

2015年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分.

1. 若集合 $M = \{x | (x+4)(x+1) = 0\}$, $N = \{x | (x-4)(x-1) = 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. \emptyset B. $\{-1, -4\}$ C. $\{0\}$ D. $\{1, 4\}$

2. 若复数 $z = i(3 - 2i)$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z} =$

- A. $3 - 2i$ B. $3 + 2i$ C. $2 + 3i$ D. $2 - 3i$

3. 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是

- A. $y = x + e^x$ B. $y = x + \frac{1}{x}$ C. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ D. $y = \sqrt{1+x^2}$

4. 袋中共有15个除了颜色外完全相同的球, 其中有10个白球, 5个红球. 从袋中任取2个球, 所

取的2个球中恰有1个白球, 1个红球的概率为

- A. 1 B. $\frac{11}{21}$ C. $\frac{10}{21}$ D. $\frac{5}{21}$

5. 平行于直线 $2x + y + 1 = 0$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直线的方程是

- A. $2x - y + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x - y - \sqrt{5} = 0$ B. $2x + y + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x + y - \sqrt{5} = 0$
C. $2x - y + 5 = 0$ 或 $2x - y - 5 = 0$ D. $2x + y + 5 = 0$ 或 $2x + y - 5 = 0$

6. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x + 5y \geq 8 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最小值为

- A. $\frac{31}{5}$ B. 6 C. $\frac{23}{5}$ D. 4

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{5}{4}$, 且其右焦点 $F_2(5, 0)$, 则双曲线 C 的方程为

()

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

8. 若空间中 n 个不同的点两两距离都相等, 则正整数 n 的取值

- A. 大于5 B. 等于5 C. 至多等于4 D. 至多等于3

二、填空题:本大题共7小题,考生作答6小题,每小题5分,满分30分.

(一) 必做题(9-13题)

9. 在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中, x 的系数为_____。

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=25$, 则 $a_2+a_8=$ _____。

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为 a, b, c . 若 $a=\sqrt{3}$, $\sin B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{\pi}{6}$, 则 $b=$ _____。

12. 某高三毕业班有40人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了_____条毕业留言。(用数字作答)

13. 某高三毕业班有40人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了_____条毕业留言。(用数字作答)

(二) 选做题(14-15题, 考生只能从中选做一题)

14. (坐标系与参数方程选做题) 已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$, 点A的极坐标为 $A(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$, 则点A到直线 l 的距离为_____。

15. (几何证明选讲选做题) 如图1, 已知AB是圆O的直径, $AB=4$, EC是圆O的切线, 切点为C, $BC=1$, 过圆心O做BC的平行线, 分别交EC和AC于点D和点P, 则 $OD=$ _____。

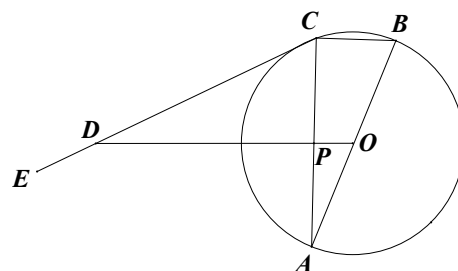


图1

三、解答题: 本大题共6小题, 满分80分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16. (本小题满分12分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $m=(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $n=(\sin x, \cos x)$, $x \in (0,$

$\frac{\pi}{2}$)。

- (1) 若 $m \perp n$ ，求 $\tan x$ 的值 (2) 若 m 与 n 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，求 x 的值。

17. (本小题满分12分)

某工厂36名工人的年龄数据如下表。

工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

(1) 用系统抽样法从36名工人中抽取容量为9的样本，且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为44，列出样本的年龄数据；

(2) 计算 (1) 中样本的平均值 \bar{x} 和方差 s^2 ；

(3) 36名工人中年龄在 $\bar{x} - s$ 与 $\bar{x} + s$ 之间有多少人？所占的百分比是多少（精确到0.01%）？

18. (本小题满分14分)

如图2，三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直， $PD = PC = 4$ ，
 $AB = 6$ ， $BC = 3$. 点 E 是 CD 边的中点，点 F ， G 分别在线段 AB ， BC 上，且 $AF = 2FB$ ，
 $CG = 2GB$.

- (1) 证明： $PE \perp FG$ ；
 (2) 求二面角 $P - AD - C$ 的正切值；
 (3) 求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.

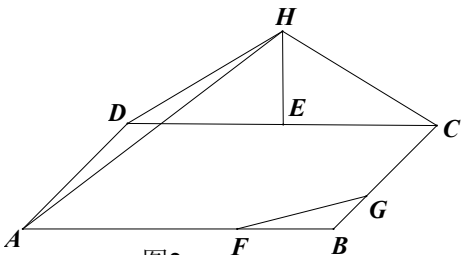


图2

19. (本小题满分14分)

设 $a > 1$, 函数 $f(x) = (1 + x^2)e^x - a$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个零点;

(3)

若曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线与 x 轴平行, 且在点 $M(m, n)$ 处的切线与直线 OP 平行 (O 是

坐标原点), 证明: $m \leq \sqrt[3]{a - \frac{2}{e}} - 1$

20. (本小题满分14分)

已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相交于不同的两点 A, B .

(1) 求圆 C_1 的圆心坐标;

(2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;

(3) 是否存在实数 k , 使得直线 $L: y = k(x - 4)$ 与曲线 C 只有一个交点: 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分14分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$, $n \in N^*$.

(1) 求 a_3 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 T_n ;

(3) 令 $b_1 = a_1$, $b_n = \frac{T_{n-1}}{n} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) a_n$ ($n \geq 2$), 证明: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

S_n

满足 $S_n < 2 + 2 \ln n$