

绝密★启用前

# 2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

## 数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

### 考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 不等式  $\frac{2-x}{x+4} > 0$  的解集是\_\_\_\_\_。

2. 若复数  $z = 1 - 2i$  ( $i$  为虚数单位)，则  $z \cdot \bar{z} + z =$  \_\_\_\_\_。

解析：考查复数基本运算  $z \cdot \bar{z} + z = (1 - 2i)(1 + 2i) + 1 - 2i = 6 - 2i$

3. 动点  $P$  到点  $F(2, 0)$  的距离与它到直线  $x + 2 = 0$  的距离相等，则  $P$  的轨迹方程为 \_\_\_\_\_。

4. 行列式  $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$  的值是\_\_\_\_\_。

5. 圆  $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  的圆心到直线  $l: 3x + 4y + 4 = 0$  的距离  $d =$  \_\_\_\_\_。

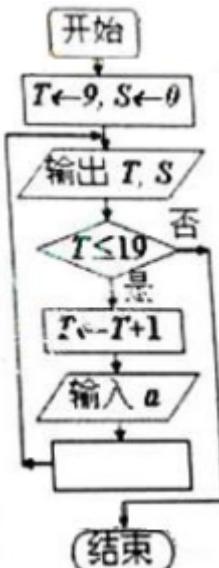
6. 随机变量  $\xi$  的概率分布率由下图给出：

<b>x</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>P(<math>\xi = x</math>)</b>	<b>0.3</b>	<b>0.35</b>	<b>0.2</b>	<b>0.15</b>

则随机变量  $\xi$  的均值是\_\_\_\_\_

7.

2010年上海世博会园区每天9:00开园，20:00停止入园。在右边的框图中， $S$ 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数， $a$ 表示整点报道前1个小时内入园人数，则空白的



执行框内应填入\_\_\_\_\_。

8. 对任意不等于1的正数a，函数 $f(x)=\log_a(x+3)$ 的反函数的图像都经过点P，则点P的坐标

是\_\_\_\_\_

9. 从一副混合后的扑克牌（52张）中随机抽取1张，事件A为“抽得红桃K”，事件B为“抽得为黑桃”，则概率 $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$ （结果用最简分数表示）

10. 在 $n$ 行 $n$ 列矩阵  

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$
中，

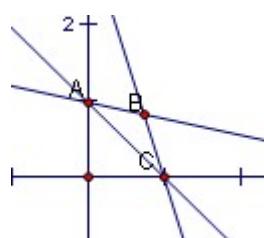
记位于第 $i$ 行第 $j$ 列的数为 $a_{ij}$ （ $i, j = 1, 2, \dots, n$ ）。当 $n=9$ 时， $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{99} = \underline{\hspace{2cm}}$

。

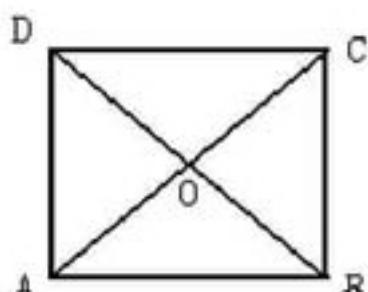
11.

将直线 $l_2 : nx + y - n = 0$ 、 $l_3 : x + ny - n = 0$ （ $n \in N^*$ ,  $n \geq 2$ ）x轴

、y轴围成的封闭图形的面积记为 $S_n$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



12. 如图所示，在边长为4的正方形纸片ABCD中，AC与BD相交于O，剪去 $\triangle AOB$ ，将剩余部分沿OC、OD折叠，使OA、OB重合，则以A、（B）、C、D、O为顶点的四面体的体积为\_\_\_\_\_



13. 如图所示, 直线  $x=2$  与双曲线  $\Gamma: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的渐近线交于  $E_1, E_2$  两点, 记

$\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$ , 任取双曲线  $\Gamma$  上的点  $P$ , 若  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ae_1} + \overrightarrow{be_2}$  ( $a, b \in R$ ), 则  $a, b$  满足的一个等式是\_\_\_\_\_

14. 以集合  $U = \{a, b, c, d\}$  的子集中选出 2 个不同的子集, 需同时满足以下两个条件:

- (1)  $a, b$  都要选出;  
(2) 对选出的任意两个子集  $A$  和  $B$ , 必有  $A \subseteq B$  或  $B \subseteq A$ , 那么共有\_\_\_\_\_种不同的选法。

二. 选择题 (本大题满分 20 分) 本大题共有 4 题, 每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得 5 分, 否则一律得零分。

15. “ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  ( $k \in Z$ )” 是 “ $\tan x = 1$ ” 成立的 【答】( )

- (A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.  
(C) 充分条件. (D) 既不充分也不必要条件.

16. 直线  $l$  的参数方程是  $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \end{cases}$  ( $t \in R$ ), 则  $l$  的方向向量是  $\vec{d}$  可以是 【答】( )

- (A)  $(1, 2)$  (B)  $(2, 1)$  (C)  $(-2, 1)$  (D)  $(1, -2)$

17. 若  $x_0$  是方程  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^{\frac{1}{3}}$  的解, 则  $x_0$  属于区间 【答】( )

- (A)  $(\frac{2}{3}, 1)$  (B)  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$  (C)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  (D)  $(0, \frac{1}{3})$

18. 某人要制作一个三角形, 要求它的三条高的长度分别为  $\frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{5}$ , 则此人能

【答】( )

- (A) 不能作出这样的三角形 (B) 作出一个锐角三角形  
(C) 作出一个直角三角形 (D) 作出一个钝角三角形

三. 解答题 (本大题满分 74 分) 本大题共有 5 题, 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19. (本题满分 12 分)

已知  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 化简:

$$\lg(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) + \lg[\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})] - \lg(1 + \sin 2x).$$

20. (本题满分13分) 本题共有2个小题, 第一个小题满分5分, 第2个小题满分8分。

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 且 $S_n = n - 5a_n - 85$ ,  $n \in N^*$

(1) 证明:  $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并求出 $n$ 为何值时,  $S_n$ 取得最小值, 并说明理由。

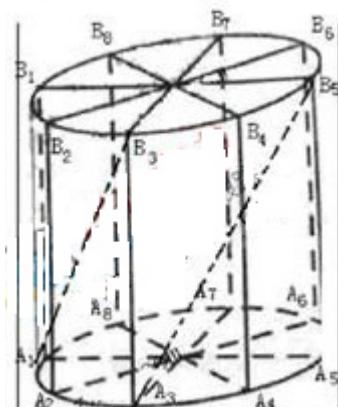
(2)  $S_n = n + 75\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 90$   $n=15$ 取得最小值

21. (本大题满分13分) 本题共有2个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分8分.

如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作4个全等的矩形骨架, 总计耗用9.6米铁丝, 骨架把圆柱底面8等份, 再用 $S$ 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面(不安装上底面).

(1) 当圆柱底面半径 $r$ 取何值时,  $S$ 取得最大值? 并求出该最大值(结果精确到0.01平方米);

(2) 在灯笼内, 以矩形骨架的顶点为点, 安装一些霓虹灯, 当灯笼的底面半径为0.3米时, 求图中两根直线 $A_1B_3$ 与 $A_3B_5$ 所成异面直线所成角的大小(结果用反三角函数表示)



22. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分1

0分。

若实数  $x$ 、 $y$ 、 $m$  满足  $|x-m| > |y-m|$ , 则称  $x$  比  $y$  远离  $m$ .

(1) 若  $x^2 - 1$  比 1 远离 0, 求  $x$  的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数  $a$ 、 $b$ , 证明:  $a^3 + b^3$  比  $a^2b + ab^2$  远离  $2ab\sqrt{ab}$ ;

(3) 已知函数  $f(x)$  的定义域  $D = \{x|x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$ . 任取  $x \in D$ ,  $f(x)$  等于  $\sin x$  和  $\cos x$  中远离 0 的那个值. 写出函数  $f(x)$  的解析式, 并指出它的基本性质 (结论不要求证明).

23 (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分9分.

已知椭圆  $\Gamma$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 点  $P$  的坐标为  $(-a, b)$ .

(1) 若直角坐标平面上的点  $M$ 、 $A(0, -b)$ 、 $B(a, 0)$  满足  $\vec{PM} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PB})$ , 求点  $M$  的坐标;

(2) 设直线  $l_1: y = k_1x + p$  交椭圆  $\Gamma$  于  $C$ 、 $D$  两点, 交直线  $l_2: y = k_2x$  于点  $E$ . 若

$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ , 证明:  $E$  为  $CD$  的中点;

(3) 对于椭圆  $\Gamma$  上的点  $Q(a \cos\theta, b \cos\theta)$

$\sin\theta)$  ( $0 < \theta < \pi$ )，如果椭圆  $\Gamma$  上存在不同的两个交点  $P_1$ 、 $P_2$  满足  $\vec{PP_1} + \vec{PP_2} = \vec{PQ}$ , 写出求作点  $P_1$ 、 $P_2$  的步骤，并求出使  $P_1$ 、 $P_2$  存在的  $\theta$  的取值范围.

