

# 2012 福建数学试题（文史类）

## 第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $(2+i)^2$  等于

A.  $3+4i$     B.  $5+4i$     C.  $3+2i$     D.  $5+2i$

2. 已知集合  $M=\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $N=\{-2, 2\}$ , 下列结论成立的是

A.  $N \subseteq M$     B.  $M \cup N = M$     C.  $M \cap N = N$     D.  $M \cap N = \{2\}$

3. 已知向量  $a = (x-1, 2)$ ,  $b = (2, 1)$ , 则  $a \perp b$  的充要条件是

A.  $x = -\frac{1}{2}$     B.  $x = 1$     C.  $x = 5$     D.  $x = 0$

4. 一个几何体的三视图形状都相同，大小均等，那么这个几何体不可以是

A. 球    B. 三棱锥    C. 正方体    D. 圆柱

5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$  的右焦点为  $(3, 0)$ , 则该双曲线的离心率等于

A.  $\frac{3\sqrt{14}}{14}$     B.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$     C.  $\frac{3}{2}$     D.  $\frac{4}{3}$

6. 阅读右图所示的程序框图，运行相应的程序，输出  $s$  值等于

A. -3    B. -10    C. 0    D. -2

7. 直线  $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 4$  相交于 A, B 两点，则弦 AB 的长度等于

A.  $2\sqrt{5}$     B.  $2\sqrt{3}$     C.  $\sqrt{3}$     D. 1

8. 函数  $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$  的图像的一条对称轴是

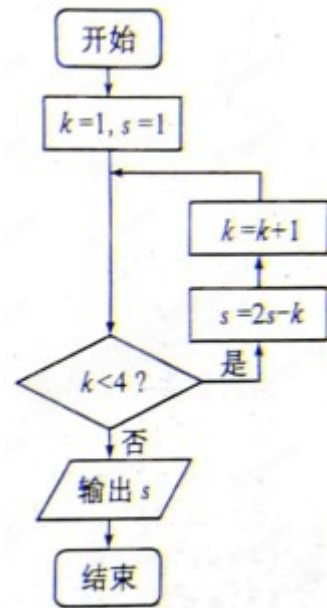
A.  $x = \frac{\pi}{4}$     B.  $x = \frac{\pi}{2}$     C.  $x = -\frac{\pi}{4}$     D.  $x = -\frac{\pi}{2}$

9. 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ , 则  $f(g(\pi))$  的

值为

A. 1    B. 0    C. -1    D.  $\pi$

10. 若直线  $y = 2x$  上存在点  $(x, y)$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ x - 2y - 3 \leq 0 \\ x \geq m \end{cases}$ , 则实数  $m$  的最大值为



- A.-1      B.1      C.  $\frac{3}{2}$       D.2

11. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式  $a_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$ ，其前  $n$  项和为  $S_n$ ，则  $S_{2012}$  等于  
A.1006      B.2012      C.503      D.0

12. 已知  $f(x) = x^2 - 6x^2 + 9x - abc$ ， $a < b < c$ ，且  $f(a) = f(b) = f(c) = 0$ 。现给出如下结论：

①  $f(0) f(1) > 0$ ；②  $f(0) f(1) < 0$ ；③  $f(0) f(3) > 0$ ；④  $f(0) f(3) < 0$ 。

其中正确结论的序号是

- A.①③      B.①④      C.②③      D.②④

## 第Ⅱ卷（非选择题共 90 分）

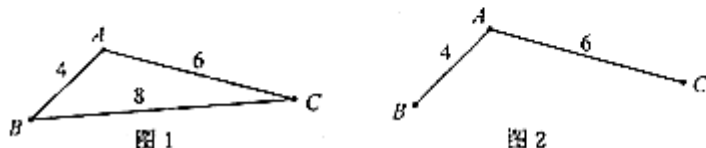
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在答题卡的相应位置。

13. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $BC = \sqrt{3}$ ，则  $AC =$ \_\_\_\_\_。

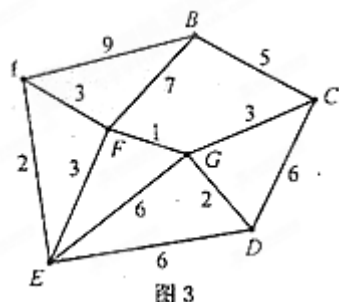
14. 一支田径队有男女运动员 98 人，其中男运动员有 56 人。按男女比例用分层抽样的方法，从全体运动员中抽出一个容量为 28 的样本，那么应抽取女运动员人数是\_\_\_\_\_。

15. 已知关于  $x$  的不等式  $x^2 - ax + 2a > 0$  在  $\mathbb{R}$  上恒成立，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

16. 某地区规划道路建设，考虑道路铺设方案，方案设计图中，求表示城市，两点之间连线表示两城市间可铺设道路，连线上数据表示两城市间铺设道路的费用，要求从任一城市都能到达其余各城市，并且铺设道路的总费用最小。例如：在三个城市道路设计中，若城市间可铺设道路的线路图如图 1，则最优设计方案如图 2，此时铺设道路的最小总费用为 10。



现给出该地区可铺设道路的线路图如图 3，则铺设道路的最小总费用为\_\_\_\_\_。



三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分 12 分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中， $a_1 = b_1 = 1$ ， $b_4 = 8$ ， $\{a_n\}$ 的前 10 项和  $S_{10} = 55$ 。

（Ⅰ）求  $a_n$  和  $b_n$ ；

（Ⅱ）现分别从 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 3 项中各随机抽取一项，写出相应的基本事件，并求这两项的值相等的概率。

18.(本题满分 12 分)

某工厂为了对新研发的一种产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到如下数据：

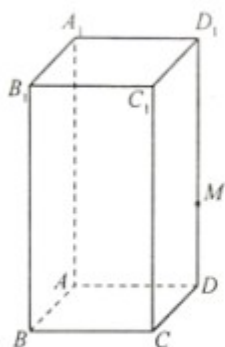
单价 $x$ (元)	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量 $y$ (件)	90	84	83	80	75	68

(I) 求回归直线方程  $\hat{y} = bx + a$ ，其中  $b = -20$ ， $a = \bar{y} - b\bar{x}$ ；

(II) 预计在今后的销售中，销量与单价仍然服从 (I) 中的关系，且该产品的成本是 4 元/件，为使工厂获得最大利润，该产品的单价应定为多少元？（利润=销售收入-成本）

19. (本小题满分 12 分)

如图，在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=AD=1$ ， $AA_1=2$ ， $M$  为棱  $DD_1$  上的一点。



I 求三棱锥  $A-MCC_1$  的体积；

II 当  $A_1M+MC$  取得最小值时，求证： $B_1M \perp$  平面  $MAC$ 。

20. (本小题满分 13 分)

某同学在一次研究性学习中发现，以下五个式子的值都等于同一个常数。

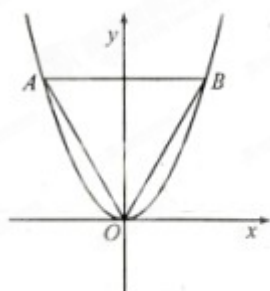
- (1)  $\sin^2 13^\circ + \cos^2 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 17^\circ$
- (2)  $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 15^\circ$
- (3)  $\sin^2 18^\circ + \cos^2 12^\circ - \sin 18^\circ \cos 12^\circ$
- (4)  $\sin^2 (-18^\circ) + \cos^2 48^\circ - \sin (-18^\circ) \cos 48^\circ$
- (5)  $\sin^2 (-25^\circ) + \cos^2 55^\circ - \sin (-25^\circ) \cos 55^\circ$

I 试从上述五个式子中选择一个，求出这个常数

II 根据 (I) 的计算结果，将该同学的发现推广为三角恒等式，并证明你的结论。

21. (本小题满分 12 分)

如图，等边三角形  $OAB$  的边长为  $8\sqrt{3}$ ，且其三个顶点均在抛物线  $E: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 上。



- (1) 求抛物线 E 的方程；
- (2) 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P，与直线  $y=-1$  相交于点 Q。证明以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上某定点。

22. (本小题满分 14 分)

已知函数  $f(x) = ax \sin x - \frac{3}{2}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), 且在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值为  $\frac{\pi-3}{2}$ ,

- (1) 求函数  $f(x)$  的解析式；
- (2) 判断函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  内的零点个数，并加以证明。