

2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第II卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
 2. 本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式:

如果事件 A , B 互斥, 那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

如果事件 A , B 相互独立, 那么 $P(AB) = P(A)P(B)$.

棱柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 S 表示棱柱的底面面积， h 表示棱柱的高。

棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积， h 表示棱锥的高。

一. 选择题: 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- (1) 设全集为 \mathbf{R} , 集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cap (C_R B) =$

- (A) $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$ (B) $\{x \mid 0 < x < 1\}$

- (2) 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 5, \\ 2x - y \leq 4, \\ -x + y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 3x + 5y$ 的最大值为

- (A) 6 (B) 19 (C) 21 (D) 45

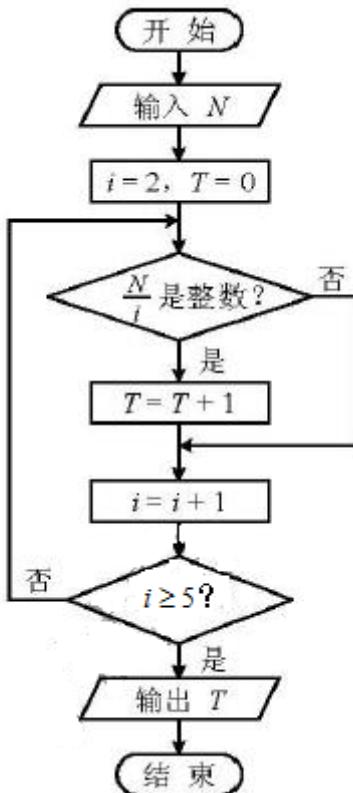
(3) 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 若输入N的值为20, 则输出T的值为

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4



(4) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ ” 是 “ $x^3 < 1$ ” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知 $a = \log_2 e$, $b = \ln 2$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 a , b , c 的大小关系为

(A) $a > b > c$

(B) $b > a > c$

(C) $c > b > a$

(D) $c > a > b$

(6) 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数

(A) 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增

(B) 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上单调递减

- (C) 在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增 (D) 在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

(7) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点. 设 A, B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为

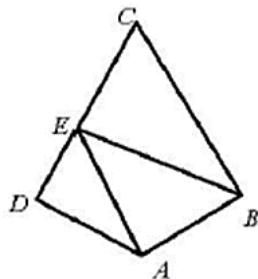
(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ (B) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

(C) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

(8) 如图, 在平面四边形 ABCD 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$.

若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为

- (A) $\frac{21}{16}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{25}{16}$ (D) 3



第(8)题图

第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共 12 小题, 共 110 分。

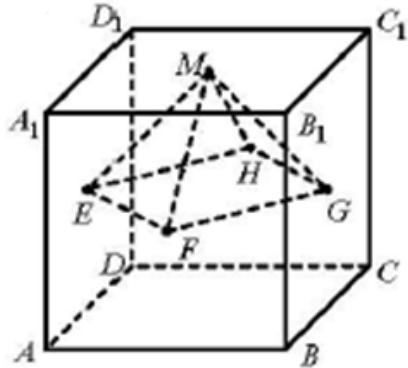
二. 填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) i 是虚数单位, 复数 $\frac{6+7i}{1+2i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 在 $(x - \frac{1}{2\sqrt{x}})^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(11)

已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 E, F, G, H, M (如图)，则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为_____.



第(11)题图

(12) 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的圆心为 C ，直线 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 与该圆相交于 A, B 两点，则

$\triangle ABC$ 的面积为_____.

(13) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，且 $a - 3b + 6 = 0$ ，则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为_____.

(14) 已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有2个互异的实数解，则 a 的取值范围是_____.

三. 解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分13分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$.

(I) 求角 B 的大小；

(II) 设 $a=2, c=3$ ，求 b 和 $\sin(2A-B)$ 的值.

(16)(本小题满分13分)

已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为24, 16, 16.

现采用分层抽样的方法从中抽取7人，进行睡眠时间的调查.

(I) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人？

(II) 若抽出的7人中有4人睡眠不足, 3人睡眠充足, 现从这7人中随机抽取3人做进一步的身体检查.

(i) 用 X 表示抽取的3人中睡眠不足的员工人数, 求随机变量 X 的分布列与数学期望;

(ii) 设 A 为事件“抽取的3人中, 既有睡眠充足的员工, 也有睡眠不足的员工”, 求事件 A 发生的概率.

(17)(本小题满分13分)

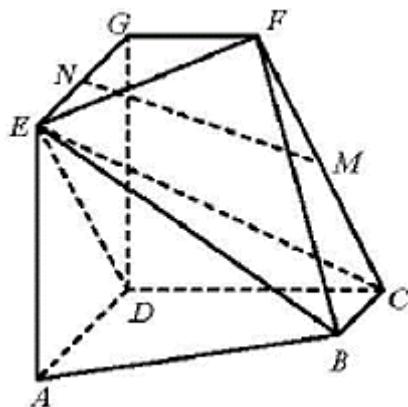
如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$,

$DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DG = 2$.

(I) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE ;

(II) 求二面角 $E - BC - F$ 的正弦值;

(III) 若点 P 在线段 DG 上, 且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° , 求线段 DP 的长.



(18)(本小题满分13分)

设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是等差数列.

已知 $a_1 = 1$,

$$a_3 = a_2 + 2, \quad a_4 = b_3 + b_5, \quad a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$),

(i) 求 T_n ;

$$(ii) \text{ 证明 } \sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*).$$

(19)(本小题满分14分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 上顶点为 B .

已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，点 A 的坐标为 $(b, 0)$ ，且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 。

(I) 求椭圆的方程；

(II) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P ，且 l 与直线 AB 交于点 Q 。

若 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ (O 为原点)，求 k 的值。

(20)(本小题满分14分)

已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, 其中 $a > 1$.

(I) 求函数 $h(x) = f(x) - x \ln a$ 的单调区间；

(II) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$

处的切线平行，证明 $x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$ ；

(III) 证明当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l ，使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线，也是曲线 $y = g(x)$ 的切线。