绝密★启用前

2024年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

5．考试结束后，只将答题卡交回．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设 $z=5+\mathrm{i}$，则 $\mathrm{i}\left(\bar{z}+z\right)=$（　　）

A. $10\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$　　C. 10　　D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】结合共轭复数与复数的基本运算直接求解.

【详解】由 $z=5+\mathrm{i}\Rightarrow\bar{z}=5-\mathrm{i},z+\bar{z}=10$，则 $\mathrm{i}\left(\bar{z}+z\right)=10\mathrm{i}$.

故选：A

2. 集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\},B=\left\{x\middle|\sqrt{x}\in A\right\}$，则 $\complement_A\left(A\cap B\right)=$（　　）

A. $\{1,4,9\}$　　B. $\{3,4,9\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3,5\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由集合 B 的定义求出 B，结合交集与补集运算即可求解.

【详解】因为 $A=\{1,2,3,4,5,9\},B=\left\{x\middle|\sqrt{x}\in A\right\}$，所以 $B=\{1,4,9,16,25,81\}$，

则 $A\cap B=\{1,4,9\}$，$\complement_A\left(A\cap B\right)=\{2,3,5\}$

故选：D

3. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}4x-3y-3\ge 0\\x-2y-2\le 0\\2x+6y-9\le 0\end{cases}$，则 $z=x-5y$ 的最小值为（　　）

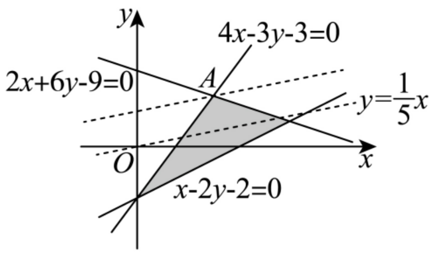
A. 5　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C. -2　　　　D. $-\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】画出可行域后，利用 z 的几何意义计算即可得.

【详解】实数 x,y 满足 $\begin{cases}4x-3y-3\ge 0\\x-2y-2\le 0\\2x+6y-9\le 0\end{cases}$，作出可行域如图：



由 $z=x-5y$ 可得 $y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$，

即 z 的几何意义为 $y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$ 的截距的 $-\frac{1}{5}$，

则该直线截距取最大值时，z 有最小值，

此时直线 $y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$ 过点 A，

联立 $\begin{cases}4x-3y-3=0\\2x+6y-9=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=1\end{cases}$，即 $A\left(\frac{3}{2},1\right)$，

则 $z_{\min}=\frac{3}{2}-5\times 1=-\frac{7}{2}$.

故选：D.

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_5=S_{10}$，$a_5=1$，则 $a_1=$（　　）

A. -2　　　　B. $\frac{7}{3}$　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】由 $S_5=S_{10}$ 结合等差中项的性质可得 $a_8=0$，即可计算出公差，即可得 a_1 的值.

【详解】由 $S_{10}-S_5=a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=5a_8=0$，则 $a_8=0$，

则等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差$d=\frac{a_8-a_5}{3}=-\frac{1}{3}$，故$a_1=a_5-4d=1-4\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}$.

故选：B.

5. 已知双曲线$C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的上、下焦点分别为$F_1(0,4),F_2(0,-4)$，点$P(-6,4)$在该双曲线上，则该双曲线的离心率为（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】由焦点坐标可得焦距$2c$，结合双曲线定义计算可得$2a$，即可得离心率.

【详解】由题意，$F_1(0,-4)$、$F_2(0,4)$、$P(-6,4)$，

则$\left|F_1F_2\right|=2c=8$，$\left|PF_1\right|=\sqrt{6^2+(4+4)^2}=10$，$\left|PF_2\right|=\sqrt{6^2+(4-4)^2}=6$，

则$2a=\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=10-6=4$，则$e=\frac{2c}{2a}=\frac{8}{4}=2$.

故选：C.

6. 设函数$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线$y=f(x)$在$(0,1)$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】借助导数的几何意义计算可得其在点$(0,1)$处的切线方程，即可得其与坐标轴交点坐标，即可得其面积.

【详解】$f'(x)=\frac{\left(\mathrm{e}^x+2\cos x\right)\left(1+x^2\right)-\left(\mathrm{e}^x+2\sin x\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}$，

则$f'(0)=\frac{\left(\mathrm{e}^0+2\cos 0\right)(1+0)-\left(\mathrm{e}^0+2\sin 0\right)\times 0}{(1+0)^2}=3$，

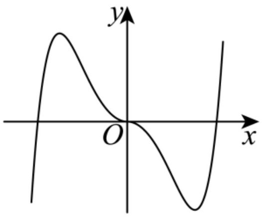
即该切线方程为$y-1=3x$，即$y=3x+1$，

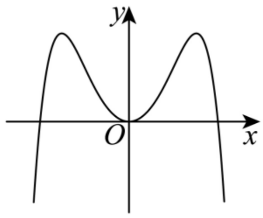
令$x=0$，则$y=1$，令$y=0$，则$x=-\frac{1}{3}$，

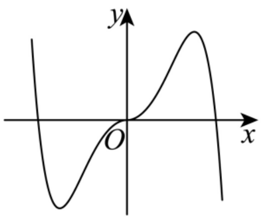
故该切线与两坐标轴所围成的三角形面积 $S=\frac{1}{2}\times 1\times\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

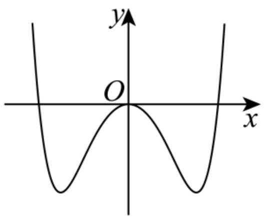
故选：A.

7. 函数 $f\left(x\right)=-x^2+\left(e^x-e^{-x}\right)\sin x$ 在区间 $[-2.8,2.8]$ 的大致图像为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性可排除 A、C，代入 $x=1$ 可得 $f\left(1\right)>0$，可排除 D.

【详解】$f\left(-x\right)=-x^2+\left(e^{-x}-e^x\right)\sin\left(-x\right)=-x^2+\left(e^x-e^{-x}\right)\sin x=f\left(x\right)$,

又函数定义域为 $\left[-2.8,2.8\right]$，故该函数为偶函数，可排除 A、C，

又 $f\left(1\right)=-1+\left(e-\frac{1}{e}\right)\sin 1>-1+\left(e-\frac{1}{e}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{e}{2}-1-\frac{1}{2e}>\frac{1}{4}-\frac{1}{2e}>0$,

故可排除 D.

故选：B.

8. 已知 $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】先将 $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 弦化切求得 $\tan\alpha$，再根据两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，

所以$\dfrac{1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$，$\Rightarrow\tan\alpha=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$，

故选：B.

9. 已知向量$\vec{a}=(x+1,x),\vec{b}=(x,2)$，则（　　）

A. “$x=-3$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的必要条件

B. “$x=-3$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的必要条件

C. “$x=0$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的充分条件

D. “$x=-1+\sqrt{3}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量垂直和平行的坐标表示即可得到方程，解出即可.

【详解】对 A，当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

所以$x\cdot(x+1)+2x=0$，解得$x=0$或-3，即必要性不成立，故 A 错误；

对 C，当$x=0$时，$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,2)$，故$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

所以$\vec{a}\perp\vec{b}$，即充分性成立，故 C 正确；

对 B，当$\vec{a}//\vec{b}$时，则$2(x+1)=x^2$，解得$x=1\pm\sqrt{3}$，即必要性不成立，故 B 错误；

对 D，当$x=-1+\sqrt{3}$时，不满足$2(x+1)=x^2$，所以$\vec{a}//\vec{b}$不成立，即充分性不立，故 D 错误.

故选：C.

10. 设α、β是两个平面，m、n是两条直线，且$\alpha\cap\beta=m$.下列四个命题：

①若$m//n$，则$n//\alpha$或$n//\beta$

②若$m\perp n$，则$n\perp\alpha,n\perp\beta$

③若$n//\alpha$，且$n//\beta$，则$m//n$

④若n与α和β所成的角相等，则$m\perp n$

其中所有真命题的编号是（　　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据线面平行的判定定理即可判断①；举反例即可判断②④；根据线面平行的性质即可判断③.

【详解】对①，当$n\subset \alpha$，因为$m//n$，$m\subset \beta$，则$n//\beta$，

当$n\subset \beta$，因为$m//n$，$m\subset \alpha$，则$n//\alpha$，

当n既不在α也不在β内，因为$m//n$，$m\subset \alpha, m\subset \beta$，则$n//\alpha$且$n//\beta$，故①正确；

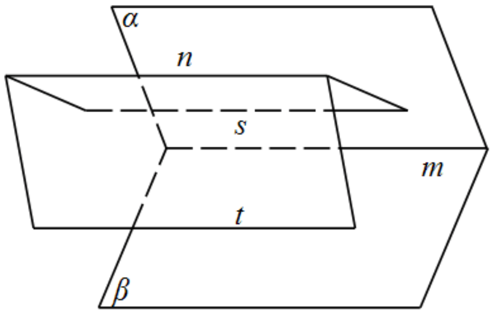
对②，若$m\perp n$，则n与α, β不一定垂直，故②错误；

对③，过直线n分别作两平面与α, β分别相交于直线s和直线t，

因为$n//\alpha$，过直线n的平面与平面α的交线为直线s，则根据线面平行的性质定理知$n//s$，

同理可得$n//t$，则$s//t$，因为$s\not\subset$平面β，$t\subset$平面β，则$s//$平面β，

因为$s\subset$平面α，$\alpha\cap\beta=m$，则$s//m$，又因为$n//s$，则$m//n$，故③正确；



对④，若$\alpha\cap\beta=m, n$与α和β所成的角相等，如果$n//\alpha, n//\beta$，则$m//n$，故④错误；

综上只有①③正确，

故选：A.

11. 在$\triangle ABC$中内角A,B,C所对边分别为a,b,c，若$B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，则$\sin A+\sin C=$（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦定理得$\sin A\sin C=\frac{1}{3}$，再利用余弦定理有$a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，再利用正弦定理得到$\sin^2 A+\sin^2 C$的值，最后代入计算即可.

【详解】因为$B=\frac{\pi}{3}, b^2=\frac{9}{4}ac$，则由正弦定理得$\sin A\sin C=\frac{4}{9}\sin^2 B=\frac{1}{3}$.

由余弦定理可得: $b^2=a^2+c^2-ac=\frac{9}{4}ac$，

即: $a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，根据正弦定理得 $\sin^2 A+\sin^2 C=\frac{13}{4}\sin A\sin C=\frac{13}{12}$，

所以 $(\sin A+\sin C)^2=\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C=\frac{7}{4}$，

因为 A,C 为三角形内角，则 $\sin A+\sin C>0$，则 $\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选：C.

12. 已知 b 是 a,c 的等差中项，直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】结合等差数列性质将 c 代换，求出直线恒过的定点，采用数形结合法即可求解.

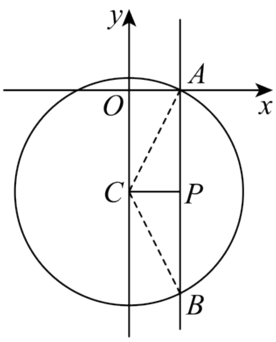
【详解】因为 a,b,c 成等差数列，所以 $2b=a+c$，$c=2b-a$，代入直线方程 $ax+by+c=0$ 得

$ax+by+2b-a=0$，即 $a(x-1)+b(y+2)=0$，令 $\begin{cases}x-1=0\\y+2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$，

故直线恒过 $(1,-2)$，设 $P(1,-2)$，圆化为标准方程得：$C:x^2+(y+2)^2=5$，

设圆心为 C，画出直线与圆的图形，由图可知，当 $PC\perp AB$ 时，$|AB|$ 最小，

$|PC|=1,|AC|=|r|=\sqrt{5}$，此时 $|AB|=2|AP|=2\sqrt{AC^2-PC^2}=2\sqrt{5-1}=4$.



故选：C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式中，各项系数的最大值是______.

【答案】5

【解析】

【分析】先设展开式中第 $r+1$ 项系数最大，则根据通项公式有 $\begin{cases} C_{10}^{r}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{9-r} \\ C_{10}^{r}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11-r} \end{cases}$，进而求出 r 即可求解.

【详解】由题展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_{10}^{r}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-r}x^{r}$，$0 \leq r \leq 10$ 且 $r \in \mathbf{Z}$，

设展开式中第 $r+1$ 项系数最大，则 $\begin{cases} C_{10}^{r}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{9-r} \\ C_{10}^{r}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11-r} \end{cases}$，

$\Rightarrow \begin{cases} r \geq \dfrac{29}{4} \\ r \leq \dfrac{33}{4} \end{cases}$，即 $\dfrac{29}{4} \leq r \leq \dfrac{33}{4}$，又 $r \in \mathbf{Z}$，故 $r=8$，

所以展开式中系数最大的项是第 9 项，且该项系数为 $C_{10}^{8}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}=5$.

故答案为：5.

14. 已知甲、乙两个圆台上、下底面的半径均为 r_1 和 r_2，母线长分别为 $2\left(r_2-r_1\right)$ 和 $3\left(r_2-r_1\right)$，则两个圆台的体积之比 $\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=$______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】

【分析】先根据已知条件和圆台结构特征分别求出两圆台的高，再根据圆台的体积公式直接代入计算即可得解.

【详解】由题可得两个圆台的高分别为 $h_{甲}=\sqrt{\left[2\left(r_1-r_2\right)\right]^{2}-\left(r_1-r_2\right)^{2}}=\sqrt{3}\left(r_1-r_2\right)$，

$h_{乙}=\sqrt{\left[3\left(r_1-r_2\right)\right]^{2}-\left(r_1-r_2\right)^{2}}=2\sqrt{2}\left(r_1-r_2\right)$，

所以$\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=\dfrac{\frac{1}{3}\left(S_2+S_1+\sqrt{S_2S_1}\right)h_{甲}}{\frac{1}{3}\left(S_2+S_1+\sqrt{S_2S_1}\right)h_{乙}}=\dfrac{h_{甲}}{h_{乙}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(r_1-r_2\right)}{2\sqrt{2}\left(r_1-r_2\right)}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

15. 已知$a>1$，$\dfrac{1}{\log_8 a}-\dfrac{1}{\log_a 4}=-\dfrac{5}{2}$，则$a=$______.

【答案】64

【解析】

【分析】将$\log_8 a,\log_a 4$利用换底公式转化成$\log_2 a$来表示即可求解.

【详解】由题$\dfrac{1}{\log_8 a}-\dfrac{1}{\log_a 4}=\dfrac{3}{\log_2 a}-\dfrac{1}{2}\log_2 a=-\dfrac{5}{2}$，整理得$\left(\log_2 a\right)^2-5\log_2 a-6=0$，

$\Rightarrow \log_2 a=-1$或$\log_2 a=6$，又$a>1$，

所以$\log_2 a=6=\log_2 2^6$，故$a=2^6=64$

故答案为：64.

16. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1、2、3、4、5、6，从中不放回地随机抽取 3 次，每次取 1 个球.记m为前两次取出的球上数字的平均值，n为取出的三个球上数字的平均值，则m与n差的绝对值不超过$\frac{1}{2}$的概率是______.

【答案】$\dfrac{7}{15}$

【解析】

【分析】根据排列可求基本事件的总数，设前两个球的号码为a,b，第三个球的号码为c，则$a+b-3\le 2c\le a+b+3$，就c的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率.

【详解】从 6 个不同的球中不放回地抽取 3 次，共有$A_6^3=120$种，

设前两个球的号码为a,b，第三个球的号码为c，则$\left|\dfrac{a+b+c}{3}-\dfrac{a+b}{2}\right|\le\dfrac{1}{2}$，

故$\left|2c-(a+b)\right|\le 3$，故$-3\le 2c-(a+b)\le 3$，

故$a+b-3\le 2c\le a+b+3$，

若$c=1$，则$a+b\le 5$，则(a,b)为：$(2,3),(3,2)$，故有 2 种，

若$c=2$，则$1\le a+b\le 7$，则$\left(a,b\right)$为：$\left(1,3\right),\left(1,4\right),\left(1,5\right),\left(1,6\right),\left(3,4\right)$，

$\left(3,1\right),\left(4,1\right),\left(5,1\right),\left(6,1\right),\left(4,3\right)$，故有10种，

当$c=3$，则$3\le a+b\le 9$，则$\left(a,b\right)$为：

$\left(1,2\right),\left(1,4\right),\left(1,5\right),\left(1,6\right),\left(2,4\right),\left(2,5\right),\left(2,6\right),\left(4,5\right)$，

$\left(2,1\right),\left(4,1\right),\left(5,1\right),\left(6,1\right),\left(4,2\right),\left(5,2\right),\left(6,2\right),\left(5,4\right)$，

故有16种，

当$c=4$，则$5\le a+b\le 11$，同理有16种，

当$c=5$，则$7\le a+b\le 13$，同理有10种，

当$c=6$，则$9\le a+b\le 15$，同理有2种，

共m与n的差的绝对值不超过$\frac{1}{2}$时不同的抽取方法总数为$2\left(2+10+16\right)=56$，

故所求概率为$\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$.

故答案为：$\frac{7}{15}$

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第17题~第21题为必考题，每个考题考生必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分．

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造，升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取150件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

（1）填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		

乙车间		

能否有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有99%的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异？

（2）已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$，设 $\overline{p}$ 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率.如果 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$，则认为该工厂产品的优级品率提高了，根据抽取的 150 件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？（$\sqrt{150}\approx 12.247$）

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】（1）答案见详解

（2）答案见详解

【解析】

【分析】（1）根据题中数据完善列联表，计算 K^2，并与临界值对比分析；

（2）用频率估计概率可得 $\overline{p}=0.64$，根据题意计算 $p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$，结合题意分析判断.

【小问 1 详解】

根据题意可得列联表：

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

可得 $K^2=\dfrac{150\left(26\times 30-24\times 70\right)^2}{50\times 100\times 96\times 54}=\dfrac{75}{16}=4.6875$，

因为$3.841<4.6875<6.635$，

所以有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异，没有99%的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异.

【小问 2 详解】

由题意可知：生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品的频率为$\frac{96}{150}=0.64$，

用频率估计概率可得$\overline{p}=0.64$，

又因为升级改造前该工厂产品的优级品率$p=0.5$，

则$p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=0.5+1.65\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{150}}\approx 0.5+1.65\times\frac{0.5}{12.247}\approx 0.568$，

可知$\overline{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，

所以可以认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了.

18. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，且$4S_n=3a_n+4$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n.

【答案】（1）$a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$

（2）$T_n=(2n-1)\cdot 3^n+1$

【解析】

【分析】（1）利用退位法可求$\{a_n\}$的通项公式.

（2）利用错位相减法可求T_n.

【小问 1 详解】

当$n=1$时，$4S_1=4a_1=3a_1+4$，解得$a_1=4$.

当$n\geq 2$时，$4S_{n-1}=3a_{n-1}+4$，所以$4S_n-4S_{n-1}=4a_n=3a_n-3a_{n-1}$即$a_n=-3a_{n-1}$，

而$a_1=4\neq 0$，故$a_n\neq 0$，故$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-3$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以 4 为首项，-3为公比的等比数列，

所以$a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$.

【小问 2 详解】

$b_n=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot 4\cdot(-3)^{n-1}=4n\cdot 3^{n-1}$,

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=4\cdot 3^0+8\cdot 3^1+12\cdot 3^2+\cdots+4n\cdot 3^{n-1}$

故 $3T_n=4\cdot 3^1+8\cdot 3^2+12\cdot 3^3+\cdots+4n\cdot 3^n$

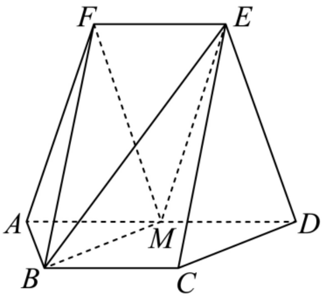
所以 $-2T_n=4+4\cdot 3^1+4\cdot 3^2+\cdots+4\cdot 3^{n-1}-4n\cdot 3^n$

$=4+4\cdot\dfrac{3\left(1-3^{n-1}\right)}{1-3}-4n\cdot 3^n=4+2\cdot 3\cdot\left(3^{n-1}-1\right)-4n\cdot 3^n$

$=(2-4n)\cdot 3^n-2$，

$\therefore T_n=(2n-1)\cdot 3^n+1$.

19. 如图，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形，$BC//AD, EF//AD$，$AD=4, AB=BC=EF=2$，$ED=\sqrt{10}, FB=2\sqrt{3}$，$M$ 为 AD 的中点.



（1）证明：$BM//$ 平面 CDE；

（2）求二面角 $F-BM-E$ 的正弦值.

【答案】（1）证明见详解；

（2）$\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$

【解析】

【分析】（1）结合已知易证四边形 $BCDM$ 为平行四边形，可证 $BM//CD$，进而得证；

（2）作 $BO\perp AD$ 交 AD 于 O，连接 OF，易证 OB,OD,OF 三垂直，采用建系法结合二面角夹角余弦公式即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $BC//AD, EF=2, AD=4, M$ 为 AD 的中点，所以 $BC//MD, BC=MD$，

四边形$BCDM$ 为平行四边形，所以$BM//CD$，又因为$BM \not\subset$平面CDE，

$CD \subset$平面CDE，所以$BM//$平面CDE；

【小问 2 详解】

如图所示，作$BO \perp AD$交AD于O，连接OF，

因为四边形$ABCD$为等腰梯形，$BC//AD, AD=4, AB=BC=2$，所以$CD=2$，

结合（1）$BCDM$ 为平行四边形，可得$BM=CD=2$，又$AM=2$，

所以$\triangle ABM$ 为等边三角形，O为AM 中点，所以$OB=\sqrt{3}$，

又因为四边形$ADEF$ 为等腰梯形，M 为AD中点，所以$EF=MD, EF//MD$，

四边形$EFMD$为平行四边形，$FM=ED=AF$，

所以$\triangle AFM$为等腰三角形，$\triangle ABM$与$\triangle AFM$底边上中点O重合，$OF \perp AM$，

$OF=\sqrt{AF^2-AO^2}=3$，

因为$OB^2+OF^2=BF^2$，所以$OB \perp OF$，所以OB, OD, OF互相垂直，

以OB方向为x轴，OD方向为y轴，OF方向为z轴，建立$O-xyz$空间直角坐标系，

$F(0,0,3)$，$B(\sqrt{3},0,0), M(0,1,0), E(0,2,3)$，$\overrightarrow{BM}=(-\sqrt{3},1,0), \overrightarrow{BF}=(-\sqrt{3},0,3)$，

$\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},2,3)$，设平面$BFM$ 的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

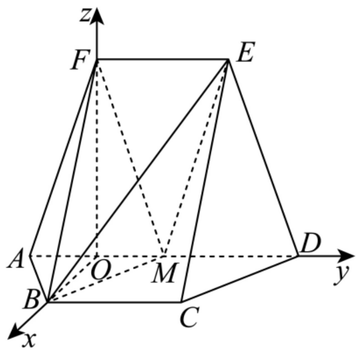
平面EMB的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+y_1=0\\ -\sqrt{3}x_1+3z_1=0\end{cases}$，令$x_1=\sqrt{3}$，得$y_1=3, z_1=1$，即$\vec{m}=(\sqrt{3},3,1)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\sqrt{3}x_2+y_2=0\\ -\sqrt{3}x_2+2y_2+3z_2=0\end{cases}$，令$x_2=\sqrt{3}$，得$y_2=3, z_2=-1$，

即$\vec{n}=(\sqrt{3},3,-1)$，$\cos\vec{m},\vec{n}=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{11}{13}$，则$\sin\vec{m},\vec{n}=\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$，

故二面角$F-BM-E$的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$.



20. 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $P(4,0)$ 的直线与 C 交于 A,B 两点，N 为线段 FP 的中点，直线 NB 交直线 MF 于点 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）设 $F(c,0)$，根据 M 的坐标及 $MF\perp x$ 轴可求基本量，故可求椭圆方程.

（2）设 $AB:y=k(x-4)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线方程和椭圆方程，用 A,B 的坐标表示 y_1-y_Q，结合韦达定理化简前者可得 $y_1-y_Q=0$，故可证 $AQ\perp y$ 轴.

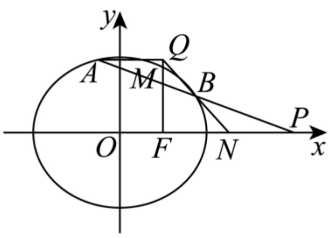
【小问 1 详解】

设 $F(c,0)$，由题设有 $c=1$ 且 $\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$，故 $\frac{a^2-1}{a}=\frac{3}{2}$，故 $a=2$，故 $b=\sqrt{3}$，

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

直线 AB 的斜率必定存在，设 $AB:y=k(x-4)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\y=k(x-4)\end{cases}$可得$\left(3+4k^2\right)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

故$\Delta=1024k^4-4\left(3+4k^2\right)\left(64k^2-12\right)>0$，故$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$，

又$x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$，

而$N\left(\frac{5}{2},0\right)$，故直线$BN:y=\frac{y_2}{x_2-\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)$，故$y_Q=\frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2-\frac{5}{2}}=\frac{-3y_2}{2x_2-5}$，

所以$y_1-y_Q=y_1+\frac{3y_2}{2x_2-5}=\frac{y_1\times\left(2x_2-5\right)+3y_2}{2x_2-5}$

$=\frac{k\left(x_1-4\right)\times\left(2x_2-5\right)+3k\left(x_2-4\right)}{2x_2-5}$

$=k\frac{2x_1x_2-5\left(x_1+x_2\right)+8}{2x_2-5}=k\frac{2\times\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-5\times\frac{32k^2}{3+4k^2}+8}{2x_2-5}$

$=k\frac{\frac{128k^2-24-160k^2+24+32k^2}{3+4k^2}}{2x_2-5}=0$，

故$y_1=y_Q$，即$AQ\perp y$轴.

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为$\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于x（或y）的一元二次方程，注意Δ的判断；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为x_1+x_2、x_1x_2（或y_1+y_2、y_1y_2）的形式；

（5）代入韦达定理求解.

21. 已知函数$f\left(x\right)=\left(1-ax\right)\ln\left(1+x\right)-x$.

（1）当$a=-2$时，求$f\left(x\right)$的极值；

（2）当$x\geq0$时，$f(x)\geq0$恒成立，求a的取值范围.

【答案】（1）极小值为0，无极大值.

（2）$a \le -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）求出函数的导数，根据导数的单调性和零点可求函数的极值.

（2）求出函数的二阶导数，就 $a \le -\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{2} < a < 0$、$a \ge 0$ 分类讨论后可得参数的取值范围.

【小问 1 详解】

当 $a = -2$ 时，$f(x) = (1+2x)\ln(1+x) - x$，

故 $f'(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1+2x}{1+x} - 1 = 2\ln(1+x) - \frac{1}{1+x} + 1$，

因为 $y = 2\ln(1+x), y = -\frac{1}{1+x} + 1$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，

故 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，而 $f'(0) = 0$，

故当 $-1 < x < 0$ 时，$f'(x) < 0$，当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$，

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值且极小值为 $f(0) = 0$，无极大值.

【小问 2 详解】

$f'(x) = -a\ln(1+x) + \frac{1-ax}{1+x} - 1 = -a\ln(1+x) - \frac{(a+1)x}{1+x}, x > 0$，

设 $s(x) = -a\ln(1+x) - \frac{(a+1)x}{1+x}, x > 0$，

则 $s'(x) = \frac{-a}{x+1} - \frac{(a+1)}{(1+x)^2} = -\frac{a(x+1)+a+1}{(1+x)^2} = -\frac{ax+2a+1}{(1+x)^2}$，

当 $a \le -\frac{1}{2}$ 时，$s'(x) > 0$，故 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

故 $s(x) > s(0) = 0$，即 $f'(x) > 0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，故 $f(x) \ge f(0) = 0$.

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时，当 $0 < x < -\frac{2a+1}{a}$ 时，$s'(x) < 0$，

故 $s(x)$ 在 $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$ 上为减函数，故在 $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$ 上 $s(x) < s(0)$，

即在$\left(0,-\frac{2a+1}{a}\right)$上$f'(x)<0$即$f(x)$为减函数，

故在$\left(0,-\frac{2a+1}{a}\right)$上$f(x)<f(0)=0$，不合题意，舍.

当$a\geq 0$，此时$s'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

同理可得在$(0,+\infty)$上$f(x)<f(0)=0$恒成立，不合题意，舍；

综上，$a\leq -\frac{1}{2}$.

【点睛】思路点睛：导数背景下不等式恒成立问题，往往需要利用导数判断函数单调性，有时还需要对导数进一步利用导数研究其符号特征，处理此类问题时注意利用范围端点的性质来确定如何分类.

（二）选考题：共10分，请考生在第22、23题中任选一题作答，并用2B铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修4-4：坐标系与参数方程]

22. 在平面直角坐标系xOy中，以坐标原点O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C的极坐标方程为$\rho=\rho\cos\theta+1$.

（1）写出C的直角坐标方程；

（2）设直线l：$\begin{cases}x=t\\y=t+a\end{cases}$（$t$为参数），若$C$与$l$相交于$A$、$B$两点，若$|AB|=2$，求$a$的值.

【答案】（1）$y^2=2x+1$

（2）$a=\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】（1）根据$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\\rho\cos\theta=x\end{cases}$可得$C$的直角方程.

（2）将直线的新的参数方程代入C的直角方程，

法1：结合参数s的几何意义可得关于a的方程，从而可求参数a的值；

法2：将直线的直角方程与曲线的直角方程联立，结合弦长公式可求a的值.

【小问1详解】

由$\rho=\rho\cos\theta+1$，将$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\\rho\cos\theta=x\end{cases}$代入$\rho=\rho\cos\theta+1$，

故可得 $\sqrt{x^2+y^2}=x+1$，两边平方后可得曲线的直角坐标方程为 $y^2=2x+1$.

【小问 2 详解】

对于直线 l 的参数方程消去参数 t，得直线的普通方程为 $y=x+a$.

法 1：直线 l 的斜率为 1，故倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，

故直线的参数方程可设为 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y=a+\frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases}$，$s\in\mathbf{R}$.

将其代入 $y^2=2x+1$ 中得 $s^2+2\sqrt{2}(a-1)s+2\left(a^2-1\right)=0$

设 A,B 两点对应的参数分别为 s_1,s_2，则 $s_1+s_2=-2\sqrt{2}\left(a-1\right),s_1s_2=2\left(a^2-1\right)$，

且 $\Delta=8\left(a-1\right)^2-8\left(a^2-1\right)=16-16a>0$，故 $a<1$，

$\therefore\left|AB\right|=\left|s_1-s_2\right|=\sqrt{\left(s_1+s_2\right)^2-4s_1s_2}=\sqrt{8\left(a-1\right)^2-8(a^2-1)}=2$，解得 $a=\frac{3}{4}$.

法 2：联立 $\begin{cases} y=x+a \\ y^2=2x+1 \end{cases}$，得 $x^2+(2a-2)x+a^2-1=0$，

$\Delta=(2a-2)^2-4\left(a^2-1\right)=-8a+8>0$，解得 $a<1$，

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),\therefore x_1+x_2=2-2a,x_1x_2=a^2-1$，

则 $\left|AB\right|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2-2a)^2-4\left(a^2-1\right)}=2$，

解得 $a=\frac{3}{4}$

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 实数 a,b 满足 $a+b\geq 3$.

（1）证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

（2）证明：$\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right|\geq 6$.

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）直接利用 $2a^2+2b^2\geq(a+b)^2$ 即可证明.

（2）根据绝对值不等式并结合（1）中结论即可证明.

【小问 1 详解】

因为 $2a^2+2b^2-\left(a+b\right)^2=a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2\geq 0$，

当 $a=b$ 时等号成立，则 $2a^2+2b^2\geq (a+b)^2$，

因为 $a+b\geq 3$，所以 $2a^2+2b^2\geq (a+b)^2>a+b$；

【小问 2 详解】

$\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right|\geq \left|a-2b^2+b-2a^2\right|=\left|2a^2+2b^2-(a+b)\right|$

$=2a^2+2b^2-(a+b)\geq (a+b)^2-(a+b)=(a+b)(a+b-1)\geq 3\times 2=6$