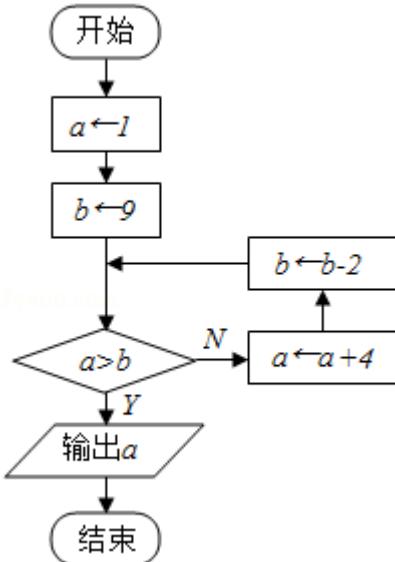


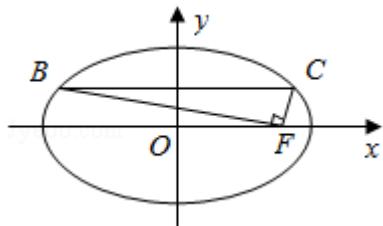
2016年江苏省高考数学试卷

一、填空题（共14小题，每小题5分，满分70分）

1. (5分) (2016•江苏) 已知集合 $A=\{-1, 2, 3, 6\}$, $B=\{x \mid -2 < x < 3\}$, 则 $A \cap B= \underline{\hspace{2cm}}$.
2. (5分) (2016•江苏) 复数 $z=(1+2i)(3-i)$, 其中*i*为虚数单位, 则 z 的实部是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. (5分) (2016•江苏) 在平面直角坐标系xOy中, 双曲线 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦距是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. (5分) (2016•江苏) 已知一组数据4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5, 则该组数据的方差是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. (5分) (2016•江苏) 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. (5分) (2016•江苏) 如图是一个算法的流程图, 则输出的 a 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



7. (5分) (2016•江苏) 将一颗质地均匀的骰子(一种各个面上分别标有1, 2, 3, 4, 5, 6个点的正方体玩具)先后抛掷2次, 则出现向上的点数之和小于10的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. (5分) (2016•江苏) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前n项和, 若 $a_1+a_2^2=-3$, $S_5=10$, 则 a_9 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
9. (5分) (2016•江苏) 定义在区间 $[0, 3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. (5分) (2016•江苏) 如图, 在平面直角坐标系xOy中, F是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的右焦点, 直线 $y=\frac{b}{2}$ 与椭圆交于B, C两点, 且 $\angle BFC=90^\circ$, 则该椭圆的离心率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



11. (5分) (2016·江苏) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上且周期为2的函数, 在区间 $[-1, 1]$ 上,

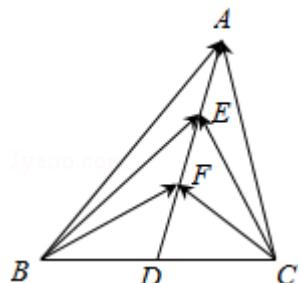
$$f(x) = \begin{cases} x+a, & -1 \leq x < 0 \\ |\frac{2}{5}-x|, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{ 其中 } a \in \mathbb{R}, \text{ 若 } f(-\frac{5}{2}) = f(\frac{9}{2}), \text{ 则 } f(5a) \text{ 的值是 } \underline{\hspace{2cm}}$$

.

$$12. (5分) (2016·江苏) 已知实数 x, y 满足 \begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \\ 3x - y - 3 \leq 0 \end{cases}, \text{ 则 } x^2 + y^2 \text{ 的取值范围是 } \underline{\hspace{2cm}}$$

.

13. (5分) (2016·江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



14. (5分) (2016·江苏) 在锐角三角形ABC中, 若 $\sin A = 2 \sin B \sin C$, 则 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题 (共6小题, 满分90分)

15. (14分) (2016·江苏) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=6$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $C = \frac{\pi}{4}$.

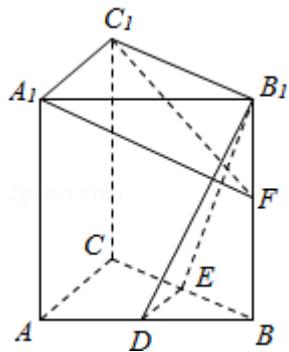
(1) 求 AB 的长;

(2) 求 $\cos(A - \frac{\pi}{6})$ 的值.

16. (14分) (2016·江苏) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 AB, BC 的中点, 点 F 在侧棱 B_1B 上, 且 $B_1D \perp A_1F$, $A_1C_1 \perp A_1B_1$. 求证:

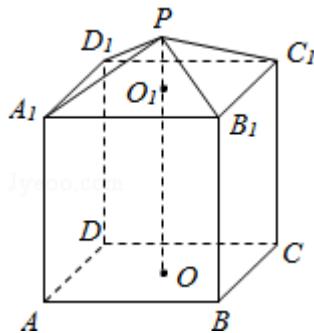
(1) 直线 $DE \parallel$ 平面 A_1C_1F ;

(2) 平面 $B_1DE \perp$ 平面 A_1C_1F .



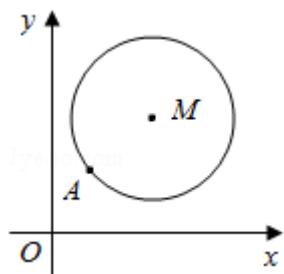
17. (14分) (2016•江苏) 现需要设计一个仓库, 它由上下两部分组成, 上部的形状是正四棱锥 $P - A_1B_1C_1D_1$, 下部的形状是正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 并要求正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的4倍.

- (1) 若 $AB=6m$, $PO_1=2m$, 则仓库的容积是多少?
- (2) 若正四棱锥的侧棱长为6m, 则当 PO_1 为多少时, 仓库的容积最大?



18. (16分) (2016•江苏) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知以M为圆心的圆 M : $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 60 = 0$ 及其上一点A(2, 4).

- (1) 设圆N与x轴相切, 与圆M外切, 且圆心N在直线 $x=6$ 上, 求圆N的标准方程;
- (2) 设平行于OA的直线l与圆M相交于B、C两点, 且 $BC=OA$, 求直线l的方程;
- (3) 设点T(t, 0) 满足: 存在圆M上的两点P和Q, 使得 $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TQ}$, 求实数t的取值范围



19. (16分) (2016•江苏) 已知函数 $f(x) = a^x + b^x$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$).

- (1) 设 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$.
 - ①求方程 $f(x)=2$ 的根;
 - ②若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(2x) \geq mf(x) - 6$ 恒成立, 求实数m的最大值;
 - ③若 $0 < a < 1$, $b > 1$, 函数 $g(x) = f(x) - 2$ 有且只有1个零点, 求 ab 的值.

20. (16分) (2016•江苏) 记 $U=\{1, 2, \dots, 100\}$, 对数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 和 U 的子集 T , 若 $T=\emptyset$, 定义 $S_T=0$; 若 $T=\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, 定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\dots+a_{t_k}$. 例如: $T=\{1, 3, 66\}$

时, $S_T=a_1+a_3+a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 是公比为3的等比数列, 且当 $T=\{2, 4\}$ 时, $S_T=30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

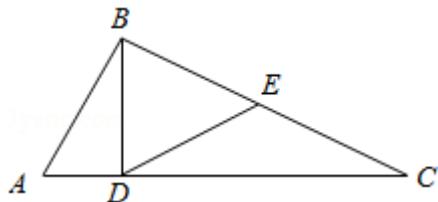
(2) 对任意正整数 k ($1 \leq k \leq 100$), 若 $T \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, 求证: $S_T < a_{k+1}$;

(3) 设 $C \subseteq U$, $D \subseteq U$, $S_C \geq S_D$, 求证: $S_C + S_{C \cap D} \geq 2S_D$.

附加题【选做题】本题包括A、B、C、D四小题, 请选定其中两小题, 并在相应的答题区域内作答, 若多做, 则按作答的前两小题评分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. 【选修4—1几何证明选讲】

21. (10分) (2016•江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $BD \perp AC$, D为垂足, E为BC的中点, 求证: $\angle EDC=\angle ABD$.



B. 【选修4—2: 矩阵与变换】

22. (10分) (2016•江苏) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, 矩阵B的逆矩阵 $B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵AB.

C. 【选修4—4: 坐标系与参数方程】

23. (2016•江苏) 在平面直角坐标系xOy中, 已知直线l的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t为参数), 椭圆C的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 设直线l与椭圆C相交于A, B两点, 求线段AB的长.

24. (2016•江苏) 设 $a>0$, $|x-1|<\frac{a}{3}$, $|y-2|<\frac{a}{3}$, 求证: $|2x+y-4|<a$.

附加题【必做题】

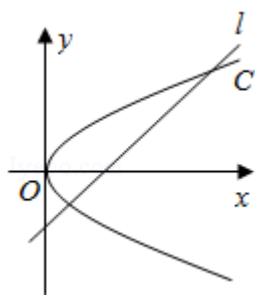
25. (10分) (2016•江苏) 如图, 在平面直角坐标系xOy中, 已知直线l: $x-y-2=0$, 抛物线C: $y^2=2px$ ($p>0$).

(1) 若直线l过抛物线C的焦点, 求抛物线C的方程;

(2) 已知抛物线C上存在关于直线l对称的相异两点P和Q.

①求证: 线段PQ的中点坐标为 $(2-p, -p)$;

②求p的取值范围.



26. (10分) (2016•江苏) (1) 求 $7C_6^3 - 4C_7^4$ 的值;
- (2) 设 $m, n \in N^*$, $n \geq m$, 求证: $(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \dots + nC_{n-1}^{m+1} + (n+1)C_n^{m+1} = (m+1)C_{n+2}^{m+2}$.

2016年江苏省高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（共14小题，每小题5分，满分70分）

1. (5分) (2016•江苏) 已知集合A={-1, 2, 3, 6}, B={x|-2<x<3}, 则A∩B=____
{-1, 2}.

【分析】根据已知中集合A={-1, 2, 3, 6}, B={x|-2<x<3}, 结合集合交集的定义可得答案.

【解答】解: ∵集合A={-1, 2, 3, 6}, B={x|-2<x<3},
∴A∩B={-1, 2},
故答案为: {-1, 2}

【点评】本题考查的知识点是集合的交集及其运算, 难度不大, 属于基础题.

2. (5分) (2016•江苏) 复数z=(1+2i)(3-i), 其中i为虚数单位, 则z的实部是____
5.

【分析】利用复数的运算法则即可得出.

【解答】解: z=(1+2i)(3-i)=5+5i,
则z的实部是5,
故答案为: 5.

【点评】本题考查了复数的运算性质, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

3. (5分) (2016•江苏) 在平面直角坐标系xOy中, 双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3}=1$ 的焦距是____
 $2\sqrt{10}$.

【分析】确定双曲线的几何量, 即可求出双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3}=1$ 的焦距.

【解答】解: 双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3}=1$ 中, $a=\sqrt{7}$, $b=\sqrt{3}$,

$$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10},$$

\therefore 双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3}=1$ 的焦距是 $2\sqrt{10}$.

故答案为: $2\sqrt{10}$.

【点评】本题重点考查了双曲线的简单几何性质, 考查学生的计算能力, 比较基础.

4. (5分) (2016•江苏) 已知一组数据4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5, 则该组数据的方差是____
0.1.

【分析】先求出数据4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5的平均数, 由此能求出该组数据的方差.

【解答】解: ∵数据4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5的平均数为:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} (4.7 + 4.8 + 5.1 + 5.4 + 5.5) = 5.1,$$

∴该组数据的方差:

$$S^2 = \frac{1}{5} [(4.7 - 5.1)^2 + (4.8 - 5.1)^2 + (5.1 - 5.1)^2 + (5.4 - 5.1)^2 + (5.5 - 5.1)^2] = 0.1.$$

故答案为: 0.1.

【点评】本题考查方差的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意方差计算公式的合理运用.

5. (5分) (2016•江苏) 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是 $[-3, 1]$.

【分析】根据被开方数不小于0, 构造不等式, 解得答案.

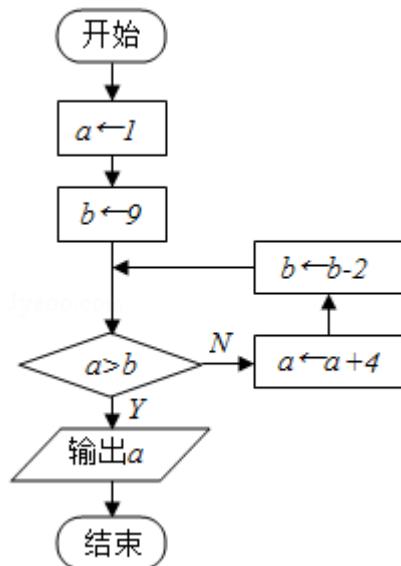
【解答】解: 由 $3 - 2x - x^2 \geq 0$ 得: $x^2 + 2x - 3 \leq 0$,

解得: $x \in [-3, 1]$,

故答案为: $[-3, 1]$

【点评】本题考查的知识点是函数的定义域, 二次不等式的解法, 难度不大, 属于基础题.

6. (5分) (2016•江苏) 如图是一个算法的流程图, 则输出的a的值是 9 .



【分析】根据已知的程序框图可得, 该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量a的值, 模拟程序的运行过程, 可得答案.

【解答】解: 当 $a=1$, $b=9$ 时, 不满足 $a>b$, 故 $a=5$, $b=7$,

当 $a=5$, $b=7$ 时, 不满足 $a>b$, 故 $a=9$, $b=5$

当 $a=9$, $b=5$ 时, 满足 $a>b$,

故输出的a值为9,

故答案为: 9

【点评】本题考查的知识点是程序框图, 当循环次数不多, 或有规律可循时, 可采用模拟程序法进行解答.

7. (5分) (2016•江苏) 将一颗质地均匀的骰子(一种各个面上分别标有1, 2, 3, 4, 5, 6个点的正方体玩具)先后抛掷2次, 则出现向上的点数之和小于10的概率是 $\frac{5}{6}$.

【分析】 出现向上的点数之和小于10的对立事件是出现向上的点数之和不小于10, 由此利用对立事件概率计算公式能求出出现向上的点数之和小于10的概率.

【解答】 解: 将一颗质地均匀的骰子(一种各个面上分别标有1, 2, 3, 4, 5, 6个点的正方体玩具)先后抛掷2次,

基本事件总数为 $n=6\times 6=36$,

出现向上的点数之和小于10的对立事件是出现向上的点数之和不小于10,

出现向上的点数之和不小于10包含的基本事件有:

(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6), 共6个,

∴出现向上的点数之和小于10的概率:

$$p=1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}.$$

故答案为: $\frac{5}{6}$.

【点评】 本题考查概率的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意对立事件概率计算公式的合理运用.

8. (5分) (2016•江苏) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前n项和, 若 $a_1+a_2^2=-3$, $S_5=10$, 则 a_9 的值是 20 .

【分析】 利用等差数列的通项公式和前n项和公式列出方程组, 求出首项和公差, 由此能求出 a_9 的值.

【解答】 解: ∵ $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前n项和, $a_1+a_2^2=-3$, $S_5=10$,

$$\therefore \begin{cases} a_1+(a_1+d)^2=-3 \\ 5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=10 \end{cases},$$

解得 $a_1=-4$, $d=3$,

$\therefore a_9=-4+8\times 3=20$.

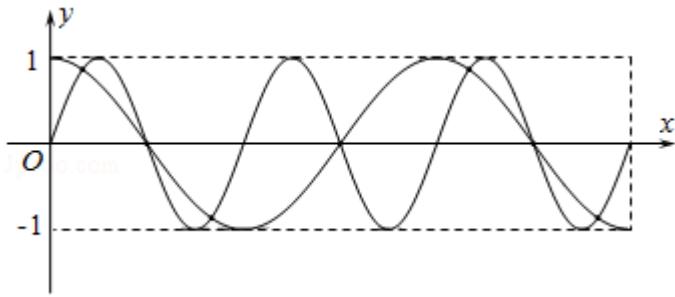
故答案为: 20.

【点评】 本题考查等差数列的第9项的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意等差数列的性质的合理运用.

9. (5分) (2016•江苏) 定义在区间 $[0, 3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是 7 .

【分析】 画出函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\cos x$ 在区间 $[0, 3\pi]$ 上的图象即可得到答案.

【解答】 解: 画出函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\cos x$ 在区间 $[0, 3\pi]$ 上的图象如下:

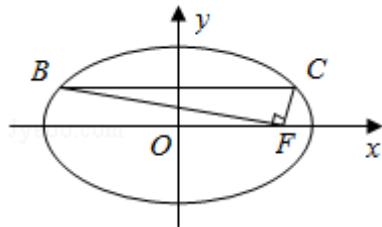


由图可知，共7个交点。

故答案为：7。

【点评】本题考查正弦函数与余弦函数的图象，作出函数 $y=\sin 2x$ 与 $y=\cos x$ 在区间 $[0, 3\pi]$ 上的图象是关键，属于中档题。

10. (5分) (2016•江苏) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点，直线 $y = \frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点，且 $\angle BFC = 90^\circ$ ，则该椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$



【分析】设右焦点 $F(c, 0)$ ，将 $y = \frac{b}{2}$ 代入椭圆方程求得 B, C 的坐标，运用两直线垂直的

条件：斜率之积为 -1 ，结合离心率公式，计算即可得到所求值。

【解答】解：设右焦点 $F(c, 0)$ ，

$$\text{将 } y = \frac{b}{2} \text{ 代入椭圆方程可得 } x = \pm a \sqrt{1 - \frac{b^2}{4b^2}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\text{可得 } B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{b}{2}\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{b}{2}\right),$$

由 $\angle BFC = 90^\circ$ ，可得 $k_{BF} \cdot k_{CF} = -1$ ，

$$\text{即有 } \frac{\frac{b}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a - c} \cdot \frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - c} = -1,$$

化简得 $b^2 = 3a^2 - 4c^2$ ，

由 $b^2 = a^2 - c^2$ ，即有 $3c^2 = 2a^2$ ，

$$\text{由 } e = \frac{c}{a}, \text{ 可得 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{3},$$

可得 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【点评】本题考查椭圆的离心率的求法, 注意运用两直线垂直的条件: 斜率之积为 -1, 考查化简整理的运算能力, 属于中档题.

11. (5分) (2016•江苏) 设 $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为2的函数, 在区间 $[-1, 1]$ 上,

$$f(x) = \begin{cases} x+a, & -1 \leq x < 0 \\ |\frac{2}{5}-x|, & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \text{ 其中 } a \in R, \text{ 若 } f(-\frac{5}{2}) = f(\frac{9}{2}), \text{ 则 } f(5a) \text{ 的值是 } -\frac{2}{5}.$$

【分析】根据已知中函数的周期性, 结合 $f(-\frac{5}{2}) = f(\frac{9}{2})$, 可得 a 值, 进而得到 $f(5a)$ 的值.

【解答】解: $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为2的函数, 在区间 $[-1, 1]$ 上, $f(x) =$

$$\begin{cases} x+a, & -1 \leq x < 0 \\ |\frac{2}{5}-x|, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore f(-\frac{5}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + a,$$

$$f(\frac{9}{2}) = f(\frac{1}{2}) = |\frac{2}{5} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{10},$$

$$\therefore a = \frac{3}{5},$$

$$\therefore f(5a) = f(3) = f(-1) = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5},$$

故答案为: $-\frac{2}{5}$

【点评】本题考查的知识点是分段函数的应用, 函数的周期性, 根据已知求出 a 值, 是解答的关键.

12. (5分) (2016•江苏) 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \\ 3x - y - 3 \leq 0 \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2$ 的取值范围是 _____

$\frac{4}{5}, 13]$.

【分析】作出不等式组对应的平面区域, 利用目标函数的几何意义, 结合两点间的距离公式以及点到直线的距离公式进行求解即可.

【解答】解: 作出不等式组对应的平面区域,

设 $z = x^2 + y^2$, 则 z 的几何意义是区域内的点到原点距离的平方,

由图象知A到原点的距离最大,

点O到直线BC: $2x + y - 2 = 0$ 的距离最小,

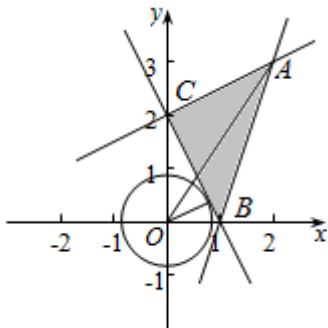
由 $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$, 即 A(2, 3), 此时 $z=2^2+3^2=4+9=13$,

点O到直线BC: $2x+y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

则 $z=d^2=(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=\frac{4}{5}$,

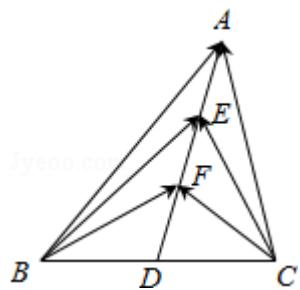
故 z 的取值范围是 $[\frac{4}{5}, 13]$,

故答案为: $[\frac{4}{5}, 13]$.



【点评】本题主要考查线性规划的应用，涉及距离的计算，利用数形结合是解决本题的关键。

13. (5分) (2016·江苏) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D是BC的中点，E，F是AD上的两个三等分点， $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}=4$ ， $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF}=-1$ ，则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是 $-\frac{7}{8}$.



【分析】由已知可得 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DF}$, 结合已知求出 $\overrightarrow{DF}^2=\frac{5}{8}$, $\overrightarrow{BD}^2=\frac{13}{8}$, 可得答案.

【解答】解: ∵D是BC的中点，E，F是AD上的两个三等分点，

$$\therefore \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}, \quad \overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF},$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DF}, \quad \overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DF},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=-1,$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 9\overrightarrow{DF}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = 4,$$

$$\therefore \overrightarrow{DF}^2 = \frac{5}{8}, \quad \overrightarrow{BD}^2 = \frac{13}{8},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DF}, \quad \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DF},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{DF}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = \frac{7}{8},$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{8}$$

【点评】本题考查的知识是平面向量的数量积运算, 平面向量的线性运算, 难度中档.

14. (5分) (2016•江苏) 在锐角三角形ABC中, 若 $\sin A=2\sin B\sin C$, 则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是8.

【分析】结合三角形关系和式子 $\sin A=2\sin B\sin C$ 可推出 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$, 进而得到 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$, 结合函数特性可求得最小值.

【解答】解: 由 $\sin A=\sin(\pi-A)=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$, $\sin A=2\sin B\sin C$, 可得 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$, ①

由三角形ABC为锐角三角形, 则 $\cos B>0$, $\cos C>0$,

在①式两侧同时除以 $\cos B\cos C$ 可得 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$,

$$\text{又} \tan A = -\tan(\pi-A) = -\tan(B+C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \text{ ②},$$

$$\text{则} \tan A \tan B \tan C = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \cdot \tan B \tan C,$$

$$\text{由} \tan B + \tan C = 2\tan B \tan C \text{ 可得} \tan A \tan B \tan C = -\frac{2(\tan B \tan C)^2}{1 - \tan B \tan C},$$

令 $\tan B \tan C = t$, 由A, B, C为锐角可得 $\tan A > 0$, $\tan B > 0$, $\tan C > 0$,

由②式得 $1 - \tan B \tan C < 0$, 解得 $t > 1$,

$$\tan A \tan B \tan C = -\frac{2t^2}{1-t} = -\frac{2}{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}},$$

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = (\frac{1}{t} - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}, \text{ 由} t > 1 \text{ 得, } -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} < 0,$$

因此 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值为8,

当且仅当 $t=2$ 时取到等号, 此时 $\tan B+\tan C=4$, $\tan B\tan C=2$,

解得 $\tan B=2+\sqrt{2}$, $\tan C=2-\sqrt{2}$, $\tan A=4$, (或 $\tan B$, $\tan C$ 互换), 此时A, B, C均为锐角

【点评】本题考查了三角恒等式的变化技巧和函数单调性知识, 有一定灵活性.

二、解答题 (共6小题, 满分90分)

15. (14分) (2016•江苏) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=6$, $\cos B=\frac{4}{5}$, $C=\frac{\pi}{4}$.

(1) 求AB的长;

(2) 求 $\cos(A - \frac{\pi}{6})$ 的值.

【分析】 (1) 利用正弦定理, 即可求AB的长;

(2) 求出 $\cos A$ 、 $\sin A$, 利用两角差的余弦公式求 $\cos(A - \frac{\pi}{6})$ 的值.

【解答】 解: (1) $\because \triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{4}{5}$,

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$\therefore AB = \frac{6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{5}} = 5\sqrt{2};$$

$$(2) \cos A = -\cos(C+B) = \sin B \sin C - \cos B \cos C = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$\because A$ 为三角形的内角,

$$\therefore \sin A = \frac{7\sqrt{2}}{10},$$

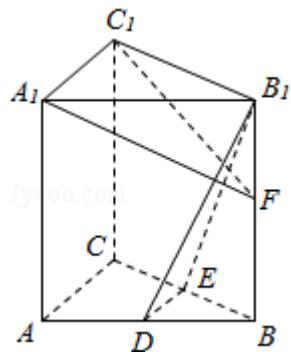
$$\therefore \cos(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A = \frac{7\sqrt{2} - \sqrt{6}}{20}.$$

【点评】 本题考查正弦定理, 考查两角和差的余弦公式, 考查学生的计算能力, 属于基础题.

16. (14分) (2016•江苏) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D, E分别为AB, BC的中点, 点F在侧棱 B_1B 上, 且 $B_1D \perp A_1F$, $A_1C_1 \perp A_1B_1$. 求证:

(1) 直线 $DE \parallel$ 平面 A_1C_1F ;

(2) 平面 $B_1DE \perp$ 平面 A_1C_1F .



【分析】 (1) 通过证明 $DE \parallel AC$, 进而 $DE \parallel A_1C_1$, 据此可得直线 $DE \parallel$ 平面 A_1C_1F ;

(2) 通过证明 $A_1F \perp DE$ 结合题目已知条件 $A_1F \perp B_1D$, 进而可得平面 $B_1DE \perp$ 平面 A_1C_1F .

【解答】 解: (1) $\because D, E$ 分别为AB, BC的中点,

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel AC$,

$\because ABC - A_1B_1C_1$ 为棱柱,

$\therefore AC \parallel A_1C_1$,
 $\therefore DE \parallel A_1C_1$,
 $\because A_1C_1 \subset \text{平面 } A_1C_1F$, 且 $DE \notin \text{平面 } A_1C_1F$,
 $\therefore DE \parallel A_1C_1F$;

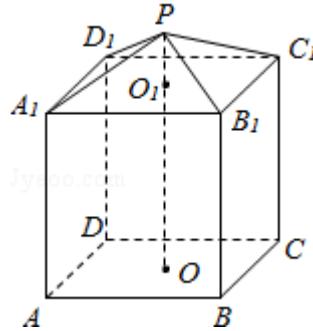
(2) $\because ABC - A_1B_1C_1$ 为直棱柱,
 $\therefore AA_1 \perp \text{平面 } A_1B_1C_1$,
 $\therefore AA_1 \perp A_1C_1$,
又 $\because A_1C_1 \perp A_1B_1$, 且 $AA_1 \cap A_1B_1 = A_1$, $AA_1, A_1B_1 \subset \text{平面 } AA_1B_1B$,
 $\therefore A_1C_1 \perp \text{平面 } AA_1B_1B$,
 $\therefore DE \parallel A_1C_1$,
 $\therefore DE \perp \text{平面 } AA_1B_1B$,
又 $\because A_1F \subset \text{平面 } AA_1B_1B$,
 $\therefore DE \perp A_1F$,
又 $\because A_1F \perp B_1D$, $DE \cap B_1D = D$, 且 $DE, B_1D \subset \text{平面 } B_1DE$,
 $\therefore A_1F \perp \text{平面 } B_1DE$,
又 $\because A_1F \subset \text{平面 } A_1C_1F$,
 $\therefore \text{平面 } B_1DE \perp \text{平面 } A_1C_1F$.

【点评】本题考查直线与平面平行的证明, 以及平面与平面相互垂直的证明, 把握常用方法最关键, 难度不大.

17. (14分) (2016•江苏) 现需要设计一个仓库, 它由上下两部分组成, 上部的形状是正四棱锥 $P - A_1B_1C_1D_1$, 下部的形状是正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 并要求正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的4倍.

(1) 若 $AB=6m$, $PO_1=2m$, 则仓库的容积是多少?

(2) 若正四棱锥的侧棱长为6m, 则当 PO_1 为多少时, 仓库的容积最大?



【分析】 (1) 由正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的4倍, 可得 $PO_1=2m$ 时, $O_1O=8m$, 进而可得仓库的容积;

(2) 设 $PO_1=xm$, 则 $O_1O=4xm$, $A_1O_1=\sqrt{36-x^2}m$, $A_1B_1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-x^2}m$, 代入体积公式, 求出容积的表达式, 利用导数法, 可得最大值.

【解答】 解: (1) $\because PO_1=2m$, 正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的4倍.

$\therefore O_1O=8m$,

$$\therefore \text{仓库的容积 } V = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 2 + 6^2 \times 8 = 312m^3,$$

(2) 若正四棱锥的侧棱长为6m,

设 $PO_1=xm$,

$$\text{则 } O_1O=4xm, A_1O_1=\sqrt{36-x^2}m, A_1B_1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-x^2}m,$$

$$\text{则仓库的容积 } V=\frac{1}{3}\times(\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-x^2})^2\cdot x+(\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-x^2})^2\cdot 4x=-\frac{26}{3}x^3+312x, \quad (0 < x < 6),$$

$$\therefore V'=-26x^2+312, \quad (0 < x < 6),$$

当 $0 < x < 2\sqrt{3}$ 时, $V' > 0$, $V(x)$ 单调递增;

当 $2\sqrt{3} < x < 6$ 时, $V' < 0$, $V(x)$ 单调递减;

故当 $x=2\sqrt{3}$ 时, $V(x)$ 取最大值;

即当 $PO_1=2\sqrt{3}m$ 时, 仓库的容积最大.

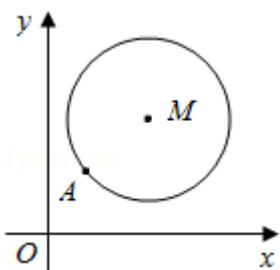
【点评】本题考查的知识点是棱锥和棱柱的体积, 导数法求函数的最大值, 难度中档.

18. (16分) (2016•江苏) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知以 M 为圆心的圆 M : $x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2, 4)$.

(1) 设圆 N 与 x 轴相切, 与圆 M 外切, 且圆心 N 在直线 $x=6$ 上, 求圆 N 的标准方程;

(2) 设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B 、 C 两点, 且 $BC=OA$, 求直线 l 的方程;

(3) 设点 $T(t, 0)$ 满足: 存在圆 M 上的两点 P 和 Q , 使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$, 求实数 t 的取值范围



【分析】 (1) 设 $N(6, n)$, 则圆 N 为: $(x-6)^2+(y-n)^2=n^2$, $n>0$, 从而得到 $|7-n|=|n|+5$, 由此能求出圆 N 的标准方程.

(2) 由题意得 $OA=2\sqrt{5}$, $k_{OA}=2$, 设 $l: y=2x+b$, 则圆心 M 到直线 l 的距离: $d=\frac{|5+b|}{\sqrt{5}}$, 由此能求出直线 l 的方程.

(3) $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$, 即 $|\overrightarrow{TA}|=\sqrt{(t-2)^2+4^2}$, 又 $|\overrightarrow{PQ}|\leq 10$, 得 $t\in[2-2\sqrt{21}, 2+2\sqrt{21}]$,

对于任意 $t\in[2-2\sqrt{21}, 2+2\sqrt{21}]$, 欲使 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$, 只需要作直线 TA 的平行线, 使圆心到直

线的距离为 $\sqrt{25-\frac{|\overrightarrow{TA}|^2}{4}}$, 由此能求出实数 t 的取值范围.

【解答】 解: (1) $\because N$ 在直线 $x=6$ 上, \therefore 设 $N(6, n)$,

\because 圆 N 与 x 轴相切, \therefore 圆 N 为: $(x-6)^2+(y-n)^2=n^2$, $n>0$,

又圆 N 与圆 M 外切, 圆 M : $x^2+y^2-12x-14y+60=0$, 即圆 M : $((x-6)^2+(y-7)^2=25$,

$\therefore |7-n|=|n|+5$, 解得 $n=1$,

\therefore 圆 N 的标准方程为 $(x-6)^2+(y-1)^2=1$.

(2) 由题意得 $OA=2\sqrt{5}$, $k_{OA}=2$, 设 $l: y=2x+b$,

则圆心M到直线 l 的距离: $d=\frac{|12-7+b|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{|5+b|}{\sqrt{5}}$,

则 $|BC|=2\sqrt{5^2-d^2}=2\sqrt{25-\frac{(5+b)^2}{5}}$, $BC=2\sqrt{5}$, 即 $2\sqrt{25-\frac{(5+b)^2}{5}}=2\sqrt{5}$,

解得 $b=5$ 或 $b=-15$,

∴ 直线 l 的方程为: $y=2x+5$ 或 $y=2x-15$.

(3) $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$, 即 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{TQ}-\overrightarrow{TP}$, 即 $|\overrightarrow{TA}|=|\overrightarrow{PQ}|$,

$|\overrightarrow{TA}|=\sqrt{(t-2)^2+4^2}$,

又 $|\overrightarrow{PQ}|\leq 10$, 即 $\sqrt{(t-2)^2+4^2}\leq 10$, 解得 $t\in[2-2\sqrt{21}, 2+2\sqrt{21}]$,

对于任意 $t\in[2-2\sqrt{21}, 2+2\sqrt{21}]$, 欲使 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$,

此时, $|\overrightarrow{TA}|\leq 10$,

只需要作直线 TA 的平行线, 使圆心到直线的距离为 $\sqrt{25-\frac{|TA|^2}{4}}$,

必然与圆交于 P 、 Q 两点, 此时 $|\overrightarrow{TA}|=|\overrightarrow{PQ}|$, 即 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$,

因此实数 t 的取值范围为 $t\in[2-2\sqrt{21}, 2+2\sqrt{21}]$.

【点评】 本题考查圆的标准方程的求法, 考查直线方程的求法, 考查实数的取值范围的求法, 是中档题, 解题时要认真审题, 注意圆的性质的合理运用.

19. (16分) (2016•江苏) 已知函数 $f(x)=a^x+b^x$ ($a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$) .

(1) 设 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$.

①求方程 $f(x)=2$ 的根;

②若对于任意 $x\in R$, 不等式 $f(2x)\geq mf(x)-6$ 恒成立, 求实数 m 的最大值;

(2) 若 $0<a<1$, $b>1$, 函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有1个零点, 求 ab 的值.

【分析】 (1) ①利用方程, 直接求解即可. ②列出不等式, 利用二次函数的性质以及函数的最值, 转化求解即可.

(2) 求出 $g(x)=f(x)-2=a^x+b^x-2$, 求出函数的导数, 构造函数 $h(x)=(\frac{b}{a})^x+\frac{\ln a}{\ln b}$

, 求出 $g(x)$ 的最小值为: $g(x_0)$. 同理①若 $g(x_0)<0$, $g(x)$ 至少有两个零点, 与条件矛盾. ②若 $g(x_0)>0$, 利用函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有1个零点, 推出 $g(x_0)=0$, 然后求解 $ab=1$.

【解答】 解: 函数 $f(x)=a^x+b^x$ ($a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$) .

(1) 设 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$.

①方程 $f(x) = 2$, 即: $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$, 可得 $x=0$.

②不等式 $f(2x) \geq m f(x) - 6$ 恒成立, 即 $2^{2x} + \frac{1}{2^{2x}} \geq m(2^x + \frac{1}{2^x}) - 6$ 恒成立.

令 $t = 2^x + \frac{1}{2^x}$, $t \geq 2$.

不等式化为: $t^2 - mt + 4 \geq 0$ 在 $t \geq 2$ 时, 恒成立. 可得: $\Delta \leq 0$ 或 $\begin{cases} \frac{m}{2} \leq 2 \\ t^2 - 2mt + 4 \geq 0 \end{cases}$

即: $m^2 - 16 \leq 0$ 或 $m \leq 4$,

$\therefore m \in (-\infty, 4]$.

实数 m 的最大值为: 4.

(2) $g(x) = f(x) - 2 = a^x + b^x - 2$,

$$g'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b = a^x \left[\frac{\ln a}{\ln b} + \left(\frac{b}{a} \right)^x \right] \ln b,$$

$0 < a < 1, b > 1$ 可得 $\frac{b}{a} > 1$,

令 $h(x) = \left(\frac{b}{a} \right)^x + \frac{\ln a}{\ln b}$, 则 $h(x)$ 是递增函数, 而, $\ln a < 0, \ln b > 0$,

因此, $x_0 = \log_{\frac{b}{a}} \left(-\frac{\ln a}{\ln b} \right)$ 时, $h(x_0) = 0$,

因此 $x \in (-\infty, x_0)$ 时, $h(x) < 0, a^x \ln b > 0$, 则 $g'(x) < 0$.

$x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0, a^x \ln b > 0$, 则 $g'(x) > 0$,

则 $g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 递减, $(x_0, +\infty)$ 递增, 因此 $g(x)$ 的最小值为: $g(x_0)$.

①若 $g(x_0) < 0$, $x < \log_a 2$ 时, $a^x > \frac{\log_a 2}{a} = 2$, $b^x > 0$, 则 $g(x) > 0$,

因此 $x_1 < \log_a 2$, 且 $x_1 < x_0$ 时, $g(x_1) > 0$, 因此 $g(x)$ 在 (x_1, x_0) 有零点,

则 $g(x)$ 至少有两个零点, 与条件矛盾.

②若 $g(x_0) \geq 0$, 函数 $g(x) = f(x) - 2$ 有且只有1个零点, $g(x)$ 的最小值为 $g(x_0)$,

可得 $g(x_0) = 0$,

由 $g(0) = a^0 + b^0 - 2 = 0$,

因此 $x_0 = 0$, 因此 $\log_{\frac{b}{a}} \left(-\frac{\ln a}{\ln b} \right) = 0, -\frac{\ln a}{\ln b} = 1$, 即 $\ln a + \ln b = 0, \ln(ab) = 0$, 则 $ab = 1$.

可得 $ab = 1$.

【点评】本题考查函数与方程的综合应用, 函数的导数的应用, 基本不等式的应用, 函数恒成立的应用, 考查分析问题解决问题的能力.

20. (16分) (2016•江苏) 记 $U = \{1, 2, \dots, 100\}$, 对数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 和 U 的子集 T , 若 $T = \emptyset$, 定义 $S_T = 0$; 若 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, 定义 $S_T = a_{t_1} + a_{t_2} + \dots + a_{t_k}$. 例如: $T = \{1, 3, 66\}$

时, $S_T = a_1 + a_3 + a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 是公比为3的等比数列, 且当 $T = \{2, 4\}$ 时, $S_T = 30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 对任意正整数 k ($1 \leq k \leq 100$) , 若 $T \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, 求证: $S_T < a_{k+1}$;

(3) 设 $C \subseteq U$, $D \subseteq U$, $S_C \geq S_D$, 求证: $S_C + S_{C \cap D} \geq 2S_D$.

【分析】 (1) 根据题意, 由 S_T 的定义, 分析可得 $S_T = a_2 + a_4 = a_2 + 9a_2 = 30$, 计算可得 $a_2 = 3$, 进而可得 a_1 的值, 由等比数列通项公式即可得答案;

(2) 根据题意, 由 S_T 的定义, 分析可得 $S_T \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1}$, 由等比数列的前n项和公式计算可得证明;

(3) 设 $A = C_C (C \cap D)$, $B = C_D (C \cap D)$, 则 $A \cap B = \emptyset$, 进而分析可以将原命题转化为证明 $S_C \geq 2S_B$, 分2种情况进行讨论: ①、若 $B = \emptyset$, ②、若 $B \neq \emptyset$, 可以证明得到 $S_A \geq 2S_B$, 即可得证明.

【解答】 解: (1) 当 $T = \{2, 4\}$ 时, $S_T = a_2 + a_4 = a_2 + 9a_2 = 30$,

因此 $a_2 = 3$, 从而 $a_1 = \frac{a_2}{3} = 1$,

故 $a_n = 3^{n-1}$,

$$(2) S_T \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2} < 3^k = a_{k+1},$$

(3) 设 $A = C_C (C \cap D)$, $B = C_D (C \cap D)$, 则 $A \cap B = \emptyset$,

分析可得 $S_C = S_A + S_{C \cap D}$, $S_D = S_B + S_{C \cap D}$, 则 $S_C + S_{C \cap D} - 2S_D = S_A - 2S_B$,

因此原命题的等价于证明 $S_C \geq 2S_B$,

由条件 $S_C \geq S_D$, 可得 $S_A \geq S_B$,

①、若 $B = \emptyset$, 则 $S_B = 0$, 故 $S_A \geq 2S_B$,

②、若 $B \neq \emptyset$, 由 $S_A \geq S_B$ 可得 $A \neq \emptyset$, 设A中最大元素为l, B中最大元素为m,

若 $m \geq l+1$, 则其与 $S_A < a_{i+1} \leq a_m \leq S_B$ 相矛盾,

因为 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $l \neq m$, 则 $l \geq m+1$,

$$S_B \leq a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{m-1} = \frac{3^m - 1}{2} \leq \frac{a_{m+1}}{2} = \frac{S_A}{2}, \text{ 即 } S_A \geq 2S_B,$$

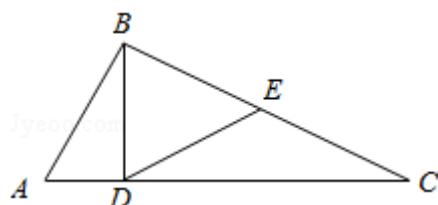
综上所述, $S_A \geq 2S_B$,

故 $S_C + S_{C \cap D} \geq 2S_D$.

【点评】 本题考查数列的应用, 涉及新定义的内容, 解题的关键是正确理解题目中对于新定义的描述.

附加题【选做题】 本题包括A、B、C、D四小题, 请选定其中两小题, 并在相应的答题区域内作答, 若多做, 则按作答的前两小题评分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.A. 【选修4-1几何证明选讲】

21. (10分) (2016•江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BD \perp AC$, D为垂足, E为BC的中点, 求证: $\angle EDC = \angle ABD$.



【分析】依题意，知 $\angle BDC=90^\circ$, $\angle EDC=\angle C$, 利用 $\angle C+\angle DBC=\angle ABD+\angle DBC=90^\circ$, 可得 $\angle ABD=\angle C$, 从而可证得结论.

【解答】解：由 $BD \perp AC$ 可得 $\angle BDC=90^\circ$,

因为E为BC的中点，所以 $DE=CE=\frac{1}{2}BC$,

则： $\angle EDC=\angle C$,

由 $\angle BDC=90^\circ$, 可得 $\angle C+\angle DBC=90^\circ$,

由 $\angle ABC=90^\circ$, 可得 $\angle ABD+\angle DBC=90^\circ$,

因此 $\angle ABD=\angle C$, 而 $\angle EDC=\angle C$,

所以， $\angle EDC=\angle ABD$.

【点评】本题考查三角形的性质应用，利用 $\angle C+\angle DBC=\angle ABD+\angle DBC=90^\circ$, 证得 $\angle ABD=\angle C$ 是关键，属于中档题.

B. 【选修4—2：矩阵与变换】

22. (10分) (2016•江苏) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, 矩阵B的逆矩阵 $B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵AB.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

【分析】依题意，利用矩阵变换求得 $B=(B^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 再利用矩阵乘法的性

质可求得答案.

$$\text{【解答】解: } \because B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\therefore B=(B^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ 又 } A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

【点评】本题考查逆变换与逆矩阵，考查矩阵乘法的性质，属于中档题.

C. 【选修4—4：坐标系与参数方程】

23. (2016·江苏) 在平面直角坐标系xOy中, 已知直线l的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

数), 椭圆C的参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}), \text{ 设直线l与椭圆C相交于A, B两点,}$$

求线段AB的长.

【分析】 分别化直线与椭圆的参数方程为普通方程, 然后联立方程组, 求出直线与椭圆的交点坐标, 代入两点间的距离公式求得答案.

【解答】 解: 由

$$\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t & ① \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t & ② \end{cases}, \text{ 由 } ② \text{ 得 } t=\frac{2}{\sqrt{3}}y,$$

代入①并整理得, $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$.

由

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}, \text{ 得} \begin{cases} x=\cos\theta \\ \frac{y}{2}=\sin\theta \end{cases},$$

两式平方相加得 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

联立

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 解得} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或} \begin{cases} x=-\frac{1}{7} \\ y=-\frac{8\sqrt{3}}{7} \end{cases}.$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{(1 + \frac{1}{7})^2 + (0 + \frac{8\sqrt{3}}{7})^2} = \frac{16}{7}.$$

【点评】 本题考查直线与椭圆的参数方程, 考查了参数方程化普通方程, 考查直线与椭圆位置关系的应用, 是基础题.

24. (2016·江苏) 设 $a > 0$, $|x - 1| < \frac{a}{3}$, $|y - 2| < \frac{a}{3}$, 求证: $|2x+y - 4| < a$.

【分析】 运用绝对值不等式的性质: $|a+b| \leq |a|+|b|$, 结合不等式的基本性质, 即可得证.

【解答】 证明: 由 $a > 0$, $|x - 1| < \frac{a}{3}$, $|y - 2| < \frac{a}{3}$,

$$\text{可得} |2x+y - 4| = |2(x - 1) + (y - 2)|$$

$$\leq 2|x - 1| + |y - 2| < \frac{2a}{3} + \frac{a}{3} = a,$$

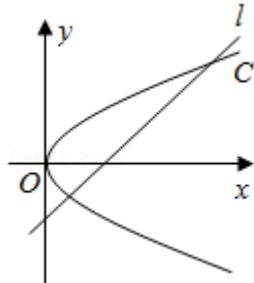
则 $|2x+y - 4| < a$ 成立.

【点评】 本题考查绝对值不等式的证明, 注意运用绝对值不等式的性质, 以及不等式的简单性质, 考查运算能力, 属于基础题.

附加题【必做题】

25. (10分) (2016·江苏) 如图, 在平面直角坐标系xOy中, 已知直线l: $x - y - 2 = 0$, 抛物线C: $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

- (1) 若直线l过抛物线C的焦点, 求抛物线C的方程;
(2) 已知抛物线C上存在关于直线l对称的相异两点P和Q.
①求证: 线段PQ的中点坐标为 $(2 - p, -p)$;
②求p的取值范围.



【分析】 (1) 求出抛物线的焦点坐标, 然后求解抛物线方程.

(2) : ①设点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 通过抛物线方程, 求解 k_{PQ} , 通过P, Q关于直

线l对称, 点的 $k_{PQ} = -1$, 推出 $\frac{y_1 + y_2}{2} = -p$, PQ的中点在直线l上, 推出 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2 - p$, 即

可证明线段PQ的中点坐标为 $(2 - p, -p)$;

②利用线段PQ中点坐标 $(2 - p, -p)$. 推出 $\begin{cases} y_1 + y_2 = -2p \\ y_1 y_2 = 4p^2 - 4p \end{cases}$, 得到关于 $y^2 + 2py + 4p^2 - 4p = 0$, 有两个不相等的实数根, 列出不等式即可求出p的范围.

【解答】 解: (1) $\because l: x - y - 2 = 0$, $\therefore l$ 与x轴的交点坐标 $(2, 0)$, 即抛物线的焦点坐标 $(2, 0)$.

$$\therefore \frac{p}{2} = 2,$$

\therefore 抛物线C: $y^2 = 8x$.

(2) 证明: ①设点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则: $\begin{cases} y_1^2 = 2px_1, \\ y_2^2 = 2px_2 \end{cases}$

$$\text{即: } \begin{cases} \frac{y_1^2}{2p} = x_1 \\ \frac{y_2^2}{2p} = x_2 \end{cases}, k_{PQ} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1 + y_2},$$

又 $\because P, Q$ 关于直线l对称, $\therefore k_{PQ} = -1$, 即 $y_1 + y_2 = -2p$, $\therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = -p$,

又PQ的中点在直线l上, $\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} + 2 = 2 - p$,

\therefore 线段PQ的中点坐标为 $(2 - p, -p)$;

②因为Q中点坐标 $(2 - p, -p)$.

$$\begin{aligned} & \because \begin{cases} y_1 + y_2 = -2p \\ x_1 + x_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p} = 4 - 2p \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} y_1 + y_2 = -2p \\ y_1^2 + y_2^2 = 8p - 4p^2 \end{cases} \\ & \therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = -2p \\ y_1 y_2 = 4p^2 - 4p \end{cases}, \text{ 即关于 } y^2 + 2py + 4p^2 - 4p = 0, \text{ 有两个不相等的实数根,} \\ & \therefore \Delta > 0, \quad (2p)^2 - 4(4p^2 - 4p) > 0, \\ & \therefore p \in (0, \frac{4}{3}). \end{aligned}$$

【点评】本题考查抛物线方程的求法，直线与抛物线的位置关系的应用，考查转化思想以及计算能力。

26. (10分) (2016·江苏) (1) 求 $7C_6^3 - 4C_7^4$ 的值；

$$(2) \text{ 设 } m, n \in N^*, n \geq m, \text{ 求证: } (m+1) C_{\frac{m}{m}}^{m+1} (m+2) C_{\frac{m}{m+1}}^{m+2} + (m+3) C_{\frac{m}{m+2}}^{m+3} + \dots + n C_{\frac{m}{m+n-1}}^{m+n-1} + (n+1) C_{\frac{m}{n}}^{m+n} = (m+1) C_{\frac{m}{n+2}}^{m+n+2}.$$

【分析】 (1) 由已知直接利用组合公式能求出 $7C_6^3 - 4C_7^4$ 的值。

(2) 对任意 $m \in N^*$, 当 $n=m$ 时, 验证等式成立; 再假设 $n=k$ ($k \geq m$) 时命题成立, 推导出当 $n=k+1$ 时, 命题也成立, 由此利用数学归纳法能证明 $(m+1) C_{\frac{m}{m}}^{m+1} (m+2) C_{\frac{m}{m+1}}^{m+2} + (m+3) C_{\frac{m}{m+2}}^{m+3} + \dots + n C_{\frac{m}{m+n-1}}^{m+n-1} + (n+1) C_{\frac{m}{n}}^{m+n} = (m+1) C_{\frac{m}{n+2}}^{m+n+2}$

【解答】 解: (1) $7C_6^3 - 4C_7^4$

$$= 7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} - 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 7 \times 20 - 4 \times 35 = 0.$$

证明: (2) 对任意 $m \in N^*$,

①当 $n=m$ 时, 左边 $= (m+1) C_{\frac{m}{m}}^{m+1}$,

右边 $= (m+1) C_{\frac{m}{m+2}}^{m+2} = m+1$, 等式成立。

②假设 $n=k$ ($k \geq m$) 时命题成立,

即 $(m+1) C_{\frac{m}{m}}^{m+1} (m+2) C_{\frac{m}{m+1}}^{m+2} + (m+3) C_{\frac{m}{m+2}}^{m+3} + \dots + k C_{\frac{m}{m+k-1}}^{m+k-1} + (k+1) C_{\frac{m}{k}}^{m+k} = (m+1) C_{\frac{m}{k+2}}^{m+k+2}$,

当 $n=k+1$ 时,

左边 $= (m+1) C_{\frac{m}{m}}^{m+1} (m+2) C_{\frac{m}{m+1}}^{m+2} + (m+3) C_{\frac{m}{m+2}}^{m+3} + \dots + k C_{\frac{m}{m+k-1}}^{m+k-1} + (k+1) C_{\frac{m}{k}}^{m+k} + (k+2) C_{\frac{m}{k+1}}^{m+k+2}$

$= (m+1) C_{\frac{m}{k+2}}^{m+k+2} + (k+2) C_{\frac{m}{k+1}}^{m+k+2}$,

$$\text{右边} = (m+1) C_{k+3}^{m+2}$$

$$\begin{aligned}
 & \because (m+1) C_{k+3}^{m+2} - (m+1) C_{k+2}^{m+2} \\
 &= (m+1) \left[\frac{(k+3)!}{(m+2)! (k-m+1)!} - \frac{(k+2)!}{(m+2)! (k-m)!} \right] \\
 &= (m+1) \times \frac{(k+2)!}{(m+2)! (k-m+1)!} [k+3 - (k-m+1)] \\
 &= (k+2) \frac{(k+1)!}{m! (k-m+1)!} \\
 &= (k+2) C_{k+1}^m,
 \end{aligned}$$

$$\therefore (m+1) C_{k+2}^{m+2} + (k+2) C_{k+1}^m = (m+1) C_{k+3}^{m+2},$$

\therefore 左边 = 右边，

$\therefore n=k+1$ 时，命题也成立，

$$\therefore m, n \in N^*, n \geq m, (m+1) C_{\frac{m}{n}}^{m+(m+2)} C_{\frac{m}{m+1}}^{m+(m+3)} C_{\frac{m}{m+2}}^{m+...+n} C_{\frac{m}{n-1}}^{m+(n+1)} C_{\frac{m}{n+2}}$$

$$\frac{m}{n} = (m+1) C_{\frac{m}{n+2}}^{m+2}.$$

【点评】本题考查组合数的计算与证明，是中档题，解题时要认真审题，注意组合数公式和数学归纳法的合理运用。