2014年陕西高考数学试题（文）

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $M=\{x|x\geq 0,x\in R\},N=\{x|x^2<1,x\in R\}$，则 $M\bigcap N=$（　　）

$A.[0,1]$　　$B.(0,1)$　　$C.(0,1]$　　$D.[0,1)$

【答案】D

【解析】

试题分析：由 $M=\{x|x\geq 0,x\in R\}=[0,+\infty)$，$N=\{x|x^2<1,x\in R\}=(-1,1)$，所以 $M\bigcap N=[0,1)$，故选 D.

考点：集合间的运算.

2.函数 $f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的最小正周期是（　　）

$A.\dfrac{\pi}{2}$　　$B.\pi$　　$C.2\pi$　　$D.4\pi$

【答案】B

【解析】

试题分析：由周期公式 $T=\dfrac{2\pi}{w}$，又 $w=2$，所以函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故选 B.

考点：三角函数的最小正周期.

3.已知复数 $z=2-i$，则 $z\cdot\overline{z}$ 的值为（　　）

$A.5$　　$B.\sqrt{5}$　　$C.3$　　$D.\sqrt{3}$

【答案】A

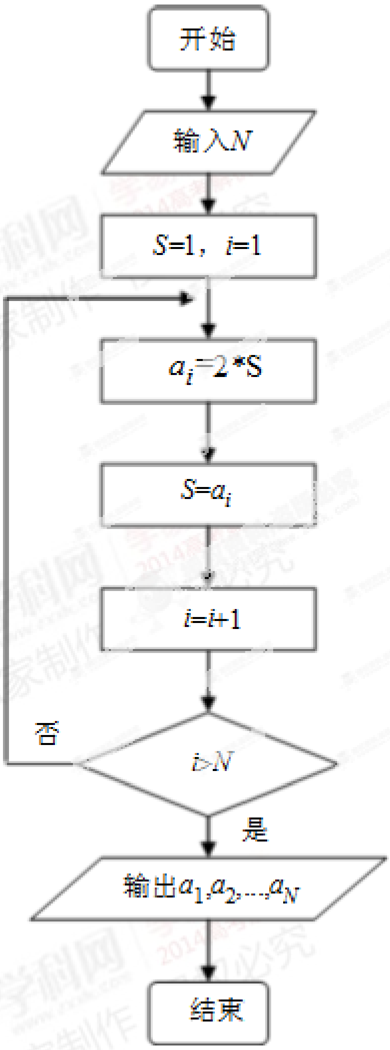
【解析】

试题分析：由 $z=2-i$ 得 $\overline{z}=2+i$，所以 $z\cdot\overline{z}=(2-i)\cdot(2+i)=5$，故选 A.

考点：共轭复数；复数的运算.

4.根据右边框图，对大于2的整数 N，得出数列的通项公式是（　　）

$A.a_n=2n$　　$B.a_n=2(n-1)$　　$C.a_n=2^n$　　$D.a_n=2^{n-1}$



【答案】C

【解析】

试题分析：当$S=1,i=1$时，$a_1=2\times1=2^1$；当$S=2^1,i=2$时，$a_2=2\times2^1=2^2$；当$S=2^2,i=3$时，$a_3=2\times2^2=2^3$；$\cdots$由此得出数列的通项公式为$a_n=2^n$，故选C.

考点：程序框图的识别.

5.将边长为1的正方形以其一边所在直线为旋转轴旋转一周，所得几何体的侧面积为（　　）

$A.4\pi$　　　$B.3\pi$　　　$C.2\pi$　　　$D.\pi$

【答案】C

【解析】

试题分析：将边长为1的正方形以其学科网一边所在直线为旋转轴旋转一周得到的几何体为底面为半径为$r=1$的圆、高为1的圆柱，其侧面展开图为长为$2\pi r=2\pi$，宽为1，所以所得几何体的侧面积为

$2\pi\times1=2\pi$.故选 C .

考点：旋转体；几何体的侧面积.

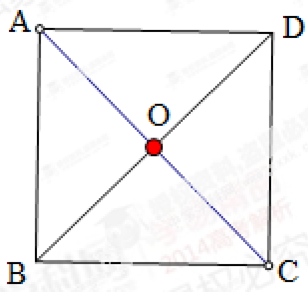
6.从正方形四个顶点及其中心这5个点中，任取2个点，则这2个点的距离小于该正方形边长的概率为(　　)

$A.\frac{1}{5}$　　$B.\frac{2}{5}$　　$C.\frac{3}{5}$　　$D.\frac{4}{5}$

【答案】 B

【解析】

试题分析：如图，从正方形四个顶点及其中心这5个点中，任取2个点，共有 $C_5^2=10$ 条线段，O 点与 A，B，C，D 四点中任意1点的连线段都小于该正方形边长，共有 $C_4^1=4$，所以这2个点的距离小于该正方形边长的概率 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，故选 B .



考点：古典概型及其概率计算公式.

7.下了函数中，满足“$f(x+y)=f(x)f(y)$”的单调递增函数是（　　）

（A）$f(x)=x^3$　　（B）$f(x)=3^x$　　（C）$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$　　（D）$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

【答案】 B

【解析】

试题分析：A 选项：由 $f(x+y)=(x+y)^3$，$f(x)f(y)=x^3\cdot y^3=(xy)^3$，得 $f(x+y)\neq f(x)f(y)$，所以 A 错误；B 选项：由 $f(x+y)=3^{x+y}$，$f(x)f(y)=3^x\cdot3^y=3^{x+y}$，得 $f(x+y)=f(x)f(y)$；又函数 $f(x)=3^x$ 是定义在 R 上增函数，所以 B 正确；C 选项：由 $f(x+y)=(x+y)^{\frac{2}{3}}$，$f(x)f(y)=x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}=(xy)^{\frac{2}{3}}$，得 $f(x+y)\neq f(x)f(y)$，所以 C 错误；D 选项：函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是定义在 R 上减函数，所以 D 错误；故选 B .

考点：函数求值；函数的单调性.

8.原命题为“若$\frac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n$，$n\in N_+$，则$\{a_n\}$为递减数列”，关于逆命题，否命题，逆否命题真假性的判断依次如下，正确的是（　　）

（A）真，真，真　　（B）假，假，真　　（C）真，真，假　　（D）假，假，假

【答案】A

【解析】

试题分析：由$\frac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n\Rightarrow a_{n+1}<a_n\Rightarrow\{a_n\}$为递减数列，所以原命题为真命题；逆命题：若$\{a_n\}$为递减数列，则$\frac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n$，$n\in N_+$；若$\{a_n\}$为递减数列，则$a_{n+1}<a_n$，即$\frac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n$，所以逆命题为真；否命题：若$\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\geq a_n$，$n\in N_+$，则$\{a_n\}$不为递减数列；由$\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\geq a_n\Rightarrow a_n\leq +a_{n+1}\Rightarrow\{a_n\}$不为递减数列，所以否命题为真；因为逆否命学科网题的真假为原命题的真假相同，所以逆否命题也为真命题.

故选A.

考点：命题及命题的真假.

9.某公司10位员工的月工资（单位：元）为x_1，x_2，…，x_{10}，其均值和方差分别为$\overline{x}$和s^2，若从下月起每位员工的月工资增加100元，则这10位员工下月工资的均值和方差分别为（　　）

（A）$\overline{x}$，s^2+100^2　　（B）$\overline{x}+100$，s^2+100^2

（C）$\overline{x}$，s^2　　（D）$\overline{x}+100$，s^2

【答案】D

【解析】

试题分析：由题得：$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=10\times\overline{x}=10\overline{x}$；$(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2=10\times s^2=10s^2$

若从下月起每位员工的月工资增加100元，则这10位员工下月工资的均值和方差分别为：

均值$\overline{y}=\frac{(x_1+100)+(x_2+100)+\cdots+(x_{10}+100)}{10}$

$$=\frac{(x_1+100)+(x_2+100)+\cdots+(x_{10}+100)}{10}=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_{10})+10\times 100}{10}=\frac{10\overline{x}+10\times 100}{10}=\overline{x}+100$$

方差$=\frac{[(x_1+100)-(\overline{x}+100)]^2+[(x_2+100)-(\overline{x}+100)]^2+\cdots+[(x_{10}+100)-(\overline{x}+100)]^2}{10}$

$$=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2}{10}=\frac{10s^2}{10}=s^2$$

故选 D

考点：均值和方差.

10.如图，修建一条公路需要一段环湖弯曲路段与两条直道平滑连续（相切），已知环湖弯曲路段为某三次函数图像的一部分，则该函数的解析式为（　　）

（A）$y=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-x$　　（B）$y=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x$

（C）$y=\frac{1}{4}x^3-x$　　（D）$y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

【答案】A

【解析】

试题分析：由题目图像可知：该三次函数过原点，故可设该学科网三次函数为 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx$，

则 $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$，由题得：$f'(0)=-1$，$f(2)=0$，$f'(2)=3$

即 $\begin{cases} c=-1 \\ 8a+4b+2c=0 \\ 12a+4b+c=3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=-1 \end{cases}$，所以 $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-x$，故选 A.

考点：函数的解析式.

二、填空题：把答案填写在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）.

11.抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为________.

【答案】$x=-1$

【解析】

试题分析：由抛物线的几何性质知：抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，故答案为 $x=-1$.

考点：抛物线的几何性质.

12.已知 $4^a=2$，$\lg x=a$，则 $x=$________.

【答案】$\sqrt{10}$

【解析】

试题分析：由 $4^a=2$ 得 $a=\dfrac{1}{2}$，所以 $\lg x=\dfrac{1}{2}$，解得 $x=\sqrt{10}$，故答案为 $\sqrt{10}$.

考点：指数方程；对数方程.

13. 设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，向量 $\vec{a}=(\sin 2\theta,\cos\theta),\vec{b}=(1,-\cos\theta)$，若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $\tan\theta=$______.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】

试题分析：因为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以 $\sin 2\theta\times 1-\cos^2\theta=0$，即 $\sin 2\theta=\cos^2\theta$，所以 $2\sin\theta\cos\theta=\cos^2\theta$；因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\theta\neq 0$，故 $2\sin\theta=\cos\theta$，所以 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$，故答案为 $\dfrac{1}{2}$.

考点：共线定理；三角恒等变换.

14. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},x\ge 0$，若 $f_1(x)=f(x),f_{n+1}(x)=f(f_n(x)),n\in N_+$，则 $f_{2014}(x)$ 的表达式为________.

【答案】$\dfrac{x}{1+2014x}$

【解析】

试题分析：$f(x)=\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{x+1-1}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$，$\because x\ge 0$，$\therefore 1+x\ge 1$，$\therefore \dfrac{1}{1+x}\le 1$，$\therefore 1-\dfrac{1}{1+x}\ge 0$，即 $f(x)\ge 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，当 $x=0$ 时，$f_n(0)=0$；当 $x>0$ 时 $f(x)>0$，$\because f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$

$\therefore f_{n+1}(x)=\dfrac{f_n(x)}{1+f_n(x)}$，$\therefore \dfrac{1}{f_{n+1}(x)}=\dfrac{1+f_n(x)}{f_n(x)}=\dfrac{1}{f_n(x)}+1$，即 $\dfrac{1}{f_{n+1}(x)}-\dfrac{1}{f_n(x)}=1$，$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{1}{f_n(x)}\}$ 是以 $f_1(x)$ 为首项，以 1 为公差的等差数列 $\therefore \dfrac{1}{f_n(x)}=\dfrac{1}{f_1(x)}+(n-1)\times 1=\dfrac{1}{\frac{x}{1+x}}+(n-1)\times 1=\dfrac{1+nx}{x}$

$\therefore f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(x>0)$，当 $x=0$ 时，$f_n(0)=\dfrac{0}{1+0}=0$，$\therefore f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(x\ge 0)$，

$\therefore f_{2014}(x)=\dfrac{x}{1+2014x}$

考点：数列的通项公式；数列与函数之间的关系.

15. （考生注意：请在下列三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题评分）

A.（不等式选做题）设 $a,b,m,n\in R$，且 $a^2+b^2=5, ma+nb=5$，则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最小值为______.

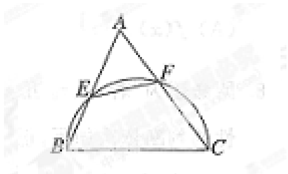
【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

试题分析：由柯西不等式得：$(a^2+b^2)(m^2+n^2)\ge(ma+nb)^2$，所以 $5(m^2+n^2)\ge 5^2$，得 $m^2+n^2\ge 5$，所以 $\sqrt{m^2+n^2}\ge\sqrt{5}$，故答案为 $\sqrt{5}$.

考点：柯西不等式.

B.（几何证明选做题）如图，ΔABC 中，$BC=6$，以 BC 为直径的半圆分别交 AB,AC 于点 E,F，若 $AC=2AE$，则 $EF=$______.



【答案】3

【解析】

试题分析：由四边形 $BCFE$ 为圆内接四边形 $\Rightarrow\angle AEF=\angle C$，$\angle AFE=\angle B\Rightarrow\Delta AEF\sim\Delta ACB\Rightarrow$ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{1}{2}$，又因为 $BC=6$，所以 $EF=3$，故答案为 3.

考点：几何证明；三角形相似.

C.（坐标系与参数方程选做题）在极坐标系中，点 $(2,\dfrac{\pi}{6})$ 到直线 $\rho\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})=1$ 的距离是______.

【答案】1

【解析】

试题分析：直线$\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=1$化为直角坐标方程为$\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}x-1=0$，点$(2,\frac{\pi}{6})$的直角坐标为$(\sqrt{3},1)$，

点$(\sqrt{3},1)$到直线$\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}x-1=0$的距离$d=\frac{|\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}-1=0|}{\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=1$，故答案为 1.

考点：极坐标方程；点到直线距离.

三、解答题.

16. （本小题满分 12 分）

ΔABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.

（1）若a,b,c成等差数列，证明：$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$；

（2）若a,b,c成等比数列，且$c=2a$，求$\cos B$的值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{3}{4}$.

【解析】

试题分析：（1）因为 a，b，c 成等差数列，所以 $a+c=2b$，再由三角形正弦定理得 $\sin A+\sin C=2\sin B$，

又在 ΔABC 中，有 $B=\pi-(A+B)$，所以 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$，最后得：

$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$，即得证；

（2）因为 a，b，c 成等比数列，所以 $b^2=2ac$，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}$

$=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}$，又 $c=2a$，所以 $\cos B$ 的值为 $\frac{3}{4}$

试题解析：（1）$\because a$，b，c 成等差数列

$\therefore a+c=2b$

由正弦定理得 $\sin A+\sin C=2\sin B$

$\because \sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$

$\therefore \sin A+\sin C=2\sin(A+C)$

（2）$\because a$，b，c 成等比数列

$\therefore b^2=2ac$

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}$

$\because c=2a$

$\therefore \cos B=\frac{a^2+4a^2}{4a^2}=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos B=\frac{3}{4}$

考点：正弦定理；余弦定理.

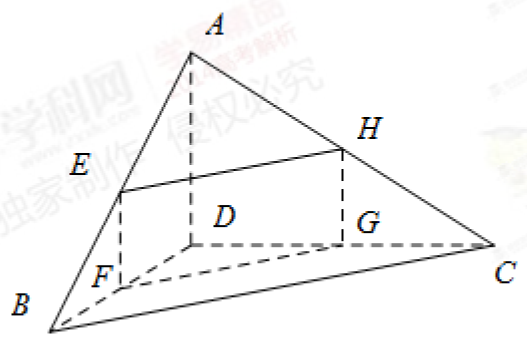
17.（本小题满分 12 分）

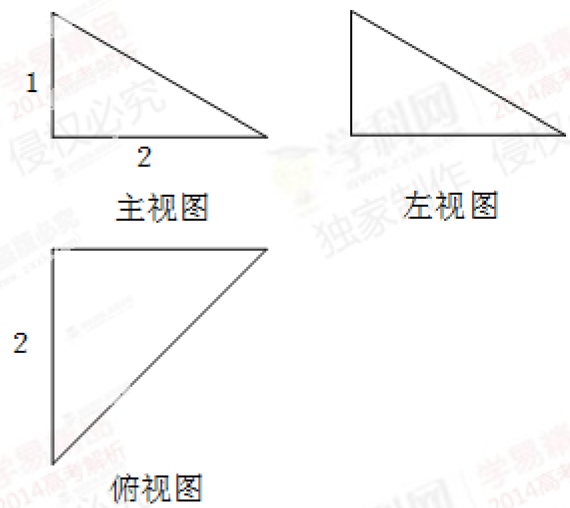
四面体 $ABCD$ 及其三视图如图所示，平行于棱 AD,BC 的平面分别交四面体的棱

AB,BD,DC,CA 于点 E,F,G,H .

（1）求四面体 $ABCD$ 的体积；

（2）证明：四边形 $EFGH$ 是矩形.





【答案】（1）$\frac{2}{3}$；（2）证明见解析.

【解析】

试题分析：（1）由该四面体的三视图可知：$BD\perp DC,BD\perp AD,AD\perp DC$，$BD=DC=2,AD=1$，

所以 $AD\perp$ 平面 BDC，故四面体体积 $V=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\Delta BCD}$，即可求出四面体 $ABCD$ 的体积.

（2）由该四面体的三视图可知：$BD\perp DC,BD\perp AD,AD\perp DC$，$BD=DC=2,AD=1$

由题设，BC // 面 $EFGH$，面 $EFGH\bigcap$ 面 $BDC=FG$，面 $EFGH\bigcap$ 面 $ABC=EH$，所以 BC // FG，

$BC // EH$，所以 $FG // EH$，同理可得 $EF // HG$，即得四边形 $EFGH$ 是平行四边形，同时可证 $EF \perp FG$，即证四边形 $EFGH$ 是矩形；

试题解析：

（1）由该四面体的三视图可知：

$BD \perp DC, BD \perp AD, AD \perp DC$，$BD = DC = 2, AD = 1$

$\therefore AD \perp$ 平面 BDC

$\therefore$ 四面体体积 $V = \frac{1}{3} AD \cdot S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{2}{3}$

（2）由该四面学科网体的三视图可知：

$BD \perp DC, BD \perp AD, AD \perp DC$，$BD = DC = 2, AD = 1$

由题设，$BC //$ 面 $EFGH$

面 $EFGH \cap$ 面 $BDC = FG$

面 $EFGH \cap$ 面 $ABC = EH$

$\therefore BC // FG$，$BC // EH$，　$\therefore FG // EH$.

同理 $EF // AD$，$HG // AD$，　$\therefore EF // HG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

又 $\because BD \perp AD, AD \perp DC, BD \cap DC = D$

$\therefore AD \perp$ 平面 BDC

$\therefore AD \perp BC$

$\because BC // FG$，$EF // AD$

$\therefore EF \perp FG$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形

考点：四面体的体积；面面平行的性质.

18.（本小题满分 12 分）

在直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(1,1), B(2,3), C(3,2)$，点 $P(x,y)$ 在 ΔABC 三边围成的区域（含边界）上，且 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} (m,n \in R)$.

（1）若 $m = n = \frac{2}{3}$，求 $|\overrightarrow{OP}|$；

（2）用 x, y 表示 $m-n$，并求 $m-n$ 的最大值.

【答案】（1） $2\sqrt{2}$；（2） $m-n=y-x$，1.

【解析】

试题分析：（1）由 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m,n\in R)$，且 $m=n=\frac{2}{3}$，即可求出 P 点的坐标，继而求出 $|\overrightarrow{OP}|$ 的值；

（2）因为 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，所以 $(x,y)=(m+2n,2m+n)$，即 $\begin{cases}x=m+2n\\y=2m+n\end{cases}$，两式相减得：$m-n=y-x$

令 $y-x=t$，点 $P(x,y)$ 在 ΔABC 三边围成学科网的区域（含边界）上，当直线 $y=x+t$ 过点 $B(2,3)$ 时，t 取得最大值 1，故 $m-n$ 的最大值为 1.

试题解析：（1） $\because A(1,1),B(2,3),C(3,2)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1)$

$\because \overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

又 $m=n=\frac{2}{3}$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=(2,2)$

$\therefore |\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{2}$

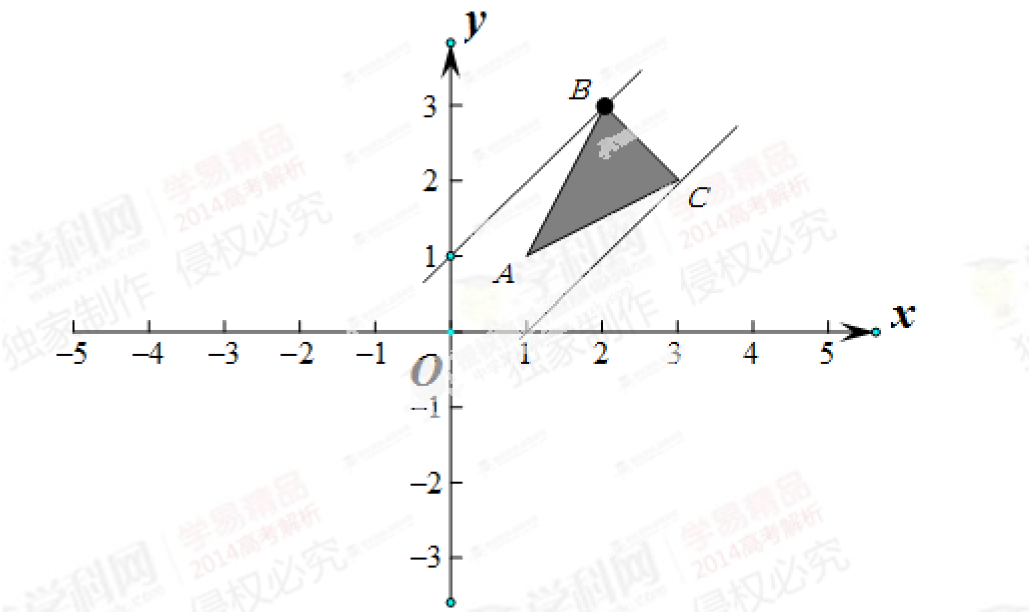
（2） $\because \overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

$\therefore (x,y)=(m+2n,2m+n)$

即 $\begin{cases}x=m+2n\\y=2m+n\end{cases}$

两式相减得：$m-n=y-x$

令 $y-x=t$，由图可知，当直线 $y=x+t$ 过点 $B(2,3)$ 时，t 取得最大值 1，故 $m-n$ 的最大值为 1.



考点：平面向量的线性运算；线性规划.

19.（本小题满分 12 分）

某保险公司利用简单随机抽样方法，对投保车辆进行抽样，样本车辆中每辆车的赔付结果统计如下：

赔付金额（元）	0	1000	2000	3000	4000
车辆数（辆）	500	130	100	150	120

（1）若每辆车的投保金额均为 2800 元，估计赔付金额大于投保金额的概率；

（2）在样本车辆中，车主是新司机的占10%，在赔付金额为 4000 元的样本车辆中，车主是新司机的占20%，估计在已投保车辆中，新司机获赔金额为 4000 元的概率.

【答案】（1）0.27；（2）0.24.

【解析】

试题分析：（1）设 A 表示事件“赔付金额为 3000 元”，B 表示事件“赔付金额为 4000 元”，以频率估计概率求得 $P(A)$，$P(B)$，在根据投保金额为 2800，赔付金额大于投保金额对应的情形时 3000 元和 4000 元，问题就得以解决；

（2）设 C 表示事件“投保车辆中新司机获赔 4000 元”，分别求出样本车辆中车主为新司机人数和赔付金额为 4000 元的车辆中车主为新司机人数，在求出其频率，最后利用频率表示概率.

试题解析：

（1）设 A 表示事件“赔付金额为 3000 元”，B 表示事件“赔付金额为 4000 元”，以频率估计概率得：

$$P(A)=\frac{150}{1000}=0.15，P(B)=\frac{120}{1000}=0.12，$$

由于投保金额为 2800，赔付金额大于投保金额对应的情形时 3000 元和 4000 元，所以其概率为：

$P(A)+P(B)=0.15+0.12=0.27$

（2）设 C 表示事件“投保车辆中新司机获赔 4000 元”，由已知，样本车辆中车主为新司机的有 $0.1\times1000=100$，而赔付金额为 4000 元的车辆中车主为新司机的有 $0.2\times120=24$

所以样本中车辆中新司机车主获赔金额为 4000 元的频率为 $\frac{24}{100}=0.24$

由频率估计概率得 $P(C)=0.24$

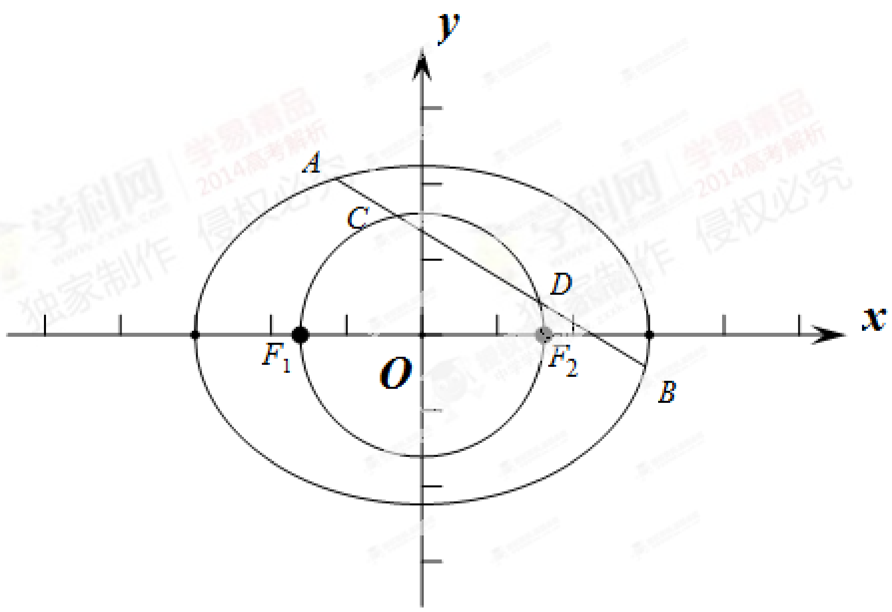
考点：古典概型及其概率计算公式.

20.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(0,\sqrt{3})$，离心率为 $\frac{1}{2}$，左右焦点分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$.

（1）求椭圆的方程；

（2）若直线 $l:y=-\frac{1}{2}x+m$ 与椭圆交于 A,B 两点，与以 F_1F_2 为直径的圆交于 C,D 两点，且满足 $\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$，求直线 l 的方程.



【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；（2）$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$或$y=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

试题分析：（1）由题意可得$\begin{cases} b=\sqrt{3} \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解出$a$，$b$的值，即可求出椭圆的方程；

（2）由题意可得以F_1F_2为直径的圆的方程为$x^2+y^2=1$，利用点到直线的距离公式得：圆心到直线l的距离$d<1$，可得m的取值范围，利用弦长公式可得$|CD|=2\sqrt{1-d^2}$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，把直线l的方程与椭圆的方程联立可得根与系数的关系，进而得到弦长$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，由$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$，即可解得$a$的值.

试题解析：（1）由题意可得$\begin{cases} b=\sqrt{3} \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$

解得$a=2,b=\sqrt{3},c=1$

$\therefore$椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）由题意可得以F_1F_2为直径的圆的方程为$x^2+y^2=1$

$\therefore$圆心到直线l的距离为$d=\frac{2|m|}{\sqrt{5}}$

由$d<1$，即$\frac{2|m|}{\sqrt{5}}<1$，可得$|m|<\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore |CD|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\frac{4m^2}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{5-4m^2}$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x+m \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$

整理得$x^2-mx+m^2-3=0$

可得：$x_1+x_2=m$，$x_1x_2=m^2-3$

$\therefore |AB|=\sqrt{1+(-\dfrac{1}{2})^2}\cdot\sqrt{m^2-4(m^2-3)}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{4-m^2}$

$\because \dfrac{|AB|}{|CD|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{4-m^2}}{\sqrt{5-4m^2}}=1$

解方程得$m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，且满足$|m|<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$直线l的方程为$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

考点：椭圆的标准方程；直线与圆锥曲线的综合问题.

21.（本小题满分 13 分）

设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{m}{x},m\in R$.

（1）当$m=e$（e为自然对数的底数）时，求$f(x)$的极小值；

（2）讨论函数$g(x)=f'(x)-\dfrac{x}{3}$零点的个数；

（3）若对任意$b>a>0,\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$恒成立，求$m$的取值范围.

【答案】（1）2；（2）当$m>\dfrac{2}{3}$时，函数$g(x)$无零点；当$m=\dfrac{2}{3}$或$m\le 0$时，函数$g(x)$有且仅有一个零点；当$0<m<\dfrac{2}{3}$时，函数$g(x)$有两个零点；（3）$[\dfrac{1}{4},+\infty)$.

【解析】

试题分析：（1）当 $m=e$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{e}{x}$，易得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求出导函数 $f'(x)$，利用 $f'(x)$ 判定函数 $f(x)$ 在定义区间内的单调性，并求出 $f(x)$ 的极小值；

（2）由函数 $g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-\frac{x}{3}(x>0)$，令 $g(x)=0$，得 $m=-\frac{1}{3}x^3+x(x>0)$，设 $h(x)=-\frac{1}{3}x^3+x(x\geq 0)$，由 $h'(x)=-x^2+1=-(x-1)(x+1)$ 求出函数 $h(x)$ 的单调性以及极值，并且求出函数 $h(x)$ 在 $x\geq 0$ 的零点，画出 $h(x)$ 的大致图学科网像，并从图像中，可以得知，当 m 在不同范围的时候，函数 $y=m$ 和函数 $y=h(x)$ 的交点个数

（3）对任意 $b>a>0,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，等价于 $f(b)-b<f(a)-a$ 恒成立，则 $h(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{m}{x}-x(x>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，即 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-1\leq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，求出 m 的取值范围.

试题解析：（1）当 $m=e$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{e}{x}$

易得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}$

$\therefore$ 当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上是减函数；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上是增函数；

$\therefore$ 当 $x=e$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(e)=\ln e+\frac{e}{e}=2$

(2) $\because$ 函数 $g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-\frac{x}{3}(x>0)$

令 $g(x)=0$，得 $m=-\frac{1}{3}x^3+x(x>0)$

设 $h(x)=-\frac{1}{3}x^3+x(x\geq 0)$

$\therefore h'(x)=-x^2+1=-(x-1)(x+1)$

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，此时 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数；

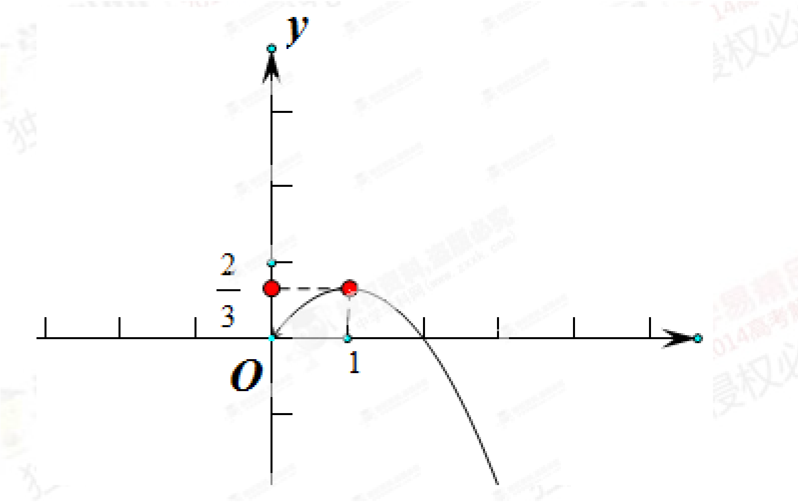
当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，此时 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数；

$\therefore$ $x=1$ 是 $h(x)$ 的唯一极值点，且是极大值点，因此 $x=1$ 也是 $h(x)$ 的最大值点

$\therefore h(x)$ 的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

又 $h(0)=0$

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 的图像如图所示：



由图知：

① 当 $m>\frac{2}{3}$ 时，函数 $y=m$ 和函数 $y=h(x)$ 无交点；

②当 $m=\frac{2}{3}$ 时，函数 $y=m$ 和函数 $y=h(x)$ 有且仅有一个交点；

③当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时，函数 $y=m$ 和函数 $y=h(x)$ 有两个交点；

④ $m\le 0$ 时，函数 $y=m$ 和函数 $y=h(x)$ 有且仅有一个交点；

综上所述，当 $m>\frac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 无零点；当 $m=\frac{2}{3}$ 或 $m\le 0$ 时，函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点；当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点.

（3）对任意 $b>a>0,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立

等价于 $f(b)-b<f(a)-a$ 恒成立

设 $h(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{m}{x}-x(x>0)$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-1\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立

$\therefore m \geq -x^2 + x = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}(x>0)$

$\therefore m \geq \frac{1}{4}$

当且仅当当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$m=\frac{1}{4}$

$\therefore m$ 的取值范围是 $[\frac{1}{4},+\infty)$

考点：利用导数研究函数的极值；函数恒成立问题；函数的零点.