

3. (5分) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y+1 \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$, 则 $z=2x-3y$ 的最小值是 ()
- A. -7 B. -6 C. -5 D. -3

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】59: 不等式的解法及应用.

【分析】先画出满足约束条件: $\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y+1 \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ 的平面区域, 求出平面区域的各

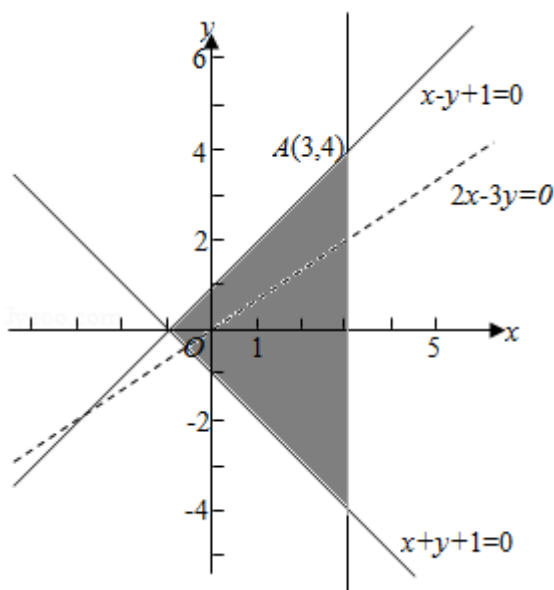
角点, 然后将角点坐标代入目标函数, 比较后, 即可得到目标函数 $z=2x-3y$ 的最小值.

【解答】解: 根据题意, 画出可行域与目标函数线如下图所示,

$$\text{由} \begin{cases} x-y+1=0 \\ x=3 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases},$$

由图可知目标函数在点A(3, 4)取最小值 $z=2 \times 3 - 3 \times 4 = -6$.

故选: B.



【点评】用图解法解决线性规划问题时, 分析题目的已知条件, 找出约束条件和目标函数是关键, 可先将题目中的量分类、列出表格, 理清思绪, 然后列出不等式组(方程组)寻求约束条件, 并就题目所述找出目标函数. 然后将可行域各角点的值一一代入, 最后比较, 即可得到目标函数的最优解.

4. (5分) $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c, 已知 $b=2$, $B=\frac{\pi}{6}$, $C=\frac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $2\sqrt{3}+2$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $2\sqrt{3}-2$ D. $\sqrt{3}-1$

【考点】%H: 三角形的面积公式; HP: 正弦定理.

【专题】58: 解三角形.

【分析】由 $\sin B$, $\sin C$ 及 b 的值, 利用正弦定理求出 c 的值, 再求出 A 的度数, 由 b , c 及 $\sin A$ 的值, 利用三角形的面积公式即可求出三角形 ABC 的面积.

【解答】解: $\because b=2$, $B=\frac{\pi}{6}$, $C=\frac{\pi}{4}$,

$$\therefore \text{由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 得: } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}, A = \frac{7\pi}{12},$$

$$\therefore \sin A = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \sqrt{3} + 1.$$

故选: B.

【点评】此题考查了正弦定理, 三角形的面积公式, 以及两角和与差的余弦函数公式, 熟练掌握正弦定理是解本题的关键.

5. (5分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , P 是 C

上的点 $PF_2 \perp F_1F_2$, $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】K4: 椭圆的性质.

【专题】5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】设 $|PF_2| = x$, 在直角三角形 PF_1F_2 中, 依题意可求得 $|PF_1|$ 与 $|F_1F_2|$, 利用椭圆离心率的性质即可求得答案.

【解答】解: $|PF_2| = x$, $\because PF_2 \perp F_1F_2$, $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$,

$$\therefore |PF_1|=2x, |F_1F_2|=\sqrt{3}x,$$

$$\text{又 } |PF_1|+|PF_2|=2a, |F_1F_2|=2c$$

$$\therefore 2a=3x, 2c=\sqrt{3}x,$$

$$\therefore C \text{ 的离心率为: } e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选：D.

【点评】 本题考查椭圆的简单性质，求得 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 及 $|F_1F_2|$ 是关键，考查理解与应用能力，属于中档题.

6. (5分) 已知 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4}) = (\quad)$

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【考点】 GE：诱导公式；GG：同角三角函数间的基本关系；GS：二倍角的三角函数.

【专题】 56：三角函数的求值.

【分析】 所求式子利用二倍角的余弦函数公式化简，再利用诱导公式变形，将已知等式代入计算即可求出值.

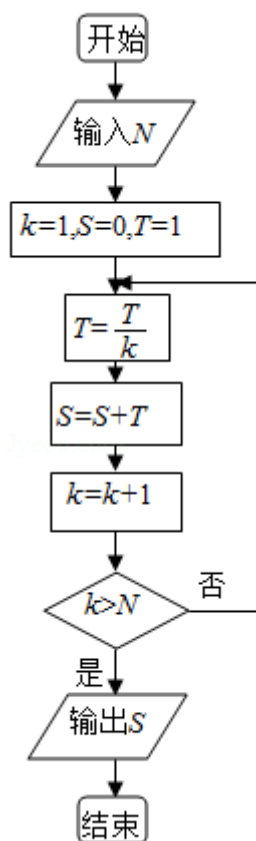
【解答】 解： $\because \sin 2\alpha = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha + \frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2}(1 - \sin 2\alpha) = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{6}.$$

故选：A.

【点评】 此题考查了二倍角的余弦函数公式，以及诱导公式的作用，熟练掌握公式是解本题的关键.

7. (5分) 执行如图的程序框图，如果输入的 $N=4$ ，那么输出的 $S=(\quad)$



- A. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
- B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2}$
- C. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
- D. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$

【考点】EF：程序框图.

【专题】27：图表型.

【分析】由程序中的变量、各语句的作用，结合流程图所给的顺序可知当条件满足时，用 $S + \frac{T}{k}$ 的值代替 S 得到新的 S ，并用 $k+1$ 代替 k ，直到条件不能满足时输出最后算出的 S 值，由此即可得到本题答案.

【解答】解：根据题意，可知该按以下步骤运行

第一次： $S=1$ ，

第二次： $S=1 + \frac{1}{2}$ ，

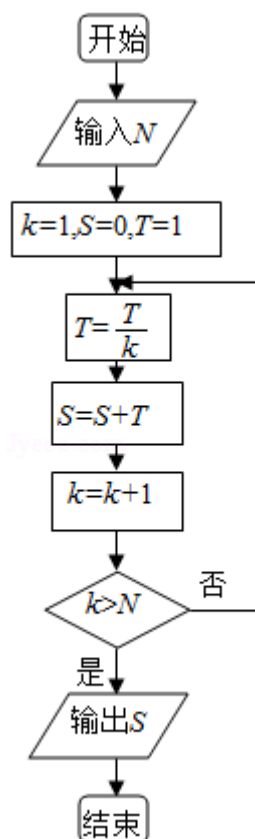
第三次: $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3 \times 2},$

第四次: $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3 \times 2}+\frac{1}{4 \times 3 \times 2}.$

此时 $k=5$ 时, 符合 $k>N=4$, 输出 S 的值.

$\therefore S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3 \times 2}+\frac{1}{4 \times 3 \times 2}$

故选: B.



【点评】 本题主要考查了直到型循环结构, 循环结构有两种形式: 当型循环结构和直到型循环结构, 以及表格法的运用, 属于基础题.

8. (5分) 设 $a=\log_3 2$, $b=\log_5 2$, $c=\log_2 3$, 则 ()

A. $a>c>b$

B. $b>c>a$

C. $c>a>b$

D. $c>b>a$

【考点】 4M: 对数值大小的比较.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 判断对数值的范围, 然后利用换底公式比较对数式的大小即可.

【解答】解：由题意可知： $a=\log_3 2 \in (0, 1)$ ， $b=\log_5 2 \in (0, 1)$ ， $c=\log_2 3 > 1$ ，

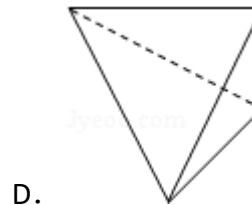
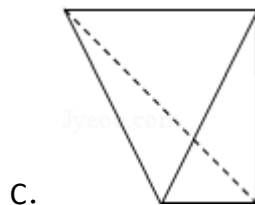
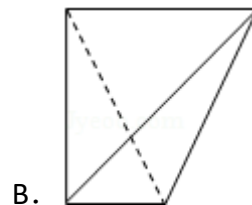
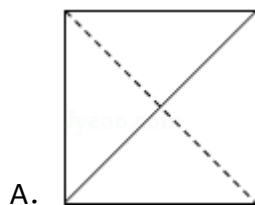
所以 $a=\log_3 2$ ， $b=\log_5 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 5} < \log_3 2$ ，

所以 $c > a > b$ ，

故选：C.

【点评】本题考查对数值的大小比较，换底公式的应用，基本知识的考查.

9. (5分) 一个四面体的顶点在空间直角坐标系O - xyz中的坐标分别是(1, 0, 1)，(1, 1, 0)，(0, 1, 1)，(0, 0, 0)，画该四面体三视图中的正视图时，以zOx平面为投影面，则得到正视图可以为()

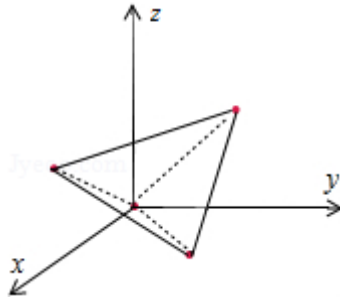


【考点】L7：简单空间图形的三视图.

【专题】11：计算题；13：作图题.

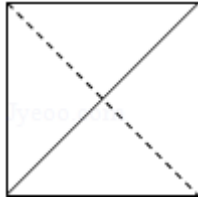
【分析】由题意画出几何体的直观图，然后判断以zOx平面为投影面，则得到正视图即可.

【解答】解：因为一个四面体的顶点在空间直角坐标系O - xyz中的坐标分别是(1, 0, 1)，(1, 1, 0)，(0, 1, 1)，(0, 0, 0)，几何体的直观图如图，是正方体的顶点为顶点的一个正四面体，所以以zOx平面为投影面，



则得到正视图为：

故选：A.



【点评】 本题考查几何体的三视图的判断，根据题意画出几何体的直观图是解题的关键，考查空间想象能力.

10. (5分) 设抛物线C: $y^2=4x$ 的焦点为F, 直线l过F且与C交于A, B两点. 若 $|AF|=3|BF|$, 则l的方程为 ()

A. $y=x-1$ 或 $y=-x+1$

B. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ 或

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

C. $y=\sqrt{3}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{3}(x-1)$

D. $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ 或

$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

【考点】 K8: 抛物线的性质.

【专题】 11: 计算题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 根据题意, 可得抛物线焦点为F(1, 0), 由此设直线l方程为 $y=k(x-1)$, 与抛物线方程联解消去x, 得 $\frac{k}{4}y^2 - y - k = 0$. 再设A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), 由根与系数的关系和 $|AF|=3|BF|$, 建立关于 y_1, y_2 和k的方程组, 解之可得k值, 从而得到直线l的方程.

【解答】 解: \because 抛物线C方程为 $y^2=4x$, 可得它的焦点为F(1, 0),

\therefore 设直线l方程为 $y=k(x-1)$

$$\text{由} \begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \text{消去} x, \text{得} \frac{k}{4}y^2 - y - k = 0$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{可得} y_1 + y_2 = \frac{4}{k}, y_1 y_2 = -4 \dots (*)$$

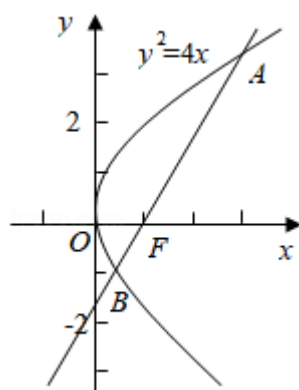
$$\therefore |AF| = 3|BF|,$$

$$\therefore y_1 + 3y_2 = 0, \text{可得} y_1 = -3y_2, \text{代入} (*) \text{得} -2y_2 = \frac{4}{k} \text{且} -3y_2^2 = -4,$$

$$\text{消去} y_2 \text{得} k^2 = 3, \text{解之得} k = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{直线} l \text{方程为} y = \sqrt{3}(x-1) \text{ 或 } y = -\sqrt{3}(x-1)$$

故选: C.



【点评】 本题给出抛物线的焦点弦 AB 被焦点 F 分成 $1:3$ 的两部分, 求直线 AB 的方程, 着重考查了抛物线的标准方程、简单几何性质和直线与圆锥曲线的位置关系等知识, 属于中档题.

11. (5分) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 下列结论中错误的是 ()

- A. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$
- B. 函数 $y = f(x)$ 的图象是中心对称图形
- C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减
- D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$

【考点】 6B: 利用导数研究函数的单调性; 6D: 利用导数研究函数的极值.

【专题】 16: 压轴题; 53: 导数的综合应用.

【分析】 对于 A, 对于三次函数 $f(x)$

)= x^3+ax^2+bx+c , 由于当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 故在区间 $(-\infty, +\infty)$ 肯定存在零点;

对于B, 根据对称变换法则, 求出对应中心坐标, 可以判断;

对于C: 采用取特殊函数的方法, 若取 $a=-1, b=-1, c=0$, 则 $f(x)=x^3-x^2-x$, 利用导数研究其极值和单调性进行判断;

D: 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 根据导数的意义, 则 $f'(x_0)=0$, 正确.

【解答】解:

A、对于三次函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,

A: 由于当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$,

故 $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0)=0$, 故A正确;

$$\begin{aligned} B、\because f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+f(x) &= \left(-\frac{2a}{3}-x\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}-x\right)^2+b\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+c+x^3+ \\ &\quad ax^2+bx+c=\frac{4a^3}{27}-\frac{2ab}{3}+2c, \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{a}{3}\right)=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c,$$

$$\therefore f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+f(x)=2f\left(-\frac{a}{3}\right),$$

\therefore 点 $P\left(-\frac{a}{3}, f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$ 为对称中心, 故B正确.

C、若取 $a=-1, b=-1, c=0$, 则 $f(x)=x^3-x^2-x$,

对于 $f(x)=x^3-x^2-x$, $\therefore f'(x)=3x^2-2x-1$

\therefore 由 $f'(x)=3x^2-2x-1>0$ 得 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

由 $f'(x)=3x^2-2x-1<0$ 得 $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

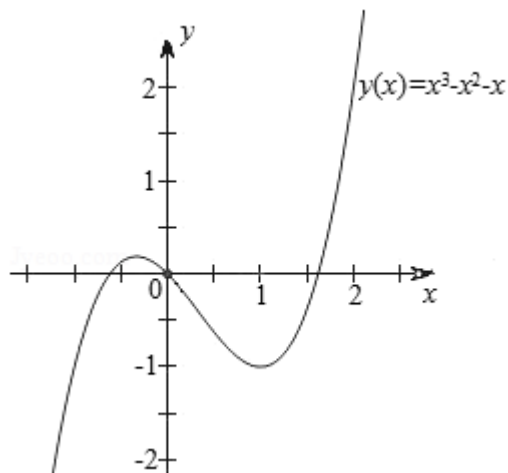
\therefore 函数 $f(x)$ 的单调增区间为: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right), (1, +\infty)$, 减区间为: $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$,

故1是 $f(x)$ 的极小值点, 但 $f(x)$

在区间 $(-\infty, 1)$ 不是单调递减, 故C错误;

D: 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 根据导数的意义, 则 $f'(x_0)=0$, 故D正确.

由于该题选择错误的, 故选: C.



【点评】 本题考查了导数在求函数极值中的应用，利用导数求函数的单调区间，及导数的运算.

12. (5分) 若存在正数 x 使 $2^x(x - a) < 1$ 成立，则 a 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

【考点】 3E: 函数单调性的性质与判断; 7E: 其他不等式的解法.

【专题】 59: 不等式的解法及应用.

【分析】 转化不等式为 $a > x - \frac{1}{2^x}$ ，利用 x 是正数，通过函数的单调性，求出 a 的范围即可.

【解答】 解: 因为 $2^x(x - a) < 1$ ，所以 $a > x - \frac{1}{2^x}$ ，
函数 $y = x - \frac{1}{2^x}$ 是增函数， $x > 0$ ，所以 $y > -1$ ，即 $a > -1$ ，
所以 a 的取值范围是 $(-1, +\infty)$.

故选: D.

【点评】 本题考查不等式的解法，函数单调性的应用，考查分析问题解决问题的能力.

二、填空题: 本大题共4小题，每小题4分.

13. (4分) 从1, 2, 3, 4, 5中任意取出两个不同的数，其和为5的概率是__

0.2.

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】由题意结合组合数公式可得总的基本事件数，再找出和为5的情形，由古典概型的概率公式可得答案.

【解答】解：从1，2，3，4，5中任意取出两个不同的数共有 $C_5^2=10$ 种情况，

和为5的有（1，4）（2，3）两种情况，

故所求的概率为： $\frac{2}{10}=0.2$

故答案为：0.2

【点评】本题考查古典概型及其概率公式，属基础题.

14. （4分）已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \underline{2}$.

【考点】90：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】根据两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，可得要求的式子为

$(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$ ，再根据两个向量垂直的性质，运算求得结果.

【解答】解： \because 已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ，

故 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} +$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 4 + 0 - 0 - \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

故答案为2.

【点评】本题主要考查两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，两个向量垂直的性质，属于中档题.

15. （4分）已知正四棱锥O - ABCD的体积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，底面边长为 $\sqrt{3}$ ，则以O为球心，OA为半径的球的表面积为 $\underline{24\pi}$.

【考点】L3：棱锥的结构特征；LG：球的体积和表面积.

【专题】16：压轴题；5F：空间位置关系与距离.

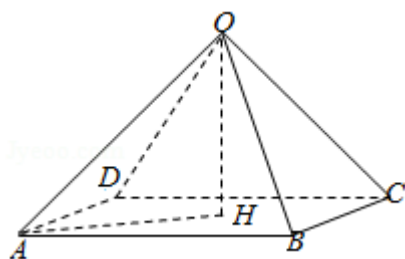
【分析】先直接利用锥体的体积公式即可求得正四棱锥O - ABCD的高，再利用直角三角形求出正四棱锥O - ABCD的侧棱长OA，最后根据球的表面积公式计算即得.

【解答】解：如图，正四棱锥O - ABCD的体积 $V=\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\times OH=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,
 $\therefore OH=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

在直角三角形OAH中， $OA=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$

所以表面积为 $4\pi r^2=24\pi$;

故答案为：24 π .



【点评】本题考查锥体的体积、球的表面积计算，考查学生的运算能力，属基础题.

16. (4分) 函数 $y=\cos(2x+\phi)$ ($-\pi\leq\phi<\pi$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后，与函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象重合，则 $\phi=\underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$.

【考点】HJ：函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换.

【专题】11：计算题；16：压轴题；57：三角函数的图像与性质.

【分析】根据函数图象平移的公式，可得平移后的图象为 $y=\cos[2(x-\frac{\pi}{2})+\phi]$ 的图象，即 $y=\cos(2x+\phi-\pi)$ 的图象. 结合题意得函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})=$

$\cos(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})$ 的图象与 $y = \cos(2x + \phi - \pi)$ 图象重合，由此结合三角函数的诱导公式即可算出 ϕ 的值.

【解答】 解：函数 $y = \cos(2x + \phi)$ ($-\pi \leq \phi < \pi$) 的图象向右平移

$\frac{\pi}{2}$ 个单位后，得平移后的图象的函数解析式为

$$y = \cos[2(x - \frac{\pi}{2}) + \phi] = \cos(2x + \phi - \pi),$$

$$\text{而函数 } y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}),$$

由函数 $y = \cos(2x + \phi)$ ($-\pi \leq \phi < \pi$) 的图象向右平移

$\frac{\pi}{2}$ 个单位后，与函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象重合，得

$$2x + \phi - \pi = 2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}, \text{ 解得: } \phi = \frac{5\pi}{6}.$$

符合 $-\pi \leq \phi < \pi$.

故答案为 $\frac{5\pi}{6}$.

【点评】 本题给出函数 $y = \cos(2x + \phi)$ 的图象平移，求参数 ϕ 的值. 着重考查了函数图象平移的公式、三角函数的诱导公式和函数 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的图象变换等知识，属于基础题.

三、解答题： 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (12分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零， $a_1 = 25$ ，且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2}$.

【考点】 84: 等差数列的通项公式; 88: 等比数列的通项公式; 8E: 数列的求和.

【专题】 54: 等差数列与等比数列.

【分析】 (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d \neq 0$ ，利用成等比数列的定义可得，

$$a_{11}^2 = a_1 a_{13}, \text{ 再利用等差数列的通项公式可得 } (a_1 + 10d)^2 = a_1(a_1 + 12d), \text{ 化}$$

为 $d(2a_1 + 25d) = 0$ ，解出 d 即可得到通项公式 a_n ;

(II) 由(I)可得 $a_{3n-2} = -2(3n-2) + 27 = -6n + 31$, 可知此数列是以25为首项, -6 为公差的等差数列. 利用等差数列的前 n 项和公式即可得出 $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2}$.

【解答】解: (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d \neq 0$,

由题意 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列, $\therefore a_{11}^2 = a_1 a_{13}$,

$$\therefore (a_1 + 10d)^2 = a_1(a_1 + 12d), \text{ 化为 } d(2a_1 + 25d) = 0,$$

$$\because d \neq 0, \therefore 2 \times 25 + 25d = 0, \text{ 解得 } d = -2.$$

$$\therefore a_n = 25 + (n-1) \times (-2) = -2n + 27.$$

(II) 由(I)可得 $a_{3n-2} = -2(3n-2) + 27 = -6n + 31$, 可知此数列是以25为首项, -6 为公差的等差数列.

$$\therefore S_n = a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2} = \frac{n(a_1 + a_{3n-2})}{2}$$

$$= \frac{n(25 - 6n + 31)}{2}$$

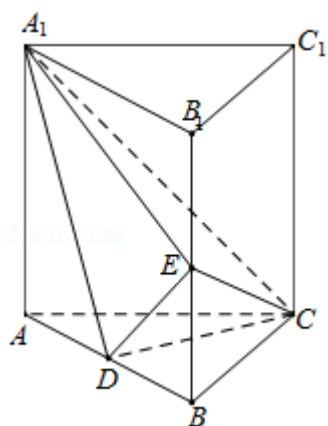
$$= -3n^2 + 28n.$$

【点评】熟练掌握等差数列与等比数列的通项公式及其前 n 项和公式是解题的关键.

18. (12分) 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点

(I) 证明: $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD ;

(II) $AA_1 = AC = CB = 2, AB = 2\sqrt{2}$, 求三棱锥 $C - A_1DE$ 的体积.



【考点】LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积; LS: 直线与平面平行.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

【分析】（Ⅰ）连接 AC_1

交 A_1C 于点 F ，则 DF 为三角形 ABC_1 的中位线，故 $DF \parallel BC_1$. 再根据直线和平面平行的判定定理证得

$BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .

（Ⅱ）由题意可得此直三棱柱的底面 ABC 为等腰直角三角形，由 D 为 AB 的中点可得 $CD \perp$ 平面 ABB_1A_1 . 求得 CD 的值，利用

勾股定理求得 A_1D 、 DE 和 A_1E 的值，可得 $A_1D \perp DE$. 进而求得 $S_{\triangle A_1DE}$ 的值，再根

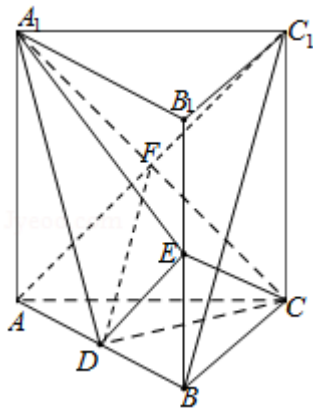
据三棱锥 $C - A_1DE$ 的体积

为 $\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1DE} \cdot CD$ ，运算求得结果.

【解答】解：（Ⅰ）证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 F ，则 F 为 AC_1 的中点.

\because 直棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D ， E 分别是 AB ， BB_1 的中点，故 DF 为三角形 ABC_1 的中位线，故 $DF \parallel BC_1$.

由于 $DF \subset$ 平面 A_1CD ，而 BC_1 不在平面 A_1CD 中，故有 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .



（Ⅱ） $\because AA_1 = AC = CB = 2$ ， $AB = 2\sqrt{2}$ ，故此直三棱柱的底面 ABC 为等腰直角三角形.

由 D 为 AB 的中点可得 $CD \perp$ 平面 ABB_1A_1 ， $\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \sqrt{2}$.

$\because A_1D = \sqrt{A_1A^2 + AD^2} = \sqrt{6}$ ，同理，利用勾股定理求得 $DE = \sqrt{3}$ ， $A_1E = 3$.

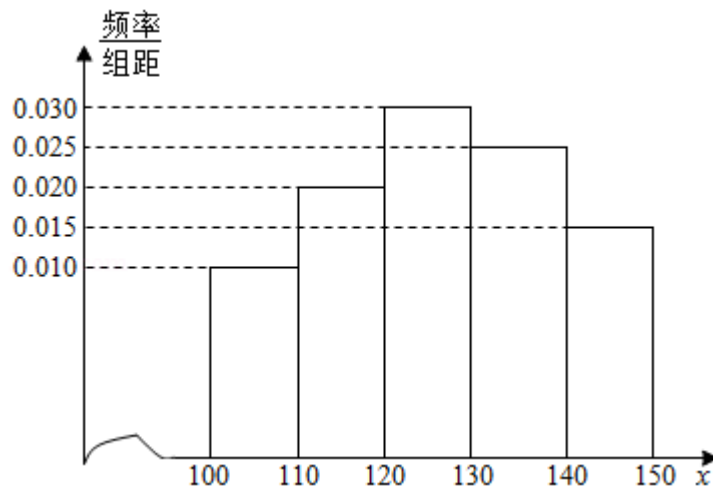
再由勾股定理可得 $A_1D^2 + DE^2 = A_1E^2$ ， $\therefore A_1D \perp DE$.

$$\therefore S_{\triangle A_1DE} = \frac{1}{2} \cdot A_1D \cdot DE = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore V_{C-A_1DE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1DE} \cdot CD = 1.$$

【点评】 本题主要考查直线和平面平行的判定定理的应用，求三棱锥的体积，体现了数形结合的数学思想，属于中档题.

19. (12分) 经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出1t该产品获利润500元，未售出的产品，每1t亏损300元. 根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了130t该农产品. 以 X (单位: t, $100 \leq X \leq 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量， T (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.



- (I) 将 T 表示为 X 的函数;
 (II) 根据直方图估计利润 T 不少于57000元的概率.

【考点】 B8: 频率分布直方图.

【专题】 5I: 概率与统计.

【分析】 (I) 由题意先分段写出，当 $X \in [100, 130)$ 时，当 $X \in [130, 150)$ 时，和利润值，最后利用分段函数的形式进行综合即可.

(II) 由(I)知，利润 T 不少于57000元，当且仅当 $120 \leq X \leq 150$. 再由直方图知需求量 $X \in [120, 150]$ 的频率为0.7，利用样本估计总体的方法得出下一个销售季度的利润 T 不少于57000元的概率的估计值.

【解答】 解: (I) 由题意得，当 $X \in [100, 130)$ 时， $T = 500X - 300(130 - X) = 800X - 39000$,

当 $X \in [130, 150]$ 时， $T = 500 \times 130 = 65000$,

$$\therefore T = \begin{cases} 800X - 39000, & X \in [100, 130) \\ 65000, & X \in [130, 150] \end{cases}.$$

(II) 由(I)知, 利润 T 不少于57000元, 当且仅当 $120 \leq X \leq 150$.

由直方图知需求量 $X \in [120, 150]$ 的频率为0.7,

所以下一个销售季度的利润 T 不少于57000元的概率的估计值为0.7.

【点评】 本题考查用样本的频率分布估计总体分布及识图的能力, 求解的重点是对题设条件及直方图的理解, 了解直方图中每个小矩形的面积的意义.

20. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$, 在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$.

(I) 求圆心 P 的轨迹方程;

(II) 若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求圆 P 的方程.

【考点】 J1: 圆的标准方程; J3: 轨迹方程.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 (I) 由题意, 可直接在弦心距、弦的一半及半径三者组成的直角三角形中利用勾股定理建立关于点 P 的横纵坐标的方程, 整理即可得到所求的轨迹方程;

(II) 由题, 可先由点到直线的距离公式建立关于点 P 的横纵坐标的方程, 将此方程与(I)所求的轨迹方程联立, 解出点 P 的坐标, 进而解出圆的半径即可写出圆 P 的方程.

【解答】 解: (I) 设圆心 $P(x, y)$, 由题意得圆心到 x 轴的距离与半径之间的关系为 $2 = \sqrt{y^2 + r^2}$, 同理圆心到 y 轴的距离与半径之间的关系为 $3 = \sqrt{x^2 + r^2}$, 由两式整理得 $x^2 + 3 = y^2 + 2$, 整理得 $y^2 - x^2 = 1$ 即为圆心 P 的轨迹方程, 此轨迹是等轴双曲线

(II) 由 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得, $\frac{\sqrt{2} - |x - y|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $|x - y| = 1$, 即 $x = y + 1$ 或 $y = x + 1$, 分别代入 $y^2 - x^2 = 1$ 解得 $P(0, -1)$ 或 $P(0, 1)$

若 $P(0, -1)$, 此时点 P 在 y 轴上, 故半径为 $\sqrt{3}$, 所以圆 P 的方程为 $(y + 1)^2 + x^2 = 3$;

若P(0, 1), 此时点P在y轴上, 故半径为 $\sqrt{3}$, 所以圆P的方程为 $(y-1)^2+x^2=3$;

综上, 圆P的方程为 $(y+1)^2+x^2=3$ 或 $(y-1)^2+x^2=3$

【点评】 本题考查求轨迹方程的方法解析法及点的直线的距离公式、圆的标准方程与圆的性质, 解题的关键是理解圆的几何特征, 将几何特征转化为方程

21. (12分) 已知函数 $f(x)=x^2e^{-x}$

(I) 求 $f(x)$ 的极小值和极大值;

(II) 当曲线 $y=f(x)$ 的切线l的斜率为负数时, 求l在x轴上截距的取值范围.

【考点】 5C: 根据实际问题选择函数类型; 6D: 利用导数研究函数的极值; 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题; 35: 转化思想; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (I) 利用导数的运算法则即可得出 $f'(x)$, 利用导数与函数单调性的关系及函数的极值点的定义, 即可求出函数的极值;

(II) 利用导数的几何意义即可得到切线的斜率, 得出切线的方程, 利用方程求出与x轴交点的横坐标, 再利用导数研究函数的单调性、极值、最值即可

【解答】 解: (I) $\because f(x)=x^2e^{-x}$,

$$\therefore f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2),$$

令 $f'(x)=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=2$,

令 $f'(x)>0$, 可解得 $0<x<2$;

令 $f'(x)<0$, 可解得 $x<0$ 或 $x>2$,

故函数在区间 $(-\infty, 0)$ 与 $(2, +\infty)$ 上是减函数, 在区间 $(0, 2)$ 上是增函数.

$$\therefore x=0 \text{ 是极小值点, } x=2 \text{ 极大值点, 又 } f(0)=0, f(2)=\frac{4}{e^2}.$$

故 $f(x)$ 的极小值和极大值分别为 $0, \frac{4}{e^2}$.

(Ⅱ) 设切点为 $(x_0, x_0^2 e^{-x_0})$,

则切线方程为 $y - x_0^2 e^{-x_0} = e^{-x_0} (2x_0 - x_0^2) (x - x_0)$,

令 $y=0$, 解得 $x = \frac{x_0^2 - x_0}{x_0 - 2} = (x_0 - 2) + \frac{2}{x_0 - 2} + 3$,

∵ 曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 的斜率为负数,

$$\therefore e^{-x_0} (2x_0 - x_0^2) < 0,$$

∴ $x_0 < 0$ 或 $x_0 > 2$,

$$\text{令 } f(x_0) = x_0 + \frac{2}{x_0 - 2} + 1,$$

$$\text{则 } f'(x_0) = 1 - \frac{2}{(x_0 - 2)^2} = \frac{(x_0 - 2)^2 - 2}{(x_0 - 2)^2}.$$

① 当 $x_0 < 0$ 时, $(x_0 - 2)^2 - 2 > 0$, 即 $f'(x_0) > 0$, ∴ $f(x_0)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调

递增, ∴ $f(x_0) < f(0) = 0$;

② 当 $x_0 > 2$ 时, 令 $f'(x_0) = 0$, 解得 $x_0 = 2 + \sqrt{2}$.

当 $x_0 > 2 + \sqrt{2}$ 时, $f'(x_0) > 0$, 函数 $f(x_0)$ 单调递增; 当 $2 < x_0 < 2 + \sqrt{2}$ 时, $f'(x_0) < 0$, 函数 $f(x_0)$ 单调递减.

故当 $x_0 = 2 + \sqrt{2}$ 时, 函数 $f(x_0)$ 取得极小值, 也即最小值, 且 $f(2 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$.

综上所述: 切线 l 在 x 轴上截距的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup [3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

【点评】 本题考查利用导数求函数的极值与利用导数研究函数的单调性、切线、函数的值域, 综合性强, 考查了推理能力和计算能力.

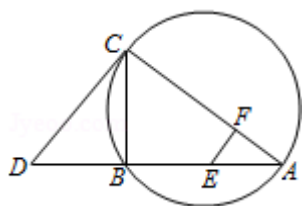
选做题. 请考生在第22、23、24题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一部分, 作答时请写清题号.

22. 【选修4-1几何证明选讲】

如图, CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, AB 的延长线交直线 CD 于点 D , E 、 F 分别为弦 AB 与弦 AC 上的点, 且 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$, B 、 E 、 F 、 C 四点共圆.

(1) 证明: CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;

(2) 若 $DB=BE=EA$ ，求过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值



【考点】NC：与圆有关的比例线段.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】(1) 已知 CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线，利用弦切角定理可得 $\angle DCB = \angle A$ ，
及 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$ ，可知 $\triangle CDB \sim \triangle AEF$ ，于是 $\angle CBD = \angle AFE$.

利用 B 、 E 、 F 、 C 四点共圆，可得 $\angle CFE = \angle DBC$ ，进而得到 $\angle CFE = \angle AFE = 90^\circ$ 即可证明 CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径；

(2) 要求过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值. 只需求出其外接圆的直径的平方之比即可. 由过 B 、 E 、 F 、 C 四点的圆的直径为 CE ，及 $DB=BE$ ，可得 $CE=DC$ ，利用切割线定理可得 $DC^2 = DB \cdot DA$ ， $CA^2 = CB^2 + BA^2$ ，都用 D 表示即可.

【解答】(1) 证明： $\because CD$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线， $\therefore \angle DCB = \angle A$ ，

$$\because BC \cdot AE = DC \cdot AF, \therefore \frac{BC}{FA} = \frac{DC}{EA}.$$

$$\therefore \triangle CDB \sim \triangle AEF, \therefore \angle CBD = \angle AFE.$$

$$\because B、E、F、C \text{ 四点共圆}, \therefore \angle CFE = \angle DBC, \therefore \angle CFE = \angle AFE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle CBA = 90^\circ, \therefore CA \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 外接圆的直径};$$

(2) 连接 CE ， $\because \angle CBE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \text{过 } B、E、F、C \text{ 四点的圆的直径为 } CE, \text{ 由 } DB=BE, \text{ 得 } CE=DC,$$

$$\text{又 } BC^2 = DB \cdot BA = 2DB^2,$$

$$\therefore CA^2 = 4DB^2 + BC^2 = 6DB^2.$$

$$\text{而 } DC^2 = DB \cdot DA = 3DB^2,$$

$$\text{故过 } B、E、F、C \text{ 四点的圆的面积与 } \triangle ABC \text{ 面积的外接圆的面积比值} = \frac{CE^2}{AC^2} =$$

$$\frac{3DB^2}{6DB^2} = \frac{1}{2}.$$

【点评】熟练掌握弦切角定理、相似三角形的判定与性质、四点共圆的性质、直径的判定、切割线定理、勾股定理等腰三角形的性质是解题的关键.

23. 已知动点P、Q都在曲线C: $\begin{cases} x=2\cos\beta \\ y=2\sin\beta \end{cases}$ (β 为参数)上, 对应参数分别为 $\beta=\alpha$ 与 $\beta=2\alpha$ ($0<\alpha<2\pi$), M为PQ的中点.

(1) 求M的轨迹的参数方程;

(2) 将M到坐标原点的距离d表示为 α 的函数, 并判断M的轨迹是否过坐标原点.

【考点】QH: 参数方程化成普通方程.

【专题】5S: 坐标系和参数方程.

【分析】(1) 利用参数方程与中点坐标公式即可得出;

(2) 利用两点之间的距离公式、三角函数的单调性即可得出.

【解答】解: (1) 依题意有P ($2\cos\alpha$, $2\sin\alpha$), Q ($2\cos2\alpha$, $2\sin2\alpha$), 因此M ($\cos\alpha+\cos2\alpha$, $\sin\alpha+\sin2\alpha$).

M的轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\alpha+\cos2\alpha \\ y=\sin\alpha+\sin2\alpha \end{cases}$ (α 为参数, $0<\alpha<2\pi$).

(2) M点到坐标原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2\cos\alpha}$ ($0<\alpha<2\pi$).

当 $\alpha=\pi$ 时, $d=0$, 故M的轨迹过坐标原点.

【点评】本题考查了参数方程与中点坐标公式、两点之间的距离公式、三角函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

24. (14分) 【选修4 - 5: 不等式选讲】

设a, b, c均为正数, 且 $a+b+c=1$, 证明:

$$(I) \quad ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$$

$$(II) \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1.$$

【考点】R6：不等式的证明.

【专题】14：证明题；16：压轴题.

【分析】（Ⅰ）依题意，由 $a+b+c=1 \Rightarrow (a+b+c)^2=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$,

利用基本不等式可得 $3(ab+bc+ca) \leq 1$ ，从而得证；

（Ⅱ）利用基本不等式可证得： $\frac{a^2}{b}+b \geq 2a$, $\frac{b^2}{c}+c \geq 2b$, $\frac{c^2}{a}+a \geq 2c$ ，三式累加即可证得结论.

【解答】证明：（Ⅰ）由 $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$, $c^2+a^2 \geq 2ca$ 得：

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

由题设得 $(a+b+c)^2=1$ ，即 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$ ，

所以 $3(ab+bc+ca) \leq 1$ ，即 $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$.

（Ⅱ）因为 $\frac{a^2}{b}+b \geq 2a$, $\frac{b^2}{c}+c \geq 2b$, $\frac{c^2}{a}+a \geq 2c$,

故 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c) \geq 2(a+b+c)$ ，即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$.

所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq 1$.

【点评】本题考查不等式的证明，突出考查基本不等式与综合法的应用，考查推理论证能力，属于中档题.