

绝密★启用前

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数 学（理工类）

【学科网试卷总评】2013 年四川省高考数学试题强调基础、考查能力、注重思维、过渡平稳，体现了课程改革的发展方向，是一套符合实际、稳中有新、富有特色的试题。试题的主要特点如下：

①全面考查基础，凸显数学能力，如理科 6 题将抛物线、双曲线、点到直线的距离等知识结合，理科 8 题在排列组合问题中融合了对数运算，理科 17 题将三角变换、解三角形、向量的投影等知识有机结合，理科 18 题将算法与程序框图、古典概型、独立重复试验（理科）、随机变量的分布列（理科）、数学期望（理科）、频数、频率等概念及相关计算有机融合，知识点的覆盖面广、综合性强，对思维的考查有一定的广度和深度。

②回归数学本质，重视教材价值，理科 12 题考查平面向量运算的几何意义，理科 15 题考查对新信息的分析理解、对问题的探究和富有数学特点的思考，理科 20（II）题运算简明、注重解析几何本质的考查等。

③体现发展方向，推进课程改革，在考查目标设置和能力要求上，充分反映课改变化，理科侧重于推理论证、抽象思维，文科则侧重于运算求解、形象思维。试卷的整体设计，以体现高考的性质为基础，合理强调区分，科学展现导向功能，鼓励积极、主动、探究式的学习，引导中学数学教学注重提高学生的思维能力、发展应用意识和创新意识并对学生进行合理、科学的评价，对课程改革的有效实施和深入推进、促进中学数学教学质量的提高有十分积极的作用。

本试题卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页，共 4 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上大题无效。满分 150 分。考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡上一并交回。

第 I 卷 （选择题 共 50 分）

注意事项：

必须使用 2B 铅笔在答题卡上将所选答案对应的标号涂黑。

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x + 2 = 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 4 = 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- (A) $\{-2\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{-2, 2\}$ (D) \emptyset

【答案】A

【解析】易知 $A = \{x | x + 2 = 0\} = \{-2\}$, $B = \{x | x^2 - 4 = 0\} = \{2, -2\}$, $\therefore A \cap B = \{-2\}$, 选 A.

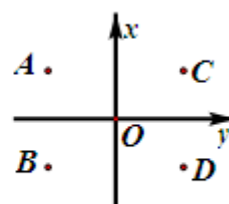
【学科网考点定位】本题考查集合的表示方法——描述法, 以及求集合交集的方法.

2. 如图, 在复平面内, 点 A 表示复数 z , 则表示 z 的共轭复数的点是 ()

- (A) A (B) B (C) C (D) D

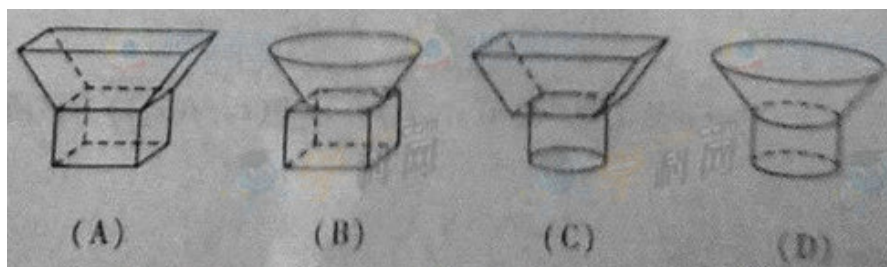
【答案】B

【解析】设点 $A(x, y)$ 表示的复数 $z = x + yi$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} = x - yi$ 对应的点为 $B(x, -y)$, $\therefore A, B$ 两点关于 x 轴对称, 选 B.



【学科网考点定位】本题考查复数的概念、表示方法、几何意义以及共轭复数的概念, 容易题.

3. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的直观图可以是 ()



【答案】D

【解析】由俯视图知, 该几何体是圆柱和圆台的组合体, 可排除 A、C, 由正视图可排除 B、C, 故选 D.

【学科网考点定位】本题考查简单几何体的三视图的画法和识别, 以及一个几何体的三视图与直观图的相互转换问题.

4. 设 $x \in Z$, 集合 A 是奇数集, 集合 B 是偶数集. 若命题 $p: \forall x \in A, 2x \in B$, 则 ()

- (A) $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$ (B) $\neg p: \forall x \notin A, 2x \notin B$
(C) $\neg p: \exists x \notin A, 2x \in B$ (D) $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$

【答案】D

【解析】注意到“任意”的否定是“存在”, “属于”的否定是“不属于”, 将 \forall 改为 \exists , 将 $2x \in B$ 改为 $2x \notin B$, 于是有 $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$, 故选 D.

【学科网考点定位】本题考查命题的含义以及全称命题的否定, 注意: “任意”的否定是“存在”,

“属于”的否定是“不属于”。

5. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ω , φ 的值分别是 ()

- (A) $2, -\frac{\pi}{3}$ (B) $2, -\frac{\pi}{6}$
(C) $4, -\frac{\pi}{6}$ (D) $4, \frac{\pi}{3}$

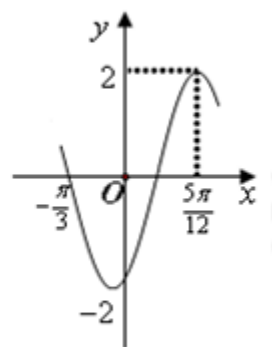
【答案】A

【解析】由图知, 周期 T 满足 $\frac{3}{4}T = \frac{5\pi}{12} - (-\frac{\pi}{3})$, $\therefore T = \pi$, 又 $\omega > 0$,

$\therefore \omega = 2$, 故 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$, 图象的最高点为 $(\frac{5\pi}{12}, 2)$, 于是由

“五点法”作图, 知 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 选 A.

【学科网考点定位】本题考查正弦型函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质, 难点是确定初相 φ 的值, 关键是理解“五点法”作图.



6. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线的距离是 ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$

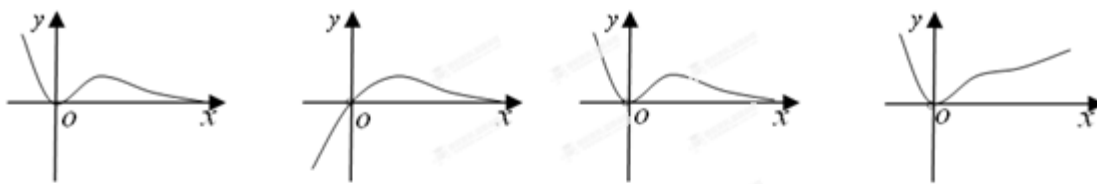
【答案】B

【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线方程为 $\sqrt{3}x \pm y = 0$, 于是

点 F 到渐近线的距离 $d = \frac{|\sqrt{3} \pm 0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 选 B.

【学科网考点定位】本题考查抛物线与双曲线的标准方程、简单的几何性质, 点到直线的距离公式, 计算量小, 基础题.

7. 函数 $y = \frac{x^3}{3^x - 1}$ 的图象大致是 ()



【答案】C

【解析】易知函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ，可排除 A；当 $x < 0$ 时， $3^x - 1 < 0$ ， $\therefore y = \frac{x^3}{3^x - 1} > 0$ ，

可排除 B；当 $x \rightarrow +\infty$ 时，指数函数 $y = 3^x$ 比幂函数 $y = x^3$ 的增长速度快得多，所以函数的分母比分子大得多，于是 $x \rightarrow +\infty$ 时， $y \rightarrow 0$ ，排除 D，选 C。

【学科网考点定位】本题考查函数的解析式与函数图象之间的对应关系，以及利用函数的性质研究函数的图象特征，本题计算量小，但思维量大，体现了“多想少算”的命题理念。

8. 从 1, 3, 5, 7, 9 这五个数中，每次取出两个不同的数分别为 a, b ，共可得到 $\lg a - \lg b$ 的不同值的个数是 ()

- (A) 9 (B) 10 (C) 18 (D) 20

【答案】C

【解析】从 1, 3, 5, 7, 9 这五个数中，每次取出两个不同的数的取法有 $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ 种，不妨记取

出的两个不同的数组成有序数对 (a, b) ， $\therefore \lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$ ， \therefore 由对数函数的单调性知， $\lg a - \lg b$

的不同值的个数即为 $\frac{a}{b}$ 不同值的个数，由于 $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ ， $\frac{3}{1} = \frac{9}{3}$ ，所以不同值的个数为 $20 - 2 = 18$ 种，

选 C。

【学科网考点定位】本题考查排列组合的概念和排列数的计算，在排列组合问题中融合了对数运算，对数函数的单调性以及转化思想。

9. 节日前夕，小李在家门前的树上挂了两串彩灯，这两串彩灯的第一次闪亮相互独立，且都在通电后的 4 秒内任一时刻等可能发生，然后每串彩灯以 4 秒为间隔闪亮，那么这两串彩灯同时通电后，它们第一次闪亮的时刻相差不超过 2 秒的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{7}{8}$

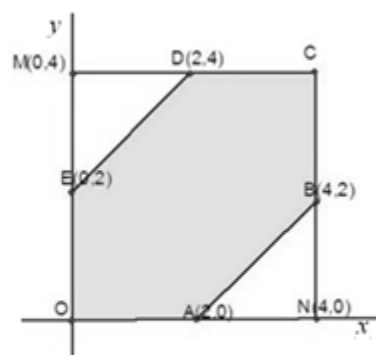
【答案】C

【解析】设两串彩灯同时通电后，它们第一次闪亮的时刻分别为 x ，

y ，则 x, y 应满足 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ ，该不等式组表示一正方形区域如图，

而两串彩灯在第一次闪亮的时刻相差不超过 2 秒， $\therefore |x - y| \leq 2$ ，该不等式表示的平面区域如图中阴影部分，故所求概率为

$$P = 1 - \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2}{4 \times 4} = \frac{3}{4}, \text{ 选 C.}$$



【学科网考点定位】本题考查不等式（组）表示平面区域的作法，几何概率的计算，适度强化了不同模块间的联系与综合，解题的关键是理解题意，特别是对最后一句话的理解。

10. 设函数 $f(x) = \sqrt{e^x + x - a}$ ($a \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数). 若曲线 $y = \sin x$ 上存在 (x_0, y_0) 使得 $f(f(y_0)) = y_0$ ，则 a 的取值范围是 ()

- (A) $[1, e]$ (B) $[e^{-1}, 1]$ (C) $[1, 1 + e]$ (D) $[e^{-1}, e + 1]$

【答案】A

【解析】 $\because f(x) = \sqrt{e^x + x - a}$ 在定义域上单调递增， $\therefore \exists y_0 \in [-1, 1]$ ，使得

$f(f(y_0)) = y_0 \Leftrightarrow \exists y_0 \in [0, 1]$ ，使得 $f(y_0) = y_0$ ，即等价于方程 $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 有解，于是

$a = e^x + x - x^2$ 在 $[0, 1]$ 有解，所以 a 的取值范围就是函数 $g(x) = e^x + x - x^2$ ， $x \in [0, 1]$ 的值域， \because

$g'(x) = e^x + 1 - 2x$ 在 $[0, 1]$ 恒为正， \therefore 函数 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，所以 $g(x) \in [1, e]$ ，故 a 的取值范围是 $[1, e]$ ，选 A.

【学科网考点定位】本题考查函数图象与性质的应用，函数零点、方程的根和函数图象与 x 轴交点三者间的关系，本题与函数不动点理论有关，具有高等数学背景，较难.

第二部分 (非选择题 共 100 分)

注意事项:

必须使用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答. 作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚. 答在试题卷上无效.

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

二、填空题: 本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 二项式 $(x + y)^5$ 的展开式中，含 $x^2 y^3$ 的项的系数是_____。(用数字作答)

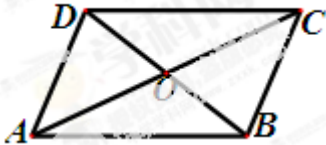
【答案】10

【解析】由二项展开式的通项公式知，含 x^2y^3 的项是 $T_4 = C_5^3 x^2 y^3$ ，所以系数为 $C_5^3 = 10$ ，故填

10.

【学科网考点定位】本题考查求二项展开式的指定项系数，属于基础题.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O ， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AO}$ ，则 $\lambda =$ _____.



【答案】2

【解析】如图， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ ，所以 $\lambda = 2$ ，故填 2.

【学科网考点定位】本题考查平面向量的线性运算以及运算的几何表示.

13. 设 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$ ， $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $\because \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin \alpha$ ， $\therefore \cos \alpha = -\frac{1}{2}$ ，又 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ， $\therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}$ ，所以

$\tan 2\alpha = \tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ，故填 $\sqrt{3}$.

【学科网考点定位】本题考查同角三角函数间的基本关系，二倍角公式，简单的三角恒等变换，基础题.

14. 已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 4x$ ，那么，不等式 $f(x+2) < 5$ 的解集是_____.

【答案】 $(-7, 3)$

【解析】由 $\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x < 5 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 5$ ，又 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数， $\therefore f(x) < 5$ 的解

集是 $-5 < x < 5$ ，于是 $f(x+2) < 5 \Leftrightarrow -5 < x+2 < 5$ ，即 $-7 < x < 3$ ，故所填解集为 $(-7, 3)$.

【学科网考点定位】本题考查综合应用函数的图象与性质解不等式，该题很陈旧但很经典，属于易错题.

15. 设 P_1, P_2, \dots, P_n 为平面 α 内的 n 个点, 在平面 α 内的所有点中, 若点 P 到 P_1, P_2, \dots, P_n 点的距离之和最小, 则称点 P 为 P_1, P_2, \dots, P_n 点的一个“中位点”. 例如, 线段 AB 上的任意点都是端点 A, B 的中位点. 则有下列命题:

①若 A, B, C 三个点共线, C 在线段上, 则 C 是 A, B, C 的中位点;

②直角三角形斜边的点是该直角三角形三个顶点的中位点;

③若四个点 A, B, C, D 共线, 则它们的中位点存在且唯一;

④梯形对角线的交点是该梯形四个顶点的唯一中位点.

其中的真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

【答案】①④

【解析】对于①, 因为 A, B, C 三个点共线, 又 C 在线段 AB 上, 始终有 $CA + CB = AB$, 这比起 C 点在线段 AB 的延长线或反向延长线上来说它是最小的, 由中位点的定义知①为真命题;

对于②不正确, 可以举一个反例: 直角顶点;

对于③不正确, 四点 A, B, C, D 共线时, 线段 BD (B, D 居四点中间) 任意一点都是“中位点”;

对于④, 设梯形对角线的交点为 O , $\because PA + PC \geq AC, PB + PD \geq BD, \therefore$

$PA + PB + PC + PD \geq AC + BD$, 当 P 与 O 重合时取等号, ④是正确的.

综上真命题为①④.

【学科网考点定位】本题以即时定义的新概念为载体, 考查多距离几何最值问题, 考查对新信息的分析理解、对问题的探究和富有数学特点的思考, 考查创新能力. 解题的关键是灵活使用定理: 三角形中, 两边之和大于第三边. 准确理解新定义——中位点的概念, 了解多距离几何最值问题的常见入手点: 共线、三角形不等式取等的条件、对称等.

本解析为学科网名师解析团队原创, 授权学科网独家使用, 如有盗用, 依法追责!

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 = 8$, 且 a_4 为 a_2 和 a_9 的等比中项, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公差及前 n 项和.

【答案】首项为 4, 公差为 0, 或首项为 1, 公差为 3; $S_n = 4n$ 或 $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$.

【解析】设该数列公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，由已知，可得，

$$\begin{cases} 2a_1 + 2d = 8 \\ (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 8d) \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} a_1 + d = 4 \\ d(d - 3a_1) = 0 \end{cases}$,

解得 $a_1 = 4$ ， $d = 0$ 或 $a_1 = 1$ ， $d = 3$ ，

即数列 $\{a_n\}$ 的首项为 4，公差为 0，或数列的首项为 1，公差为 3.

所以，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 4n$ 或 $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$12 分

【学科网考点定位】本小题考查等差数列、等比中项等基础知识，考查运算求解能力，考查分类与整合、化归转化等数学思想. 将等差错看为等比，将等比中项错看为等差中项，误将公差 $d = 0$ 舍去.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，且

$$2\cos^2 \frac{A-B}{2} \cos B - \sin(A-B) \sin B + \cos(A+C) = -\frac{3}{5}.$$

(I) 求 $\cos A$ 的值；

(II) 若 $a = 4\sqrt{2}$ ， $b = 5$ ，求向量 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 方向上的投影.

【答案】(I) $-\frac{3}{5}$ ；(II) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】(I) 由 $2\cos^2 \frac{A-B}{2} \cos B - \sin(A-B) \sin B + \cos(A+C) = -\frac{3}{5}$ ，得

$$[\cos(A-B) + 1] \cos B - \sin(A-B) \sin B - \cos B = -\frac{3}{5},$$

即 $\cos(A-B) \cos B - \sin(A-B) \sin B = -\frac{3}{5}$.

则 $\cos(A-B+B) = -\frac{3}{5}$ ，即 $\cos A = -\frac{3}{5}$5 分

(II) 由 $\cos A = -\frac{3}{5}$ ， $0 < A < \pi$ ，得 $\sin A = \frac{4}{5}$ ，

由正弦定理, 有 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由题知 $a > b$, 则 $A > B$, 故 $B = \frac{\pi}{4}$.

根据余弦定理, 有 $(4\sqrt{2})^2 = 5^2 + c^2 - 2 \times 5c \times (-\frac{3}{5})$,

解得 $c = 1$ 或 $c = -7$ (舍去).

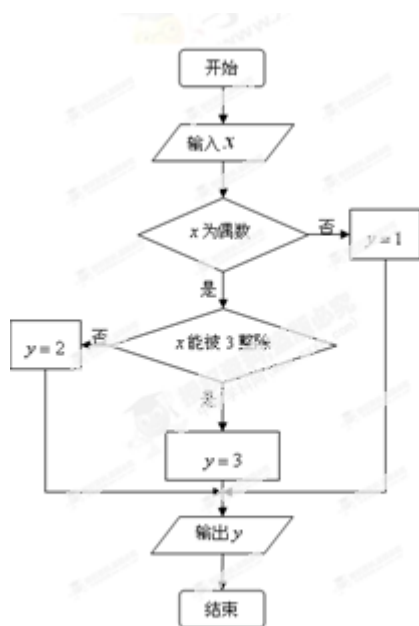
故向量 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 方向上的投影为 $|\overrightarrow{BA}| \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$12 分

【学科网考点定位】本小题主要考查两角和的余弦公式、二倍角公式、正弦定理、余弦定理、同角三角函数的关系等基础知识, 考查运算求解能力, 考查化归与转化等数学思想. 不会用二倍角公式降次, 对冷点知识“向量投影”概念不清致错.

18. (本小题满分 12 分)

某算法的程序框图如图所示, 其中输入的变量 x 在 $1, 2, 3, \dots, 24$ 这 24 个整数中等可能随机产生.

(I) 分别求出按程序框图正确编程运行时输出 y 的值为 i 的概率 P_i ($i = 1, 2, 3$);



(II) 甲、乙两同学依据自己对程序框图的理解, 各自编写程序重复运行 n 次后, 统计记录了输出 y 的值为 i ($i = 1, 2, 3$) 的频数. 以下是甲、乙所作频数统计表的部分数据.

甲的频数统计表（部分）

运行次数 n	输出 y 的值为1的频数	输出 y 的值为2的频数	输出 y 的值为3的频数
30	14	6	10
...
2100	1027	376	697

乙的频数统计表（部分）

运行次数 n	输出 y 的值为1的频数	输出 y 的值为2的频数	输出 y 的值为3的频数
30	12	11	7
...
2100	1051	696	353

当 $n = 2100$ 时，根据表中的数据，分别写出甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 $i (i = 1, 2, 3)$ 的频率（用分数表示），并判断两位同学中哪一位所编写程序符合算法要求的可能性较大；

（III）按程序框图正确编写的程序运行 3 次，求输出 y 的值为 2 的次数 ξ 的分布列及数学期望。

【答案】（I） $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ ；（II）乙同学所编程序符合算法要求的可能性较大，（III）1

【解析】（I）变量 x 是在 1, 2, 3, ..., 24 这 24 个整数中等可能随机产生的一个数，故共有 24 种可能。

当 x 从 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 这 12 个数中产生时，输出 y 的值为 1，故 $P_1 = \frac{1}{2}$ ；

当 x 从 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22 这 8 个数中产生时，输出 y 的值为 2，故 $P_2 = \frac{1}{3}$ ；

当 x 从 6, 12, 18, 24 这 4 个数中产生时，输出 y 的值为 3，故 $P_3 = \frac{1}{6}$ 。

所以，输出 y 的值为 1 的概率为 $\frac{1}{2}$ ，输出 y 的值为 2 的概率为 $\frac{1}{3}$ ，输出 y 的值为 3 的概率为 $\frac{1}{6}$ 。

（II）当 $n = 2100$ 时，甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 $i (i = 1, 2, 3)$ 的频率如下：

	输出 y 的值为1的频率	输出 y 的值为2的频率	输出 y 的值为3的频率
甲	$\frac{1027}{2100}$	$\frac{376}{2100}$	$\frac{697}{2100}$
乙	$\frac{1051}{2100}$	$\frac{696}{2100}$	$\frac{353}{2100}$

比较频率趋势与概率，可得乙同学所编程序符合算法要求的可能性较大。

（III）若重复运行 3 次程序，输出 y 的值为 2 的次数随机变量 ξ 可能的取值为 0, 1, 2, 3。

$$P(\xi = 0) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$$P(\xi=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

$$P(\xi=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9},$$

$$P(\xi=3)=C_3^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27},$$

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

所以, $E\xi=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}=1,$

即 ξ 的数学期望为 1.

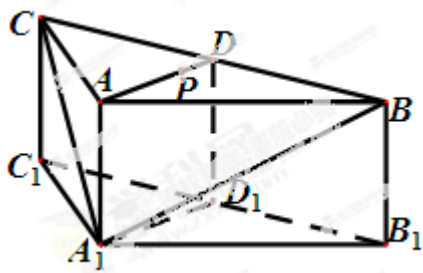
【学科网考点定位】本小题主要考查算法与程序框图、古典概率、独立重复试验、随机变量的分布列、数学期望、频数、频率等概念及相关计算，考查运用统计与概率的知识与方法解决实际问题的能力，考查数据处理能力、应用意识和创新意识。算法、统计、概率、分布列、数学期望等相关概念不熟，从超长的题干中提取数据被无关信息干扰，或计算出错。

19. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ， $AB=AC=2AA_1$ ， $\angle BAC=120^\circ$ ， D, D_1 分别是线段 BC, B_1C_1 的中点， P 是线段 AD 的中点。

(I) 在平面 ABC 内，试作出过点 P 与平面 A_1BC 平行的直线 l ，说明理由，并证明直线 $l \perp$ 平面 ADD_1A_1 ；

(II) 设 (I) 中的直线 l 交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，求二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值。



【答案】(I) 在平面 ABC 内，过点 P 作直线 $l \parallel BC$ ；(II) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

【解析】(I) 如图，在平面 ABC 内，过点 P 作直线 $l \parallel BC$ ，因为 l 在平面 A_1BC 外， BC 在平面 A_1BC 内，由直线与平面平行的判定定理可知， $l \parallel$ 平面 A_1BC ，

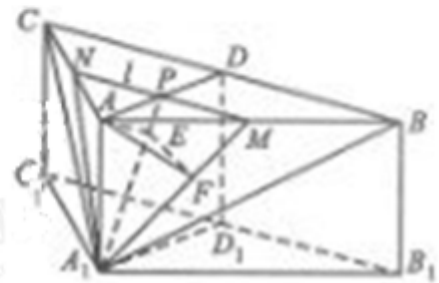
由已知 $AB = AC$ ， D 为线段 BC 的中点，

所以， $BC \perp AD$ ，则直线 $l \perp AD$ 。

因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ，所以 $AA_1 \perp$ 直线 l ，

又因为 AD 、 AA_1 在平面 ADD_1A_1 内，且 AD 与 AA_1 相交，

所以直线 $l \perp$ 平面 ADD_1A_1 。……4 分



(II) 解法一：

连接 A_1P ，过 A 作 $AE \perp A_1P$ 于 E ，过 E 作 $EF \perp A_1M$ 于 F ，连接 AF 。

由 (I) 知， $MN \perp$ 平面 AEA_1 ，所以平面 $AEA_1 \perp$ 平面 A_1MN 。

所以 $AE \perp$ 平面 A_1MN ，则 $AM_1 \perp AE$ 。

所以 $A_1E \perp$ 平面 AEF ，则 $AM_1 \perp AF$ 。

故二面角 $A - A_1M - N$ 的平面角为 $\angle AFE$ （设为 θ ）。

设 $AA_1 = 1$ ，则由 $AB = AC = 2AA_1$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，有 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AD = 1$ 。

又 P 为 AD 的中点，所以 M 为 AB 的中点，且 $AP = \frac{1}{2}$ ， $AM = 1$ ，

所以，在 $Rt\triangle AA_1P$ 中， $A_1P = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ；在 $Rt\triangle AA_1M$ 中， $A_1M = 2$ 。

$$\text{从而 } AE = \frac{AA_1 \cdot AP}{A_1P} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad AF = \frac{AA_1 \cdot AM}{A_1M} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

故二面角 $A - A_1M - N$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 。.....12 分

解法二：

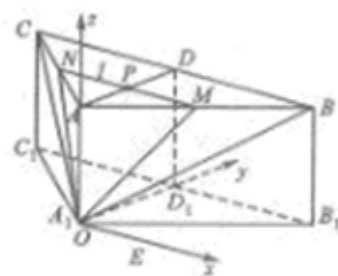
设 $AA_1 = 1$ 。如图，过 A_1 作平行于 B_1C_1 ，以 A_1 为坐标原点，分别以 A_1E ， A_1D ， A_1A 的方向为 x 轴， y 轴， z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A_1 - xyz$ 。

则 $A_1(0,0,0)$ ， $A(0,0,1)$ 。

因为 P 为 AD 的中点，所以 M ， N 分别为 AB ， AC 的中点。

$$\text{故 } M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \quad N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{A_1M} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \quad \overrightarrow{A_1A} = (0, 0, 1), \quad \overrightarrow{NM} = (\sqrt{3}, 0, 0).$$



设平面 AA_1M 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{A_1M}, \\ \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{A_1A}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1A} = 0, \end{cases}$

$$\text{故有 } \begin{cases} (x_1, y_1, z_1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = 0, \\ (x_1, y_1, z_1) \cdot (0, 0, 1) = 0, \end{cases} \text{ 从而 } \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 + z_1 = 0, \\ z_1 = 0. \end{cases}$$

取 $x_1 = 1$ ，则 $y_1 = -\sqrt{3}$ ，所以 $\vec{n}_1 = (1, -\sqrt{3}, 0)$ 。

设平面 A_1MN 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ，则

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \perp \overrightarrow{A_1M}, \\ \vec{n}_2 \perp \overrightarrow{NM}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{NM} = 0, \end{cases}$$

$$\text{故有} \begin{cases} (x_2, y_2, z_2) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) = 0, \\ (x_2, y_2, z_2) \cdot (\sqrt{3}, 0, 0) = 0, \end{cases}$$

$$\text{从而} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 + z_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_2 = 0. \end{cases}$$

取 $y_2 = 2$ ，则 $z_2 = -1$ ，所以 $\overline{n_2} = (0, 2, -1)$ 。

设二面角 $A-A_1M-N$ 的平面角为 θ ，又 θ 为锐角，

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}|}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{(1, -\sqrt{3}, 0) \cdot (0, 2, -1)}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

故二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 。.....12 分

【学科网考点定位】本小题主要考查本作图、线面的平行与垂直、二面角等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，并考查应用向量知识解决立体几何问题的能力。证明直线 $l \perp$ 平面 ADD_1A_1 时，条件书写不完整；指出 $\angle AFE$ 为二面角 $A-A_1M-N$ 的平面角，但没有给出完整的证明，只作不证！

20. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-1, 0)$ ， $F_2(1, 0)$ ，且椭圆 C 经过

点 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 。

(I) 求椭圆 C 的离心率；

(II) 设过点 $A(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M 、 N 两点，点 Q 是线段 MN 上的点，且

$$\frac{2}{|AQ|^2} = \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2}, \text{ 求点 } Q \text{ 的轨迹方程.}$$

【答案】(I) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (II) $10(y-2)^2-3x^2=18$, 其中 $x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $y \in \left(\frac{1}{2}, 2-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$.

【解析】(I) 由椭圆定义知,

$$2a = |PF_1| + |PF_2| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}+1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2\sqrt{2},$$

所以 $a = \sqrt{2}$.

又由已知, $c = 1$,

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(II) 由 (I) 知, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

设点 Q 的坐标为 (x, y) .

(1) 当直线 l 与 x 轴垂直时, 直线 l 与椭圆 C 交于 $(0, 1)$ 、 $(0, -1)$ 两点,

此时点 Q 的坐标为 $\left(0, 2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

(2) 当直线 l 与 x 轴不垂直时, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$,

因为 M 、 N 在直线 l 上, 可设点 M 、 N 的坐标分别为 $(x_1, kx_1 + 2)$ 、 $(x_2, kx_2 + 2)$, 则

$$|AM|^2 = (1+k^2)x_1^2, \quad |AN|^2 = (1+k^2)x_2^2.$$

$$\text{又 } |AQ|^2 = x^2 + (y-2)^2 = (1+k^2)x^2.$$

由 $\frac{2}{|AQ|^2} = \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2}$, 得

$$\frac{2}{(1+k^2)x^2} = \frac{1}{(1+k^2)x_1^2} + \frac{1}{(1+k^2)x_2^2}, \text{ 即}$$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}. \quad \textcircled{1}$$

将 $y = kx + 2$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 中, 得

$$(2k^2 + 1)x^2 + 8kx + 6 = 0. \quad ②$$

由 $\Delta = (8k)^2 - 4 \times (2k^2 + 1) \times 6 > 0$, 得 $k^2 > \frac{3}{2}$.

由②可知, $x_1 + x_2 = -\frac{8k}{2k^2 + 1}$, $x_1 x_2 = \frac{6}{2k^2 + 1}$,

代入①中并化简, 得

$$x^2 = \frac{18}{10k^2 - 3}. \quad ③$$

因为点 Q 在直线 $y = kx + 2$ 上, 所以 $k = \frac{y-2}{x}$, 代入③中并化简, 得

$$10(y-2)^2 - 3x^2 = 18.$$

由③及 $k^2 > \frac{3}{2}$, 可知 $0 < x^2 < \frac{3}{2}$, 即 $x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

又 $\left(0, 2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ 满足 $10(y-2)^2 - 3x^2 = 18$, 故 $x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

由题意, Q 在椭圆 C 内, 所以 $-1 \leq y \leq 1$,

又由 $10(y-2)^2 = 18 + 3x^2$ 有

$$(y-2)^2 \in \left[\frac{9}{5}, \frac{9}{4}\right] \text{ 且 } -1 \leq y \leq 1, \text{ 则 } y \in \left(\frac{1}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right].$$

所以, 点 Q 的轨迹方程为 $10(y-2)^2 - 3x^2 = 18$, 其中 $x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

$$y \in \left(\frac{1}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right]. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

【学科网考点定位】 本小题主要考查直线、椭圆、曲线与方程等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查数形结合、转化与化归、分类与整合等数学思想, 并考查思维的严谨性. 计算出错 (整式、分式、根式运算中, 在代入、变形、整理、化简诸环节出错); 公式出错 (一元二次不等式的解集公式、斜率公式、韦达定理等); 概念出错 (求轨迹方程时, 忘记检验纯粹性).

21. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 其中 a 是实数. 设 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 为该函数

数图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$.

(I) 指出函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A , B 处的切线互相垂直, 且 $x_2 < 0$, 求 $x_2 - x_1$ 的最小值;

(III) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A , B 处的切线重合, 求 a 的取值范围.

【答案】 (I) 减区间为 $(-\infty, -1)$, 增区间为 $[-1, 0)$ 、 $(0, +\infty)$; (II) 略; (III) $(-\ln 2 - 1, +\infty)$.

【解析】 (I) 函数的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$, 单调递增区间为 $[-1, 0)$ 、 $(0, +\infty)$3分

(II) 由导数的几何意义可知, 点 A 处的切线斜率为 $f'(x_1)$, 点 B 处的切线斜率为 $f'(x_2)$,

故当点 A 处的切线与点 B 处的切线垂直时, 有 $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$.

当 $x < 0$ 时, 对函数 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x) = 2x + 2$,

因为 $x_1 < x_2 < 0$, 所以, $(2x_1 + 2)(2x_2 + 2) = -1$,

所以 $2x_1 + 2 < 0$, $2x_2 + 2 > 0$.

因此 $x_2 - x_1 = \frac{1}{2}[-(2x_1 + 2) + (2x_2 + 2)] \geq \sqrt{[-(2x_1 + 2)] \cdot (2x_2 + 2)} = 1$,

当且仅当 $-(2x_1 + 2) = 2x_2 + 2 = 1$, 即 $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ 时等号成立.

所以, 函数 $f(x)$ 的图象在 A , B 处的切线互相垂直时, $x_2 - x_1$ 的最小值为 1.7 分

(III) 当 $x_1 < x_2 < 0$ 或 $x_2 > x_1 > 0$ 时, $f'(x_1) \neq f'(x_2)$, 故 $x_1 < 0 < x_2$.

当 $x_1 < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为

$$y - (x_1^2 + 2x_1 + a) = (2x_1 + 2)(x - x_1), \text{ 即 } y = (2x_1 + 2)x - x_1^2 + a.$$

当 $x_2 > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的切线方程为

$$y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2), \text{ 即 } y = \frac{1}{x_2} \cdot x + \ln x_2 - 1.$$

两切线重合的充要条件是

$$\begin{cases} \frac{1}{x_2} = 2x_1 + 2, & (1) \\ \ln x_2 - 1 = -x_1^2 + a, & (2) \end{cases}$$

由①及 $x_1 < 0 < x_2$ 知, $-1 < x_1 < 0$

由①②得 $a = x_1^2 + \ln \frac{1}{2x_1 + 2} - 1 = x_1^2 - \ln(2x_1 + 2) - 1.$

设 $h(x_1) = x_1^2 - \ln(2x_1 + 2) - 1$ ($-1 < x_1 < 0$),

则 $h'(x_1) = 2x_1 - \frac{1}{x_1 + 1} < 0,$

所以, $h(x_1)$ ($-1 < x_1 < 0$) 是减函数.

则 $h(x_1) > h(0) = -\ln 2 - 1,$

所以 $a > -\ln 2 - 1.$

又当 $x_1 \in (-1, 0)$ 且趋近于 -1 时, $h(x_1)$ 无限增大,

所以 a 的取值范围是 $(-\ln 2 - 1, +\infty).$

故当函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线重合时, a 的取值范围是 $(-\ln 2 - 1, +\infty).$

.....14分

【学科网考点定位】本小题主要考查基本函数的性质、导数的应用、基本不等式、直线的位置关系等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识、考查函数与方程、分类与整合、转化与化归等数学思想. 第 (I) 问两个增区间之间错加并集符号; 第 (II) 问没有注明均值不等式中号成立的条件; 第 (III) 问不会分离变量, 把所求问题转化为函数值域问题.