

# 2012 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

## 数学（理工农医类）

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 6 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

**试卷总评：**总体来说 2012 湖南理科数学试题相对于 2010，2011 年有着很大的变化：试题难度变大，体现于解答题的难度相对于前两年有显著提高。着重体现在 19 题的内容更换为数列的充分必要性的证明，考数列解答题可能很多人都有预测到，但是靠充分必要性的证明可能预测到的少，另外函数应用问题较去年也有提高，着重了函数、不等式应用思想的考查应用。而相对而言今年的选择题、填空题的布局与前两年吻合，注重对考生基础知识，基本技能的考查。内容变换，将原有的三角解答题去掉，对立体集合问题不直接考查角度的计算，而考查几何体体积的计算。突出了重点内容的考查，如函数与导数，圆锥曲线等。

一选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

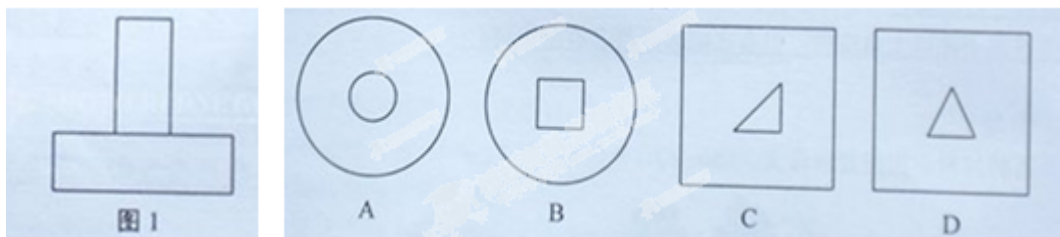
1. 设集合  $M = \{-1, 0, 1\}$ ， $N = \{x | x^2 \leq x\}$ ，则  $M \cap N =$  ( )

- A.  $\{0\}$       B.  $\{0, 1\}$       C.  $\{-1, 1\}$       D.  $\{-1, 0, 1\}$

2. 命题“若  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ，则  $\tan \alpha = 1$ ”的逆否命题是 ( )

- A. 若  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ ，则  $\tan \alpha \neq 1$       B. 若  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ，则  $\tan \alpha \neq 1$   
C. 若  $\tan \alpha \neq 1$ ，则  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$       D. 若  $\tan \alpha \neq 1$ ，则  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

3. 某几何体的正视图和侧视图均如图 1 所示，则该几何体的俯视图不可能是 ( )



4. 设某大学的女生体重  $y$ （单位：kg）与身高  $x$ （单位：cm）具有线性相关关系，根据

一组样本数据  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ ，用最小二乘法建立的回归方程为  $\hat{y} = 0.85x - 85.71$ ，则下列结论不正确的是 ( )

- A.  $y$  与  $x$  具有正的线性相关关系  
B. 回归直线过样本点的中心  $(\bar{x}, \bar{y})$   
C. 若该大学某女生身高增加 1 cm，则其体重约增加 0.85 kg  
D. 若该大学某女生身高为 170 cm，则可断定其体重必为 58.79 kg

5. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的焦距为 10, 点  $P(2,1)$  在  $C$  的渐近线上, 则  $C$  的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$       B.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$       C.  $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$       D.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$

6. 函数  $f(x) = \sin x - \cos(x + \frac{\pi}{6})$  的值域为 ( )

- A.  $[-2, 2]$       B.  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$       C.  $[-1, 1]$       D.  $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

7. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2, AC = 3, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$ , 则  $BC =$  ( )

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{7}$       C.  $2\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{23}$

8. 已知两条直线  $l_1: y = m$  和  $l_2: y = \frac{8}{2m+1} (m > 0)$ ,  $l_1$  与函数  $y = |\log_2 x|$  的图象从左至右相交于点  $A, B$ ,  $l_2$  与函数  $y = |\log_2 x|$  的图象从左至右相交于点  $C, D$ , 记线段  $AC$  和  $BD$  在

$x$  轴上的投影长度分别为  $a, b$ . 当  $m$  变化时,  $\frac{b}{a}$  的最小值为 ( )

- A.  $16\sqrt{2}$       B.  $8\sqrt{2}$       C.  $8\sqrt[3]{4}$       D.  $4\sqrt[3]{4}$

二填空题: 本大题共 8 小题, 考生作答 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分, 把答案填在答题卡中对应题号的横线上。

一、选做题 (请考生在第 9、10、11 三题中任选两题作答, 如果全做, 则按前两题记分)

9. 在直角坐标系  $xOy$  中, 已知曲线  $C_1: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1-2t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 与曲线  $C_2: \begin{cases} x = a \sin \theta \\ y = 3 \cos \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数,  $a > 0$ ) 有一个公共点在  $x$  轴上, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

10. 不等式  $|2x+1| - 2|x-1| > 0$  的解集为 \_\_\_\_\_。

11. 如图 2, 过点  $P$  的直线与  $\odot O$  相交于  $A, B$  两点. 若  $PA=1, AB=2, PO=3$ , 则  $\odot O$  的半径等于 \_\_\_\_\_。



图 2

二、必做题（12~16 题）

12. 已知复数  $z = (3+i)^2$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_。

13.  $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的二项展开式中的常数项为\_\_\_\_\_。(用数字作答)

14. 如果执行如图 3 所示的程序框图, 输入  $x = -1, n = 3$ , 则输出的数  $S =$  \_\_\_\_\_。

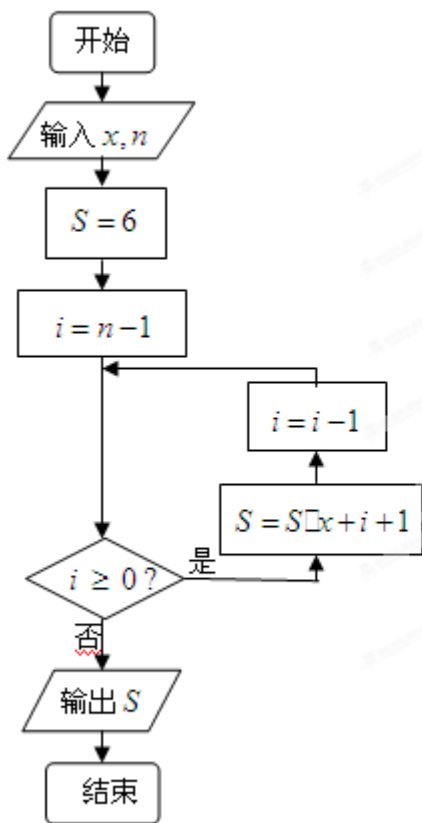


图 3

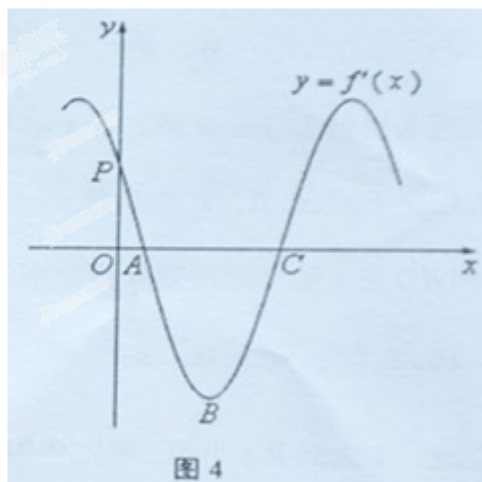


图 4

15. 函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  的导函数  $y = f'(x)$  的部分图象如图 4 所示, 其中,  $P$  为图象与  $y$  轴的交点,  $A, C$  为图象与  $x$  轴的两个交点,  $B$  为图象的最低点。

(1) 若  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 点  $P$  的坐标为  $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ , 则  $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2) 若在曲线段  $\widehat{ABC}$  与  $x$  轴所围成的区域内随机取一点, 则该点在  $\triangle ABC$  内的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 设  $N = 2^n (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ , 将  $N$  个数  $x_1, x_2, \dots, x_N$  依次放入编号为  $1, 2, \dots, N$

的  $N$  个位置, 得到排列  $P_0 = x_1 x_2 \cdots x_N$ . 将该排列中分别位于奇数与偶数位置的数取出, 并

按原顺序依次放入对应的前  $\frac{N}{2}$  和后  $\frac{N}{2}$  个位置, 得到排列  $P_1 = x_1 x_3 \cdots x_{N-1} x_2 x_4 \cdots x_N$ , 将此

操作称为  $C$  变换. 将  $P_1$  分成两段, 每段  $\frac{N}{2}$  个数, 并对每段作  $C$  变换, 得到  $P_2$ ; 当  $2 \leq i \leq n-2$

时, 将  $P_i$  分成  $2^i$  段, 每段  $\frac{N}{2^i}$  个数, 并对每段作  $C$  变换, 得到  $P_{i+1}$ , 例如, 当  $N = 8$  时,

$P_2 = x_1 x_5 x_3 x_7 x_2 x_6 x_4 x_8$ , 此时  $x_7$  位于  $P_2$  中的第 4 个位置。

(1) 当  $N = 16$  时,  $x_7$  位于  $P_2$  中的第  $\underline{\hspace{2cm}}$  个位置;

(2) 当  $N = 2^n (n \geq 8)$  时,  $x_{17}$  位于  $P_4$  中的第  $\underline{\hspace{2cm}}$  个位置。

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分) 某超市为了了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	$x$	30	25	$y$	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

(1) 确定  $x, y$  的值, 并求顾客一次购物的结算时间  $X$  的分布列与数学期望;

(2) 若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算, 且各顾客的结算相互独立, 求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率。

(注: 将频率视为概率)

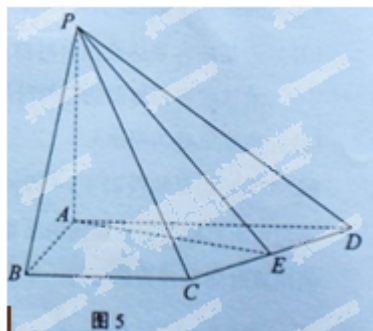
18. (本小题满分 12 分)

如图 5, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB=3, BC=4, AD=5$ ,

$\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ ,  $E$  是  $CD$  的中点.

(I) 证明:  $CD \perp$  平面  $PAE$

(II) 若直线  $PB$  与平面  $PAE$  所成的角和  $PB$  与平面  $ABCD$  所成的角相等, 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积.



19. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数, 记  $A(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ,  $B(n) = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}$

$C(n) = a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

(I) 若  $a_1 = 1, a_2 = 5$ , 且对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 三个数  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $C(n)$  组成等差数列, 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 证明: 数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列的充分必要条件是: 对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 三个数  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列.

20. (本小题满分 13 分)

某企业接到生产 3000 台某产品的  $A, B, C$  三种部件的订单, 每台产品需要这三种部件的数量分别为 2, 2, 1 (单位: 件). 已知每个工人每天可生产 A 部件 6 件, 或 B 部件 3 件, 或 C 部件 2 件. 该企业计划安排 200 名工人分成三组分别生产这三种部件, 生产 B 部件的人数与生产 A 部件的人数成正比, 比例系数为  $k$  ( $k$  为正整数).

(I) 设生产 A 部件的人数为  $x$ , 分别写出完成  $A, B, C$  三种部件生产需要的时间;

(II) 假设这三种部件的生产同时开工, 试确定正整数  $k$  的值, 使完成订单任务的时间最短, 并给出时间最短时具体的人数分组方案.

21. (本小题满分 13 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  上的点均在圆  $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 9$  外, 且对  $C_1$  上任意一点  $M$ ,  $M$  到直线  $x = -2$  的距离等于该点与  $C_2$  上点的距离的最小值。

(I) 求曲线  $C_1$  的方程;

(II) 设  $P(x_0, y_0)$  ( $y_0 \neq \pm 3$ ) 为  $C_2$  外一点, 过  $P$  作圆  $C_2$  的两条切线, 分别与曲线  $C_1$  相交于点  $A, B$  和  $C, D$ , 证明: 当  $P$  在直线  $x = -4$  上运动时, 四点  $A, B, C, D$  的纵坐标之积为定值。

22. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = e^{ax} - x$ , 其中  $a \neq 0$ .

(I) 若对一切  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 1$  恒成立, 求  $a$  的取值集合;

(II) 在函数  $f(x)$  的图象上取定两点  $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$  ( $x_1 < x_2$ ), 记直线  $AB$  的斜率为  $k$ . 问: 是否存在  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , 使  $f'(x_0) > k$  成立? 若存在, 求  $x_0$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由。