2009年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)

理 科 数 学

本试卷分第I卷和第II卷两部分,共4页，满分150分，考试时间120分钟。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1．答题前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、准考证号、县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上.，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上指定位置。

2．第I卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答案不能答在试卷上。

3．第II卷必须用0.5毫米黑色签字笔在答题卡各题的答题区域内作答;不能写在试题卷上;如需改动，先画掉原来的答案,然后再写上新的答案;不能使用涂改液、胶带纸,修正带,不按以上要求作答的答案无效。

4．填空题请直接填写答案,解答题应写出文字说明,证明过程或演算步骤.。

参考公式：

柱体的体积公式V=Sh，其中S是柱体的底面积，h是锥体的高。

锥体的体积公式V=$\frac{1}{3}Sh$，其中S是锥体的底面积，h是锥体的高。

如果事件A,B互斥,那么P(A+B)=P(A)+P(B);R如果事件A,B独立,那么P(AB)=P(A)P(B).

事件A在一次试验中发生的概率是p,那么n次独立重复试验中事件A

恰好发生k次的概率:$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$.

第I卷(共60分)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）集合$A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，若$A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则a的值为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）4

（2）复数$\dfrac{3-i}{1-i}$等于

（A）$1+2i$　　B）$1-2i$　　C）$2+i$　　D）$2-i$

（3）将函数$y=\sin 2x$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位,

再向上平移1个单位,所得图象的函数解析式是

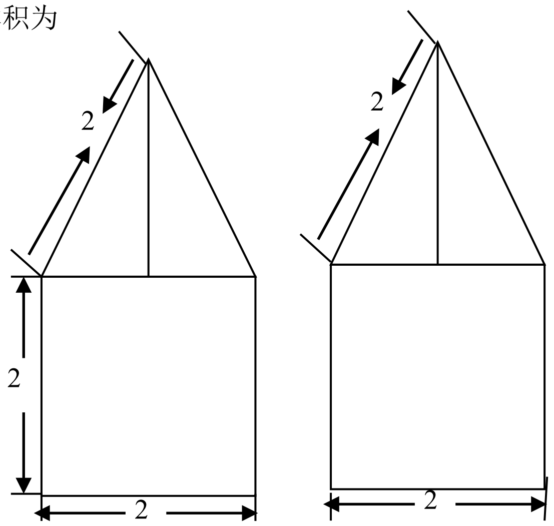
（A） $y=\cos 2x$　　　　（B） $y=2\cos^2 x$

（C） $y=1+\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$　　　（D） $y=2\sin^2 x$

（4） 一空间几何体的三视图如图所示,则该几何体的体积为

（A） $2\pi+2\sqrt{3}$　　　　（B） $4\pi+2\sqrt{3}$

（C） $2\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　（D） $4\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



正(主)视图　　侧(左)视图

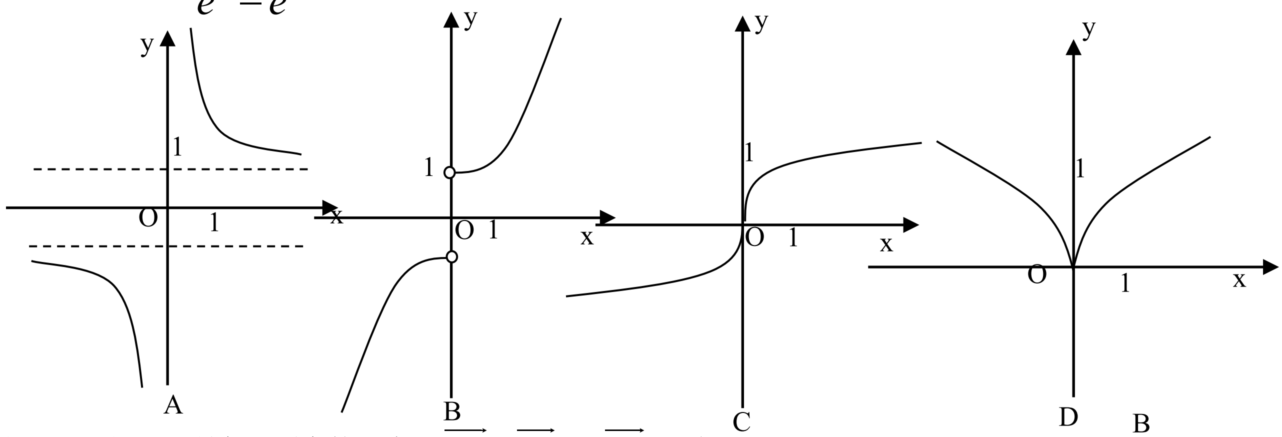
（5）

已知α，β表示两个不同的平面，m为平面α内的一条直线，则“$\alpha\perp\beta$”是“$m\perp\beta$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　　　　（D）既不充分也不必要条件

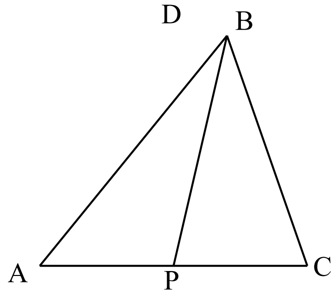
（6） 函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的图像大致为



（7）设P是△ABC所在平面内的一点， $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，则

（A） $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$　　（B） $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$

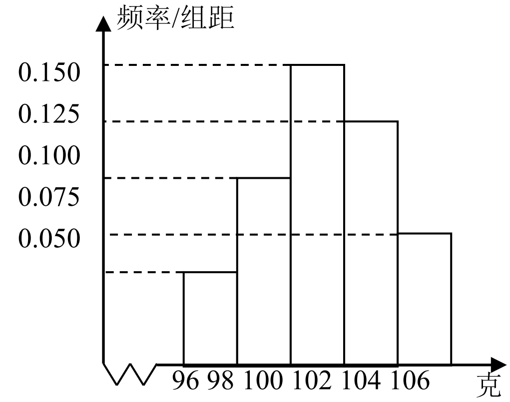
（C） $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　　（D） $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$



第7题图

(8）某工厂对一批产品进行了抽样检测.有图是根据抽样检测后的产品净重（单位：克）数据绘制的频率分布直方图，其中产品净重的范围是[96，106]，样本数据分组为[96，98），[98，100),

[100，102)，[102，104),[104，106],已知样本中产品净重小于100克的个数是36，则样本中净重大于或等于98克并且小于104克的产品的个数是



第8题图

（A）90　（B）75　（C）　60　　（D）45

(9)　　设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的一条渐近线与抛物线$y=x^2+1$只有一个公共点，则双曲线的离心率为

(A)　$\dfrac{5}{4}$　　（B）　5　　（C）　$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　　（D）$\sqrt{5}$

（10）　定义在R上的函数f(x)满足f(x)=$\begin{cases}\log_2(1-x),x\le 0\\ f(x-1)-f(x-2),x>0\end{cases}$，则$f$（2009）的值为

（A）-1　　（B）　0　　（C）1　　（D）　2

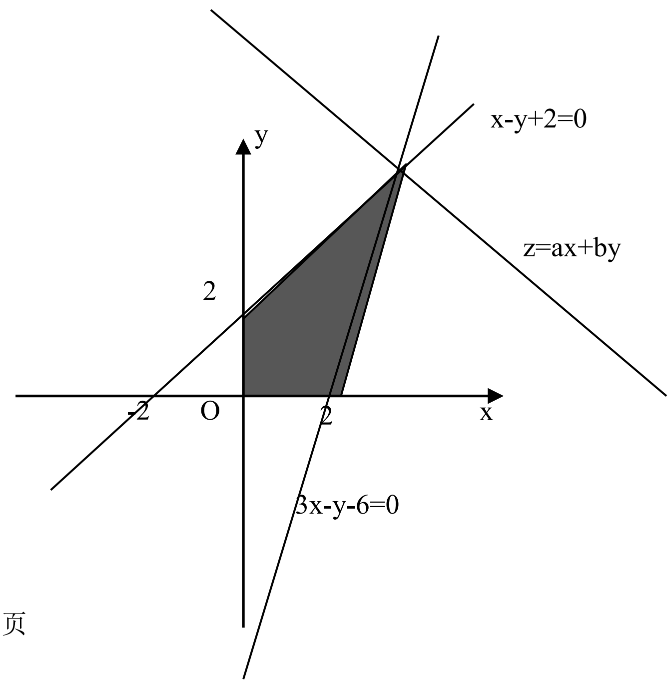
（11）在区间[-1，1]上随机取一个数x，$\cos\dfrac{\pi x}{2}$的值介于0到$\dfrac{1}{2}$之间的概率为(　　　).

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{2}{\pi}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

（12）　　设x，y满足约束条件$\begin{cases}3x-y-6\le 0\\ x-y+2\ge 0\\ x\ge 0,y\ge 0\end{cases}$，

若目标函数z=ax+by（a>0，b>0）的是最大值为12，则$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}$的最小值为(　　　　).

（A）$\dfrac{25}{6}$　（B）$\dfrac{8}{3}$　（C）　$\dfrac{11}{3}$　（D）　4



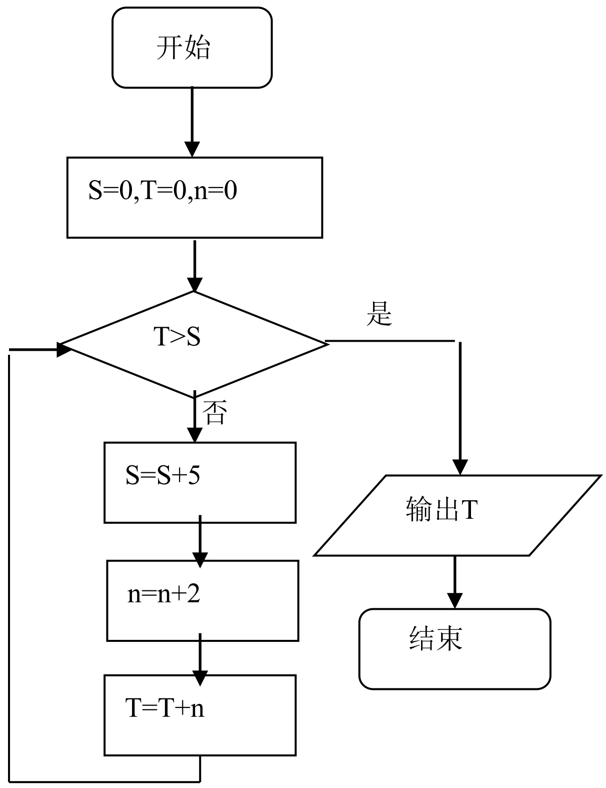
第II卷（共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分。

（13）不等式$|2x-1|-|x-2|<0$的解集为__________.

（14）若函数f(x)=a^x-x-a(a>0且a≠1)有两个零点，则实数a的取值范围是___.

（15）执行右边的程序框图，输入的T=__________.



（16）已知定义在R上的奇函数$f(x)$，满足$f(x-4)=-f(x)$,且在区间[0,2]上是增函数,若方程f(x)=m(m>0)在区间$[-8,8]$上有四个不同的根x_1,x_2,x_3,x_4,则

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

三、解答题：本大题共6分，共74分。

（17）(本小题满分12分)设函数f(x)=cos(2x+$\frac{\pi}{3}$)+$\sin^2$x.

(1) 求函数f(x)的最大值和最小正周期.

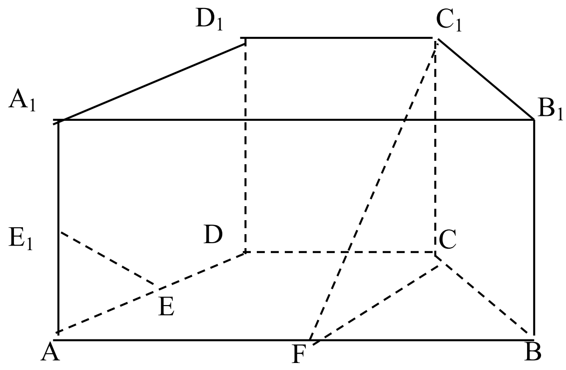
(2) 设A,B,C为ΔABC的三个内角，若cosB=$\frac{1}{3}$，f($\frac{C}{3}$)=$-\frac{1}{4}$，且C为锐角，求sinA.

（18）（本小题满分12分）

如图，在直四棱柱ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，底面ABCD为等腰梯形，AB//CD，AB=4，BC=CD=2， AA_1=2， E、E_1、F分别是棱AD、AA_1、AB的中点。

（1） 证明：直线EE_1//平面FCC_1；

（2） 求二面角B-FC_1-C的余弦值。



(19)(本小题满分12分)

在某校组织的一次篮球定点投篮训练中，规定每人最多投3次；在A处每投进一球得3分，在B处每投进一球得2分；如果前两次得分之和超过3分即停止投篮，否则投第三次，某同学在A处的命中率q_1为0.25，在B处的命中率为q_2，该同学选择先在A处投一球，以后都在B处投，用ξ表示该同学投篮训练结束后所得的总分，其分布列为

ξ	0	2	3	4	5
p	0.03	P_1	P_2	P_3	P_4

（1） 求q_2的值；

（2） 求随机变量ξ的数学期望$E\xi$；

（3） 试比较该同学选择都在B处投篮得分超过3分与选择上述方式投篮得分超过3分的概率的大小。

（20）（本小题满分12分）

等比数列{a_n}的前n项和为S_n，已知对任意的$n \in N^+$，点(n, S_n)，均在函数

$y = b^x + r(b > 0$ 且 $b \neq 1, b, r$ 均为常数)的图像上.

（1）求r的值；

（11）当b=2时，记 $b_n = 2(\log_2 a_n + 1)(n \in N^+)$

证明：对任意的$n \in N^+$ ，不等式$\frac{b_1+1}{b_1} \cdot \frac{b_2+1}{b_2} \cdots\cdots \frac{b_n+1}{b_n} > \sqrt{n+1}$成立

（21）（本小题满分12分）

两县城A和B相距20km，现计划在两县城外以AB为直径的半圆弧$\overset{\frown}{AB}$上选择一点C建造垃圾处理厂，其对城市的影响度与所选地点到城市的的距离有关，对城A和城B的总影响度为城A与城B的影响度之和，记C点到城A的距离为x

km，建在C处的垃圾处理厂对城A和城B的总影响度为y,统计调查表明：垃圾处理厂对城A的影响度与所选地点到城A的距离的平方成反比，比例系数为4；对城B的影响度与所选地点到城B的距离的平方成反比，比例系数为k

,当垃圾处理厂建在$\overset{\frown}{AB}$的中点时，对城A和城B的总影响度为0.065.

（I）将y表示成x的函数；

（II）讨论（I）中函数的单调性，并判断弧$\overset{\frown}{AB}$上是否存在一点，使建在此处的垃圾处理厂对城A和城B的总影响度最小？若存在，求出该点到城A的距离;若不存在，说明理由。

（22）（本小题满分14分）

设椭圆E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a,b>0）过M（2，$\sqrt{2}$），N($\sqrt{6}$,1)两点，O为坐标原点，

（I）求椭圆E的方程；

（II）是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆E恒有两个交点A,B,且$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$？若存在，写出该圆的方程，并求|AB |的取值范围，若不存在说明理由。

2009年高考数学山东理科解析

一、选择题

1．

【答案】D

【解题关键点】因为$A \cup B=\{0,1,2,4,16\}$.所以$a=4$,选D.

2．

【答案】C

【解题关键点】因为$\frac{3-i}{1-i}=\frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+2i}{2}=2+i$，故选C.

3．

【答案】B

【解题关键点】由题意知：平移后的函数解析式为

$y=1+2\sin 2(x+\frac{\pi}{4})=1+2\sin(2x+\frac{\pi}{2})$，

$=1+2\cos 2x=2\cos^{2} x$，选B.

4．

【答案】C

【解题关键点】由题意可知该几何体为一正四棱锥与一圆柱拼接而成的，所以改几何体的体积为这个圆柱的体积与这个正四棱锥的体积之和，其中圆柱的底面园直径为2，高为2，所以圆柱的体积为2π，正四棱锥的测棱长为2，底面正方形的对角线为2，所以此正四棱锥的体积$\frac{1}{3}\times\frac{2\times 2}{2}\times\sqrt{2^{2}-1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,为故选C.

5．

【答案】B

【解题关键点】由m为平面α内的一条直线且$m\perp\beta$得出$\alpha\perp\beta$；但是，反过来，若

$\alpha\perp\beta$且m

为平面α内的一条直线，则不一定有$m\perp\beta$，还可能有m与平面β相交但不垂直、

$m//\beta$、$m\subset\beta$.故选B.

6．

【答案】A

【解题关键点】排除法：因为当$x=0$时，函数$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$无意义，故排除$B,C,D$,故选A.

7.
【答案】B

【解题关键点】因为$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，所以点$P$为$AC$的中点，.即有$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$，故选B.

8.
【答案】A
【解题关键点】因为样品中产品净重小于100克的个数为36，所以样本容量为$\dfrac{36}{2\times(0.05+0.1)}=120$，所以样本中产品净重大于或等于98克并且小于104克的个数为$120\times(0..1\times2+0.15\times2+0.125\times2)=90$，故选A.

9.
【答案】D

【解题关键点】由题意知：双曲线$\dfrac{x^2}{a^x}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的一条渐近线为$y=\dfrac{b}{a}x$，由方程组

$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x \\ y=x^2+1 \end{cases}$消去y，得$x^2-\dfrac{b}{a}x+1=0$有唯一解，所以$\Delta=(\dfrac{b}{a})^2-4=0$，所以

$\dfrac{b}{a}=2,e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+(\dfrac{b}{a})^2}=\sqrt{5}$，故选D.

10.
【答案】C

【解题关键点】由已知得$f(-1)=\log_2 2=1,f(0)=0,f(1)=f(0)-f(-1)=-1$

$f(2)=f(1)-f(0)=-1,f(3)=f(2)-f(1)=-1-(-1)=0,$

$f(4)=f(3)-f(2)=0-(-1)=1,\ f(5)=f(4)-f(3)=1,f(6)=f(5)-f(4)=0,$

所以函数$f(x)$的值以6为周期重复性出现，所以$f(2009)=f(5)=1$，故选C

11.

【答案】A

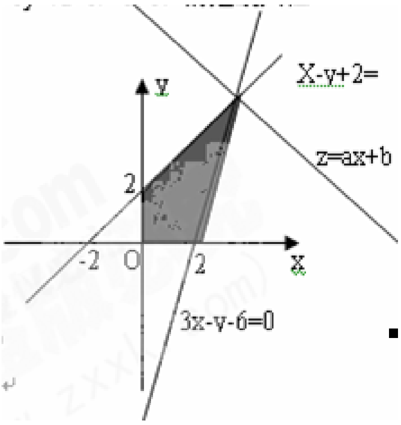
【解题关键点】当$0<\cos\frac{\pi x}{2}<\frac{1}{2}$时，在区间$\left[-1,1\right]$上，只有$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi x}{2}<-\frac{\pi}{3}$或

$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi x}{2}<\frac{\pi}{2}$，即$x \ni (-1,-\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},1)$，根据几何概型的计算方法，这个概率值是$\frac{1}{3}$.

12.

【答案】A

【解题关键点】不等式表示的平面区域如图所示的阴影部分，由题意知：



当直线$z=ax+by(a>0,b>0)$过直线$x-y+2=0$与直线

$3x-y-6=0$的交点$\left(4,6\right)$时，目标函数$z=ax+by(a>0,b>0)$

取最大值12，即$4a+6b=12$，即$2a+3b=6$，

而$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=(\frac{2}{a}+\frac{3}{b})\frac{2a+3b}{6}=\frac{13}{6}+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geq\frac{13}{6}+2=\frac{25}{6}$，当且仅

当$a=b$时取等号，故选A .

二、填空题

13.

【答案】$(-1,1)$

【解题关键点】原不等式等价于$\left|2x-1\right|<\left|x-2\right|$，两边平方并整理得：$3x^2<3$，解得

$-1<x<1$.

14.

【答案】$(1,+\infty)$

【解题关键点】$\because$函数$f(x)=a^x-x-a$ $(a>0$且$a\neq1)$有两个零点，$\because$方程

$a^x-x-a=0$有两个不相等的实数根，即两个函数$y=a^x$与$y=x+a$的图像有两个不同

的交点，当$0<a<1$时，两个函数的图像有且仅有一个交点，不合题意；当$a>1$时，两个函数的图像有两个交点，满足题意.

15.

【答案】30

【解题关键点】由框图知，S=5,n=2,T=2;

S=10,n=4,T=2+4=6;S=15,n=6,T=6+6=12;

S=20.n=8,T=12+8=20;S=25,n=10,T=20+10=30>S,输出T=30.

16.

【答案】-8

【解题关键点】因为定义在R上的奇函数，满足$f(x-4)=-f(x)$，所以$f(x-4)=f(-x)$，所以，由$f(x)$为奇函数，所以函数图像关于直线$x=2$对称且$f(0)=0$，由$f(x-4)=-f(x)$知$f(x-8)=f(x)$，所以函数是以8为周期的周期函数，又因为$f(x)$在区间$\left[0,2\right]$上是增函数，所以$f(x)$在区间$\left[-2,0\right]$上也是增函数，如下图所示，那么方程$f(x)=m(m>0)$在区间$\left[-8,8\right]$上有四个不同的根x_1,x_2,x_3,x_4，不妨设$x_1<x_2<x_3<x_4$，由对称性知，

$x_1+x_2=-4+(-4)+(-4)=-12$ ，$x_3+x_4=4$，所以$x_1+x_2+x_3+x_4=-8$.

三、解答题

17.

【答案】（I）

$$\because f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\sin^2 x=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$当$\sin 2x=-1$时，函数$f(x)$的最大值为$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，最小正周期为π.

（II）$f(\dfrac{C}{2})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C=-\dfrac{1}{4}$，得到$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又$C$为锐角，故$C=\dfrac{\pi}{3}$，

$\cos B=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

故$\sin A=\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$.

18.

【答案】解法一：（I）在在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

中，取 A_1B_1 的中点 F_1，连结 FF_1，C_1F_1 由于

$FF_1 // BB_1 // CC_1$，所以 $F_1 \in$ 平面 FCC_1，因此平面 FCC_1 即为平面 C_1CFF_1，连结 A_1D

，CF_1，由于 $\mathrm{CDA_1F_1} \overset{//}{=} \mathrm{D_1}C_1 \overset{//}{=} CD$，

所以四边形 A_1F_1CD 为平行四边形，因此 $CF_1 // A_1D$，又因为 E、E_1 分别是棱 AD、

AA_1 的中点，所以 $EE_1 // A_1D$，所以 $\mathrm{C}F_1 // EE_1$，又因为 $EE_1 \not\subset$ 平面 FCC_1，$CF_1 \subset$ 平面

FCC_1，所以直线 $EE_1 //$ 平面 FCC_1.

（II）因为 $AB=4, BC=CD=2, F$ 是棱 AB 的中点，所以 $BF=BC=CF, \Delta BDF$ 为正

三角形，取 CF 的中点 O，则 $OB \perp CF$，又因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，CC_1

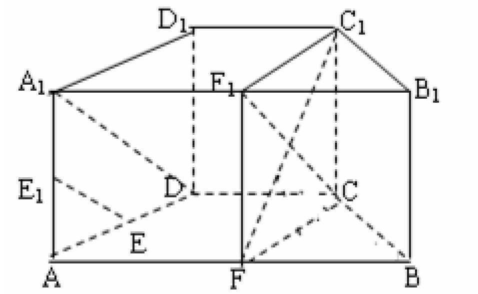
平面 $ABCD$，所以 $CC_1 \perp BO$，所以 $OB \perp$ 平面CC_1F，过 O 在平面 FCC_1 内作

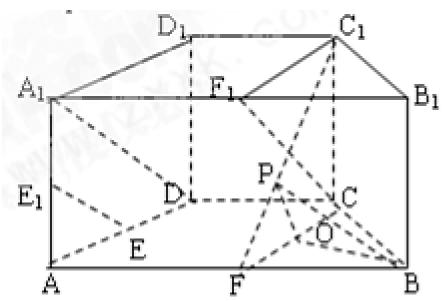
$OP \perp C_1F$，垂足为 P，连接 BP，则为 $\angle OPB$ 二面角 $B-FC_1-C$ 的一个平面角，在

ΔBCF 为正三角形中，$OB=\sqrt{3}$，在 $Rt\Delta CC_1F$ 中，$\Delta OPF \sim \Delta CC_1F$，$\because \dfrac{OP}{CC_1}=\dfrac{OF}{C_1F}$

$\therefore OP=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2^2}}\times 2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，在 $Rt\Delta OPF$ 中，$BP=\sqrt{OP^2+OB^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+3}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，

$\cos\angle OPB=\dfrac{OP}{BP}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{14}}{2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，所以二面角 $\mathrm{B\text{-}FC_1}-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

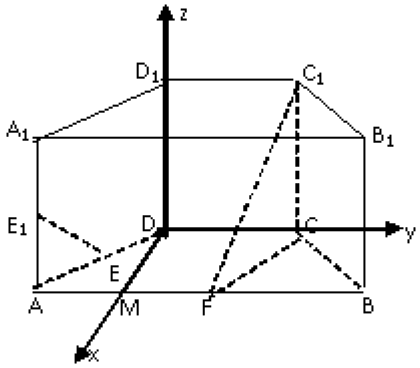




解法二:（I）因为 $AB=4, BC=CD=2, F$ 是棱 AB 的中点

所以$BF=BC=CF,\Delta BDF$，为正三角形，因为$ABCD$为

等腰梯形,所以$\angle BAC=ABC=60°$,取AF的中点M，



连接DM,则$DM\perp AB$,所以$DM\perp CD$，

以DM为x轴, DC为y轴, DD_1为z轴建立空间直

角坐标系如图所示,

则D（0,0,0），A（$\sqrt{3},-1,0$），F（$\sqrt{3},1,0$），C（$0,2,0$），

C_1（$0,2,2$），E（$\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0$），$E_1$（$\sqrt{3},-1,1$），所以

$\overrightarrow{EE_1}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1)$,$\overrightarrow{CF}=(\sqrt{3},-1,0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$ $\overrightarrow{FC_1}=(-\sqrt{3},1,2)$设平面$CC_1F$的法

向量为$\vec{n}=(x,y,z)$则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0\end{cases}$所以$\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0\\ z=0\end{cases}$取$\vec{n}=(1,\sqrt{3},0)$,则

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EE_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times1-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}+1\times0=0$,所以$\vec{n}\perp\overrightarrow{EE_1}$,所以直线$EE_1$//平面$FCC_1$.

（II）$\overrightarrow{FB}=(0,2,0)$,设平面$BFC_1$的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{FB}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{FC_1}=0\end{cases}$所以

$\begin{cases}y_1=0\\ -\sqrt{3}x_1+y_1+2z_1=0\end{cases}$，取$\overrightarrow{n_1}=(2,0,\sqrt{3})$，则

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}=2\times1-\sqrt{3}\times0+0\times\sqrt{3}=2$，

$|\vec{n}|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$,$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{2^2+0+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，

所以$\cos\langle \vec{n},\overrightarrow{n_1}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}}{|\vec{n}||\overrightarrow{n_1}|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$,由图可知二面角$\mathrm{B}\text{-}\mathrm{FC}_1-C$为锐角,所以二面角$\mathrm{B}\text{-}\mathrm{FC}_1-C$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

19.

【答案】(I)设该同学在A处投中为事件A,在B处投中为事件B,则事件A,B相互独立,且$P(A)=0.25$,$P(\overline{A})=0.75$,$P(B)=q_2$,$P(\overline{B})=1-q_2$.

根据分布列知: ξ=0时$P(\overline{A}\overline{B}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{B})=0.75(1-q_2)^2$=0.03,所以$1-q_2=0.2$,

$q_2=0.8$.

(II)当ξ=2时, $P_1=P(\overline{A}B\overline{B}+\overline{A}\overline{B}B)=P(\overline{A}B\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B}B)$

$=P(\overline{A})P(B)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(B)=0.75$, $q_2(1-q_2)\times 2=1.5$,

$q_2(1-q_2)=0.24$

当ξ=3时, $P_2=P(A\overline{B}\overline{B})=P(A)P(\overline{B})P(\overline{B})=0.25(1-q_2)^2=0.01$;

当ξ=4时, $P_3=P(\overline{A}BB)=P(\overline{A})P(B)P(B)=0.75q_2{}^2=0.48$;

当ξ=5时, $P_4=P(A\overline{B}B+AB)=P(A\overline{B}B)+P(AB)$

$=P(A)P(\overline{B})P(B)+P(A)P(B)=0.25q_2(1-q_2)+0.25q_2=0.24$

所以随机变量ξ的分布列为

ξ	0	2	3	4	5
P	0.03	0.24	0.01	0.48	0.24

随机变量ξ的数学期望

$E\xi=0\times 0.03+2\times 0.24+3\times 0.01+4\times 0.48+5\times 0.24=3.63$.

(III)该同学选择都在B处投篮得分超过3分的概率为$P(\overline{B}BB+B\overline{B}B+BB)$

$=P(\overline{B}BB)+P(B\overline{B}B)+P(BB)=2(1-q_2)q_2{}^2+q_2{}^2=0.896$;

该同学选择（I）中方式投篮得分超过3分的概率为0.48+0.24=0.72.

因此该同学选择都在 B 处投篮得分超过3分的概率大于该同学选择第一次在 A 处投以后都在 B 处投得分超过3分的概率.

20.

【答案】（I）由题意知：$S_n=b^n+r$.当 $n\geq 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=b^n+r-(b^{n-1}+r)=b^n-b^{n-1}=(b-1)b^{n-1}$，由于 $b>0$ 且 $b\neq 1$，所以当

$n\geq 2$ 时，$\{a_n\}$是以 b 为公比的等比数列，又 $a_1=S_1=b+r$ $a_2=b(b-1)$ $\frac{a_2}{a_1}=b$，，即

$\frac{b(b-1)}{b+r}=b$，解得 $r=-1$.

（II）$\because S_n=2^n-1$ $\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$，

又当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^1-1=1$，适合上式，$\therefore a_n=2^{n-1}$，

$$b_n=2(\log_2 a_n+1)=2(\log_2 2^{n-1}+1)=2n$$

$\therefore \frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}$，

下面有数学归纳法来证明不等式：

$$\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$$

证明：（1）当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{9}{4}}>\sqrt{2}=$ 右边，不等式成立.

（2）假设当 $n=k(k\in N^*)$ 时，不等式成立，即

$\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_k+1}{b_k}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2k+1}{2k}>\sqrt{k+1}$，当 $n=k+1$ 时，左边

$$\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_k+1}{b_k}\frac{b_{k+1}+1}{b_{k+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{2k+3}{2k+2},$$

$$>\sqrt{k+1}\cdot\frac{2k+3}{2k+2}=\sqrt{\frac{(2k+3)^2}{4(k+1)}}=\sqrt{\frac{4(k+1)^2+4(k+1)+1}{4(k+1)}}=\sqrt{(k+1)+1+\frac{1}{4(k+1)}}>\sqrt{(k+1)+1}$$

所以当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由（1）、（2）可得当 $n\in N^+$ 时，不等式 $\frac{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}{2^n\cdot 1\times 2\times 3\times\cdots n}>\sqrt{n+1}$ 恒成立，所以

对任意的$n\in N^{+}$，不等式$\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$成立.

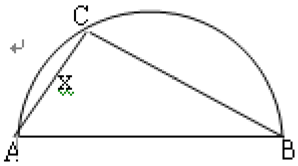
21.

【答案】（I）如右图,由题意知

$AC\perp BC$, $BC^2=400-x^2$, $y=\frac{4}{x^2}+\frac{k}{400-x^2}(0<x<20)$

当垃圾处理厂建在弧$\overset{\frown}{AB}$的中点时，垃圾处理厂到A、B的距离都相等，且为$10\sqrt{2}km$，

所以有$0.065=\frac{4}{(10\sqrt{2})^2}+\frac{k}{(10\sqrt{2})^2}$，



解得$k=9$，

$\therefore\ y=\frac{4}{x^2}+\frac{9}{400-x^2}(0<x<20)$

（II）$\because\ y=\frac{4}{x^2}+\frac{9}{400-x^2}$, $y'=-\frac{8}{x^3}-\frac{9\times(-2x)}{(400-x^2)^2}=\frac{18x^4-8(400-x^2)^2}{x^3(400-x^2)^2}$

令$y'>0$，得$x^4+640x^2-128000>0$，解得$x^2\geq 160$，即$x\geq 4\sqrt{10}$，

又因为$0<x<20$，所以函数$y=\frac{4}{x^2}+\frac{9}{400-x^2}$在$x\in(0,4\sqrt{10})$上是减函数，在

$x\in(4\sqrt{10},20)$上是增函数，

$\because$当$x=4\sqrt{10}$时，y取得最小值，

所以在弧$\overset{\frown}{AB}$上存在一点，且此点到城市A的距离为$4\sqrt{10}km$，使建在此处的垃圾处理厂对城市A、B的总影响度最小.

【解题关键点】

【结束】

22.

【答案】（I）$\because$椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$过$M$（2，$\sqrt{2}$），$N$（$\sqrt{6}$,1)两点，

$\therefore \begin{cases} \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1 \\ \dfrac{6}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \end{cases}$，解得 $a^2=8,b^2=4$，所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（II）假设存在该圆，满足条件，则要使得该圆的任意一条切线与椭圆恒有两个交点，只该圆在椭圆内部，设该圆的方程为 $x^2+y^2=r^2(r<4)$，则当直线 AB 的斜率存在时，

设该圆的切线方程为 $y=kx+m$，解方程组 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得

$x^2+2(kx+m)^2=8$,即 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$,

则 $\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-8)=8(8k^2-m^2+4)>0$,即 $8k^2-m^2+4>0$

$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2} \end{cases}$,

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{k^2(2m^2-8)}{1+2k^2}-\dfrac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$

要使 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,需使 $x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}+\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}=0$,所以 $3m^2-8k^2-8=0$,

所以 $k^2=\dfrac{3m^2-8}{8}\geq 0$ 又 $8k^2-m^2+4>0$,所以 $\begin{cases} m^2>2 \\ 3m^2\geq 8 \end{cases}$,所以 $m^2\geq\dfrac{8}{3}$,即 $m\geq\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 或

$m\leq-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，因为直线 $y=kx+m$ 为圆心在原点的圆的一条切线，所以圆的半径为

$r=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, $r^2=\dfrac{m^2}{1+k^2}=\dfrac{m^2}{1+\dfrac{3m^2-8}{8}}=\dfrac{8}{3}$, $r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,所求的圆为 $x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$,此时圆的切

线 $y=kx+m$ 都满足 $m\geq\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 或 $m\leq-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,而当切线的斜率不存在时切线为 $x=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

与椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个交点为 $(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$ 或 $(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$ 满足 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)\dfrac{8(8k^2-m^2+4)}{(1+2k^2)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{32}{3}\cdot\dfrac{4k^4+5k^2+1}{4k^4+4k^2+1}}=\sqrt{\dfrac{32}{3}[1+\dfrac{k^2}{4k^4+4k^2+1}]}$，

当$k=0$时,$|AB|=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，

当$k\neq 0$时$|AB|=\sqrt{\dfrac{32}{3}[1+\dfrac{1}{4k^2+\dfrac{1}{k^2}+4}]}$，

因为$4k^2+\dfrac{1}{k^2}+4\geq 8$所以$0<\dfrac{1}{4k^2+\dfrac{1}{k^2}+4}\leq\dfrac{1}{8}$,故$\left|AB\right|\leq\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\sqrt{\dfrac{9}{8}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

当AB的斜率不存在时,$\left|AB\right|\leq 4\sqrt{1-\dfrac{m^2}{8}}=4\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

综上，存在圆心在原点的圆$x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$，使得该圆的任意一条切线与椭圆E恒有两个交点A,B且$\left|AB\right|$的取值范围是$\left[\dfrac{4\sqrt{6}}{3},2\sqrt{3}\right]$.