2022年上海市高考数学试卷

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1～6 题每题 4 分，第 7～12 题每题 5 分）

1. 双曲线$\frac{x^2}{9}-y^2=1$的实轴长为 .

2. 函数$f(x)=\cos^2x-\sin^2x+1$的周期为 .

3. 已知$a\in R$，行列式$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$的值与行列式$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$的值相等，则$a=$.

4. 已知圆柱的高为4，底面积为9π，则圆柱的侧面积为 .

5. $x-y\leq 0$，$x+y-1\geq 0$，求$z=x+2y$的最小值 .

6. 二项式$(3+x)^n$的展开式中，x^2项的系数是常数项的5倍，则$n=$.

7. 若函数$f(x)=\begin{cases} a^2x-1 & x<0 \\ x+a & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，为奇函数，求参数$a$的值为 .

8. 为了检测学生的身体素质指标，从游泳类1项，球类3项，田径类4项共8项项目中随机抽取4项进行检测，则每一类都被抽到的概率为 .

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，S_n为其前n项和，若$S_5=0$，则$S_i(i=0,1,2,\ldots,100)$中不同的数值有 个.

10. 若平面向量$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\lambda$，且满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，则$\lambda=$.

11. 设函数$f(x)$满足$f(x)=f\left(\frac{1}{1+x}\right)$对任意$x\in[0,+\infty)$都成立，其值域是$A_f$，已知对任何满足上述条件的$f(x)$都有$\{y|y=f(x),0\leq x\leq a\}=A_f$，则$a$的取值范围为 .

二、选择题（本题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分）每题有且只有一个正确选项.

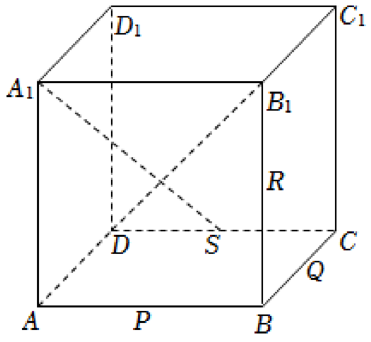
1. 若集合$A=[-1,2)$，$B=Z$，则$A\cap B=$（ ）

A.$\{-2,-1,0,1\}$ B.$\{-1,0,1\}$ C.$\{-1,0\}$ D.$\{-1\}$

2. 若实数a、b满足$a>b>0$，下列不等式中恒成立的是（ ）

A.$a+b>2\sqrt{ab}$ B.$a+b<2\sqrt{ab}$ C.$\frac{a}{2}+2b>2\sqrt{ab}$ D.$\frac{a}{2}+2b<2\sqrt{ab}$

3. 如图正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P、Q、R、S分别为棱AB、BC 、BB_1 、CD 的中点，联结A_1S，B_1D．空间任意两点M、N，若线段MN上不存在点在线段A_1S、 B_1D上，则称MN两点可视，则下列选项中与点D_1可视的为（ ）



A.点P　B.点B　C.点R　D.点Q

4. 设集合$\Omega=\left\{(x,y)\middle|(x-k)^2+\left(y-k^2\right)^2=4|k|,k\in Z\right\}$

①存在直线l，使得集合Ω中不存在点在l上，而存在点在l两侧；

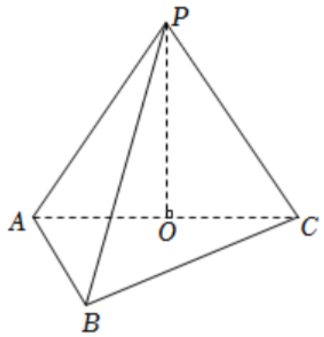
②存在直线l，使得集合Ω中存在无数点在l上；( )

A.①成立②成立　　B.①成立②不成立

C.①不成立②成立　　D.①不成立②不成立

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）.

1. 如图所示三棱锥，底面为等边$\triangle ABC$，O为AC边中点，且$PO\perp$底面ABC，$AP=AC=2$.



（1）求三棱锥体积V_{P-ABC}　；

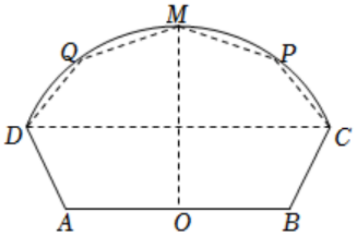
（2）若M为BC中点，求PM与面PAC所成角大小.

2. $f(x)=\log_3(a+x)+\log_3(6-x)$.

（1）若将函数$f(x)$图像向下移$m(m>0)$后，图像经过$(3,0)$，$(5,0)$，求实数a，m的值.

（2）若$a>-3$且$a\neq0$，求解不等式$f(x)\leq f\left(6-x\right)$.

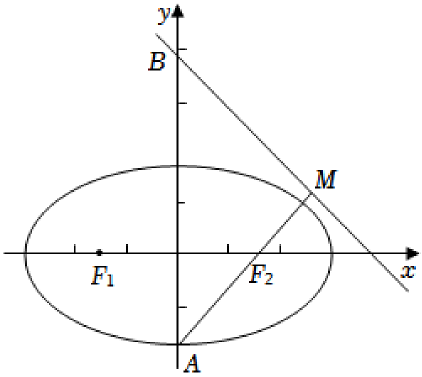
3. 如图，在同一平面上，$AD=BC=6$，$AB=20$，O为AB中点，曲线CD上任一点到O距离相等，$\angle DAB=\angle ABC=120°$，$P$，$Q$关于$OM$对称，$MO\perp AB$；



（1）若点P与点C重合，求$\angle POB$的大小；

（2）P在何位置，求五边形$MQABP$面积S的最大值．

4. 设有椭圆方程Γ:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线$l$:$x+y-4\sqrt{2}=0$，$\Gamma$下端点为$A$，$M$在$l$上，左、右焦点分别为$F_1(-\sqrt{2},0)$、$F_2(\sqrt{2},0)$ ．



（1）$a=2$，AM中点在x轴上，求点M的坐标；

（2）直线l与y轴交于B，直线AM经过右焦点F_2，在$\triangle ABM$中有一内角余弦值为$\frac{3}{5}$，求b；

（3）在椭圆Γ上存在一点P到l距离为d，使$|PF_1|+|PF_2|+d=6$，随a的变化，求d的最小值．

5. 数列$\{a_n\}$对任意$n\in N^*$且$n\geq 2$，均存在正整数$i\in[1,n-1]$，满$a_{n+1}=2a_n-a_i$，$a_1=1$， $a_2=3$．

（1）求a_4可能值；

（2）命题p：若$a_1,a_2,\cdots,a_8$成等差数列，则$a_9<30$，证明p为真，同时写出p逆命题q，并判断命题q是真是假，说明理由；

（3）若$a_{2m}=3^m$，$(m\in N^*)$成立，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

参考答案与试题解析

2022年上海市高考数学试卷

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1～6题每题4分，第7～12题每题5分）

1.

【答案】

$$6$$

【考点】

双曲线的简单几何性质

【解析】

根据双曲线的性质可得$a=3$，实轴长为$2a=6$．

【解答】

解：由双曲线$\frac{x^2}{9}-y^2=1$，可知：$a=3$，

所以双曲线的实轴长$2a=6$．

故答案为：6．

2.

【答案】

$$\pi$$

【考点】

三角函数的周期性

【解析】

由三角函数的恒等变换化简函数可得$f(x)=\cos2x+1$，从而根据周期公式即可求值．

【解答】

解：$f(x)=\cos^2x-\sin^2x+1$

$=\cos^2x-\sin^2x+\cos^2x+\sin^2x=\cos2x+1$,

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

故答案为：π.

3.

【答案】

$$3$$

【考点】

二阶行列式的定义

【解析】

根据行列式所表示的值求解即可．

【解答】

解：因为$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2a-3$，$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=a$，

所以$2a-3=a$，解得$a=3$．

故答案为：3．

4.

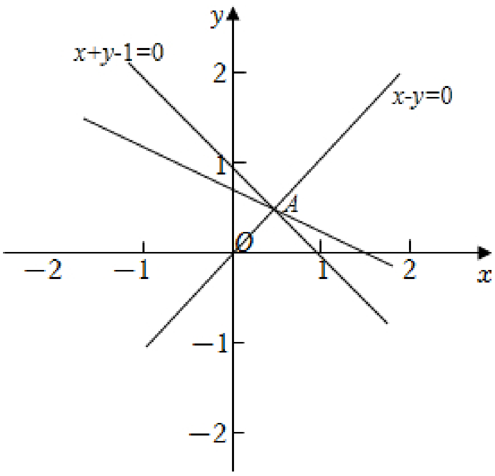
【答案】

$$24\pi$$

【考点】
棱柱、棱锥、棱台的侧面积和表面积
旋转体（圆柱、圆锥、圆台）
【解析】
由底面积为9π解出底面半径$R=3$，再代入侧面积公式求解即可．
【解答】
解：因为圆柱的底面积为9π，即$\pi R^2=9\pi$，
所以$R=3$，
所以$S_{侧}=2\pi Rh=24\pi$．
故答案为：24π．
5.
【答案】

$$\frac{3}{2}$$

【考点】
简单线性规划
【解析】
根据已知条件作出可行域，再求目标函数的最小值即可．
【解答】
解：如图所示：



由$x-y\leq 0$，$x+y-1\geq 0$,可知可行域为直线$x-y=0$的左上方和$x+y-1=0$的右上方的公共部分，

联立$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$，可得$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$，即图中点$A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

当目标函数$z=x+2y$沿着与正方向向量$\vec{a}=(1,2)$的相反向量平移时，离开区间时取最小值，

即目标函数$z=x+2y$过点$A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$时，取最小值：$\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}$.

6.
【答案】

$$10$$

【考点】

二项式定理及相关概念

【解析】

由题意，利用二项式展开式的通项公式，求得n的值.

【解答】

解：$\because$ 二项式$(3+x)^n$的展开式中，x^2项的系数是常数项的5倍，

即$C_n^2\times 3^{n-2}=5C_n^0\times 3^n$，即$\frac{n(n-1)}{2}=5\times 9$，

$\therefore$ $n=10$，

故答案为：10.

7.

【答案】

$$1$$

【考点】

分段函数的应用

函数奇偶性的性质

【解析】

（1）由题意，利用奇函数的定义可得$f(-x)=-f(x)$，故有$f(-1)=-f(1)$，由此求得a的值.

【解答】

解：$\because$ 函数$f(x)=\begin{cases} a^2x-1 & x<0 \\ x+a & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，为奇函数，$\therefore$ $f(-x)=-f(x)$，

$\therefore$ $f(-1)=-f(1)$，$\therefore$ $-a^2-1=-(a+1)$，即$a(a-1)=0$，求得$a=0$或$a=1$.

当$a=0$时，$f(x)=\begin{cases} -1,x<0 \\ 0,x=0 \\ x,x>0 \end{cases}$，不是奇函数，故$a\neq 0$；

当$a=1$时，$f(x)=\begin{cases} x-1,x<0 \\ 0,x=0 \\ x+1,x>0 \end{cases}$,是奇函数，故满足条件，

综上，$a=1$，

故答案为：1.

8.

【答案】

$$\frac{3}{7}$$

【考点】

古典概型及其概率计算公式

【解析】

由题意，利用古典概率的计算公式，计算求得结果.

【解答】

解：从游泳类1项，球类3项，田径类4项共8项项目中随机抽取4项进行检测，则每一类都被抽到的方法共有$C_1^1\cdot C_3^1\cdot C_4^2+C_1^1\cdot C_3^2\cdot C_4^1$种，

而所有的抽取方法共有C_8^4种，

故每一类都被抽到的概率为$\frac{C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^2 + C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_4^1}{C_8^4} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$,

故答案为：$\frac{3}{7}$.

9.
【答案】

98

【考点】
等差数列的前 n 项和
【解析】

由等差数前n项和公式求出a_1＝－$2d$，从而$S_n = \frac{d}{2}(n^2 - 5n)$，由此能求出结果．

【解答】
解：∵ 等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，S_n为其前n项和，$S_5 = 0$，

∴ $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 0$，解得$a_1 = -2d$，

∴ $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -2nd + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}(n^2 - 5n)$，

∵ $d \neq 0$，∴ $S_i(i = 0,1,2,\ldots,100)$中$S_0 = S_5 = 0$,
$S_2 = S_3 = -3d$，$S_1 = S_4 = -2d$，
其余各项均不相等，
∴ $S_i(i = 0,1,2,\ldots,100)$中不同的数值有：101－3＝98．
故答案为：98．
10.
【答案】
$\sqrt[4]{5}$
【考点】
平面向量数量积的性质及其运算
【解析】
利用平面向量的数量积进行分析，即可得出结果．
【解答】

解：由题意，有$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，则$\vec{a} \perp \vec{b}$，设$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \theta$，

$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta = 2, ① \\ |\vec{b}||\vec{c}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1, ② \end{cases}$ 则$\frac{②}{①}$得，$\tan\theta = \frac{1}{2}$,

由同角三角函数的基本关系得：$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

则$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta = \lambda \cdot \lambda \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2$，

$\lambda^2 = \sqrt{5}$，则$\lambda = \sqrt[4]{5}$.
故答案为:$\sqrt[4]{5}$.
11.

【答案】

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$$

【考点】

函数的值域及其求法

函数的定义域及其求法

【解析】

由题可得$\left\{y|y=f(x),0\le x\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}=A_f$，再根据$a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时不合题意，进而即得；或等价于$\frac{1}{1+x+a}\le a$恒成立，即$\frac{1}{a}-(1+a)\le x$恒成立，进而即得.

【解答】

解：法一：令$x=\frac{1}{x+1}$，解得$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（负值舍去），

当$x_1\in\left[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$时，$x_2=\frac{1}{x_1+1}\in\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right]$，

当$x_1\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$时，$x_2=\frac{1}{x_1+1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$，

且当$x_1\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$时，总存在$x_2=\frac{1}{x_1+1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$，使得$f(x_1)=f(x_2)$，

故$\left\{y|y=f(x),0\le x\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}=A_f$，

若$a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，易得$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\notin\{y|y=f(x),0\le x\le a\}$，

所以$a\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

即实数a的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$；

法二：原命题等价于任意$a>0$，$f(x+a)=f\left(\frac{1}{1+x+a}\right)$，

所以$\frac{1}{1+x+a}\le a\Rightarrow x\ge\frac{1}{a}-(1+a)$恒成立，

即$\frac{1}{a}-(1+a)\le 0$恒成立，又$a>0$，

所以$a\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

即实数a的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$.

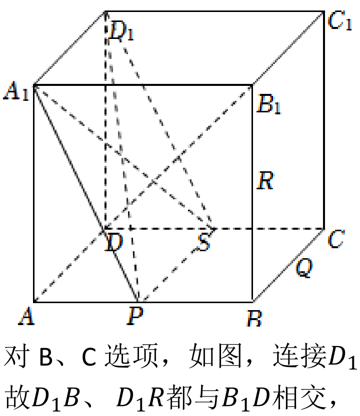
故答案为：$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$.

二、选择题（本题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分）每题有且只有一个正确选项.

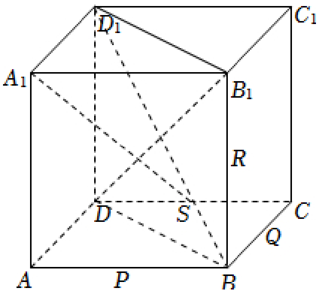
1.

【答案】

B

【考点】
交集及其运算
【解析】
根据集合的运算性质计算即可．
【解答】
解：∵ A＝[﹣1,2)，$B=Z$，
∴ $A\cap B$＝{﹣1,0,1}，
故选：B．
2.
【答案】
A
【考点】
基本不等式及其应用
【解析】
利用已知条件以及基本不等式化简即可判断求解．
【解答】
解：因为a＞b＞0，所以$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当a＝b时取等号，
又a＞b＞0，所以$a+b>2\sqrt{ab}$，故 A 正确，B 错误，
$\frac{a}{2}+2b\geq 2\sqrt{\frac{a}{2}\times 2b}=2\sqrt{ab}$，当且仅当$\frac{a}{2}=2b$，即$a$＝4$b$时取等号，故 CD 错误，
故选: A．
3.
【答案】
D
【考点】
空间中直线与直线之间的位置关系
【解析】
线段MN上不存在点在线段A_1S、 B_1D上，即直线MN与线段A_1S、 B_1D不相交，因此所求与D_1可视的点，即求哪条线段不与线段A_1S、 B_1D相交，再利用共面定理，异面直线的判定定理即可判断．
【解答】
解：线段MN上不存在点在线段A_1S、 B_1D上，即直线MN与线段A_1S、 B_1D不相交，
因此所求与D_1可视的点，即求哪条线段不与线段A_1S、 B_1D相交，
对 A 选项，如图，连接A_1P、PS 、 D_1S，因为P、S分别为AB、CD的中点，
∴ 易证$A_1D_1//PS$，故A_1、D_1 、P 、S 四点共面，∴ D_1P与A_1S相交，∴ A 错误；


对 B、C 选项，如图，连接D_1B、 DB，易证D_1、B_1 、B 、D四点共面，
故D_1B、 D_1R都与B_1D相交，∴ B、C 错误；



对 D 选项，连接D_1Q，由 A 选项分析知A_1、D_1 、P 、S 四点共面记为平面A_1D_1PS，

$\because$ $D_1 \in$ 平面A_1D_1PS，$Q \notin$ 平面A_1D_1PS，且$A_1S \subset$ 平面A_1D_1PS，点$D_1 \notin A_1S$，

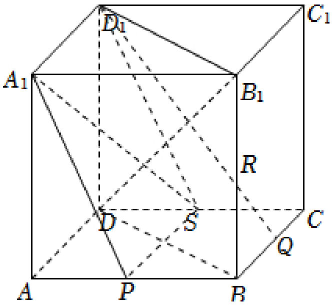
$\therefore$ D_1Q与A_1S为异面直线，

同理由 B，C 选项的分析知D_1、B_1 、B 、D四点共面记为平面D_1B_1BD，

$\because$ $D_1 \in$ 平面D_1B_1BD，$Q \notin$ 平面D_1B_1BD，且$B_1D \subset$ 平面D_1B_1BD，点$D_1 \notin B_1D$，

$\therefore$ D_1Q与B_1D为异面直线，

故D_1Q与A_1S，B_1D都没有公共点，$\therefore$ D 选项正确．



故选：D．

4.

【答案】

B

【考点】

直线与圆的位置关系

【解析】

分$k=0$，$k>0$，$k<0$，求出动点的轨迹，即可判定．

【解答】

解：当$k=0$时，集合$\Omega = \left\{(x,y)\middle|(x-k)^2 + \left(y-k^2\right)^2 = 4\middle|k|,k \in Z\right\} = \{(0,0)\}$，

当$k>0$时，集合$\Omega = \left\{(x,y)\middle|(x-k)^2 + \left(y-k^2\right)^2 = 4\middle|k|,k \in Z\right\}$，

表示圆心为(k,k^2)，半径为$r = 2\sqrt{k}$的圆，

圆的圆心在直线$y = x^2$上，半径$r = f(k) = 2\sqrt{k}$单调递增，

相邻两个圆的圆心距$d = \sqrt{(k+1-k)^2 + [(k+1)^2-k^2]^2} = \sqrt{4k^2+4k+2}$，相邻两个圆的半径之和为$l = 2$

$\sqrt{k} + 2\sqrt{k+1}$，

因为$d>l$有解，故相邻两个圆之间的位置关系可能相离，

当$k<0$时，同$k>0$的情况，故存在直线l，使得集合Ω中不存在点在l上，而存在点在l两侧，故①正确，

若直线l斜率不存在，显然不成立，

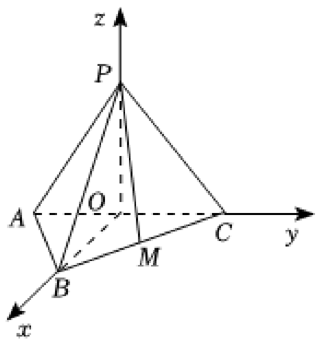
设直线$l:y = mx+n$，若考虑直线l与圆$(x-k)^2 + \left(y-k^2\right)^2 = 4|k|$的焦点个数，

$d=\frac{|mk+n-k^2|}{\sqrt{m^2+1}}$，$r=2\sqrt{|k|}$，

给定m，n，当k足够大时，均有$d>r$，
故直线l只与有限个圆相交，②错误.
故选: B.
三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）.
1.
【答案】
解:（1）在三棱锥$P-ABC$中，因为$PO\perp$底面ABC，所以$PO\perp AC$，
又O为AC边中点，所以$\triangle PAC$为等腰三角形，
又$AP=AC=2$. 所以$\triangle PAC$是边长为2的为等边三角形，

$\therefore$ $PO=\sqrt{3}$，三棱锥体积$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\sqrt{3}=1$.

（2）以O为坐标原点，OB为x轴，OC为y轴，OP为z轴，建立空间直角坐标系，



则$P(0,0,\sqrt{3})$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

$\vec{PM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$，

平面PAC的法向量$\vec{OB}=(\sqrt{3},0,0)$，

设直线PM与平面PAC所成角为θ，

则直线PM与平面PAC所成角的正弦值为$\sin\theta=\left|\frac{\vec{PM}\cdot\vec{OB}}{|\vec{PM}|\cdot|\vec{OB}|}\right|=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

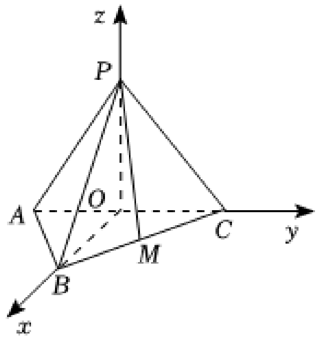
所以PM与面PAC所成角大小为$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【考点】
棱柱、棱锥、棱台的体积
直线与平面所成的角
【解析】
（1）直接利用体积公式求解；
（2）以O为坐标原点，OB为x轴，OC为y轴，OP为z轴，建立空间直角坐标系，求得平面PAC的法向量，即可求解.
【解答】
解:（1）在三棱锥$P-ABC$中，因为$PO\perp$底面ABC，所以$PO\perp AC$，

又O为AC边中点，所以$\triangle PAC$为等腰三角形，
又$AP=AC=2$．所以$\triangle PAC$是边长为2的为等边三角形，

$\therefore\ PO=\sqrt{3}$，三棱锥体积$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\sqrt{3}=1$．

（2）以O为坐标原点，OB为x轴，OC为y轴，OP为z轴，建立空间直角坐标系，



则$P(0,0,\sqrt{3})$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{PM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$，

平面PAC的法向量$\overrightarrow{OB}=(\sqrt{3},0,0)$，
设直线PM与平面PAC所成角为θ，

则直线PM与平面PAC所成角的正弦值为$\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}\right|=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以PM与面PAC所成角大小为$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2.
【答案】
解：（1）因为函数$f(x)=\log_3(a+x)+\log_3(6-x)$，
将函数$f(x)$图像向下移$m(m>0)$后，得$y=f(x)-m=\log_3(a+x)+\log_3(6-x)-m$的图像，
由函数图像经过点$(3,0)$和$(5,0)$，

所以$\begin{cases}\log_3(3+a)+1-m=0\\ \log_3(5+a)+0-m=0\end{cases}$’
解得$a=-2$，$m=1$．

（2）$a>-3$且$a\neq 0$时，不等式$f(x)\leq f\left(6-x\right)$可化为$\log_3(a+x)+\log_3(6-x)\leq\log_3(a+6-x)+\log_3 x$，

等价于$\begin{cases}a+x>0\\ 6-x>0\\ a+6-x>0\\ x>0\\ (a+x)(6-x)\leq x(a+6-x)\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x>-a\\ x<6\\ x<a+6\\ x>0\\ a(x-3)\geq 0\end{cases}$，

当$-3<a<0$时，$0<-a<3$，$3<a+6<6$，解不等式得$-a<x\leq 3$，
当$a>0$时，$-a<0$，$a+6>6$，解不等式得$3\leq x<6$；

综上知，$-3<a<0$时，不等式$f(x)\leq f\left(6-x\right)$的解集是$(-a,3]$，

$a>0$时，不等式$f(x) \leq f\left(6 - x\right)$的解集是$[3,6)$.

【考点】
对数函数的图象与性质
不等式恒成立的问题
【解析】
（1）写出函数图像下移m个单位后的解析式，把点的坐标代入求解即可得出m和a的值.
（2）不等式化为$\log_3(a+x)+\log_3(6-x) \leq \log_3(a+6-x)+\log_3 x$，写出等价不等式组，求出解集即可.
【解答】
解：（1）因为函数$f(x)=\log_3(a+x)+\log_3(6-x)$，
将函数$f(x)$图像向下移$m(m>0)$后，得$y=f(x)-m=\log_3(a+x)+\log_3(6-x)-m$的图像，
由函数图像经过点$(3,0)$和$(5,0)$，

所以$\begin{cases}\log_3(3+a)+1-m=0\\ \log_3(5+a)+0-m=0\end{cases}$，

解得$a=-2$，$m=1$.

（2）$a>-3$且$a \neq 0$时，不等式$f(x) \leq f\left(6 - x\right)$可化为$\log_3(a+x)+\log_3(6-x) \leq \log_3(a+6-x)+\log_3 x$，

等价于$\begin{cases}a+x>0\\ 6-x>0\\ a+6-x>0\\ x>0\\ (a+x)(6-x) \leq x(a+6-x)\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x>-a\\ x<6\\ x<a+6\\ x>0\\ a(x-3) \geq 0\end{cases}$，

当$-3<a<0$时，$0<-a<3$，$3<a+6<6$，解不等式得$-a<x \leq 3$，
当$a>0$时，$-a<0$，$a+6>6$，解不等式得$3 \leq x<6$；

综上知，$-3<a<0$时，不等式$f(x) \leq f\left(6 - x\right)$的解集是$(-a,3]$，

$a>0$时，不等式$f(x) \leq f\left(6 - x\right)$的解集是$[3,6)$.

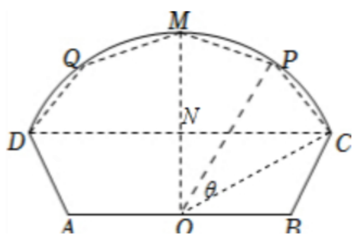
3.
【答案】
解：（1）点P与点C重合，由题意可得$OB=10$，$BC=6$，$\angle ABC=120°$，

由余弦定理可得$OP^2=OB^2+BC^2-2OB \cdot BC\cos\angle ABC=36+100-2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)=196$，

所以$OP=14$，在$\triangle OBP$中，由正弦定理得$\frac{OP}{\sin 120°}=\frac{BP}{\sin\angle POB}$，

所以$\frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{\sin\angle POB}$，解得$\sin\angle POB=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以$\angle POB$的大小为$\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}$；



（2）如图，连结QA，PB，OQ，OP，

$\because$ 曲线CMD上任意一点到O距离相等，

$\therefore$ $OP=OQ=OM=OC=14$，

$\because$ P，Q关于OM对称，

$\therefore$ P点在劣弧CM中点或劣弧DM的中点位置，$S_{\triangle QOM}=S_{\triangle POM}=\alpha$，

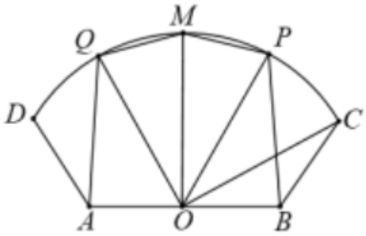
则$\angle AOQ=\angle BOP=S_{\triangle BOP}=\frac{\pi}{2}-\alpha$，

则五边形面积$S=2(S_{\triangle AOQ}+S_{\triangle QOM})$

$=2\left[\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot OA\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot OM\cdot\sin\alpha\right]=28\sqrt{74}\sin(\alpha+\varphi)$，其中$\tan\varphi=\frac{5}{7}$，

当$\sin(\alpha+\varphi)=1$时，$S_{五边形MQABP}$取最大值$28\sqrt{74}$，

$\therefore$ 五边形$MQABP$面积S的最大值为$28\sqrt{74}$.



【考点】

余弦定理

正弦定理

扇形面积公式

【解析】

（1）在$\triangle OBP$中，直接利用余弦定理求出OP，再结合正弦定理求解；

（2）利用五边形$CDQMP$的对称性，将所求的面积化为四边形$PMNC$的面积计算问题，充分利用圆弧的性质，找到最大值点，从而解决问题.

【解答】

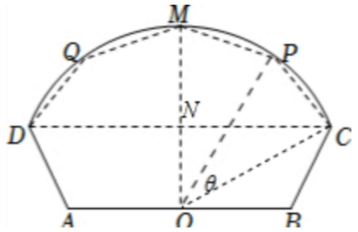
解：（1）点P与点C重合，由题意可得$OB=10$，$BC=6$，$\angle ABC=120^\circ$，

由余弦定理可得$OP^2=OB^2+BC^2-2OB\cdot BC\cos\angle ABC=36+100-2\times6\times10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=196$，

所以$OP=14$，在$\triangle OBP$中，由正弦定理得$\frac{OP}{\sin120^\circ}=\frac{BP}{\sin\angle POB}$ ，

所以$\frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{\sin\angle POB}$，解得$\sin\angle POB=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以$\angle POB$的大小为$\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}$；



（2）如图，连结QA，PB，OQ，OP，

∵ 曲线CMD上任意一点到O距离相等，

∴ $OP=OQ=OM=OC=14$，

∵ P，Q关于OM对称，

∴ P点在劣弧CM中点或劣弧DM的中点位置，$S_{\triangle QOM}=S_{\triangle POM}=\alpha$，

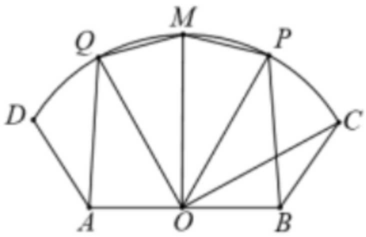
则$\angle AOQ=\angle BOP=S_{\triangle BOP}=\frac{\pi}{2}-\alpha$，

则五边形面积$S=2(S_{\triangle AOQ}+S_{\triangle QOM})$

$=2\left[\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot OA\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot OM\cdot\sin\alpha\right]=28\sqrt{74}\sin(\alpha+\varphi)$，其中$\tan\varphi=\frac{5}{7}$,

当$\sin(\alpha+\varphi)=1$时，$S_{\text{五边形}MQABP}$取最大值$28\sqrt{74}$，

∴ 五边形$MQABP$面积S的最大值为$28\sqrt{74}$.



4.

【答案】

解：（1）由题意可得$a=2$，$b=c=\sqrt{2}$，

$\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，$A(0,-\sqrt{2})$，

∵ AM的中点在x轴上，

∴ M的纵坐标为$\sqrt{2}$，

代入$x+y-4\sqrt{2}=0$得$M(3\sqrt{2},\sqrt{2})$.

（2）由直线方程可知$B(0,4\sqrt{2})$，

①若$\cos\angle BAM=\frac{3}{5}$，则$\tan\angle BAM=\frac{4}{3}$，即$\tan\angle OAF_2=\frac{4}{3}$,

∴ $OA=\frac{3}{4}OF_2=\frac{3}{4}\sqrt{2}$，

∴ $b=\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

②若$\cos\angle BMA=\frac{3}{5}$，则$\sin\angle BMA=\frac{4}{5}$,

∵ $\angle MBA=\frac{\pi}{4}$，∴ $\cos(\angle MBA+\angle AMB)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，

∴ $\cos\angle BAM=\frac{\sqrt{2}}{10}$，∴ $\tan\angle BAM=7$.

即$\tan\angle OAF_2=7$，∴ $OA=\frac{\sqrt{2}}{7}$，∴ $b=\frac{\sqrt{2}}{7}$,

综上$b=\frac{3}{4}\sqrt{2}$或$\frac{\sqrt{2}}{7}$.

（3）设$P(acos\theta,bsin\theta)$，

由点到直线距离公式可得$\frac{|a\cos\theta+b\sin\theta-4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=6-2a$，

很明显椭圆在直线的左下方，则$-\frac{a\cos\theta+b\sin\theta-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=6-2a$，

即$4\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}a$，

$\because$ $a^2=b^2+2$，$\therefore$ $\sqrt{2a^2-2}\sin(\theta+\varphi)=2\sqrt{2}a-2\sqrt{2}$，

据此可得$\sqrt{a^2-1}\sin(\theta+\varphi)=2a-2$，$|\sin(\theta+\varphi)|=\frac{|2a-2|}{\sqrt{a^2-1}}\leq 1$，

整理可得$\left(a-1\right)\left(3a-5\right)\leq 0$，即$1\leq a\leq\frac{5}{3}$，

从而$d=6-2a\geq 6-2\times\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$.

即d的最小值为$\frac{8}{3}$.

【考点】

直线与圆锥曲线的关系

椭圆的定义和性质

直线与椭圆结合的最值问题

点到直线的距离公式

【解析】

（1）由题意可得椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，从而确定$M$点的纵坐标，进一步可得点$M$的坐标；

（2）由直线方程可知$B(0,4\sqrt{2})$，分类讨论$\cos\angle BAM=\frac{3}{5}$和$\cos\angle BMA=\frac{3}{5}$两种情况确定$b$的值即可；

（3）设$P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，利用点到直线距离公式和椭圆的定义可得$\frac{|a\cos\theta+b\sin\theta-4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=6-2a$，进一步整理计算，结合三角函数的有界性求得$1\leq a\leq\frac{5}{3}$即可确定$d$的最小值.

【解答】

解：（1）由题意可得$a=2$，$b=c=\sqrt{2}$，

Γ:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，$A(0,-\sqrt{2})$，

$\because$ AM的中点在x轴上，

$\therefore$ M的纵坐标为$\sqrt{2}$，

代入$x+y-4\sqrt{2}=0$得$M(3\sqrt{2},\sqrt{2})$.

（2）由直线方程可知$B(0,4\sqrt{2})$，

①若$\cos\angle BAM=\frac{3}{5}$，则$\tan\angle BAM=\frac{4}{3}$，即$\tan\angle OAF_2=\frac{4}{3}$，

$\therefore$ $OA=\frac{3}{4}OF_2=\frac{3}{4}\sqrt{2}$，

$\therefore$ $b=\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

②若$\cos\angle BMA=\frac{3}{5}$，则$\sin\angle BMA=\frac{4}{5}$，

$\because \angle MBA=\frac{\pi}{4}$，$\therefore \cos(\angle MBA+\angle AMB)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore \cos\angle BAM=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\therefore \tan\angle BAM=7$.

即$\tan\angle OAF_2=7$，$\therefore OA=\frac{\sqrt{2}}{7}$，$\therefore b=\frac{\sqrt{2}}{7}$，

综上$b=\frac{3}{4}\sqrt{2}$或$\frac{\sqrt{2}}{7}$.

（3）设$P(acos\theta,bsin\theta)$，

由点到直线距离公式可得$\frac{|acos\theta+b\sin\theta-4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=6-2a$，

很明显椭圆在直线的左下方，则$-\frac{acos\theta+b\sin\theta-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=6-2a$，

即$4\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}a$，

$\because a^2=b^2+2$，$\therefore \sqrt{2a^2-2}\sin(\theta+\varphi)=2\sqrt{2}a-2\sqrt{2}$，

据此可得$\sqrt{a^2-1}\sin(\theta+\varphi)=2a-2$，$|\sin(\theta+\varphi)|=\frac{|2a-2|}{\sqrt{a^2-1}}\leq 1$，

整理可得$\left(a-1\right)\left(3a-5\right)\leq 0$，即$1\leq a\leq\frac{5}{3}$，

从而$d=6-2a\geq 6-2\times\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$.

即d的最小值为$\frac{8}{3}$.

5.

【答案】

解：（1）$a_3=2a_2-a_1=5$，$a_4=2a_3-a_2=7$或$a_4=2a_3-a_1=9$.

（2）$\because a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$为等差数列，

$\therefore d=2$，$a_n=2n-1(n\in[1,8],n\in N^*)$，

$a_9=2a_8-a_i=30-a_i<30$.

逆命题q：若$a_9<30$，则$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$为等差数列是假命题，

举例：$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=7$，$a_5=9$，$a_6=11$，$a_7=13$，

$a_8=2a_7-a_5=17$，$a_9=2a_8-a_7=21$.

（3）因为$a_{2m}=3^m$，

$\therefore a_{2m+2}=3^{m+1}$，$a_{2m+1}=2a_{2m}-a_j(j\leq 2m-1)$，$a_{2m+2}=2a_{2m+1}-a_i(i\leq 2m)$，

$\therefore a_{2m+2}=4a_{2m}-2a_j-a_i$，

$\therefore 2a_j+a_i=4a_{2m}-a_{2m+2}=4\times 3^m-3^{m+1}=3^m=a_{2m}$，

以下用数学归纳法证明数列单调递增，即证明$a_{n+1}>a_n$恒成立：

当$n=1$，$a_2>a_1$明显成立，

假设$n=k$时命题成立，即$a_k>a_{k-1}>a_{k-2}\cdots>a_2>a_1>0$，

则$a_{k+1}-a_k=2a_k-a_i-a_k=a_k-a_i>0$，则$a_{k+1}>a_k$，命题得证.

回到原题，分类讨论求解数列的通项公式：

1．若$j=2m-1$，则$a_{2m}=2a_j+a_i=2a_{2m-1}+a_i>a_{2m-1}-a_i$矛盾，

2．若$j=2m-2$，则$a_j=3^{m-1}$，$\therefore a_i=3^m-2a_j=3^{m-1}$，$\therefore i=2m-2$，

此时$a_{2m+1}=2a_{2m}-a_j=2\times 3^m-3^{m-1}=5\times 3^{m-1}$，

$\therefore\ a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 5\times 3^{\frac{n-3}{2}} & n=2k+1,k\in N^*\\ 3^{\frac{n}{2}} & n=2k,k\in N^*\end{cases}$3．若$j<2m-2$，则$2a_j<2\times 3^{m-1}$，

$\therefore\ a_i=3^m-2a_j>3^{m-1}$，$\therefore\ j=2m-1$，

$\therefore\ a_{2m+2}=2a_{2m+1}-a_{2m-1}$（由（2）知对任意$m$成立），

$a_6=2a_5-a_3$，

事实上：$a_6=2a_5-a_2$矛盾．

综上可得$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 5\times 3^{\frac{n-3}{2}} & n=2k+1,k\in N^*\\ 3^{\frac{n}{2}} & n=2k,k\in N^*\end{cases}$.

【考点】

数列递推式

命题的真假判断与应用

数列的应用

数学归纳法

【解析】

（1）利用递推关系式可得$a_3=5$，然后计算a_4的值即可；

（2）由题意可得$a_n=2n-1(n\in[1,8],n\in N^*)$，则$a_9=2a_8-a_i<30$，从而命题为真命题，给出反例可得命题$q$为假命题．

（3）由题意可得$a_{2m+2}=2a_{2m+1}-a_i(i\leq 2m)$，$a_{2m+1}=2a_{2m}-a_j(j\leq 2m-1)$，然后利用数学归纳法证明数列单调递增，最后分类讨论即可确定数列的通项公式．

【解答】

解：（1）$a_3=2a_2-a_1=5$，$a_4=2a_3-a_2=7$或$a_4=2a_3-a_1=9$．

（2）$\because\ a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$为等差数列，

$\therefore\ d=2$，$a_n=2n-1(n\in[1,8],n\in N^*)$，

$a_9=2a_8-a_i=30-a_i<30$．

逆命题q：若$a_9<30$，则$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$为等差数列是假命题，

举例：$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=7$，$a_5=9$，$a_6=11$，$a_7=13$，

$a_8=2a_7-a_5=17$，$a_9=2a_8-a_7=21$．

（3）因为$a_{2m}=3^m$，

$\therefore\ a_{2m+2}=3^{m+1}$，$a_{2m+1}=2a_{2m}-a_j(j\leq 2m-1)$，$a_{2m+2}=2a_{2m+1}-a_i(i\leq 2m)$，

$\therefore\ a_{2m+2}=4a_{2m}-2a_j-a_i$，

$\therefore\ 2a_j+a_i=4a_{2m}-a_{2m+2}=4\times 3^m-3^{m+1}=3^m=a_{2m}$，

以下用数学归纳法证明数列单调递增，即证明$a_{n+1}>a_n$恒成立：

当$n=1$，$a_2>a_1$明显成立，

假设$n=k$时命题成立，即$a_k>a_{k-1}>a_{k-2}\cdots>a_2>a_1>0$，

则$a_{k+1}-a_k=2a_k-a_i-a_k=a_k-a_i>0$，则$a_{k+1}>a_k$，命题得证．

回到原题，分类讨论求解数列的通项公式：

1．若$j=2m-1$，则$a_{2m}=2a_j+a_i=2a_{2m-1}+a_i>a_{2m-1}-a_i$矛盾，

2．若$j=2m-2$，则$a_j=3^{m-1}$，$\therefore\ a_i=3^m-2a_j=3^{m-1}$，$\therefore\ i=2m-2$，

此时$a_{2m+1}=2a_{2m}-a_j=2\times 3^m-3^{m-1}=5\times 3^{m-1}$，

$\therefore\ a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 5\times 3^{\frac{n-3}{2}} & n=2k+1,k\in N^*\\ 3^{\frac{n}{2}} & n=2k,k\in N^*\end{cases}$3．若$j$＜$2m-2$，则$2a_j<2\times 3^{m-1}$，

$\therefore\ a_i=3^m-2a_j>3^{m-1}$，$\therefore\ j=2m-1$，

$\therefore\ a_{2m+2}=2a_{2m+1}-a_{2m-1}$（由（2）知对任意$m$成立），

$a_6=2a_5-a_3$，

事实上：$a_6=2a_5-a_2$矛盾．

综上可得$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 5\times 3^{\frac{n-3}{2}} & n=2k+1,k\in N^*\\ 3^{\frac{n}{2}} & n=2k,k\in N^*\end{cases}$.