2014年普通高等学校招生全国统一考试文科数学山东卷

第 I 卷（共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.
在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 已知 $a,b\in R,i$ 是虚数单位. 若 $a+i=2-bi$，则 $(a+bi)^2=$

(A) $3-4i$　　(B) $3+4i$　　(C) $4-3i$　　(D) $4+3i$

(2) 设集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x<0\},B=\{x\,|\,1\le x\le 4\}$，则 $A\cap B=$

(A) $(0,2]$　　(B) $(1,2)$　　(C) $[1,2)$　　(D) $(1,4)$

(3) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 x-1}}$ 的定义域为

(A) $(0,2)$　　(B) $(0,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

(4)
用反证法证明命题：“设 a,b 为实数，则方程 $x^3+ax+b=0$ 至少有一个实根”时，要做的假设是

(A) 方程 $x^3+ax+b=0$ 没有实根　　(B) 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有一个实根

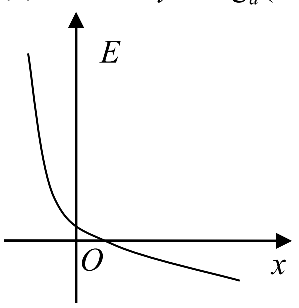
(C) 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有两个实根　　(D) 方程 $x^3+ax+b=0$ 恰好有两个实根

(5) 已知实数 x,y 满足 $a^x<a^y\,(0<a<1)$，则下列关系式恒成立的是

(A) $x^3>y^3$　　(B) $\sin x>\sin y$

(C) $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$　　(D) $\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{y^2+1}$

(6) 已知函数 $y=\log_a(x+c)(a,c为常数，其中a>0,a\ne 1)$ 的图象如右图，则下列结论成立的是



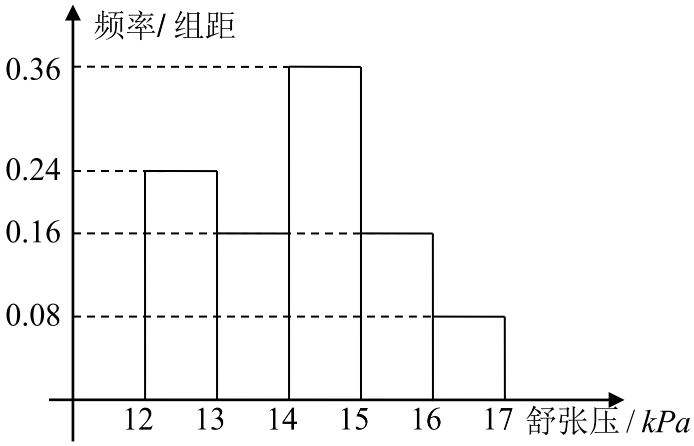
(A) $a>0,c>1$　　(B) $a>1,0<c<1$

(C) $0<a<1,c>1$　　(D) $0<a<1,0<c<1$

(7) 已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3}),\vec{b}=(3,m)$. 若向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$，则实数 $m=$

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 0　　(D) $-\sqrt{3}$

(8)
为了研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为 $[12,13),[13,14),[14,15),[15,16),[16,17]$，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，……，第五组，右图是根据试验数据制成的频率分布直方图。已知第一组与第二组共有20人，第三组中没有疗效的有6人，则第三组中有疗效的人数为



(A) 6
(B) 8
(C) 12
(D) 18

(9)
对于函数 $f(x)$，若存在常数 $a\neq 0$，使得 x 取定义域内的每一个值，都有 $f(x)=f(2a-x)$，则称 $f(x)$ 为准偶函数，下列函数中是准偶函数的是

(A) $f(x)=\sqrt{x}$　　(B) $f(x)=x^3$
(C) $f(x)=\tan x$　　(D) $f(x)=\cos(x+1)$

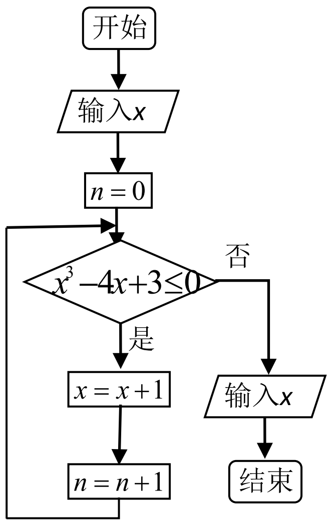
(10)
已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leq 0,\\ 2x-y-3\geq 0,\end{cases}$ 当目标函数 $z=ax+by$ $(a>0,b>0)$ 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时，a^2+b^2 的最小值为

(A) 5　　(B) 4　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) 2

第II卷（共100分）

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

(11) 执行右面的程序框图，若输入的 x 的值为1，则输出的 n 的值为____.



(12) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x$ 的最小正周期为_____.

(13)
一个六棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$，其底面是边长为2的正六边形，侧棱长都相等，则该六棱锥的侧面积为________。

(14)
圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切，圆 C 截 x 轴所得弦的长为 $2\sqrt{3}$，则圆 C 的标准方程为____。

(15)
已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，右顶点为A，抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点为F，若双曲线截抛物线的准线所得线段长为 $2c$，且 $|FA|=c$，则双曲线的渐近线方程为____________。

三、解答题：本大题共6小题，共75分.

(16)（本小题满分12分）
海关对同时从A，B，C三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测，从各地区进口此种商品的数量（单位：件）如右表所示. 工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取6件样品进行检测.

地区	A	B	C
数量	50	150	100

（Ⅰ）求这6件样品中来自A，B，C各地区商品的数量；

（Ⅱ）若在这6件样品中随机抽取2件送往甲机构进行进一步检测，求这2件商品来自相同地区的概率.

(17)（本小题满分12分）

ΔABC 中，角A，B，C所对的边分别为 a,b,c . 已知 $a=3,\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3},B=A+\dfrac{\pi}{2}$.

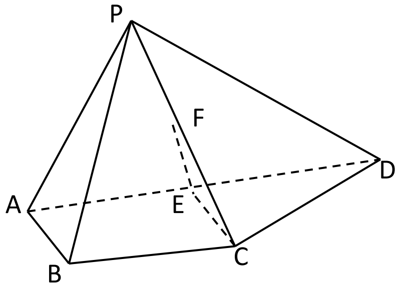
（Ⅰ）求 b 的值；

（Ⅱ）求 ΔABC 的面积.

(18)（本小题满分12分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，

$AP\perp$ 平面 $PCD, AD//BC, AB=BC=\dfrac{1}{2}AD, E, F$ 分别为线段 AD, PC 的中点.



（Ⅰ）求证：$AP//$ 平面 BEF ；

（Ⅱ）求证：$BE\perp$ 平面 PAC .

(19)（本小题满分12分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知公差 $d=2$ ，a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$ ，记 $T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\ldots+(-1)^n b_n$ ，求 T_n .

(20)（本小题满分13分）

设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{x-1}{x+1}$ ，其中 a 为常数.

（Ⅰ）若 $a=0$ ，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(21)（本小题满分14分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，直线 $y=x$ 被椭圆 C 截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过原点的直线与椭圆C交于A，B两点（A，B不是椭圆C的顶点）.
点D在椭圆C上，且 $AD\perp AB$ ，直线BD与 x 轴、 y 轴分别交于M，N两点.

（i）设直线BD，AM的斜率分别为 k_1,k_2 ，证明存在常数 λ 使得 $k_1=\lambda k_2$ ，并求出 λ 的值；

（ii）求 ΔOMN 面积的最大值.

2014年高考山东卷文科数学真题及参考答案

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，选择符合题目要求的选项。

（1）已知$a,b\in R,i$是虚数单位，若$a+i=2-bi$，则$(a+bi)^2=$

（A）$3-4i$　　（B）$3+4i$　　（C）$4-3i$　　（D）$4+3i$

【解析】由$a+i=2-bi$得，$a=2$，$b=-1$，$(a+bi)^2=(2-i)^2=4-4i+i^2=3-4i$

故答案选A

（2）设集合$A=\{x|x^2-2x<0\},B=\{x|1\le x\le 4\}$，则$A\bigcap B=$

（A）(0,2]　　（B）(1,2)　　（C）[1,2)　　（D）(1,4)

【解析】$A=(0,2)$，$B=[1,4]$，数轴上表示出来得到$A\bigcap B=$[1,2)

故答案为C

（3）函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 x-1}}$的定义域为

（A）$(0,2)$　　（B）$(0,2]$　　（C）$(2,+\infty)$（D）$[2,+\infty)$

【解析】$\log_2 x-1>0$故$x>2$。选D

（4）用反证法证明命题"设$a,b\in R,$则方程$x^2+ax+b=0$至少有一个实根"时要做的假设是

（A）方程$x^2+ax+b=0$没有实根　　（B）方程$x^2+ax+b=0$至多有一个实根

（C）方程$x^2+ax+b=0$至多有两个实根　（D）方程$x^2+ax+b=0$恰好有两个实根

【解析】答案选A，解析略。

（5）已知实数x,y满足$a^x<a^y(0<a<1)$，则下列关系式恒成龙的是

（A）$x^3>y^3$　　（B）$\sin x>\sin y$

（C）$\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$　　（D）$\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{y^2+1}$

【解析】由$a^x<a^y(0<a<1)$得，$x>y$，但是不可以确定x^2与y^2的大小关系，故C、D排除，而$y=\sin x$本身是一个周期函数，故B也不对，$x^3>y^3$正确。

（6）已知函数$y=\log_a(x+c)(a,c为常数。其中a>0,a\ne 1)$的图像如右图，则下列结论成立的是

（A）$a>1,c>1$　　（B）$a>1,0<c<1$

（C）$0<a<1,c>1$　　（D）$0<a<1,0<c<1$

【解析】

由图象单调递减的性质可得$0<a<1$，向左平移小于1个单位，故$0<c<1$

答案选C

（7）已知向量$a=(1,\sqrt{3}),b=(3,m)$.若向量a,b的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$，则实数$m=$

（A）$2\sqrt{3}$　　　　（B）$\sqrt{3}$　　　　（C）0　　　　（D）$-\sqrt{3}$

【解析】：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3+\sqrt{3}m$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2\sqrt{9+m^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 3+\sqrt{3}m=\sqrt{3}\cdot\sqrt{9+m^2}\ \therefore m=\sqrt{3}$

答案：B

（8）为了研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床实验。所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为[12,13），
[13,14）,[14,15）,[15,16].将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，……，第五组。右图是根据试验数据制成的频率分布直方图。已知第一组和第二组共有20人，第三组中没有疗效的有6人，则第三组中有疗效的人数为

（A）6　　　　（B）8　　　　（C）12　　　（D）18

【解析】：第一组与第二组频率之和为0.24+0.16=0.4

$20\div 0.4=50$

$50\times 0.36=18$

$18-6=12$

答案：C

（9）对于函数 $f(x)$，若存在常数 $a\neq 0$，使得 x 取定义域内的每一个值，都有 $f(x)=f(2a\text{-}x)$，则称 $f(x)$ 为准偶函数。下列函数中是准偶函数的是

（A）$f(x)=\sqrt{x}$　（B）$f(x)=x^2$　（C）$f(x)=\tan x$（D）$f(x)=\cos(x+1)$

【解析】：由分析可知准偶函数即偶函数左右平移得到的。

答案：D

（10）已知 x,y 满足的约束条件 $\begin{cases}x\text{-}y\text{-}1\le 0,\\ 2x\text{-}y\text{-}3\ge 0,\end{cases}$ 当目标函数 $z=ax+by(a>0,b>0)$ 在该约束条件下取得最小值 $2\sqrt{5}$ 时，a^2+b^2 的最小值为

（A）5　　　　（B）4　　　　（C）$\sqrt{5}$　　　　（D）2

【解析】：$\begin{cases}x-y-1\le 0\\ 2x-y-3\ge 0\end{cases}$ 求得交点为 $\left(2,1\right)$，则 $2a+b=2\sqrt{5}$，即圆心 $\left(0,0\right)$ 到直线 $2a+b-2\sqrt{5}=0$ 的距离的平方 $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2=2^2=4$。

答案： B

二．填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分，答案须填在题中横线上。

11．执行右面的程序框图，若输入的 x 的值为1，则输出的 n 的值为＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解析】：根据判断条件 $x^2-4x+3\le 0$，得 $1\le x\le 3$，

输入 $x=1$

第一次判断后循环，$x=x+1=2,n=n+1=1$

第二次判断后循环，$x=x+1=3,n=n+1=2$

第三次判断后循环，$x=x+1=4,n=n+1=3$

第四次判断不满足条件，退出循环，输出 $n=3$

答案：3

12．函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x$ 的最小正周期为 ________ 。

【解析】：$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$

$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

答案：$T=\pi$

13．一个六棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$，其底面是边长为2的正六边形，侧棱长都相等，则该六棱锥的侧面积为 ________ 。

【解析】：设六棱锥的高为 h，斜高为 h'，

则由体积 $V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ\times 6\right)\times h=2\sqrt{3}$ 得：$h=1$，$h'=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+h^2}=2$

$\therefore$ 侧面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times h'\times 6=12$.

答案：12

14．圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切，圆 C 截 x 轴所得的弦的长 $2\sqrt{3}$，则圆 C 的标准方程为 ________ 。

【解析】 设圆心 $\left(a,\frac{a}{2}\right)(a>0)$，半径为 a. 由勾股定理 $\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2$ 得：$a=2$

$\therefore$ 圆心为 $(2,1)$，半径为2，$\therefore$ 圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

答案：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

15．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，右顶点为 A，抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，若双曲线截抛物线的准线所得线段长为 $2c$，且 $|FA|=c$，则双曲线的渐近线方程为

________ 。

【解析】 由题意知 $\frac{P}{2}=\sqrt{c^2-a^2}=b$，

抛物线准线与双曲线的一个交点坐标为 $\left(c,\frac{P}{2}\right)$，

即 $(c,-b)$ 代入双曲线方程为 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{b^2}{b^2}=1$，得 $\frac{c^2}{a^2}=2$，

$\therefore$ 渐近线方程为 $y=\pm x$，$\therefore\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=1$.

答案：1

三．解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（16）（本小题满分12分）

海关对同时从 A,B,C 三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测，从各地区进口此种商品的数量（单位：件）如右表所示，工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取6件样品进行检测。

地区	A	B	C
数量	50	150	100

（Ⅰ）求这6件样品中来自 A,B,C 各地区样品的数量；
（Ⅱ）若在这6件样品中随机抽取2件送往甲机构进行进一步检测，求这2件商品来自相同地区的概率。

（16）【解析】：

（Ⅰ）因为工作人员是按分层抽样抽取商品，所以各地区抽取商品比例为：

$A:B:C=50:150:100=1:3:2$

所以各地区抽取商品数为：$A:6\times\frac{1}{6}=1$，$B:6\times\frac{3}{6}=3$，$C:6\times\frac{2}{6}=2$；

（Ⅱ）设各地区商品分别为：A,B_1,B_2,B_3,C_1,C_2

基本时间空间Ω为：$(A,B_1),(A,B_2),(A,B_3),(A,C_1),(A,C_2),(B_1,B_2),(B_1,B_3)$
$(B_1,C_1),(B_1,C_2),(B_2,B_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2),(B_3,C_1),(B_3,C_2),(C_1,C_2)$，共15个.

样本时间空间为：$(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_2,B_3),(C_1,C_2)$

所以这两件商品来自同一地区的概率为：$P(A)=\frac{4}{15}$.

（17）（本小题满分12分）

在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c。已知 $a=3,\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3},B=A+\frac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）求 b 的值；
（Ⅱ）求 ΔABC 的面积。

（17）【解析】：

（Ⅰ）由题意知：$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$$\sin B=\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=\sin A\cos\frac{\pi}{2}+\cos A\sin\frac{\pi}{2}=\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A}=3\sqrt{2}$

（Ⅱ）由余弦定理得：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow c^2-4\sqrt{3}c+9=0\Rightarrow c_1=\sqrt{3},c_2=3\sqrt{3},$$

又因为 $B=A+\frac{\pi}{2}$ 为钝角，所以 $b>c$，即 $c=\sqrt{3}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

（18）（本小题满分12分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AP\perp$ 平面$PCD, AD//BC$, $AB=BC=\frac{1}{2}AD$, E,F 分别为线段 AD,PC 的中点。

（Ⅰ）求证：$AP//$ 平面BEF
（Ⅱ）求证：$BE\perp$ 平面PAC

【解析】：（Ⅰ）连接AC交BE于点O，连接OF，不妨设AB=BC=1,则AD=2

$\because AB=BC,AD//BC,\therefore$ 四边形ABCE为菱形

$\because O,F$分别为AC,PC中点，$\therefore OF//AP$

又$\because OF\subset$平面BEF，$\therefore AP//$平面BEF

（Ⅱ）$\because AP\perp$平面PCD，$CD\subset$平面PCD，$\therefore AP\perp CD$

$\because BC//ED, BC=ED$，$\therefore BCDE$为平行四边形，$\therefore BE//CD$，$\therefore BE\perp PA$

又$\because ABCE$为菱形，$\therefore BE\perp AC$

又$\because PA\cap AC=A$，PA、$AC\subset$平面PAC，$\therefore BE\perp$平面PAC

（19）（本小题满分12分）

在等差数列$\{a_n\}$中，已知$d=2$，a_2是a_1与a_4等比中项.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$，记$T_n=-b_1+b_2-b_3+\cdots+(-1)^n b_n$，求$T_n$.

【解析】：（Ⅰ）由题意知：

$\{a_n\}$为等差数列，设$a_n=a_1+(n-1)d$，$\because a_2$为a_1与a_4的等比中项

$\therefore a_2^2=a_1\times a_4$且$a_1\neq 0$，即$(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$，$\because d=2$ 解得：$a_1=2$

$\therefore a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：$a_n=2n$，$b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}=n(n+1)$

①当n为偶数时：

$$\begin{aligned}T_n&=-(1\times 2)+(2\times 3)-(3\times 4)+\cdots\cdots+n(n+1)\\&=2(-1+3)+4(-3+5)+\cdots\cdots+n[-(n-1)+(n+1)]\\&=2\times 2+4\times 2+6\times 2+\cdots\cdots+n\times 2\\&=2\times(2+4+6+\cdots\cdots+n)\\&=2\times\frac{(2+n)\frac{n}{2}}{2}=\frac{n^2+2n}{2}\end{aligned}$$

②当n为奇数时：

$$\begin{aligned}T_n&=-(1\times 2)+(2\times 3)-(3\times 4)+\cdots\cdots-n(n+1)\\&=2(-1+3)+4(-3+5)+\cdots\cdots+(n-1)[-(n-2)+n]-n(n+1)\\&=2\times 2+4\times 2+6\times 2+\cdots\cdots+(n-1)\times 2-n(n+1)\\&=2\times[2+4+6+\cdots\cdots+(n-1)]-n(n+1)\\&=2\times\frac{(2+n-1)\frac{n-1}{2}}{2}-n(n-1)=-\frac{n^2+2n+1}{2}\end{aligned}$$

综上：$T_n=\begin{cases}-\dfrac{n^2+2n+1}{2}，n\text{为奇数}\\ \dfrac{n^2+2n}{2},n\text{为偶数}\end{cases}$

（20）（本小题满分13分）

设函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{x-1}{x+1}$，其中$a$为常数.

（Ⅰ）若$a=0$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）讨论函数$f(x)$的单调性.

【解析】(1) 当$a=0$时 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}, f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

$f'(1)=\dfrac{2}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2}$

又$\because f(1)=0 \therefore$ 直线过点$(1,0)$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

(2) $f'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{2}{(x+1)^2}\ \ (x>0)$

①当$a=0$时，$f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$恒大于$0.f(x)$在定义域上单调递增.

②当$a>0$时，$f'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{a(x+1)^2+2x}{x(x+1)^2}>0.f(x)$在定义域上单调递增.

③当$a<0$时，$\Delta=(2a+2)^2-4a^2=8a+4\le 0$,即$a\le -\dfrac{1}{2}$.

开口向下，$f(x)$在定义域上单调递减。

当$-\dfrac{1}{2}<a<0$时，$\Delta>0.x_{1,2}=\dfrac{-(2a+2)\pm\sqrt{8a+4}}{2a}=\dfrac{-a-1\pm\sqrt{2a+1}}{a}$

对称轴方程为$x=-\dfrac{2a+2}{2a}=-1-\dfrac{1}{a}>0$.且$x_1\bullet x_2=1>0$

$\therefore f(x)$在$(0,\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a})$单调递减,$(\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a},\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a})$单调递增，

$(\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a},+\infty)$单调递减。

综上所述，$a=0$ 时，$f(x)$在定义域上单调递增；$a>0$ 时，$f(x)$ 在定义域上单调递增

$a\le -\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$在定义域上单调递减;$-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，$f(x)$ 在$(0,\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a})$ 单调递减，

$(\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a},\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a})$单调递增,$(\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a},+\infty)$单调递减。

（21）（本小题满分14分）

在平面直角坐标系xOy中，椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，直线$y=x$被椭圆$C$截得的线段长为$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过原点的直线与椭圆C交于A,B两点（A,B不是椭圆C的顶点），点D在椭圆C上，且$AD\perp AB$，直线BD与x轴、y轴分别交于M,N两点.

（i）设直线BD,AM的斜率分别为k_1,k_2.证明存在常数λ使得$k_1=\lambda k_2$，并求出λ的值；

（ii）求$\triangle OMN$面积的最大值.

【解析】(1)$\because e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\therefore \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$即$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{3}{4},\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}\therefore a^2=4b^2$

设直线与椭圆交于p,q两点。不妨设p点为直线和椭圆在第一象限的交点。

又$\because$弦长为$\frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\therefore p(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})$

$\therefore \frac{\frac{4}{5}}{a^2}+\frac{\frac{4}{5}}{b^2}=1$

联立解得$a^2=4, b^2=1$

$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.