绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数　学（文史类）

【学科网试卷总评】2013 年高考数学四川卷遵循《考试说明》的要求,保持了近几年四川卷的命题风格,在题型、题量、难度等方面保持相对稳定,试卷覆盖了高中数学的主干内容,重视对数学思想方法的考查,着重考查数学能力.

①源于教材,注重基础，试卷中很多考题直接源于教材或由教材上的例题、习题、复习题改编而来,这些试题重视对基础知识和通性通法的考查.这种立足于教材编拟高考试题的理念和方法，对中学数学教学回归教材、重视课本、减轻学业负担、实施素质教育具有良好的导向作用，也充分体现了试题背景的公平性.

②注重思想,考查本质，试卷在考查数学基础知识和基本技能的基础上,注重数学思想方法和数学本质的考查.第 2、5、6、等题考查了数形结合思想.第 8、10、15 题考查了分类与整合思想,第 14、20、21 等题考查了函数与方程思想.此外,化归与转化思想在多个题目中得到了体现.

③多考点想，少考点算，数学思维能力的考查在大部分试题中得到了充分体现.如第 1~4、6、12、15、17(Ⅰ)等题,都不需要较多的运算就可得出结论.第 5、7、8、9、14 等题,具有思维量大但运算量小的特点.其思维难度高、思维量大,但借助于直觉猜想、合理估算、反例构造、演绎推理等方法,运用数形结合、函数与方程等数学思想,其运算就比较简单.第 21 题,若能运用对数函数的单调性及图像的分析就能较快的解决问题,并可避免繁琐的数值计算.今年全卷的运算量和书写量比过去几年有所降低,但思维量有所增加,较好地体现了“多考点想,少考点算”的命题理念.

本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至4页，共4页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上大题无效。满分150分。考试时间120分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡上一并交回。

第Ⅰ卷　（选择题 共50分）

注意事项：

必须使用2B铅笔在答题卡上将所选答案对应的标号涂黑。

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，

只有一个是符合题目要求的。

1、设集合 $A=\{1,2,3\}$，集合 $B=\{-2,2\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

（A）$\varnothing$　　　　（B）$\{2\}$

（C）$\{-2,2\}$　　　　（D）$\{-2,1,2,3\}$

【答案】B

【解析】A 、B 两集合中只有一个公共元素2，∴ $A\bigcap B=\{2\}$，选B.

【学科网考点定位】本题考查用列举法表示的集合的交运算.

2、一个几何体的三视图如图所示，则该几何体可以是（　　）

（A）棱柱　　　　（B）棱台

（C）圆柱　　　　（D）圆台

【答案】D

【解析】由俯视图知，该几何体是圆柱和圆台的组合体，可排除 A、B，由正视图可排除 C，故选 D.

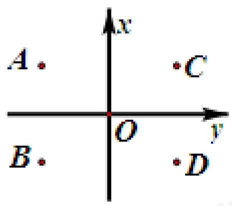
【学科网考点定位】本题考查简单几何体的三视图的画法和识别，以及一个几何体的三视图与直观图的相互转换问题.

3、如图，在复平面内，点 A 表示复数 z，则图中表示 z 的共轭复数的点是（　　）

（A）A　　　　（B）B

（C）C　　　　（D）D

【答案】B



【解析】设点 $A(x,y)$ 表示的复数 $z=x+yi$，则 z 的共轭复数 $\overline{z}=x-yi$ 对应的点为 $B(x,-y)$，∴A、B 两点关于 x 轴对称，选 B.

【学科网考点定位】本题考查复数的概念、表示方法、几何意义以及共轭复数的概念，容易题。

4、设 $x\in Z$，集合 A 是奇数集，集合 B 是偶数集. 若命题 p：$\forall x\in A$，$2x\in B$，则（　　）

（A）$\neg p:\exists x\in A,2x\in B$　　　　（B）$\neg p:\exists x\notin A,2x\in B$

（C）$\neg p:\exists x\in A,2x\notin B$　　　　（D）$\neg p:\forall x\notin A,2x\notin B$

【答案】C

【解析】本题考查全称命题的否定，注意到“任意”的否定是“存在”，“属于”的否定是“不属于”，将 $\forall$ 改为 $\exists$，将 $2x\in B$ 改为 $2x\notin B$，于是有 $\neg p$：$\exists x\in A$，$2x\notin B$，故选 C.

【学科网考点定位】本题考查全称命题的否定，注意：“任意”的否定是“存在”，“属于”的否定是“不属于”.

5、抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离是（　　）

（A）$2\sqrt{3}$　　　　（B）2

（C）$\sqrt{3}$　　　　（D）1

【答案】D

【解析】抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$，于是点 F 到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2-\sqrt{3}\times 0|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$，选 D.

【学科网考点定位】本题考查抛物线的标准方程、简单的几何性质，点到直线的距离公式，计算量小，基础题.

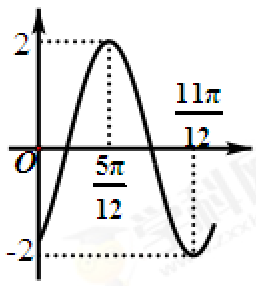
6、函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 ω，φ 的值分别是（　　）

（A）$2,-\dfrac{\pi}{3}$　　　　（B）$2,-\dfrac{\pi}{6}$

（C）$4,-\dfrac{\pi}{6}$　　　　（D）$4,\dfrac{\pi}{3}$

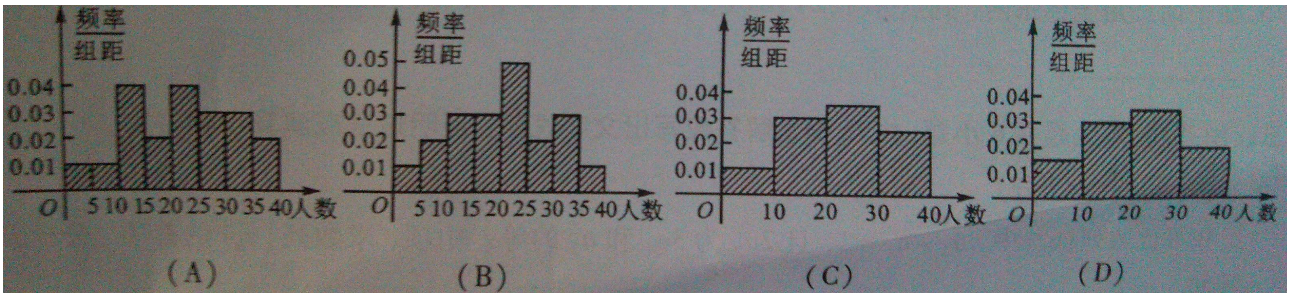
【答案】A

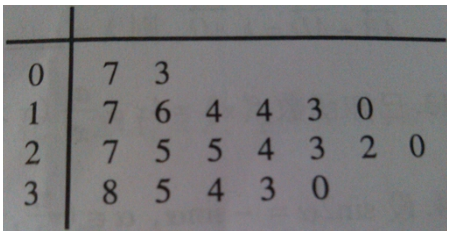
【解析】由图知，周期 T 满足 $\dfrac{1}{2}T=\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}$，$\therefore T=\pi$，又 $\omega>0$，$\therefore$ $\omega=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，图象的最高点为 $\left(\dfrac{5\pi}{12},2\right)$，于是由“五点法”作图，知 $2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，选 A.



【学科网考点定位】本题考查正弦型函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质，难点是确定初相 φ 的值，关键是理解“五点法”作图.

7、某学校随机抽取20个班，调查各班中有网上购物经历的人数，所得数据的茎叶图如图所示。以组距为5将数据分组成 $[0,5)$，$[5,10)$，…，$[30,35)$，$[35,40]$ 时，所作的频率分布直方图是（　　）





0	7	3					
1	7	6	4	4	3	0	
2	7	5	5	4	3	2	0
3	8	5	4	3	0		

【答案】A

【解析】由茎叶图，有

组别	$[0,5)$	$[5,10)$	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40]$
频数	1	1	4	2	4	3	3	2

上表对应的频率分布直方图为 A，故选 A.

【学科网考点定位】本题考查茎叶图和频率分布直方图等统计初步知识，考查学生收集数据，处理数据的能力.

8、若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \le 8, \\ 2y-x \le 4, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \end{cases}$ 且 $z=5y-x$ 的最大值为 a，最小值为 b，则 $a-b$ 的值是（　　）

（A）48　　（B）30　　（C）24　　（D）16

【答案】C

【解析】约束条件$\begin{cases}x+y\le 8,\\2y-x\le 4,\\x\ge 0,\\y\ge 0,\end{cases}$表示以$(0,0)$、$(0,2)$、$(4,4)$，$(8,0)$为顶点的四边形区域.，检验四顶点坐标可知，当$x=4$，$y=4$时，$a=z_{max}=5\times4-4=16$，当$x=8$，$y=0$时，$b=z_{min}=5\times0-8=-8$，所以$a-b=24$，选C.

【学科网考点定位】本题考查不等式（组）表示平面区域的作法，图解法求线性规划问题的最优解等基础知识，考查数形结合的思想方法.

9、从椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点$P$向$x$轴作垂线，垂足恰为左焦点$F_1$，$A$是椭圆与$x$轴正半轴的交点，$B$是椭圆与$y$轴正半轴的交点，且$AB//OP$（$O$是坐标原点），则该椭圆的离心率是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】由已知，点$P(-c,y)$在椭圆上，∴$\dfrac{(-c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，解得$P(-c,\dfrac{b^2}{a})$，又$AB//OP$，∴$-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{b^2}{ac}$，即$b=c$，所以$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{b^2+c^2}=\dfrac{1}{2}$，故椭圆的离心率$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，选C.

【学科网考点定位】本题考查椭圆的标准方程、简单几何性质以及两直线平行的充要条件，课本习题改编，中等题.

10、设函数$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$（$a\in R$，e为自然对数的底数）。若存在$b\in[0,1]$使$f(f(b))=b$成立，则a的取值范围是（　　）

（A）$[1,e]$　　（B）$[1,1+e]$　　（C）$[e,1+e]$　　（D）$[0,1]$

【答案】A

【解析】∵$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$在定义域上单调递增，∴$\exists\ b\in[0,1]$，使得$f(f(b))=b$成立$\Leftrightarrow\exists\ b\in[0,1]$，使得$f(b)=b$，即等价于方程$f(x)=x$在$[0,1]$有解，于是$a=e^x+x-x^2$在$[0,1]$有解，所以$a$的取值范围就是函数$g(x)=e^x+x-x^2$，$x\in[0,1]$的值域，∵$g'(x)=e^x+1-2x$在$[0,1]$恒为正，∴函数$g(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以$g(x)\in[1,e]$，故$a$的取值范围是$[1,e]$，选A.

【学科网考点定位】本题考查函数图象与性质的应用，函数零点、方程的根和函数图象与x轴交点三者间的关系，考查推理论证、运算求解和创新意识，本题具有高等数学背景，较难.

第二部分　（非选择题 共 100 分）

注意事项：

必须使用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答。作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚。答在试题卷上无效。

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11、$\lg\sqrt{5}+\lg\sqrt{20}$ 的值是____________.

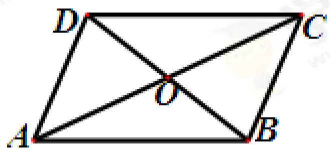
【答案】1

【解析】$\lg\sqrt{5}+\lg\sqrt{20}=\lg(\sqrt{5}\cdot\sqrt{20})=\lg\sqrt{100}=\lg 10=1$，故填 1.

【学科网考点定位】本题考查对数的概念和对数的运算法则，容易题.

12、如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$，则 $\lambda=$____________.

【答案】2



【解析】如图，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$，所以 $\lambda=2$，故填 2.

【学科网考点定位】本题考查平面向量的线性运算以及运算的几何表示.

13、已知函数 $f(x)=4x+\dfrac{a}{x}$（$x>0,a>0$）在 $x=3$ 时取得最小值，则 $a=$____________.

【答案】36

【解析】$f(x)=4x+\dfrac{a}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\dfrac{a}{x}}=4\sqrt{a}$，当且仅当 $4x=\dfrac{a}{x}$，即 $a=4x^2$时等号成立，又在 $x=3$ 时取得最小值，所以 $a=4x^2=4\times 3^2=36$，故填 36.

【学科网考点定位】本题考查利用均值不等式求最值，注意对“一正”、“二定”、“三相等”这三个条件的验证！

14、设 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，则 $\tan 2\alpha$ 的值是____________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\because \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin\alpha$，$\therefore \cos\alpha = -\frac{1}{2}$，又 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$，$\therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}$，所以 $\tan 2\alpha = \tan\frac{4\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$，故填 $\sqrt{3}$.

【学科网考点定位】本题考查同角三角函数间的基本关系，二倍角公式，简单的三角恒等变换，基础题.

15、在平面直角坐标系内，到点 $A(1,2)$，$B(1,5)$，$C(3,6)$，$D(7,-1)$ 的距离之和最小的点的坐标是_______.

【答案】$(2,4)$

【解析】设四边形 $ABCD$ 对角线的交点为 Q，P 为坐标平面内任意一点，根据三角形性质，有 $PA+PC \geq AC$，$PB+PD \geq BD$，$\therefore PA+PB+PC+PD \geq AC+BD$，当点 P 与 Q 重合时取等号，于是所求点为 Q，易知直线 AC，BD 的方程分别为：$y=2x$，$x+y-6=0$，由 $\begin{cases} y=2x \\ x+y-6=0 \end{cases}$ 解得 $Q\ (2,4)$，填 $(2,4)$.

【学科网考点定位】本题以直角坐标系为载体，考查直线的方程、两直线交点和多距离几何最值问题，考查考生对问题的探究和富有数学特点的思考，考查创新能力．解题的关键是灵活使用定理：三角形中，两边之和大于第三边.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16、(本小题满分 12 分)

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2 - a_1 = 2$，且 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项，求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公比及前 n 项和.

【答案】首项 $a_1 = 1$，公比 $q = 3$，前 n 项和 $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

【解析】设该数列的公比为 q，由已知，可得，

$$\begin{cases} a_1 q - a_1 = 2 \\ 4a_1 q = 3a_1 + a_1 q^2 \end{cases},$$

所以$\begin{cases} a_1(q-1)=2 \\ q^2-4q+3=0 \end{cases}$，

解方程组，得 $a_1=1$，$q=3$.

即数列$\{a_n\}$的首项为 1 ，公比为 3 .

所以，数列$\{a_n\}$的前n项和 $S_n=\dfrac{3^n-1}{2}$. ……………………………………12 分

【学科网考点定位】本小题考查等比数列、等差中项等基础知识，考查运算求解能力.

17、(本小题满分 12 分)

在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且

$$\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin(A+C)=-\frac{3}{5}.$$

（Ⅰ）求$\sin A$的值；

（Ⅱ）若$a=4\sqrt{2}$，$b=5$，求向量$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影.

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{4}{5}$，（Ⅱ）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】（Ⅰ）由$\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin(A+C)=-\dfrac{3}{5}$，得

$\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin B=-\dfrac{3}{5}$，

则$\cos(A-B+B)=-\dfrac{3}{5}$，即$\cos A=-\dfrac{3}{5}$.

又$0<A<\pi$，则$\sin A=\dfrac{4}{5}$. ……………………………………5 分

（Ⅱ）由正弦定理，有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由题知$a>b$，则$A>B$，故$B=\dfrac{\pi}{4}$.

根据余弦定理，有$(4\sqrt{2})^2=5^2+c^2-2\times 5c\times(-\dfrac{3}{5})$，

解得$c=1$或$c=-7$（负值舍去）.

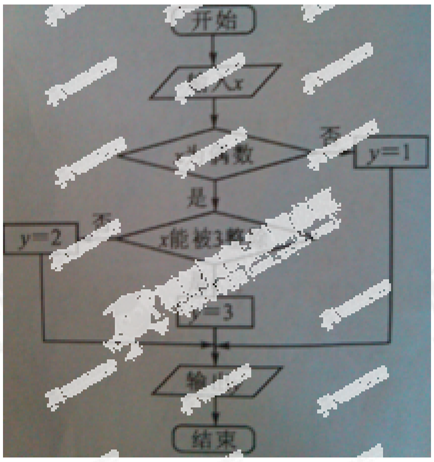
故向量$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影为$|\overrightarrow{BA}|\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………12 分

【学科网考点定位】本小题主要考查两角和的余弦公式、诱导公式、正弦定理、余弦定理、同角三角函数的关系等基础知识，考查向量投影的概念，考查运算求解能力、考查化归与转化等数学思想.

18、(本小题满分 12 分)

某算法的程序框图如图所示，其中输入的变量 x 在 $1,2,3,\cdots,24$ 这 24 个整数中等可能随机产生。

（Ⅰ）分别求出按程序框图正确编程运行时输出 y 的值为 i 的概率 $P_i(i=1,2,3)$；



（Ⅱ）甲、乙两同学依据自己对程序框图的理解，各自编写程序重复运行 n 次后，统计记录了输出 y 的值为 $i(i=1,2,3)$ 的频数。以下是甲、乙所作频数统计表的部分数据。

甲的频数统计表（部分）

运行次数 n	输出 y 的值为1的频数	输出 y 的值为2的频数	输出 y 的值为3的频数
30	14	6	10
…	…	…	…
2100	1027	376	697

乙的频数统计表（部分）

运行次数 n	输出 y 的值为1的频数	输出 y 的值为2的频数	输出 y 的值为3的频数
30	12	11	7
…	…	…	…
2100	1051	696	353

当 $n=2100$ 时，根据表中的数据，分别写出甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 $i(i=1,2,3)$ 的频率（用分数表示），并判断两位同学中哪一位所编写程序符合算法要求的可能性较大。

【答案】（Ⅰ）$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$；（Ⅱ）乙同学所编程序符合算法要求的可能性较大.

【解析】（Ⅰ）变量 x 是在1, 2, 3, $\cdots$, 24这24个整数中等可能随机产生的一个数，故共有24 种可能.

当 x 从1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23这12个数中产生时，输出 y 的值为1，故 $P_1=\frac{1}{2}$；

当 x 从2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22这8个数中产生时，输出 y 的值为2，故 $P_2=\frac{1}{3}$；

当 x 从6, 12, 18, 24这4个数中产生时，输出 y 的值为3，故 $P_3=\frac{1}{6}$.

所以，输出 y 的值为1的概率为 $\frac{1}{2}$，输出 y 的值为2的概率为 $\frac{1}{3}$，输出 y 的值为3的概率为 $\frac{1}{6}$.

……………………………………………………………………………………6 分

（Ⅱ）当 $n=2100$ 时，甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 i（$i=1,2,3$）的频率如下：

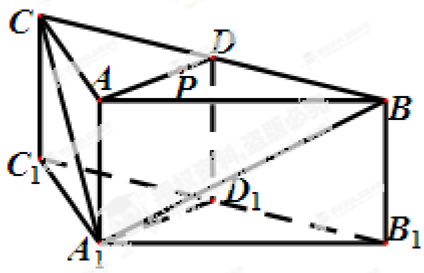
	输出 y 的值为1的频率	输出 y 的值为2的频率	输出 y 的值为3的频率
甲	$\frac{1027}{2100}$	$\frac{376}{2100}$	$\frac{697}{2100}$
乙	$\frac{1051}{2100}$	$\frac{696}{2100}$	$\frac{353}{2100}$

比较频率趋势与概率，可得乙同学所编程序符合算法要求的可能性较大. ……………………12 分

【学科网考点定位】本小题主要考查算法与程序框图、古典概型、频数、频率等概念及相关计算，考查运用统计与概率的知识与方法解决实际问题的能力，考查数据处理能力、应用意识和创新意识.

19、(本小题满分 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC， $AB=AC=2AA_1=2$，$\angle BAC=120^\circ$， D,D_1 分别是线段 BC,B_1C_1 的中点， P 是线段 AD 上异于端点的点。

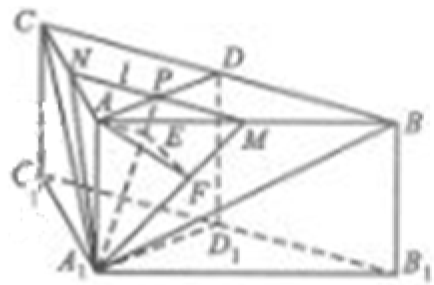


（Ⅰ）在平面 ABC 内，试作出过点 P 与平面 A_1BC 平行的直线 l，说明理由，并证明直线 $l\perp$ 平面 ADD_1A_1；

（Ⅱ）设（Ⅰ）中的直线 l 交 AC 于点 Q，求三棱锥 A_1-QC_1D 的体积.（锥体体积公式：$V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 为底面面积， h 为高）

【答案】（Ⅰ）在平面 ABC 内，过点 P 作直线 $l//BC$；（Ⅱ）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

【解析】（Ⅰ）如图，在平面 ABC 内，过点 P 作直线 $l//BC$，



因为 l 在平面 A_1BC 外，BC 在平面 A_1BC 内，由直线与平面平行的判定定理可知，

$l//$平面 A_1BC，

由已知 $AB=AC$，D 为线段 BC 的中点，

所以，$BC\perp AD$，则直线 $l\perp AD$．

因为 $AA_1\perp$平面 ABC，所以 $AA_1\perp$直线 l，

又因为 AD、AA_1 在平面 ADD_1A_1 内，且 AD 与 AA_1 相交，

所以直线 $l\perp$平面 ADD_1A_1．……………………………………7分

（Ⅱ）过 D 作 $DE\perp AC$ 于 E．

$\because AA_1\perp$平面 ABC，$\therefore DE\perp AA_1$．

又因为 AC，AA_1 在平面 ACC_1A_1 内，且 AC 与 AA_1 相交，

所以 $DE\perp$平面 ACC_1A_1．

由 $AB=AC=2$，$\angle BAC=120^\circ$，有 $AD=1$，$\angle DAC=60^\circ$，

所以在 ΔACD 中，$DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $S_{\Delta A_1QC_1}=\dfrac{1}{2}A_1C_1\cdot AA_1=1$，所以

$$V_{A_1-QC_1D}=V_{D-QC_1A_1}=\frac{1}{3}DE\cdot S_{\Delta QC_1A_1}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

因此三棱锥 A_1-QC_1D 的体积是 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．……………………………………12分

【学科网考点定位】本小题主要考查本作图、线面的平行与垂直、棱锥的体积等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力.

20、(本小题满分 13 分)

已知圆C的方程为$x^2+(y-4)^2=4$，点O是坐标原点. 直线$l: y=kx$与圆C交于M、N两点.

(Ⅰ)求k的取值范围;

(Ⅱ)设$Q(m,n)$是线段MN上的点，且$\dfrac{2}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{|OM|^2}+\dfrac{1}{|ON|^2}$. 请将$n$表示为$m$的函数.

【答案】(Ⅰ) $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$，(Ⅱ) $n=\dfrac{\sqrt{15m^2+180}}{5}$ ($m\in(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})$)

【解析】(Ⅰ)将$y=kx$代入$x^2+(y-4)^2=4$中，得

$(1+k^2)x^2-8kx+12=0$.　　　　(*)

由$\Delta=(-8k)^2-4(1+k^2)\times12>0$，得$k^2>3$.

所以，k的取值范围$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$.……………………4 分

(Ⅱ)因为M、N在直线l上，可设点M、N的坐标分别为(x_1,kx_1)、(x_2,kx_2)，则

则$|OM|^2=(1+k^2)x_1^2$，$|ON|^2=(1+k^2)x_2^2$.

又$|OQ|^2=m^2+n^2=(1+k^2)m^2$.

由$\dfrac{2}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{|OM|^2}+\dfrac{1}{|ON|^2}$，得

$\dfrac{2}{(1+k^2)m^2}=\dfrac{1}{(1+k^2)x_1^2}+\dfrac{1}{|(1+k^2)x_2^2}$，即

$\dfrac{2}{m^2}=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$.

由(*)可知，$x_1+x_2=\dfrac{8k}{1+k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{12}{1+k^2}$，

所以$m^2=\dfrac{36}{5k^2-3}$.

因为点Q在直线$y=kx$上，所以$k=\dfrac{n}{m}$，代入$m^2=\dfrac{36}{5k^2-3}$中并化简，得

$5n^2-3m^2=36$.

由$m^2=\dfrac{36}{5k^2-3}$及$k^2>3$，可得$0<m^2<3$，即$m\in(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})$.

根据题意，点Q在圆C内，则$n>0$，所以$n=\sqrt{\dfrac{36+3m^2}{5}}=\dfrac{\sqrt{15m^2+180}}{5}$，

于是n与m的函数关系为$n=\dfrac{\sqrt{15m^2+180}}{5}$（$m\in(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})$）. ………………………13分

【学科网考点定位】本小题主要考查直线、圆、函数与不等式等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查函数与方程等数学思想，并考查思维的严谨性.

21、(本小题满分 14 分)

已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a, x<0\\ \ln x, x>0\end{cases}$，其中$a$是实数。设$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$为该函数图象上的两点，且$x_1<x_2$。

(Ⅰ)指出函数$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ)若函数$f(x)$的图象在点A,B处的切线互相垂直，且$x_2<0$，证明：$x_2-x_1\geq 1$；

(Ⅲ)若函数$f(x)$的图象在点A,B处的切线重合，求a的取值范围。

【答案】(Ⅰ)减区间为$(-\infty,-1)$，增区间为$[-1,0)$、$(0,+\infty)$；(Ⅱ)略；(Ⅲ)$(-\ln 2-1,+\infty)$.

【解析】(Ⅰ)函数$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$，单调递增区间为$[-1,0)$、$(0,+\infty)$. ……3分

(Ⅱ)由导数的几何意义可知，点A处的切线斜率为$f'(x_1)$，点B处的切线斜率为$f'(x_2)$，

故当点A处的切线与点B处的切线垂直时，有$f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1$.

当$x<0$时，对函数$f(x)$求导，得$f'(x)=2x+2$，

因为 $x_1 < x_2 < 0$，所以，$(2x_1+2)(2x_2+2)=-1$，

所以 $2x_1+2<0$，$2x_2+2>0$.

因此 $x_2-x_1=\frac{1}{2}[-(2x_1+2)+(2x_2+2)]\geq\sqrt{[-(2x_1+2)]\cdot(2x_2+2)}=1$，

当且仅当 $-(2x_1+2)=2x_2+2=1$，即 $x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$ 时等号成立.

所以，函数 $f(x)$ 的图象在点 A，B 处的切线互相垂直时，$x_2-x_1\geq1$. ……7 分

（III）当 $x_1<x_2<0$ 或 $x_2>x_1>0$ 时，$f'(x_1)\neq f'(x_2)$，故 $x_1<0<x_2$.

当 $x_1<0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为

$y-(x_1^2+2x_1+a)=(2x_1+2)(x-x_1)$，即 $y=(2x_1+2)x-x_1^2+a$.

当 $x_2>0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象在点 $B(x_2,f(x_2))$ 处的切线方程为

$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\frac{1}{x_2}\cdot x+\ln x_2-1$.

两切线重合的充要条件是

$$\begin{cases}\frac{1}{x_2}=2x_1+2, & (1)\\ \ln x_2-1=-x_1^2+a, & (2)\end{cases}$$

由①及 $x_1<0<x_2$ 知，$-1<x_1<0$

由①②得 $a=x_1^2+\ln\frac{1}{2x_1+2}-1=x_1^2-\ln(2x_1+2)-1$.

设 $h(x_1)=x_1^2-\ln(2x_1+2)-1$（$-1<x_1<0$），

则 $h'(x_1)=2x_1-\frac{1}{x_1+1}<0$，

所以，$h(x_1)$（$-1<x_1<0$）是减函数.

则 $h(x_1)>h(0)=-\ln2-1$，

所以$a > -\ln 2 - 1$.

又当$x_1 \in (-1, 0)$且趋近于-1时，$h(x_1)$无限增大，

所以a的取值范围是$(-\ln 2 - 1, +\infty)$.

故当函数$f(x)$的图象在点A，B处的切线重合时，a的取值范围是$(-\ln 2 - 1, +\infty)$.

………………………………………………………………14分

【学科网考点定位】本小题主要考查基本函数的性质、导数的应用、基本不等式、直线的位置关系等基

础知识，考查推论证能力、运算求解能力、创新意识、考查函数与方程、分类与整合、转化

与化归等数学思想．第（Ⅰ）问两个增区间之间错加并集符号；第（Ⅱ）问没有注明均值不等式中

等号成立的条件；第（III）问不会分离变量，把所求问题转化为函数值域问题。