

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（文科）

一、选择题

(1) 设 i 是虚数单位，则复数 $(1-i)(1+2i) = (\quad)$

(A) $3+3i$ (B) $-1+3i$ (3) $3+i$ (D) $-1+i$

【答案】C

【解析】 因为 $(1-i)(1+2i) = 1+2i-i-2i^2 = 3+i$ ，故选 C.

【考点定位】 本题主要考查复数的乘法运算公式.

【名师点睛】 在应用复数的乘法运算公式时，一定要注意 $-2i^2$ 的运算结果，本题很好的考查了考生的基本运算能力.

(2) 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ，则 $A \cap (C_U B) = (\quad)$

(A) $\{1, 2, 5, 6\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$

【答案】B

【解析】 $\because C_U B = \{1, 5, 6\}$ $\therefore A \cap (C_U B) = \{1\}$ \therefore 选 B.

【考点定位】 本题主要是考查了集合的交集、补集运算.

【名师点睛】 学生在求 $C_U B$ 时，切不可遗漏，造成解答错，本题考查了考生的基本运算能力.

(3) 设 $p: x < 3$ ， $q: -1 < x < 3$ ，则 p 是 q 成立的 (\quad)

(A) 充分必要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】 $\because p: x < 3$ ， $q: -1 < x < 3 \therefore q \Rightarrow p$ ，但 $p \not\Rightarrow q$ ， $\therefore p$ 是 q 成立的必要不充分条件，故选 C.

【考点定位】 本题主要考查充分、必要条件的判断.

【名师点睛】 在判断充分、必要条件时，考生一定要作好三个步骤：① $p \Rightarrow q$ 是否成立；② $q \Rightarrow p$ 是否成立；③ 形成结论，本题考查了考生的逻辑分析能力.

(4.) 下列函数中, 既是偶函数又存在零点的是 ()

- (A) $y=\ln x$ (B) $y=x^2+1$ (C) $y=\sin x$ (D) $y=\cos x$

【答案】D

【解析】选项 A: $y=\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 故 $y=\ln x$ 不具备奇偶性, 故 A 错误;

选项 B: $y=x^2+1$ 是偶函数, 但 $y=x^2+1=0$ 无解, 即不存在零点, 故 B 错误;

选项 C: $y=\sin x$ 是奇函数, 故 C 错;

选项 D: $y=\cos x$ 是偶函数,

且 $y=\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故 D 项正确.

【考点定位】本题主要考查函数的奇偶性和零点的概念.

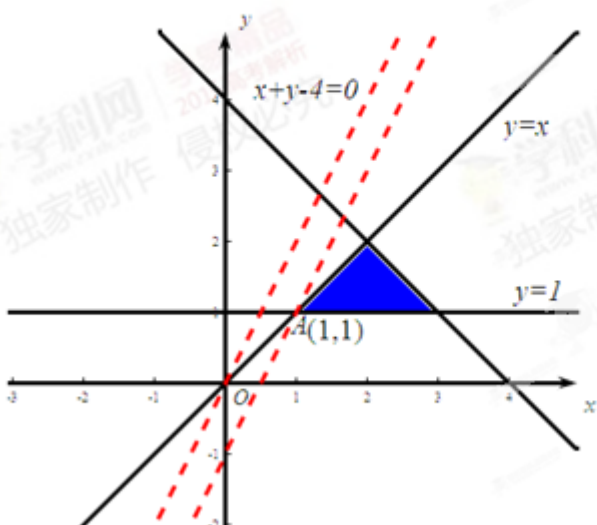
【名师点睛】在判断函数的奇偶性时, 首先要判断函数的定义域是否关于原点对称, 然后再判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系; 在判断函数零点时, 可分两种情况: ①函数图象与 x 轴是否有交点; ②令 $f(x)=0$ 是否有解; 本题考查考生的综合分析能力.

(5) 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$, 则 $z=-2x+y$ 的最大值是 ()

- (A) -1 (B) -2 (C) -5 (D) 1

【答案】A

【解析】根据题意作出约束条件确定的可行域, 如下图:



令 $z = -2x + y \Rightarrow y = -2x - z$ ，可知在图中 $A(1,1)$ 处， $z = -2x + y$ 取到最大值-1,故选 A.

【考点定位】本题主要考查了简单的线性规划.

【名师点睛】在解决简单的线性规划问题时，考生作图和确定可行区域一定要细心，本题考查了考生的数形结合能力和基本运算能力.

(6) 下列双曲线中，渐近线方程为 $y = \pm 2x$ 的是 ()

(A) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

(B) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(C) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

(D) $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$

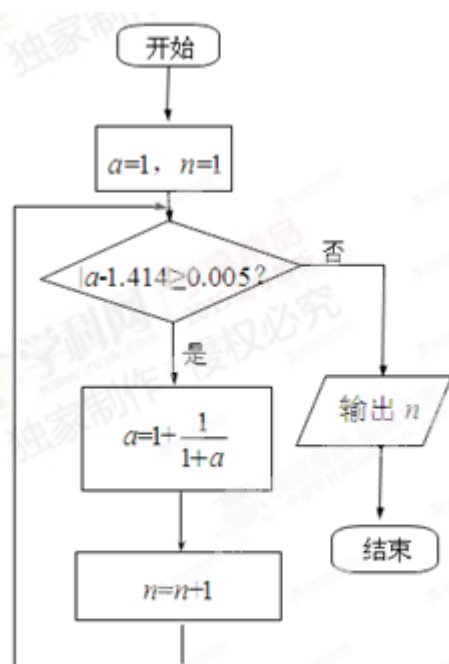
【答案】A

【解析】由双曲线的渐进线的公式可行选项 A 的渐进线方程为 $y = \pm 2x$ ，故选 A.

【考点定位】本题主要考查双曲线的渐近线公式.

【名师点睛】在求双曲线的渐近线方程时，考生一定要注意观察双曲线的交点是在 x 轴，还是在 y 轴，选用各自对应的公式，切不可混淆.

(7) 执行如图所示的程序框图（算法流程图），输出的 n 为 ()



第 (7) 题图

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

【答案】B

【解析】执行第一次循环体： $a = \frac{3}{2}, n = 2$; 此时 $|a - 1.414| = |1.5 - 1.414| = 0.086 \geq 0.005$;

执行第二次循环体： $a = \frac{7}{5}, n = 3$; 此时 $|a - 1.414| = |1.4 - 1.414| = 0.014 \geq 0.005$;

执行第三次循环体： $a = \frac{17}{12}, n = 4$; 此时 $|a - 1.414| < 0.005$, 此时不满足, 判断条件, 输出 $n=4$, 故选 B.

【考点定位】本题主要考查程序框图以及循环结构的判断.

【名师点睛】考生在解决程序框图以及循环结构时, 首先要明确循环的条件, 其次在计算的过程中要细心, 本题还考查了考生的计算能力.

- (8) 直线 $3x+4y=b$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 相切, 则 $b=$ ()

- (A) -2 或 12 (B) 2 或 -12 (C) -2 或 -12 (D) 2 或 12

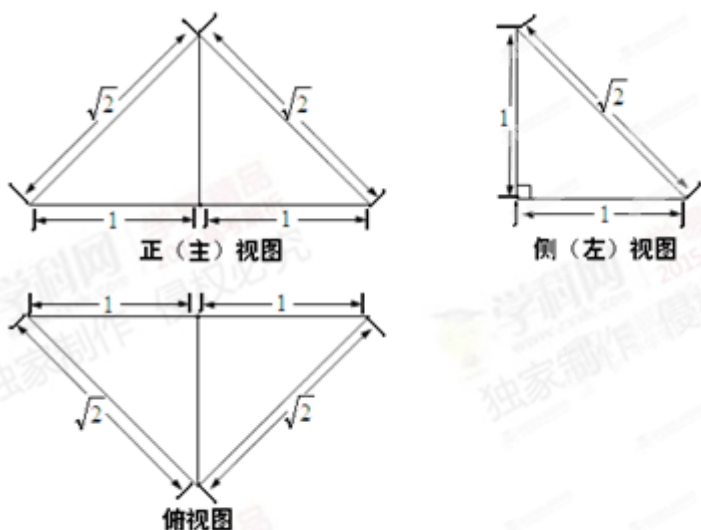
【答案】D

【解析】 \because 直线 $3x+4y=b$ 与圆心为 $(1,1)$, 半径为 1 的圆相切, $\therefore \frac{|3+4-b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1 \Rightarrow b=2$ 或 12 , 故选 D.

【考点定位】本题主要考查利用圆的一般方程求圆的圆心和半径, 直线与圆的位置关系, 以及点到直线的距离公式的应用.

【名师点睛】在解决直线与圆的位置关系问题时, 有两种方法: 方法一是代数法: 将直线方程与圆的方程联立, 消元, 得到关于 x (或 y) 的一元二次方程, 通过判断 $\Delta > 0; \Delta = 0; \Delta < 0$ 来确定直线与圆的位置关系; 方法二是几何法: 主要是利用圆心到直线的距离公式求出圆心到直线的距离 d , 然后再将 d 与圆的半径 r 进行判断, 若 $d > r$ 则相离; 若 $d = r$ 则相切; 若 $d < r$ 则相交; 本题考查考生的综合分析能力和运算能力.

- (9) 一个四面体的三视图如图所示, 则该四面体的表面积是 ()

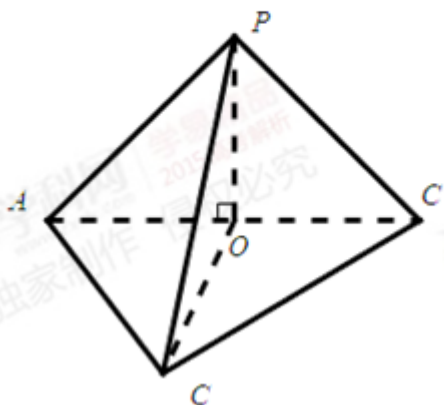


第(9)题图

- (A) $1+\sqrt{3}$ (B) $1+2\sqrt{2}$ (C) $2+\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】由该几何体的三视图可知，该几何体的直观图，如下图所示：



其中侧面 $PAC \perp$ 底面 ABC ，且 $\triangle PAC \cong \triangle ABC$ ，由三视图中所给数据可知：

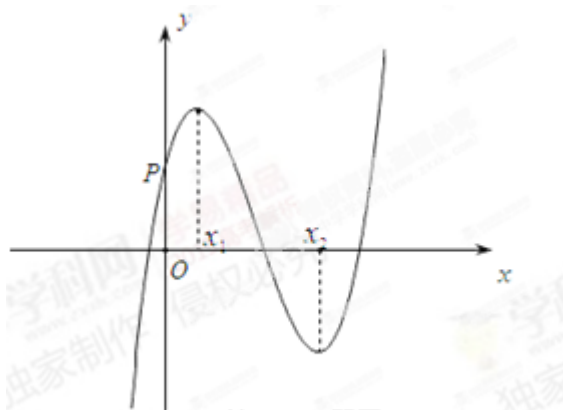
$PA = PC = AB = BC = \sqrt{2}$ ，取 AC 中点 O ，连接 PO, BO ，则 $Rt\triangle POB$ 中，

$PO = BO = 1 \Rightarrow PB = \sqrt{2} \therefore S = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 + \sqrt{3}$ ，故选 C.

【考点定位】本题主要考查空间几何体的三视图、锥体表面积公式.

【名师点睛】在利用空间几何体的三视图求几何体的体积或者表面积时，一定要正确还原几何体的直观图，然后再利用体积或表面积公式求之；本题主要考查了考生的空间想象力和基本运算能力.

(10) 函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图像如图所示，则下列结论成立的是 ()



第(10)题图

- (A) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$
 (B) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$
 (C) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$
 (D) $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$

【答案】A

【解析】由函数 $f(x)$ 的图象可知 $a > 0$ ，令 $x = 0 \Rightarrow d > 0$

又 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ，可知 x_1, x_2 是 $f'(x) = 0$ 的两根

由图可知 $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}, \text{故 A 正确.}$$

【考点定位】本题主要考查函数的图象和利用函数图象研究函数的性质.

【名师点睛】本题主要是考查考生利用函数图象研究函数的性质，在研究函数的性质时要结合函数的单调性、奇偶性、零点、以及极值等函数的特征去研究，本题考查了考生的数形结合能力.

二、 填空题

(11) $\lg \frac{5}{2} + 2\lg 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】-1

【解析】原式 $= \lg 5 - \lg 2 + 2\lg 2 - 2 = \lg 5 + \lg 2 - 2 = 1 - 2 = -1$

【考点定位】本题主要考查对数运算公式和指数幂运算公式.

【名师点睛】本题主要考查考生的基本运算能力，熟练掌握对数运算公式和指数幂运算公式是解决本题的关键.

(12) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{6}$, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, 则 $AC =$ _____.

【答案】2

【解析】由正弦定理可知: $\frac{AB}{\sin[180^\circ - (75^\circ + 45^\circ)]} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AC = 2$

【考点定位】本题主要考查正弦定理的应用.

【名师点睛】熟练掌握正弦定理的适用条件是解决本题的关键, 本题考查了考生的运算能力.

(13) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$ ($n \geq 2$), 则数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和等于_____.

【答案】27

【解析】 $\because n \geq 2$ 时, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$, 且 $a_2 = a_1 + \frac{1}{2}$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 a_1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列

$\therefore S_9 = 9 \times 1 + \frac{9 \times 8}{2} \times \frac{1}{2} = 9 + 18 = 27$

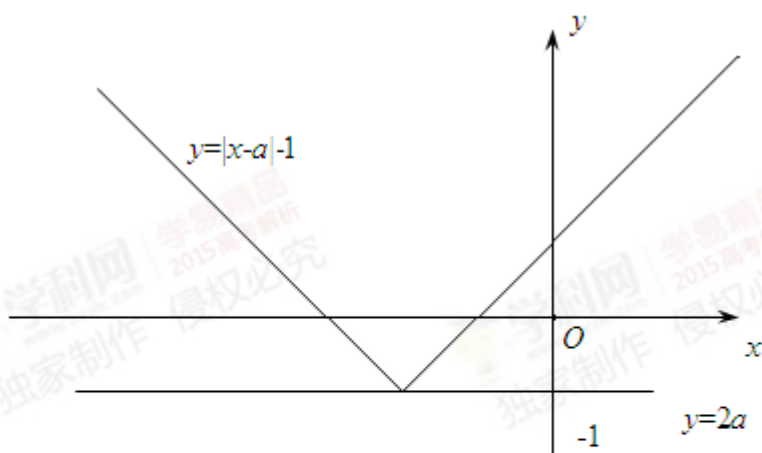
【考点定位】本题主要考查等差数列的定义、通项公式和前 n 项和公式的应用.

【名师点睛】能够从递推公式判断数列的类型或采用和种方法是解决本题的关键, 这需要考生平时多加积累, 同时本题还考查了等差数列的基本公式的应用, 考查了考生的基本运算能力.

(14) 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |x - a| - 1$ 的图像只有一个交点, 则 a 的值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】在同一坐标系内, 作出 $y = 2a$ 与 $y = |x - a| - 1$ 的大致图像, 如下图:



由题意, 可知 $2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

【考点定位】本题主要靠数形结合思想, 函数与方程、零点等基础知识.

【名师点睛】本题根据题意作出函数 $y = |x - a| - 1$ 的大致图象是解决本题的关键, 本题主要考查学生的数形结合的能力.

(15) $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 已知向量 \vec{a} 、 \vec{b} 满足 $\vec{AB} = 2\vec{a}$, $\vec{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$, 则下列结论中正确的是_____. (写出所有正确结论得序号)

① \vec{a} 为单位向量; ② \vec{b} 为单位向量; ③ $\vec{a} \perp \vec{b}$; ④ $\vec{b} \parallel \vec{BC}$; ⑤ $(4\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{BC}$.

【答案】①④⑤

【解析】

\because 等边三角形 ABC 的边长为 2, $\vec{AB} = 2\vec{a} \therefore |\vec{AB}| = 2|\vec{a}| = 2 \Rightarrow |\vec{a}| = 1$, 故①正确;

$\because \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{a} + \vec{BC} \therefore \vec{BC} = \vec{b} \Rightarrow |\vec{b}| = 2$, 故②错误, ④正确; 由于 $\vec{AB} = 2\vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ 与 \vec{b}

夹角为 120° , 故③错误; 又 $\because (4\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{BC} = (4\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \times 1 \times 2 \times (-\frac{1}{2}) + 4 = 0$

$\therefore (4\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{BC}$, 故⑤正确 因此, 正确的编号是①④⑤

【考点定位】本题主要考查平面向量的基本概念和基本性质的应用.

【名师点睛】熟练掌握平面向量的单位向量、共线(平行)、垂直、平面向量的加法等基本概念和基本性质是解决本题的关键之所在, 同时本题考查了考生的综合分析问题的能力以及数形结合的能力.

三. 解答题

16. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x$

(I) 求 $f(x)$ 最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

【答案】(I) π ; (II) 最大值为 $1+\sqrt{2}$, 最小值为 0

【解析】

(I) 因为 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos 2x = 1 + \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

(II) 由 (I) 得计算结果, $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$

当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$

由正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上的图象知,

当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{8}$ 时, $f(x)$ 取最大值 $\sqrt{2} + 1$;

当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取最小值 0.

综上, $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\sqrt{2} + 1$, 最小值为 0.

【考点定位】本题主要考查同角的基本关系、三角恒等变换、三角函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的性质, 以及正弦函数的性质. 学科网

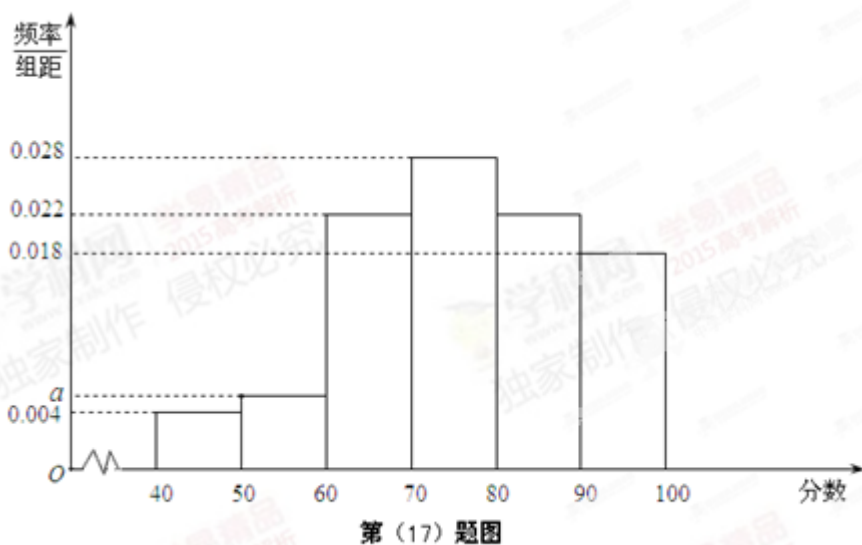
【名师点睛】熟练掌握三角函数的同角的基本关系和恒等变换公式以及三角函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的性质是解决本题的关键, 考查了考生的基本运算能力.

17. 某企业为了解下属某部门对本企业职工的服务情况, 随机访问 50 名职工, 根据这 50 名职工对该部门的评分, 绘制频率分布直方图 (如图所示), 其中样本数据分组区间为 $[40, 50], [50, 60], \dots, [80, 90], [90, 100]$

(I) 求频率分布图中 a 的值;

(II) 估计该企业的职工对该部门评分不低于 80 的概率;

(III) 从评分在 $[40, 60]$ 的受访职工中, 随机抽取 2 人, 求此 2 人评分都在 $[40, 50]$ 的概率.



【答案】(I) 0.006; (II) 0.4; (III) $\frac{1}{10}$

【解析】

(I) 因为 $(0.004 + a + 0.0018 + 0.022 \times 2 + 0.028) \times 10 = 1$, 所以 $a = 0.006$

(II) 由所给频率分布直方图知, 50 名受访职工评分不低于 80 的频率为 $(0.022 + 0.018) \times 10 = 0.4$, 所以该企业职工对该部门评分不低于 80 的概率的估计值为 0.4.

(III) 受访职工评分在 $[50, 60)$ 的有: $50 \times 0.006 \times 10 = 3$ (人), 即为 A_1, A_2, A_3 ;

受访职工评分在 $[40, 50)$ 的有: $50 \times 0.004 \times 10 = 2$ (人), 即为 B_1, B_2 .

从这 5 名受访职工中随机抽取 2 人, 所有可能的结果共有 10 种, 它们是 $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, B_1\}, \{A_1, B_2\},$

$\{A_2, A_3\}, \{A_2, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \{A_3, B_1\}, \{A_3, B_2\}, \{B_1, B_2\}$. 又因为所抽取 2 人的评分都在 $[40, 50)$ 的结果有 1 种,

即 $\{B_1, B_2\}$, 故所求的概率为 $p = \frac{1}{10}$.

【考点定位】本题主要考查了频率分布直方图、概率和频率的关系、古典概型等基础知识.

【名师点睛】利用频率分布直方图解题的时, 注意其表达的意义, 同时要理解频率是概率的估计值这一基础知识; 在利用古典概型解题时, 要注意列出所有的基本事件, 千万不可出现重、漏的情况.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1 + a_4 = 9, a_2 a_3 = 8$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(I) $a_n = 2^{n-1}$ (II) $\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$

【解析】

(I) 由题设可知 $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3 = 8$,

又 $a_1 + a_4 = 9$, 可解的 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_4 = 8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_4 = 1 \end{cases}$ (舍去)

由 $a_4 = a_1 q^3$ 得公比 $q = 2$, 故 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$.

(II) $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$

又 $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}\right) = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$
 $= 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}$.

【考点定位】本题主要考查等比数列的通项公式、性质, 等比数列的前 n 项和, 以及利用裂项相消法求和.

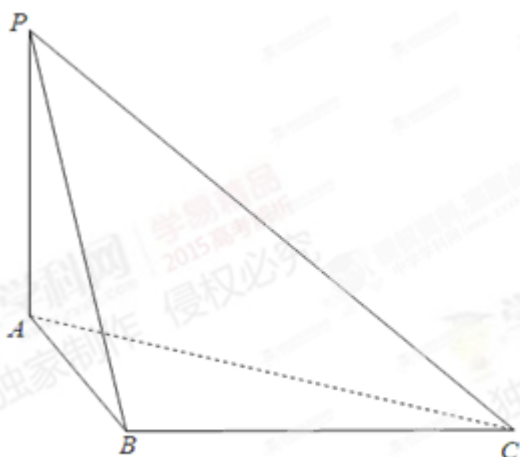
【名师点睛】本题利用“若 $m+n=p+q$, 则 $a_m a_n = a_p a_q$ ”, 是解决本题的关键, 同时考生发现

$b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$ 是解决本题求和的关键, 本题考查了考生的基础运算能力.

19. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=1, AB=1, AC=2, \angle BAC=60^\circ$.

(I) 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积;

(II) 证明: 在线段 PC 上存在点 M , 使得 $AC \perp BM$, 并求 $\frac{PM}{MC}$ 的值.



第(19)题图

【答案】(I) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (II) $\frac{PM}{MC} = \frac{1}{3}$

【解析】

(I) 解：由题设 $AB = 1, AC = 2, \angle BAC = 60^\circ$

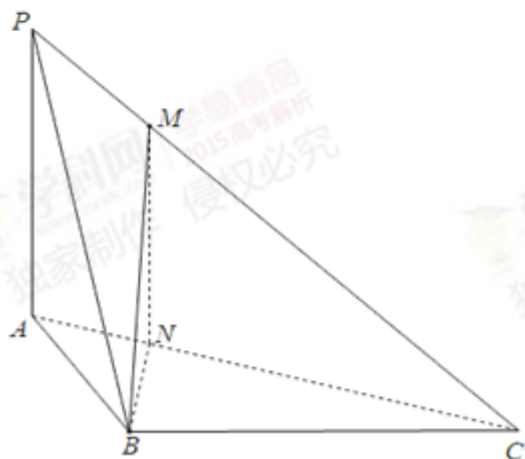
$$\text{可得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由 $PA \perp \text{面 } ABC$

可知 PA 是三棱锥 $P-ABC$ 的高, 又 $PA = 1$

$$\text{所以三棱锥 } P-ABC \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot PA = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(II) 证：在平面 ABC 内, 过点 B 作 $BN \perp AC$, 垂足为 N , 过 N 作 $MN \parallel PA$ 交 PC 于 M , 连接 BM .



由 $PA \perp \text{面 } ABC$ 知 $PA \perp AC$, 所以 $MN \perp AC$. 由于 $BN \cap MN = N$, 故 $AC \perp \text{面 } MBN$, 又 $BM \subset \text{面 } MBN$, 所以 $AC \perp BM$.

在直角 $\triangle BAN$ 中, $AN = AB \cdot \cos \angle BAC = \frac{1}{2}$, 从而 $NC = AC - AN = \frac{3}{2}$. 由 $MN \parallel PA$, 得

$$\frac{PM}{MC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}.$$

【考点定位】本题主要考查锥体的体积公式、线面垂直的判定定理和其性质定理.

【名师点睛】本题将正弦定理求三角形的面积巧妙地结合到求锥体的体积之中, 本题的第 (II) 问需要学生构造出线面垂直, 进而利用性质定理证明出面面垂直, 本题考查了考生的空间想象能力、构造能力和运算能力.

20. 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

(I) 求 E 的离心率 e ;

(II) 设点 C 的坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点, 证明: $MN \perp AB$.

【答案】(I) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (II) 详见解析.

【解析】

(I) 解: 由题设条件知, 点 $M(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}b)$, 又 $k_{OM} = \frac{\sqrt{5}}{10}$ 从而 $\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

进而 $a = \sqrt{5}b, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2b$, 故 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(II) 证: 由 N 是 AC 的中点知, 点 N 的坐标为 $(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$, 可得 $\overrightarrow{NM} = (\frac{a}{6}, \frac{5b}{6})$.

又 $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$, 从而有 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM} = -\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{6}b^2 = \frac{1}{6}(5b^2 - a^2)$

由 (I) 得计算结果可知 $a^2 = 5b^2$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$, 故 $MN \perp AB$.

【考点定位】本题主要考查椭圆的离心率, 直线与椭圆的位置关系等基础知识.

【名师点睛】本题主要将椭圆的性质与求椭圆的离心率相结合, 同时考查了中点坐标公式, 以及解析几何中直线与直线垂直的常用方法, 本题考查了考生的基本运算能力和综合分析能力.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{(x+r)^2} (a > 0, r > 0)$

(I) 求 $f(x)$ 的定义域, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $\frac{a}{r} = 400$, 求 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的极值.

【答案】(I) 递增区间是 $(-r, r)$; 递减区间为 $(-\infty, -r)$ 和 $(r, +\infty)$; (II) 极大值为 100; 无极小值.

【解析】(I) 由题意可知 $x \neq -r$ 所求的定义域为 $(-\infty, -r) \cup (-r, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{ax}{(x+r)^2} = \frac{ax}{x^2 + 2xr + r^2},$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 2xr + r^2) - ax(2x + 2r)}{(x^2 + 2xr + r^2)^2} = \frac{a(r-x)(x+r)}{(x+r)^4}$$

所以当 $x < -r$ 或 $x > r$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $-r < x < r$ 时, $f'(x) > 0$

因此, $f(x)$ 单调递减区间为 $(-\infty, -r), (r, +\infty)$; $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-r, r)$.

(II) 由 (I) 的解答可知 $f'(r) = 0$ $f(x)$ 在 $(0, r)$ 上单调递增, 在 $(r, +\infty)$ 上单调递减.

因此 $x = r$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的极大值为 $f(r) = \frac{ar}{(2r)^2} = \frac{a}{4r} = \frac{400}{4} = 100$,

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内无极小值;

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内极大值为 100, 无极小值.

【考点定位】 本题主要考查了函数的定义域、利用导数求函数的单调性, 以及求函数的极值等基础知识.

【名师点睛】 本题在利用导数求函数的单调性时要注意, 求导后的分子是一个二次项系数为负数的一元二次式, 在求 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$ 时要注意, 本题主要考查考生对基本概念的掌握情况和基本运算能力.