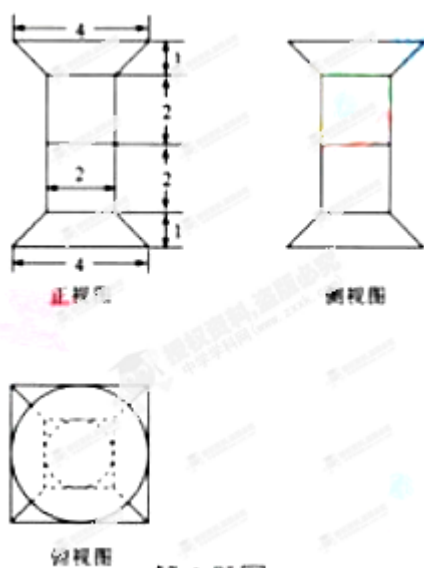


数 学（理工类）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 在复平面内，复数 $z = \frac{2i}{1-i}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 已知集合为 \mathbb{R} ，集合 $A = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1\right\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 6x - 8 \leq 0\}$ ，则 $A \cap C_{\mathbb{R}} B =$
A. $\{x \mid x \leq 0\}$ B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$ C. $\{x \mid 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$ D. $\{x \mid 0 < x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$
- 在一次跳伞训练中，甲、乙两位学员各跳一次。设命题 p 是“甲降落在指定范围”， q 是“乙降落在指定范围”，则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为
A. $(\neg p) \vee (\neg q)$ B. $p \vee (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $p \vee q$
- 将函数 $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的图像向左平移 m ($m > 0$) 个单位长度后，所得到的图像关于 y 轴对称，则 m 的最小值是
A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ，则双曲线 $C_1: \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 1$ 与 $C_2: \frac{y^2}{\sin^2 \theta} - \frac{x^2}{\sin^2 \theta \tan^2 \theta} = 1$ 的
A. 实轴长相等 B. 虚轴长相等 C. 焦距相等 D. 离心率相等
- 已知点 $A(-1,1)$ 、 $B(1,2)$ 、 $C(-2,1)$ 、 $D(3,4)$ ，则向量 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{CD} 方向上的投影为
A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$
- 一辆汽车在高速公路上行驶，由于遇到紧急情况而刹车，以速度 $v(t) = 7 - 3t + \frac{25}{1+t}$ (t 的单位： s ， v 的单位： m/s) 行驶至停止，在此期间汽车继续行驶的距离（单位： m ）是
A. $1 + 25 \ln 5$ B. $8 + 25 \ln \frac{11}{3}$ C. $4 + 25 \ln 5$ D. $4 + 50 \ln 2$
- 一个几何体的三视图如图所示，该几何体从上到下由四个简单几何体组成，其体积分别为 V_1 、 V_2 、 V_3 、 V_4 ，这四个几何体为旋转体，下面两个简单几何体均为多面体，则有

$A. V_1 < V_2 < V_4 < V_3$
 $B. V_1 < V_3 < V_2 < V_4$
 $C. V_2 < V_1 < V_3 < V_4$
 $D. V_2 < V_3 < V_1 < V_4$



第 8 题图

9. 如图，将一个各面都涂了油漆的正方体，切割为 125 个同样大小的小正方体，经过搅拌后，从中抽取一个小正方体，记它的涂漆面数为 X ，则 X 的均值 $E(X) =$

- A. $\frac{126}{125}$
 B. $\frac{6}{5}$
 C. $\frac{168}{125}$
 D. $\frac{7}{5}$



第 9 题图

10. 已知 a 为常数，函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 <$

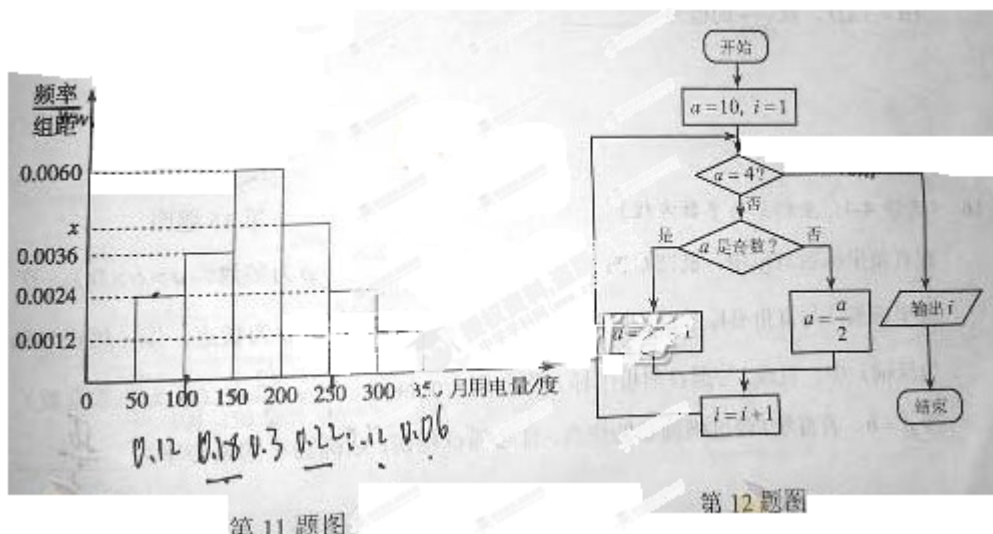
- A. $f(x_1) > 0, f(x_2) > -\frac{1}{2}$
 B. $f(x_1) < 0, f(x_2) < -\frac{1}{2}$
 C. $f(x_1) > 0, f(x_2) < -\frac{1}{2}$
 D. $f(x_1) < 0, f(x_2) > -\frac{1}{2}$

二. 填空题：本大题共 6 小题，考生共需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，请将答案填在答题卡的对应该题号的位置上，答错位置，书写不清，模棱两可均不得分。

11. 从某小区抽取 100 户居民进行月用电量调查，发现其用电量都在 50 至 350 度之间，频率分布直方图如图所示。

- (1) 直方图中 x 的值为 _____;
- (2) 在这些用户中, 用电量落在区间 $[100, 250)$ 内的户数为 _____.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果 $i =$ _____.



13. 设 $x, y, z \in R$, 且满足: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + 2y + 3z = \sqrt{14}$, 则 $x + y + z =$ _____.

14. 古希腊毕达哥拉斯的数学家研究过各种多边形数, 如三角形数 1, 3, 6, 10, ..., 第 n 个三角形数为 $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, 记第 n 个 k 边形数为 $N(n, k) (k \geq 3)$, 以下列出了部分 k 边形数中第 n 个数的表达式:

三角形数 $N(n, 3) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

正方形数 $N(n, 4) = n^2$

五边形数 $N(n, 5) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

六边形数 $N(n, 6) = 2n^2 - n$

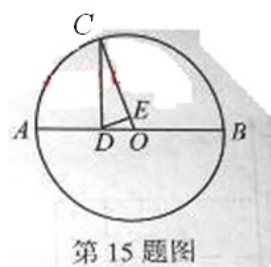
.....
可以推测 $N(n, k)$ 的表达式, 由此计算 $N(10, 24) =$ _____.

(二) 选考题 (请考生在第 15、16 两题中任选一题作答, 请现在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框图用 2B 铅笔涂黑, 如果全选, 则按第 15 题作答结果计分.)

15. (选修 4-1: 几何证明选讲)

如图, 圆 O 上一点 C 在直径 AB 上的射影为 D , 点 D 在半径 OC 上的射影为 E . 若

$AB = 3AD$, $\frac{CE}{EO}$ 的值为 _____.



16. (选修 4-4: 坐标系与参数方程)

在直线坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数, $a > b > 0$). 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴为正半轴为极轴) 中, 直线 l 与圆 O 的极坐标分别为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}m$ (m 为非零常数) 与 $\rho=b$. 若直线 l 经过椭圆 C 的焦点, 且与圆 O 相切, 则椭圆的离心率为_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 对应的边分别为 a, b, c . 已知 $\cos 2A - 3\cos(B+C) = 1$.

(I) 求角 A 的大小;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, 求 $\sin B \sin C$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_2 - a_3| = 10$, $a_1 a_2 a_3 = 125$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 是否存在正整数 m , 使得 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1$? 若存在, 求 m 的最小值; 若不存在, 说明理由.

19. (本小题满分 12 分)

如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A 、 B 的点, 直线 $PC \perp$ 平面 ABC , E, F 分别为 PA, PB 的中点.

(I) 记平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 l , 是判断 l 与平面 PAC 的位置关系, 并加以说明;

(II) 设 (I) 中的直线 l 与圆 O 的另一个交点为 D , 且点 Q 满足 $D\vec{Q} = \frac{1}{2}C\vec{P}$. 记直线 PQ 与平面 ABC 所成的角为 θ , 异面直线所成的锐角为 α , 二面角 $E-l-C$ 的大小为 β , 求证: $\sin \theta = \sin \alpha \sin \beta$.

20. (本小题满分 12 分)

假设每天从甲地去乙地的旅客人数

X 是服从正态分布 $N(800, 50^2)$ 的随机变量,

记一天中从甲地去乙地的旅客人数不超过 900 的概率为 P_n .

求 P_n 的值:

(I) (参考数据: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 有 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$,)

$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

(II) 某客运公司用 A 、 B 两种型号的车辆承担甲、乙两地间的长途客运业务, 每年每天往返一次, A 、 B 两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人, 从甲地去乙地的营运成本分别为 1600 元/辆和 2400 元/辆. 公司拟组建一个不超过 21 辆车的客运车队, 并要求 B 型车不多于 A 型车 7 辆. 若每天要以不小于 P_0 的概率运完从甲地去乙地的旅客, 且使公司从甲地去乙地的营运成本最小, 那么应配备

A 型车、 B 型车各多少辆?

21. (本小题满分 13 分)

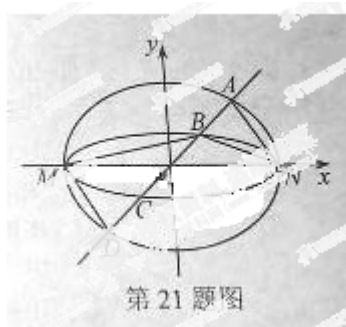
如图, 已知椭圆 C_1 与 C_2 的中心原点坐标 O , 长轴均为 MN 且在 x 轴上, 短轴长分别为

$2m, 2n (m > n)$, 过原点且不与 x 轴重合的直线 l 与 C_1 、 C_2 的四个交点按纵坐标 从大到小依次为

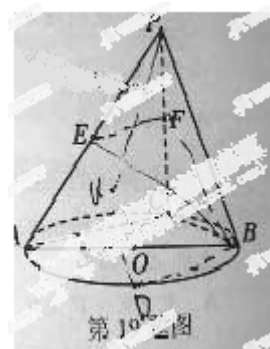
A 、 B 、 C 、 D . 记 $\lambda = \frac{m}{n}$, $\triangle BDM$ 和 $\triangle ABN$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 .

(I) 当直线 l 与 y 轴重合时, 若 $S_1 = \lambda S_2$, 求 λ 的值;

(II) 当 λ 变化时, 是否存在于坐标轴不重合的直线 l , 使得 $S_1 = \lambda S_2$, 并说明理由.



22. (本小题满分 14 分)



设 n 为正整数, r 为正有理数.

(I) 求函数 $f(x) = (1+x)^{r+1} - (r+1)x - 1 (x > -1)$ 的最小值;

(II) 证明: $\frac{n^{r+1} - (n-1)^{r+2}}{r+1} < n^r < \frac{(n+1)^{r+1} - n^{r+1}}{r+1}$;

(III) 设 $x \in \mathbb{R}$, 记 $[x]$ 为不小于 x 的最小整数, 例如 $[2]=2, [\pi]=4, \left[-\frac{3}{2}\right]=1$.

令 $S = \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{82} + \sqrt[3]{83} + \cdots + \sqrt[3]{125}$, 求 $[S]$ 的值.

(参考数据: $80^{\frac{4}{3}} = 344.7, 81^{\frac{4}{3}} = 350.5, 124^{\frac{4}{3}} = 618.3, 126^{\frac{4}{3}} = 631.7$.)

.