2017年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

文科数学

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符号题目要求的.

（1）设集合 $M=\{x||x-1|<1\},N=\{x|x<2\}$ 则 $M\bigcap N=$

A.（-1,1）　　　　B.（-1,2）

C. （0,2）　　　　D.（1,2）

（2）已知i是虚数单位，若复数 z 满足 $zi=1+i$，则 $z^2=$

A.-2i　　　　B.2i

C.-2　　　　D.2

（3）已知x,y满足约束条件 $\begin{cases}x-2y+5\le 0,\\ x+3\ge 0,\\ y\le 2,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值是

A.-3　　　　B.-1

C.1　　　　D.3

（4）已知 $cosx=\dfrac{3}{4}$，则 $cos2x=$

A. $-\dfrac{1}{4}$　　　　B. $\dfrac{1}{4}$

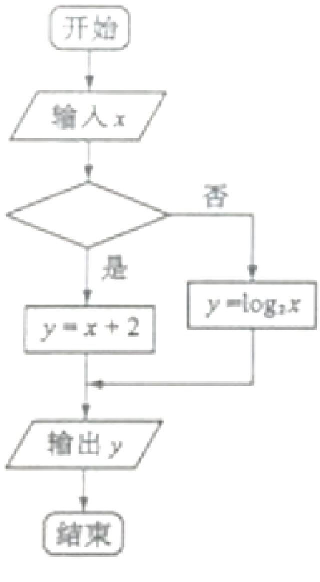
C. $-\dfrac{1}{8}$　　　　D. $\dfrac{1}{8}$

(5) 已知命题 $p:\exists x\in R$ ，$x^2-x+1\ge 0$；命题 q:若 $a^2<b^2$，则 $a<b$.下列命题为真命题的是

A. $p\wedge q$　　　　B. $p\wedge\neg q$

C. $\neg p\wedge q$　　　　D. $\neg p\wedge\neg q$

（6）执行右侧的程序框图，当输入的x的值为4时，输出的y的值为2，则空白判断框中的条件可能



A.x>3　　　　B. x>4

C. $x\le 4$　　　　　　　　D. $x\le 5$

（7）函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ 最小正周期为

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　　　　　　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$

C. π　　　　　　　　D. 2π

（8）如图所示的茎叶图记录了甲、乙两组各5名工人某日的产量数据（单位：件）。若这两组数据的中位数相等，且平均值也相等，则x和y的值分别为

甲组		乙组
6	5	9
2 5	6	1 7 y
x 4	7	8

A. 3,5　　　　　　　　B. 5，5

C. 3，7　　　　　　　　D. 5，7

（9）设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<1\\2(x-1),x\ge 1\end{cases}$，若 $f(a)=f(a+1)$，则 $f(\dfrac{1}{a})=$

A. 2　　　　　　　　B. 4

C. 6　　　　　　　　D. 8

(10)若函数 $e^x f(x)(e=2.71828\ldots$是自然对数的底数）在 $f(x)$ 的定义域上单调递增，则称函数 $f(x)$ 具有M性质，下列函数中具有M性质的是

A. $f(x)=2^{-x}$　　　　　　　　B. $f(x)=x^2$

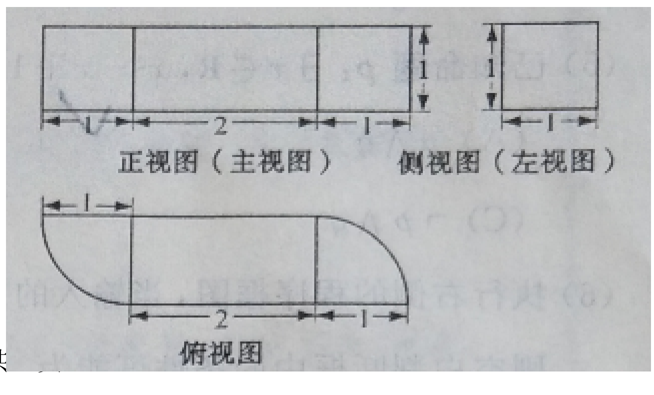
C. $f(x)=3^{-x}$　　　　　　　　D. $f(x)=\cos x$

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分

（11）已知向量a=（2,6），b=$(-1,\lambda)$，若 $a//b$，则 $\lambda=$______。

（12）若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a>0,\ b>0)$ 过点（1,2），则 $2a+b$ 的最小值为____。

（13）由一个长方体和两个 $\dfrac{1}{4}$



圆柱构成的几何体的三视图如右图，则该几何体的体积为________。

（14）已知f(x)是定义在R上的偶函数，且 $f(x+4)=f(x-2)$. 若当 $x\in[-3,0]$ 时，

$f(x)=6^{-x}$，则 $f(919)=$________.

（15）在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$

的右支与焦点为F的抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 交于 A,B 两点，若

$|AF|+|BF|=4|OF|$, 则该双曲线的渐近线方程为____________.

三、解答题：本大题共6小题，共75分。

（16）（本小题满分12分）

某旅游爱好者计划从3个亚洲国家 A_1,A_2,A_3 和3个欧洲国家 B_1,B_2,B_3 中选择2个国家去旅游。

（I）若从这6个国家中任选2个，求这2个国家都是亚洲国家的概率；

（II）若从亚洲国家和欧洲国家中个任选1个，求这2个国家包括 A_1 但不包括 B_1 的概率。

（17）（本小题满分12分）

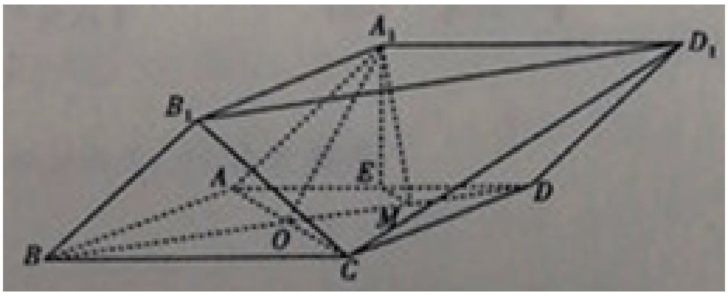
在△ABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知b=3，$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-6$, $S_{\Delta ABC}=3$，求A和a。

（18）（本小题满分12分）

由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示，四边形ABCD为正方形，O 为AC与BD 的交点，E为AD的中点，$A_1E\perp$ 平面ABCD,

（I）证明：$A_1O\parallel$ 平面 B_1CD_1；

（II）设M是OD的中点，证明：平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1.



（19）（本小题满分12分）

已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$a_1+a_2=6, a_1a_2=a_3$

（I）　求数列$\{a_n\}$通项公式；

（II）　$\{b_n\}$为各项非零的等差数列，其前n项和为S_n知$S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$，求数列$\{\frac{b_n}{a_n}\}$的前n项和T_n.

（20）（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2, a\in R$，

（1）当$a=2$时，求曲线$y=f(x)$在点$(3, f(3))$处的切线方程；

（2）设函数$g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$，讨论$g(x)$的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.

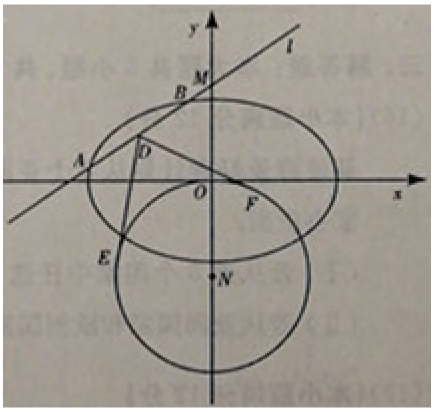
（21）（本小题满分14分）

在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0)的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆C截直线y=1所得线段的长度为$2\sqrt{2}$.

（I）求椭圆C的方程；

（II）动直线$l: y=kx+m(m\neq 0)$交椭圆C于A，B两点，交y轴于点M.点N是M关于O的对称点，圆N的半径为$|NO|$.

设D为AB的中点，DE，DF与圆N分别相切于点E，F，求$\angle EDF$的最小值.



2017年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

文科数学参考答案

一、选择题：

（1）C　（2）A　（3）D　（4）D　（5）B

（6）B　（7）C　（8）A　（9）C　（10）A

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分

（11）-3　（12）8　（13）$2+\frac{\pi}{2}$　（14）6　（15）$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

三、解答题：本大题共6小题，共75分。

（16）

解：

（1）由题意知，从6个国家中任选两个国家，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\},\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_2,B_3\},$

$\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{A_3,B_3\},\{B_1,B_2\},\{B_1,B_3\},\{B_2,B_3\},$共15个

所选两个国家都是亚洲国家的事件所包含的基本事件有：

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\},$共3个，

则所求事件的概率为：$P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

解法二：$P=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

（2）从亚洲国家和欧洲国家中各任选一个，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_2,B_3\},\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{A_3,B_3\}$，

共9个

包括A_1但不包括B_1的事件所包含的基本事件有：

$\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\}$，共2个，

则所求事件的概率为$P=\dfrac{2}{9}$

解法二：$P=\dfrac{C_1^1C_2^1}{C_3^1C_3^1}=\dfrac{2}{9}$

（17）（本小题满分12分）

解：因为　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$，

所以　$bc\cos A=-6$，

又　$S_{\Delta ABC}=3$，

所以　$bc\sin A=6$，

因此　$\tan A=-1$，又$0<A<\pi$

所以　$A=\dfrac{3\pi}{4}$

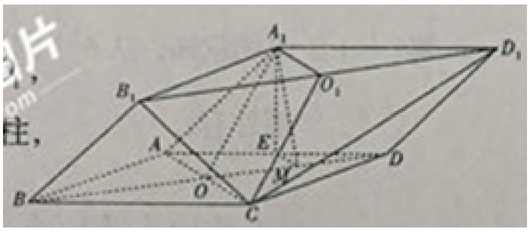
又　$b=3$，所以$c=2\sqrt{2}$，

由余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得　$a^2=9+8-2\times3\times2\sqrt{2}\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=29$

所以　$a=\sqrt{29}$

（18）



证明：

（1）取B_1D_1的中点O_1，连接CO_1,A_1O_1

由于　$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是四棱柱，

所以　$A_1O_1//OC,A_1O_1=OC$，

因此　四边形A_1OCO_1为平行四边形，

所以　$A_1O//O_1C$，

又　$O_1C\subset$平面B_1CD_1，$A_1O\not\subset$平面B_1CD_1，

所以　$A_1O//$平面B_1CD_1，

（2）因为　$AC\perp BD,E,M$分别为AD和OD的中点，

所以　$EM\perp BD$，

又　$A_1E\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，

所以　$A_1E\perp BD$，

因为　$B_1D_1//BD$

所以　$EM\perp B_1D_1,A_1E\perp B_1D_1$，

又　$A_1E,EM\subset$平面A_1EM，$A_1E\bigcap EM=E$，

所以　$B_1D_1\perp$面A_1EM，

又　$B_1D_1\subset$面B_1CD_1，

所以　平面$A_1EM\perp$平面B_1CD_1。

（19）（本小题满分12分）

解：

（1）设$\{a_n\}$的公比为q，

由题意知：$a_1(1+q)=6,a_1^2q=a_1q^2$，

又　$a_n>0$，

解得：　$a_1=2,q=2$，

所以　$a_n=2^n$

（2）由题意知：$S_{2n+1}=\dfrac{(2n+1)(b_1+b_{2n+1})}{2}=(2n+1)b_{n+1}$，

又　$S_{2n+1}=b_nb_{n+1},b_{n+1}\neq 0$，

所以　$b_n=2n+1$，

令　　　$c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，

则　　　$c_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$

因此　　$T_n=c_1+c_2+\ldots+c_n$

$$=\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}+\frac{2n+1}{2^n}$$

又　　　$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$

两式相减得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2}+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$

所以　　$T_n=5-\dfrac{2n+5}{2^n}$

（20）（本小题满分13分）

解：（1）由题意 $f'(x)=x^2-ax$

所以　　当 $a=2$ 时，$f(3)=0, f'(x)=x^2-2x$

所以　　$f'(3)=3$

因此　　曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线方程是 $y=3(x-3)$，

即　　　$3x-y-9=0$

（2）因为　　$g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$，

所以　　$g'(x)=f'(x)+\cos x-(x-a)\sin x-\cos x$

$$=x(x-a)-(x-a)\sin x$$

$$=(x-a)(x-\sin x)$$

令　　　$h(x)=x-\sin x$

则　　　$h'(x)=1-\cos x\geq 0$，

所以　　$h(x)$ 在R上单调递增

因为　　$h(0)=0$，

所以　　当 $x>0$ 时，$h(x)>0$；

当 $x<0$ 时，$h(x)<0$

（1）当 $a<0$ 时，$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$，

当 $x\in(-\infty,\ a)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(a,\ 0)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,\ +\infty)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以　当 $x=a$ 时 $g(x)$ 取到极大值，极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，

当 $x=0$ 时 $g(x)$ 取到极小值，极小值是 $g(0)=-a$.

（2）当 $a=0$ 时，$g'(x)=x(x-\sin x)$，

当 $x\in(-\infty,\ +\infty)$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 单调递增；

所以　$g(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 无极大值也无极小值.

（3）当 $a>0$ 时，$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$

当 $x\in(-\infty,\ 0)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,\ a)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(a,\ +\infty)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以　当 $x=0$ 时 $g(x)$ 取到极大值，极大值是 $g(0)=-a$；

当 $x=a$ 时 $g(x)$ 取到极小值，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$.

综上所述：

当 $a<0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ a)$ 和 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，在 $(a,\ 0)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，极小值是 $g(0)=-a$；

当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $a>0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 和 $(a,\ +\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\ a)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(0)=-a$，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$.

（21）

解：（I）由椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$a^2=2(a^2-b^2)$，

又当$y=1$时，$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}$，得$a^2-\frac{a^2}{b^2}=2$，

所以　$a^2=4$，$b^2=2$.

因此椭圆方程为　$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（II）设　$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立方程　$\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+2y^2=4, \end{cases}$

得　$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

由　$\Delta>0$　得$m^2<4k^2+2$.　（*）

且　$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，

因此　$y_1+y_2=\frac{2m}{2k^2+1}$，

所以　$D(-\frac{2km}{2k^2+1},\frac{m}{2k^2+1})$，

又　$N(0,-m)$，

所以　$|ND|^2=(-\frac{2km}{2k^2+1})^2+(\frac{m}{2k^2+1}+m)^2$，

整理得　$|ND|^2=\frac{4m^2(1+3k^2+k^4)}{(2k^2+1)^2}$，

因为　$|NF|=|m|$，

所以　$\frac{|ND|^2}{|NF|^2}=\frac{4(k^4+3k^2+1)}{(2k^2+1)^2}=1+\frac{8k^2+3}{(2k^2+1)^2}$.

令　$t=8k^2+3$，$t\geqslant 3$，

故　$2k^2+1=\frac{t+1}{4}$，

所以　$\frac{|ND|^2}{|NF|^2}=1+\frac{16t}{(1+t)^2}=1+\frac{16}{t+\frac{1}{t}+2}$.

令 $y=t+\frac{1}{t}$，所以 $y'=1-\frac{1}{t^2}$.

当 $t\geqslant 3$ 时，$y'>0$，

从而 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，

因此 $t+\frac{1}{t}\geqslant\frac{10}{3}$，

等号当且仅当 $t=3$ 时成立，此时 $k=0$，

所以 $\frac{|ND|^2}{|NF|^2}\leqslant 1+3=4$，

由（*）得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$ 且 $m\neq 0$.

故 $\frac{|NF|}{|ND|}\geqslant\frac{1}{2}$.

设 $\angle EDF=2\theta$,

则 $\sin\theta=\frac{|NF|}{|ND|}\geqslant\frac{1}{2}$.

所以 θ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$，

从而 $\angle EDF$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，此时直线 l 的斜率是 0.

综上所述：当 $k=0$, $m\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$ 时，$\angle EDF$ 取到最小值 $\frac{\pi}{3}$.

绝密★启用前

2017年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)

文 科 数 学

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共4页. 满分150分. 考试用时120分钟. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1. 答题前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号、县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 答案写在试卷上无效.
3. 第Ⅱ卷必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带. 不按以上要求作答的答案无效.
4. 填空题请直接填写答案，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

第Ⅰ卷(共50分)

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1) 设集合 $M=\{x\,||x-1|<1\}$，$N=\{x\,|\,x<2\}$，则 $M\cap N=$

(A) $(-1,1)$　　(B) $(-1,2)$

(C) $(0,2)$　　(D) $(1,2)$

(2) 已知 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $zi=1+i$，则 $z^2=$

(A) $-2i$　　(B) $2i$

(C) -2　　(D) 2

(3) 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y+5\leqslant 0,\\ x+3\geqslant 0,\\ y\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值是

(A) -3　　(B) -1

(C) 1　　(D) 3

(4) 已知 $\cos x=\frac{3}{4}$，则 $\cos 2x=$

(A) $-\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{4}$

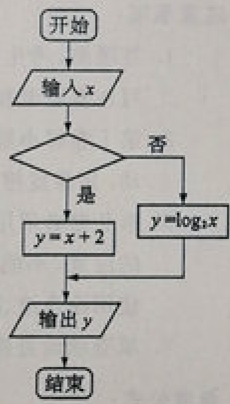
(C) $-\frac{1}{8}$　　(D) $\frac{1}{8}$

(5) 已知命题 p：$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2-x+1\geqslant 0$；命题 q：若 $a^2<b^2$，则 $a<b$. 下列命题为真命题的是

(A) $p\wedge q$　　(B) $p\wedge \neg q$

(C) $\neg p\wedge q$　　(D) $\neg p\wedge \neg q$

(6) 执行右侧的程序框图，当输入的 x 的值为 4 时，输出的 y 的值为 2，则空白判断框中的条件可能为



(A) $x>3$

(B) $x>4$

(C) $x\leqslant 4$

(D) $x\leqslant 5$

(7) 函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ 的最小正周期为

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) $\frac{2\pi}{3}$

(C) π　　(D) 2π

(8) 如图所示的茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名工人某日的产量数据(单位：件). 若这两组数据的中位数相等，且平均值也相等，则 x 和 y 的值分别为

甲组		乙组
6	5	9
2 5	6	1 7 y
x 4	7	8

(A) 3，5　　(B) 5，5

(C) 3，7　　(D) 5，7

(9) 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},\ 0<x<1,\\ 2(x-1),\ x\geqslant 1.\end{cases}$ 若 $f(a)=f(a+1)$，则 $f(\frac{1}{a})=$

(A) 2　　(B) 4

(C) 6　　(D) 8

(10) 若函数 $e^x f(x)$ ($e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增，则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质. 下列函数中具有 M 性质的是

(A) $f(x)=2^{-x}$　　(B) $f(x)=x^2$

(C) $f(x)=3^{-x}$　　(D) $f(x)=\cos x$

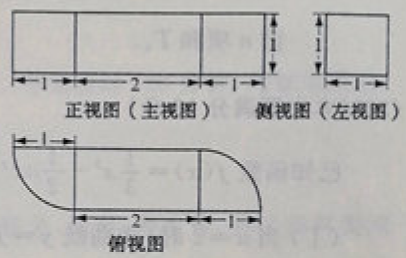
第Ⅱ卷(共100分)

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

(11) 已知向量 $a=(2,6)$，$b=(-1,\lambda)$. 若 $a\parallel b$，则 $\lambda=$________.

(12) 若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a>0, b>0)$ 过点 $(1,2)$，则 $2a+b$ 的最小值为________.

(13) 由一个长方体和两个 $\frac{1}{4}$ 圆柱体构成的几何体的三视图如右图，则该几何体的体积为________.



(14) 已知 $f(x)$ 是定义在R上的偶函数，且 $f(x+4)=f(x-2)$. 若当 $x\in[-3,0]$ 时，$f(x)=6^{-x}$，则 $f(919)=$________.

(15) 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 交于 A，B 两点. 若 $|AF|+|BF|=4|OF|$，则该双曲线的渐近线方程为________.

三、解答题：本大题共6小题，共75分.

(16)(本小题满分12分)

某旅游爱好者计划从3个亚洲国家 A_1，A_2，A_3 和3个欧洲国家 B_1，B_2，B_3 中选择2个国家去旅游.

(Ⅰ)若从这6个国家中任选2个，求这2个国家都是亚洲国家的概率；

(Ⅱ)若从亚洲国家和欧洲国家中各任选1个，求这2个国家包括 A_1 但不包括 B_1 的概率.

(17)(本小题满分12分)

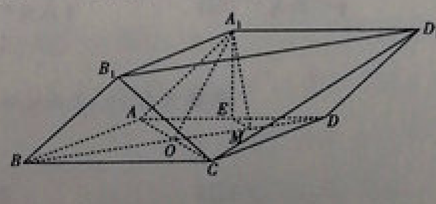
在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $b=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$，$S_{\triangle ABC}=3$，求 A 和 a.

(18)(本小题满分12分)

由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示. 四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，$A_1E\perp$ 平面 $ABCD$.

(Ⅰ)证明：$A_1O\parallel$ 平面 B_1CD_1；

(Ⅱ)设 M 是 OD 的中点，证明：平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1.



(19)(本小题满分 12 分)

已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$a_1+a_2=6$，$a_1a_2=a_3$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)$\{b_n\}$为各项非零的等差数列，其前n项和为S_n. 已知$S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$，求数列$\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

(20)(本小题满分 13 分)

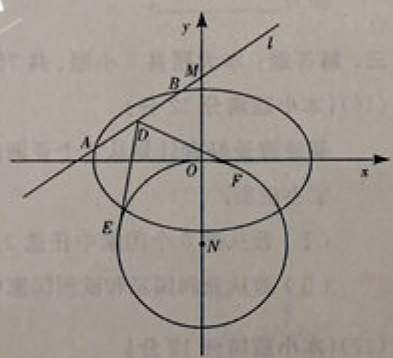
已知函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$，$a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)当$a=2$时，求曲线$y=f(x)$在点$(3,f(3))$处的切线方程；

(Ⅱ)设函数$g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$，讨论$g(x)$的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.

(21)(本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆$C$截直线$y=1$所得线段的长度为$2\sqrt{2}$.



(Ⅰ)求椭圆C的方程；

(Ⅱ)动直线l：$y=kx+m(m\neq0)$交椭圆C于A，B两点，交y轴于点M. 点N是M关于O的对称点，$\odot N$的半径为$|NO|$. 设D为AB的中点，DE，DF与$\odot N$分别相切于点E，F，求$\angle EDF$的最小值.

绝密★启用前

2017年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

文科数学试题参考答案

一、选择题

（1）C　（2）A　（3）D　（4）D　（5）B

（6）B　（7）C　（8）A　（9）C　（10）A

二、填空题

（11）-3　（12）8　（13）$2+\frac{\pi}{2}$　（14）6　（15）$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

三、解答题

（16）

解：（Ⅰ）由题意知，从6个国家中任选两个国家，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\},\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_2,B_3\},$

$\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\}\{A_3,B_3\},\{B_1,B_2\},\{B_1,B_3\},\{B_2,B_3\}$，共15个.

所选两个国家都是亚洲国家的事件所包含的基本事件有：

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\}$，共3个，

则所求事件的概率为：$P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

（Ⅱ）从亚洲国家和欧洲国家中各任选一个，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_2,B_3\},\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{A_3,B_3\},$

共9个.

包括A_1但不包括B_1的事件所包含的基本事件有：

$\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\}$，共2个，

则所求事件的概率为：$P=\frac{2}{9}$.

（17）

解：因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$，

所以 $bc\cos A=-6$，

又 $S_{\triangle ABC}=3$，

所以 $bc\sin A=6$，

因此 $\tan A=-1$，又 $0<A<\pi$，

所以 $A=\frac{3\pi}{4}$.

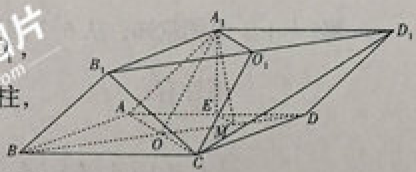
又 $b=3$，所以 $c=2\sqrt{2}$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得 $a^2=9+8-2\times3\times2\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=29$，

所以 $a=\sqrt{29}$.

（18）



证明：（Ⅰ）取 B_1D_1 的中点 O_1，连接 CO_1，A_1O_1，

由于 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是四棱柱，

所以 $A_1O_1 /\!/ OC$，$A_1O_1=OC$，

因此 四边形 A_1OCO_1 为平行四边形，

所以 $A_1O /\!/ O_1C$，

又 $O_1C\subset$ 平面 B_1CD_1，$A_1O\not\subset$ 平面 B_1CD_1，

所以 $A_1O /\!/$ 平面 B_1CD_1.

（Ⅱ）因为 $AC\perp BD$，E，M 分别为 AD 和 OD 的中点，

所以 $EM\perp BD$，

又 $A_1E\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $A_1E\perp BD$，

因为 $B_1D_1 /\!/ BD$，

所以 $EM\perp B_1D_1$，$A_1E\perp B_1D_1$，

又 A_1E，$EM\subset$ 平面 A_1EM，$A_1E\cap EM=E$，

所以 $B_1D_1\perp$ 平面 A_1EM，

又 $B_1D_1\subset$ 平面 B_1CD_1，

所以 平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1.

（19）

解：（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公比为q，

由题意知：$a_1(1+q)=6$，$a_1^2q=a_1q^2$，

又　$a_n>0$，

解得：$a_1=2, q=2$，

所以　$a_n=2^n$.

（Ⅱ）由题意知：$S_{2n+1}=\dfrac{(2n+1)(b_1+b_{2n+1})}{2}=(2n+1)b_{n+1}$，

又　$S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$，$b_{n+1}\neq 0$，

所以　$b_n=2n+1$.

令$c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，

则　$c_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$

因此　$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$$=\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}+\frac{2n+1}{2^n},$$

又　$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$，

两式相减得　$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2}+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$，

所以　$T_n=5-\dfrac{2n+5}{2^n}$.

（20）

解：（Ⅰ）由题意 $f'(x)=x^2-ax$，

所以　当$a=2$时，$f(3)=0$，$f'(x)=x^2-2x$，

所以　$f'(3)=3$，

因此　曲线$y=f(x)$在点$(3, f(3))$处的切线方程是$y=3(x-3)$，

即　$3x-y-9=0$.

（Ⅱ）因为　$g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$，

所以　$g'(x)=f'(x)+\cos x-(x-a)\sin x-\cos x$

$$=x(x-a)-(x-a)\sin x$$

$$=(x-a)(x-\sin x),$$

令 $h(x)=x-\sin x$，

则 $h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $h(0)=0$，

所以 当 $x>0$ 时，$h(x)>0$；

当 $x<0$ 时，$h(x)<0$.

（1）当 $a<0$ 时，$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$，

当 $x\in(-\infty,a)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(a,0)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以 当 $x=a$ 时 $g(x)$ 取到极大值，极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，

当 $x=0$ 时 $g(x)$ 取到极小值，极小值是 $g(0)=-a$.

（2）当 $a=0$ 时，$g'(x)=x(x-\sin x)$，

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 单调递增；

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 无极大值也无极小值.

（3）当 $a>0$ 时，$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,a)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以 当 $x=0$ 时 $g(x)$ 取到极大值，极大值是 $g(0)=-a$；

当 $x=a$ 时 $g(x)$ 取到极小值，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$.

综上所述：

当 $a<0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,0)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，极小值是 $g(0)=-a$；

当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $a>0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递增，在 $(0, a)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(0)=-a$，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$.

（21）

解：（I）由椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $a^2=2(a^2-b^2)$，

又当 $y=1$ 时，$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}$，得 $a^2-\frac{a^2}{b^2}=2$，

所以 $a^2=4$，$b^2=2$.

因此椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（II）设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

联立方程 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+2y^2=4, \end{cases}$

得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

由 $\Delta>0$ 得 $m^2<4k^2+2$.（*）

且 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，

因此 $y_1+y_2=\frac{2m}{2k^2+1}$，

所以 $D(-\frac{2km}{2k^2+1}, \frac{m}{2k^2+1})$，

又 $N(0, -m)$，

所以 $|ND|^2=(-\frac{2km}{2k^2+1})^2+(\frac{m}{2k^2+1}+m)^2$，

整理得 $|ND|^2=\frac{4m^2(1+3k^2+k^4)}{(2k^2+1)^2}$，

因为 $|NF|=|m|$，

所以 $\dfrac{|ND|^2}{|NF|^2}=\dfrac{4(k^4+3k^2+1)}{(2k^2+1)^2}=1+\dfrac{8k^2+3}{(2k^2+1)^2}$.

令 $t=8k^2+3$，$t\geqslant 3$，

故 $2k^2+1=\dfrac{t+1}{4}$，

所以 $\dfrac{|ND|^2}{|NF|^2}=1+\dfrac{16t}{(1+t)^2}=1+\dfrac{16}{t+\dfrac{1}{t}+2}$.

令 $y=t+\dfrac{1}{t}$，所以 $y'=1-\dfrac{1}{t^2}$.

当 $t\geqslant 3$ 时，$y'>0$，

从而 $y=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，

因此 $t+\dfrac{1}{t}\geqslant\dfrac{10}{3}$，

等号当且仅当 $t=3$ 时成立，此时 $k=0$，

所以 $\dfrac{|ND|^2}{|NF|^2}\leqslant 1+3=4$，

由（*）得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$ 且 $m\neq 0$.

故 $\dfrac{|NF|}{|ND|}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

设 $\angle EDF=2\theta$，

则 $\sin\theta=\dfrac{|NF|}{|ND|}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

所以 θ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$，

从而 $\angle EDF$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$，此时直线 l 的斜率是0.

综上所述：当 $k=0$，$m\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$ 时，$\angle EDF$ 取到最小值 $\dfrac{\pi}{3}$.