

绝密★启用前

# 2011年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

## 数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（56分）

1. 函数  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  的反函数为  $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 若全集  $U = R$ ，集合  $A = \{x | x \geq 1\} \cup \{x | x \leq 0\}$ ，则  $C_U A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 设  $m$  为常数，若点  $F(0, 5)$  是双曲线  $\frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{9} = 1$  的一个焦点，则  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 不等式  $\frac{x+1}{x} < 3$  的解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 在极坐标系中，直线  $\rho(2\cos\theta + \sin\theta) = 2$  与直线  $\rho\cos\theta = 1$  的夹角大小为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 在相距2千米的  $A$ 、 $B$  两点处测量目标  $C$ ，若  $\angle CAB = 75^\circ$ ， $\angle CBA = 60^\circ$ ，则  $A$ 、 $C$  两点之间的距离是  $\underline{\hspace{2cm}}$  千米。
7. 若圆锥的侧面积为  $2\pi$ ，底面积为  $\pi$ ，则该圆锥的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 函数  $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)\cos(\frac{\pi}{6} - x)$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 马老师从课本上抄录一个随机变量  $\varepsilon$  的概率分布律如下表  
请小牛同学计算  $\varepsilon$  的数学期望，尽管“!”处无法完全看清，且两个“?”处字迹模糊，但能肯定这两个“?”处的数值相同。据此，小牛给出了正确答案  $E\varepsilon = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  ( $a, b, c, d \in \{-1, 1, 2\}$ ) 的所有可能值中，最大的是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 在正三角形  $ABC$  中， $D$  是  $BC$  上的点， $AB = 3, BD = 1$ ，则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$x$	1	2	3
$P(\varepsilon=x)$	?	!	?

12、随机抽取9个同学中，至少有2个同学在同一个月出生的概率是\_\_\_\_\_

（默认每月天数相同，结果精确到0.001）。

13、设  $g(x)$  是定义在  $R$  上、以1为周期的函数，若  $f(x) = x + g(x)$  在  $[3, 4]$  上的值域为  $[-2, 5]$ ，则  $f(x)$  在区间  $[-10, 10]$  上的值域为\_\_\_\_\_。

14、已知点  $O(0, 0)$ 、 $Q_0(0, 1)$  和  $R_0(3, 1)$ ，记  $Q_0R_0$  的中点为  $P_1$ ，取  $Q_0P_1$  和  $P_1R_0$  中的一条，记其端点为  $Q_1$ 、 $R_1$ ，使之满足  $(|OQ_1| - 2)(|OR_1| - 2) < 0$ ；记  $Q_1R_1$  的中点为  $P_2$ ，取  $Q_1P_2$  和  $P_2R_1$  中的一条，记其端点为  $Q_2$ 、 $R_2$ ，使之满足  $(|OQ_2| - 2)(|OR_2| - 2) < 0$ ；依次下去，得到点  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ ，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_0P_n| = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

## 二、选择题（20分）

15、若  $a, b \in R$ ，且  $ab > 0$ ，则下列不等式中，恒成立的是【答】（ ）

A  $a^2 + b^2 > 2ab$     B  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$     C  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$     D  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

16、下列函数中，既是偶函数，又是在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减的函数为【答】（ ）

A  $y = \ln \frac{1}{|x|}$     B  $y = x^3$     C  $y = 2^{|x|}$     D  $y = \cos x$

17、设  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  是空间中给定的5个不同的点，则使

$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = \vec{0}$  成立的点  $M$  的个数为【答】（ ）

A 0    B 1    C 5    D 10

18、设  $\{a_n\}$  是各项为正数的无穷数列， $A_i$  是边长为  $a_i, a_{i+1}$  的矩形面积（ $i = 1, 2, \dots$ ），则

$\{A_n\}$  为等比数列的充要条件为【答】（ ）

A  $\{a_n\}$  是等比数列。

B  $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$  或  $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$  是等比数列。

C  $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$  和  $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$  均是等比数列。

D  $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$  和  $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$  均是等比数列，且公比相同。

### 三、解答题（74分）

19、（12分）已知复数  $z_1$  满足  $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i$ （ $i$  为虚数单位），复数  $z_2$  的虚部为 2

， $z_1 \cdot z_2$  是实数，求  $z_2$ 。

20、（12分）已知函数  $f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 3^x$ ，其中常数  $a, b$  满足  $ab \neq 0$ 。

(1) 若  $ab > 0$ ，判断函数  $f(x)$  的单调性；

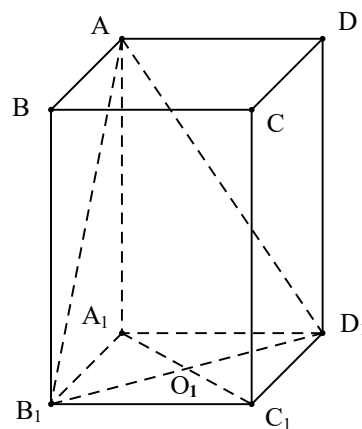
(2) 若  $ab < 0$ ，求  $f(x+1) > f(x)$  时  $x$  的取值范围。

21、（14分）已知  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  是底面边长为 1 的正四棱柱， $O_1$  是  $A_1C_1$  和  $B_1D_1$  的交点。

(1) 设  $AB_1$  与底面  $A_1B_1C_1D_1$  所成的角的大小为  $\alpha$ ，二面角  $A - B_1D_1 - A_1$  的大小为  $\beta$ 。

求证： $\tan \beta = \sqrt{2} \tan \alpha$ ；

(2) 若点  $C$  到平面  $AB_1D_1$  的距离为  $\frac{4}{3}$ ，求正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的高。



22、（18分）已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式分别为  $a_n = 3n + 6$ ， $b_n = 2n + 7$ （ $n \in \mathbb{N}^*$

），将集合

$\{x | x = a_n, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{x | x = b_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  中的元素从小到大依次排列，构成数列

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ 。

- (1) 求  $c_1, c_2, c_3, c_4$ ;
- (2) 求证: 在数列  $\{c_n\}$  中、但不在数列  $\{b_n\}$  中的项恰为  $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$ ;
- (3) 求数列  $\{c_n\}$  的通项公式。

23、(18分) 已知平面上的线段  $l$  及点  $P$ , 在  $l$  上任取一点  $Q$ , 线段  $PQ$  长度的最小值称为点  $P$  到线段  $l$  的距离, 记作  $d(P, l)$ 。

- (1) 求点  $P(1, 1)$  到线段  $l: x - y - 3 = 0 (3 \leq x \leq 5)$  的距离  $d(P, l)$ ;
- (2) 设  $l$  是长为2的线段, 求点集  $D = \{P \mid d(P, l) \leq 1\}$  所表示图形的面积;
- (3) 写出到两条线段  $l_1, l_2$  距离相等的点的集合  $\Omega = \{P \mid d(P, l_1) = d(P, l_2)\}$ , 其中  $l_1 = AB, l_2 = CD$ ,

$A, B, C, D$  是下列三组点中的一组。对于下列三组点只需选做一种, 满分分别是①2分,

②6分, ③8分; 若选择了多于一种的情形, 则按照序号较小的解答计分。

- ①  $A(1, 3), B(1, 0), C(-1, 3), D(-1, 0)$ 。
- ②  $A(1, 3), B(1, 0), C(-1, 3), D(-1, -2)$ 。
- ③  $A(0, 1), B(0, 0), C(0, 0), D(2, 0)$ 。

