2009年陕西省高考数学试卷（理科）

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）（2009•陕西）设不等式$x^2-x\leq 0$的解集为M，函数f（x）=ln（1﹣|x|）的定义域为N，则M∩N为（　　）

A．[0，1）　B．（0，1）C．[0，1]　D．（﹣1，0]

【考点】函数的定义域及其求法；元素与集合关系的判断．

【专题】计算题．

【分析】先求出不等式的解集和函数的定义域，然后再求两个集合的交集．

【解答】解：不等式$x^2-x\leq 0$转化为x（x﹣1）≤0

解得其解集是{x|0≤x≤1}，

而函数f（x）=ln（1﹣|x|）有意义则需：1﹣|x|＞0

解得：﹣1＜x＜1

所以其定义域为{﹣1＜x＜1}，

所以M∩N=[0，1），

故选A

【点评】本题主要考查一元二次不等式的解法和绝对值不等式的解法及集合的运算．

2．（5分）（2009•陕西）已知z是纯虚数，$\frac{z+2}{1-i}$是实数，那么z等于（　　）

A．2i　B．iC．﹣i　D．﹣2i

【考点】复数的基本概念；复数代数形式的乘除运算．

【专题】计算题．

【分析】设出复数z，代入$\frac{z+2}{1-i}$，它的分子、分母同乘分母的共轭复数，化简为a+bi（a，b∈R）的形式．

【解答】解：由题意得z=ai．（a∈R且a≠0）．

∴$\frac{z+2}{1-i}=\frac{(z+2)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2-a+(a+2)i}{2}$，

则a+2=0，∴a=﹣2．有z=﹣2i，

故选D

【点评】本题考查复数的基本概念，复数代数形式的乘除运算，考查计算能力，是基础题．

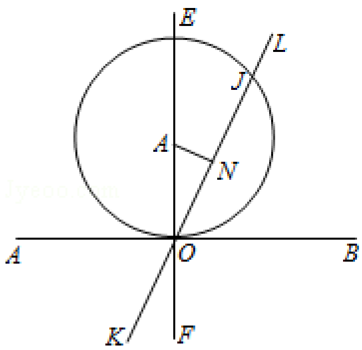
3．（5分）（2009•陕西）函数$f(x)=\sqrt{2x-4}\ (x\geqslant 4)$ 的反函数为（　　）

A．$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2+2\ (x\geqslant 0)$　B．$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2+2\ (x\geqslant 2)$

C．$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2+4\ (x\geqslant 0)$　D．$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2+4\ (x\geqslant 2)$

【考点】反函数.
【专题】应用题.
【分析】从条件中函数式数$f(x)=\sqrt{2x-4}$ $(x\geqslant 4)$ 反解出x，再将x，y互换即得对数函数的函数，再依据互为反函数间的定义域与值域的关系求得反函数的定义域即可.
【解答】解：$f(x)=\sqrt{2x-4}$ $(x\geqslant 4)$ $\Rightarrow y\geqslant 2$，$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2+2$，$x\geqslant 2$，
逐一验证，知B正确.
故选B.
【点评】求反函数，一般应分以下步骤：（1）由已知解析式y=f（x）反求出x=Φ（y）；（2）交换x=Φ（y）中x、y的位置；（3）求出反函数的定义域（一般可通过求原函数的值域的方法求反函数的定义域）.

4．（5分）（2009•陕西）过原点且倾斜角为60°的直线被圆$x^2+y^2-4y=0$所截得的弦长为（　　）



A．$\sqrt{3}$　B．2　C．$\sqrt{6}$　D．$2\sqrt{3}$
【考点】直线的倾斜角；直线和圆的方程的应用.
【专题】计算题.
【分析】本题考查的知识点是直线与圆方程的应用，由已知圆$x^2+y^2-4y=0$，我们可以将其转化为标准方程的形式，求出圆心坐标和半径，又直线由过原点且倾斜角为60°，得到直线的方程，再结合半径、半弦长、弦心距满足勾股定理，即可求解.
【解答】解：将圆$x^2+y^2-4y=0$的方程可以转化为：
$x^2+(y-2)^2=4$，
即圆的圆心为A（0，2），半径为R=2，
∴A到直线ON的距离，即弦心距为1，
∴$ON=\sqrt{3}$，
∴弦长$2\sqrt{3}$，
故选D.
【点评】要求圆到割线的距离，即弦心距，我们最常用的性质是：半径、半弦长（BE）、弦心距（OE）构成直角三角形，满足勾股定理，求出半径和半弦长，代入即可求解.

5．（5分）（2009•陕西）若3sinα+cosα=0，则$\frac{1}{\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}$的值为（　　）

A．$\frac{10}{3}$　B．$\frac{5}{3}$　C．$\frac{2}{3}$　D．-2

【考点】二倍角的余弦；同角三角函数基本关系的运用.
【专题】计算题.
【分析】首先考虑由$3\sin\alpha+\cos\alpha=0$求$\frac{1}{\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}$的值，可以联想到解$\sin\alpha$，$\cos\alpha$的值，在根据半角公式代入直接求解，即得到答案.

【解答】解析：由$3\sin\alpha+\cos\alpha=0\Rightarrow\cos\alpha\neq0$且$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$

所以$\frac{1}{\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+\tan^2\alpha}{1+2\tan\alpha}=\frac{10}{3}$

故选A.
【点评】此题主要考查同角三角函数基本关系的应用，在三角函数的学习中要注重三角函数一系列性质的记忆和理解，在应用中非常广泛.

6. （5分）（2009•陕西）若$(1-2x)^{2009}=a_0+a_1x+\ldots+a_{2009}x^{2009}$（$x\in R$），则$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2009}}{2^{2009}}$的值为（　　）

A．2　B．0　C．-1　D．-2
【考点】二项式定理的应用.
【专题】计算题；压轴题.
【分析】通过给x赋值$\frac{1}{2}$，0得到两等式，两式相减即得.

【解答】解：令$x=\frac{1}{2}$得$0=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2009}}{2^{2009}}$

令$x=0$得$1=a_0$

两式相减得$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2009}}{2^{2009}}=-1$

故选项为C
【点评】本题考查赋值法是求展开式的系数和问题的重要方法.

7. （5分）（2009•陕西）"$m>n>0$"是"方程$mx^2+ny^2=1$表示焦点在y轴上的椭圆"的（　　）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件
C．充要条件 D．既不充分也不必要条件
【考点】椭圆的应用.
【专题】常规题型.
【分析】将方程$mx^2+ny^2=1$转化为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，然后根据椭圆的定义判断.

【解答】解：将方程$mx^2+ny^2=1$转化为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，

根据椭圆的定义，要使焦点在y轴上必须满足$\frac{1}{m}>0$，$\frac{1}{n}>0$，且$\frac{1}{n}>\frac{1}{m}$，即$m>n>0$

反之，当$m>n>0$，可得出$\frac{1}{n}>\frac{1}{m}>0$，此时方程对应的轨迹是椭圆

综上证之，"$m>n>0$"是"方程$mx^2+ny^2=1$表示焦点在y轴上的椭圆"的充要条件

故选C．

【点评】本题考查椭圆的定义，难度不大，解题认真推导．

8．（5分）（2009•陕西）在△ABC中，M是BC的中点，AM=1，点P在AM上且满足学$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$等于（　　）

A．$-\frac{4}{9}$ B．$-\frac{4}{3}$ C．$\frac{4}{3}$ D．$\frac{4}{9}$

【考点】向量的共线定理；平面向量数量积的运算．

【专题】计算题．

【分析】由M是BC的中点，知AM是BC边上的中线，又由点P在AM上且满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$可得：P是三角形ABC的重心，根据重心的性质，即可求解．

【解答】解：∵M是BC的中点，知AM是BC边上的中线，

又由点P在AM上且满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$

∴P是三角形ABC的重心

∴$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$

$=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AP}=-|\overrightarrow{PA}|^2$

又∵AM=1

∴$|\overrightarrow{PA}|=\frac{2}{3}$

∴$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=-\frac{4}{9}$

故选A

【点评】判断P点是否是三角形的重心有如下几种办法：①定义：三条中线的交点．②性质：$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$或$\overrightarrow{AP}^2+\overrightarrow{BP}^2+\overrightarrow{CP}^2$取得最小值③坐标法：P点坐标是三个顶点坐标的平均数．

9．（5分）（2009•陕西）从0，1，2，3，4，5这六个数字中任取两个奇数和两个偶数，组成没有重复数字的四位数的个数为（　　）

A．300 B．216 C．180 D．162

【考点】排列、组合的实际应用．

【专题】计算题.
【分析】本题是一个分类计数原理，从1，2，3，4，5中任取两个奇数和两个偶数，组成没有重复数字的四位数；取0此时2和4只能取一个，0不可能排在首位，组成没有重复数字的四位数的个数为$C_3^2C_2^1[A_4^4 - A_3^3]$，根据加法原理得到结果.
【解答】解：由题意知，本题是一个分类计数原理，
第一类：从1，2，3，4，5中任取两个奇数和两个偶数，
组成没有重复数字的四位数的个数为$C_3^2A_4^4=72$
第二类：取0，此时2和4只能取一个，0不能排在首位，
组成没有重复数字的四位数的个数为$C_3^2C_2^1[A_4^4 - A_3^3]=108$
∴组成没有重复数字的四位数的个数为108+72=180
故选C.
【点评】本题考查分类计数问题，是一个排列组合的实际应用，本题是一个数字问题，在解题时，0是一个比较特殊的数字，它是偶数还不能排在首位，注意分类的应用.

10．（5分）（2009•陕西）若正方体的棱长为$\sqrt{2}$，则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为（　　）
A．$\frac{\sqrt{2}}{6}$ B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$ C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$ D．$\frac{2}{3}$
【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积.
【专题】计算题；压轴题.
【分析】由题意可知，凸多面体为八面体，八面体体积是两个底面边长为1，高为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的四棱锥，求出棱锥的体积，即可求出八面体的体积.
【解答】解：所求八面体体积是两个底面边长为1，高为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的四棱锥的体积和，
一个四棱锥体积$V_1=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，
故八面体体积$V=2V_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$.
故选B.
【点评】本题是基础题，考查棱锥的体积，正方体的内接多面体，体积的求法常用转化思想，变为易求的几何体的体积，考查计算能力.

11．（5分）（2009•陕西）若x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant1\\x-y\geqslant-1\\2x-y\leqslant2\end{cases}$，目标函数z=ax+2y仅在点（1，0）处取得最小值，则实数a的取值范围是（　　）
A．（﹣1，2）　B．（﹣4，2）　C．（﹣4，0]　D．（﹣2，4）
【考点】简单线性规划.
【专题】常规题型；压轴题.
【分析】先根据约束条件画出可行域，设z=ax+2y，再利用z的几何意义求最值，只需利用直线之间的斜率间的关系，求出何时直线z=ax+2y过可行域内的点（1，0）处取得最小值，从而得到a的取值范围即可.

【解答】解：可行域为△ABC，如图，

当a=0时，显然成立．

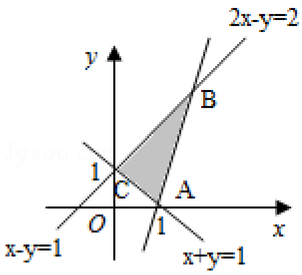
当a＞0时，直线ax+2y﹣z=0的斜率$k=-\frac{a}{2}>k_{AC}=-1$，a＜2．

当a＜0时，$k=-\frac{a}{2}<k_{AB}=2$

a＞﹣4．

综合得﹣4＜a＜2，

故选B．



【点评】借助于平面区域特性，用几何方法处理代数问题，体现了数形结合思想、化归思想．线性规划中的最优解，通常是利用平移直线法确定．

12．（5分）（2009•陕西）定义在R上的偶函数f（x）满足：对任意的x_1，x_2∈（﹣∞，0]（$x_1≠x_2$），有（$x_2﹣x_1$）（f（x_2）﹣f（x_1））＞0．则当n∈N^*时，有（　　）

A．f（﹣n）＜f（n﹣1）＜f（n+1） B．f（n﹣1）＜f（﹣n）＜f（n+1）

C．f（n+1）＜f（﹣n）＜f（n﹣1） D．f（n+1）＜f（n﹣1）＜f（﹣n）

【考点】奇偶性与单调性的综合．

【专题】压轴题；探究型．

【分析】由"x_1，x_2∈（﹣∞，0]（$x_1≠x_2$），有（$x_2﹣x_1$）（f（x_2）﹣f（x_1））＞0"可等有"x_2＞x_1时，f（x_2）＞f（x_1）"，符合增函数的定义，所以f（x）在（﹣∞，0]为增函数，再由f（x）为偶函数，则知f（x）在（0，+∞）为减函数，

由n+1＞n＞n﹣1＞0，可得结论．

【解答】解：x_1，x_2∈（﹣∞，0]（$x_1≠x_2$），有（$x_2﹣x_1$）（f（x_2）﹣f（x_1））＞0

∴x_2＞x_1时，f（x_2）＞f（x_1）

∴f（x）在（﹣∞，0]为增函数

∵f（x）为偶函数

∴f（x）在（0，+∞）为减函数

而n+1＞n＞n﹣1＞0，

∴f（n+1）＜f（n）＜f（n﹣1）

∴f（n+1）＜f（﹣n）＜f（n﹣1）

故选C．

【点评】本题主要考查单调性定义的变形与应用，还考查了奇偶性在对称区间上的单调性，结论是：偶函数在对称区间上的单调相反，奇函数在对称区间上的单调性相同．

二、填空题（共4小题，每小题4分，满分16分）

13．（4分）（2009•陕西）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_6=S_3=12$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=$__1__.

【考点】等差数列的前n项和；极限及其运算.

【专题】计算题.

【分析】先用数列的通项公式表示出a_6和S_3，进而求得a_1和d，根据等差数列求和公式求得S_n，代入到$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$答案可得.

【解答】解：依题意可知$\begin{cases}a_1+5d=12\\a_1+d=4\end{cases}$，

解得$a_1=2$，$d=2$

$\therefore S_n=n(n+1)$

$\therefore \frac{S_n}{n^2}=\frac{n+1}{n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

故答案为1

【点评】本题主要考查了等差数列的前n项的和．属基础题.

14．（4分）（2009•陕西）某班有36名同学参加数学、物理、化学课外探究小组，每名同学至多参加两个小组，已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为26，15，13，同时参加数学和物理小组的有6人，同时参加物理和化学小组的有4人，则同时参加数学和化学小组的有__8__人.

【考点】Venn图表达集合的关系及运算.

【专题】集合.

【分析】画出表示参加数学、物理、化学课外探究小组集合的Venn图，结合图形进行分析求解即可.

【解答】解：由条件知，每名同学至多参加两个小组，

故不可能出现一名同学同时参加数学、物理、化学课外探究小组，

设参加数学、物理、化学小组的人数构成的集合分别为A，B，C，

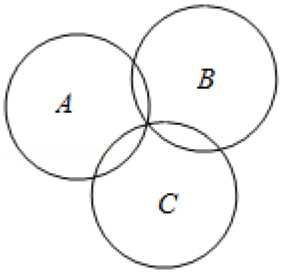
则card（A∩B∩C）=0，card（A∩B）=6，card（B∩C）=4，

由公式card（A∪B∪C）=card（A）+card（B）+card（C）﹣card（A∩B）﹣card（A∩C）﹣card（B∩C）

知36=26+15+13﹣6﹣4﹣card（A∩C）

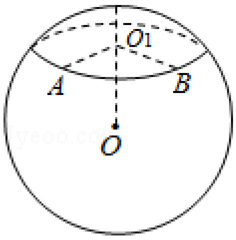
故card（A∩C）=8即同时参加数学和化学小组的有8人.

故答案为：8.



【点评】本小题主要考查Venn图表达集合的关系及运算、Venn图的应用、集合中元素的个数等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想．属于基础题．

15．（4分）（2009•陕西）如图球O的半径为2，圆O_1是一小圆，$O_1O=\sqrt{2}$，A、B是圆O_1上两点，若A，B两点间的球面距离为$\frac{2\pi}{3}$，则$\angle AO_1B$=__$\frac{\pi}{2}$__．



【考点】球面距离及相关计算；球面的三角公式．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】由题意知应先求出AB的长度，在直角三角形AOB中由余弦定理可得AB=2，由此知三角形AO_1B的三边长，由此可以求出$\angle AO_1B$的值．

【解答】解：由题设知 $O_1O=\sqrt{2}$，OA=OB=2

在圆O_1中有 $O_1A=O_1B=\sqrt{2}$，

又A，B两点间的球面距离为$\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理，得：AB=2

在三角形AO_1B中由勾股定理可得：$\angle AO_1B=\frac{\pi}{2}$

故答案为 $\frac{\pi}{2}$．

【点评】本题的考点是球面距离及相关计算，其考查背景是球内一小圆上两点的球面距，对空间想象能力要求较高，此类题是一个基本题型，属于基础题．

16．（4分）（2009•陕西）设曲线$y=x^{n+1}$（$n\in N^*$）在点（1，1）处的切线与x轴的交点的横坐标为x_n，则$x_1\bullet x_2\bullet\ldots\bullet x_n$的值为__$\frac{1}{n+1}$__．

【考点】归纳推理；简单复合函数的导数；直线的点斜式方程．

【专题】压轴题；规律型．

【分析】本题考查的主要知识点是导数的应用，由曲线$y=x^{n+1}$（$n\in N^*$），求导后，不难得到曲线$y=x^{n+1}$（$n\in N^*$）在点（1，1）处的切线方程，及与x轴的交点的横坐标为x_n，分析其特点，易得$x_1\bullet x_2\bullet\ldots\bullet x_n$的值．

【解答】解：对$y=x^{n+1}$（$n\in N^*$）求导得$y'=(n+1)x^n$，

令$x=1$得在点（1，1）处的切线的斜率$k=n+1$，

在点（1，1）处的切线方程为$y-1=k(x_n-1)=(n+1)(x_n-1)$，

不妨设$y=0$，$x_n=\frac{n}{n+1}$

则$x_1\bullet x_2\bullet\ldots\bullet x_n=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$．

故答案为：$\frac{1}{n+1}$

【点评】当题目中遇到求曲线C在点A（m，n）点的切线方程时，其处理步骤为：①判断A点是否在C上②求出C对应函数的导函数③求出过A点的切线的斜率④代入点斜式方程，求出直线的方程．

三、解答题（共6小题，满分74分）

17．（12分）（2009•陕西）已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$，$x\in R$（其中$A>0$，$\omega>0$，$0<\phi<\frac{\pi}{2}$）的图象与x轴的交点中，相邻两个交点之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，且图象上一个最低点为$M(\frac{2\pi}{3},\ -2)$．

（Ⅰ）求f（x）的解析式；

（Ⅱ）当$x\in[\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{2}]$，求f（x）的值域．

【考点】由$y=A\sin(\omega x+\phi)$的部分图象确定其解析式；正弦函数的定义域和值域．

【专题】计算题．

【分析】（1）根据最低点M可求得A；由x轴上相邻的两个交点之间的距离可求得ω；进而把点M代入f（x）即可求得ϕ，把A，ω，ϕ代入f（x）即可得到函数的解析式．

（2）根据x的范围进而可确定当$2x+\frac{\pi}{6}$的范围，根据正弦函数的单调性可求得函数的最大值和最小值．确定函数的值域．

【解答】解：（1）由最低点为$M(\frac{2\pi}{3},\ -2)$得A=2．

由x轴上相邻的两个交点之间的距离为$\frac{\pi}{2}$得$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，

即$T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$

由点$M(\frac{2\pi}{3},\ -2)$在图象上的

$2\sin(2\times\frac{2\pi}{3}+\phi)=-2$，即$\sin(\frac{4\pi}{3}+\phi)=-1$

故$\frac{4\pi}{3}+\phi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in Z\therefore\phi=2k\pi-\frac{11\pi}{6}$

又$\phi\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\therefore\phi=\frac{\pi}{6}$，故$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

（2）$\because x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}]$

当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{6}$时，f（x）取得最大值2；当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$

即$x=\frac{\pi}{2}$时，f（x）取得最小值﹣1，

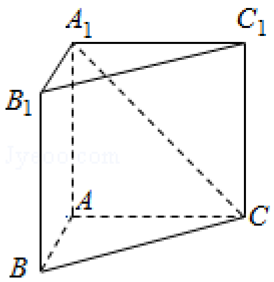
故f（x）的值域为[﹣1，2]

【点评】本题主要考查本题主要考查了由y=Asin（ωx+φ）的部分图象求解析式的问题及正弦函数的单调性问题．属基础题．

18．（12分）（2009•陕西）如图所示，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，AB=1，$AC=AA_1=\sqrt{3}$，∠ABC=60°．

（1）证明：$AB\perp A_1C$；

（2）求二面角$A-A_1C-B$的余弦值．



【考点】与二面角有关的立体几何综合题；直线与平面垂直的判定．

【专题】计算题；证明题．

【分析】（1）欲证$AB\perp A_1C$，而$A_1C\subset$平面ACC_1A_1，可先证$AB\perp$平面ACC_1A_1，根据三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，可知$AB\perp AA_1$，由正弦定理得$AB\perp AC$，满足线面垂直的判定定理所需条件；

（2）作$AD\perp A_1C$交A_1C于D点，连接BD，由三垂线定理知$BD\perp A_1C$，则∠ADB为二面角$A-A_1C-B$的平面角，在Rt△BAD中，求出二面角$A-A_1C-B$的余弦值即可．

【解答】解：（1）证明：∵三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，∴$AB\perp AA_1$，在△ABC中，AB=1，$AC=\sqrt{3}$，∠ABC=60°，由正弦定理得∠ACB=30°，

∴∠BAC=90°，即AB⊥AC，

∴$AB\perp$平面ACC_1A_1，

又$A_1C\subset$平面ACC_1A_1，

∴$AB\perp A_1C$．

（2）如图，作$AD\perp A_1C$交A_1C于D点，连接BD，

由三垂线定理知$BD\perp A_1C$，

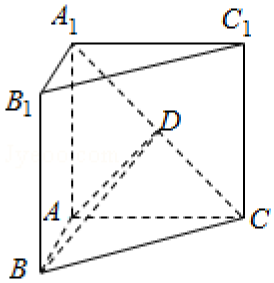
∴∠ADB为二面角$A-A_1C-B$的平面角．

在Rt△AA_1C中，$AD=\frac{AA_1\cdot AC}{A_1C}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

在Rt△BAD中，$\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore \cos\angle ADB=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

即二面角A－A_1C－B的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.



【点评】本题考查直线与平面垂直的性质，二面角及其度量，考查空间想象能力，逻辑思维能力，计算能力，是中档题.

19．（12分）（2009•陕西）某食品企业一个月内被消费者投诉的次数用ξ表示，据统计，随机变量ξ的概率分布如下：

ξ	0	1	2	3
p	0.1	0.3	2a	a

（Ⅰ）求a的值和ξ的数学期望；

（Ⅱ）假设一月份与二月份被消费者投诉的次数互不影响，求该企业在这两个月内共被消费者投诉2次的概率.

【考点】离散型随机变量的期望与方差；相互独立事件的概率乘法公式.

【专题】计算题.

【分析】（1）对于随机变量的所有可能的取值，其相应的概率之和都是1，即$P_1+P_2+\ldots=1$. 借此，我们可以求出a值，再利用数学期望的定义求解.

（2）由题意得，该企业在这两个月内共被消费者投诉2次的事件分解成两个互斥事件之和，分别求出这两个事件的概率后相加即可.

【解答】解：（1）由概率分布的性质有0.1+0.3+2a+a=1，解得a=0.2，

∴ξ的概率分布为

ξ	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.4	0.2

∴Eξ=0*0.1+1*0.3+2*0.4+3*0.2=1.7

（2）设事件A表示"两个月内共被投诉2次"事件A_1表示"两个月内有一个月被投诉2次，另外一个月被投诉0次"；

事件A_2表示"两个月内每月均被投诉1次"

则由事件的独立性得

P（A_1）=C_2^1P（ξ=2）P（ξ=0）=2*0.4*0.1=0.08

P（A_2）=[P（ξ=1）]^2=0.3^2=0.09

∴P（A）=P（A_1）+P（A_2）=0.08+0.09=0.17

故该企业在这两个月内共被消费者投诉2次的概率为0.17

【点评】本题主要考查离散型随机变量的期望与方差，通常情况下，都是先求出随机变量取每个值时的概率、再得其分布列、最后用数学期望与方差的定义求解；求复杂事件的概率通常有两种方法：一是将所求事件转化为彼此互斥的事件的和，利用概率加法公式计算互斥事件和的概率.

20．（12分）（2009•陕西）已知函数$f(x)=\ln(ax+1)+\frac{1-x}{1+x}$，$x\geq 0$，其中$a>0$．

（Ⅰ）若f（x）在x=1处取得极值，求a的值；

（Ⅱ）求f（x）的单调区间；

（Ⅲ）若f（x）的最小值为1，求a的取值范围．

【考点】利用导数研究函数的极值；利用导数研究函数的单调性；利用导数求闭区间上函数的最值．

【专题】常规题型；压轴题；转化思想．

【分析】（Ⅰ）对函数求导，令f'（1）=0，即可解出a值．

（Ⅱ）f'（x）>0，对a的取值范围进行讨论，分类解出单调区间．a≥2时，在区间（0，+∞）上是增函数，

（Ⅲ）由（2）的结论根据单调性确定出最小值，当a≥2时，由（II）知，f（x）的最小值为f（0）=1，恒成立；当0<a<2时，判断知最小值小于1，此时a无解．当0<a<2时，（x）的单调减区间为$\left(0,\sqrt{\frac{2-a}{a}}\right)$，单调增区间为$\left(\sqrt{\frac{2-a}{a}},+\infty\right)$

【解答】解：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{a}{ax+1}-\frac{2}{(1+x)^2}=\frac{ax^2+a-2}{(ax+1)(1+x)^2}$，

∵f'（x）在x=1处取得极值，f'（1）=0

即 a+a－2=0，解得 a=1

（Ⅱ）$f'(x)=\frac{ax^2+a-2}{(ax+1)(1+x)^2}$，

∵x≥0，a>0，

∴ax+1>0

①当a≥2时，在区间（0，+∞）上f'（x）>0．

∴f（x）的单调增区间为（0，+∞）

②当0<a<2时，由f'（x）>0解得$x>\sqrt{\frac{2-a}{a}}$

由$f'(x)<0$解得$x<\sqrt{\frac{2-a}{a}}$

∴f（x）的单调减区间为$\left(0,\sqrt{\frac{2-a}{a}}\right)$，单调增区间为$\left(\sqrt{\frac{2-a}{a}},+\infty\right)$

（Ⅲ）当a≥2时，由（II）知，f（x）的最小值为f（0）=1

当0<a<2时，由（II）②知，$f(x)$在$x=\sqrt{\frac{2-a}{a}}$处取得最小值

$f\left(\sqrt{\frac{2-a}{a}}\right)<f(0)=1$，

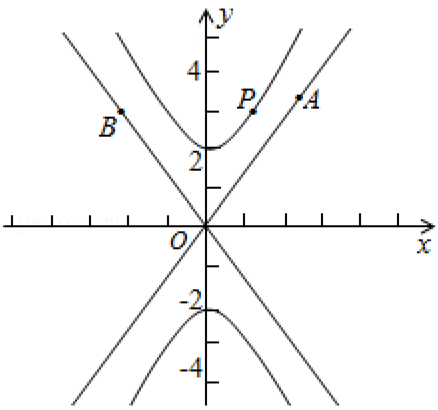
综上可知，若f（x）的最小值为1，则a的取值范围是[2，+∞）

【点评】考查导数法求单调区间与求最值，本类题型是导数的主要运用．

21．（12分）（2009•陕西）已知双曲线C的方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0），离心率$e=\frac{\sqrt{5}}{2}$，顶点到渐近线的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅰ）求双曲线C的方程；

（Ⅱ）如图，P是双曲线C上一点，A，B两点在双曲线C的两条渐近线上，且分别位于第一、二象限，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\lambda\in[\frac{1}{3}，2]$，求△AOB面积的取值范围．



【考点】双曲线的标准方程；直线与圆锥曲线的综合问题．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】（Ⅰ）先由双曲线标准方程求得顶点坐标和渐近线方程，进而根据顶点到渐近线的距离求得a，b和c的关系，进而根据离心率求得a和c的关系，最后根据$c=\sqrt{a^2+b^2}$综合得方程组求得a，b和c，则双曲线方程可得．

（Ⅱ）由（Ⅰ）可求得渐近线方程，设A（m，2m），B（﹣n，2n），根据$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$得P点的坐标代入双曲线方程化简整理m，n与λ的关系，设∠AOB=2θ，进而根据直线的斜率求得tanθ，进而求得sin2θ，进而表示出|OA|，得到△AOB的面积的表达式，根据λ的范围求得三角形面积的最大值和最小值，△AOB面积的取值范围可得．

【解答】解：（Ⅰ）由题意知，双曲线C的顶点（O，a）到渐近线ax﹣by=0的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即$\frac{ab}{c}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由$\begin{cases}\frac{ab}{c}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$，得$\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\sqrt{5}\end{cases}$

∴双曲线C的方程为$\frac{y^2}{4}-x^2=1$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知双曲线C的两条渐近线方程为$y=\pm 2x$．

设A（m，2m），B（﹣n，2n），m＞0，n＞0．

由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$得P点的坐标为$\left(\frac{m-\lambda n}{1+\lambda},\ \frac{2(m+\lambda n)}{1+\lambda}\right)$，

将P点坐标代入$\frac{y^2}{4}-x^2=1$，化简得$mn=\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}$．

设∠AOB=2θ，$\because\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2$，$\therefore\tan\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin 2\theta=\frac{4}{5}$．

又$|OA|=\sqrt{5}m$，$|OB|=\sqrt{5}n$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin 2\theta=2mn=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+1$．

记$S(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+1$，$\lambda\in[\frac{1}{3},\ 2]$，

由S'（λ）=0得λ=1，又S（1）=2，$S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}$，$S(2)=\frac{9}{4}$，

当λ=1时，△AOB的面积取得最小值2，当$\lambda=\frac{1}{3}$时，

△AOB的面积取得最大值$\frac{8}{3}$．

∴△AOB面积的取值范围是$[2,\ \frac{8}{3}]$．

【点评】本题主要考查了双曲线的标准方程和直线与圆锥曲线的综合问题．考查了学生综合分析问题的能力．

22．（14分）（2009•陕西）已知数列$\{x_n\}$满足$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，$n\in N^*$；

（1）猜想数列$\{x_{2n}\}$的单调性，并证明你的结论；

（Ⅱ）证明：$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$．

【考点】数列的函数特性；数学归纳法．

【专题】证明题；压轴题．

【分析】（1）对于数列$\{x_n\}$的单调性的证明，我们可以根据数列的前若干项，归纳推理出数列的单调性，然后再利用数学归纳法进行证明．

（2）我们可以将待证的问题进行转化，变形成

$|x_{n+1}-x_n|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}\right|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$的形式，然后结合已知条件进行证明．

【解答】证明：（1）由$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，

$\therefore x_2=\frac{2}{3}$，$x_3=\frac{3}{5}$，$x_4=\frac{5}{8}$，$x_5=\frac{8}{13}$，$x_6=\frac{13}{21}$，…

由$x_2>x_4>x_6$猜想：数列$\{x_{2n}\}$是递减数列

下面用数学归纳法证明：

（1）当n=1时，已证命题成立

（2）假设当n=k时命题成立，即$x_{2k}>x_{2k+2}$

易知$x_{2k}>0$，那么 $x_{2k+2}-x_{2k+4}=\frac{1}{1+x_{2k+1}}-\frac{1}{1+x_{2k+3}}=\frac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}$

$=\frac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0$

即$x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$

也就是说，当n=k+1时命题也成立，结合（1）和（2）知，命题成立

（2）当n=1时，$|x_{n+1}-x_n|=|x_2-x_1|=\frac{1}{6}$，结论成立

当n≥2时，易知$0<x_{n-1}<1$，

$\therefore 1+x_{n-1}<2$，$x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}>\frac{1}{2}$

$\therefore (1+x_n)(1+x_{n-1})=(1+\frac{1}{1+x_{n-1}})(1+x_{n-1})=2+x_{n-1}\geqslant\frac{5}{2}$

$\therefore |x_{n+1}-x_n|=|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$

$\leqslant\frac{2}{5}|x_n-x_{n-1}|\leqslant(\frac{2}{5})^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant(\frac{2}{5})^{n-1}|x_2-x_1|$

$=\frac{1}{6}(\frac{2}{5})^{n-1}$

【点评】本题（1）中的证明要用到数学归纳法，数学归纳法常常用来证明一个与自然数集N相关的性质，其步骤为：设P（n）是关于自然数n的命题，若1）（奠基）

P（n）在n=1时成立；2）（归纳）

在P（k）（k为任意自然数）成立的假设下可以推出P（k+1）成立，则P（n）对一切自然数n都成立．