2013年高考陕西数学（文）卷解析（精编版）

【学科网试卷点评】

2013年高考文科数学陕西卷与往年试卷结构相同、题型题量分值都没发生变化，考查内容控制在新课程标准和考试大纲规定的范围内，试卷内容覆盖面广，涵盖了高中数学的主要内容，就考查知识而言，主干知识地位突出，重点内容仍重点考查。在命题形式上依旧遵循以往框架，在命题内容上强调重点，兼顾全面，略有改换，而命题顺序有所调整，试题难度整体稳定，命题风格体现了新课标"侧重能力考查，鼓励探索创新"的特点。能很好地检验学生的基础知识、数学技能和综合运用能力。6个主观题类型稳定，题序依次回归为：三角函数、数列、立体几何、概率统计、解析几何、函数与导数。

考点和知识点分值统计：

知识点及分值	涉及考题
解析几何：33分	8,11,15-B,15-C,20
函数与导数：29分	3,10,14,21
概率与统计：17分	5,19
数列：12分	17
三角函数、解三角形与平面向量：22分	2,9,16
立体几何：17分	7,12,15A,18
不等式：10分	7,15A
集合与复数、推理、及简易逻辑：15分	1,6,13
程序框图：5分	4

试卷特点主要有以下几点：

第一，体现高考命题来源于教材的主导思想，如第17题的第一问推导等差数列的前n项和计算公式就是完全来自课本，体现基本思维过程的题目，注重知识过程的学生很容易上手。 本题意在指引考生高考数学复习必须回归课本，回归基本知识的生成过程和基本思维活动经验，摒弃死抱住复习资料不放，盲目搞题海战术。

第二，试题布局思维梯度明显，使数学对文科生来说更平易近人，且具有较高的信度，效度，同时必要的区分度和适当的难度也是恰到好处．全卷绝大部分题都是在考察考生对中学的基础知识、基本技能的掌握程度．但同时也考查了考生对数学思想方法和数学本质的理解水平，考察了考生进入高等学校继续学习的潜能。

第三．注重考察学生如何运用数学思维方法、如何理解知识点的原理解决看似”新”的问题．重点考察考生创新意识。第 10 题的取整问题命题背景为高斯函数，本题涉及函数与导数，为压轴题。本题第一问涉及了求导与指数函数的反函数。属于导函数的基本应用，体现了压轴题的低切入点特征。本题第二问考查曲线与曲线的公共点个数，到了第二问，考查难度平稳提升。第三问比较大小可采用作差构造，再求导，并综合考察基本不等式的应用。第三问考查细致入微，需要思考分析。具有一定的区分度。本题命题常规，难度大。

第四．试题体现来源于实践，应用于生活的理念。如第 14 题是在锐角三角形中建一个面积最大内接矩形花园问题，第 17 题的概率题都是符合考试大纲中“解决相关生产、生活中简单的数学问题”的理念．

第五、图表的观察分析能力得到较好考查，体现了新课程的特点，也是当前信息时代信息处理的需要。统计图，三视图、立体直观图的凸显，增强了试卷的视觉效应，对甄别学生的数学潜能具有良好的作用。

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1．设全集为 R，函数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ 的定义域为 M，则 $C_{\mathbf{R}}M$ 为

(A)（$-\infty$, 1）　　(B)（1, $+\infty$）　　(C) $(-\infty,1]$　　(D) $[1,+\infty)$

【答案】B

【解析】$\because M=\{x|1-x\geq 0\}=\{x|x\leq 1\}\therefore C_{\mathbf{R}}M=\{x|x>1\}$ 故选择 B.

【学科网考点定位】本题主要考察函数定义域，补集知识，属于容易题。

2．已知向量 $\vec{a}=(1,m),\vec{b}=(m,2)$，若 a//b，则实数 m 等于

(A) $-\sqrt{2}$　　　　　　(B) $\sqrt{2}$

(C) $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$　　　　(D) 0

【答案】C

【解析】由 $\bar{a}=(1,m),\bar{b}=(m,2),\bar{a}//\bar{b}\Leftrightarrow 1\times 2=m^2$, 故 $m=\pm\sqrt{2}$, 选择 C。

【学科网考点定位】本题主要考查向量共线定理的基本运用，属于容易题。

3. 设 a, b, c 均为不等于 1 的正实数，则下列等式中恒成立的是

(A) $\log_a b\cdot\log_c b=\log_c a$　　　　(B) $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$

(C) $\log_a(bc)=\log_a b\cdot\log_a c$　　　　(D) $\log_a(b+c)=\log_a b+\log_a c$

【答案】B

【解析】结合对数运算基本性质，由 $\log_c a=\dots$ 可知B，显然恒成立。故选择B。

【学科网考点定位】本题主要考察对数运算基本性质，属于容易题。

4. 根据下列算法语句，当输入 x 为 60 时，输出 y 的值为

(A) 25

(B) 30

(C) 31

(D) 61

```
输入 x
If x≤50 Then
    y=0.5 * x
Else
    y=25+0.6*(x-50)
End If
输出 y
```

【答案】C

【解析】: $\because x=60,\therefore y=25+0.6\times(60-50)=31$, 故选择 C。

【学科网考点定位】本题考查算法程序，重点突出对条件语句的考查. 是容易题。

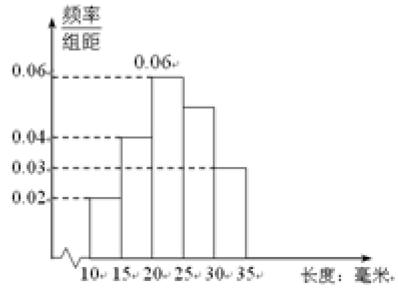
5. 对一批产品的长度(单位: mm)进行抽样检测，下图为检测结果的频率分布直方图. 根据标准，产品长度在区间[20,25)上的为一等品，在区间[15,20)和区间[25,30)上的为二等品，在区间[10,15)和[30,35)上的为三等品. 用频率估计概率，现从该批产品中随机抽取一件，则其为二等品的概率为

(A) 0.09　　　(B) 0.20　　　(C) 0.25　　　(D) 0.45

【答案】D

【解析】根据图示易得长度在区间[25，30)的频率为 0.25，在区间[15，20)和区间[25，30)上的频率为 0.45，所以从该批产品中随机抽取一件，则其为二等品的概率为 0.45，选择 D。

【学科网考点定位】本题考查频率分布直方图的基本知识，属于容易题。



6. 设 z 是复数，则下列命题中的假命题是

(A) 若 $z^2 \geq 0$，则 z 是实数　　(B) 若 $z^2 < 0$，则 z 是虚数

(C) 若 z 是虚数，则 $z^2 \geq 0$　　(D) 若 z 是纯虚数，则 $z^2 < 0$

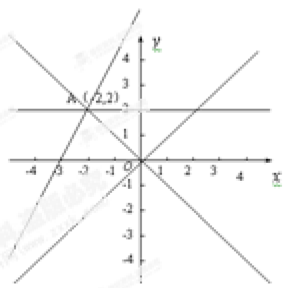
【答案】C

【解析】设$z=a+bi$,则$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$，结合复数概念可得 C 错误。

【学科网考点定位】本题考查复数的基本概念和性质，属于容易题。

7. 若点(x，y)位于曲线 y = |x|与 y = 2 所围成的封闭区域，则 2x－y 的最小值为

(A) －6　　(B) －2　　(C) 0　　(D) 2



【答案】A

【解析】作图如右图所示，在 x=-2，y=2 时，2x－y 的最小值为-6，故选择 A。

【学科网考点定位】本题考查线性规划的基本运用，属于容易题。

8. 已知点 M(a，b)在圆$O:x^2+y^2=1$外，则直线 ax + by = 1 与圆 O 的位置关系是

(A) 相切　　(B) 相交　　(C) 相离　　(D) 不确定

【答案】B

【解析】点 M(a，b)在圆$O:x^2+y^2=1$外，可知$a^2+b^2>1$，由点到直线距离公式有

$\frac{|a\times 0+b\times 0-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ ，故直线 ax ＋ by ＝ 1 与圆 O 的位置关系是相交。选择 B。

【学科网考点定位】本题主要考察点与圆的、直线与圆的位置关系，属于容易题。

9. 设△ABC 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，则△ABC 的形状为

(A) 直角三角形　　(B) 锐角三角形　　(C) 钝角三角形　　(D) 不确定

【答案】A

【解析】由正弦定理知 $b\cos C+c\cos B=a\sin A\Leftrightarrow \sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin^2 A\Leftrightarrow$，可得 $\sin(B+C)=\sin A=\sin^2 A\Rightarrow \sin A=1, \angle A=90^\circ$ 故△ABC 的形状为直角三角形。

【学科网考点定位】本题主要考察三角形形状判断及正弦定理的运用。属于中档题。

10. 设[x]表示不大于 x 的最大整数，则对任意实数 x, y, 有

(A) $[-x]=-[x]$　　(B) $[x+\frac{1}{2}]=[x]$

(C) $[2x]=2[x]$　　(D) $[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$

【答案】D

【解析】取 $x=\frac{5}{2}$，则 $[-x]=[-2.5]=-3, -[x]=-[2.5]=-2$，所以 A 项错误；

$[x+\frac{1}{2}]=[3]=3\neq[\frac{5}{2}]=2$，所以 B 项错误；$[2x]=[5]=5\neq 2[\frac{5}{2}]=4$ 所以 C 项错误；

$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[\frac{5}{2}]+[\frac{5}{2}+\frac{1}{2}]=5=[5]$.所以 D 项正确。

【学科网考点定位】本题考查取整函数(即高斯函数)，分段函数思想。属于难题。

二、填空题：把答案填写在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

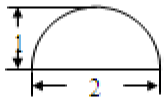
11. 双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的离心率为________.

【答案】$\frac{5}{4}$

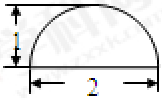
【解析】$e=\frac{\sqrt{16+9}}{4}=\frac{5}{4}$

【学科网考点定位】本题考查双曲线的离心率，基本性质 $a^2+b^2=c^2$ ，属于容易题。

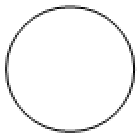
12. 某几何体的三视图如图所示，则其表面积为________.



主视图



左视图



俯视图

【答案】3π

【解析】由三视图可知，立体图是一个半径 r=1 的半个球体。其表面积 $S=\frac{1}{2}\times 4\pi r^2+\pi r^2=3\pi.$

【学科网考点定位】本题考查三视图、球体积计算公式，属于容易 题。

13. 观察下列等式：

$(1+1)=2\times 1$

$(2+1)(2+2)=2^2\times 1\times 3$

$(3+1)(3+2)(3+3)=2^3\times 1\times 3\times 5$

…

照此规律，第 n 个等式可为________.

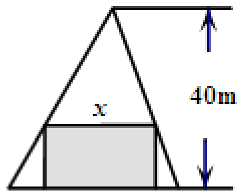
【答案】$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)$

【解析】

第 n 个等式可为：

$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)$

【学科网考点定位】本题考查数据的规律观察、类比推理能力。属于容易题。



14. 在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积最大的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x 为________(m)　　.

【答案】20

【解析】设矩形高为 y，由三角形相似性质得：$\frac{x}{40}=\frac{40-y}{40}$, 且 $x>0, y>0, x<40, y<40$

$\Rightarrow 40=x+y\geq 2\sqrt{xy}$, 仅当 $x=y=20$ 时，矩形的面积 $s=xy$ 取最大值 400 .

【学科网考点定位】本题考查利用均值不等式解决应用问题，属于中档题。

15. （考生请注意:请在下列三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分）

A. （不等式选做题）设 a，b∈R，|a−b|>2，则关于实数 x 的不等式$|x-a|+|x-b|>2$的解集是______.

【答案】$(-\infty,+\infty)$

【解析】函数$f(x)=|x-a|+|x-b|$的值域为:

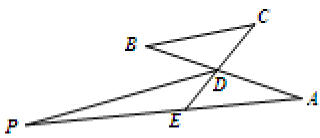
$[|a-b|,+\infty)$因此，当$\forall x\in R$时，$f(x)\geq|a-b|>2$.

所以，不等式$|x-a|+|x-b|>2$的解集为$(-\infty,+\infty)$。

【学科网考点定位】本题考查绝对值不等式的基本知识。属于容易题。

B.（几何证明选做题）如图，AB 与 CD 相交于点 E，过 E 作 BC 的平行线与 AD 的延长线相交于点 P. 已知$\angle A=\angle C$，PD = 2DA = 2，则 PE = ______.

【答案】$\sqrt{6}$.



【解析】

易知∠BCE = ∠PED=∠BAP ∴ΔPDE ~ ΔPEA.

$\therefore\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{PD}{PE}$ 而$PD=2DA=2$ $\therefore PA=3\therefore PE^2=PA\cdot PD=6$ 故$PE=\sqrt{6}$.

【学科网考点定位】本题考查平面几何证明，利用三角形相似即可求解，属于容易题。

C. （坐标系与参数方程选做题）圆锥曲线$\begin{cases}x=t^2\\y=2t\end{cases}$（t 为参数)的焦点坐标是____________ .

【答案】(1，0)

【解析】

由$\begin{cases}x=t^2\\y=2t\end{cases}$消去$t$得$y^2=4x\Rightarrow$抛物线的焦点为$F(1,0)$。

【学科网考点定位】本题为坐标系与参数方程，抛物线焦点的基本考查，属于容易题。

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程及演算步骤（本大题共 6 小题，共 75 分）

16. （本小题满分 12 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,-\frac{1}{2}),\boldsymbol{b}=(\sqrt{3}\sin x,\cos 2x),x\in\boldsymbol{R}$， 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

（Ⅰ）求 f（x)的最小正周期.

（Ⅱ）求 f（x）在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

【解析】：本题主要考察的是向量的数量积运算和三角函数的周期，最值问题。正确运用公式

若 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2),x\in R$,则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$ $T=\left|\frac{2\pi}{\omega}\right|$ 以及函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 图像性质的

熟练运用是解答关键。本题属于高考的常考类型，需要多加练习，关注三角函数和定积分的结合也是热点之一。

【答案】： $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\cos x,-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos x,\cos 2x\right)=\sqrt{3}\cos x\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

（Ⅰ） $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

所以 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$, 最小正周期为 π。

（Ⅱ） $\because x\in[0,\frac{\pi}{2}],\therefore(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$, 由正弦函数性质知,.

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow f(\frac{\pi}{3})=1$;

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,即 $x=0\Rightarrow f(0)=-\frac{1}{2}$;

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$,即 $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$;.

所以，f（x）在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值，最小值分别为 $-\frac{1}{2}$ 。

【学科网考点定位】本题主要考察的是向量的数量积运算和三角函数的周期，最值问题. 属于容易题.

17. （本小题满分 12 分）

设 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

（Ⅰ） 若 $\{a_n\}$ 为等差数列， 推导 S_n 的计算公式;

（Ⅱ）若 $a_1=1, q\neq 0$，且对所有正整数 n，有 $S_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}$. 判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列. 并证明你的结论。

【解析】本题考查等差数列的前 n 项和公式推导和有关等比数列的证明.，突出对教材重要内容的考查，引导回归教材，重视教材.属于容易题。第一问考查等差数列求和公式推导与证明，回归课本基础，进一步要求学生重视基础知识、基本技能的复习。第二问考察等比数列的证明，本题命题稳中有新，考察数列知识全面。

【答案】:

(Ⅰ)解法一：设 $\{a_n\}$ 公差为 d,，则

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]$$

又 $S_n=a_n+(a_n-d)+(a_{n-2}-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]$

$$\therefore 2S_n=n(a_1+a_n)$$

$$\therefore S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

解法二： 设 $\{a_n\}$ 公差为 d,则 $a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

$$\begin{cases}S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n\\ S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1\end{cases}\Rightarrow 2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_{n-1}+a_1)+(a_n+a_1)$$

$\Rightarrow 2S_n = n(a_1+a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

（Ⅱ）$\{a_n\}$是否为等比数列

证明：$a_1 = 1$，$q \neq 0$,由题知$q \neq 1$。

$\forall n \in N^*$，$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n - q^{n+1}}{1-q} = q^n$

$a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ q^{n-1} & n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a_n = q^{n-1}$，$n \in N^*$.

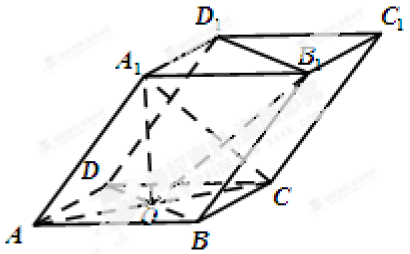
所以,数列$\{a_n\}$是首项$a_1 = 1$,公比$q \neq 1$的等比数列。

【学科网考点定位】本题考查等差数列的前 n 项和公式推导和有关等比数列的证明. 突出对教材重要内容的考查，引导回归教材，重视教材.属于容易题。

18. （本小题满分 12 分）

如图，四棱柱 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD 是正方形，O 为底面中心，A_1O⊥平面 ABCD,

$AB = AA_1 = \sqrt{2}$.



（Ⅰ）证明：A_1BD // 平面 CD_1B_1;

（Ⅱ）求三棱柱 ABD－$A_1B_1D_1$ 的体积.

【解析】以四棱柱为载体，考查面面平行的证明，三棱柱体积的求解。命题常规，难度中等。解答只要把握好基本的面面平行，三棱柱体积的求解公式就可以顺利解出。

【答案】：（Ⅰ）设B_1D_1线段的中点为O_1.

$\because BD$和B_1D_1是$ABCD - A_1B_1C_1D_1$的对应棱$\therefore BD \parallel B_1D_1$.

同理，$\because AO$和A_1O_1是棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对应线段

$\therefore AO \parallel A_1O_1$且$AO \parallel OC \Rightarrow A_1O_1 \parallel OC$且$A_1O_1 = OC \Rightarrow$四边形$A_1OCO_1$为平行四边形

$\Rightarrow A_1O \parallel O_1C$.且$A_1O \cap BD = O, O_1C \cap B_1D_1 = O_1 \Rightarrow$面$A_1BD \parallel$面$CD_1B_1$.

（II） $\because A_1O \perp$面$ABCD \therefore A_1O$是三棱柱$A_1B_1D_1-ABD$的高.

在正方形 AB CD 中，AO = 1 . 在$RT\Delta A_1OA$中，$A_1O=1$.

$V_{A_1B_1D1}-V_{ABD}=V_{A_1B_1D_1-ABD}=S_{\Delta ABD}\cdot A_1O=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 1=1$.

所以，$V_{A_1B_1D1}-V_{ABD}=V_{A_1B_1D_1-ABD}=1$

【学科网考点定位】本题考查空间平面与平面的位置关系和三棱柱体积计算问题，考查空间想象能力和推理论证、计算能力。属于容易题。

19. （本小题满分 12 分）

有 7 位歌手（1 至 7 号）参加一场歌唱比赛，由 500 名大众评委现场投票决定歌手名次，根据年龄将大众评委分为 5 组，各组的人数如下：

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50

（I）为了调查评委对 7 位歌手的支持状况，现用分层抽样方法从各组中抽取若干评委，其中从 B 组中抽取了 6 人．请将其余各组抽取的人数填入下表．

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50
抽取人数		6			

（II）在（I）中，若 A，B 两组被抽到的评委中各有 2 人支持 1 号歌手，现从这两组被抽到的评委中分别任选 1 人，求这 2 人都支持 1 号歌手的概率．

【解析】本题涉及概率与统计，出题位置位于全卷倒数第三题。作为概率题目考查难度中等，重要性提升。本题需要仔细理解题意，求解环节简单，运算并不复杂，第一问考察分层抽样，第二问求概率。出题体现了层层深入逐步递进的命题特点，而且命题情景贴近生活。难度中等。

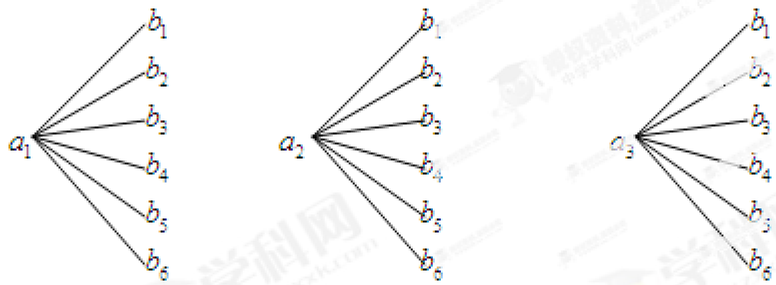
【答案】（Ⅰ）按相同的比例从不同的组中抽取人数如下表：

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50
抽取人数	3	6	9	9	3

（Ⅱ）记从 A 组抽到的 3 个评委为 a_1, a_2, a_3，其中 a_1, a_2 支持 1 号歌手；从 B 组抽到的 6 个评委为

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$，其中 b_1, b_2 支持 1 号歌手；从 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$

中各抽取 1 人的结果为：



由以上树状图知所有结果共 18 种，其中 2 人都支持 1 号歌手的有 $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1 a_2b_1$ 4 种，故所求概率 $P = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ 。

【学科网考点定位】本题考查分层抽样，树形图列举解决概率问题。属于中档题。

20. （本小题满分 13 分）

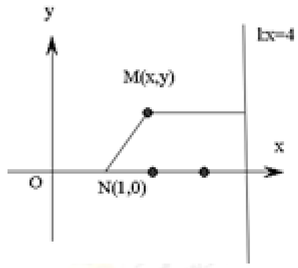
已知动点 M(x, y) 到直线 l: x = 4 的距离是它到点 N(1, 0) 的距离的 2 倍.

（Ⅰ）求动点 M 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）过点 P(0, 3) 的直线 m 与轨迹 C 交于 A, B 两点. 若 A 是 PB 的中点, 求直线 m 的斜率.

【解析】本题考查了用点到直线的距离公式及两点间的距离公式求抛物线方程,第一问涉及到轨迹方程的求法，可使用直接法，得到椭圆方程，第二问的设计的虽是求斜率的问题，其实质是常规的直线与圆锥曲线的联立的问题。其运算量然相对较大,不失为一道解析几何好题。利用中点问题，建立坐标之间的关系，最后求斜率的值。此题涉及椭圆、直线、动点轨迹方程、中点问题，为倒数第二压轴题，难度比 2012 年略微加大。

【答案】(Ⅰ) 点 M(x, y)到直线 x=4 的距离,是到点 N(1, 0)的距离的 2 倍，则



$$|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

所以，动点 M 的轨迹为椭圆，方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。

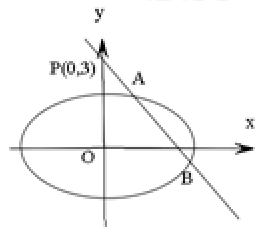
(Ⅱ) P(0, 3)，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由题知:$2x_1=0+x_2,2y_1=3+y_2$

椭圆的上下顶点坐标分别是$(0,\sqrt{3})$和$(0,-\sqrt{3})$,经检验直线 m 不经过这 2 点，即直线 m 斜率 k 存在。设直线m方程为:$y=kx+3$.联立椭圆和直线方程，整理得：

$$(3+4k^2)x^2+24kx+24=0\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-24k}{3+4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{24}{3+4k^2}$$

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{2}+2\Rightarrow\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{(-24k)^2}{(3+4k^2)\cdot 24}=\frac{9}{2}\Rightarrow k=\pm\frac{3}{2}$$

所以，直线 m 的斜率 $k=\pm\frac{3}{2}$



【学科网考点定位】本题考查轨迹方程的常规求解，椭圆和直线位置关系，属于中档题。

21．(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x,x\in\boldsymbol{R}$.

(Ⅰ) 求 f(x)的反函数的图象上图象上点(1, 0)处的切线方程;

(Ⅱ) 证明：曲线 y = f (x) 与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$有唯一公共点.

(Ⅲ) 设 a<b, 比较 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$与 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小，并说明理由.

【解析】本题涉及函数与导数，为压轴题。本题第一问涉及了求导与指数函数的反函数。属于导函数的基本应用，体现了压轴题的低切入点特征。本题第二问考查曲线与曲线的公共点个数，到了第二问，考查难度平稳提升。第三问比较大小可采用作差构造，再求导，并综合考察基本不等式的应用。第三问考查细致入微，需要思考分析。具有一定的区分度。本题命题常规，难度大。

【答案】（Ⅰ） f (x)的反函数 $g(x)=\ln x$，则 y=g(x)过点（1,0）的切线斜率 k=$g'(1)$.

$g'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow k=g'(1)=1$. 过点（1,0）的切线方程为：$y=x-1$

（Ⅱ） 曲线 $y=e^x$ 与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 公共点个数等于函数 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$ 零点的个数。

$\because \varphi(0)=1-1=0,\therefore \varphi(x)$ 存在零点 $x=0$，又．$\varphi'(x)=e^x-x-1$，令 $h(x)=\varphi'(x)$，

可求得 $h(x)=\varphi'(x)$ 在 x=0 处有唯一的极小值 0，即 $\varphi'(x)\geq 0$

故曲线 y = f (x) 与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 有唯一公共点。

(III) 设 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{e^b-e^a}{b-a}-e^{\frac{a+b}{2}}=$

$=\frac{e^b-e^a-be^{\frac{a+b}{2}}+ae^{\frac{a+b}{2}}}{b-a}=\frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{b-a}\cdot\left[e^{\frac{b-a}{2}}-e^{\frac{a-b}{2}}-(b-a)\right]$

设函数 $u(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2x(x\geq 0)$，则 $u'(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2\geq 2\sqrt{e^x\times\frac{1}{e^x}}-2=0$，

$\therefore u'(x)\geq 0$ （仅当 x=0 时等号成立），$\therefore u(x)$ 单调递增。

当 $x>0$ 时，$u(x)>u(0)=0$．令 $x=\frac{b-a}{2}$，则 $e^{\frac{b-a}{2}}-e^{\frac{a-b}{2}}-(b-a)>0$

$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 。

【学科网考点定位】本题考查函数、导数、不等式、参数等问题。属于难题。