

2019年全国统一高考数学试卷（文科）（全国新课标I）

答案解析版

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = \frac{3-i}{1+2i}$ ，则 $|z| =$

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】

先由复数的除法运算（分母实数化），求得 z ，再求 $|z|$.

【详解】因为 $z = \frac{3-i}{1+2i}$ ，所以 $z = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$ ，所以

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{2}，故选C.$$

【点睛】本题主要考查复数的乘法运算，复数模的计算. 本题也可以运用复数模的运算性质直接求解.

2. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ， $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 6, 7\}$ ，则 $B \cap C_U A$

A. $\{1, 6\}$

B. $\{1, 7\}$

C. $\{6, 7\}$

D. $\{1, 6, 7\}$

【答案】C

【解析】

【分析】

先求 $C_U A$ ，再求 $B \cap C_U A$.

【详解】由已知得 $C_U A = \{1, 6, 7\}$ ，所以 $B \cap C_U A = \{6, 7\}$ ，故选C.

【点睛】本题主要考查交集、补集的运算. 渗透了直观想象素养. 使用补集思想得出答案

3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D.
 $b < c < a$

【答案】B

【解析】

【分析】

运用中间量0比较 a, c , 运用中间量1比较 b, c

【详解】 $a = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$, $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$, $0 < 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$, 则

$0 < c < 1, a < c < b$. 故选B.

【点睛】本题考查指数和对数大小的比较, 渗透了直观想象和数学运算素养. 采取中间变量法, 利用转化与化归思想解题.

4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外, 最美人体

的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割

比例, 且腿长为105cm, 头顶至脖子下端的长度为26 cm, 则其身高可能是



- A. 165 cm B. 175 cm C. 185 cm D. 190cm

【答案】B

【解析】

【分析】

理解黄金分割比例的含义，应用比例式列方程求解。

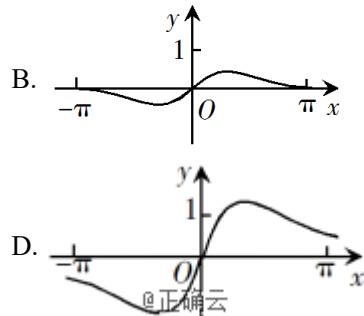
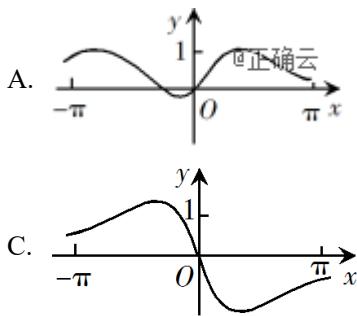
【详解】设人体脖子下端至腿根的长为 x cm，肚脐至腿根的长为 y cm，则

$$\frac{26}{x} = \frac{26+x}{y+105} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 得 } x \approx 42.07 \text{ cm}, y \approx 5.15 \text{ cm}。又其腿长为105cm，头顶至脖子下}$$

端的长度为26cm，所以其身高约为 $42.07 + 5.15 + 105 = 152.22$ ，接近175cm。故选B。

【点睛】本题考查类比归纳与合情推理，渗透了逻辑推理和数学运算素养。采取类比法，利用转化思想解题。

5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



【答案】D

【解析】

【分析】

先判断函数的奇偶性，得 $f(x)$ 是奇函数，排除A，再注意到选项的区别，利用特殊值得正确答案。

【详解】由 $f(-x) = \frac{\sin(-x) + (-x)}{\cos(-x) + (-x)^2} = \frac{-\sin x - x}{\cos x + x^2} = -f(x)$ ，得 $f(x)$ 是奇函数，其图象

关于原点对称。又 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1+\frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{4+2\pi}{\pi^2} > 1$, $f(\pi) = \frac{\pi}{-1+\pi^2} > 0$ 。故选D。

【点睛】本题考查函数的性质与图象，渗透了逻辑推理、直观想象和数学运算素养。采取性质法或赋值法，利用数形结合思想解题。

6. 某学校为了解1 000名新生的身体素质，将这些学生编号为1, 2, ..., 1

000，从这些新生中用系统抽样方法等距抽取100名学生进行体质测验，若46号学生被抽到，则下面4名学生中被抽到的是

- A. 8号学生 B. 200号学生 C. 616号学生 D.
815号学生

【答案】C

【解析】

【分析】

等差数列的性质。渗透了数据分析素养。使用统计思想，逐个选项判断得出答案。

【详解】详解：由已知将1000名学生分成100个组，每组10名学生，用系统抽样，46号学生被抽到，

所以第一组抽到6号，且每组抽到的学生号构成等差数列 $\{a_n\}$ ，公差 $d=10$ ，

所以 $a_n = 6 + 10n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

若 $8 = 6 + 10n$ ，则 $n = \frac{1}{5}$ ，不合题意；若 $200 = 6 + 10n$ ，则 $n = 19.4$ ，不合题意；

若 $616 = 6 + 10n$ ，则 $n = 60$ ，符合题意；若 $815 = 6 + 10n$ ，则 $n = 80.9$ ，不合题意。故选C.

【点睛】本题主要考查系统抽样。

$$7 \cdot \tan 255^\circ =$$

- A. $-2 - \sqrt{3}$ B. $-2 + \sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题首先应用诱导公式，将问题转化成锐角三角函数的计算，进一步应用两角和的正切公式计算求解。题目较易，注重了基础知识、基本计算能力的考查。

【详解】详解： $\tan 255^\circ = \tan(180^\circ + 75^\circ) = \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) =$

$$\frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

【点睛】三角函数的诱导公式、两角和与差的三角函数、特殊角的三角函数值、运算求解能力.

8.已知非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}|=2|\mathbf{b}|$, 且 $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】

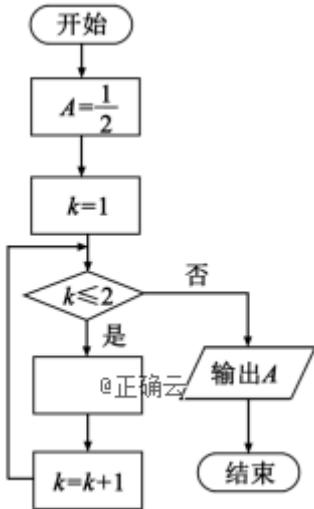
本题主要考查利用平面向量数量积计算向量长度、夹角与垂直问题，渗透了转化与化归、数学计算等数学素养. 先由 $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$ 得出向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的数量积与其模的关系，再利用向量夹角公式即可计算出向量夹角.

【详解】 因为 $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 所以 $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^2 = 0$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^2$, 所以 $\cos \theta =$

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{b}|^2}{2|\mathbf{b}|^2} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \mathbf{a} \text{ 与 } \mathbf{b} \text{ 的夹角为 } \frac{\pi}{3}, \text{ 故选B.}$$

【点睛】 对向量夹角的计算，先计算出向量的数量积及各个向量的摸，在利用向量夹角公式求出来角的余弦值，再求出夹角，注意向量夹角范围为 $[0, \pi]$.

9.如图是求 $2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入



- A. $A = \frac{1}{2+A}$
- B. $A = 2 + \frac{1}{A}$
- C. $A = \frac{1}{1+2A}$
- D. $A = 1 + \frac{1}{2A}$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查算法中的程序框图，渗透阅读、分析与解决问题等素养，认真分析式子结构特征与程序框图结构，即可找出作出选择。

【详解】 执行第1次， $A = \frac{1}{2}, k = 1 \leq 2$ 是，因为第一次应该计算 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 + A}$ ， $k = k + 1$
 $= 2$ ，循环，执行第2次， $k = 2 \leq 2$ ，是，因为第二次应该计算 $2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 + A}$ ，
 $k = k + 1 = 3$ ，循环，执行第3次， $k = 3 \leq 2$ ，否，输出，故循环体为 $A = \frac{1}{2 + A}$ ，故选A

【点睛】 秒杀速解 认真观察计算式子的结构特点，可知循环体为 $A = \frac{1}{2 + A}$ 。

10. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 130° ，则C的离心率为

- A. $2\sin 40^\circ$
- B. $2\cos 40^\circ$
- C. $\frac{1}{\sin 50^\circ}$
- D.

$$\frac{1}{\cos 50^\circ}$$

【答案】D

【解析】

【分析】

由双曲线渐近线定义可得 $-\frac{b}{a} = \tan 130^\circ$, $\therefore \frac{b}{a} = \tan 50^\circ$, 再利用 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 求双

曲线的离心率.

【详解】由已知可得 $-\frac{b}{a} = \tan 130^\circ$, $\therefore \frac{b}{a} = \tan 50^\circ$,

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \tan^2 50^\circ} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 50^\circ}{\cos^2 50^\circ}} = \sqrt{\frac{\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ}{\cos^2 50^\circ}} = \frac{1}{\cos 50^\circ}$$

, 故选D.

【点睛】对于双曲线: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 有 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$; 对于椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), \text{ 有 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \text{ 防止记混.}$$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$, $\cos A = -\frac{1}{4}$,

$$\text{则 } \frac{b}{c} =$$

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】

利用余弦定理推论得出 a, b, c 关系, 在结合正弦定理边角互换列出方程, 解出结果.

【详解】详解: 由已知及正弦定理可得 $a^2 - b^2 = 4c^2$, 由余弦定理推论可得

$$-\frac{1}{4} = \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \therefore \frac{c^2 - 4c^2}{2bc} = -\frac{1}{4}, \therefore \frac{3c}{2b} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{b}{c} = \frac{3}{2} \times 4 = 6, \text{ 故选A.}$$

【点睛】本题考查正弦定理及余弦定理推论的应用.

12. 已知椭圆C的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 过 F_2 的直线与C交于A, B两点. 若

$|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则C的方程为

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ D.

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

【答案】B

【解析】

【分析】

可以运用下面方法求解: 如图, 由已知可设 $|F_2B|=n$, 则 $|AF_2|=2n$, $|BF_1|=|AB|=3n$,

由椭圆的定义有 $2a=|BF_1|+|BF_2|=4n$, $\therefore |AF_1|=2a-|AF_2|=2n$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 和 $\triangle BF_1F_2$

中, 由余弦定理得 $\begin{cases} 4n^2+4-2\cdot 2n\cdot 2\cdot \cos \angle AF_2F_1=4n^2, \\ n^2+4-2\cdot n\cdot 2\cdot \cos \angle BF_2F_1=9n^2 \end{cases}$, 又 $\angle AF_2F_1$, $\angle BF_2F_1$ 互补,

$\therefore \cos \angle AF_2F_1+\cos \angle BF_2F_1=0$, 两式消去 $\cos \angle AF_2F_1$, $\cos \angle BF_2F_1$, 得 $3n^2+6=11n^2$

, 解得 $n=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore 2a=4n=2\sqrt{3}$, $\therefore a=\sqrt{3}$, $\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2$, \therefore 所求椭圆方程

为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$, 故选B.

【详解】如图, 由已知可设 $|F_2B|=n$, 则 $|AF_2|=2n$, $|BF_1|=|AB|=3n$, 由椭圆的定义有

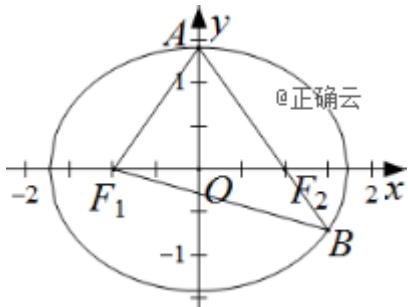
$2a=|BF_1|+|BF_2|=4n$, $\therefore |AF_1|=2a-|AF_2|=2n$. 在 $\triangle AF_1B$ 中, 由余弦定理推论得

$\cos \angle F_1AB=\frac{4n^2+9n^2-9n^2}{2\cdot 2n\cdot 3n}=\frac{1}{3}$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理得

$4n^2+4n^2-2\cdot 2n\cdot 2n\cdot \frac{1}{3}=4$, 解得 $n=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore 2a=4n=2\sqrt{3}$, $\therefore a=\sqrt{3}$, $\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2$, \therefore 所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$,

故选B.



【点睛】本题考查椭圆标准方程及其简单性质，考查数形结合思想、转化与化归的能力，很好的落实了直观想象、逻辑推理等数学素养.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $3x - y = 0$.

【解析】

【分析】

本题根据导数的几何意义，通过求导数，确定得到切线的斜率，利用直线方程的点斜式求得切线方程

【详解】 详解: $y' = 3(2x+1)e^x + 3(x^2+x)e^x = 3(x^2+3x+1)e^x$,

所以, $k = y'|_{x=0} = 3$

所以, 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y = 3x$, 即 $3x - y = 0$.

【点睛】准确求导数是进一步计算的基础，本题易因为导数的运算法则掌握不熟，而导致计算错误。求导要“慢”，计算要准，是解答此类问题的基本要求.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 = 1$, $S_3 = \frac{3}{4}$, 则 $S_4 =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{8}$.

【解析】

【分析】

本题根据已知条件，列出关于等比数列公比 q 的方程，应用等比数列的求和公式，计算得到 S_4 . 题目的难度不大，注重了基础知识、基本计算能力的考查.

【详解】 详解：设等比数列的公比为 q ，由已知

$$S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 1 + q + q^2 = \frac{3}{4} \text{，即 } q^2 + q + \frac{1}{4} = 0$$

解得 $q = -\frac{1}{2}$ ，

所以 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1-(-\frac{1}{2})^4}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{5}{8}$.

【点睛】 准确计算，是解答此类问题的基本要求。本题由于涉及幂的乘方运算、繁分式分式计算，部分考生易出现运算错误。

一题多解：本题在求得数列的公比后，可利用已知计算

$$S_4 = S_3 + a_4 = S_3 + a_1 q^3 = \frac{3}{4} + (-\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{8} \text{，避免繁分式计算。}$$

15. 函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{3\pi}{2}) - 3 \cos x$ 的最小值为_____.

【答案】 -4.

【解析】

【分析】

本题首先应用诱导公式，转化得到二倍角的余弦，进一步应用二倍角的余弦公式，得到关

于 $2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$ 的二次函数。题目有一定的综合性，注重了基础知识、数学式子的变形及运算

求解能力的考查。

【详解】 $f(x) = \sin(2x + \frac{3\pi}{2}) - 3 \cos x = -\cos 2x - 3 \cos x = -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1$
 $= -2(\cos x + \frac{3}{4})^2 + \frac{17}{8}$ ，

$$\because -1 \leq \cos x \leq 1, \therefore \text{当 } \cos x = 1 \text{ 时, } f_{\min}(x) = -4,$$

故函数 $f(x)$ 的最小值为 -4.

【点睛】 解答本题的过程中，部分考生易忽视 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 的限制，而简单应用二次函数的性质，出现运算错误。

16. 已知 $\angle ACB = 90^\circ$ ， P 为平面 ABC 外一点， $PC = 2$ ，点 P 到 $\angle ACB$ 两边 AC ， BC 的距离均为

$\sqrt{3}$, 那么 P 到平面 ABC 的距离为_____.

【答案】 $\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】

本题考查学生空间想象能力, 合理画图成为关键, 准确找到 P 在底面上的射影, 使用线面垂直定理, 得到垂直关系, 勾股定理解决.

【详解】作 PD, PE 分别垂直于 AC, BC , $PO \perp$ 平面 ABC , 连 CO ,

知 $CD \perp PD, CD \perp PO$, $PD \cap OD = P$,

$\backslash CD \wedge$ 平面 PDO , $OD \subset$ 平面 PDO ,

$\therefore CD \perp OD$

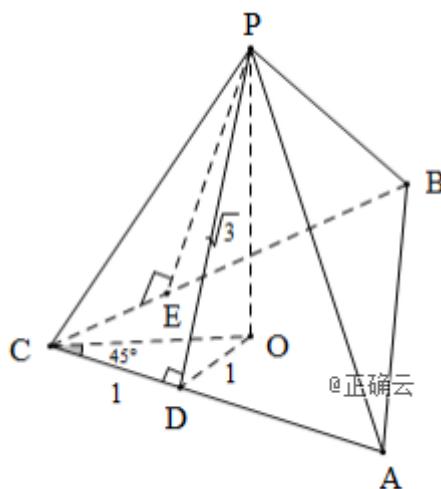
$$\because PD = PE = \sqrt{3}, PC = 2. \therefore \sin \angle PCE = \sin \angle PCD = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \angle PCB = \angle PCA = 60^\circ$,

$\therefore PO \perp CO$, CO 为 $\angle ACB$ 平分线,

$\therefore \angle OCD = 45^\circ \therefore OD = CD = 1, OC = \sqrt{2}$, 又 $PC = 2$,

$$\therefore PO = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}.$$



【点睛】画图视角选择不当, 线面垂直定理使用不够灵活, 难以发现垂直关系, 问题即很难解决, 将几何体摆放成正常视角, 是立体几何问题解决的有效手段, 几何关系利于观察, 解题事半功倍.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：60分。

17.某商场为提高服务质量，随机调查了50名男顾客和50名女顾客，每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价，得到下面列联表：

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

- (1) 分别估计男、女顾客对该商场服务满意的概率；
(2) 能否有95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异？

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】 (1) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ ；

(2) 能有95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异。

【解析】

【分析】

- (1) 从题中所给的 2×2 列联表中读出相关的数据，利用满意的人数除以总的人数，分别算出相应的频率，即估计得出的概率值；
(2) 利用公式求得观测值与临界值比较，得到能有95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异。

【详解】(1) 由题中表格可知, 50名男顾客对商场服务满意的有40人,

所以男顾客对商场服务满意率估计为 $P_1 = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$,

50名女顾客对商场满意的有30人,

所以女顾客对商场服务满意率估计为 $P_2 = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$,

(2) 由列联表可知 $K^2 = \frac{100(40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{70 \times 30 \times 50 \times 50} = \frac{100}{21} \approx 4.762 > 3.841$,

所以能有95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异.

【点睛】该题考查的是有关概率与统计的知识, 涉及到的知识点有利用频率来估计概率,

利用列联表计算 K^2 的值, 独立性检验, 属于简单题目.

18.记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_9 = -a_5$.

(1) 若 $a_3 = 4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1 > 0$, 求使得 $S_n \geq a_n$ 的 n 的取值范围.

【答案】(1) $a_n = -2n + 10$;

(2) $1 \leq n \leq 10 (n \in N^*)$.

【解析】

【分析】

(1) 首项设出等差数列的首项和公差, 根据题的条件, 建立关于 a_1 和 d 的方程组, 求得

a_1 和 d 的值, 利用等差数列的通项公式求得结果;

(2) 根据题意有 $a_5 = 0$, 根据 $a_1 > 0$, 可知 $d < 0$, 根据 $S_n > a_n$, 得到关于 n 的不等式, 从而求得结果.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

根据题意有 $\begin{cases} 9a_1 + \frac{9 \times 8}{2}d = -(a_1 + 4d), \\ a_1 + 2d = 4 \end{cases}$,

解答 $\begin{cases} a_1 = 8 \\ d = -2 \end{cases}$, 所以 $a_n = 8 + (n-1) \times (-2) = -2n + 10$,

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n + 10$ ；

(2) 由条件 $S_9 = -a_5$, 得 $9a_5 = -a_5$, 即 $a_5 = 0$,

因为 $a_1 > 0$, 所以 $d < 0$, 并且有 $a_5 = a_1 + 4d = 0$, 所以有 $a_1 = -4d$,

由 $S_n \geq a_n$ 得 $na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \geq a_1 + (n-1)d$, 整理得 $(n^2 - 9n)d \geq (2n - 10)d$,

因为 $d < 0$, 所以有 $n^2 - 9n \leq 2n - 10$, 即 $n^2 - 11n + 10 \leq 0$,

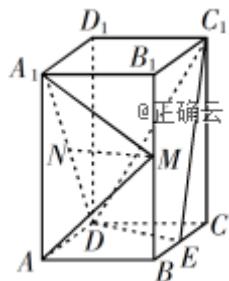
解得 $1 \leq n \leq 10$,

所以 n 的取值范围是: $1 \leq n \leq 10 (n \in N^*)$

【点睛】该题考查的是有关数列的问题, 涉及到的知识点有等差数列的通项公式, 等差数列的求和公式, 在解题的过程中, 需要认真分析题意, 熟练掌握基础知识是正确解题的关键.

19.如图, 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$

$A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E , M , N 分别是 BC , BB_1 , A_1D 的中点.



(1) 证明: $MN \parallel \text{平面 } C_1DE$;

(2) 求点C到平面 C_1DE 的距离.

【答案】 (1) 见解析;

(2) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

【解析】

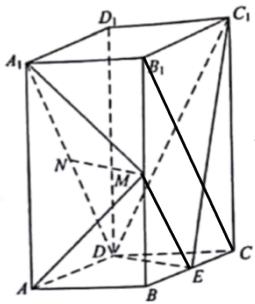
【分析】

(1) 利用三角形中位线和 $A_1D \parallel B_1C$ 可证得 $ME \parallel ND$, 证得四边形 $MNDE$ 为平行四边形, 进而证得 $MN \parallel DE$, 根据线面平行判定定理可证得结论;

(2) 根据题意求得三棱锥 $C_1 - CDE$ 的体积, 再求出 $\Delta C_1 DE$ 的面积, 利用

$$V_{C_1-CDE} = V_{C-C_1DE}$$
 求得点C到平面 $C_1 DE$ 的距离, 得到结果.

【详解】(1) 连接 ME , B_1C



$\because M, E$ 分别为 BB_1, BC 中点 $\therefore ME$ 为 $\triangle B_1BC$ 的中位线

$$\therefore ME \parallel B_1C \text{ 且 } ME = \frac{1}{2} B_1C$$

$$\text{又 } N \text{ 为 } A_1D \text{ 中点, 且 } A_1D \parallel B_1C \quad \therefore ND \parallel B_1C \text{ 且 } ND = \frac{1}{2} B_1C$$

$\therefore ME \parallel ND$ \therefore 四边形 $MNDE$ 为平行四边形

$\therefore MN \parallel DE$, 又 $MN \not\subset$ 平面 C_1DE , $DE \perp$ 平面 C_1DE

$\therefore MN \parallel$ 平面 C_1DE

(2) 在菱形 $ABCD$ 中, E 为 BC 中点, 所以 $DE \perp BC$,

$$\text{根据题意有 } DE = \sqrt{3}, \quad C_1E = \sqrt{17},$$

因为棱柱为直棱柱, 所以有 $DE \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

$$\text{所以 } DE \perp EC_1, \text{ 所以 } S_{\triangle DEC_1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{17},$$

设点C到平面 C_1DE 的距离为 d ,

$$\text{根据题意有 } V_{C_1-CDE} = V_{C-C_1DE}, \text{ 则有 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{17} \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 4,$$

$$\text{解得 } d = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17},$$

所以点C到平面 C_1DE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

【点睛】该题考查的是有关立体几何的问题，涉及到的知识点有线面平行的判定，点到平面的距离的求解，在解题的过程中，注意要熟记线面平行的判定定理的内容，注意平行线的寻找思路，再者就是利用等积法求点到平面的距离是文科生常考的内容.

20. 已知函数 $f(x) = 2\sin x - x \cos x - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

- (1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点;
- (2) 若 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 见解析;

(2) $a \in (-\infty, 0]$.

【解析】

【分析】

(1) 求导得到导函数后, 设为 $g(x)$ 进行再次求导, 可判断出当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $g'(x) < 0$, 从而得到 $g(x)$ 单调性, 由零点存在定理可判断出唯一零点所处的位置, 证得结论; (2) 构造函数 $h(x) = f(x) - ax$, 通过二次求导可判断出 $h'(x)_{\min} = h'(\pi) = -2 - a$, $h'(x)_{\max} = h'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi - 2}{2} - a$; 分别在 $a \leq -2$, $-2 < a \leq 0$, $0 < a < \frac{\pi - 2}{2}$ 和 $a \geq \frac{\pi - 2}{2}$ 的情况下根据导函数的符号判断 $h(x)$ 单调性, 从而确定 $h(x) \geq 0$ 恒成立时 a 的取值范围.

【详解】 (1) $f'(x) = 2\cos x - \cos x + x \sin x - 1 = \cos x + x \sin x - 1$

令 $g(x) = \cos x + x \sin x - 1$, 则 $g'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$

当 $x \in (0, \pi)$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 解得: $x = \frac{\pi}{2}$

\therefore 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $g'(x) < 0$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增; 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减

$$\text{又 } g(0) = 1 - 1 = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0, \quad g(\pi) = -1 - 1 = -2$$

即当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $g(x) > 0$, 此时 $g(x)$ 无零点, 即 $f'(x)$ 无零点

$$\therefore g\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot g(\pi) < 0 \quad \therefore \exists x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 使得 } g(x_0) = 0$$

又 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减 $\therefore x = x_0$ 为 $g(x)$, 即 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的唯一零点

综上所述: $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点

(2) 若 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq ax$, 即 $f(x) - ax \geq 0$ 恒成立

$$\text{令 } h(x) = f(x) - ax = 2 \sin x - x \cos x - (a+1)x$$

$$\text{则 } h'(x) = \cos x + x \sin x - 1 - a, \quad h''(x) = x \cos x = g'(x)$$

由 (1) 可知, $h'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增; 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减

$$\text{且 } h'(0) = -a, \quad h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi-2}{2} - a, \quad h'(\pi) = -2 - a$$

$$\therefore h'(x)_{\min} = h'(\pi) = -2 - a, \quad h'(x)_{\max} = h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi-2}{2} - a$$

① 当 $a \leq -2$ 时, $h'(x)_{\min} = h'(\pi) = -2 - a \geq 0$, 即 $h'(x) \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立

$\therefore h(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增

\ $h(x)^3 - h(0) = 0$, 即 $f(x) - ax \geq 0$, 此时 $f(x) \geq ax$ 恒成立

② 当 $-2 < a \leq 0$ 时, $h'(0) \geq 0$, $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, $h'(\pi) < 0$

$$\therefore \exists x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 使得 } h'(x_1) = 0$$

$\therefore h(x)$ 在 $[0, x_1]$ 上单调递增, 在 $(x_1, \pi]$ 上单调递减

$$\text{又 } h(0) = 0, \quad h(\pi) = 2 \sin \pi - \pi \cos \pi - (a+1)\pi = -a\pi \geq 0$$

$\therefore h(x) \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立，即 $f(x) \geq ax$ 恒成立

③ 当 $0 < a < \frac{\pi-2}{2}$ 时， $h'(0) < 0$ ， $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi-2}{2} - a > 0$

$\therefore \exists x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $h'(x_2) = 0$

$\therefore h(x)$ 在 $[0, x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增

$\therefore x \in (0, x_2)$ 时， $h(x) < h(0) = 0$ ，可知 $f(x) \geq ax$ 不恒成立

④ 当 $a \geq \frac{\pi-2}{2}$ 时， $h'(x)_{\max} = h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi-2}{2} - a \leq 0$

$\therefore h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减 \(\backslash h(x) < h(0) = 0

可知 $f(x) \geq ax$ 不恒成立

综上所述： $a \in (-\infty, 0]$

【点睛】本题考查利用导数讨论函数零点个数、根据恒成立的不等式求解参数范围的问题。对于此类端点值恰为恒成立不等式取等的值的问题，通常采用构造函数的方式，将问题转变成函数最值与零之间的比较，进而通过导函数的正负来确定所构造函数的单调性，从而得到最值。

21. 已知点 A , B 关于坐标原点 O 对称， $|AB| = A$ ， $\odot M$ 过点 A , B 且与直线 $x+2=0$ 相切。

(1) 若 A 在直线 $x+y=0$ 上，求 $\odot M$ 的半径。

(2) 是否存在定点 P ，使得当 A 运动时， $|MA| - |MP|$ 为定值？并说明理由。

【答案】 (1) 2 或 6；

(2) 见解析。

【解析】

【分析】

(1) 设 $A(t, -t)$, $B(-t, t)$ ，根据 $|AB| = 4$ ，可知 $|t| = \sqrt{2}$ ；由圆的性质可知圆心 M 必在直线 $y=x$ 上，可设圆心 $M(a, a)$ ；利用圆心到 $x+2=0$ 的距离为半径和 $|MA|=|MB|=r$

构造方程，从而解出 r ；（2）当直线 AB 斜率存在时，设 AB 方程为： $y = kx$ ，由圆的性质可知圆心 M 必在直线 $y = -\frac{1}{k}x$ 上；假设圆心坐标，利用圆心到 $x+2=0$ 的距离为半径和 $r = |MA| = \sqrt{|OA|^2 + |OM|^2}$ 构造方程，解出 M 坐标，可知 M 轨迹为抛物线；利用抛物线定义可知 $P(1, 0)$ 为抛物线焦点，且定值为 1；当直线 AB 斜率不存在时，求解出 M 坐标，验证此时 $P(1, 0)$ 依然满足定值，从而可得到结论。

【详解】 （1） $\because A$ 在直线 $C_n^{5-n} + C_{n+1}^{9-n}$ 上 \therefore 设 $A(t, -t)$ ，则 $B(-t, t)$

$$\text{又 } |AB| = 4 \quad \therefore 8t^2 = 16, \text{ 解得: } |t| = \sqrt{2}$$

$\because \odot M$ 过点 $A, B \quad \therefore$ 圆心 M 必在直线 $y = x$ 上

设 $M(a, a)$ ，圆的半径为 r

$\because \odot M$ 与 $x+2=0$ 相切 $\therefore r = |a+2|$

$$\text{又 } |MA| = |MB| = r, \text{ 即 } (a-\sqrt{2})^2 + (a+\sqrt{2})^2 = r^2$$

$$\therefore (a-\sqrt{2})^2 + (a+\sqrt{2})^2 = (a+2)^2, \text{ 解得: } a=0 \text{ 或 } a=4$$

当 $a=0$ 时， $r=2$ ；当 $a=4$ 时， $r=6$

$\therefore \odot M$ 的半径为：2 或 6

（2）存在定点 $P(1, 0)$ ，使得 $|MA| - |MP| = 1$

说明如下：

$\because A, B$ 关于原点对称且 $|AB|=4$

\therefore 直线 AB 必为过原点 O 的直线，且 $|OA|=2$

①当直线 AB 斜率存在时，设 AB 方程为： $y = kx$

则 $\odot M$ 的圆心 M 必在直线 $y = -\frac{1}{k}x$ 上

设 $M(-km, m)$ ， $\odot M$ 的半径为 r

$\because \odot M$ 与 $x+2=0$ 相切 $\therefore r = |-km+2|$

$$\text{又 } r = |MA| = \sqrt{|OA|^2 + |OM|^2} = \sqrt{4 + k^2 m^2 + m^2}$$

$$\therefore |-km+2| = \sqrt{4+k^2m^2+m^2} , \text{ 整理可得: } m^2 = -4km$$

即 M 点轨迹方程为: $y^2 = 4x$, 准线方程为: $x = -1$, 焦点 $F(1, 0)$

$\because |MA| = r$, 即抛物线上点到 $a = -1$ 的距离 $\therefore |MA| = |MF| + 1$

$$\therefore |MA| - |MF| = 1$$

\therefore 当 P 与 F 重合, 即 P 点坐标为 $(1, 0)$ 时, $|MA| - |MP| = 1$

②当直线 AB 斜率不存在时, 则直线 AB 方程为: $x = 0$

\ M 在 x 轴上, 设 $M(n, 0)$

$$\therefore |n+2| = \sqrt{n^2 + 4}, \text{ 解得: } \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } M\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

若 $P(1, 0)$, 则 $|MA| - |MP| = 2 - 1 = 1$

综上所述, 存在定点 $P(1, 0)$, 使得 $|MA| - |MP|$ 为定值

【点睛】本题考查圆的方程的求解问题、圆锥曲线中的定点定值类问题.解决本定点定值问题的关键是能够根据圆的性质得到动点所满足的轨迹方程, 进而根据抛物线的定义得到定值, 进而验证定值符合所有情况, 使得问题得解.

(二) 选考题: 共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

22.[选修4-4: 坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为

极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为

$$2\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta + 11 = 0.$$

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

【答案】 (1) $C: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; $l: 2x + \sqrt{3}y + 11 = 0$; (2) $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】

(1) 利用代入消元法, 可求得 C 的直角坐标方程; 根据极坐标与直角坐标互化原则可得 l 的直角坐标方程; (2) 利用参数方程表示出 C 上点的坐标, 根据点到直线距离公式可将所求距离表示为三角函数的形式, 从而根据三角函数的范围可求得最值.

【详解】 (1) 由 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ 得: $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$, 又 $y^2 = \frac{16t^2}{(1+t^2)^2}$

$$\therefore y^2 = \frac{16 \times \frac{1-x}{1+x}}{\left(1 + \frac{1-x}{1+x}\right)^2} = 4(1+x)(1-x) = 4 - 4x^2$$

整理可得 C 的直角坐标方程为: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

又 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$

$\therefore l$ 的直角坐标方程为: $2x + \sqrt{3}y + 11 = 0$

(2) 设 C 上点的坐标为: $(\cos \theta, 2 \sin \theta)$

则 C 上的点到直线 l 的距离 $d = \frac{|2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta + 11|}{\sqrt{7}} = \frac{|4 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 11|}{\sqrt{7}}$

当 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ 时, d 取最小值

则 $d_{\min} = \sqrt{7}$

【点睛】 本题考查参数方程、极坐标方程与直角坐标方程的互化、求解椭圆上的点到直线距离的最值问题. 求解本题中的最值问题通常采用参数方程来表示椭圆上的点, 将问题转化为三角函数的最值求解问题.

23.[选修4-5: 不等式选讲]

已知 a, b, c 为正数，且满足 $abc=1$. 证明:

$$(1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2;$$

$$(2) (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24.$$

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】

(1) 利用 $abc = 1$ 将所证不等式可变为证明: $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ac + ab$, 利用基本不等式可证得 $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac$, 从而得到结论; (2) 利用基本不等式可得 $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$, 再次利用基本不等式可将式转化为 $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24\sqrt{(abc)^2}$, 在取等条件一致的情况下, 可得结论.

【详解】(1) $\because abc = 1 \quad \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot abc = bc + ac + ab$

$$\therefore 2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

当且仅当 $a = b = c$ 时取等号

$$\therefore 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \text{ 即: } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

(2) $\because (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$, 当且仅当 $a = b = c$ 时取等号

又 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $a+c \geq 2\sqrt{ac}$ (当且仅当 $a = b = c$ 时等号同时成立)

$$\therefore (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 3 \times 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} \times 2\sqrt{ac} = 24\sqrt{(abc)^2}$$

$$\text{又 } abc = 1 \quad \therefore (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$$

【点睛】本题考查利用基本不等式进行不等式的证明问题, 考查学生对于基本不等式的变形和应用能力, 需要注意的是在利用基本不等式时需注意取等条件能否成立.