# 2012年高考湖北理科数学试卷解析（教师版）

【试卷总评】

试题紧扣2012年《考试大纲》，题目新颖，难度适中。本卷注重对基础知识和数学思想方法的全面考查，同时又强调考查学生的基本能力。选择题与填空题主要体现了基础知识与数学思想方法的考查；第17、18、19、20、21、22题分别从三角函数、立体几何、数列、解析几何、函数与导数等重点知识进行了基础知识、数学思想方法及基本能力的考查.第14与15题考查了选学讲内容，试卷整体体现坚持注重基础知识，全面考查了理解能力、推理能力、分析解决问题的能力.

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 方程 $x^2$ +6x +13 =0 的一个根是（　　）

A -3+2i　B　3+2i　C　-2 + 3i　D　2 + 3i

【答案】A

【解析】由求根公式得 $\frac{-6\pm\sqrt{52-36i}}{2}=\frac{-6\pm 4i}{2}=-3\pm 2i$，故选A.

【考点定位】本小题考查复系数方程的根的求法.复数是高考的一个热点问题,年年必考,以选择或填空题的形式考查,主要复数的定义、运算以及复数的几何意义，难度不大.

2. 命题“$\exists x_0\in C_RQ$，$x_0^3\in Q$”的否定是（　　）

A　$\exists x_0\notin C_RQ$，$x_0^3\in Q$　　B　$\exists x_0\in C_RQ$，$x_0^3\notin Q$

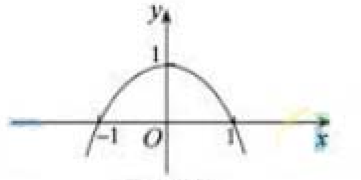
C　$\forall x_0\notin C_RQ$，$x_0^3\in Q$　D　$\forall x_0\in C_RQ$，$x_0^3\notin Q$

【答案】D

【解析】存在性命题的否定是全称命题：$\forall x_0\in C_RQ$，$x_0^3\notin Q$,故选D.

【考点定位】本小题考查存在性命题的否定是全称命题.这两种特殊命题的否定是高考的热点问题之一,几乎年年必考,同学们必须熟练掌握.

3. 已知二次函数 y =f(x)的图像如图所示，则它与X轴所围图形的面积为（　　）




第3题图

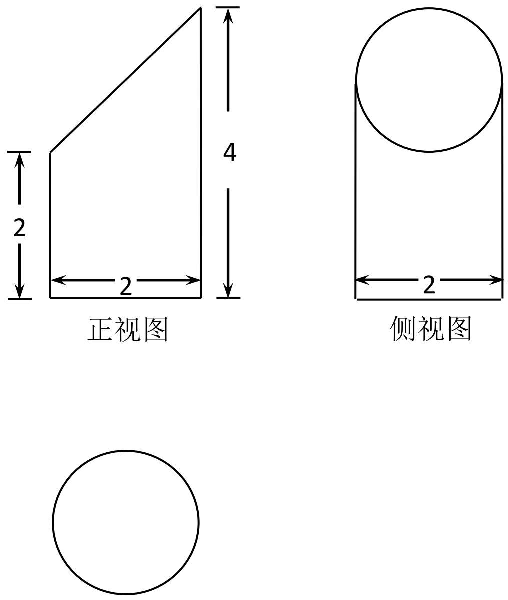
A. $\dfrac{2\pi}{5}$　B. $\dfrac{4}{3}$　C. $\dfrac{3}{2}$　D. $\dfrac{\pi}{2}$

【答案】B

【解析】由题意知，二次函数 y =f(x)的图像与 x 轴所围图形 $(-\frac{1}{3}x^3+x)|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$，所以选 B.

【考点定位】本小题考查利用定积分求平面图形的面积问题，不难. 定积分是理科生高考的热点分问题之一，几乎年年必考，熟练其基础知识是解决好本类题目的关键.

4.已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）




第 4 题图

A. $\dfrac{8\pi}{3}$　B.3π　C. $\dfrac{10\pi}{3}$　D.6π

【答案】B

【解析】由三视图可知，该几何体为一底面半径为 1 且高为 2 的圆柱与一圆锥组合而成，所以其体积为 $2\pi+\pi=3\pi$，故选 B.

【考点定位】本小题考查立体几何中的三视图. 三视图是新课标新增内容，是高考的重点和热点，年年必考，一般以选择或填空题的形式出现，经常与表面积、体积相结合来考查.

5.设 a∈Z，且 0≤a≤13，若 $51^{2012}$+a 能被 13 整除，则 a=（　　）

A.0　B.1　C.11　D.12

【答案】D

【解析】因为 $51^{2012}$ 的个位数是 1，且 a∈Z，0≤a≤13，$51^{2012}$+a 能被 13 整除，所以 $a=12$，故选 D.

【考点定位】本小题考查整除问题，属中档题.

6.设 a,b,c,x,y,z 是正数，且 $a^2+b^2+c^2=10$，$x^2+y^2+z^2=40$，ax+by+cz=20，则 $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D, $\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】由于 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(ax+by+cz)^2$，等号成立当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=t$，则 a=t x　b=t y　c=t z ，$t^2(x^2+y^2+z^2)=10$，所以由题知 $t=1/2$，又 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}$，所以 $\frac{a+b+c}{x+y+z}=t=1/2$，答案选 C.

【考点定位】本题主要考察了柯西不等式的使用以及其取等条件.

7.定义在（-∞，0）∪（0，+∞）上的函数 f（x），如果对于任意给定的等比数列$\{a_n\}$，{f（$a_n$）}仍是等比数列，则称 f（x）为“保等比数列函数”。现有定义在（-∞，0）∪（0，+∞）上的如下函数：①f（x）=$x^2$；②f（x）=$2^x$；③$f(x)=\sqrt{|x|}$；④f（x）=ln|x|。

则其中是“保等比数列函数”的 f（x）的序号为（　　）

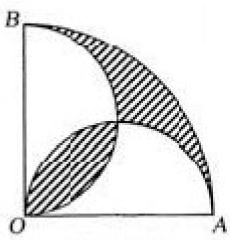
A.①②　　B.③④　　C.①③　　D.②④

【答案】C

【解析】若数列$\{a_n\}$是等比数列，则数列$\{a_n^2\}$也是等比数列，故①是“保等比数列函数”；同理③对应的函数也是等比数列，故选 C.

【考点定位】本小题以数列为载体，给出了新定义的题目，考查了同学们利用所学问题分析问题和解决问题的能力，近几年的高考对这类问题的考查越来越重视，应引起我们的重视.

8.如图，在圆心角为直角的扇形 OAB 中，分别以 OA，OB 为直径作两个半圆。在扇形 OAB 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是（　　）




第 8 题图

A. $1-\frac{2}{\pi}$　　B. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$.　　C. $\frac{2}{\pi}$　　D. $\frac{1}{\pi}$

【答案】A

【解析】设以 OA，OB 为直径作两个半圆的半径为$r$，则扇形 OAB 的半径为$2r$，则左下方的阴影区域面积为$2(\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2)=(\frac{1}{2}\pi-1)r^2$，右上方阴影区域面积为$\frac{1}{4}\pi\cdot 4r^2-\frac{1}{2}\pi r^2-\frac{1}{4}\pi r^2-[\frac{1}{2}r^2-(\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2)]=\frac{1}{2}\pi r^2-r^2$，所以阴影部分的面积为$\pi r^2-2r^2$，又因为扇形 OAB 的面积为$\frac{1}{4}\pi\cdot 4r^2=\pi r^2$，所以阴影部分的概率为$\frac{\pi r^2-2r^2}{\pi r^2}=1-\frac{2}{\pi}$，故选 A.

【考点定位】本小题考查几何概型，对文科来说，几何概型与古典概型是概率部分的重点内容，是高考的热点内容，年年必考，熟练这两种模型是解答好本类题目的关键.

9.函数 f（x）= $x\cos x^2$ 在区间[0,4]上的零点个数为(　　)

A.4　B.5　C.6　D.7

【答案】C

【解析】令 f（x）= $x\cos x^2$ =0 得 $x=0$ 或 $\cos x^2$ =0，解得 $x=0$ 或 $x^2=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in z$，因为 $x\in[0,4]$，所以 $x=0$ 、$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 、$\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$ 、$\sqrt{\frac{5\pi}{2}}$ 、$\sqrt{\frac{7\pi}{2}}$ 、$\sqrt{\frac{9\pi}{2}}$，共有 6 个零点，故选 C.

【考点定位】本小题考查函数的零点求解. 函数的零点即方程 $f(x)=0$ 的根，是高考的热点问题之一，年年必考，掌握求函数零点的几种方法(解方程法、画图象法等).

10.我国古代数学名著《九章算术》中“开立圆术”曰：置积尺数，以十六乘之，九而一，所得开立方除之，即立圆径，“开立圆术”相当于给出了已知球的体积 V，求其直径 d 的一个近似公式 $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$ .人们还用过一些类似的近似公式。根据 x=3.14159.....判断，下列近似公式中最精确的一个是(　　)

A. $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$　　B. $d\approx\sqrt[3]{2V}$　　C. $d\approx\sqrt[3]{\frac{300}{157}V}$　　D. $d\approx\sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$

【答案】D

【解析】

由$V=\frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3$，得$d=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$,设选项中常数为$\frac{a}{b}$,则$\pi=\frac{6b}{a}$；$A$中代入得$\pi=\frac{6\times 9}{16}=3.375$，

$B$中代入得$\pi=\frac{6\times 1}{2}=3$，C中代入得$\pi=\frac{6\times 157}{300}=3.14$,$D$中代入得$\pi=\frac{6\times 11}{21}=3.142857$，

由于D中值最接近$\pi$的真实值，故选择D。

【考点定位】本小题考查球的有关问题.球问题也是高考的一个重点问题之一,熟练球的基础知识是解决好本题的关键.

**二、填空题：本大题共 6 小题，考试共需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。请将答案填在答题卡对应题号的位置上。答错位置，书写不清，模棱两可均不得分。**

（一）必考题（11-14 题）

11.设△ABC 的内角 A，B，C，所对的边分别是 a，b，c.若（a+b-c）（a+b+c）=ab，则角 C=______________.

【答案】$\frac{2\pi}{3}$

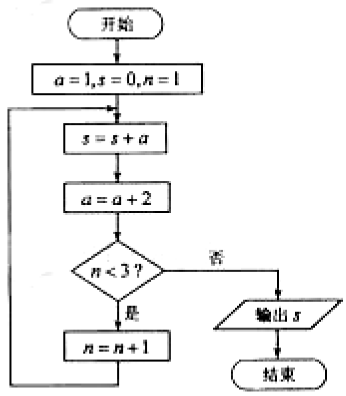
【解析】因为（a+b-c）（a+b+c）=ab，所以$(a+b)^2-c^2=ab$,即$a^2+b^2-c^2=-ab$,

所以由余弦定理可得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$，又因为角 c 是三角形的一个内角，

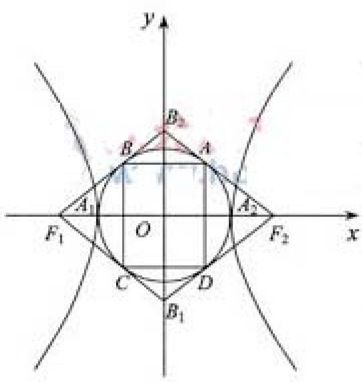
所以角 C=$\frac{2\pi}{3}$.

【考点定位】本小题考查三角形中余弦定理的应用.正余弦定理的应用是高考的重点和热点,几乎年年必考,可能以选择或填空题的形式单独考查,也可能与三角函数相结合在解答题中考查,属于中低档题.

12.阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，输出的结果 s=___________.




第 12 题图




第 14 题图

【答案】9

【解析】当$a=1,n=1$时，计算出的$s=1$；当$a=3,n=2$时，计算出的$s=4$；当$a=5,n=3$时，计算出的$s=9$，此时输出的结果 s=9.

【考点定位】本小题考查框图的基本知识. 框图是高考的热点内容之一，年年必考，经常以选择或填空题的形式出现一个，难度不大，熟练基本算法以及算到哪一步是解决好本类问题的关键.

13.回文数是指从左到右与从右到左读都一样的正整数。如 22，,11,3443,94249 等。显然 2 位回文数有 9 个：11,22,33…，99.3 位回文数有 90 个：101,111,121，…，191,202，…，999.则

（Ⅰ）4 位回文数有______个；

（Ⅱ）2n＋1（n∈$N_+$）位回文数有______个。

【答案】（Ⅰ）90；（Ⅱ）$9\cdot10^n$

【解析】（Ⅰ）由题意知，4 位回文数有 1001, 1111, 1221, …, 1991, 2002, 2112, …, 9999, 共 90 个；（Ⅱ）因为 3 位回文数有 90 个，5 位回文数有 900 个，…，所以 2n＋1（n∈$N_+$）位回文数有$9\cdot10^n$个.

【考点定位】本小题考查归纳推理.推理归纳与类比，是近几年高考的一个热点问题之一，几乎年年必考，一般以选择或填空题的形式考查，应熟练基础知识.

14.如图，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$的两顶点为 $A_1$，$A_2$，虚轴两端点为 B1，B2，两焦点为 $F_1$，$F_2$.若以 $A_1A_2$ 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$，切点分别为 A，B，C，D.则

（Ⅰ）双曲线的离心率 e=______；

（Ⅱ）菱形 $F_1B_1F_2B_2$ 的面积 $S_1$ 与矩形 ABCD 的面积 $S_2$ 的比值$\frac{S_1}{S_2}=$________.

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$；（Ⅱ）$\dfrac{\sqrt{5}+2}{2}$

【解析】（Ⅰ）在$\Delta F_1OB_1$中，$a\cdot\sqrt{b^2+c^2}=bc$，整理得$c^4-3a^2c^2+a^4=0$，即

$e^4-3e^2+1=0$，解得$e^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，即$e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$；（Ⅱ）由图分析可知，面积之比为

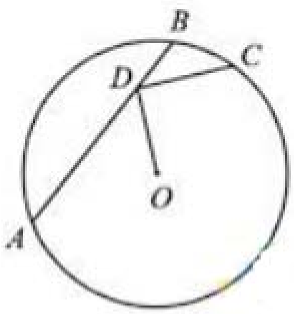
$\dfrac{bc}{a^2}=\sqrt{\dfrac{(c^2-a^2)c^2}{a^4}}=\sqrt{e^4-e^2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{2}$.

【考点定位】本小题考查双曲线离心率的求解，考查直线与圆相切等基础知识，考查了同学们分析问题和解决问题的能力.

（二）选考题（请考生在第 15、16 两题中任选一题作答，请先在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框用 2B 铅笔涂黑，如果全选，则按第 15 题作答结果计分。）

15.（选修 4-1：几何证明选讲）

如图，点 D 在⊙O 的弦 AB 上移动，AB=4，连接 OD，过点 D 作 OD 的垂线交⊙O 于点 C，则 CD 的最大值为_____________.




第 15 题图

【答案】2

【解析】因为 CD 垂直 OD，且圆的半径一定，所以要使 CD 最大，只须 OD 最小即可，而当 OD 垂直 AB 时，OD 最小，此时 $OD=\sqrt{r^2-4}$（r 的圆的半径），所以 CD 的最大值为 $\sqrt{r^2-(r^2-4)}=2$.

【考点定位】本小题考查直线与圆有关知识.直线与圆是解析几何中重点内容之一，也是高考的一个热点问题.

16.（选修 4-4：坐标系与参数方程）

在直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知射线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 与曲线 $\begin{cases}x=t+1,\\ y=(t-1)^2\end{cases}$ （t 为参数）相较于 A，B 来两点，则线段 AB 的中点的直角坐标为_________.

【答案】$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$

【解析】$\theta=\frac{\pi}{4}$ 在直角坐标系下的一般方程为 $y=x(x\in R)$，将参数方程 $\begin{cases}x=t+1,\\ y=(t-1)^2\end{cases}$ （t 为参数）转化为直角坐标系下的一般方程为 $y=(t-1)^2=(x-1-1)^2=(x-2)^2$ 表示一条抛物线，联立上面两个方程消去 $y$ 有 $x^2-5x+4=0$，设 $A$、$B$ 两点及其中点 $P$ 的横坐标分别为 $x_A$、$x_B$、$x_0$，则有韦达定理 $x_0=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5}{2}$，又由于点 $P$ 点在直线 $y=x$ 上，因此 $AB$ 的中点 $P(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$.

.【考点定位】本小题考查坐标系与参数方程,属选学内容之一,熟练掌握基础知识是解决好本题目的关键.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x,\ \sin\omega x)$，$\boldsymbol{b}=(-\cos\omega x-\sin\omega x,\ 2\sqrt{3}\cos\omega x)$，设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\ (x\in\mathbf{R})$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，其中 $\omega$，$\lambda$ 为常数，且 $\omega\in(\frac{1}{2},\ 1)$.

（1） 求函数 f（x）的最小正周期；

（2） 若 y=f（x）的图像经过点 $(\frac{\pi}{4},0)$，求函数 f（x）在区间 $[0,\frac{3\pi}{5}]$ 上的取值范围.

【解析】（1）因为 $f(x)=\sin^2\omega x-\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\lambda$

$=-\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x+\lambda=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})+\lambda$，所以

由直线直线 x=π 是 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，可得 $\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})=\pm1$，

所以 $2\omega x-\frac{\pi}{6})=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in z$，即 $\omega=\frac{k}{2}+\frac{1}{3},k\in z$，又因为 $\omega\in(\frac{1}{2},1),k\in z$，

所以 $k=1$，故 $\omega=\frac{5}{6}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{6\pi}{5}$.

(2)由 $y=f(x)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{4},0)$，得 $f(\frac{\pi}{4})=0$，

即 $\lambda=-2\sin(\frac{5}{6}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=-2\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$，即 $\lambda=-\sqrt{2}$，故 $f(x)=2\sin(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6})-\sqrt{2}$，

由 $0\le x\le\frac{3\pi}{5}$ 得 $-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，所以 $-\frac{1}{2}\le\sin(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6})\le 1$，

得 $-1-\sqrt{2}\le 2\sin(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6})-\sqrt{2}\le 2-\sqrt{2}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{5}]$ 上的取值范围为 $[-1-\sqrt{2},2-\sqrt{2}]$.

【考点定位】本题考查三角函数的化简与求值，考查三角函数的基本性质等基础知识，考查考生分析问题与解决问题的能力.

18.（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$前三项的和为-3，前三项的积为 8.

（1）求等差数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $a_2,a_3,a_1$ 成等比数列，求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项的和.

【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d$，则 $a_2=a_1+d$，$a_3=a_1+2d$，

由题意得 $\begin{cases}3a_1+3d=-3\\a_1(a_1+d)(a_1+2d)=8\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=2\\d=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-4\\d=3\end{cases}$，

所以由等差数列通项公式可得：$a_n=3n+5$ 或 $a_n=3n-7$.

(2)当 $a_n=3n+5$ 时，$a_2,a_3,a_1$ 分别为 $-1,-4,2$，不成等比数列；

当 $a_n=3n-7$ 时，$a_2,a_3,a_1$ 分别为 $-1,2,-4$，成等比数列，满足条件，所以

$|a_n|=|3n-7|=\begin{cases}-3n+7,n=1,2\\3n-7,n\ge 3\end{cases}$，设数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项的和为 $S_n$，则

当 $n=1$ 时，$S_1=|a_1|=4$；当 $n=2$ 时，$S_1=|a_1|+|a_2|=5$；

当 $n\ge 3$ 时，$S_n=S_2+|a_3|+|a_4|+\cdots+|a_n|=5+(3\times3-7)+(3\times4-7)+\cdots+(3n-7)$

$=5+\frac{(n-2)[2+(3n-7)]}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{11}{2}n+10$，当 $n=2$ 时，满足上式，

综上，$S_n=\begin{cases}4,n=1\\\frac{3}{2}n^2-\frac{11}{2}n+10,n\ge 2\end{cases}$.

【考点定位】本小题考查等差数列的通项公式的求解，考查等比数列等基础知识，考查分类讨论的数学思想方法，考查同学们运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

19.（本小题满分 12 分）

如图 1，∠ACB=45°，BC=3，过动点 A 作 AD⊥BC，垂足 D 在线段 BC 上且异于点 B，连接 AB，沿 AD 将△ABD 折起，使∠BDC=90°（如图 2 所示），

（1）当 BD 的长为多少时，三棱锥 A-BCD 的体积最大；

（2）当三棱锥 A-BCD 的体积最大时，设点 E，M 分别为棱 BC，AC 的中点，试在棱 CD 上确定一点 N，使得 EN⊥BM，并求 EN 与平面 BMN 所成角的大小

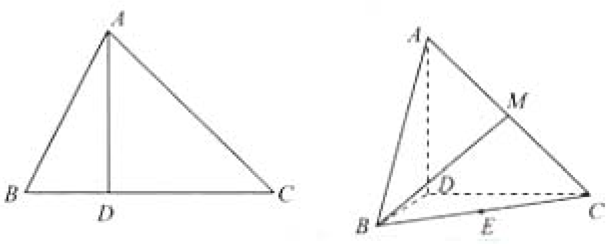



图 1　　图 2

第 19 题图

**【解析】**

（Ⅰ）**解法 1：** 在如图 1 所示的△ $ABC$ 中，设 $BD=x\ (0<x<3)$，则 $CD=3-x$．

由 $AD\perp BC$，$\angle ACB=45^\circ$ 知，△ $ADC$ 为等腰直角三角形，所以 $AD=CD=3-x$．

由折起前 $AD\perp BC$ 知，折起后（如图 2），$AD\perp DC$，$AD\perp BD$，且 $BD\cap DC=D$，

所以 $AD\perp$ 平面 $BCD$．又 $\angle BDC=90^\circ$，所以 $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot CD=\frac{1}{2}x(3-x)$．于是

$$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2}x(3-x)=\frac{1}{12}\cdot 2x(3-x)(3-x)$$

$$\le\frac{1}{12}\left[\frac{2x+(3-x)+(3-x)}{3}\right]^3=\frac{2}{3},$$

当且仅当 $2x=3-x$，即 $x=1$ 时，等号成立，

故当 $x=1$，即 $BD=1$ 时，三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大.

**解法 2：**

同解法 1，得 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2}x(3-x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x)$．

令 $f(x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x)$，由 $f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-3)=0$，且 $0<x<3$，解得 $x=1$．

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,3)$ 时，$f'(x)<0$．

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值.

故当 $BD=1$ 时，三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大.

（Ⅱ）**解法 1：** 以 $D$ 为原点，建立如图 a 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$．

由（Ⅰ）知，当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时，$BD=1$，$AD=CD=2$．

于是可得 $D(0,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 0,\ 0)$，$C(0,2,\ 0)$，$A(0,\ 0,\ 2)$，$M(0,1,1)$，$E(\frac{1}{2},1,0)$，

且 $\overrightarrow{BM}=(-1,\ 1,\ 1)$．

设 $N(0,\lambda,0)$，则 $\overrightarrow{EN}=(-\frac{1}{2},\lambda-1,0)$．因为 $EN\perp BM$ 等价于 $\overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，即

$(-\frac{1}{2},\lambda-1,\ 0)\cdot(-1,\ 1,\ 1)=\frac{1}{2}+\lambda-1=0$，故 $\lambda=\frac{1}{2}$，$N(0,\ \frac{1}{2},\ 0)$．

所以当 $DN=\frac{1}{2}$（即 $N$ 是 $CD$ 的靠近点 $D$ 的一个四等分点）时，$EN\perp BM$．

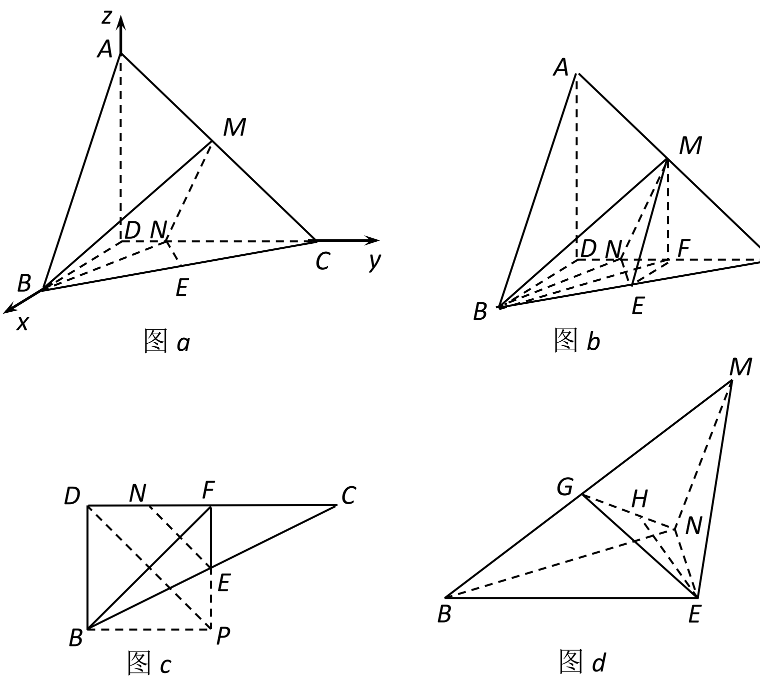
设平面 $BMN$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BN},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BM},\end{cases}$ 及 $\overrightarrow{BN}=(-1,\frac{1}{2},0)$，

得 $\begin{cases}y=2x,\\ z=-x.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(1,\ 2,\ -1)$．

设 $EN$ 与平面 $BMN$ 所成角的大小为 $\theta$，则由 $\overrightarrow{EN}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 0)$，$\boldsymbol{n}=(1,\ 2,\ -1)$，可得

$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EN}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EN}|}\right|=\dfrac{|-\frac{1}{2}-1|}{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\theta=60^\circ$．

故 $EN$ 与平面 $BMN$ 所成角的大小为 $60^\circ$.




第 19 题解答图

**解法 2：** 由（Ⅰ）知，当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时，$BD=1$，$AD=CD=2$．

如图 b，取 $CD$ 的中点 $F$，连结 $MF$，$BF$，$EF$，则 $MF$ // $AD$．

由（Ⅰ）知 $AD\perp$ 平面 $BCD$，所以 $MF\perp$ 平面 $BCD$．

如图 c，延长 $FE$ 至 P 点使得 $FP=DB$，连 $BP$，$DP$，则四边形 $DBPF$ 为正方形，

所以 $DP\perp BF$．取 $DF$ 的中点 $N$，连结 $EN$，又 $E$ 为 $FP$ 的中点，则 $EN$ // $DP$，

所以 $EN\perp BF$．因为 $MF\perp$ 平面 $BCD$，又 $EN\subset$ 面 $BCD$，所以 $MF\perp EN$．

又 $MF\cap BF=F$，所以 $EN\perp$ 面 $BMF$．又 $BM\subset$ 面 $BMF$，所以 $EN\perp BM$．

因为 $EN\perp BM$ 当且仅当 $EN\perp BF$，而点 F 是唯一的，所以点 $N$ 是唯一的．

即当 $DN=\frac{1}{2}$（即 $N$ 是 $CD$ 的靠近点 $D$ 的一个四等分点），$EN\perp BM$．

连接 $MN$，$ME$，由计算得 $NB=NM=EB=EM=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以△$NMB$ 与△$EMB$ 是两个共底边的全等的等腰三角形，

如图 d 所示，取 $BM$ 的中点 $G$，连接 $EG$，$NG$，

则 $BM\perp$ 平面 $EGN$．在平面 $EGN$ 中，过点 $E$ 作 $EH\perp GN$ 于 $H$，

则 $EH\perp$ 平面 $BMN$．故 $\angle ENH$ 是 $EN$ 与平面 $BMN$ 所成的角．

在△$EGN$ 中，易得 $EG=GN=NE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以△$EGN$ 是正三角形，

故 $\angle ENH=60^\circ$，即 $EN$ 与平面 $BMN$ 所成角的大小为 $60^\circ$.

【考点定位】本小题考查空间线线与线面的位置关系，考查同学们的空间想象能力、逻辑推理能力、分析问题与解决问题的能力.

20.（本小题满分12分）

根据以往的经验，某工程施工期间的将数量X（单位：mm）对工期的影响如下表：

| 降水量X | X<300 | 300≤X<700 | 700≤X<900 | X≥900 |
|---|---|---|---|---|
| 工期延误天数Y | 0 | 2 | 6 | 10 |

历年气象资料表明，该工程施工期间降水量X小于300，700，900的概率分别为0.3，0.7，0.9，求：

（I）工期延误天数Y的均值与方差；

（Ⅱ）在降水量X至少是300的条件下，工期延误不超过6天的概率。

【解析】

（Ⅰ）由已知条件和概率的加法公式有：

$P(X<300)=0.3,\ P(300\le X<700)=P(X<700)-P(X<300)=0.7-0.3=0.4$，

$P(700\le X<900)=P(X<900)-P(X<700)=0.9-0.7=0.2$.

$P(X\ge 900)=1-P(X<900)=1-0.9=0.1$.

所以 $Y$ 的分布列为：

| $Y$ | 0 | 2 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

于是，$E(Y)=0\times 0.3+2\times 0.4+6\times 0.2+10\times 0.1=3$；

$D(Y)=(0-3)^2\times 0.3+(2-3)^2\times 0.4+(6-3)^2\times 0.2+(10-3)^2\times 0.1=9.8$.

故工期延误天数 $Y$ 的均值为 3，方差为 $9.8$.

（Ⅱ）由概率的加法公式，$P(X\ge 300)=1-P(X<300)=0.7$,

又 $P(300\le X<900)=P(X<900)-P(X<300)=0.9-0.3=0.6$.

由条件概率，得 $P(Y\le 6|X\ge 300)=P(X<900|X\ge 300)=\dfrac{P(300\le X<900)}{P(X\ge 300)}=\dfrac{0.6}{0.7}=\dfrac{6}{7}$.

故在降水量 $X$ 至少是 300 mm 的条件下，工期延误不超过 6 天的概率是 $\dfrac{6}{7}$.

【考点定位】本小题考查概率与统计的基础知识.概率统计是高考的一个热点问题,几乎年年必考,熟练基础知识是解决好类题目的关键.

21.（本小题满分13分）

设A是单位圆$x^2+y^2=1$上的任意一点，i是过点A与x轴垂直的直线，D是直线i与x轴的交点，点M在直线l上，且满足｜DM｜=m｜DA｜（m>0,且m≠1）。当点A在圆上运动时，记点M的轨迹为曲线C。

（I）求曲线C的方程，判断曲线C为何种圆锥曲线，并求焦点坐标；

.（Ⅱ）过原点且斜率为k的直线交曲线C于P、Q两点，其中P在第一象限，它在y轴上的射影为点N，直线QN交曲线C于另一点H，是否存在m，使得对任意的k>0，都有PQ⊥PH？若存在，求m的值；若不存在，请说明理由。

【解析】

（Ⅰ）如图 1，设 $M(x,y)$，$A(x_0,y_0)$，则由 $|DM|=m|DA|(m>0,且m\ne 1)$，

可得 $x=x_0$，$|y|=m|y_0|$，所以 $x_0=x$，$|y_0|=\dfrac{1}{m}|y|$.　①

因为 $A$ 点在单位圆上运动，所以 $x_0{}^2+y_0{}^2=1$.　②

将①式代入②式即得所求曲线 $C$ 的方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{m^2}=1\ (m>0,\text{且}m\neq 1)$.

因为 $m\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，所以

当 $0<m<1$ 时，曲线 $C$ 是焦点在 $x$ 轴上的椭圆，

两焦点坐标分别为 $(-\sqrt{1-m^2},0)$，$(\sqrt{1-m^2},0)$；

当 $m>1$ 时，曲线 $C$ 是焦点在 $y$ 轴上的椭圆，

两焦点坐标分别为 $(0,-\sqrt{m^2-1})$，$(0,\sqrt{m^2-1})$.

（Ⅱ）**解法 1**：如图 2、3，$\forall k>0$，设 $P(x_1,kx_1)$，$H(x_2,y_2)$，则 $Q(-x_1,-kx_1)$，$N(0,kx_1)$，

直线 $QN$ 的方程为 $y=2kx+kx_1$，将其代入椭圆 $C$ 的方程并整理可得

$(m^2+4k^2)x^2+4k^2x_1x+k^2x_1^2-m^2=0$.

依题意可知此方程的两根为 $-x_1$，$x_2$，于是由韦达定理可得

$-x_1+x_2=-\dfrac{4k^2x_1}{m^2+4k^2}$，即 $x_2=\dfrac{m^2x_1}{m^2+4k^2}$.

因为点 $H$ 在直线 $QN$ 上，所以 $y_2-kx_1=2kx_2=\dfrac{2km^2x_1}{m^2+4k^2}$.

于是 $\overrightarrow{PQ}=(-2x_1,-2kx_1)$，$\overrightarrow{PH}=(x_2-x_1,y_2-kx_1)=(-\dfrac{4k^2x_1}{m^2+4k^2},\dfrac{2km^2x_1}{m^2+4k^2})$.

而 $PQ\perp PH$ 等价于 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}=\dfrac{4(2-m^2)k^2x_1^2}{m^2+4k^2}=0$，

即 $2-m^2=0$，又 $m>0$，得 $m=\sqrt{2}$，

故存在 $m=\sqrt{2}$，使得在其对应的椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上，对任意的 $k>0$，都有 $PQ\perp PH$.

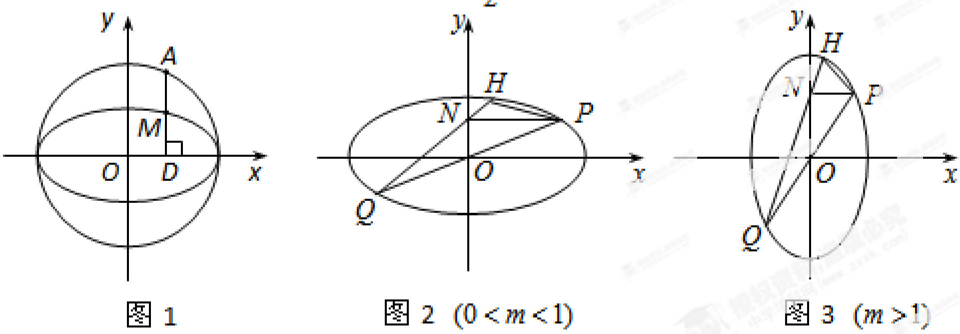



图 1　　图 2 $(0<m<1)$　　图 3 $(m>1)$

第 21 题解答图

**解法 2**：如图 2、3，$\forall x_1\in(0,1)$，设 $P(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，则 $Q(-x_1,-y_1)$，$N(0,y_1)$，

因为 $P$，$H$ 两点在椭圆 $C$ 上，所以 $\begin{cases}m^2x_1^2+y_1^2=m^2,\\ m^2x_2^2+y_2^2=m^2,\end{cases}$ 两式相减可得

$m^2(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)=0$.　③

依题意，由点 $P$ 在第一象限可知，点 $H$ 也在第一象限，且 $P$，$H$ 不重合，

故 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)\neq 0$. 于是由③式可得

$$\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-m^2. \qquad ④$$

又 $Q$， $N$， $H$ 三点共线，所以 $k_{QN}=k_{QH}$， 即 $\frac{2y_1}{x_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$.

于是由④式可得 $k_{PQ}\cdot k_{PH}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\frac{m^2}{2}$.

而 $PQ\perp PH$ 等价于 $k_{PQ}\cdot k_{PH}=-1$， 即 $-\frac{m^2}{2}=-1$， 又 $m>0$， 得 $m=\sqrt{2}$，

故存在 $m=\sqrt{2}$， 使得在其对应的椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上，对任意的 $k>0$， 都有 $PQ\perp PH$ .

【考点定位】本小题考查直线与圆以及圆锥曲线等基础知识, 考查函数与方程思想、分类讨论思想、数形结合思想等数学思想方法，考查同学们分析问题和解决问题的能力.

22.(本小题满分 14 分)

（I）已知函数 f（x）=rx-x$^r$+（1-r）（x>0)，其中 r 为有理数，且 0<r<1.求 f（x）的最小值；

（II）试用（I）的结果证明如下命题：

设 $a_1\geqslant0$，$a_2\geqslant0$，$b_1$，$b_2$ 为正有理数，若 $b_1+b_2=1$，则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\leqslant a_1b_1+a_2b_2$；

（III）请将（II）中的命题推广到一般形式，并用数学归纳法证明你所推广的命题。注：当 α 为正有理数时，有求道公式$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

【解析】

（Ⅰ） $f'(x)=r-rx^{r-1}=r(1-x^{r-1})$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 $0<x<1$时， $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$内是减函数;

当 $x>1$ 时， $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$内是增函数.

故函数 $f(x)$ 在 $x=1$处取得最小值 $f(1)=0$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $x\in(0,+\infty)$时，有 $f(x)\ge f(1)=0$，即 $x^r\le rx+(1-r)$ ①

若 $a_1$， $a_2$ 中有一个为 0，则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\le a_1b_1+a_2b_2$成立;

若 $a_1$， $a_2$ 均不为 0，又 $b_1+b_2=1$，可得 $b_2=1-b_1$，于是

在①中令 $x=\frac{a_1}{a_2}$， $r=b_1$，可得 $(\frac{a_1}{a_2})^{b_1}\le b_1\cdot\frac{a_1}{a_2}+(1-b_1)$，

即 $a_1^{b_1}a_2^{1-b_1}\le a_1b_1+a_2(1-b_1)$，亦即 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\le a_1b_1+a_2b_2$.

综上，对 $a_1\ge0, a_2\ge0$， $b_1$， $b_2$ 为正有理数且 $b_1+b_2=1$， 总有 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\le a_1b_1+a_2b_2$. ②

（III）（Ⅱ）中命题的推广形式为：

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数， $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为正有理数.

若 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n} \le a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ .　　③

用数学归纳法证明如下：

（1）当 $n=1$时， $b_1=1$，有 $a_1 \le a_1$，③成立.

（2）假设当 $n=k$时，③成立，即若 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为非负实数， $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 为正有理数，

且 $b_1+b_2+\cdots+b_k=1$，则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k} \le a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k$ .

当 $n=k+1$时，已知 $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$ 为非负实数， $b_1, b_2, \cdots, b_k, b_{k+1}$ 为正有理数，

且 $b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}=1$，此时 $0<b_{k+1}<1$，即 $1-b_{k+1}>0$，于是

$$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k}a_{k+1}^{b_{k+1}}=(a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k})a_{k+1}^{b_{k+1}}=(a_1^{\frac{b_1}{1-b_{k+1}}}a_2^{\frac{b_2}{1-b_{k+1}}}\cdots a_k^{\frac{b_k}{1-b_{k+1}}})^{1-b_{k+1}}a_{k+1}^{b_{k+1}}.$$

因 $\frac{b_1}{1-b_{k+1}}+\frac{b_2}{1-b_{k+1}}+\cdots+\frac{b_k}{1-b_{k+1}}=1$，由归纳假设可得

$$a_1^{\frac{b_1}{1-b_{k+1}}}a_2^{\frac{b_2}{1-b_{k+1}}}\cdots a_k^{\frac{b_k}{1-b_{k+1}}} \le a_1\cdot\frac{b_1}{1-b_{k+1}}+a_2\cdot\frac{b_2}{1-b_{k+1}}+\cdots+a_k\cdot\frac{b_k}{1-b_{k+1}}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{1-b_{k+1}},$$

从而 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k}a_{k+1}^{b_{k+1}} \le \left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{1-b_{k+1}}\right)^{1-b_{k+1}}a_{k+1}^{b_{k+1}}$ .

又因 $(1-b_{k+1})+b_{k+1}=1$，由②得

$$\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{1-b_{k+1}}\right)^{1-b_{k+1}}a_{k+1}^{b_{k+1}} \le \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{1-b_{k+1}}\cdot(1-b_{k+1})+a_{k+1}b_{k+1}$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1},$$

从而 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k}a_{k+1}^{b_{k+1}} \le a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}$ .

故当 $n=k+1$ 时，③成立.

由（1）（2）可知，对一切正整数 $n$，所推广的命题成立.

说明：（III）中如果推广形式中指出③式对 $n \ge 2$ 成立，则后续证明中不需讨论 $n=1$ 的情况.

【考点定位】本小题考查导数的应用、数学归纳法，分类讨论等知识，才查同学们分类讨论等数学思想，考查了同学们分析问题和解决问题的能力。