2017年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5分）$\frac{3+i}{1+i}$=（　　）

A．1+2i　　B．1﹣2i　　C．2+i　　D．2﹣i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题．

【分析】分子和分母同时乘以分母的共轭复数，再利用虚数单位i的幂运算性质，求出结果．

【解答】解：$\frac{3+i}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-2i}{2}$=2﹣i，

故选：D．

【点评】本题考查两个复数代数形式的乘除法，虚数单位i的幂运算性质，两个复数相除，分子和分母同时乘以分母的共轭复数．

2．（5分）设集合A={1，2，4}，B={x|x^2﹣4x+m=0}．若A∩B={1}，则B=（　　）

A．{1，﹣3}　　B．{1，0}　　C．{1，3}　　D．{1，5}

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】34：方程思想；4O：定义法；5J：集合．

【分析】由交集的定义可得1∈A且1∈B，代入二次方程，求得m，再解二次方程可得集合B．

【解答】解：集合A={1，2，4}，B={x|x^2﹣4x+m=0}．

若A∩B={1}，则1∈A且1∈B，

可得1﹣4+m=0，解得m=3，

即有B={x|x^2﹣4x+3=0}={1，3}．

故选：C．

【点评】本题考查集合的运算，主要是交集的求法，同时考查二次方程的解法，运用定义法是解题的关键，属于基础题．

3．（5分）我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远看巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"意思是：一座7层塔共挂了381盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的2倍，则塔的顶层共有灯（　　）

A．1盏　　B．3盏　　C．5盏　　D．9盏

【考点】89：等比数列的前n项和．

【专题】34：方程思想；4O：定义法；54：等差数列与等比数列．

【分析】设塔顶的a_1盏灯，由题意{a_n}是公比为2的等比数列，利用等比数列前n项和公式列出方程，能求出结果．

【解答】解：设塔顶的a_1盏灯，

由题意{a_n}是公比为2的等比数列，

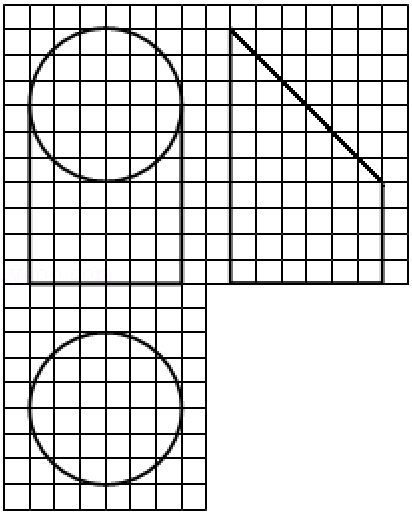
$\therefore S_7=\frac{a_1(1-2^7)}{1-2}=381$，

解得$a_1=3$．

故选：B．

【点评】本题考查等比数列的首项的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意等比数列的性质的合理运用．

4．（5分）如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为（　　）



A． 90π　　　　B． 63π　　　　C． 42π　　　　D． 36π

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

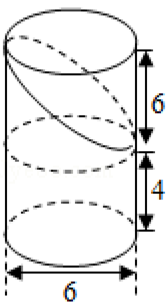
【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5Q：立体几何．

【分析】由三视图可得，直观图为一个完整的圆柱减去一个高为6的圆柱的一半，即可求出几何体的体积．

【解答】解：由三视图可得，直观图为一个完整的圆柱减去一个高为6的圆柱的一半，

$V=\pi\bullet 3^2\times 10-\frac{1}{2}\bullet\pi\bullet 3^2\times 6=63\pi$，

故选：B．



【点评】本题考查了体积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

5．（5分）设x，y满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\ 2x-3y+3\geqslant 0\\ y+3\geqslant 0\end{cases}$，则z=2x+y的最小值是（　　）

A．﹣15　　B．﹣9　　C．1　　D．9

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；5T：不等式．

【分析】画出约束条件的可行域，利用目标函数的最优解求解目标函数的最小值即可．

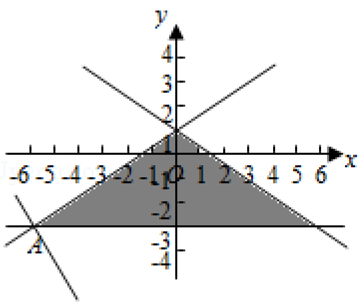
【解答】解：x、y满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\2x-3y+3\geqslant 0\\y+3\geqslant 0\end{cases}$的可行域如图：

z=2x+y 经过可行域的A时，目标函数取得最小值，

由$\begin{cases}y=-3\\2x-3y+3=0\end{cases}$解得A（﹣6，﹣3），

则z=2x+y 的最小值是：﹣15．

故选：A．



【点评】本题考查线性规划的简单应用，考查数形结合以及计算能力．

6．（5分）安排3名志愿者完成4项工作，每人至少完成1项，每项工作由1人完成，则不同的安排方式共有（　　）

A．12种　　B．18种　　C．24种　　D．36种

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】11：计算题；49：综合法；5O：排列组合．

【分析】把工作分成3组，然后安排工作方式即可．

【解答】解：4项工作分成3组，可得：C_4^2=6，

安排3名志愿者完成4项工作，每人至少完成1项，每项工作由1人完成，

可得：$6\times A_3^3=36$种．

故选：D．

【点评】本题考查排列组合的实际应用，注意分组方法以及排列方法的区别，考查计算能力．

7．（5分）甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩．老师说：你们四人中有2位优秀，2位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩．看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩．根据以上信息，则（　　）

A．乙可以知道四人的成绩　　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　　D．乙、丁可以知道自己的成绩

【考点】F4：进行简单的合情推理．

【专题】2A：探究型；35：转化思想；48：分析法；5M：推理和证明．

【分析】根据四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，继而可以推出正确答案

【解答】解：四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，

甲不知自己的成绩

→乙丙必有一优一良，（若为两优，甲会知道自己的成绩；若是两良，甲也会知道自己的成绩）

→乙看到了丙的成绩，知自己的成绩

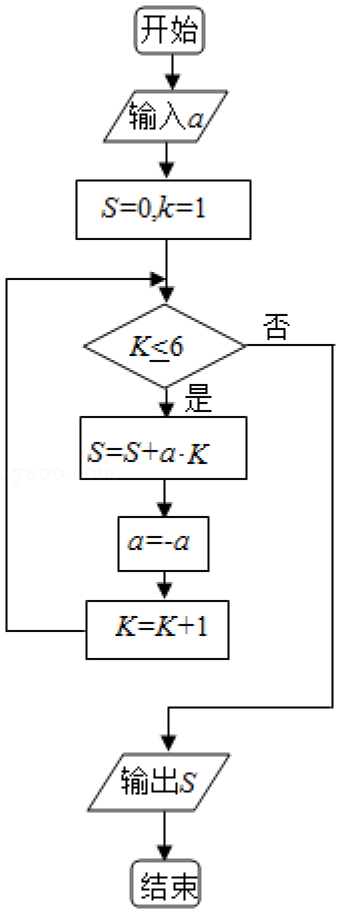
→丁看到甲、丁也为一优一良，丁知自己的成绩，

给甲看乙丙成绩，甲不知道自已的成绩，说明乙丙一优一良，假定乙丙都是优，则甲是良，假定乙丙都是良，则甲是优，那么甲就知道自已的成绩了．给乙看丙成绩，乙没有说不知道自已的成绩，假定丙是优，则乙是良，乙就知道自己成绩．给丁看甲成绩，因为甲不知道自己成绩，乙丙是一优一良，则甲丁也是一优一良，丁看到甲成绩，假定甲是优，则丁是良，丁肯定知道自已的成绩了

故选：D．

【点评】本题考查了合情推理的问题，关键掌握四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，属于中档题．

8．（5分）执行如图的程序框图，如果输入的a=﹣1，则输出的S=（　　）



A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；27：图表型；4B：试验法；5K：算法和程序框图．

【分析】执行程序框图，依次写出每次循环得到的S，K值，当K=7时，程序终止即可得到结论．

【解答】解：执行程序框图，有S=0，K=1，a=﹣1，代入循环，

第一次满足循环，S=﹣1，a=1，K=2；

满足条件，第二次满足循环，S=1，a=﹣1，K=3；

满足条件，第三次满足循环，S=﹣2，a=1，K=4；

满足条件，第四次满足循环，S=2，a=﹣1，K=5；

满足条件，第五次满足循环，S=﹣3，a=1，K=6；

满足条件，第六次满足循环，S=3，a=﹣1，K=7；

K≤6不成立，退出循环输出S的值为3．

故选：B．

【点评】本题主要考查了程序框图和算法，属于基本知识的考查，比较基础．

9．（5分）若双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线被圆（x﹣2）^{2}+y^2=4所截得的弦长为2，则C的离心率为（　　）

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【考点】KC：双曲线的性质；KJ：圆与圆锥曲线的综合．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】通过圆的圆心与双曲线的渐近线的距离，列出关系式，然后求解双曲线的离心率即可．

【解答】解：双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线不妨为：bx+ay=0，

圆（x﹣2）^{2}+y^2=4的圆心（2，0），半径为：2，

双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线被圆（x﹣2）^{2}+y^2=4所截得的弦长为2，

可得圆心到直线的距离为：$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}=\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

解得：$\frac{4c^2-4a^2}{c^2}=3$，可得e^2=4，即e=2．

故选：A．

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，圆的方程的应用，考查计算能力.

10．（5分）已知直三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$中，∠ABC=120°，AB=2，BC=CC_1=1，则异面直线AB_1与BC_1所成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{15}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角.

【专题】31：数形结合；4O：定义法；5G：空间角.

【分析】【解法一】设M、N、P分别为AB，BB_1和B_1C_1的中点，得出AB_1、BC_1夹角为MN和NP夹角或其补角；根据中位线定理，结合余弦定理求出AC、MQ，MP和∠MNP的余弦值即可.

【解法二】通过补形的办法，把原来的直三棱柱变成直四棱柱，解法更简洁.

【解答】解：【解法一】如图所示，设M、N、P分别为AB，BB_1和B_1C_1的中点，

则AB_1、BC_1夹角为MN和NP夹角或其补角

（因异面直线所成角为（0，$\frac{\pi}{2}$]），

可知MN=$\frac{1}{2}AB_1$=$\frac{\sqrt{5}}{2}$，

NP=$\frac{1}{2}BC_1$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$；

作BC中点Q，则△PQM为直角三角形；

∵PQ=1，MQ=$\frac{1}{2}$AC，

△ABC中，由余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\bullet BC\bullet \cos\angle ABC$

$=4+1-2\times2\times1\times(-\frac{1}{2})$

=7，

∴AC=$\sqrt{7}$，

∴MQ=$\frac{\sqrt{7}}{2}$；

在△MQP中，MP=$\sqrt{MQ^2+PQ^2}$=$\frac{\sqrt{11}}{2}$；

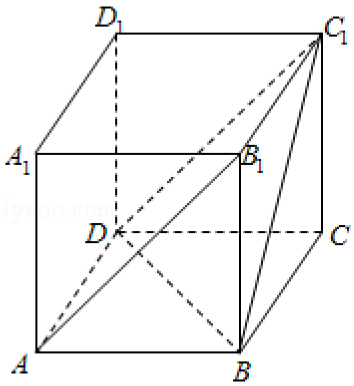
在△PMN中，由余弦定理得

$$\cos\angle MNP=\frac{MN^2+NP^2-PM^2}{2\cdot MN\cdot NP}=\frac{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{5};$$

又异面直线所成角的范围是（0，$\frac{\pi}{2}$]，

∴AB_1与BC_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解法二】如图所示，



补成四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，求$\angle BC_1D$即可；

$BC_1=\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos60^\circ}=\sqrt{3}$，

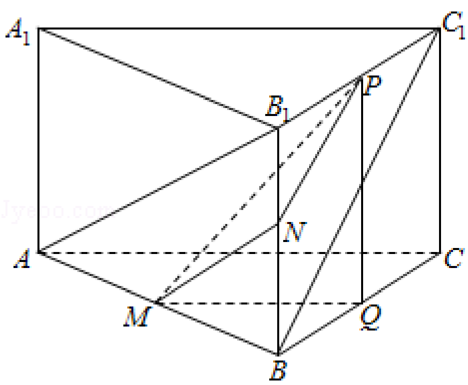
$C_1D=\sqrt{5}$，

∴$BC_1^{\ 2}+BD^2=C_1D^2$，

∴$\angle DBC_1=90°$，

∴$\cos\angle BC_1D=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

故选：C.



【点评】本题考查了空间中的两条异面直线所成角的计算问题，也考查了空间

中的平行关系应用问题，是中档题．

11．（5分）若$x=-2$是函数$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$的极值点，则$f(x)$的极小值为（　　）

A．-1　　B．$-2e^{-3}$　　C．$5e^{-3}$　　D．1

【考点】6D：利用导数研究函数的极值．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；53：导数的综合应用．

【分析】求出函数的导数，利用极值点，求出a，然后判断函数的单调性，求解函数的极小值即可．

【解答】解：函数$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$，

可得$f'(x)=(2x+a)e^{x-1}+(x^2+ax-1)e^{x-1}$，

$x=-2$是函数$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$的极值点，

可得：$f'(-2)=(-4+a)e^{-3}+(4-2a-1)e^{-3}=0$，即$-4+a+(3-2a)=0$．

解得$a=-1$．

可得$f'(x)=(2x-1)e^{x-1}+(x^2-x-1)e^{x-1}$，

$=(x^2+x-2)e^{x-1}$，函数的极值点为：$x=-2$，$x=1$，

当$x<-2$或$x>1$时，$f'(x)>0$函数是增函数，$x\in(-2,1)$时，函数是减函数，

$x=1$时，函数取得极小值：$f(1)=(1^2-1-1)e^{1-1}=-1$．

故选：A．

【点评】本题考查函数的导数的应用，函数的单调性以及函数的极值的求法，考查计算能力．

12．（5分）已知△ABC是边长为2的等边三角形，P为平面ABC内一点，则$\overrightarrow{PA}\bullet(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值是（　　）

A．-2　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$-\frac{4}{3}$　　D．-1

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】31：数形结合；4R：转化法；5A：平面向量及应用．

【分析】根据条件建立坐标系，求出点的坐标，利用坐标法结合向量数量积的公式进行计算即可．

【解答】解：建立如图所示的坐标系，以BC中点为坐标原点，

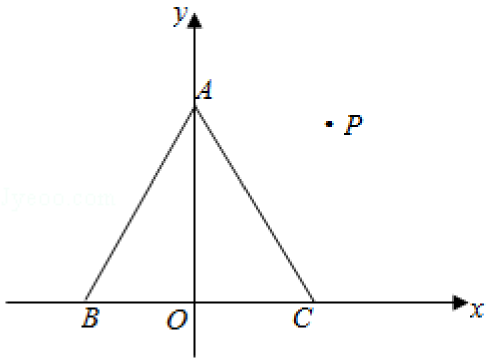
则A（0，$\sqrt{3}$），B（﹣1，0），C（1，0），

设P（x，y），则$\overrightarrow{PA}$=（﹣x，$\sqrt{3}$﹣y），$\overrightarrow{PB}$=（﹣1﹣x，﹣y），$\overrightarrow{PC}$=（1﹣x，﹣y），

则$\overrightarrow{PA}\bullet(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2-2\sqrt{3}y+2y^2=2[x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{3}{4}]$

∴当x=0，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，取得最小值$2\times(-\frac{3}{4})=-\frac{3}{2}$，

故选：B．



【点评】本题主要考查平面向量数量积的应用，根据条件建立坐标系，利用坐标法是解决本题的关键．

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．（5分）一批产品的二等品率为0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取100次．X表示抽到的二等品件数，则DX=__1.96__．

【考点】CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】11：计算题；35：转化思想；5I：概率与统计．

【分析】判断概率满足的类型，然后求解方差即可．

【解答】解：由题意可知，该事件满足独立重复试验，是一个二项分布模型，

其中，$p=0.02$，$n=100$，

则$DX=npq=np(1-p)=100\times0.02\times0.98=1.96$.

故答案为：1.96.

【点评】本题考查离散性随机变量的期望与方差的求法，判断概率类型满足二项分布是解题的关键.

14.（5分）函数$f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}$（$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$）的最大值是__1__.

【考点】HW：三角函数的最值.

【专题】11：计算题；33：函数思想；4J：换元法；51：函数的性质及应用；57：三角函数的图像与性质.

【分析】同角的三角函数的关系以及二次函数的性质即可求出.

【解答】解：$f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}=1-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}$，

令$\cos x=t$且$t\in[0,1]$，

则$y=-t^2+\sqrt{3}t+\frac{1}{4}=-(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1$，

当$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$f(t)_{max}=1$，

即$f(x)$的最大值为1，

故答案为：1

【点评】本题考查了同角的三角函数的关系以及二次函数的性质，属于基础题

15.（5分）等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$__$\frac{2n}{n+1}$__.

【考点】85：等差数列的前n项和；8E：数列的求和.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；54：等差数列与等比数列.

【分析】利用已知条件求出等差数列的前n项和，然后化简所求的表达式，求解即可.

【解答】解：等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，$S_4=2(a_2+a_3)=10$，

可得$a_2=2$，数列的首项为1，公差为1，

$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，

则$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=2[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}]=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$.

故答案为：$\frac{2n}{n+1}$.

【点评】本题考查等差数列的求和，裂项消项法求和的应用，考查计算能力．

16．（5分）已知F是抛物线C：$y^2=8x$的焦点，M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N．若M为FN的中点，则$|FN|=$__6__．

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】求出抛物线的焦点坐标，推出M坐标，然后求解即可．

【解答】解：抛物线C：$y^2=8x$的焦点F（2，0），M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N．若M为FN的中点，

可知M的横坐标为：1，则M的纵坐标为：$\pm 2\sqrt{2}$，

$|FN|=2|FM|=2\sqrt{(1-2)^2+(\pm 2\sqrt{2}-0)^2}=6$.

故答案为：6．

【点评】本题考查抛物线的简单性质的应用，考查计算能力．

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．（一）必考题：共60分。

17．（12分）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$.

（1）求cosB；

（2）若a+c=6，△ABC的面积为2，求b．

【考点】GS：二倍角的三角函数；HP：正弦定理．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；58：解三角形．

【分析】（1）利用三角形的内角和定理可知A+C=π﹣B，再利用诱导公式化简sin（A+C），利用降幂公式化简$8\sin^2\frac{B}{2}$，结合$\sin^2B+\cos^2B=1$，求出cosB，

（2）由（1）可知$\sin B=\frac{8}{17}$，利用勾面积公式求出ac，再利用余弦定理即可求出b．

【解答】解：（1）$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$，

$\therefore\sin B=4(1-\cos B)$，

$\because\sin^2B+\cos^2B=1$，

$\therefore16(1-\cos B)^2+\cos^2B=1$，

$\therefore16(1-\cos B)^2+\cos^2B-1=0$，

$\therefore16(\cos B-1)^2+(\cos B-1)(\cos B+1)=0$，

$\therefore(17\cos B-15)(\cos B-1)=0$，

$\therefore\cos B=\frac{15}{17}$；

（2）由（1）可知$\sin B=\frac{8}{17}$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\bullet\sin B=2$，

$\therefore ac=\frac{17}{2}$，

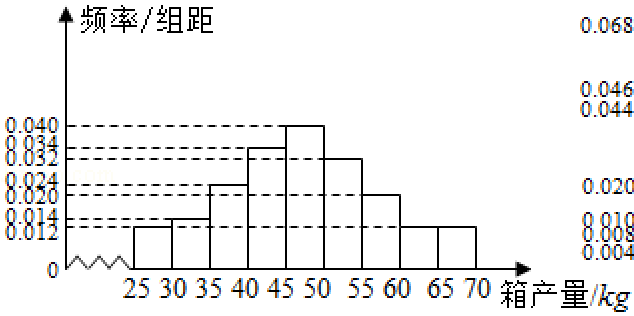
$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2\times\frac{17}{2}\times\frac{15}{17}$

$=a^2+c^2-15=(a+c)^2-2ac-15=36-17-15=4$，

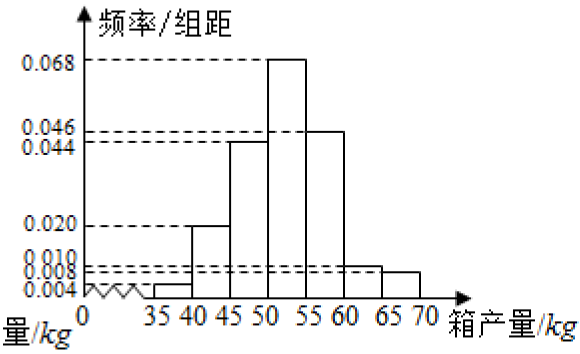
$\therefore b=2$．

【点评】本题考查了三角形的内角和定理，三角形的面积公式，二倍角公式和同角的三角函数的关系，属于中档题

18．（12分）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了100个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如图：



旧养殖法



新养殖法

（1）设两种养殖方法的箱产量相互独立，记A表示事件“旧养殖法的箱产量低于50kg，新养殖法的箱产量不低于50kg”，估计A的概率；

（2）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法		
新养殖法		

（3）根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值（精确到0.01）．

附：

P（K^2≥k）	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$．

【考点】B8：频率分布直方图；BE：用样本的数字特征估计总体的数字特征；BL：独立性检验．

【专题】31：数形结合；44：数形结合法；5I：概率与统计．

【分析】（1）由题意可知：P（A）=P（BC）=P（B）P（C），分布求得发生的频率，即可求得其概率；

（2）完成2×2列联表：求得观测值，与参考值比较，即可求得有99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

（3）根据频率分布直方图即可求得其中位数．

【解答】解：（1）记B表示事件“旧养殖法的箱产量低于50kg”，C表示事件“新养殖法的箱产量不低于50kg”，

由P（A）=P（BC）=P（B）P（C），

则旧养殖法的箱产量低于50kg：（0.012+0.014+0.024+0.034+0.040）×5=0.62，

故P（B）的估计值0.62，

新养殖法的箱产量不低于50kg：（0.068+0.046+0.010+0.008）×5=0.66，

故P（C）的估计值为，

则事件A的概率估计值为P（A）=P（B）P（C）=0.62×0.66=0.4092；

∴A发生的概率为0.4092；

（2）2×2列联表：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg	总计
旧养殖法	62	38	100
新养殖法	34	66	100
总计	96	104	200

则$K^2=\frac{200(62\times66-38\times34)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705$，

由15.705＞6.635，

∴有99%的把握认为箱产量与养殖方法有关；

（3）由新养殖法的箱产量频率分布直方图中，箱产量低于50kg的直方图的面积：

（0.004+0.020+0.044）×5=0.34，

箱产量低于55kg的直方图面积为：

（0.004+0.020+0.044+0.068）×5=0.68＞0.5，

故新养殖法产量的中位数的估计值为：$50+\frac{0.5-0.34}{0.068}\approx52.35$（kg），

新养殖法箱产量的中位数的估计值52.35（kg）．

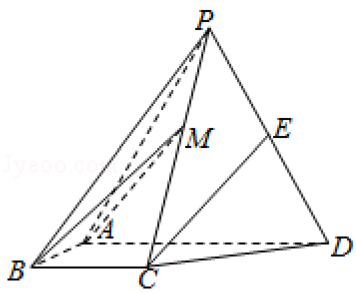
【点评】本题考查频率分布直方图的应用，考查独立性检验，考查计算能力，属于中档题．

19．（12分）如图，四棱锥P﹣ABCD中，侧面PAD为等边三角形且垂直于底面A

BCD，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90°$，E是PD的中点．

（1）证明：直线CE∥平面PAB；

（2）点M在棱PC上，且直线BM与底面ABCD所成角为45°，求二面角M﹣AB﹣D的余弦值．



【考点】LS：直线与平面平行；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】31：数形结合；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离；5G：空间角．

【分析】（1）取PA的中点F，连接EF，BF，通过证明CE∥BF，利用直线与平面平行的判定定理证明即可．

（2）利用已知条件转化求解M到底面的距离，作出二面角的平面角，然后求解二面角M﹣AB﹣D的余弦值即可．

【解答】（1）证明：取PA的中点F，连接EF，BF，因为E是PD的中点，

所以EF $\underline{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AD$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90°$，∴$BC\parallel\frac{1}{2}AD$，

∴BCEF是平行四边形，可得CE∥BF，BF⊂平面PAB，CE⊄平面PAB，

∴直线CE∥平面PAB；

（2）解：四棱锥P﹣ABCD中，

侧面PAD为等边三角形且垂直于底面ABCD，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，

$\angle BAD=\angle ABC=90°$，E是PD的中点．

取AD的中点O，M在底面ABCD上的射影N在OC上，设AD=2，则AB=BC=1，$OP=\sqrt{3}$，

∴$\angle PCO=60°$，直线BM与底面ABCD所成角为45°，

可得：BN=MN，$CN=\frac{\sqrt{3}}{3}MN$，BC=1，

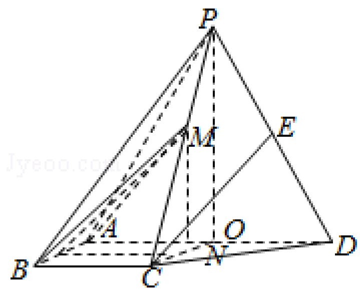
可得：$1+\frac{1}{3}BN^2=BN^2$，$BN=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$MN=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

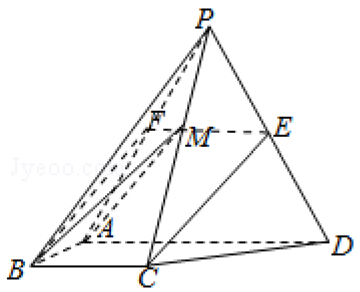
作NQ⊥AB于Q，连接MQ，AB⊥MN，

所以∠MQN就是二面角M﹣AB﹣D的平面角，$MQ=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

二面角M﹣AB﹣D的余弦值为：$\frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.





【点评】本题考查直线与平面平行的判定定理的应用，二面角的平面角的求法，考查空间想象能力以及计算能力.

20．（12分）设O为坐标原点，动点M在椭圆C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上，过M作x轴的垂线，垂足为N，点P满足$\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

（1）求点P的轨迹方程；

（2）设点Q在直线x=﹣3上，且$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{PQ}=1$．证明：过点P且垂直于OQ的直线l过C的左焦点F.

【考点】J3：轨迹方程；KL：直线与椭圆的综合.

【专题】34：方程思想；48：分析法；5A：平面向量及应用；5B：直线与圆.

【分析】（1）设M（x_0，y_0），由题意可得N（x_0，0），设P（x，y），运用向量的坐标运算，结合M满足椭圆方程，化简整理可得P的轨迹方程；

（2）设Q（﹣3，m），P（$\sqrt{2}\cos\alpha$，$\sqrt{2}\sin\alpha$），（$0\le\alpha<2\pi$），运用向量的数量积的坐标表示，可得m，即有Q的坐标，求得椭圆的左焦点坐标，求得OQ，PF的斜率，由两直线垂直的条件：向量数量积为0，即可得证．

【解答】解：（1）设M（x_0，y_0），由题意可得N（x_0，0），

设P（x，y），由点P满足$\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$．

可得（$x-x_0$，y）$=\sqrt{2}$（0，y_0），

可得$x-x_0=0$，$y=\sqrt{2}y_0$，

即有$x_0=x$，$y_0=\frac{y}{\sqrt{2}}$，

代入椭圆方程$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，可得$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$，

即有点P的轨迹方程为圆$x^2+y^2=2$；

（2）证明：设Q（﹣3，m），P（$\sqrt{2}\cos\alpha$，$\sqrt{2}\sin\alpha$），（$0\le\alpha<2\pi$），

$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{PQ}=1$，可得（$\sqrt{2}\cos\alpha$，$\sqrt{2}\sin\alpha$）•（$-3-\sqrt{2}\cos\alpha$，$m-\sqrt{2}\sin\alpha$）=1，

即为$-3\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos^2\alpha+\sqrt{2}m\sin\alpha-2\sin^2\alpha=1$，

当α=0时，上式不成立，则$0<\alpha<2\pi$，

解得$m=\frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$，

即有Q（﹣3，$\frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$），

椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点F（﹣1，0），

由$\overrightarrow{PF}\bullet\overrightarrow{OQ}$=（$-1-\sqrt{2}\cos\alpha$，$-\sqrt{2}\sin\alpha$）•（﹣3，$\frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$）

$=3+3\sqrt{2}\cos\alpha-3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)=0$．

可得过点P且垂直于OQ的直线l过C的左焦点F．

另解：设Q（﹣3，t），P（m，n），由$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{PQ}=1$，

可得（m，n）•（$-3-m$，$t-n$）$=-3m-m^2+nt-n^2=1$，

又P在圆$x^2+y^2=2$上，可得$m^2+n^2=2$，

即有$nt=3+3m$，

又椭圆的左焦点F（﹣1，0），

$\overrightarrow{PF}\bullet\overrightarrow{OQ}$=（﹣1﹣m，﹣n）•（﹣3，t）=3+3m﹣nt

=3+3m﹣3﹣3m=0，

则$\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{OQ}$，

可得过点P且垂直于OQ的直线l过C的左焦点F．

【点评】本题考查轨迹方程的求法，注意运用坐标转移法和向量的加减运算，考查圆的参数方程的运用和直线的斜率公式，以及向量的数量积的坐标表示和两直线垂直的条件：向量数量积为0，考查化简整理的运算能力，属于中档题．

21．（12分）已知函数f（x）=ax^2﹣ax﹣xlnx，且f（x）≥0．

（1）求a；

（2）证明：f（x）存在唯一的极大值点x_0，且e^{-2}<f（x_0）<2^{-2}．

【考点】6D：利用导数研究函数的极值．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；53：导数的综合应用．

【分析】（1）通过分析可知f（x）≥0等价于h（x）=ax﹣a﹣lnx≥0，进而利用h′（x）=a﹣$\frac{1}{x}$可得h（x）$_{min}$=h（$\frac{1}{a}$），从而可得结论；

（2）通过（1）可知f（x）=x^2﹣x﹣xlnx，记t（x）=f′（x）=2x﹣2﹣lnx，解不等式可知t（x）$_{min}$=t（$\frac{1}{2}$）=ln2﹣1<0，从而可知f′（x）=0存在两根x_0，x_2，利用f（x）必存在唯一极大值点x_0及x_0<$\frac{1}{2}$可知f（x_0）<$\frac{1}{4}$，另一方面可知f（x_0）>f（$\frac{1}{e}$）=$\frac{1}{e^2}$．

【解答】（1）解：因为f（x）=ax^2﹣ax﹣xlnx=x（ax﹣a﹣lnx）（x>0），

则f（x）≥0等价于h（x）=ax﹣a﹣lnx≥0，求导可知h′（x）=a﹣$\frac{1}{x}$．

则当a≤0时h′（x）<0，即y=h（x）在（0，+∞）上单调递减，

所以当x_0>1时，h（x_0）<h（1）=0，矛盾，故a>0．

因为当0<x<$\frac{1}{a}$时h′（x）<0、当x>$\frac{1}{a}$时h′（x）>0，

所以$h(x)_{min}=h(\frac{1}{a})$，

又因为$h(1)=a-a-\ln 1=0$，

所以$\frac{1}{a}=1$，解得$a=1$；

另解：因为$f(1)=0$，所以$f(x)\geq 0$等价于$f(x)$在$x>0$时的最小值为$f(1)$，

所以等价于$f(x)$在$x=1$处是极小值，

所以解得$a=1$；

（2）证明：由（1）可知$f(x)=x^2-x-x\ln x$，$f'(x)=2x-2-\ln x$，

令$f'(x)=0$，可得$2x-2-\ln x=0$，记$t(x)=2x-2-\ln x$，则$t'(x)=2-\frac{1}{x}$，

令$t'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{2}$，

所以$t(x)$在区间$(0,\frac{1}{2})$上单调递减，在$(\frac{1}{2},+\infty)$上单调递增，

所以$t(x)_{min}=t(\frac{1}{2})=\ln 2-1<0$，从而$t(x)=0$有解，即$f'(x)=0$存在两根$x_0$，$x_2$，

且不妨设$f'(x)$在$(0,x_0)$上为正、在(x_0,x_2)上为负、在$(x_2,+\infty)$上为正，

所以$f(x)$必存在唯一极大值点x_0，且$2x_0-2-\ln x_0=0$，

所以$f(x_0)={x_0}^2-x_0-x_0\ln x_0={x_0}^2-x_0+2x_0-2{x_0}^2=x_0-{x_0}^2$，

由$x_0<\frac{1}{2}$可知$f(x_0)<(x_0-{x_0}^2)_{max}=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

由$f'(\frac{1}{e})<0$可知$x_0<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，

所以$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,\frac{1}{e})$上单调递减，

所以$f(x_0)>f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^2}$；

综上所述，$f(x)$存在唯一的极大值点x_0，且$e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

【点评】本题考查利用导数研究函数的极值，考查运算求解能力，考查转化思想，注意解题方法的积累，属于难题.

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修4-4：坐标系与参数方程]（10分）

22．（10分）在直角坐标系xOy中，以坐标原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_1的极坐标方程为$\rho\cos\theta=4$．

（1）M为曲线C_1上的动点，点P在线段OM上，且满足$|OM|\bullet|OP|=16$，求点P的轨迹C_2的直角坐标方程；

（2）设点A的极坐标为（2，$\frac{\pi}{3}$），点B在曲线C_2上，求△OAB面积的最大值．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程．

【专题】38：对应思想；49：综合法；5S：坐标系和参数方程．

【分析】（1）设P（x，y），利用相似得出M点坐标，根据$|OM|\bullet|OP|=16$列方程化简即可；

（2）求出曲线C_2的圆心和半径，得出B到OA的最大距离，即可得出最大面积．

【解答】解：（1）曲线C_1的直角坐标方程为：x=4，

设P（x，y），M（4，y_0），则$\frac{x}{4}=\frac{y}{y_0}$，$\therefore y_0=\frac{4y}{x}$，

$\because |OM||OP|=16$，

$\therefore\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{16+y_0^2}=16$，

即$(x^2+y^2)(1+\frac{y^2}{x^2})=16$，

$\therefore x^4+2x^2y^2+y^4=16x^2$，即$(x^2+y^2)^2=16x^2$，

两边开方得：$x^2+y^2=4x$，

整理得：$(x-2)^2+y^2=4$（$x\neq0$），

∴点P的轨迹C_2的直角坐标方程：$(x-2)^2+y^2=4$（$x\neq0$）．

（2）点A的直角坐标为A（1，$\sqrt{3}$），显然点A在曲线C_2上，$|OA|=2$，

∴曲线C_2的圆心（2，0）到弦OA的距离$d=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

∴△AOB的最大面积$S=\frac{1}{2}|OA|\bullet(2+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了极坐标方程与直角坐标方程的转化，轨迹方程的求解，直线与圆的位置关系，属于中档题．

[选修4-5：不等式选讲]（10分）

23．已知a＞0，b＞0，$a^3+b^3=2$．证明：

（1）（a+b）（a^5+b^5）≥4；

（2）a+b≤2．

【考点】R6：不等式的证明．

【专题】14：证明题；35：转化思想；49：综合法；5T：不等式．

【分析】（1）由柯西不等式即可证明，

（2）由$a^3+b^3=2$转化为$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，再由均值不等式可得：$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，即可得到$\frac{1}{4}(a+b)^3\leq 2$，问题得以证明．

【解答】证明：（1）由柯西不等式得：（a+b）（a^5+b^5）≥$\left(\sqrt{a\cdot a^5}+\sqrt{b\cdot b^5}\right)^2=(a^3+b^3)^2\geq 4$，

当且仅当$\sqrt{ab^5}=\sqrt{ba^5}$，即a=b=1时取等号，

（2）∵$a^3+b^3=2$，

∴$(a+b)(a^2-ab+b^2)=2$，

∴$(a+b)[(a+b)^2-3ab]=2$，

∴$(a+b)^3-3ab(a+b)=2$，

∴$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，

由均值不等式可得：$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

∴$(a+b)^3-2\leq\frac{3(a+b)^3}{4}$，

∴$\frac{1}{4}(a+b)^3\leq 2$，

∴a+b≤2，当且仅当a=b=1时等号成立．

【点评】本题考查了不等式的证明，掌握柯西不等式和均值不等式是关键，属于中档题