2010年普通高等学校招生全国统一考试 数学（理）

第I卷 选择题（共40分）

一、　　本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的4个选项中，选出符合题目要求的一项。

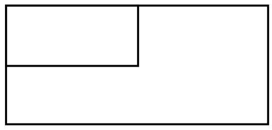
1，集合 $P=\{x\in Z\,|\,0\le x<3\},M=\{x\in R\,|\,x^2\le 9\}$，则 $P\bigcap M=$

（A）$\{1,2\}$　（B）$\{0,1,2\}$　（C）$\{x\,|\,0\le x<3\}$　（D）$\{x\,|\,0\le x\le 3\}$

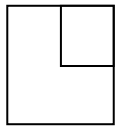
2，在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公比 $|q|\ne 1$.若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$，则 $m=$

（A）9　（B）10　（C）11　（D）12

3，一个长方体去掉一个小长方体，所得集合体的正（主）视图与侧（左）视图分别如右图所示，则该几何体的俯视图为

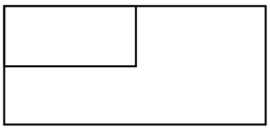


正（主）视

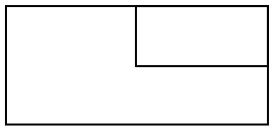


侧（左）视

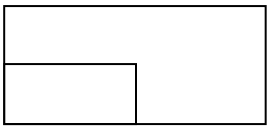
（A



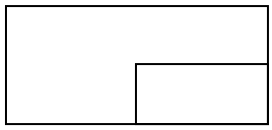
（B



（C



（D



4，8名学生和2位老师站成一排合影，2位老师不相邻的排法总数为

（A）$A_8^8A_9^2$　（B）$A_8^8C_9^2$　（C）$A_8^8A_7^2$　（D）$A_8^8C_9^2$

5，极坐标方程 $(\rho-1)(\theta-\pi)=0(\rho\ge 0)$ 表示的图形是

（A）两个圆　（B）两条直线

（C）一个圆和一条射线　（D）一条直线和一条射线

6，$\vec{a},\vec{b}$ 为非零向量，“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“函数 $f(x)=(x\vec{a}+\vec{b})\bullet(x\vec{b}-\vec{a})$ 为一次函数”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

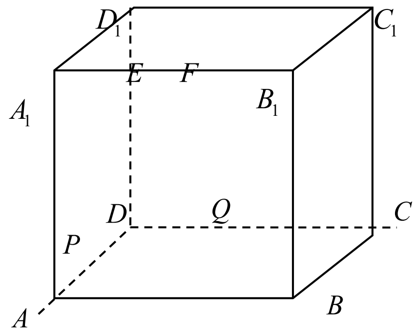
（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

7，设不等式组 $\begin{cases}x+y-11\ge 0\\3x-y+3\ge 0\\5x-3y+9\le 0\end{cases}$ 表示的平面区域为D，若指数函数 $y=a^x$ 的图象上存在

区域D上的点，则 a 的取值范围是

（A）$(1,3]$　（B）$[2,3]$　（C）$(1,2]$　（D）$[3,+\infty)$

8，如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，动点E，F在棱 A_1B_1 上，动点P，Q分别在棱 AD,CD 上，若 $EF=1,A_1E=x,DQ=y,DP=z$（x,y,z 大于零），则四面体 $PEFQ$ 的体积



（A）　与 x,y,z 都有关

（B）　与 x 有关，与 y,z 无关

（C）　与 y 有关，与 x,z 无关

（D）　与 z 有关，与 x,y 无关

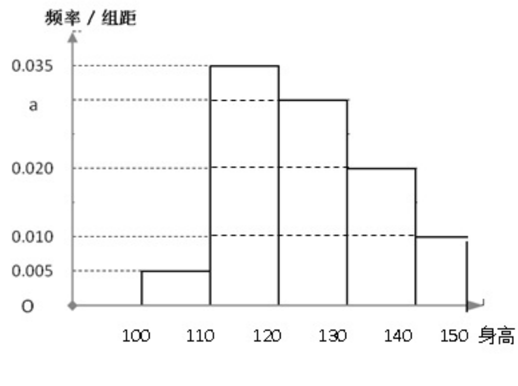
第II卷　（共110分）

二、　填空题：本大题共6小题，每题5分，共30分。

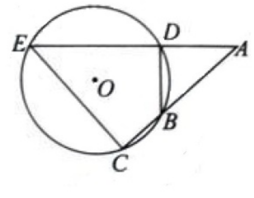
9，在复平面内，复数 $\dfrac{2i}{1-i}$ 对应的点的坐标为______

10，在 ΔABC 中，若 $b=1,c=\sqrt{3},\angle C=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $a=$________

11，从某小学随机抽取100名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图（如图），由图中数据可知 $a=$________.若要从身高在 $[120,130),[130,140),[140,150)$ 三组内的学生中，用分层抽样的方法选取18人参加一项活动，则从身高在 $[140,150]$ 内的学生中选取的人数应为________.

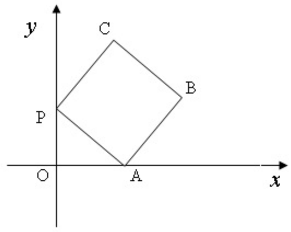


12，如图，$\odot O$ 的弦 ED,CB 的延长线交于点A，若 $BD\perp AE,AB=4,BC=2,AD=3$，则 $DE=$_____；$CE=$_____



13，已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为2，焦点与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点相同，那么双曲线的焦点坐标为______；渐近线方程为_______.

14，如图放置的边长为1的正方形 $PABC$ 沿x轴滚动，设顶点 $P(x,y)$ 的轨迹方程是 $y=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的最小正周期为_____；$y=f(x)$ 在其两个相邻零点间的图象与x轴所围区域的面积为_______.



说明："正方形 $PABC$ 沿x轴滚动"包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动.沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点A为中心顺时针旋转，当顶点 B 落在 x 轴上时，再以顶点B为中心顺时针旋转，如此继续.类似地，正方形 $PABC$ 沿x轴负方向滚动.

三、　**解答题。本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

15，（本小题共13分）

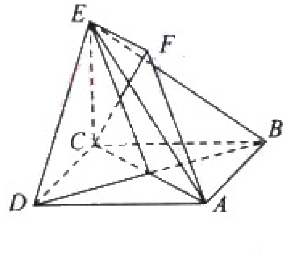
已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2 x-4\cos x,$

（I）　求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值；

（II）　求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16，（本小题共14分）

如图，正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$CE\perp AC$，$EF\ /\!/\ AC$，$AB=\sqrt{2},CE=EF=1.$



(1) 求证：$AF\ /\!/$ 平面 BDE；

(2) 求证：$CF\perp$ 平面 BDE；

(3) 求二面角 $A-BE-D$ 的大小.

17，（本小题共13分）

某同学参加3门课程的考试.假设该同学第一门课程取得的优秀成绩的概率为$\frac{4}{5}$，第二、第三门课程取得优秀成绩的概率分别为$p,q(p>q)$，且不同课程是否取得优秀成绩相互独立，记ξ为该生取得优秀成绩的课程数，其分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{6}{125}$	a	b	$\frac{24}{125}$

(1) 求该生至少有1门课程取得优秀成绩的概率；

(2) 求p,q的值；

(3) 求数学期望$E\xi$.

18，（本小题共13分）

已知函数$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{k}{2}x^2(k\geq 0)$.

(1) 当$k=2$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19，（本小题共14分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点B与点 $A(-1,1)$ 关于原点O对称，P是动点，且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.

(1) 求动点P的轨迹方程；

(2) 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M,N，问：是否存在点 P 使得 ΔPAB 与 ΔPMN 的面积相等？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

20，（本小题共13分）

已知集合

$A=\left(a_1,a_2,...,a_n\right),B=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)\in S_n$

$S_n=\left\{X\mid X=\left(x_1,x_2,...,x_n\right),x_i\in\left\{0,1\right\},i=1,2,...,n\right\}(n\geq 2)$.对于，定义 A 与 B 的差为：

$A-B=\left(\left|a_1-b_1\right|,\left|a_2-b_2\right|,...,\left|a_n-b_n\right|\right)$;

A与B之间的距离为$d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_i-b_i\right|$.

(1) 证明：$\forall A,B,C\in S_n$，有 $A-B\in S_n$，且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$；

(2) 证明：$\forall A,B,C\in S_n$，$d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数；

设 $P\subseteq S_n$，P 中有 $m(m\geq 2)$ 个元素，记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\overline{d}(P)$.证明：$\overline{d}(P)\leq\frac{mn}{2(m-1)}$

参考答案

一，选择题

B C. C. A. C. B. A. D.

二、 $2\sqrt{7}$ 填空题

9，（ -1，1）.

10， 1。

$\pi+1$ 11，0.030， 3

12，5，

13，$(\pm 4,0)$，$y=\pm\sqrt{3}x$

14， 4，

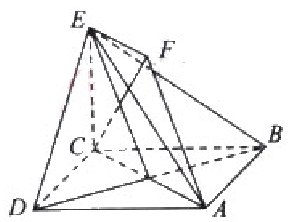
三、解答题

15（I） $f(\frac{\pi}{3})=2\cos\frac{2\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{3}-4\cos\frac{\pi}{3}=-1+\frac{3}{4}-2=-\frac{9}{4}.$

（2）
$$\begin{aligned}f(x)&=2(2\cos^2 x-1)+(1-\cos^2 x)-4\cos x\\&=3\cos^2 x-4\cos x-1\\&=3(\cos x-\frac{2}{3})^2-\frac{7}{3},x\in R\end{aligned}$$

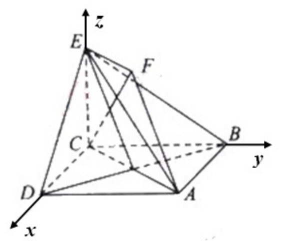
因为$\cos x\in[-1,1]$,所以当$\cos x=-1$时，$f(x)$取最大值6；当$\cos x=\frac{2}{3}$时，取最小值$-\frac{7}{3}$。

16



证明：（I）设AC与BD交于点G，因为EF∥AG，且EF=1，AG=$\frac{1}{2}$AC=1，所以四边形AGEF为平行四边形。所以AF∥EG。因为EG⊂P平面BDE，AF⊄平面BDE，所以AF∥平面BDE。

（II）因为正方形ABCD和四边形ACEF所在的平面互相垂直，且CE⊥AC，所以CE⊥AC，所以CE⊥平面ABCD。如图，以C为原点，建立空间直角坐标系C-xyz。则C（0， 0， 0），A（$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，0），D（$\sqrt{2}$，0， 0），E（0， 0， 1），F（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1）。所以$\overrightarrow{CF}$=（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1），$\overrightarrow{BE}$=（0，$-\sqrt{2}$，1），$\overrightarrow{DE}$=（$-\sqrt{2}$，0，1）。所以$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}$=



0-1+1=0，$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}$=－１＋０＋１＝０。所以CF⊥BE，CF⊥DE，所以CF⊥平面BDE

（III）由（II）知，$\overrightarrow{CF}$=（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1），是平面BDE的一个法向量，设平面ABE的法向量$\vec{n}$=（x,y,z）,则$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}$=0，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}$=0。

即$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(\sqrt{2},0,0)=0\\(x,y,z)\cdot(0,-\sqrt{2},1)=0\end{cases}$

所以x=0，且z=$\sqrt{2}$ y。令y=1，则z=$\sqrt{2}$。所以n=（$0,1,\sqrt{2}$），从而cos（$\vec{n}$，$\overrightarrow{CF}$）=

$$\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CF}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因为二面角A-BE-D为锐角，所以二面角A-BE-D为$\frac{\pi}{6}$。

17解：事件A，表示“该生第i门课程取得优异成绩”，i=1,2,3。由题意可知

$$P(A_1)=\frac{4}{5},P(A_2)=p,P(A_3)=q.$$

（I）由于事件“该生至少有一门课程取得优异成绩”与事件“$\xi=0$”是对立的，所以该生至少有一门课程取得优秀成绩的概率是

$$1-P(\xi=0)=1-\frac{6}{125}=\frac{119}{125}.$$

（II）由题意可知，

$$P(\xi=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\frac{1}{5}(1-p)(1-q)=\frac{6}{125},$$

$$p(\xi=3)=P(A_1A_2A_3)=\frac{4}{5}pq=\frac{24}{125}.$$

整理得pq=$\frac{3}{5},q=\frac{2}{5}$。

（III）由题意知，

$$a=P(\xi=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$=\frac{4}{5}(1-p)(1-q)+\frac{1}{5}p(1-q)+\frac{1}{5}(1-p)q$$

$$=\frac{37}{125}.$$

$b=P(\xi=2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=3)$

$=\dfrac{58}{125}.$

$E\xi=0\times P(\xi=0)+1\times P(\xi=1)+2\times P(\xi=2)+3\times P(\xi=3)$

$=\dfrac{9}{5}.$

18解：（I）当 $k=2$ 时， $f(x)=\ln(1+x)-x+x^2, f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+2x.$

由于 $f(1)=\ln(2), f'(1)=\dfrac{3}{2}$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$y=\ln 2=\dfrac{3}{2}(x-1)$ 。即 $3x-2y+2\ln 2-3=0$

（II） $f'(x)=\dfrac{x(kx+k-1)}{1+x}, x\in(-1,+\infty).$ 当 $k=0$ 时， $f'(x)=-\dfrac{x}{1+x}.$

因此在区间 $(-1,0)$ 上， $f'(x)>0$ ；在区间 $(0,+\infty)$ 上， $f'(x)<0$ ；

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$ ，单调递减区间为 $(0,+\infty)$ ；

当 $0<k<1$ 时， $f'(x)=\dfrac{x(kx+k-1)}{1+x}=0$ ，得 $x_1=0, x_2=\dfrac{1-k}{k}>0$ ；

因此，在区间 $\left(-1,0\right)$ 和 $(\dfrac{1-k}{k},+\infty)$ 上， $f'(x)>0$ ；在区间 $(0,\dfrac{1-k}{k})$ 上， $f'(x)<0$ ；

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-1,0\right)$ 和 $(\dfrac{1-k}{k},+\infty)$ ，单调递减区间为 $(0,\dfrac{1-k}{k})$ ；

当 $k=1$ 时， $f'(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$. $f(x)$ 的递增区间为 $(-1,+\infty)$

当 $k>1$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{x(kx+k-1)}{1+x}=0$ ，得 $x_1=0, x_2=\dfrac{1-k}{k}\in(-1,0)$ ；

因此，在区间 $(-1,\dfrac{1-k}{k})$ 和 $(0,+\infty)$ 上， $f'(x)>0$ ，在区间 $(\dfrac{1-k}{k},0)$ 上， $f'(x)<0$ ；

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-1,\dfrac{1-k}{k}\right)$ 和 $(0,+\infty)$ ，单调递减区间为 $(\dfrac{1-k}{k},0)$ 。

19，解：（1）因点B与（-1,1）关于原点对称，得B点坐标为（1，-1）。

设P点坐标为 $\left(x,y\right)$ ，则 $k_{AP}=\dfrac{y-1}{x+1}, k_{BP}=\dfrac{y+1}{x-1}$ ，由题意得 $\dfrac{y-1}{x+1}\cdot\dfrac{y+1}{x-1}=-\dfrac{1}{3}$ ，

化简得： $x^2+3y^2=4,(x\neq\pm1)$ 。即P点轨迹为： $x^2+3y^2=4,(x\neq\pm1)$

（2）因 $\angle APB=\angle MPN$ ，可得 $\sin\angle APB=\sin\angle MPN$ ，

又 $S_{\Delta APB}=\frac{1}{2}|PA||PB|\sin\angle APB, S_{\Delta MPN}=\frac{1}{2}|PM||PN|\sin\angle MPN$，

若 $S_{\Delta APB}=S_{\Delta MPN}$，则有 $|PA||PB|=|PM||PN|$，　即 $\frac{|PA|}{|PM|}=\frac{|PN|}{|PB|}$

设P点坐标为 (x_0,y_0)，则有：$\frac{|x_0+1|}{|3-x_0|}=\frac{|3-x_0|}{|x_0-1|}$ 解得：$x_0=\frac{5}{3}$，又因 $x_0^2+3y_0^2=4$，解得

$y_0=\pm\frac{\sqrt{33}}{9}$。

故存在点P使得 ΔPAB 与 ΔPMN 的面积相等，此时P点坐标为 $\left(\frac{5}{3},\frac{\sqrt{33}}{9}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{3},-\frac{\sqrt{33}}{9}\right)$

20,解：（1）设 $A=(a_1,a_2,...,a_n),B=(b_1,b_2,...,b_n),C=(c_1,c_2,...,c_n)\in S_n$

因 $a_i,b_i\in\{0,1\}$，故 $|a_i-b_i|\in\{0,1\}$，$(i=1,2,...,n)$

即 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,...,|a_n-b_n|)\in S_n$

又 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\},i=1,2,...,n.$

当 $c_i=0$ 时，有 $||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$；

当 $c_i=1$ 时，有 $||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$

故 $d(A-C,B-C)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=d(A,B)$

（2）设 $A=(a_1,a_2,...,a_n),B=(b_1,b_2,...,b_n),C=(c_1,c_2,...,c_n)\in S_n$

记 $d(A,B)=k,d(A,C)=l,d(B,C)=h$

记 $O=(0,0,...,0)\in S_n$，由第一问可知：

$$d(A,B)=d(A-A,B-A)=d(O,B-A)=k$$
$$d(A,C)=d(A-A,C-A)=d(O,C-A)=l$$
$$d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$$

即 $|b_i-a_i|$ 中1的个数为k，$|c_i-a_i|$ 中1的个数为l，$(i=1,2,...,n)$

设t是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|=1$ 成立的i的个数，则有 $h=k+l-2i$，

由此可知，k,l,h 不可能全为奇数，即 $d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数。

（3）显然P中会产生 C_m^2 个距离，也就是说 $\overline{d}(P)=\frac{1}{C_m^2}\sum_{A,B\in P}d(A,B)$，其中 $\sum_{A,B\in P}d(A,B)$ 表示P中每两个元素距离的总和。

分别考察第i个位置，不妨设P中第i个位置一共出现了 t_i 个1，

那么自然有 $m-t_i$ 个0，因此在这个位置上所产生的距离总和为 $t_i(m-t_i)\le\frac{m^2}{4},(i=1,2,\ldots,n)$

，

那么n个位置的总和 $\sum_{A,B\in P}d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}t_i(m-t_i)\le n\cdot\frac{m^2}{4}=\frac{m^2n}{4}$

即 $\overline{d}(P)=\frac{1}{C_m^2}\sum_{A,B\in P}d(A,B)\le\frac{m^2n}{4C_m^2}=\frac{mn}{2(m-1)}$