

2014年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. (5分) 已知集合 $A=\{x|x^2-2x=0\}$, $B=\{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
- A. {0} B. {0, 1} C. {0, 2} D. {0, 1, 2}

【考点】1E: 交集及其运算.

【专题】5J: 集合.

【分析】解出集合A, 再由交的定义求出两集合的交集.

【解答】解: $\because A=\{x|x^2-2x=0\}=\{0, 2\}$, $B=\{0, 1, 2\}$,
 $\therefore A \cap B=\{0, 2\}$

故选: C.

【点评】本题考查交的运算, 理解好交的定义是解答的关键.

2. (5分) 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()
- A. $y=\sqrt{x+1}$ B. $y=(x-1)^2$
C. $y=2^{-x}$ D. $y=\log_{0.5}(x+1)$

【考点】4O: 对数函数的单调性与特殊点.

【专题】5I: 函数的性质及应用.

【分析】根据基本初等函数的单调性, 判断各个选项中函数的单调性, 从而得出结论.

【解答】解: 由于函数 $y=\sqrt{x+1}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是增函数, 故满足条件,
由于函数 $y=(x-1)^2$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, 故不满足条件,
由于函数 $y=2^{-x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 故不满足条件,
由于函数 $y=\log_{0.5}(x+1)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是减函数, 故不满足条件,

故选：A.

【点评】本题主要考查函数的单调性的定义和判断，基本初等函数的单调性，属于基础题.

3. (5分) 曲线 $\begin{cases} x=-1+\cos\theta \\ y=2+\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的对称中心 ()

- A. 在直线 $y=2x$ 上 B. 在直线 $y= - 2x$ 上
C. 在直线 $y=x - 1$ 上 D. 在直线 $y=x+1$ 上

【考点】QK: 圆的参数方程.

【专题】17: 选作题；5S: 坐标系和参数方程.

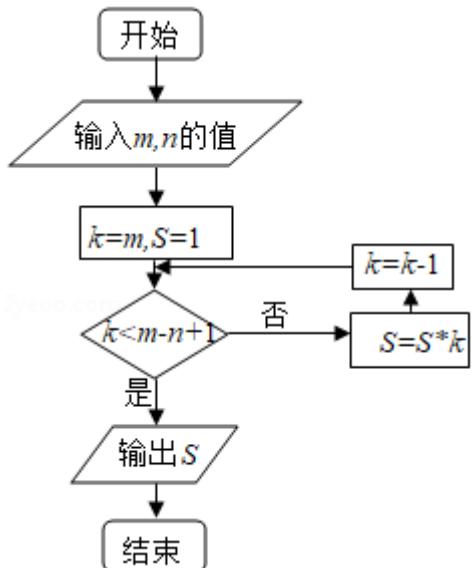
【分析】曲线 $\begin{cases} x=-1+\cos\theta \\ y=2+\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 表示圆，对称中心为圆心，可得结论.

【解答】解：曲线 $\begin{cases} x=-1+\cos\theta \\ y=2+\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 表示圆，圆心为 $(-1, 2)$ ，在直线 $y= - 2x$ 上，

故选：B.

【点评】本题考查圆的参数方程，考查圆的对称性，属于基础题.

4. (5分) 当 $m=7$, $n=3$ 时，执行如图所示的程序框图，输出的 S 的值为 ()



- A. 7 B. 42 C. 210 D. 840

【考点】E7：循环结构.

【专题】11：计算题；5K：算法和程序框图.

【分析】算法的功能是求 $S=7 \times 6 \times \dots \times k$ 的值，根据条件确定跳出循环的 k 值，计算输出 S 的值.

【解答】解：由程序框图知：算法的功能是求 $S=7 \times 6 \times \dots \times k$ 的值，

当 $m=7$, $n=3$ 时, $m - n+1=7 - 3+1=5$,

\therefore 跳出循环的 k 值为 4,

\therefore 输出 $S=7 \times 6 \times 5=210$.

故选：C.

【点评】本题考查了循环结构的程序框图，根据框图的流程判断算法的功能是解答本题的关键.

5. (5 分) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则“ $q>1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的（ ）

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件；87：等比数列的性质.

【专题】54：等差数列与等比数列；5L：简易逻辑.

【分析】根据等比数列的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可得到结论.

【解答】解：等比数列 $-1, -2, -4, \dots$ ，满足公比 $q=2>1$ ，但 $\{a_n\}$ 不是递增数列，充分性不成立.

若 $a_n = -1 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$ 为递增数列，但 $q=\frac{1}{2}>1$ 不成立，即必要性不成立，

故“ $q>1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件，

故选：D.

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，利用等比数列的性质，利用特殊值法是解决本题的关键.

6. (5分) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ kx-y+2 \geq 0, \text{ 且 } z=y-x \text{ 的最小值为 } -4, \text{ 则 } k \text{ 的值为 ()} \\ y \geq 0 \end{cases}$

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

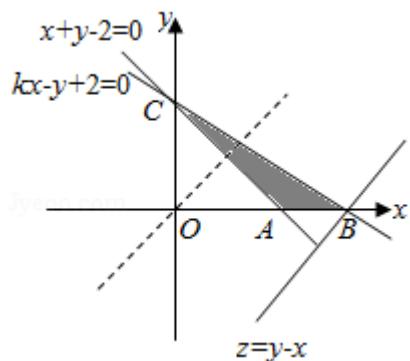
【考点】 7C: 简单线性规划.

【专题】 31: 数形结合; 59: 不等式的解法及应用.

【分析】 对不等式组中的 $kx - y + 2 \geq 0$ 讨论, 当 $k \geq 0$ 时, 可行域内没有使目标函数 $z = y - x$ 取得最小值的最优解, $k < 0$ 时, 若直线 $kx - y + 2 = 0$ 与 x 轴的交点在 $x + y - 2 = 0$ 与 x 轴的交点的左边, $z = y - x$ 的最小值为 -2 , 不合题意, 由此结合约束条件作出可行域, 化目标函数为直线方程的斜截式, 由图得到最优解, 联立方程组求出最优解的坐标, 代入目标函数得答案.

【解答】 解: 对不等式组中的 $kx - y + 2 \geq 0$ 讨论, 可知直线 $kx - y + 2 = 0$ 与 x 轴的交点在 $x + y - 2 = 0$ 与 x 轴的交点的右边,

故由约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ kx-y+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 作出可行域如图,



当 $y=0$, 由 $kx - y + 2 = 0$, 得 $x = -\frac{2}{k}$,

$$\therefore B \left(-\frac{2}{k}, 0 \right).$$

由 $z = y - x$ 得 $y = x + z$.

由图可知, 当直线 $y = x + z$ 过 $B \left(-\frac{2}{k}, 0 \right)$ 时直线在 y 轴上的截距最小, 即 z 最小.

$$\text{此时 } z_{\min} = 0 + \frac{2}{k} = -4, \text{ 解得: } k = -\frac{1}{2}.$$

故选：D.

【点评】本题考查简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题.

7. (5分) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，已知 $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(1, 1, \sqrt{2})$ ，若 S_1 , S_2 , S_3 分别表示三棱锥 $D-ABC$ 在 xOy , yOz , zOx 坐标平面上的正投影图形的面积，则（ ）
- A. $S_1=S_2=S_3$ B. $S_2=S_1$ 且 $S_2 \neq S_3$ C. $S_3=S_1$ 且 $S_3 \neq S_2$ D. $S_3=S_2$ 且 $S_3 \neq S_1$

【考点】JG: 空间直角坐标系.

【专题】5H: 空间向量及应用.

【分析】分别求出三棱锥在各个面上的投影坐标即可得到结论.

【解答】解：设 $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(1, 1, \sqrt{2})$ ，
则各个面上的射影分别为 A' , B' , C' , D' ,

在 xOy 坐标平面上的正投影 $A'(2, 0, 0)$, $B'(2, 2, 0)$, $C'(0, 2, 0)$, $D'(1, 1, 0)$, $S_1=\frac{1}{2} \times 2 \times 2=2$.

在 yOz 坐标平面上的正投影 $A'(0, 0, 0)$, $B'(0, 2, 0)$, $C'(0, 2, 0)$, $D'(0, 1, \sqrt{2})$, $S_2=\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2}=\sqrt{2}$

在 zOx 坐标平面上的正投影 $A'(2, 0, 0)$, $B'(2, 0, 0)$, $C'(0, 0, 0)$, $D'(0, 1, \sqrt{2})$, $S_3=\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2}=\sqrt{2}$,

则 $S_3=S_2$ 且 $S_3 \neq S_1$,

故选：D.

【点评】本题主要考查空间坐标系的应用，求出点对于的投影坐标是解决本题的关键.

8. (5分) 学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级，依次为“优秀”“合格”“不合格”。若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙，且其中至少有一门成绩高于乙，则称“学生甲比学生乙成绩好”。如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好，并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生，

则这一组学生最多有 ()

- A. 2人 B. 3人 C. 4人 D. 5人

【考点】F4：进行简单的合情推理.

【专题】5M：推理和证明.

【分析】分别用 ABC 分别表示优秀、及格和不及格，根据题干中的内容推出文成绩得 A, B, C 的学生各最多只有 1 个，继而推得学生的人数.

【解答】解：用 ABC 分别表示优秀、及格和不及格，显然语文成绩得 A 的学生最多只有 1 个，

语文成绩得 B 得也最多只有一个，

得 C 最多只有一个，

因此学生最多只有 3 人，

显然 (AC) (BB) (CA) 满足条件，

故学生最多有 3 个.

故选：B.

【点评】本题主要考查了合情推理，关键是找到语句中的关键词，培养了推理论证的能力.

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. (5 分) 复数 $(\frac{1+i}{1-i})^2 = \underline{\quad -1 \quad}$.

【考点】A5：复数的运算.

【专题】5N：数系的扩充和复数.

【分析】由复数代数形式的除法运算化简括号内部，然后由虚数单位 i 的运算性质得答案.

【解答】解： $(\frac{1+i}{1-i})^2 = [\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}]^2 = (\frac{2i}{2})^2 = -1$.

故答案为： -1.

【点评】本题考查了复数代数形式的除法运算，考查了虚数单位 i 的运算性质，是基础题.

10. (5分) 已知向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$, $\vec{b}=(2, 1)$, 且 $\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 则 $|\lambda| = \underline{\sqrt{5}}$.

【考点】 9O: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】 5A: 平面向量及应用.

【分析】 设 $\vec{a} = (x, y)$. 由于向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$, $\vec{b}=(2, 1)$, 且 $\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 可得 $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=1 \\ \lambda x+2=0 \\ \lambda y+1=0 \end{cases}$, 解出即可.

【解答】 解: 设 $\vec{a} = (x, y)$.

\because 向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$, $\vec{b}=(2, 1)$, 且 $\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$),

$$\therefore \lambda \vec{a} + \vec{b} = \lambda(x, y) + (2, 1) = (\lambda x + 2, \lambda y + 1),$$

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=1 \\ \lambda x+2=0 \\ \lambda y+1=0 \end{cases}, \text{化为 } \lambda^2=5.$$

解得 $|\lambda| = \sqrt{5}$.

故答案为: $\sqrt{5}$.

【点评】 本题考查了向量的坐标运算、向量的模的计算公式、零向量等基础知识与基本技能方法, 属于基础题.

11. (5分) 设双曲线 C 经过点 $(2, 2)$, 且与 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 具有相同渐近线, 则 C

的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$; 渐近线方程为 $y = \pm 2x$.

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用双曲线渐近线之间的关系，利用待定系数法即可得到结论.

【解答】解：与 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 具有相同渐近线的双曲线方程可设为 $\frac{y^2}{4} - x^2 = m$, ($m \neq 0$),

\because 双曲线 C 经过点 (2, 2),

$$\therefore m = \frac{2^2}{4} - 2^2 = 1 - 4 = -3,$$

即双曲线方程为 $\frac{y^2}{4} - x^2 = -3$, 即 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$,

对应的渐近线方程为 $y = \pm 2x$,

故答案为： $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$, $y = \pm 2x$.

【点评】本题主要考查双曲线的性质，利用渐近线之间的关系，利用待定系数法是解决本题的关键，比较基础.

12. (5 分) 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0$, $a_7 + a_{10} < 0$, 则当 $n = \underline{\underline{8}}$ 时, $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

【考点】83: 等差数列的性质.

【专题】54: 等差数列与等比数列.

【分析】可得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项为正数，从第 9 项开始为负数，进而可得结论.

【解答】解：由等差数列的性质可得 $a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 > 0$,

$$\therefore a_8 > 0, \text{ 又 } a_7 + a_{10} = a_8 + a_9 < 0, \therefore a_9 < 0,$$

\therefore 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项为正数，从第 9 项开始为负数，

\therefore 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项和最大，

故答案为：8.

【点评】本题考查等差数列的性质和单调性，属中档题.

13. (5 分) 把 5 件不同产品摆成一排，若产品 A 与产品 B 相邻，且产品 A 与产

品 C 不相邻，则不同的摆法有 36 种。

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题。

【专题】50：排列组合。

【分析】分 3 步进行分析：①用捆绑法分析 A、B，②计算其中 A、B 相邻又满足 B、C 相邻的情况，即将 ABC 看成一个元素，与其他产品全排列，③在全部数目中将 A、B 相邻又满足 A、C 相邻的情况排除即可得答案。

【解答】解：先考虑产品 A 与 B 相邻，把 A、B 作为一个元素有 A_4^4 种方法，而 A、B 可交换位置，所以有 $2A_4^4=48$ 种摆法，

又当 A、B 相邻又满足 A、C 相邻，有 $2A_3^3=12$ 种摆法，

故满足条件的摆法有 $48 - 12 = 36$ 种。

故答案为：36。

【点评】本题考查分步计数原理的应用，要优先分析受到限制的元素，如本题的 A、B、C。

14. (5 分) 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$ (A, ω, ϕ 是常数， $A > 0, \omega > 0$) 若 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上具有单调性，且 $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}) = -f(\frac{\pi}{6})$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期为 π。

【考点】H1：三角函数的周期性；**HK：**由 $y=A \sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式。

【专题】57：三角函数的图像与性质。

【分析】由 $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$ 求出函数的一条对称轴，结合 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上具有单调性，且 $f(\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{\pi}{6})$ 可得函数的半周期，则周期可求。

【解答】解：由 $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$ ，可知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{12},$$

则 $x = \frac{\pi}{2}$ 离最近对称轴距离为 $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$.

又 $f(\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{\pi}{6})$, 则 $f(x)$ 有对称中心 $(\frac{\pi}{3}, 0)$,

由于 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上具有单调性,

则 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}T \Rightarrow T \geq \frac{2\pi}{3}$, 从而 $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{T}{4} \Rightarrow T = \pi$.

故答案为: π .

【点评】本题考查 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ 型图象的形状, 考查了学生灵活处理问题和解决问题的能力, 是中档题.

三、解答题 (共 6 小题, 共 80 分, 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15. (13 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $AB = 8$, 点 D 在边 BC 上, 且 $CD = 2$,

$$\cos \angle ADC = \frac{1}{7}.$$

(1) 求 $\sin \angle BAD$;

(2) 求 BD , AC 的长.



【考点】 HR: 余弦定理.

【专题】 58: 解三角形.

【分析】 根据三角形边角之间的关系, 结合正弦定理和余弦定理即可得到结论.

【解答】 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\because \cos \angle ADC = \frac{1}{7}$,

$$\therefore \sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \sqrt{1 - (\frac{1}{7})^2} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\text{则 } \sin \angle BAD = \sin(\angle ADC - \angle B) = \sin \angle ADC \cdot \cos B - \cos \angle ADC \cdot \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} -$$

$$\frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } BD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB} = \frac{8 \times \frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = 3,$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot BC \cos B = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 49$,

即 $AC = 7$.

【点评】本题主要考查解三角形的应用, 根据正弦定理和余弦定理是解决本题本题的关键, 难度不大.

16. (13 分) 李明在 10 场篮球比赛中的投篮情况统计如下 (假设各场比赛相互独立);

场次	投篮次数	命中次数	场次	投篮次数	命中次数
主场 1	22	12	客场 1	18	8
主场 2	15	12	客场 2	13	12
主场 3	12	8	客场 3	21	7
主场 4	23	8	客场 4	18	15
主场 5	24	20	客场 5	25	12

- (1) 从上述比赛中随机选择一场, 求李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 的概率;
- (2) 从上述比赛中随机选择一个主场和一个客场, 求李明的投篮命中率一场超过 0.6, 一场不超过 0.6 的概率;
- (3) 记 \bar{x} 是表中 10 个命中次数的平均数, 从上述比赛中随机选择一场, 记 X 为李明在这场比赛中的命中次数, 比较 EX 与 \bar{x} 的大小 (只需写出结论).

【考点】C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式; CH: 离散型随机变量的期望与方差.

【专题】5I: 概率与统计.

【分析】(1) 根据概率公式, 找到李明在该场比赛中超过 0.6 的场次, 计算即可,

(2) 根据互斥事件的概率公式, 计算即可.

(3) 求出平均数和 EX , 比较即可.

【解答】解: (1) 设李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 为事件 A, 由题意知, 李明在该场比赛中超过 0.6 的场次有: 主场 2, 主场 3, 主场 5, 客场 2, 客场 4, 共计 5 场

所以李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 的概率 $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,

(2) 设李明的投篮命中率一场超过 0.6, 一场不超过 0.6 的概率为事件 B, 同理可知, 李明主场命中率超过 0.6 的概率 $P_1 = \frac{3}{5}$, 客场命中率超过 0.6 的概率

$$P_2 = \frac{2}{5},$$

故 $P(B) = P_1 \times (1 - P_2) + P_2 \times (1 - P_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{25}$;

$$(3) \bar{x} = \frac{1}{10} (12+8+12+12+8+7+8+15+20+12) = 11.4$$

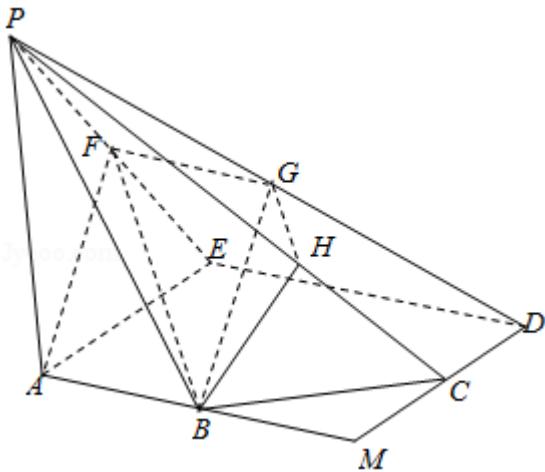
$$EX = \bar{x}$$

【点评】本题主要考查了概率的计算、数学期望, 平均数, 互斥事件的概率, 属于中档题.

17. (14 分) 如图, 正方形 AMDE 的边长为 2, B, C 分别为 AM, MD 的中点, 在五棱锥 P - ABCDE 中, F 为棱 PE 的中点, 平面 ABF 与棱 PD, PC 分别交于点 G, H.

(1) 求证: $AB \parallel FG$;

(2) 若 $PA \perp$ 底面 ABCDE, 且 $PA=AE$, 求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小, 并求线段 PH 的长.



【考点】M1: 直线与平面所成的角.

【专题】11: 计算题; 14: 证明题; 5F: 空间位置关系与距离; 5G: 空间角.

【分析】(1) 运用线面平行的判定定理和性质定理即可证得;

(2) 由于 $PA \perp$ 底面 $ABCDE$, 底面 $AMDE$ 为正方形, 建立如图的空间直角坐标系 $Axyz$, 分别求出 A, B, C, E, P, F , 及向量 \overrightarrow{BC} 的坐标, 设平面 ABF 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 求出一个值, 设直线 BC 与平面 ABF 所成的角为 α , 运用 $\sin\alpha = |\cos<n, \overrightarrow{BC}>|$, 求出角 α ; 设 $H(u, v, w)$, 再设 $\overrightarrow{PH} = \lambda \overrightarrow{PC} (0 < \lambda < 1)$, 用 λ 表示 H 的坐标, 再由 $n \cdot \overrightarrow{AH} = 0$, 求出 λ 和 H 的坐标, 再运用空间两点的距离公式求出 PH 的长.

【解答】(1) 证明: 在正方形 $AMDE$ 中, $\because B$ 是 AM 的中点,

$$\therefore AB \parallel DE, \text{ 又 } AB \not\subset \text{平面 } PDE, \therefore AB \parallel \text{平面 } PDE,$$

$$\because AB \subset \text{平面 } ABF, \text{ 且 } \text{平面 } ABF \cap \text{平面 } PDE = FG,$$

$$\therefore AB \parallel FG;$$

(2) 解: $\because PA \perp$ 底面 $ABCDE$, $\therefore PA \perp AB, PA \perp AE$,

如图建立空间直角坐标系 $Axyz$, 则 $A(0, 0, 0)$,

$$B(1, 0, 0), C(2, 1, 0), P(0, 0, 2),$$

$$E(0, 2, 0), F(0, 1, 1), \overrightarrow{BC} = (1, 1, 0),$$

设平面 ABF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

令 $z=1$, 则 $y=-1$, $\therefore \vec{n}=(0, -1, 1)$,

设直线 BC 与平面 ABF 所成的角为 α , 则

$$\sin\alpha = |\cos<\vec{n}, \vec{BC}>| = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{BC}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{BC}|} \right| = \frac{1}{2},$$

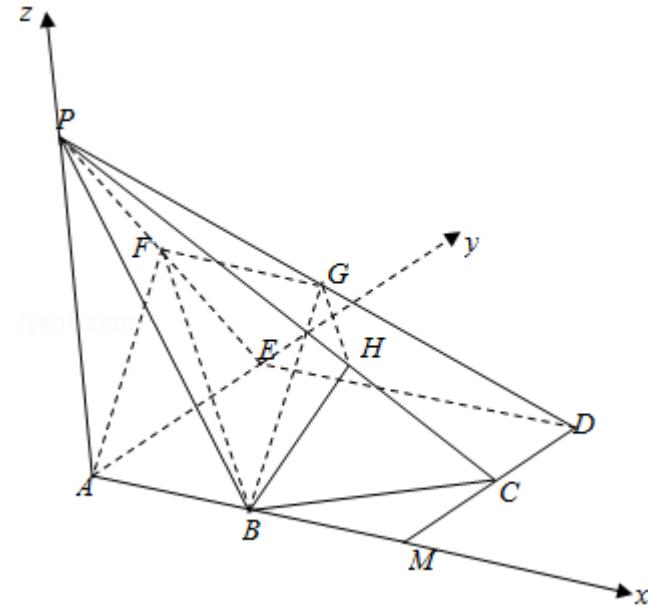
\therefore 直线 BC 与平面 ABF 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$,

设 $H(u, v, w)$, $\because H$ 在棱 PC 上, \therefore 可设 $\vec{PH}=\lambda \vec{PC}$ ($0 < \lambda < 1$),

即 $(u, v, w-2) = \lambda(2, 1, -2)$, $\therefore u=2\lambda$, $v=\lambda$, $w=2-2\lambda$, $\therefore \vec{n}$ 是平面 ABF 的法向量,

$$\therefore \vec{n} \cdot \vec{AH} = 0, \text{ 即 } (0, -1, 1) \cdot (2\lambda, \lambda, 2-2\lambda) = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2}{3}, \therefore H\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\therefore PH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 2.$$



【点评】本题主要考查空间直线与平面的位置关系, 考查直线与平面平行、垂直的判定和性质, 同时考查直线与平面所成的角的求法, 考查运用空间直角坐标系求角和距离, 是一道综合题.

18. (13分) 已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(1) 求证: $f(x) \leq 0$;

(2) 若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 对 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 求 a 的最大值与 b 的最小值.

【考点】 6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】 53: 导数的综合应用.

【分析】 (1) 求出 $f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$, 判定出在区间 $\in (0, \frac{\pi}{2})$

上 $f'(x) = -x \sin x < 0$, 得 $f(x)$ 在区间 $\in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 从而 $f(x) \leq$

$f(0) = 0$.

(2) 当 $x > 0$ 时, “ $\frac{\sin x}{x} > a$ ”等价于“ $\sin x - ax > 0$ ”, “ $\frac{\sin x}{x} < b$ ”等价于“ $\sin x - bx <$

0”构造函数 $g(x) = \sin x - cx$, 通过求函数的导数讨论参数 c 求出函数的最值, 进一步求出 a , b 的最值.

【解答】 解: (1) 由 $f(x) = x \cos x - \sin x$ 得

$$f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x,$$

此在区间 $\in (0, \frac{\pi}{2})$ 上 $f'(x) = -x \sin x < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $\in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

从而 $f(x) \leq f(0) = 0$.

(2) 当 $x > 0$ 时, “ $\frac{\sin x}{x} > a$ ”等价于“ $\sin x - ax > 0$ ”, “ $\frac{\sin x}{x} < b$ ”等价于“ $\sin x - bx <$

0”

令 $g(x) = \sin x - cx$, 则 $g'(x) = \cos x - c$,

当 $c \leq 0$ 时, $g(x) > 0$ 对 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立,

当 $c \geq 1$ 时, 因为对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $g'(x) = \cos x - c < 0$,

所以 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

从而, $g(x) < g(0) = 0$ 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立,

当 $0 < c < 1$ 时, 存在唯一的 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $g'(x_0) = \cos x_0 - c = 0$,

$g(x)$ 与 $g'(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的情况如下:

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, \frac{\pi}{2})$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	↑		↓

因为 $g(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上是增函数,

所以 $g(x_0) > g(0) = 0$ 进一步 $g(x) > 0$ 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立,

当且仅当 $g(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2}c \geq 0$ 即 $0 < c \leq \frac{2}{\pi}$

综上所述当且仅当 $c \leq \frac{2}{\pi}$ 时, $g(x) > 0$ 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立,

当且仅当 $c \geq 1$ 时, $g(x) < 0$ 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立,

所以若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 对 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 则 a 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$, b 的最小值为 1

【点评】本题考查利用导数求函数的单调区间; 利用导数求函数的最值; 考查解决不等式问题常通过构造函数解决函数的最值问题, 属于一道综合题.

19. (14 分) 已知椭圆 $C: x^2 + 2y^2 = 4$,

(1) 求椭圆 C 的离心率

(2) 设 O 为原点, 若点 A 在椭圆 C 上, 点 B 在直线 $y=2$ 上, 且 $OA \perp OB$, 求直线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的位置关系, 并证明你的结论.

【考点】K4: 椭圆的性质; KJ: 圆与圆锥曲线的综合.

【专题】5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】(1) 化椭圆方程为标准式, 求出半长轴和短半轴, 结合隐含条件求出半焦距, 则椭圆的离心率可求;

(2) 设出点 A , B 的坐标分别为 (x_0, y_0) , $(t, 2)$, 其中 $x_0 \neq 0$, 由 $OA \perp OB$ 得到 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 用坐标表示后把 t 用含有 A 点的坐标表示, 然后分 A , B 的横坐

标相等和不相等写出直线 AB 的方程，然后由圆 $x^2+y^2=2$ 的圆心到 AB 的距离和圆的半径相等说明直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切.

【解答】解：(1) 由 $x^2+2y^2=4$ ，得椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

$\therefore a^2=4$, $b^2=2$, 从而 $c^2=a^2-b^2=2$.

因此 $a=2$, $c=\sqrt{2}$.

故椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(2) 直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切.

证明如下：

设点 A, B 的坐标分别为 (x_0, y_0) , $(t, 2)$, 其中 $x_0 \neq 0$.

$\because OA \perp OB$,

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 即 $tx_0 + 2y_0 = 0$, 解得 $t = -\frac{2y_0}{x_0}$.

当 $x_0=t$ 时, $y_0=-\frac{t^2}{2}$, 代入椭圆 C 的方程, 得 $t=\pm\sqrt{2}$.

故直线 AB 的方程为 $x=\pm\sqrt{2}$, 圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\sqrt{2}$.

此时直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切.

当 $x_0 \neq t$ 时, 直线 AB 的方程为 $y-2=\frac{y_0-2}{x_0-t}(x-t)$,

即 $(y_0-2)x-(x_0-t)y+2x_0-ty_0=0$.

圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|2x_0+ty_0|}{\sqrt{(y_0-2)^2+(x_0-t)^2}}$.

又 $x_0^2+2y_0^2=4$, $t=-\frac{2y_0}{x_0}$.

故 $d=\frac{\left|2x_0+\frac{2y_0^2}{x_0}\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+\frac{4y_0^2}{x_0^2}+4}}=\frac{\left|\frac{4+x_0^2}{x_0}\right|}{\sqrt{\frac{x_0^4+8x_0^2+16}{2x_0^2}}}=\sqrt{2}$.

此时直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切.

【点评】本题考查椭圆的简单几何性质, 考查了圆与圆锥曲线的综合, 训练了由

圆心到直线的距离判断直线和圆的位置关系，体现了分类讨论的数学思想方法，考查了计算能力和逻辑思维能力，是压轴题.

20. (13分) 对于数对序列 $P: (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, 记 $T_1(P) = a_1 + b_1$, $T_k(P) = b_k + \max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$ ($2 \leq k \leq n$), 其中 $\max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$ 表示 $T_{k-1}(P)$ 和 $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ 两个数中最大的数,
- (I) 对于数对序列 $P: (2, 5), (4, 1)$, 求 $T_1(P), T_2(P)$ 的值;
- (II) 记 m 为 a, b, c, d 四个数中最小的数, 对于由两个数对 $(a, b), (c, d)$ 组成的数对序列 $P: (a, b), (c, d)$ 和 $P': (c, d), (a, b)$, 试分别对 $m=a$ 和 $m=d$ 两种情况比较 $T_2(P)$ 和 $T_2(P')$ 的大小;
- (III) 在由五个数对 $(11, 8), (5, 2), (16, 11), (11, 11), (4, 6)$ 组成的所有数对序列中, 写出一个数对序列 P 使 $T_5(P)$ 最小, 并写出 $T_5(P)$ 的值 (只需写出结论).

【考点】F9: 分析法和综合法.

【专题】23: 新定义; 48: 分析法.

- 【分析】**(I) 利用 $T_1(P) = a_1 + b_1$, $T_k(P) = b_k + \max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$ ($2 \leq k \leq n$), 可求 $T_1(P), T_2(P)$ 的值;
- (II) $T_2(P) = \max\{a+b+d, a+c+d\}$, $T_2(P') = \max\{c+d+b, c+a+b\}$, 分类讨论, 利用新定义, 可比较 $T_2(P)$ 和 $T_2(P')$ 的大小;
- (III) 根据新定义, 可得结论.

【解答】解: (I) $T_1(P) = 2+5=7$, $T_2(P) = 1+\max\{T_1(P), 2+4\} = 1+\max\{7, 6\}=8$;

(II) $T_2(P) = \max\{a+b+d, a+c+d\}$, $T_2(P') = \max\{c+d+b, c+a+b\}$.

当 $m=a$ 时, $T_2(P') = \max\{c+d+b, c+a+b\} = c+d+b$,

$\because a+b+d \leq c+d+b$, 且 $a+c+d \leq c+b+d$, $\therefore T_2(P) \leq T_2(P')$;

当 $m=d$ 时, $T_2(P') = \max\{c+d+b, c+a+b\} = c+a+b$,

$\because a+b+d \leq c+a+b$, 且 $a+c+d \leq c+a+d$, $\therefore T_2(P) \leq T_2(P')$;

\therefore 无论 $m=a$ 和 $m=d$, $T_2(P) \leq T_2(P')$;

(Ⅲ) 根据数对序列 $(4, 6), (11, 11), (16, 11), (11, 8), (5, 2)$,
可得 $T_1(P) = 4+6=10$; $T_2(P) = 11+15=26$; $T_3(P) = 31+11=42$; $T_4(P)$
 $= 8+42=50$;

$$T_5(P) = 2+50=52;$$

逐一检验可得, 此数对序列使 $T_5(P)$ 最小.

【点评】本题考查新定义, 考查学生分析解决问题的能力, 正确理解与运用新定义是解题的关键, 属于难题.