绝密★本科目考试启用前

2024年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共12页，150分.考试时长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $M=\{x\mid -4<x\le 1\}$，$N=\{x\mid -1<x<3\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $\{x|-4<x<3\}$　　B. $\{x|-1<x\le 1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{x|-1<x<4\}$

【答案】A

【解析】

【分析】直接根据并集含义即可得到答案.

【详解】由题意得 $M\cup N=(-4,3)$，

故选：A.

2. 已知 $\frac{z}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-1$，则 $z=$（　　）.

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $-1-\mathrm{i}$　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】直接根据复数乘法即可得到答案.

【详解】由题意得 $z=\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)=-1-\mathrm{i}$，

故选：C.

3. 求圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到 $x-y+2=0$ 的距离（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】求出圆心坐标，再利用点到直线距离公式即可.

【详解】由题意得 $x^2+y^2-2x+6y=0$，即 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$，

则其圆心坐标为 $(1,-3)$，则圆心到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\frac{|1+3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$，

故选：C.

4. $\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的二项展开式中 x^3 的系数为（　　）

A. 15　　B. 6　　C. -4　　D. -13

【答案】B

【解析】

【分析】写出二项展开式，令 $4-\frac{r}{2}=3$，解出 r 然后回代入二项展开式系数即可得解.

【详解】$\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的二项展开式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r x^{4-r}\left(-\sqrt{x}\right)^r=\mathrm{C}_4^r(-1)^r x^{4-\frac{r}{2}},(r=0,1,2,3,4)$，

令 $4-\frac{r}{2}=3$，解得 $r=2$，

故所求即为 $\mathrm{C}_4^2(-1)^2=6$.

故选：B.

5. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$”的（　　）条件.

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量数量积分析可知 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$ 等价于 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，结合充分、必要条件分析判断.

【详解】因为 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，可得 $\vec{a}^2=\vec{b}^2$，即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

可知 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$ 等价于 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

若 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$，可得 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，即 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，可知必要性成立；

若 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，无法得出 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$，

例如 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$，满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，但 $\vec{a}\neq\vec{b}$ 且 $\vec{a}\neq-\vec{b}$，可知充分性不成立；

综上所述，“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}\neq\vec{b}$ 且 $\vec{a}\neq-\vec{b}$”的必要不充分条件.

故选：A.

6. 已知 $f\left(x\right)=\sin\omega x\left(\omega>0\right)$，$f\left(x_1\right)=-1$，$f\left(x_2\right)=1$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角函数最值分析周期性，结合三角函数最小正周期公式运算求解.

【详解】由题意可知：x_1 为 $f\left(x\right)$ 的最小值点，x_2 为 $f\left(x\right)$ 的最大值点，

则 $\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，

且 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

故选：B.

7. 记水的质量为 $d=\frac{S-1}{\ln n}$，并且 d 越大，水质量越好．若 S 不变，且 $d_1=2.1$，$d_2=2.2$，则 n_1 与 n_2 的关系为（　　）

A. $n_1<n_2$

B. $n_1>n_2$

C. 若 $S<1$，则 $n_1<n_2$；若 $S>1$，则 $n_1>n_2$；

D. 若 $S<1$，则 $n_1>n_2$；若 $S>1$，则 $n_1<n_2$；

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意分析可得 $\begin{cases}n_1=\mathrm{e}^{\frac{S-1}{2.1}}\\ n_2=\mathrm{e}^{\frac{S-1}{2.2}}\end{cases}$，讨论S与1的大小关系，结合指数函数单调性分析判断.

【详解】由题意可得 $\begin{cases}d_1=\dfrac{S-1}{\ln n_1}=2.1\\ d_2=\dfrac{S-1}{\ln n_2}=2.2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}n_1=\mathrm{e}^{\frac{S-1}{2.1}}\\ n_2=\mathrm{e}^{\frac{S-1}{2.2}}\end{cases}$，

若 $S>1$，则 $\frac{S-1}{2.1}>\frac{S-1}{2.2}$，可得 $\mathrm{e}^{\frac{S-1}{2.1}}>\mathrm{e}^{\frac{S-1}{2.2}}$，即 $n_1>n_2$；

若 $S=1$，则 $\frac{S-1}{2.1}=\frac{S-1}{2.2}=0$，可得 $n_1=n_2=1$；

若 $S<1$，则 $\frac{S-1}{2.1}<\frac{S-1}{2.2}$，可得 $e^{\frac{S-1}{2.1}}<e^{\frac{S-1}{2.2}}$，即 $n_1<n_2$；

结合选项可知 C 正确，ABD 错误；

故选：C.

8. 已知以边长为 4 的正方形为底面的四棱锥，四条侧棱分别为 4，4，$2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，则该四棱锥的高为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C. $2\sqrt{3}$　　　　D. $\sqrt{3}$

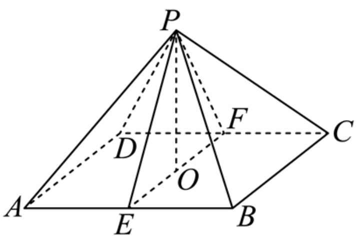
【答案】D

【解析】

【分析】取点作辅助线，根据题意分析可知平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$，可知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，利用等体积法求点到面的距离.

【详解】如图，底面 $ABCD$ 为正方形，

当相邻的棱长相等时，不妨设 $PA=PB=AB=4, PC=PD=2\sqrt{2}$，



分别取 AB, CD 的中点 E, F，连接 PE, PF, EF，

则 $PE\perp AB, EF\perp AB$，且 $PE\cap EF=E$，$PE, EF\subset$ 平面 PEF，

可知 $AB\perp$ 平面 PEF，且 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$，

过 P 作 EF 的垂线，垂足为 O，即 $PO\perp EF$，

由平面 $PEF\cap$ 平面 $ABCD=EF$，$PO\subset$ 平面 PEF，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

由题意可得：$PE=2\sqrt{3}, PF=2, EF=4$，则 $PE^2+PF^2=EF^2$，即 $PE\perp PF$，

则 $\frac{1}{2}PE\cdot PF=\frac{1}{2}PO\cdot EF$，可得 $PO=\frac{PE\cdot PF}{EF}=\sqrt{3}$，

所以四棱锥的高为 $\sqrt{3}$.

当相对的棱长相等时，不妨设 $PA=PC=4$，$PB=PD=2\sqrt{2}$，

因为$BD=4\sqrt{2}=PB+PD$，此时不能形成三角形PBD，与题意不符，这样情况不存在.

故选：D.

9. 已知$\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$是函数$y=2^x$图象上不同的两点，则下列正确的是（　　）

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$　　B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$　　D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据指数函数和对数函数的单调性结合基本不等式分析判断 AB；举例判断 CD 即可.

【详解】由题意不妨设$x_1<x_2$，因为函数$y=2^x$是增函数，所以$0<2^{x_1}<2^{x_2}$，即$0<y_1<y_2$，

对于选项 AB：可得$\frac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2}>\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即$\frac{y_1+y_2}{2}>2^{\frac{x_1+x_2}{2}}>0$，

根据函数$y=\log_2 x$是增函数，所以$\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{x_1+x_2}{2}$，故 A 正确，B 错误；

对于选项 C：例如$x_1=0,x_2=1$，则$y_1=1,y_2=2$，

可得$\log_2\frac{y_1+y_2}{2}=\log_2\frac{3}{2}\in\left(0,1\right)$，即$\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<1=x_1+x_2$，故 C 错误；

对于选项 D：例如$x_1=-1,x_2=-2$，则$y_1=\frac{1}{2},y_2=\frac{1}{4}$，

可得$\log_2\frac{y_1+y_2}{2}=\log_2\frac{3}{8}=\log_2 3-3\in\left(-2,-1\right)$，即$\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>-3=x_1+x_2$，故 D 错误，

故选：A.

10. 若集合$\left\{\left(x,y\right)|\,y=x+t(x^2-x),0\le t\le 1,1\le x\le 2\right\}$表示的图形中，两点间最大距离为$d$、面积为$S$，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

【答案】C

【解析】

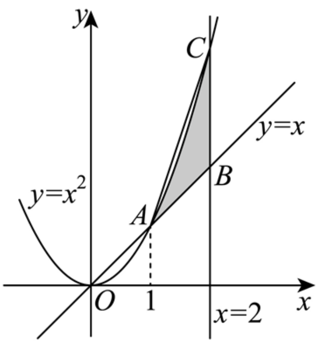
【分析】先以t为变量，分析可知所求集合表示的图形即为平面区域$\begin{cases}y\le x^2\\ y\ge x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$，结合图形分析求解即可.

【详解】对任意给定 $x\in[1,2]$，则 $x^2-x=x(x-1)\geq 0$，且 $t\in[0,1]$，

可知 $x\leq x+t(x^2-x)\leq x+x^2-x=x^2$，即 $x\leq y\leq x^2$，

再结合 x 的任意性，所以所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases}y\leq x^2\\ y\geq x\\ 1\leq x\leq 2\end{cases}$，

如图阴影部分所示，其中 $A(1,1),B(2,2),C(2,4)$，



可知任意两点间距离最大值 $d=|AC|=\sqrt{10}$；

阴影部分面积 $S<S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 1\times 2=1$.

故选：C.

【点睛】方法点睛：数形结合的重点是“以形助数”，在解题时要注意培养这种思想意识，做到心中有图，见数想图，以开拓自己的思维．使用数形结合法的前提是题目中的条件有明确的几何意义，解题时要准确把握条件、结论与几何图形的对应关系，准确利用几何图形中的相关结论求解．

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知抛物线 $y^2=16x$，则焦点坐标为________.

【答案】$(4,0)$

【解析】

【分析】形如 $y^2=2px,(p\neq 0)$ 的抛物线的焦点坐标为 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，由此即可得解.

【详解】由题意抛物线的标准方程为 $y^2=16x$，所以其焦点坐标为 $(4,0)$.

故答案为：$(4,0)$.

12. 已知$\alpha \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且 α 与 β 的终边关于原点对称，则$\cos\beta$的最大值为________.

【答案】$-\frac{1}{2}$##-0.5

【解析】

【分析】首先得出$\beta=\alpha+\pi+2k\pi,k\in Z$，结合三角函数单调性即可求解最值.

【详解】由题意$\beta=\alpha+\pi+2k\pi,k\in Z$，从而$\cos\beta=\cos\left(\alpha+\pi+2k\pi\right)=-\cos\alpha$，

因为$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\cos\alpha$的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，$\cos\beta$的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right]$，

当且仅当$\alpha=\frac{\pi}{3}$，即$\beta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$时，$\cos\beta$取得最大值，且最大值为$-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

13. 已知双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，则过$(3,0)$且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为________.

【答案】$\pm\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】首先说明直线斜率存在，然后设出方程，联立双曲线方程，根据交点个数与方程根的情况列式即可求解.

【详解】联立$x=3$与$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，解得$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，这表明满足题意的直线斜率一定存在，

设所求直线斜率为k，则过点$(3,0)$且斜率为k的直线方程为$y=k(x-3)$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1\\ y=k(x-3)\end{cases}$，化简并整理得：$\left(1-4k^2\right)x^2+24k^2x-36k^2-4=0$，

由题意得$1-4k^2=0$或$\Delta=\left(24k^2\right)^2+4\left(36k^2+4\right)\left(1-4k^2\right)=0$，

解得$k=\pm\frac{1}{2}$或无解，即$k=\pm\frac{1}{2}$，经检验，符合题意.

故答案为：$\pm\frac{1}{2}$.

14. 已知三个圆柱的体积为公比为 10 的等比数列．第一个圆柱的直径为 65mm，第二、三个圆柱的直径为 325mm，第三个圆柱的高为 230mm，求前两个圆柱的高度分别为________.

【答案】$\frac{115}{2}\text{mm},23\text{mm}$

【解析】

【分析】根据体积为公比为 10 的等比数列可得关于高度的方程组，求出其解后可得前两个圆柱的高度.

【详解】设第一个圆柱的高为h_1，第二个圆柱的高为h_2，则$\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2}{\pi\left(\frac{65}{2}\right)^2 h_1}=\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2\times 230}{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2}=10$，

故$h_2=23\text{mm}$，$h_1=\frac{115}{2}\text{mm}$，

故答案为：$\frac{115}{2}\text{mm},23\text{mm}$.

15. 已知$M=\{k\mid a_k=b_k\}$，a_n，b_n不为常数列且各项均不相同，下列正确的是______.

①a_n，b_n均为等差数列，则M中最多一个元素；

②a_n，b_n均为等比数列，则M中最多三个元素；

③a_n为等差数列，b_n为等比数列，则M中最多三个元素；

④a_n单调递增，b_n单调递减，则M中最多一个元素.

【答案】①③④

【解析】

【分析】利用两类数列的散点图的特征可判断①④的正误，利用反例可判断②的正误，结合通项公式的特征及反证法可判断③的正误.

【详解】对于①，因为$\{a_n\},\{b_n\}$均为等差数列，故它们的散点图分布在直线上，

而两条直线至多有一个公共点，故M中至多一个元素，故①正确.

对于②，取$a_n=2^{n-1},b_n=-(-2)^{n-1}$，则$\{a_n\},\{b_n\}$均为等比数列，

但当n为偶数时，有$a_n=2^{n-1}=b_n=-(-2)^{n-1}$，此时$M$中有无穷多个元素，

故②错误.

对于③，设$b_n=Aq^n\,(Aq\neq 0,q\neq\pm 1)$，$a_n=kn+b\,(k\neq 0)$，

若M中至少四个元素，则关于n的方程$Aq^n=kn+b$至少有 4 个不同的正数解，

若$q>0,q\neq 1$，则由$y=Aq^n$和$y=kn+b$的散点图可得关于n的方程$Aq^n=kn+b$至多有两个不同的解，矛盾；

若$q<0,q\neq\pm1$，考虑关于n的方程$Aq^n=kn+b$奇数解的个数和偶数解的个数，

当$Aq^n=kn+b$有偶数解，此方程即为$A|q|^n=kn+b$，

方程至多有两个偶数解，且有两个偶数解时$Ak\ln|q|>0$，

否则$Ak\ln|q|<0$，因$y=A|q|^n, y=kn+b$单调性相反，

方程$A|q|^n=kn+b$至多一个偶数解，

当$Aq^n=kn+b$有奇数解，此方程即为$-A|q|^n=kn+b$，

方程至多有两个奇数解，且有两个奇数解时$-Ak\ln|q|>0$即$Ak\ln|q|<0$

否则$Ak\ln|q|>0$，因$y=-A|q|^n, y=kn+b$单调性相反，

方程$A|q|^n=kn+b$至多一个奇数解，

因为$Ak\ln|q|>0$，$Ak\ln|q|<0$不可能同时成立，

故$Aq^n=kn+b$不可能有4个不同的正数解，故③正确.

对于④，因为$\{a_n\}$为单调递增，$\{b_n\}$为递减数列，前者散点图呈上升趋势，

后者的散点图呈下降趋势，两者至多一个交点，故④正确.

故答案为：①③④

【点睛】思路点睛：对于等差数列和等比数列的性质的讨论，可以利用两者散点图的特征来分析，注意讨论两者性质关系时，等比数列的公比可能为负，此时要注意合理转化.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在$\triangle ABC$中，$a=7$，A为钝角，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

（1）求$\angle A$；

（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求$\triangle ABC$的面积.

①$b=7$；②$\cos B=\frac{13}{14}$；③$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

【答案】（1）$A=\frac{2\pi}{3}$；

（2）选择①无解；选择②和③$\triangle ABC$面积均为$\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理即可求出答案；

（2）选择①，利用正弦定理得 $B=\frac{\pi}{3}$，结合（1）问答案即可排除；选择②，首先求出 $\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，再代入式子得 $b=3$，再利用两角和的正弦公式即可求出 $\sin C$，最后利用三角形面积公式即可；选择③，首先得到 $c=5$，再利用正弦定理得到 $\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，再利用两角和的正弦公式即可求出 $\sin B$，最后利用三角形面积公式即可；

【小问 1 详解】

由题意得 $2\sin B\cos B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$，因为 A 为钝角，

则 $\cos B\neq 0$，则 $2\sin B=\frac{\sqrt{3}}{7}b$，则 $\frac{b}{\sin B}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{7}}=\frac{a}{\sin A}=\frac{7}{\sin A}$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 A 为钝角，则 $A=\frac{2\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

选择① $b=7$，则 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{14}b=\frac{\sqrt{3}}{14}\times 7=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $A=\frac{2\pi}{3}$，则 B 为锐角，则 $B=\frac{\pi}{3}$，

此时 $A+B=\pi$，不合题意，舍弃；

选择② $\cos B=\frac{13}{14}$，因为 B 为三角形内角，则 $\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

则代入 $2\sin B=\frac{\sqrt{3}}{7}b$ 得 $2\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{7}b$，解得 $b=3$，

$$\sin C=\sin\left(A+B\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+B\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos B+\cos\frac{2\pi}{3}\sin B$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14},$$

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

选择③ $c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$，则有 $c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$，解得 $c=5$，

则由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{5}{\sin C}$，解得$\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

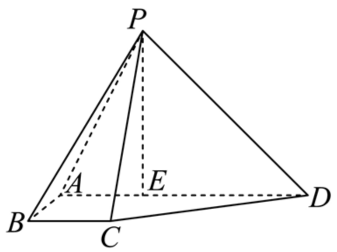
因为C为三角形内角，则$\cos C=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{11}{14}$，

则$\sin B=\sin\left(A+C\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+C\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos C+\cos\frac{2\pi}{3}\sin C$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{11}{14}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

17. 已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$，$AD//BC$，$AB=BC=1$，$AD=3$，$DE=PE=2$，E 是 AD 上一点，$PE\perp AD$.



（1）若 F 是 PE 中点，证明：$BF//$ 平面 PCD.

（2）若 $AB\perp$平面 PED，求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{30}}{30}$

【解析】

【分析】（1）取 PD 的中点为S，接 SF,SC，可证四边形 $SFBC$ 为平行四边形，由线面平行的判定定理可得 $BF//$ 平面 PCD.

（2）建立如图所示的空间直角坐标系，求出平面 APB 和平面 PCD 的法向量后可求夹角的余弦值.

【小问 1 详解】

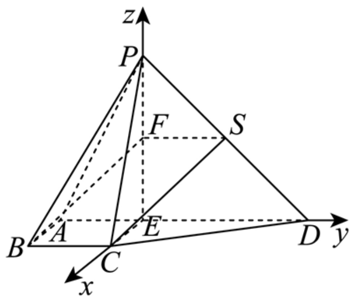
取 PD 的中点为S，接 SF,SC，则 $SF//ED,SF=\frac{1}{2}ED=1$，

而 $ED//BC,ED=2BC$，故 $SF//BC,SF=BC$，故四边形 $SFBC$ 为平行四边形，

故 $BF//SC$，而 $BF\not\subset$平面 PCD，$SC\subset$平面 PCD，

所以 $BF//$ 平面 PCD.

【小问 2 详解】



因为 $ED=2$，故 $AE=1$，故 $AE//BC, AE=BC$，

故四边形 $AECB$ 为平行四边形，故 $CE//AB$，所以 $CE\perp$ 平面 PAD，

而 $PE, ED\subset$ 平面 PAD，故 $CE\perp PE, CE\perp ED$，而 $PE\perp ED$，

故建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,-1,0), B(1,-1,0), C(1,0,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$，

则 $\overrightarrow{PA}=(0,-1,-2), \overrightarrow{PB}=(1,-1,-2), \overrightarrow{PC}=(1,0,-2), \overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}-y-2z=0\\ x-y-2z=0\end{cases}$，取 $\vec{m}=(0,-2,1)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

则由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a-2b=0\\ 2b-2c=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(2,1,1)$，

故 $\cos\vec{m},\vec{n}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{30}}{30}$，

故平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$

18. 已知某险种的保费为 0.4 万元，前 3 次出险每次赔付 0.8 万元，第 4 次赔付 0.6 万元

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

在总体中抽样 100 单，以频率估计概率：

（1）求随机抽取一单，赔偿不少于 2 次的概率；

（2）（i）毛利润是保费与赔偿金额之差．设毛利润为 X，估计 X 的数学期望；

（ii）若未赔偿过的保单下一保险期的保费下降4%，已赔偿过的增加20%．估计保单下一保险期毛利润的数学期望.

【答案】（1）$\frac{1}{10}$

（2）(i)0.122 万元　　(ii)0.1252 万元

【解析】

【分析】（1）根据题设中的数据可求赔偿次数不少 2 的概率;

（2）（ⅰ）设ξ为赔付金额，则ξ可取$0,0.8,0.1.6,2.4,3$，用频率估计概率后可求ξ的分布列及数学期望，从而可求$E\left(X\right)$.

（ii）先算出下一期保费的变化情况，结合（1）的结果可求$E\left(Y\right)$.

【小问 1 详解】

设 A 为“随机抽取一单，赔偿不少于 2 次”，

由题设中的统计数据可得$P\left(A\right)=\frac{60+30+10}{800+100+60+30+10}=\frac{1}{10}$.

【小问 2 详解】

（ⅰ）设ξ为赔付金额，则ξ可取$0,0.8,1.6,2.4,3$，

由题设中的统计数据可得$P\left(\xi=0\right)=\frac{800}{1000}=\frac{4}{5},P\left(\xi=0.8\right)=\frac{100}{1000}=\frac{1}{10}$，

$P(\xi=1.6)=\frac{60}{1000}=\frac{3}{50}$， $P(\xi=2.4)=\frac{30}{1000}=\frac{3}{100}$，

$P(\xi=3)=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$，

故$E\left(\xi\right)=0\times\frac{4}{5}+0.8\times\frac{1}{10}+1.6\times\frac{3}{50}+2.4\times\frac{3}{100}+3\times\frac{1}{100}=0.278$

故$E\left(X\right)=0.4-0.278=0.122$（万元）.

（ii）由题设保费的变化为$0.4\times\frac{4}{5}\times96\%+0.4\times\frac{1}{5}\times1.2=0.4032$，

故$E\left(Y\right)=0.122+0.4032-0.4=0.1252$（万元）

19. 已知椭圆方程 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，焦点和短轴端点构成边长为 2 的正方形，过$\left(0,t\right)$ $\left(t>\sqrt{2}\right)$的直线 l 与椭圆交于 A，B，$C\left(0,1\right)$，连接 AC 交椭圆于 D.

（1）求椭圆方程和离心率;

（2）若直线 BD 的斜率为 0，求 t.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$t=2$

【解析】

【分析】（1）由题意得$b=c=\sqrt{2}$，进一步得a，由此即可得解；

（2）说明直线AB斜率存在，设$AB: y=kx+t,\left(t>\sqrt{2}\right)$，$A\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2, y_2\right)$，联立椭圆方程，由韦达定理有$x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}, x_1x_2=\frac{2t^2-4}{2k^2+1}$，而$AD: y=\frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}\left(x-x_1\right)+y_1$，令$x=0$，即可得解.

【小问 1 详解】

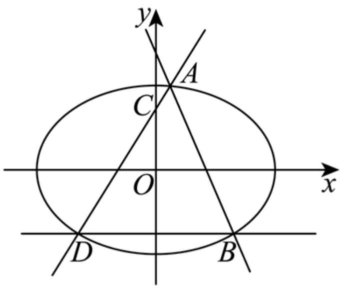
由题意$b=c=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，从而$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率为$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

【小问 2 详解】

显然直线AB斜率存在，否则B, D重合，直线BD斜率不存在与题意不符，

同样直线AB斜率不为 0，否则直线AB与椭圆无交点，矛盾，



从而设$AB: y=kx+t,\left(t>\sqrt{2}\right)$，$A\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2, y_2\right)$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx+t\end{cases}$，化简并整理得$\left(1+2k^2\right)x^2+4ktx+2t^2-4=0$，

由题意$\Delta=16k^2t^2-8\left(2k^2+1\right)\left(t^2-2\right)=8\left(4k^2+2-t^2\right)>0$，即$k, t$应满足$4k^2+2-t^2>0$，

所以$x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}, x_1x_2=\frac{2t^2-4}{2k^2+1}$，

若直线BD斜率为 0，由椭圆的对称性可设$D\left(-x_2, y_2\right)$，

所以 $AD: y=\dfrac{y_1-y_2}{x_1+x_2}\left(x-x_1\right)+y_1$，在直线 AD 方程中令 $x=0$，

得 $y_C=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}=\dfrac{x_1\left(kx_2+t\right)+x_2\left(kx_1+t\right)}{x_1+x_2}=\dfrac{2kx_1x_2+t\left(x_1+x_2\right)}{x_1+x_2}=\dfrac{4k\left(t^2-2\right)}{-4kt}+t=\dfrac{2}{t}=1$，

所以 $t=2$，

此时 k 应满足 $\begin{cases}4k^2+2-t^2=4k^2-2>0\\ k\neq 0\end{cases}$，即 k 应满足 $k<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

综上所述，$t=2$ 满足题意，此时 $k<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20. 已知 $f\left(x\right)=x+k\ln\left(1+x\right)$ 在 $\left(t,f\left(t\right)\right)\left(t>0\right)$ 处切线为 l.

（1）若切线 l 的斜率 $k=-1$，求 $f\left(x\right)$ 单调区间；

（2）证明：切线 l 不经过 $\left(0,0\right)$；

（3）已知 $k=1$，$A\left(t,f\left(t\right)\right)$，$C\left(0,f\left(t\right)\right)$，$O\left(0,0\right)$，其中 $t>0$，切线 l 与 y 轴交于点 B 时．当 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，符合条件的 A 的个数为？

（参考数据：$1.09<\ln3<1.10$，$1.60<\ln5<1.61$，$1.94<\ln7<1.95$）

【答案】（1）单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

（2）证明见解析　　（3）2

【解析】

【分析】（1）直接代入 $k=-1$，再利用导数研究其单调性即可；

（2）写出切线方程 $y-f(t)=\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)(x-t)(t>0)$，将 $(0,0)$ 代入再设新函数 $F(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$，利用导数研究其零点即可；

（3）分别写出面积表达式，代入 $2S_{\triangle ACO}=15S_{ABO}$ 得到 $13\ln(1+t)-2t-15\dfrac{t}{1+t}=0$，再设新函数 $h(t)=13\ln(1+t)-2t-\dfrac{15t}{1+t}(t>0)$ 研究其零点即可.

【小问 1 详解】

$f(x)=x-\ln(1+x), f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}(x>-1)$，

当 $x\in\left(-1,0\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)>0$；

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

【小问 2 详解】

$f'(x)=1+\dfrac{k}{1+x}$，切线 l 的斜率为 $1+\dfrac{k}{1+t}$，

则切线方程为 $y-f(t)=\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)(x-t)(t>0)$，

将 $(0,0)$ 代入则 $-f(t)=-t\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right), f(t)=t\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)$，

即 $t+k\ln(1+t)=t+t\dfrac{k}{1+t}$，则 $\ln(1+t)=\dfrac{t}{1+t}$，$\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}=0$，

令 $F(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$，

假设 l 过 $(0,0)$，则 $F(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 存在零点.

$F'(t)=\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}=\dfrac{t}{(1+t)^2}>0$，$\therefore F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$F(t)>F(0)=0$，

$\therefore F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点，$\therefore$ 与假设矛盾，故直线 l 不过 $(0,0)$.

【小问 3 详解】

$k=1$ 时，$f(x)=x+\ln(1+x), f'(x)=1+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x+2}{1+x}>0$.

$S_{\triangle ACO}=\dfrac{1}{2}tf(t)$，设 l 与 y 轴交点 B 为 $(0,q)$，

$t>0$ 时，若 $q<0$，则此时 l 与 $f(x)$ 必有交点，与切线定义矛盾.

由（2）知 $q\neq 0$.所以 $q>0$，

则切线 l 的方程为 $y-t-\ln(t+1)=\left(1+\dfrac{1}{1+t}\right)(x-t)$，

令 $x=0$，则 $y=q=y=\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}$.

$\because 2S_{\triangle ACO}=15S_{ABO}$，则 $2tf(t)=15t\left[\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}\right]$，

$\therefore 13\ln(1+t)-2t-15\dfrac{t}{1+t}=0$，记 $h(t)=13\ln(1+t)-2t-\dfrac{15t}{1+t}(t>0)$，

$\therefore$ 满足条件的 A 有几个即 $h(t)$ 有几个零点.

$$h'(t)=\frac{13}{1+t}-2-\frac{15}{(t+1)^2}=\frac{13t+13-2\left(t^2+2t+1\right)-15}{(t+1)^2}=\frac{2t^2+9t-4}{(t+1)^2}=\frac{(-2t+1)(t-4)}{(t+1)^2},$$

当$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$h'(t)<0$，此时$h(t)$单调递减；

当$t\in\left(\frac{1}{2},4\right)$时，$h'(t)>0$，此时$h(t)$单调递增；

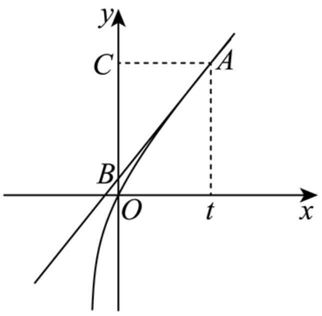
当$t\in(4,+\infty)$时，$h'(t)<0$，此时$h(t)$单调递减；

因为$h(0)=0,h\left(\frac{1}{2}\right)\langle 0,h(4)=13\ln 5-20\rangle 13\times 1.6-20=0.8>0$，

$h(24)=13\ln 25-48-\frac{15\times 24}{25}=26\ln 5-48-\frac{72}{5}<26\times 1.61-48-\frac{72}{5}=-20.54<0$，

所以由零点存在性定理及$h(t)$的单调性，$h(t)$在$\left(\frac{1}{2},4\right)$上必有一个零点，在$(4,24)$上必有一个零点，

综上所述，$h(t)$有两个零点，即满足$2S_{ACO}=15S_{ABO}$的A有两个.



【点睛】关键点点睛：本题第二问的关键是采用的是反证法，转化为研究函数零点问题.

21. 设集合$M=\left\{(i,j,s,t)\middle| i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},s\in\{5,6\},t\in\{7,8\},2\middle|(i+j+s+t)\right\}$. 对于给定有穷数列$A:\{a_n\}(1\le n\le 8)$，及序列$\Omega:\omega_1,\omega_2,...,\omega_s$，$\omega_k=(i_k,j_k,s_k,t_k)\in M$，定义变换$T$：将数列A的第$i_1,j_1,s_1,t_1$项加1，得到数列$T_1(A)$；将数列$T_1(A)$的第$i_2,j_2,s_2,t_2$列加1，得到数列$T_2T_1(A)$…；重复上述操作，得到数列$T_s...T_2T_1(A)$，记为$\Omega(A)$.

（1）给定数列$A:1,3,2,4,6,3,1,9$和序列$\Omega:(1,3,5,7),(2,4,6,8),(1,3,5,7)$，写出$\Omega(A)$；

（2）是否存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为$a_1+2,a_2+6,a_3+4,a_4+2,a_5+8,a_6+2,a_7+4,a_8+4$，若存在，写出一个符合条件的$\Omega$；若不存在，请说明理由；

（3）若数列A的各项均为正整数，且$a_1+a_3+a_5+a_7$为偶数，证明："存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为常数

列”的充要条件为“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$”.

【答案】（1）$\Omega(A):3,4,4,5,8,4,3,10$

（2）不存在符合条件的Ω，理由见解析

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）直接按照$\Omega(A)$的定义写出$\Omega(A)$即可；

（2）利用反证法，假设存在符合条件的Ω，由此列出方程组，进一步说明方程组无解即可；

（3）分充分性和必要性两方面论证.

【小问1详解】

由题意得$\Omega(A):3,4,4,5,8,4,3,10$；

【小问2详解】

假设存在符合条件的Ω，可知$\Omega(A)$的第$1,2$项之和为a_1+a_2+s，第$3,4$项之和为a_3+a_4+s，

则$\begin{cases}(a_1+2)+(a_2+6)=a_1+a_2+s\\(a_3+4)+(a_4+2)=a_3+a_4+s\end{cases}$，而该方程组无解，故假设不成立，

故不存在符合条件的Ω；

【小问3详解】

我们设序列$T_k...T_2T_1(A)$为$\{a_{k,n}\}(1\le n\le 8)$，特别规定$a_{0,n}=a_n(1\le n\le 8)$.

必要性：

若存在序列$\Omega:\omega_1,\omega_2,...,\omega_s$，使得$\Omega(A)$为常数列.

则$a_{s,1}=a_{s,2}=a_{s,3}=a_{s,4}=a_{s,5}=a_{s,6}=a_{s,7}=a_{s,8}$，所以$a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$.

根据$T_k...T_2T_1(A)$的定义，显然有$a_{k,2j-1}+a_{k,2j}=a_{k-1,2j-1}+a_{k-1,2j}$，这里$j=1,2,3,4$，$k=1,2,...$.

所以不断使用该式就得到，$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，必要性得证.

充分性：

若$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$.

由已知，$a_1+a_3+a_5+a_7$为偶数，而$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，所以

$a_2+a_4+a_6+a_8=4(a_1+a_2)-(a_1+a_3+a_5+a_7)$也是偶数.

我们设$T_s\ldots T_2T_1\left(A\right)$是通过合法的序列$\Omega$的变换能得到的所有可能的数列$\Omega\left(A\right)$中，使得

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$最小的一个.

上面已经证明$a_{k,2j-1}+a_{k,2j}=a_{k-1,2j-1}+a_{k-1,2j}$，这里$j=1,2,3,4$，$k=1,2,\ldots$.

从而由$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$可得$a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$.

同时，由于$i_k+j_k+s_k+t_k$总是偶数，所以$a_{k,1}+a_{k,3}+a_{k,5}+a_{k,7}$和$a_{k,2}+a_{k,4}+a_{k,6}+a_{k,8}$的奇偶性保持不变，从而$a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$和$a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$都是偶数.

下面证明不存在$j=1,2,3,4$使得$\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|\geq 2$.

假设存在，根据对称性，不妨设$j=1$，$a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\geq 2$，即$a_{s,1}-a_{s,2}\geq 2$.

情况 1：若$\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|=0$，则由$a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$和$a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$都是偶数，知$a_{s,1}-a_{s,2}\geq 4$.

对该数列连续作四次变换$\left(2,3,5,8\right),\left(2,4,6,8\right),\left(2,3,6,7\right),\left(2,4,5,7\right)$后，新的

$\left|a_{s+4,1}-a_{s+4,2}\right|+\left|a_{s+4,3}-a_{s+4,4}\right|+\left|a_{s+4,5}-a_{s+4,6}\right|+\left|a_{s+4,7}-a_{s+4,8}\right|$相比原来的

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$减少$4$，这与

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$的最小性矛盾；

情况 2：若$\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|>0$，不妨设$\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|>0$.

情况 2-1：如果$a_{s,3}-a_{s,4}\geq 1$，则对该数列连续作两次变换$\left(2,4,5,7\right),\left(2,4,6,8\right)$后，新的

$\left|a_{s+2,1}-a_{s+2,2}\right|+\left|a_{s+2,3}-a_{s+2,4}\right|+\left|a_{s+2,5}-a_{s+2,6}\right|+\left|a_{s+2,7}-a_{s+2,8}\right|$相比原来的

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$至少减少$2$，这与

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$的最小性矛盾；

情况 2-2：如果$a_{s,4}-a_{s,3}\geq 1$，则对该数列连续作两次变换$\left(2,3,5,8\right),\left(2,3,6,7\right)$后，新的

$\left|a_{s+2,1}-a_{s+2,2}\right|+\left|a_{s+2,3}-a_{s+2,4}\right|+\left|a_{s+2,5}-a_{s+2,6}\right|+\left|a_{s+2,7}-a_{s+2,8}\right|$相比原来的

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$至少减少$2$，这与

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$的最小性矛盾.

这就说明无论如何都会导致矛盾，所以对任意的 $j=1,2,3,4$ 都有 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|\le 1$.

假设存在 $j=1,2,3,4$ 使得 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|=1$，则 $a_{s,2j-1}+a_{s,2j}$ 是奇数，所以

$a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$ 都是奇数，设为 $2N+1$.

则此时对任意 $j=1,2,3,4$，由 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|\le 1$ 可知必有 $\left\{a_{s,2j-1},a_{s,2j}\right\}=\left\{N,N+1\right\}$.

而 $a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$ 和 $a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$ 都是偶数，故集合 $\left\{m\middle|a_{s,m}=N\right\}$ 中的四个元素 i,j,s,t 之和为偶数，对该数列进行一次变换 $\left(i,j,s,t\right)$，则该数列成为常数列，新的

$\left|a_{s+1,1}-a_{s+1,2}\right|+\left|a_{s+1,3}-a_{s+1,4}\right|+\left|a_{s+1,5}-a_{s+1,6}\right|+\left|a_{s+1,7}-a_{s+1,8}\right|$ 等于零，比原来的

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 更小，这与

$\left|a_{s,1}-a_{s,2}\right|+\left|a_{s,3}-a_{s,4}\right|+\left|a_{s,5}-a_{s,6}\right|+\left|a_{s,7}-a_{s,8}\right|$ 的最小性矛盾.

综上，只可能 $\left|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\right|=0\left(j=1,2,3,4\right)$，而 $a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$，故

$\left\{a_{s,n}\right\}=\Omega\left(A\right)$ 是常数列，充分性得证.

【点睛】关键点点睛：本题第三问的关键在于对新定义的理解，以及对其本质的分析.