

## 2015年北京市高考数学试卷（理科）

### 一、选择题（每小题5分，共40分）

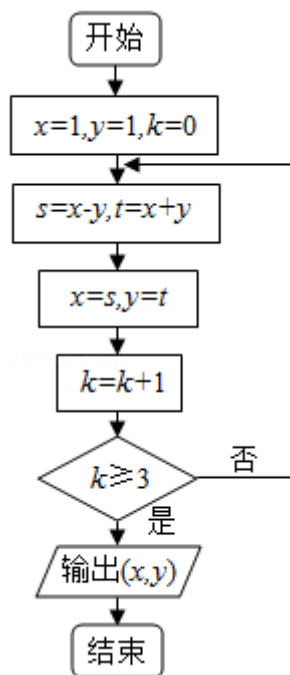
1. （5分）复数 $i(2-i) = ( \quad )$

- A.  $1+2i$                       B.  $1-2i$                       C.  $-1+2i$                       D.  $-1-2i$

2. （5分）若 $x, y$ 满足 $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z=x+2y$ 的最大值为 $( \quad )$

- A. 0                              B. 1                              C.  $\frac{3}{2}$                               D. 2

3. （5分）执行如图所示的程序框图输出的结果为 $( \quad )$

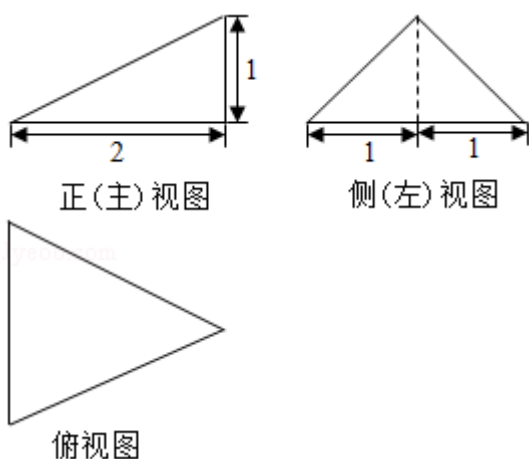


- A.  $(-2, 2)$                       B.  $(-4, 0)$                       C.  $(-4, -4)$                       D.  $(0, -8)$

4. （5分）设 $\alpha, \beta$ 是两个不同的平面， $m$ 是直线且 $m \subset \alpha$ ，“ $m \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的 $( \quad )$

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件                              D. 既不充分也不必要条件

5. （5分）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的表面积是 $( \quad )$

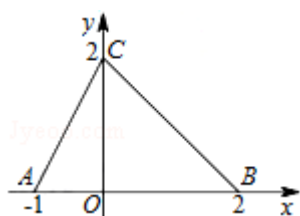


- A.  $2+\sqrt{5}$       B.  $4+\sqrt{5}$       C.  $2+2\sqrt{5}$       D. 5

6. (5分) 设  $\{a_n\}$  是等差数列, 下列结论中正确的是 ( )

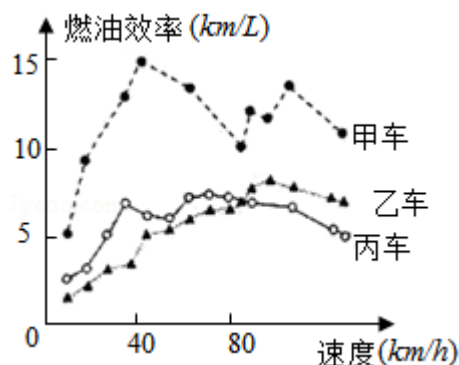
- A. 若  $a_1+a_2>0$ , 则  $a_2+a_3>0$   
 B. 若  $a_1+a_3<0$ , 则  $a_1+a_2<0$   
 C. 若  $0<a_1<a_2$ , 则  $a_2>\sqrt{a_1 a_3}$   
 D. 若  $a_1<0$ , 则  $(a_2 - a_1) (a_2 - a_3) > 0$

7. (5分) 如图, 函数  $f(x)$  的图象为折线  $ACB$ , 则不等式  $f(x) \geq \log_2(x+1)$  的解集是 ( )



- A.  $\{x \mid -1 < x \leq 0\}$     B.  $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$     C.  $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$   
 D.  $\{x \mid -1 < x \leq 2\}$

8. (5分) 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗1升汽油行驶的里程, 如图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下燃油效率情况, 下列叙述中正确的是 ( )



- A. 消耗1升汽油，乙车最多可行驶5千米
- B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多
- C. 某城市机动车最高限速80千米/小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油
- D. 甲车以80千米/小时的速度行驶1小时，消耗10升汽油

## 二、填空题（每小题5分，共30分）

9. （5分）在  $(2+x)^5$  的展开式中， $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_（用数字作答）
10. （5分）已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 的一条渐近线为  $\sqrt{3}x + y = 0$ ，则  $a =$ \_\_\_\_\_.
11. （5分）在极坐标系中，点  $(2, \frac{\pi}{3})$  到直线  $\rho(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 6$  的距离为\_\_\_\_\_.
12. （5分）在  $\triangle ABC$  中， $a=4$ ， $b=5$ ， $c=6$ ，则  $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ \_\_\_\_\_.
13. （5分）在  $\triangle ABC$  中，点  $M$ ， $N$  满足  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}$ ， $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$ ，若  $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，则  $x =$ \_\_\_\_\_,  $y =$ \_\_\_\_\_.
14. （5分）设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1 \end{cases}$ ,
- ①若  $a=1$ ，则  $f(x)$  的最小值为\_\_\_\_\_；
- ②若  $f(x)$  恰有2个零点，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题（共6小题，共80分）

15. (13分) 已知函数  $f(x) = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}$ .

(I) 求  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 求  $f(x)$  在区间  $[-\pi, 0]$  上的最小值.

16. (13分) A, B两组各有7位病人, 他们服用某种药物后的康复时间(单位: 天)记录如下:

A组: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

B组: 12, 13, 15, 16, 17, 14, a

假设所有病人的康复时间相互独立, 从A, B两组随机各选1人, A组选出的人记为甲, B组选出的人记为乙.

(I) 求甲的康复时间不少于14天的概率;

(II) 如果  $a=25$ , 求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率;

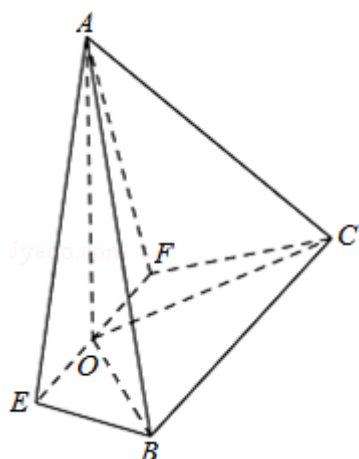
(III) 当  $a$  为何值时, A, B两组病人康复时间的方差相等? (结论不要求证明)

17. (14分) 如图, 在四棱锥  $A-EFCB$  中,  $\triangle AEF$  为等边三角形, 平面  $AEF \perp$  平面  $EFCB$ ,  $EF \parallel BC$ ,  $BC=4$ ,  $EF=2a$ ,  $\angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$ ,  $O$  为  $EF$  的中点.

(I) 求证:  $AO \perp BE$ .

(II) 求二面角  $F-AE-B$  的余弦值;

(III) 若  $BE \perp$  平面  $AOC$ , 求  $a$  的值.



18. (13分) 已知函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,

(I) 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 求证, 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$ ;

(III) 设实数  $k$  使得  $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$  对  $x \in (0, 1)$  恒成立, 求  $k$  的最大值.

19. (14分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $P(0, 1)$

和点  $A(m, n)$  ( $m \neq 0$ ) 都在椭圆  $C$  上, 直线  $PA$  交  $x$  轴于点  $M$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程, 并求点  $M$  的坐标 (用  $m, n$  表示);

(II) 设  $O$  为原点, 点  $B$  与点  $A$  关于  $x$  轴对称, 直线  $PB$  交  $x$  轴于点  $N$ , 问:  $y$  轴上是否存在点  $Q$ , 使得  $\angle OQM = \angle ONQ$ ? 若存在, 求点  $Q$  的坐标, 若不存在, 说明理由.

20. (13分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1 \leq 36$ , 且  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases}$

( $n=1, 2, \dots$ ), 记集合  $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ .

(I) 若  $a_1=6$ , 写出集合  $M$  的所有元素;

(II) 如集合  $M$  存在一个元素是3的倍数, 证明:  $M$  的所有元素都是3的倍数;

(III) 求集合  $M$  的元素个数的最大值.