

# 2025 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

## 数学

本试卷共 12 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 集合  $M = \{x \mid 2x - 1 > 5\}$ ,  $N = \{1, 2, 3\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )

- A.  $\{1, 2, 3\}$                       B.  $\{2, 3\}$                       C.  $\{3\}$                       D.  $\emptyset$

【答案】D

【解析】

【分析】先求出集合  $M$ ，再根据集合的交集运算即可解出.

【详解】因为  $M = \{x \mid 2x - 1 > 5\} = \{x \mid x > 3\}$ ，所以  $M \cap N = \emptyset$ ，

故选：D.

2. 已知复数  $z$  满足  $i \cdot z + 2 = 2i$ ，则  $|z| =$  ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $2\sqrt{2}$                       C. 4                      D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】先求出复数  $z$ ，再根据复数模的公式即可求出.

【详解】由  $i \cdot z + 2 = 2i$  可得， $z = \frac{-2 + 2i}{i} = 2 + 2i$ ，所以  $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

故选：B.

3. 双曲线  $x^2 - 4y^2 = 4$  的离心率为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$                       C.  $\frac{5}{4}$                       D.  $\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】先将双曲线方程化成标准方程，求出  $a, b, c$ ，即可求出离心率.

【详解】由  $x^2 - 4y^2 = 4$  得， $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，所以  $a^2 = 4, b^2 = 1, c^2 = a^2 + b^2 = 5$ ，

即  $a = 2, c = \sqrt{5}$ ，所以  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，

故选：B.

4. 为得到函数  $y = 9^x$  的图象，只需把函数  $y = 3^x$  的图象上的所有点（ ）

- A. 横坐标变成原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变                      B. 横坐标变成原来的 2 倍，纵坐标不变  
C. 纵坐标变成原来的  $\frac{1}{3}$  倍，横坐标不变                      D. 纵坐标变成原来的 3 倍，横坐标不变

【答案】A

【解析】

【分析】由  $y = 9^x = 3^{2x}$ ，根据平移法则即可解出.

【详解】因为  $y = 9^x = 3^{2x}$ ，所以将函数  $y = 3^x$  的图象上所有点的横坐标变成原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变，即可得到函数  $y = 9^x$  的图象，

故选：A.

5. 已知  $\{a_n\}$  是公差为 0 的等差数列， $a_1 = -2$ ，若  $a_3, a_4, a_6$  成等比数列，则  $a_{10} =$ （ ）

- A. -20                      B. -18                      C. 16                      D. 18

【答案】C

【解析】

【分析】由等比中项的性质结合等差数列的基本量运算即可求解.

【详解】设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d, (d \neq 0)$ ，

因为  $a_3, a_4, a_6$  成等比数列，且  $a_1 = -2$ ，

所以  $a_4^2 = a_3 a_6$ ，即  $(-2 + 3d)^2 = (-2 + 2d)(-2 + 5d)$ ，解得  $d = 2$  或  $d = 0$ （舍去），

所以  $a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9 \times 2 = 16$ .

故选：C.

6. 已知  $a > 0, b > 0$ ，则 ( )

A.  $a^2 + b^2 > 2ab$

B.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{ab}$

C.  $a + b > \sqrt{ab}$

D.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}}$

【答案】C

【解析】

【分析】由基本不等式结合特例即可判断.

【详解】对于 A, 当  $a = b$  时,  $a^2 + b^2 = 2ab$ , 故 A 错误;

对于 BD, 取  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$ , 此时  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 + 4 = 6 < \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = 8 = \frac{1}{ab}$ ,

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 + 4 = 6 > \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}} = 4\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$ , 故 BD 错误;

对于 C, 由基本不等式可得  $a + b \geq 2\sqrt{ab} > \sqrt{ab}$ , 故 C 正确.

故选: C.

7. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 则“函数  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ ”是“对任意  $M \in \mathbf{R}$ , 存在  $x_0 \in D$ , 使得

$|f(x_0)| > M$ ”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由函数值域的概念结合特例, 再根据充分条件、必要条件的概念即可求解.

【详解】若函数  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则对任意  $M \in \mathbf{R}$ , 一定存在  $x_1 \in D$ , 使得  $f(x_1) = |M| + 1$ ,

取  $x_0 = x_1$ , 则  $|f(x_0)| = |M| + 1 > M$ , 充分性成立;

取  $f(x) = 2^x$ ,  $D = \mathbf{R}$ , 则对任意  $M \in \mathbf{R}$ , 一定存在  $x_1 \in D$ , 使得  $f(x_1) = |M| + 1$ ,

取  $x_0 = x_1$ , 则  $|f(x_0)| = |M| + 1 > M$ , 但此时函数  $f(x)$  的值域为  $(0, +\infty)$ , 必要性不成立;

所以“函数  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ ”是“对任意  $M \in \mathbf{R}$ , 存在  $x_0 \in D$ , 使得  $|f(x_0)| > M$ ”的充分不必要条件.

故选: A.

8. 设函数  $f(x) = \sin(\omega x) + \cos(\omega x) (\omega > 0)$ , 若  $f(x + \pi) = f(x)$  恒成立, 且  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上存在零点, 则  $\omega$  的最小值为 ( )

- A. 8                                      B. 6                                      C. 4                                      D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】由辅助角公式化简函数解析式, 再由正弦函数的最小正周期与零点即可求解.

【详解】函数  $f(x) = \sin(\omega x) + \cos(\omega x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$ ,

设函数  $f(x)$  的最小正周期为  $T$ , 由  $f(x + \pi) = f(x)$  可得  $kT = \pi, (k \in \mathbb{N}^*)$ ,

所以  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{k}, (k \in \mathbb{N}^*)$ , 即  $\omega = 2k, (k \in \mathbb{N}^*)$ ;

又函数  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上存在零点, 且当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  时,  $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{4}\right]$ ,

所以  $\frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{4} \geq \pi$ , 即  $\omega \geq 3$ ;

综上,  $\omega$  的最小值为 4.

故选: C.

9. 在一定条件下, 某人工智能大语言模型训练  $N$  个单位的数据量所需要时间  $T = k \log_2 N$  (单位: 小时),

其中  $k$  为常数. 在此条件下, 已知训练数据量  $N$  从  $10^6$  个单位增加到  $1.024 \times 10^9$  个单位时, 训练时间增加 20

小时; 当训练数据量  $N$  从  $1.024 \times 10^9$  个单位增加到  $4.096 \times 10^9$  个单位时, 训练时间增加 (单位: 小时) ( )

- A. 2                                      B. 4                                      C. 20                                      D. 40

【答案】B

【解析】

【分析】由题给条件列出不同训练数据量时所需的时间, 结合对数的运算性质即可求解.

【详解】设当  $N$  取  $10^6$  个单位、 $1.024 \times 10^9$  个单位、 $4.096 \times 10^9$  个单位时所需时间分别为  $T_1, T_2, T_3$ ,

由题意,  $T_1 = k \log_2 10^6 = 6k \log_2 10$ ,

$T_2 = k \log_2 (1.024 \times 10^9) = k \log_2 (2^{10} \times 10^6) = k(10 + 6 \log_2 10)$ ,

$T_3 = k \log_2 (4.096 \times 10^9) = k \log_2 (2^{12} \times 10^6) = k(12 + 6 \log_2 10)$ ,

因为  $T_2 - T_1 = k(10 + 6 \log_2 10) - 6k \log_2 10 = 10k = 20$ , 所以  $k = 2$ ,

$$\text{所以 } T_3 - T_2 = k(12 + 6\log_2 10) - k(10 + 6\log_2 10) = 2k = 4,$$

所以当训练数据量  $N$  从  $1.024 \times 10^9$  个单位增加到  $4.096 \times 10^9$  个单位时, 训练时间增加 4 小时.

故选: B.

10. 已知平面直角坐标系  $xOy$  中,  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = 2$ , 设  $C(3, 4)$ , 则  $|\overrightarrow{2CA} + \overrightarrow{AB}|$  的取值范围是 ( )

- A.  $[6, 14]$                       B.  $[6, 12]$                       C.  $[8, 14]$                       D.  $[8, 12]$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ , 求出  $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle$ , 进而可以用向量  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  表示出  $\overrightarrow{2CA} + \overrightarrow{AB}$ , 即可解出.

【详解】因为  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = 2$ ,

由  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  平方可得,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ , 所以  $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{\pi}{2}$ .

$$\overrightarrow{2CA} + \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}, \quad |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\text{所以, } |\overrightarrow{2CA} + \overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 4\overrightarrow{OC}^2 - 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$= 2 + 2 + 4 \times 25 - 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = 104 - 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC},$$

$$\text{又 } |(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}| \leq |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| = 5 \times \sqrt{2+2} = 10, \text{ 即 } -10 \leq (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} \leq 10,$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{2CA} + \overrightarrow{AB}|^2 \in [64, 144], \text{ 即 } |\overrightarrow{2CA} + \overrightarrow{AB}| \in [8, 12],$$

故选: D.

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的顶点到焦点的距离为 3, 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

【答案】6

【解析】

【分析】根据抛物线的几何性质可求  $p$  的值.

【详解】因为抛物线的顶点到焦距的距离为  $\frac{p}{2}$ , 故  $\frac{p}{2} = 3$ , 故  $p = 6$ ,

故答案为：6.

12. 已知  $(1-2x)^4 = a_0 - 2a_1x + 4a_2x^2 - 8a_3x^3 + 16a_4x^4$ ，则  $a_0 =$  \_\_\_\_\_；  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 ①. 1 ②. 15

【解析】

【分析】利用赋值法可求  $a_0$ ，利用换元法结合赋值法可求  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  的值.

【详解】令  $x=0$ ，则  $a_0=1$ ，

$$\text{又 } (1-2x)^4 = a_0 - 2a_1x + 4a_2x^2 - 8a_3x^3 + 16a_4x^4,$$

$$\text{故 } (1-2x)^4 = a_0 + a_1(-2x) + a_2(-2x)^2 + a_3(-2x)^3 + a_4(-2x)^4,$$

$$\text{令 } t = -2x, \text{ 则 } (1+t)^4 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4,$$

$$\text{令 } t=1, \text{ 则 } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2^4, \text{ 故 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$$

故答案为：1,15.

13. 已知  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ ，且  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$ ， $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos(\alpha - \beta)$ ，写出满足条件的一组  $\alpha =$  \_\_\_\_\_， $\beta =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 ①.  $\frac{\pi}{2}$  (答案不唯一) ②.  $\frac{\pi}{6}$  (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据角的三角函数的关系可得角的等量关系，从而可得满足条件的一组解.

【详解】因为  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$ ， $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos(\alpha - \beta)$ ，

所以  $\alpha + \beta, \alpha - \beta$  的终边关于  $y$  轴，且不与  $y$  轴重合，

$$\text{故 } \alpha + \beta + \alpha - \beta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbb{Z},$$

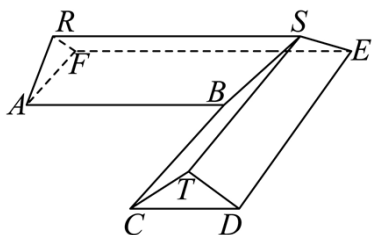
$$\text{即 } \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{故取 } \alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{6} \text{ 可满足题设要求;}$$

$$\text{故答案为: } \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \text{ (答案不唯一)}$$

14. 某科技兴趣小组通过 3D 打印机的一个零件可以抽象为如图所示的多面体，其中  $ABCDEF$  是一个平行多边形，平面  $ARF \perp$  平面  $ABC$ ，平面  $TCD \perp$  平面  $ABC$ ， $AB \perp BC$ ， $AB \parallel RS \parallel EF \parallel CD$ ，

$AF \parallel ST \parallel BC \parallel ED$ ，若  $AB = BC = 8, AF = CD = 4, AR = RF = TC = TD = \frac{5}{2}$ ，则该多面体的体积为 \_\_\_\_\_.



【答案】 60

【解析】

【分析】如图，将一半的几何体分割成直三棱柱  $ARF - BHT$  和四棱锥  $B - HTSE$  后结合体积公式可求几何体的体积.

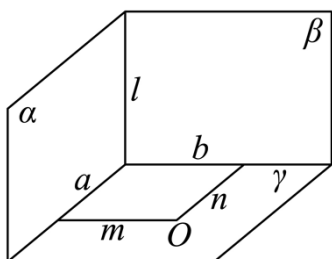
【详解】先证明一个结论：如果平面  $\alpha \perp$  平面  $\gamma$ ，平面  $\beta \perp$  平面  $\gamma$ ，平面  $\alpha \cap \beta = l$ ，则  $l \perp \gamma$ .

证明：设  $\alpha \cap \gamma = a$ ， $\beta \cap \gamma = b$ ，在平面  $\gamma$  取一点  $O$ ， $O \notin a, O \notin b$ ，

在平面  $\gamma$  内过  $O$  作直线  $m$ ，使得  $m \perp a$ ，作直线  $n$ ，使得  $n \perp b$ ，

因为平面  $\alpha \perp$  平面  $\gamma$ ， $m \subset \gamma$ ，故  $m \perp \alpha$ ，而  $l \subset \alpha$ ，故  $m \perp l$ ，

同理  $n \perp l$ ，而  $m \cap n = O, m, n \subset \gamma$ ，故  $l \perp \gamma$  .



下面回归问题.

连接  $BE$ ，因为  $AB \perp BC$  且  $AF \parallel BC$ ，故  $AF \perp AB$ ，同理  $BC \perp CD$ ， $EF \perp ED$ ，

而  $AB = BC = 8, AF = CD = 4$ ，故直角梯形  $ABEF$  与直角梯形  $CBED$  全等，

故  $\angle BEF = \angle BED = 45^\circ$ ，

在直角梯形  $ABEF$  中，过  $B$  作  $BT \perp EF$ ，垂足为  $T$ ，

则四边形  $ABTF$  为矩形，且  $\triangle BTE$  为以  $\angle BTE$  为直角的等腰直角三角形，

故  $EF = FT + TE = AB + BT = AB + AF = 12$ ，

平面  $RAF \perp$  平面  $ABEF$ ，平面  $RAF \cap$  平面  $ABEF = AF$ ， $AF \perp AB$ ，

$AB \subset$  平面  $ABEF$ ，故  $AB \perp$  平面  $RAF$ ，

取  $AF$  的中点为  $M$ ， $BE$  的中点为  $U$ ， $CD$  的中点为  $V$ ，连接  $RM, MU, SU, UV$ ，

则  $MU \parallel RS$ ，同理可证  $RM \perp$  平面  $ABEF$ ，而  $RM \subset$  平面  $RMUS$ ，

故平面  $RMUS \perp$  平面  $ABEF$ ，同理平面  $VUS \perp$  平面  $ABEF$ ，

而平面  $RMUS \cap$  平面  $VUS = SU$ ，故  $SU \perp$  平面  $ABEF$ ，

故  $RM \parallel SU$ ，故四边形  $RMUS$  为平行四边形，故  $MU = RS = \frac{1}{2}(8+12) = 10$ 。

在平面  $ABHR$  中过  $B$  作  $BH \parallel AR$ ，交  $RH$  于  $H$ ，连接  $HT$ 。

则四边形  $ABHR$  为平行四边形，且  $RH \parallel AB, RH = AB$ ，故  $RH \parallel FT, RH = FT$ ，

故四边形  $RFTH$  为平行四边形，

而  $BH \perp AB, BT \perp AB, BT \cap BH = B, BT, BH \subset$  平面  $BHT$ ，

故  $AB \perp$  平面  $BHT$ ，故平面  $ARF \parallel$  平面  $BHT$ ，

而  $AR = BH, RF = HT, AF = BT$ ，故  $\triangle ARF \cong \triangle BHT$ ，

故几何体  $ARF - BHT$  为直棱柱，

而  $S_{\triangle ARF} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = 3$ ，故  $V_{ARF-BHT} = 8 \times 3 = 24$ ，

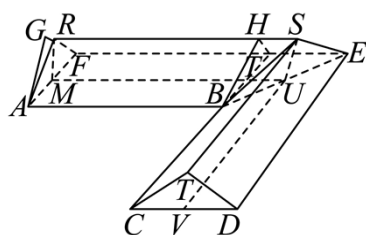
因为  $AB \parallel EF$ ，故  $EF \perp$  平面  $ARF$ ，

而  $EF \subset$  平面  $RSEF$ ，故平面  $ARF \perp$  平面  $RSEF$ ，

在平面  $ARF$  中过  $A$  作  $AG \perp RF$ ，垂足为  $G$ ，同理可证  $AG \perp$  平面  $RSEF$ ，

而  $\frac{1}{2} AG \times RF = 3$ ，故  $AG = \frac{12}{5}$ ，故  $V_{B-HTES} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} \times \frac{1}{2} (2+4) \times \frac{5}{2} = 6$ ，

由对称性可得几何体的体积为  $2 \times (24 + 6) = 60$ ，



故答案为：60。

15. 关于定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$ ，以下说法正确的有\_\_\_\_\_。

①存在在  $\mathbb{R}$  上单调递增的函数  $f(x)$  使得  $f(x) + f(2x) = -x$  恒成立；

②存在在  $\mathbb{R}$  上单调递减的函数  $f(x)$  使得  $f(x) + f(2x) = -x$  恒成立；

③使得  $f(x) + f(-x) = \cos x$  恒成立的函数  $f(x)$  存在且有无穷多个;

④使得  $f(x) - f(-x) = \cos x$  恒成立的函数  $f(x)$  存在且有无穷多个.

【答案】②③

【解析】

【分析】利用反证法可判断①④的正误, 构造函数并验证后可判断②③的正误.

【详解】对于①, 若存在  $\mathbf{R}$  上的增函数  $f(x)$ , 满足  $f(x) + f(2x) = -x$ ,

则  $f(0) + f(2 \times 0) = -0$  即  $f(0) = 0$ ,

故  $x > 0$  时,  $f(4x) > f(2x) > f(x) > 0$ , 故  $f(4x) + f(2x) > f(x) + f(2x)$ ,

故  $-2x > -x$  即  $x < 0$ , 矛盾, 故①错误;

对于②, 取  $f(x) = -\frac{1}{3}x$ , 该函数为  $\mathbf{R}$  上的减函数且  $f(x) + f(2x) = -x$ ,

故该函数符合, 故②正确;

对于③, 取  $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + mx, m \in \mathbf{R}$ ,

此时  $f(x) + f(-x) = \cos x$ , 由  $m \in \mathbf{R}$  可得  $f(x)$  有无穷多个,

故③正确;

对于④, 若存在  $f(x)$ , 使得  $f(x) - f(-x) = \cos x$ ,

令  $x = 0$ , 则  $0 = \cos 0$ , 但  $\cos 0 = 1$ , 矛盾,

故满足  $f(x) - f(-x) = \cos x$  的函数不存在, 故④错误.

故答案为: ②③

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos A = -\frac{1}{3}, a \sin C = 4\sqrt{2}$ .

(1) 求  $c$ ;

(2) 在以下三个条件中选择一个作为已知, 使得  $\triangle ABC$  存在, 求  $BC$  的高.

①  $a = 6$ ; ②  $b \sin C = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ ; ③  $\triangle ABC$  面积为  $10\sqrt{2}$ .

【答案】(1) 6 (2) 答案见解析

【解析】

【分析】(1) 由平方关系、正弦定理即可求解；

(2) 若选①，可得  $A, C$  都是钝角，矛盾；若选②，由正弦定理、平方关系求得， $\sin B, \cos B$ ，进一步由  $AD = c \sin B$  求得高，并说明此时三角形  $ABC$  存在即可；若选③，首先根据三角形面积公式求得  $b$ ，再根据余弦定理可求得  $a$ ，由此可说明三角形  $ABC$  存在，且可由等面积法求解  $AD$ 。

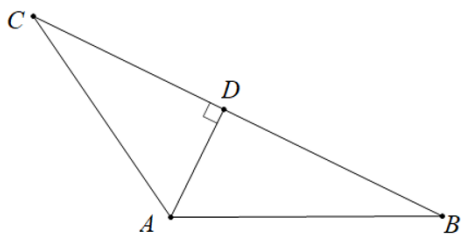
【小问 1 详解】

因为  $\cos A = -\frac{1}{3}, A \in (0, \pi)$ ，所以  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

由正弦定理有  $a \sin C = c \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}c = 4\sqrt{2}$ ，解得  $c = 6$ ；

【小问 2 详解】

如图所示，若  $\triangle ABC$  存在，则设其  $BC$  边上的高为  $AD$ ，



若选①， $a = 6$ ，因为  $c = 6$ ，所以  $C = A$ ，因为  $\cos A = -\frac{1}{3} < 0$ ，这表明此时三角形  $ABC$  有两个钝角，而这是不可能的，所以此时三角形  $ABC$  不存在，故  $BC$  边上的高也不存在；

若选②， $b \sin C = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ ，由正弦定理有  $b \sin C = c \sin B = 6 \sin B = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ ，解得  $\sin B = \frac{5\sqrt{2}}{9}$ ，

此时  $\cos B = \sqrt{1 - \frac{50}{81}} = \frac{\sqrt{31}}{9}$ ， $AD = c \sin B = 6 \times \frac{5\sqrt{2}}{9} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ ，

而  $\cos \angle DAB = \sin B, \sin \angle DAB = \cos B$ ， $\cos A = -\frac{1}{3}$ ， $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

所以  $\cos \angle CAD = \cos(\angle CAB - \angle BAD)$ ， $\sin \angle CAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAD}$  可以唯一确定，

所以此时  $CA, CD$  也可以唯一确定，

这表明此时三角形  $ABC$  是存在的，且  $BC$  边上的高  $AD = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ ；

若选③， $\triangle ABC$  的面积是  $10\sqrt{2}$ ，则  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$ ，

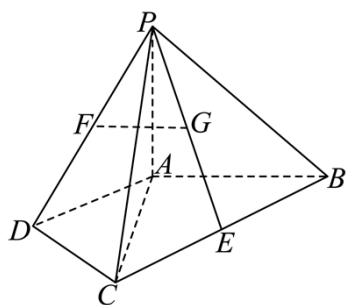
解得  $b = 5$ ，由余弦定理可得  $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = 9$  可以唯一确定，

进一步由余弦定理可得  $\cos B, \cos C$  也可以唯一确定，即  $B, C$  可以唯一确定，

这表明此时三角形  $ABC$  是存在的，且  $BC$  边上的高满足：  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AD = \frac{9}{2} AD = 10\sqrt{2}$ ，即

$$AD = \frac{20\sqrt{2}}{9}.$$

17. 四棱锥  $P-ABCD$  中，  $\triangle ACD$  与  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形，  $\angle ADC = 90^\circ$ ，  $\angle BAC = 90^\circ$ ，  $E$  为  $BC$  的中点。



(1)  $F$  为  $PD$  的中点，  $G$  为  $PE$  的中点，证明：  $FG \parallel$  面  $PAB$ ；

(2) 若  $PA \perp$  面  $ABCD$ ，  $PA = AC$ ，求  $AB$  与面  $PCD$  所成角的正弦值。

【答案】(1) 证明过程见解析

(2)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 取  $PA$  的中点  $N$ ，  $PB$  的中点  $M$ ，连接  $FN$ 、 $MN$ ，只需证明  $FG \parallel MN$  即可；

(2) 建立适当的空间直角坐标系，求出直线  $AB$  的方向向量与面  $PCD$  的法向量，根据向量夹角公式即可求解。

【小问 1 详解】

取  $PA$  的中点  $N$ ，  $PB$  的中点  $M$ ，连接  $FN$ 、 $MN$ ，

$\because \triangle ACD$  与  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形  $\angle ADC = 90^\circ$ ，  $\angle BAC = 90^\circ$

不妨设  $AD = CD = 2$ ，  $\therefore AC = AB = 2\sqrt{2}$

$\therefore BC = 4$ ，  $\because E$ 、 $F$  分别为  $BC$ 、 $PD$  的中点，  $\therefore FN = \frac{1}{2} AD = 1$ ，  $BE = 2$ ，

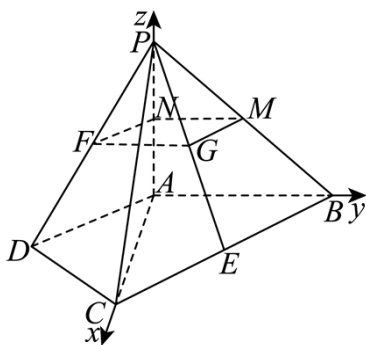
$\therefore GM = 1$ ，

$\angle DAC = 45^\circ$ ，  $\angle ACB = 45^\circ$

$\therefore AD \parallel BC$  ,  
 $\therefore FN \parallel GM$  ,  
 $\therefore$  四边形  $FGMN$  为平行四边形,  
 $\therefore FG \parallel MN$  ,  
 $\because FG \not\subset$  面  $PAB$ ,  $MN \subset$  面  $PAB$ ,  $\therefore FG \parallel$  面  $PAB$ ;

【小问 2 详解】

$\because PA \perp$  面  $ABCD$ ,  $\therefore$  以  $A$  为原点,  $AC$ 、 $AB$ 、 $AP$  所在直线分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系,



设  $AD = CD = 2$ , 则  $A(0,0,0), B(0,2\sqrt{2},0), C(2\sqrt{2},0,0), D(\sqrt{2},-\sqrt{2},0), P(0,0,2\sqrt{2})$

$\therefore \vec{AB} = (0, 2\sqrt{2}, 0), \vec{DC} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \vec{CP} = (-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2})$

设面  $PCD$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\therefore \begin{cases} \vec{DC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{CP} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

取  $x = 1, \therefore y = -1, z = 1, \therefore \vec{n} = (1, -1, 1)$

设  $AB$  与面  $PCD$  成的角为  $\theta$

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|0 \times 1 + 2\sqrt{2} \times (-1) + 0 \times 1|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

即  $AB$  与平面  $PCD$  成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

18. 有一道选择题考查了一个知识点, 甲、乙两校各随机抽取 100 人, 甲校有 80 人答对, 乙校有 75 人答对, 用频率估计概率.

(1) 从甲校随机抽取 1 人, 求这个人做对该题目的概率.

(2) 从甲、乙两校各随机抽取 1 人, 设  $X$  为做对的人数, 求恰有 1 人做对的概率以及  $X$  的数学期望.

(3) 若甲校同学掌握这个知识点则有100%的概率做对该题目，乙校同学掌握这个知识点则有85%的概率做对该题目，未掌握该知识点的同学都是从四个选项里面随机选择一个，设甲校学生掌握该知识的概率为  $p_1$ ，乙校学生掌握该知识的概率为  $p_2$ ，试比较  $p_1$  与  $p_2$  的大小（结论不要求证明）

【答案】(1)  $\frac{4}{5}$

(2) 0.35,  $E(X)=1.55$

(3)  $p_1 < p_2$

【解析】

【分析】(1) 用频率估计概率后可得从甲校随机抽取 1 人做对该题目的概率；

(2) 利用独立事件可求恰有 1 人做对的概率及  $X$  的分布列，从而可求其期望；

(3) 根据题设可得关于  $p_1, p_2$  的方程，求出其解后可得它们的大小关系.

【小问 1 详解】

用频率估计概率，从甲校随机抽取 1 人，做对题目的概率为  $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ .

【小问 2 详解】

设  $A$  为“从甲校抽取 1 人做对”，则  $P(A)=0.8$ ，则  $P(\bar{A})=0.2$ ，

设  $B$  为“从乙校抽取 1 人做对”，则  $P(B)=0.75$ ，则  $P(\bar{B})=0.25$ ，

设  $C$  为“恰有 1 人做对”，故  $P(C)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)=0.35$ ，

而  $X$  可取 0,1,2，

$P(X=0)=P(\bar{A}\bar{B})=0.05$ ， $P(X=1)=0.35$ ， $P(X=2)=0.8\times 0.75=0.6$ ，

故  $X$  的分布列如下表：

$X$	0	1	2
$P$	0.05	0.35	0.6

故  $E(X)=1\times 0.35+2\times 0.6=1.55$ .

【小问 3 详解】

设  $D$  为“甲校掌握该知识的学生”，

因为甲校掌握这个知识点则有100%的概率做对该题目，

未掌握该知识点的同学都是从四个选项里面随机选择一个，

故  $P(D) + \frac{1}{4}(1 - P(D)) = 0.8$  即  $p_1 + \frac{1}{4}(1 - p_1) = 0.8$ , 故  $p_1 = \frac{11}{15}$ ,

同理有  $0.85p_2 + \frac{1}{4}(1 - p_2) = 0.75$ , 故  $p_2 = \frac{5}{6}$ ,

故  $p_1 < p_2$ .

19. 已知  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 椭圆上的点到两焦点距离之和为 4,

(1) 求椭圆方程;

(2) 设  $O$  为原点,  $M(x_0, y_0) (x_0 \neq 0)$  为椭圆上一点, 直线  $x_0x + 2y_0y - 4 = 0$  与直线  $y = 2$ ,  $y = -2$  交于  $A, B$ .  $\triangle OAM$  与  $\triangle OBM$  的面积为  $S_1, S_2$ , 比较  $\frac{S_1}{S_2}$  与  $\frac{|OA|}{|OB|}$  的大小.

【答案】(1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2)  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|OA|}{|OB|}$

【解析】

【分析】(1) 根据椭圆定义以及离心率可求出  $a, c$ , 再根据  $a, b, c$  的关系求出  $b$ , 即可得到椭圆方程;

(2) 法一: 联立直线方程求出点  $A, B$  坐标, 即可求出  $\frac{|OA|}{|OB|}$ , 再根据  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|AM|}{|BM|}$ , 即可得出它们的大小关系.

法二: 利用直线的到角公式或者倾斜角之间的关系得到  $\angle AOM = \angle BOM$ , 再根据三角形的面积公式即可解出.

【小问 1 详解】

由椭圆可知,  $2a = 4$ , 所以  $a = 2$ , 又  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $c = \sqrt{2}$ ,  $b^2 = a^2 - c^2 = 2$ ,

故椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ;

【小问 2 详解】

联立  $\begin{cases} x_0x + 2y_0y - 4 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ , 消去  $x$  得,  $\left(\frac{4 - 2y_0y}{x_0}\right)^2 + 2y^2 = 4$ ,

整理得,  $(2x_0^2 + 4y_0^2)y^2 - 16y_0y + 16 - 4x_0^2 = 0$  ①,

又  $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$ , 所以  $2x_0^2 + 4y_0^2 = 8$ ,  $16 - 4x_0^2 = 8y_0^2$ ,

故①式可化简为  $8y^2 - 16y_0y + 8y_0^2 = 0$ , 即  $(y - y_0)^2 = 0$ , 所以  $y = y_0$ ,

所以直线  $x_0x + 2y_0y - 4 = 0$  与椭圆相切,  $M$  为切点.

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 易知, 当  $x_1 = x_2$  时, 由对称性可知,  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|OA|}{|OB|}$ .

故设  $x_2 < x_0 < x_1$ , 易知  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|x_1 - x_0|}{|x_2 - x_0|} = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2}$ ,

联立  $\begin{cases} x_0x + 2y_0y - 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ , 解得  $x_1 = \frac{4 - 4y_0}{x_0}, y_1 = 2$ ,

联立  $\begin{cases} x_0x + 2y_0y - 4 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ , 解得  $x_2 = \frac{4 + 4y_0}{x_0}, y_2 = -2$ ,

所以  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2} = \frac{\frac{4 - 4y_0}{x_0} - x_0}{x_0 - \frac{4 + 4y_0}{x_0}} = \frac{4 - 4y_0 - x_0^2}{x_0^2 - 4y_0 - 4}$

$= \frac{2y_0^2 - 4y_0}{-2y_0^2 - 4y_0} = \frac{2 - y_0}{2 + y_0},$

$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{4 - 4y_0}{x_0}\right)^2 + 4}}{\sqrt{\left(\frac{4 + 4y_0}{x_0}\right)^2 + 4}} = \frac{\sqrt{4(1 - y_0)^2 + x_0^2}}{\sqrt{4(1 + y_0)^2 + x_0^2}} = \frac{\sqrt{4(1 - y_0)^2 + 4 - 2y_0^2}}{\sqrt{4(1 + y_0)^2 + 4 - 2y_0^2}} = \frac{\sqrt{y_0^2 - 4y_0 + 4}}{\sqrt{y_0^2 + 4y_0 + 4}} = \frac{2 - y_0}{2 + y_0},$

故  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|OA|}{|OB|}$ .

法二: 不妨设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 易知, 当  $x_1 = x_2$  时, 由对称性可知,  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|OA|}{|OB|}$ .

故设  $x_2 < x_0 < x_1$ ,

联立  $\begin{cases} x_0x + 2y_0y - 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ , 解得  $x_1 = \frac{4 - 4y_0}{x_0}, y_1 = 2$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} x_0x + 2y_0y - 4 = 0 \\ y = -2 \end{cases}, \text{解得 } x_2 = \frac{4+4y_0}{x_0}, y_2 = -2,$$

$$\text{则 } k_{OA} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{2x_0}{4-4y_0} = \frac{x_0}{2-2y_0}, \quad k_{OB} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-2x_0}{4+4y_0} = -\frac{x_0}{2+2y_0}, \quad k_{OM} = \frac{y_0}{x_0},$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1, \text{ 所以 } x_0^2 + 2y_0^2 = 4,$$

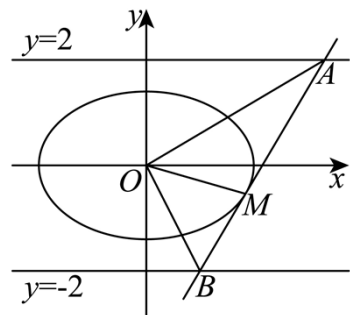
$$\text{所以 } \tan \angle AOM = \frac{k_{OA} - k_{OM}}{1 + k_{OA} \cdot k_{OM}} = \frac{\frac{x_0}{2-2y_0} - \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{x_0}{2-2y_0} \times \frac{y_0}{x_0}}$$

$$= -\frac{x_0^2 + 2y_0^2 - 2y_0}{x_0(y_0 - 2)} = -\frac{4 - 2y_0}{x_0(y_0 - 2)} = \frac{2}{x_0},$$

$$\tan \angle BOM = \frac{k_{OM} - k_{OB}}{1 + k_{OM} \cdot k_{OB}} = \frac{\frac{y_0}{x_0} + \frac{x_0}{2+2y_0}}{1 + \frac{y_0}{x_0} \times \left(-\frac{x_0}{2+2y_0}\right)} = \frac{x_0^2 + 2y_0^2 + 2y_0}{x_0(y_0 + 2)} = \frac{4 + 2y_0}{x_0(y_0 + 2)} = \frac{2}{x_0},$$

则  $\tan \angle AOM = \tan \angle BOM$ , 即  $\angle AOM = \angle BOM$ ,

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{|OA| |OM| \sin \angle AOM}{|OB| |OM| \sin \angle BOM} = \frac{|OA|}{|OB|}.$$



20. 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, +\infty)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ ,  $l_1$  为  $A(a, f(a)) (a \neq 0)$  处的切线.

(1)  $f'(x)$  的最大值;

(2)  $-1 < a < 0$ , 除点  $A$  外, 曲线  $y = f(x)$  均在  $l_1$  上方;

(3) 若  $a > 0$  时, 直线  $l_2$  过  $A$  且与  $l_1$  垂直,  $l_1, l_2$  分别于  $x$  轴的交点为  $x_1$  与  $x_2$ , 求  $\frac{2a - x_1 - x_2}{x_2 - x_1}$  的取值范围.

【答案】(1)  $\frac{1}{e}$

(2) 证明见解析 (3)  $[\frac{e^2-1}{e^2+1}, 1)$

【解析】

【分析】(1) 利用导数判断其单调性，即可求出最大值；

(2) 求出直线  $l_1$  的方程，再构造函数  $h(x)$ ，只需证明其最小值（或者下确界）大于零即可；

(3) 求出直线  $l_2$  的方程，即可由题意得到  $x_1, x_2$  的表示，从而用字母  $a$  表示出  $\frac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}$ ，从而求出范围.

【小问 1 详解】

$$\text{设 } g(x) = f'(x), \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2},$$

由  $g'(x) = 0$  可得  $x = e - 1$ ，当  $x \in (-1, e - 1)$  时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$  单调递增，

当  $x \in (e - 1, +\infty)$  时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$  单调递减，

所以  $f'(x)$  的最大值为  $f'(e - 1) = \frac{1}{e}$ .

【小问 2 详解】

因为  $f'(a) = \frac{\ln(1+a)}{1+a}$ ，所以直线  $l_1$  的方程为  $y - f(a) = \frac{\ln(1+a)}{1+a}(x - a)$ ，即

$$y = \frac{\ln(1+a)}{1+a}(x - a) + f(a),$$

$$\text{设 } h(x) = f(x) - \left[ \frac{\ln(1+a)}{1+a}(x - a) + f(a) \right], \quad h'(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{\ln(1+a)}{1+a} = f'(x) - f'(a),$$

由 (1) 可知， $f'(x)$  在  $x \in (-1, e - 1)$  上单调递增，而  $-1 < a < 0$ ，

所以，当  $-1 < x < a$  时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$  单调递减，

当  $0 > x > a$  时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$  单调递增，且  $f'(a) < f'(0) = 0$ ，

而当  $x \geq 0$  时， $f'(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \geq 0$ ，所以总有  $f'(x) \geq f'(a)$ ， $h(x)$  单调递增

故  $h(x) \geq h(a)$ ，从而命题得证；

【小问3 详解】

由  $f'(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$  可设  $f(x) = \frac{\ln^2(1+x)}{2} + C$ , 又  $f(0) = 0$ , 所以  $C = 0$ , 即  $f(x) = \frac{\ln^2(1+x)}{2}$ ,

因为直线  $l_1$  的方程为  $y = \frac{\ln(1+a)}{1+a}(x-a) + \frac{\ln^2(1+a)}{2}$ , 易知  $a \neq 0$ ,

所以直线  $l_2$  的方程为  $y = -\frac{1+a}{\ln(1+a)}(x-a) + \frac{\ln^2(1+a)}{2}$ ,

$$x_1 = a - \frac{(1+a)\ln(1+a)}{2}, \quad x_2 = \frac{\ln^3(1+a)}{2(1+a)} + a.$$

$$\text{所以 } \frac{2a - x_1 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{(1+a)\ln(1+a)}{2} - \frac{\ln^3(1+a)}{2(1+a)}}{\frac{\ln^3(1+a)}{2(1+a)} + \frac{(1+a)\ln(1+a)}{2}} = \frac{(1+a)^2 - \ln^2(1+a)}{\ln^2(1+a) + (1+a)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{\ln^2(1+a)}{(1+a)^2}}{\frac{\ln^2(1+a)}{(1+a)^2} + 1} = \frac{1 - g^2(a)}{1 + g^2(a)} = -1 + \frac{2}{1 + g^2(a)}, \text{ 由 (1) 知, 当 } x > 0 \text{ 时, } g(x) \in (0, \frac{1}{e}], \text{ 所以}$$

$$g^2(a) \in (0, \frac{1}{e^2}],$$

$$\text{所以 } \frac{2a - x_1 - x_2}{x_2 - x_1} \in [\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}, 1).$$

21.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $M = \{(x_i, y_i) | x_i \in A, y_i \in A\}$ , 从  $M$  中选出  $n$  个有序数对构成一列:

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . 相邻两项  $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$  满足:  $\begin{cases} |x_{i+1} - x_i| = 3 \\ |y_{i+1} - y_i| = 4 \end{cases}$  或  $\begin{cases} |x_{i+1} - x_i| = 4 \\ |y_{i+1} - y_i| = 3 \end{cases}$ , 称为  $k$  列.

(1) 若  $k$  列的第一项为  $(3, 3)$ , 求第二项.

(2) 若  $\tau$  为  $k$  列, 且满足  $i$  为奇数时,  $x_i \in \{1, 2, 7, 8\}$ ;  $i$  为偶数时,  $x_i \in \{3, 4, 5, 6\}$ ; 判断:  $(3, 2)$  与

$(4, 4)$  能否同时在  $\tau$  中, 并说明;

(3) 证明:  $M$  中所有元素都不构成  $k$  列.

【答案】(1)  $(6, 7)$  或  $(7, 6)$

(2) 不能, 理由见解析

(3) 证明过程见解析

### 【解析】

【分析】(1) 根据新定义即可得解；

(2) 假设  $(3,2)$  与  $(4,4)$  能同时在  $\tau$  中，导出矛盾，从而得出  $(3,2)$  与  $(4,4)$  不能同时在  $\tau$  中的结论；

(3) 假设全体元素构成一个  $k$  列，通过构造导出矛盾，从而得到要证明的结论.

#### 【小问 1 详解】

根据题目定义可知， $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \pm 3 \\ y_{i+1} = y_i \pm 4 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \pm 4 \\ y_{i+1} = y_i \pm 3 \end{cases}$ ,

若第一项为  $(3,3)$ ，显然  $x_2 = 0$  或  $-1$  不符合题意（不在集合  $A$  中），所以下一项是  $(6,7)$  或  $(7,6)$ ；

#### 【小问 2 详解】

假设二者同时出现在  $\tau$  中，由于  $k$  列取反序后仍是  $k$  列，故可以不妨设  $(3,2)$  在  $(4,4)$  之前.

显然，在  $k$  列中，相邻两项的横纵坐标之和的奇偶性总是相反的，所以从  $(3,2)$  到  $(4,4)$  必定要向下一项走奇数次.

但又根据题目条件，这两个点的横坐标均在中，所以从  $(3,2)$  到  $(4,4)$  必定要向下一项走偶数次.

这导致矛盾，所以二者不能同时出现在  $\tau$  中.

#### 【小问 3 详解】

法 1：若  $M$  中的所有元素构成  $k$  列，考虑  $k$  列中形如  $(x_i, y_i) (x_i, y_i \in \{1, 2, 7, 8\})$  的项，

这样的项共有 16 个，由题知其下一项为  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ ， $x_{i+1}, y_{i+1} \in \{3, 4, 5, 6\}$ ，共计 16 个，

而  $(x_{i+1}, y_{i+1}) \neq (3,3), (6,3), (3,6), (6,6)$ ，因为只能 6 由 2 来，3 只能由 7 来，

横、纵坐标不能同时相差 4，这样下一项只能有 12 个点，

即对于 16 个  $(x_i, y_i)$ ，有 12 个  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  与之相对应，矛盾.

综上， $M$  中所有元素都无法构成  $k$  列.

法 2：全体元素构成一个  $k$  列，则  $n = 64$ .

设  $T_1 = \{(x, y) | x \in \{1, 2, 7, 8\}, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$ ,

$T_2 = \{(x, y) | x \in \{3, 4, 5, 6\}, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$ .

则  $T_1$  和  $T_2$  都包含 32 个元素，且  $T_1$  中元素的相邻项必定在  $T_2$  中.

如果存在至少两对相邻的项属于  $T_2$ ，那么属于  $T_2$  的项的数目一定多于属于  $T_1$  的项的数目，

所以至多存在一对相邻的项属于  $T_2$ .

如果存在, 则这对相邻的项的序号必定形如  $2m$  和  $2m+1$ ,

否则将导致属于  $T_2$  的项的个数比属于  $T_1$  的项的个数多 2, 此时  $m=1,2,3,\dots,31$ .

从而这个序列的前  $2m$  项中, 第奇数项属于  $T_1$ , 第偶数项属于  $T_2$ ;

这个序列的后  $64-2m$  项中, 第奇数项属于  $T_2$ , 第偶数项属于  $T_1$ .

如果不存在相邻的属于  $T_2$  的项, 那么也可以看作上述表示在  $m=0$  或  $m=32$  的特殊情况.

这意味着必定存在  $m \in \{0,1,2,\dots,32\}$ , 使得 
$$\begin{cases} (x_{2k-1}, y_{2k-1}) \in T_1, (x_{2k}, y_{2k}) \in T_2, 1 \leq k \leq m \\ (x_{2k-1}, y_{2k-1}) \in T_2, (x_{2k}, y_{2k}) \in T_1, m+1 \leq k \leq 32 \end{cases}.$$

由于相邻两项的横纵坐标之和的奇偶性必定相反, 故  $T_1$  中横纵坐标之和为奇数的点和横纵坐标之和为偶数的点的数量一定分别是  $m$  和  $32-m$  (不一定对应).

但容易验证,  $T_1$  和  $T_2$  都包含 16 个横纵坐标之和为奇数的点和 16 个横纵坐标之和为偶数的点, 所以

$m=32-m=16$ , 得  $m=16$ .

从而有 
$$\begin{cases} (x_{2k-1}, y_{2k-1}) \in T_1, (x_{2k}, y_{2k}) \in T_2, 1 \leq k \leq 16 \\ (x_{2k-1}, y_{2k-1}) \in T_2, (x_{2k}, y_{2k}) \in T_1, 17 \leq k \leq 32 \end{cases}.$$

这就得到  $T_1 = \{(x_k, y_k) | k=1,3,5,\dots,29,31,34,36,\dots,62,64\}$ .

再设  $T_3 = \{(x, y) | x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, y \in \{1,2,7,8\}\}$ ,

$T_4 = \{(x, y) | x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, y \in \{3,4,5,6\}\}$ .

则同理有 
$$\begin{cases} (x_{2k-1}, y_{2k-1}) \in T_3, (x_{2k}, y_{2k}) \in T_4, 1 \leq k \leq 16 \\ (x_{2k-1}, y_{2k-1}) \in T_4, (x_{2k}, y_{2k}) \in T_3, 17 \leq k \leq 32 \end{cases}.$$

这意味着  $T_3 = \{(x_k, y_k) | k=1,3,5,\dots,29,31,34,36,\dots,62,64\}$ .

从而得到  $T_3 = T_1$ , 但显然它们是不同的集合, 矛盾.

所以全体元素不能构成一个  $k$  列.