绝密★启用前

2009年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.

4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一．真空题

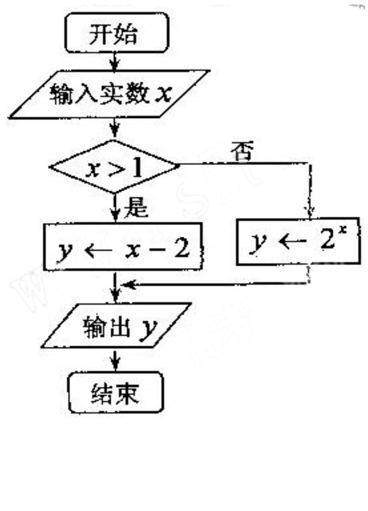
（本大题满分56分）本大题有14题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1． 若复数 z 满足z (1+i) =1-i (I是虚数单位)，则其共轭复数 $\overline{z}$ =__________________ .

2． 已知集合 $A=\{x\,|\,x\le 1\}$，$B=\{x\,|\,x\ge a\}$，且 $A\cup B=R$，则实数a的取值范围是_______________________ .

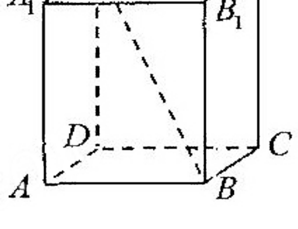
3． 若行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ 1 & x & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 中，元素4的代数余子式大于0，

则x满足的条件是________________________ .



4．某算法的程序框如右图所示，则输出量y与输入量x满足的关系式是____________________________ .

5．如图，若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面连长为2，高为4，则异面直线 BD_1 与AD所成角的大小是______________（结果



用反三角函数表示）.

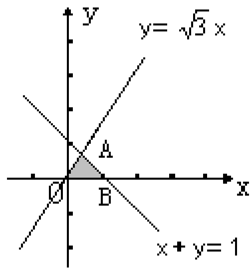
6．函数 $y=2\cos^2 x+\sin 2x$ 的最小值是____________________.

7．某学校要从5名男生和2名女生中选出2人作为上海世博会志愿者，若用随机变量ξ表示选出的志愿者中女生的人数，则数学期望$E\xi$ ____________（结果用最简分数表示）.

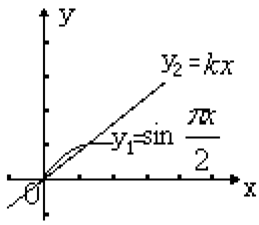
8.已知三个球的半径R_1，R_2，R_3满足$R_1+2R_2=3R_3$，则它们的表面积S_1，S_2，S_3，满足的等量关系是____________.

9.已知F_1、F_2是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的两个焦点，$P$为椭圆$C$上一点，且$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$.若$\Delta PF_1F_2$的面积为9，则$b$ =____________.

10. 在极坐标系中，由三条直线$\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$围成图形的面积是________.



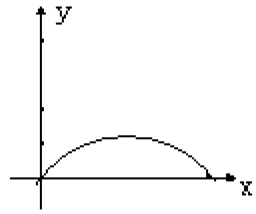
11. 当$0\le x\le 1$时，不等式$\sin\dfrac{\pi x}{2}\ge kx$成立，则实数$k$的取值范围是_______________.



12．已知函数$f(x)=\sin x+\tan x$.项数为27的等差数列$\{a_n\}$满足$a_n\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且公差$d\ne 0$.若$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{27})=0$，则当$k$ =____________是，$f(a_k)=0$.

13. 某地街道呈现东—西、南—北向的网格状，相邻街距都为1. 两街道相交的点称为格点。若以互相垂直的两条街道为轴

建立直角坐标系，现有下述格点$(-2,2)$，$(3,1)$，$(3,4)$，$(-2,3)$，$(4,5)$，$(6,6)$为报刊零售点. 请确定一个格点（除零售点外）__________为发行站，使6个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短.



14. 将函数 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2$ $(x\in[0,6])$ 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角θ $(0\le\theta\le\alpha)$，得到曲线C. 若对于每一个旋转角θ，曲线C都是一个函数的图像，则α的最大值为__________.

二．选择题（本大题满分16分）本大题共有4题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得4分，否则一律得零分。

15. “$-2\le a\le 2$”是“实系数一元二次方程$x^2+ax+1=0$有虚根”的

（A）必要不充分条件　　（B）充分不必要条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

16.若事件E与F相互独立，且$P(E)=P(F)=\dfrac{1}{4}$，则$P(E \text{ I } F)$的值等于

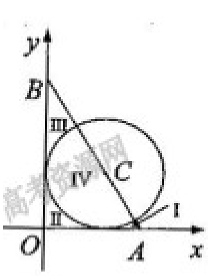
（A）0　（B）$\dfrac{1}{16}$　（C）$\dfrac{1}{4}$　（D）$\dfrac{1}{2}$

17.在发生某公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续10天，每天新增疑似病例不超过7人”。根据过去10天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据，一定符合该标志的是

（A）甲地：总体均值为3，中位数为4　（B）乙地：总体均值为1，总体方差大于0

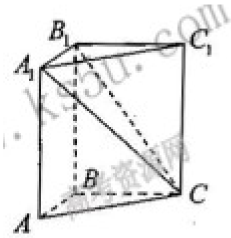
（C）丙地：中位数为2，众数为3　（D）丁地：总体均值为2，总体方差为3

18.过圆C:$(x-1)^2+(y-1)^2=1$的圆心，作直线分别交x、y正半轴于点A、B，ΔAOB被圆分成四部分（如图），若这四部分图形面积满足$S_{\text{I}}+S_{¥}=S_{\Pi}+S_{|||}$,则直线AB有（ ）



（A） 0条　（B） 1条　（C） 2条　（D） 3条

三．解答题（本大题满分78分）本大题共5题，解答下列各题必须在答题纸相应的编号规定区域内写出必要的步骤



19（本题满分14分）

如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=BC=AB=2$，$AB\perp BC$,求二面角$B_1-A_1C-C_1$的大小。

20（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分。

有时可用函数

$$f(x)=\begin{cases}0.1+15\ln\dfrac{a}{a-x},(x\le 6)\\ \dfrac{x-4.4}{x-4},(x>6)\end{cases}$$

描述学习某学科知识的掌握程度，其中x表示某学科知识的学习次数（$x\in N^*$），$f(x)$表示对该学科知识的掌握程度，正实数a与学科知识有关。

（1） 证明：当$x\ge 7$时，掌握程度的增加量$f(x+1)-f(x)$总是下降；

（2） 根据经验，学科甲、乙、丙对应的a的取值区间分别为$(115,121]$,$(121,127]$,$(121,133]$。当学习某学科知识6次时，掌握程度是85%，请确定相应的学科。

21．（本题满分16分）本题共有2个小题，第1小题满分8分，第2小题满分8分。

已知双曲线$c:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1,$设过点$A(-3\sqrt{2},0)$的直线l的方向向量$\vec{e}=(1,k)$

（1） 当直线l与双曲线C的一条渐近线m平行时，求直线l的方程及l与m的距离；

（2） 证明：当$k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，在双曲线C的右支上不存在点Q，使之到直线l的距离为$\sqrt{6}$。

22.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分。

已知函数$y=f(x)$的反函数。定义：若对给定的实数$a(a\neq 0)$，函数$y=f(x+a)$与$y=f^{-1}(x+a)$互为反函数，则称$y=f(x)$满足“a和性质”；若函数$y=f(ax)$与$y=f^{-1}(ax)$互为反函数，则称$y=f(x)$满足“a积性质”。

（1） 判断函数$g(x)=x^2+1(x>0)$是否满足“1和性质”，并说明理由；

（2） 求所有满足“2和性质”的一次函数；

（3） 设函数 $y=f(x)(x>0)$ 对任何 $a>0$，满足“a 积性质”。求 $y=f(x)$ 的表达式。

23.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分5分，第2小题满分5分，第3小题满分8分。

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列。

（1） 若 $a_n=3n+1$，是否存在 m、$k\in N^*$，有 $a_m+a_{m+1}=a_k$？说明理由；

（2） 找出所有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，使对一切 $n\in N^*$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$，并说明理由；

（3） 若 $a_1=5,d=4,b_1=q=3,$ 试确定所有的 p，使数列 $\{a_n\}$ 中存在某个连续 p 项的和是数列 $\{b_n\}$ 中的一项，请证明。

2009年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷（理工农医类）

考生注意：

1．答卷前，考生务必在答题纸上将姓名、高考准考证号填写清楚，并在规定的区域内贴上条形码．

2．**本试卷共有23道试题，满分150分．考试时间20分钟．**

一．真空题

（本大题满分56分）本大题有14题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分．

4．若复数 z 满足z (1+i) =1-i (I是虚数单位)，则其共轭复数 $\overline{z}$ =__________________．

1．【答案】i

【解析】设z＝a＋bi，则（a＋bi　　）(1+i)　　=1-i，即a－b＋（a＋b）i＝1－i，由 $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=-1 \end{cases}$，解得a＝0，b＝－1，所以z＝－i，$\overline{z}$ ＝i

5．已知集合 $A=\{x \mid x \le 1\}$，$B=\{x \mid x \ge a\}$，且 $A \cup B = R$，则实数a的取值范围是______________________．

2．【答案】a≤1

【解析】因为A∪B=R，画数轴可知，实数a必须在点1上或在1的左边，所以，有a≤1。

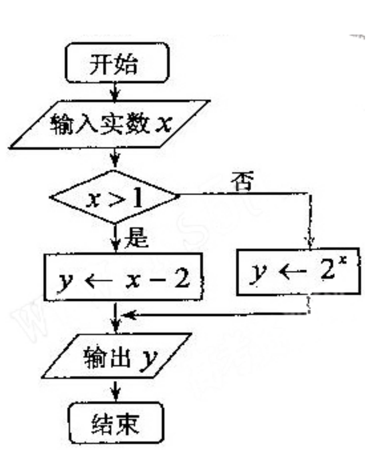
6．若行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ 1 & x & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 中，元素4的代数余子式大于0，

则x满足的条件是________________________．

3．【答案】$x > \dfrac{8}{3}$

【解析】依题意，得：$(-1)^2 \times (9x-24) > 0$，解得：$x > \dfrac{8}{3}$

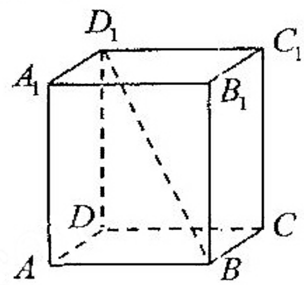
4．某算法的程序框如右图所示，则输出量y与输入量x满足的关系式是____________________________．



4．【答案】$y=\begin{cases}2^x, x<1\\ x-2, x>1\end{cases}$

【解析】当x＞1时，有y＝x－2，当x＜1时有y＝2^x，所以，有分段函数。

5．如图，若正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面连长为2，高为4，则异面直线BD_1与AD所成角的大小是______________（结果用反三角函数表示）.



5．【答案】$\arctan\sqrt{5}$

【解析】因为AD∥A_1D_1，异面直线BD_1与AD所成角就是BD_1与A_1D_1所在角，即∠A_1D_1B，由勾股定理，得A_1B＝$2\sqrt{5}$，tan∠A_1D_1B＝$\sqrt{5}$，所以，∠A_1D_1B＝$\arctan\sqrt{5}$。

6．函数$y=2\cos^2 x+\sin 2x$的最小值是______________________.

6．【答案】$1-\sqrt{2}$

【解析】$f(x)=\cos 2x+\sin 2x+1=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+1$，所以最小值为：$1-\sqrt{2}$

7．某学校要从5名男生和2名女生中选出2人作为上海世博会志愿者，若用随机变量ξ表示选出的志愿者中女生的人数，则数学期望$E\xi$____________（结果用最简分数表示）.

7．【答案】$\dfrac{4}{7}$

【解析】ξ可取0，1，2，因此P（ξ＝0）＝$\dfrac{C_5^2}{C_7^2}=\dfrac{10}{21}$，P（$\xi$＝1）＝$\dfrac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}=\dfrac{10}{21}$，

P（ξ＝2）＝$\dfrac{C_2^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{21}$，$E\xi=0\times\dfrac{10}{21}+1\times\dfrac{10}{21}+2\times\dfrac{1}{21}=\dfrac{4}{7}$

8.已知三个球的半径R_1，R_2，R_3满足$R_1+2R_2=3R_3$，则它们的表面积S_1，S_2，S_3，满足的等量关系是___________.

8、【答案】$\sqrt{S_1}+2\sqrt{S_2}=3\sqrt{S_3}$

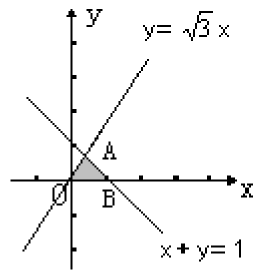
【解析】$S_1=4\pi R_1^2$，$\sqrt{S_1}=2\sqrt{\pi}R_1$，同理：$\sqrt{S_2}=2\sqrt{\pi}R_2$ $\sqrt{S_3}=2\sqrt{\pi}R_3$，即$R_1$＝$\dfrac{\sqrt{S_1}}{2\sqrt{\pi}}$，$R_2$＝$\dfrac{\sqrt{S_2}}{2\sqrt{\pi}}$，$R_3$＝$\dfrac{\sqrt{S_3}}{2\sqrt{\pi}}$，由$R_1+2R_2=3R_3$得$\sqrt{S_1}+2\sqrt{S_2}=3\sqrt{S_3}$

9.已知 F_1、F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的两个焦点，$P$ 为椭圆 C 上一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$. 若 ΔPF_1F_2 的面积为9，则 b =___________.

9．【答案】3

【解析】依题意，有 $\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a\\|PF_1|\bullet|PF_2|=18\\|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2\end{cases}$ ，可得4c²＋36＝4a²，即a²－c²＝9，故有b＝3。

10. 在极坐标系中，由三条直线 $\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$ 围成图形的面积是________.

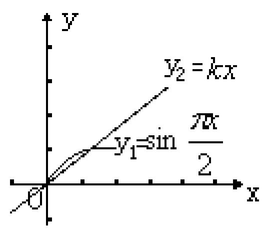


10、【答案】$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

【解析】化为普通方程，分别为：y＝0，y＝$\sqrt{3}$x，x＋y＝1，画出三条直线的图象如右图，可求得A（$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$），B（1,0），三角形AOB的面积为：$\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

11. 当 $0\le x\le1$ 时，不等式 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\ge kx$ 成立，则实数 k 的取值范围是______________.

11、【答案】k≤1



【解析】作出 $y_1=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 与 $y_2=kx$ 的图象，要使不等式 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\ge kx$ 成立，由图可知须k≤1。

12．已知函数 $f(x)=\sin x+\tan x$. 项数为27的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且公差 $d\ne0$. 若 $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{27})=0$，则当 k =___________是，$f(a_k)=0$.

12．【答案】14

【解析】函数 $f(x)=\sin x+\tan x$ 在

$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 是增函数，显然又为奇函数，函数图象关于原点对称，因为

$a_1+a_{27}=a_2+a_{26}=\bullet\bullet\bullet=2a_{14}$，

所以 $f(a_1)+f(a_{27})=f(a_2)+f(a_{26})=\bullet\bullet\bullet=f(a_{14})=0$，所以当 $k=14$ 时，$f(a_k)=0$

.

13. 某地街道呈现东—西、南—北向的网格状，相邻街距都为1. 两街道相交的点称为格点。若以互相垂直的两条街道为轴建立直角坐标系，现有下述格点 $(-2,2)$，$(3,1)$，$(3,4)$，$(-2,3)$，$(4,5)$，$(6,6)$ 为报刊零售点. 请确定一个格点（除零售点外）__________为发行站，使6个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短.

13. 【答案】（3，3）

【解析】设发行站的位置为 (x,y)，零售点到发行站的距离为

$z=2|x+2|+|y-2|+2|x-3|+|y-1|+|y-4|+|y-3|+|x-4|+|y-5|+|x-6|+|y-6|$

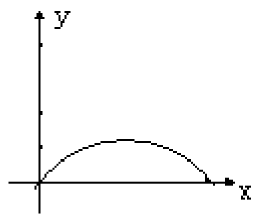
，这六个点的横纵坐标的平均值为 $\frac{-2+3+3-2+4+6}{6}=2$，$\frac{2+1+4+3+5+6}{6}=\frac{7}{2}$，记

A（2，$\frac{7}{2}$），画出图形可知，发行站的位置应该在点A附近，代入附近的点的坐标进行比较可知，在（3,3）处z取得最小值。

14. 将函数 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2\ (x\in[0,6])$ 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ $(0\le\theta\le\alpha)$，得到曲线 C. 若对于每一个旋转角 θ，曲线 C 都是一个函数的图像，则 α 的最大值为__________.

14. 【答案】$\arctan\frac{2}{3}$

【解析】由 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2$ 得：（x－3）²＋（y＋2）²＝13，$(x\in[0,6])$，它的图象是以（3，－2）为圆心，$\sqrt{13}$ 为半径的一段圆弧，



设过原点且与曲线C相切的直线为y＝kx，当θ＝0时，k＝－$\frac{1}{k_{OC}}=\frac{3}{2}$，此时直线的倾斜角为β，即tanβ＝$\frac{3}{2}$，当切线与y轴重合时，曲线上的点满足函数的定义，即是一个函数的图象，再逆时针旋转时，曲线不再是一个函数的图

象，旋转角为90°－β，则tan（90°－β）＝$\dfrac{3}{2}$，即θ＝$\arctan\dfrac{2}{3}$

二．选择题（本大题满分16分）本大题共有4题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得4分，否则一律得零分。

15. “$-2 \le a \le 2$”是“实系数一元二次方程$x^2+ax+1=0$有虚根”的

（A）必要不充分条件　　　　（B）充分不必要条件

（C）充要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

15、【答案】A

【解析】△＝a^2－4＜0时，－2＜a＜2，因为“$-2 \le a \le 2$”是“－2＜a＜2”的必要不充分条件，故选A。

16.若事件E与F相互独立，且$P(E)=P(F)=\dfrac{1}{4}$，则$P(E\,\mathsf{I}\,F)$的值等于

（A）0　（B）$\dfrac{1}{16}$　（C）$\dfrac{1}{4}$　（D）$\dfrac{1}{2}$

16、【答案】B

【解析】$P(E\,\mathsf{I}\,F)=P(E)\bullet P(F)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$

17.在发生某公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续10天，每天新增疑似病例不超过7人”。根据过去10天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据，一定符合该标志的是

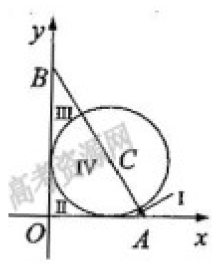
（A）甲地：总体均值为3，中位数为4　（B）乙地：总体均值为1，总体方差大于0

（C）丙地：中位数为2，众数为3　（D）丁地：总体均值为2，总体方差为3

17、【答案】D

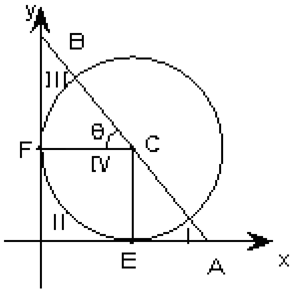
【解析】根据信息可知，连续10天内，每天的新增疑似病例不能有超过7的数，选项A中，中位数为4，可能存在大于7的数；同理，在选项C中也有可能；选项B中的总体方差大于0，叙述不明确，如果数目太大，也有可能存在大于7的数；选项D中，根据方差公式，如果有大于7的数存在，那么方差不会为3，故答案选D.

18.过圆C:$(x-1)^2+(y-1)^2=1$的圆心，作直线分别交x、y正半轴于点A、B，ΔAOB被圆分成四部分（如图），若这四部分图形面积满足$S_{\mathrm{I}}+S_{¥}=S_{\prod}+S_{|||}$,则直线AB有（　）



（A）0条　（B）1条　（C）2条　（D）3条

18、【答案】B



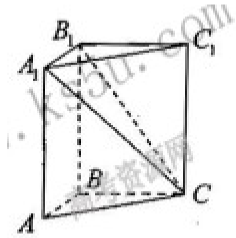
【解析】由已知，得：$S_{IV}-S_{II}=S_{III}-S_{I}$,，第II，IV部分的面积是定值，所以，$S_{IV}-S_{II}$为定值，即$S_{III}-S_{I}$,为定值，当直线AB绕着圆心C移动时，只可能有一个位置符合题意，即直线AB只有一条，故选B。

三．解答题（本大题满分78分）本大题共5题，解答下列各题必须在答题纸相应的编号规定区域内写出必要的步骤

19（本题满分14分）

如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=BC=AB=2$，

$AB\perp BC$,求二面角$B_1-A_1C-C_1$的大小。



19，【解】如图，建立空间直角坐标系

则A（2，0，0）、 C（0，2，0） A1（2，0，2），

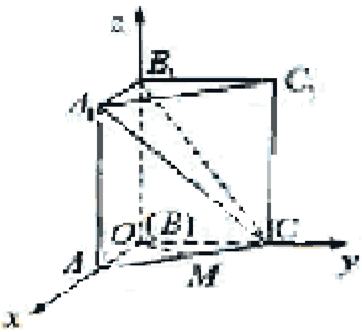
B1（0，0，2）、C1（0，2，2） ……2分

设AC的中点为M，∵BM⊥AC, BM⊥CC1;

∴BM⊥平面A1C1C,即$\overline{BM}$=(1,1,0)是平面A1C1C的一个法向量。……5分

设平面$A_1B_1C_1$的一个法向量是$\vec{n}=(x,y,z)$ =（x，y，z），

$\overline{A_1C}$=（-2，2，-2）， $\overline{A_1B_1}$ =（-2，0，0） ……7分



$\therefore \vec{n}\cdot\overline{AB}=-2x=0,\vec{n}\cdot\overline{A_1C}=-2x+2y-2z=0,令z=1,解得x=0,y=1$

$\therefore \vec{n}=(0,1,1)$..................10分

设法向量$\vec{n}与\overline{BM}$的夹角为φ，二面角$B_1-A_1C-C_1$的大小为θ，显然θ为锐角

$\because \cos\theta=|\cos\varphi|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overline{BM}|}{|\vec{n}||\overline{BM}|}=\dfrac{1}{2},解得\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 14分

$\therefore 二面角B_1-A_1C-C_1的大小为\dfrac{\pi}{3}$

20（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分。

有时可用函数

$$f(x)=\begin{cases}0.1+15\ln\dfrac{a}{a-x},(x\le 6)\\ \dfrac{x-4.4}{x-4},(x>6)\end{cases}$$

描述学习某学科知识的掌握程度，其中x表示某学科知识的学习次数（$x\in N^*$），$f(x)$表示对该学科知识的掌握程度，正实数a与学科知识有关。

（3） 证明：当$x\ge 7$时，掌握程度的增加量$f(x+1)-f(x)$总是下降；

（4） 根据经验，学科甲、乙、丙对应的a的取值区间分别为$(115,121]$,$(121,127]$,

$(121,133]$。当学习某学科知识6次时，掌握程度是85%，请确定相应的学科。

20.证明（1）当$x\ge 7$时，$f(x+1)-f(x)=\dfrac{0.4}{(x-3)(x-4)}$

而当$x\ge 7$时，函数$y=(x-3)(x-4)$单调递增，且$(x-3)(x-4)$>0……..3分

故$f(x+1)-f(x)$单调递减

$\therefore$当$x\ge 7$时，掌握程度的增长量$f(x+1)-f(x)$总是下降……………..6分

（2）由题意可知$0.1+15\ln\dfrac{a}{a-6}=0.85$……………….9分

整理得$\dfrac{a}{a-6}=e^{0.05}$

解得$a=\dfrac{e^{0.05}}{e^{0.05}-1}\cdot 6=20.50\times 6=123.0,123.0\in(121,127]$…….13分

由此可知，该学科是乙学科……………..14分

21．（本题满分16分）本题共有2个小题，第1小题满分8分，第2小题满分8分。

已知双曲线$c:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1,$设过点$A(-3\sqrt{2},0)$的直线l的方向向量$\vec{e}=(1,k)$

（3） 当直线l与双曲线C的一条渐近线m平行时，求直线l的方程及l与m的距离；

（4） 证明：当$k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，在双曲线C的右支上不存在点Q，使之到直线l的距离为$\sqrt{6}$。

21.（1）双曲线C的渐近线$m:\dfrac{x}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{2}y=0$...........2分

$\therefore$ 直线l的方程 $x \pm \sqrt{2}y + 3\sqrt{2} = 0$ ………………..6分

直线l与m的距离 $d = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{1+2}} = \sqrt{6}$ ……….8分

（2）设过原点且平行与l的直线 $b: kx - y = 0$

则直线l与b的距离 $d = \dfrac{3\sqrt{2}\left|k\right|}{\sqrt{1+k^2}}$

当 $k > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$d > \sqrt{6}$

又双曲线C的渐近线为 $x \pm \sqrt{2}y = 0$

$\therefore$ 双曲线C的右支在直线b的右下方，

$\therefore$ 双曲线 C 右支上的任意点到直线 l 的距离为 $\sqrt{6}$ 。

故在双曲线 C 的右支上不存在点 Q，使之到直线 l 的距离为 $\sqrt{6}$ 。

[证法二] 双曲线 C 的右支上存在点 $Q\ (x_0, y_0)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{6}$，

则 $\begin{cases} \dfrac{\left|kx_0 - y_0 + 3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{6}, (1) \\ x_0 - 2y_0 = 2, (2) \end{cases}$

由（1）得 $y_0 = kx_0 + 3\sqrt{2}k \pm \sqrt{6} \bullet \sqrt{1+k^2}$，

设 $t = 3\sqrt{2}k \pm \sqrt{6} \bullet \sqrt{1+k^2}$

当 $k > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$t = 3\sqrt{2}k \pm \sqrt{6} \bullet \sqrt{1+k^2} > 0$………………………………..13分

将 $y_0 = kx_0 + t$ 代入（2）得 $(1-2k^2)x_0^2 - 4ktx_0 - 2(t^2+1) = 0$ （*）

$\because k > \dfrac{\sqrt{2}}{2}, t > 0, \therefore 1 - 2k^2 < 0, -4kt < 0, -2(t^2+1) < 0$

$\therefore$ 方程（*）不存在正根，即假设不成立

故在双曲线C的右支上不存在Q，使之到直线l 的距离为 $\sqrt{6}$ ……………16分

22.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分。

已知函数 $y=f(x)$ 的反函数。定义：若对给定的实数 $a(a\neq 0)$，函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f^{-1}(x+a)$ 互为反函数，则称 $y=f(x)$ 满足“a 和性质”；若函数 $y=f(ax)$ 与 $y=f^{-1}(ax)$ 互为反函数，则称 $y=f(x)$ 满足“a 积性质”。

（4） 判断函数 $g(x)=x^2+1(x>0)$ 是否满足“1和性质”，并说明理由；

（5） 求所有满足“2和性质”的一次函数；

（6） 设函数 $y=f(x)(x>0)$ 对任何 $a>0$，满足“a 积性质”。求 $y=f(x)$ 的表达式。

22（1）解，函数 $g(x)=x^2+1(x>0)$ 的反函数是 $g^{-1}(x)=\sqrt{x-1}(x>1)$

$\therefore g^{-1}(x+1)=\sqrt{x}(x>0)$

而 $g(x+1)=(x+1)^2+1(x>-1)$, 其反函数为 $y=\sqrt{x-1}-1(x>1)$

故函数 $g(x)=x^2+1(x>0)$ 不满足“1和性质”

（2）设函数 $f(x)=kx+b(x\in R)$ 满足“2和性质”，$k\neq 0.$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{k}(x\in R),\therefore f^{-1}(x+2)=\dfrac{x+2-b}{k}$ …….6分

而 $f(x+2)=k(x+2)+b(x\in R)$, 得反函数 $y=\dfrac{x-b-2k}{k}$ ………….8分

由“2和性质”定义可知 $\dfrac{x+2-b}{k}=\dfrac{x-b-2k}{k}$ 对 $x\in R$ 恒成立

$\therefore k=-1,b\in R,$ 即所求一次函数为 $f(x)=-x+b(b\in R)$ ………..10分

（3）设 $a>0$，$x_0>0$，且点 (x_0,y_0) 在 $y=f(ax)$ 图像上，则 (y_0,x_0) 在函数 $y=f^{-1}(ax)$ 图象上，

故 $\begin{cases} f(ax_0)=y_0 \\ f^{-1}(ay_0)=x_0 \end{cases}$，可得 $ay_0=f(x_0)=af(ax_0)$， 12分

令 $ax_0=x$，则 $a=\dfrac{x}{x_0}$。$\therefore f(x_0)=\dfrac{x}{x_0}f(x)$，即 $f(x)=\dfrac{x_0f(x_0)}{x}$。

. . . . . . 14分

综上所述，$1=b_1q^{n-1}=b_n$ $f(x)=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$，此时 $f(ax)=\dfrac{k}{ax}$，其反函数就是 $y=\dfrac{k}{ax}$，而 $f^{-1}(ax)=\dfrac{k}{ax}$，故 $y=f(ax)$ 与 $y=f^{-1}(ax)$ 互为反函数 。 16分

23.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分5分，第2小题满分5分，第3小题满分8分。

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列。

（4） 若 $a_n=3n+1$，是否存在 m、$k\in N^*$，有 $a_m+a_{m+1}=a_k$？说明理由；

（5） 找出所有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，使对一切 $n\in N^*$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$，并说明理由；

（6） 若 $a_1=5,d=4,b_1=q=3,$ 试确定所有的 p，使数列 $\{a_n\}$ 中存在某个连续 p 项的和是数列 $\{b_n\}$ 中的一项，请证明。

23．[解法一]（1）由 $a_m+a_{m+1}=a_k$，得 $6m+5=3k+1$， 2分

整理后，可得 $k-2m=\dfrac{4}{3}$，$\because$ m 、$k\in N^*$，$\therefore$ $k-2m$ 为整数，

$\therefore$ 不存在 m 、$k\in N^*$，使等式成立。 5分

（2）若 $\dfrac{a_{n+1}}{a}=b_n$，即 $\dfrac{a_1+nd}{a_1+(n-1)d}=b_1q^{n-1}$， （*）

（i）若 $d=0,$ 则 $1=b_1q^{n-1}=b_n$ 。

当 $\{a_n\}$ 为非零常数列，$\{b_n\}$ 为恒等于1的常数列，满足要求。

. . . . . . 7分

（ii）若 $d\neq 0$，（*）式等号左边取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+nd}{a_1+(n-1)d}=1$，（*）式等号右边的极限只有当 $q=1$ 时，才能等于1。此时等号左边是常数，$\therefore d=0$，矛盾。

综上所述，只有当 $\{a_n\}$ 为非零常数列，$\{b_n\}$ 为恒等于1的常数列，满足要求。. 10分

【解法二】设 $a_n=nd+c,$ 若 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n,$ 且 $\{b_n\}$ 为等比数列

则$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}/\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$,对$n\in N^*$都成立，即$a_na_{n+2}=qa^2{}_{n+1}$

$\therefore(dn+c)(dn+2d+c)-q(dn+d+c)^2$ 对$n\in N^*$都成立，$\therefore a^2=qd^2$....7分

（i） 若d=0，则$a_n=c\neq 0,\therefore b_n=1,n\in N^*$

（ii） 若$d\neq 0$,则q=1, $\therefore b_n=m$（常数）即$\dfrac{dn+d+c}{dn+c}=m$，则d=0，矛盾

综上所述，有$a_n=c\neq 0,b_n=1$,使对一切$n\in N^*,\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$， 10分

（3）$a_n=4n+1,b_n=3^n,n\in N*$

设$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots\ldots+a_{m+p}=b_k=3^k$, p、$k\in N^*,m\in N$.

$\dfrac{4(m+1)+1+4(m+p)+1}{2}p=3^k$，

$\therefore 4m+2p+3=\dfrac{3^k}{p},\because p$、$k\in N*,\therefore p=3^5,s\in N$. 13分

取$k=3s+2,4m=3^{2s+2}-2\times 3^s-3=(4-1)^{2s+2}-2\times(4-1)^s-3\succ 0$, 15分

由二项展开式可得正整数M_1、M_2，使得$(4-1)^{2s+2}=4M_1+1$,

$2\times(4-1)^s=8M_2+(-1)^s2$,

$\therefore 4m=4(M_1-2M_2)-((-1)^s+1)2,\therefore$存在整数$m$满足要求.

故当且仅当$p=3^s,s\in N$时，命题成立.

说明：第（3）题若学生从以下角度解题，可分别得部分分（即分步得分）

若p为偶数，则$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots\ldots+a_{m+p}$为偶数，但$3^k$为奇数

故此等式不成立，所以，p一定为奇数。

当p=1时，则$a_{m+1}=b_k$,即$4m+5=3^k$,

而$3^k=(4-1)^k$

$=C_k^0\cdot 4^k+C_k^1\cdot 4^{k-1}\cdot(-1)+\ldots\ldots+C_k^{k-1}\cdot 4\cdot(-1)^{k-1}+C_k^k\cdot(-1)^k=4M+(-1)^k,M\in Z$,

当k为偶数时，存在m，使$4m+5=3^k$成立 1分

当p=3时，则$a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}=b_k$,即$3a_{m+2}-b_k$,

也即$3(4m+9)=3^k$,所以$4m+9=3^{k-1}$,$4(m+1)+5=3^{k-1}$

由已证可知，当k-1为偶数即k为奇数时，存在m，$4m+9=3^k$成立　　2分

当p=5时，则$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots\ldots+a_{m+5}=b_k$,即$5a_{m+3}=b_k$

也即$5（4m+13）=3^k$,而3^k不是5的倍数，所以，当p=5时，所要求的m不存在

故不是所有奇数都成立.　　　　　　　　　　2分