绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学理工农医类（精编版）

【试卷总评】本试卷共有24个问题，其中1—12题为选择题，13—16为填空题，17—21为必做解答题，22—24为选做解答题，满分150分，具体考点如下：

一、选择题考点一览表：

题号	主要考点
1	复数的基本运算、复数的几何意义
2	简单堆积抽样的定义
3	正弦定理
4	线性规划
5	基本初等函数图像
6	平面向量的基本运算
7	三视图
8	对称问题

这8道选择题中，第1-3为基础题，注重基础知识的考查、基本公式的应用，第4-7为数形结合的问题，基本图像的观察以及基本思想的渗透，其中4、5两题注重培养学生的动手能力，要求学生自己做出图像，自己分析得到答案，第7题注重空间想象能力的培养，要求学生寻找正方体在旋转过程中的最值，第8题，与平面几何知识想结合，要求将平面几何问题解析话，降低解题的难度；总体老说，这9道问题难度相对均衡，无偏题、怪题；

二、填空题考点一览表：

题号	主要考点
9	参数方程
10	不等式选讲
11	几何证明
12	定积分的基本运算

13	算法以及程序框图
14	双曲线的定义及性质
15	新定义数列
16	函数与三角形

8 道填空题中，9-11 题为选修内容，要求三题中必做两题，相对难度较低；12-14 注重基本公式的考查以及逻辑分析能力的培养，要求学生必须细心踏实的学好这部分内容， 15 题注重源于平常练习中的习题，但是难度略高于练习，要求学生有一定的创新能力；16 题为函数与三角形结合的问题，要求学生具有处理综合问题的能力以及较好的逻辑推理能力；

三、解答题考点说明表：

题号	主要考点
17	三角函数的计算、三角恒等变换
18	概率的基本计算、排列组合知识、离散型随机变量分布列、期望
19	线面垂直的判定以及性质、线面成角
20	应用题
21	抛物线的定义、直线与圆锥曲线关系
22	导数与函数

第 17 题：本题为三角函数，第（1）问，考查简单的三角函数的计算；第（2）问考查三角恒等变换知识，包括降幂升角，以及解不等式，考查学生的基本功是否扎实；本题难度不大；

第 18 题：本题为概率统计问题，第（1）小题考查学生的观察能力与数据处理能力，需要学生在读懂问题、读懂图形的基础上加以处理数据，进而使用简单的排列组合进行计算；第（2）小题考查离散型随机变量的分布列，这是每年的必考题，亦为重难点；本题难度不大；

第 19 题：本题为立体几何问题第（1）问考查线线垂直，学生必须对线线垂直进行转化，通过线面垂直来证明线线垂直，进而找到解题思路；第（2）考查线面成角，考虑使用向量法降低立体思维的难度，将立体几何问题计算化，便于在考场节省时间；

第 20 题：本题为应用题，试题较为注重数学建模能力的考查，试题以绝对值不等式为主干进行构造，要求学生从实际问题中提取信息，进而抽象出函数模型进行求解；

第 21 题：本题为圆锥曲线问题，试题以此开始，难度和计算量有了较大的提升，第（1）小题以向

量为背景，要求学生练习直线与圆锥曲线的方程进行解题，在解题的过程中充分利用根与系数的关系进行求解，本小题侧重计算能力的考查；第（2）小题加入了数形结合能力的培养，要求学生实现想象—作图—计算一体化，对于综合知识能力不好的学生，往往得分率不高；

第 21 题，本题为函数与方程问题，作为本卷的压轴题，有着一定的特点；试题选取了绝对值不等式为背景，第（1）小题就要求学生有着一定的分类讨论能力，才能实现最值的探索；第（2）小题，综合性较强，且在解题的过程中需要将条件不断的转化、调整，试题难度较大，具有很好的区分度；

综上：本套试题作为高考的选拔性考试非常有优势，就是题题的设问方式都规避了模式化的单刀直入法，可谓题题都有新鲜感，不过不足之处也恰恰在于此，对于那些理解能力、化归转化能力、阅读能力偏弱的同学来说就是一大灾难。

本试卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 5 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.复数 $z=i\bullet(1+i)$ (i为虚数单位) 在复平面上对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】B；

【解析】$z=i(1+i)=i+i^2=-1+i$，故对应的点在第二象限.

【学科网考点定位】本题考查复数的四则运算以及复数的几何意义，考查学生的基本运算能力.

2.某学校有男、女学生各 500 名.为了解男女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异，拟从全体学生中抽取 100 名学生进行调查，则宜采用的抽样方法是（　　）

A．抽签法　　B．随机数法　　C．系统抽样法　　D．分层抽样法

【答案】D；

【解析】因为了解男女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异，男生与女生之间存在差异，故使用分层抽样；

【学科网考点定位】本题考查随机抽样的定义，考查学生对定义的理解.

3.在锐角中 ΔABC，角 A,B 所对的边长分别为 a,b .若 $2a\sin B=\sqrt{3}b$,则角A等于（　　）

A．$\dfrac{\pi}{12}$　　B．$\dfrac{\pi}{6}$　　C．$\dfrac{\pi}{4}$　　D．$\dfrac{\pi}{3}$

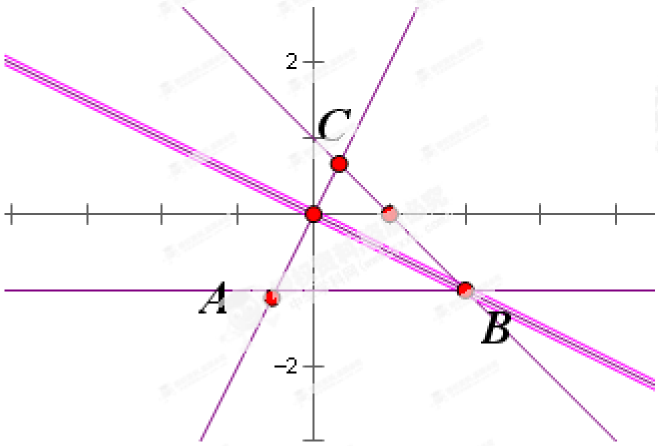
【答案】D；

【解析】因为 $2a\sin B=\sqrt{3}b$，所以 $\frac{\sin B}{b}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{a}$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

【学科网考点定位】本题考查正弦定理的运用，考查学生的化归与转化能力.

4.若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\le 2x \\ x+y\le 1 \\ y\ge -1 \end{cases}$，则 $x+2y$ 的最大值是

A．$-\frac{5}{2}$　　B．0　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$\frac{5}{2}$



【答案】C；

【解析】令 $x+2y=z$，所以 $y=\frac{-x}{2}+\frac{z}{2}$，作出可行域，可知当直线 $y=\frac{-x}{2}+\frac{z}{2}$ 过点 $C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 时 $x+2y$ 有最大值，最大值为 $\frac{5}{3}$.

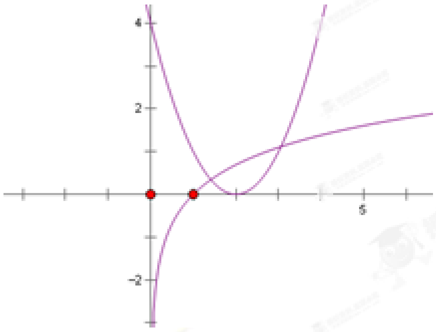
【学科网考点定位】本题考查线性规划知识，考查学生的化归与转化能力.

5.函数 $f(x)=2\ln x$ 的图像与函数 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图像的交点个数为（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

【答案】B；

【解析】在同一直角坐标系中分别作出两个函数的图像，可知有两个交点.



【学科网考点定位】本题考查基本初等函数的图像，考查学生数形结合的能力.

6. 已知a,b是单位向量，$a\bullet b=0$.若向量c满足$|c-a-b|=1$,则$|c|$的取值范围是（　　）

A. $\left[\sqrt{2}-1,,\sqrt{2}+1\right]$　　　B. $\left[\sqrt{2}-1,,\sqrt{2}+2\right]$

C. $\left[1,,\sqrt{2}+1\right]$　　　D. $\left[1,,\sqrt{2}+2\right]$

【答案】A;

【解析】因为$|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|=1$，$|\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})|=1$，做出图形可知，当且仅当$\vec{c}$与$(\vec{a}+\vec{b})$方向相反且$|\vec{c}|-|\vec{a}+\vec{b}|=1$时，$|\vec{c}|$取到最大值;最大值为$\sqrt{2}+1$;当且仅当$\vec{c}$与$(\vec{a}+\vec{b})$方向相同且$|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{c}|=1$时，$|\vec{c}|$取到最小值；最小值为$\sqrt{2}-1$.

【学科网考点定位】本题考查向量的加法，考查学生数形结合的能力.

7．已知棱长为 1 的正方体的俯视图是一个面积为 1 的正方形，则该正方体的正视图的面积不可能等于（　　）

A．1　　　B．$\sqrt{2}$　　　C．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　　D．$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

【答案】C;

【解析】正方体的正视图面积应当介意 1 与$\sqrt{2}$之间，故 C 不正确.

【学科网考点定位】本题考查三视图，考查学生的空间想象能力.

8.在等腰三角形ABC中，$AB=AC=4$,点P是边AB上异于A,B的一点，光线从点P出发，经BC,CA发射后又回到原点P（如图1）.若光线QR经过ΔABC的中心，则AP等于（　　）

A. 2　　　　　　B. 1

C. $\frac{8}{3}$　　　　　　D. $\frac{4}{3}$

【答案】D;

【解析】以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，AC 所在直线为 y 轴建立直角坐标系，所以等腰三角形 ABC 的中心坐标为$(\frac{4+0+0}{3},\frac{0+4+0}{3})$，因为光线从点 P 出发，经 BC, CA 发射后又回到原点 P，故点 P 为三角新 ABC 的中心在底边 AB 上的投影，所以 AP=$\frac{4}{3}$.

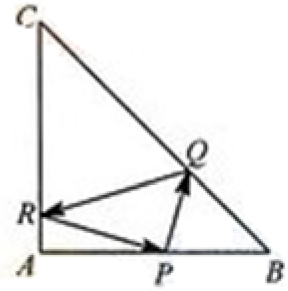


图 1

【学科网考点定位】本题考查三角形的中心，考查学生的化归与转化能力.

二、填空题：本大题共 8 小题，考生作答 7 小题，每小题 5 分，共 35 分.

（一）选做题（请考生在第 9、10、11 三题中任选两题作答，如果全做，则按前两题计分）

9.在平面直角坐标系 xoy 中，若 $l:\begin{cases}x=t,\\y=t-a\end{cases}$ (t 为参数)过椭圆 $C:\begin{cases}x=3\cos\varphi,\\y=2\sin\varphi\end{cases}$ (φ为参数)的右顶点，则常数 a的值为___________.

【答案】3

【解析】因为椭圆 $C:\begin{cases}x=3\cos\varphi,\\y=2\sin\varphi\end{cases}$，所以 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，右顶点为（3,0），因为直线 $y=x-a$，将点坐标带入直线方程可得 $a=3$.

【学科网考点定位】本题考查直线的参数方程，考查学生的转化与化归能力.

10.已知 $a,b,c\in, a+2b+3c=6$, 则 $a^2+4b^2+9c^2$的最小值为___________.

【答案】12

【解析】$(a^2+4b^2+9c^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(a+2b+3c)^2$，所以 $a^2+4b^2+9c^2\geq 12$.

【学科网考点定位】本题考查柯西不等式的使用，考查学生的化归与转化能力.

11.如图 2，在半径为$\sqrt{7}$的$\odot O$中,弦AB,CD相交于点$P,PA=PB=2,$

$PD=1$，则圆心O到弦CD的距离为___________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

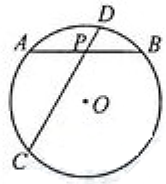


图 2

【解析】由相交弦定理可知，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$，因为

$PA=PB=2,PC=1,$故 PD=4，，即$CD=PD+PC=5$，连接 DO，过圆

心做 CD 的垂线交于 F，在三角形 OFD 中$OF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=d$

【学科网考点定位】本题考查集合证明问题，考查学生数形结合的能力.

（一） 必做题（12-16 题）

12.若$\int_0^T x^2dx=9$,则常数T的值为___________.

【答案】3；

【解析】依题意$\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^T=\dfrac{1}{3}(T^3)=9$，所以$T=3$

【学科网考点定位】本题考查定积分的基本运算，考查学生的基本运算能力.

13.执行如图 3 所示的程序框图，如果输入$a=1,b=2$,则输出的a的值为___________.

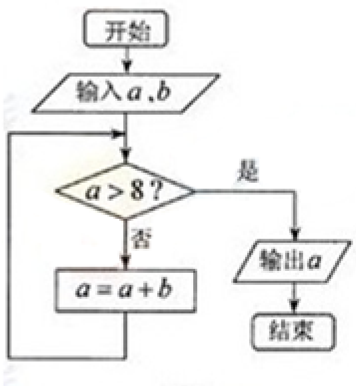


图 3

【答案】9；

【解析】第一步，$a=1+2=3$；第二步，$a=3+2=5$；第三步，$a=5+2=7$；第四步，$a=7+2=9$

【学科网考点定位】本题考查算法与程序框图，考查学生的逻辑推理能力.

14．设 F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点，P 是 C 上一点，若 $|PF|_1+|PF_2|=6a,$ 且 ΔPF_1F_2 的最小内角为 30°，则 C 的离心率为___。

【答案】$\sqrt{3}$；

【解析】不妨设 $|PF_1|>|PF_2|$，则 $\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=2a\\|PF_1|+|PF_2|=6a\end{cases}$，所以 $|PF_1|=4a,|PF_2|=2a$，因为 $\angle PF_1F_2=30^0$，所以 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}a$，所以 $e=\frac{2c}{2a}=\sqrt{3}$.

【学科网考点定位】本题考查双曲线的基本性质，考查学生数形结合的能力.

15．设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n},n\in N^*$, 则

（1）$a_3=$_____；

（2）$S_1+S_2+\cdots+S_{100}=$___________。

【答案】$-\frac{1}{16}$；$\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{100}}-1)$.

【解析】（1）令 $n=1$，$a_1=-\frac{1}{4}$；$S_4=a_4-\frac{1}{16},S_3=-a_3-\frac{1}{8}$，两式对减得到 $a_3=-\frac{1}{16}$；

（2）因为 $S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n}$，$S_{n-1}=(-1)^{n-1}a_{n-1}-\frac{1}{2^{n-1}}$，两式对减，得到

$a_n=(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}+\frac{1}{2^n}$，所以 $a_{2k+1}+a_{2k+2}=0$，所以

$$S_1+S_2+\cdots+S_{100}=S_1+S_3+\ldots+S_{99}=\frac{-\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{50}\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{100}}-1).$$

【学科网考点定位】本题考查数列的递推公式，考查学生的基本运算能力以及逻辑推理能力.

16．设函数 $f(x)=a^x+b^x-c^x$, 其中 $c>a>0,c>b>0$.

（1）记集合 $M=\{(a,b,c)|a,b,c$ 不能构成一个三角形的三条边长，且 a=b$\}$，则 $(a,b,c)\in M$ 所对应的 $f(x)$ 的零点的取值集合为____。

（2）若 a,b,c 是 ΔABC 的三条边长，则下列结论正确的是___________.（写出所有正确结论

的序号）

①$\forall x\in(-\infty,1),f(x)>0;$

②$\exists x\in R,$使xa^x,b^x,c^x不能构成一个三角形的三条边长；

③若ΔABC为钝角三角形，则$\exists x\in(1,2),$使$f(x)=0.$

【答案】(1) $(0,1]$；(2) ①②③；

【解析】(1) 因为 a=b，所以$a+b=a+a\le c$，即$c\ge 2a$，此时令$f(x)=2a^x-c^x=0$，$\left(\frac{c}{a}\right)^x=2$，做出图像可知$x\in(0,1]$，当且仅当$a=c$时$x$取到1；

(2) 对于①，$f(x)$在$(-\infty,1)$上为减函数，所以$\forall x\in(-\infty,1)$，$f(x)>f(1)=a+b-c>0$对于②，不妨令$a=b=1,c=1.9,x=2$，此时，其不等构成三角形的三条边；对于③，$f(1)\bullet f(2)=(a+b-c)(a^2+b^2-c^2)$，因为钝角三角形，所以$a^2+b^2<c^2$，所以$f(1)\bullet f(2)<0$，故③　正确

【学科网考点定位】本题考查函数的性质，考查学生的化归与转化能力.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})+\cos(x-\frac{\pi}{3}).g(x)=2\sin^2\frac{x}{2}$。

（I）若α是第一象限角，且$f(\alpha)=\frac{3\sqrt{3}}{5}$。求$g(\alpha)$的值；

（II）求使$f(x)\ge g(x)$成立的 x 的取值集合。

【答案】（1）

$f(\alpha)=\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，所以

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，因为α是第一象限角，所以$g(\alpha)=1-\cos\alpha=\frac{1}{5}$；

（2）$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin x$，$g(x)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$；因为$f(x)\ge g(x)$，

所以$\sqrt{3}\sin x\ge 1-\cos x$，化简得$\sin(x+\frac{\pi}{6})\ge\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，解得

x的取值集合为$\left\{x\middle|2k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z\right\}$.

【解析】（1）对$f(x)$化简，先求出$\sin\alpha$的值，再求$g(\alpha)$的值；（2）将问题转化为$f(x)-g(x)\ge 0$即可求解.

【学科网考点定位】本题考查三角函数的计算、三角恒等变换、三角函数的性质，考查学生的基本运算能力.

18.（本小题满分12分）

某人在如图4所示的直角边长为4米的三角形地块的每个格点（指纵、横的交叉点记忆三角形的顶点）处都种了一株相同品种的作物。根据历年的种植经验，一株该种作物的年收获量Y（单位：kg）与它的“相近”作物株数X之间的关系如下表所示：

X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里，两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过1米。

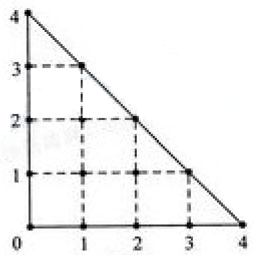


图4

（I）从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株作物，求它们恰好“相近”的概率；

（II）从所种作物中随机选取一株，求它的年收获量的分布列与数学期望。

【答案】（1）所种植物的总数为 15，其中三角形内部有 3 株， 边界上有 12 株；从三角形内部和边界上分别随机选取一株不同结果有 $C_3^1C_{12}^1=36$，满足条件的有 3+3+2=8；故从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株作物，求它们恰好"相近"的概率为 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$；

（2）先求从所种作物中选取的一株作物的年收获量 Y 的分布列，

因为

$P(Y=51)=P(X=1),P(Y=48)=P(X=2),P(Y=45)=P(X=3),P(Y=42)=P(X=4)$，

所以只需求出 $P(Y=51)=P(X=1),P(Y=48)=P(X=k)(k=1,2,3,4)$ 即可，

记 n_k 为其“相近”作物恰有 k 株的作物株数，则 $n_1=2,n_2=4,n_3=6,n_4=3$；

由 $P(x=k)=\frac{n_k}{N}$ 得 $P(x=1)=\frac{2}{15},P(x=2)=\frac{4}{15},P(x=3)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},P(x=4)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，

所求分布列为

X	51	48	45	43
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

故所求期望 $E(Y)=46$

【解析】（1）利用排列组合的原理进行计算；（2）根据

“$P(Y=51)=P(X=1),P(Y=48)=P(X=2),P(Y=45)=P(X=3),P(Y=42)=P(X=4)$”

进行转化，列出分布列，求出期望.

【学科网考点定位】本题考查排列组合知识、离散型随机变量的分布列以及期望，考查学生的逻辑推理能力.

19.（本小题满分 12 分）

如图 5，在直棱柱

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD//BC$，$\angle BAD=90^\circ,AC\perp BD,BC=1,AD=AA_1=3.$

（I）证明： $AC\perp B_1D$；

（II）求直线 B_1C_1与平面ACD_1 所成角的正弦值。

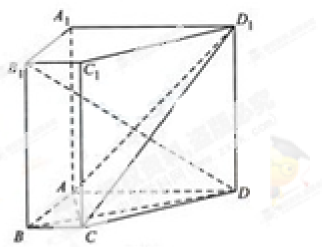


图5

【答案】(1) 因为 $B_1B\perp$ 平面 $ABCD$，所以 BD 为 B_1D 在平面 $ABCD$ 内的投影；因为 $AC\perp BD$，由三垂线定理可知 $AC\perp B_1D$；

(2) 以 A 为原点，AB 所在边为 x 轴，AD 所在边为 y 轴，AA1 所在边为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0),C(m,1,0),D_1(0,3,3)$，所以 $\overline{AD_1}=(0,3,3)$，$\overline{AC}=(m,1,0)$；

因为 $B_1=(m,0,3)$，$D=(0,3,0)$，所以 $\overline{B_1D}=(-m,3,-3)$，因为 $AC\perp B_1D$，所以 $\overline{AC}\bullet\overline{B_1D}=0$，

故 $m=\sqrt{3}$，所以 $\overline{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 ACD_1 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\bullet\overline{AC}=0\\ \vec{n}\bullet\overline{AD_1}=0\end{cases}$，令 $x=1$，

所以 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 为平面 ACD_1 的一个法向量；因为 $B_1(\sqrt{3},0,3)$，$C_1(\sqrt{3},1,3)$，所以

$\overline{B_1C_1}=(0,1,0)$ 所以直线 B_1C_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

【解析】(1) 利用线面平行证明线线平行；(2) 建立空间直角坐标系，利用向量法求线面成角的正弦.

【学科网考点定位】本题考查线面平行的判定和性质、向量法求解线面成角，考查学生的空间想象能力以及基本运算能力.

20.（本小题满分 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，将从点 M 出发沿纵、横方向到达点 N 的任一路径成为 M 到 N 的一条“L 路径”。如图 6 所示的路径 $MM_1M_2M_3N$ 与路径 MN_1N 都是 M 到 N 的“L 路径”。某地有三个新建的居民区，分别位于平面 xOy 内三点 $A(3,20),B(-10,0),C(14,0)$ 处。现计划在 x 轴上方区域（包含 x 轴）内的某一点 P 处修建一个文化中心。

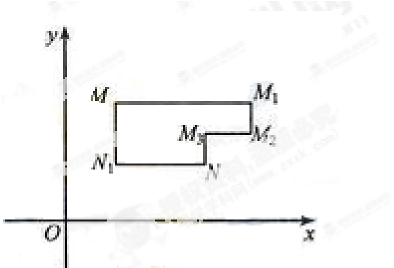


图 6

（I）写出点 P 到居民区 A 的“L 路径”长度最小值的表达式（不要求证明）；

（II）若以原点 O 为圆心，半径为 1 的圆的内部是保护区，“L 路径”不能进入保护区，请确定点 P 的位置，使其到三个居民区的“L 路径”长度值和最小。

【答案】(1）点 P 到居民区 A 的 “L 路径” 长度最小值为$|x-3|+|y-20|, x\in R, y\in[0,+\infty)$.

（2）依题意，点 P 到三个居民区的 “L 路径” 长度之和的最小值为点 P 分别到三个居民区的 “L 路径” 长度之和（记为 d）的最小值；

1、当 $y\geq 1$时，$d=|x+10|+|x-14|+2|y|+|y-20|$，因为

$d_1(x)=|x+10|+|x-14|+|x-3|\geq|x+10|+|x-14|$当且仅当$x=3$时等号成立；

又因为$|x+10|+|x-14|\ge 24$，当且仅当$x\in[-10,14]$时等号成立，

所以$d_1(x)\ge 24$，当且仅当$x=3$时等号成立．$d_2(y)=2y+|y-20|\ge 21$，当且仅当$y=1$时等号成立．

故当 P 的坐标为（3,1）时，P 到三个居民区的“L 路径”长度之和最小，且最小值为 45；

2、当$0\le y\le 1$时，由于“L 路径”不能进入保护区，所以

$d=|x+10|+|x-14|+|x-3|+1+|1-y|+|y|+|y-20|$”，此时$d_1(x)=|x+10|+|x-14|+|x-3|$，

$d_2(y)=1+|1-y|+|y|+|y-20|=22-y\ge 21$，有 1 知，$d_1(x)\ge 24$，$d_1(x)+d_2(y)\ge 45$，当且仅当$x=3,y=1$时等号成立，综上所述，在 P（3,1）处修建文化中心，可以使得“L 路径”长度之和最小．

【解析】（1）根据题设信息容易得到居民区 A 的“L 路径”长度最小值为

$|x-3|+|y-20|,x\in R,y\in[0,+\infty)$；（2）分当$y\ge 1$时和当$0\le y\le 1$时进行讨论，等到相应的最短路径．

【学科网考点定位】本题考查绝对值不等式的求值，考查学生的数学建模能力以及逻辑推理能力．

21．（本小题满分 13 分）

过抛物线$E:x^2=2py(p>0)$的焦点 F 作斜率分别为k_1,k_2的两条不同的直线l_1,l_2，且$k_1+k_2=2$，l_1与E相交于点 A，B，l_2与E相交于点 C，D。以 AB，CD 为直径的圆 M，圆 N（M，N 为圆心）的公共弦所在的直线记为l。

（I）若$k_1>0,k_2>0$，证明；$\overrightarrow{FM}\bullet\overrightarrow{FN}<2P^2$；

（II）若点 M 到直线l的距离的最小值为$\frac{7\sqrt{5}}{5}$，求抛物线 E 的方程。

【答案】（1）依题意，抛物线 E 的交点为$F(0,\frac{p}{2})$，直线l_1的方程为$y=k_1x+\frac{p}{2}$，

由$\begin{cases}y=k_1x+\frac{p}{2}\\x^2=2py\end{cases}$得$x^2-2pk_1x-p^2=0$，设 A、B 两点的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则$x_1,x_2$是

上述方程的两个实数根，从而$\begin{cases} x_1+x_2=2pk_1 \\ y_1+y_2=k(x_1+x_2)=2pk_1^2+p \end{cases}$，所以点 M 的坐标为

$(pk_1, pk_1^2+\frac{p}{2})$，$\overline{FM}=(pk_1, pk_1^2)$，同理可得 N 的坐标为$(pk_2, pk_2^2+\frac{p}{2})$，$\overline{FN}=(pk_2, pk_2^2)$，

于是$\overline{FM}\cdot\overline{FN}=p^2(k_1k_2+k_1^2k_2^2)$，由题设，$k_1+k_2=2, k_1>0, k_2>0, k_1\neq k_2$，所以

$0<k_1k_2<\frac{(k_1+k_2)^2}{2}=1$，故$\overline{FM}\cdot\overline{FN}<p^2(1+1^2)=2p^2$；

（2）由抛物线的定义得$|FA|=y_1+\frac{p}{2}, |FB|=y_2+\frac{p}{2}$，所以$|AB|=y_1+y_2+p=2pk_1^2+2p$，从而圆 M 的半径$r_1=pk_1^2+p$，圆 M 的方程为$(x-pk_1)^2+(y-pk_1^2-\frac{p}{2})^2=(pk_1^2+p)^2$，

化简得$x^2+y^2-2pk_1x-p(2k_1^2+1)y-\frac{3}{4}p^2=0$，同理可得圆 N 的方程为

$x^2+y^2-2pk_2x-p(2k_2^2+1)y-\frac{3}{4}p^2=0$，于是圆 M 与圆 N 的公共弦所在直线 l 的方程为

$(k_2-k_1)x+(k_2^2-k_1^2)y=0$，又$k_2-k_1\neq 0, k_1+k_2=2$，则直线 l 的方程为$x+2y=0$，因为$p>0$，

所以点 M 到直线 l 的距离$d=\frac{|2pk_1^2+pk_1+p|}{\sqrt{5}}=\frac{p\geq\left[2(k_1+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}\right]}{\sqrt{5}}$，故当$k_1=-\frac{1}{4}$时，$d$取最小值$\frac{7p}{8\sqrt{5}}$. 由题设，$\frac{7p}{8\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$，所以$p=8$，故所求抛物线 E 的方程为$x^2=16y$

【解析】（1）设出直线的方程，联立直线与抛物线的方程利用根与系数的关系进行求解；（2）先分别求出圆 M 与圆 N 的方程，再求出公共弦的方程，配合点到直线的距离公式进行求解.

【学科网考点定位】本题考查抛物线的定义、直线的方程、圆的方程、点到直线的距离公式，考查学生的基本运算能力以及化归与转化能力.

22.（本小题满分 13 分）

已知$a>0$，函数$f(x)=\left|\frac{x-a}{x+2a}\right|$。

（I）；记$f(x)$在区间$[0,4]$上的最大值为$g(a)$，求$g(a)$的表达式；

（II）是否存在a，使函数$y=f(x)$在区间$(0,4)$内的图像上存在两点，在该两点处的切线相互垂直？若存在，求a的取值范围；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) 当$0\le x\le a$时，$f(x)=\dfrac{a-x}{x+2a}$；当$x>a$时，$f(x)=\dfrac{x-a}{x+2a}$.

因此，当$x\in(0,a)$时，$f'(x)=\dfrac{-3a}{(x+2a)^2}<0$，所以$f(x)$在$(0,a)$上单调递减；当$x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)=\dfrac{3a}{(x+2a)^2}>0$，所以$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增；

1、若$a\ge 4$，则$f(x)$在$(0,4)$上单调递减，$g(a)=f(0)=\dfrac{1}{2}$；

2、若$0<a<4$，则$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,4)$上单调递增，所以

$g(a)=\max\{f(0),f(4)\}$，从而$f(0)-f(4)=\dfrac{a-1}{2+a}$；当$0<a\le 1$时，$g(a)=f(4)=\dfrac{4-a}{4+2a}$；

当$1<a<4$时，$g(a)=g(0)=\dfrac{1}{2}$，综上所诉，$g(a)=\begin{cases}\dfrac{4-a}{4+2a},0<a\le 1\\ \dfrac{1}{2},a>1\end{cases}$；

(2) 由(1)知，当$a\ge 4$时，$f(x)$在$(0,4)$上单调递减，故不满足要求；当$0<a<4$时，$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,4)$上单调递增. 若存在$x_1,x_2\in(0,4)(x_1<x_2)$，使曲线$f(x)$在$(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$两点处的切线相互垂直，则$x_1\in(0,a),x_2\in(a,4)$，且$f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1$，

即$\dfrac{-3a}{(x_1+2a)^2}\cdot\dfrac{-3a}{(x_2+2a)^2}=-1$，亦即$x_1+2a=\dfrac{3a}{x_2+2a}$ *；由$x_1\in(0,a),x_2\in(a,4)$得

$x_1+2a\in(2a,3a),\dfrac{3a}{x_2+2a}\in(\dfrac{3a}{x_2+4},1)$，故*成立等价于集合$A=\{x|2a<x<3a\}$与集合

$B=\left\{x\left|\dfrac{3a}{x_2+4}<x<1\right.\right\}$的交集非空；因为$\dfrac{3a}{4+2a}<3a$，所以当且仅当$0<2a<1$，即$0<a<\dfrac{1}{2}$时，

$A\cap B=\varnothing$，综上所诉 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2})$

【解析】（1）分类讨论脱掉绝对值以后，利用导数法确定 $g(a)$ 的解析式；（2）利用导数的几何意义以及不等式的性质将问题转化为集合 $A=\{x|2a<x<3a\}$ 与集合 $B=\left\{x\left|\frac{3a}{x_2+4}<x<1\right.\right\}$ 的交集非空即可.

【学科网考点定位】本题考查分段函数、导数与函数的单调性、导数的结合意义、函数与方程思想，考查学生的转化与化归能力以及逻辑推理能力.