2015年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题5分，共40分）

1．（5分）复数i（2﹣i）=（　　）

A． 1+2i　　　　B． 1﹣2i　　　　C． ﹣1+2i　　　　D． ﹣1﹣2i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】5N：数系的扩充和复数．

【分析】利用复数的运算法则解答．

【解答】解：原式$=2i-i^2=2i-(-1)=1+2i$；

故选：A．

【点评】本题考查了复数的运算；关键是熟记运算法则．注意$i^2=-1$．

2．（5分）若x，y满足$\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y\leqslant 1\\x\geqslant 0\end{cases}$，则z=x+2y的最大值为（　　）

A． 0　　　　B． 1　　　　C． $\frac{3}{2}$　　　　D． 2

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】59：不等式的解法及应用．

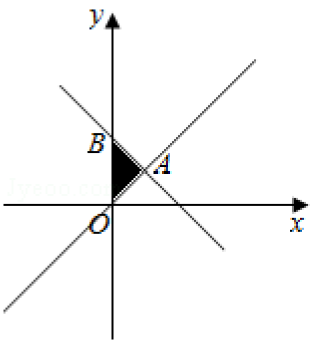
【分析】作出题中不等式组表示的平面区域，再将目标函数z=x+2y对应的直线进行平移，即可求出z取得最大值．

【解答】解：作出不等式组$\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y\leqslant 1\\x\geqslant 0\end{cases}$表示的平面区域，

当l经过点B时，目标函数z达到最大值

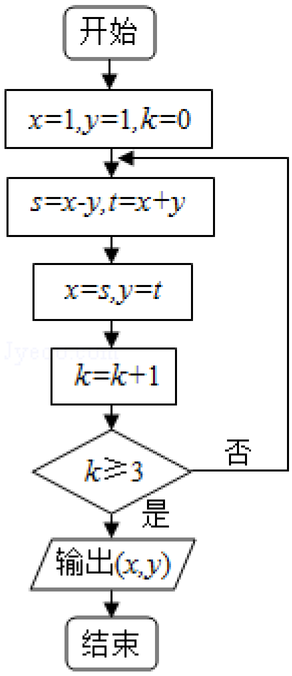
∴$z_{最大值}=0+2\times 1=2$．

故选：D．



【点评】本题给出二元一次不等式组，求目标函数 z=x+2y 的最大值，着重考查了二元一次不等式组表示的平面区域和简单的线性规划等知识，属于基础题．

3．（5 分）执行如图所示的程序框图输出的结果为（　　）



A．（﹣2，2）　B．（﹣4，0）　C．（﹣4，﹣4）　D．（0，﹣8）

【考点】EF：程序框图．

【专题】5K：算法和程序框图．

【分析】模拟程序框图的运行过程，即可得出程序运行后输出的结果．

【解答】解：模拟程序框图的运行过程，如下；

x=1，y=1，

k=0 时，s=x﹣y=0，t=x+y=2；

$x=s=0$，$y=t=2$，

$k=1$ 时，$s=x-y=-2$，$t=x+y=2$；

$x=s=-2$，$y=t=2$，

$k=2$ 时，$s=x-y=-4$，$t=x+y=0$；

$x=s=-4$，$y=t=0$，

$k=3$ 时，循环终止，

输出（x，y）是（-4，0）.

故选：B.

【点评】本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，是基础题目.

4．（5 分）设 α，β 是两个不同的平面，m 是直线且 $m\subset\alpha$，“$m\parallel\beta$“是“$\alpha\parallel\beta$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件.

【专题】5L：简易逻辑.

【分析】$m\parallel\beta$ 并得不到 $\alpha\parallel\beta$，根据面面平行的判定定理，只有 α 内的两相交直线都平行于 β，而 $\alpha\parallel\beta$，并且 $m\subset\alpha$，显然能得到 $m\parallel\beta$，这样即可找出正确选项.

【解答】解：$m\subset\alpha$，$m\parallel\beta$ 得不到 $\alpha\parallel\beta$，因为 α，β 可能相交，只要 m 和 α，β 的交线平行即可得到 $m\parallel\beta$；

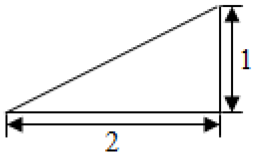
$\alpha\parallel\beta$，$m\subset\alpha$，∴m 和 β 没有公共点，∴$m\parallel\beta$，即 $\alpha\parallel\beta$ 能得到 $m\parallel\beta$；

∴“$m\parallel\beta$”是“$\alpha\parallel\beta$”的必要不充分条件.

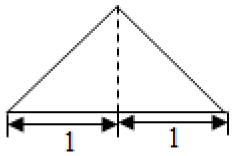
故选：B.

【点评】考查线面平行的定义，线面平行的判定定理，面面平行的定义，面面平行的判定定理，以及充分条件、必要条件，及必要不充分条件的概念.

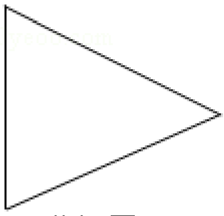
5．（5 分）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的表面积是（　　）



正(主)视图



侧(左)视图



俯视图

A．$2+\sqrt{5}$　　B．$4+\sqrt{5}$　　C．$2+2\sqrt{5}$　　D．5

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】根据三视图可判断直观图为：OA⊥面 ABC，AC=AB，E 为 BC 中点，EA=2，EA=EB=1，OA=1，：BC⊥面 AEO，AC=$\sqrt{5}$，OE=$\sqrt{5}$

判断几何体的各个面的特点，计算边长，求解面积．

【解答】解：根据三视图可判断直观图为：

OA⊥面 ABC，AC=AB，E 为 BC 中点，

EA=2，EC=EB=1，OA=1，

∴可得 AE⊥BC，BC⊥OA，

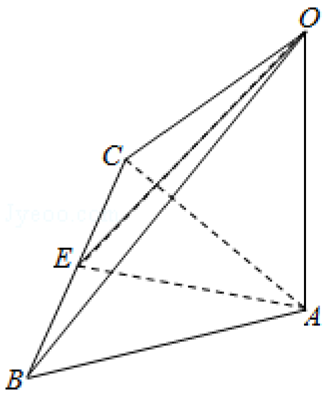
由直线与平面垂直的判定定理得：BC⊥面 AEO，AC=$\sqrt{5}$，OE=$\sqrt{5}$

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，$S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 1=\frac{\sqrt{5}}{2}$．

$S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$．

故该三棱锥的表面积是 $2+2\sqrt{5}$，

故选：C．



【点评】本题考查了空间几何体的三视图的运用，空间想象能力，计算能力，关键是恢复直观图，得出几何体的性质．

6．（5 分）设$\{a_n\}$是等差数列，下列结论中正确的是（　　）

A．若 $a_1+a_2>0$，则 $a_2+a_3>0$

B．若 $a_1+a_3<0$，则 $a_1+a_2<0$

C．若 $0<a_1<a_2$，则 $a_2>\sqrt{a_1a_3}$

D．若 $a_1<0$，则（a_2-a_1）（a_2-a_3）>0

【考点】83：等差数列的性质．

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列．

【分析】对选项分别进行判断，即可得出结论．

【解答】解：若 $a_1+a_2>0$，则 $2a_1+d>0$，$a_2+a_3=2a_1+3d>2d$，$d>0$ 时，结论成立，即 A 不正确；

若 $a_1+a_3<0$，则 $a_1+a_2=2a_1+d<0$，$a_2+a_3=2a_1+3d<2d$，$d<0$ 时，结论成立，即 B 不正确；

$\{a_n\}$是等差数列，$0<a_1<a_2$，$2a_2=a_1+a_3>2\sqrt{a_1a_3}$，$\therefore a_2>\sqrt{a_1a_3}$，即 C 正确；

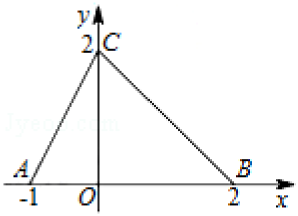
若 $a_1<0$，则（a_2-a_1）（a_2-a_3）$=-d^2\leqslant 0$，即 D 不正确．

故选：C．

【点评】本题考查等差数列的通项，考查学生的计算能力，比较基础．

7．（5 分）如图，函数 f（x）的图象为折线 ACB，则不等式 f（x）$\geqslant\log_2$（x+1）

的解集是（　　）



A．$\{x|-1<x\leqslant 0\}$ B．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$ C．$\{x|-1<x\leqslant 1\}$ D．$\{x|-1<x\leqslant 2\}$

【考点】7J：指、对数不等式的解法．

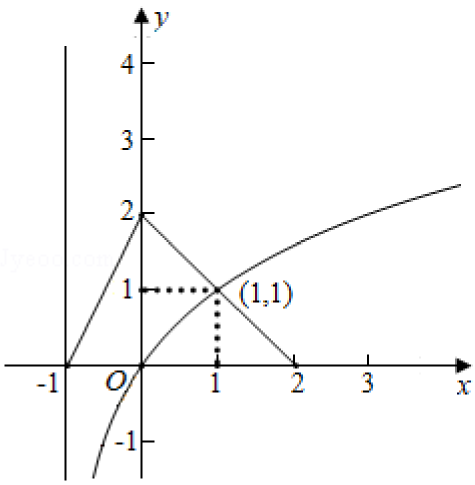
【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】在已知坐标系内作出 $y=\log_2(x+1)$ 的图象，利用数形结合得到不等式的解集．

【解答】解：由已知 $f(x)$ 的图象，在此坐标系内作出 $y=\log_2(x+1)$ 的图象，如图

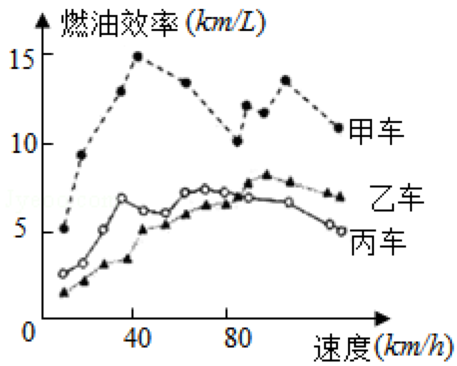
满足不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$ 的 x 范围是 $-1<x\leqslant 1$；所以不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$ 的解集是 $\{x|-1<x\leqslant 1\}$；

故选：C．



【点评】本题考查了数形结合求不等式的解集；用到了图象的平移．

8．（5 分）汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程，如图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下燃油效率情况，下列叙述中正确的是（　　）



A．消耗 1 升汽油，乙车最多可行驶 5 千米

B．以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多

C．某城市机动车最高限速 80 千米/小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油

D．甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗 10 升汽油

【考点】3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】31：数形结合；44：数形结合法；51：函数的性质及应用．

【分析】根据函数图象的意义逐项分析各说法是否正确．

【解答】解：对于 A，由图象可知当速度大于 40km/h 时，乙车的燃油效率大于 5km/L，

∴当速度大于 40km/h 时，消耗 1 升汽油，乙车的行驶距离大于 5km，故 A 错误；

对于 B，由图象可知当速度相同时，甲车的燃油效率最高，即当速度相同时，消耗 1 升汽油，甲车的行驶路程最远，

∴以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最少，故 B 错误；

对于 C，由图象可知当速度小于 80km/h 时，丙车的燃油效率大于乙车的燃油效率，

∴用丙车比用乙车更省油，故 C 正确；

对于 D，由图象可知当速度为 80km/h 时，甲车的燃油效率为 10km/L，

即甲车行驶 10km 时，耗油 1 升，故行驶 1 小时，路程为 80km，燃油为 8 升，故 D 错误．

故选：C．

【点评】本题考查了函数图象的意义，属于中档题．

二、填空题（每小题5分，共30分）

9.（5分）在（2+x）^{5}的展开式中，x^3的系数为__40__（用数字作答）

【考点】DA：二项式定理．

【专题】5P：二项式定理．

【分析】写出二项式定理展开式的通项公式，利用x的指数为3，求出r，然后求解所求数值．

【解答】解：（2+x）^{5}的展开式的通项公式为：$T_{r+1}=C_5^r 2^{5-r}x^r$，

所求x^3的系数为：$C_5^3 2^2=40$．

故答案为：40．

【点评】本题考查二项式定理的应用，二项式系数的求法，考查计算能力．

10.（5分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（a＞0）的一条渐近线为$\sqrt{3}x+y=0$，则a=__$\frac{\sqrt{3}}{3}$__．

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】运用双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{x}{a}$，结合条件可得$\frac{1}{a}=\sqrt{3}$，即可得到a的值．

【解答】解：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{x}{a}$，

由题意可得$\frac{1}{a}=\sqrt{3}$，

解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【点评】本题考查双曲线的方程和性质，主要考查双曲线的渐近线方程的求法，属于基础题．

11．（5 分）在极坐标系中，点（2，$\frac{\pi}{3}$）到直线 ρ（cosθ+$\sqrt{3}$sinθ）=6 的距离为 <u>1</u>．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程．

【专题】5S：坐标系和参数方程．

【分析】化为直角坐标，再利用点到直线的距离公式距离公式即可得出．

【解答】解：点 P（2，$\frac{\pi}{3}$）化为 P$(1，\sqrt{3})$．

直线 ρ（cosθ+$\sqrt{3}$sinθ）=6 化为 $x+\sqrt{3}y-6=0$．

∴点 P 到直线的距离 d=$\frac{|1+3-6|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}$=1．

故答案为：1．

【点评】本题考查了极坐标化为直角坐标方程、点到直线的距离公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

12．（5 分）在△ABC 中，a=4，b=5，c=6，则$\frac{\sin 2A}{\sin C}$= <u>1</u>．

【考点】GS：二倍角的三角函数；HP：正弦定理；HR：余弦定理．

【专题】11：计算题；58：解三角形．

【分析】利用余弦定理求出 cosC，cosA，即可得出结论．

【解答】解：∵△ABC 中，a=4，b=5，c=6，

∴cosC=$\frac{16+25-36}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$，cosA=$\frac{25+36-16}{2\times5\times6}=\frac{3}{4}$

∴sinC=$\frac{3\sqrt{7}}{8}$，sinA=$\frac{\sqrt{7}}{4}$，

∴$\frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{2\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$=1．

故答案为：1．

【点评】本题考查余弦定理，考查学生的计算能力，比较基础．

13．（5 分）在△ABC 中，点 M，N 满足$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$，若$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 x=__$\frac{1}{2}$__，y=__$-\frac{1}{6}$__．

【考点】9H：平面向量的基本定理．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】首先利用向量的三角形法则，将所求用向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示，然后利用平面向量基本定理得到 x，y 值．

【解答】解：由已知得到$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$；

由平面向量基本定理，得到 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{6}$；

故答案为：$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{6}$．

【点评】本题考查了平面向量基本定理的运用，一个向量用一组基底表示，存在唯一的实数对（x，y）使，向量等式成立．

14．（5 分）设函数 f（x）=$\begin{cases}2^x-a, & x<1\\ 4(x-a)(x-2a), & x\geq 1\end{cases}$，

①若 a=1，则 f（x）的最小值为___﹣1___；

②若 f（x）恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是__$\frac{1}{2}\leq a<1$ 或 $a\geq 2$___．

【考点】51：函数的零点；5B：分段函数的应用．

【专题】2：创新题型；51：函数的性质及应用．

【分析】①分别求出分段的函数的最小值，即可得到函数的最小值；

②分别设 h（x）=2^x﹣a，g（x）=4（x﹣a）（x﹣2a），分两种情况讨论，即可求出 a 的范围．

【解答】解：①当 a=1 时，f（x）=$\begin{cases}2^x-1, & x<1\\ 4(x-1)(x-2), & x\geq 1\end{cases}$，

当 x<1 时，f（x）=2^x﹣1 为增函数，f（x）>﹣1，

当 $x>1$ 时，$f(x)=4(x-1)(x-2)=4(x^2-3x+2)=4(x-\frac{3}{2})^2-1$，

当 $1<x<\frac{3}{2}$时，函数单调递减，当 $x>\frac{3}{2}$时，函数单调递增，

故当 $x=\frac{3}{2}$时，$f(x)_{min}=f(\frac{3}{2})=-1$，

②设 $h(x)=2^x-a$，$g(x)=4(x-a)(x-2a)$

若在 $x<1$ 时，$h(x)=$与 x 轴有一个交点，

所以 $a>0$，并且当 $x=1$ 时，$h(1)=2-a>0$，所以 $0<a<2$，

而函数 $g(x)=4(x-a)(x-2a)$有一个交点，所以 $2a\geqslant 1$，且 $a<1$，

所以$\frac{1}{2}\leqslant a<1$，

若函数 $h(x)=2^x-a$ 在 $x<1$ 时，与 x 轴没有交点，

则函数 $g(x)=4(x-a)(x-2a)$有两个交点，

当 $a\leqslant 0$ 时，$h(x)$与 x 轴无交点，$g(x)$无交点，所以不满足题意（舍去），

当 $h(1)=2-a\leqslant 0$ 时，即 $a\geqslant 2$ 时，$g(x)$的两个交点满足 $x_1=a$，$x_2=2a$，都是满足题意的，

综上所述 a 的取值范围是$\frac{1}{2}\leqslant a<1$，或 $a\geqslant 2$.

【点评】本题考查了分段函数的问题，以及函数的零点问题，培养了学生的转化能力和运算能力以及分类能力，属于中档题.

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

15.（13 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$在区间$[-\pi，0]$上的最小值.

【考点】GP：两角和与差的三角函数；H1：三角函数的周期性；HW：三角函数的最值.

【专题】11：计算题；56：三角函数的求值；57：三角函数的图像与性质.

【分析】（Ⅰ）运用二倍角公式和两角和的正弦公式，化简 $f(x)$，再由正弦函数的周期，即可得到所求；

（Ⅱ）由 x 的范围，可得 $x+\frac{\pi}{4}$的范围，再由正弦函数的图象和性质，即可求得最小值.

【解答】解：（Ⅰ）f（x）$=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos x)$

$=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 f（x）的最小正周期为 2π；

（Ⅱ）由 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$，可得

$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$,

即有 $-1\leqslant\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则当 $x=-\frac{3\pi}{4}$时，$\sin(x+\frac{\pi}{4})$取得最小值 ﹣1，

则有 f（x）在区间[﹣π，0]上的最小值为 $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点评】本题考查二倍角公式和两角和的正弦公式，同时考查正弦函数的周期和值域，考查运算能力，属于中档题.

16.（13 分）A，B 两组各有 7 位病人，他们服用某种药物后的康复时间（单位：天）记录如下：

A 组：10，11，12，13，14，15，16

B 组；12，13，15，16，17，14，a

假设所有病人的康复时间相互独立，从 A，B 两组随机各选 1 人，A 组选出的人记为甲，B 组选出的人记为乙.

（Ⅰ）求甲的康复时间不少于 14 天的概率；

（Ⅱ）如果 a=25，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率；

（Ⅲ）当 a 为何值时，A，B 两组病人康复时间的方差相等？（结论不要求证明）

【考点】BC：极差、方差与标准差；CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】5I：概率与统计．

【分析】设事件 A_i 为"甲是 A 组的第 i 个人"，事件 B_i 为"乙是 B 组的第 i 个人"，

由题意可知 P（A_i）=P（B_i）=$\frac{1}{7}$，i=1，2，••，7

（Ⅰ）事件等价于"甲是 A 组的第 5 或第 6 或第 7 个人"，由概率公式可得；

（Ⅱ）设事件"甲的康复时间比乙的康复时间长"$C=A_4B_1\cup A_5B_1\cup A_6B_1\cup A_7B_1\cup A_5B_2\cup A_6B_2\cup A_7B_2\cup A_7B_3\cup A_6B_6\cup A_7B_6$，易得 P（C）=10P（$A_4B_1$），易得答案；

（Ⅲ）由方差的公式可得．

【解答】解：设事件 A_i 为"甲是 A 组的第 i 个人"，事件 B_i 为"乙是 B 组的第 i 个人"，

由题意可知 P（A_i）=P（B_i）=$\frac{1}{7}$，i=1，2，••，7

（Ⅰ）事件"甲的康复时间不少于 14 天"等价于"甲是 A 组的第 5 或第 6 或第 7 个人"

∴甲的康复时间不少于 14 天的概率 P（$A_5\cup A_6\cup A_7$）=P（A_5）+P（A_6）+P（A_7）=$\frac{3}{7}$；

（Ⅱ）设事件 C 为"甲的康复时间比乙的康复时间长"，

则 $C=A_4B_1\cup A_5B_1\cup A_6B_1\cup A_7B_1\cup A_5B_2\cup A_6B_2\cup A_7B_2\cup A_7B_3\cup A_6B_6\cup A_7B_6$，

∴P（C）=P（A_4B_1）+P（A_5B_1）+P（A_6B_1）+P（A_7B_1）+P（A_5B_2）+P（A_6B_2）+P（A_7B_2）+P（A_7B_3）+P（A_6B_6）+P（A_7B_6）

=10P（A_4B_1）=10P（A_4）P（B_1）=$\frac{10}{49}$

（Ⅲ）当 a 为 11 或 18 时，A，B 两组病人康复时间的方差相等．

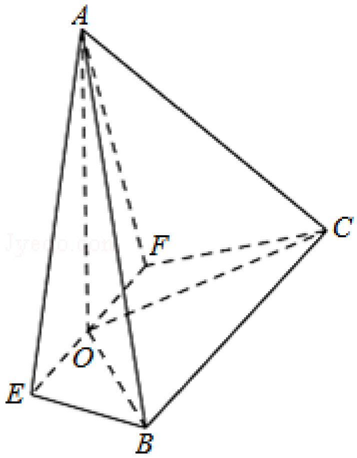
【点评】本题考查古典概型及其概率公式，涉及概率的加法公式和方差，属基础题．

17．（14 分）如图，在四棱锥 A－EFCB 中，△AEF 为等边三角形，平面 AEF⊥平面 EFCB，EF∥BC，BC=4，EF=2a，∠EBC=∠FCB=60°，O 为 EF 的中点．

（Ⅰ）求证：AO⊥BE．

（Ⅱ）求二面角 F－AE－B 的余弦值；

（Ⅲ）若 BE⊥平面 AOC，求 a 的值．



【考点】LW：直线与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】5F：空间位置关系与距离；5G：空间角．

【分析】（Ⅰ）根据线面垂直的性质定理即可证明 AO⊥BE．

（Ⅱ）建立空间坐标系，利用向量法即可求二面角 F﹣AE﹣B 的余弦值；

（Ⅲ）利用线面垂直的性质，结合向量法即可求 a 的值

【解答】证明：（Ⅰ）∵△AEF 为等边三角形，O 为 EF 的中点，

∴AO⊥EF，

∵平面 AEF⊥平面 EFCB，AO⊂平面 AEF，

∴AO⊥平面 EFCB

∴AO⊥BE．

（Ⅱ）取 BC 的中点 G，连接 OG，

∵EFCB 是等腰梯形，

∴OG⊥EF，

由（Ⅰ）知 AO⊥平面 EFCB，

∵OG⊂平面 EFCB，∴OA⊥OG，

建立如图的空间坐标系，

则 OE=a，BG=2，GH=a，（a≠2），BH=2﹣a，EH=BHtan60°=$\sqrt{3}(2-a)$，

则 E（a，0，0），A（0，0，$\sqrt{3}a$），B（2，$\sqrt{3}(2-a)$，0），

$\overrightarrow{EA}$=（﹣a，0，$\sqrt{3}a$），$\overrightarrow{BE}$=（a﹣2，﹣$\sqrt{3}(2-a)$，0），

设平面 AEB 的法向量为$\overrightarrow{n}$=（x，y，z），

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-ax+\sqrt{3}az=0\\ (a-2)x+\sqrt{3}(a-2)y=0\end{cases}$，

令 $z=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$y=-1$，

即$\vec{n}=$（$\sqrt{3}$，-1，1），

平面 AEF 的法向量为$\vec{m}=(0,\ 1,\ 0)$，

则 $\cos<\vec{m},\ \vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

即二面角 F﹣AE﹣B 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$;

（Ⅲ）若 BE⊥平面 AOC，

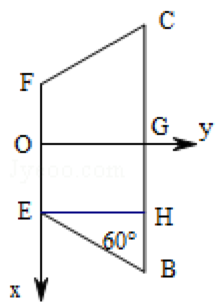
则 BE⊥OC，

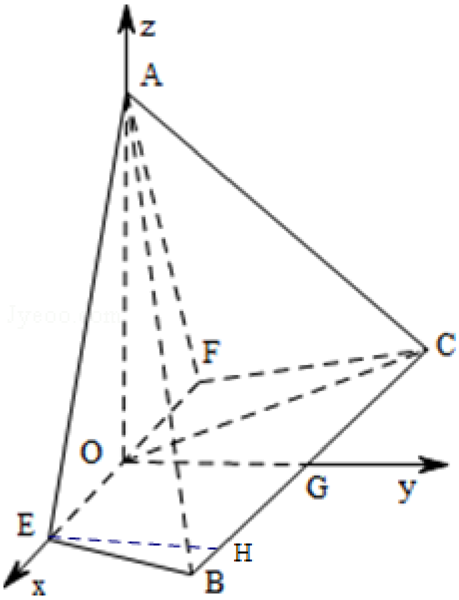
即$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，

∵$\overrightarrow{BE}=$（$a-2$，$-\sqrt{3}(2-a)$，0），$\overrightarrow{OC}=$（-2，$\sqrt{3}(2-a)$，0），

∴$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}=-2(a-2)-3(a-2)^2=0$，

解得 $a=\dfrac{4}{3}$.





【点评】本题主要考查空间直线和平面垂直的判定以及二面角的求解，建立坐标系利用向量法是解决空间角的常用方法．

18．（13 分）已知函数 f（x）$=\ln\frac{1+x}{1-x}$，

（Ⅰ）求曲线 y=f（x）在点（0，f（0））处的切线方程；

（Ⅱ）求证，当 x∈（0，1）时，f（x）$>2(x+\frac{x^3}{3})$；

（Ⅲ）设实数 k 使得 f（x）$>k(x+\frac{x^3}{3})$对 x∈（0，1）恒成立，求 k 的最大值．

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】53：导数的综合应用．

【分析】（1）利用函数的导数求在曲线上某点处的切线方程．

（2）构造新函数利用函数的单调性证明命题成立．

（3）对 k 进行讨论，利用新函数的单调性求参数 k 的取值范围．

【解答】解答：（1）因为 f（x）=ln（1+x）﹣ln（1﹣x）所以

$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$，$f'(0)=2$

又因为 f（0）=0，所以曲线 y=f（x）在点（0，f（0））处的切线方程为 y=2x．

（2）证明：令 g（x）=f（x）﹣2（x$+\frac{x^3}{3}$），则

g'（x）=f'（x）﹣2（1+x²）=$\frac{2x^2}{1-x^2}$，

因为g'（x）＞0（0＜x＜1），所以g（x）在区间（0，1）上单调递增．

所以g（x）＞g（0）=0，x∈（0，1），

即当x∈（0，1）时，f（x）＞2（x+$\frac{x^3}{3}$）．

（3）由（2）知，当k≤2时，f（x）＞$k(x+\frac{x^3}{3})$对x∈（0，1）恒成立．

当k＞2时，令h（x）=f（x）﹣$k(x+\frac{x^3}{3})$，则

h'（x）=f'（x）﹣k（1+x²）=$\frac{kx^4-(k-2)}{1-x^2}$，

所以当$0<x<\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$时，h'（x）＜0，因此h（x）在区间（0，$\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$）上单调递减．

当$0<x<\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$时，h（x）＜h（0）=0，即f（x）＜$k(x+\frac{x^3}{3})$．

所以当k＞2时，f（x）＞$k(x+\frac{x^3}{3})$并非对x∈（0，1）恒成立．

综上所知，k的最大值为2．

【点评】本题主要考查切线方程的求法及新函数的单调性的求解证明．在高考中属常考题型，难度适中．

19．（14分）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，点P（0，1）和点A（m，n）（m≠0）都在椭圆C上，直线PA交x轴于点M．

（Ⅰ）求椭圆C的方程，并求点M的坐标（用m，n表示）；

（Ⅱ）设O为原点，点B与点A关于x轴对称，直线PB交x轴于点N，问：y轴上是否存在点Q，使得∠OQM=∠ONQ？若存在，求点Q的坐标，若不存在，说明理由．

【考点】K3：椭圆的标准方程；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】2：创新题型；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程；5E：圆锥曲线中的

最值与范围问题.

【分析】(I) 根据椭圆的几何性质得出$\begin{cases}b=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$求解即可.

(II) 求解得出 M（$\frac{m}{1-n}$，0），N（$\frac{m}{1+n}$，0），运用图形得出 tan∠OQM=tan∠ONQ，$\frac{y_Q}{x_M}=\frac{x_Q}{y_Q}$，求解即可得出即 $y_Q^2=x_M \bullet x_N$，$\frac{m^2}{2}+n^2$，根据 m，m 的关系整体求解.

【解答】解：(Ⅰ) 由题意得出$\begin{cases}b=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$

解得：$a=\sqrt{2}$，b=1，c=1

∴$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

∵P（0，1）和点 A（m，n），$-1<n<1$

∴PA 的方程为：$y-1=\frac{n-1}{m}x$，y=0 时，$x_M=\frac{m}{1-n}$

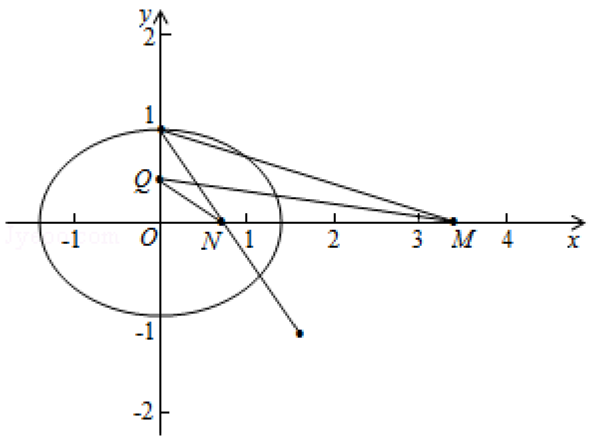
∴M（$\frac{m}{1-n}$，0）

(II) ∵点 B 与点 A 关于 x 轴对称，点 A（m，n）（m≠0）

∴点 B（m，﹣n）（m≠0）

∵直线 PB 交 x 轴于点 N，

∴N（$\frac{m}{1+n}$，0），



∵存在点 Q，使得∠OQM=∠ONQ，Q（0，y_Q），

∴tan∠OQM=tan∠ONQ，

∴$\frac{y_Q}{x_M}=\frac{x_N}{y_Q}$，即 $y_Q^2=x_M\bullet x_N$，$\frac{m^2}{2}+n^2=1$

$y_Q^2=\frac{m^2}{1-n^2}=2$，

∴$y_Q=\pm\sqrt{2}$，

故 y 轴上存在点 Q，使得∠OQM=∠ONQ，Q（0，$\sqrt{2}$）或 Q（0，$-\sqrt{2}$）

【点评】本题考查了直线圆锥曲线的方程，位置关系，数形结合的思想的运用，运用代数的方法求解几何问题，难度较大，属于难题．

20．（13 分）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1\in N^*$，$a_1\leqslant 36$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$（n=1，2，…），记集合 $M=\{a_n|n\in N^*\}$．

（Ⅰ）若 $a_1=6$，写出集合 M 的所有元素；

（Ⅱ）如集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，证明：M 的所有元素都是 3 的倍数；

（Ⅲ）求集合 M 的元素个数的最大值．

【考点】8H：数列递推式．

【专题】2：创新题型；55：点列、递归数列与数学归纳法．

【分析】（Ⅰ）$a_1=6$，利用 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$可求得集合 M 的所有元素为 6，12，24；

（Ⅱ）因为集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，所以不妨设 a_k 是 3 的倍数，由 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$（n=1，2，…），可归纳证明对任意 n≥k，$a_n$ 是 3 的倍数；

（Ⅲ）分 a_1 是 3 的倍数与 a_1 不是 3 的倍数讨论，即可求得集合 M 的元素个数的最大值．

【解答】解：（Ⅰ）若 $a_1=6$，由于 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$（n=1，2，…），$M=\{a_n|n$

$\in N^*\}$.

故集合 M 的所有元素为 6，12，24；

（Ⅱ）因为集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，所以不妨设 a_k 是 3 的倍数，由 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}$（n=1，2，…），可归纳证明对任意 $n\geqslant k$，a_n 是 3 的倍数．

如果 k=1，M 的所有元素都是 3 的倍数；

如果 k＞1，因为 $a_k=2a_{k-1}$，或 $a_k=2a_{k-1}-36$，所以 $2a_{k-1}$ 是 3 的倍数；于是 a_{k-1} 是 3 的倍数；

类似可得，a_{k-2}，…，a_1 都是 3 的倍数；

从而对任意 $n\geqslant 1$，a_n 是 3 的倍数；

综上，若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，则集合 M 的所有元素都是 3 的倍数

（Ⅲ）对 $a_1\leqslant 36$，$a_n=\begin{cases}2a_{n-1}, & a_n\leqslant 18\\ 2a_{n-1}-36, & a_n>18\end{cases}$（n=1，2，…），可归纳证明对任意 $n\geqslant k$，$a_n<36$（n=2，3，…）

因为 a_1 是正整数，$a_2=\begin{cases}2a_1, & a_1\leqslant 18\\ 2a_1-36, & a_1>18\end{cases}$，所以 a_2 是 2 的倍数．

从而当 $n\geqslant 2$ 时，a_n 是 2 的倍数．

如果 a_1 是 3 的倍数，由（Ⅱ）知，对所有正整数 n，a_n 是 3 的倍数．

因此当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n\in\{12，24，36\}$，这时 M 的元素个数不超过 5．

如果 a_1 不是 3 的倍数，由（Ⅱ）知，对所有正整数 n，a_n 不是 3 的倍数．

因此当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n\in\{4，8，16，20，28，32\}$，这时 M 的元素个数不超过 8．

当 $a_1=1$ 时，M=\{1，2，4，8，16，20，28，32\}，有 8 个元素．

综上可知，集合 M 的元素个数的最大值为 8．

【点评】本题考查数列递推关系的应用，突出考查分类讨论思想与等价转化思想及推理、运算能力，属于难题．