2014年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷(理工农医类)

考生注意：

1. 本试卷共4页，23道试题，满分150分. 考试时间120分钟.

2. 本考试分设试卷和答题纸. 试卷包括试题与答题要求. 作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分.

3. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1.（2014）函数 $y=1-2\cos^2(2x)$ 的最小正周期是_____.

【解析】：原式$=-\cos 4x$，$T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

2.（2014）若复数 $z=1+2i$，其中 i 是虚数单位，则 $\left(z+\dfrac{1}{\overline{z}}\right)\cdot\overline{z}=$_____.

【解析】：原式$=z\cdot\overline{z}+1=|z|^2+1=5+1=6$

3.

（2014）若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点重合，则该抛物线的准线方程为_____.

【解析】：椭圆右焦点为 $(2,0)$，即抛物线焦点，所以准线方程 $x=-2$

4.（2014）设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,a),\\ x^2, & x\in[a,+\infty).\end{cases}$ 若 $f(2)=4$，则 a 的取值范围为_____.

【解析】：根据题意，$2\in[a,+\infty)$，$\therefore a\le 2$

5.（2014）若实数 x,y 满足 $xy=1$，则 x^2+2y^2 的最小值为_____.

【解析】：$x^2+2y^2\ge 2\cdot x\cdot\sqrt{2}y=2\sqrt{2}$

6.（2014）若圆锥的侧面积是底面积的 3 倍，则其母线与底面夹角的大小为（结果用反三角函数值表示）.

【解析】：设圆锥母线长为 R，底面圆半径为 r，$\because S_{侧}=3S_{底}$，$\therefore \pi\cdot r\cdot R=3\pi\cdot r^2$，即 $R=3r$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{3}$，即母线与底面夹角大小为 $\arccos\dfrac{1}{3}$

7.

（2014）已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(3\cos\theta-4\sin\theta)=1$，则 C 与极轴的交点到极点的距离是______.

【解析】：曲线 C 的直角坐标方程为 $3x-4y=1$，与 x 轴的交点为 $(\frac{1}{3},0)$，到原点距离为

$\frac{1}{3}$

8. （2014）设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，若 $a_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_3+a_4+\cdots+a_n)$，则 $q=$

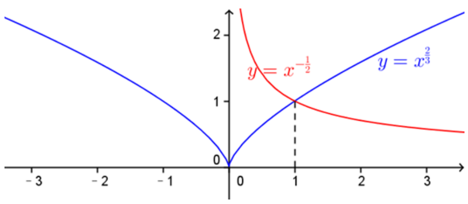
.

【解析】：$a_1=\dfrac{a_3}{1-q}=\dfrac{a_1q^2}{1-q}\Rightarrow q^2+q-1=0\Rightarrow q=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，$\because 0<|q|<1$，$\therefore$

$q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

9.（2014）若 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}$，则满足 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是______.

【解析】：$f(x)<0\Rightarrow x^{\frac{2}{3}}<x^{-\frac{1}{2}}$，结合幂函数图像，如下图，可得 x 的取值范围是 $(0,1)$



10.

（2014）为强化安全意识，某商场拟在未来的连续10天中随机选择3天进行紧急疏散演练，则 选择的3天恰好为连续3天的概率是______（结果用最简分数表示）.

【解析】：$P=\dfrac{8}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{15}$

11.（2014）已知互异的复数 a，b 满足 $ab\neq0$，集合 $\{a,b\}=\{a^2,b^2\}$，则 $a+b=$______.

【解析】：第一种情况：$a=a^2,b=b^2$，$\because ab\neq0$，$\therefore a=b=1$，与已知条件矛盾，不符

;

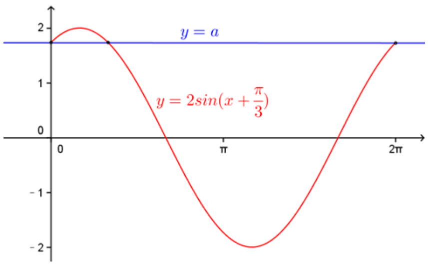
第二种情况：$a=b^2,b=a^2$，$\therefore a=a^4\Rightarrow a^3=1$，$\therefore a^2+a+1=0$，即 $a+b=-1$；

12.

（2014）设常数 a 使方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=a$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上恰有三个解 x_1，x_2，x_3，则 $x_1+x_2+x_3=$______.

【解析】：化简得 $2\sin(x+\frac{\pi}{3})=a$，根据下图，当且仅当 $a=\sqrt{3}$ 时，恰有三个交点，

即 $x_1+x_2+x_3=0+\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$



13. （2014）某游戏的得分为$1,2,3,4,5$，随机变量ξ表示小白玩该游戏的得分．若$E(\xi)=4.2$，则小白得5分的概率至少为______．

【解析】：设得i分的概率为p_i，$\therefore p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5=4.2$，

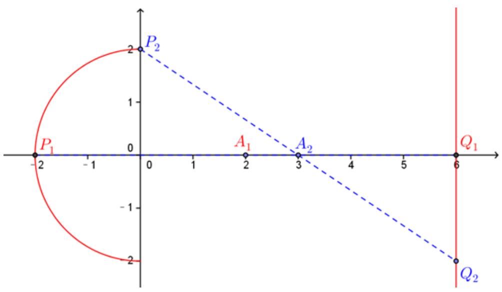
且$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$，$\therefore 4p_1+4p_2+4p_3+4p_4+4p_5=4$，与前式相减得：

$-3p_1-2p_2-p_3+p_5=0.2$，$\because p_i\ge 0$，$\therefore -3p_1-2p_2-p_3+p_5\le p_5$，即$p_5\ge 0.2$

14. （2014）已知曲线$C:x=-\sqrt{4-y^2}$，直线$l:x=6$．若对于点$A(m,0)$，存在C上的点P和l 上的Q使得$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$，则$m$的取值范围为．

【解析】：根据题意，A是PQ中点，即$m=\frac{x_P+x_Q}{2}=\frac{x_P+6}{2}$，$\because -2\le x_P\le 0$，$\therefore$

$m\in[2,3]$



二、选择题（本大题共有4题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分．

15. （2014）设$a,b\in\mathbf{R}$，则“$a+b>4$”是“$a>2$且$b>2$”的（　）

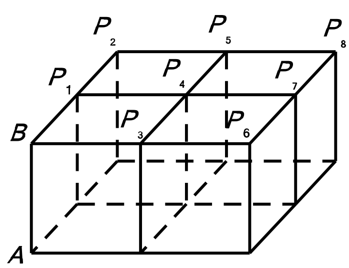
(A) 充分条件．　　(B) 必要条件．

(C) 充分必要条件．　　(D) 既非充分又非必要条件．

【解析】：B

16.

（2014）如图，四个棱长为1的正方体排成一个正四



棱柱，AB 是一条侧棱，$P_i\,(i=1,2,\cdots,8)$ 是上底面上其余的八个点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 8)$ 的不同值的个数为　（　）

(A) 1.　　　　(B) 2.

(C) 4.　　　　(D) 8.

【解析】：根据向量数量积的几何意义，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}$ 等于 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 乘以 $\overrightarrow{AP_i}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影，而 $\overrightarrow{AP_i}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影是定值，$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 也是定值，$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}$ 为定值1，∴选A

17.

（2014）已知 $P_1(a_1,b_1)$ 与 $P_2(a_2,b_2)$ 是直线 $y=kx+1$（k 为常数）上两个不同的点，则关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1,\\a_2x+b_2y=1\end{cases}$ 的解的情况是　（　）

(A) 无论 k,P_1,P_2 如何，总是无解.　　　　(B) 无论 k,P_1,P_2 如何，总有唯一解.

(C) 存在 k,P_1,P_2，使之恰有两解.　　　　(D) 存在 k,P_1,P_2，使之有无穷多解.

【解析】：由已知条件 $b_1=ka_1+1$，$b_2=ka_2+1$，

$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=a_1(ka_2+1)-a_2(ka_1+1)=a_1-a_2\neq0$，∴有唯一解，选B

18. （2014）设 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\le0,\\x+\dfrac{1}{x}+a, & x>0.\end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围为（　）

(A) $[-1,2]$.　　　　(B) $[-1,0]$.　　　　(C) $[1,2]$.

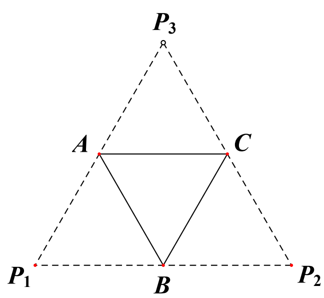
(D) $[0,2]$.

【解析】：先分析 $x\le0$ 的情况，是一个对称轴为 $x=a$ 的二次函数，当 $a<0$ 时，$f(x)_{\min}=f(a)\neq f(0)$，不符合题意，排除AB选项；当 $a=0$ 时，根据图像 $f(x)_{\min}=f(0)$，即 $a=0$ 符合题意，排除C选项；∴选D；

三、解答题（本大题共有5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19. （2014）(本题满分12分)

底面边长为2的正三棱锥 $P\text{-}ABC$，其表面展开图是三角形 $P_1P_2P_3$，如图.



求△$P_1P_2P_3$的各边长及此三棱锥的体积V.

【解析】：根据题意可得P_1,B,P_2共线，

$\because \angle ABP_1=\angle BAP_1=\angle CBP_2$，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore \angle ABP_1=\angle BAP_1=\angle CBP_2=60^\circ$，$\therefore \angle P_1=60^\circ$，同理$\angle P_2=\angle P_3=60^\circ$，

$\therefore$△$P_1P_2P_3$是等边三角形，$P-ABC$是正四面体，所以△$P_1P_2P_3$边长为4；

$\therefore V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times AB^3=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

20.（2014） (本题满分14分) 本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

设常数$a\geq 0$，函数$f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$.

(1) 若$a=4$，求函数$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$；

(2) 根据a的不同取值，讨论函数$y=f(x)$的奇偶性，并说明理由.

【解析】：（1）$\because a=4$，$\therefore f(x)=\dfrac{2^x+4}{2^x-4}=y$，$\therefore 2^x=\dfrac{4y+4}{y-1}$，$\therefore x=\log_2\dfrac{4y+4}{y-1}$，

$\therefore y=f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{4x+4}{x-1}$，$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

（2）若$f(x)$为偶函数，则$f(x)=f(-x)$，$\therefore \dfrac{2^x+a}{2^x-a}=\dfrac{2^{-x}+a}{2^{-x}-a}$，

整理得$a(2^x-2^{-x})=0$，$\therefore a=0$，此时为偶函数

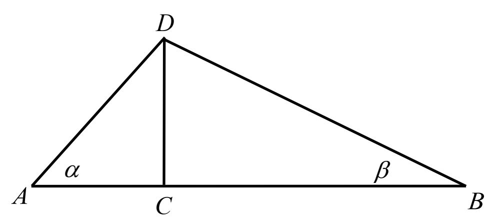
若$f(x)$为奇函数，则$f(x)=-f(-x)$，$\therefore \dfrac{2^x+a}{2^x-a}=-\dfrac{2^{-x}+a}{2^{-x}-a}$，

整理得$a^2-1=0$，$\because a\geq 0$，$\therefore a=1$，此时为奇函数

当$a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$时，此时$f(x)$既非奇函数也非偶函数

21.（2014） (本题满分14分) 本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

如图，某公司要在A、B两地连线上的定点C处建造广告牌CD，其中D为顶端，AC长35米，CB长80米.



设点 A、B 在同一水平面上，从 A 和 B 看 D 的仰角分别为 α 和 β.

(1) 设计中 CD 是铅垂方向. 若要求 $\alpha \geq 2\beta$，问 CD 的长至多为多少（结果精确到 0.01 米）?

(2)

施工完成后，CD 与铅垂方向有偏差. 现在实测得 $\alpha = 38.12°$，$\beta = 18.45°$，求 CD 的长（结果精确到 0.01 米）.

【解析】：（1）设 CD 的长为 x 米，则 $\tan\alpha = \frac{x}{35}, \tan\beta = \frac{x}{80}$，$\because \frac{\pi}{2} > \alpha \geq 2\beta > 0$，

$\therefore \tan\alpha \geq \tan 2\beta$，$\therefore \tan\alpha \geq \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$，$\therefore \frac{x}{35} \geq \frac{2\frac{x}{80}}{1-\frac{x^2}{6400}} = \frac{160x}{6400-x^2}$，

解得 $0 < x \leq 20\sqrt{2} \approx 28.28$，$\therefore CD$ 的长至多为 28.28 米

（2）设 $DB = a, DA = b, DC = m$，$\angle ADB = 180° - \alpha - \beta = 123.43°$，

则 $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\angle ADB}$，解得 $a = \frac{115\sin 38.12°}{\sin 123.43°} \approx 85.06$，

$\therefore m = \sqrt{80^2 + a^2 - 160a\cos 18.45°} \approx 26.93$，$\therefore CD$ 的长为 26.93 米

22. （2014）(本题满分16分)

本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分.

在平面直角坐标系 xOy 中，对于直线 $l: ax+by+c=0$ 和点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$，记 $\eta = (ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)$. 若 $\eta < 0$，则称点 P_1, P_2 被直线 l 分割. 若曲线 C 与直线 l 没有公共点，且曲线 C 上存在点 P_1, P_2 被直线 l 分割，则称直线 l 为曲线 C 的一条分割线.

(1) 求证：点 $A(1, 2), B(-1, 0)$ 被直线 $x+y-1=0$ 分割；

(2) 若直线 $y = kx$ 是曲线 $x^2 - 4y^2 = 1$ 的分割线，求实数 k 的取值范围；

(3) 动点 M 到点 $Q(0, 2)$ 的距离与到 y 轴的距离之积为1，设点 M 的轨迹为曲线 E. 求证：通过原点的直线中，有且仅有一条直线是 E 的分割线.

【解析】：（1）将 $A(1,2), B(-1,0)$ 分别代入 $x+y-1$，得 $(1+2-1)\times(-1-1) = -4 < 0$

$\therefore$点 $A(1,2), B(-1,0)$ 被直线 $x+y-1=0$ 分割

（2）联立 $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 1 \\ y = kx \end{cases}$，得 $(1-4k^2)x^2 = 1$，依题意，方程无解，

$\therefore 1-4k^2 \le 0$，$\therefore k \le -\dfrac{1}{2}$ 或 $k \ge \dfrac{1}{2}$

（3）设 $M(x,y)$，则 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}\,|x|=1$，

$\therefore$ 曲线 E 的方程为 $[x^2+(y-2)^2]x^2=1$ ①

当斜率不存在时，直线 $x=0$，显然与方程①联立无解，

又 $P_1(1,2),P_2(-1,2)$ 为 E 上两点，且代入 $x=0$，有 $\eta=-1<0$，

$\therefore x=0$ 是一条分割线；

当斜率存在时，设直线为 $y=kx$，代入方程得：$(k^2+1)x^4-4kx^3+4x^2-1=0$

，

令 $f(x)=(k^2+1)x^4-4kx^3+4x^2-1$，则 $f(0)=-1$，

$f(1)=k^2+1-4k+3=(k-2)^2$，$f(-1)=k^2+1+4k+3=(k+2)^2$，

当 $k\ne 2$ 时，$f(1)>0$，$\therefore f(0)f(1)<0$，即 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 之间存在实根，

$\therefore y=kx$ 与曲线 E 有公共点

当 $k=2$ 时，$f(0)f(-1)<0$，即 $f(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 之间存在实根，

$\therefore y=kx$ 与曲线 E 有公共点

$\therefore$ 直线 $y=kx$ 与曲线 E 始终有公共点，$\therefore$ 不是分割线，

综上，所有通过原点的直线中，有且仅有一条直线 $x=0$ 是 E 的分割线

23.（2014）(本题满分18分)

本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分7分，第3小题满分8分.

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{3}a_n \le a_{n+1} \le 3a_n$，$n\in \mathbf{N}^*$，$a_1=1$.

(1) 若 $a_2=2$，$a_3=x$，$a_4=9$，求 x 的取值范围；

(2) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 若 $\dfrac{1}{3}S_n \le S_{n+1} \le 3S_n$，$n\in \mathbf{N}^*$，

求 q 的取值范围；

(3) 若 a_1，a_2，$\cdots$，a_k 成等差数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k=1000$，求正整数 k 的最大值，以及

k 取最大值时相应数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_k 的公差.

【解析】：（1）依题意，$\dfrac{1}{3}a_2 \le a_3 \le 3a_2$，$\therefore \dfrac{2}{3} \le x \le 6$，又 $\dfrac{1}{3}a_3 \le a_4 \le 3a_3$，$\therefore$

$3 \le x \le 27$，

综上可得 $3 \le x \le 6$；

（2）由已知得 $a_n = q^{n-1}$，又 $\frac{1}{3}a_1 \le a_2 \le 3a_1$，$\therefore \frac{1}{3} \le q \le 3$

当 $q=1$ 时，$S_n = n$，$\frac{1}{3}S_n \le S_{n+1} \le 3S_n$，即 $\frac{n}{3} \le n+1 \le 3n$，成立

当 $1 < q \le 3$ 时，$S_n = \frac{q^n-1}{q-1}$，$\frac{1}{3}S_n \le S_{n+1} \le 3S_n$，即 $\frac{1}{3}\frac{q^n-1}{q-1} \le \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \le 3\frac{q^n-1}{q-1}$，

$\therefore \frac{1}{3} \le \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} \le 3$，此不等式即 $\begin{cases} 3q^{n+1}-q^n-2 \ge 0 \\ q^{n+1}-3q^n+2 \le 0 \end{cases}$，$\because q > 1$，

$\therefore 3q^{n+1}-q^n-2 = q^n(3q-1)-2 > 2q^n-2 > 0$，

对于不等式 $q^{n+1}-3q^n+2 \le 0$，令 $n=1$，得 $q^2-3q+2 \le 0$，解得 $1 \le q \le 2$，

又当 $1 < q \le 2$ 时，$q-3 < 0$，

$\therefore q^{n+1}-3q^n+2 = q^n(q-3)+2 \le q(q-3)+2 = (q-1)(q-2) \le 0$ 成立，

$\therefore 1 < q \le 2$

当 $\frac{1}{3} \le q < 1$ 时，$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$，$\frac{1}{3}S_n \le S_{n+1} \le 3S_n$，即

$\frac{1}{3}\frac{1-q^n}{1-q} \le \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \le 3\frac{1-q^n}{1-q}$，

即 $\begin{cases} 3q^{n+1}-q^n-2 \le 0 \\ q^{n+1}-3q^n+2 \ge 0 \end{cases}$，$3q-1>0, q-3<0$

$\because 3q^{n+1}-q^n-2 = q^n(3q-1)-2 < 2q^n-2 < 0$

$q^{n+1}-3q^n+2 = q^n(q-3)+2 \ge q(q-3)+2 = (q-1)(q-2) > 0$

$\therefore \frac{1}{3} \le q < 1$ 时，不等式恒成立

综上，q 的取值范围为 $\frac{1}{3} \le q \le 2$

（3）设公差为 d，显然，当 $k=1000, d=0$ 时，是一组符合题意的解，

$\therefore k_{\max} \ge 1000$，则由已知得 $\frac{1+(k-2)d}{3} \le 1+(k-1)d \le 3[1+(k-2)d]$，

$\therefore \begin{cases} (2k-1)d \ge -2 \\ (2k-5)d \ge -2 \end{cases}$，当 $k \ge 1000$ 时，不等式即 $d \ge -\frac{2}{2k-1}, d \ge -\frac{2}{2k-5}$，

$\therefore d \ge -\frac{2}{2k-1}$，$a_1+a_2+...+a_k = k+\frac{k(k-1)d}{2} = 1000$，

$\therefore k \ge 1000$ 时，$d = \frac{2000-2k}{k(k-1)} \ge -\frac{2}{2k-1}$，

解得 $1000-\sqrt{999000} \le k \le 1000+\sqrt{999000}$，$\therefore k \le 1999$，

$\therefore k$ 的最大值为 1999，此时公差 $d = \frac{2000-2k}{k(k-1)} = -\frac{1998}{1999 \times 1998} = -\frac{1}{1999}$