

# 2011年普通高等学校招生全国统一考试·陕西卷(文科)

## 全解全析

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的（本大题共10小题，每小题5分，共50分）。

1. 设 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 是向量，命题“若 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ”的逆命题是（ ）

- (A) 若 $\vec{a} \neq -\vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$       (B) 若 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$   
(C) 若 $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} \neq -\vec{b}$       (D) 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = -\vec{b}$

【分析】首先确定原命题的条件和结论，然后交换条件和结论的位置即可得到逆命题。

【解】选D

原命题的条件是 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，作为逆命题的结论；原命题的结论是 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，作为逆命题的条件，即得逆命题“若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = -\vec{b}$ ”，故选D。

2. 设抛物线的顶点在原点，准线方程为 $x = -2$ ，则抛物线的方程是（ ）

- (A)  $y^2 = -8x$     (B)  $y^2 = -4x$     (C)  $y^2 = 8x$     (D)  $y^2 = 4x$

【分析】由准线确定抛物线的位置和开口方向是判断的关键。

【解】选C

由准线方程 $x = -2$ 得 $-\frac{p}{2} = -2$ ，且抛物线的开口向右（或焦点在x轴的正半轴），所以

$$y^2 = 2px = 8x.$$

3. 设 $0 < a < b$ ，则下列不等式中正确的是（ ）

- (A)  $a < b < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$       (B)  $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$   
(C)  $a < \sqrt{ab} < b < \frac{a+b}{2}$       (D)  $\sqrt{ab} < a < \frac{a+b}{2} < b$

【分析】根据不等式的性质，结合作差法，放缩法，基本不等式或特殊值法等进行比较。

【解】选B      (方法一) 已知 $a < b$ 和 $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ ，比较 $a$ 与 $\sqrt{ab}$ ，因为

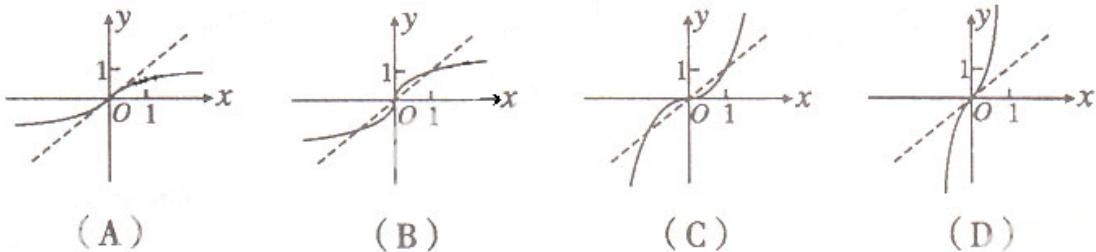
$$a^2 - (\sqrt{ab})^2 = a(a-b) < 0, \text{ 所以 } a < \sqrt{ab}, \text{ 同理由 } b^2 - (\sqrt{ab})^2 = b(b-a) > 0 \text{ 得}$$

$$\sqrt{ab} < b; \text{ 作差法: } b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0, \text{ 所以 } \frac{a+b}{2} < b, \text{ 综上可得}$$

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b; \text{ 故选B. } \text{ (方法二) 取 } a = 2, b = 8, \text{ 则 } \sqrt{ab} = 4, \frac{a+b}{2} = 5, \text{ 所}$$

$$\text{以 } a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

4. 函数  $y = x^3$  的图像是 ( )

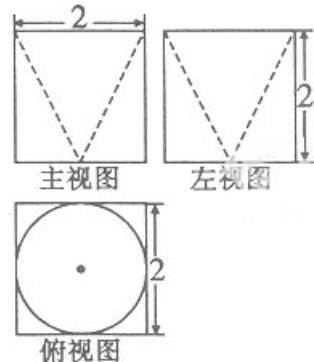


【分析】已知函数解析式和图像，可以用取点验证的方法判断。

【解】选B

取  $x = \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}$ ，则  $y = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ，选项B, D符合；

取  $x = 1$ ，则  $y = 1$ ，选项B符合题意。



5. 某几何体的三视图如图所示，则它的体积是 ( )

)

(A)  $8 - \frac{2\pi}{3}$

(B)  $8 - \frac{\pi}{3}$

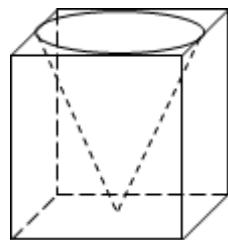
(C)  $8 - 2\pi$

(D)  $\frac{2\pi}{3}$

【分析】根据已知的三视图想象出空间几何体，然后由几何体的组成和有关几何体体积公式进行计算。

【解】选A 由几何体的三视图可知几何体为一个组合体，即一个正方体中间去掉一个圆锥体，所以它的体积是

$$V = 2^3 - \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2 = 8 - \frac{8\pi}{3}.$$



6. 方程  $|x| = \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内 ( )

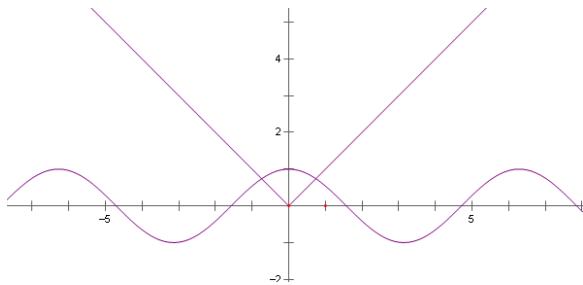
(A) 没有根 (B) 有且仅有一个根

(C) 有且仅有两个根 (D) 有无穷多个根

【分析】数形结合法，构造函数并画出函数的图象，观察直观判断。

【解】选C

构造两个函数  $y = |x|$  和  $y = \cos x$ ，在同一个坐标系内画出它们的图象，如图所示，观察知图像有两个公共点，所以已知方程有且仅有两个根。



7. 如右框图, 当  $x_1 = 6, x_2 = 9, p = 8.5$  时,  $x_3$  等于 ( )

- (A) 7      (B) 8      (C) 10      (D) 11

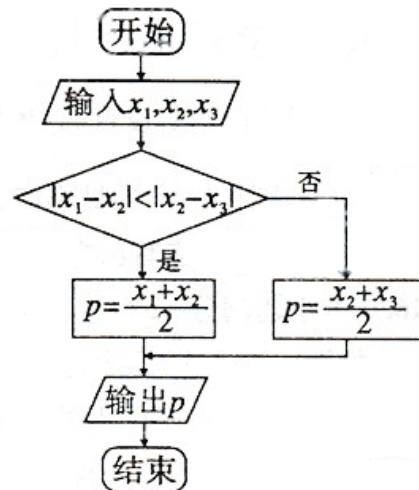
【分析】按照程序框图的逻辑顺序进行计算.

【解】选B     $\because x_1 = 6, x_2 = 9, \therefore |9 - x_3| > 3;$

又  $p = 8.5, \frac{x_1 + x_2}{2} = 7.5$ , 显然  $|9 - x_3| > 3$  不成立, 即为“否”,

$\therefore$  有  $|9 - x_3| \leq 3$ , 即  $6 \leq x_3 \leq 12$ , 此时有  $\frac{9 + x_3}{2} = 8.5$ , 解得

$x_3 = 8$ , 符合题意, 故选B.

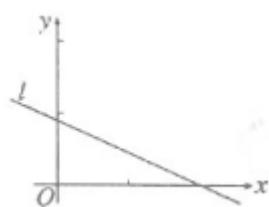


8. 设集合  $M = \{y \mid y = |\cos^2 x - \sin^2 x|, x \in R\}, N = \{x \mid \left|\frac{x}{i}\right| < 1$

,  $i$  为虚数单位,  $x \in \mathbb{R}\}$ , 则  $M \cap N$  为 ( )

- (A)  $(0, 1)$     (B)  $(0, 1]$     (C)  $[0, 1)$     (D)  $[0, 1]$

【分析】确定出集合的元素是关键。本题综合了三角函数、复数的模, 不等式等知识点。



【解】选C     $y = |\cos^2 x - \sin^2 x| = |\cos 2x| \in [0, 1]$ , 所以  $M = [0, 1]$ ;

因为  $\left|\frac{x}{i}\right| < 1$ , 即  $|xi| < 1$ , 所以  $|x| < 1$ , 又因为  $x \in \mathbb{R}$ , 所以  $-1 < x < 1$ , 即  $N = (-1, 1)$ ;

所以  $M \cap N = [0, 1]$ , 故选C.

9. 设  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$

,  $(x_n, y_n)$  是变量  $x$  和  $y$  的  $n$  个样本点, 直线  $l$  是由这些样本点通过最小二乘法得到的线性

回归直线(如图), 以下结论正确的是 ( )

- (A) 直线  $l$  过点  $(\bar{x}, \bar{y})$   
 (B)  $x$  和  $y$  的相关系数为直线  $l$  的斜率

(C)  $x$  和  $y$  的相关系数在0到1之间

(D) 当  $n$  为偶数时, 分布在  $l$  两侧的样本点的个数一定相同

【分析】根据最小二乘法的有关概念: 样本点的中心, 相关系数线, 性回归方程的意义等进行判断.

【解】选A

选项	具体分析	结论
A	回归直线 $l$ 一定过样本点中心 $(\bar{x}, \bar{y})$ ; 由回归直线方程的计算公式 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 可知直线 $l$ 必过点 $(\bar{x}, \bar{y})$	正确
B	相关系数用来衡量两个变量之间的相关程度, 直线的斜率表示直线的倾斜程度; 它们的计算公式也不相同	不正确
C	相关系数的值有正有负, 还可以是0; 当相关系数在0到1之间时, 两个变量为正相关, 在-1到0之间时, 两个变量负相关	不正确
D	$l$ 两侧的样本点的个数分布与 $n$ 的奇偶性无关, 也不一定是平均分布	不正确

10. 植树节某班20名同学在一段直线公路一侧植树, 每人植一棵, 相邻两棵树相距10米, 开始时需将树苗集中放置在某一树坑旁边, 现将树坑从1到20依次编号, 为使各位同学从各自树坑前来领取树苗所走的路程总和最小, 树苗可以放置的两个最佳坑位的编号为( )

(A) ①和② (B) ⑨和⑩ (C) ⑨和⑪ (D) ⑩和⑪

【分析】根据选项分别计算四种情形的路程和; 或根据路程和的变化规律直接得出结论.

【解】选D (方法一)

选项	具体分析	结论
A	①和②: $10 \times (1+2+\dots+19) \times 2 = 3800$	
B	⑨: $10 \times [(1+2+\dots+8) \times 2 + (1+2+\dots+11) \times 2] = 2040$ ⑩: $10 \times (1+2+\dots+9) + 10 \times (1+2+\dots+10) \times 2 = 2000$	比较各个路程和可知D符合题意
C	⑪: $10 \times (1+2+\dots+9) + 10 \times (1+2+\dots+10) \times 2 = 2000$	
D	⑩和⑪: 路程和都是2000	

(方法二) 根据图形的对称性, 树苗放在两端的树坑旁边, 所得路程总和相同, 取得一个最值; 所以从两端的树坑向中间移动时, 所得路程总和的变化相同, 最后移到第10个和第11个树坑旁时, 所得的路程总和达到另一个最值, 所以计算两个路程和进行比较即可。树苗

放在第一个树坑旁，则有路程总和是  $10 \times (1 + 2 + \dots + 19) \times 2 = 10 \times \frac{19(1+19)}{2} \times 2 = 3800$

；树苗放在第10个（或第11个）树坑旁边时，路程总和是

$$10 \times (1 + 2 + \dots + 9) + 10 \times (1 + 2 + \dots + 10) \times 2 = 10 \times \frac{9(1+9)}{2} \times 2 + 10 \times \frac{10(1+10)}{2} \times 2$$

$$= 900 + 1100 = 2000，\text{ 所以路程总和最小为2000米.}$$

**B. 填空题：**把答案填在答题卡相应题号后的横线上（

本大题共5小题，每小题5分，共25分）

11. 设  $f(x) = \begin{cases} \lg x, & x > 0 \\ 10^x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则  $f(f(-2)) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【分析】**由  $x = -2$  算起，先判断  $x$  的范围，是大于0，还是不大于0；再判断  $f(-2)$  作为自变量的值时的范围，最后即可计算出结果。

**【解】**  $\because x = -2 < 0, \therefore f(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{100} > 0$ ，所以  $f(10^{-2}) = \lg 10^{-2} = -2$ ，即  $f(f(-2)) = -2$ .

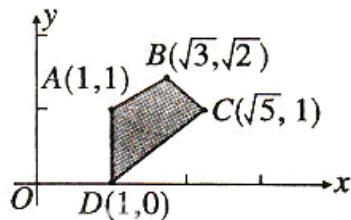
**【答案】** -2

12. 如图，点  $(x, y)$  在四边形ABCD内部和边界上运动，那么  $2x - y$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**【分析】** 本题为线性规划问题，采用数形结合法解答，解答本题的关键是确定目标函数过哪一个点时取得最小值。

**【解】** 目标函数  $z = 2x - y$ ，当  $x = 0$  时， $z = -y$ ，所以当  $y$  取得最大值时， $z$  的值最小；移动直线  $2x - y = 0$ ，当直线移动到过点A时， $y$  最大，即  $z$  的值最小，此时  $z = 2 \times 1 - 1 = 1$ .

**【答案】** 1



13. 观察下列等式

$$1=1$$

$$2+3+4=9$$

$$3+4+5+6+7=25$$

$$4+5+6+7+8+9+10=49$$

照此规律，第五个等式应为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**【分析】** 归纳总结时，看等号左边是子的变化规律，右边结果的特点，根据以上规律写出第五个等式，注意行数、项数及其变化规律是解答本题的关键。

**【解】** 把已知等式与行数对应起来，则每一个等式的左边的式子的第一个数是行数  $n$ ，加

数的个数是  $2n-1$ ；等式右边都是完全平方数，

行数 等号左边的项数

$$\begin{array}{cccc} 1=1 & 1 & 1 \\ 2+3+4=9 & 2 & 3 \\ 3+4+5+6+7=25 & 3 & 5 \\ 4+5+6+7+8+9+10=49 & 4 & 7 \end{array}$$

则第5行等号的左边有9项，右边是9的平方，所以  $5+6+\dots+[5+(2\times 5-1)-1]=9^2$ ，

即  $5+6+\dots+13=81$ 。

【答案】 $5+6+7+8+9+10+11+12+13=81$  (或  $5+6+\dots+13=81$ )

14. 设  $n \in N_+$ ，一元二次方程  $x^2 - 4x + n = 0$  有整数根的充要条件是  $n = \underline{\quad}$ 。

【分析】直接利用求根公式进行计算，然后用完全平方数、整除等进行判断计算。

【解】 $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4n}}{2} = 2 \pm \sqrt{4-n}$ ，因为  $x$  是整数，即  $2 \pm \sqrt{4-n}$  为整数，所以

$\sqrt{4-n}$  为整数，且  $n \leq 4$ ，又因为  $n \in N_+$ ，取  $n=1, 2, 3, 4$  验证可知  $n=3, 4$  符合题意；反

之  $n=3, 4$  时，可推出一元二次方程  $x^2 - 4x + n = 0$  有整数根。

【答案】3或4

15. (考生注意：请在下列三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题评分)

A. (不等式选做题) 若不等式  $|x+1| + |x-2| \geq a$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立，则  $a$  的取值范围是  $\underline{\quad}$ 。

【分析】先确定  $|x+1| + |x-2|$  的取值范围，则只要  $a$  不大于  $|x+1| + |x-2|$  的最小值即可。

【解】当  $x \leq -1$  时， $|x+1| + |x-2| = -x-1-x+2 = -2x+1 \geq 3$ ；

当  $-1 < x \leq 2$  时， $|x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$ ；

当  $x > 2$  时， $|x+1| + |x-2| = x+1+x-2 = 2x-1 > 3$ ；

综上可得  $|x+1| + |x-2| \geq 3$ ，所以只要  $a \leq 3$ ，

即实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 3]$ 。

【答案】 $(-\infty, 3]$

B. (几何证明选做题) 如图， $\angle B = \angle D$ ， $AE \perp BC$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ，且  $AB=6$ ， $AC=4$ ， $AD$

$=12$ , 则  $AE=$  \_\_\_\_.

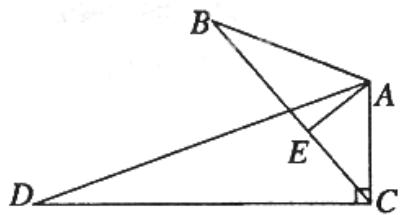
【分析】寻找两个三角形相似的条件, 再根据相似三角形的对应边成比例求解.

【解】因为  $AE \perp BC$ ,

所以  $\angle AEB = \angle ACD = 90^\circ$ , 又因为  $\angle B = \angle D$ , 所以  $\triangle AEB \sim \triangle ACD$ , 所

以  $\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}$ , 所以  $AE = \frac{AB \cdot AC}{AD} = \frac{6 \times 4}{12} = 2$ .

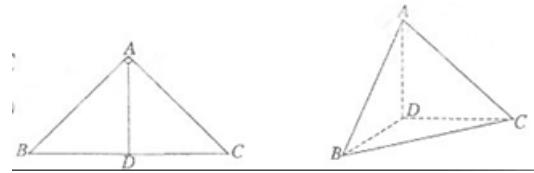
【答案】2



C. (坐标系与参数方程选做题) 直角坐标系  $xOy$

中, 以原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极

坐标系, 设点  $A$ ,  $B$  分别在曲线  $C_1$ :  $\begin{cases} x = 3 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$



( $\theta$  为参数) 和曲线  $C_2$ :  $\rho = 1$  上, 则  $|AB|$  的最小值为 \_\_\_\_.

【分析】利用化归思想和数形结合法, 把两条曲线转化为直角坐标系下的方程.

【解】曲线  $C_1$  的方程是  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ , 曲线  $C_2$  的方程是  $x^2 + y^2 = 1$ , 两圆外离, 所以

$|AB|$  的最小值为  $\sqrt{3^2 + 0^2} - 1 - 1 = 1$ .

【答案】1

### 三. 解答题: 接答应写出文字说明、证明过程或演算步骤 (本大题共6小题, 共75分)

P. (本小题满分12分)

如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC=45^\circ$ ,  $\angle BAC=90^\circ$ ,  $AD$  是  $BC$  上的高, 沿  $AD$  把  $\triangle ABD$  折起, 使  $\angle BDC=90^\circ$ .

(1) 证明: 平面  $ADB \perp$  平面  $BDC$ ;

(2) 设  $BD=1$ , 求三棱锥  $D-ABC$  的表面积.

【分析】(1) 确定图形在折起前后的不变性质, 如角的大小不变, 线段长度不变, 线线关系不变, 再由面面垂直的判定定理进行推理证明; (2) 充分利用垂直所得的直角三角形, 根据直角三角形的面积公式计算.

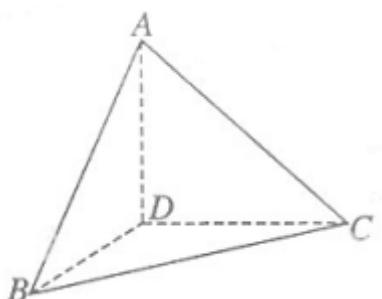
【解】(1)  $\because$  折起前  $AD$  是  $BC$  边上的高,

$\therefore$  当  $\triangle ABD$  折起后,  $AD \perp DC$ ,  $AD \perp DB$ ,

又  $DB \cap DC = D$ ,

$\therefore AD \perp$  平面  $BDC$ , 又  $\because AD \subset$  平面  $BDC$ .

$\therefore$  平面  $ABD \perp$  平面  $BDC$ .



(2) 由(1)知,  $DA \perp DB$ ,  $DB \perp DC$ ,  $DC \perp DA$ ,

$$\therefore DB=DA=DC=1, \therefore AB=BC=CA=\sqrt{2},$$

$$S_{\triangle DAM} = S_{\triangle DBC} = S_{\triangle DCA} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{三棱锥 } D-A B C \text{ 的表面积是 } S = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

17. (本小题满分12分)

设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $(0, 4)$ , 离心率为  $\frac{3}{5}$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 求过点  $(3, 0)$  且斜率为  $\frac{4}{5}$  的直线被  $C$  所截线段的中点坐标.

**【分析】** (1) 由椭圆过已知点和椭圆离心率可以列出方程组, 解方程组即可, 也可以分步求解; (2) 直线方程和椭圆方程组成方程组, 可以求解, 也可以利用根与系数关系; 然后利用中点坐标公式求解.

**【解】** (1) 将点  $(0, 4)$  代入  $C$  的方程得  $\frac{16}{b^2} = 1$ ,  $\therefore b = 4$ ,

又  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$  得  $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{9}{25}$ , 即  $1 - \frac{16}{a^2} = \frac{9}{25}$ ,  $\therefore a = 5$

$\therefore C$  的方程为  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2) 过点  $(3, 0)$  且斜率为  $\frac{4}{5}$  的直线方程为  $y = \frac{4}{5}(x - 3)$ ,

设直线与  $C$  的交点为  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 将直线方程  $y = \frac{4}{5}(x - 3)$  代入  $C$  的方程

, 得

$$\frac{x^2}{25} + \frac{(x-3)^2}{25} = 1, \text{ 即 } x^2 - 3x - 8 = 0, \text{ 解得 } x_1 = \frac{3 - \sqrt{41}}{2}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{41}}{2},$$

$$\therefore AB \text{ 的中点坐标 } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2}{5}(x_1 + x_2 - 6) = -\frac{6}{5},$$

即所截线段的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{6}{5}\right)$ .

**注:** 用韦达定理正确求得结果, 同样给分.

18. (本小题满分12分)

叙述并证明余弦定理。

**【分析】**本题是课本公式、定理、性质的推导, 这是高考考查的常规方向和考点, 引导考生回归课本, 重视基础知识学习和巩固.

**【解】**叙述:

余弦定理: 三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦之积的两倍。或: 在 $\triangle ABC$ 中,  $a, b, c$ 为 $A, B, C$ 的对边, 有

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\begin{aligned} \text{证明: (证法一) } & \text{如图, } c^2 = \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \bullet (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2|\overrightarrow{AC}| \bullet |\overrightarrow{AB}| \cos A + \overrightarrow{AB}^2 \\ &= b^2 - 2bc \cos A + c^2 \end{aligned}$$

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{同理可证 } b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

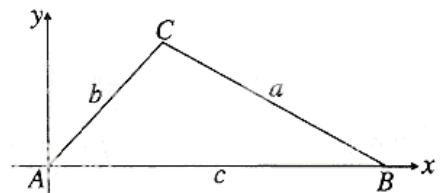
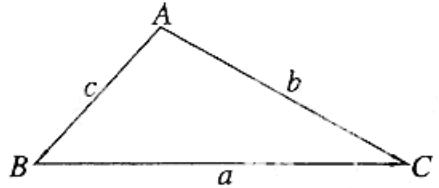
(证法二)

已知 $\triangle ABC$ 中,  $A, B, C$ 所对边分别为 $a, b, c$ , , 以 $A$ 为原点,  $AB$ 所在直线为 $x$ 轴建立直角坐标系, 则 $C(b \cos A, b \sin A), B(c, 0)$ ,

$$\therefore a^2 = |BC|^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



同理可证  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ ,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

### 19. (本小题满分12分)

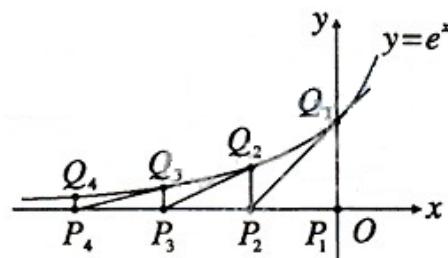
如图, 从点  $P_1(0,0)$  做  $x$  轴的垂线交曲线  $y = e^x$  于点  $Q_1(0,1)$ , 曲线在  $Q_1$  点处的切线与  $x$  轴交于点  $P_2$ , 再从  $P_2$  做  $x$  轴的垂线交曲线于点  $Q_2$ , 依次重复上述过程得到一系列点:

$P_1, Q_1; P_2, Q_2; \dots; P_n, Q_n$ , 记  $P_k$  点的坐标为  $(x_k, 0)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

(I) 试求  $x_1$  与  $x_{k-1}$  的关系 ( $2 \leq k \leq n$ )

(II) 求  $|P_1Q_1| + |P_2Q_2| + |P_3Q_3| + \dots + |P_nQ_n|$ .

【分析】(1) 根据函数的导数求切线方程, 然后再求切线与  $x$  轴的交点坐标; (2) 尝试求出通项  $|P_nQ_n|$  的表达式, 然后再求和.



【解】(I) 设  $P_{k-1}(x_{k-1}, 0)$ , 由  $y' = e^x$  得  $Q_{k-1}(x_{k-1}, e^{x_{k-1}})$  点处切线方程为

$$y - e^{x_{k-1}} = e^{x_{k-1}}(x - x_{k-1})$$

由  $y = 0$  得  $x_k = x_{k-1} - 1$  ( $2 \leq k \leq n$ ).

(II)  $x_1 = 0, x_k - x_{k-1} = -1$ , 得  $x_k = -(k-1)$ ,

$$|P_kQ_k| = e^{x_k} = e^{-(k-1)}$$

$$S_n = |P_1Q_1| + |P_2Q_2| + |P_3Q_3| + \dots + |P_nQ_n|$$

$$= 1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-(n-1)} = \frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} = \frac{e - e^{1-n}}{e - 1}$$

### 20. (本小题满分13分)

如图, A地到火车站共有两条路径  $L_1$  和  $L_2$ , 现随机抽取100位从A地到达火车站的人进行调查, 调查结果如下:

所用时间 (分钟)	10~20	20~30	30~40	40~50	50~60
选择 $L_1$ 的人数	6	12	18	12	12
选择 $L_2$ 的人数	0	4	16	16	4

- (1) 试估计40分钟内不能赶到火车站的概率；  
 (2) 分别求通过路径  $L_1$  和  $L_2$  所用时间落在上表中各时间段内的频率；

(3) 现甲、乙两人分别有40分钟和50分钟时间用于赶往火车站，为了尽量大可能在允许的时间内赶到火车站，试通过计算说明，他们应如何选择各自的路径。

**【分析】** (1) 读懂数表，确定不能赶到火车站的人数所在的区间，用相应的频率作为所求概率的估计值； (2) 根据频率的计算公式计算； (3) 计算选择不同的路径，在允许的时间内赶往火车站的概率，通过比较概率的大小确定选择的最佳路径.

**【解】** (1) 由已知共调查了100人，其中40分钟内不能赶到火车站的有  $12+12+16+4=44$  人，

$\therefore$  用频率估计相应的概率为0.44.

(2) 选择  $L_1$  的有60人，选择  $L_2$  的有40人，

故由调查结果得频率为：

所用时间（分钟）	10~20	20~30	30~40	40~50	50~60
选择 $L_1$ 的人数	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
选择 $L_2$ 的人数	0	0.1	0.4	0.4	0.1

(3) 用  $A_1$ ,  $A_2$  分别表示甲选择  $L_1$  和  $L_2$  时，在40分钟内赶到火车站；用  $B_1$ ,  $B_2$  分别表示乙选择  $L_1$  和  $L_2$  时，在50分钟内赶到火车站.

由(2)知  $P(A_1)=0.1+0.2+0.3=0.6$ ,  $P(A_2)=0.1+0.4=0.5$ ,  $P(A_1) > P(A_2)$ ,

$\therefore$  甲应选择路径  $L_1$ ;

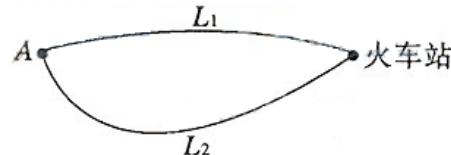
$P(B_1)=0.1+0.2+0.3+0.2=0.8$ ,  $P(B_2)=0.1+0.4+0.4=0.9$ ,  $P(B_2) > P(B_1)$ ,

$\therefore$  乙应选择路径  $L_2$ .

21. (本小题满分14分)

设  $f(x)=\ln x$ ,  $g(x)=f(x)+f'(x)$ .

(1) 求  $g(x)$  的单调区间和最小值；



(2) 讨论  $g(x)$  与  $g(\frac{1}{x})$  的大小关系;

(3) 求  $a$  的取值范围, 使得  $g(a)-g(x) < \frac{1}{a}$  对任意  $x > 0$  成立.

【分析】(1) 先求出原函数  $f(x)$ , 再求得  $g(x)$ , 然后利用导数判断函数的单调区间, 并求出最小值; (2) 作差法比较, 构造一个新的函数, 利用导数判断函数的单调性, 并由单调性判断函数的正负; (3) 对任意  $x > 0$  成立的恒成立问题转化为函数  $g(x)$  的最小值问题.

【解】(1) 由题设知  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ,

$$\therefore g'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \text{令 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x=1,$$

当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  是减函数, 故  $(0, 1)$  是  $g(x)$  的单调减区间。

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  是增函数, 故  $(1, +\infty)$  是  $g(x)$  的单调递增区间,

因此,  $x=1$  是  $g(x)$  的唯一极值点, 且为极小值点, 从而是最小值点,

所以  $g(x)$  的最小值为  $g(1)=1$ .

$$(2) g\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x + x$$

设  $h(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x - x + \frac{1}{x}$ , 则  $h'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2}$ ,

当  $x=1$  时,  $h(1)=0$ , 即  $g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ ,

当  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ ,

因此,  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递减,

当  $0 < x < 1$  时,  $h(x) > h(1)=0$

即  $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ .

(3) 由 (1) 知  $g(x)$  的最小值为 1, 所以,

$$g(a) - g(x) < \frac{1}{a}, \text{ 对任意 } x > 0, \text{ 成立} \Leftrightarrow g(a) - 1 < \frac{1}{a},$$

即  $Ina < 1$ , 从而得  $0 < a < e$ 。