

# 2013年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）理科数学

参考公式：如果事件A、B互斥，那么  $P(A+B) = P(A) + P(B)$  如果事件A、B独立，那么  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ 。

## 第 I 卷（共60分）

一、选择题：本大题共12小题。每小题5分共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、复数  $z$  满足  $(z-3)(2-i)=5$  ( $i$  为虚数单位)，则  $z$  的共轭复数  $\bar{z}$  为

- (A)  $2+i$  (B)  $2-i$  (C)  $5+i$  (D)  $5-i$

2、已知集合  $A = \{0, 1, 2\}$ ，则集合  $B = \{x-y | x \in A, y \in A\}$  中元素的个数是

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 9

3、已知函数  $f(x)$  为奇函数，且当  $x > 0$  时， $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ，则  $f(-1) =$

- (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

4、已知三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的侧棱与底面垂直，体积为  $\frac{9}{4}$ ，底面是边长为  $\sqrt{3}$  的正三角形，若  $P$  为底面

$A_1B_1C_1$  的中心，则  $PA$  与平面  $ABC$  所成角的大小为

- (A)  $\frac{5\pi}{12}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{6}$

5、将函数  $y = \sin(2x + \varphi)$  的图象沿  $x$  轴向左平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位后，得到一个偶函数的图象，则  $\varphi$  的一个可能取值为

- (A)  $\frac{3\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C) 0 (D)  $-\frac{\pi}{4}$

6、在平面直角坐标系  $xOy$  中， $M$  为不等式组  $\begin{cases} 2x-y-2 \geq 0, \\ x+2y-1 \geq 0, \\ 3x+y-8 \leq 0 \end{cases}$  所表示的区域上一动点，则直线  $OM$

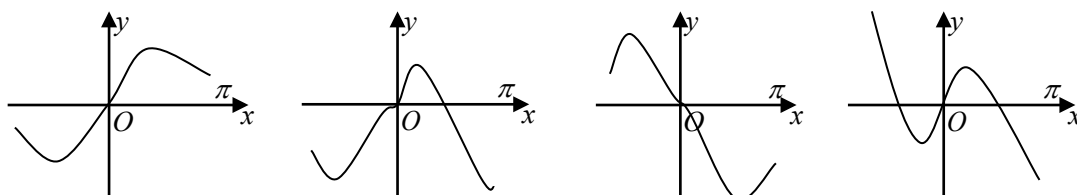
的斜率的最小值为

- (A) 2 (B) 1 (C)  $-\frac{1}{3}$  (D)  $-\frac{1}{2}$

7、给定两个命题  $p, q$ . 若  $\neg p$  是  $q$  的必要不充分条件，则  $p$  是  $\neg q$  的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8、函数  $y = x \cos x + \sin x$  的图象大致为



(A) (B) (C) (D)

9、过点  $(3,1)$  作圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  的两条切线，切点分别为  $A, B$ ，则直线  $AB$  的方程为

(A)  $2x + y - 3 = 0$  (B)  $2x - y - 3 = 0$  (C)  $4x - y - 3 = 0$  (D)  $4x + y - 3 = 0$

10、用  $0, 1, \dots, 9$  十个数字，可以组成有重复数字的三位数的个数为

(A) 243 (B) 252 (C) 261 (D) 279

11、抛物线  $C_1: y = \frac{1}{2p}x^2 (p > 0)$  的焦点与双曲线  $C_2: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  的右焦点的连线交  $C_1$  于第一象限的点  $M$ 。若

$C_1$  在点  $M$  处的切线平行于  $C_2$  的一条渐近线，则  $p =$

(A)  $\frac{\sqrt{3}}{16}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$  (C)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

12、设正实数  $x, y, z$  满足  $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$ 。则当  $\frac{xy}{z}$  取得最大值时， $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$  的最大值为

(A) 0 (B) 1 (C)  $\frac{9}{4}$  (D) 3

## 第 II 卷（共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分。

13、执行右图所示的程序框图，若输入  $c$  的值为0.25，则输出的  $n$  的值为\_\_\_\_\_。

14、在区间  $[-3, 3]$  上随机取一个数  $x$ ，

使得  $|x+1| + |x-2| \geq 1$  成立的概率为\_\_\_\_\_。

15、已知向量  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AC}$  的夹角为  $120^\circ$ ，

且  $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 2$ 。若  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ，

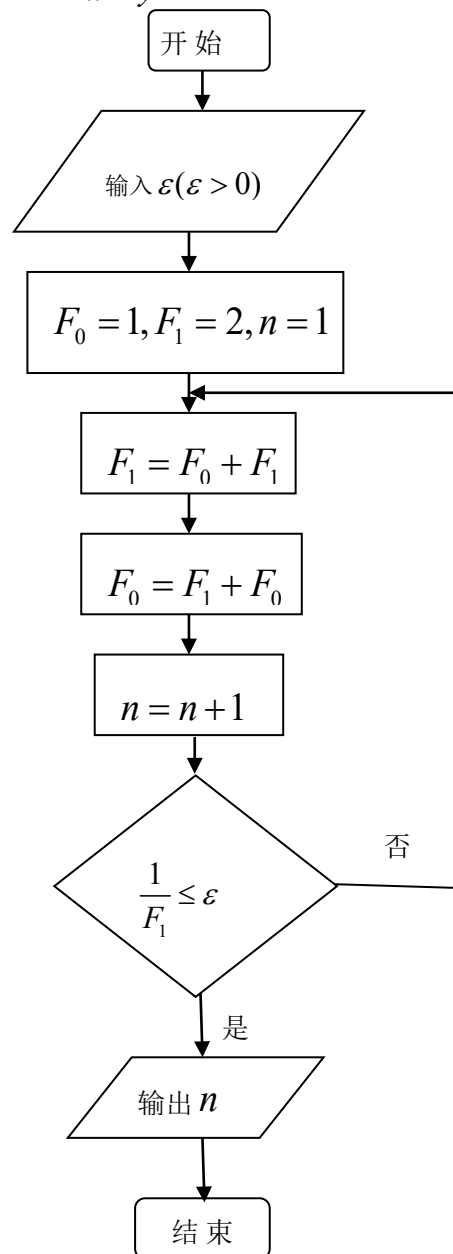
且  $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ ，则实数  $\lambda$  的值为\_\_\_\_\_。

16、定义“正对数”： $\ln^+ x = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$  现有四个命题：

①若  $a > 0, b > 0$ ，则  $\ln^+(a^b) = b \ln^+ a$ ；

②若  $a > 0, b > 0$ ，则  $\ln^+(ab) = \ln^+ a + \ln^+ b$ ；

③若  $a > 0, b > 0$ ，则  $\ln^+(\frac{a}{b}) \geq \ln^+ a - \ln^+ b$ ；



④若  $a > 0, b > 0$ ，则  $\ln^+(a+b) \leq \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2$ 。

其中的真命题有\_\_\_\_\_。（写出所有真命题的编号）

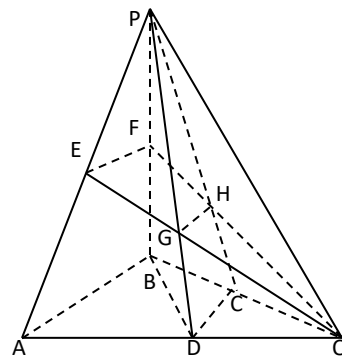
### 三、解答题：本大题共6小题，共74分。

17、（本小题满分12分）

设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，且  $a + c = 6, b = 2, \cos B = \frac{7}{9}$ 。

(I) 求  $a, c$  的值；

(II) 求  $\sin(A - B)$  的值。



18、（本小题满分12分）

如图所示，在三棱锥  $P-ABQ$  中， $PB \perp$  平面  $ABQ$ ，

$BA = BP = BQ$ ， $D, C, E, F$  分别是  $AQ, BQ, AP, BP$

的中点， $AQ = 2BD$ ， $PD$  与  $EQ$  交于点  $G$ ，

$PC$  与  $FQ$  交于点  $H$ ，连接  $GH$ 。

(I) 求证： $AB \parallel GH$ ；

(II) 求二面角  $D-GH-E$  的余弦值。

19、（本小题满分12分）

甲、乙两支球队进行比赛，约定先胜3局者获得比赛的胜利，比赛随即结束。除第五局甲队获胜的概率是  $\frac{1}{2}$

外，其余每局比赛甲队获胜的概率都是  $\frac{2}{3}$ 。假设各局比赛结果相互独立。

(I) 分别求甲队以3: 0, 3: 1, 3: 2胜利的概率；

(II) 若比赛结果为3: 0或3: 1，则胜利方得3分、对方得0分；若比赛结果为3: 2，则胜利方得2分、对方得1分。求乙队得分  $X$  的分布列和数学期望。

20、（本小题满分12分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，且 $S_4 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n + 1$ .

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ ，且 $T_n + \frac{a_n + 1}{2^n} = \lambda$ （ $\lambda$ 为常数）。令 $c_n = 2b_{2n}, (n \in N^*)$ ，求数

列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $R_n$ 。

21、（本小题满分13分）

设函数 $f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + c$ （ $e = 2.71828\ldots$  是自然对数的底数， $c \in R$ ）

（I）求 $f(x)$ 的单调区间、最大值；

（II）讨论关于 $x$ 的方程 $|\ln x| = f(x)$ 根的个数。

22、（本小题满分13分）

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别是 $F_1, F_2$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，过 $F_1$ 且垂直于 $x$ 轴

的直线被椭圆 $C$ 截得的线段长为1.

（I）求椭圆 $C$ 的方程；

（II）点 $P$ 是椭圆 $C$ 上除长轴端点外的任一点，连接 $PF_1, PF_2$ 。设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 $PM$ 交 $C$

的长轴于点 $M(m, 0)$ ，求 $m$ 的取值范围；

（III）在（II）的条件下，过点 $P$ 作斜率为 $k$ 的直线 $l$ ，使得 $l$ 与椭圆 $C$ 有且只有一个公共点。设直线

$PF_1, PF_2$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 若  $k \neq 0$ , 试证明  $\frac{1}{kk_1} + \frac{1}{kk_2}$  为定值, 并求出这个定值.