

2020 年全国高考数学真题试卷及解析（上海卷）

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题 5 分）

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$ ，集合 $B = \{2, 4, 5\}$ ，则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 计算： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知复数 $z = 1 - 2i$ (i 为虚数单位)，则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知函数 $f(x) = x^3$ ， $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x+2y-3 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = y - 2x$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 2 & c & d \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$ ，则 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 已知有四个数 1, 2, a , b ，这四个数的中位数是 3，平均数是 4，则 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列，且 $a_1 + a_{10} = a_9$ ，则 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 从 6 个人挑选 4 个人去值班，每人值班一天，第一天安排 1 个人，第二天安排 1 个人，第三天安排 2 个人，则共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种安排情况.

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F ，直线 l 经过椭圆右焦点 F ，交椭圆 C 于 P, Q 两点（点 P 在第二象限），若点 Q 关于 x 轴对称点为 Q' ，且满足 $PQ \perp FQ'$ ，求直线 l 的方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设 $a \in \mathbb{R}$ ，若存在定义域为 \mathbb{R} 的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件：

(1) 对任意的 $x_0 \in R$, $f(x_0)$ 的值为 x_0 或 x_0^2 ;

(2) 关于 x 的方程 $f(x) = a$ 无实数解,

则 a 的取值范围是_____.

12. 已知 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_k} (k \in N^*)$ 是平面内两两互不相等的向量, 满足 $|\vec{a_1} - \vec{a_2}| = 1$, 且 $|\vec{a_i} - \vec{b_j}| \in \{1, 2\}$ (其中 $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, k$), 则 k 的最大值是_____.

二、选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 下列等式恒成立的是 ()

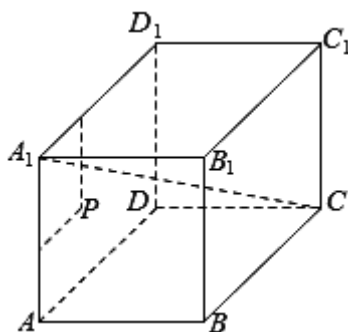
A. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ B. $a^2 + b^2 \leq -2ab$ C. $a + b \geq 2\sqrt{|ab|}$ D. $a^2 + b^2 \leq -2ab$

14. 已知直线方程 $3x + 4y + 1 = 0$ 的一个参数方程可以是 ()

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 4t \end{cases} (t \text{ 为参数})$ B. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases} (t \text{ 为参数})$

C. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + 4t \end{cases} (t \text{ 为参数})$ D. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases} (t \text{ 为参数})$

15. 在棱长为 10 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为左侧面 ADD_1A_1 上一点, 已知点 P 到 A_1D_1 的距离为 3, P 到 AA_1 的距离为 2, 则过点 P 且与 A_1C 平行的直线相交的面是 ()



A. AA_1B_1B

B. BB_1C_1C

C. CC_1D_1D

D. $ABCD$

16. 命题 p : 存在 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x+a) < f(x) + f(a)$;

命题 q_1 : $f(x)$ 单调递减且 $f(x) > 0$ 恒成立;

命题 q_2 : $f(x)$ 单调递增, 存在 $x_0 < 0$ 使得 $f(x_0) = 0$,

则下列说法正确的是()

A. 只有 q_1 是 p 的充分条件

B. 只有 q_2 是 p 的充分条件

C. q_1, q_2 都是 p 的充分条件

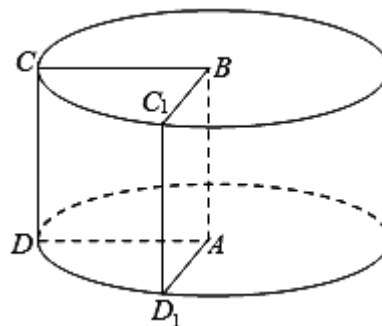
D. q_1, q_2 都不是 p 的充分条件

三、解答题 (本大题共 5 题, 共 14+14+14+16+18=76 分)

17. (14 分) 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 正方形 $ABCD$ 绕 AB 旋转形成一个圆柱.

(1) 求该圆柱的表面积;

(2) 正方形 $ABCD$ 绕 AB 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 至 ABC_1D_1 , 求线段 CD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角.



18. (14 分) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x$, $\omega > 0$.

(1) $f(x)$ 的周期是 4π , 求 ω , 并求 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的解集;

(2) 已知 $\omega = 1$, $g(x) = f^2(x) + \sqrt{3}f(-x)f(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 求 $g(x)$ 的值域.

19. (14 分) 在研究某市场交通情况时, 道路密度是指该路段上一定时间内通过的车辆数除以时间, 车辆密度是该路段一定

时间内通过的车辆数除以该路段的长度, 现定义交通流量为 $v = \frac{q}{x}$, x 为道路密度, q 为车辆密度.

$$v = f(x) = \begin{cases} 100 - 135 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & 0 < x < 40 \\ -k(x - 40) + 85, & 40 \leq x \leq 80 \end{cases}.$$

(1) 若交通流量 $v > 95$, 求道路密度 x 的取值范围;

(2) 已知道路密度 $x = 80$, 交通流量 $v = 50$, 求车辆密度 q 的最大值.

20. (16 分) 已知双曲线 $\Gamma_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与圆 $\Gamma_2: x^2 + y^2 = 4 + b^2 (b > 0)$ 交于点 $A(x_A, y_A)$ (第

一象限), 曲线 Γ 为 Γ_1 、 Γ_2 上取满足 $x > |x_A|$ 的部分.

(1) 若 $x_A = \sqrt{6}$, 求 b 的值;

(2) 当 $b = \sqrt{5}$, Γ_2 与 x 轴交点记作点 F_1 、 F_2 , P 是曲线 Γ 上一点, 且在第一象限, 且 $|PF_1| = 8$, 求 $\angle F_1PF_2$;

(3) 过点 $D(0, \frac{b^2}{2} + 2)$ 斜率为 $-\frac{b}{2}$ 的直线 l 与曲线 Γ 只有两个交点, 记为 M 、 N , 用 b 表示 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$, 并求 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围.

21. (18 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 为有限数列, 满足 $|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|, \dots, |a_1 - a_m|$, 则称 $\{a_n\}$ 满足性质 P .

(1) 判断数列 3、2、5、1 和 4、3、2、5、1 是否具有性质 P , 请说明理由;

(2) 若 $a_1 = 1$, 公比为 q 的等比数列, 项数为 10, 具有性质 P , 求 q 的取值范围;

(3) 若 $\{a_n\}$ 是 $1, 2, 3, \dots, m$ 的一个排列 ($m \geq 4$), $\{b_n\}$ 符合 $b_k = a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$), $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 都具有性质 P , 求所有满足条件的数列 $\{a_n\}$.

