2015年高考天津市文科数学真题

一、选择题

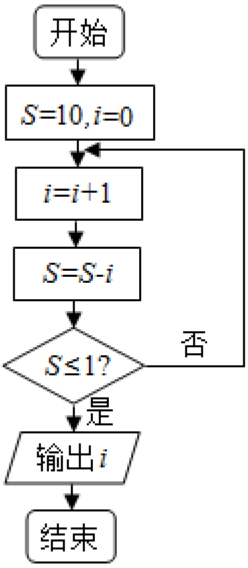
1．已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合$A=\{2,3,5\}$，集合$B=\{1,3,4,6\}$，则集合$A\bigcap C_U B=$（　　）

A．$\{3\}$　　　　B．$\{2,5\}$　　　　C．$\{1,4,6\}$　　　　D．$\{2,3,5\}$

2．设变量x,y满足约束条件$\begin{cases} x-2\le 0 \\ x-2y\le 0 \\ x+2y-8\le 0 \end{cases}$，则目标函数的最大值为$z=3x+y$（　　）

A．7　　　　B．8　　　　C．9　　　　D．14

3．阅读下边的程序框图，运行相应的程序，则输出 i 的值为（　　）



A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

4．设$x\in R$，则"$1<x<2$"是"$|x-2|<1$"的（　　）

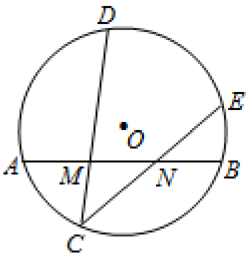
A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

5．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点为$F(2,0)$，且双曲线的渐近线与圆$\left(x-2\right)^2+y^2=3$相切，则双曲线的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{13}=1$　B．$\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{9}=1$　C．$\frac{x^2}{3}-y^2=1$　D．$x^2-\frac{y^2}{3}=1$

6．如图，在圆 O 中，M，N 是弦 AB 的三等分点，弦 CD，CE 分别经过点 M，N，若 CM=2，MD=4，CN=3，则线段 NE 的长为（　　）



A. $\dfrac{8}{3}$　　B. 3　　C. $\dfrac{10}{3}$　　D. $\dfrac{5}{2}$

7. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$(m 为实数) 为偶函数，

记 $a=f(\log_{0.5}3), b=f(\log_2 5), c=f(2m)$，则 a,b,c ,的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $a<c<b$　　D. $c<b<a$

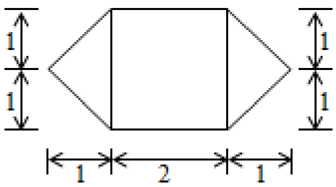
8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, x\le 2\\(x-2)^2, x>2\end{cases}$，函数 $g(x)=3-f(2-x)$，则函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

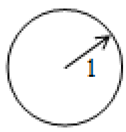
二、填空题

9. i 是虚数单位，计算 $\dfrac{1-2i}{2+i}$ 的结果为_________.

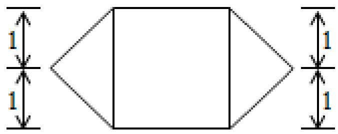
10. 一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为_________.



正视图



侧视图



俯视图

11. 已知函数 $f(x)=ax\ln x, x\in(0,+\infty)$ ，其中 a 为实数，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，若 $f'(1)=3$ ，则 a 的值为_________.

12. 已知 $a>0, b>0, ab=8$，则当 a 的值为_________时 $\log_2 a\cdot\log_2(2b)$ 取得最大值。

13. 在等腰梯形 ABCD 中，已知 $AB\parallel DC$ ，$AB=2, Bc=1, \angle ABC=60^\circ$，点 E 和点 F 分别在线段 BC 和 CD 上，且 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值为_________.

14．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x+\cos\omega x\left(\omega>0\right), x\in\mathbf{R}$，若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\omega,\omega\right)$ 内单调递增，且函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于直线 $x=\omega$ 对称，则 ω 的值为________.

三、解答题

15．设甲、乙、丙三个乒乓球协会的运动员人数分别为27,9,18，先采用分层抽样的方法从这三个协会中抽取6名运动员参加比赛。

（Ⅰ）求应从这三个协会中分别抽取的运动员人数；

（Ⅱ）将抽取的6名运动员进行编号，编号分别为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6，从这6名运动员中随机抽取2名参加双打比赛。

（i）用所给编号列出所有可能的结果；

（ii）设A为事件“编号为 A_5,A_6 的两名运动员至少有一人被抽到”，求事件A发生的概率。

16．△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a，b，c，已知△ABC 的面积为 $3\sqrt{15}$，$b-c=2,\cos A=-\dfrac{1}{4}$,

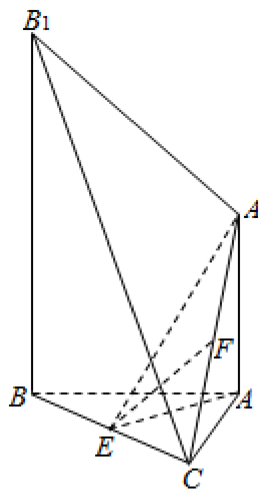
（Ⅰ）求 a 和 sinC 的值；

（Ⅱ）求 $\cos\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值。

17．如图，已知 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$BB_1\parallel AA_1$，AB=AC=3，$BC=2\sqrt{5}, AA_1=\sqrt{7}$,，$BB_1=2\sqrt{7}$，点 E，F 分别是 BC，$A_1C$ 的中点，

（Ⅰ）求证：EF|| 平面 A_1B_1BA；（Ⅱ）求证：平面 $AEA_1\perp$ 平面 BCB_1。

（III）求直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角的大小。



18．已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_1=b_1=1, b_2+b_3=2a_3$，$a_5-3b_2=7$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$c_n=a_nb_n, n\in N^*$,求数列$\{c_n\}$的前 n 项和.

19．已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点为 B，左焦点为 F,离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅰ）求直线 BF 的斜率；

（Ⅱ）设直线 BF 与椭圆交于点 P（P 异于点 B），故点 B 且垂直于 BF 的直线与椭圆交于点 Q（Q 异于点 B）直线 PQ 与 x 轴交于点 M，$|PM|=\lambda|MQ|$.

（i）求λ的值；

（ii）若$|PM|\sin\angle BQP=\dfrac{7\sqrt{5}}{9}$，求椭圆的方程.

20．已知函数$f(x)=4x-x^4, x\in R$,其中$n\in N^*$，且$n\geq 2$.

（Ⅰ）求$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）设曲线$y=f(x)$与x轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为$y=g(x)$，求证：对于任意的实数x，都有$f(x)\leq g(x)$；

（III）若方程 $f(x)=a$（a为实数）有两个正实数根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_2-x_1<-\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

2015年高考天津市文科数学真题

一、选择题

1．答案：B

解析过程：

$A=\{2,3,5\}$，$C_U B=\{2,5\}$，则 $A\cap(C_U B)=\{2,5\}$，选 B

2．答案： C

解析过程：

$z=3x+y=\frac{5}{2}(x-2)+\frac{1}{2}(x+2y-8)+9\le 9$

当 $x=2,y=3$ 时取得最大值 9，选 C

3．答案：C

解析过程：

由程序框图可知：$i=2,S=8$；$i=3,S=5$；$i=4,S=1$，选 C

4．答案：A

解析过程：

由 $|x-2|<1\Leftrightarrow -1<x-2<1\Leftrightarrow 1<x<3$，

可知“$1<x<2$”是“$|x-2|<1$”的充分而不必要条件,选 A.

5．答案：D

解析过程：

双曲线的渐近线为 $bx-ay=0$，由题意得 $\frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3}$，

又 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，解得 $a=1$， $b=\sqrt{3}$，选 D

6．答案：A

解析过程：

由相交弦定理可得

$CM\times MD=CN\times NE=\frac{1}{3}AB\times AB\Rightarrow NE=\frac{CM\times MD}{CN}=\frac{8}{3}$， 选 A.

7．答案：B

解析过程：

由 $f\left(x\right)$ 为偶函数得 $m=0$,所以 $a=2,b=4,c=0$,选 B.

8．答案：A

解析过程：

当 $x<0$ 时， $f\left(2-x\right)=x^2$，

此时方程 $f\left(x\right)-g\left(x\right)=-1-\left|x\right|+x^2$ 的小于零的零点为 $x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；

当 $0\le x\le 2$ 时， $f\left(2-x\right)=2-\left|2-x\right|=x$，

方程 $f\left(x\right)-g\left(x\right)=2-\left|x\right|+x=2$ 无零点;

当 $x>2$ 时， $f\left(2-x\right)=2-\left|2-x\right|=4-x$，

方程 $f\left(x\right)-g\left(x\right)=\left(x-2\right)^2+x-7=x^2-3x-3$ 大于 2 的零点有一个

选 A

二、填空题

9．答案：-i

解析过程：

$$\frac{1-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}\left(\mathrm{i}+2\right)}{2+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$$

10．答案： $\frac{8}{3}\pi$

解析过程：

该几何体是由两个高为 1 的圆锥与一个高为 2 圆柱组合而成,

所以该几何体的体积为 $2\times\frac{1}{3}\times\pi\times1+\pi\times2=\frac{8\pi}{3}(\mathrm{m}^3)$

11．答案：3

解析过程：

因为 $f'\left(x\right)=a\left(1+\ln x\right)$,所以 $f'\left(1\right)=a=3$.

12．答案：4

解析过程：

$$\log_2 a\cdot\log_2(2b)\le\left(\frac{\log_2 a+\log_2(2b)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(\log_2 2ab)^2=\frac{1}{4}(\log_2 16)^2=4$$

当 $a=2b$ 时取等号,结合 $a>0,b>0,ab=8$,

可得 $a=4,b=2$.

13．答案：$\frac{29}{18}$

解析过程：

在等腰梯形 $ABCD$ 中,由 $AB\parallel DC$, $AB=2,BC=1,\angle ABC=60^\circ$,

得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2},\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1,\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)$

$$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{18}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}=\frac{29}{18}$$

14．答案：$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

解析过程：

由 $f(x)$ 在区间 $(-\omega,\omega)$ 内单调递增,且 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\omega$ 对称,

可得 $2\omega\le\frac{\pi}{\omega}$,且 $f(\omega)=\sin\omega^2+\cos\omega^2=\sqrt{2}\Rightarrow\sin\left(\omega^2+\frac{\pi}{4}\right)=1$,

所以 $\omega^2+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

15．答案：见解析

解析过程：

（I）应从甲、乙、丙这三个协会中分别抽取的运动员人数分别为 3,1,2；

（II）（i）从这 6 名运动员中随机抽取 2 名参加双打比赛,所有可能的结果为

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_1,A_4\},\{A_1,A_5\},\{A_1,A_6\}$,

$\{A_2,A_3\},\{A_2,A_4\},\{A_2,A_5\},\{A_2,A_6\},\{A_3,A_4\}$,

$\{A_3,A_5\},\{A_3,A_6\},\{A_4,A_5\},\{A_4,A_6\},\{A_5,A_6\}$,共 15 种.

（ii）编号为 A_5,A_6 的两名运动员至少有一人被抽到的结果为

$\{A_1,A_5\},\{A_1,A_6\}$，$\{A_2,A_5\},\{A_2,A_6\}$，$\{A_3,A_5\}$，

$\{A_3,A_6\},\{A_4,A_5\},\{A_4,A_6\},\{A_5,A_6\}$,共 9 种,

所以事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

16． △ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a，b，c，已知△ABC 的面积为 $3\sqrt{15}$，$b-c=2,\cos A=-\frac{1}{4}$,

（Ⅰ）求 a 和 sinC 的值；

（Ⅱ）求 $\cos\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

答案：见解析

解析过程：

（Ⅰ）ΔABC 中，由 $\cos A=-\frac{1}{4}$，得 $\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

由 $\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{15}$，得 $bc=24$，

又由 $b-c=2$，解得 $b=6,c=4$。

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得 $a=8$.

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\sin C=\frac{\sqrt{15}}{8}$

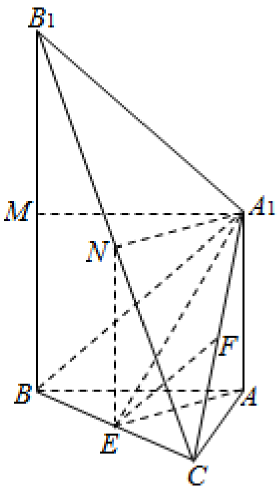
（Ⅱ）$\cos(2A+\frac{\pi}{6})=\cos 2A\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2A\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 A-1)-\sin A\cos A=\frac{\sqrt{15}-7\sqrt{3}}{16}$

17．答案：见解析

解析过程：

（I）证明：如图,连接 A_1B，



在△A_1BC中,因为E和F分别是BC, A_1C 的中点,

所以$EF \parallel BA_1$,又因为$EF \not\subset$ 平面A_1B_1BA,

所以$EF \parallel$ 平面A_1B_1BA.

（II）因为$AB=AC$,E为BC中点,所以$AE \perp BC$,

因为$AA_1 \perp$平面ABC,$BB_1 \parallel AA_1$,

所以$BB_1 \perp$平面ABC,从而$BB_1 \perp AE$,

又$BC \cap BB_1 = B$,所以$AE \perp$平面BCB_1 ,

又因为$AE \subset$平面AEA_1,所以平面$AEA_1 \perp$平面BCB_1.

（III）取BB_1中点M和B_1C中点N，连接A_1M， A_1N，

因为N和E分别为B_1C， BC中点，

所以$NE // BB_1$， $NE = \frac{1}{2}BB_1$，

故$NE // AA_1$， $NE = AA_1$，

所以$A_1N // AE$， $A_1N = AE$，

又因为$AE \perp$平面BCB_1，所以$A_1N \perp$平面BCB_1，

从而$\angle A_1B_1N$就是直线A_1B_1与平面BCB_1所成角，

在ΔABC中，可得$AE = 2$，所以$A_1N = AE = 2$，

因为$BM // AA_1$， $BM = AA_1$，所以$A_1M // AB$， $A_1M = AB$，

又由 $AB\perp BB_1$，有 $A_1M\perp BB_1$，

在 $Rt\Delta A_1MB_1$ 中，可得 $A_1B_1=4$，

在 $Rt\Delta A_1NB_1$ 中，$\sin\angle A_1B_1N=\dfrac{A_1N}{A_1B}=\dfrac{1}{2}$，

因此 $\angle A_1B_1N=30^0$，所以，直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角为 30^0.

18．答案：见解析

解析过程：

（I）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q,$\{b_n\}$ 的公差为 d,

由题意 $q>0$,由已知,有 $\begin{cases}2q^2-3d=2,\\ q^4-3d=10,\end{cases}$

消去 d 得 $q^4-2q^2-8=0$, 解得 $q=2,d=2$ ，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$，

$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2n-1,n\in\mathbf{N}^*$.

（II）由（I）有 $c_n=(2n-1)2^{n-1}$,设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，

则 $S_n=1\times2^0+3\times2^1+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}$,

$2S_n=1\times2^1+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^n$,

两式相减得 $-S_n=1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n-1)\times2^n=-(2n-3)\times2^n-3$,

所以 $S_n=(2n-3)2^n+3$.

19．答案：见解析

解析过程：

（I）$F(-c,0)$,由已知 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 及 $a^2=b^2+c^2$,

可得 $a=\sqrt{5}c,b=2c$,又因为 $B(0,b)$ ，

故直线 BF 的斜率 $k=\dfrac{b-0}{0-(-c)}=\dfrac{b}{c}=2$.

（II）设点 $P(x_P,y_P),Q(x_Q,y_Q),M(x_M,y_M)$ ， （i）由（I）可得椭圆方程为$\frac{x^2}{5c^2}+\frac{y^2}{4c^2}=1,$

直线 BF 的方程为$y=2x+2c$ ，

两方程联立消去 y 得$3x^2+5cx=0,$ 解得$x_P=-\frac{5c}{3}$.

因为$BQ\perp BP$,所以直线BQ方程为$y=-\frac{1}{2}x+2c$ ，

与椭圆方程联立消去 y 得$21x^2-40cx=0$ ，

解得$x_Q=\frac{40c}{21}$.又因为$\lambda=\frac{|PM|}{|MQ|}$ ，

及$x_M=0$ 得$\lambda=\frac{|x_M-x_P|}{|x_Q-x_M|}=\frac{|x_P|}{|x_Q|}=\frac{7}{8}.$

（ii）由（i）得$\frac{|PM|}{|MQ|}=\frac{7}{8},$

所以$\frac{|PM|}{|PM|+|MQ|}=\frac{7}{7+8}=\frac{7}{15}$,即$|PQ|=\frac{15}{7}|PM|$ ，

又因为$|PM|\sin\angle BQP=\frac{7\sqrt{5}}{9},$

所以$|BP|=|PQ|\sin\angle BQP=\frac{15}{7}|PM|\sin\angle BQP=\frac{5\sqrt{5}}{3}.$

又因为$y_P=2x_P+2c=-\frac{4}{3}c,$

所以$|BP|=\sqrt{\left(0+\frac{5c}{3}\right)^2+\left(2c+\frac{4c}{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{3}c,$

因此$\frac{5\sqrt{5}}{3}c=\frac{5\sqrt{5}}{3},c=1,$ 所以椭圆方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1.$

20．答案：见解析

解析过程：

（I）由$f(x)=4x-x^4$,可得$f'(x)=4-4x^3,$

当$f'(x)>0$,即$x<1$ 时,函数$f(x)$ 单调递增;

当$f'(x)<0$,即$x>1$ 时,函数$f(x)$ 单调递减.

所以函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 $\left(-\infty,1\right)$,单调递减区间是 $\left(1,+\infty\right)$.

（II）设 $P\left(x_0,0\right)$,则 $x_0=4^{\frac{1}{3}}$, $f'\left(x_0\right)=-12$,

曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$,

即 $g\left(x\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$,令 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$

即 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-f'\left(x\right)\left(x-x_0\right)$ 则 $F'\left(x\right)=f'\left(x\right)-f'\left(x_0\right)$.

由于 $f(x)=4-4x^3$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递减,

故 $F'\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递减,又因为 $F'\left(x_0\right)=0$,

所以当 $x\in\left(-\infty,x_0\right)$ 时, $F'\left(x\right)>0$,当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时, $F'\left(x\right)<0$,

所以 $F\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,x_0\right)$ 单调递增,在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 单调递减,

所以对任意的实数 $x,F\left(x\right)\le F\left(x_0\right)=0$,

对于任意的正实数 x ,都有 $f(x)\le g(x)$.

（III）由（II）知 $g(x)=-12(x-4^{\frac{1}{3}})$，

设方程 $g\left(x\right)=a$ 的根为 x_2'，可得 $x_2'=-\dfrac{a}{12}+4^{\frac{1}{3}}$，

因为 $g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递减，

又由（II）知 $g(x_2)\ge f(x_2)=a=g(x_2')$，所以 $x_2\le x_2'$。

类似的，设曲线 $y=f\left(x\right)$ 在原点处的切线为 $y=h(x)$，可得 $h\left(x\right)=4x$，

对任意的 $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$，有 $f\left(x\right)-h\left(x\right)=-x^4\le 0$ 即 $f\left(x\right)\le h\left(x\right)$。

设方程 $h\left(x\right)=a$ 的根为 x_1'，可得 $x_1'=\dfrac{a}{4}$，

因为 $h\left(x\right)=4x$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递增，且 $h\left(x_1'\right)=a=f\left(x_1\right)\le h\left(x_1\right)$，

因此，$x_1'\le x_1$，所以 $x_2-x_1\le x_2'-x_1'=-\dfrac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$