2016年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5分）设集合A=$\{x|x^2-4x+3<0\}$，B=$\{x|2x-3>0\}$，则A∩B=（　　）

A．$(-3,-\frac{3}{2})$　B．$(-3,\frac{3}{2})$　C．$(1,\frac{3}{2})$　D．$(\frac{3}{2},3)$

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】11：计算题；4O：定义法；5J：集合.

【分析】解不等式求出集合A，B，结合交集的定义，可得答案.

【解答】解：∵集合A=$\{x|x^2-4x+3<0\}=(1,3)$，

B=$\{x|2x-3>0\}=(\frac{3}{2},+\infty)$，

∴A∩B=$(\frac{3}{2},3)$，

故选：D.

【点评】本题考查的知识点是集合的交集及其运算，难度不大，属于基础题.

2．（5分）设（1+i）x=1+yi，其中x，y是实数，则|x+yi|=（　　）

A．1　B．$\sqrt{2}$　C．$\sqrt{3}$　D．2

【考点】A8：复数的模.

【专题】34：方程思想；4O：定义法；5N：数系的扩充和复数.

【分析】根据复数相等求出x，y的值，结合复数的模长公式进行计算即可.

【解答】解：∵（1+i）x=1+yi，

∴x+xi=1+yi，

即$\begin{cases}x=1\\y=x\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，即$|x+yi|=|1+i|=\sqrt{2}$，

故选：B.

【点评】本题主要考查复数模长的计算，根据复数相等求出x，y的值是解决本

题的关键．

3．（5分）已知等差数列$\{a_n\}$前9项的和为27，$a_{10}=8$，则$a_{100}=$（　　）

A．100　　B．99　　C．98　　D．97

【考点】83：等差数列的性质．

【专题】11：计算题；4O：定义法；54：等差数列与等比数列．

【分析】根据已知可得$a_5=3$，进而求出公差，可得答案．

【解答】解：∵等差数列$\{a_n\}$前9项的和为27，$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9\times 2a_5}{2}=9a_5$．

∴$9a_5=27$，$a_5=3$，

又∵$a_{10}=8$，

∴$d=1$，

∴$a_{100}=a_5+95d=98$，

故选：C．

【点评】本题考查的知识点是数列的性质，熟练掌握等差数列的性质，是解答的关键．

4．（5分）某公司的班车在7：00，8：00，8：30发车，小明在7：50至8：30之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过10分钟的概率是（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【考点】CF：几何概型．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】求出小明等车时间不超过10分钟的时间长度，代入几何概型概率计算公式，可得答案．

【解答】解：设小明到达时间为y，

当y在7：50至8：00，或8：20至8：30时，

小明等车时间不超过10分钟，

故$P=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$，

故选：B．

【点评】本题考查的知识点是几何概型，难度不大，属于基础题．

5．（5分）已知方程$\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$表示双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为4，则n的取值范围是（　　）

A．（－1，3）　B．（－1，$\sqrt{3}$）　C．（0，3）　D．（0，$\sqrt{3}$）

【考点】KB：双曲线的标准方程．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由已知可得c=2，利用$4=(m^2+n)+(3m^2-n)$，解得$m^2=1$，又$(m^2+n)(3m^2-n)>0$，从而可求n的取值范围．

【解答】解：∵双曲线两焦点间的距离为4，∴c=2，

当焦点在x轴上时，

可得：$4=(m^2+n)+(3m^2-n)$，解得：$m^2=1$，

∵方程$\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$表示双曲线，

∴$(m^2+n)(3m^2-n)>0$，可得：$(n+1)(3-n)>0$，

解得：$-1<n<3$，即n的取值范围是：（－1，3）．

当焦点在y轴上时，

可得：$-4=(m^2+n)+(3m^2-n)$，解得：$m^2=-1$，

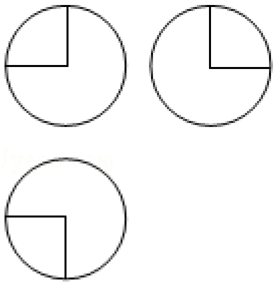
无解．

故选：A．

【点评】本题主要考查了双曲线方程的应用，考查了不等式的解法，属于基础题．

6．（5分）如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互

垂直的半径．若该几何体的体积是$\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是（　　）



A．17π　　B．18π　　C．20π　　D．28π

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；35：转化思想；5F：空间位置关系与距离．

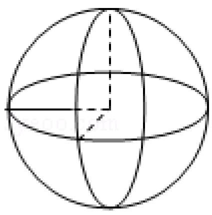
【分析】判断三视图复原的几何体的形状，利用体积求出几何体的半径，然后求解几何体的表面积．

【解答】解：由题意可知三视图复原的几何体是一个球去掉$\frac{1}{8}$后的几何体，如图：

可得：$\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{28\pi}{3}$，R=2．

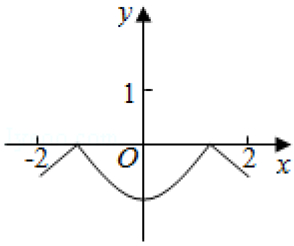
它的表面积是：$\frac{7}{8}\times 4\pi\bullet 2^2+\frac{3}{4}\times\pi\bullet 2^2=17\pi$．

故选：A．

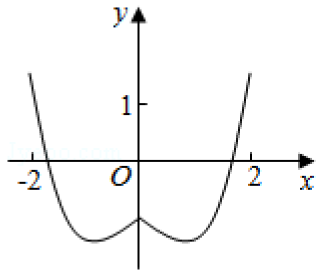


【点评】本题考查三视图求解几何体的体积与表面积，考查计算能力以及空间想象能力．

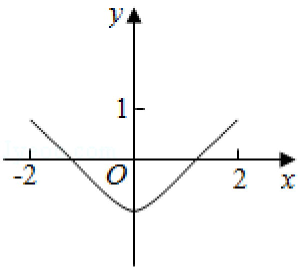
7．（5分）函数$y=2x^2-e^{|x|}$在[－2，2]的图象大致为（　　）



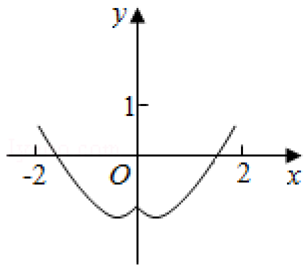
A．



B．



C．



D．

【考点】3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】27：图表型；48：分析法；51：函数的性质及应用．

【分析】根据已知中函数的解析式，分析函数的奇偶性，最大值及单调性，利用排除法，可得答案．

【解答】解：∵$f(x)=y=2x^2-e^{|x|}$，

∴$f(-x)=2(-x)^2-e^{|-x|}=2x^2-e^{|x|}$，

故函数为偶函数，

当$x=\pm2$时，$y=8-e^2\in(0,1)$，故排除A，B；

当$x\in[0,2]$时，$f(x)=y=2x^2-e^x$，

∴$f'(x)=4x-e^x=0$有解，

故函数$y=2x^2-e^{|x|}$在$[0,2]$不是单调的，故排除C，

故选：D．

【点评】本题考查的知识点是函数的图象，对于超越函数的图象，一般采用排除法解答．

8．（5分）若$a>b>1$，$0<c<1$，则（　　）

A．$a^c<b^c$　　　　B．$ab^c<ba^c$

C．$a\log_b c<b\log_a c$　　　　D．$\log_a c<\log_b c$

【考点】R3：不等式的基本性质．

【专题】33：函数思想；35：转化思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用；5T：不等式．

【分析】根据已知中$a>b>1$，$0<c<1$，结合对数函数和幂函数的单调性，分析各个结论的真假，可得答案．

【解答】解：∵$a>b>1$，$0<c<1$，

∴函数$f(x)=x^c$在$(0,+\infty)$上为增函数，故$a^c>b^c$，故A错误；

函数$f(x)=x^{c-1}$在$(0,+\infty)$上为减函数，故$a^{c-1}<b^{c-1}$，故$ba^c<ab^c$，即$ab^c>ba^c$；故B错误；

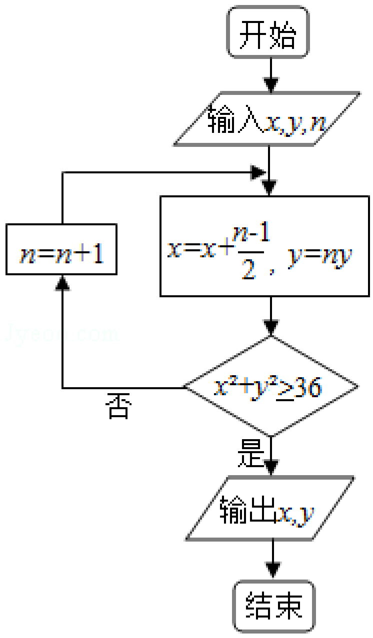
$\log_a c<0$，且$\log_b c<0$，$\log_a b<1$，即$\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{\log_a c}{\log_b c}<1$，即$\log_a c>\log_b c$．故D错误；

$0<-\log_a c<-\log_b c$，故$-b\log_a c<-a\log_b c$，即$b\log_a c>a\log_b c$，即$a\log_b c<b\log_a c$，故C正确；

故选：C．

【点评】本题考查的知识点是不等式的比较大小，熟练掌握对数函数和幂函数的单调性，是解答的关键．

9．（5分）执行下面的程序框图，如果输入的$x=0$，$y=1$，$n=1$，则输出x，y的值满足（　　）



A．y=2x　　B．y=3x　　C．y=4x　　D．y=5x

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；28：操作型；5K：算法和程序框图．

【分析】由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量x，y的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案．

【解答】解：输入x=0，y=1，n=1，

则x=0，y=1，不满足$x^2+y^2\geq 36$，故n=2，

则$x=\frac{1}{2}$，y=2，不满足$x^2+y^2\geq 36$，故n=3，

则$x=\frac{3}{2}$，y=6，满足$x^2+y^2\geq 36$，

故y=4x，

故选：C．

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环的次数不多，或有规律时，常采用模拟循环的方法解答．

10．（5分）以抛物线C的顶点为圆心的圆交C于A、B两点，交C的准线于D、E两点．已知$|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则C的焦点到准线的距离为（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

【考点】K8：抛物线的性质；KJ：圆与圆锥曲线的综合．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】画出图形，设出抛物线方程，利用勾股定理以及圆的半径列出方程求解即可．

【解答】解：设抛物线为$y^2=2px$，如图：$|AB|=4\sqrt{2}$，$|AM|=2\sqrt{2}$，

$|DE|=2\sqrt{5}$，$|DN|=\sqrt{5}$，$|ON|=\frac{p}{2}$，

$x_A=\frac{(2\sqrt{2})^2}{2p}=\frac{4}{p}$，

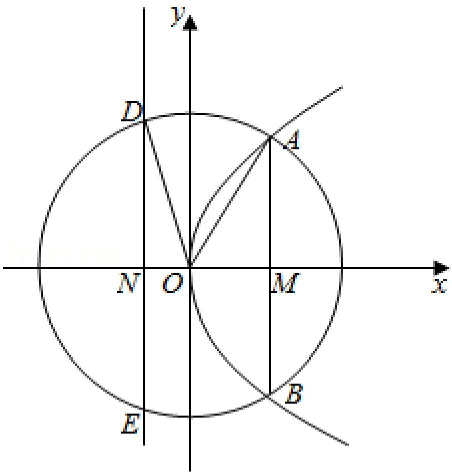
$|OD|=|OA|$，

$\frac{16}{p^2}+8=\frac{p^2}{4}+5$，

解得：p=4．

C的焦点到准线的距离为：4．

故选：B．



【点评】本题考查抛物线的简单性质的应用，抛物线与圆的方程的应用，考查计算能力．转化思想的应用．

11．（5分）平面α过正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$的顶点A，α∥平面CB_1D_1，α∩平面AB

CD=m，α∩平面ABB_1A_1=n，则m、n所成角的正弦值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；35：转化思想；5G：空间角．

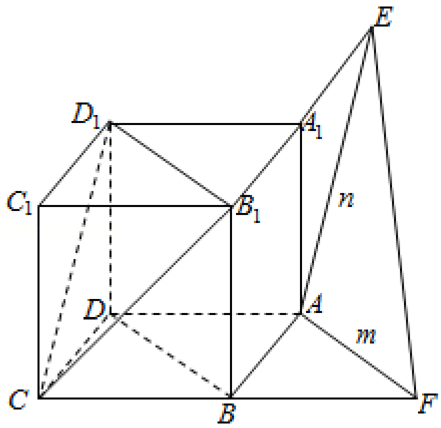
【分析】画出图形，判断出m、n所成角，求解即可．

【解答】解：如图：α∥平面CB_1D_1，α∩平面ABCD=m，α∩平面ABA_1B_1=n，

可知：n∥CD_1，m∥B_1D_1，∵△CB_1D_1是正三角形．m、n所成角就是∠CD_1B_1=60°．

则m、n所成角的正弦值为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

故选：A．



【点评】本题考查异面直线所成角的求法，考查空间想象能力以及计算能力．

12．（5分）已知函数f（x）=sin（ωx+φ）（ω＞0，|φ|≤$\frac{\pi}{2}$），x=﹣$\frac{\pi}{4}$为f（x）的零点，x=$\frac{\pi}{4}$为y=f（x）图象的对称轴，且f（x）在（$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36}$）上单调，则ω的最大值为（　　）

A．11　　B．9　　C．7　　D．5

【考点】H6：正弦函数的奇偶性和对称性．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；57：三角函数的图像与性质．

【分析】根据已知可得ω为正奇数，且ω≤12，结合$x=-\frac{\pi}{4}$为f（x）的零点，$x=\frac{\pi}{4}$为y=f（x）图象的对称轴，求出满足条件的解析式，并结合f（x）在（$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36}$）上单调，可得ω的最大值．

【解答】解：∵$x=-\frac{\pi}{4}$为f（x）的零点，$x=\frac{\pi}{4}$为y=f（x）图象的对称轴，

∴$\frac{2n+1}{4}\cdot T=\frac{\pi}{2}$，即$\frac{2n+1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，（n∈N）

即ω=2n+1，（n∈N）

即ω为正奇数，

∵f（x）在（$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36}$）上单调，则$\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{12}\le\frac{T}{2}$，

即$T=\frac{2\pi}{\omega}\ge\frac{\pi}{6}$，解得：ω≤12，

当ω=11时，$-\frac{11\pi}{4}+\phi=k\pi$，k∈Z，

∵$|\phi|\le\frac{\pi}{2}$，

∴$\phi=-\frac{\pi}{4}$，

此时f（x）在（$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36}$）不单调，不满足题意；

当ω=9时，$-\frac{9\pi}{4}+\phi=k\pi$，k∈Z，

∵$|\phi|\le\frac{\pi}{2}$，

∴$\phi=\frac{\pi}{4}$，

此时f（x）在（$\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36}$）单调，满足题意；

故ω的最大值为9，

故选：B．

【点评】本题考查的知识点是正弦型函数的图象和性质，本题转化困难，难度较大．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．（5分）设向量$\vec{a}$=（m，1），$\vec{b}$=（1，2），且$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$，则m=__

$\underline{\ -2\ \ }$.

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；5A：平面向量及应用．

【分析】利用已知条件，通过数量积判断两个向量垂直，然后列出方程求解即可．

【解答】解：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$，

可得$\vec{a}\bullet\vec{b}=0$．

向量$\vec{a}=$（m，1），$\vec{b}=$（1，2），

可得m+2=0，解得m=﹣2．

故答案为：﹣2．

【点评】本题考查向量的数量积的应用，向量的垂直条件的应用，考查计算能力．

14．（5分）$(2x+\sqrt{x})^5$的展开式中，x^3的系数是$\underline{\ \ 10\ \ }$．（用数字填写答案）

【考点】DA：二项式定理．

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；5P：二项式定理．

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第r+1项，令x的指数为3，求出r，即可求出展开式中x^3的系数．

【解答】解：$(2x+\sqrt{x})^5$的展开式中，通项公式为：$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(\sqrt{x})^r=2^{5-r}C_5^r\bullet x^{5-\frac{r}{2}}$，

令$5-\frac{r}{2}=3$，解得r=4

∴x^3的系数$2C_5^4=10$．

故答案为：10．

【点评】本题考查了二项式定理的应用，考查了推理能力与计算能力，属于基

础题．

15．（5分）设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则$a_1a_2\ldots a_n$的最大值为__64__．

【考点】87：等比数列的性质；8I：数列与函数的综合．

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；54：等差数列与等比数列．

【分析】求出数列的等比与首项，化简$a_1a_2\ldots a_n$，然后求解最值．

【解答】解：等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，

可得$q(a_1+a_3)=5$，解得$q=\frac{1}{2}$．

$a_1+q^2a_1=10$，解得$a_1=8$．

则$a_1a_2\ldots a_n=a_1^n\bullet q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}=8^n\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{3n-\frac{n^2-n}{2}}=2^{\frac{7n-n^2}{2}}$，

当n=3或4时，表达式取得最大值：$2^{\frac{12}{2}}=2^6=64$．

故答案为：64．

【点评】本题考查数列的性质数列与函数相结合的应用，转化思想的应用，考查计算能力．

16．（5分）某高科技企业生产产品A和产品B需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品A需要甲材料1.5kg，乙材料1kg，用5个工时；生产一件产品B需要甲材料0.5kg，乙材料0.3kg，用3个工时，生产一件产品A的利润为2100元，生产一件产品B的利润为900元．该企业现有甲材料150kg，乙材料90kg，则在不超过600个工时的条件下，生产产品A、产品B的利润之和的最大值为__216000__元．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；33：函数思想；35：转化思想．

【分析】设A、B两种产品分别是x件和y件，根据题干的等量关系建立不等式组以及目标函数，利用线性规划作出可行域，通过目标函数的几何意义，求出其最大值即可；

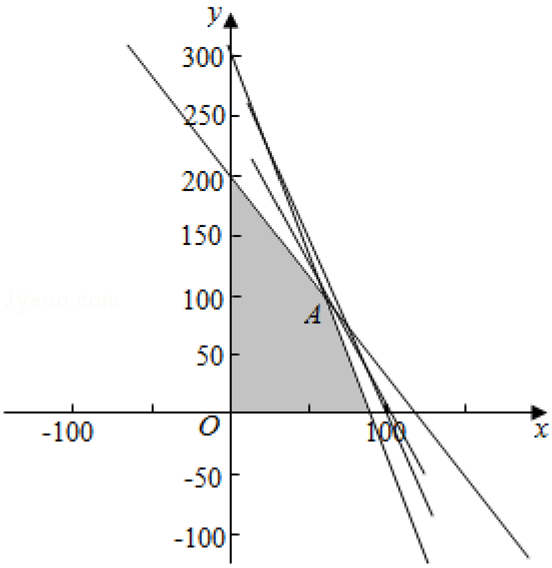
【解答】解：（1）设A、B两种产品分别是x件和y件，获利为z元．

由题意，得$\begin{cases}x\in N,\ y\in N\\1.5x+0.5y\leqslant 150\\x+0.3y\leqslant 90\\5x+3y\leqslant 600\end{cases}$，z=2100x+900y．

不等式组表示的可行域如图：由题意可得$\begin{cases}x+0.3y=90\\5x+3y=600\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=60\\y=100\end{cases}$，A（60，100），

目标函数z=2100x+900y．经过A时，直线的截距最大，目标函数取得最大值：2100×60+900×100=216000元．

故答案为：216000．



【点评】本题考查了列二元一次方程组解实际问题的运用，二元一次方程组的解法的运用，不等式组解实际问题的运用，不定方程解实际问题的运用，解答时求出最优解是解题的关键．

三、解答题：本大题共5小题，满分60分，解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（12分）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知2cosC（acosB+b cosA）=c．

（Ⅰ）求C；

（Ⅱ）若$c=\sqrt{7}$，△ABC的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求△ABC的周长．

【考点】HU：解三角形．

【专题】15：综合题；35：转化思想；49：综合法；58：解三角形．

【分析】（Ⅰ）已知等式利用正弦定理化简，整理后利用两角和与差的正弦函数公式及诱导公式化简，根据sinC不为0求出cosC的值，即可确定出出C的度数；

（2）利用余弦定理列出关系式，利用三角形面积公式列出关系式，求出a+b的值，即可求△ABC的周长．

【解答】解：（Ⅰ）∵在△ABC中，$0<C<\pi$，∴$\sin C\neq 0$

已知等式利用正弦定理化简得：2cosC（sinAcosB+sinBcosA）=sinC，

整理得：2cosCsin（A+B）=sinC，

即2cosCsin（π﹣（A+B））=sinC

2cosCsinC=sinC

∴$\cos C=\frac{1}{2}$，

∴$C=\frac{\pi}{3}$；

（Ⅱ）由余弦定理得$7=a^2+b^2-2ab\bullet\frac{1}{2}$，

∴$(a+b)^2-3ab=7$，

∵$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴ab=6，

∴$(a+b)^2-18=7$，

∴a+b=5，

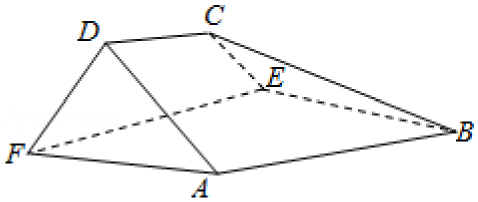
∴△ABC的周长为$5+\sqrt{7}$．

【点评】此题考查了正弦、余弦定理，三角形的面积公式，以及三角函数的恒等变形，熟练掌握定理及公式是解本题的关键．

18．（12分）如图，在以A，B，C，D，E，F为顶点的五面体中，面ABEF为正方形，AF=2FD，∠AFD=90°，且二面角D﹣AF﹣E与二面角C﹣BE﹣F都是60°．

（Ⅰ）证明平面ABEF⊥平面EFDC；

（Ⅱ）求二面角E﹣BC﹣A的余弦值．



【考点】MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；5H：空间向量及应用；5Q：立体几何．

【分析】（Ⅰ）证明AF⊥平面EFDC，利用平面与平面垂直的判定定理证明平面ABEF⊥平面EFDC；

（Ⅱ）证明四边形EFDC为等腰梯形，以E为原点，建立如图所示的坐标系，求出平面BEC、平面ABC的法向量，代入向量夹角公式可得二面角E﹣BC﹣A的余弦值．

【解答】（Ⅰ）证明：∵ABEF为正方形，∴AF⊥EF．

∵∠AFD=90°，∴AF⊥DF，

∵DF∩EF=F，

∴AF⊥平面EFDC，

∵AF⊂平面ABEF，

∴平面ABEF⊥平面EFDC；

（Ⅱ）解：由AF⊥DF，AF⊥EF，

可得∠DFE为二面角D﹣AF﹣E的平面角；

由ABEF为正方形，AF⊥平面EFDC，

∵BE⊥EF，

∴BE⊥平面EFDC

即有CE⊥BE，

可得∠CEF为二面角C﹣BE﹣F的平面角．

可得∠DFE=∠CEF=60°.

∵AB∥EF，AB⊄平面EFDC，EF⊂平面EFDC，

∴AB∥平面EFDC，

∵平面EFDC∩平面ABCD=CD，AB⊂平面ABCD，

∴AB∥CD，

∴CD∥EF，

∴四边形EFDC为等腰梯形.

以E为原点，建立如图所示的坐标系，设FD=a，

则E（0，0，0），B（0，2a，0），C（$\frac{a}{2}$，0，$\frac{\sqrt{3}}{2}$a），A（2a，2a，0），

∴$\overrightarrow{EB}$=（0，2a，0），$\overrightarrow{BC}$=（$\frac{a}{2}$，－2a，$\frac{\sqrt{3}}{2}$a），$\overrightarrow{AB}$=（－2a，0，0）

设平面BEC的法向量为$\vec{m}$=（x_1，y_1，z_1），则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，

则$\begin{cases}2ay_1=0\\ \frac{a}{2}x_1-2ay_1+\frac{\sqrt{3}}{2}az_1=0\end{cases}$，取$\vec{m}$=（$\sqrt{3}$，0，－1）.

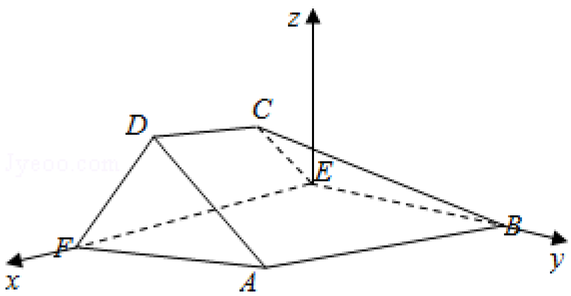
设平面ABC的法向量为$\vec{n}$=（x_2，y_2，z_2），则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，

则$\begin{cases}\frac{a}{2}x_2-2ay_2+\frac{\sqrt{3}}{2}az_2=0\\ 2ax_2=0\end{cases}$，取$\vec{n}$=（0，$\sqrt{3}$，4）.

设二面角E－BC－A的大小为θ，则cosθ=$\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$

=$\frac{-4}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{3+16}}$=－$\frac{2\sqrt{19}}{19}$，

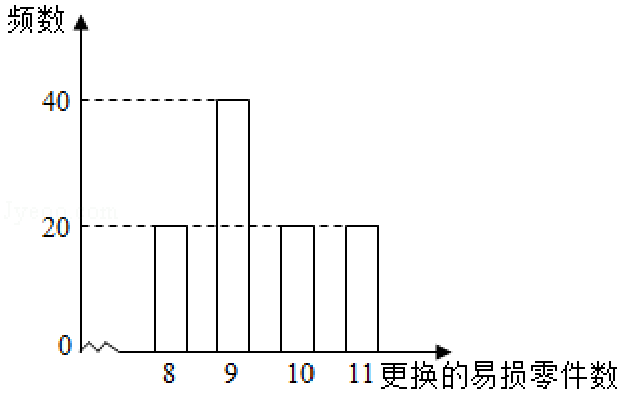
则二面角E－BC－A的余弦值为－$\frac{2\sqrt{19}}{19}$.



【点评】本题考查平面与平面垂直的证明，考查用空间向量求平面间的夹角，建立空间坐标系将二面角问题转化为向量夹角问题是解答的关键.

19．（12分）某公司计划购买2台机器，该种机器使用三年后即被淘汰．机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个200元．在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个500元．现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了100台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如图柱状图：

以这100台机器更换的易损零件数的频率代替1台机器更换的易损零件数发生的概率，记X表示2台机器三年内共需更换的易损零件数，n表示购买2台机器的同时购买的易损零件数．



（Ⅰ）求X的分布列；

（Ⅱ）若要求P（X≤n）≥0.5，确定n的最小值；

（Ⅲ）以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在n=19与n=20之中选其一，应选用哪个？

【考点】CG：离散型随机变量及其分布列．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5I：概率与统计．

【分析】（Ⅰ）由已知得X的可能取值为16，17，18，19，20，21，22，分别求出相应的概率，由此能求出X的分布列．

（Ⅱ）由X的分布列求出P（X≤18）=$\frac{11}{25}$，P（X≤19）=$\frac{17}{25}$．由此能确定满足P（X≤n）≥0.5中n的最小值．

（Ⅲ）法一：由X的分布列得P（X≤19）=$\frac{17}{25}$．求出买19个所需费用期望EX_1和买

20个所需费用期望EX_2，由此能求出买19个更合适.

法二：解法二：购买零件所用费用含两部分，一部分为购买零件的费用，另一部分为备件不足时额外购买的费用，分别求出n=19时，费用的期望和当n=20时，费用的期望，从而得到买19个更合适.

【解答】解：（Ⅰ）由已知得X的可能取值为16，17，18，19，20，21，22，

P（X=16）=$\left(\frac{20}{100}\right)^2=\frac{1}{25}$，

P（X=17）=$\frac{20}{100}\times\frac{40}{100}\times 2=\frac{4}{25}$，

P（X=18）=$\left(\frac{40}{100}\right)^2+2\left(\frac{20}{100}\right)^2=\frac{6}{25}$，

P（X=19）=$2\times\frac{40}{100}\times\frac{20}{100}+2\times\left(\frac{20}{100}\right)^2=\frac{6}{25}$，

P（X=20）=$\left(\frac{20}{100}\right)^2+2\times\frac{40}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$，

P（X=21）=$2\times\left(\frac{20}{100}\right)^2=\frac{2}{25}$，

P（X=22）=$\left(\frac{20}{100}\right)^2=\frac{1}{25}$，

∴X的分布列为：

X	16	17	18	19	20	21	22
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：

P（X≤18）=P（X=16）+P（X=17）+P（X=18）

$=\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{6}{25}=\frac{11}{25}$.

P（X≤19）=P（X=16）+P（X=17）+P（X=18）+P（X=19）

$=\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{17}{25}$.

∴P（X≤n）≥0.5中，n的最小值为19.

（Ⅲ）解法一：由（Ⅰ）得P（X≤19）=P（X=16）+P（X=17）+P（X=18）+P（X=19）

$=\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{17}{25}$.

买19个所需费用期望：

$EX_1=200\times19\times\frac{17}{25}+$（$200\times19+500$）$\times\frac{5}{25}+$（$200\times19+500\times2$）$\times\frac{2}{25}+$（$200\times19+500\times3$）$\times\frac{1}{25}=4040$，

买20个所需费用期望：

$EX_2=200\times20\times\frac{22}{25}+$（$200\times20+500$）$\times\frac{2}{25}+$（$200\times20+2\times500$）$\times\frac{1}{25}=4080$，

$\because EX_1<EX_2$，

∴买19个更合适．

解法二：购买零件所用费用含两部分，一部分为购买零件的费用，

另一部分为备件不足时额外购买的费用，

当$n=19$时，费用的期望为：$19\times200+500\times0.2+1000\times0.08+1500\times0.04=4040$，

当$n=20$时，费用的期望为：$20\times200+500\times0.08+1000\times0.04=4080$，

∴买19个更合适．

【点评】本题考查离散型随机变量的分布列和数学期望的求法及应用，是中档题，解题时要认真审题，注意相互独立事件概率乘法公式的合理运用．

20．（12分）设圆$x^2+y^2+2x-15=0$的圆心为A，直线l过点B（1，0）且与x轴不重合，l交圆A于C，D两点，过B作AC的平行线交AD于点E．

（Ⅰ）证明$|EA|+|EB|$为定值，并写出点E的轨迹方程；

（Ⅱ）设点E的轨迹为曲线C_1，直线l交C_1于M，N两点，过B且与l垂直的直线与圆A交于P，Q两点，求四边形MPNQ面积的取值范围．

【考点】J2：圆的一般方程；KL：直线与椭圆的综合．

【专题】34：方程思想；48：分析法；5B：直线与圆；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（Ⅰ）求得圆A的圆心和半径，运用直线平行的性质和等腰三角形的性质，可得EB=ED，再由圆的定义和椭圆的定义，可得E的轨迹为以A，B为焦点的椭圆，求得a，b，c，即可得到所求轨迹方程；

（Ⅱ）设直线l：$x=my+1$，代入椭圆方程，运用韦达定理和弦长公式，可得$|MN|$，由$PQ\perp l$，设PQ：$y=-m(x-1)$，求得A到PQ的距离，再由圆的弦长公式

可得$|PQ|$，再由四边形的面积公式，化简整理，运用不等式的性质，即可得到所求范围．

【解答】解：（Ⅰ）证明：圆$x^2+y^2+2x-15=0$即为$(x+1)^2+y^2=16$，

可得圆心$A(-1,0)$，半径$r=4$，

由$BE\parallel AC$，可得$\angle C=\angle EBD$，

由$AC=AD$，可得$\angle D=\angle C$，

即为$\angle D=\angle EBD$，即有$EB=ED$，

则$|EA|+|EB|=|EA|+|ED|=|AD|=4$，

故E的轨迹为以A，B为焦点的椭圆，

且有$2a=4$，即$a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

则点E的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（$y\neq0$）；

（Ⅱ）椭圆C_1：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，设直线l：$x=my+1$，

由$PQ\perp l$，设PQ：$y=-m(x-1)$，

由$\begin{cases}x=my+1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$可得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

可得$y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，

则$|MN|=\sqrt{1+m^2}\bullet|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\bullet\sqrt{\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2}+\frac{36}{3m^2+4}}$

$=\sqrt{1+m^2}\bullet\frac{\sqrt{36(4m^2+4)}}{3m^2+4}=12\bullet\frac{1+m^2}{3m^2+4}$，

A到PQ的距离为$d=\frac{|-m(-1-1)|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}$，

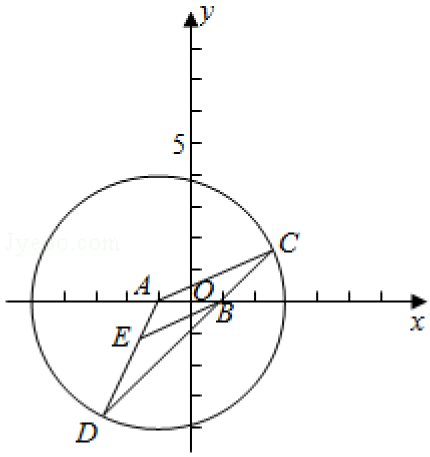
$|PQ|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{16-\frac{4m^2}{1+m^2}}=\frac{4\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}}$，

则四边形MPNQ面积为$S=\frac{1}{2}|PQ|\bullet|MN|=\frac{1}{2}\bullet\frac{4\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}}\bullet12\bullet\frac{1+m^2}{3m^2+4}$

$=24\bullet\frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3m^2+4}}=24\sqrt{\frac{1}{3+\frac{1}{1+m^2}}}$，

当m=0时，S取得最小值12，又$\frac{1}{1+m^2}>0$，可得$S<24\bullet\frac{\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}$，

即有四边形MPNQ面积的取值范围是$[12，8\sqrt{3})$．



【点评】本题考查轨迹方程的求法，注意运用椭圆和圆的定义，考查直线和椭圆方程联立，运用韦达定理和弦长公式，以及直线和圆相交的弦长公式，考查不等式的性质，属于中档题．

21．（12分）已知函数f（x）=（x﹣2）e^x+a（x﹣1）^{2}有两个零点．

（Ⅰ）求a的取值范围；

（Ⅱ）设x_1，x_2是f（x）的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$．

【考点】51：函数的零点；6D：利用导数研究函数的极值．

【专题】32：分类讨论；35：转化思想；4C：分类法；4R：转化法；51：函数的性质及应用．

【分析】（Ⅰ）由函数f（x）=（x﹣2）e^x+a（x﹣1）^{2}可得：f′（x）=（x﹣1）e^x+2a（x﹣1）=（x﹣1）（e^x+2a），对a进行分类讨论，综合讨论结果，可得答案．

（Ⅱ）设x_1，x_2是f（x）的两个零点，则﹣$a=\frac{(x_1-2)e^{x_1}}{(x_1-1)^2}=\frac{(x_2-2)e^{x_2}}{(x_2-1)^2}$，令g（x

$)=\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$，则g（$x_1$）=g（$x_2$）=－a，分析g（x）的单调性，令m＞0，

则g（1+m）－g（1－m）$=\frac{m+1}{m^2}e^{1-m}(\frac{m-1}{m+1}e^{2m}+1)$，

设h（m）$=\frac{m-1}{m+1}e^{2m}+1$，m＞0，利用导数法可得h（m）＞h（0）=0恒成立，即g（1+m）＞g（1－m）恒成立，令m=1－x_1＞0，可得结论．

【解答】解：（Ⅰ）∵函数f（x）=（x－2）e^x+a（x－1）^{2}，

∴f′（x）=（x－1）e^x+2a（x－1）=（x－1）（e^x+2a），

①若a=0，那么f（x）=0⇔（x－2）e^x=0⇔x=2，

函数f（x）只有唯一的零点2，不合题意；

②若a＞0，那么e^x+2a＞0恒成立，

当x＜1时，f′（x）＜0，此时函数为减函数；

当x＞1时，f′（x）＞0，此时函数为增函数；

此时当x=1时，函数f（x）取极小值－e，

由f（2）=a＞0，可得：函数f（x）在x＞1存在一个零点；

当x＜1时，e^x＜e，x－2＜－1＜0，

∴f（x）=（x－2）e^x+a（x－1）^{2}＞（x－2）e+a（x－1）^{2}=a（x－1）^{2}+e（x－1）－e，

令a（x－1）^{2}+e（x－1）－e=0的两根为t_1，t_2，且t_1＜t_2，

则当x＜t_1，或x＞t_2时，f（x）＞a（x－1）^{2}+e（x－1）－e＞0，

故函数f（x）在x＜1存在一个零点；

即函数f（x）在R是存在两个零点，满足题意；

③若$-\frac{e}{2}$＜a＜0，则ln（－2a）＜lne=1，

当x＜ln（－2a）时，x－1＜ln（－2a）－1＜lne－1=0，

e^x+2a＜$e^{\ln(-2a)}$+2a=0，

即f′（x）=（x－1）（e^x+2a）＞0恒成立，故f（x）单调递增，

当ln（－2a）＜x＜1时，x－1＜0，e^x+2a＞$e^{\ln(-2a)}$+2a=0，

即f′（x）=（x－1）（e^x+2a）＜0恒成立，故f（x）单调递减，

当x＞1时，x－1＞0，e^x+2a＞$e^{\ln(-2a)}$+2a=0，

即$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)>0$恒成立，故$f(x)$单调递增，

故当$x=\ln(-2a)$时，函数取极大值，

由$f(\ln(-2a))=[\ln(-2a)-2](-2a)+a[\ln(-2a)-1]^2=a\{[\ln(-2a)-2]^2+1\}<0$得：

函数$f(x)$在R上至多存在一个零点，不合题意；

④若$a=-\frac{e}{2}$，则$\ln(-2a)=1$，

当$x<1=\ln(-2a)$时，$x-1<0$，$e^x+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，

即$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)>0$恒成立，故$f(x)$单调递增，

当$x>1$时，$x-1>0$，$e^x+2a>e^{\ln(-2a)}+2a=0$，

即$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)>0$恒成立，故$f(x)$单调递增，

故函数$f(x)$在R上单调递增，

函数$f(x)$在R上至多存在一个零点，不合题意；

⑤若$a<-\frac{e}{2}$，则$\ln(-2a)>\ln e=1$，

当$x<1$时，$x-1<0$，$e^x+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，

即$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)>0$恒成立，故$f(x)$单调递增，

当$1<x<\ln(-2a)$时，$x-1>0$，$e^x+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，

即$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)<0$恒成立，故$f(x)$单调递减，

当$x>\ln(-2a)$时，$x-1>0$，$e^x+2a>e^{\ln(-2a)}+2a=0$，

即$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)>0$恒成立，故$f(x)$单调递增，

故当$x=1$时，函数取极大值，

由$f(1)=-e<0$得：

函数$f(x)$在R上至多存在一个零点，不合题意；

综上所述，a的取值范围为$(0,+\infty)$

证明：（Ⅱ）∵x_1，x_2是$f(x)$的两个零点，

∴$f(x_1)=f(x_2)=0$，且$x_1\neq1$，且$x_2\neq1$，

∴$-a=\frac{(x_1-2)e^{x_1}}{(x_1-1)^2}=\frac{(x_2-2)e^{x_2}}{(x_2-1)^2}$，

令$g(x)=\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$，则$g(x_1)=g(x_2)=-a$，

$\because g'(x)=\dfrac{[(x-2)^2+1]e^x}{(x-1)^3}$,

$\therefore$当$x<1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当$x>1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

设$m>0$，则$g(1+m)-g(1-m)=\dfrac{m-1}{m^2}e^{1+m}-\dfrac{-m-1}{m^2}e^{1-m}=$

$\dfrac{m+1}{m^2}e^{1-m}\left(\dfrac{m-1}{m+1}e^{2m}+1\right)$，

设$h(m)=\dfrac{m-1}{m+1}e^{2m}+1$，$m>0$，

则$h'(m)=\dfrac{2m^2}{(m+1)^2}e^{2m}>0$恒成立，

即$h(m)$在$(0，+\infty)$上为增函数，

$h(m)>h(0)=0$恒成立，

即$g(1+m)>g(1-m)$恒成立，

令$m=1-x_1>0$，

则$g(1+1-x_1)>g(1-1+x_1)\Leftrightarrow g(2-x_1)>g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow 2-x_1>x_2$，

即$x_1+x_2<2$.

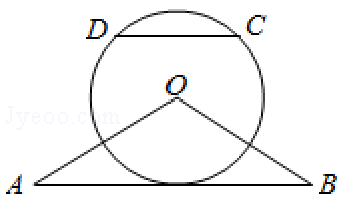
【点评】本题考查的知识点是利用导数研究函数的极值，函数的零点，分类讨论思想，难度较大.

请考生在22、23、24题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.[选修4-1：几何证明选讲]

22．（10分）如图，△OAB是等腰三角形，∠AOB=120°．以O为圆心，$\frac{1}{2}$OA为半径作圆.

（Ⅰ）证明：直线AB与⊙O相切；

（Ⅱ）点C，D在⊙O上，且A，B，C，D四点共圆，证明：AB∥CD.



【考点】N9：圆的切线的判定定理的证明．

【专题】14：证明题；35：转化思想；49：综合法；5M：推理和证明．

【分析】（Ⅰ）设K为AB中点，连结OK．根据等腰三角形AOB的性质知OK⊥AB，∠A=30°，OK=OAsin30°=$\frac{1}{2}$OA，则AB是圆O的切线．

（Ⅱ）设圆心为T，证明OT为AB的中垂线，OT为CD的中垂线，即可证明结论．

【解答】证明：（Ⅰ）设K为AB中点，连结OK，

∵OA=OB，∠AOB=120°，

∴OK⊥AB，∠A=30°，OK=OAsin30°=$\frac{1}{2}$OA，

∴直线AB与⊙O相切；

（Ⅱ）因为OA=2OD，所以O不是A，B，C，D四点所在圆的圆心．设T是A，B，C，D四点所在圆的圆心．

∵OA=OB，TA=TB，

∴OT为AB的中垂线，

同理，OC=OD，TC=TD，

∴OT为CD的中垂线，

∴AB∥CD．

【点评】本题考查了切线的判定，考查四点共圆，考查学生分析解决问题的能力．解答此题时，充分利用了等腰三角形“三合一”的性质．

[选修4-4：坐标系与参数方程]

23．在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}$（t为参数，a＞0）．在以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线C_2：$\rho=4\cos\theta$．

（Ⅰ）说明C_1是哪种曲线，并将C_1的方程化为极坐标方程；

（Ⅱ）直线C_3的极坐标方程为$\theta=\alpha_0$，其中α_0满足$\tan\alpha_0=2$，若曲线C_1与C_2的公共点都在C_3上，求a．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程；QE：参数方程的概念．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4A：数学模型法；5S：坐标系和参数方程．

【分析】（Ⅰ）把曲线C_1的参数方程变形，然后两边平方作和即可得到普通方程，可知曲线C_1是圆，化为一般式，结合$x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$化为极坐标方程；

（Ⅱ）化曲线C_2、C_3的极坐标方程为直角坐标方程，由条件可知$y=x$为圆C_1与C_2的公共弦所在直线方程，把C_1与C_2的方程作差，结合公共弦所在直线方程为$y=2x$可得$1-a^2=0$，则a值可求．

【解答】解：（Ⅰ）由$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}$，得$\begin{cases}x=a\cos t\\ y-1=a\sin t\end{cases}$，两式平方相加得，$x^2+(y-1)^2=a^2$．

∴C_1为以（0，1）为圆心，以a为半径的圆．

化为一般式：$x^2+y^2-2y+1-a^2=0$．①

由$x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$，得$\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$；

（Ⅱ）C_2：$\rho=4\cos\theta$，两边同时乘ρ得$\rho^2=4\rho\cos\theta$，

∴$x^2+y^2=4x$，②

即$(x-2)^2+y^2=4$．

由C_3：$\theta=\alpha_0$，其中α_0满足$\tan\alpha_0=2$，得$y=2x$，

∵曲线C_1与C_2的公共点都在C_3上，

∴$y=2x$为圆C_1与C_2的公共弦所在直线方程，

①－②得：$4x-2y+1-a^2=0$，即为C_3，

∴$1-a^2=0$，

∴$a=1$（$a>0$）．

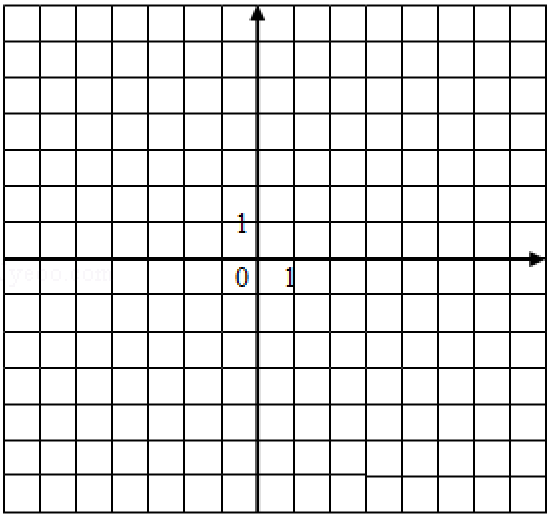
【点评】本题考查参数方程即简单曲线的极坐标方程，考查了极坐标与直角坐标的互化，训练了两圆公共弦所在直线方程的求法，是基础题．

[选修4-5：不等式选讲]

24．已知函数$f(x)=|x+1|-|2x-3|$．

（Ⅰ）在图中画出$y=f(x)$的图象；

（Ⅱ）求不等式|f（x）|>1的解集．



【考点】&2：带绝对值的函数；3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】35：转化思想；48：分析法；59：不等式的解法及应用．

【分析】（Ⅰ）运用分段函数的形式写出f（x）的解析式，由分段函数的画法，即可得到所求图象；

（Ⅱ）分别讨论当x≤﹣1时，当﹣1<x<$\frac{3}{2}$时，当x≥$\frac{3}{2}$时，解绝对值不等式，取交集，最后求并集即可得到所求解集．

【解答】解：（Ⅰ）f（x）=$\begin{cases}x-4, & x\leqslant -1\\ 3x-2, & -1<x<\frac{3}{2}\\ 4-x, & x\geqslant\frac{3}{2}\end{cases}$，

由分段函数的图象画法，可得f（x）的图象，如右：

（Ⅱ）由|f（x）|>1，可得

当x≤﹣1时，|x﹣4|>1，解得x>5或x<3，即有x≤﹣1；

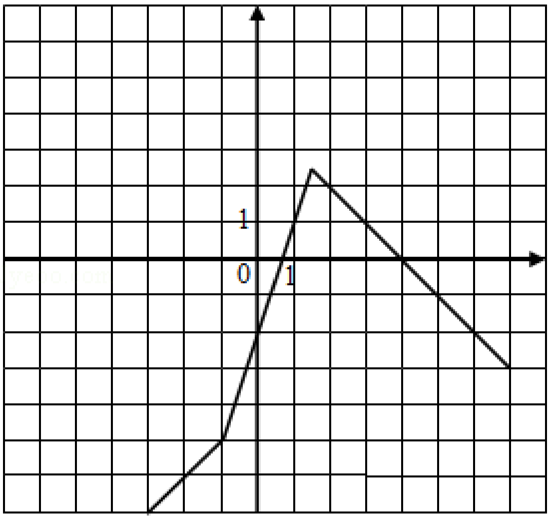
当﹣1<x<$\frac{3}{2}$时，|3x﹣2|>1，解得x>1或x<$\frac{1}{3}$，

即有﹣1<x<$\frac{1}{3}$或1<x<$\frac{3}{2}$；

当x≥$\frac{3}{2}$时，|4﹣x|>1，解得x>5或x<3，即有x>5或$\frac{3}{2}$≤x<3．

综上可得，x<$\frac{1}{3}$或1<x<3或x>5．

则$|f(x)|>1$的解集为$(-\infty,\frac{1}{3})\cup(1,3)\cup(5,+\infty)$.



【点评】本题考查绝对值函数的图象和不等式的解法，注意运用分段函数的图象的画法和分类讨论思想方法，考查运算能力，属于基础题.