2021年普通高等学校招生全国统一考试（全国乙卷）

数学（文）

一、选择题

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合$M=\{1,2\}$，$N=\{3,4\}$，则$C_U(M\cup N)=$（　　）

A. $\{5\}$

B. $\{1,2\}$

C. $\{3,4\}$

D. $\{1,2,3,4\}$

答案A

【解析】首先进行并集运算，然后进行补集运算即可.

由题意可得：$M\cup N=\{1,2,3,4\}$，则$ð_U(M\cup N)=\{5\}$.

故选：A.

2. 设$iz=4+3i$，则$z=$（　　）

A. $-3-4i$

B. $-3+4i$

C. $3-4i$

D. $3+4i$

答案C

【解析】由题意结合复数的运算法则即可求得 z 的值.

由题意可得：$z=\dfrac{4+3i}{i}=\dfrac{(4+3i)i}{i^2}=\dfrac{4i-3}{-1}=3-4i$.

故选：C.

3. 已知命题 $p:\exists x\in R,\sin x<1$；命题 $q:\forall x\in R,e^{|x|}\geq 1$，则下列命题中为真命题的是（
）

A. $p\wedge q$

B. $\neg p\wedge q$

C. $p\wedge\neg q$

D. $\neg(p\vee q)$

答案：

A

解析：

根据正弦函数的值域 $\sin x\in[-1,1]$， $\sin x<1$，故 $\exists x\in R$， p 为真命题，而函数 $y=e^{|x|}$ 为偶函数，且 $x\geq 0$ 时， $y=e^{x}\geq 1$，故 $\forall x\in R$， $y=e^{|x|}\geq 1$ 恒成立. 则 q 也为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真，选A.

4. 函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是（　　）

A. 3π 和 $\sqrt{2}$

B. 3π 和 2

C. 6π 和 $\sqrt{2}$

D. 6π 和 2

答案：

C

解析：

$f(x)=\sqrt{2}\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4})$

$f(x)_{\max}=\sqrt{2}$， $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{3}}=6\pi$.

故选C.

5. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\ge 4, \\ x-y\le 2, \\ y\le 3, \end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最小值为（　　）

A. 18

B. 10

C. 6

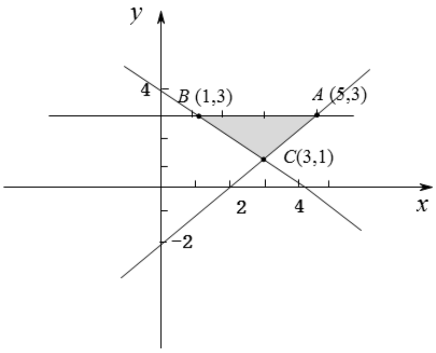
D. 4

答案：

C

解析：

根据约束条件可得图像如下，$z=3x+y$ 的最小值，即 $y=-3x+z$， y 轴截距最小值. 根据图像可知 $y=-3x+z$ 过点 $B(1,3)$ 时满足题意，即 $z_{\min}=3+3=6$.



6. $\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\cos^2\dfrac{5\pi}{12}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$

B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

答案：

D

解析：

$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴选D.

7.在区间$(0,\frac{1}{2})$随机取1个数，则取到的数小于$\frac{1}{3}$的概率为（　　）

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

答案：

B

解析：

在区间$(0,\frac{1}{2})$随机取1个数，可知总长度$d=\frac{1}{2}$，取到的数小于$\frac{1}{3}$，可知取到的长度范围

$d'=\frac{1}{3}$，根据几何概型公式$p=\frac{d'}{d}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，∴选B.

8.下列函数中最小值为4的是（　）

A. $y=x^2+2x+4$

B. $y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$

C. $y=2^x+2^{2-x}$

D. $y=\ln x+\frac{4}{\ln x}$

答案：

C

解析：

对于A，$y=x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3\geq 3$.不符合，

对于B，$y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$，令$t=|\sin x|\in[0,1]$，$\therefore y=t+\frac{4}{t}$，

根据对勾函数 $y_{\min}=1+4=5$ 不符合，

对于C，$y=2^x+2^{2-x}=2^x+\frac{4}{2^x}$，令 $t=2^x>0$，

$\therefore y=t+\frac{4}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}=2\times 2=4$，

当且仅当 $t=2$ 时取等，符合，

对于D，$y=\ln x+\frac{4}{\ln x}$，令 $t=\ln x\in R$，$y=t+\frac{4}{t}$.

根据对勾函数 $y\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$，不符合.

9. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　　）

A. $f(x-1)-1$

B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$

D. $f(x+1)+1$

答案：

B

解析：

$f(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$，

$f(x)$ 向右平移一个单位，向上平移一个单位得到 $g(x)=\frac{2}{x}$ 为奇函数.

所以选B.

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

答案：

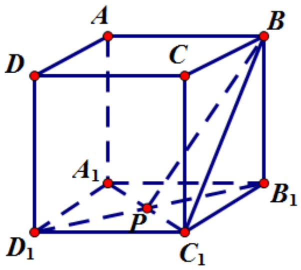
D

解析：

做出图形，$AD_1//BC_1$，所以$\angle PBC_1$为异面直线所成角，设棱长为1.

$BC_1=\sqrt{2}$，$B_1P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$PC_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$BP=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$\cos\angle PBC_1=\dfrac{BC_1^2+BP^2-C_1P^2}{2BP\cdot BC_1}=\dfrac{2+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}}{2\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即$\angle PBC_1=\dfrac{\pi}{6}$，故选D.



11. 设B是椭圆$C:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$的上顶点，点P在C上，则$|PB|$的最大值为

A. $\dfrac{5}{2}$

B. $\sqrt{6}$

C. $\sqrt{5}$

D. 2

答案：

A

解析：

方法一：由$C:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$，$B(0,1)$

则C的参数方程：$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$.

$|PB|=\sqrt{(\sin\theta-1)^2+(\sqrt{5}\cos\theta)^2}$

$=\sqrt{-4\sin^2\theta-2\sin\theta+6}$

$=\sqrt{-4(\sin\theta+\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}}\geq\frac{5}{2}$.

$\therefore |PB|_{\max}=\frac{5}{2}$，故选A.

方法二：设$P(x_0,y_0)$，则$\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=1(y_0\in[-1,1])$①，$B(0,1)$.

因此$|PB|^2=x_0^2+(y_0-1)^2$②

将①式代入②式化简得：

$|PB|^2=-4(y_0+\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}\geq\frac{25}{4}$，当且仅当$y_0=-\frac{1}{4}$时$|PB|$的最大值为$\frac{5}{2}$，故选A.

12. 设$a\neq 0$，若$x=a$为函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点，则

A. $a<b$

B. $a>b$

C. $ab<a^2$

D. $ab>a^2$

答案：

D

解析：

$f'(x)=2a(x-a)(x-b)+a(x-a)^2=a(x-a)(3x-2b-a)$

当$a>0$时，原函数先增再减后增.

原函数在$f'(x)=0$的较小零点时取得极大值.

即$a<\frac{a+2b}{3}$，即$a<b$，$\therefore a^2<ab$.

当$a<0$时，原函数先减再增后减.

原函数在$f'(x)=0$的较大零点时取得极大值.

即$a>\frac{a+2b}{3}$，$a>b$，$a^2<ab$，故选D.

二、填空题

13. 已知向量$\vec{a}=(2,5)$，$\vec{b}=(\lambda,4)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\lambda=$______.

答案：

$\frac{8}{5}$

解析：

由已知$\vec{a}//\vec{b}$可得$2\times 4=5\lambda \Rightarrow \lambda =\frac{8}{5}$.

14. 双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的右焦点到直线$x+2y-8=0$的距离为________.

答案：

$\sqrt{5}$

解析：

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的右焦点为$(3,0)$，到直线$x+2y-8=0$的距离$d=\frac{|3-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$.

15. 记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$________.

答案：

$2\sqrt{2}$

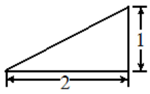
解析：

由面积公式$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$，且$B=60^\circ$，解得$ac=4$，

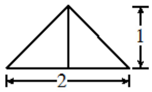
又由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$a^2+c^2=3ac$，且$b>0$

解得$b=2\sqrt{2}$.

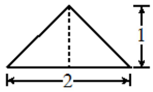
16. 以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为________（写出符合要求的一组答案即可）.



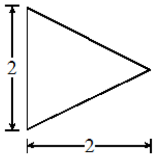
图①



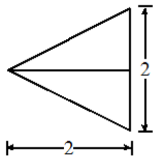
图②



图③



图④



图⑤

答案：

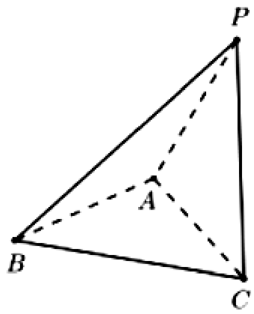
②⑤或③④

解析：

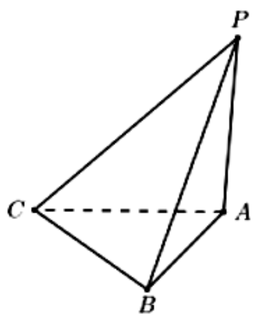
由高度可知，侧视图只能为②或③.

侧视图为②，如图（1），平面$PAC\perp$平面ABC，$PA=PC=\sqrt{2}$，$BA=BC=\sqrt{5}$，$AC=2$，俯视图为⑤.

俯视图为③，如图（2），$PA\perp$平面ABC，$PA=1$，$AC=AB=\sqrt{5}$，$BC=2$，俯视图为④.



(1)



(2)

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为$\overline{x}$和$\overline{y}$，样本方差分别记为s_1^2和s_2^2.

（1）求$\overline{x}$，$\overline{y}$，s_1^2，s_2^2；

（2）判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果$\overline{y}-\overline{x}\geq 2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）.

答案：

见解析

解析：

$$\overline{x}=\frac{9.8+10.3+10+10.2+9.9+9.8+10+10.1+10.2+9.7}{10}=10;$$

$$\overline{y}=\frac{10.1+10.4+10.1+10+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5}{10}=10.3.$$

$$s_1^2=\frac{1}{10}(0.04+0.09+0.04+0.01+0.04+0.01+0.04+0.09)$$

$$=\frac{1}{10}\times 0.36=0.036$$

$$s_2^2=\frac{1}{10}(0.04+0.01+0.04+0.09+0.04+0.09+0.04+0.01+0.04)$$

$$=\frac{1}{10}\times 0.4=0.04.$$

（2）$\overline{y}-\overline{x}=10.3-10=0.3$

$$2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}=2\sqrt{\frac{0.036+0.04}{10}}=2\sqrt{0.0076}.$$

$\because$ 则 $0.3=\sqrt{0.09}>2\sqrt{0.076}=\sqrt{0.0304}$

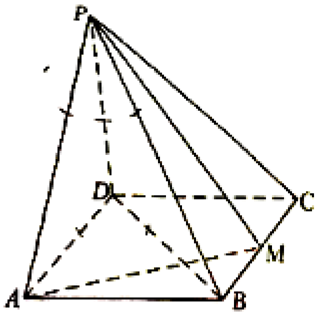
，所以可判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高；

没有显著提高.

18. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，M 为 BC 的中点，且 $PB\perp AM$.

（1）证明：平面 $PAM\perp$ 平面 PBD；

（2）若 $PD=DC=1$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



答案：

见解析

解析：

19. 设 $\{a_n\}$ 是首项为1的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{na_n}{3}$. 已知 a_1，$3a_2$，$9a_3$，成等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n，和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明：$T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

答案：

见解析

解析：

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_n=q^{n-1}$，

因为 a_1，$3a_2$，$9a_3$ 成等差数列，所以 $1+9q^2=2\times 3q$，解得 $q=\dfrac{1}{3}$，

故 $a_n=(\dfrac{1}{3})^{n-1}$，$S_n=\dfrac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})$.

又 $b_n=\dfrac{n}{3^n}$，则 $T_n=\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^{n-1}}+\dfrac{n}{3^n}$，

两边同乘 $\dfrac{1}{3}$，则 $\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{3^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^n}+\dfrac{n}{3^{n+1}}$，

两式相减，得$\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{3^4}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}$，

即$\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})-\dfrac{n}{3^{n+1}}$，

整理得$T_n=\dfrac{3}{4}(1-\dfrac{1}{3^n})-\dfrac{n}{2\times 3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2\times 3^n}$，

$2T_n-S_n=2(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2\times 3^n})-\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})=-\dfrac{4n+3}{2\times 3^n}<0$，

故$T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

20.已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线的距离为2.

（1）求C的方程，

（2）已知O为坐标原点，点P在C上，点Q满足$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$，求直线$OQ$斜率的最大值

.

答案：

见解析

解析：

（1）由焦点到准线的距离为p，则$p=2$.

抛物线c的方程：$y^2=4x$.

（2）设点$P(\dfrac{y_0^2}{4},y_0)$，$Q(x_Q,y_Q)$，$F(1,0)$.

$\because \overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$.

$$\therefore (x_Q-\frac{y_0^2}{4},y_Q-y_0)=9(1-x_Q,-y_Q)\Rightarrow\begin{cases}x_Q-\dfrac{y_0^2}{4}=9-9x_Q\\ y_Q-y_0=-9x_Q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_Q=\dfrac{9+\frac{y_0^2}{4}}{10}\\ y_Q=\dfrac{y_0}{10}\end{cases}$$

则$k_{OQ}=\dfrac{y_Q}{x_Q}=\dfrac{y_0}{9+\frac{y_0^2}{4}}=\dfrac{1}{\frac{9}{y_0}+\frac{y_0}{4}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}}=\dfrac{1}{3}$.

∴直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

21. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）求曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标.

答案：

见解析

解析：

（1） $f'(x)=3x^2-2x+a$

（i）当 $\Delta=4-12a\le 0$ ，即 $a\ge\frac{1}{3}$ 时， $f'(x)\ge 0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $f(x)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上单调递增.

（ii）当 $\Delta=4-12>0$ ，即 $a<\frac{1}{3}$ 时， $f'(x)=0$ 解得， $x_1=\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}$ ，

$x_2=\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$.

x	$(-\infty,\frac{1-\sqrt{1+3a}}{3})$	$\frac{-\sqrt{1-3a}}{3}$	$(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3})$	$\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$	$(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3})$ ， $(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3},+\infty)$ 单调递增，在 $(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1+3a}}{3})$ 单调递减，综上所述：当 $a\ge\frac{1}{3}$ 时， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；当 $a<\frac{1}{3}$ 时， $f(x)$ 在 $(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1+3a}}{3})$ 单调递减.

（2）设可原点切线的切点为 (t,t^3-t^2+at+1) ，切线斜率 $k=f'(t)=3t^2-2t+a$. 又 $k=\frac{t^3-t^2+at+1}{t}$ ，可得 $\frac{t^3-t^2+at+1}{t}=3t^2-2t+a$. 化简得 $(t-1)(2t^2+t+1)=0$ ，即 $t=1$. ∴切点为 $(1,a+1)$ ，斜率 $k=a+1$ ，切线方程为 $y=(a+1)x$ ，将 $y=(a+1)x$ ，

$y=x^3-x^2+ax+1$联立可得$x^3-x^2+ax+1=(a+1)x$，化简得$(x-1)^2(x+1)=0$，解得$x_1=1$，$x_2=-1$. ∴过原点的切线与$y=f(x)$公共点坐标为$(1,a+1)$，$(-1,-a-1)$.

22. 在直角坐标系xOy中，$\odot C$的圆心为$C(2,1)$，半径为1.

（1）写出$\odot C$的一个参数方程;

（2）过点$F(4,1)$作$\odot C$的两条切线. 以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立坐标系，求这两条切线的极坐标方程.

答案：

见解析

解析：

（1）$\odot C$的参数方程为$\begin{cases}x=2+\cos\theta\\y=1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）

（2）$\odot C$的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

①当直线斜率不存在时，直线方程为$x=4$，此时圆心到直线距离为$2>r$，舍去;

②当直线斜率存在时，设直线方程为$y-1=k(x-4)$，化简为$kx-y-4k+1=0$，

此时圆心$C(2,1)$到直线的距离为$d=\dfrac{|2k-1-4k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=r=1$，

化简得$2|k|=\sqrt{k^2+1}$，

两边平方有$4k^2=k^2+1$，所以$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

代入直线方程并化简得$x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}-4=0$或$x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}-4=0$化为极坐标方程为

$\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=4-\sqrt{3}\Leftrightarrow\rho\sin(\theta+\dfrac{5\pi}{6})=4-\sqrt{3}$

或$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta=4+\sqrt{3}\Leftrightarrow\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=4+\sqrt{3}$.

23. 已知函数$f(x)=|x-a|+|x+3|$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geq 6$的解集;

（2）若 $f(x) > -a$，求 a 的取值范围.

答案：

见解析

解析：

当 $a=1$ 时，$f(x) \geq 6 \Leftrightarrow |x-1|+|x+3| \geq 6$，

当 $x \leq -3$ 时，不等式 $\Leftrightarrow 1-x-x-3 \geq 6$，解得 $x \leq -4$；

当 $-3 < x < 1$ 时，不等式 $\Leftrightarrow 1-x+x+3 \geq 6$，解得 $x \in \varnothing$；

当 $x \geq 1$ 时，不等式 $\Leftrightarrow x-1+x+3 \geq 6$，解得 $x \geq 2$.

综上，原不等式的解集为 $(-\infty,-4] \cup [2,+\infty)$.

（2）若 $f(x) > -a$，即 $f(x)_{\min} > -a$，

因为 $f(x)=|x-a|+|x+3| \geq |(x-a)-(x+3)|=|a+3|$（当且仅当 $(x-a)(x+3) \leq 0$ 时，等号成立），所以 $f(x)_{\min}=|a+3|$，所以 $|a+3| > -a$，即 $a+3 < a$ 或 $a+3 > -a$，解得 $a \in (-\frac{3}{2},+\infty)$.