

2012 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数 学（理工类）

【试题总评】历年的四川高考试题都始终遵从源于教材、注重基础、全面考查、突出主干、注重思想、考查本质、多考点想，少考点算、能力立意、突出思维、稳中有进，2012 年高考数学四川卷也不例外，作为四川省最后一届的大纲版学习考试，在此次的高考中，试卷在题型、题量、难度分布上保持了相对的稳定，同时也有适当的创新，在 2010 年四川高考中把 17、18、19 题考点内容进行调整后，此次高考试卷也对试题的顺序做了适当的顺序调整，打破了以前的传统式的考题顺序。2012 年四川高考数学卷很大一部分试题直接源于教材或由教材上的例题、习题、复习题改变而成，这些试题注重基础知识的理解和运用。例如第 (1)、(5)、(8) 等 15 个题目。从而也充分说明了高考对基础知识的重视，立足于教材、回归到教材、重视课本、减轻学业负担，实施素质教育的导向作用。2012 年四川高考数学解答题目注重学生对基础知识的理解和运用，在题型上面略有创新，题目的灵活性加强，不再像以往试题固定化模式解题。解答题部分注重考察学生的思维能力，运算能力，分析问题和解决问题的能力，创新意识，考察函数，方程的转化、划归，特殊和一般等思想方法。总的来说，2012 年四川高考数学试题相对稳定，注重基础，保持了四川卷的命题风格，同时又立足于现行高中数学教材和教学实际试题。

参考公式：

如果事件互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件相互独立，那么

$$P(A \times B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p ，那么

在 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

第一部分 （选择题 共 60 分）

注意事项：

1、选择题必须使用 2B 铅笔将答案标号涂在机读卡上对应题目标号的位置上。

2、本部分共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

一、选择题：每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $(1+x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是 ()

A、21

B、28

C、35

D、42

答案：21

解析： $(1+x)^7$ 的通项公式为 $T_{r+1} = C_7^r x^r$ ，当 $r=2$ 时，得展开式中 x^2 的系数是 $C_7^2 = 21$ 。

考点定位：本题考查二项式定理，意在考查考生对二项式定理通项的应用

2、复数 $\frac{(1-i)^2}{2i} = (\quad)$

- A、1 B、-1 C、 i D、 $-i$

答案：B

解析： $\frac{(1-i)^2}{2i} = \frac{1-2i+i^2}{2i} = \frac{-2i}{2i} = -1$

考点定位：本题考查复数的运算，意在考查考生对复数的计算能力及对共轭复数、实虚部的理解判断能力；

3、函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x < 3 \\ \ln(x-2), & x \geq 3 \end{cases}$ 在 $x=3$ 处的极限是 ()

- A、不存在 B、等于6 C、等于3 D、等于0

答案：A

解析：当 $x < 3$ 时， $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 6$

当 $x > 3$ 时， $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-2) = 0$

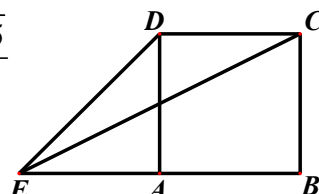
由于 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的左极限不等于右极限，所以函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的极限不存在。

考点定位：本题考查极限的运算，意在考查考生对极限的计算能力及对极限中左极限、右极限的理解判断能力；

4、如图，正方形 $ABCD$ 的边长为1，延长 BA 至 E ，使 $AE=1$ ，连接 EC 、 ED 则 $\sin \angle CED = (\quad)$

- A、 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B、 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C、 $\frac{\sqrt{5}}{10}$ D、 $\frac{\sqrt{5}}{15}$

答案：B

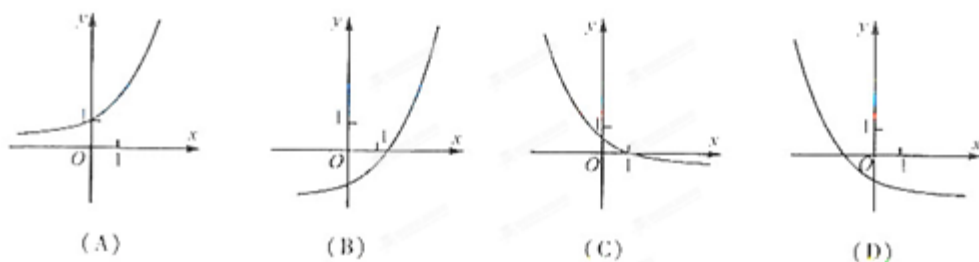


解析：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，且 $AE=AD=1$ ，所以 $\sin \angle BEC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \angle BEC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

$$\sin \angle CED = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \angle BEC\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \angle BEC - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \angle BEC = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

考点定位：本题考查三角函数的运算，意在考查考生对两角差的正弦的计算能力及对几何体中角之间的转化能力；

5、函数 $y = a^x - \frac{1}{a}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象可能是 ()



答案：D

解析：当 $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 单调递增， $-1 < -\frac{1}{a} < 0$ ，所以 $y = a^x - \frac{1}{a}$ 的图像与 y 轴的交点的纵坐标在 0 至 1 之间，所以选项 A、B 都不正确；当 $0 < a < 1$ 时，函数 $y = a^x$ 单调递减，而此时 $-\frac{1}{a} < -1$ ，所以函数 $y = a^x - \frac{1}{a}$ 与 y 轴的交点在 x 轴的下方，选项 D 符合条件。

考点定位：本题考查函数图像，意在考查考生对指数函数图像、单调性的理解和应用能力；

6、下列命题正确的是（ ）

- A、若两条直线和同一个平面所成的角相等，则这两条直线平行
- B、若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等，则这两个平面平行
- C、若一条直线平行于两个相交平面，则这条直线与这两个平面的交线平行
- D、若两个平面都垂直于第三个平面，则这两个平面平行

答案：C

解析：若两条直线和同一个平面所成的角相等，则这两条直线可平行、可相交、可异面，故选项 A 错；

如果到一个平面距离相等的三个点在同一条直线上或在这个平面的两侧，则经过这三个点的平面与这个平面相交，故选项 B 错；

若两个平面都垂直于第三个平面，则这两个平面可平行、可相交，故选项 D 错。

考点定位：本题考查立体几何中的公理、定理，意在考查考生应用公理、定理判断命题的正确性。

7、设 \vec{a} 、 \vec{b} 都是非零向量，下列四个条件中，使 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立的充分条件是（ ）

- A、 $\vec{a} = -\vec{b}$
- B、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- C、 $\vec{a} = 2\vec{b}$
- D、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

答案：C

解析：因为 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ，则向量 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 与 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 是方向相同的单位向量，所以 \vec{a} 与 \vec{b} 共线同向，即

使 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立的充分条件为选项 C。

考点定位：本题考查充分必要条件以及向量的模的运算，意在考查考生对单位向量的理解能力和对充分必要条件的理解能力。

8. 已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点 O ，并且经过点 $M(2, y_0)$ 。若点 M 到该

抛物线焦点的距离为3，则 $|OM| = (\quad)$

- A、 $2\sqrt{2}$ B、 $2\sqrt{3}$ C、4 D、 $2\sqrt{5}$

答案： B

解析：由抛物线定义知， $\frac{p}{2} + 2 = 3$ ，所以 $p = 2$ ，抛物线方程为 $y^2 = 4x$ ，因为点 $M(2, y_0)$

在此抛物线上，所以 $y_0^2 = 8$ ，于是 $|OM| = \sqrt{4 + y_0^2} = 2\sqrt{3}$

考点定位：本题考查抛物线，意在考查考生对抛物线标准方程的应用能力。

9、某公司生产甲、乙两种桶装产品。已知生产甲产品1桶需耗A原料1千克、B原料2千克；生产乙产品1桶需耗A原料2千克，B原料1千克。每桶甲产品的利润是300元，每桶乙产品的利润是400元。公司在生产这两种产品的计划中，要求每天消耗A、B原料都不超过12千克。通过合理安排生产计划，从每天生产的甲、乙两种产品中，公司共可获得的最大利润是()

- A、1800元 B、2400元 C、2800元 D、3100元

答案： C

解析：设某公司生产甲产品 x 桶，生产乙产品 y 桶，获利为 z 元，则 x, y 满足的线性约束条

$$\text{件为} \begin{cases} x+2y \leq 12 \\ 2x+y \leq 12 \\ x \geq 0 \text{ 且 } x \in \mathbb{Z} \\ y \geq 0 \text{ 且 } y \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{目标函数 } z = 300x + 400y.$$

作出可行域，如图中四边形OABC的边界及其内部整点。

作直线 $l_0: 3x + 4y = 0$ ，平移直线 l_0 经可行域内点B时， z 取最大值，由

$$\begin{cases} 2x+y=12 \\ x+2y=12 \end{cases}, \text{得 } B(4,4), \text{ 满足题意, 所以 } z_{\max} = 4 \times 300 + 4 \times 400 = 2800.$$

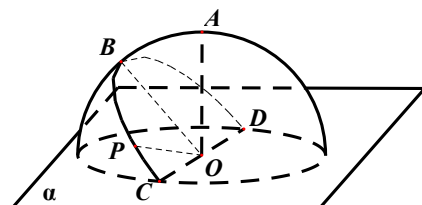
考点定位：本小题考查线性规划的最值问题，考查学生的画图能力和转化能力。

10、如图，半径为 R 的半球 O 的底面圆 O 在平面 α 内，过点 O 作平面 α 的垂线交半球面于点 A ，过圆 O 的直径 CD 作平面 α 成 45° 角的平面与半球面相交，所得交线上到平面 α

的距离最大的点为 B ，该交线上的一点 P 满足 $\angle BOP = 60^\circ$ ，则 A 、 P 两点间的球面距离为()

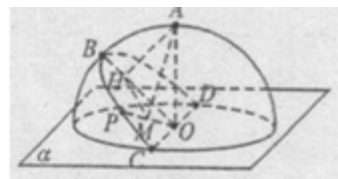
- A、 $R \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$ B、 $\frac{\pi R}{4}$ C、 $R \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ D、

$$\frac{\pi R}{3}$$



答案：A

解析：过点 A 作 $AH \perp$ 平面 BCD ，平面 BCD 与底面所成的角为 45° ， $AO \perp$ 平面 α ，且点 B 为交线上与平面 α 的距离



最大的点， \therefore 点 H 在 OB 上，且 $\angle AOB = 45^\circ$. 过点 H 作 $HM \perp OP$ ，垂足为 M，连接 AM，

在等腰直角三角形 AOH 中， $AH = OH = \frac{\sqrt{2}}{2}R$. 在 $Rt\triangle HOM$ 中， $\angle HOP = 60^\circ$ ，

$$\therefore HM = OH \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}R.$$

$$\text{在 } Rt\triangle AHM \text{ 中, } AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{2}{4}R^2 + \frac{6}{16}R^2} = \sqrt{\frac{14}{16}R^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}R$$

$$\text{则在 } Rt\triangle AMO \text{ 中, } \sin \angle AOP = \frac{\frac{\sqrt{14}}{4}R}{R} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\therefore \cos \angle AOP = \frac{\sqrt{2}}{4}, \therefore \angle AOP = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore A, P \text{ 两点的球面距离为 } R \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

考点定位：本题考查球体的几何性质，意在考查考生作图的能力和空间想象能力。

11、方程 $ay = b^2x^2 + c$ 中的 $a, b, c \in \{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}$ ，且 a, b, c 互不相同，在所有这些方程所表示的曲线中，不同的抛物线共有（ ）

A、60 条

B、62 条

C、71 条

D、80 条

答案：B

解析：因为 a, b 不能为 0，先确定 a, b 的值有 A_5^2 ，则 c 有 C_4^1 ，即形成抛物线的条数为 $A_5^2 C_4^1 = 80$

条，当 $b = \pm 2$ 时， b^2 的值相同，重复的抛物线的条数有 $C_3^1 C_3^1 = 9$ 条；同理当 $b = \pm 3$ 时，重复的也有 9 条，所以不同的抛物线为 $80 - 18 = 62$ 条。

考点定位：本题考查排列组合问题，意在考查考生在抛物线的背景下求解，注意到重复的抛物线是解决本题的关键。

12、设函数 $f(x) = 2x - \cos x$ ， $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列，

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_5) = 5\pi,$$

则 $[f(a_3)]^2 - a_1 a_5 =$ ()

- A、0 B、 $\frac{1}{16}\pi^2$ C、 $\frac{1}{8}\pi^2$ D、 $\frac{13}{16}\pi^2$

答案：D

解析：因为 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{\pi}{8}$ 为公差的等差数列，所以 $a_1 = a_3 - \frac{\pi}{4}$ ， $a_2 = a_3 - \frac{\pi}{8}$ ， $a_4 = a_3 + \frac{\pi}{8}$ ，

$a_5 = a_3 + \frac{\pi}{4}$ ，则 $f(a_1) = 2a_3 - \frac{\pi}{2} - \cos(a_3 - \frac{\pi}{4})$ ， $f(a_2) = 2a_3 - \frac{\pi}{4} - \cos(a_3 - \frac{\pi}{8})$ ，

$f(a_3) = 2a_3 - \cos a_3$ ， $f(a_4) = 2a_3 + \frac{\pi}{4} - \cos(a_3 + \frac{\pi}{8})$ ， $f(a_5) = 2a_3 + \frac{\pi}{2} - \cos(a_3 + \frac{\pi}{4})$ 。

所以 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4) + f(a_5)$

$$= 10a_3 - [\cos(a_3 - \frac{\pi}{4}) + \cos(a_3 - \frac{\pi}{8}) + \cos a_3 + \cos(a_3 + \frac{\pi}{8}) + \cos(a_3 + \frac{\pi}{4})]$$

$$= 10a_3 - (\sqrt{2} \cos a_3 + \cos a_3 + 2 \cos \frac{\pi}{8} \cos a_3)$$

$$= 10a_3 - (\sqrt{2} + 1 + 2 \cos \frac{\pi}{8}) \cos a_3$$

$$= 5\pi$$

$$\text{则 } a_3 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{于是 } a_1 = a_3 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, a_5 = a_3 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, f(a_3) = 2 \times \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\text{故 } [f(a_3)]^2 - a_1 a_5 = \pi^2 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{13}{16} \pi^2.$$

考点定位：本题考查数列的计算，意在考查考生对数列性质的灵活运用能力

第二部分 （非选择题 共 90 分）

注意事项：

（1）必须使用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答，作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚。答在试题卷上无效。

（2）本部分共 10 个小题，共 90 分。

二、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在答题纸的相应位置上。）

13、设全集 $U = \{a, b, c, d\}$ ，集合 $A = \{a, b\}$ ， $B = \{b, c, d\}$ ，则

答案： $\{a, b, c\}$

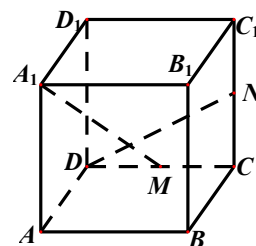
$$(C_U A) \cup (C_U B) =$$

解析： $C_U A = \{c, d\}$ ， $C_U B = \{a\}$ ，所以 $(C_U A) \cup (C_U B) = \{a, c, d\}$ 。

考点定位：本题考查集合中的运算，意在考查考生对集合中补集并集的理解；

_____。

- 14、如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 、 N 分别是棱 CD 、 CC_1 的中点，则异面直线 A_1M 与 DN 所成角的大小是_____。



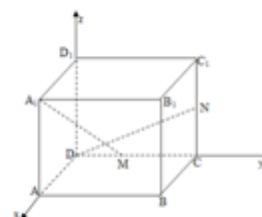
答案： 90°

解析：如图，以点 D 为原点，以 DA, DC, DD_1 为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立坐标系 $D-xyz$ 。

设正方体的棱长为 2，

$$\text{则 } \overrightarrow{MA_1} = (2, -1, 2), \overrightarrow{DN} = (0, 2, 1), \overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{DN} = 0,$$

故异面直线 A_1M 与 ND 所成角为 90° 。



考点定位：本题主要考查正方体中异面直线所成角问题，意在考查考生以空间向量为背景解题的方法求解，突出考查空间想象能力和计算能力。

- 15、椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F ，直线 $x = m$ 与椭圆相交于点 A 、 B ，当 $\triangle FAB$ 的周长最大时， $\triangle FAB$ 的面积是_____。

答案： 3

解析：设椭圆的右焦点为 F_1 ，则 $|AF| = 2a - |AF_1| = 4 - |AF_1|$

$$\therefore \triangle AFB \text{ 的周长为 } 2|AF| + 2|AH| = 2(4 - |AF_1| + |AH|).$$

$\therefore \triangle AF_1H$ 为直角三角形，

$$\therefore |AF_1| > |AH|, \text{ 仅当 } F_1 \text{ 与 } H \text{ 重合时, } |AF_1| = |AH|,$$

$$\therefore \text{当 } m=1 \text{ 时, } \triangle AFB \text{ 的周长最大, 此时 } S_{\triangle FAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times |AB| = 3.$$

考点定位：本题考查椭圆，意在考查考生对椭圆的焦点、椭圆图形的理解，考查考生的数形结合思想；

- 16、记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数，例如， $[2] = 2$ ， $[1.5] = 1$ ， $[-0.3] = -1$ 。设 a 为正

整数，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = a$ ， $x_{n+1} = \left[\frac{x_n + \left[\frac{a}{x_n} \right]}{2} \right] (n \in N^*)$ ，现有下列命题：

- ①当 $a = 5$ 时，数列 $\{x_n\}$ 的前 3 项依次为 5, 3, 2；

②对数列 $\{x_n\}$ 都存在正整数 k ，当 $n \geq k$ 时总有 $x_n = x_k$ ；

③当 $n \geq 1$ 时， $x_n > \sqrt{a} - 1$ ；

④对某个正整数 k ，若 $x_{k+1} \geq x_k$ ，则 $x_n = [\sqrt{a}]$ 。

其中的真命题有_____。（写出所有真命题的编号）

答案：①③④

解析：当 $a=5$ 时， $x_1=5, x_2=[\frac{5+1}{2}]=3, x_3=[\frac{3+[\frac{5}{2}]}{2}]=2$ ，①正确。

当 $a=1$ 时， $x_1=1, x_2=[\frac{1+[\frac{1}{2}]}{2}]=1, x_3=1$ ， x_k 恒等于 $[\sqrt{1}]=1$ ；

当 $a=2$ 时， $x_1=2, x_2=[\frac{2+1}{2}]=[\frac{3}{2}]=1, x_3=[\frac{1+[\frac{2}{2}]}{2}]=[\frac{3}{2}]=1$ ，

所以当 $k \geq 2$ 时，恒有 $x_k = [\sqrt{2}]=1$ ；

当 $a=3$ 时，

$$x_1=3, x_2=[\frac{3+1}{2}]=2, x_3=[\frac{2+[\frac{3}{2}]}{2}]=[\frac{3}{2}]=1=[\sqrt{3}],$$

$$x_4=[\frac{1+[\frac{3}{2}]}{2}]=2, x_5=[\frac{2+[\frac{3}{2}]}{2}]=[\frac{3}{2}]=1, x_6=[\frac{1+3}{2}]=2,$$

所以当 k 为偶数时， $x_k = 2$ ，当 k 为大于 1 的奇数时， $x_k = 1$ ，②不正确。

在 $x_n + [\frac{a}{x_n}]$ 中，当 $\frac{a}{x_n}$ 为正整数时， $x_n + [\frac{a}{x_n}] = x_n + \frac{a}{x_n} \geq 2\sqrt{a}$ ，

$\therefore x_{n+1} = [\frac{x_n + [\frac{a}{x_n}]}{2}] \geq [\frac{2\sqrt{a}}{2}] = [\sqrt{a}]$ ；当 $\frac{a}{x_n}$ 不是正整数时，令 $[\frac{a}{x_n}] = \frac{a}{x_n} - t$ ， t 为 $[\frac{a}{x_n}]$ 的

小数部分， $0 < t < 1$ ， $x_{n+1} = [\frac{x_n + [\frac{a}{x_n}]}{2}] = [\frac{x_n + \frac{a}{x_n} - t}{2}] > [\frac{2\sqrt{a} - t}{2}] = [\sqrt{a} - \frac{t}{2}] = [\sqrt{a}]$ ，

$\therefore x_{n+1} \geq [\sqrt{a}]$ ， $\therefore x_n \geq [\sqrt{a}]$ 即 $x_n > \sqrt{a} - 1$ ，③正确。

由以上论证知，存在某个正整数 k ，若 $x_{k+1} \geq x_k$ ，则 $x_k = [\sqrt{a}]$ ，④正确。

考点定位：本题考查的是信息题，意在考查考生对新信息的阅读和理解能力；

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 74 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。）

17、(本小题满分 12 分)

某居民小区有两个相互独立的安全防范系统（简称系统） A 和 B ，系统 A 和 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{10}$ 和 p 。

（I）若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$ ，求 p 的值；

（II）设系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数为随机变量 ξ ，求 ξ 的概率分布列及数学期望 $E\xi$ 。

解：（1）设“至少有一个系统不发生故障”为事件 C ，那么 $1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{10} \cdot p = \frac{49}{50}$ 。

解得 $p = \frac{1}{5}$ 。

（2）由题意， $P(\xi = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{27}{1000}$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{243}{1000}$$

$$P(\xi = 3) = C_3^3 \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{729}{1000}$$

所以，随机变量 ξ 的概率分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{729}{1000}$

故随机变量 ξ 的数学期望：

$$E\xi = 0 \times \frac{1}{1000} + 1 \times \frac{27}{1000} + 2 \times \frac{243}{1000} + 3 \times \frac{729}{1000} = \frac{27}{10}$$

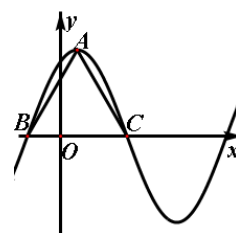
考点定位：本小题考查相互独立事件、独立重复试验、互斥事件、随机变量的分布列、数学期望等概念及相关计算，考查运用概率知识与方法解决实际问题的能力。

18、(本小题满分 12 分)

函数 $f(x) = 6\cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \sin \omega x - 3 (\omega > 0)$ 在一个周期内的图象如图所示， A 为图象的最高点， B 、 C 为图象与 x 轴的交点，且 $\triangle ABC$ 为正三角形。

（I）求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域；

（II）若 $f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ ，且 $x_0 \in \left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ，求 $f(x_0 + 1)$ 的值。



解：(1) 由已知可得， $f(x) = 3 \cos \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x = 2\sqrt{3} \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$.

又正三角形 ABC 的高为 $2\sqrt{3}$ ，从而 $BC=4$.

所以函数 $f(x)$ 的周期 $T = 4 \times 2 = 8$ ，即 $\frac{2\pi}{\omega} = 8$ ， $\omega = \frac{\pi}{4}$.

函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$.

(2) 因为 $f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ ，由 (1) 有

$$f(x_0) = 2\sqrt{3} \sin(\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{3}) = \frac{8\sqrt{3}}{5},$$

$$\text{即 } \sin(\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{3}) = \frac{4}{5}.$$

由 $x_0 \in (-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ ，知 $\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，

$$\text{所以 } \cos(\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } f(x_0+1) &= 2\sqrt{3} \sin(\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) \\ &= 2\sqrt{3} \sin[(\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{4}] \\ &= 2\sqrt{3} [\sin(\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi}{4} + \cos(\frac{\pi x_0}{4} + \frac{\pi}{3}) \sin \frac{\pi}{4}] \\ &= 2\sqrt{3} (\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \frac{7\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

考点定位：本小题主要考查三角函数的图像与性质、同角三角函数的关系、两角个的正余弦公式、二倍角公式等基础知识.考查运算能力，考查数形结合、化归与转化等数学思想.

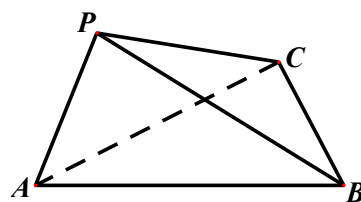
19、(本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\angle APB = 90^\circ$ ， $\angle PAB = 60^\circ$ ， $AB = BC = CA$ ，点 P 在平面 ABC 内的射影 O 在 AB 上.

(I) 求直线 PC 与平面 ABC 所成的角的大小；

(II) 求二面角 $B-AP-C$ 的大小.

答案：(I) $\arctan \frac{\sqrt{39}}{13}$ (II) $\arctan 2$



解析：解法一：

(I) 连接 OC ，由已知 $\angle OCP$ 为直线 PC 与平面 ABC 所成的角，设 AB 的中点为 D ，连接 PD, CD ，

因为 $AB = BC = CA$ ，所以 $CD \perp AB$ ，

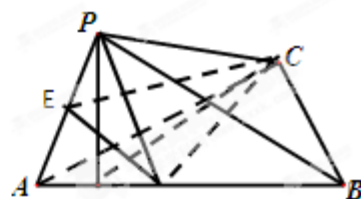
因为 $\angle APB = 90^\circ, \angle PAB = 60^\circ$ ，所以 $\triangle PAD$ 为等边三角形，

不妨设 $PA = 2$ ，则 $OD = 1, OP = \sqrt{3}, AB = 4$ ，

所以 $CD = 2\sqrt{3}, OC = \sqrt{OD^2 + CD^2} = \sqrt{1+12} = \sqrt{13}$ ，

在 $Rt\triangle OCP$ 中， $\tan \angle OCP = \frac{OP}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{13}$ ，

故直线 PC 与平面 ABC 所成的角的大小为 $\arctan \frac{\sqrt{39}}{13}$ 6 分



(II) 过 D 作 $DE \perp AP$ 于 E ，连接 CE ，由已知可得 $CD \perp$ 面 APB 。

根据三垂线定理知， $CE \perp AP$ ，所以 $\angle CED$ 为二面角 $B-AP-C$ 的平面角，

由 (I) 知， $DE = \sqrt{3}$ ，在 $Rt\triangle CDE$ 中， $\tan \angle CDE = \frac{CD}{DE} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ ，

故二面角 $B-AP-C$ 的大小为 $\arctan 2$ 12 分

解法二：

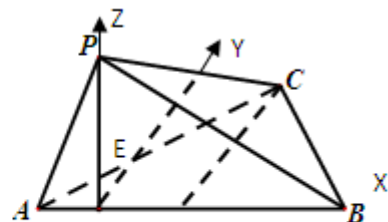
(I) 设 AB 的中点为 D ，连接 CD ，因为 O 在 AB ，且 O 为 P 在平面 ABC 上的射影，

所以 $PO \perp$ 面 ABC ，所以 $PO \perp AB$ ，且 $PO \perp CD$ ，由

$AB = BC = CA$ ，知 $CD \perp AB$ ，从而 $PO \perp OE, AB \perp OE$ ，

如图，以 O 为坐标原点， OB, OE, OP 所在直线分别为 x, y, z

轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ，



不妨设 $AP = 2$ ，由已知可得 $AB = 4, OA = OD = 1, OP = \sqrt{3}, CD = 2\sqrt{3}$ ，

所以 $O(0, 0, 0), A(-1, 0, 0), C(1, 2\sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$ ，

所以 $\overrightarrow{CP} = (-1, -2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ，而 $\overrightarrow{OP} = (0, 0, \sqrt{3})$ 为平面 ABC 的一个法向量，

设 α 为直线 PC 与平面 ABC 所成的角，则 $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{|0+0+3|}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

故直线 PC 与平面 ABC 所成的角的大小为 $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$ 6 分

(II) 由 (I) 有 $\overrightarrow{AP} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (2, 2\sqrt{3}, 0)$,

设平面 APC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 0, \sqrt{3}) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (2, 2\sqrt{3}, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{从而 } \begin{cases} x + \sqrt{3}z = 0 \\ 2x + 2\sqrt{3}y = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = -\sqrt{3}, \text{ 则 } y = 1, z = 1, \text{ 所以 } \vec{n} = (-\sqrt{3}, 1, 1),$$

设二面角 $B-AP-C$ 的平面角为 β , 易知 β 为锐角,

$$\text{而面 } ABP \text{ 的一个法向量为 } \vec{m} = (0, 1, 0), \text{ 则 } \cos \beta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3+1+1}\sqrt{0+1+0}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

故二面角 $B-AP-C$ 的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分

考点定位: 本题考查线面关系、直线与平面所成的角、二面角等基础知识, 意在考查考生思维能力、空间想象能力, 并考查应用向量知识解决数学问题的能力。

20、(本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 a_n = S_2 + S_n$ 对一切正整数 n 都成立。

(I) 求 a_1, a_2 的值;

(II) 设 $a_1 > 0$, 数列 $\{\lg \frac{10a_1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 当 n 为何值时, T_n 最大? 并求出 T_n 的最

大值。

解: (1) 取 $n=1$, 得 $a_2 a_1 = S_2 + S_1 = 2a_1 + a_2$ ①

$$\text{取 } n=2, \text{ 得 } a_2^2 = 2a_1 + 2a_2 \quad \text{②}$$

$$\text{由②-①, 得 } a_2(a_2 - a_1) = a_2 \quad \text{③}$$

若 $a_2 = 0$, 由①知 $a_1 = 0$;

$$\text{若 } a_2 \neq 0, \text{ 由③知 } a_2 - a_1 = 1. \quad \text{④}$$

由①, ④解得, $a_1 = \sqrt{2} + 1, a_2 = \sqrt{2} + 2$; 或 $a_1 = 1 - \sqrt{2}, a_2 = 2 - \sqrt{2}$.

综上可得, $a_1 = 0, a_2 = 0$; 或 $a_1 = \sqrt{2} + 1, a_2 = \sqrt{2} + 2$; 或 $a_1 = 1 - \sqrt{2}, a_2 = 2 - \sqrt{2}$.

(2) 当 $a_1 > 0$ 时, 由 (1) 知 $a_1 = \sqrt{2} + 1, a_2 = \sqrt{2} + 2$.

当 $n \geq 2$ 时, 有 $(\sqrt{2} + 2)a_n = S_2 + S_n, (\sqrt{2} + 2)a_{n-1} = S_2 + S_{n-1}$,

所以 $(1 + \sqrt{2})a_n = (2 + \sqrt{2})a_{n-1}$, 即 $a_n = \sqrt{2}a_{n-1} (n \geq 2)$,

所以 $a_n = a_1(\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$.

令 $b_n = \lg \frac{10a_1}{a_n}$, 则 $b_n = 1 - \lg(\sqrt{2})^{n-1} = 1 - \frac{1}{2}(n-1)\lg 2 = \frac{1}{2}\lg \frac{100}{2^{n-1}}$

所以数列 $\{b_n\}$ 是单调递减的等差数列 (公差为 $-\frac{1}{2}\lg 2$),

从而 $b_1 > b_2 > \dots > b_7 = \lg \frac{10}{8} > \lg 1 = 0$

当 $n \geq 8$ 时, $b_n \leq b_8 = \frac{1}{2}\lg \frac{100}{128} < \frac{1}{2}\lg 1 = 0$,

故 $n=7$ 时, T_n 取得最大值, 且 T_n 的最大值为 $T_7 = \frac{7(b_1 + b_7)}{2} = \frac{7(1 + 1 - 3\lg 2)}{2} = 7 - \frac{21}{2}\lg 2$.

考点定位: 本小题考查等比数列、等差数列、对数等基础知识, 考查思维能力、分析问题与解决问题的能力, 考查方程、分类与整合、化归与转化等数学思想.

21、(本小题满分 12 分)

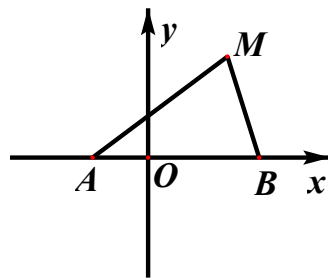
如图, 动点 M 到两定点 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 构成

$\triangle MAB$, 且 $\angle MBA = 2\angle MAB$, 设动点 M 的轨迹为 C .

(I) 求轨迹 C 的方程;

(II) 设直线 $y = -2x + m$ 与 y 轴交于点 P , 与轨迹 C 相交

于点 Q, R , 且 $|PQ| < |PR|$, 求 $\frac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围.



解: (1) 设 M 的坐标为 (x, y) , 显然有 $x > 0$, 且 $y \neq 0$.

当 $\angle MBA = 90^\circ$ 时, 点 M 的坐标为 $(2, \pm 3)$.

当 $\angle MBA \neq 90^\circ$ 时, $x \neq 2$, 由 $\angle MBA = 2\angle MAB$, 有 $\tan \angle MBA = \frac{2 \tan \angle MAB}{1 - \tan^2 \angle MAB}$

$$\text{即 } -\frac{|y|}{x-2} = \frac{2 \frac{|y|}{x+1}}{1 - \left(\frac{|y|}{x+1}\right)^2}.$$

化简可得, $3x^2 - y^2 - 3 = 0$.

而点 $(2, \pm 3)$ 在曲线 $3x^2 - y^2 - 3 = 0$ 上,

综上所述, 轨迹 C 的方程为 $3x^2 - y^2 - 3 = 0$ ($x > 1$).

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = -2x + m \\ 3x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 可得 } x^2 - 4mx + m^2 + 3 = 0. (*)$$

由题意, 方程 (*) 有两根且均在 $(1, +\infty)$ 内.

$$\text{设 } f(x) = x^2 - 4mx + m^2 + 3$$

$$\text{所以 } \begin{cases} -\frac{-4m}{2} > 1 \\ f(1) = 1^2 - 4m + m^2 + 3 > 0 \\ \Delta = (-4m)^2 - 4(m^2 + 3) > 0 \end{cases}$$

解得, $m > 1$, 且 $m \neq 2$.

设 Q, R 的坐标分别为 (x_Q, y_Q) , (x_R, y_R) ,

$$\text{由 } |PQ| < |PR| \text{ 有 } x_R = 2m + \sqrt{3(m^2 - 1)}, \quad x_Q = 2m - \sqrt{3(m^2 - 1)}$$

$$\text{所以 } \frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{x_R}{x_Q} = \frac{2m + \sqrt{3(m^2 - 1)}}{2m - \sqrt{3(m^2 - 1)}}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3(1 - \frac{1}{m^2})}}{2 - \sqrt{3(1 - \frac{1}{m^2})}}$$

$$= -1 + \frac{4}{2 - \sqrt{3(1 - \frac{1}{m^2})}}$$

$$\text{由 } m > 1, \text{ 且 } m \neq 2, \text{ 有 } 1 < -1 + \frac{4}{2 - \sqrt{3(1 - \frac{1}{m^2})}} < 7 + 4\sqrt{3} \text{ 且 } -1 + \frac{4}{2 - \sqrt{3(1 - \frac{1}{m^2})}} \neq 7$$

所以 $\frac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围是 $(1, 7) \cup (7, 7 + 4\sqrt{3})$.

考点定位: 本小题主要考查直线、双曲线、轨迹方程的求法等基础知识, 考查思维能力、运算能力, 考查函数、分类与整合等数学思想, 并考查思维的严谨性.

22、(本小题满分 14 分)

已知 a 为正实数, n 为自然数, 抛物线 $y = -x^2 + \frac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A , 设 $f(n)$

为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距。

(I) 用 a 和 n 表示 $f(n)$;

(II) 求对所有 n 都有 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 成立的 a 的最小值;

(III) 当 $0 < a < 1$ 时, 比较 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)}$ 与 $\frac{27}{4} \cdot \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$ 的大小, 并说明理由。

解: (1) 由已知得, 交点 A 的坐标为 $(\sqrt{\frac{a^n}{2}}, 0)$.

对 $y = -x^2 + \frac{1}{2}a^n$ 求导得 $y' = -2x$, 则抛物线在点 A 处的切线方程为 $y = -\sqrt{2a^n}(x - \sqrt{\frac{a^n}{2}})$

即 $y = -\sqrt{2a^n}x + a^n$, 则 $f(n) = a^n$.

(2) 由 (1) 知 $f(n) = a^n$, 则 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 成立的充要条件是 $a^n \geq 2n^3 + 1$

即知, $a^n \geq 2n^3 + 1$ 对所有 n 成立. 特别地, 取 $n=2$ 得到 $a \geq \sqrt{17}$.

当 $a = \sqrt{17}$, $n \geq 3$ 时,

$$\begin{aligned} a^n &> 4^n = (1+3)^n \\ &= 1 + C_n^1 \cdot 3 + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^3 \cdot 3^3 + \dots \\ &\geq 1 + C_n^1 \cdot 3 + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^3 \cdot 3^3 \\ &= 1 + 2n^3 + \frac{1}{2}n[5(n-2)^2 + (2n-5)] \\ &> 2n^3 + 1 \end{aligned}$$

当 $n=0, 1, 2$ 时, 显然 $(\sqrt{17})^n \geq 2n^3 + 1$.

故 $a = \sqrt{17}$ 时, $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 对所有自然数 n 都成立.

所以满足条件的 a 的最小值为 $\sqrt{17}$.

$$(3) \text{ 由 (1) 知 } f(k) = a^k, \text{ 则 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k) - f(2k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^k - a^{2k}}$$

$$\frac{f(1) - f(n)}{f(0) - f(1)} = \frac{a - a^n}{1 - a},$$

$$\text{下面证明: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k) - f(2k)} > \frac{27}{4} \cdot \frac{f(1) - f(n)}{f(0) - f(1)}$$

$$\text{首先证明: 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } \frac{1}{x - x^2} \geq \frac{27}{4}x$$

$$\text{设函数 } g(x) = \frac{27}{4}x(x^2 - x) + 1, \quad 0 < x < 1.$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{81}{4}x(x - \frac{2}{3})$$

$$\text{当 } 0 < x < \frac{2}{3} \text{ 时, } g'(x) < 0; \text{ 当 } \frac{2}{3} < x < 1 \text{ 时, } g'(x) > 0.$$

$$\text{故 } g(x) \text{ 在区间 } (0, 1) \text{ 上的最小值 } g(x)_{\min} = g(\frac{2}{3}) = 0.$$

$$\text{所以, 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } g(x) \geq 0, \text{ 即得 } \frac{1}{x - x^2} \geq \frac{27}{4}x$$

$$\text{由 } 0 < a < 1 \text{ 知 } 0 < a^k < 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*),$$

$$\text{因此 } \frac{1}{a^k - a^{2k}} \geq \frac{27}{4}a^k,$$

$$\text{从而 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k) - f(2k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^k - a^{2k}}$$

$$\geq \frac{27}{4} \sum_{k=1}^n a^k$$

$$= \frac{27}{4} \cdot \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$> \frac{27}{4} \cdot \frac{a - a^n}{1 - a}$$

$$= \frac{27}{4} \cdot \frac{f(1) - f(n)}{f(0) - f(1)}.$$

考点定位: 本小题主要考查导数的应用、不等式、数列等基础知识. 考查思维能力、运算能力、分析问题与解决问题的能力. 创新意识. 考查函数、转化与化归、特殊与一般等数学思想方法.

