2008年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分．考试用时120分钟．第I卷1至2页，第II卷3至10页．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1．答第I卷前，考生务必将自己的姓名、准考号、科目涂写在答题卡上．并在规定位置粘贴考试用条形码．

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．答在试卷上的无效．

3．本卷共10小题，每小题5分，共50分．

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件A，B相互独立，那么

$$P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$$

球的表面积公式$S=4\pi R^2$

球的体积公式$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．i是虚数单位，$\frac{\mathrm{i}^3(\mathrm{i}+1)}{\mathrm{i}-1}=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

2．设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\x+y\leqslant 1,\\x+2y\geqslant 1.\end{cases}$则目标函数$z=5x+y$的最大值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

3．设函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则$f(x)$是（　　）

A．最小正周期为π的奇函数　　B．最小正周期为π的偶函数

C．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数　　D．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

4．设a，b是两条直线，α，β是两个平面，则$a\perp b$的一个充分条件是（　　）

A．$a\perp\alpha$，$b\,/\!/\,\beta$，$\alpha\perp\beta$　　B．$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，$\alpha\,/\!/\,\beta$

C．$a\subset\alpha$，$b\perp\beta$，$\alpha /\!/ \beta$　　　D．$a\subset\alpha$，$b /\!/ \beta$，$\alpha\perp\beta$

5．设椭圆$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m^2-1}=1(m>1)$上一点$P$到其左焦点的距离为3，到右焦点的距离为1，则$P$到右准线的距离为（　　）

A．6　　B．2　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

6. 设集合$S=\{x||x-2|>3\}$，$T=\{x|a<x<a+8\}$，$S\cup T=\mathbf{R}$，则a的取值范围是（　　）

A．$-3<a<-1$　　　B．$-3\leqslant a\leqslant -1$

C．$a\leqslant -3$或$a\geqslant -1$　　　D．$a<-3$或$a>-1$

7．设函数$f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}(0\leqslant x<1)$的反函数为$f^{-1}(x)$，则（　　）

A．$f^{-1}(x)$在其定义域上是增函数且最大值为1

B．$f^{-1}(x)$在其定义域上是减函数且最小值为0

C．$f^{-1}(x)$在其定义域上是减函数且最大值为1

D．$f^{-1}(x)$在其定义域上是增函数且最小值为0

8．已知函数$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<0,\\ x-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$则不等式$x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1$的解集是（　　）

A．$\{x|-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$　　　B．$\{x|x\leqslant 1\}$

C．$\{x|x\leqslant\sqrt{2}-1\}$　　　D．$\{x|-\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$

9．已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且在区间$[0,+\infty)$上是增函数．令$a=f\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$，$b=f\left(\cos\dfrac{5\pi}{7}\right)$，$c=f\left(\tan\dfrac{5\pi}{7}\right)$，则（　　）

A．$b<a<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<c<a$　　D．$a<b<c$

10．有8张卡片分别标有数字1，2，3，4，5，6，7，8，从中取出6张卡片排成3行2列，要求3行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为5，则不同的排法共有（　　）

A．1344种　　B．1248种　　C．1056种　　D．960种

2008年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

第Ⅱ卷

注意事项：

1．答卷前将密封线内的项目填写清楚．

2．用钢笔或圆珠笔直接答在试卷上．

3．本卷共 12 小题，共 100 分．

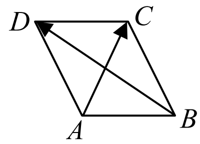
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分．把答案填在题中横线上．

11．$\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的二项展开式中 x^2 的系数是_________（用数字作答）．

12．一个正方体的各顶点均在同一球的球面上，若该球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则该正方体的表面积为___________．

13．已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 $y=x$ 对称，直线 $4x-3y-2=0$ 与圆 C 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=6$，则圆 C 的方程为__________．

14．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,2)$，



则 $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AC}=$________．

15．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3^{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$________．

16．设 $a>1$，若仅有一个常数 c 使得对于任意的 $x\in[a,2a]$，都有 $y\in[a,\ a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=c$，这时 a 的取值的集合为___________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 12 分）

已知 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$．

（Ⅰ）求 $\sin x$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值．

18．（本小题满分 12 分）

甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球，命中率分别为$\frac{1}{2}$与p，且乙投球2次均未命中的概率为$\frac{1}{16}$.

（Ⅰ）求乙投球的命中率p；

（Ⅱ）若甲投球1次，乙投球2次，两人共命中的次数记为ξ，求ξ的分布列和数学期望.

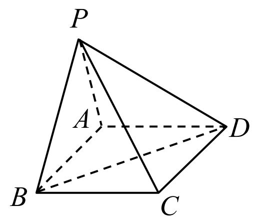
19.（本小题满分12分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形．已知$AB=3$，$AD=2$，$PA=2$，$PD=2\sqrt{2}$，$\angle PAB=60^\circ$.

（Ⅰ）证明$AD\perp$平面PAB；

（Ⅱ）求异面直线PC与AD所成的角的大小；

（Ⅲ）求二面角$P-BD-A$的大小.



20.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+b(x\neq 0)$，其中$a$，$b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在点$P(2，f(2))$处的切线方程为$y=3x+1$，求函数$f(x)$的解析式；

（Ⅱ）讨论函数$f(x)$的单调性；

（Ⅲ）若对于任意的$a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，不等式$f(x)\leqslant 10$在$\left[\frac{1}{4},1\right]$上恒成立，求$b$的取值范围.

21.（本小题满分14分）

已知中心在原点的双曲线C的一个焦点是$F_1(-3,0)$，一条渐近线的方程是$\sqrt{5}x-2y=0$.

（Ⅰ）求双曲线C的方程；

（Ⅱ）若以$k(k\neq 0)$为斜率的直线l与双曲线C相交于两个不同的点M，N，且线段MN

的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为$\frac{81}{2}$，求k的取值范围.

22．（本小题满分 14 分）

在数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中，$a_1=1$，$b_1=4$，数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$，$2a_{n+1}$为b_n与b_{n+1}的等比中项，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求a_2，b_2的值；

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅲ）设$T_n=(-1)^{a_1}b_1+(-1)^{a_2}b_2+\ldots+(-1)^{a_n}b_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明$|T_n|<2n^2$，$n\geqslant 3$.