

2019 年上海市春季高考数学试卷

2019.01

一. 填空题 (本大题共 12 题, 满分 54 分, 第 1~6 题每题 4 分, 第 7~12 题每题 5 分)

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 6\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 - 4n + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 不等式 $|x + 1| < 5$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$

4. 函数 $f(x) = x^2$ ($x > 0$) 的反函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$

5. 设 i 为虚数单位, $3\bar{z} - i = 6 + 5i$, 则 $|z|$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

6. 已知二元线性方程组 $\begin{cases} 2x + 2y = -1 \\ 4x + a^2y = a \end{cases}$ 有无穷多解, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

7. 在 $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的二项展开式中, 常数项的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

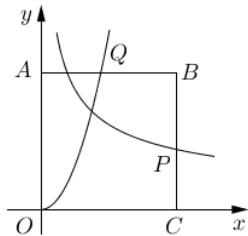
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $3\sin A = 2\sin B$, 且 $\cos C = \frac{1}{4}$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$

9. 首届中国国际进口博览会在上海举行, 某高校拟派 4 人参与连续 5 天的志愿者活动, 其中甲连续参加 2 天, 其余每人各参加 1 天, 问有多少种不同的安排种数 $\underline{\hspace{2cm}}$
(结果用数值表示)

10. 如图, 正方形 $OABC$ 的边长为 a ($a > 1$), 函数 $y = 3x^2$ 交

AB 于点 Q , 函数 $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 与 BC 交于点 P , 当 $|AQ| + |CP|$ 最小时, a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

11. 已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上任意一点, Q 与 P 关于 x 轴对称, F_1 、 F_2 为椭圆的左右焦点, 若有 $\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{F_2P} \leq 1$, 则向量 $\overrightarrow{F_1P}$ 与 $\overrightarrow{F_2Q}$ 的夹角范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$



12. 已知 $t \in \mathbf{R}$, 集合 $A = [t, t+1] \cup [t+4, t+9]$, $0 \notin A$, 若存在正数 λ , 对任意 $a \in A$,

都有 $\frac{\lambda}{a} \in A$, 则 t 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

二. 选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

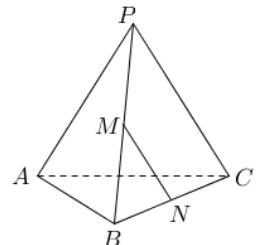
13. 下列函数中, 值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = 2^x$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = \tan x$ D. $y = \cos x$

14. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a^2 > b^2$ ” 是 “ $|a| > |b|$ ” 的 ()
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
15. 已知平面 α 、 β 、 γ 两两垂直, 直线 a 、 b 、 c 满足: $a \subseteq \alpha$, $b \subseteq \beta$, $c \subseteq \gamma$, 则直线 a 、 b 、 c 不可能是 ()
- A. 两两垂直 B. 两两平行 C. 两两相交 D. 两两异面
16. 平面直角坐标系中, 两动圆 O_1 、 O_2 的圆心分别为 $(a_1, 0)$ 、 $(a_2, 0)$, 且两圆均过定点 $(1, 0)$, 两圆与 y 轴正半轴分别交于点 $(0, y_1)$ 、 $(0, y_2)$, 若 $\ln y_1 + \ln y_2 = 0$, 点 $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2})$ 的轨迹为 Γ , 则 Γ 所在的曲线可能是 ()
- A. 直线 B. 圆 C. 椭圆 D. 双曲线

三. 解答题 (本大题共 5 题, 共 $14+14+14+16+18=76$ 分)

17. 如图, 正三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧棱长为 2, 底面边长为 $\sqrt{3}$, M 、 N 分别是 PB 和 BC 的中点.
- (1) 求异面直线 MN 与 AC 所成角的大小;
(2) 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 前 n 项和为 S_n .
- (1) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_4 = 15$, 求 S_n ;
(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 12$, 求公比 q 的取值范围.

19. 改革开放 40 年，我国卫生事业取得巨大成就，卫生总费用增长了数十倍。卫生总费用包括个人现金支出、社会支出、政府支出，下表为 2012 年~2015 年我国卫生费用中个人现金支出、社会支出和政府支出的费用（单位：亿元）和在卫生总费用中的占比。

年份	卫生总费用 (亿元)	个人现金卫生支出		社会卫生支出		政府卫生支出	
		绝对数 (亿元)	占卫生总费用比重 (%)	绝对数 (亿元)	占卫生总费用比重 (%)	绝对数 (亿元)	占卫生总费用比重 (%)
2012	28119.00	9656.32	A	10030.70	35.67	8431.98	29.99
2013	31668.95	10729.34	33.88	11393.79	35.98	9545.81	30.14
2014	35312.40	B	31.99	13437.75	38.05	10579.23	29.96
2015	40974.64	11992.65	29.27	16506.71	40.29	12475.28	30.45

（数据来源于国家统计年鉴）

（1）计算 A、B 的数据，并指出 2012 年到 2015 年之间我国卫生总费用中个人现金支出占比和社会支出占比的变化趋势；

（2）设 $t=1$ 表示 1978 年，第 n 年卫生总费用与年份 t 之间拟合函数

$$f(t) = \frac{357876.6053}{1 + e^{6.4420 - 0.1136t}},$$

研究函数 $f(t)$ 的单调性，并预测我国卫生总费用首次超过 12 万亿的年份。

20. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ ， F 为焦点， P 为准线 l 上一动点，线段 PF 与抛物线交于点 Q ，

$$\text{定义 } d(P) = \frac{|FP|}{|FQ|}.$$

（1）若点 P 坐标为 $(-1, -\frac{8}{3})$ ，求 $d(P)$ ；

（2）求证：存在常数 a ，使得 $2d(P) = |FP| + a$ 恒成立；

（3）设 P_1 、 P_2 、 P_3 为准线 l 上的三点，且 $|P_1P_2| = |P_2P_3|$ ，试比较 $d(P_1) + d(P_3)$ 与 $2d(P_2)$ 的大小。

21. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 $d \in (0, \pi]$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = \sin(a_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$,

记 $S = \{x \mid x = b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$.

(1) 设 $a_1 = 0$, $d = \frac{2}{3}\pi$, 求集合 S ;

(2) 设 $a_1 = \frac{\pi}{2}$, 试求 d 的值, 使得集合 S 恰有两个元素;

(3) 若集合 S 恰有三个元素, 且 $b_{n+T} = b_n$, 其中 T 为不超过 7 的正整数, 求 T 所有可能值.