2021年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

第I卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2.本卷共9小题，每小题5分，共45分

参考公式：

•如果事件*A*、*B*互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ **.**

•如果事件*A*、*B*相互独立，那么 $P(AB)=P(A)\,P(B)$ **.**

•球的体积公式 $V=\frac{1}{3}\pi R^3$ **，其中*R*表示球的半径.**

•圆锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ **，其中*S*表示圆锥的底面面积，*h*表示圆锥的高.**

一、选择题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,3,5\},C=\{0,2,4\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$（　）

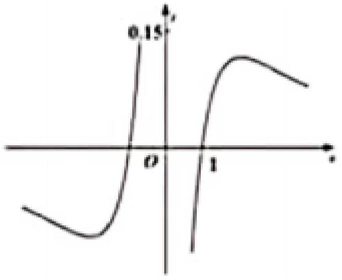
A．$\{0\}$　　B．$\{0,1,3,5\}$　　C．$\{0,1,2,4\}$　　D．$\{0,2,3,4\}$

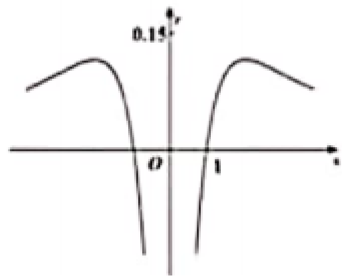
2．已知 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>6$ ”是“$a^2>36$”的（　）

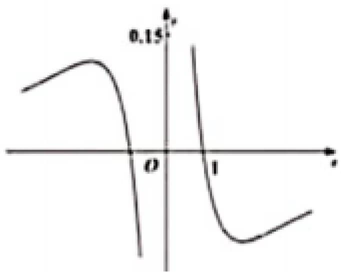
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

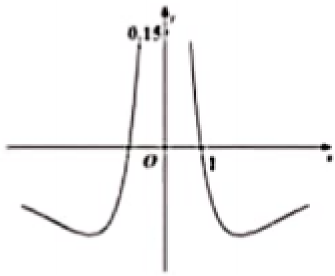
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．函数 $y=\frac{\ln|x|}{x^2+2}$ 的图像大致为（　）

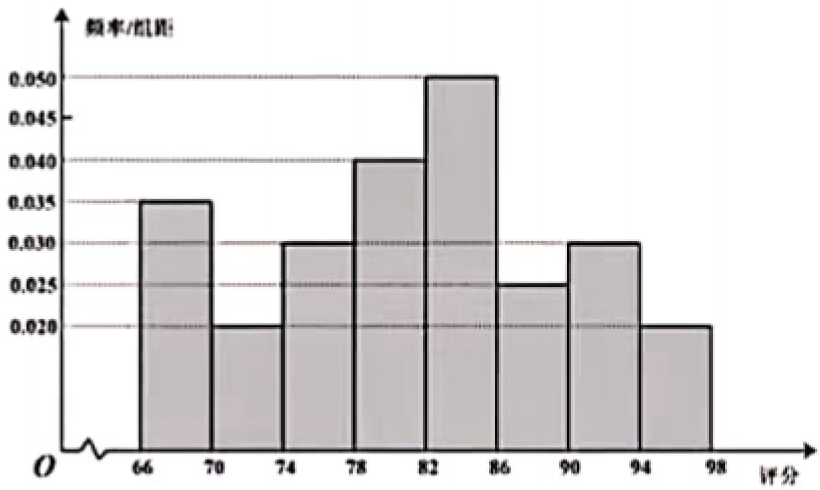
A．

B．

C. 

D. 

4．从某网格平台推荐的影视作品中抽取400部，统计其评分分数据，将所得400个评分数据分为8组：$[66,70),[70,74),\cdots,[94,98]$，并整理得到如下的费率分布直方图，则评分在区间$\left[82,86\right)$内的影视作品数量是（　）



A．20　　B．40　　C．64　　D．80

5．设$a=\log_2 0.3, b=\log_{\frac{1}{2}} 0.4, c=0.4^{0.3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　）

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$　　C．$b<c<a$　　D．$a<c<b$

6．两个圆锥的底面是一个球的同一截面，顶点均在球面上，若球的体积为$\frac{32\pi}{3}$，两个圆锥的高之比为$1:3$，则这两个圆锥的体积之和为（　）

A．3π　　B．4π　　C．9π　　D．12π

7．若$2^a=5^b=10$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$（　）

A．-1　　B．$\lg 7$　　C．1　　D．$\log_7 10$

8．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点与抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点重合，抛物线的准线交双曲线于$A$，$B$两点，交双曲钱的渐近线于$C$、$D$两点，若$\left|CD\right|=\sqrt{2}\,|AB|$．则双曲线的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

9．设 $a \in \mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}\cos(2\pi x-2\pi a). & x<a \\ x^2-2(a+1)x+a^2+5, & x \geq a\end{cases}$，若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内恰有6个专点，则a的取值范围是（　）

A．$\left(2,\frac{9}{4}\right]\cup\left(\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right]$　　B．$\left(\frac{7}{4},2\right)\cup\left(\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right)$　　C．$\left(2,\frac{9}{4}\right]\cup\left[\frac{11}{4},3\right)$　　D．$\left(\frac{7}{4},2\right)\cup\left[\frac{11}{4},3\right)$.

2021年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

第II卷

注意事项

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.

2．本卷共11小题，共105分.

二、填空题，本大题共6小题，每小题5分，共30分，试题中包含两个空的，答对1个的给3分，全部答对的给5分.

10．i是虚数单位，复数 $\frac{9+2i}{2+i}=$__________.

11．在 $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，x^6 的系数是________.

12．若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与y轴交于点A，与圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 相切于点B，则 $|AB|=$__________.

13．若 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为__________.

14．甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语，若一方猜对且另一方猜错，则猜对的一方获胜，否则本次平局，已知每次活动中，甲、乙猜对的概率分别为 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{1}{5}$，且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响，各次活动也互不影响，则一次活动中，甲获胜的概率为__________，3次活动中，甲至少获胜2次的概率为__________.

15．在边长为1的等边三角形ABC中，D为线段BC上的动点，$DE \perp AB$ 且交AB于点E. $DF//AB$ 且交AC于点F,则 $|2\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}|$ 的值为__________；$(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{DA}$ 的最小值为__________.

三、解答题，本大题共5小题，共75分，解答应写出文字说明，证明过程成演算步骤.

16．（本小题满分14分）

在 $\triangle ABC$，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $\sin A:\sin B:\sin C=2:1:\sqrt{2}$，

$b=\sqrt{2}$．

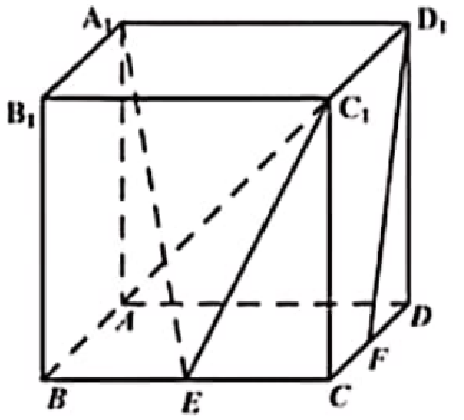
（I）求a的值；

（II）求 $\cos C$ 的值；

（III）求 $\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值．

17．（本小题满分15分）

如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E为棱BC的中点，F为棱CD的中点．



（I）求证：$D_1F//$平面 A_1EC_1；

（II）求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正正弦值．

（III）求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值．

18．（本小题满分15分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$ 的右焦点为F,上顶点为B,离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且 $|BF|=\sqrt{5}$

．

（I）求椭圆的方程；

（II）直线l与椭圆有唯一的公共点M，与y轴的正半轴交于点N，过N与BF垂直的直线交x轴于点P．若 $MP//BF$，求直线l的方程．

19．（本小题满分15分）

已知$\{a_n\}$是公差为2的等差数列，其前8项和为64．$\{b_n\}$是公比大于0的等比数列，

$b_1=4,b_3-b_2=48$．

（I）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）记 $c_n=b_{2n}+\frac{1}{b_n},n\in N^*$．

（i）证明$\left\{c_n^2-c_{2n}\right\}$是等比数列；

（ii）证明$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{a_k a_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}<2\sqrt{2}\left(n\in N^*\right)$

20．（本小恩满分16分）

已知$a>0$，函数$f(x)=ax-xe^x$．

（I）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程：

（II）证明$f(x)$存在唯一的极值点

（III）若存在a，使得$f(x)\le a+b$对任意$x\in \mathbf{R}$成立，求实数b的取值范围．