2014年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（文科）试题及答案

本试卷共4页，21题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1.答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔盒涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4.作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题号对应的信息点，再作答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。

5.考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式：锥体的体积公式$V=\frac{1}{3}Sh$，其中S为锥体的底面积，h为锥体的高。

一组数据x_1，x_2，…，x_n的方差$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，其中$\overline{x}$表示这组数据的平均数

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，满分50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合$M=\{2，3，4\}$，$N=\{0，2，3，5\}$，则$M\cap N=$（　　）

A.{0，2}　　B.{2，3}　　C.{3，4}　　D.{3，5}

2．已知复数z满足$(3-4i)z=25$，则$z=$（　　）

A. $-3-4i$　　B. $-3+4i$　　C. $3-4i$　　D. $3+4i$

3. 已知向量$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（3，1）则$\vec{b}-\vec{a}$=（　　）

A.（−2，1）　　B.（2，−1）　　C.（2，0）　　D.（4，3）

4.若变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\le 8\\0\le x\le 4\\0\le y\le 3\end{cases}$，则$z=2x+y$的最大值等于（　　）

A.7　　B.8　　C.10　　D.11

5.下列函数为奇函数的是（　）

A. $2^x-\frac{1}{2^x}$　　B. $x^3\sin x$　　C. $2\cos x+1$　　D. x^2+2^x

6.为了解1000名学生的学习情况，采用系统抽样的方法，从中抽取容量为40的样本，则分段的间隔为（　）

A.50　　B.40　　C.25　　D.20

7.在ΔABC中，角A,B,C所对应的边分别为a,b,c,则“$a \le b$”是“$\sin A \le \sin B$”的（　）

A.充分必要条件　　B.充分非必要条件　　C.必要非充分条件　　D.非充分非必要条件

8.若实数k满足$0<k<5$，则曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{5-k}=1$与曲线$\dfrac{x^2}{16-k}-\dfrac{y^2}{5}=1$的（　）

A.实半轴长相等 B.虚半轴长相等 C.离心率相等 D.焦距相等

9.若空间中四条两两不同的直线l_1,l_2,l_3,l_4，满足$l_1 \perp l_2, l_2 /\!/ l_3, l_3 \perp l_4$,则下列结论一定正确的是（　）

A. $l_1 \perp l_4$　　B.$l_1 /\!/ l_4$　　C.l_1与l_4既不垂直也不平行　　D.l_1与l_4的位置关系不确定

10.对任意复数w_1,w_2,定义$\omega_1 * \omega_2=\omega_1\overline{\omega_2}$,其中$\overline{\omega_2}$是$\omega_2$的共轭复数，对任意复数$z_1,z_2,z_3$有如下四个命题：

①$(z_1+z_2)*z_3=(z_1*z_3)+(z_2*z_3)$;②$z_1*(z_2+z_3)=(z_1*z_2)+(z_1*z_3)$；

③$(z_1*z_2)*z_3=z_1*(z_2*z_3)$;④$z_1*z_2=z_2*z_1$；

则真命题的个数是（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

二、填空题：本大题共5小题，考生作答4小题，每小题5分，满分20分。

(一）必做题（11-13题）

11. 曲线$y=5e^x+3$在点（0，－2）处的切线方程为______________.

12.从字母a,b,c,d,e中任取两个不同字母，则取字母a的概率为________.

13.等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_1a_5=4$，则$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\log_2 a_4+\log_2 a_5=$________.

（二）选做题（14 – 15题，考生只能从中选做一题）

14，（坐标系与参数方程选做题）在极坐标系中，曲线C_1和C_2的方程分别为$2\rho\cos^2\theta=\sin\theta$和$\rho\cos\theta=1$，以极点为平面直角坐标系的原点，极轴为$x$轴的正半轴，建立直角坐标系，则曲线$C_1$与$C_2$交点的直角坐标为____________。

15.（几何证明选讲选做题）如图1，在平行四边形$ABCD$中，点E在AB上，且$EB=2AE$，AC与DE交于点F，则$\dfrac{\Delta CDF\text{的周长}}{\Delta AEF\text{的周长}}=$______________。

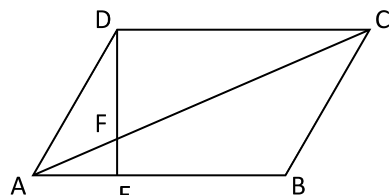

图1

三．解答题。本大题共6小题，满分80分。解答需写出文字说明、证明过程和演算步骤。

16.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=A\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$，$x\in R$，且$f(\dfrac{5\pi}{12})=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。

（1）求A的值；

（2）若$f(\theta)+f(-\theta)=\sqrt{3}$，$\theta\in$（0，$\dfrac{\pi}{2}$），求$f(\dfrac{\pi}{6}-\theta)$。

17. （本小题满分13分）

某车间20名工人年龄数据如下表：

年龄（岁）	工人数（人）
19	1
28	3
29	3
30	5
31	4
32	3
40	1
合计	20

（1）　求这20名工人年龄的众数与极差；

（2）　以十位数为茎，个位数为叶，作出这20名工人年龄的茎叶图；

（3）　求这20名工人年龄的方差.

18.（本小题满分13分）

如图2，四边形ABCD为矩形，PD⊥平面ABCD，AB=1,BC=PC=2,作如图3折叠，折痕EF∥DC.其中点E，F分别在线段PD，PC上，沿EF折叠后点P在线段AD上的点记为M，并且MF⊥CF.

（1）　证明：CF⊥平面MDF

（2）　求三棱锥M-CDE的体积.

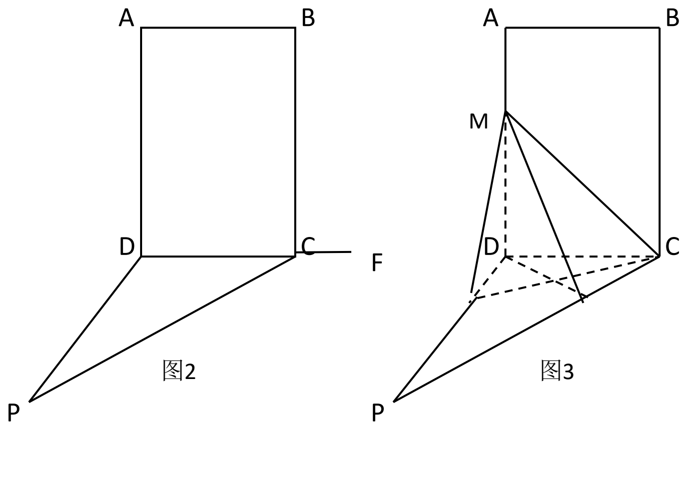

图2　图3

19.　（本小题满分14分）

设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且S_n满足$S_n^2-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0, n\in N^*$.

(1)求a_1的值；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(3)证明：对一切正整数n，有$\frac{1}{a_1(a_1+1)}+\frac{1}{a_2(a_2+1)}+\cdots\frac{1}{a_n(a_n+1)}<\frac{1}{3}$.

20.（本小题满分14分）

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为（$\sqrt{5}$，0），离心率e=$\frac{\sqrt{5}}{3}$，且椭圆C上的点到Q（0，2）的距离的最大值为3.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）若动点$P(x_0, y_0)$为椭圆C外一点，且点P到椭圆C的两条切线相互垂直，求点P的轨迹方程。

21.（本小题满分14分）

已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax+1(a\in R)$

（1） 求函数$f(x)$的单调区间；

（2） 当$a<0$时，试讨论是否存在$x_0\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$，学科网使得$f(x_0)=f(\frac{1}{2})$

2014年广东高考数学文科参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
选项	B	D	B	C	A	C	A	D	D	B

二、填空题

11. $5x+y+2=0$　　12. $\frac{2}{5}$　　13. 5　　14. （1，2）　　15. 3

三、解答题

16.（1）

$$\because f(x)=A\sin(x+\frac{\pi}{3}),\text{且}f(\frac{5\pi}{12})=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore f(\frac{5\pi}{12})=A\sin(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3})=A\sin\frac{3\pi}{4}=A\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore A=3.$$

（2）

$$\because f(x)=3\sin(x+\frac{\pi}{3}),\text{且}f(\theta)-f(-\theta)=\sqrt{3}.$$

$$\therefore f(\theta)-f(-\theta)=3\sin(\theta+\frac{\pi}{3})-3\sin(-\theta+\frac{\pi}{3})$$

$$=3\left[\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)\right]$$

$$=3\cdot2\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}=3\sin\theta=\sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}.\text{且}\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\because f(\frac{\pi}{6}-\theta)=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=3\cos\theta=\sqrt{6}$$

17. 解：（1）由图可知，众数为 30.极差为：40-19=21.

1	9
2	8 8 8 9 9 9
3	0 0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2

（2）根据表格可得：

$$\bar{x}=\frac{19+28\times3+29\times3+30\times5+31\times4+32\times3+40}{20}=30$$

$$\therefore s^2=\frac{1}{20}\Big[(19-30)^2+3(28-30)^2+3(29-30)^2+5(30-30)^2+4(31-30)^2+(41-30)^2$$

$$=13.05$$

18.解：证明：（1）

$\because PD\perp 面ABCD,且PD\subseteq 面PCD.$

$\therefore 面PCD\perp 面ABCD,交线为CD.$

$又\because 四边形ABCD为矩形，AD\perp CD,AD\subseteq 面ABCD$

$\therefore MD\perp 面PCD,又由于CF\subseteq 面PCD$

$\therefore MD\perp CF.$

$\because MF\perp CF,且MD\cap MF=M$

$\therefore CF\perp 面MDF$

解：（2）

$\because MD\perp 面PCD$

$\therefore V_{M-CDE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta CDE}\cdot MD.$

$\because CF\perp 面MDF,DF\subseteq 面MDF.$

$\therefore CF\perp DF$

$\because 在RT\Delta PCD中，CD=1,PC=2$

$\therefore \angle PCD=60°,且CD=1$

$\therefore CF=\frac{1}{2},故PF=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

$\therefore MF=\frac{3}{2}.$

$又\because CF\perp MF,故利用勾股定理得：CM=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\therefore 在RT\Delta MDC中，CM=\frac{\sqrt{10}}{2},CD=1,得DM=\frac{\sqrt{6}}{2}.$

$又\because F点位于CP的三分点,且PD=\sqrt{3}$

$\therefore E为PD的三分点，故DE=\frac{\sqrt{3}}{4}.$

$\therefore S_{\Delta CDE}=\frac{1}{2}CD\cdot DE=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$

$\therefore V_{M-CDE}=\frac{1}{3}S_{\Delta CDE}DM=\frac{\sqrt{2}}{16}.$

19.解：（1）由 $S_n^2-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0,n\in N^*$，令 $n=1$，得 $S_1^2-(-1)S_1-6=0$，

即 $a_1^2+a_1-6=0$.解得 $a_1=2$ 或 $a_1=-3$，由于数列 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $a_1=2$；

（2）由 $S_n^2-(n^2+n-3)S_n-3(n^2+n)=0,n\in N^*$，因式分解得 $(S_n+3)(S_n-n^2-2n)=0$

由数列 $\{a_n\}$ 为正项数列可得 $S_n-n^2-2n=0$，即 $S_n=n^2+2n$，当 $n\geq 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-\left[(n-1)^2+2(n-1)\right]=2n$，由 $a_1=2$ 可得，$\forall n\in N^*$，$a_n=2n$

（3）由（2）可知$\dfrac{1}{a_n\left(a_n+1\right)}=\dfrac{1}{2n\left(2n+1\right)}$

$\forall n\in N^*$ $\dfrac{1}{a_n\left(a_n+1\right)}=\dfrac{1}{2n\left(2n+1\right)}<\dfrac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

当$n=1$时，显然有$\dfrac{1}{a_1\left(a_1+1\right)}=\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{3}$；

当$n\geq 2$时，$\dfrac{1}{a_1\left(a_1+1\right)}+\dfrac{1}{a_2\left(a_2+1\right)}+\cdots+\dfrac{1}{a_n\left(a_n+1\right)}$

$<\dfrac{1}{2\cdot\left(2+1\right)}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{3}$

所以，对一切正整数n，有$\dfrac{1}{a_1(a_1+1)}+\dfrac{1}{a_2(a_2+1)}+\cdots\dfrac{1}{a_n(a_n+1)}<\dfrac{1}{3}$.

20.解：（1）由$c=\sqrt{5},e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$得：$a=3,b=2.$

椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

设两个切点分别为A、B

（2）①当两条切线中有一条斜率不存在时，即A、B两点分别位于椭圆长轴与短轴的端点，P点坐标为（$\pm3,\pm2$）

②当两条切线斜率均存在时，

设椭圆切线斜率为k，过点P的椭圆切线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$

联立$\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0)\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得

$(9k^2+4)x^2+(18ky_0-18k^2x_0)x+9k^2x_0^2-18kx_0y_0+9y_0^2-36=0$

$\triangle=0\Rightarrow 9k^2+4=(kx_0-y_0)^2\Rightarrow(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4=0$

设PA、PB斜率分别为k_1、k_2，则$k_1\bullet k_2=\dfrac{y_0^2-4}{x_0^2-9}$

又PA、PB互相垂直，$\therefore k_1\bullet k_2=\dfrac{y_0^2-4}{x_0^2-9}=-1$

化简得$x_0^2+y_0^2=13(x_0\neq\pm3)$

又$\because P$（$\pm3,\pm2$）在$x_0^2+y_0^2=13$上

$\therefore$点P在圆$x^2+y^2=13$上.

21.解：（1）由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax+1$，求导得 $f'(x)=x^2+2x+a$，令 $f'(x)=0$

即 $x^2+2x+a=0$，$\Delta=4-4a$，

① 当 $\Delta\le 0$，即 $a\ge 1$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

② 当 $\Delta>0$，即 $a<1$ 时，方程 $x^2+2x+a=0$ 的两根分别为：

$x_1=-1+\sqrt{1-a}$，$x_2=-1-\sqrt{1-a}$，

当 $x\in\left(-\infty,-1-\sqrt{1-a}\right), f'(x)>0, f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(-1+\sqrt{1-a},+\infty\right), f'(x)>0, f(x)$ 单调递增。

（1） 当 $a<0$ 时，由（1），令 $x_1=-1+\sqrt{1-a}=1$，解得 $a=-3$.

①当 $a<-3$ 时，$1<-1+\sqrt{1-a}$，由（1）的讨论可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，此

$x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

②当 $-3<a<0$ 时，$1>-1+\sqrt{1-a}$，$f(x)$ 在 $\left(0,-1+\sqrt{1-a}\right)$ 递减，在 $\left(-1+\sqrt{1-a}\right.$

$f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}a+\frac{25}{24}$，依题意，要 $f(x)$ 存在 $x_0\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(x_0)$

只需 $f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}a+\frac{25}{24}>0$，解得 $a>-\frac{25}{12}$，于是有 $-\frac{25}{12}<a<0$ 即为所求。