

# 2013年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5分) 设集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{4, 5\}$ ,  $M=\{x|x=a+b, a\in A, b\in B\}$ , 则 $M$ 中元素的个数为 ( )  
A. 3      B. 4      C. 5      D. 6
2. (5分)  $(1+\sqrt{3}i)^3=$  ( )  
A. -8      B. 8      C. -8i      D. 8i
3. (5分) 已知向量 $\vec{n}_1=(\lambda+1, 1)$ ,  $\vec{n}_2=(\lambda+2, 2)$ , 若 $(\vec{n}_1+\vec{n}_2) \perp (\vec{n}_1-\vec{n}_2)$ , 则 $\lambda=$  ( )  
A. -4      B. -3      C. -2      D. -1
4. (5分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$ , 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 ( )  
A.  $(-1, 1)$       B.  $(-1, -\frac{1}{2})$       C.  $(-1, 0)$       D.  $(\frac{1}{2}, 1)$
5. (5分) 函数 $f(x)=\log_2(\frac{1}{x})$  ( $x>0$ ) 的反函数 $f^{-1}(x)=$  ( )  
A.  $\frac{1}{2^x-1}$  ( $x>0$ )      B.  $\frac{1}{2^x-1}$  ( $x\neq 0$ )      C.  $2^x-1$  ( $x\in R$ )  
D.  $2^x-1$  ( $x>0$ )
6. (5分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=0$ ,  $a_2=-\frac{4}{3}$ , 则 $\{a_n\}$ 的前10项和等于 ( )  
A.  $-6(1-3^{-10})$       B.  $\frac{1}{9}(1-3^{-10})$       C.  $3(1-3^{-10})$       D.  $3(1+3^{-10})$
7. (5分)  $(1+x)^3(1+y)^4$ 的展开式中 $x^2y^2$ 的系数是 ( )  
A. 5      B. 8      C. 12      D. 18
8. (5分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 $A_1, A_2$ , 点 $P$ 在 $C$ 上且直线 $PA_2$ 斜率的取值范围是 $[-2, -1]$ , 那么直线 $PA_1$ 斜率的取值范围是 ( )  
A.  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$       B.  $[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$       C.  $[\frac{1}{2}, 1]$       D.  $[\frac{3}{4}, 1]$

9. (5分) 若函数  $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x}$  在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  是增函数, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-1, 0]$       B.  $[-1, +\infty)$       C.  $[0, 3]$       D.  $[3, +\infty)$

10. (5分) 已知正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 2AB$ , 则  $CD$  与平面  $BDC_1$  所成角的正弦值等于 ( )

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       D.  $\frac{1}{3}$

11. (5分) 已知抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ , 点  $M(-2, 2)$ , 过点  $F$  且斜率为  $k$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点, 若  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ , 则  $k =$  ( )

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 2

12. (5分) 已知函数  $f(x) = \cos x \sin 2x$ , 下列结论中不正确的是 ( )

- A.  $y=f(x)$  的图象关于  $(\pi, 0)$  中心对称  
B.  $y=f(x)$  的图象关于  $x=\frac{\pi}{2}$  对称  
C.  $f(x)$  的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
D.  $f(x)$  既是奇函数, 又是周期函数

## 二、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分.

13. (5分) 已知  $\alpha$  是第三象限角,  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ , 则  $\cot \alpha =$  \_\_\_\_\_.

14. (5分) 6个人排成一行, 其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有 \_\_\_\_\_ 种. (用数字作答)

15. (5分) 记不等式组  $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+3y \geqslant 4 \\ 3x+y \leqslant 4 \end{cases}$  所表示的平面区域为  $D$ . 若直线  $y=a(x+1)$  与  $D$  有公共点, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

16. (5分) 已知圆  $O$  和圆  $K$  是球  $O$  的大圆和小圆, 其公共弦长等于球  $O$  的半径,  $OK = \frac{3}{2}$ , 且圆  $O$  与圆  $K$  所在的平面所成角为  $60^\circ$ , 则球  $O$  的表面积等于 \_\_\_\_\_.

## 三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知  $S_3 = a_2^2$ , 且  $S_1, S_2, S_4$  成等比数

列，求 $\{a_n\}$ 的通项式.

18. (12分) 设 $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的内角对边分别为a, b, c, 满足  $(a+b+c)(a-b+c)=ac$ .

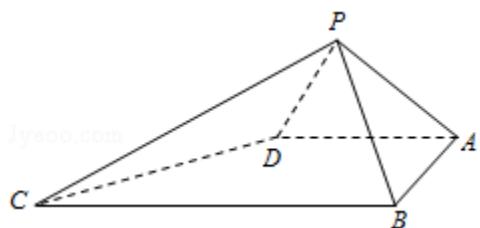
(I) 求B.

(II) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ , 求C.

19. (12分) 如图, 四棱锥P - ABCD中,  $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ,  $BC = 2AD$ ,  $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是等边三角形.

(I) 证明:  $PB \perp CD$ ;

(II) 求二面角A - PD - C的大小.



20. (12分) 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判, 设各局中双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$ , 各局比赛的结果都相互独立, 第1局甲当裁判.

(I) 求第4局甲当裁判的概率;

(II) X表示前4局中乙当裁判的次数, 求X的数学期望.

21. (12分) 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1$

,  $F_2$ , 离心率为3, 直线  $y=2$  与  $C$  的两个交点间的距离为  $\sqrt{6}$ .

(I) 求  $a, b$ ;

(II) 设过  $F_2$  的直线  $l$  与  $C$  的左、右两支分别相交于  $A, B$  两点, 且  $|AF_1| = |BF_1|$ ,

证明:  $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$  成等比数列.

22. (12分) 已知函数  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$ .

(I) 若  $x \geq 0$  时,  $f(x) \leq 0$ , 求  $\lambda$  的最小值;

(II) 设数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ , 证明:  $a_{2n} - a_n + \frac{1}{4n} > \ln 2$ .