

2014年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数 学（理科）

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分。

在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{x \in N \mid x \geq 2\}$ ，集合 $A = \{x \in N \mid x^2 \geq 5\}$ ，则 $C_U A = (\)$

A. \emptyset B. {2} C. {5} D. {2, 5}

2. 已知 i 是虚数单位， $a, b \in R$ ，则“ $a = b = 1$ ”是“ $(a + bi)^2 = 2i$ ”的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则此几何体的表面积是（ ）

A. 90 cm^2 B. 129 cm^2
C. 132 cm^2 D. 138 cm^2

4.

为了得到函数 $y = \sin 3x + \cos 3x$ 的图像，可以将函数 $y = \sqrt{2} \cos 3x$ 的图像（ ）

A. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位 B. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
C. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位 D. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

5. 在 $(1+x)^6(1+y)^4$ 的展开式中，记 $x^m y^n$ 项的系数 $f(m, n)$ ，则

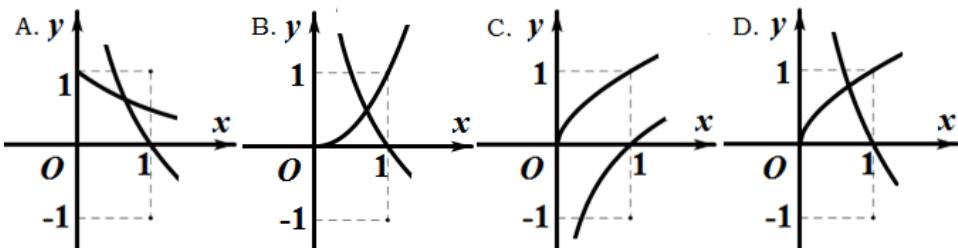
$f(3, 0) + f(2, 1) + f(1, 2) + f(0, 3) = (\)$

A. 45 B. 60 C. 120 D. 210

6. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，且 $0 < f(-1) = f(-2) = f(-3) \leq 3$ （ ）

A. $c \leq 3$ B. $3 < c \leq 6$ C. $6 < c \leq 9$ D. $c > 9$

7. 在同一直角坐标系中，函数 $f(x) = x^a (x \geq 0)$ ， $g(x) = \log_a x$ 的图像可能是（ ）



8. 记 $\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$ ， $\min\{x, y\} = \begin{cases} y, & x \geq y \\ x, & x < y \end{cases}$ ，设 \vec{a}, \vec{b} 为平面向量，则（ ）

A. $\min\{|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|\} \leq \min\{|\vec{a}|, |\vec{b}|\}$

B. $\min\{|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|\} \geq \min\{|\vec{a}|, |\vec{b}|\}$

C. $\max\{|\vec{a} + \vec{b}|^2, |\vec{a} - \vec{b}|^2\} \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

D. $\max\{|\vec{a} + \vec{b}|^2, |\vec{a} - \vec{b}|^2\} \geq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

9.

已知甲盒中仅有1个球且为红球，乙盒中有m个红球和n个篮球($m \geq 3, n \geq 3$)，从乙盒中随机抽取*i* ($i = 1, 2$) 个球放入甲盒中。

- (a) 放入*i* 个球后，甲盒中含有红球的个数记为 ξ_i ($i = 1, 2$)；
 (b) 放入*i* 个球后，从甲盒中取1个球是红球的概率记为 p_i ($i = 1, 2$)。

则 ()

- A. $p_1 > p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$ B. $p_1 < p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$
 C. $p_1 > p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$ D. $p_1 < p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$

10. 设函数 $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2(x - x^2)$, $f_3(x) = \frac{1}{3} |\sin 2\pi x|$, $a_i = \frac{i}{99}$,

$i = 0, 1, 2, \dots, 99$

，记 $I_k = |f_k(a_1) - f_k(a_0)| + |f_k(a_2) - f_k(a_1)| + \dots + |f_k(a_{99}) - f_k(a_{98})|$ ，
 $k = 1, 2, 3$ 则 ()

- A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_2 < I_1 < I_3$ C. $I_1 < I_3 < I_2$ D. $I_3 < I_2 < I_1$

二. 填空题：本大题共7小题，每小题4分，共28分。

11.

若某程序框图如图所示，当输入50时，则该程序运算后输出的结果是_____。

12. 随机变量 ξ 的取值为0,1,2, 若 $P(\xi = 0) = \frac{1}{5}$, $E(\xi) = 1$ ，则

$D(\xi) = \text{_____}$.

13. 当实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + 2y - 4 \leq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ 时， $1 \leq ax + y \leq 4$ 恒成立

， 则实数 a 的取值范围是_____。

14.

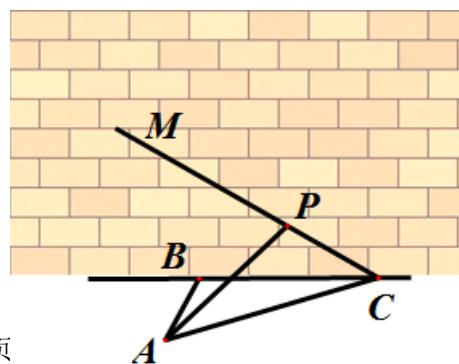
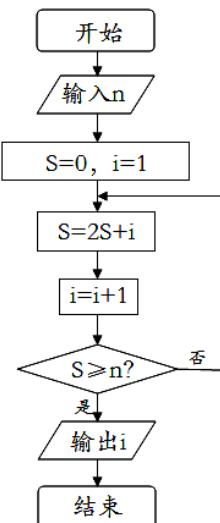
在8张奖券中有一、二、三等奖各1张，其余5张无奖。将这8张奖券分配给4个人，每人2张，不同的获奖情况有_____种（用数字作答）。

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 若 $f(f(a)) \leq 2$ ，则实数 a 的取值范围是_____

16. 设直线 $x - 3y + m = 0$ ($m \neq 0$) 与双曲线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 两条渐近线分别交于点A, B。若点 $P(m, 0)$ 满足 $|PA| = |PB|$ ，则该双曲线的离心率是_____。

17. 如图，某人在垂直于水平地面ABC的墙面前的点A处进行射击训练。已知点A到墙面的距离



为AB，某目标点P沿墙面上的射击线CM移动，此人为了准确瞄准目标点P，需计算由点A观察点P的仰角 θ 的大小.若 $AB = 15m$, $AC = 25m$, $\angle BCM = 30^\circ$, 则 $\tan \theta$ 的最大值是_____ (仰角 θ 为直线AP与平面ABC所成角)

三. 解答题：本大题共5小题，共72分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分14分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角A, B, C所对的边分别为a, b, c. 已知 $a \neq b, c = \sqrt{3}$
 $\cos^2 A - \cos^2 B = \sqrt{3} \sin A \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos B$

(I) 求角C的大小；

(II) 若 $\sin A = \frac{4}{5}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本题满分14分)

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = (\sqrt{2})^{b_n}$ ($n \in N^*$). 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1 = 2, b_3 = 6 + b_2$

(I) 求 a_n 与 b_n ；

(II) 设 $c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}$ ($n \in N^*$). 记数列 $\{c_n\}$ 的前n项和为 S_n ,

(i) 求 S_n ；

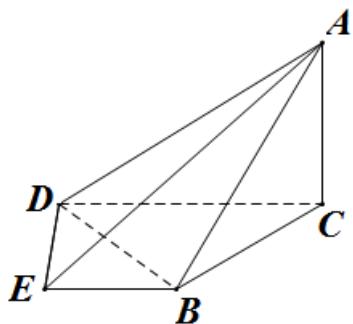
(ii) 求正整数k，使得对任意 $n \in N^*$ 均有 $S_k \geq S_n$.

20. (本题满分15分)

如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$, $\angle CDE = \angle BED = 90^\circ$, $AB = CD = 2, DE = BE = 1, AC = \sqrt{2}$.

(I) 证明： $DE \perp$ 平面 ACD ；

(II) 求二面角 $B-AD-E$ 的大小.

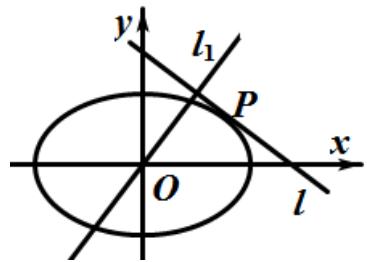


21(本题满分15分)

如图, 设椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 动直线 l 与椭圆C只有一个公共点P, 且点P在第一象限.

(I) 已知直线 l 的斜率为 k , 用 a, b, k 表示点P的坐标;

(II) 若过原点 O 的直线 l_1 与 l 垂直, 证明: 点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a - b$.



22. (本题满分14分)

已知函数 $f(x) = x^3 + 3|x - a| (a \in R)$.

(I) 若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值和最小值分别记为 $M(a), m(a)$, 求 $M(a) - m(a)$;

(II) 设 $b \in R$, 若 $[f(x) + b]^2 \leq 4$ 对 $x \in [-1, 1]$ 恒成立, 求 $3a + b$ 的取值范围.

2014年高考浙江理科数学试题参考答案

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分。

在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 【解析】 $A = \{x \in N \mid x^2 \geq 5\} = \{x \in N \mid x \geq \sqrt{5}\}$ ，

$$C_U A = \{x \in N \mid 2 \leq x < \sqrt{5}\} = \{2\}$$

【答案】B

2. 【解析】当 $a = b = 1$ 时， $(a + bi)^2 = (1 + i)^2 = 2i$ ，反之， $(a + bi)^2 = 2i$

即 $a^2 - b^2 + 2abi = 2i$ ，则 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

【答案】A

3. 【解析】由三视图可知直观图左边一个横放的三棱柱右侧一个长方体，故几何体的表面积为：

$$S = 2 \times 4 \times 6 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 6 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5 + 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 138.$$

【答案】D

4. 【解析】 $y = \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin[3(x + \frac{\pi}{12})]$

而 $y = \sqrt{2} \cos 3x = \sqrt{2} \sin(3x + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \sin[3(x + \frac{\pi}{6})]$

由 $3(x + \frac{\pi}{6}) \rightarrow 3(x + \frac{\pi}{12})$ ，即 $x \rightarrow x - \frac{\pi}{12}$

故只需将 $y = \sqrt{2} \cos 3x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位。故选C

【答案】C

5. 【解析】令 $x = y$ ，由题意知 $f(3,0) + f(2,1) + f(1,2) + f(0,3)$ 即为 $(1+x)^{10}$ 展开式中 x^3 的系数，故 $f(3,0) + f(2,1) + f(1,2) + f(0,3) = C_{10}^7 = 120$ ，故选C

【答案】C

6. 【解析】由 $f(-1) = f(-2) = f(-3)$ 得 $\begin{cases} -1 + a - b + c = -8 + 4a - 2b + c \\ -1 + a - b + c = -27 + 9a - 3b + c \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 11 \end{cases}$$
，所以 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + c$ ，由 $0 < f(-1) \leq 3$ 得 $0 < -1 + 6 - 11 + c \leq 3$

，即 $6 < c \leq 9$ ，故选C

【答案】C

7. 【解析】函数 $f(x) = x^a (x \geq 0)$ ， $g(x) = \log_a x$ 分别是幂函数与对数函数

答案A中没有幂函数的图像，不符合；答案B中， $f(x) = x^a (x \geq 0)$ 中 $a > 1$ ，

$g(x) = \log_a x$ 中 $0 < a < 1$ ，不符合；答案C中， $f(x) = x^a (x \geq 0)$ 中 $0 < a < 1$ ，

$g(x) = \log_a x$ 中 $a > 1$, 不符合; 答案D中, $f(x) = x^a (x \geq 0)$ 中 $0 < a < 1$,

$g(x) = \log_a x$ 中 $0 < a < 1$, 符合. 故选D

【答案】D

8. 【解析】由向量运算的平行四边形法可知 $\min\{|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|\}$ 与 $\min\{|\vec{a}|, |\vec{b}|\}$ 的大小不确定, 平行四边形法可知 $\max\{|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|\}$ 所对的角大于或等于 90°

, 由余弦定理知 $\max\{|\vec{a} + \vec{b}|^2, |\vec{a} - \vec{b}|^2\} \geq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$,
(或 $\max\{|\vec{a} + \vec{b}|^2, |\vec{a} - \vec{b}|^2\} \geq \frac{|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2} = \frac{2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)}{2} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$) .

【答案】D

9. 【解析1】 $p_1 = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} \times \frac{1}{2} = \frac{2m+n}{2(m+n)}$,

$$p_2 = \frac{C_n^2}{C_{m+n}^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{C_m^1 C_n^1}{C_{m+n}^2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{C_m^2}{C_{m+n}^2} = \frac{3m^2 - 3m + 2mn + n^2 - n}{3(m+n)(m+n-1)}$$

$$\therefore p_1 - p_2 = \frac{2m+n}{2(m+n)} - \frac{3m^2 - 3m + 2mn + n^2 - n}{3(m+n)(m+n-1)} = \frac{5mn + n(n-1)}{6(m+n)(m+n-1)} > 0$$

故 $p_1 > p_2$

又 $\because P(\xi_1 = 1) = \frac{n}{m+n}$, $P(\xi_1 = 2) = \frac{m}{m+n}$

$$\therefore E(\xi_1) = 1 \times \frac{n}{m+n} + 2 \times \frac{m}{m+n} = \frac{2m+n}{m+n}$$

又 $P(\xi_2 = 1) = \frac{C_n^2}{C_{m+n}^2} = \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$

$$P(\xi_2 = 2) = \frac{C_n^1 C_m^1}{C_{m+n}^2} = \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}$$

$$P(\xi_2 = 3) = \frac{C_m^2}{C_{m+n}^2} = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(\xi_2) &= 1 \times \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} + 2 \times \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)} + 3 \times \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)} \\ &= \frac{3m^2 + n^2 - 3m - n + 4mn}{(m+n)(m+n-1)} \end{aligned}$$

$$E(\xi_2) - E(\xi_1) = \frac{3m^2 + n^2 - 3m - n + 4mn}{(m+n)(m+n-1)} - \frac{2m+n}{m+n} = \frac{m(m-1) + mn}{(m+n)(m+n-1)} > 0$$

所以 $E(\xi_2) > E(\xi_1)$, 故选A

【答案】A

【解析2】: 在解法1中取 $m = n = 3$, 计算后再比较。

10. 【解析】由 $\left| \left(\frac{i}{99} \right)^2 - \left(\frac{i-1}{99} \right)^2 \right| = \frac{1}{99} \cdot \frac{2i-1}{99}$,

$$\text{故 } I_1 = \frac{1}{99} \left(\frac{1}{99} + \frac{3}{99} + \frac{5}{99} + \cdots + \frac{2 \times 99 - 1}{99} \right) = \frac{1}{99} \cdot \frac{99^2}{99} = 1$$

$$\text{由 } 2 \left| \frac{i}{99} - \frac{i-1}{99} - \left(\frac{i}{99} \right)^2 + \left(\frac{i-1}{99} \right)^2 \right| = 2 \times \frac{1}{99} \left| \frac{99 - (2i-1)}{99} \right|$$

$$\text{故 } I_2 = 2 \times \frac{1}{99} \times 2 \times \frac{50(98+0)}{2 \times 99} = \frac{98}{99} \cdot \frac{100}{99} < 1$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \left(\left| \sin(2\pi \cdot \frac{1}{99}) \right| - \left| \sin(2\pi \cdot \frac{0}{99}) \right| + \left| \sin(2\pi \cdot \frac{2}{99}) \right| - \left| \sin(2\pi \cdot \frac{1}{99}) \right| + \cdots + \left| \sin(2\pi \cdot \frac{99}{99}) \right| - \left| \sin(2\pi \cdot \frac{98}{99}) \right| \right)$$

$$= \frac{1}{3} [2 \sin(2\pi \cdot \frac{25}{99}) - 2 \sin(2\pi \cdot \frac{74}{99})] > 1$$

故 $I_2 < I_1 < I_3$ ， 故选B

【答案】B

【解析2】估算法： I_k 的几何意义为将区间 $[0,1]$

等分为99个小区间，每个小区间的端点的函数值之差的绝对值之和.如图为将函数

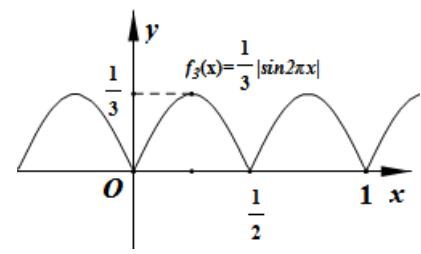
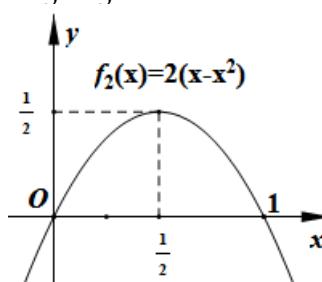
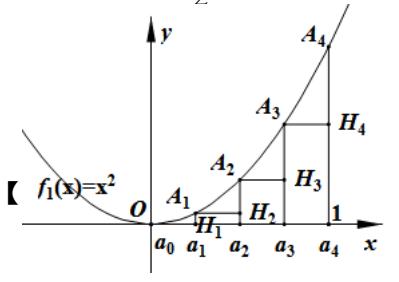
$f_1(x) = x^2$ 的区间 $[0,1]$ 等分为4个小区间的情形，因 $f_1(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，此时

$$I_1 = |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + |f(a_3) - f(a_2)| + |f(a_4) - f(a_3)|$$

$$= A_1 H_1 + A_2 H_2 + A_3 H_3 + A_4 H_4 = f(1) - f(0) = 1, \text{ 同理对题中给出的 } I_1 \text{ 同样有 } I_1 = 1$$

；

而 I_2 略小于 $2 \times \frac{1}{2} = 1$ ， I_3 略小于 $4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ， 所以估算得 $I_2 < I_1 < I_3$



三. 填空题：本大题共7小题，每小题4分，共28分.

11. 【解析】第一次运行结果 $S = 1, i = 2$

第二次运行结果 $S = 4, i = 3$

第三次运行结果 $S = 11, i = 4$

第四次运行结果 $S = 26, i = 5$

第五次运行结果 $S = 57, i = 6$

此时 $S = 57 > 50$ ， \therefore 输出 $i = 6$ ， 【答案】6

12. 【解析】设 $\xi = 1$ 时的概率为 p ， ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	p	$1-p-\frac{1}{5}$

$$\text{由 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times p + 2 \times \left(1 - p - \frac{1}{5}\right) = 1, \text{ 解得 } p = \frac{3}{5}$$

ξ 的分布列为即为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

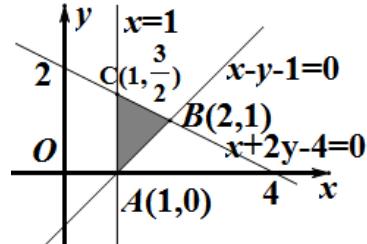
故

$$E(\xi) = (0-1)^2 \times \frac{1}{5} + (1-1)^2 \times \frac{3}{5} + (2-1)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5} . \quad \text{【答案】} \frac{2}{5}$$

13. 【解析】作出不等式组 $\begin{cases} x+2y-4 \leq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ 所表示的

区域如图，由 $1 \leq ax + y \leq 4$ 恒成立，故

$$A(1,0), B(2,1), C\left(1,\frac{3}{2}\right) \quad \text{三点坐标代入}$$



$$1 \leq ax + y \leq 4, \text{ 均成立得} \begin{cases} 1 \leq a \leq 4 \\ 1 \leq 2a + 1 \leq 4 \\ 1 \leq a + \frac{3}{2} \leq 4 \end{cases} \quad \text{解得 } 1 \leq a \leq \frac{3}{2} \quad , \therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是}$$

$$\left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \text{【答案】} \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

【解析2】作出不等式组 $\begin{cases} x+2y-4 \leq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ 所表示的区域如图，由 $1 \leq ax + y \leq 4$ 得，由

图分析可知， $a \geq 0$ 且在 $A(1,0)$ 点取得最小值，在 $B(2,1)$ 取得最大值，故 $\begin{cases} a \geq 1 \\ 2a + 1 \leq 4 \end{cases}$

$$\text{得 } 1 \leq a \leq \frac{3}{2}, \text{ 故实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \text{【答案】} \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

14. 【解析1】不同的获奖分两种，一是有一人获两张奖券，一人获一张奖券，共有

$$C_3^2 A_4^2 = 36$$

二是有三人各获得一张奖券，共有 $A_4^3 = 24$ ，因此不同的获奖情况共有 $36 + 24 = 60$ 种

【解析2】将一、二、三等奖各1张分给4个人有 $4^3 = 64$ 种分法，其中三张奖券都分给一个人的有4种分法，因此不同的获奖情况共有 $64 - 4 = 60$ 种.

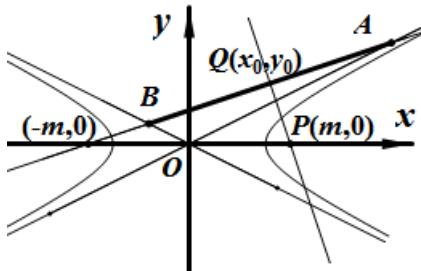
【答案】60

15. 【解析】由题意 $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f^2(a) + f(a) \leq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(a) \geq 0 \\ -f^2(a) \leq 2 \end{cases}$ ，解得 $f(a) \geq -2$

$$\therefore \text{当} \begin{cases} a < 0 \\ a^2 + a \geq -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \geq 0 \\ -a^2 \geq -2 \end{cases} \text{ 解得 } a \leq \sqrt{2}$$

【答案】 $(-\infty, \sqrt{2}]$

16. 【解析1】由双曲线的方程可知，它的渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ 和 $y = -\frac{b}{a}x$ ，分别与直线 l ： $x - 3y + m = 0$ 联立方程组，解得， $A(\frac{-am}{a-3b}, \frac{-bm}{a-3b})$, $B(\frac{-am}{a+3b}, \frac{bm}{a+3b})$ ，设AB中点为 Q ，由 $|PA| = |PB|$ 得，则



$$Q\left(\frac{\frac{-am}{a-3b} + \frac{-am}{a+3b}}{2}, \frac{\frac{-bm}{a-3b} + \frac{bm}{a+3b}}{2}\right)$$

$$\text{即 } Q\left(-\frac{a^2m}{a^2-9b^2}, -\frac{3b^2m}{a^2-9b^2}\right)$$

PQ与已知直线垂直，

$$\therefore k_{PQ} \cdot k_l = -1 \quad , \text{ 即 } \frac{-\frac{3b^2m}{a^2-9b^2}}{-\frac{a^2m}{a^2-9b^2}-m} \cdot \frac{1}{3} = -1 \quad \text{即得}$$

$$2a^2 = 8b^2 \quad , \text{ 即 } 2a^2 = 8(c^2 - a^2) \quad , \text{ 即 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{4} \quad , \text{ 所以 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

【解析2】不妨设 $a = 1$ ，渐近线方程为 $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 即 $b^2x^2 - y^2 = 0$

$$\text{由 } \begin{cases} b^2x^2 - y^2 = 0 \\ x - 3y + m = 0 \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得 } (9b^2 - 1)y^2 - 6b^2my + b^2m = 0$$

设AB中点为 $Q(x_0, y_0)$ ，由韦达定理得： $y_0 = \frac{3b^2m}{9b^2 - 1}$ ①

又 $x_0 = 3y_0 - m$ ，由 $k_{PQ} \cdot k_l = -1$ 得 $\frac{y_0}{x_0 - m} \cdot \frac{1}{3} = -1$ 即得 $\frac{y_0}{3y_0 - 2m} \cdot \frac{1}{3} = -1$ 得

$$y_0 = \frac{3}{5}m \text{ 代入①得 } \frac{3b^2m}{9b^2 - 1} = \frac{3}{5}m$$

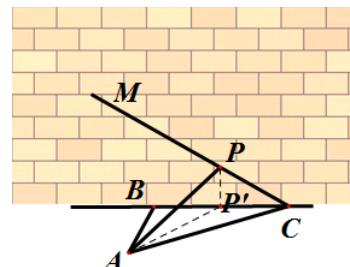
得 $b^2 = \frac{1}{4}$ ，所以 $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ ，所以 $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，得 $e = \frac{c}{a} = c = \frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

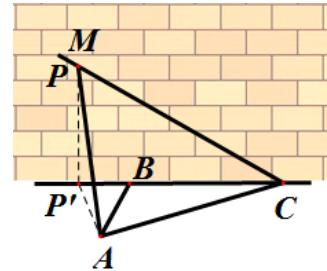
17. 【解析1】： $\because AB=15\text{cm}$, $AC=25\text{cm}$, $\angle ABC=90^\circ$,
 $\therefore BC=20\text{cm}$,

过P作 $PP' \perp BC$, 交BC于 P' ,

1°当P在线段BC上时, 连接AP', 则 $\tan \theta = \frac{PP'}{AP'}$



设 $BP'=x$, 则 $CP'=20-x$, ($0 \leq x < 20$)



$$\text{由 } \angle BCM = 30^\circ, \text{ 得 } PP' = CP' \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(20 - x)$$

在直角 $\triangle ABP'$ 中, $AP' = \sqrt{225 + x^2}$

$$\therefore \tan \theta = \frac{PP'}{AP'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{20 - x}{\sqrt{225 + x^2}}$$

令 $y = \frac{20 - x}{\sqrt{225 + x^2}}$, 则函数在 $x \in [0, 20]$ 单调递减,

$$\therefore x=0 \text{ 时, } \tan \theta \text{ 取得最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{20 - 0}{\sqrt{225 + 0^2}} = \frac{20\sqrt{3}}{45} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

2° 当 P 在线段 CB 的延长线上时, 连接 AP' , 则 $\tan \theta = \frac{PP'}{AP'}$

设 $BP'=x$, 则 $CP'=20+x$, ($x > 0$)

$$\text{由 } \angle BCM = 30^\circ, \text{ 得 } PP' = CP' \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(20 + x)$$

在直角 $\triangle ABP'$ 中, $AP' = \sqrt{225 + x^2}$

$$\therefore \tan \theta = \frac{PP'}{AP'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{20 + x}{\sqrt{225 + x^2}},$$

令 $y = \frac{20 + x}{\sqrt{225 + x^2}}$, 则 $y' = \frac{225 - 20x}{(225 + x^2)\sqrt{225 + x^2}}$,

所以, 当 $0 < x < \frac{225}{20} = \frac{45}{4}$ 时 $y' > 0$; 当 $x > \frac{45}{4}$ 时 $y' < 0$

$$\text{所以当 } x = \frac{45}{4} \text{ 时 } y_{\max} = \frac{20 + \frac{45}{4}}{\sqrt{225 + (\frac{45}{4})^2}} = \frac{5}{3}$$

此时 $x = \frac{45}{4}$ 时, $\tan \theta$ 取得最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

综合 1°, 2° 可知 $\tan \theta$ 取得最大值为 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

【解析2】：如图以B为原点，BA、BC所在的直线分别为x,y轴，建立如图所示的空间直角坐标系， $\because AB=15\text{cm}$, $AC=25\text{cm}$, $\angle ABC=90^\circ$,

$\therefore BC=20\text{cm}$, 由 $\angle BCM=30^\circ$, 可设 $P(0, x, \frac{\sqrt{3}}{3}(20-x))$

(其中 $x \leq 20$), $P'(0, x, 0)$, $A(15, 0, 0)$, 所以

$$\tan \theta = \frac{PP'}{AP'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(20-x)}{\sqrt{15^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{20-x}{\sqrt{225+x^2}}$$

$$\text{设 } f(x) = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{20-x}{\sqrt{225+x^2}} (x \leq 20), \quad f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{225+20x}{(225+x^2)\sqrt{225+x^2}}$$

所以, 当 $x < -\frac{225}{20} = -\frac{45}{4}$ 时 $y' > 0$; 当 $-\frac{45}{4} < x \leq 20$ 时 $y' < 0$

$$\text{所以当 } x = -\frac{45}{4} \text{ 时 } f(x)_{\max} = f(-\frac{45}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{20 + \frac{45}{4}}{\sqrt{225 + (\frac{45}{4})^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

所以 $\tan \theta$ 取得最大值为 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

【解析3】：分析知, 当 $\tan \theta$

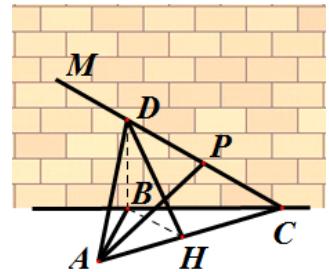
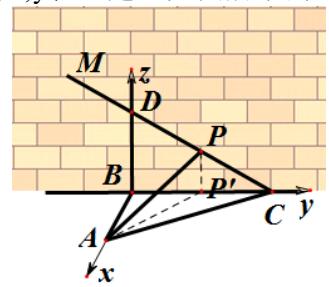
取得最大时, 即 θ 最大, 最大值即为平面ACM与地面ABC所成的锐二面角的度量值,

如图, 过B在面BCM内作BD $\perp BC$ 交CM于D, 过B作BH $\perp AC$ 于H, 连DH, 则 $\angle BHD$ 即为平面ACM与地面ABC所成的二面角的平面角, $\tan \theta$ 的最大值即为 $\tan \angle BHD$, 在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$$\text{由等面积法可得 } BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12,$$

$$DB = BC \cdot \tan 30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{所以 } (\tan \theta)_{\max} = \tan \angle BHD = \frac{DB}{BH} = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{12} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$



三. 解答题：本大题共5小题，共72分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. 【解析】：(I) 由题得 $\frac{1+\cos 2A}{2} - \frac{1+\cos 2B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2A - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B$,

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2A - \frac{1}{2} \cos 2A = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B - \frac{1}{2} \cos 2B$$

$$\sin(2A - \frac{\pi}{6}) = \sin(2B - \frac{\pi}{6})$$

由 $a \neq b$ 得 $A \neq B$ ，又 $A + B \in (0, \pi)$ ，得 $2A - \frac{\pi}{6} + 2B - \frac{\pi}{6} = \pi$

即 $A + B = \frac{2\pi}{3}$ ，所以 $C = \frac{\pi}{3}$

$$(II) \quad c = \sqrt{3}, \quad \sin A = \frac{4}{5}, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad \text{得 } a = \frac{8}{5}$$

由 $a < c$ 得 $A < C$ ，从而 $\cos A = \frac{3}{5}$ 故 $\sin B = \sin(A + C) =$

$$\sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$$

所以， $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{8\sqrt{3} + 18}{25}$

19. 【解析】：(I) $\because a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = (\sqrt{2})^{b_n}$ ($n \in N^*$) ①，

当 $n \geq 2$ ， $n \in N^*$ 时， $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} = (\sqrt{2})^{b_{n-1}}$ ②，

由 ① ÷ ② 知：当 $n \geq 2$ 时， $a_n = (\sqrt{2})^{b_n - b_{n-1}}$ ，令 $n=3$ ，则有 $a_3 = (\sqrt{2})^{b_3 - b_2}$

$$\therefore b_3 = b_2 + b_1, \quad \therefore a_3 = 8.$$

$\because \{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1=2$ ， $\therefore \{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $q^2 = \frac{a_3}{a_2} = 4$

由题意知 $a_n > 0$ ， $\therefore q > 0$ ， $\therefore q=2$.

$$\therefore a_n = 2^n \quad (n \in N^*) .$$

又由 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = (\sqrt{2})^{b_n}$ ($n \in N^*$)，得： $2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^n = (\sqrt{2})^{b_n}$

$$\text{即 } 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = (\sqrt{2})^{b_n}$$

$$\therefore b_n = n(n+1) \quad (n \in N^*) .$$

$$(II) \quad (i) \quad \because c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore S_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2^n} - 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2^n}$$

(ii) 因为 $c_1=0$ ， $c_2>0$ ， $c_3>0$ ， $c_4>0$ ；

$$\text{当 } n \geq 5 \text{ 时，} \quad c_n = \frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{n(n+1)}{2^n} - 1 \right]$$

$$\text{而 } \frac{n(n+1)}{2^n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)(n-2)}{2^{n+1}} > 0, \quad \text{得 } \frac{n(n+1)}{2^n} \leq \frac{5 \cdot (5+1)}{2^5} < 1$$

所以，当 $n \geq 5$ 时， $c_n < 0$ ，

综上，对任意 $n \in N^*$ 恒有 $S_4 \geq S_n$ ，故 $k=4$.

20. 证明：(I) 在直角梯形BCDE中，由 $DE=BE=1$ ， $CD=2$ ，得 $BD=BC=\sqrt{2}$ ，

由 $AC=\sqrt{2}$ ， $AB=2$ 得 $AB^2=AC^2+BC^2$ ，即 $AC\perp BC$ ，又平面ABC \perp 平面BCDE，

从而 $AC\perp$ 平面BCDE，

所以 $AC\perp DE$ ，又 $DE\perp DC$ ，从而 $DE\perp$ 平面ACD；

(II) 【方法1】

作 $BF\perp AD$ ，与AD交于点F，过点F作 $FG\parallel DE$ ，

与AB交于点G，连接BG，由(I)知 $DE\perp AD$ ，则 $FG\perp AD$ ，所以 $\angle BFG$ 就是二面角B-AD-E的平面角，在直角梯形BCDE中，由 $CD^2=BC^2+BD^2$ ，得 $BD\perp BC$ ，

又平面ABC \perp 平面BCDE，得 $BD\perp$ 平面ABC，从而

$BD\perp AB$ ，由于 $AC\perp$ 平面BCDE，得

$AC\perp CD$ 。

在Rt $\triangle ACD$ 中，由 $DC=2$ ， $AC=\sqrt{2}$ ，得 $AD=\sqrt{6}$ ；

在Rt $\triangle AED$ 中，由 $ED=1$ ， $AD=\sqrt{6}$ 得 $AE=\sqrt{7}$ ；

在Rt $\triangle ABD$ 中，由 $BD=\sqrt{2}$ ， $AB=2$ ， $AD=\sqrt{6}$

得 $BF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $AF=\frac{2}{3}AD$ ，从而 $GF=\frac{2}{3}$ ，

在 $\triangle ABE$ ， $\triangle ABG$ 中，利用余弦定理分别可得 $\cos \angle BAE = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ ， $BC = \frac{2}{3}$ 。

在 $\triangle BFG$ 中， $\cos \angle BFG = \frac{GF^2 + BF^2 - BG^2}{2BF \cdot GF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以， $\angle BFG = \frac{\pi}{6}$ ，即二面角B-AD-E的大小为 $\frac{\pi}{6}$ 。

【方法2】以D的原点，分别以射线DE，DC为x,y轴的正半轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$ ，如图所示。

由题意知各点坐标如下： $D(0,0,0)$ ， $E(1,0,0)$ ， $C(0,2,0)$ ， $A(0,2,\sqrt{2})$ ， $B(1,1,0)$ 。

设平面ADE的法向量为 $\vec{m}=(x_1, y_1, z_1)$

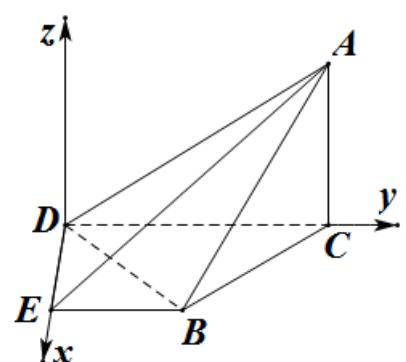
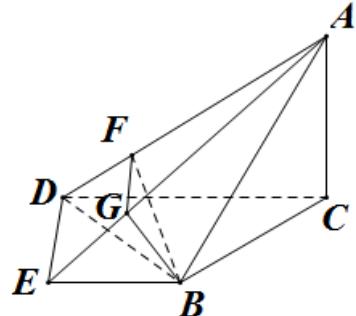
平面ABD的法向量为 $\vec{n}=(x_2, y_2, z_2)$ ，可算得：

$$\overrightarrow{AD}=(0,-2,-\sqrt{2}) \quad , \quad \overrightarrow{AE}=(1,-2,-\sqrt{2}) \quad ,$$

$$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0 \\ x_1 - 2y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0 \end{cases} \text{, 可取}$$

$$\vec{m}=(0,1,-\sqrt{2})$$



$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases} \text{可取} \vec{n} = (0, -1, \sqrt{2})$$

$$\text{于是} |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

由题意可知，所求二面角是锐角，故二面角B-AD-E的大小为 $\frac{\pi}{6}$

21. 【解析】：(I) 【方法1】设直线l的方程为 $y = kx + m (k < 0)$ ，由

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \text{，消去} y \text{得}$$

$$(b^2 + a^2 k^2)x^2 + 2a^2 k m x + a^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$$

由于直线l与椭圆C只有一个公共点P，故 $\Delta = 0$ ，即 $b^2 - m^2 + a^2 k^2 = 0$ ，解得点P的坐标为

$$P\left(-\frac{a^2 k m}{b^2 + a^2 k^2}, \frac{b^2 m}{b^2 + a^2 k^2}\right)$$

又点P在第一象限，故点P的坐标为 $P\left(-\frac{a^2 k}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}}\right)$

【方法2】作变换 $\begin{cases} \frac{x}{a} = x' \\ \frac{y}{b} = y' \end{cases}$ ，则椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 变为圆 C' :

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

切点 $P(x_0, y_0)$ 变为点 $P'(x'_0, y'_0)$ ，切线 $l: y - y_0 = k(x - x_0) (k < 0)$ 变为 $l': by' - y_0 = k(ax' - x_0)$ 。

在圆 C' 中设直线 $O'P'$ 的方程为 $y' = mx' (m > 0)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} y' = mx' \\ x'^2 + y'^2 = 1 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x'_0 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \\ y'_0 = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$$

即 $P'\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ ，由于 $O'P' \perp l'$ ，

所以 $k_{O'P'} \cdot k_{l'} = -1$ ，得 $m \cdot \frac{ak}{b} = -1$ ，

$$\text{即 } m = -\frac{b}{ak}$$

$$\text{代入得 } P' \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{(ak)^2}}}, \frac{-\frac{b}{ak}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{(ak)^2}}} \right)$$

$$\text{即 } P' \left(-\frac{ak}{\sqrt{a^2 k^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 k^2 + b^2}} \right),$$

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{a} \\ y' = \frac{y}{b} \end{cases} \text{ 代入即得:}$$

$$P \left(-\frac{a^2 k}{\sqrt{a^2 k^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 k^2 + b^2}} \right)$$

(II) 由于直线 l_1 过原点 O 且与直线 l 垂直, 故直线 l_1 的方程为 $x+ky=0$, 所以点 P 到直线 l_1 的距离

$$d = \frac{\left| -\frac{a^2 k}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}} + \frac{b^2 k}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}} \right|}{\sqrt{1+k^2}} \text{ 整理得: } d = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 + a^2 k^2 + \frac{b^2}{k^2}}}$$

$$\text{因为 } a^2 k^2 + \frac{b^2}{k^2} \geq 2ab, \text{ 所以 } d = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 + a^2 k^2 + \frac{b^2}{k^2}}} \leq \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} = a - b$$

当且仅当 $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ 时等号成立.

所以, 点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a - b$.

$$23. \text{【解析】: (I) } \because f(x) = x^3 + 3|x-a| = \begin{cases} x^3 + 3x - 3a, & x \geq a \\ x^3 - 3x + 3a, & x < a \end{cases},$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3, & x \geq a \\ 3x^2 - 3, & x < a \end{cases}, \text{ 由于 } -1 \leq x \leq 1$$

(i) 当 $a \leq -1$ 时, 有 $x \geq a$, 故

$$f(x) = x^3 + 3x - 3a$$

此时, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数, 因此 $M(a) = f(1) = 4 - 3a$

$$m(a) = f(-1) = -4 - 3a,$$

$$\text{故 } M(a) - m(a) = (4 - 3a) - (-4 - 3a) = 8$$

(ii) 当 $-1 < a < 1$ 时, 若 $x \in (a, 1)$, $f(x) = x^3 + 3x - 3a$, 在 $(a, 1)$ 上是增函数; 若 $x \in (-1, a)$, $f(x) = x^3 - 3x - 3a$, 在 $(-1, a)$ 上是减函数,

$$\therefore M(a) = \max\{f(1), f(-1)\}, m(a) = f(a) = a^3$$

由于 $f(1) - f(-1) = -6a + 2$ ，因此

当 $-1 < a \leq \frac{1}{3}$ 时， $M(a) - m(a) = -a^3 - 3a + 4$ ；

当 $\frac{1}{3} < a < 1$ 时， $M(a) - m(a) = -a^3 + 3a + 2$ ；

(iii) 当 $a \geq 1$ 时，有 $x \leq a$ ，故 $f(x) = x^3 - 3x + 3a$ ，

此时 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是减函数，

因此 $M(a) = f(-1) = 2 + 3a$ ， $m(a) = f(1) = -2 + 3a$ ，

故 $M(a) - m(a) = 4$ ；

综上，

$$M(a) - m(a) = \begin{cases} 8, & a \leq -1 \\ -a^3 - 3a + 4, & -1 < a \leq \frac{1}{3} \\ -a^3 + 3a + 2, & \frac{1}{3} < a < 1 \\ 4, & a \geq 1 \end{cases}$$

(II) 令 $h(x) = f(x) + b$ ，则 $h(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 3a + b, & x \geq a \\ x^3 - 3x + 3a + b, & x < a \end{cases}$

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3, & x \geq a \\ 3x^2 - 3, & x < a \end{cases}$$

因为 $[f(x) + b]^2 \leq 4$ 对 $x \in [-1, 1]$ 恒成立，

即 $-2 \leq h(x) \leq 2$ 对 $x \in [-1, 1]$ 恒成立，

所以由 (I) 知，

(i) 当 $a \leq -1$ 时， $h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数， $h(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 $h(1) = 4 - 3a + b$ ，最小值 $h(-1) = -4 - 3a + b$ ，则 $-4 - 3a + b \geq -2$ 且 $4 - 3a + b \leq 2$ 矛盾；

(ii) 当 $-1 < a \leq \frac{1}{3}$ 时， $h(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $h(a) = a^3 + b$ ，最大值是 $h(1) = 4 - 3a + b$ ，所以 $a^3 + b \geq -2$ 且 $4 - 3a + b \leq 2$ ，从而

$$-2 - a^3 + 3a \leq 3a + b \leq 6a - 2 \text{ 且 } 0 \leq a \leq \frac{1}{3}$$

令 $t(a) = -2 - a^3 + 3a$ ，则 $t'(a) = 3 - 3a^2 > 0$ ， $\therefore t(a)$ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 上是增函数，

故 $t(a) > t(0) = -2$ ，

因此 $-2 - 3a + b \leq 0$

(iii) 当 $\frac{1}{3} < a < 1$ 时， $h(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $h(a) = a^3 + b$ ，最大值是

$h(-1) = 3a + b + 2$, 所以由 $a^3 + b \geq -2$ 且 $3a + b + 2 \leq 2$, 解得 $-\frac{28}{27} < 3a + b \leq 0$

(iv) 当 $a \geq 1$ 时, $h(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 $h(-1) = 3a + b + 2$, 最小值是 $h(1) = 3a + b - 2$,

所以由 $3a + b - 2 \geq -2$ 且 $3a + b + 2 \leq 2$, 解得 $3a + b = 0$.

综上, $3a + b$ 的取值范围是 $-2 \leq 3a + b \leq 0$.