2013年普通高等学校招生全国统一考试（辽宁卷）

数　学（供理科考生使用）

第I卷

[学科网试卷总评]：

1.试卷总体评价

本试题共有24个题目，其中前12题为选择题，第13至第16题为填空题，第17至第21题为考生必做的解答题，而第22题至第24题为选做题。2013年辽宁省高考数学理科试卷的命制稳中有变，试卷重视基础，突出能力，体现课改，着眼稳定，体现数学本质，凸显数学思想，强化思维量，控制运算量，突出综合性。试题图文并茂，文字阐述清晰，图形设计简明，无论是在试卷的结构安排方面，还是试题背景的设计方面，都进行了大胆的改革和有益的探索。总体而言，2013年高考数学试卷是一份很有质量且有一定特色的试卷。

2.试卷主要特点：

（1）结构合理而鲜活。

既考查了主干，又考查了新增。函数、三角函数、数列、立体几何、解析几何、概率统计仍是试卷的主要考查内容；算法、三视图、正态分布等题的设计，充分体现了“考新知识”的命题模式；还有几道题目是老知识新考法，可谓“老树新花”。如：集合题目与组合知识综合，而不是简单地考查集合运算；复数题目与命题综合，考查更全面，很有新意；概率统计题目以贴近生活的出售玫瑰花为背景，且答案不唯一、不死板，更为开放、新颖，更为注重考查学生的能力；解析几何与2012年一样仍为抛物线，改变了传统的考查椭圆的模式

（2）全面考查，重点突出。

对知识点较单一的内容，考查较全面。如：复数、排列组合、概率统计、线性规划、程序框图、三视图等，都有专门考查，对核心概念，主干知识的考查仍为重点，如：函数、导数、不等式、数列、三角、解析几何和立体几何等。部分题目综合程度加深，如：数列、不等式的求解（恒成立）、极坐标与参数方程等内容的考查向纵深发展。

（3）对数学方法、数学能力、数学思想的考查充分而到位。

数学方法：坐标法、换元法、转化法、定义法、赋值法等。

数学能力：

空间想象能力(10、13、18)

推理论证能力（8、14、16、22）

抽象概括能力（4、9、11、15）

运算求解能力（1、2、3、5、7、13、17、20、23、24）

数据处理能力（15、19、20）

数学思想：函数与方程思想、数形结合、分类与整合、特殊与一般、化归与转化。

2013 年辽宁高考数学的一个明显变化是：在试卷中增设了选考题，旨在体现学生的个性及自主选择性。与去年相比，2013 年辽宁高考数学试题相对难度比较大。主要原因是：和去年不同，去年是前面的客观题相对简单，后面主观题相对难，2013 年则相反，前面的客观题难，后面的主观题相对简单。2013 年的试卷中，理科数学选择和填空题相对较难，其中选择题的 9、10 两道题较难，是函数和导数结合的题。而后面大题方面则相对简单，其中立体几何部分相对简单。由此可见，辽宁高考的命制越来越注重对考生个人综合素质的考查。建议考生和老师在 2014 备考过程中在注重知识学习的同时，勿忘各方面综合素质的提升。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一

项是符合题目要求的.

（1）复数的 $Z=\dfrac{1}{i-1}$ 模为(　　　)

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

[答案]：B

[解析]：$z=\dfrac{1}{i-1}=\dfrac{i+1}{i^2-1}=\dfrac{i+1}{-2}$,故$|z|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.故选 B

[学科网考点定位]:本题考查复数的运算。

（2）已知集合 $A=\{x\,|\,0<\log_4 x<1\},B=\{x\,|\,x\le 2\}$，则$A\cap B=$(　　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,2]$　　C. $(1,2)$　　D. $(1,2]$

[答案]： D

[解析]： 由$0<\log_4^x<1$得$\log_4^1<\log_4^x<\log_4^4$，即$1<x<4$，又$1<x\le 2$，故$A\cap B=(1,2]$，故选 D

[学科网考点定位]： 本题考查对数不等式及集合的运算。

（3）已知点$A(1,3),B(4,-1)$,则与向量$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量为（　　）

（A）$\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$　　（B）$\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$　　（C）$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$　　（D）$\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

[答案]： A

[解析]： $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{(3,-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{1}{5}(3,-4)=(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5})$，故选 A

[学科网考点定位]： 本题考查单位向量的定义和坐标运算。

（4）下面是关于公差$d>0$的等差数列$\{a_n\}$的四个命题：

p_1：数列$\{a_n\}$是递增数列；　　p_2：数列$\{na_n\}$是递增数列；

p_3：数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是递增数列；　　p_4：数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列；

其中的真命题为（　　）

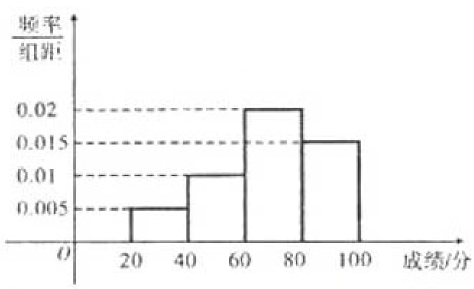
（A）p_1,p_2　　（B）p_3,p_4　　（C）p_2,p_3　　（D）p_1,p_4

[答案]： D

[解析]： 若等差数列的公差为正数，则这个等差数列为递增数列；p_1正确；数列$\{3nd\}$也是递增数列，故$\{a_n+3nd\}$是递增数列，p_4正确，故选 D

[学科网考点定位]：本题考查等差数列的性质及递增数列的定义。

（5）某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，



数据的分组一次为$[20,40),[40,60),[60,80),8[20,100)$.

若低于 60 分的人数是 15 人，则该班的学生人数是(　　　)

（A）45　　　（B）50　　　（C）55　　　（D）60

[答案]：B

[解析]：从 20 到 60 的频率为：$(0.005+0.01)\times 20=0.3$ ，故总人数为$15\div 0.3=50$ 人，选 B

[学科网考点定位]:本题考查频率分布直方图。

（6）在ΔABC，内角A,B,C所对的边长分别为$a,b,c.$ $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b,$

且$a>b,$则$\angle B=$(　　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　　B. $\frac{\pi}{3}$　　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　　D. $\frac{5\pi}{6}$

[答案]：A

[解析]：由正弦定理可得：

$a=2R\sin A, c=2R\sin C, b=2R\sin B$　由　$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b,$　可　得　：

$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{1}{2}$

即：$\sin(A+C)=\sin B=\frac{1}{2}$，又$a>b$,故$\angle B=\frac{\pi}{6}$，故选 A

[学科网考点定位]:本题考查正弦定理的应用，两角和正弦公式以及三角形的内角和等于 180 度。

（7）使得$\left(3x+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n(n\in N_+)$的展开式中含有常数项的最小的$n$为(　　　)

A. 4　　　B. 5　　　C. 6　　　D. 7

[答案]：B

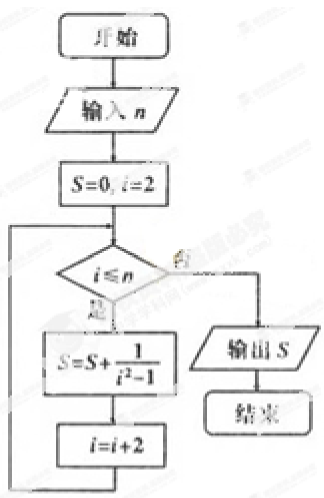
[解析]：二项式展开式的通项公式为：$C_n^r(3x)^{n-r}(\frac{1}{x\sqrt{x}})^r$，若展开式中有常数项，则$n-r-\frac{3}{2}r=0$，

解得

$n=\frac{5}{2}r$，当 r 取 2 时，n 的最小值为 5，故选 B

[学科网考点定位]:本题考查二项式定理的应用。

（8）执行如图所示的程序框图，若输入$n=10$,则输出的$S=$(　　　)



A. $\frac{5}{11}$ B. $\frac{10}{11}$ C. $\frac{36}{55}$ D. $\frac{72}{55}$

[答案]：A

[解析]： 框图运算的结果为：$0+\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+...+\frac{1}{10^2-1}=$

$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+...+\frac{1}{9\times11}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{9}-\frac{1}{11})=$

$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{11})=\frac{5}{11}$，故选 A

[学科网考点定位]:本题考查程序框图的运算以及数列求和的列项相消法。

（9）已知点$O(0,0),A(0,b),B(a,a^3)$.若ΔABC为直角三角形,则必有（ ）

A. $b=a^3$ B. $b=a^3+\frac{1}{a}$

C. $(b-a^3)\left(b-a^3-\frac{1}{a}\right)=0$ D. $|b-a^3|+\left|b-a^3-\frac{1}{a}\right|=0$

[答案]：C

[解析]： 由点 B 的坐标可知 B 点在 $y=x^3$ 的图象上，由此可知 $\angle A=90^\circ$或者$\angle B=90^\circ$

若 $\angle A=90^\circ$，则 $b=a^3$，若 $\angle B=90^\circ$，则 $b=\frac{1}{a}+a^3$，二者为或的关系，故选 C

[学科网考点定位]:本题考查向量的应用和逻辑连接词的应用。

（10）已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$的6个顶点都在球O的球面上.若$AB=3$，$AC=4$，

$AB\perp AC$，$AA_1=12$，则球O的半径为（ ）

A. $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ B. $2\sqrt{10}$ C. $\frac{13}{2}$ D. $3\sqrt{10}$

[答案]：C

[解析]： 构建长方体的棱长分别为 3, 4, 12. 体对角线长为$\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$，外接圆的半径为

$\frac{13}{2}$，故选 C

[学科网考点定位]:本题考查空间几何体模型的认识。

（11）已知函数 $f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2,g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$. 设

$H_1(x)=\max\{f(x),g(x)\},H_2(x)=\min\{f(x),g(x)\},(\max\{p,q\})$表示 p,q 中的较大值，

$\min\{p,q\}$表示p,q中的较小值，记$H_1(x)$得最小值为A, $H_2(x)$得最小值为B，则$A-B=$（　　）

（A）16　　　（B）　-16

（C）$a^2-2a-16$　　　（D）$a^2+2a-16$

[答案]：B

[解析]：由$f(x)=g(x)$得$x^2-2(a+2)x+a^2=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$.整理得：$2(x-a)^2=8$

解得：$(x-a)^2=4$，可得$x=a\pm2$，又$f(x)=[x-(a+2)]^2-4-4a$，又图象可知$H_1(x)=-4-4a$

$H_2(x)=12-4a$，$H_1(x)-H_2(x)$=A-B=-16，故选 B

[学科网考点定位]:本题考查数形结合的思想，二次函数的性质。

（12）设函数$f(x)$满足$x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}, f(2)=\frac{e^2}{8}$,则$x>0$,时，$f(x)$（　　）

（A）有极大值，无极小值　　　（B）有极小值，无极大值

（C）既有极大值又有极小值　　　（D）既无极大值也无极小值

[答案]：D

[解析]：设$g(x)=x^2f(x)$,则$g'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}$，即：

$x^2f'(x)=\frac{e^x}{x}-2xf(x)=\frac{e^x-2x^2f(x)}{x}$

设$h(x)=e^x-2x^2f(x)$,则$h(2)=e^2-8f(2)=e^2-8\times\frac{e^2}{8}=0$，$h'(x)=e^x-2x^2f'(x)-4xf(x)$

$= e^x - 2[x^2 + 2xf'(x)] = e^x - \frac{2e^x}{x} = \frac{(x-2)e^x}{x}$，

当$0 < x < 2$时，$h'(x) < 0, h(x)$为单调递减函数，$h(x) > 0$

当$x > 2$时，$h'(x) > 0, h(x)$是单调递增函数，$h(x) > h(2) = 0$，故当$x > 0$时，$x^2 f'(x) \ge 0$，

$f'(x) \ge 0, f(x)$单调递增，因此$f(x)$没有极大值，也没有极小值，故选D。

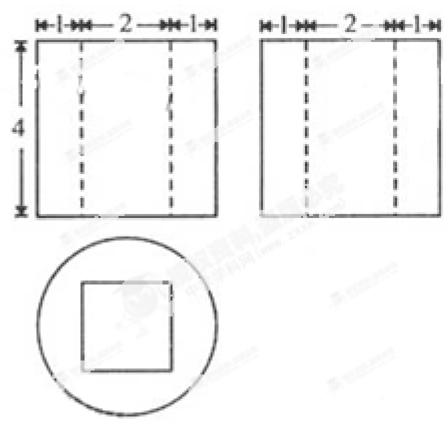
[学科网考点定位]:本题考查导数的应用。

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题-第 22 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题-第 24 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

（13）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是________.



[答案]：16π-16

[解析]：由三视图可知，直观图为一个圆柱体中间挖去一个正四棱柱。

[学科网考点定位]:本题考查三视图及空间几何体的体积计算。

（14）已知等比数列$\{a_n\}$是递增数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和. 若a_1，a_3是方程

$x^2-5x+4=0$的两个根，则$S_6=$____________ .

[答案]：63

[解析]：由方程$x^2-5x+4=0$，又$\{a_n\}$是递增数列，

可得$a_1=1, a_3=4$， $a_2=2, q=2, S_6=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-2^6}{1-2}=63$

[学科网考点定位]:本题考查解一元二次方程，等比数列的求和公式。

（15）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，$C$与过原点的直线相交于

A,B两点，连接AF,BF.若$|AB|=10,|AF|=6,\cos\angle ABF=\frac{4}{5}$,则$C$的离心率$e$=______.

[答案]：$\frac{5}{7}$

[解析]：三角形AFB中，由余弦定理可得：$|AF|^2=|AB|^2+|BF|^2-2|AB||BF|\cos\angle ABF$

代入得：$36=|BF|^2+100-2\times10\times|BF|\times\frac{4}{5}$，解得$|BF|=8$，由此可得三角形 ABF 为直角三角形。

OF=5，即 c=5.

由椭圆为中心对称图形可知：当右焦点为F_2时，

$\Delta AFB\cong\Delta BF_2A$，$2a=AF+AF_2=14, a=7, e=\frac{5}{7}$

[学科网考点定位]:本题考查椭圆定义，解三角形相关知识以及椭圆的几何性质。

（16）为了考察某校各班参加课外书法小组的人数，在全校随机抽取 5 个班级，把每个班级参加该小组的认为作为样本数据. 已知样本平均数为 7，样本方差为 4，且样本数据互相不相同，则样本数据中的最大值为____________.

[答案]：10

[解析]：由题意可得：$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=35$，$\frac{1}{5}[(x_1-7)^2+(x_2-7)^2+...+(x_5-7)^2]=4$

两式整理可得：$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=265$，不妨设$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$，由此可推算出

$(x_5)_{max}=10$

[学科网考点定位]:本题考查样本均值和方差的概念以及不等式知识和推理运算能力。

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

设向量 $a=\left(\sqrt{3}\sin x,\sin x\right),b=\left(\cos x,\sin x\right),x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

（I）若 $|a|=|b|$.求x的值；

（II）设函数 $f\left(x\right)=a\bullet b$,求$f\left(x\right)$的最大值.

[答案]：（I）由 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 可得 $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$，代入得 $3\sin^2 x+\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x$

解得 $\sin^2 x=\frac{1}{4}$，又 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，故 $\sin x=\frac{1}{2},x=\frac{\pi}{6}$

（II）由

$f(x)=\vec{a}\bullet\vec{b}=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$，

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$x=\frac{\pi}{3}$时,$\sin(2x-\frac{\pi}{6})=1$最大，此时$f(x)_{max}=\frac{3}{2}$

[解析]：第一问直接运用模相等的关系可得关于 x 的方程，注意运用 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$进行化简，也可用正切来运算。第二问首先运用数量积的坐标运算得到函数的解析式，然后联想二倍角公式进行化简；最后运用两角差正弦公式的逆用，从而转化为 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，特别要注意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.分析 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$x=\frac{\pi}{3}$时，

$\sin(2x-\frac{\pi}{6})=1$最大，此时$f(x)_{max}=\frac{3}{2}$，学生容易忽视最值能否取到，最终得不到满分。

[学科网考点定位]:本题考查向量的坐标运算；同角三角函数基本关系；两角和差公式；二倍角公式以及三角函数的性质。

18．（本小题满分 12 分）

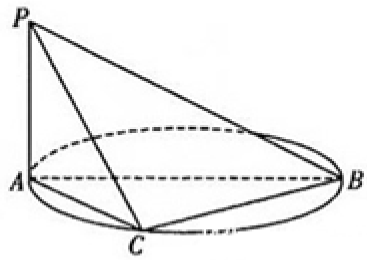
如图，AB是圆的直径，PA垂直圆所在的平面，C是圆上的点.

求证：平面$PAC\perp$平面PBC;

（II）若$AB=2$，$AC=1$，$PA=1$，求证：二面角$C-PB-A$的余弦值.

[答案]：（I）由AB是圆的直径可得$AC\perp BC$，由$PA\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，得$PA\perp BC$

又$PA\cap AC=A, PA\subset$平面PAC, $AC\subset$平面PAC，



所以$BC\perp$平面PAC

又因为$BC\subset$平面PAC,所以平面$PAC\perp$平面PBC

（II）解法一：过 C 作$CM\parallel AP$，则$CM\perp$平面ABC，如图，

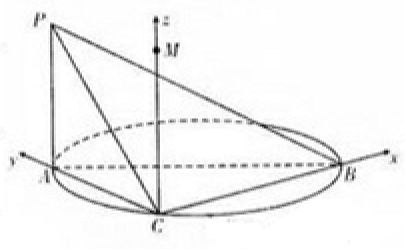
以点 C 为坐标原点，分别以直线 CB、CA、CM、为 x 轴，y 轴，z 轴

建立空间直角坐标系，因为 AB=2，AC=1，所以$BC=\sqrt{3}$

因为PA=1，所以$A(0,1,0)$, $B(\sqrt{3},0,0)$, $P(0,1,1)$. 故$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},0,0)$, $\overrightarrow{CP}=(0,1,1)$

设平面 BCP 的法向量为$\vec{n_1}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{CP}\bullet\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$ 所以$\begin{cases}\sqrt{3}x=0\\ y+z=0\end{cases}$ 不妨令$y=1$,则$\overrightarrow{n_1}=(0,1,-1)$

因为$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$, 设平面 ABP 的法向量为



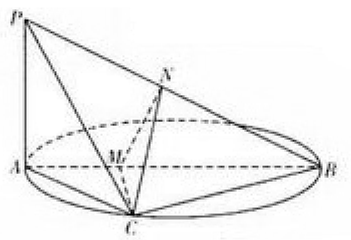
$\vec{n_2}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$所以

$\begin{cases}z=0\\ \sqrt{3}x-y=0\end{cases}$不妨令

$x=1$,则$\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{3},0)$ 于是$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

所以由题意可知二面角 C-PB-A 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

（II）解法二：过 C 作$CM\perp AB$于 M，因为



$PA\perp$平面ABC，$CM\subset$平面ABC

所以$PA\perp CM$，故$CM\perp$平面PAB。过

M作$MN\perp PB$于N，连接NC。

由三垂线定理得$CN\perp PB$.所以$\angle CNM$为二面角 C-PB-A 的平面角。

在$Rt\triangle ABC$中，由$AB=2$，$AC=1$，得$BC=\sqrt{3}$，$CM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$BM=\dfrac{3}{2}$

在$Rt\triangle PAB$中，由$AB=2$，$PA=1$，得$PB=\sqrt{5}$，因为$Rt\Delta BNM\sim Rt\Delta BAP$

所以$\dfrac{MN}{1}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{5}}$，故$MN=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

又在$Rt\triangle CNM$中，$CN=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$，故$\cos\angle CNM=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,所以二面角 C-PB-A 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$。

[解析]：（I）本题来源于教材中的例题，主要是要表达清楚线面垂直的判定条件以及面面垂直的判定条件，学生容易漏写条件，从而丢分。（II）解法一主要是建立空间直角坐标系来解决，注重运算，特别是求好两个平面的法向量，还要注意最后的结论。解法二主要体现的是几何法求解二面角，第一步是作图找出角，第二步是证明该角为所求二面角的平面角的大小，第三步是通过计算得出该角的大小。

[学科网考点定位]:本题考查线面垂直的判断和面面垂直的判定以及求二面角的方法。

19.（本小题满分 12 分）

现有 10 道题，其中 6 道甲类题，4 道乙类题，张同学从中任取 3 道题解答.

（I）求张同学至少取到 1 道乙类题的概率；

（II）已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题，1 道乙类题. 设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$，答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$，且各题答对与否相互独立. 用 X 表示张同学答对题的个数，求 X 的分布列和数学期望.

[答案]：（I）解法一：$P=\frac{C_{10}^3-C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$　解法二：$P=\frac{C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$

（II）X 所有可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=(\frac{2}{5})^2\frac{1}{5}=\frac{4}{125}$，$P(X=1)=C_2^1\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{1}{5}+(\frac{2}{5})^2\frac{4}{5}=\frac{28}{125}$，

$P(X=2)=C_2^2(\frac{3}{5})^2\frac{1}{5}+C_2^1\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{4}{5}=\frac{57}{125}$，$P(X=3)=(\frac{3}{5})^2\frac{4}{5}=\frac{36}{125}$

所求的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

所以$E(X)=0\times\frac{4}{125}+1\times\frac{28}{125}+2\times\frac{57}{125}+3\times\frac{36}{125}=2$

[解析]：第一小问可以从两个方面去思考，一是间接法，就是张同学 1 道乙类题都没有取到的取法是多少？二是直接法，就是取一道乙类题和两道甲类体；两道乙类题和一道甲类体；三道乙类题。三种情况加起来就是共有多少种取法。第二问一是思考随机变量的所有可能取值，二是算出对应的概率，其中 X=1 和 X=2 要注意有两种情形。最后利用数学期望的公式求解。

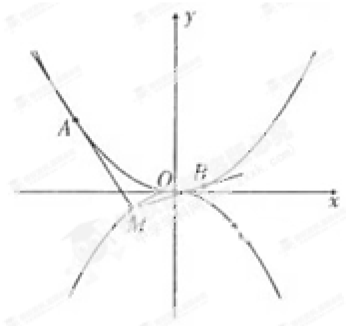
[学科网考点定位]:本题考查古典概型，随机变量的分布列和数学期望的定义。

20.（本小题满分 12 分）

如图，抛物线$C_1:x^2=4y, C_2:x^2=-2py(p>0)$.点$M(x_0,y_0)$在抛物线$C_2$上，过$M$作$C_1$的切线，切点为$A,B$（$M$为原点$O$时，$A,B$重合于$O$）.当$x_0=1-\sqrt{2}$时，切线$MA$的斜率为-$\frac{1}{2}$.

（I）求p的值；

（II）当M在C_2上运动时，求线段AB中点N的轨迹方程（A,B重合于O时,中点为O）.



[答案]：（I）由$x^2=4y$可得$y=\frac{1}{4}x^2$，该抛物线上任意一点的切线斜率为

$y'=\frac{x}{2}$,又$k_{MA}=-\frac{1}{2}$,故$x=-1$,代入$x^2=4y$得$y=\frac{1}{4}$，即$A(-1,\frac{1}{4})$

故切线 MA 的方程为$y=-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{4}$，又因为点$M(1-\sqrt{2},y_0)$在切线及抛物线$C_2$上，

于是代入直线得$y_0=-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})+\frac{1}{4}=-\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$，代入抛物线得

$y_0=-\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2p}=-\frac{3-2\sqrt{2}}{2p}$

联立解得 p=2

（II）设$N(x,y),A(x_1,\frac{x_1^2}{4}),B(x_2,\frac{x_2^2}{4}),x_1\neq x_2,M(x_0,y_0)$，由 N 为线段 AB 的中点可得：

$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{x_1^2+x_2^2}{8}$，切线 MA,MB 的方程为：

$y=\frac{x_1}{2}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{4}$，$y=\frac{x_2}{2}(x-x_2)+\frac{x_2^2}{4}$，两式联立求得交点 M 的坐标$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},y_0=\frac{x_1x_2}{4}$

由$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{x_1^2+x_2^2}{8}$可得$x=x_0,y=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{8}=\frac{(2x)^2-8y_0}{8}$，再由$y_0=-\frac{1}{4}x_0^2$

可得：$x^2=\frac{4}{3}y,x\neq 0$，经检验当 A,B 重合于坐标原点是方程也满足，因此 AB 中点 N 的轨迹方程为

$x^2=\frac{4}{3}y$

[解析]： 第一小题主要是要求学生把题目所给的抛物线方程转化成二次函数，从而想到切线的斜

率即为该点的导数值，求得切点坐标，写出切线方程，进而求得 p 的值。

第二小题主要是寻找点 M 与点 N 的关系，通过设出各点的坐标，充分利用点在曲线上及他们之间的关系，代入建立 x与x_0，y与y_0间的关系，最后运用点 M 在已知曲线上求得 x 与 y 的关系。本题在求解过程中注意整体消参的方法。最后不要漏掉对特殊点即原点的考虑。

[学科网考点定位]:本题考查抛物线的性质，导数的意义，曲线的方程，整体代入消参求动点的轨迹。

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(1+x)e^{-2x}, g(x)=ax+\dfrac{x^3}{2}+1+2x\cos x.$当$x\in[0,1]$时，

（I）求证：$1-x\le f(x)\le\dfrac{1}{1+x}$；

（II）若 $f(x)\ge g(x)$恒成立，求实数a的取值范围.

[答案]：（I）解法一：要证 $(1+x)e^{-2x}\ge 1-x$，即证：$(1+x)e^{-x}\ge(1-x)e^{x}$

令 $h(x)=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}$，则 $h'(x)=x(e^{x}-e^{-x})$，当$x\in[0,1]$时，$h'(x)\ge 0$.可得 $h(x)$ 在 [0,1]上为增函数，$h(x)\ge h(0)=0$ 故 $f(x)\ge 1-x$。

要证 $f(x)\le\dfrac{1}{1+x}$，也就是证 $(1+x)e^{-2x}\le\dfrac{1}{1+x}$，即证 $(1+x)^2\le e^{2x}$，也就是证 $e^{x}\ge 1+x$

令 $k(x)=e^{x}-x-1$，则 $k'(x)=e^{x}-1$ 当$x\in[0,1]$时，$k'(x)\ge 0$ 可得 $k(x)$ 在 [0,1]上为增函数，

$k(x)\ge k(0)=0$ 故 $f(x)\le\dfrac{1}{1+x}$

综上可得：$1-x\le f(x)\le\dfrac{1}{1+x}$;

（I）解法二：要证 $f(x)\ge 1-x$，也就是证 $(1+x)e^{-2x}\ge 1-x$，即证：$(1+x)e^{-2x}-1+x\ge 0$

令 $h(x)=(1+x)e^{-2x}-1+x$，$h'(x)=e^{-2x}-2(1+x)e^{-2x}+1$，令 $\varphi(x)=h'(x)$

$\varphi'(x)=-2e^{-2x}-2[e^{-2x}-2(1+x)e^{-2x}]=4e^{-2x}x$，当$x\in[0,1]$时，$\varphi'(x)\ge 0$.即 $\varphi(x)=h'(x)$ 为增函数，

$h'(x) \geq h'(0) = 0$，可得 $h(x)$ 在 $[0,1]$上为增函数，$h(x) \geq h(0) = 0$ 即$(1+x)e^{-2x} - 1 + x \geq 0$

故 $f(x) \geq 1 - x$；

要证 $f(x) \leq \dfrac{1}{1+x}$，也就是证 $(1+x)^2 e^{-2x} \leq 1$，即证 $(1+x)^2 e^{-2x} - 1 \leq 0$，令 $u(x) = (1+x)^2 e^{-2x} - 1$

$u'(x) = 2(1+x)e^{-2x} - 2(1+x)^2 e^{-2x} = 2e^{-2x}(1+x)(-1-x)$，当$x \in [0,1]$时，$u'(x) \leq 0$，可得

$u(x)$在$[0,1]$上为减函数,即$u(x) \leq u(0) = 0$，从而得 $(1+x)^2 e^{-2x} - 1 \leq 0$，故 $f(x) \leq \dfrac{1}{1+x}$

综上可得：$1 - x \leq f(x) \leq \dfrac{1}{1+x}$;

（II）$f(x) - g(x) = (1+x)e^{-2x} - (ax + \dfrac{x^3}{2} + 1 + 2x\cos x)$

$\geq 1 - x - ax - 1 - \dfrac{x^3}{2} - 2x\cos x = -x(a + 1 + \dfrac{x^2}{2} + 2\cos x)$

设$G(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2\cos x$,则$G'(x) = x - 2\sin x$，令$H(x) = x - 2\sin x$. 则$H'(x) = 1 - 2\cos x$

当$x \in [0,1]$时，$H'(x) \leq 0$，$H(x) = x - 2\sin x$为减函数 $H(x) \leq H(0) = 0$

即$G'(x) \leq 0$得$G(x)$ 为减函数 $G(x) \leq G(0) = 0$，从而$a + 1 + G(x) \leq a + 3$.

所以，当$a \leq -3$时，$f(x) \geq g(x)$在$[0,1]$上恒成立。

下面注明，当$a > -3$时，$f(x) \geq g(x)$在$[0,1]$上不恒成立。

$f(x) - g(x) \leq \dfrac{1}{1+x} - (ax + \dfrac{x^3}{2} + 1 + 2x\cos x) = \dfrac{-x}{1+x} - ax - \dfrac{x^3}{2} - 2x\cos x$

$= -x(\dfrac{1}{1+x} + a + \dfrac{x^2}{2} + 2\cos x)$，令 $L(x) = \dfrac{1}{1+x} + a + \dfrac{x^2}{2} + 2\cos x = \dfrac{1}{1+x} + a + G(x)$ 则

$L'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} + G'(x)$, 当$x \in [0,1]$时，$L'(x) = \leq 0$, 故$L(x)$在$[0,1]$上是减函数，

于是 $L(x)$在$[0,1]$上的值域为$[a + 1 + 2\cos 1, a + 3]$，

当$a>-3$时，一定存在$x_0\in[0,1]$,使得$L(x_0)>0$,

此时$f(x_0)<g(x_0)$,即$f(x)\ge g(x)$在$[0,1]$上不恒成立。

综上：实数a的取值范围是$(-\infty,-3]$

[解析]：第一问中的解法一采取对已知函数进行分离整理，使得函数的结构变得简单对称，求得导函数也就变得简单了，但是在解题过程中很难想到。解法二是直接移项构造函数，比较容易想到，但是求出导函数后又变得无从下手，这时候需要二次求导分析来解决。两种解法各有特点。第二问主要是在第一问的基础上利用不等式进行适当的放缩，转化为另一个函数进行分析解答。

[学科网考点定位]:本题考查函数与导数，导数与不等式的综合应用。

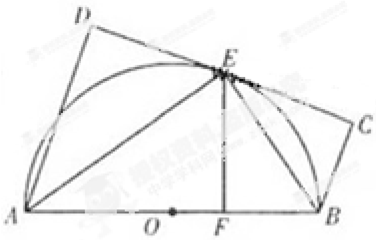
请考生在第 22、23、24 三题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑。

22.（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

如图，AB为$\odot O$直径，直线CD与$\odot O$相切于$E.AD$垂直于CD于D, BC垂直于CD于C，EF垂直于F，连接AE,BE.证明：

（I）$\angle FEB=\angle CEB$;

（II）$EF^2=AD\bullet BC$.



[答案]：（I）由直线 CD 与$\odot O$相切，得到$\angle CEB=\angle EAB$

由 AB 是$\odot O$的直径，得$AE\perp EB$,从而$\angle EAB+\angle EBF=\dfrac{\pi}{2}$

又$EF\perp AB$,得$\angle FEB+\angle EBF=\dfrac{\pi}{2}$，从而$\angle FEB=\angle EAB$，故$\angle FEB=\angle CEB$;

（II） 由$BC\perp CE, EF\perp AB, \angle FEB=\angle CEB$, BE是公共边，得

$Rt\Delta BCE\cong Rt\Delta BFE$,所以$BC=BF$，同理可得：$Rt\Delta ADE\cong Rt\Delta AFE$,所以$AD=AF$

又在$Rt\Delta AEB$中，$EF\perp AB$,故$EF^2=AF\cdot BF$,所以$EF^2=AD\cdot BC$

[解析]：第一问由切线联想到弦切角定理，进而转化到直角三角形中来解决角相等问题；第二问主

要是在直角三角形中由 $EF^2 = AF \bullet BF.$，进而想到利用三角形全等知识来解决。

[学科网考点定位]:本题考查平面几何弦切角定理，全等三角形知识以及相似三角形知识，在处理几何量的关系时运用等量代换。。

23.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xoy 中以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立坐标系. 圆 C_1，直线 C_2 的极坐标方程分别为 $\rho = 4\sin\theta, \rho = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}.$.

（I）求C_1与C_2交点的极坐标；

（II）设P为C_1的圆心，Q为C_1与C_2交点连线的中点已知直线PQ的参数方程为

$$\begin{cases} x = t^3 + a \\ y = \frac{b}{2}t^3 + 1 \end{cases} \left(t \in R\text{为参数}\right), \text{求}a,b\text{的值}.$$

[答案]：（I）圆C_1的直角坐标方程为：$x^2 + (y-2)^2 = 4$，直线 C_2 的直角坐标方程为 $x + y - 4 = 0$

联立得：$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ 所以 C_1 与 C_2 交点的极坐标为 $(4, \frac{\pi}{2}), (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

（II）由（I）可得，P，Q 的直角坐标为（0,2），（1,3），故 PQ 的直角坐标方程为 $x - y + 2 = 0$

由参数方程可得 $y = \frac{b}{2}x - \frac{ab}{2} + 1$，所以 $\frac{b}{2} = 1, -\frac{ab}{2} + 1 = 2$, 解得 $a = -1, b = 2$

[解析]： 第一问首先利用 $\rho^2 = x^2 + y^2, \rho\cos\theta = x, \rho\sin\theta = y$ 将极坐标方程化为直角坐标方程，求方程组的解，最后在转化为极坐标，注意转化成极坐标后的答案不唯一。第二问主要是求得直线 PQ 的直角坐标方程，根据所给的参数方程实现二者的联系，求得 a，b。

[学科网考点定位]:本题考查极坐标方程转化直角坐标方程以及直线的参数方程的简单应用。

24.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f\left(x\right) = \left|x - a\right|$, 其中 $a > 1$.

（I）当a=2时，求不等式$f\left(x\right) \geq 4 - \left|x - 4\right|$的解集;

（II）已知关于x的不等式$\left|f\left(2x + a\right) - 2f\left(x\right)\right| \leq 2$的解集为$\left\{x \mid 1 \leq x \leq 2\right\}$,

求a的值.

[答案]：（I）解法一：当 a=2 时，$|x-2|+|x-4|\geq 4$，利用几何意义可知表示数 x 到 2 与 4 的距离之和大于等于 4，又 2

和 4 之间的距离为 2，即数 x 可以 2 和 4 为标准分别向左或者向右移 1 各单位。故不等式的解集为：

$\{x\,|\,x\leq 1或x\geq 5\}$。

（I）解法二：当 a=2 时，$f(x)+|x-4|=\begin{cases}-2x+6, x\leq 2\\ 2, 2<x<4\\ 2x-6, x\geq 4\end{cases}$

当$x\leq 2$时，由$f(x)\geq 4-|x-4|$得$-2x+6\geq 4$,解得$x\leq 1$

当$2<x<2$时，由$f(x)\geq 4-|x-4|$得无解，

当$x\geq 4$时，由$f(x)\geq 4-|x-4|$得$2x-6\geq 4$,解得$x\geq 5$

故不等式的解集为：$\{x\,|\,x\leq 1或x\geq 5\}$。

（II）令$h(x)=f(2x+a)-2f(x)$,则$h(x)=\begin{cases}-2a, x\leq 0\\ 4x-2a, 0<x<a\\ 2a, x\geq a\end{cases}$

由$|h(x)|\leq 2$解得$\dfrac{a-1}{2}\leq x\leq \dfrac{a+1}{2}$，又知$|h(x)|\leq 2$的解集为$\{x|1\leq x\leq 2\}$

所以$\begin{cases}\dfrac{a-1}{2}=1\\ \dfrac{a+1}{2}=2\end{cases}$于是解得$a=3$

[解析]： 第一问的解法一主要运用了绝对值的几何意义，这种方法比较直观简单，解法二主要运用绝对值的意义进行分类讨论解决；第二问主要是含有字母 a,以 a 作为依据分为三段来解决，最后于所给的解集相等进而求得 a 的值。

[学科网考点定位]:本题考查绝对值不等式以及含有参数不等式的分类讨论。