

## 2020 年全国高考数学真题试卷及解析（上海卷）

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题 5 分）

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 4\}$ ，集合  $B = \{2, 4, 5\}$ ，则  $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 计算： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 已知复数  $z = 1 - 2i$  ( $i$  为虚数单位)，则  $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 已知函数  $f(x) = x^3$ ， $f'(x)$  是  $f(x)$  的反函数，则  $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 已知  $x, y$  满足  $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x+2y-3 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = y - 2x$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 已知行列式  $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 2 & c & d \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$ ，则  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 已知有四个数 1, 2,  $a$ ,  $b$ ，这四个数的中位数是 3，平均数是 4，则  $ab = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 已知数列  $\{a_n\}$  是公差为零的等差数列，且  $a_1 + a_{10} = a_9$ ，则  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 从 6 个人挑选 4 个人去值班，每人值班一天，第一天安排 1 个人，第二天安排 1 个人，第三天安排 2 个人，则共有  $\underline{\hspace{2cm}}$  种安排情况.

10. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点为  $F$ ，直线  $l$  经过椭圆右焦点  $F$ ，交椭圆  $C$  于  $P, Q$  两点（点  $P$  在第二象限），若点  $Q$  关于  $x$  轴对称点为  $Q'$ ，且满足  $PQ \perp FQ'$ ，求直线  $l$  的方程是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 设  $a \in \mathbb{R}$ ，若存在定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$  同时满足下列两个条件：

(1) 对任意的  $x_0 \in R$ ,  $f(x_0)$  的值为  $x_0$  或  $x_0^2$ ;

(2) 关于  $x$  的方程  $f(x) = a$  无实数解,

则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 已知  $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_k} (k \in N^*)$  是平面内两两互不相等的向量, 满足  $|\vec{a_1} - \vec{a_2}| = 1$ , 且  $|\vec{a_i} - \vec{b_j}| \in \{1, 2\}$  (其中  $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, k$ ), 则  $k$  的最大值是\_\_\_\_\_.

## 二、选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 下列等式恒成立的是 ( )

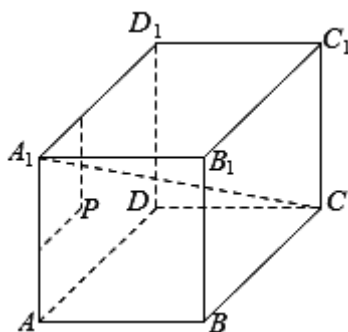
A.  $a^2 + b^2 \geq 2ab$       B.  $a^2 + b^2 \leq -2ab$       C.  $a + b \geq 2\sqrt{|ab|}$       D.  $a^2 + b^2 \leq -2ab$

14. 已知直线方程  $3x + 4y + 1 = 0$  的一个参数方程可以是 ( )

A.  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 4t \end{cases} (t \text{ 为参数})$       B.  $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases} (t \text{ 为参数})$

C.  $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + 4t \end{cases} (t \text{ 为参数})$       D.  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases} (t \text{ 为参数})$

15. 在棱长为 10 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  为左侧面  $ADD_1A_1$  上一点, 已知点  $P$  到  $A_1D_1$  的距离为 3,  $P$  到  $AA_1$  的距离为 2, 则过点  $P$  且与  $A_1C$  平行的直线相交的面是 ( )



- A.  $AA_1B_1B$       B.  $BB_1C_1C$       C.  $CC_1D_1D$       D.  $ABCD$

16. 命题  $p$ : 存在  $a \in \mathbb{R}$  且  $a \neq 0$ , 对于任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(x+a) < f(x) + f(a)$ ;

命题  $q_1$ :  $f(x)$  单调递减且  $f(x) > 0$  恒成立;

命题  $q_2$ :  $f(x)$  单调递增, 存在  $x_0 < 0$  使得  $f(x_0) = 0$ ,

则下列说法正确的是( )

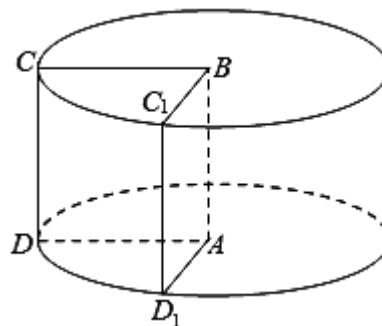
- A. 只有  $q_1$  是  $p$  的充分条件      B. 只有  $q_2$  是  $p$  的充分条件  
C.  $q_1, q_2$  都是  $p$  的充分条件      D.  $q_1, q_2$  都不是  $p$  的充分条件

### 三、解答题 (本大题共 5 题, 共 14+14+14+16+18=76 分)

17. (14 分) 已知  $ABCD$  是边长为 1 的正方形, 正方形  $ABCD$  绕  $AB$  旋转形成一个圆柱.

(1) 求该圆柱的表面积;

(2) 正方形  $ABCD$  绕  $AB$  逆时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  至  $ABC_1D_1$ , 求线段  $CD_1$  与平面  $ABCD$  所成的角.



18. (14 分) 已知函数  $f(x) = \sin \omega x$ ,  $\omega > 0$ .

(1)  $f(x)$  的周期是  $4\pi$ , 求  $\omega$ , 并求  $f(x) = \frac{1}{2}$  的解集;

(2) 已知  $\omega = 1$ ,  $g(x) = f^2(x) + \sqrt{3}f(-x)f(\frac{\pi}{2} - x)$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , 求  $g(x)$  的值域.

19. (14 分) 在研究某市场交通情况时, 道路密度是指该路段上一定时间内通过的车辆数除以时间, 车辆密度是该路段一定

时间内通过的车辆数除以该路段的长度, 现定义交通流量为  $v = \frac{q}{x}$ ,  $x$  为道路密度,  $q$  为车辆密度.

$$v = f(x) = \begin{cases} 100 - 135 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & 0 < x < 40 \\ -k(x - 40) + 85, & 40 \leq x \leq 80 \end{cases}.$$

(1) 若交通流量  $v > 95$ , 求道路密度  $x$  的取值范围;

(2) 已知道路密度  $x = 80$ , 交通流量  $v = 50$ , 求车辆密度  $q$  的最大值.

20. (16 分) 已知双曲线  $\Gamma_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  与圆  $\Gamma_2: x^2 + y^2 = 4 + b^2 (b > 0)$  交于点  $A(x_A, y_A)$  (第

一象限), 曲线  $\Gamma$  为  $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$  上取满足  $x > |x_A|$  的部分.

(1) 若  $x_A = \sqrt{6}$ , 求  $b$  的值;

(2) 当  $b = \sqrt{5}$ ,  $\Gamma_2$  与  $x$  轴交点记作点  $F_1$ 、 $F_2$ ,  $P$  是曲线  $\Gamma$  上一点, 且在第一象限, 且  $|PF_1| = 8$ , 求  $\angle F_1PF_2$ ;

(3) 过点  $D(0, \frac{b^2}{2} + 2)$  斜率为  $-\frac{b}{2}$  的直线  $l$  与曲线  $\Gamma$  只有两个交点, 记为  $M$ 、 $N$ , 用  $b$  表示  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ , 并求  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$  的取值范围.

21. (18 分) 已知数列  $\{a_n\}$  为有限数列, 满足  $|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|, \dots, |a_1 - a_m|$ , 则称  $\{a_n\}$  满足性质  $P$ .

(1) 判断数列 3、2、5、1 和 4、3、2、5、1 是否具有性质  $P$ , 请说明理由;

(2) 若  $a_1 = 1$ , 公比为  $q$  的等比数列, 项数为 10, 具有性质  $P$ , 求  $q$  的取值范围;

(3) 若  $\{a_n\}$  是  $1, 2, 3, \dots, m$  的一个排列 ( $m \geq 4$ ),  $\{b_n\}$  符合  $b_k = a_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, m-1$ ),  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  都具有性质  $P$ , 求所有满足条件的数列  $\{a_n\}$ .

## 参考答案

1.  $\{2, 4\}$

【解析】因为  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 4, 5\}$ , 则  $A \cap B = \{2, 4\}$ . 故答案为:  $\{2, 4\}$ .

2.  $\frac{1}{3}$

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{3-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}$ , 故答案为:  $\frac{1}{3}$ .

3.  $\sqrt{5}$

【解析】由  $z = 1 - 2i$ , 得  $|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ . 故答案为:  $\sqrt{5}$ .

4.  $\sqrt[3]{x}$

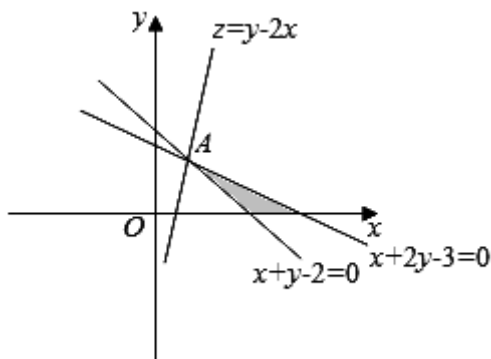
【解析】由  $y = f(x) = x^3$ , 得  $x = \sqrt[3]{y}$ , 把  $x$  与  $y$  互换, 可得  $f(x) = x^3$  的反函数为

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

故答案为:  $\sqrt[3]{x}$ .

5. -1

【解析】由约束条件 
$$\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x+2y-3 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 作出可行域如图阴影部分,



化目标函数  $z = y - 2x$  为  $y = 2x + z$ ，由图可知，当直线  $y = 2x + z$  过  $A$  时，直线在  $y$  轴上的

截距最大，联立  $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ，即  $A(1, 1)$ 。

$z$  有最大值为  $1 - 2 \times 1 = -1$ 。故答案为：  $-1$ 。

6. 2

【解析】行列式  $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 2 & c & d \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$ ，可得  $3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$ ，解得  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$ 。

故答案为： 2。

7. 36

【解析】因为四个数的平均数为 4，所以  $a + b = 4 \times 4 - 1 - 2 = 13$ ，

因为中位数是 3，所以  $\frac{2+a}{2} = 3$ ，解得  $a = 4$ ，代入上式得  $b = 13 - 4 = 9$ ，

所以  $ab = 36$ ，故答案为： 36。

8.  $\frac{27}{8}$

【解析】根据题意，等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_{10} = a_9$ ，即  $a_1 + a_1 + 9d = a_1 + 8d$ ，变形可得  $a_1 = -d$ ，

所以  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_{10}} = \frac{9a_1 + \frac{9 \times 8d}{2}}{a_1 + 9d} = \frac{9a_1 + 36d}{a_1 + 9d} = \frac{-9d + 36d}{-d + 9d} = \frac{27}{8}$ 。

故答案为:  $\frac{27}{8}$ .

9. 180

【解析】根据题意, 可得排法共有  $C_6^1 C_5^1 C_4^2 = 180$  种.

故答案为: 180.

10.  $x + y - 1 = 0$

【解析】椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点为  $F(1, 0)$ ,

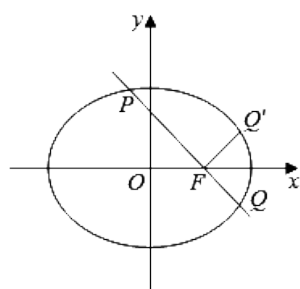
直线  $l$  经过椭圆右焦点  $F$ , 交椭圆  $C$  于  $P$ 、 $Q$  两点 (点  $P$  在第二象限),

若点  $Q$  关于  $x$  轴对称点为  $Q'$ , 且满足  $PQ \perp FQ'$ ,

可知直线  $l$  的斜率为  $-1$ , 所以直线  $l$  的方程是:  $y = -(x - 1)$ ,

即  $x + y - 1 = 0$ .

故答案为:  $x + y - 1 = 0$ .



11.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

【解析】根据条件 (1) 可得  $f(0) = 0$  或  $f(1) = 1$ ,

又因为关于  $x$  的方程  $f(x) = a$  无实数解, 所以  $a \neq 0$  或  $1$ ,

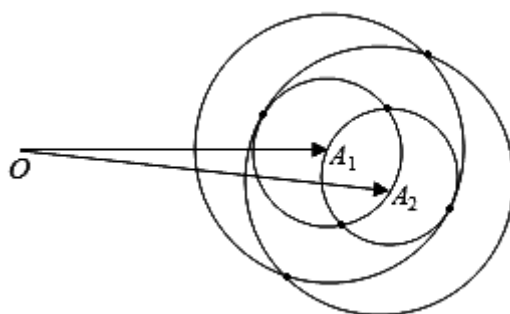


故  $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ,

故答案为:  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

12. 6

【解析】如图, 设  $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$ ,  $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$ ,



由  $|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| = 1$ , 且  $|\vec{a}_i - \vec{b}_j| \in \{1, 2\}$ , 分别以  $A_1, A_2$  为圆心, 以 1 和 2 为半径画圆, 其中任意两圆的公共点共有 6 个. 故满足条件的  $k$  的最大值为 6. 故答案为: 6.

13. B

【解析】A. 显然当  $a < 0, b > 0$  时, 不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  不成立, 故 A 错误;

B.  $\because (a+b)^2 \geq 0, \therefore a^2 + b^2 + 2ab \geq 0, \therefore a^2 + b^2 \geq -2ab$ , 故 B 正确;

C. 显然当  $a < 0, b < 0$  时, 不等式  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  不成立, 故 C 错误;

D. 显然当  $a > 0, b > 0$  时, 不等式  $a^2 + b^2 \geq -2ab$  不成立, 故 D 错误.

故选: B.

14. B

【解析】 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-1-4t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 的普通方程为:  $\frac{x-1}{y+1} = -\frac{3}{4}$ , 即  $4x+3y-1=0$ , 不正确;

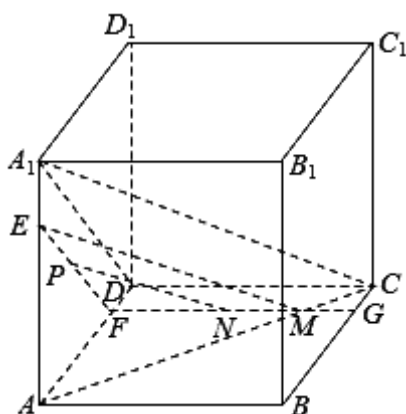
$\begin{cases} x=1-4t \\ y=-1+3t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 的普通方程为:  $\frac{x-1}{y+1} = -\frac{4}{3}$ , 即  $3x+4y+1=0$ , 正确;

$\begin{cases} x=1-3t \\ y=-1+4t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 的普通方程为:  $\frac{x-1}{y+1} = -\frac{3}{4}$ , 即  $4x+3y-1=0$ , 不正确;

$\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-3t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 的普通方程为:  $\frac{x-1}{y-1} = -\frac{4}{3}$ , 即  $3x+4y-7=0$ , 不正确; 故选:  $B$ .

15.  $D$

【解析】如图,



由点  $P$  到  $A_1D_1$  的距离为 3,  $P$  到  $AA_1$  的距离为 2,

可得  $P$  在  $\triangle AA_1D$  内, 过  $P$  作  $EF \parallel A_1D$ , 且  $EF \cap AA_1$  于  $E$ ,  $EF \cap AD$  于  $F$ ,

在平面  $ABCD$  中, 过  $F$  作  $FG \parallel CD$ , 交  $BC$  于  $G$ , 则平面  $EFG \parallel$  平面  $A_1DC$ .

连接  $AC$ , 交  $FG$  于  $M$ , 连接  $EM$ ,  $\because$  平面  $EFG \parallel$  平面  $A_1DC$ , 平面  $A_1AC \cap$  平面  $A_1DC = A_1C$ ,

平面  $A_1AC \cap$  平面  $EFM = EM$ ,  $\therefore EM \parallel A_1C$ .

在  $\triangle EFM$  中, 过  $P$  作  $PN \parallel EM$ , 且  $PN \cap FM$  于  $N$ , 则  $PN \parallel A_1C$ .

$\because$  线段  $FM$  在四边形  $ABCD$  内,  $N$  在线段  $FM$  上,  $\therefore N$  在四边形  $ABCD$  内.

$\therefore$  过点  $P$  且与  $A_1C$  平行的直线相交的面是  $ABCD$ . 故选:  $D$ .

16.  $C$

【解析】对于命题  $q_1$ : 当  $f(x)$  单调递减且  $f(x) > 0$  恒成立时,

当  $a > 0$  时, 此时  $x+a > x$ , 又因为  $f(x)$  单调递减, 所以  $f(x+a) < f(x)$

又因为  $f(x) > 0$  恒成立时, 所以  $f(x) < f(x) + f(a)$ , 所以  $f(x+a) < f(x) + f(a)$ ,

所以命题  $q_1 \Rightarrow$  命题  $p$ , 对于命题  $q_2$ : 当  $f(x)$  单调递增, 存在  $x_0 < 0$  使得  $f(x_0) = 0$ ,

当  $a = x_0 < 0$  时, 此时  $x+a < x$ ,  $f(a) = f(x_0) = 0$ ,

又因为  $f(x)$  单调递增, 所以  $f(x+a) < f(x)$ , 所以  $f(x+a) < f(x) + f(a)$ ,

所以命题  $p_2 \Rightarrow$  命题  $p$ , 所以  $q_1, q_2$  都是  $p$  的充分条件, 故选:  $C$ .

17. 【解析】(1) 该圆柱的表面由上下两个半径为 1 的圆面和一个长为  $2\pi$ 、宽为 1 的矩形组成,  $\therefore S = 2 \times \pi \times 1^2 + 2\pi \times 1 = 4\pi$ . 故该圆柱的表面积为  $4\pi$ .

(2)  $\because$  正方形  $ABC_1D_1$ ,  $\therefore AD_1 \perp AB$ ,

又  $\angle DAD_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore AD_1 \perp AD$ ,

$\because AD \cap AB = A$ , 且  $AD, AB \subset$  平面  $ADB$ ,

$\therefore AD_1 \perp$  平面  $ADB$ , 即  $D_1$  在面  $ADB$  上的投影为  $A$ ,

连接  $CD_1$ , 则  $\angle D_1CA$  即为线段  $CD_1$  与平面  $ABCD$  所成的角,

而  $\cos \angle D_1CA = \frac{AC}{CD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $\therefore$  线段  $CD_1$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

18. 【解析】(1) 由于  $f(x)$  的周期是  $4\pi$ ，所以  $\omega = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ ，所以  $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$ 。

令  $\sin \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$ ，故  $\frac{1}{2}x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$  或  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ，整理得  $x = 4k\pi + \frac{\pi}{3}$  或  $x = 4k\pi + \frac{5\pi}{3}$ 。

故解集为  $\{x | x = 4k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ 或 } x = 4k\pi + \frac{5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

(2) 由于  $\omega = 1$ ，所以  $f(x) = \sin x$ 。所以

$$g(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin(-x) \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin(2x + \frac{\pi}{6})$$

由于  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ，所以  $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$ 。

$$\frac{1}{2} \leq \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq 1, \text{ 故 } -1 \leq -\sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq -\frac{1}{2}, \text{ 故 } -\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 0.$$

所以函数  $g(x)$  的值域为  $[-\frac{1}{2}, 0]$ 。

19. 【解析】(1)  $\because v = \frac{q}{x}$ ， $\therefore v$  越大， $x$  越小，

$\therefore v = f(x)$  是单调递减函数， $k > 0$ ，

当  $40 \leq x \leq 80$  时， $v$  最大为 85，

于是只需令  $100 - 135 \cdot (\frac{1}{3})^x > 95$ ，解得  $x > 3$ ，

故道路密度  $x$  的取值范围为  $(3, 40)$ 。

(2) 把  $x = 80$ ， $v = 50$  代入  $v = f(x) = -k(x - 40) + 85$  中，

得  $50 = -k \cdot 40 + 85$ ，解得  $k = \frac{7}{8}$ 。

$$\therefore q = vx = \begin{cases} 100x - 135 \cdot (\frac{1}{3})^x \cdot x, & 0 < x < 40 \\ -\frac{7}{8}(x - 40)x + 85x, & 40 \leq x \leq 80 \end{cases},$$

当  $0 < x < 40$  时,  $q$  单调递增,  $q < 100 \times 40 - 135 \times (\frac{1}{3})^{40} \times 40 \approx 4000$ ;

当  $40 \leq x \leq 80$  时,  $q$  是关于  $x$  的二次函数, 开口向下, 对称轴为  $x = \frac{480}{7}$ ,

此时  $q$  有最大值, 为  $-\frac{7}{8} \times (\frac{480}{7})^2 + 120 \times \frac{480}{7} = \frac{28800}{7} > 4000$ .

故车辆密度  $q$  的最大值为  $\frac{28800}{7}$ .

20. 【解析】(1) 由  $x_A = \sqrt{6}$ , 点  $A$  为曲线  $\Gamma_1$  与曲线  $\Gamma_2$  的交点, 联立 
$$\begin{cases} \frac{x_A^2}{4} - \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \\ x_A^2 + y_A^2 = 4 + b^2 \end{cases}$$
, 解

得  $y_A = \sqrt{2}$ ,  $b = 2$ ;

(2) 由题意可得  $F_1, F_2$  为曲线  $\Gamma_1$  的两个焦点,

由双曲线的定义可得  $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ , 又  $|PF_1| = 8$ ,  $2a = 4$ ,

所以  $|PF_2| = 8 - 4 = 4$ , 因为  $b = \sqrt{5}$ , 则  $c = \sqrt{4 + 5} = 3$ ,

所以  $|F_1F_2| = 6$ , 在  $\triangle PF_1F_2$  中, 由余弦定理可得  $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|}$

$= \frac{64 + 16 - 36}{2 \times 8 \times 4} = \frac{11}{16}$ , 由  $0 < \angle F_1PF_2 < \pi$ , 可得  $\angle F_1PF_2 = \arccos \frac{11}{16}$ ;

(3) 设直线  $l: y = -\frac{b}{2}x + \frac{4+b^2}{2}$ , 可得原点  $O$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|\frac{4+b^2}{2}|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4}}} = \sqrt{4 + b^2}$ ,

所以直线  $l$  是圆的切线, 设切点为  $M$ ,

所以  $k_{OM} = \frac{2}{b}$ , 并设  $OM: y = \frac{2}{b}x$  与圆  $x^2 + y^2 = 4 + b^2$  联立, 可得  $x^2 + \frac{4}{b^2}x^2 = 4 + b^2$ ,

可得  $x = b$ ,  $y = 2$ , 即  $M(b, 2)$ ,

注意直线  $l$  与双曲线的斜率为负的渐近线平行,

所以只有当  $y_A > 2$  时, 直线  $l$  才能与曲线  $\Gamma$  有两个交点,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x_A^2}{4} - \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \\ x_A^2 + y_A^2 = 4 + b^2 \end{cases}, \text{ 可得 } y_A^2 = \frac{b^4}{a + b^2},$$

所以有  $4 < \frac{b^4}{4 + b^2}$ , 解得  $b^2 > 2 + 2\sqrt{5}$  或  $b^2 < 2 - 2\sqrt{5}$  (舍去),

因为  $\overrightarrow{OM}$  为  $\overrightarrow{ON}$  在  $\overrightarrow{OM}$  上的投影可得,  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 4 + b^2$ ,

所以  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 4 + b^2 > 6 + 2\sqrt{5}$ , 则  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \in (6 + 2\sqrt{5}, +\infty)$ .

21. 【解析】(1) 对于数列 3, 2, 5, 1, 有  $|2-3|=1$ ,  $|5-3|=2$ ,  $|1-3|=2$ , 满足题意, 该数列满足性质  $P$ ;

对于第二个数列 4, 3, 2, 5, 1,  $|3-4|=1$ ,  $|2-4|=2$ ,  $|5-4|=1$ . 不满足题意, 该数列不满足性质  $P$ .

(2) 由题意:  $|a_1 - a_1 q^n| \dots |a_1 - a_1 q^{n-1}|$ , 可得:  $|q^n - 1| \dots |q^{n-1} - 1|$ ,  $n \in \{2, 3, \dots, 9\}$ ,

两边平方可得:  $q^{2n} - 2q^n + 1 \dots q^{2n-2} - 2q^{n-1} + 1$ ,

整理可得:  $(q-1)q^{n-1}[q^{n-1}(q+1)-2] \dots 0$ , 当  $q \dots 1$  时, 得  $q^{n-1}(q+1)-2 \dots 0$  此时关于  $n$  恒成立,

所以等价于  $n=2$  时,  $q(q+1)-2 \dots 0$ ,

所以,  $(q+2)(q-1) \dots 0$ , 所以  $q_n = -2$ , 或  $q \dots 1$ , 所以取  $q \dots 1$ ,

当  $0 < q_n = 1$  时, 得  $q^{n-1}(q+1)-2 \dots 0$ , 此时关于  $n$  恒成立, 所以等价于  $n=2$  时,

$q(q+1)-2 \dots 0$ ,

所以  $(q+2)(q-1) \geq 0$ ，所以  $-2 \leq q \leq 1$ ，所以取  $0 < q \leq 1$ 。

当  $-1 \leq q < 0$  时：  $q^{n-1}[q^{n-1}(q+1)-2] \geq 0$ ，

当  $n$  为奇数时，得  $q^{n-1}(q+1)-2 \geq 0$ ，恒成立，当  $n$  为偶数时，  $q^{n-1}(q+1)-2 \leq 0$ ，不恒成立；

故当  $-1 \leq q < 0$  时，矛盾，舍去。

当  $q < -1$  时，得  $q^{n-1}[q^{n-1}(q+1)-2] \geq 0$ ，当  $n$  为奇数时，得  $q^{n-1}(q+1)-2 \geq 0$ ，恒成立，

当  $n$  为偶数时，  $q^{n-1}(q+1)-2 \leq 0$ ，恒成立；故等价于  $n=2$  时，  $q(q+1)-2 \leq 0$ ，

所以  $(q+2)(q-1) \leq 0$ ，所以  $q \leq -2$  或  $q \leq 1$ ，所以取  $q \leq -2$ ，

综上  $q \in (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$ 。

(3) 设  $a_1 = p$ ，  $p \in \{3, 4, \dots, m-3, m-2\}$ ，

因为  $a_1 = p$ ，  $a_2$  可以取  $p-1$ ，或  $p+1$ ，  $a_3$  可以取  $p-2$ ，或  $p+2$ ，

如果  $a_2$  或  $a_3$  取了  $p-3$  或  $p+3$ ，将使  $\{a_n\}$  不满足性质  $P$ ；所以  $\{a_n\}$  的前 5 项有以下组合：

①  $a_1 = p$ ，  $a_2 = p-1$ ；  $a_3 = p+1$ ；  $a_4 = p-2$ ；  $a_5 = p+2$ ；

②  $a_1 = p$ ，  $a_2 = p-1$ ；  $a_3 = p+1$ ；  $a_4 = p+2$ ；  $a_5 = p-2$ ；

③  $a_1 = p$ ，  $a_2 = p+1$ ；  $a_3 = p-1$ ；  $a_4 = p-2$ ；  $a_5 = p+2$ ；

④  $a_1 = p$ ，  $a_2 = p+1$ ；  $a_3 = p-1$ ；  $a_4 = p+2$ ；  $a_5 = p-2$ ；

对于①，  $b_1 = p-1$ ，  $|b_2 - b_1| = 2$ ，  $|b_3 - b_1| = 1$ ，与  $\{b_n\}$  满足性质  $P$  矛盾，舍去；

对于②，  $b_1 = p-1$ ，  $|b_2 - b_1| = 2$ ，  $|b_3 - b_1| = 3$ ，  $|b_4 - b_1| = 2$  与  $\{b_n\}$  满足性质  $P$  矛盾，舍去；

对于③,  $b_1 = p+1$ ,  $|b_2 - b_1| = 2$ ,  $|b_3 - b_1| = 3$ ,  $|b_4 - b_1| = 1$  与  $\{b_n\}$  满足性质  $P$  矛盾, 舍去;

对于④  $b_1 = p+1$ ,  $|b_2 - b_1| = 2$ ,  $|b_3 - b_1| = 1$ , 与  $\{b_n\}$  满足性质  $P$  矛盾, 舍去;

所以  $P \in \{3, 4, \dots, m-3, m-2\}$ , 均不能同时使  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  都具有性质  $P$ .

当  $p=1$  时, 有数列  $\{a_n\}: 1, 2, 3, \dots, m-1, m$  满足题意.

当  $p=m$  时, 有数列  $\{a_n\}: m, m-1, \dots, 3, 2, 1$  满足题意.

当  $p=2$  时, 有数列  $\{a_n\}: 2, 1, 3, \dots, m-1, m$  满足题意.

当  $p=m-1$  时, 有数列  $\{a_n\}: m-1, m, m-2, m-3, \dots, 3, 2, 1$  满足题意.

所以满足题意的数列  $\{a_n\}$  只有以上四种。