

2011年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1. （5分）（2011•北京）已知集合 $P=\{x|x^2\leq 1\}$ ， $M=\{a\}$ ．若 $P\cup M=P$ ，则 a 的取值范围是（ ）

A. $(-\infty, -1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $[-1, 1]$ D. $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$

【考点】集合关系中的参数取值问题.

【专题】集合.

【分析】通过解不等式化简集合 P ；利用 $P\cup M=P\Leftrightarrow M\subseteq P$ ；求出 a 的范围.

【解答】解： $\because P=\{x|x^2\leq 1\}$ ，

$$\therefore P=\{x|-1\leq x\leq 1\}$$

$$\because P\cup M=P$$

$$\therefore M\subseteq P$$

$$\therefore a\in P$$

$$-1\leq a\leq 1$$

故选：C.

【点评】本题考查不等式的解法、考查集合的包含关系：根据条件 $P\cup M=P\Leftrightarrow M\subseteq P$ 是解题关键.

2. （5分）（2011•北京）复数 $\frac{i-2}{1+2i}=(\quad)$

A. i B. $-i$ C. $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ D. $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

【考点】复数代数形式的混合运算.

【专题】数系的扩充和复数.

【分析】将分子、分母同乘以 $1-2i$ ，再按多项式的乘法法则展开，将 i^2 用 -1 代替即可.

【解答】解： $\frac{i-2}{1+2i}=\frac{(i-2)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{i-2+2+4i}{5}=i$

故选A

【点评】本题考查复数的除法运算法则：分子、分母同乘以分母的共轭复数；再按多项式的乘法法则展开即可.

3. （5分）（2011•北京）在极坐标系中，圆 $\rho=-2\sin\theta$ 的圆心的极坐标系是（ ）

A. $(1, \frac{\pi}{2})$ B. $(1, -\frac{\pi}{2})$ C. $(1, 0)$ D. $(1, \pi)$

【考点】简单曲线的极坐标方程.

【专题】直线与圆；坐标系和参数方程.

【分析】先在极坐标方程 $\rho=-2\sin\theta$ 的两边同乘以 ρ ，再利用直角坐标与极坐标间的关系，即利用 $\rho\cos\theta=x$ ， $\rho\sin\theta=y$ ， $\rho^2=x^2+y^2$ ，进行代换即得直角坐标系，再利用直角坐标方程求解即可.

【解答】解：将方程 $\rho=-2\sin\theta$ 两边都乘以 ρ 得：

$$\rho^2=-2\rho\sin\theta,$$

化成直角坐标方程为

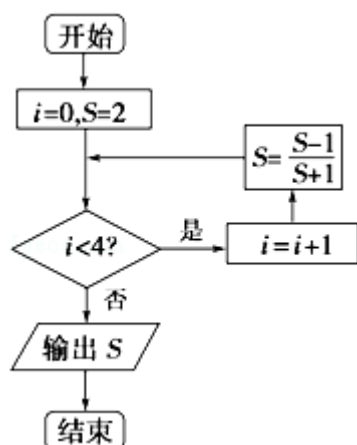
$x^2+y^2+2y=0$. 圆心的坐标 $(0, -1)$.

\therefore 圆心的极坐标 $(1, -\frac{\pi}{2})$

故选B.

【点评】 本题考查点的极坐标和直角坐标的互化，体会在极坐标系和平面直角坐标系中刻画点的位置的区别，能进行极坐标和直角坐标的互，能在极坐标系中用极坐标刻画点的位置.

4. (5分) (2011•北京) 执行如图所示的程序框图，输出的s值为 ()



A. -3 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2

【考点】 循环结构.

【专题】 算法和程序框图.

【分析】 $i=0$, 满足条件 $i<4$, 执行循环体, 依此类推, 当 $i=4$, $s=2$, 此时不满足条件 $i<4$, 退出循环体, 从而得到所求.

【解答】 解: $i=0$, 满足条件 $i<4$, 执行循环体, $i=1$, $s=\frac{1}{3}$

满足条件 $i<4$, 执行循环体, $i=2$, $s=-\frac{1}{2}$

满足条件 $i<4$, 执行循环体, $i=3$, $s=-3$

满足条件 $i<4$, 执行循环体, $i=4$, $s=2$

不满足条件 $i<4$, 退出循环体, 此时 $s=2$

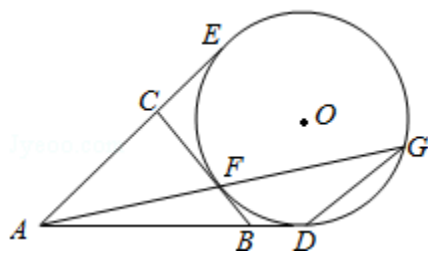
故选: D

【点评】 根据流程图计算运行结果是算法这一模块的重要题型, 处理的步骤一般为: 分析流程图, 从流程图中即要分析出计算的类型, 又要分析出参与计算的数据建立数学模型, 根据第一步分析的结果, 选择恰当的数学模型解模. 算法和程序框图是新课标新增的内容, 在近两年的新课标地区高考都考查到了, 这启示我们要给予高度重视, 属于基础题.

5. (5分) (2011•北京) 如图, AD, AE, BC分别与圆O切于点D, E, F, 延长AF与圆O交于另一点G. 给出下列三个结论:

① $AD+AE=AB+BC+CA$; ② $AF \cdot AG=AD \cdot AE$ ③ $\triangle AFB \sim \triangle ADG$

其中正确结论的序号是 ()



- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

【考点】与圆有关的比例线段.

【专题】直线与圆.

【分析】根据从圆外一点引圆的两条切线，切线长相等，得到第一个说法是正确的，根据切割线定理知道第二个说法是正确的，根据切割线定理知，两个三角形 $\triangle ADF \sim \triangle ADG$ ，得到第三个说法错误.

【解答】解：根据从圆外一点引圆的两条切线，切线长相等，有 $CE=CF$ ， $BF=BD$ ，

$\therefore AD+AE=AB+BC+CA$ ，故①正确，

$\therefore AD=AE$ ，

$AE^2=AF \cdot AG$ ，

$\therefore AF \cdot AG=AD \cdot AE$ ，故②正确，

根据切割线定理知 $\triangle ADF \sim \triangle ADG$

故③不正确，

综上所述①②两个说法是正确的，

故选A.

【点评】本题考查与圆有关的比例线段，考查圆的切线长定理，考查圆的切割线定理，考查切割线构成的两个相似的三角形，本题是一个综合题目.

6. (5分) (2011•北京) 根据统计，一名工人组装第x件某产品所用的时间(单位：分钟)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases} \quad (A, C \text{ 为常数}).$$

已知工人组装第4件产品用时30分钟，组装

第A件产品用时15分钟，那么c和A的值分别是()

- A. 75, 25 B. 75, 16 C. 60, 25 D. 60, 16

【考点】函数解析式的求解及常用方法.

【专题】函数的性质及应用.

【分析】首先， $x=A$ 的函数值可由表达式直接得出，再根据 $x=4$ 与 $x=A$ 的函数值不相等，说明求 $f(4)$ 要用 $x < A$ 对应的表达式，将方程组联解，可以求出C、A的值.

【解答】解：由题意可得： $f(A) = \frac{c}{\sqrt{A}} = 15$ ，

所以 $c = 15\sqrt{A}$

而 $f(4) = \frac{c}{\sqrt{4}} = 30$ ，可得出 $\frac{15\sqrt{A}}{2} = 30$

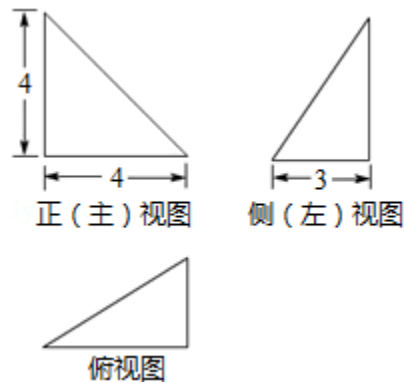
故 $\sqrt{A} = 4$ ，可得 $A = 16$

从而 $c = 15\sqrt{A} = 60$

故答案为D

【点评】分段函数是函数的一种常见类型，解决的关键是寻找不同自变量所对应的范围，在相应区间内运用表达式加以解决.

7. (5分) (2011•北京) 某四面体的三视图如图所示，该四面体四个面的面积中，最大的是 ()



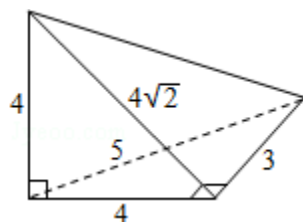
- A. 8 B. $6\sqrt{2}$ C. 10 D. $8\sqrt{2}$

【考点】由三视图求面积、体积.

【专题】立体几何.

【分析】三视图复原的几何体是一个三棱锥，根据三视图的图形特征，判断三棱锥的形状，三视图的数据，求出四面体四个面的面积中，最大的值.

【解答】解：三视图复原的几何体是一个三棱锥，如图，四个面的面积分别为：8，6， $6\sqrt{2}$ ，10，显然面积的最大值，10. 故选C.



【点评】本题是基础题，考查三视图复原几何体的知识，考查几何体的面积，空间想象能力，计算能力，常考题型.

8. (5分) (2011•北京) 设A (0, 0), B (4, 0), C (t+4, 4), D (t, 4) ($t \in \mathbb{R}$). 记N (t) 为平行四边形ABCD内部 (不含边界) 的整点的个数，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，则函数N (t) 的值域为 ()

- A. {9, 10, 11} B. {9, 10, 12} C. {9, 11, 12} D. {10, 11, 12}

【考点】集合的含义.

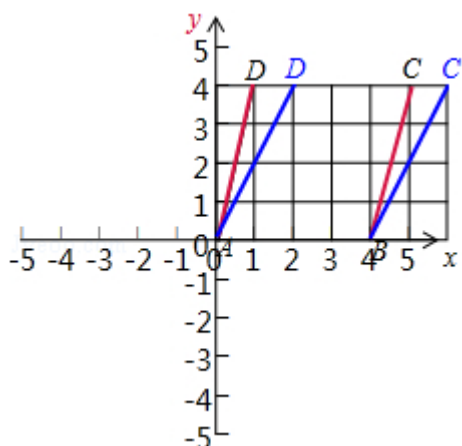
【专题】集合.

【分析】分别由 $t=0, 1, 2$ 求出N (t)，排除错误选项A, B, D，从而得到正确选项.

【解答】解：当 $t=0$ 时， $\square ABCD$ 的四个顶点是A (0, 0), B (4, 0), C (4, 4), D (0, 4)，符合条件的点有 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)，共九个，N (t) =9，故选项D不正确.

当 $t=1$ 时， $\square ABCD$ 的四个顶点是 $A(0, 0)$ ， $B(4, 0)$ ， $C(5, 4)$ ， $D(1, 4)$ ，
同理知 $N(t)=12$ ，故选项A不正确。

当 $t=2$ 时， $\square ABCD$ 的四个顶点是 $A(0, 0)$ ， $B(4, 0)$ ， $C(6, 4)$ ， $D(2, 4)$ ，
同理知 $N(t)=11$ ，故选项B不正确。



故选C。

【点评】 本题考查集合的性质和应用，解题时要注意排除法的合理运用．本题中取整点是个难点，常用的方法是，先定横（或纵）坐标，在定纵（横）坐标，以确定点的个数，如果从图形上看，就是看直线 $x=r$ （ r 是整数）上有几个整点在四边形内。

二、填空题（共6小题，每小题5分，满分30分）

9. （5分）（2011•北京）在 $\triangle ABC$ 中．若 $b=5$ ， $\angle B=\frac{\pi}{4}$ ， $\tan A=2$ ，则 $\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ； $a=2\sqrt{10}$ ．

【考点】 正弦定理；同角三角函数间的基本关系．

【专题】 解三角形．

【分析】 由 $\tan A$ 的值，利用同角三角函数间的基本关系求出 $\cos A$ 的平方，然后由 A 的范围，再利用同角三角函数的基本关系求出 $\sin A$ 的值，然后再利用正弦定理，由 $\sin A$ ， $\sin B$ 及 b 的值即可求出 a 的值．

【解答】 解：由 $\tan A=2$ ，得到 $\cos^2 A=\frac{1}{1+\tan^2 A}=\frac{1}{5}$ ，

由 $A \in (0, \pi)$ ，得到 $\sin A=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

根据正弦定理得： $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ ，得到 $a=\frac{b \sin A}{\sin B}=\frac{5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$ ．

故答案为： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ； $2\sqrt{10}$

【点评】 此题考查学生灵活运用同角三角函数间的基本关系以及正弦定理化简求值，是一道中档题．

10. (5分) (2011•北京) 已知向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (0, -1)$, $\vec{c} = (k, \sqrt{3})$. 若

$\vec{a} - 2\vec{b}$ 与 \vec{c} 共线, 则 $k = \underline{1}$.

【考点】平面向量共线(平行)的坐标表示.

【专题】平面向量及应用.

【分析】利用向量的坐标运算求出 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 的坐标; 利用向量共线的坐标形式的充要条件列出方程, 求出 k 的值.

【解答】解: $\vec{a} - 2\vec{b} = (\sqrt{3}, 3)$

$\because \vec{a} - 2\vec{b}$ 与 \vec{c} 共线,

$$\therefore \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3k$$

解得 $k = 1$.

故答案为 1.

【点评】本题考查向量的坐标运算、考查向量共线的坐标形式的充要条件: 坐标交叉相乘相等.

11. (5分) (2011•北京) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -4$, 则公比 $q = \underline{-2}$

$$; |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = \underline{2^{n-1} - \frac{1}{2}}.$$

【考点】等比数列的性质; 等比数列的前 n 项和.

【专题】等差数列与等比数列.

【分析】先利用等比数列的通项公式求得公比; $|a_n|$ 是以 a_1 为首项, $|q|$ 为公比, 进而利用等比数列的求和公式求解.

【解答】解: $q = \sqrt[3]{\frac{a_4}{a_1}} = \sqrt[3]{-8} = -2$,

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = \frac{\frac{1}{2}(1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$$

故答案为: $-2, 2^{n-1} - \frac{1}{2}$

【点评】本题主要考查了等比数列的性质. 考查了对等比数列的通项公式和求和公式的灵活运用.

12. (5分) (2011•北京) 用数字 2, 3 组成四位数, 且数字 2, 3 至少都出现一次, 这样的四位数共有 14 个. (用数字作答)

【考点】计数原理的应用.

【专题】算法和程序框图.

【分析】本题是一个分类计数问题，首先确定数字中2和3的个数，当数字中有1个2，3个3时，当数字中有2个2，2个3时，当数字中有3个2，1个3时，写出每种情况的结果数，最后相加。

【解答】解：由题意知本题是一个分类计数问题，首先确定数字中2和3的个数，当数字中有1个2，3个3时，共有 $C_4^1=4$ 种结果，当数字中有2个2，2个3时，共有 $C_4^2=6$ 种结果，当数字中有3个2，1个3时，共有 $C_4^1=4$ 种结果，根据分类加法原理知共有 $4+6+4=14$ 种结果，故答案为：14

【点评】本题考查分类计数原理，是一个数字问题，这种问题一般容易出错，注意分类时要做到不重不漏，本题是一个基础题，也是一个易错题，易错点在数字中重复出现的数字不好处理。

13. (5分) (2011•北京) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$ 若关于x

的方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根，则数k的取值范围是 (0, 1) .

【考点】根的存在性及根的个数判断.

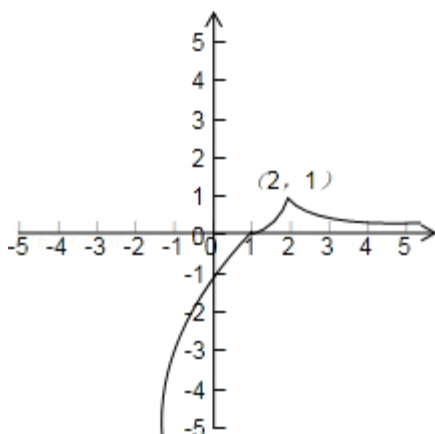
【专题】函数的性质及应用.

【分析】要求程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根是数k的取值范围，根据方程的根与对应函数零点的关系，我们可以转化为求函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=k$ 交点的个数，我们画出函数

$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$ 的图象，数形结合即可求出答案.

【解答】解：函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$ 的图象如下图所示：

由函数图象可得当 $k \in (0, 1)$ 时方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根，故答案为：(0, 1)



【点评】本题考查的知识点是根的存在性及根的个数判断，其中根据方程的根与对应函数零点的关系，将方程问题转化为函数问题是解答的关键.

14. (5分) (2011•北京) 曲线C是平面内与两个定点 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ 的距离的积等于常数 a^2 ($a>1$) 的点的轨迹. 给出下列三个结论:

- ①曲线C过坐标原点;
- ②曲线C关于坐标原点对称;
- ③若点P在曲线C上, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于 $\frac{1}{2}a^2$.

其中, 所有正确结论的序号是 ②③.

【考点】轨迹方程.

【专题】圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】由题意曲线C是平面内与两个定点 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ 的距离的积等于常数 a^2 ($a>1$) , 利用直接法, 设动点坐标为 (x, y) , 及可得到动点的轨迹方程, 然后由方程特点即可加以判断.

【解答】解: 对于①, 由题意设动点坐标为 (x, y) , 则利用题意及两点间的距离公式的得: $\sqrt{(x+1)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2+y^2} = a^2 \Leftrightarrow [(x+1)^2+y^2] \cdot [(x-1)^2+y^2] = a^4$ (1) 将原点代入验证, 此方程不过原点, 所以①错;

对于②, 把方程中的 x 被 $-x$ 代换, y 被 $-y$ 代换, 方程不变, 故此曲线关于原点对称. ②正确;

对于③, 由题意知点P在曲线C上, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积

$$S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| \sin \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2} a^2 \sin \angle F_1PF_2 \leq \frac{1}{2} a^2, \text{ 所以③正确.}$$

故答案为: ②③.

【点评】此题重点考查了利用直接法求出动点的轨迹方程, 并化简, 利用方程判断曲线的对称性及利用解析式选择换元法求出值域.

三、解答题 (共6小题, 满分80分)

15. (13分) (2011•北京) 已知函数 $f(x) = 4\cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

【考点】三角函数的周期性及其求法; 两角和与差的余弦函数; 三角函数的最值.

【专题】三角函数的图像与性质.

【分析】(I) 利用两角和公式和二倍角公式对函数的解析式进行化简整理后, 利用正弦函数的性质求得函数的最小正周期.

(II) 利用 x 的范围确定 $2x + \frac{\pi}{6}$ 的范围, 进而利用正弦函数的单调性求得函数的最大和最小值.

【解答】解: (I) $\because f(x) = 4\cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$,

$$\begin{aligned}
&=4\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-1 \\
&=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos ^2x-1 \\
&=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x \\
&=2\sin \left(2x+\frac{\pi}{6}\right),
\end{aligned}$$

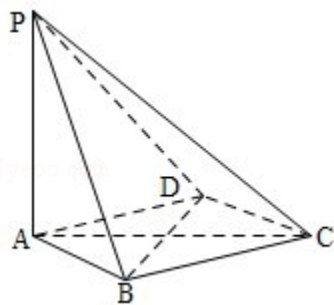
所以函数的最小正周期为 π ;

$$\begin{aligned}
(\text{II}) \because -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\
\therefore -\frac{\pi}{6} \leq 2x+\frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}, \\
\therefore \text{当 } 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x=\frac{\pi}{6} \text{ 时, } f(x) \text{ 取最大值 } 2, \\
\text{当 } 2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6} \text{ 时, 即 } x=-\frac{\pi}{6} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最小值 } -1.
\end{aligned}$$

【点评】 本题主要考查了三角函数的周期性及其求法, 三角函数的最值. 解题的关键是对函数解析式的化简整理.

16. (14分) (2011•北京) 如图, 在四棱锥P-ABCD中, $PA \perp$ 平面ABCD, 底面ABCD是菱形, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$.

- (I) 求证: $BD \perp$ 平面PAC;
 (II) 若 $PA=AB$, 求PB与AC所成角的余弦值;
 (III) 当平面PBC与平面PDC垂直时, 求PA的长.



【考点】 直线与平面垂直的判定; 点、线、面间的距离计算; 用空间向量求直线间的夹角、距离.

【专题】 空间位置关系与距离.

【分析】 (I) 由已知条件可得 $AC \perp BD$, $PA \perp BD$, 根据直线与平面垂直的判定定理可证

(II) 结合已知条件, 设AC与BD的交点为O, 则 $OB \perp OC$, 故考虑分别以OB, OC为x轴、y轴, 以过O且垂直于平面ABCD的直线为z轴, 建立空间直角坐标系,

设PB与AC所成的角为 θ , 则 θ 可转化为 \overrightarrow{PB} 与 \overrightarrow{AC} 所成的角, 代入公式

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{AC}|} \text{ 可求}$$

(III) 分别求平面PBC的法向量 $\vec{m} = (3, \sqrt{3}, \frac{6}{t})$ ，平面PDC的法向量

$$\vec{n} = (-3, \sqrt{3}, \frac{6}{t})$$

由平面PBC \perp 平面PDC可得 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ 从而可求t即PA

【解答】解：(I) 证明：因为四边形ABCD是菱形，所以AC \perp BD，
又因为PA \perp 平面ABCD，所以PA \perp BD，PA \cap AC=A
所以BD \perp 平面PAC

(II) 设AC \cap BD=O，因为 $\angle BAD = 60^\circ$ ，PA=AB=2，
所以BO=1，AO=OC= $\sqrt{3}$ ，

以O为坐标原点，分别以OB，OC为x轴、y轴，以过O且垂直于平面ABCD的直线为z轴，建立空间直角坐标系O-xyz，则

$$P(0, -\sqrt{3}, 2), A(0, -\sqrt{3}, 0), B(1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0)$$

$$\text{所以 } \vec{PB} = (1, \sqrt{3}, -2), \vec{AC} = (0, 2\sqrt{3}, 0)$$

$$\text{设PB与AC所成的角为}\theta, \text{则 } \cos\theta = \frac{|\vec{PB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{PB}| |\vec{AC}|} = \frac{6}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

(III) 由(II)知 $\vec{BC} = (-1, \sqrt{3}, 0)$ ，设P(0, $-\sqrt{3}$, t) (t>0)，

$$\text{则 } \vec{BP} = (-1, -\sqrt{3}, t)$$

设平面PBC的法向量 $\vec{\pi} = (x, y, z)$

$$\text{则 } \vec{BC} \cdot \vec{\pi} = 0 \quad \vec{BP} \cdot \vec{\pi} = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0 \\ -x + \sqrt{3}y + tz = 0 \end{cases} \text{ 令 } y = \sqrt{3}, \text{ 则 } x = 3, z = \frac{6}{t}$$

平面PBC的法向量所以 $\vec{m} = (3, \sqrt{3}, \frac{6}{t})$ ，

同理平面PDC的法向量 $\vec{n} = (-3, \sqrt{3}, \frac{6}{t})$ ，因为平面PBC \perp 平面PDC，

$$\text{所以 } \vec{m} \cdot \vec{n} = 0, \text{ 即 } -6 + \frac{36}{t^2} = 0, \text{ 解得 } t = \sqrt{6},$$

所以PA= $\sqrt{6}$.

【点评】本小题主要考查空间线面关系的垂直关系的判断、异面直线所成的角、用空间向量的方法求解直线的夹角、距离等问题，考查数形结合、化归与转化的数学思想方法，以及空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力

17. (13分) (2011•北京) 以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学的植树棵数. 乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以X表示.

(Ⅰ) 如果X=8, 求乙组同学植树棵数的平均数和方差;

(Ⅱ) 如果X=9, 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 求这两名同学的植树总棵数Y的分布列和数学期望.

(注: 方差 $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)

甲组			乙组	
9	9	0	X	8
1	1	1	0	9

【考点】茎叶图; 众数、中位数、平均数; 极差、方差与标准差; 离散型随机变量的期望与方差.

【专题】概率与统计.

【分析】(Ⅰ) 根据所给的数据, 把所有数据相加再除以4写出这组数据的平均数, 再利用所给的方差的公式, 做出这组数据的方差.

(Ⅱ) 根据所给的变量写出随机变量可能的取值, 结合变量对应的事件写出变量的概率, 写出分布列, 做出期望值.

【解答】解: (Ⅰ) 当X=8, 乙组同学植树棵数是8, 8, 9, 10,

平均数是 $\bar{x} = \frac{8+8+9+10}{4} = \frac{35}{4}$,

方差为 $\frac{1}{4} \times [(8 - \frac{35}{4})^2 + (8 - \frac{35}{4})^2 + (9 - \frac{35}{4})^2 + (10 - \frac{35}{4})^2] = \frac{11}{16}$;

(Ⅱ) 当X=9时, 甲组同学的植树棵数是9, 9, 11, 11;

乙组同学的植树棵数是9, 8, 9, 10,

分别从甲和乙两组中随机取一名同学, 共有 $4 \times 4 = 16$ 种结果,

这两名同学植树的总棵数Y可能是17, 18, 19, 20, 21,

事件Y=17, 表示甲组选出的同学植树9棵, 乙组选出的同学植树8棵,

$$\therefore P(Y=17) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(Y=18) = \frac{1}{4}$$

$$P(Y=19) = \frac{1}{4}$$

$$P(Y=20) = \frac{1}{4},$$

$$P(Y=21) = \frac{1}{8}$$

Y	17	18	19	20	21
P	0.125	0.25	0.25	0.25	0.125

\therefore 随机变量的期望是 $EY = 17 \times \frac{1}{8} + 18 \times \frac{1}{4} + 19 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} + 21 \times \frac{1}{8} = 19$.

【点评】 本题考查一组数据的平均数和方差，考查离散型随机变量的分布列和期望值，考查等可能事件的概率，本题是一个概率与统计的综合题目.

18. (13分) (2011•北京) 已知函数 $f(x) = (x-k)^2 e^{\frac{x}{k}}$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq \frac{1}{e}$, 求 k 的取值范围.

【考点】 利用导数研究函数的单调性; 导数在最大值、最小值问题中的应用.

【专题】 函数的性质及应用; 导数的概念及应用.

【分析】 (I) 求导, 令导数等于零, 解方程, 根据 $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 的变化情况即可求出函数的单调区间;

(II) 根据若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq \frac{1}{e}$, 利用导数求函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的最大值, 即可求出 k 的取值范围.

【解答】 解: (I) $f'(x) = 2(x-k) e^{\frac{x}{k}} + \frac{1}{k} (x-k)^2 e^{\frac{x}{k}} = \frac{1}{k} (x^2 - k^2) e^{\frac{x}{k}}$

,
令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm k$

当 $k > 0$ 时, $f'(x)$ $f(x)$ 随 x 的变化情况如下:

x	$(-\infty, -k)$	$-k$	$(-k, k)$	k	$(k, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	$4k^2 e^{-1}$	递减	0	递增

所以, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -k)$, 和 $(k, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-k, k)$;

当 $k < 0$ 时, $f'(x)$ $f(x)$ 随 x 的变化情况如下:

x	$(-\infty, k)$	k	$(k, -k)$	$-k$	$(-k, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	递减	0	递增	$4k^2 e^{-1}$	递减

所以, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, k)$, 和 $(-k, +\infty)$, 单调递增区间是 $(k, -k)$;

(II) 当 $k > 0$ 时, 有 $f(k+1) = e^{\frac{k+1}{k}} > \frac{1}{e}$, 不合题意,

当 $k < 0$ 时, 由 (I) 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值是 $f(-k) = \frac{4k^2}{e}$,

\therefore 任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(-k) = \frac{4k^2}{e} \leq \frac{1}{e}$,

解得 $-\frac{1}{2} \leq k < 0$,

故对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(x) \leq \frac{1}{e}$ ， k 的取值范围是 $-\frac{1}{2} \leq k < 0$ 。

【点评】此题是个难题。考查利用导数研究函数的单调性和在闭区间上的最值问题，对方程 $f(x)=0$ 根大小进行讨论，体现了分类讨论的思想方法，特别是（II）的设置，有关恒成立问题一般转化为求函数的最值问题，体现了转化的思想，增加了题目的难度。

19. （14分）（2011•北京）已知椭圆 $G: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。过点 $(m, 0)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A, B 两点。

（I）求椭圆 G 的焦点坐标和离心率；

（II）将 $|AB|$ 表示为 m 的函数，并求 $|AB|$ 的最大值。

【考点】圆与圆锥曲线的综合。

【专题】圆锥曲线的定义、性质与方程；圆锥曲线中的最值与范围问题。

【分析】（I）由题意及椭圆和圆的标准方程，利用椭圆离心率的定义和点到直线的距离公式即可求解；

（II）由题意即 m 得取值范围分 $m=1$ 时， $m=-1$ 及当 $m \neq \pm 1$ 三大类求出 $|AB|$ 的长度，利用直线方程与椭圆方程进行联立，利用根与系数的关系得到 k 与 m 之间关系等式，利用直线与圆相切的条件即可。

【解答】解：（I）由题意得 $a=2$ ， $b=1$ ，所以 $c=\sqrt{3}$

∴椭圆 G 的焦点坐标 $(-\sqrt{3}, 0)$ $(\sqrt{3}, 0)$ 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

（II）由题意知： $|m| \geq 1$ ，

当 $m=1$ 时，切线 l 的方程为 $x=1$ ，点 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 点 $B(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 此时 $|AB|=\sqrt{3}$ ；

当 $m=-1$ 时，同理可得 $|AB|=\sqrt{3}$ ；

当 $|m| > 1$ 时，设切线 l 的方程为： $y=k(x-m)$ ，由 $\begin{cases} y=k(x-m) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1+4k^2)x^2 - 8k^2mx + 4k^2m^2 - 4 = 0$ ，

$4k^2m^2 - 4 = 0$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2m}{1+4k^2}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2m^2 - 4}{1+4k^2}$

又由 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切∴圆心到直线 l 的距离等于圆的半径即 $\frac{|km|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1+k^2}{k^2}$ ，

所以 $|AB| =$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(1+k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2]} \\ & = \sqrt{(1+k^2) \cdot [\frac{64k^4m^2}{(1+4k^2)^2} - \frac{4(4k^2m^2 - 4)}{1+4k^2}]} = \frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2 + 3} \end{aligned}$$

由于当 $m = \pm 1$ 时， $|AB| = \sqrt{3}$ ，

当 $m \neq \pm 1$ 时, $|AB| = \frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}$, 此时 $m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

又 $|AB| = \frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{3}{|m|} + |m|} \leq 2$ (当且仅当 $m = \pm\sqrt{3}$ 时, $|AB|=2$),

所以, $|AB|$ 的最大值为2.

故 $|AB|$ 的最大值为2.

【点评】此题重点考查了椭圆及圆的标准方程, 还考查了点到直线的距离公式, 对于第二问, 重点考查了利用 m 的范围分裂进行讨论, 联立直线与椭圆的方程利用整体代换的思想建立 m 与 k 的关系等式, 还考查两点间的距离公式及又 m 的范围解出 $|AB|$ 的最值.

20. (13分) (2011•北京) 若数列 $A_n = a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) 满足 $|a_{k+1} - a_k| = 1$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), 数列 A_n 为E数列, 记 $S(A_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

(I) 写出一个满足 $a_1 = a_5 = 0$, 且 $S(A_5) > 0$ 的E数列 A_n ;

(II) 若 $a_1 = 12$, $n = 2000$, 证明: E数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$;

(III) 对任意给定的整数 n ($n \geq 2$), 是否存在首项为0的E数列 A_n , 使得 $S(A_n) = 0$? 如果存在, 写出一个满足条件的E数列 A_n ; 如果不存在, 说明理由.

【考点】数列的应用.

【专题】等差数列与等比数列; 点列、递归数列与数学归纳法.

【分析】(I) 根据题意, $a_2 = \pm 1$, $a_4 = \pm 1$, 再根据 $|a_{k+1} - a_k| = 1$ 给出 a_5 的值, 可以得出符合题的E数列 A_5 ;

(II) 从必要性入手, 由单调性可以去掉绝对值符号, 可得是 A_n 公差为1的等差数列, 再证充分性, 由绝对值的性质得出不等式, 再利用同向不等式的累加, 可得 $a_{k+1} - a_k = 1 > 0$, A_n 是递增数列;

(III) 根据定义构造数列, 再用等差数列求和公式求出 $S(A_n)$, 最后通过讨论得出符合条件的 $S(A_n)$.

【解答】解: (I) 0, 1, 0, 1, 0是一个满足条件的E数列 A_5

(II) 必要性: 因为E数列 A_n 是递增数列

所以 $a_{k+1} - a_k = 1$ ($k=1, 2, \dots, 1999$)

所以 A_n 是首项为12, 公差为1的等差数列.

所以 $a_{2000} = 12 + (2000 - 1) \times 1 = 2011$

充分性: 由于 $a_{2000} - a_{1999} \leq 1$

$a_{1999} - a_{1998} \leq 1$

...

$a_2 - a_1 \leq 1$,

所以 $a_{2000} - a_1 \leq 1999$, 即 $a_{2000} \leq a_1 + 1999$

又因为 $a_1 = 12$, $a_{2000} = 2011$

所以 $a_{2000} = a_1 + 1999$

故 $a_{k+1} - a_k = 1 > 0$ ($k=1, 2, \dots, 1999$), 即 A_n 是递增数列.

综上所述, 结论成立.

(III) 设 $c_k = a_{k+1} - a_k$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), 则 $c_k = \pm 1$

因为 $a_2 = a_1 + c_1$

$a_3 = a_1 + c_1 + c_2$

...

$$a_n = a_1 + c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S(A_n) &= na_1 + (n-1)c_1 + (n-2)c_2 + (n-3)c_3 + \dots + c_{n-1} \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots + 1 - [(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \dots + (1-c_{n-1})] \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - [(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \dots + (1-c_{n-1})] \end{aligned}$$

因为 $c_k = \pm 1$, 所以 $1 - c_k$ 为偶数 ($k=1, 2, \dots, n-1$)

所以 $(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \dots + (1-c_{n-1})$ 为偶数

所以要使 $S(A_n) = 0$, 必须 $\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数

即 4 整除 $n(n-1)$, 亦即 $n=4m$ 或 $n=4m+1$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

当 $n=4m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) 时, E 数列 A_n 的项满足 $a_{4k+1} = a_{4k-1} = 0$, $a_{4k-2} = -1$, $a_{4k} = 1$ ($k=1, 2, \dots, n-1$)

此时, 有 $a_1 = 0$ 且 $S(A_n) = 0$ 成立

当 $n=4m+1$ ($m \in \mathbb{N}^*$) 时, E 数列 A_n 的项满足 $a_{4k+1} = a_{4k-1} = 0$, $a_{4k-2} = -1$, $a_{4k} = 1$ ($k=1, 2, \dots, n-1$)

$a_{4m+1} = 0$ 时, 亦有 $a_1 = 0$ 且 $S(A_n) = 0$ 成立

当 $n=4m+2$ 或 $n=4m+3$ ($m \in \mathbb{N}^*$) ($m \in \mathbb{N}^*$) 时, $n(n-1)$ 不能被 4 整除, 此时不存在数列 A_n , 使得 $a_1 = 0$ 且 $S(A_n) = 0$ 成立

【点评】 本题以数列为载体, 考查了不等式的运用技巧, 属于难题, 第三小问注意去绝对值, 分类讨论思想的运用.

当 $m = -1$ 时, 同理可得 $|AB| = \sqrt{3}$.

当 $|m| > 1$ 时, 设切线 l 的方程为 $y = k(x - m)$.

$$\begin{cases} y = k(x - m), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow (1 + 4k^2)x^2 - 8k^2mx + 4k^2m^2 - 4 = 0$$

设 A, B 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = \frac{8k^2m}{1 + 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2m^2 - 4}{1 + 4k^2}$$

又由 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 得 $\frac{km}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 即 $m = k^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ &= \sqrt{(1 + k^2)\left[\frac{64k^4m^2}{(1 + 4k^2)^2} - \frac{4(4k^2m^2 - 4)}{1 + 4k^2}\right]} \\ &= \frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2 + 3}. \end{aligned}$$

由于当 $m = \pm 1$ 时, $|AB| = \sqrt{3}$.

$$\text{所以 } |AB| = \frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2 + 3}, \quad m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

$$\text{因为 } |AB| = \frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2 + 3} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{1}{|m|} + |m|} \leq 2, \text{ 且当 } m = \pm\sqrt{3} \text{ 时, } |AB| = 2.$$

所以 $|AB|$ 的最大值为 2.

(20) (共 13 分)

解: (I) 0, 1, 2, 1, 0 是一个满足条件的 E 数列 A_5 .

(答案不唯一, 0, 1, 0, 1, 0 也是一个满足条件的 E 数列 A_5 .)

(II) 必要性: 因为 E 数列 A_n 是递增数列,

$$\text{所以 } a_{k+1} - a_k = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, 1999).$$

所以 A_n 是首项为 12, 公差为 1 的等差数列.

$$\text{所以 } a_{2000} = 12 + (2000 - 1) \times 1 = 2011.$$

充分性：由于 $a_{2000} - a_{1999} \leq 1$,

$$a_{1999} - a_{1998} \leq 1,$$

.....

$$a_2 - a_1 \leq 1,$$

所以 $a_{2000} - a_1 \leq 1999$, 即 $a_{2000} \leq a_1 + 1999$.

又因为 $a_1 = 12$, $a_{2000} = 2011$,

所以 $a_{2000} = a_1 + 1999$.

故 $a_{k+1} - a_k = 1 > 0 (k = 1, 2, \dots, 1999)$, 即 A_n 是递增数列.

综上, 结论得证.

(III) 令 $c_k = a_{k+1} - a_k (k = 1, 2, \dots, n-1)$, 则 $c_k = \pm 1$.

因为 $a_2 = a_1 + c_1$,

$$a_3 = a_1 + c_1 + c_2,$$

.....

$$a_n = a_1 + c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1},$$

所以 $S(A_n) = na_1 + (n-1)c_1 + (n-2)c_2 + (n-3)c_3 + \dots + c_{n-1}$

$$= (n-1) + (n-2) + \dots + 1 - [(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \dots + (1-c_{n-1})]$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - [(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \dots + (1-c_{n-1})].$$

因为 $c_k = \pm 1$, 所以 $1-c_k$ 为偶数 $(k = 1, \dots, n-1)$.

所以 $(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \dots + (1-c_{n-1})$ 为偶数.

所以要使 $S(A_n) = 0$, 必须使 $\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数.

即 4 整除 $n(n-1)$, 亦即 $n = 4m$ 或 $n = 4m+1 (m \in \mathbb{N}^*)$.

当 $n = 4m (m \in \mathbb{N}^*)$ 时, E 数列 A_n 的项满足 $a_{4k-3} = a_{4k-2} = 0$, $a_{4k-1} = -1$, $a_{4k} = 1$

$(k = 1, 2, \dots, m)$ 时, 有 $a_1 = 0$, $S(A_n) = 0$;

当 $n = 4m+1 (m \in \mathbb{N}^*)$ 时, E 数列 A_n 的项满足 $a_{4k-3} = a_{4k-2} = 0$, $a_{4k-1} = -1$,

$a_{4k} = 1 (k = 1, 2, \dots, m)$, $a_{4m+1} = 0$ 时, 有 $a_1 = 0$, $S(A_n) = 0$;

当 $n = 4m+2$ 或 $n = 4m+3 (m \in \mathbb{N})$ 时, $n(n-1)$ 不能被 4 整除, 此时不存在 E 数列 A_n , 使得 $a_1 = 0$, $S(A_n) = 0$.