2013年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（5分）已知集合 $A=\{-1，0，1\}$，$B=\{x|-1\leqslant x<1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0\}$　　B．$\{-1，0\}$　　C．$\{0，1\}$　　D．$\{-1，0，1\}$

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】找出A与B的公共元素，即可确定出两集合的交集．

【解答】解：$\because A=\{-1，0，1\}$，$B=\{x|-1\leqslant x<1\}$，

$\therefore A\cap B=\{-1，0\}$．

故选：B．

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．（5分）在复平面内，复数 $(2-i)^2$ 对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义．

【专题】5N：数系的扩充和复数．

【分析】化简复数为代数形式，求出复数对应点的坐标，即可判断复数对应点所在象限．

【解答】解：复数 $(2-i)^2=4-4i+i^2=3-4i$，

复数对应的点 $(3，-4)$，

所以在复平面内，复数 $(2-i)^2$ 对应的点位于第四象限．

故选：D．

【点评】本题考查复数的代数形式的混合运算，复数的几何意义，考查计算能力．

3．（5 分）“ϕ=π”是“曲线 y=sin（2x+ϕ）过坐标原点”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件．

【专题】5L：简易逻辑．

【分析】按照充要条件的定义从两个方面去求①曲线 y=sin（2x+ϕ）过坐标原点，求出 ϕ 的值，②ϕ=π 时，曲线 y=sin（2x+ϕ）过坐标原点．

【解答】解：ϕ=π 时，曲线 y=sin（2x+ϕ）=﹣sin2x，过坐标原点．

但是，曲线 y=sin（2x+ϕ）过坐标原点，即 O（0，0）在图象上，

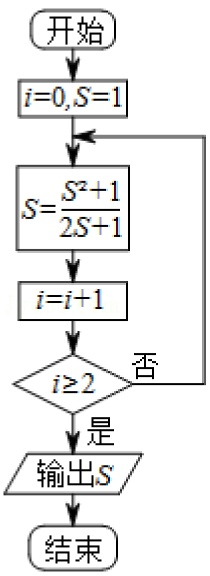
将（0，0）代入解析式整理即得 sinϕ=0，ϕ=kπ，k∈Z，不一定有 ϕ=π．

故“ϕ=π”是“曲线 y=sin（2x+ϕ）过坐标原点”的充分而不必要条件．

故选：A．

【点评】本题考查充要条件的判定，用到的知识是三角函数的图象特征．是基础题．

4．（5 分）执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为（　　）



A．1　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{13}{21}$　　D．$\frac{610}{987}$

【考点】EF：程序框图．

【专题】5K：算法和程序框图．

【分析】从框图赋值入手，先执行一次运算，然后判断运算后的 i 的值与 2 的大小，满足判断框中的条件，则跳出循环，否则继续执行循环，直到条件满足为止．

【解答】解：框图首先给变量 i 和 S 赋值 0 和 1．

执行 $S=\frac{1^2+1}{2\times1+1}=\frac{2}{3}$，i=0+1=1；

判断 1≥2 不成立，执行 $S=\frac{(\frac{2}{3})^2+1}{2\times\frac{2}{3}+1}=\frac{13}{21}$，i=1+1=2；

判断 2≥2 成立，算法结束，跳出循环，输出 S 的值为$\frac{13}{21}$．

故选：C．

【点评】本题考查了程序框图，考查了直到型结构，直到型循环是先执行后判断，不满足条件执行循环，直到条件满足结束循环，是基础题．

5．（5 分）函数 f（x）的图象向右平移 1 个单位长度，所得图象与曲线 $y=e^x$ 关于 y 轴对称，则 f（x）=（　　）

A．e^{x+1}　　B．e^{x-1}　　C．e^{-x+1}　　D．e^{-x-1}

【考点】36：函数解析式的求解及常用方法；3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】首先求出与函数 $y=e^x$ 的图象关于 y 轴对称的图象的函数解析式，然后换 x 为 x+1 即可得到要求的答案．

【解答】解：函数 $y=e^x$ 的图象关于 y 轴对称的图象的函数解析式为 $y=e^{-x}$，

而函数 f（x）的图象向右平移 1 个单位长度，所得图象与曲线 $y=e^x$ 的图象关于 y 轴对称，

所以函数 f（x）的解析式为 $y=e^{-(x+1)}=e^{-x-1}$．即 f（x）$=e^{-x-1}$．

故选：D．

【点评】本题考查了函数解析式的求解与常用方法，考查了函数图象的对称变换

和平移变换，函数图象的平移遵循“左加右减，上加下减”的原则，是基础题．

6．（5 分）若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$\sqrt{3}$，则其渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm 2x$　　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　　C．$y=\pm\frac{1}{2}x$　　　D．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】通过双曲线的离心率，推出 a、b 关系，然后直接求出双曲线的渐近线方程．

【解答】解：由双曲线的离心率$\sqrt{3}$，可知 $c=\sqrt{3}a$，

又 $a^2+b^2=c^2$，所以 $b=\sqrt{2}a$，

所以双曲线的渐近线方程为：$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{2}x$．

故选：B．

【点评】本题考查双曲线的基本性质，渐近线方程的求法，考查计算能力．

7．（5 分）直线 l 过抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点且与 y 轴垂直，则 l 与 C 所围成的图形的面积等于（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　　B．2　　　C．$\frac{8}{3}$　　　D．$\frac{16\sqrt{2}}{3}$

【考点】67：定积分、微积分基本定理．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】先确定直线的方程，再求出积分区间，确定被积函数，由此利用定积分可求直线 l 与抛物线围成的封闭图形面积．

【解答】解：抛物线 $x^2=4y$ 的焦点坐标为（0，1），

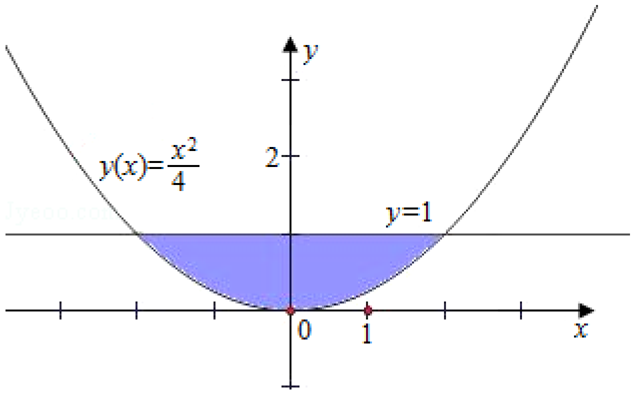
∵直线 l 过抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点且与 y 轴垂直，

∴直线 l 的方程为 $y=1$，

由 $\begin{cases}y=1\\x^2=4y\end{cases}$，可得交点的横坐标分别为－2，2．

∴直线 l 与抛物线围成的封闭图形面积为 $\int_{-2}^{2}(1-\frac{x^2}{4})dx=(x-\frac{1}{12}x^3)|_{-2}^{2}=\frac{8}{3}$.

故选：C.



【点评】本题考查封闭图形的面积，考查直线方程，解题的关键是确定直线的方程，求出积分区间，确定被积函数.

8.（5 分）设关于 x，y 的不等式组 $\begin{cases}2x-y+1>0,\\x+m<0,\\y-m>0\end{cases}$ 表示的平面区域内存在点 P（x_0，y_0），满足 $x_0-2y_0=2$，求得 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,\frac{4}{3})$ B. $(-\infty,\frac{1}{3})$ C. $(-\infty,-\frac{2}{3})$ D. $(-\infty,-\frac{5}{3})$

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】59：不等式的解法及应用.

【分析】先根据约束条件 $\begin{cases}2x-y+1>0,\\x+m<0,\\y-m>0\end{cases}$ 画出可行域. 要使可行域存在，必有 $m<-2m+1$，要求可行域包含直线 $y=\frac{1}{2}x-1$ 上的点，只要边界点（$-m$，$1-2m$）在直线 $y=\frac{1}{2}x-1$ 的上方，且（$-m$，m）在直线 $y=\frac{1}{2}x-1$ 的下方，从而建立关于 m 的不等式组，解之可得答案.

【解答】解：先根据约束条件$\begin{cases}2x-y+1>0\\x+m<0\\y-m>0\end{cases}$，画出可行域，

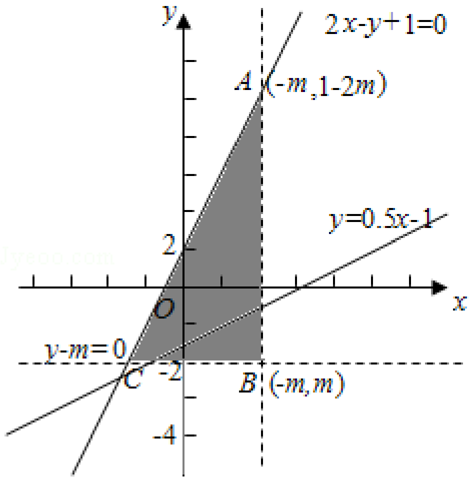
要使可行域存在，必有 m＜﹣2m+1，要求可行域包含直线 $y=\frac{1}{2}x-1$ 上的点，只要边界点（﹣m，1﹣2m）

在直线 $y=\frac{1}{2}x-1$ 的上方，且（﹣m，m）在直线 $y=\frac{1}{2}x-1$ 的下方，

故得不等式组$\begin{cases}m<-2m+1\\1-2m>-\frac{1}{2}m-1\\m<-\frac{1}{2}m-1\end{cases}$，

解之得：m＜$-\frac{2}{3}$.

故选：C.



【点评】平面区域的最值问题是线性规划问题中一类重要题型，在解题时，关键是正确地画出平面区域，分析表达式的几何意义，然后结合数形结合的思想，分析图形，找出满足条件的点的坐标，即可求出答案.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.（5 分）在极坐标系中，点（2，$\frac{\pi}{6}$）到直线 ρsinθ=2 的距离等于__1__.

【考点】IT：点到直线的距离公式；Q8：点的极坐标和直角坐标的互化.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】先将点的极坐标化成直角坐标，极坐标方程化为直角坐标方程，然后用点到直线的距离来解.

【解答】解：在极坐标系中，点$(2，\frac{\pi}{6})$化为直角坐标为（$\sqrt{3}$，1），直线$\rho\sin\theta=2$化为直角坐标方程为 $y=2$，

（$\sqrt{3}$，1），到 $y=2$ 的距离 1，即为点$(2，\frac{\pi}{6})$到直线 $\rho\sin\theta=2$ 的距离 1，

故答案为：1.

【点评】本题关键是直角坐标和极坐标的互化，体现等价转化数学思想.

10．（5 分）若等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_4=20$，$a_3+a_5=40$，则公比 $q=$__2__；前 n 项和 $S_n=$__$2^{n+1}-2$__.

【考点】88：等比数列的通项公式；89：等比数列的前 n 项和.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】利用等比数列的通项公式和已知即可得出$\begin{cases}a_1q+a_1q^3=20\\a_1q^2+a_1q^4=40\end{cases}$，解出即可得到 a_1 及 q，再利用等比数列的前 n 项和公式即可得出$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.

【解答】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

∵$a_2+a_4=a_2(1+q^2)=20$①

$a_3+a_5=a_3(1+q^2)=40$②

∴①②两个式子相除，可得到$\frac{a_3}{a_2}=\frac{40}{20}=2$

即等比数列的公比 $q=2$，

将 $q=2$ 带入①中可求出 $a_2=4$

则 $a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{4}{2}=2$

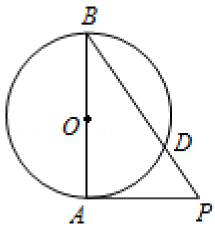
∴数列$\{a_n\}$时首项为 2，公比为 2 的等比数列.

∴数列$\{a_n\}$的前 n 项和为：$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{2\times(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$.

故答案为：2，$2^{n+1}-2$．

【点评】熟练掌握等比数列的通项公式和等比数列的前 n 项和公式是解题的关键．

11．（5 分）如图，AB 为圆 O 的直径，PA 为圆 O 的切线，PB 与圆 O 相交于 D，若 PA=3，PD：DB=9：16，则 PD=__$\frac{9}{5}$__，AB=__4__．



【考点】NC：与圆有关的比例线段．

【专题】5B：直线与圆．

【分析】由 PD：DB=9：16，可设 PD=9x，DB=16x．利用切割线定理可得 $PA^2=PD\bullet PB$，即可求出 x，进而得到 PD，PB．AB 为圆 O 的直径，PA 为圆 O 的切线，利用切线的性质可得 AB⊥PA．再利用勾股定理即可得出 AB．

【解答】解：由 PD：DB=9：16，可设 PD=9x，DB=16x．

∵PA 为圆 O 的切线，∴$PA^2=PD\bullet PB$，

∴$3^2=9x\bullet(9x+16x)$，化为 $x^2=\frac{1}{25}$，∴ $x=\frac{1}{5}$．

∴$PD=9x=\frac{9}{5}$，PB=25x=5．

∵AB 为圆 O 的直径，PA 为圆 O 的切线，∴AB⊥PA．

∴ $AB=\sqrt{PB^2-PA^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$．

故答案分别为$\frac{9}{5}$，4．

【点评】熟练掌握圆的切线的性质、切割线定理、勾股定理是解题的关键．

12．（5 分）将序号分别为 1，2，3，4，5 的 5 张参观券全部分给 4 人，每人至少 1 张，如果分给同一人的 2 张参观券连号，那么不同的分法种数是__96__．

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】5O：排列组合．

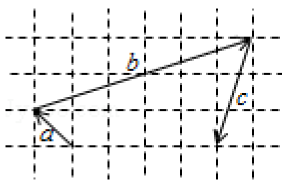
【分析】求出 5 张参观券全部分给 4 人，每人至少 1 张，如果分给同一人的 2 张参观券连号的组数，然后分给 4 人排列即可．

【解答】解：5 张参观券全部分给 4 人，分给同一人的 2 张参观券连号，方法数为：1 和 2，2 和 3，3 和 4，4 和 5，四种连号，其它号码各为一组，分给 4 人，共有 $4\times A_4^4=96$ 种．

故答案为：96．

【点评】本题考查排列组合以及简单的计数原理的应用，正确分组是解题的关键，考查分析问题解决问题的能力．

13．（5 分）向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$在正方形网格中的位置如图所示，若 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$（λ，μ∈R），则$\frac{\lambda}{\mu}$=__4__．



【考点】9H：平面向量的基本定理．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】以向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的公共点为坐标原点，建立如图直角坐标系，得到向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的坐标，结合题中向量等式建立关于 λ、μ 的方程组，解之得 λ=﹣2 且 $\mu=-\frac{1}{2}$，即可得到$\frac{\mu}{\lambda}$的值．

【解答】解：以向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的公共点为坐标原点，建立如图直角坐标系

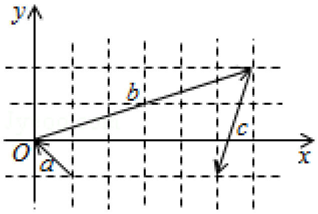
可得$\vec{a}$=（﹣1，1），$\vec{b}$=（6，2），$\vec{c}$=（﹣1，﹣3）

$\because \vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}(\lambda,\quad\mu\in R)$

$\therefore \begin{cases}-1=-\lambda+6\mu\\-3=\lambda+2\mu\end{cases}$，解之得 λ=﹣2 且 $\mu=-\frac{1}{2}$

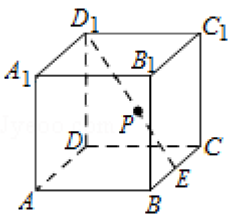
因此，$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{-2}{-\frac{1}{2}}=4$

故答案为：4



【点评】本题给出向量$\vec{c}$用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$线性表示，求系数λ、μ的比值，着重考查了平面向量的坐标运算法则和平面向量基本定理及其意义等知识，属于基础题．

14．（5分）如图，在棱长为2的正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$中，E为BC的中点，点P在线段D_1E上，点P到直线CC_1的距离的最小值为__$\frac{2\sqrt{5}}{5}$__．



【考点】MK：点、线、面间的距离计算．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】如图所示，取B_1C_1的中点F，连接EF，ED_1，利用线面平行的判定即可得到C_1C∥平面D_1EF，进而得到异面直线D_1E与C_1C的距离．

【解答】解：如图所示，取B_1C_1的中点F，连接EF，ED_1，

∴CC_1∥EF，

又EF⊂平面D_1EF，CC_1⊄平面D_1EF，

∴CC_1∥平面D_1EF．

∴直线C_1C上任一点到平面D_1EF的距离是两条异面直线D_1E与CC_1的距离．

过点C_1作C_1M⊥D_1F，

∵平面D_1EF⊥平面$A_1B_1C_1D_1$．

$\therefore C_1M\perp$平面 D_1EF.

过点 M 作 $MP\parallel EF$ 交 D_1E 于点 P，则 $MP\parallel C_1C$.

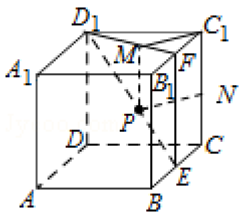
取 $C_1N=MP$，连接 PN，则四边形 $MPNC_1$ 是矩形.

可得 $NP\perp$平面 D_1EF，

在 $Rt\triangle D_1C_1F$ 中，$C_1M\bullet D_1F=D_1C_1\bullet C_1F$，得 $C_1M=\frac{2\times1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$



【点评】熟练掌握通过线面平行的性质即可得到异面直线的距离是解题的关键.

三、解答题共 6 小题，共 50 分．解答应写出文字说明，演算步骤

15．（13 分）在$\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$\angle B=2\angle A$.

（Ⅰ）求 cosA 的值；

（Ⅱ）求 c 的值.

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理.

【专题】58：解三角形.

【分析】（Ⅰ）由条件利用正弦定理和二倍角公式求得 cosA 的值.

（Ⅱ）由条件利用余弦定理，解方程求得 c 的值，再进行检验，从而得出结论.

【解答】解：（Ⅰ）由条件在$\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$\angle B=2\angle A$，

利用正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{3}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sin A\cos A}$.

解得 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\bullet\cos A$，即 $9=(2\sqrt{6})^2+c^2-2\times2\sqrt{6}\times c\times\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即 $c^2-8c+15=0$.

解方程求得 $c=5$，或 $c=3$.

当 $c=3$ 时，此时 $a=c=3$，根据$\angle B=2\angle A$，可得 $B=90°$，$A=C=45°$，

$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，但此时不满足 $a^2+c^2=b^2$，故舍去.

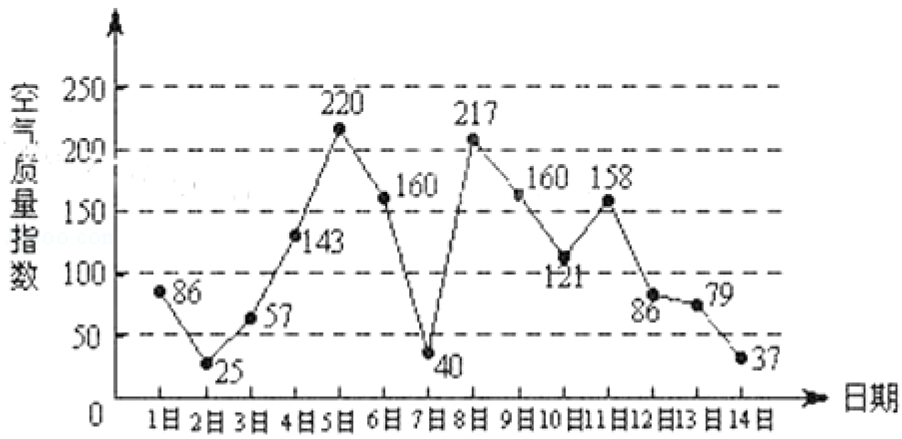
当 $c=5$ 时，求得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{3}$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore \cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{1}{3}=\cos B$，$\therefore B=2A$，满足条件.

综上，$c=5$.

【点评】本题主要考查正弦定理和余弦定理，以及二倍角公式的应用，注意把 $c=3$ 舍去，这是解题的易错点，属于中档题.

16.（13 分）如图是预测到的某地 5 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图，空气质量指数小于 100 表示空气质量优良，空气质量指数大于 200 表示空气重度污染，某人随机选择 5 月 1 日至 5 月 13 日中的某一天到达该市，并停留 2 天



（Ⅰ）求此人到达当日空气质量优良的概率；

（Ⅱ）设 X 是此人停留期间空气质量优良的天数，求 X 的分布列与数学期望

（Ⅲ）由图判断从哪天开始连续三天的空气质量指数方差最大？（结论不要求证明）

【考点】BC：极差、方差与标准差；CH：离散型随机变量的期望与方差.

【专题】12：应用题；5I：概率与统计.

【分析】（Ⅰ）由图查出13天内空气质量指数小于100的天数，直接利用古典概型概率计算公式得到答案；

（Ⅱ）由题意可知X所有可能取值为0，1，2，得出P（X=0），P（X=1），p（x=2）及分布列与数学期望；

（Ⅲ）因为方差越大，说明三天的空气质量指数越不稳定，由图直接看出答案．

【解答】解：设A_i表示事件"此人于5月i日到达该地"（i=1，2，…，13）

依据题意P（A_i）$=\frac{1}{13}$，$A_i\cap A_j=\varnothing$（$i\neq j$）

（Ⅰ）设B表示事件"此人到达当日空气质量优良"，则P（B）$=\frac{6}{13}$…（3分）

（Ⅱ）X的所有可能取值为0，1，2

P（X=0）$=\frac{5}{13}$，P（X=1）$=\frac{4}{13}$，P（X=2）$=\frac{4}{13}$…（6分）

∴X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{13}$

…（8分）

∴X的数学期望为E（X）$=\frac{12}{13}$…（11分）

（Ⅲ）从5月5日开始连续三天的空气质量指数方差最大．　…（13分）

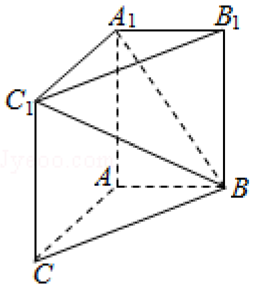
【点评】本题考查了正确理解题意及识图的能力、古典概型的概率计算、随机变量的分布列及数学期望与方差，考查了数形结合的思想方法及审题与计算的能力．

17．（14分）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，AA_1C_1C是边长为4的正方形．平面$ABC\perp$平面AA_1C_1C，AB=3，BC=5．

（Ⅰ）求证：$AA_1\perp$平面ABC；

（Ⅱ）求证二面角$A_1-BC_1-B_1$的余弦值；

（Ⅲ）证明：在线段BC_1上存在点D，使得$AD\perp A_1B$，并求$\frac{BD}{BC_1}$的值．



【考点】LW：直线与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】5F：空间位置关系与距离；5G：空间角．

【分析】（I）利用 AA_1C_1C 是正方形，可得 $AA_1\perp AC$，再利用面面垂直的性质即可证明；

（II）利用勾股定理的逆定理可得 $AB\perp AC$．通过建立空间直角坐标系，利用两个平面的法向量的夹角即可得到二面角；

（III）设点 D 的竖坐标为 t，（$0<t<4$），在平面 BCC_1B_1 中作 $DE\perp BC$ 于 E，可得 $D\left(t,\ \frac{3}{4}(4-t),\ t\right)$，利用向量垂直于数量积得关系即可得出．

【解答】（I）证明：∵AA_1C_1C 是正方形，∴$AA_1\perp AC$．

又∵平面 $ABC\perp$平面 AA_1C_1C，平面 $ABC\cap$平面 $AA_1C_1C=AC$，

∴$AA_1\perp$平面 ABC．

（II）解：由 $AC=4$，$BC=5$，$AB=3$．

∴$AC^2+AB^2=BC^2$，∴$AB\perp AC$．

建立如图所示的空间直角坐标系，则 A_1（0，0，4），B（0，3，0），B_1（0，3，4），C_1（4，0，4），

∴$\overrightarrow{BC_1}=(4,\ -3,\ 4)$，$\overrightarrow{BA_1}=(0,\ -3,\ 4)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,\ 0,\ 4)$．

设平面 A_1BC_1 的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，平面 B_1BC_1 的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$．

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=4x_1-3y_1+4z_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-3y_1+4z_1=0\end{cases}$，令 $y_1=4$，解得 $x_1=0$，$z_1=3$，∴$\overrightarrow{n_1}=(0,\ 4,\ 3)$．

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BC_1}=4x_2-3y_2+4z_2=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BB_1}=4z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=3$，解得 $y_2=4$，$z_2=0$，∴$\overrightarrow{n_2}=(3,\ 4,\ 0)$．

$\cos<\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\ |\overrightarrow{n_2}|}=\frac{16}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}}=\frac{16}{25}$.

∴二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值为$\frac{16}{25}$.

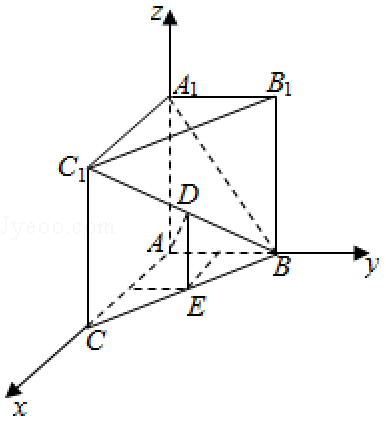
（III）设点 D 的竖坐标为 t，（0<t<4），在平面 BCC_1B_1 中作 DE⊥BC 于 E，可得 $D(t, \frac{3}{4}(4-t), t)$，

∴$\overrightarrow{AD}=(t, \frac{3}{4}(4-t), t)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0, 3, -4)$，

∵$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{A_1B}$，∴$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$，

∴ $0+\frac{9}{4}(4-t)-4t=0$，解得 $t=\frac{36}{25}$.

∴$\frac{BD}{BC_1}=\frac{DE}{CC_1}=\frac{9}{25}$.



【点评】本题综合考查了线面垂直的判定与性质定理、面面垂直的性质定理、通过建立空间直角坐标系利用法向量求二面角的方法、向量垂直与数量积得关系等基础知识与基本方法，考查了空间想象能力、推理能力和计算能力.

18.（13 分）设 l 为曲线 C：$y=\frac{\ln x}{x}$在点（1，0）处的切线.

（Ⅰ）求 l 的方程；

（Ⅱ）证明：除切点（1，0）之外，曲线 C 在直线 l 的下方.

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】53：导数的综合应用.

【分析】（Ⅰ）求出切点处切线斜率，代入代入点斜式方程，可以求解；

（Ⅱ）利用导数分析函数的单调性，进而分析出函数图象的形状，可得结论.

【解答】解：（Ⅰ）∵ $y=\frac{\ln x}{x}$

∴ $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$

∴l 的斜率 $k=y'|_{x=1}=1$

∴l 的方程为 $y=x-1$

证明：（Ⅱ）令 $f(x)=x(x-1)-\ln x$，$(x>0)$

曲线 C 在直线 l 的下方，即 $f(x)=x(x-1)-\ln x>0$，

则 $f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

∴f（x）在（0，1）上单调递减，在（1，+∞）上单调递增，又 f（1）=0

∴x∈（0，1）时，f（x）>0，即 $\frac{\ln x}{x}<x-1$

x∈（1，+∞）时，f（x）>0，即 $\frac{\ln x}{x}<x-1$

即除切点（1，0）之外，曲线 C 在直线 l 的下方

【点评】本题考查的知识点是导数的几何意义，利用导数研究函数的单调性，是导数的综合应用，难度中档.

19.（14 分）已知 A，B，C 是椭圆 W：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上的三个点，O 是坐标原点.

（Ⅰ）当点 B 是 W 的右顶点，且四边形 OABC 为菱形时，求此菱形的面积；

（Ⅱ）当点 B 不是 W 的顶点时，判断四边形 OABC 是否可能为菱形，并说明理由.

【考点】K4：椭圆的性质.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】(I）根据 B 的坐标为（2，0）且 AC 是 OB 的垂直平分线，结合椭圆方程算出 A、C 两点的坐标，从而得到线段 AC 的长等于$\sqrt{3}$. 再结合 OB 的长为 2 并利用菱形的面积公式，即可算出此时菱形 OABC 的面积；

(II）若四边形 OABC 为菱形，根据|OA|=|OC|与椭圆的方程联解，算出 A、C 的

横坐标满足$\frac{3x^2}{4}$=r^2-1，从而得到 A、C 的横坐标相等或互为相反数．再分两种情况加以讨论，即可得到当点 B 不是 W 的顶点时，四边形 OABC 不可能为菱形．

【解答】解：（I）∵四边形 OABC 为菱形，B 是椭圆的右顶点（2，0）

∴直线 AC 是 BO 的垂直平分线，可得 AC 方程为 x=1

设 A（1，t），得$\frac{1^2}{4}+t^2=1$，解之得 t=$\frac{\sqrt{3}}{2}$（舍负）

∴A 的坐标为（1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），同理可得 C 的坐标为（1，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$）

因此，$|AC|=\sqrt{3}$，可得菱形 OABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}|AC|\bullet|BO|=\sqrt{3}$；

（II）∵四边形 OABC 为菱形，∴$|OA|=|OC|$，

设$|OA|=|OC|=r$（r＞1），得 A、C 两点是圆 $x^2+y^2=r^2$

与椭圆 W：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的公共点，解之得$\frac{3x^2}{4}=r^2-1$

设 A、C 两点横坐标分别为 x_1、x_2，可得 A、C 两点的横坐标满足

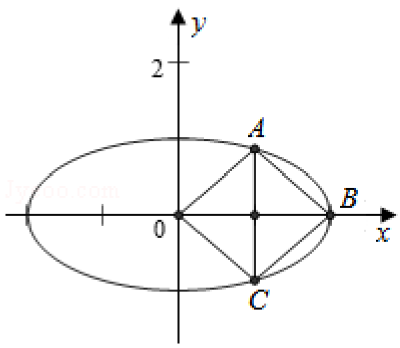
$x_1=x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\bullet\sqrt{r^2-1}$，或 $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\bullet\sqrt{r^2-1}$且 $x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\bullet\sqrt{r^2-1}$，

①当 $x_1=x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\bullet\sqrt{r^2-1}$时，可得若四边形 OABC 为菱形，则 B 点必定是右顶点（2，0）；

②若 $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\bullet\sqrt{r^2-1}$且 $x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\bullet\sqrt{r^2-1}$，则 $x_1+x_2=0$，

可得 AC 的中点必定是原点 O，因此 A、O、C 共线，可得不存在满足条件的菱形 OABC

综上所述，可得当点 B 不是 W 的顶点时，四边形 OABC 不可能为菱形．



【点评】本题给出椭圆方程，探讨了以坐标原点 O 为一个顶点，其它三个顶点在椭圆上的菱形问题，着重考查了菱形的性质、椭圆的标准方程与简单几何

性质等知识，属于中档题.

20.（13 分）已知$\{a_n\}$是由非负整数组成的无穷数列，该数列前 n 项的最大值记为 A_n，第 n 项之后各项 a_{n+1}，a_{n+2}…的最小值记为 B_n，$d_n=A_n-B_n$.

（Ⅰ）若$\{a_n\}$为 2，1，4，3，2，1，4，3…，是一个周期为 4 的数列（即对任意 $n\in N^*$，$a_{n+4}=a_n$），写出 d_1，d_2，d_3，d_4 的值；

（Ⅱ）设 d 是非负整数，证明：$d_n=-d$（n=1，2，3…）的充分必要条件为$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列；

（Ⅲ）证明：若 $a_1=2$，$d_n=1$（n=1，2，3，…），则$\{a_n\}$的项只能是 1 或者 2，且有无穷多项为 1.

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件；83：等差数列的性质；87：等比数列的性质；R9：反证法与放缩法证明不等式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】（Ⅰ）根据条件以及 $d_n=A_n-B_n$ 的定义，直接求得 d_1，d_2，d_3，d_4 的值.

（Ⅱ）设 d 是非负整数，若$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，则 $a_n=a_1+(n-1)d$，从而证得 $d_n=A_n-B_n=-d$，

（n=1，2，3，4…）. 若 $d_n=A_n-B_n=-d$，（n=1，2，3，4…）. 可得$\{a_n\}$是一个不减的数列，

求得 $d_n=A_n-B_n=-d$，即 $a_{n+1}-a_n=d$，即$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，命题得证.

（Ⅲ）若 $a_1=2$，$d_n=1$（n=1，2，3，…），则$\{a_n\}$的项不能等于零，再用反证法得到$\{a_n\}$的项不能超过 2，

从而证得命题.

【解答】解：（Ⅰ）若$\{a_n\}$为 2，1，4，3，2，1，4，3…，是一个周期为 4 的数列，$\therefore d_1=A_1-B_1=2-1=1$，

$d_2=A_2-B_2=2-1=1$，$d_3=A_3-B_3=4-1=3$，$d_4=A_4-B_4=4-1=3$.

（Ⅱ）充分性：设 d 是非负整数，若$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，则 $a_n=a_1+(n-1)d$，

$\therefore A_n=a_n=a_1+(n-1)d$，$B_n=a_{n+1}=a_1+nd$，$\therefore d_n=A_n-B_n=-d$，（n=1，2，3，4…）.

必要性：若 $d_n=A_n-B_n=-d$，（n=1，2，3，4…）．假设 a_k 是第一个使 $a_k-a_{k-1}<0$ 的项，

则 $d_k=A_k-B_k=a_{k-1}-B_k\geqslant a_{k-1}-a_k>0$，这与 $d_n=-d\leqslant 0$ 相矛盾，故 $\{a_n\}$ 是一个不减的数列．

$\therefore d_n=A_n-B_n=a_n-a_{n+1}=-d$，即 $a_{n+1}-a_n=d$，故 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列．

（Ⅲ）证明：若 $a_1=2$，$d_n=1$（n=1，2，3，…），首先，$\{a_n\}$ 的项不能等于零，否则 $d_1=2-0=2$，矛盾．

而且还能得到 $\{a_n\}$ 的项不能超过 2，用反证法证明如下：

假设 $\{a_n\}$ 的项中，有超过 2 的，设 a_m 是第一个大于 2 的项，由于 $\{a_n\}$ 的项中一定有 1，否则与 $d_1=1$ 矛盾．

当 $n\geqslant m$ 时，$a_n\geqslant 2$，否则与 $d_m=1$ 矛盾．

因此，存在最大的 i 在 2 到 m﹣1 之间，使 $a_i=1$，此时，$d_i=A_i-B_i=2-B_i\leqslant 2-2=0$，矛盾．

综上，$\{a_n\}$ 的项不能超过 2，故 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或者 2．

下面用反证法证明 $\{a_n\}$ 的项中，有无穷多项为 1．

若 a_k 是最后一个 1，则 a_k 是后边的各项的最小值都等于 2，故 $d_k=A_k-B_k=2-2=0$，矛盾，

故 $\{a_n\}$ 的项中，有无穷多项为 1．

综上可得，$\{a_n\}$ 的项只能是 1 或者 2，且有无穷多项为 1．

【点评】本题主要考查充分条件、必要条件的判断和证明，等差关系的确定，用反证法和放缩法证明数学命题，

属于中档题．