

绝密★启用前

2014年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题(本大题满分56分)本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 函数 $y = 1 - 2 \cos^2(2x)$ 的最小正周期是_____.
2. 若复数 $z=1+2i$ ，其中 i 是虚数单位，则 $(z + \frac{1}{z}) \cdot \bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3.
若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点重合，则该抛物线的准线方程为 _____
_____.
4. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, a), \\ x^2, & x \in [a, +\infty], \end{cases}$ 若 $f(2) = 4$ ，则 a 的取值范围为_____.
5. 若实数 x, y 满足 $xy=1$ ，则 $x^2 + 2y^2$ 的最小值为_____.
6.
若圆锥的侧面积是底面积的3倍，则其母线与底面角的大小为
(结果用反三角函数值表示).
7. 已知曲线C的极坐标方程为 $p(3\cos\theta - 4\sin\theta) = 1$ ，则C与极轴的交点到极点的距离是
_____.
8. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，若 $a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_3 + a_4 + \dots)$ ，则 $q = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 若 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}$, 则满足 $f(x) < 0$ 的 x 取值范围是____.

10.

为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续10天中随机选择3天进行紧急疏散演练, 则选择的3天恰好为连续3天的概率是____ (结果用最简分数表示).

11. 已知互异的复数 a, b 满足 $ab \neq 0$, 集合 $\{a, b\} = \{a^2, b^2\}$, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设常数 a 使方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = a$ 在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有三个解 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

13.

某游戏的得分为1,2,3,4,5, 随机变量 ξ 表示小白玩游戏的得分.若 $E(\xi) = 4.2$, 则小白得5分的概率至少为____.

14.

已知曲线 $C: x = -\sqrt{4 - y^2}$, 直线 $l: x = 6$. 若对于点 $A(m, 0)$, 存在 C 上的点 P 和 l 上的点 Q 使得 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$, 则 m 的取值范围为____.

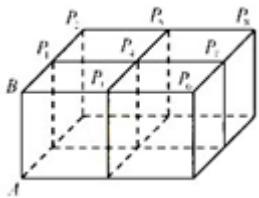
二、选择题: 本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

15. 设 $a, b \in R$, 则“ $a + b > 4$ ”是“ $a > 2$, 且 $b > 2$ ”的 ()

- (A) 充分条件 (B) 必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

16.

如图, 四个棱长为1的正方体排成一个正四棱柱, AB 是一条侧棱, $P_i (i = 1, 2, \dots)$ 是上底面上其余的八个点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}_i (i = 1, 2, \dots)$ 的不同值的个数为 ()



- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

17.

已知 $P_1(a_1, b_1)$ 与 $P_2(a_2, b_2)$ 是直线 $y = kx + 1$ (k 为常数) 上两个不同的点, 则关于 x 和 y 的方程

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 1 \\ a_2x + b_2y = 1 \end{cases}$$

- (A) 无论 k , P_1, P_2 如何, 总是无解 (B) 无论 k , P_1, P_2 如何, 总有唯一解
 (C) 存在 k , P_1, P_2 , 使之恰有两解 (D) 存在 k , P_1, P_2 , 使之有无穷多解

$$18. f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0, \end{cases}$$

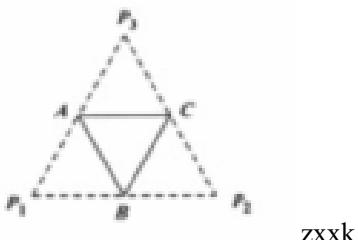
若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为 ().

- (A) $[-1, 2]$ (B) $[-1, 0]$ (C) $[1, 2]$ (D) $[0, 2]$

三. 解答题 (本大题共5题, 满分74分)

19. (本题满分12分)

底面边长为2的正三棱锥 $P-ABC$, 其表面学科网展开图是三角形 $p_1p_2p_3$, 如图, 求 $\triangle p_1p_2p_3$ 的各边长及此三棱锥的体积 V .



zxk

20. (本题满分14分) 本题有2个小题, 第一小题满分6分, 第二小题满分1分。

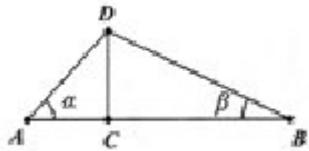
$$\text{设常数 } a \geq 0, \text{ 函数 } f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$$

- (1) 若 $a=4$, 求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$;
 (2) 根据 a 的不同取值, 讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

如图，某公司要在 A 、 B 两地连线上的定点 C 处建造广告牌 CD ，其中 D 为顶端， AC 长 35 米， CB 长 80 米，设 A 、 B 在同一水平面上，从 A 和 B 看 D 的仰角分别为 α 和 β 。

- (1) 设计中 CD 是铅垂方向，若要求 $\tan \alpha \geq 2 \tan \beta$ ，问 CD 的长至多为多少（结果精确到 0.01 米）？
- (2) 施工完成后， CD 与铅垂方向有偏差，现在学科网实测得 $\alpha = 38.12^\circ$, $\beta = 18.45^\circ$ ，求 CD 的长（结果精确到 0.01 米）？



22 (本题满分 16 分) 本题共 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 8 分。

在平面直角坐标系 xoy 中，对于直线 $l: ax + by + c = 0$ 和点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ，记 $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$ 。若 $\eta < 0$ ，则称点 P_1, P_2 被直线 l 分隔。若曲线 C 与直线 l 没有公共点，且曲线 C 上存在点 P_1, P_2 被直线 l 分隔，则称直线 l 为曲线 C 的一条分隔线。

- (1) 求证：点 $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ 被直线 $x + y - 1 = 0$ 分隔；
- (2) 若直线 $y = kx$ 是曲线 $x^2 - 4y^2 = 1$ 的分隔线，求实数 k 的取值范围；
- (3) 动点 M 到点 $Q(0, 2)$ 的距离与到 y 轴的距离之积为 1，设点 M 的轨迹为 E ，求证：通过原点的直线中，有且仅有一条直线是 E 的分割线。

23. (本题满分 18 分) 本题共 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 9 分。

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{3}a_n \leq a_{n+1} \leq 3a_n, n \in N^*, a_1 = 1$ 。

- (1) 若 $a_2 = 2, a_3 = x, a_4 = 9$ ，求 x 的取值范围；
- (2) 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 等比数列， $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，求 q 的取值范围；

- $\frac{1}{3}S_n \leq S_{n+1} \leq 3S_n, n \in N^*$ ，求 q 的取值范围；
- (3) 若 a_1, a_2, \dots, a_k 成等差数列，且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1000$ ，求正整数 k 的最大值，以及 k 取最大值时相应数列 a_1, a_2, \dots, a_k 的公差。

