绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.

如果事件A，B相互独立，那么$P(AB)=P(A)P(B)$.

棱柱的体积公式$V=Sh$，其中S表示棱柱的底面面积，h表示棱柱的高.

棱锥的体积公式$V=\frac{1}{3}Sh$，其中S表示棱锥的底面面积，h表示棱锥的高.

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1)设全集为**R**，集合$A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|x\geq 1\}$，则$A\bigcap(C_R B)=$

(A) $\{x|0<x\leq 1\}$　　(B) $\{x|0<x<1\}$

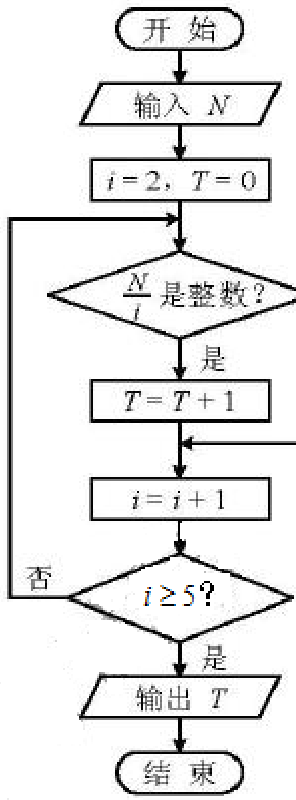
(C) $\{x|1\leq x<2\}$　　(D) $\{x|0<x<2\}$

(2)设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\leq 5,\\ 2x-y\leq 4,\\ -x+y\leq 1,\\ y\geq 0,\end{cases}$则目标函数$z=3x+5y$的最大值为

(A) 6　(B) 19　(C) 21　(D) 45

(3)阅读如图的程序框图，运行相应的程序，若输入N的值为20，则输出T的值为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4



(4)设$x \in \mathbf{R}$，则“$|x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$”是“$x^3<1$”的

(A)充分而不必要条件

(B)必要而不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

(5)已知$a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为

(A) $a>b>c$　　(B) $b>a>c$　　(C) $c>b>a$　　(D) $c>a>b$

(6)将函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{5})$的图象向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，所得图象对应的函数

(A)在区间$[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$上单调递增　　(B)在区间$[\frac{3\pi}{4},\pi]$上单调递减

(C)在区间$[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$上单调递增　　　　(D)在区间$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$上单调递减

(7)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的离心率为2，过右焦点且垂直于$x$轴的直线与双曲线交于$A$，$B$两点. 设$A$，$B$到双曲线同一条渐近线的距离分别为$d_1$和$d_2$，且$d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为

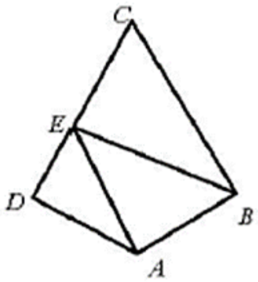
(A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　　　(B) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

(C) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　　　　(D) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

(8)如图，在平面四边形$ABCD$中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120°$，$AB=AD=1$.

若点E为边CD上的动点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$的最小值为

(A) $\frac{21}{16}$　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{25}{16}$　　(D) 3



第（8）题图

第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共12小题，共110分。

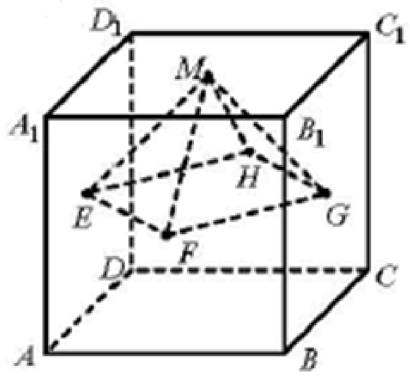
二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

(9) i是虚数单位，复数$\frac{6+7i}{1+2i}=$______.

(10) 在$(x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^5$的展开式中，$x^2$的系数为______.

(11)

已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点E，F，G，H，M(如图)，则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为_____.



第（11）题图

(12)已知圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的圆心为C，直线 $\begin{cases} x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)与该圆相交于A，B两点，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

(13)已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a-3b+6=0$，则 $2^a+\dfrac{1}{8^b}$ 的最小值为______.

(14)已知 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+a, & x\le 0, \\ -x^2+2ax-2a, & x>0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有2个互异的实数解，则 a 的取值范围是______.

三.解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）**（本小题满分13分）**

在 $\triangle ABC$ 中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c.已知 $b\sin A=a\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$.

（I）求角B的大小;

（II）设a=2，c=3，求b和 $\sin(2A-B)$ 的值.

(16)**(本小题满分13分)**

已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为24，16，16.

现采用分层抽样的方法从中抽取7人，进行睡眠时间的调查.

（I）应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人？

（II）若抽出的7人中有4人睡眠不足，3人睡眠充足，现从这7人中随机抽取3人做进一步的身体检查.

（i）用X表示抽取的3人中睡眠不足的员工人数，求随机变量X的分布列与数学期望；

（ii）设A为事件“抽取的3人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工”，求事件A发生的概率.

(17)(本小题满分13分)

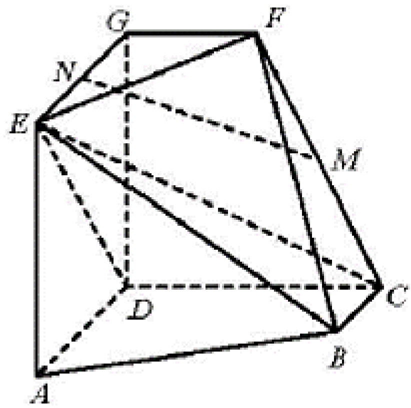
如图，$AD/\!/BC$ 且$AD=2BC$，$AD\perp CD$，$EG/\!/AD$ 且$EG=AD$，$CD/\!/FG$ 且$CD=2FG$，

$DG\perp$平面$ABCD$，$DA=DC=DG=2$.

（I）若M为CF的中点，N为EG的中点，求证：$MN/\!/$平面CDE；

（II）求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值；

（III）若点P在线段DG上，且直线BP与平面$ADGE$所成的角为60°，求线段DP的长.



(18)**(本小题满分13分)**

设$\{a_n\}$是等比数列，公比大于0，其前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是等差数列. 已知$a_1=1$，

$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$.

（I）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）设数列$\{S_n\}$的前n项和为$T_n(n\in\mathbf{N}^*)$，

（i）求T_n；

（ii）证明$\sum_{k=1}^{n}\frac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\frac{2^{n+2}}{n+2}-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(19)**(本小题满分14分)**

设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)的左焦点为F，上顶点为B.

已知椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，点A的坐标为$(b,0)$，且$|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$.

（I）求椭圆的方程；

（II）设直线l：$y=kx(k>0)$与椭圆在第一象限的交点为P，且l与直线AB交于点Q.

若$\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$（$O$为原点），求$k$的值.

(20)**(本小题满分14分)**

已知函数$f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x$，其中$a>1$.

（I）求函数$h(x)=f(x)-x\ln a$的单调区间；

（II）若曲线$y=f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处的切线与曲线$y=g(x)$在点$(x_2,g(x_2))$处的切线平行，证明$x_1+g(x_2)=-\frac{2\ln\ln a}{\ln a}$；

（III）证明当$a\geq e^{\frac{1}{e}}$时，存在直线l，使l是曲线$y=f(x)$的切线，也是曲线$y=g(x)$的切线.

参考答案：

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

（1）B	（2）C	（3）B	（4）A
（5）D	（6）A	（7）C	（8）A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

（9）4–i　（10）$\dfrac{5}{2}$　（11）$\dfrac{1}{12}$

（12）$\dfrac{1}{2}$　（13）$\dfrac{1}{4}$　（14）$(4,8)$

三、解答题

（15）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力．满分13分．

（I）解：在△ABC中，由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$，又由$b\sin A=a\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，得$a\sin B=a\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，即$\sin B=\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，可得$\tan B=\sqrt{3}$．又因为$B\in(0,\pi)$，可得$B=\dfrac{\pi}{3}$．

（II）解：在△ABC中，由余弦定理及a=2，c=3，$B=\dfrac{\pi}{3}$，有$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故$b=\sqrt{7}$．

由$b\sin A=a\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，可得$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为$a<c$，故$\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$．因此$\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{7}$.

所以，$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

（16）本小题主要考查随机抽样、离散型随机变量的分布列与数学期望、互斥事件的概率加法公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分13分．学.科网

（I）解：由已知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为3:2:2，由于采用分层抽样的方法从中抽取7人，因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取3人，2人，2人．

（II）（i）解：随机变量X的所有可能取值为0，1，2，3．

P（X=k）$=\dfrac{C_4^k\cdot C_3^{3-k}}{C_7^3}$（$k$=0，1，2，3）．

所以，随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

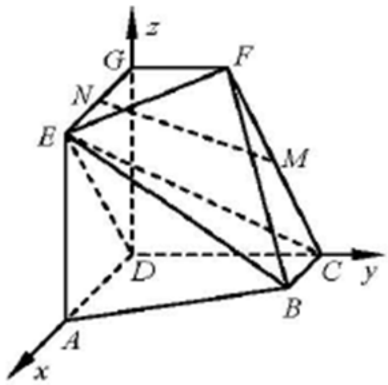
随机变量X的数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$.

（ii）解：设事件B为“抽取的3人中，睡眠充足的员工有1人，睡眠不足的员工有2人”；事件C为“抽取的3人中，睡眠充足的员工有2人，睡眠不足的员工有1人”，则$A=B\cup C$，且B与C互斥，由（i）知，$P(B)=P(X=2)$，$P(C)=P(X=1)$，故$P(A)=P(B\cup C)=P(X=2)+P(X=1)=\frac{6}{7}$.

所以，事件A发生的概率为$\frac{6}{7}$.

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分13分．

依题意，可以建立以D为原点，分别以$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DG}$的方向为x轴，y轴，z轴的正方向的空间直角坐标系（如图），可得D（0，0，0），A（2，0，0），B（1，2，0），C（0，2，0），E（2，0，2），F（0，1，2），G（0，0，2），M（0，$\frac{3}{2}$，1），N（1，0，2）．



（I）证明：依题意$\overrightarrow{DC}=$（0，2，0），$\overrightarrow{DE}=$（2，0，2）．设$\boldsymbol{n}_0=(x，y，z)$为平面CDE的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2y=0,\\ 2x+2z=0,\end{cases}$ 不妨令z=–1，可得$\boldsymbol{n}_0$=（1，0，–1）．又$\overrightarrow{MN}=$（1，$-\frac{3}{2}$，1），可得

$\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}_0=0$，又因为直线$MN\not\subset$平面$CDE$，所以$MN\parallel$平面$CDE$.

（II）解：依题意，可得$\overrightarrow{BC}=$（–1，0，0），$\overrightarrow{BE}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{CF}=$（0，–1，2）．

设$\boldsymbol{n}$=（x，y，z）为平面BCE的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x=0,\\ x-2y+2z=0,\end{cases}$

不妨令z=1，可得$\boldsymbol{n}$=（0，1，1）．

设$\boldsymbol{m}$=（x，y，z）为平面BCF的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x=0,\\ -y+2z=0,\end{cases}$

不妨令z=1，可得$\boldsymbol{m}$=（0，2，1）.

因此有cos<$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$>=$\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，于是sin<$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$>=$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以，二面角E–BC–F的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

（III）解：设线段DP的长为h（h∈［0，2］），则点P的坐标为（0，0，h），可得$\overrightarrow{BP}=(-1,-2,h)$

.

易知，$\overrightarrow{DC}$=（0，2，0）为平面$ADGE$的一个法向量，故

$$\left|\cos<\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DC}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\frac{2}{\sqrt{h^2+5}},$$

由题意，可得$\dfrac{2}{\sqrt{h^2+5}}$=sin60°=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得h=$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$∈［0，2］.

所以线段DP的长为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（18）本小题主要考查等差数列的通项公式，等比数列的通项公式及前n项和公式等基础知识.考查等差数列求和的基本方法和运算求解能力.满分13分.

（I）解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.由$a_1=1,a_3=a_2+2,$可得$q^2-q-2=0$.

因为$q>0$，可得$q=2$，故$a_n=2^{n-1}$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，由$a_4=b_3+b_5$，可得$b_1+3d=4$.由$a_5=b_4+2b_6$，

可得$3b_1+13d=16,$ 从而$b_1=1,d=1,$ 故$b_n=n.$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n.$

（II）（i）由（I），有$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，故

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2.$$

（ii）证明：因为

$$\frac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\frac{(2^{k+1}-k-2+k+2)k}{(k+1)(k+2)}=\frac{k\cdot 2^{k+1}}{(k+1)(k+2)}=\frac{2^{k+2}}{k+2}-\frac{2^{k+1}}{k+1},$$

所以，$\sum_{k=1}^{n}\frac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2})+(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3})+\cdots+(\frac{2^{n+2}}{n+2}-\frac{2^{n+1}}{n+1})=\frac{2^{n+2}}{n+2}-2$.

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分14分．

（I）解：设椭圆的焦距为$2c$，由已知知$\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}$，又由$a^2=b^2+c^2$，可得$2a=3b$．由已知可得，$|FB|=a$，$|AB|=\sqrt{2}b$，由$|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$，可得$ab=6$，从而$a=3$，$b=2$．

所以，椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$．

（II）解：设点P的坐标为（x_1，y_1），点Q的坐标为（x_2，y_2）．由已知有$y_1>y_2>0$，故$|PQ|\sin\angle AOQ=y_1-y_2$．又因为$|AQ|=\frac{y_2}{\sin\angle OAB}$，而$\angle OAB=\frac{\pi}{4}$，故$|AQ|=\sqrt{2}y_2$．由$\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$，可得$5y_1=9y_2$.

由方程组$\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$消去$x$，可得$y_1=\frac{6k}{\sqrt{9k^2+4}}$．易知直线$AB$的方程为$x+y-2=0$，由方程组

$\begin{cases}y=kx,\\ x+y-2=0,\end{cases}$

消去x，可得$y_2=\frac{2k}{k+1}$．由$5y_1=9y_2$，可得5（$k+1$）$=3\sqrt{9k^2+4}$，两边平方，整理得$56k^2-50k+11=0$，解得$k=\frac{1}{2}$，或$k=\frac{11}{28}$．

所以，k的值为$\frac{1}{2}$或$\frac{11}{28}$.

（20）本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究指数函数与对数函数的性质等基础知识和方法.考查函数与方程思想、化归思想.考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力.满分14分.

（I）解：由已知，$h(x)=a^x-x\ln a$，有$h'(x)=a^x\ln a-\ln a$.

令$h'(x)=0$，解得$x=0$.

由$a>1$，可知当x变化时，$h'(x)$，$h(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$

$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $h(x)$ 的单调递减区间 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

（II）**证明：**由 $f'(x)=a^x\ln a$，可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线斜率为 $a^{x_1}\ln a$.

由 $g'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$，可得曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{x_2\ln a}$.

因为这两条切线平行，故有 $a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a}$，即 $x_2a^{x_1}(\ln a)^2=1$.

两边取以a为底的对数，得 $\log_a x_2+x_1+2\log_2\ln a=0$，所以 $x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$.

（III）**证明：**曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_1,a^{x_1}) 处的切线l_1： $y-a^{x_1}=a^{x_1}\ln a\cdot(x-x_1)$.

曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,\log_a x_2)$ 处的切线l_2： $y-\log_a x_2=\dfrac{1}{x_2\ln a}\cdot(x-x_2)$.

要证明当 $a\ge \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，存在直线l，使l是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，只需证明当 $a\ge \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$， $x_2\in(0,+\infty)$，使得l_1和l_2重合.学*科网

即只需证明当 $a\ge \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，方程组 $\begin{cases} a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a} & ① \\ a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a=\log_a x_2-\dfrac{1}{\ln a} & ② \end{cases}$ 有解，

由①得 $x_2=\dfrac{1}{a^{x_1}(\ln a)^2}$，代入②，得 $a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a+x_1+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=0$. ③

因此，只需证明当 $a\ge \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，关于x_1的方程③有实数解.

设函数 $u(x)=a^x-xa^x\ln a+x+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$，即要证明当 $a\ge \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，函数 $y=u(x)$ 存在零点.

$u'(x)=1-(\ln a)^2xa^x$，可知 $x\in(-\infty,0)$ 时， $u'(x)>0$； $x\in(0,+\infty)$ 时， $u'(x)$ 单调递减，又

$u'(0)=1>0$， $u'\left[\dfrac{1}{(\ln a)^2}\right]=1-a^{\frac{1}{(\ln a)^2}}<0$，故存在唯一的$x_0$，且$x_0>0$，使得 $u'(x_0)=0$，即

$1-(\ln a)^2x_0a^{x_0}=0$.

由此可得$u(x)$在$(-\infty,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减. $u(x)$在$x=x_0$处取得极大值$u(x_0)$.

因为$a\ge e^{\frac{1}{e}}$，故$\ln(\ln a)\ge -1$，

所以$u(x_0)=a^{x_0}-x_0a^{x_0}\ln a+x_0+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=\dfrac{1}{x_0(\ln a)^2}+x_0+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}\ge\dfrac{2+2\ln\ln a}{\ln a}\ge 0$.

下面证明存在实数t，使得$u(t)<0$.

由（I）可得$a^x\ge 1+x\ln a$，

当$x>\dfrac{1}{\ln a}$时，

有$u(x)\le(1+x\ln a)(1-x\ln a)+x+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=-(\ln a)^2x^2+x+1+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$，

所以存在实数t，使得$u(t)<0$

因此，当$a\ge e^{\frac{1}{e}}$时，存在$x_1\in(-\infty,+\infty)$，使得$u(x_1)=0$.

所以，当$a\ge e^{\frac{1}{e}}$时，存在直线l，使l是曲线$y=f(x)$的切线，也是曲线$y=g(x)$的切线.

选择填空解析

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集为R，集合$A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|x\ge 1\}$，则$A\cap(C_RB)=$

A. $\{x|0<x\le 1\}$　B. $\{x|0<x<1\}$　C. $\{x|1\le x<2\}$　D. $\{x|0<x<2\}$

【答案】B

【解析】分析：由题意首先求得C_RB，然后进行交集运算即可求得最终结果.

详解：由题意可得：$C_RB=\{x|x<1\}$，

结合交集的定义可得：$A\cap(C_RB)=\{0<x<1\}$.

本题选择B选项.

点睛：本题主要考查交集的运算法则，补集的运算法则等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

2. 设变量x，y满足约束条件$\begin{cases} x+y\le 5, \\ 2x-y\le 4, \\ -x+y\le 1, \\ y\ge 0, \end{cases}$ 则目标函数$z=3x+5y$的最大值为

A. 6　B. 19　C. 21　D. 45

【答案】C

【解析】分析：首先画出可行域，然后结合目标目标函数的几何意义确定函数取得最大值的点，最后求解最大值即可.

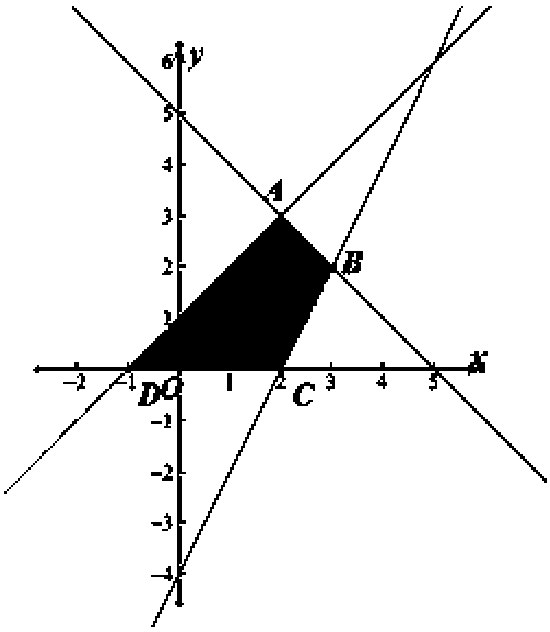
详解：绘制不等式组表示的平面区域如图所示，

结合目标函数的几何意义可知目标函数在点A处取得最大值，

联立直线方程：$\begin{cases} x+y=5 \\ -x+y=1 \end{cases}$，可得点$A$的坐标为：$A(2,3)$，

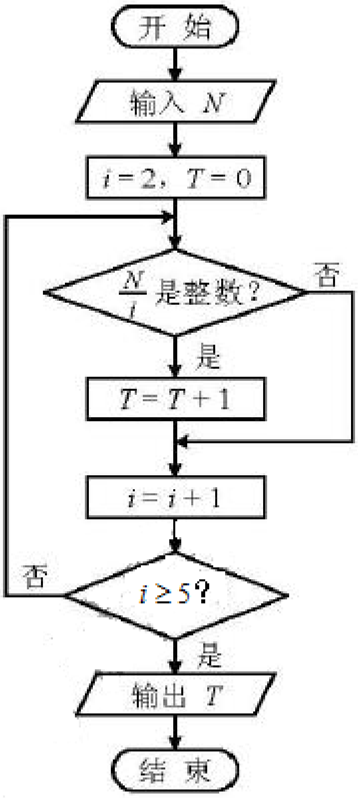
据此可知目标函数的最大值为：$z_{max}=3x+5y=3\times 2+5\times 3=21$.

本题选择C选项.



点睛：求线性目标函数$z=ax+by(ab\neq 0)$的最值，当$b>0$时，直线过可行域且在y轴上截距最大时，z值最大，在y轴截距最小时，z值最小；当$b<0$时，直线过可行域且在y轴上截距最大时，z值最小，在y轴上截距最小时，z值最大.

3. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，若输入N的值为20，则输出T的值为



A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

【答案】B

【解析】分析：由题意结合流程图运行程序即可求得输出的数值.

详解：结合流程图运行程序如下：

首先初始化数据：$N=20, i=2, T=0$，

$\frac{N}{i}=\frac{20}{2}=10$，结果为整数，执行$T=T+1=1$，$i=i+1=3$，此时不满足$i\geq 5$；

$\frac{N}{i}=\frac{20}{3}$，结果不为整数，执行$i=i+1=4$，此时不满足$i\geq 5$；

$\frac{N}{i}=\frac{20}{4}=5$，结果为整数，执行$T=T+1=2$，$i=i+1=5$，此时满足$i\geq 5$；

跳出循环，输出$T=2$.

本题选择B选项.

点睛：识别、运行程序框图和完善程序框图的思路：

(1)要明确程序框图的顺序结构、条件结构和循环结构.

(2)要识别、运行程序框图，理解框图所解决的实际问题.

(3)按照题目的要求完成解答并验证.

4. 设$x\in R$，则“$|x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$”是“$x^3<1$”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不重复条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】分析：首先求解绝对值不等式，然后求解三次不等式即可确定两者之间的关系.

详解：绝对值不等式$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x<1$，

由$x^3<1\Leftrightarrow x<1$.

据此可知$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$是$x^3<1$的充分而不必要条件.

本题选择*A*选项.

点睛：本题主要考查绝对值不等式的解法，充分不必要条件的判断等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

5. 已知$a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为

A. $a>b>c$　B. $b>a>c$　C. $c>b>a$　D. $c>a>b$

【答案】D

【解析】分析：由题意结合对数函数的性质整理计算即可求得最终结果.

详解：由题意结合对数函数的性质可知：

$a=\log_2 e>1$，$b=\ln 2=\frac{1}{\log_2 e}\in(0,1)$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 e$，

据此可得：$c>a>b$.

本题选择*D*选项.

点睛：对于指数幂的大小的比较，我们通常都是运用指数函数的单调性，但很多时候，因幂的底数或指数不相同，不能直接利用函数的单调性进行比较．这就必须掌握一些特殊方法．在进行指数幂的大小比较时，若底数不同，则首先考虑将其转化成同底数，然后再根据指数函数的单调性进行判断．对于不同底而同指数的指数幂的大小的比较，利用图象法求解，既快捷，又准确.

6. 将函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{5})$的图象向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，所得图象对应的函数

A. 在区间$[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$上单调递增　　B. 在区间$[\frac{3\pi}{4},\pi]$上单调递减

C. 在区间$[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$上单调递增　　D. 在区间$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$上单调递减

【答案】A

【解析】分析：由题意首先求得平移之后的函数解析式，然后确定函数的单调区间即可.

详解：由函数图象平移变换的性质可知：

将$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度之后的解析式为：

$y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)+\frac{\pi}{5}\right]=\sin 2x$.

则函数的单调递增区间满足：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，

即$k\pi-\frac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$，

令$k=1$可得一个单调递增区间为：$\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

函数的单调递减区间满足：$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$，

即$k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$，

令$k=1$可得一个单调递减区间为：$\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

本题选择*A*选项.

点睛：本题主要考查三角函数的平移变换，三角函数的单调区间的判断等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

7. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$的离心率为2，过右焦点且垂直于*x*轴的直线与双曲线交于*A*，*B*两点.

设*A*，*B*到双曲线同一条渐近线的距离分别为d_1和d_2，且$d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　　C. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

【答案】C

【解析】分析：由题意首先求得*A*,*B*的坐标，然后利用点到直线距离公式求得*b*的值，之后求解*a*的值即可确定双曲线方程.

详解：设双曲线的右焦点坐标为$F(c,0)$（$c>0$），则$x_A=x_B=c$，

由$\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$可得：$y=\pm\frac{b^2}{a}$，

不妨设：$A\left(c,\frac{b^2}{a}\right),B\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$，

双曲线的一条渐近线方程为：$bx-ay=0$，

据此可得：$d_1=\frac{|bc-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc-b^2}{c}$，$d_2=\frac{|bc+b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc+b^2}{c}$，

则$d_1+d_2=\frac{2bc}{c}=2b=6$，则$b=3,b^2=9$，

双曲线的离心率：$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{9}{a^2}}=2$，

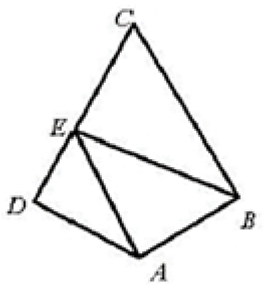
据此可得：$a^2=3$，则双曲线的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

本题选择*C*选项.

点睛：求双曲线的标准方程的基本方法是待定系数法．具体过程是先定形，再定量，即先确定双曲线标准方程的形式，然后再根据*a*，*b*，*c*，*e*及渐近线之间的关系，求出*a*，*b*的值．如果已知双曲线的渐近线方程，求双曲线的标准方程，可利用有公共渐近线的双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$，再由条件求出$\lambda$的值即可.

8. 如图，在平面四边形*ABCD*中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120°$，$AB=AD=1$.

若点*E*为边*CD*上的动点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$的最小值为

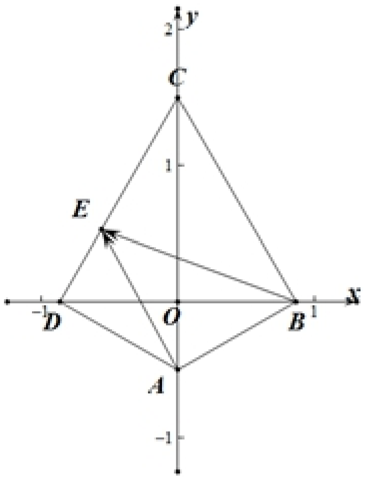


A. $\frac{21}{16}$　B. $\frac{3}{2}$　C. $\frac{25}{16}$　D. 3

【答案】A

【解析】分析：由题意建立平面直角坐标系，然后结合点的坐标得到数量积的坐标表示，最后结合二次函数的性质整理计算即可求得最终结果.

详解：建立如图所示的平面直角坐标系，则$A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{3}{2}\right)$，$D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，



点E在CD上，则$\vec{DE}=\lambda\vec{DC}(0\le\lambda\le1)$，设E(x,y)，则：

$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2},y\right)=\lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，即$\begin{cases}x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\\ y=\frac{3}{2}\lambda\end{cases}$，

据此可得：$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\lambda\right)$，且：

$\vec{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)$，$\vec{BE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3},\frac{3}{2}\lambda\right)$，

由数量积的坐标运算法则可得：

$\vec{AE}\cdot\vec{BE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3}\right)+\frac{3}{2}\lambda\times\left(\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)$，

整理可得：$\vec{AE}\cdot\vec{BE}=\frac{3}{4}(4\lambda^2-2\lambda+2)(0\le\lambda\le1)$，

结合二次函数的性质可知，当$\lambda=\frac{1}{4}$时，$\vec{AE}\cdot\vec{BE}$取得最小值$\frac{21}{16}$.

本题选择A选项.

点睛：求两个向量的数量积有三种方法：利用定义；利用向量的坐标运算；利用数量积的几何意义．具体应用时可根据已知条件的特征来选择，同时要注意数量积运算律的应用.

2018年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

数　学(理工类)

第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共12小题，共110分。

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

9. i是虚数单位，复数$\frac{6+7i}{1+2i}=$ ____________.

【答案】4–i

【解析】分析：由题意结合复数的运算法则整理计算即可求得最终结果.

详解：由复数的运算法则得：$\frac{6+7i}{1+2i}=\frac{(6+7i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{20-5i}{5}=4-i$.

点睛：本题主要考查复数的运算法则及其应用，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

10. 在$(x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^5$的展开式中，$x^2$的系数为____________.

【答案】$\frac{5}{2}$

【解析】分析：由题意结合二项式定理展开式的通项公式得到r的值，然后求解x^2的系数即可.

详解：结合二项式定理的通项公式有：$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=\left(-\frac{1}{2}\right)^r C_5^r x^{5-\frac{3}{2}r}$，

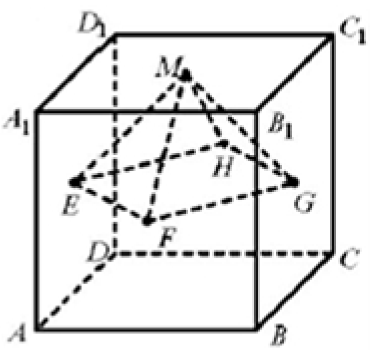
令$5-\frac{3}{2}r=2$可得：$r=2$，则x^2的系数为：$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 C_5^2=\frac{1}{4}\times 10=\frac{5}{2}$.

点睛：(1)二项式定理的核心是通项公式，求解此类问题可以分两步完成：第一步根据所给出的条件(特定项)和通项公式，建立方程来确定指数(求解时要注意二项式系数中n和r的隐含条件，即n，r均为非负整数，且$n\geq r$，如常数项指数为零、有理项指数为整数等)；第二步是根据所求的指数，再求所求解的项.

(2)求两个多项式的积的特定项，可先化简或利用分类加法计数原理讨论求解.

11.

已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，除面$ABCD$外，该正方体其余各面的中心分别为点E，F，G，H，M(如图)，则四棱锥$M-EFGH$的体积为__________.



【答案】$\frac{1}{12}$

【解析】分析：由题意首先求解底面积，然后结合四棱锥的高即可求得四棱锥的体积.

详解：由题意可得，底面四边形EFGH为边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的正方形，其面积$S_{EFGH}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

顶点M到底面四边形EFGH的距离为$d=\frac{1}{2}$，

由四棱锥的体积公式可得：$V_{M-EFGH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

点睛：本题主要考查四棱锥的体积计算，空间想象能力等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

12.

已知圆$x^2+y^2-2x=0$的圆心为C，直线$\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (为参数)与该圆相交于A，B两点，则ΔABC的面积为____________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】分析：由题意首先求得圆心到直线的距离，然后结合弦长公式求得弦长，最后求解三角形的面积即可.

详解：由题意可得圆的标准方程为：$(x-1)^2+y^2=1$，

直线的直角坐标方程为：$y-3=-(x+1)$，即$x+y-2=0$，

则圆心到直线的距离：$d=\frac{|1+0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由弦长公式可得：$|AB|=2\times\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，

则$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

点睛：处理直线与圆的位置关系时，若两方程已知或圆心到直线的距离易表达，则用几何法；若方程中含有参数，或圆心到直线的距离的表达较繁琐，则用代数法.

13. 已知$a,b\in R$，且$a-3b+6=0$，则$2^a+\frac{1}{8^b}$的最小值为____________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】分析：由题意首先求得a-

$3b$的值，然后结合均值不等式的结论整理计算即可求得最终结果，注意等号成立的条件.

详解：由$a-3b+6=0$可知$a-3b=-6$，

且：$2^a+\frac{1}{8^b}=2^a+2^{-3b}$，因为对于任意$x$，$2^x>0$恒成立，

结合均值不等式的结论可得：$2^{a}+2^{-3b}\geq 2\times\sqrt{2^{a}\times 2^{-3b}}=2\times\sqrt{2^{-6}}=\frac{1}{4}$.

当且仅当$\begin{cases}2^{a}=2^{-3b}\\ a-3b=6\end{cases}$，即$\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}$时等号成立.

综上可得$2^{a}+\frac{1}{8^{b}}$的最小值为$\frac{1}{4}$.

点睛：在应用基本不等式求最值时，要把握不等式成立的三个条件，就是“一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得”，若忽略了某个条件，就会出现错误.

14.

已知$a>0$，函数$f(x)=\begin{cases}x^{2}+2ax+a, & x\leq 0,\\ -x^{2}+2ax-2a, & x>0.\end{cases}$若关于x的方程$f(x)=ax$恰有2个互异的实数解，则的取值范围是_______________.

【答案】(4，8)

【解析】分析：由题意分类讨论$x\leq 0$和$x>0$两种情况，然后绘制函数图像，数形结合即可求得最终结果.

详解：分类讨论：当$x\leq 0$时，方程$f(x)=ax$即$x^{2}+2ax+a=ax$，

整理可得：$x^{2}=-a(x+1)$，

很明显$x=-1$不是方程的实数解，则$a=-\frac{x^{2}}{x+1}$，

当$x>0$时，方程$f(x)=ax$即$-x^{2}+2ax-2a=ax$，

整理可得：$x^{2}=a(x-2)$，

很明显$x=2$不是方程的实数解，则$a=\frac{x^{2}}{x-2}$，

令$g(x)=\begin{cases}-\frac{x^{2}}{x+1}, x\leq 0\\ \frac{x^{2}}{x-2}, x>0\end{cases}$，

其中$-\frac{x^{2}}{x+1}=-\left(x+1+\frac{1}{x+1}-2\right)$，$\frac{x^{2}}{x-2}=x-2+\frac{4}{x-2}+4$

原问题等价于函数$g(x)$与函数$y=a$有两个不同的交点，求的取值范围.

结合对勾函数和函数图象平移的规律绘制函数$g(x)$的图象，

同时绘制函数$y=a$的图象如图所示，考查临界条件，

结合$a>0$观察可得，实数的取值范围是$(4,8)$.

点睛：本题的核心在考查函数的零点问题，函数零点的求解与判断方法包括：

(1)直接求零点：令$f(x)=0$，如果能求出解，则有几个解就有几个零点．

(2)零点存在性定理：利用定理不仅要函数在区间$[a，b]$上是连续不断的曲线，且$f(a)\cdot f(b)<0$，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点．

(3)利用图象交点的个数：将函数变形为两个函数的差，画两个函数的图象，看其交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点．