# 2017年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅲ）

参考答案与试题解析

## 一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5分）已知集合A={1，2，3，4}，B={2，4，6，8}，则A∩B中元素的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】11：计算题；37：集合思想；4O：定义法；5J：集合．

【分析】利用交集定义先求出A∩B，由此能求出A∩B中元素的个数．

【解答】解：∵集合A={1，2，3，4}，B={2，4，6，8}，

∴A∩B={2，4}，

∴A∩B中元素的个数为2．

故选：B．

【点评】本题考查交集中元素个数的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意交集定义的合理运用．

2．（5分）复平面内表示复数z=i（﹣2+i）的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义．

【专题】35：转化思想；5N：数系的扩充和复数．

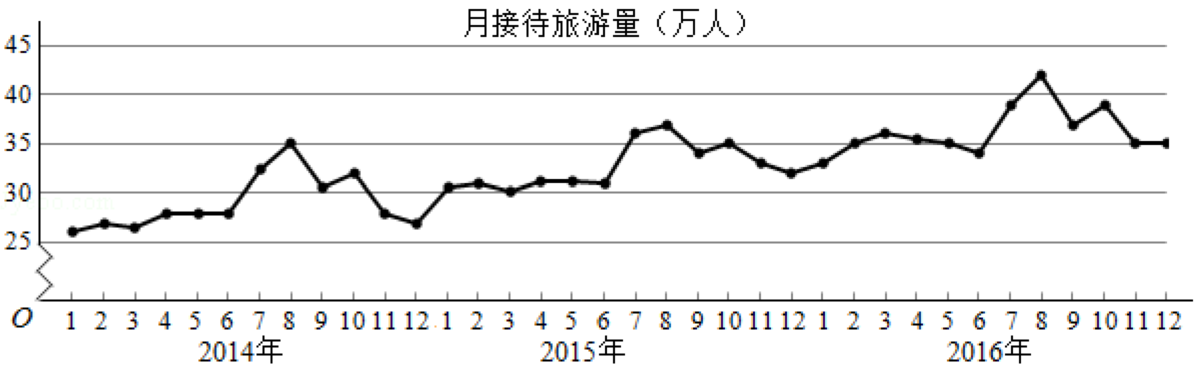
【分析】利用复数的运算法则、几何意义即可得出．

【解答】解：z=i（﹣2+i）=﹣2i﹣1对应的点（﹣1，﹣2）位于第三象限．

故选：C．

【点评】本题考查了复数的运算法则、几何意义，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

3．（5分）某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了2014年1月至2016年12月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图．




根据该折线图，下列结论错误的是（　　）

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在7，8月

D．各年1月至6月的月接待游客量相对于7月至12月，波动性更小，变化比较平稳

【考点】2K：命题的真假判断与应用；B9：频率分布折线图、密度曲线．

【专题】27：图表型；2A：探究型；5I：概率与统计．

【分析】根据已知中2014年1月至2016年12月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，逐一分析给定四个结论的正误，可得答案．

【解答】解：由已有中2014年1月至2016年12月期间月接待游客量（单位：万人）的数据可得：

月接待游客量逐月有增有减，故A错误；

年接待游客量逐年增加，故B正确；

各年的月接待游客量高峰期大致在7，8月，故C正确；

各年1月至6月的月接待游客量相对于7月至12月，波动性更小，变化比较平稳，故D正确；

故选：A．

【点评】本题考查的知识点是数据的分析，命题的真假判断与应用，难度不大，属于基础题．

4．（5分）已知sinα﹣cosα=$\frac{4}{3}$，则sin2α=（　　）

A．﹣$\frac{7}{9}$　　B．﹣$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

【考点】GS：二倍角的三角函数．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4O：定义法；56：三角函数的求值．

【分析】由条件，两边平方，根据二倍角公式和平方关系即可求出．

【解答】解：∵sinα﹣cosα=$\frac{4}{3}$，

∴（sinα﹣cosα）$^2$=1﹣2sinαcosα=1﹣sin2α=$\frac{16}{9}$，

∴sin2α=﹣$\frac{7}{9}$，

故选：A．

【点评】本题考查了二倍角公式，属于基础题．

5．（5分）设x，y满足约束条件$\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$则z=x﹣y的取值范围是（　　）

A．[﹣3，0]　　B．[﹣3，2]　　C．[0，2]　　D．[0，3]

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；5T：不等式．

【分析】画出约束条件的可行域，利用目标函数的最优解求解目标函数的范围即可．

【解答】解：x，y满足约束条件$\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$的可行域如图：

目标函数z=x﹣y，经过可行域的A，B时，目标函数取得最值，

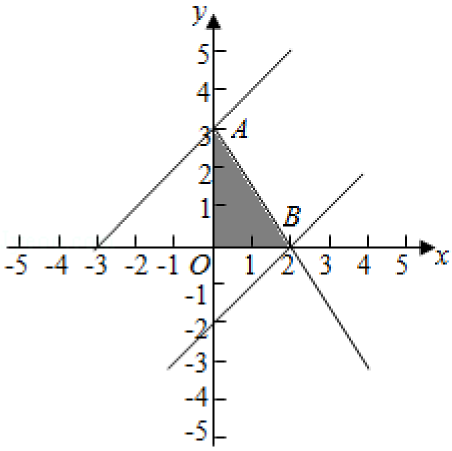
由$\begin{cases}x=0\\ 3x+2y-6=0\end{cases}$解得A（0，3），

由$\begin{cases}y=0\\3x+2y-6=0\end{cases}$解得B（2，0），

目标函数的最大值为：2，最小值为：﹣3，

目标函数的取值范围：[﹣3，2].

故选：B.




【点评】本题考查线性规划的简单应用，目标函数的最优解以及可行域的作法是解题的关键.

6.（5分）函数f（x）$=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的最大值为（　　）

A．$\frac{6}{5}$　　B．1　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{1}{5}$

【考点】HW：三角函数的最值.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；57：三角函数的图像与性质.

【分析】利用诱导公式化简函数的解析式，通过正弦函数的最值求解即可.

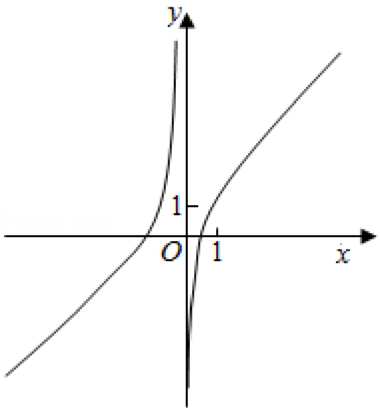
【解答】解：函数f（x）$=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{6}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{6}{5}$.

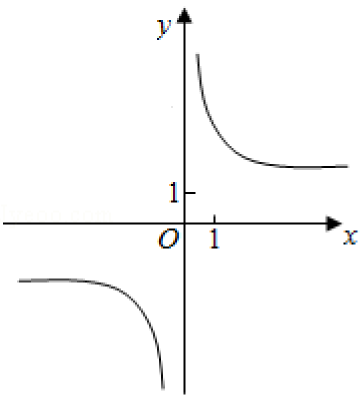
故选：A.

【点评】本题考查诱导公式的应用，三角函数的最值，正弦函数的有界性，考查计算能力.

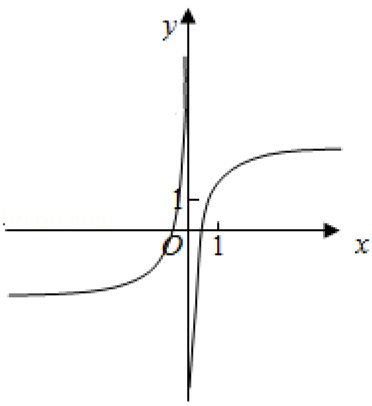
7．（5分）函数$y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$的部分图象大致为（　　）



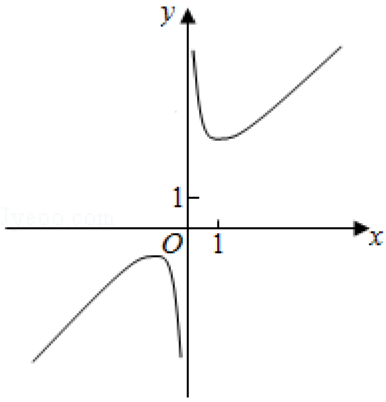

A．




B．




C．

D. 


【考点】3A：函数的图象与图象的变换.

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；51：函数的性质及应用.

【分析】通过函数的解析式，利用函数的奇偶性的性质，函数的图象经过的特殊点判断函数的图象即可.

【解答】解：函数$y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$，可知：f（x）$=x+\frac{\sin x}{x^2}$是奇函数，所以函数的图象关于原点对称，

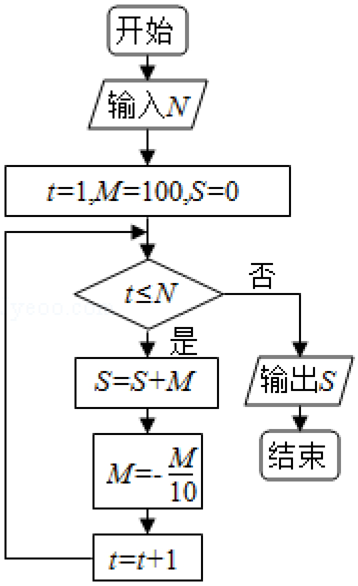
则函数$y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$的图象关于（0，1）对称，

当$x\to 0^+$，f（x）＞0，排除A、C，当$x=\pi$时，$y=1+\pi$，排除B.

故选：D.

【点评】本题考查函数的图象的判断，函数的奇偶性以及特殊点是常用方法.

8．（5分）执行如图的程序框图，为使输出S的值小于91，则输入的正整数N的最小值为（　　）




A．5　　B．4　　C．3　　D．2

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；39：运动思想；49：综合法；5K：算法和程序框图．

【分析】通过模拟程序，可得到S的取值情况，进而可得结论．

【解答】解：由题可知初始值t=1，M=100，S=0，

要使输出S的值小于91，应满足“t≤N”，

则进入循环体，从而S=100，M=﹣10，t=2，

要使输出S的值小于91，应接着满足“t≤N”，

则进入循环体，从而S=90，M=1，t=3，

要使输出S的值小于91，应不满足“t≤N”，跳出循环体，

此时N的最小值为2，

故选：D．

【点评】本题考查程序框图，判断出什么时候跳出循环体是解决本题的关键，注意解题方法的积累，属于中档题．

9．（5分）已知圆柱的高为1，它的两个底面的圆周在直径为2的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为（　　）

A．π　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LR：球内接多面体．

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；5Q：立体几何．

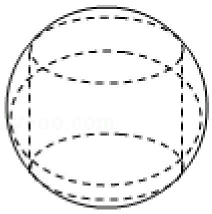
【分析】推导出该圆柱底面圆周半径r=$\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，由此能求出该圆柱的体积．

【解答】解：∵圆柱的高为1，它的两个底面的圆周在直径为2的同一个球的球面上，

∴该圆柱底面圆周半径r=$\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴该圆柱的体积：V=Sh=$\pi\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\times 1$=$\frac{3\pi}{4}$．

故选：B．



【点评】本题考查面圆柱的体积的求法，考查圆柱、球等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查化归与转化思想，是中档题．

10．（5分）在正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$中，E为棱CD的中点，则（　　）

A．$A_1E\perp DC_1$　　B．$A_1E\perp BD$　　C．$A_1E\perp BC_1$　　D．$A_1E\perp AC$

【考点】LO：空间中直线与直线之间的位置关系．

【专题】11：计算题；31：数形结合；41：向量法；5G：空间角．

【分析】法一：连$B_1C$，推导出$BC_1\perp B_1C$，$A_1B_1\perp BC_1$，从而$BC_1\perp$平面$A_1ECB_1$，由此得到$A_1E\perp BC_1$．

法二：以D为原点，DA为x轴，DC为y轴，$DD_1$为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出结果．

【解答】解：法一：连$B_1C$，由题意得$BC_1\perp B_1C$，

∵$A_1B_1\perp$平面$B_1BCC_1$，且$BC_1\subset$平面$B_1BCC_1$，

∴$A_1B_1\perp BC_1$，

∵$A_1B_1\cap B_1C=B_1$，

∴$BC_1\perp$平面$A_1ECB_1$，

∵$A_1E\subset$平面$A_1ECB_1$，

∴$A_1E\perp BC_1$.

故选：C.

法二：以D为原点，DA为x轴，DC为y轴，$DD_1$为z轴，建立空间直角坐标系，

设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中棱长为2，

则$A_1$（2，0，2），E（0，1，0），B（2，2，0），D（0，0，0），$C_1$（0，2，2），A（2，0，0），C（0，2，0），

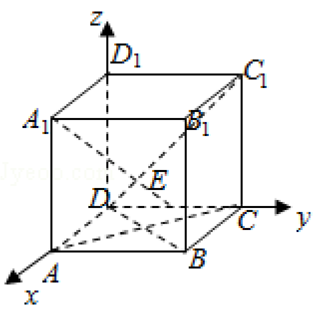
$\overrightarrow{A_1E}=(-2,1,-2)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$，

$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，

∵$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{DC_1}=-2$，$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BD}=2$，$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{AC}=6$，

∴$A_1E\perp BC_1$.

故选：C.




【点评】本题考查线线垂直的判断，是中档题，解题时要认真审题，注意向量法的合理运用.

11．（5分）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右顶点分别为$A_1$，$A_2$，且以线段$A_1A_2$为直径的圆与直线$bx-ay+2ab=0$相切，则C的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】34：方程思想；5B：直线与圆；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】以线段$A_1A_2$为直径的圆与直线$bx-ay+2ab=0$相切，可得原点到直线的距离$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$，化简即可得出．

【解答】解：以线段$A_1A_2$为直径的圆与直线$bx-ay+2ab=0$相切，

∴原点到直线的距离$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$，化为：$a^2=3b^2$．

∴椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

故选：A．

【点评】本题考查了椭圆的标准方程及其性质、直线与圆相切的性质、点到直线的距离公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

12．（5分）已知函数$f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$有唯一零点，则a=（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

【考点】52：函数零点的判定定理．

【专题】11：计算题；33：函数思想；49：综合法；51：函数的性质及应用．

【分析】通过转化可知问题等价于函数$y=1-(x-1)^2$的图象与$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$的图象只有一个交点求a的值．分a=0、a＜0、a＞0三种情况，结合函数的单调性分析可得结论．

【解答】解：因为$f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})=-1+(x-1)^2+a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})=0$，

所以函数f（x）有唯一零点等价于方程$1-(x-1)^2=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$有唯一解，

等价于函数$y=1-(x-1)^2$的图象与$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$的图象只有一个交点．

①当a=0时，f（x）$=x^2-2x\geq -1$，此时有两个零点，矛盾；

②当a＜0时，由于$y=1-(x-1)^2$在（﹣∞，1）上递增、在（1，+∞）上递减，

且$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$在（﹣∞，1）上递增、在（1，+∞）上递减，

所以函数$y=1-(x-1)^2$的图象的最高点为A（1，1），$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$的图象的最高点为B（1，2a），

由于2a＜0＜1，此时函数$y=1-(x-1)^2$的图象与$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$的图象有两个交点，矛盾；

③当a＞0时，由于$y=1-(x-1)^2$在（﹣∞，1）上递增、在（1，+∞）上递减，

且$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$在（﹣∞，1）上递减、在（1，+∞）上递增，

所以函数$y=1-(x-1)^2$的图象的最高点为A（1，1），$y=a(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}})$的图象的最低点为B（1，2a），

由题可知点A与点B重合时满足条件，即2a=1，即$a=\frac{1}{2}$，符合条件；

综上所述，$a=\frac{1}{2}$，

故选：C．

【点评】本题考查函数零点的判定定理，考查函数的单调性，考查运算求解能力，考查数形结合能力，考查转化与化归思想，考查分类讨论的思想，注意解题方法的积累，属于难题．

## 二、填空题

13．（5分）已知向量$\vec{a}$=（﹣2，3），$\vec{b}$=（3，m），且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则m=__2__．

【考点】9T：数量积判断两个平面向量的垂直关系．

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；5A：平面向量及应用．

【分析】利用平面向量数量积坐标运算法则和向量垂直的性质求解．

【解答】解：∵向量$\vec{a}$=（﹣2，3），$\vec{b}$=（3，m），且$\vec{a}\perp\vec{b}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-6+3m=0$，

解得m=2.

故答案为：2.

【点评】本题考查实数值的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意平面向量数量积坐标运算法则和向量垂直的性质的合理运用.

14．（5分）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$（a＞0）的一条渐近线方程为$y=\frac{3}{5}x$，则a=__5__.

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用双曲线方程，求出渐近线方程，求解a即可.

【解答】解：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$（a＞0）的一条渐近线方程为$y=\frac{3}{5}x$，

可得$\frac{3}{a}=\frac{3}{5}$，解得a=5.

故答案为：5.

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，考查计算能力.

15．（5分）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知C=60°，$b=\sqrt{6}$，c=3，则A=__75°__.

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4O：定义法；58：解三角形.

【分析】根据正弦定理和三角形的内角和计算即可

【解答】解：根据正弦定理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，C=60°，$b=\sqrt{6}$，c=3，

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∵b＜c，

∴B=45°，

∴A=180°﹣B﹣C=180°﹣45°﹣60°=75°，

故答案为：75°.

【点评】本题考查了三角形的内角和以及正弦定理，属于基础题

16．（5分）设函数f（x）=$\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，则满足f（x）+f（x﹣$\frac{1}{2}$）＞1的x的取值范围是____（$-\frac{1}{4}$，+∞）____.

【考点】3T：函数的值.

【专题】32：分类讨论；4R：转化法；51：函数的性质及应用.

【分析】根据分段函数的表达式，分别讨论x的取值范围，进行求解即可.

【解答】解：若x≤0，则x﹣$\frac{1}{2}$≤﹣$\frac{1}{2}$，

则f（x）+f（x﹣$\frac{1}{2}$）＞1等价为x+1+x﹣$\frac{1}{2}$+1＞1，即2x＞﹣$\frac{1}{2}$，则x＞$-\frac{1}{4}$，

此时$-\frac{1}{4}$＜x≤0，

当x＞0时，f（x）=$2^x$＞1，x﹣$\frac{1}{2}$＞﹣$\frac{1}{2}$，

当x﹣$\frac{1}{2}$＞0即x＞$\frac{1}{2}$时，满足f（x）+f（x﹣$\frac{1}{2}$）＞1恒成立，

当0≥x﹣$\frac{1}{2}$＞﹣$\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{2}$≥x＞0时，f（x﹣$\frac{1}{2}$）=x﹣$\frac{1}{2}$+1=x+$\frac{1}{2}$＞$\frac{1}{2}$，

此时f（x）+f（x﹣$\frac{1}{2}$）＞1恒成立，

综上x＞$-\frac{1}{4}$，

故答案为：（$-\frac{1}{4}$，+∞）.

【点评】本题主要考查不等式的求解，结合分段函数的不等式，利用分类讨论的数学思想进行求解是解决本题的关键.

## 三、解答题

17．（12分）设数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+\ldots+（2n-1）a_n=2n$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{\frac{a_n}{2n+1}\}$的前n项和．

【考点】8E：数列的求和；8H：数列递推式．

【专题】34：方程思想；35：转化思想；54：等差数列与等比数列．

【分析】（1）利用数列递推关系即可得出．

（2）$\frac{a_n}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$．利用裂项求和方法即可得出．

【解答】解：（1）数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+\ldots+（2n-1）a_n=2n$．

$n\geq2$时，$a_1+3a_2+\ldots+（2n-3）a_{n-1}=2（n-1）$．

$\therefore（2n-1）a_n=2$．$\therefore a_n=\frac{2}{2n-1}$．

当$n=1$时，$a_1=2$，上式也成立．

$\therefore a_n=\frac{2}{2n-1}$．

（2）$\frac{a_n}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$．

$\therefore$数列$\{\frac{a_n}{2n+1}\}$的前n项和$=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$．

【点评】本题考查了数列递推关系、裂项求和方法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

18．（12分）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶4元，售价每瓶6元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶2元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于25，需求量为500瓶；如果最高气温位于区间[20，25），需求量为300瓶；如果最高气温低于20，需求量为200瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

| 最高气温 | [10，15） | [15，20） | [20，25） | [25，30） | [30，35） | [35，40） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 天数 | 2 | 16 | 36 | 25 | 7 | 4 |

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率.

（1）求六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率；

（2）设六月份一天销售这种酸奶的利润为Y（单位：元），当六月份这种酸奶一天的进货量为450瓶时，写出Y的所有可能值，并估计Y大于零的概率.

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式；CH：离散型随机变量的期望与方差.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5I：概率与统计.

【分析】（1）由前三年六月份各天的最高气温数据，求出最高气温位于区间[20，25）和最高气温低于20的天数，由此能求出六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率.

（2）当温度大于等于25°C时，需求量为500，求出Y=900元；当温度在[20，25）°C时，需求量为300，求出Y=300元；当温度低于20°C时，需求量为200，求出Y=﹣100元，从而当温度大于等于20时，Y＞0，由此能估计估计Y大于零的概率.

【解答】解：（1）由前三年六月份各天的最高气温数据，

得到最高气温位于区间[20，25）和最高气温低于20的天数为2+16+36=54，

根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关.

如果最高气温不低于25，需求量为500瓶，

如果最高气温位于区间[20，25），需求量为300瓶，

如果最高气温低于20，需求量为200瓶，

∴六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率$p=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$.

（2）当温度大于等于25°C时，需求量为500，

Y=450×2=900元，

当温度在[20，25）°C时，需求量为300，

Y=300×2﹣（450﹣300）×2=300元，

当温度低于20°C时，需求量为200，

Y=400﹣（450﹣200）×2=﹣100元，

当温度大于等于20时，Y＞0，

由前三年六月份各天的最高气温数据，得当温度大于等于20°C的天数有：

90－（2+16）=72，

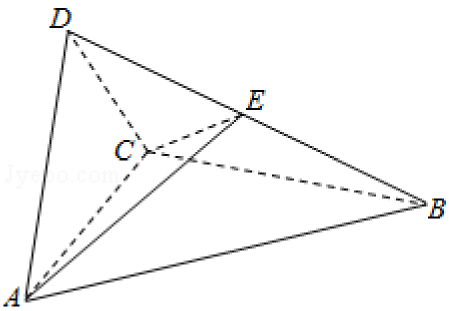
∴估计Y大于零的概率$P=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$.

【点评】本题考查概率的求法，考查利润的所有可能取值的求法，考查函数、古典概型等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题.

19．（12分）如图四面体ABCD中，△ABC是正三角形，AD=CD.

（1）证明：AC⊥BD；

（2）已知△ACD是直角三角形，AB=BD，若E为棱BD上与D不重合的点，且AE⊥EC，求四面体ABCE与四面体ACDE的体积比.




【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LW：直线与平面垂直.

【专题】11：计算题；31：数形结合；41：向量法；5F：空间位置关系与距离.

【分析】（1）取AC中点O，连结DO、BO，推导出DO⊥AC，BO⊥AC，从而AC⊥平面BDO，由此能证明AC⊥BD.

（2）法一：连结OE，设$AD=CD=\sqrt{2}$，则OC=OA=1，由余弦定理求出BE=1，由BE=ED，四面体ABCE与四面体ACDE的高都是点A到平面BCD的高h，$S_{\triangle DCE}=S_{\triangle BCE}$，由此能求出四面体ABCE与四面体ACDE的体积比．法二：设$AD=CD=\sqrt{2}$，则AC=AB=BC=BD=2，AO=CO=DO=1，$BO=\sqrt{3}$，推导出BO⊥DO，以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OD为z轴，建立空间直角坐标系，由AE⊥EC，求出DE=BE，由此能求出四面体ABCE与四面体ACDE的体积比.

【解答】证明：（1）取AC中点O，连结DO、BO，

∵△ABC是正三角形，AD=CD，

∴DO⊥AC，BO⊥AC，

∵DO∩BO=O，∴AC⊥平面BDO，

∵BD⊂平面BDO，∴AC⊥BD.

解：（2）法一：连结OE，由（1）知AC⊥平面OBD，

∵OE⊂平面OBD，∴OE⊥AC，

设AD=CD=$\sqrt{2}$，则OC=OA=1，EC=EA，

∵AE⊥CE，AC=2，∴$EC^2+EA^2=AC^2$，

∴EC=EA=$\sqrt{2}$=CD，

∴E是线段AC垂直平分线上的点，∴EC=EA=CD=$\sqrt{2}$，

由余弦定理得：

$\cos\angle CBD=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2BC\cdot BD}=\frac{BC^2+BE^2-CE^2}{2BC\cdot BE}$，

即$\frac{4+4-2}{2\times2\times2}=\frac{4+BE^2-2}{2\times2\times BE}$，解得BE=1或BE=2，

∵BE＜＜BD=2，∴BE=1，∴BE=ED，

∵四面体ABCE与四面体ACDE的高都是点A到平面BCD的高h，

∵BE=ED，∴$S_{\triangle DCE}=S_{\triangle BCE}$，

∴四面体ABCE与四面体ACDE的体积比为1.

法二：设AD=CD=$\sqrt{2}$，则AC=AB=BC=BD=2，AO=CO=DO=1，

∴BO=$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，∴$BO^2+DO^2=BD^2$，∴BO⊥DO，

以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OD为z轴，建立空间直角坐标系，

则C（﹣1，0，0），D（0，0，1），B（0，$\sqrt{3}$，0），A（1，0，0），

设E（a，b，c），$\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DB}$，（0≤λ≤1），则（a，b，c﹣1）=λ（0，$\sqrt{3}$，﹣1），解得E（0，$\sqrt{3}\lambda$，1﹣λ），

∴$\overrightarrow{CE}$=（1，$\sqrt{3}\lambda$，$1-\lambda$），$\overrightarrow{AE}$=（﹣1，$\sqrt{3}\lambda$，$1-\lambda$），

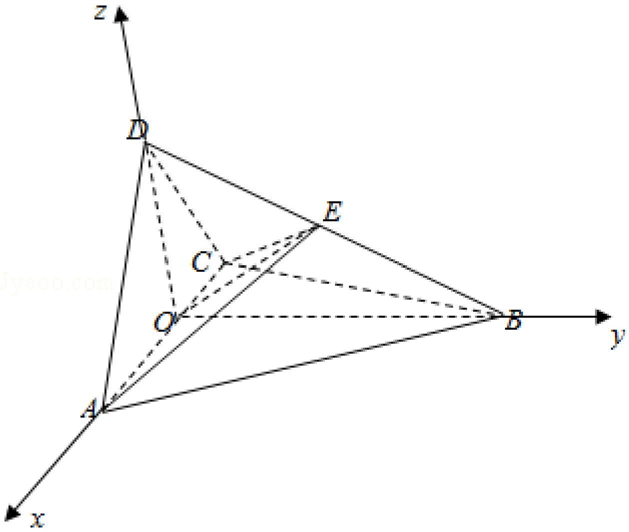
∵AE⊥EC，∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CE}$=﹣1+3$\lambda^2$+（1﹣λ）$^2$=0，

由λ∈[0，1]，解得$\lambda=\frac{1}{2}$，∴DE=BE，

∵四面体ABCE与四面体ACDE的高都是点A到平面BCD的高h，

∵DE=BE，∴$S_{\triangle DCE}=S_{\triangle BCE}$，

∴四面体ABCE与四面体ACDE的体积比为1．




【点评】本题考查线线垂直的证明，考查两个四面体的体积之比的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题．

20．（12分）在直角坐标系xOy中，曲线$y=x^2+mx-2$与x轴交于A、B两点，点C的坐标为（0，1），当m变化时，解答下列问题：

（1）能否出现AC⊥BC的情况？说明理由；

（2）证明过A、B、C三点的圆在y轴上截得的弦长为定值．

【考点】KJ：圆与圆锥曲线的综合．

【专题】34：方程思想；43：待定系数法；5B：直线与圆．

【分析】（1）设曲线$y=x^2+mx-2$与x轴交于A（$x_1$，0），B（$x_2$，0），运用韦达定理，再假设AC⊥BC，运用直线的斜率之积为－1，即可判断是否存在这样的情况；

（2）设过A、B、C三点的圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（$D^2+E^2-4F>0$），由题意可得D=m，F=－2，代入（0，1），可得E=1，再令x=0，即可得到圆在y轴的交点，进而得到弦长为定值．

【解答】解：（1）曲线$y=x^2+mx-2$与x轴交于A、B两点，

可设A（$x_1$，0），B（$x_2$，0），

由韦达定理可得$x_1x_2=-2$，

若AC⊥BC，则$k_{AC}•k_{BC}=-1$，

即有$\frac{1-0}{0-x_1}•\frac{1-0}{0-x_2}=-1$，

即为$x_1x_2=-1$这与$x_1x_2=-2$矛盾，

故不出现AC⊥BC的情况；

（2）证明：设过A、B、C三点的圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（$D^2+E^2-4F>0$），

由题意可得y=0时，$x^2+Dx+F=0$与$x^2+mx-2=0$等价，

可得D=m，F=﹣2，

圆的方程即为$x^2+y^2+mx+Ey-2=0$，

由圆过C（0，1），可得0+1+0+E﹣2=0，可得E=1，

则圆的方程即为$x^2+y^2+mx+y-2=0$，

另解：设过A、B、C三点的圆在y轴上的交点为H（0，d），

则由相交弦定理可得|OA|•|OB|=|OC|•|OH|，

即有2=|OH|，

再令x=0，可得$y^2+y-2=0$，

解得y=1或﹣2．

即有圆与y轴的交点为（0，1），（0，﹣2），

则过A、B、C三点的圆在y轴上截得的弦长为定值3．

【点评】本题考查直线与圆的方程的求法，注意运用韦达定理和直线的斜率公式，以及待定系数法，考查方程思想和化简整理的运算能力，属于中档题．

21．（12分）已知函数f（x）$=\ln x+ax^2+(2a+1)x$．

（1）讨论f（x）的单调性；

（2）当a＜0时，证明f（x）$\leq -\frac{3}{4a}-2$．

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6E：利用导数研究函数的最值．

【专题】11：计算题；32：分类讨论；48：分析法；53：导数的综合应用．

【分析】（1）题干求导可知$f'(x)=\frac{(2ax+1)(x+1)}{x}$（$x>0$），分$a=0$、$a>0$、$a<0$三种情况讨论$f'(x)$与0的大小关系可得结论；

（2）通过（1）可知$f(x)_{max}=f(-\frac{1}{2a})=-1-\ln 2-\frac{1}{4a}+\ln(-\frac{1}{a})$，进而转化可知问题转化为证明：当$t>0$时$-\frac{1}{2}t+\ln t\leq-1+\ln 2$．进而令$g(t)=-\frac{1}{2}t+\ln t$，利用导数求出$y=g(t)$的最大值即可．

【解答】（1）解：因为$f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$，

求导$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+(2a+1)=\frac{2ax^2+(2a+1)x+1}{x}=\frac{(2ax+1)(x+1)}{x}$，（$x>0$），

①当$a=0$时，$f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$恒成立，此时$y=f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

②当$a>0$，由于$x>0$，所以$(2ax+1)(x+1)>0$恒成立，此时$y=f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

③当$a<0$时，令$f'(x)=0$，解得：$x=-\frac{1}{2a}$．

因为当$x\in(0,-\frac{1}{2a})$ $f'(x)>0$、当$x\in(-\frac{1}{2a},+\infty)$ $f'(x)<0$，

所以$y=f(x)$在$(0,-\frac{1}{2a})$上单调递增、在$(-\frac{1}{2a},+\infty)$上单调递减．

综上可知：当$a\geq0$时$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$a<0$时，$f(x)$在$(0,-\frac{1}{2a})$上单调递增、在$(-\frac{1}{2a},+\infty)$上单调递减；

（2）证明：由（1）可知：当$a<0$时$f(x)$在$(0,-\frac{1}{2a})$上单调递增、在$(-\frac{1}{2a},+\infty)$上单调递减，

所以当$x=-\frac{1}{2a}$时函数$y=f(x)$取最大值$f(x)_{max}=f(-\frac{1}{2a})=-1-\ln 2-\frac{1}{4a}+\ln(-\frac{1}{a})$．

从而要证$f(x)\leq-\frac{3}{4a}-2$，即证$f(-\frac{1}{2a})\leq-\frac{3}{4a}-2$，

即证$-1-\ln 2-\frac{1}{4a}+\ln(-\frac{1}{a})\leq-\frac{3}{4a}-2$，即证$-\frac{1}{2}(-\frac{1}{a})+\ln(-\frac{1}{a})\leq-1+\ln 2$．

令$t=-\frac{1}{a}$，则$t>0$，问题转化为证明：$-\frac{1}{2}t+\ln t\leq-1+\ln 2$．…（*）

令$g(t)=-\frac{1}{2}t+\ln t$，则$g'(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{t}$，

令g′（t）=0可知t=2，则当0＜t＜2时g′（t）＞0，当t＞2时g′（t）＜0，

所以y=g（t）在（0，2）上单调递增、在（2，+∞）上单调递减，

即g（t）≤g（2）=－$\frac{1}{2}$×2+ln2=－1+ln2，即（*）式成立，

所以当a＜0时，f（x）≤－$\frac{3}{4a}$－2成立．

【点评】本题考查利用导数研究函数的单调性，考查分类讨论的思想，考查转化能力，考查运算求解能力，注意解题方法的积累，属于中档题．

[选修4-4：坐标系与参数方程]

22．（10分）在直角坐标系xOy中，直线$l_1$的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\\y=kt\end{cases}$，（t为参数），直线$l_2$的参数方程为$\begin{cases}x=-2+m\\y=\frac{m}{k}\end{cases}$，（m为参数）．设$l_1$与$l_2$的交点为P，当k变化时，P的轨迹为曲线C．

（1）写出C的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，设$l_3$：ρ（cosθ+sinθ）－$\sqrt{2}$=0，M为$l_3$与C的交点，求M的极径．

【考点】QH：参数方程化成普通方程．

【专题】34：方程思想；4Q：参数法；4R：转化法；5S：坐标系和参数方程．

【分析】解：（1）分别消掉参数t与m可得直线$l_1$与直线$l_2$的普通方程为y=k（x－2）①与x=－2+ky②；联立①②，消去k可得C的普通方程为$x^2$－$y^2$=4；

（2）将$l_3$的极坐标方程为ρ（cosθ+sinθ）－$\sqrt{2}$=0化为普通方程：x+y－$\sqrt{2}$=0，再与曲线C的方程联立，可得$\begin{cases}x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，即可求得$l_3$与C的交点M的极径为ρ=$\sqrt{5}$．

【解答】解：（1）∵直线$l_1$的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\\y=kt\end{cases}$，（t为参数），

∴消掉参数t得：直线$l_1$的普通方程为：y=k（x－2）①；

又直线$l_2$的参数方程为$\begin{cases}x=-2+m\\ y=\dfrac{m}{k}\end{cases}$，（m为参数），

同理可得，直线$l_2$的普通方程为：$x=-2+ky$②；

联立①②，消去k得：$x^2-y^2=4$，即C的普通方程为$x^2-y^2=4$（$x\neq2$且$y\neq0$）；

（2）∵$l_3$的极坐标方程为$\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，

∴其普通方程为：$x+y-\sqrt{2}=0$，

联立$\begin{cases}x+y=\sqrt{2}\\ x^2-y^2=4\end{cases}$得：$\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，

∴$\rho^2=x^2+y^2=\dfrac{18}{4}+\dfrac{2}{4}=5$.

∴$l_3$与C的交点M的极径为$\rho=\sqrt{5}$.

【点评】本题考查参数方程与极坐标方程化普通方程，考查函数与方程思想与等价转化思想的运用，属于中档题.

[选修4-5：不等式选讲]

23．已知函数$f(x)=|x+1|-|x-2|$.

（1）求不等式$f(x)\geq1$的解集；

（2）若不等式$f(x)\geq x^2-x+m$的解集非空，求m的取值范围.

【考点】R4：绝对值三角不等式；R5：绝对值不等式的解法.

【专题】32：分类讨论；33：函数思想；4C：分类法；4R：转化法；51：函数的性质及应用；5T：不等式.

【分析】（1）由于$f(x)=|x+1|-|x-2|=\begin{cases}-3, & x<-1\\ 2x-1, & -1\leq x\leq2\\ 3, & x>2\end{cases}$，解不等式$f(x)\geq1$可分$-1\leq x\leq2$与$x>2$两类讨论即可解得不等式$f(x)\geq1$的解集；

（2）依题意可得$m\leq[f(x)-x^2+x]_{max}$，设$g(x)=f(x)-x^2+x$，分$x\leq1$、$-1<x<2$、$x\geq2$三类讨论，可求得$g(x)_{max}=\dfrac{5}{4}$，从而可得m的取值范围.

【解答】解：（1）∵f（x）=|x+1|－|x－2|=$\begin{cases}-3, & x<-1\\ 2x-1, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 3, & x>2\end{cases}$，f（x）≥1，

∴当－1≤x≤2时，2x－1≥1，解得1≤x≤2；

当x＞2时，3≥1恒成立，故x＞2；

综上，不等式f（x）≥1的解集为{x|x≥1}．

（2）原式等价于存在x∈R使得f（x）－$x^2$+x≥m成立，

即m≤$[f(x)-x^2+x]_{max}$，设g（x）=f（x）－$x^2$+x．

由（1）知，g（x）=$\begin{cases}-x^2+x-3, & x\leqslant -1\\ -x^2+3x-1, & -1<x<2\\ -x^2+x+3, & x\geqslant 2\end{cases}$

当x≤－1时，g（x）=－$x^2$+x－3，其开口向下，对称轴方程为x=$\frac{1}{2}$＞－1，

∴g（x）≤g（－1）=－1－1－3=－5；

当－1＜x＜2时，g（x）=－$x^2$+3x－1，其开口向下，对称轴方程为x=$\frac{3}{2}$∈（－1，2），

∴g（x）≤g（$\frac{3}{2}$）=－$\frac{9}{4}$+$\frac{9}{2}$－1=$\frac{5}{4}$；

当x≥2时，g（x）=－$x^2$+x+3，其开口向下，对称轴方程为x=$\frac{1}{2}$＜2，

∴g（x）≤g（2）=－4+2+3=1；

综上，$g(x)_{max}=\frac{5}{4}$，

∴m的取值范围为（－∞，$\frac{5}{4}$]．

【点评】本题考查绝对值不等式的解法，去掉绝对值符号是解决问题的关键，突出考查分类讨论思想与等价转化思想、函数与方程思想的综合运用，属于难题．