# 2018年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

## 一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．（5分）已知集合 $A=\{x||x|<2\}$，$B=\{-2，0，1，2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0，1\}$　　B．$\{-1，0，1\}$

C．$\{-2，0，1，2\}$　　D．$\{-1，0，1，2\}$

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】38：对应思想；4O：定义法；5J：集合．

【分析】根据集合的基本运算进行计算即可．

【解答】解：$A=\{x||x|<2\}=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{-2，0，1，2\}$，

则 $A\cap B=\{0，1\}$，

故选：A．

【点评】本题主要考查集合的基本运算，根据集合交集的定义是解决本题的关键．比较基础．

2．（5分）在复平面内，复数$\frac{1}{1-i}$的共轭复数对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5N：数系的扩充和复数．

【分析】利用复数的除法运算法则，化简求解即可．

【解答】解：复数$\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，

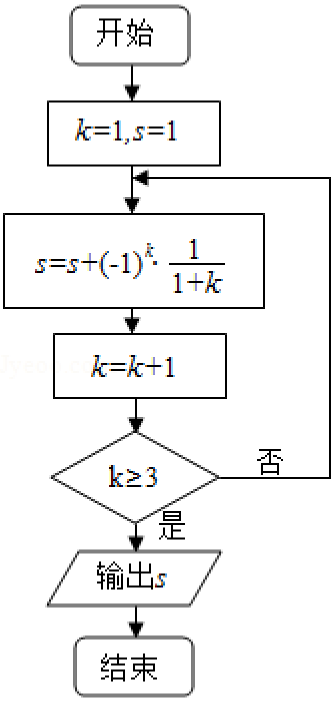
共轭复数对应点的坐标（$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$）在第四象限．

故选：D．

【点评】本题考查复数的代数形式的乘除运算，复数的几何意义，是基本知识的

考查．

3．（5 分）执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为（　　）




A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{5}{6}$　　C．$\frac{7}{6}$　　D．$\frac{7}{12}$

【考点】EF：程序框图．

【专题】35：转化思想；5K：算法和程序框图．

【分析】直接利用程序框图的应用求出结果．

【解答】解：执行循环前：k=1，S=1．

在执行第一次循环时，$S=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$．

由于 k=2≤3，

所以执行下一次循环．$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，

k=3，直接输出 $S=\frac{5}{6}$，

故选：B．

【点评】本题考查的知识要点：程序框图和循环结构的应用．

4．（5 分）“十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出

半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献，十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$．若第一个单音的频率为 f，则第八个单音的频率为（　　）

A．$\sqrt[3]{2}f$　　B．$\sqrt[3]{2^2}f$　　C．$\sqrt[12]{2^5}f$　　D．$\sqrt[12]{2^7}f$

【考点】88：等比数列的通项公式．

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；54：等差数列与等比数列．

【分析】利用等比数列的通项公式，转化求解即可．

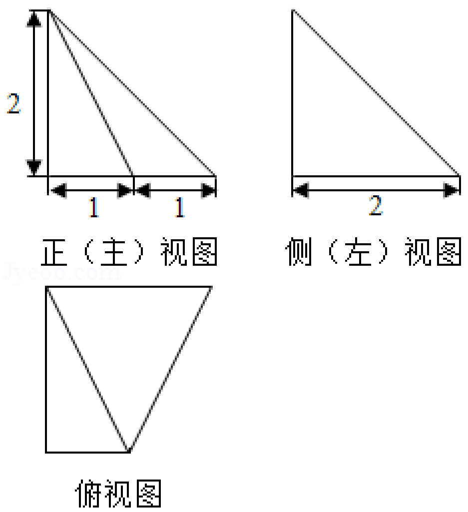
【解答】解：从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$．

若第一个单音的频率为 f，则第八个单音的频率为：$(\sqrt[12]{2})^7\bullet f=\sqrt[12]{2^7}f$．

故选：D．

【点评】本题考查等比数列的通项公式的求法，考查计算能力．

5．（5 分）某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，直角三角形的个数为（　　）




A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【考点】L!：由三视图求面积、体积；L7：简单空间图形的三视图．

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离．

【分析】画出三视图的直观图，判断各个面的三角形的情况，即可推出结果．

【解答】解：四棱锥的三视图对应的直观图为：PA⊥底面 ABCD，

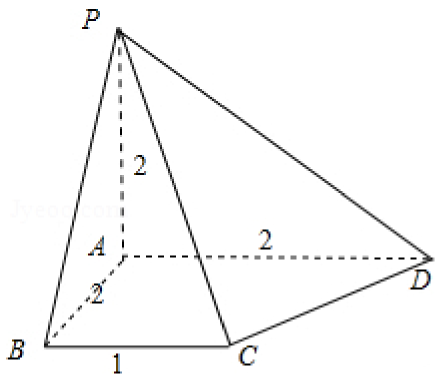
AC=$\sqrt{5}$，CD=$\sqrt{5}$，

PC=3，PD=2$\sqrt{2}$，可得三角形 PCD 不是直角三角形．

所以侧面中有 3 个直角三角形，分别为：△PAB，△PBC，

△PAD．

故选：C．




【点评】本题考查简单几何体的三视图的应用，是基本知识的考查．

6．（5 分）设$\vec{a}$，$\vec{b}$均为单位向量，则"$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$"是"$\vec{a}\perp\vec{b}$"的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；5L：简易逻辑．

【分析】根据向量数量积的应用，结合充分条件和必要条件的对应进行判断即可．

【解答】解：∵"$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$"

∴平方得$|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}=9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}$，

即 $1+9-6\vec{a}\cdot\vec{b}=9+1+6\vec{a}\cdot\vec{b}$，

即 $12\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

则"$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$"是"$\vec{a}\perp\vec{b}$"的充要条件，

故选：C．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合向量数量积的公式进行转化是解决本题的关键．

7．（5 分）在平面直角坐标系中，记 d 为点 P（cosθ，sinθ）到直线 $x-my-2=0$ 的距离．当 θ、m 变化时，d 的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【考点】IT：点到直线的距离公式．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5B：直线与圆．

【分析】由题意 $d=\frac{|\cos\theta-m\sin\theta-2|}{\sqrt{1^2+m^2}}=\frac{|\sqrt{m^2+1}\sin(\theta+\alpha)-2|}{\sqrt{m^2+1}}$，

当 $\sin(\theta+\alpha)=-1$ 时，$d_{max}=1+\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}\leq 3$．由此能求出 d 的最大值．

【解答】解：由题意 $d=\frac{|\cos\theta-m\sin\theta-2|}{\sqrt{1^2+m^2}}=\frac{|\sqrt{m^2+1}\sin(\theta+\alpha)-2|}{\sqrt{m^2+1}}$，

$\tan\alpha=\frac{1}{m}=\frac{y}{x}$，

∴当 $\sin(\theta+\alpha)=-1$ 时，

$d_{max}=1+\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}\leq 3$．

∴d 的最大值为 3．

故选：C．

【点评】本题考查点到直线的距离的最大值的求法，考查点到直线的距离公式、三角函数性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题．

8．（5 分）设集合 $A=\{(x,y)|x-y\geq 1, ax+y>4, x-ay\leq 2\}$，则（　　）

A．对任意实数 a，$(2,1)\in A$　　B．对任意实数 a，$(2,1)\notin A$

C．当且仅当 $a<0$ 时，$(2,1)\notin A$　　D．当且仅当 $a\leq\frac{3}{2}$时，$(2,1)\notin A$

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5T：不等式．

【分析】利用 a 的取值，反例判断 $(2,1)\in A$ 是否成立即可．

【解答】解：当 $a=-1$ 时，集合 $A=\{(x,y)|x-y\geq 1, ax+y>4, x-ay\leq 2\}=\{(x,y)|x-y\geq 1, -x+y>4, x+y\leq 2\}$，显然 $(2,1)$ 不满足，$-x+y>4$，$x+y\leq 2$，所以 A 不正确；

当 $a=4$，集合 $A=\{(x,y)|x-y\geq 1, ax+y>4, x-ay\leq 2\}=\{(x,y)|x-y\geq 1, 4x+y>4, x-4y\leq 2\}$，显然 $(2,1)$ 在可行域内，满足不等式，所以 B 不正确；

当 $a=1$，集合 $A=\{(x,y)|x-y\geq 1, ax+y>4, x-ay\leq 2\}=\{(x,y)|x-y\geq 1, x+y>4, x-y\leq 2\}$，显然 $(2,1)\notin A$，所以当且仅当 $a<0$ 错误，所以 C 不正确；

故选：D．

【点评】本题考查线性规划的解答应用，利用特殊点以及特殊值转化求解，避免可行域的画法，简洁明了．

**二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。**

9．（5 分）设$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1=3$，$a_2+a_5=36$，则$\{a_n\}$的通项公式为__ $a_n=6n-3$ __．

【考点】84：等差数列的通项公式．

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；54：等差数列与等比数列．

【分析】利用等差数列通项公式列出方程组，求出 $a_1=3$，$d=6$，由此能求出$\{a_n\}$的通项公式．

【解答】解：$\because\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1=3$，$a_2+a_5=36$，

$\therefore\begin{cases}a_1=3\\a_1+d+a_1+4d=36\end{cases}$,

解得 $a_1=3$，$d=6$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=3+(n-1)\times6=6n-3$．

$\therefore\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=6n-3$．

故答案为：$a_n=6n-3$．

【点评】本题考查等差数列的通项公式的求法，考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题．

10．（5 分）在极坐标系中，直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=a$（$a>0$）与圆 $\rho=2\cos\theta$ 相切，则 $a=$__$1+\sqrt{2}$__．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5S：坐标系和参数方程．

【分析】首先把曲线和直线的极坐标方程转化成直角坐标方程，进一步利用圆心到直线的距离等于半径求出结果．

【解答】解：圆 $\rho=2\cos\theta$，

转化成：$\rho^2=2\rho\cos\theta$，

进一步转化成直角坐标方程为：$(x-1)^2+y^2=1$，

把直线 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=a$ 的方程转化成直角坐标方程为：$x+y-a=0$．

由于直线和圆相切，

所以：利用圆心到直线的距离等于半径．

则：$\frac{|1-a|}{\sqrt{2}}=1$，

解得：$a=1\pm\sqrt{2}$．$a>0$

则负值舍去．

故：$a=1+\sqrt{2}$．

故答案为：$1+\sqrt{2}$．

【点评】本题考查的知识要点：极坐标方程与直角坐标方程的互化，直线与圆相切的充要条件的应用．

11．（5 分）设函数 f（x）=cos（ωx－$\frac{\pi}{6}$）（ω＞0），若 f（x）≤f（$\frac{\pi}{4}$）对任意的实数 x 都成立，则 ω 的最小值为__$\frac{2}{3}$__．

【考点】HW：三角函数的最值．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；56：三角函数的求值．

【分析】利用已知条件推出函数的最大值，然后列出关系式求解即可．

【解答】解：函数 f（x）=cos（ωx－$\frac{\pi}{6}$）（ω＞0），若 f（x）≤f（$\frac{\pi}{4}$）对任意的实数 x 都成立，

可得：$\omega\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=2k\pi$，k∈Z，解得 ω=$8k+\frac{2}{3}$，k∈Z，ω＞0

则 ω 的最小值为：$\frac{2}{3}$．

故答案为：$\frac{2}{3}$．

【点评】本题考查三角函数的最值的求法与应用，考查转化思想以及计算能力．

12．（5 分）若 x，y 满足 x+1≤y≤2x，则 2y－x 的最小值是__3__．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】31：数形结合；4R：转化法；59：不等式的解法及应用．

【分析】作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义进行求解即可．

【解答】解：作出不等式组对应的平面区域如图：

设 z=2y－x，则 y=$\frac{1}{2}$x+$\frac{1}{2}$z，

平移 y=$\frac{1}{2}$x+$\frac{1}{2}$z，

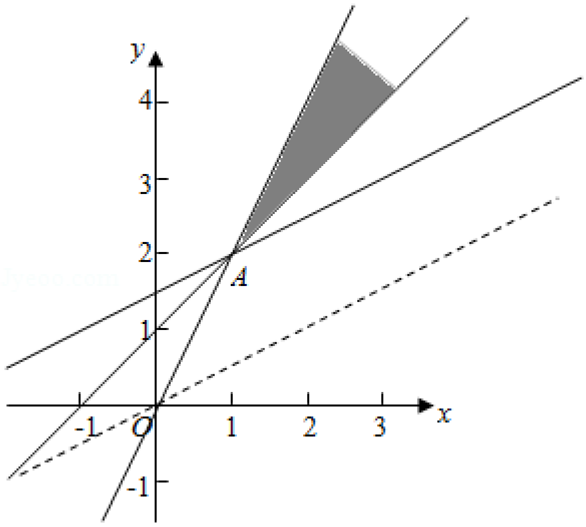
由图象知当直线 y=$\frac{1}{2}$x+$\frac{1}{2}$z 经过点 A 时，

直线的截距最小，此时 z 最小，

由$\begin{cases}x+1=y\\y=2x\end{cases}$得$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，即 A（1，2），

此时 z=2×2－1=3，

故答案为：3




【点评】本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义以及数形结合是解决本题的关键．

13．（5 分）能说明"若 f（x）＞f（0）对任意的 x∈（0，2]都成立，则 f（x）在[0，2]上是增函数"为假命题的一个函数是__f（x）=sinx__．

【考点】2J：命题的否定．

【专题】11：计算题；38：对应思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用．

【分析】本题答案不唯一，符合要求即可．

【解答】解：例如 f（x）=sinx，

尽管 f（x）＞f（0）对任意的 x∈（0，2]都成立，

当 x∈[0，$\frac{\pi}{2}$）上为增函数，在（$\frac{\pi}{2}$，2]为减函数，

故答案为：f（x）=sinx．

【点评】本题考查了函数的单调性，属于基础题．

14．（5 分）已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0），双曲线 N：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$．若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，则椭圆 M 的离心率为__$\sqrt{3}-1$__；双曲线 N 的离心率为__2__．

【考点】K4：椭圆的性质；KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；34：方程思想；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】利用已知条件求出正六边形的顶点坐标，代入椭圆方程，求出椭圆的离心率；利用渐近线的夹角求解双曲线的离心率即可．

【解答】解：椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0），双曲线 N：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$．若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，

可得椭圆的焦点坐标（c，0），正六边形的一个顶点（$\frac{c}{2}$，$\frac{\sqrt{3}c}{2}$），可得：$\frac{c^2}{4a^2}+\frac{3c^2}{4b^2}=1$，可得$\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4(\frac{1}{e^2}-1)}=1$，可得 $e^4-8e^2+4=0$，e∈（0，1），

解得 $e=\sqrt{3}-1$．

同时，双曲线的渐近线的斜率为$\sqrt{3}$，即$\frac{n}{m}=\sqrt{3}$，

可得：$\frac{n^2}{m^2}=3$，即$\frac{m^2+n^2}{m^2}=4$，

可得双曲线的离心率为 $e=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}=2$．

故答案为：$\sqrt{3}-1$；2．

【点评】本题考查椭圆以及双曲线的简单性质的应用，考查计算能力．

**三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

15．（13 分）在△ABC 中，a=7，b=8，$\cos B=-\frac{1}{7}$．

（I）求∠A；

（II）求 AC 边上的高．

【考点】HP：正弦定理．

【专题】34：方程思想；4O：定义法；58：解三角形．

【分析】（I）由正弦定理结合大边对大角进行求解即可．

（II）利用余弦定理求出 c 的值，结合三角函数的高与斜边的关系进行求解即可．

【解答】解：（I）∵$a<b$，∴$A<B$，即 A 是锐角，

∵$\cos B=-\frac{1}{7}$，∴$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-(-\frac{1}{7})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $A=\frac{\pi}{3}$．

（II）由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即 $64=49+c^2+2\times7\times c\times\frac{1}{7}$，

即 $c^2+2c-15=0$，

得（$c-3$）（$c+5$）$=0$，

得 $c=3$ 或 $c=-5$（舍），

则 AC 边上的高 $h=c\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

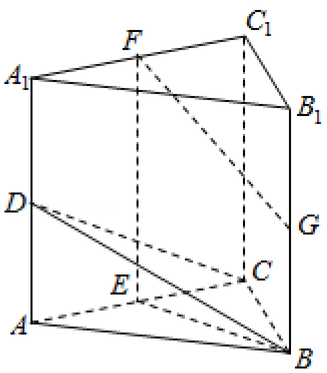
【点评】本题主要考查解三角形的应用，利用正弦定理以及余弦定理建立方程关系是解决本题的关键．

16．（14 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$平面 ABC，D，E，F，G 分别为 $AA_1$，AC，$A_1C_1$，$BB_1$ 的中点，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$．

（I）求证：$AC\perp$平面 BEF；

（II）求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值；

（III）证明：直线 FG 与平面 BCD 相交．



【考点】LW：直线与平面垂直；MI：直线与平面所成的角；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】31：数形结合；41：向量法；5F：空间位置关系与距离.

【分析】（I）证明 AC⊥BE，AC⊥EF 即可得出 AC⊥平面 BEF；

（II）建立坐标系，求出平面 BCD 的法向量$\overrightarrow{n}$，通过计算$\overrightarrow{n}$与$\overrightarrow{EB}$的夹角得出二面角的大小；

（III）计算$\overrightarrow{FG}$与$\overrightarrow{n}$的数量积即可得出结论.

【解答】（I）证明：∵E，F 分别是 AC，$A_1C_1$的中点，∴EF∥$CC_1$，

∵$CC_1$⊥平面 ABC，∴EF⊥平面 ABC，

又 AC⊂平面 ABC，∴EF⊥AC，

∵AB=BC，E 是 AC 的中点，

∴BE⊥AC，

又 BE∩EF=E，BE⊂平面 BEF，EF⊂平面 BEF，

∴AC⊥平面 BEF.

（II）解：以 E 为原点，以 EB，EC，EF 为坐标轴建立空间直角坐标系如图所示：

则 B（2，0，0），C（0，1，0），D（0，﹣1，1），

∴$\overrightarrow{BC}$=（﹣2，1，0），$\overrightarrow{CD}$=（0，﹣2，1），

设平面 BCD 的法向量为$\overrightarrow{n}$=（x，y，z），则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x+y=0\\-2y+z=0\end{cases}$，

令 y=2 可得$\overrightarrow{n}$=（1，2，4），又 EB⊥平面 $ACC_1A_1$，

∴$\overrightarrow{EB}$=（2，0，0）为平面 CD﹣$C_1$ 的一个法向量，

∴cos＜$\overrightarrow{n}$，$\overrightarrow{EB}$＞=$\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{2}{\sqrt{21}\times2}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

由图形可知二面角 B﹣CD﹣$C_1$ 为钝二面角，

∴二面角 B﹣CD﹣$C_1$ 的余弦值为﹣$\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

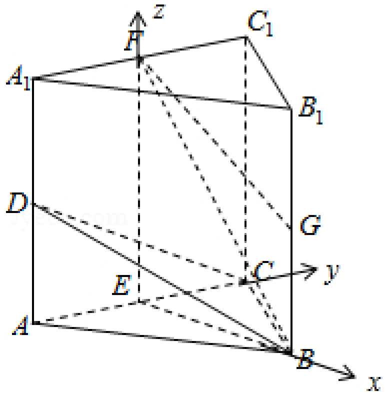
（III）证明：F（0，0，2），$\overrightarrow{G}$（2，0，1），∴$\overrightarrow{FG}$=（2，0，﹣1），

$\therefore \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{n}=2+0-4=-2 \neq 0$，

$\therefore \overrightarrow{FG}$与$\overrightarrow{n}$不垂直，

∴FG 与平面 BCD 不平行，又 FG$\not\subset$平面 BCD，

∴FG 与平面 BCD 相交．




【点评】本题考查了线面垂直的判定，二面角的计算与空间向量的应用，属于中档题．

17．（12 分）电影公司随机收集了电影的有关数据，经分类整理得到下表：

| 电影类型 | 第一类 | 第二类 | 第三类 | 第四类 | 第五类 | 第六类 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 电影部数 | 140 | 50 | 300 | 200 | 800 | 510 |
| 好评率 | 0.4 | 0.2 | 0.15 | 0.25 | 0.2 | 0.1 |

好评率是指：一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值．

假设所有电影是否获得好评相互独立．

（I）从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率；

（II）从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部，估计恰有 1 部获得好评的概率；

（III）假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等．用"$\xi_k=1$"表示第 k 类电影得到人们喜欢．"$\xi_k=0$"表示第 k 类电影没有得到人们喜欢（k=1，2，3，4，5，6）．写出方差 $D\xi_1$，$D\xi_2$，$D\xi_3$，$D\xi_4$，$D\xi_5$，$D\xi_6$ 的大小关系．

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5I：概率与统计．

【分析】（I）先求出总数，再求出第四类电影中获得好评的电影的部数，利用古典概型概率计算公式直接求解．

（II）设事件 B 表示"从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部，恰有 1 部获得好评"，第四类获得好评的有 50 部，第五类获得好评的有 160 部，由此能求出从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部，估计恰有 1 部获得好评的概率．

（III）由题意知，定义随机变量如下：$\xi_k=\begin{cases}0，第k类电影没有得到人们喜欢\\1，第k类电影得到人们喜欢\end{cases}$，

则 $\xi_k$ 服从两点分布，分别求出六类电影的分布列及方差由此能写出方差 $D\xi_1$，$D\xi_2$，$D\xi_3$，$D\xi_4$，$D\xi_5$，$D\xi_6$ 的大小关系．

【解答】解：（I）设事件 A 表示"从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影"，

总的电影部数为 140+50+300+200+800+510=2000 部，

第四类电影中获得好评的电影有：200×0.25=50 部，

∴从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影的频率为：

P（A）$=\frac{50}{2000}$=0.025．

（II）设事件 B 表示"从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部，恰有 1 部获得好评"，

第四类获得好评的有：200×0.25=50 部，

第五类获得好评的有：800×0.2=160 部，

则从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部，估计恰有 1 部获得好评的概率：

P（B）$=\frac{50\times(800-160)+(200-50)\times160}{200\times800}$=0.35．

（III）由题意知，定义随机变量如下：

$\xi_k=\begin{cases}0，第k类电影没有得到人们喜欢\\1，第k类电影得到人们喜欢\end{cases}$，

则 $\xi_k$ 服从两点分布，则六类电影的分布列及方差计算如下：

第一类电影：

| $\xi_1$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| P | 0.4 | 0.6 |

E（$\xi_1$）=1×0.4+0×0.6=0.4，

D（$\xi_1$）=（1－0.4）$^2$×0.4+（0－0.4）$^2$×0.6=0.24．

第二类电影：

| $\xi_2$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| P | 0.2 | 0.8 |

E（$\xi_2$）=1×0.2+0×0.8=0.2，

D（$\xi_2$）=（1－0.2）$^2$×0.2+（0－0.2）$^2$×0.8=0.16．

第三类电影：

| $\xi_3$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| P | 0.15 | 0.85 |

E（$\xi_3$）=1×0.15+0×0.85=0.15，

D（$\xi_3$）=（1－0.15）$^2$×0.15+（0－0.85）$^2$×0.85=0.1275．

第四类电影：

| $\xi_4$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| P | 0.25 | 0.75 |

E（$\xi_4$）=1×0.25+0×0.75=0.15，

D（$\xi_4$）=（1－0.25）$^2$×0.25+（0－0.75）$^2$×0.75=0.1875．

第五类电影：

| $\xi_5$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| P | 0.2 | 0.8 |

E（$\xi_5$）=1×0.2+0×0.8=0.2，

D（$\xi_5$）=（1－0.2）$^2$×0.2+（0－0.2）$^2$×0.8=0.16．

第六类电影：

| $\xi_6$ | 1 | 0 |
|---|---|---|

| P | 0.1 | 0.9 |
|---|---|---|

E（$\xi_6$）=1×0.1+0×0.9=0.1，

D（$\xi_5$）=（1﹣0.1）$^2$×0.1+（0﹣0.1）$^2$×0.9=0.09．

∴方差 D$\xi_1$，D$\xi_2$，D$\xi_3$，D$\xi_4$，D$\xi_5$，D$\xi_6$ 的大小关系为：

D$\xi_6$＜D$\xi_3$＜D$\xi_2$=D$\xi_5$＜D$\xi_4$＜D$\xi_1$．

【点评】本题考查概率的求法，考查离散型随机变量的方差的求法，考查古典概型、两点分布等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题．

18．（13 分）设函数 f（x）=[ax$^2$﹣（4a+1）x+4a+3]e$^x$．

（I）若曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线与 x 轴平行，求 a；

（II）若 f（x）在 x=2 处取得极小值，求 a 的取值范围．

【考点】6D：利用导数研究函数的极值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】32：分类讨论；34：方程思想；48：分析法；52：导数的概念及应用；53：导数的综合应用．

【分析】（I）求得 f（x）的导数，由导数的几何意义可得 f′（1）=0，解方程可得 a 的值；

（II）求得 f（x）的导数，注意分解因式，讨论 a=0，a=$\frac{1}{2}$，a＞$\frac{1}{2}$，0＜a＜$\frac{1}{2}$，a＜0，由极小值的定义，即可得到所求 a 的范围．

【解答】解：（I）函数 f（x）=[ax$^2$﹣（4a+1）x+4a+3]e$^x$ 的导数为

f′（x）=[ax$^2$﹣（2a+1）x+2]e$^x$．

由题意可得曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线斜率为 0，

可得（a﹣2a﹣1+2）e=0，且 f（1）=3e≠0，

解得 a=1；

（II）f（x）的导数为 f′（x）=[ax$^2$﹣（2a+1）x+2]e$^x$=（x﹣2）（ax﹣1）e$^x$，

若 a=0 则 x＜2 时，f′（x）＞0，f（x）递增；x＞2，f′（x）＜0，f（x）递减．

x=2 处 f（x）取得极大值，不符题意；

若 a＞0，且 $a=\frac{1}{2}$，则 f′（x）$=\frac{1}{2}$（x﹣2）$^2e^x\geq 0$，f（x）递增，无极值；

若 $a>\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{a}<2$，f（x）在（$\frac{1}{a}$，2）递减；在（2，+∞），（﹣∞，$\frac{1}{a}$）递增，可得 f（x）在 x=2 处取得极小值；

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{a}>2$，f（x）在（2，$\frac{1}{a}$）递减；在（$\frac{1}{a}$，+∞），（﹣∞，2）递增，可得 f（x）在 x=2 处取得极大值，不符题意；

若 a＜0，则 $\frac{1}{a}<2$，f（x）在（$\frac{1}{a}$，2）递增；在（2，+∞），（﹣∞，$\frac{1}{a}$）递减，可得 f（x）在 x=2 处取得极大值，不符题意．

综上可得，a 的范围是（$\frac{1}{2}$，+∞）．

【点评】本题考查导数的运用：求切线的斜率和极值，考查分类讨论思想方法，以及运算能力，属于中档题．

19．（14 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点 P（1，2），过点 Q（0，1）的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A，B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N．

（I）求直线 l 的斜率的取值范围；

（II）设 O 为原点，$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，$\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$，求证：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值．

【考点】KN：直线与抛物线的综合．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（I）将 P 代入抛物线方程，即可求得 p 的值，设直线 AB 的方程，代入椭圆方程，由△＞0，即可求得 k 的取值范围；

（II）根据向量的共线定理即可求得 $\lambda=1-y_M$，$\mu=1-y_N$，求得直线 PA 的方程，令 x=0，求得 M 点坐标，同理求得 N 点坐标，根据韦达定理即可求得$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值．

【解答】解：（I）∵抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点

P（1，2），∴4=2p，解得 p=2，

设过点（0，1）的直线方程为 y=kx+1，

设A（$x_1$，$y_1$），B（$x_2$，$y_2$）

联立方程组可得$\begin{cases}y^2=4x\\y=kx+1\end{cases}$，

消y可得$k^2x^2+(2k-4)x+1=0$，

∴$\Delta=(2k-4)^2-4k^2>0$，且$k\neq0$解得$k<1$，

且$k\neq0$，$x_1+x_2=-\frac{2k-4}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{1}{k^2}$，

又∵PA、PB要与y轴相交，∴直线l不能经过点（1，﹣2），即$k\neq-3$，

故直线l的斜率的取值范围$(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,1)$；

（II）证明：设点M（0，$y_M$），N（0，$y_N$），

则$\overrightarrow{QM}=(0,y_M-1)$，$\overrightarrow{QO}=(0,-1)$

因为$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，所以$y_M-1=-y_M-1$，故$\lambda=1-y_M$，同理$\mu=1-y_N$，

直线PA的方程为$y-2=\frac{2-y_1}{1-x_1}(x-1)=\frac{2-y_1}{1-\frac{y_1^2}{4}}(x-1)=\frac{4}{2+y_1}(x-1)$，

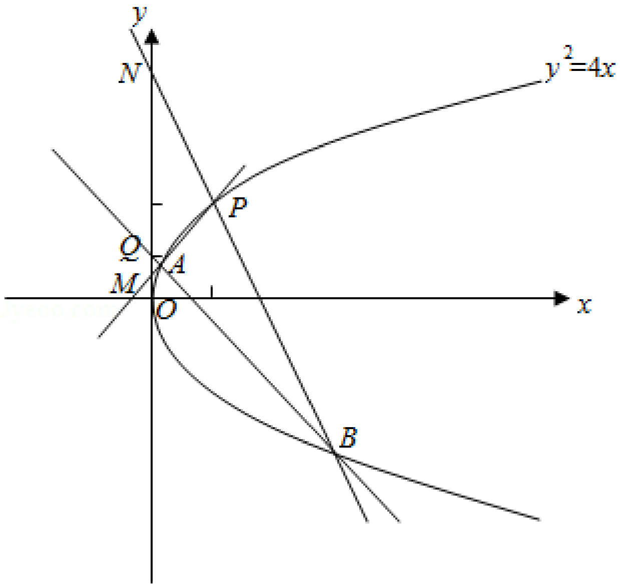
令x=0，得$y_M=\frac{2y_1}{2+y_1}$，同理可得$y_N=\frac{2y_2}{2+y_2}$，

因为

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{1-y_M}+\frac{1}{1-y_N}=\frac{2+y_1}{2-y_1}+\frac{2+y_2}{2-y_2}=\frac{8-2y_1y_2}{(2-y_1)(2-y_2)}=\frac{8-2(kx_1+1)(kx_2+1)}{1-k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2}=$$

$$\frac{8-[k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1]}{1-k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2}=\frac{8-2(1+\frac{4-2k}{k}+1)}{1-\frac{4-2k}{k}+1}=\frac{4-2\times\frac{4-2k}{k}}{2-\frac{4-2k}{k}}=2,$$

∴$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，∴$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.




【点评】本题考查抛物线的方程，直线与抛物线的位置关系，考查韦达定理的应用，考查转化思想，计算能力，属于中档题.

20.（14 分）设 n 为正整数，集合 $A=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\ldots t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\ldots,n\}$，对于集合 A 中的任意元素 $\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 和 $\beta=(y_1,y_2,\ldots y_n)$，记

$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(x_1+y_1-|x_1-y_1|)+(x_2+y_2-|x_2-y_2|)+\ldots(x_n+y_n-|x_n-y_n|)]$

（I）当 n=3 时，若 $\alpha=(1,1,0)$，$\beta=(0,1,1)$，求 $M(\alpha,\alpha)$ 和 $M(\alpha,\beta)$ 的值；

（II）当 n=4 时，设 B 是 A 的子集，且满足：对于 B 中的任意元素 α，β，当 α，β 相同时，$M(\alpha,\beta)$ 是奇数；当 α，β 不同时，$M(\alpha,\beta)$ 是偶数．求集合 B 中元素个数的最大值；

（III）给定不小于 2 的 n，设 B 是 A 的子集，且满足：对于 B 中的任意两个不同的元素 α，β，$M(\alpha,\beta)=0$，写出一个集合 B，使其元素个数最多，并说明理由.

【考点】1A：集合中元素个数的最值；F9：分析法和综合法；R8：综合法与分析法(选修).

【专题】35：转化思想；4G：演绎法；5J：集合.

【分析】(I）直接根据定义计算.

（II）注意到 1 的个数的奇偶性，根据定义反证证明.

（III）根据抽屉原理即可得证.

【解答】解：(I ） M（α，α）=1+1+0=2，M（α，β）=0+1+0=1.

（II）考虑数对（$x_k$，$y_k$）只有四种情况：(0，0)、(0，1)、(1，0)、(1，1)，

相应的$\frac{x_k+y_k-|x_k-y_k|}{2}$分别为 0、0、0、1，

所以 B 中的每个元素应有奇数个 1，

所以 B 中的元素只可能为（上下对应的两个元素称之为互补元素)：

（1，0，0，0 )、(0，1，0，0)、(0，0，1，0)、(0，0，0，1)，

（0，1，1，1)、(1，0，1，1)、(1，1，0，1)、(1，1，1，0)，

对于任意两个只有 1 个 1 的元素 α，β 都满足 M（α，β）是偶数，

所以四元集合 B={（1，0，0，0)、(0，1，0，0)、(0，0，1，0)、(0，0，0，1）}满足题意，

假设 B 中元素个数大于等于 4，就至少有一对互补元素，

除了这对互补元素之外还有至少 1 个含有 3 个 1 的元素 α，

则互补元素中含有 1 个 1 的元素 β 与之满足 M（α，β）=1 不合题意，

故 B 中元素个数的最大值为 4.

（III） B={（0，0，0，…0)，(1，0，0…，0)，(0，1，0，…0)，(0，0，1…0）…，

（0，0，0，…，1）}，

此时 B 中有 n+1 个元素，下证其为最大.

对于任意两个不同的元素 α，β，满足 M（α，β）=0，则 α，β 中相同位置上的数字不能同时为 1，

假设存在 B 有多于 n+1 个元素，由于 α=（0，0，0，…，0）与任意元素 β 都有 M（α，β）=0，

所以除（0，0，0，…，0）外至少有 n+1 个元素含有 1，

根据元素的互异性，至少存在一对 α，β 满足 $x_i=y_i=1$，此时 M（α，β）≥1 不满足题意，故 B 中最多有 n+1 个元素.

【点评】本题主要考查集合的含义与表示、集合的运算以及集合之间的关系．综合性较强，难度较大．