

绝密★启用前

## 2016年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

### 数学试卷(文史类)

(满分150分, 考试时间120分钟)

考生注意

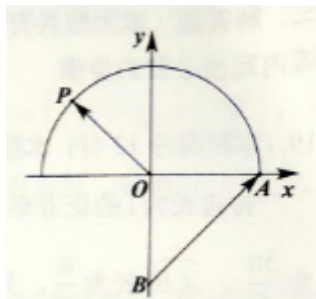
1. 本场考试时间120分钟, 试卷共4页, 满分150分, 答题纸共2页.
2. 作答前, 在答题纸正面填写姓名、准考证号, 反面填写姓名, 将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域, 不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题, 用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题(本大题共有14题, 满分56分) 考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果, 每个空格填对得4分, 否则一律得零分.

1. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则不等式  $|x-3| < 1$  的解集为\_\_\_\_\_.
2. 设  $z = \frac{3+2i}{i}$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z$  的虚部等于\_\_\_\_\_.
3. 已知平行直线  $l_1: 2x+y-1=0, l_2: 2x+y+1=0$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  的距离是\_\_\_\_\_.
4. 某次体检, 5位同学的身高(单位: 米)分别为1.72, 1.78, 1.80, 1.69, 1.76, 则这组数据的中位数是\_\_\_\_\_ (米).
5. 若函数  $f(x) = 4\sin x + a\cos x$  的最大值为5, 则常数  $a =$ \_\_\_\_\_.
6. 已知点  $(3,9)$  在函数  $f(x) = 1+a^x$  的图像上, 则  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x) =$ \_\_\_\_\_.
7. 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ y \geq x+1, \end{cases}$  则  $x-2y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
8. 方程  $3\sin x = 1 + \cos 2x$  在区间  $[0, 2\pi]$  上的解为\_\_\_\_\_.
9. 在  $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^n$  的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为256, 则常数项等于\_\_\_\_\_.
10. 已知  $\triangle ABC$  的三边长分别为3,5,7, 则该三角形的外接圆半径等于\_\_\_\_\_.
11. 某食堂规定, 每份午餐可以在四种水果中任选两种, 则甲、乙两同学各自所选的两种

水果相同的概率为\_\_\_\_\_.

12. 如图, 已知点 $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,-1)$ ,  $P$ 是曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$  上一个动点, 则 $\vec{OP} \times \vec{BA}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



13. 设 $a>0, b>0$ . 若关于 $x, y$ 的方程组 $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + by = 1 \end{cases}$ , 无解, 则 $a + b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

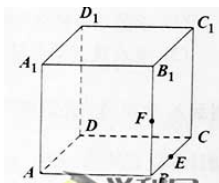
14. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 $k$ 个不同的数组成,  $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和. 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $S_n \in \{2, 3\}$ , 则 $k$ 的最大值为\_\_\_\_\_.

二、选择题（本大题共有4小题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分.

15. 设 $a \in \mathbf{R}$ , 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的（ ）.

(A) 充分非必要条件      (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件      (D) 既非充分也非必要条件

16. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,  $E$ 、 $F$ 分别为 $BC$ 、 $BB_1$ 的中点, 则下列直线中与直线 $EF$ 相交的是（ ）.



(A) 直线 $AA_1$       (B) 直线 $A_1B_1$   
(C) 直线 $A_1D_1$       (D) 直线 $B_1C_1$

17. 设 $a \in \mathbf{R}$ ,  $b \in [0, 2\pi]$ . 若对任意实数 $x$ 都有 $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(ax + b)$ , 则满足条件的有序实数对 $(a, b)$ 的对数为（ ）.

(A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4

18. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数. 对于命题: ①若 $f(x) + g(x)$ 、

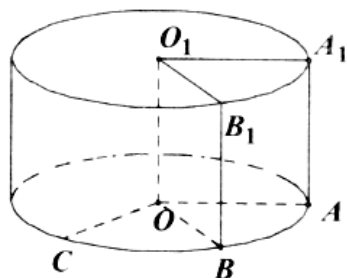
$f(x)+h(x)$ 、 $g(x)+h(x)$ 均是增函数，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 均是增函数；②若 $f(x)+g(x)$ 、 $f(x)+h(x)$ 、 $g(x)+h(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数，下列判断正确的是（ ）.

- (A)①和②均为真命题 (B)①和②均为假命题  
(C)①为真命题，②为假命题 (D)①为假命题，②为真命题

三、解答题（本题共有5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19. （本题满分12分）本题共有2个小题，第1个小题满分6分，第2个小题满分6分.

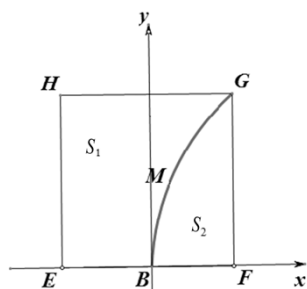
将边长为1的正方形 $AA_1O_1O$ （及其内部）绕 $OO_1$ 旋转一周形成圆柱，如图， $\widehat{AC}$ 长为 $\frac{5\pi}{6}$ ， $\widehat{A_1B_1}$ 长为 $\frac{\pi}{3}$ ，其中 $B_1$ 与 $C$ 在平面 $AA_1O_1O$ 的同侧.



- (1) 求圆柱的体积与侧面积；  
(2) 求异面直线 $O_1B_1$ 与 $OC$ 所成的角的大小.

20. （本题满分14分）本题共有2个小题，第1个小题满分6分，第2个小题满分8分.

有一块正方形菜地 $EFGH$ ， $EH$ 所在直线是一条小河，收获的蔬菜可送到 $F$ 点或河边运走.于是，菜地分为两个区域 $S_1$ 和 $S_2$ ，其中 $S_1$ 中的蔬菜运到河边较近， $S_2$ 中的蔬菜运到 $F$ 点较近，而菜地内 $S_1$ 和 $S_2$ 的分界线 $C$ 上的点到河边与到 $F$ 点的距离相等，现建立平面直角坐标系，其中原点 $O$ 为 $EF$ 的中点，点 $F$ 的坐标为 $(1,0)$ ，如图.



(1) 求菜地内的分界线  $C$  的方程;

(2) 菜农从蔬菜运量估计出  $S_1$  面积是  $S_2$  面积的两倍, 由此得到  $S_1$  面积的“经验值”为  $\frac{8}{3}$ . 设

$M$  是  $C$  上纵坐标为1的点, 请计算以  $EH$  为一边、另一边过点  $M$  的矩形的面积, 及五边形  $EOMGH$  的面积, 并判断哪一个更接近于  $S_1$  面积的“经验值”.

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 直线  $l$  过  $F_2$  且与双曲线交于  $A, B$  两点.

(1) 若  $l$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\triangle F_1AB$  是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程;

(2) 设  $b = \sqrt{3}$ , 若  $l$  的斜率存在, 且  $|AB| = 4$ , 求  $l$  的斜率.

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

对于无穷数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$ , 记  $A = \{x \mid x = a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ ,  $B = \{x \mid x = b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ , 若同时满足条件: ①  $\{a_n\}, \{b_n\}$  均单调递增; ②  $A \cap B = \emptyset$  且  $A \cup B = \mathbf{N}^*$ , 则称  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列.

(1) 若  $a_n = 2n - 1, b_n = 4n - 2$ , 判断  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是否为无穷互补数列, 并说明理由;

(2) 若  $a_n = 2^n$  且  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列, 求数列  $\{b_n\}$  的前16项的和;

(3) 若  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列,  $\{a_n\}$  为等差数列且  $a_{16} = 36$ , 求  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  的通项公式.

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

已知  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{x} + a\right)$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 解不等式  $f(x) > 1$ ;

(2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) + \log_2(x^2) = 0$  的解集中恰有一个元素, 求  $a$  的值;

(3) 设  $a > 0$ , 若对任意  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 函数  $f(x)$  在区间  $[t, t+1]$  上的最大值与最小值的差不超过1, 求  $a$  的取值范围.

