

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学乙卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4+6i$, 则 $z=(\quad)$.
A. $1-2i$ B. $1+2i$
C. $1+i$ D. $1-i$
2. 已知集合 $S=\{s|s=2n+1, n\in\mathbb{Z}\}$, $T=\{t|t=4n+1, n\in\mathbb{Z}\}$, 则 $S\cap T=(\quad)$
A. \emptyset B. S
C. T D. \mathbb{Z}
3. 已知命题 $p: \exists x\in\mathbb{R}, \sin x<1$; 命题 $q: \forall x\in\mathbb{R}, e^{|x|}\geq 1$, 则下列命题中为真命题的是 (\quad)
A. $p\wedge q$ B. $\neg p\wedge q$
C. $p\wedge\neg q$ D. $\neg(p\vee q)$
4. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 (\quad)
A. $f(x-1)-1$ B. $f(x-1)+1$
C. $f(x+1)-1$ D. $f(x+1)+1$
5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 (\quad)
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$
6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的

分配方案共有 ()

- A. 60 种 B. 120 种
C. 240 种 D. 480 种

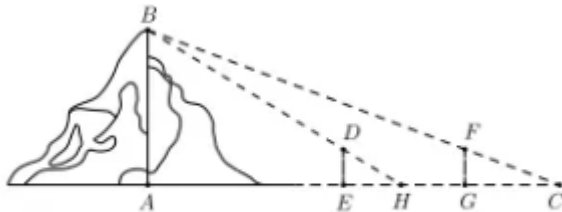
7. 把函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的图像, 则 $f(x)=()$

- A. $\sin(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{12})$ B. $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})$
C. $\sin(2x-\frac{7\pi}{12})$ D. $\sin(2x+\frac{\pi}{12})$

8. 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取 1 个数, 则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为 ()

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{23}{32}$
C. $\frac{9}{32}$ D. $\frac{2}{9}$

9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛的高。如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”。则海岛的高 AB= ()。



(第 9 题图)

- A: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ B: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
C: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$ D: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

10. 设 $a \neq 0$, 若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ()。

- A: $a < b$ B: $a > b$
C: $ab < a^2$ D: $ab > a^2$

11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 ()。

- A: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ B: $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$
 C: $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ D: $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

12. 设 $a = 2\ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 ().

- A: $a < b < c$ B: $b < c < a$
 C: $b < a < c$ D: $c < a < b$

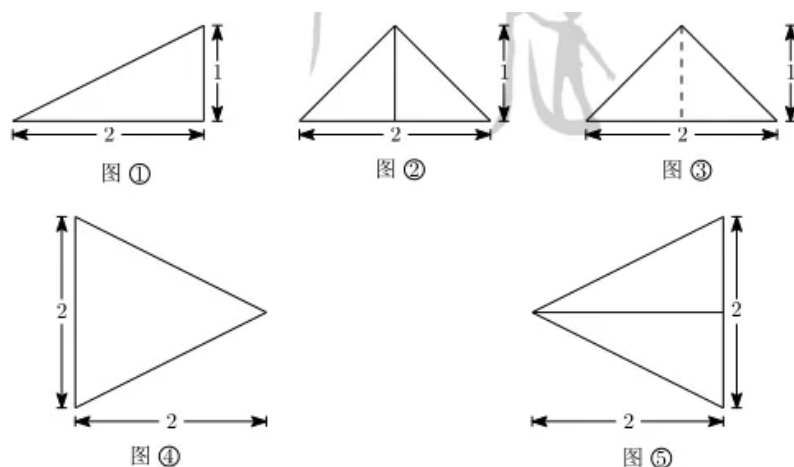
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1$ ($m > 0$) 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则 C 的焦距为_____.

14. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$, 若 $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $\lambda =$ _____.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.

16. 以图①为正视图和俯视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____ (写出符合要求的一组答案即可).



(第 16 题图)

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

某厂研究了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

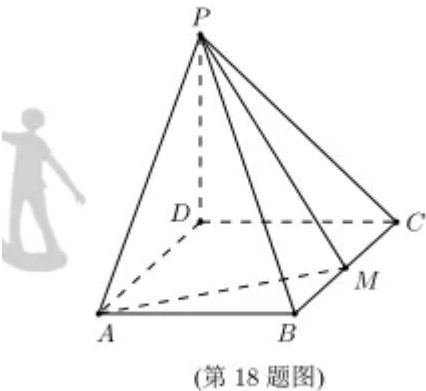
旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} ，样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2

- (1) 求 \bar{x} , \bar{y} , s_1^2 , s_2^2 ;
- (2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高(如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高)。

18. (12 分)

如图，四棱锥 P-ABCD 的底面是矩形，PD⊥底面 ABCD，PD=DC=1，M 为 BC 的中点，且 PB⊥AM，

- (1) 求 BC;
- (2) 求二面角 A-PM-B 的正弦值。



19. (12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和，已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

- (1) 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；
(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (12 分)

设函数 $f(x) = \ln(a-x)$ ，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点。

- (1) 求 a ；
(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$ ，证明： $g(x) < 1$.

21. (12 分)

已知抛物线 $C: x^2=2py$ ($p>0$) 的焦点为 F ，且 F 与圆 $M: x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

- (1) 求 p ；
(2) 若点 P 在 M 上， PA, PB 是 C 的两条切线， A, B 是切点，求 $\triangle PAB$ 的最大值.

(二) 选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中， $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 1)$ ，半径为 1.

- (1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程；的极坐标方程化为直角坐标方程；
(2) 过点 $F(4, 1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条直线的极坐标方程.

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq -a$, 求 a 的取值范围.