

A. $a = -2$

B. 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时, $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$, 则 C 的离心率为_____.

13. 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线, 则 $a =$ _____.

14. 甲、乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8, 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上数字的大小, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B$, $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$

(1) 求 B ;

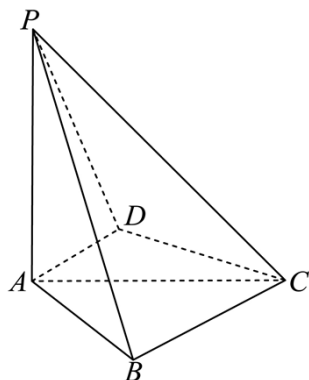
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

16. 已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

17. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AC = 2$, $BC = 1, AB = \sqrt{3}$.



(1) 若 $AD \perp PB$ ，证明： $AD \parallel$ 平面 PBC ；

(2) 若 $AD \perp DC$ ，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$ ，求 AD 。

18. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$

(1) 若 $b = 0$ ，且 $f'(x) \geq 0$ ，求 a 的最小值；

(2) 证明：曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形；

(3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$ ，求 b 的取值范围。

19. 设 m 为正整数，数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 a_j ($i < j$) 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列。

(1) 写出所有的 (i, j) ， $1 \leq i < j \leq 6$ ，使数列 a_1, a_2, \dots, a_6 是 (i, j) -可分数列；

(2) 当 $m \geq 3$ 时，证明：数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列；

(3) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j ($i < j$)，记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 P_m ，证明： $P_m > \frac{1}{8}$ 。