

# 2014年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

## 数学（理科）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合  $M = \{-1, 0, 1\}$ ,  $N = \{0, 1, 2\}$ , 则  $M \cup N =$

- A.  $\{-1, 0, 1\}$       B.  $\{-1, 0, 1, 2\}$       C.  $\{-1, 0, 2\}$       D.  $\{0, 1\}$

2. 已知复数  $Z$  满足  $(3 + 4i)z = 25$ , 则  $Z =$

- A.  $3 - 4i$       B.  $3 + 4i$       C.  $-3 - 4i$       D.  $-3 + 4i$

3. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq x \\ x + y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$  且  $z = 2x + y$  的最大值和最小值分别为  $m$  和  $n$ , 则  $m - n =$

- A. 8      B. 7      C. 6      D. 5

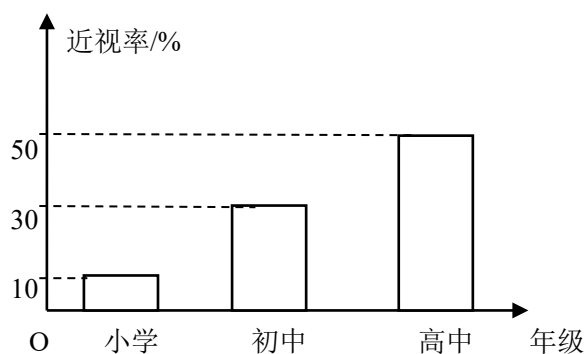
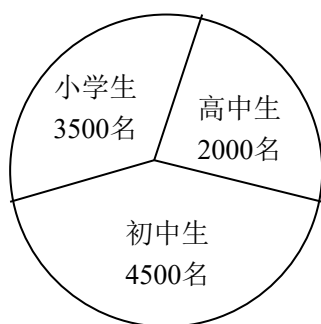
4. 若实数  $k$  满足  $0 < k < 9$ , 则曲线  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9-k} = 1$  与曲线  $\frac{x^2}{25-k} - \frac{y^2}{9} = 1$  的

- A. 离心率相等      B. 虚半轴长相等      C. 实半轴长相等      D. 焦距相等

5. 已知向量  $a = (1, 0, -1)$ , 则下列向量中与  $a$  成  $60^\circ$  夹角的是

- A.  $(-1, 1, 0)$       B.  $(1, -1, 0)$       C.  $(0, -1, 1)$       D.  $(-1, 0, 1)$

6. 已知某地区中小学生人数和近视情况分别如图1和图2所示, 为了解该地区中小学生的近视形成原因, 用分层抽样的方法抽取2%的学生进行调查, 则样本容量和抽取的高中生近视人数分别是



- A. 200, 20      B. 100, 20

- C. 200, 10      D. 100, 10

7. 若空间中四条两两不同的直线  $l_1, l_2, l_3, l_4$ , 满足  $l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3, l_3 \perp l_4$ , 则下面结论一定正确的是

- A.  $l_1 \perp l_4$       B.  $l_1 // l_4$       C.  $l_1, l_4$  既不垂直也不平行      D.  $l_1, l_4$  的位置关系不确定

8. 设集合  $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 那么集合  $A$  中满足条件“

$1 \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ ”的元素个数为

- A. 60      B. 90      C. 120      D. 130

二、填空题：本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分．

（一）必做题（9~13题）

9. 不等式  $|x - 1| + |x + 2| \geq 5$  的解集为\_\_\_\_\_。

10. 曲线  $y = e^{-5x} + 2$  在点  $(0, 3)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_。

11. 从0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9中任取七个不同的数, 则这七个数的中位数是6的概率为\_\_\_\_\_。

12. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $b \cos C + c \cos B = 2b$ , 则  $\frac{a}{b} =$ \_\_\_\_\_。

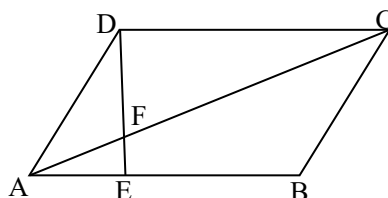
13. 若等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数，且  $a_{10}a_{11} + a_9a_{12} = 2e^5$ ，则  $\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_{20} =$  \_\_\_\_\_。

（二）选做题（14~15题，考生从中选做一题）

14. （坐标系与参数方程选做题）在极坐标系中，曲线  $C_1$  和  $C_2$  的方程分别为  $\rho \sin^2 \theta = \cos \theta$  和  $\rho \sin \theta = 1$ ，以极点为平面直角坐标系的原点，极轴为  $x$  轴正半轴，建立平面直角坐标系，则曲线  $C_1$  和  $C_2$  交点的直角坐标为\_\_\_\_\_。

15. （几何证明选讲选做题）如图3,在平行四边形  $ABCD$  中，点  $E$  在  $AB$  上且  $EB = 2AE$ ， $AC$  与  $DE$  交于点  $F$ ，则

$\frac{\Delta CDF \text{ 的面积}}{\Delta AEF \text{ 的面积}} =$  \_\_\_\_\_



三、解答题：本大题共6小题，满分80分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

16. （本小题满分12分）已知函数  $f(x) = A \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ,  $x \in R$ ，且  $f(\frac{5}{12}\pi) = \frac{3}{2}$ ，

（1）求  $A$  的值；

（2）若  $f(\theta) + f(-\theta) = \frac{3}{2}$ ， $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，求  $f(\frac{3}{4}\pi - \theta)$ 。

17. （本小题满分13分）随机观测生产某种零件的某工厂25名工人的日加工零件数（单位：件），获得数据如下：30,42,41,36,44,40,37,37,25,45,29,43,31,36,49,34,33,43,38,42,32,34,46,39,36，根据上述数据得到样本的频率分布表如下：

分组	频数	频率
[25,30]	3	0.12
(30,35]	5	0.20
(35,40]	8	0.32
(40,45]	$n_1$	$f_1$
(45,50]	$n_2$	$f_2$

（1）确定样本频率分布表中  $n_1, n_2, f_1$  和  $f_2$  的值；

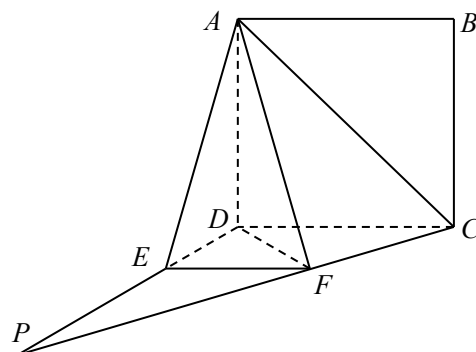
（2）根据上述频率分布表，画出样本频率分布直方图；

（3）根据样本频率分布直方图，求在该厂任取4人，至少有1人的日加工零件数落在区间  $(30,35]$  的概率。

18. (本小题满分13分) 如图4, 四边形  $ABCD$  为正方形,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\angle DPC = 30^\circ$ ,  $AF \perp PC$  于点  $F$ ,  $FE \parallel CD$ , 交  $PD$  于点  $E$ .

(1) 证明:  $CF \perp$  平面  $ADF$

(2) 求二面角  $D-AF-E$  的余弦值.



19. (本小题满分14分) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  和为  $S_n$ , 满足  $S_n = 2na_{n+1} - 3n^2 - 4n, n \in N^*$ , 且  $S_3 = 15$ ,

(1) 求  $a_1, a_2, a_3$  的值;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

20. (本小题满分14分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $(\sqrt{5}, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 若动点  $P(x_0, y_0)$  为椭圆外一点, 且点  $P$  到椭圆  $C$  的两条切线相互垂直, 求点  $P$  的轨迹方程.

21. (本小题满分14分) 设函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 2x + k)^2 + 2(x^2 + 2x + k) - 3}}$ , 其中  $k < -2$ ,

(1) 求函数  $f(x)$  的定义域  $D$  (用区间表示);

(2) 讨论函数  $f(x)$  在  $D$  上的单调性;

(3) 若  $k < -6$ , 求  $D$  上满足条件  $f(x) > f(1)$  的  $x$  的集合 (用区间表示)。

# 2014年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

## 数学（理科） 答案

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合  $M = \{-1, 0, 1\}$ ,  $N = \{0, 1, 2\}$ , 则  $M \cup N =$  (B)

- A.  $\{-1, 0, 1\}$       B.  $\{-1, 0, 1, 2\}$       C.  $\{-1, 0, 2\}$       D.  $\{0, 1\}$

2. 已知复数  $Z$  满足  $(3 + 4i)z = 25$ , 则  $Z =$  (A)

- A.  $3 - 4i$       B.  $3 + 4i$       C.  $-3 - 4i$       D.  $-3 + 4i$

3. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq x \\ x + y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$  且  $z = 2x + y$  的最大值和最小值分别为  $m$  和  $n$ , 则  $m - n =$  (C)

- A. 8      B. 7      C. 6      D. 5

4. 若实数  $k$  满足  $0 < k < 9$ , 则曲线  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9-k} = 1$  与曲线  $\frac{x^2}{25-k} - \frac{y^2}{9} = 1$  的 (D)

- A. 离心率相等      B. 虚半轴长相等      C. 实半轴长相等      D. 焦距相等

5. 已知向量  $a = (1, 0, -1)$ , 则下列向量中与  $a$  成  $60^\circ$  夹角的是 (B)

- A.  $(-1, 1, 0)$       B.  $(1, -1, 0)$       C.  $(0, -1, 1)$       D.  $(-1, 0, 1)$

6. 已知某地区中小学生人数和近视情况分别如图1和图2所示，为了解该地区中小学生的近视形成原因，用分层抽样的方法抽取2%的学生进行调查，则样本容量和抽取的高中生近视人数分别为 (A)

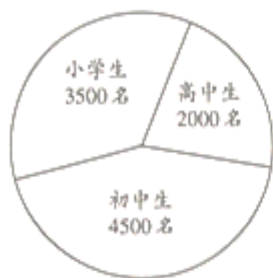


图 1

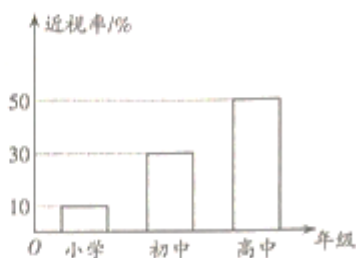


图 2

- A. 200, 20      B. 100, 20      C. 200, 10      D. 100, 10

7. 若空间中四条两两不同的直线  $l_1, l_2, l_3, l_4$  满足  $l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3, l_3 \perp l_4$ , 则下列结论一定正确的是 (D)

- A.  $l_1 \perp l_4$       B.  $l_1 // l_4$       C.  $l_1, l_4$  既不垂直也不平行      D.  $l_1, l_4$  的位置关系不确定

8. 设集合  $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ ，那么集合A中满足条件“

$1 \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ ”的元素个数为 (D)

A. 60                  B. 90                  C. 120                  D. 130

8.解：A中元素为有序数组 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ，题中要求有序数组的5个数中仅1个数为 $\pm 1$ 、仅2个数为 $\pm 1$ 或仅3个数为 $\pm 1$ ，所以共有  $C_5^1 \times 2 + C_5^2 \times 2 \times 2 + C_5^3 \times 2 \times 2 \times 2 = 130$  个不同数组；

二、填空题：本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分。

(一) 必做题 (9~13题)

9. 不等式  $|x-1| + |x+2| \geq 5$  的解集为  $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ 。

10. 曲线  $y = e^{-5x} + 2$  在点  $(0, 3)$  处的切线方程为  $y = -5x + 3$ 。

11. 从0,1,2,3,4,5,6,7,8, 9中任取七个不同的数，则这七个数的中位数是6的概率为  $\frac{1}{6}$ 。

11.解：6之前6个数中取3个，6之后3个数中取3个， $P = \frac{C_6^3 \cdot C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

12. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ ，已知  $b \cos C + c \cos B = 2b$ ，则  $\frac{a}{b} = \underline{2}$ 。

13. 若等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数，且  $a_{10}a_{11} + a_9a_{12} = 2e^5$ ，

则  $\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_{2n} = \underline{50}$ 。

(二) 选做题 (14~15题，考生从中选做一题)

14、(坐标与参数方程选做题) 在极坐标系中，曲线  $C_1$  和  $C_2$  的方程分别为  $\rho \sin^2 \theta = \cos \theta$  和

$\rho \sin \theta = 1$ ，以极点为平面直角坐标系的原点，极轴为x轴的正半轴，建立平面直角坐标系，则曲线  $C_1$  和  $C_2$  的交点的直角坐标为  $(1, 1)$ 。

15、(几何证明选讲选做题) 如图3，在平行四边形ABCD中，点E在AB上且  $EB = 2AE$ ，AC与DE交于点F，则  $\frac{\triangle CDF \text{的面积}}{\triangle AEF \text{的面积}} = \underline{9}$ 。

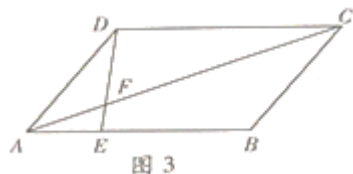


图 3

三、解答题：本大题共6小题，满分80分。解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤。

16、（12分）已知函数  $f(x) = A \sin(x + \frac{\pi}{4}), x \in R$ ，且  $f(\frac{5}{12}\pi) = \frac{3}{2}$ ，

（1）求  $A$  的值；

（2）若  $f(\theta) + f(-\theta) = \frac{3}{2}$ ， $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，求  $f(\frac{3}{4}\pi - \theta)$ 。

16.解：（1） $f(\frac{5\pi}{12}) = A \sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ ， $A = \sqrt{3}$ ； $f(-\theta) = f(\theta)$

（2） $f(\theta) + f(-\theta) = \sqrt{3} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{3} \sin(-\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore \sqrt{3} [\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta + \cos \theta) + \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sin \theta + \cos \theta)] = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore \sqrt{6} \cos \theta = \frac{3}{2}$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，又  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，

$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ ，

$f(\frac{3}{4}\pi - \theta) = \sqrt{3} \sin(\pi - \theta) = \sqrt{3} \sin \theta = \frac{\sqrt{30}}{4}$ 。

17、（13分）随机观测生产某种零件的某工厂25名工人的日加工零件数（单位：件），获得数据如下：30,42,41,36,44,40,37,37,25,45,29,43,31,36,49,34,33,43,38,42,32,34,46,39,36.

根据上述数据得到样本的频率分布表如下：

分组	频数	频率
[25,30]	3	0.12
(30,35]	5	0.20
(35,40]	8	0.32
(40,45]	$n_1$	$f_1$
(45,50]	$n_2$	$f_2$

（1）确定样本频率分布表中  $n_1, n_2, f_1$  和  $f_2$  的值；

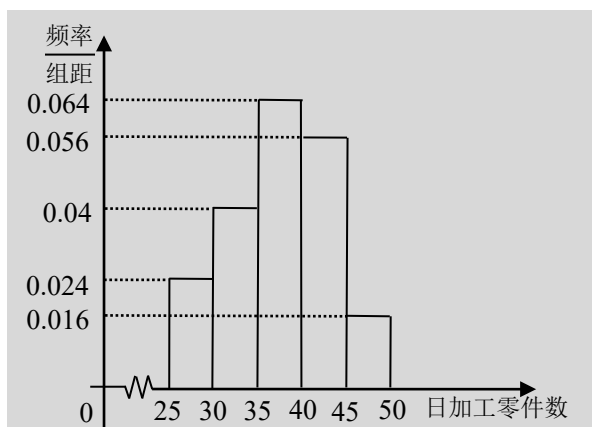
（2）根据上述频率分布表，画出样本频率分布直方图；

（3）根据样本频率分布直方图，求在该厂任取4人，至少有1人的日加工零件数落在区间（30, 50]

的概率。

17.解：（1） $n_1 = 7, n_2 = 2, f_1 = 0.28, f_2 = 0.08$ ；

（2）样本频率分布直方图为



(3) 根据样本频率分布直方图, 每人的日加工零件数落在区间  $(30, 35]$  的概率 0.2, 设所取的 4 人中, 日加工零件数落在区间  $(30, 35]$  的人数为  $\xi$ , 则  $\xi \sim B(4, 0.2)$ ,  $P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - (1 - 0.2)^4 = 1 - 0.4096 = 0.5904$ , 所以 4 人中, 至少有 1 人的日加工零件数落在区间  $(30, 50]$  的概率约为 0.5904.

18、(13分) 如图4, 四边形ABCD为正方形,  $PD \perp$  平面ABCD,  $\angle DPC = 30^\circ$ ,  $AF \perp$  式PC于点F,  $FE \parallel CD$ , 交PD于点E.

(1) 证明:  $CF \perp$  平面ADF;

(2) 求二面角D-AF-E的余弦值.

18. (1)  $\because PD \perp$  平面ABCD,  $\therefore PD \perp AD$ , 又  $CD \perp AD$ ,  $PD \cap CD = D$ ,  $\therefore AD \perp$  平面PCD,  $\therefore AD \perp PC$ , 又  $AF \perp PC$ ,

$\therefore PC \perp$  平面ADF, 即  $CF \perp$  平面ADF;

(2) 设  $AB = 1$ , 则  $Rt\triangle PDC$  中,  $CD = 1$ , 又  $\angle DPC = 30^\circ$ ,  $\therefore PC = 2$ ,  $PD = \sqrt{3}$ , 由 (1) 知  $CF \perp DF$

$\therefore DF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ,

$\therefore CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{1}{2}$ , 又  $FE \parallel CD$ ,

$\therefore \frac{DE}{PD} = \frac{CF}{PC} = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 同理  $EF = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}$ ,

如图所示, 以D为原点, 建立空间直角坐标系, 则  $A(0, 0, 1)$ ,

$E(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0, 0)$ ,  $F(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, 0)$ ,  $P(\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,

设  $\vec{m} = (x, y, z)$  是平面AEF的法向量, 则  $\begin{cases} \vec{m} \perp \overrightarrow{AE} \\ \vec{m} \perp \overrightarrow{EF} \end{cases}$ , 又  $\begin{cases} \overrightarrow{AE} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, 0, 0) \\ \overrightarrow{EF} = (0, \frac{3}{4}, 0) \end{cases}$ ,

所以  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{\sqrt{3}}{4}x - z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$ , 令  $x = 4$ , 得  $z = \sqrt{3}$ ,  $\vec{m} = (4, 0, \sqrt{3})$ ,

由 (1) 知平面ADF的一个法向量  $\overrightarrow{PC} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$ , 设二面角D-AF-E的平面角为  $\theta$ , 可知  $\theta$  为锐角,

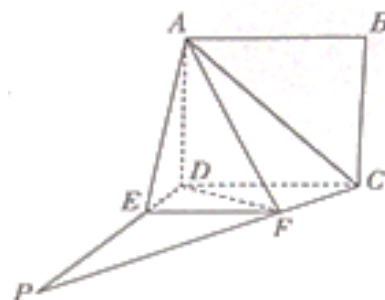
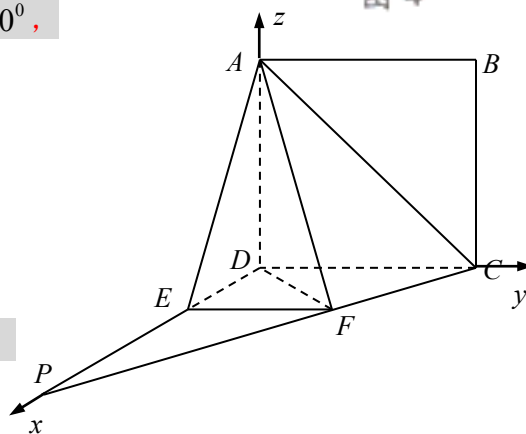


图 4





$$\cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{PC} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{PC}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{PC}|} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19} \times 2} = \frac{2\sqrt{57}}{19}, \text{ 即所求.}$$

19. (14分) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $S_n = 2na_{n+1} - 3n^2 - 4n, n \in N^*$ , 且  $S_3 = 15$ 。

(1) 求  $a_1, a_2, a_3$  的值;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

19.解:  $S_2 = 4a_3 - 20$ ,  $S_3 = S_2 + a_3 = 5a_3 - 20$ , 又  $S_3 = 15$ ,  
 $\therefore a_3 = 7$ ,  $S_2 = 4a_3 - 20 = 8$ , 又  $S_2 = S_1 + a_2 = (2a_2 - 7) + a_2 = 3a_2 - 7$ ,  
 $\therefore a_2 = 5$ ,  $a_1 = S_1 = 2a_2 - 7 = 3$ ,  
 综上知  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 7$ ;

(2) 由 (1) 猜想  $a_n = 2n + 1$ , 下面用数学归纳法证明.

① 当  $n = 1$  时, 结论显然成立;

② 假设当  $n = k$  ( $k \geq 1$ ) 时,  $a_k = 2k + 1$ ,

则  $S_k = 3 + 5 + 7 + \dots + (2k + 1) = \frac{3 + (2k + 1)}{2} \times k = k(k + 2)$ , 又  $S_k = 2ka_{k+1} - 3k^2 - 4k$ ,

$\therefore k(k + 2) = 2ka_{k+1} - 3k^2 - 4k$ , 解得  $2a_{k+1} = 4k + 6$ ,

$\therefore a_{k+1} = 2(k + 1) + 1$ , 即当  $n = k + 1$  时, 结论成立;

由 ①② 知,  $\forall n \in N^*$ ,  $a_n = 2n + 1$ .

20. (14分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $(\sqrt{5}, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 若动点  $P(x_0, y_0)$  为椭圆外一点, 且点  $P$  到椭圆  $C$  的两条切线相互垂直, 求点  $P$  的轨迹方程.

20.解: (1) 可知  $c = \sqrt{5}$ , 又  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\therefore a = 3$ ,  $b^2 = a^2 - c^2 = 4$ ,

椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;

(2) 设两切线为  $l_1, l_2$ ,

① 当  $l_1 \perp x$  轴或  $l_1 // x$  轴时, 对应  $l_2 // x$  轴或  $l_2 \perp x$  轴, 可知  $P(\pm 3, \pm 2)$ ;

② 当  $l_1$  与  $x$  轴不垂直且不平行时,  $x_0 \neq \pm 3$ , 设  $l_1$  的斜率为  $k$ , 则  $k \neq 0$ ,  $l_2$  的斜率为  $-\frac{1}{k}$ ,

$l_1$  的方程为  $y - y_0 = k(x - x_0)$ , 联立  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ,

得  $(9k^2 + 4)x^2 + 18(y_0 - kx_0)kx + 9(y_0 - kx_0)^2 - 36 = 0$ ,

因为直线与椭圆相切, 所以  $\Delta = 0$ , 得  $9(y_0 - kx_0)^2 k^2 - (9k^2 + 4)[(y_0 - kx_0)^2 - 4] = 0$ ,

$\therefore -36k^2 + 4[(y_0 - kx_0)^2 - 4] = 0$ ,

$\therefore (x_0^2 - 9)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 4 = 0$

所以  $k$  是方程  $(x_0^2 - 9)x^2 - 2x_0y_0x + y_0^2 - 4 = 0$  的一个根,

同理  $-\frac{1}{k}$  是方程  $(x_0^2 - 9)x^2 - 2x_0y_0x + y_0^2 - 4 = 0$  的另一个根,

$$\therefore k \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) = \frac{y_0^2 - 4}{x_0^2 - 9}, \text{ 得 } x_0^2 + y_0^2 = 13, \text{ 其中 } x_0 \neq \pm 3,$$

所以点  $P$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = 13$  ( $x \neq \pm 3$ ),

因为  $P(\pm 3, \pm 2)$  满足上式, 综上知: 点  $P$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = 13$ .

21. (本题14分) 设函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 2x + k)^2 + 2(x^2 + 2x + k) - 3}}$ , 其中  $k < -2$ ,

(1) 求函数  $f(x)$  的定义域  $D$ ; (用区间表示)

(2) 讨论  $f(x)$  在区间  $D$  上的单调性;

(3) 若  $k < -6$ , 求  $D$  上满足条件  $f(x) > f(1)$  的  $x$  的集合。

21.解: (1) 可知  $(x^2 + 2x + k)^2 + 2(x^2 + 2x + k) - 3 > 0$ ,

$$\therefore [(x^2 + 2x + k) + 3] \cdot [(x^2 + 2x + k) - 1] > 0,$$

$$\therefore x^2 + 2x + k < -3 \text{ 或 } x^2 + 2x + k > 1,$$

$$\therefore (x+1)^2 < -2-k \text{ } (-2-k > 0) \text{ 或 } (x+1)^2 > 2-k \text{ } (2-k > 0),$$

$$\therefore |x+1| < \sqrt{-2-k} \text{ 或 } |x+1| > \sqrt{2-k},$$

$$\therefore -1 - \sqrt{-2-k} < x < -1 + \sqrt{-2-k} \text{ 或 } x < -1 - \sqrt{2-k} \text{ 或 } x > -1 + \sqrt{2-k},$$

所以函数  $f(x)$  的定义域  $D$  为

$$(-\infty, -1 - \sqrt{2-k}) \cup (-1 - \sqrt{-2-k}, -1 + \sqrt{-2-k}) \cup (-1 + \sqrt{2-k}, +\infty);$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f'(x) &= -\frac{2(x^2 + 2x + k)(2x + 2) + 2(2x + 2)}{2\sqrt{(x^2 + 2x + k)^2 + 2(x^2 + 2x + k) - 3}^3} \\ &= -\frac{(x^2 + 2x + k + 1)(2x + 2)}{\sqrt{(x^2 + 2x + k)^2 + 2(x^2 + 2x + k) - 3}^3}, \end{aligned}$$

由  $f'(x) > 0$  得  $(x^2 + 2x + k + 1)(2x + 2) < 0$ , 即  $(x+1+\sqrt{k})(x+1-\sqrt{k})(x+1) < 0$ ,

$$\therefore x < -1 - \sqrt{-k} \text{ 或 } -1 < x < -1 + \sqrt{-k}, \text{ 结合定义域知 } x < -1 - \sqrt{2-k} \text{ 或 } -1 < x < -1 + \sqrt{-2-k},$$

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, -1 - \sqrt{2-k})$ ,  $(-1, -1 + \sqrt{-2-k})$ ,

同理递减区间为  $(-1 - \sqrt{-2-k}, -1)$ ,  $(-1 + \sqrt{2-k}, +\infty)$ ;

$$(3) \text{ 由 } f(x) = f(1) \text{ 得 } (x^2 + 2x + k)^2 + 2(x^2 + 2x + k) - 3 = (3+k)^2 + 2(3+k) - 3,$$

$$\therefore [(x^2 + 2x + k)^2 - (3+k)^2] + 2[(x^2 + 2x + k) - (3+k)] = 0,$$

$$\therefore (x^2 + 2x + 2k + 5) \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0,$$

$$\therefore (x+1+\sqrt{-2k-4})(x+1-\sqrt{-2k-4}) \cdot (x+3)(x-1) = 0,$$

$$\therefore x = -1 - \sqrt{-2k-4} \text{ 或 } x = -1 + \sqrt{-2k-4} \text{ 或 } x = -3 \text{ 或 } x = 1,$$

$$\therefore k < -6, \therefore 1 \in (-1, -1 + \sqrt{-2-k}), -3 \in (-1 - \sqrt{-2-k}, -1),$$

$$-1 - \sqrt{-2k-4} < -1 - \sqrt{2-k}, -1 + \sqrt{-2k-4} > -1 + \sqrt{2-k},$$

结合函数  $f(x)$  的单调性知  $f(x) > f(1)$  的解集为

$$(-1-\sqrt{-2k-4}, -1-\sqrt{2-k}) \cup (-1-\sqrt{-2-k}, -3) \cup (1, -1+\sqrt{-2-k}) \cup (-1+\sqrt{2-k}, -1+\sqrt{-2k-4}).$$