

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第II卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

- 如果事件 A 、 B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
- 如果事件 A 、 B 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。
- 圆柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 S 表示圆柱的底面面积， h 表示圆柱的高。
- 棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积， h 表示棱锥的高。

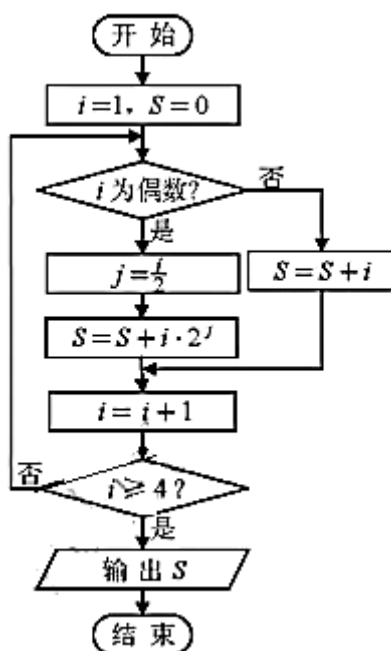
一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ ，则 $(A \cap C) \cup B =$
A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 设变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$$
 则目标函数 $z = -4x + y$ 的最大值为
A. 2 B. 3 C. 5 D. 6
3. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 阅读下边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



A. 5

B. 8

C. 24

D. 29

5. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B ，且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点)，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

6. 已知 $a = \log_5 2$ ， $b = \log_{0.5} 0.2$ ， $c = 0.5^{0.2}$ ，则 a, b, c 的大小关系为

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 是奇函数，将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为 $g(x)$ 。若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π ，且

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 则 } f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$$

A. -2

B. $-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

8. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ x - a \ln x, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立，则 a

的取值范围为

- A. $[0,1]$ B. $[0,2]$ C. $[0,e]$ D. $[1,e]$

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共12小题，共110分。

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

9. i 是虚数单位，则 $\left| \frac{5-i}{1+i} \right|$ 的值为_____.

10. $\left(2x - \frac{1}{8x^3} \right)^8$ 的展开式中的常数项为_____.

11. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为_____.

12. 设 $a \in \mathbf{R}$ ，直线 $ax - y + 2 = 0$ 和圆 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 相切，则 a 的值为_____.

13. 设 $x > 0$, $y > 0$, $x + 2y = 5$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 5$, $\angle A = 30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE = BE$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} =$ _____.

三. 解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分13分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b + c = 2a$, $3c \sin B = 4a \sin C$.

(I) 求 $\cos B$ 的值;

(II) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

16. (本小题满分13分)

设甲、乙两位同学上学期间, 每天7:30之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响, 且任一同学每天到校情况相互独立.

(I) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中7:30之前到校的天数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(II) 设 M 为事件“上学期间的三天中, 甲同学在7:30之前到校的天数比乙同学在7:30之前到校的天数恰好多2”, 求事件 M 发生的概率.

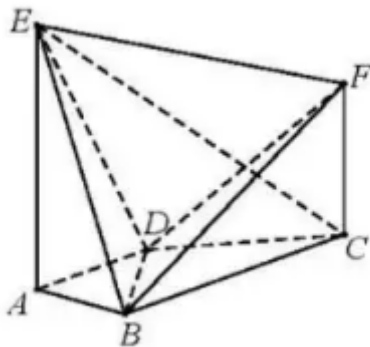
17. (本小题满分13分)

如图, $AE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel AE$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = AD = 1$, $AE = BC = 2$.

(I) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;

(II) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;

(III) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.



18. (本小题满分13分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 上顶点为 B . 已知椭圆的短轴长为4, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设点 P 在椭圆上, 且异于椭圆的上、下顶点, 点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点, 点 N 在 y 轴的负半轴上. 若 $|ON| = |OF|$ (O 为原点), 且 $OP \perp MN$, 求直线 PB 的斜率.

19. (本小题满分14分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列. 已知 $a_1 = 4, b_1 = 6, b_2 = 2a_2 - 2, b_3 = 2a_3 + 4$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1, c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1}, \\ b_k, & n = 2^k, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

(i) 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式;

(ii) 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i \quad (n \in \mathbf{N}^*)$.

20. (本小题满分14分)

设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$;

(III) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

