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的导数为 $y' = x$, 即有切线的斜率为 x_0 ,

则切线的方程为 $y - y_0 = x_0(x - x_0)$,

可化为 $y = x_0x - y_0$, 代入椭圆方程,

可得 $(1+4x_0^2)x^2 - 8x_0y_0x + 4y_0^2 - 1 = 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

可得 $x_1 + x_2 = \frac{8x_0y_0}{1+4x_0^2}$, 即有中点 $D\left(\frac{4x_0y_0}{1+4x_0^2}, -\frac{y_0}{1+4x_0^2}\right)$,

直线 OD 的方程为 $y = -\frac{1}{4x_0}x$, 可令 $x=x_0$, 可得 $y=-\frac{1}{4}$.

即有点 M 在定直线 $y = -\frac{1}{4}$ 上;

(ii) 直线 l 的方程为 $y = x_0 x - y_0$, 令 $x=0$, 可得 G (0, -y₀),

$$则 S_1 = \frac{1}{2} |FG| \cdot |x_0| = \frac{1}{2} x_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + y_0\right) = \frac{1}{4} x_0 (1 + x_0^2);$$

$$S_2 = \frac{1}{2} |PM| \cdot |x_0| = \frac{4 x_0 y_0}{1 + 4 x_0^2} = \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{x_0 + 4 x_0^3 - 4 x_0 y_0}{1 + 4 x_0^2} = \frac{1}{8} x_0 \cdot \frac{(1 + 2 x_0^2)^2}{1 + 4 x_0^2},$$

$$则 \frac{S_1}{S_2} = \frac{2 (1 + x_0^2)}{(1 + 2 x_0^2)^2},$$

$$令 1 + 2x_0^2 = t (t \geq 1), 则 \frac{S_1}{S_2} = \frac{2 (1 + \frac{t-1}{2})}{t^2} \cdot \frac{(1+2t-2)}{t^2} = \frac{(t+1)(2t-1)}{t^2}$$

$$= \frac{2t^2+t-1}{t^2} = 2 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = -\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

则当 $t=2$, 即 $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值 $\frac{9}{4}$,

此时点 P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4})$.

【点评】本题考查椭圆的方程的求法, 注意运用椭圆的离心率和抛物线的焦点坐标, 考查直线和抛物线斜的条件, 以及直线方程的运用, 考查三角形的面积的计算, 以及化简整理的运算能力, 属于难题.

参与本试卷答题和审题的老师有：qiss; sxs123; 翔宇老师；546278733@qq.com; 于东；双曲线；wfy814; wkl197822; zlzhan（排名不分先后）

菁优网

2016年6月13日