

2008年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

文科数学能力测试

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $M = \{3, 4, 5, 7\}$, $N = \{2, 4, 5, 6\}$, 则()

- A. $M \cap N = \{4, 6\}$ B. $M \cup N = U$
C. $(C_u N) \cup M = U$ D. $(C_u M) \cap N = N$

2. “ $|x - 1| < 2$ ”是“ $x < 3$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知变量 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \leq 2, \\ x - y \leq 0, \end{cases}$ 则 $x + y$ 的最小值是()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

4. 函数 $f(x) = x^2 (x \leq 0)$ 的反函数是()

- A. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$ B. $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} (x \geq 0)$
C. $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x} (x \leq 0)$ D. $f^{-1}(x) = -x^2 (x \leq 0)$

5. 已知直线 m, n 和平面 α, β 满足 $m \perp n, m \perp a, \alpha \perp \beta$, 则()

- A. $n \perp \beta$ B. $n \parallel \beta$, 或 $n \subset \beta$ C. $n \perp \alpha$ D. $n \parallel \alpha$, 或 $n \subset \alpha$

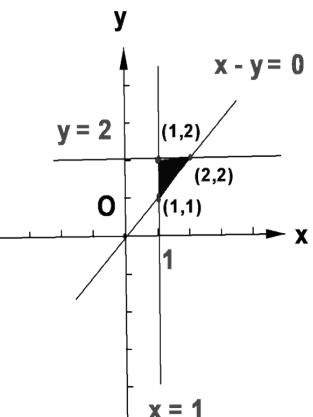
6. 下面不等式成立的是()

- A. $\log_3 2 < \log_2 3 < \log_2 5$ B. $\log_3 2 < \log_2 5 < \log_2 3$
C. $\log_2 3 < \log_3 2 < \log_2 5$ D. $\log_2 3 < \log_2 5 < \log_3 2$

7. 在 ΔABC 中, $AB=3$, $AC=2$, $BC=\sqrt{10}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

8. 某市拟从4个重点项目和6个一般项目中各选2个项目作为本年度启动的项目,



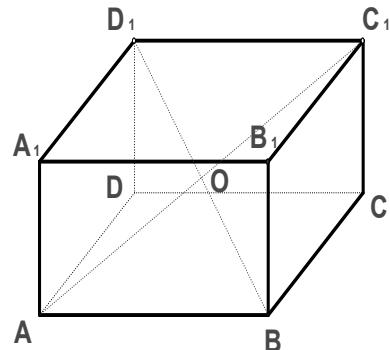
则重点项目A和一般项目B至少有一个被选中的不同选法种数是()

- A. 15 B. 45 C. 60 D. 75

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的8个顶点在同一个球面上, 且 $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$,

$AA_1=1$, 则顶点A、B间的球面距离是()

- A. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ C. $\sqrt{2}\pi$ D. $2\sqrt{2}\pi$



10. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支上存在一点, 它到右焦点及左准线的距离

相等, 则双曲线离心率的取值范围是()

- A. $(1, \sqrt{2}]$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}+1]$ D. $[\sqrt{2}+1, +\infty)$

二. 填空题: 本大题共5小题, 每小题5分, 共25分, 把答案填在横线上。

11. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-2, 0)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

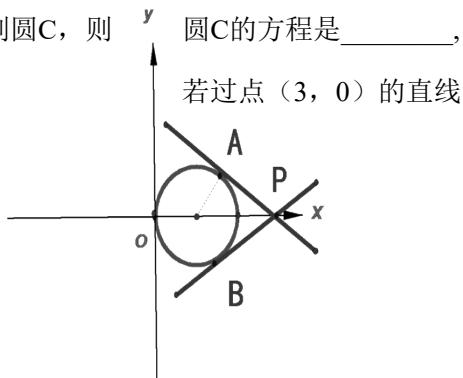
12. 从某地区15000位老人中随机抽取500人, 其生活能否自理的情况如下表所示:

		性别	男	女
人数	生活能 否自理	能	178	278
		不能	23	21

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多 $\underline{\hspace{2cm}}$ 人。

13. 记 $(2x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中第m项的系数为 b_m , 若 $b_3 = 2b_4$, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 沿x轴正向平移1个单位后所得到圆C, 则圆C的方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$,
若过点 $(3, 0)$ 的直线 l 和圆C相切, 则直线 l 的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



15. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，（如 $[2]=2, [\frac{5}{4}]=1$ ）。对于给定的 $n \in N^+$,

定义 $C_n^x = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}, x \in [1, +\infty)$, 则 $C_8^{\frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$;

当 $x \in [2, 3)$ 时，函数 C_8^x 的值域是 _____。

三. 解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分12分)

甲乙丙三人参加一家公司的招聘面试，面试合格者可正式签约。甲表示只要面试合格就签约，乙、丙则约定：两人面试都合格就一同签约，否则两人都不签约。设每人面试合格的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，且面试是否合格互不影响。求：

- (I) 至少一人面试合格的概率；
- (II) 没有人签约的概率。

17. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$.

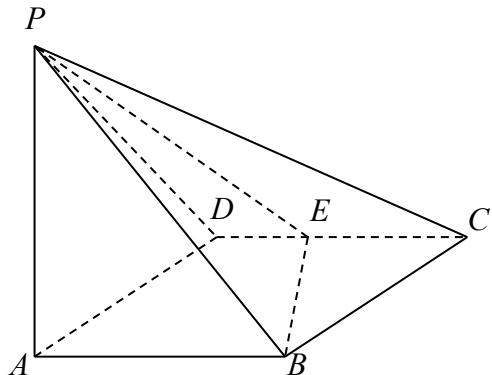
- (I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

- (II) 当 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ 且 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 时，求 $f(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值。

18. (本小题满分12分)

如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形， $\angle BCD = 60^\circ$ ，E是CD的中点， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA = \sqrt{3}$ 。

- (I) 证明：平面 $PBE \perp$ 平面 PAB ；
- (II) 求二面角 $A-BE-P$ 的大小。



19 (本小题满分13分)

已知椭圆的中心在原点，一个焦点是 $F(2,0)$ ，且两条准线间的距离为 $\lambda (\lambda > 4)$ 。

- (I) 求椭圆的方程；
(II) 若存在过点 $A(1, 0)$ 的直线 l ，使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上，求 λ 的取值范围。

20. (本小题满分13分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} = (1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2})a_n + 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$,

- (I) 求 a_3, a_4 ，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(II) 设 $S_k = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1}$, $T_k = a_2 + a_4 + \dots + a_{2k}$, $W_k = \frac{2S_k}{2+T_k} (k \in N^+)$,

求使 $W_k > 1$ 的所有 k 的值，并说明理由。

21. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + cx$ 有三个极值点。

- (I) 证明: $-27 < c < 5$;
(II) 若存在实数 c ，使函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上单调递减，求 a 的取值范围。

2008年普通高等学校招生全国统一考试 (湖南卷)

文科数学能力测试

一. 选择题: 本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $M = \{3, 4, 5, 7\}$, $N = \{2, 4, 5, 6\}$, 则()

- A. $M \cap N = \{4,6\}$ B. $M \cup N = U$
 C. $(C_u N) \cup M = U$ D. $(C_u M) \cap N = N$

【答案】B

【解析】由 $U = \{2,3,4,5,6,7\}$, $M = \{3,4,5,7\}$, $N = \{2,4,5,6\}$, 易知B正确.

2. “ $|x-1| < 2$ ” 是 “ $x < 3$ ” 的()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

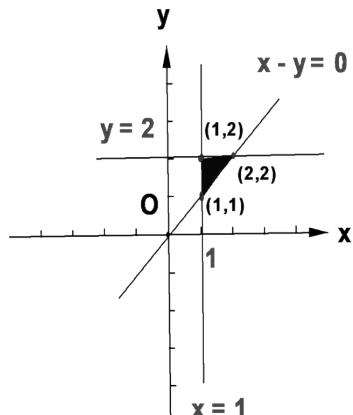
【答案】A

【解析】由 $|x-1| < 2$ 得 $-1 < x < 3$, 所以易知选A.

3. 已知变量 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \leq 2, \\ x - y \leq 0, \end{cases}$ 则 $x + y$ 的最小值是(
)
 A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【答案】C

【解析】如图得可行域为一个三角形, 其三个顶点分别为 $(1,1), (1,2), (2,2)$, 代入验证知在点 $(1,1)$ 时, $x + y$ 最小值是 $1+1=2$. 故选C.



4. 函数 $f(x) = x^2 (x \leq 0)$ 的反函数是()

- A. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$ B. $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} (x \geq 0)$
 C. $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x} (x \leq 0)$ D. $f^{-1}(x) = -x^2 (x \leq 0)$

【答案】B

【解析】用特殊点法, 取原函数过点 $(-1,1)$, 则其反函数过点 $(1,-1)$, 验证知只有答案B满足.

也可用直接法或利用“原函数与反函数的定义域、值域互换”来解答。

5. 已知直线 m, n 和平面 α, β 满足 $m \perp n, m \perp a, \alpha \perp \beta$, 则()

- A. $n \perp \beta$ B. $n \parallel \beta$, 或 $n \subset \beta$ C. $n \perp \alpha$ D. $n \parallel \alpha$, 或 $n \subset \alpha$

【答案】D

【解析】易知D正确.

6. 下面不等式成立的是()

A. $\log_3 2 < \log_2 3 < \log_2 5$ B. $\log_3 2 < \log_2 5 < \log_2 3$

C. $\log_2 3 < \log_3 2 < \log_2 5$ D. $\log_2 3 < \log_2 5 < \log_3 2$

【答案】A

【解析】由 $\log_3 2 < 1 < \log_2 3 < \log_2 5$, 故选A.

7. 在 ΔABC 中, $AB=3$, $AC=2$, $BC=\sqrt{10}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\)$

A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】D

【解析】由余弦定理得 $\cos \angle CAB = \frac{1}{4}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$, 选D.

8. 某市拟从4个重点项目和6个一般项目中各选2个项目作为本年度启动的项目, 则重点项目A和一般项目B至少有一个被选中的不同选法种数是()

A. 15 B. 45 C. 60 D. 75

【答案】C

【解析】用直接法: $C_3^1 C_5^1 + C_3^1 C_5^2 + C_3^2 C_5^1 = 15 + 30 + 15 = 60$,

或用间接法: $C_4^2 C_6^2 - C_3^2 C_5^2 = 90 - 30 = 60$, 故选C.

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的8个顶点在同一个球面上, 且 $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$,

$AA_1=1$, 则顶点A、B间的球面距离是()

A. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ C. $\sqrt{2}\pi$ D. $2\sqrt{2}\pi$

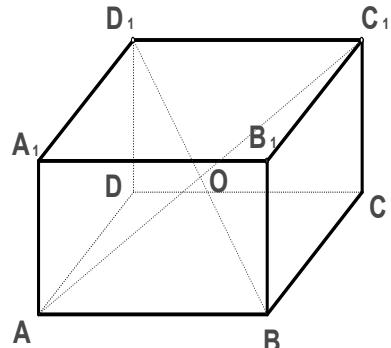
【答案】B

【解析】 $\because BD_1 = AC_1 = 2R = 2\sqrt{2}$, $\therefore R = \sqrt{2}$, 设

$BD_1 \cap AC_1 = O$, 则 $OA = OB = R = \sqrt{2}$,

$$\Rightarrow \angle AOB = \frac{\pi}{2}, \therefore l = R\theta = \sqrt{2} \times \frac{\pi}{2}$$

B.



10. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支上存在一点, 它到右焦点及左准线的距离

相等, 则双曲线离心率的取值范围是()

A. $(1, \sqrt{2}]$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}+1]$ D. $[\sqrt{2}+1, +\infty)$

【答案】C

【解析】 $\because ex_0 - a = x_0 + \frac{a^2}{c} \Rightarrow (e-1)x_0 = \frac{a^2}{c} + a \Rightarrow \frac{a^2}{c} + a \geq (e-1)a,$

$$\therefore e-1 \leq 1 + \frac{a^2}{c} = 1 + \frac{1}{e}, \Rightarrow e^2 - 2e - 1 \leq 0, \Rightarrow 1 - \sqrt{2} \leq e \leq 1 + \sqrt{2},$$

而双曲线的离心率 $e > 1$, $\therefore e \in (1, \sqrt{2} + 1]$, 故选 C.

二. 填空题: 本大题共5小题, 每小题5分, 共25分, 把答案填在横线上。

11. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-2, 0)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】由 $\vec{a} + \vec{b} = (-1, \sqrt{3})$, $\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1+3} = 2$.

12. 从某地区15000位老人中随机抽取500人, 其生活能否自理的情况如下表所示:

性别		男	女
人数	生活能 否自理		
能	178	278	
不能	23	21	

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多 $\underline{\hspace{2cm}}$ 人。

【答案】60

【解析】由上表得 $(23-21) \times \frac{15000}{500} = 2 \times 30 = 60$.

13. 记 $(2x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中第m项的系数为 b_m , 若 $b_3 = 2b_4$, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

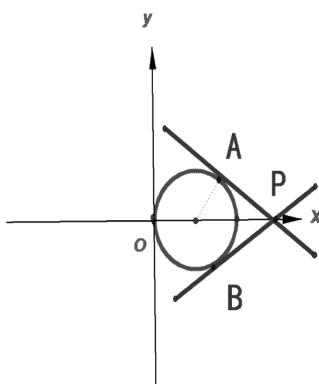
【答案】5

【解析】由 $T_{r+1} = C_n^r (2x)^{n-r} \cdot (\frac{1}{x})^r = 2^{n-r} \cdot C_n^r \cdot x^{n-2r}$, 得 $2^{n-2} \cdot C_n^2 = 2 \times 2^{n-3} \cdot C_n^3$,

所以解得 $n = 5$.

14. 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 沿x轴正向平移1个单位后所得到圆C, 则圆C的方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若过点 $(3, 0)$ 的直线 l 和圆C相切, 则直线 l 的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$



【解析】易得圆C的方程是 $(x-1)^2 + y^2 = 1$,

直线l的倾斜角为 $30^\circ, 150^\circ$,

所以直线l的斜率为 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. 设 $[x]$ 表示不超过x的最大整数, (如 $[2] = 2, [\frac{5}{4}] = 1$)。对于给定的 $n \in N^+$,

定义 $C_n^x = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}, x \in [1, +\infty)$, 则 $C_8^{\frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$;

当 $x \in [2, 3)$ 时, 函数 C_8^x 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{16}{3}, (\frac{28}{3}, 28]$

【解析】 $C_8^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$, 当 $x = 2$ 时, $C_8^2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$, 当 $x \rightarrow 3$ 时, $[x] = 2$,

所以 $C_8^x = \frac{8 \times 7}{3 \times 2} = \frac{28}{3}$, 故函数 C_8^x 的值域是 $(\frac{28}{3}, 28]$.

三. 解答题: 本大题共6小题, 共75分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分12分)

甲乙丙三人参加一家公司的招聘面试, 面试合格者可正式签约。甲表示只要面试合格就签约, 乙、丙则约定: 两人面试都合格就一同签约, 否则两人都不签约。设每人面试合格的概率都是 $\frac{1}{2}$, 且面试是否合格互不影响。求:

- (I) 至少一人面试合格的概率;
- (II) 没有人签约的概率。

解: 用A,B,C分别表示事件甲、乙、丙面试合格。由题意知A,B,C相互独立,

且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

(I) 至少有一人面试合格的概率是 $1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C})$

$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1 - (\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8}.$$

(II) 没有人签约的概率为 $P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C})$

$$\begin{aligned}
& P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) \\
& = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

17. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 当 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ 且 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 时, 求 $f(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值。

解: 由题设有 $f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$.

(I) 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 $T = 2\pi$.

(II) 由 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 得 $\sqrt{2} \sin(x_0 + \frac{\pi}{4}) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 即 $\sin(x_0 + \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{5}$,

因为 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$, 所以 $x_0 + \frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

$$\text{从而 } \cos(x_0 + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 - \sin^2(x_0 + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}.$$

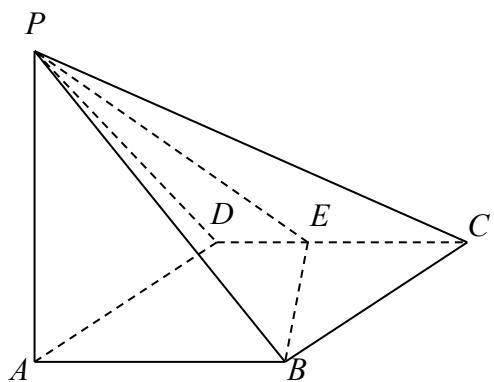
$$\begin{aligned}
& \text{于是 } f(x_0 + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \sin(x_0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \sin[(x_0 + \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{6}] \\
& = \sqrt{2} [\sin(x_0 + \frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{6} + \cos(x_0 + \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{6}] \\
& = \sqrt{2} (\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}) = \frac{4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{10}.
\end{aligned}$$

18. (本小题满分12分)

如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形, $\angle BCD = 60^\circ$, E 是 CD 的中点, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = \sqrt{3}$.

(I) 证明: 平面 $PBE \perp$ 平面 PAB ;

(II) 求二面角 $A-BE-P$ 的大小。



解：解法一（I）如图所示，连结 BD ，由 $ABCD$ 是菱形且 $\angle BCD = 60^\circ$ 知，

$\triangle BCD$ 是等边三角形。因为 E 是 CD 的中点，所以

$BE \perp CD$ ，又 $AB \parallel CD$ ，所以 $BE \perp AB$ ，

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BE \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PA \perp BE$ ，而 $PA \cap AB = A$ ，因此 $BE \perp$ 平面 PAB 。

又 $BE \subset$ 平面 PBE ，所以平面 $PBE \perp$ 平面 PAB 。

（II）由（I）知， $BE \perp$ 平面 PAB ， $PB \subset$ 平面 PAB ，

所以 $PB \perp BE$ 。

又 $AB \perp BE$ ，所以 $\angle PBA$ 是二面角 $A - BE - P$ 的平面角。

在 $Rt\triangle PAB$ 中， $\tan \angle PBA = \frac{PA}{AB} = \sqrt{3}$ ， $\angle PBA = 60^\circ$ 。

故二面角 $A - BE - P$ 的大小为 60° 。

解法二：如图所示，以 A 为原点，建立空间直角坐标系。则相关各点的坐标分别是

$$A(0,0,0), B(1,0,0), C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), P(0,0,\sqrt{3}), E\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

（I）因为 $\overrightarrow{BE} = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ，平面 PAB 的一个法向量是 $\vec{n}_0 = (0, 1, 0)$ ，所以

\overrightarrow{BE} 和 \vec{n}_0 共线。从而 $BE \perp$ 平面 PAB 。

又因为 $BE \subset$ 平面 PBE ，所以平面 $PBE \perp$ 平面 PAB 。

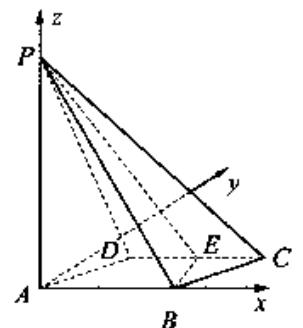
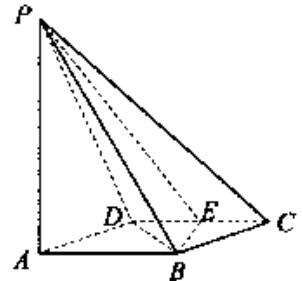
（II）易知 $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -\sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{BE} = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ，设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面 PBE 的一个法向量，

$$\text{则由 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 + 0 \times y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0, \\ 0 \times x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + 0 \times z_1 = 0 \end{cases} \text{ 所以 } y_1 = 0, x_1 = \sqrt{3}z_1.$$

故可取 $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}, 0, 1)$ 。而平面 ABE 的一个法向量是 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ 。

$$\text{于是，} \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}..$$

故二面角 $A - BE - P$ 的大小为 60° 。



19 (本小题满分13分)

已知椭圆的中心在原点,一个焦点是 $F(2,0)$,且两条准线间的距离为 $\lambda (\lambda > 4)$ 。

- (I) 求椭圆的方程;
- (II) 若存在过点A (1, 0) 的直线 l ,使点F关于直线 l 的对称点在椭圆上,求 λ 的取值范围。

解: (I) 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

由条件知 $c = 2$,且 $\frac{2a^2}{c} = \lambda$,所以 $a^2 = \lambda$, $b^2 = a^2 - c^2 = \lambda - 4$.

故椭圆的方程是 $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - 4} = 1 (\lambda > 4)$.

(II) 依题意,直线 l 的斜率存在且不为0,记为 k ,则直线 l 的方程是 $y = k(x - 1)$.

设点 $F(2,0)$ 关于直线 l 的对称点为 $F'(x_0, y_0)$,则

$$\begin{cases} \frac{y_0}{2} = k\left(\frac{x_0+2}{2} - 1\right), \\ \frac{y_0}{x_0-2} \cdot k = -1 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_0 = \frac{2}{1+k^2}, \\ y_0 = \frac{2k}{1+k^2} \end{cases}$$

因为点 $F'(x_0, y_0)$ 在椭圆上, 所以 $\frac{\left(\frac{2}{1+k^2}\right)^2}{\lambda} + \frac{\left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2}{\lambda - 4} = 1$. 即

$$\lambda(\lambda - 4)k^4 + 2\lambda(\lambda - 6)k^2 + (\lambda - 4)^2 = 0.$$

设 $k^2 = t$, 则 $\lambda(\lambda - 4)t^2 + 2\lambda(\lambda - 6)t + (\lambda - 4)^2 = 0$.

因为 $\lambda > 4$, 所以 $\frac{(\lambda - 4)^2}{\lambda(\lambda - 4)} > 0$. 于是,

$$\text{当且仅当} \begin{cases} \Delta = [2\lambda(\lambda - 6)]^2 - 4\lambda(\lambda - 4)^3, \\ -\frac{2\lambda(\lambda - 6)}{\lambda(\lambda - 4)} > 0. \end{cases} \quad (*)$$

上述方程存在正实根,即直线 l 存在.

$$\text{解(*)得} \begin{cases} \lambda \leq \frac{16}{3}, \\ 4 < \lambda < 6. \end{cases} \text{所以 } 4 < \lambda \leq \frac{16}{3}.$$

即 λ 的取值范围是 $4 < \lambda \leq \frac{16}{3}$.

20. (本小题满分13分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} = (1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2})a_n + 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$,

(I) 求 a_3, a_4 , 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $S_k = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1}, T_k = a_2 + a_4 + \dots + a_{2k}, W_k = \frac{2S_k}{2+T_k} (k \in N^+)$,

求使 $W_k > 1$ 的所有 k 的值, 并说明理由。

解: (I) 因为 $a_1 = 0, a_2 = 2$, 所以 $a_3 = (1 + \cos^2 \frac{\pi}{2})a_1 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{2} = a_1 + 4 = 4$,

$a_4 = (1 + \cos^2 \pi)a_2 + 4 \sin^2 \pi = 2a_2 = 4$,

一般地, 当 $n = 2k-1 (k \in N^*)$ 时,

$$a_{2k+1} = [1 + \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2}]a_{2k-1} + 4 \sin^2 \frac{2k-1}{2}\pi = a_{2k-1} + 4,$$

即 $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 4$. 所以数列 $\{a_{2k-1}\}$ 是首项为0、公差为4的等差数列,

因此 $a_{2k-1} = 4(k-1)$.

当 $n = 2k (k \in N^*)$ 时, $a_{2k+2} = [1 + \cos^2 \frac{2k\pi}{2}]a_{2k} + 4 \sin^2 \frac{2k}{2}\pi = 2a_{2k}$,

所以数列 $\{a_{2k}\}$ 是首项为2、公比为2的等比数列, 因此 $a_{2k} = 2^k$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 2(n-1), & n = 2k-1 (k \in N^*), \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k (k \in N^*) \end{cases}$

(II) 由 (I) 知, $S_k = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1} = 0 + 4 + \dots + 4(k-1) = 2k(k-1)$,

$$T_k = a_2 + a_4 + \dots + a_{2k} = 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 2, W_k = \frac{2S_k}{2+T_k} = \frac{k(k-1)}{2^{k-1}}.$$

于是 $W_1 = 0$, $W_2 = 1$, $W_3 = \frac{3}{2}$, $W_4 = \frac{3}{2}$, $W_5 = \frac{5}{4}$, $W_6 = \frac{15}{16}$.

下面证明: 当 $k \geq 6$ 时, $W_k < 1$. 事实上, 当 $k \geq 6$ 时,

$$W_{k+1} - W_k = \frac{(k+1)k}{2^k} - \frac{k(k-1)}{2^{k-1}} = \frac{k(3-k)}{2^k} < 0, \text{ 即 } W_{k+1} < W_k.$$

又 $W_6 < 1$, 所以当 $k \geq 6$ 时, $W_k < 1$.

故满足 $W_k > 1$ 的所有 k 的值为 3, 4, 5.

21. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + cx$ 有三个极值点。

(I) 证明: $-27 < c < 5$;

(II) 若存在实数 c , 使函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上单调递减, 求 a 的取值范围。

解: (I) 因为函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + cx$ 有三个极值点,

所以 $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c = 0$ 有三个互异的实根.

设 $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$, 则 $g'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$,

当 $x < -3$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上为增函数;

当 $-3 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(-3, 1)$ 上为减函数;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数;

所以函数 $g(x)$ 在 $x = -3$ 时取极大值, 在 $x = 1$ 时取极小值.

当 $g(-3) \leq 0$ 或 $g(1) \geq 0$ 时, $g(x) = 0$ 最多只有两个不同实根.

因为 $g(x) = 0$ 有三个不同实根, 所以 $g(-3) > 0$ 且 $g(1) < 0$.

即 $-27 + 27 + 27 + c > 0$, 且 $1 + 3 - 9 + c < 0$,

解得 $c > -27$, 且 $c < 5$, 故 $-27 < c < 5$.

(II) 由 (I) 的证明可知, 当 $-27 < c < 5$ 时, $f(x)$ 有三个极值点.

不妨设为 x_1 , x_2 , x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), 则 $f'(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, x_1], [x_2, x_3]$

若 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上单调递减,

则 $[a, a+2] \subset (-\infty, x_1]$, 或 $[a, a+2] \subset [x_2, x_3]$,

若 $[a, a+2] \subset (-\infty, x_1]$, 则 $a+2 \leq x_1$. 由 (I) 知, $x_1 < -3$, 于是 $a < -5$.

若 $[a, a+2] \subset [x_2, x_3]$, 则 $a \geq x_2$ 且 $a+2 \leq x_3$. 由 (I) 知, $-3 < x_2 < 1$.

又 $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$, 当 $c = -27$ 时, $f'(x) = (x-3)(x+3)^2$;

当 $c = 5$ 时, $f'(x) = (x+5)(x-1)^2$.

因此, 当 $-27 < c < 5$ 时, $1 < x_3 < 3$. 所以 $a > -3$, 且 $a+2 < 3$.

即 $-3 < a < 1$. 故 $a < -5$, 或 $-3 < a < 1$. 反之, 当 $a < -5$, 或 $-3 < a < 1$ 时,

总可找到 $c \in (-27, 5)$, 使函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上单调递减.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, -5) \cup (-3, 1)$.