

2011年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学（文）

本试卷共5页，150分。考试时间长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $P=\{x \mid x^2 \leq 1\}$, 那么 $C_U P =$

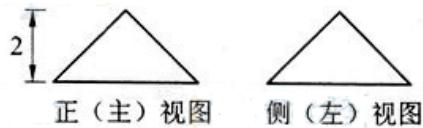
- A. $(-\infty, -1]$ B. $[1, +\infty)$
C. $[-1, 1]$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

2. 复数 $\frac{i-2}{1+2i} =$

- A. i B. $-i$ C. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ D. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

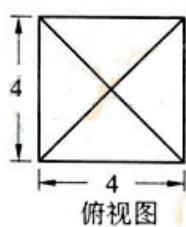
3. 如果 $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} y < 0$, 那么

- A. $y < x < 1$ B. $x < y < 1$
C. $1 < x < y$ D. $1 < y < x$



4. 若 p 是真命题, q 是假命题, 则

- A. $p \wedge q$ 是真命题
B. $p \vee q$ 是假命题
C. $\neg p$ 是真命题
D. $\neg q$ 是真命题



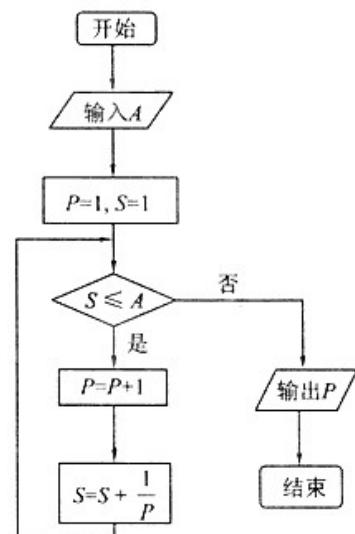
5. 某四棱锥的三视图如图所示, 该四棱锥的表面积是

- A. 32
B. $16+16\sqrt{2}$
C. 48
D. $16+32\sqrt{2}$

6. 执行如图所示的程序框图, 若输入 A 的值为2, 则输出的 P 值为

- A. 2 B. 3
C. 4 D. 5

7. 某车间分批生产某种产品, 每批的生产准备费用为800元.若每批生产



x 件，则平均仓储时间为 $\frac{x}{8}$ 天，且每件产品每天的仓储费用为1元.为使平均没见产品的生产

准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品

- A. 60件 B. 80件 C. 100件 D. 120件

8. 已知点A(0,2), B(2,0). 若点C在函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像上，则使得 $\triangle ABC$ 的面积为2的点C的个数为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 在 $\triangle ABC$ 中.若 $b=5$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\sin A = \frac{1}{3}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的一条渐近线的方程为 $y = 2x$, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知向量 $a = (\sqrt{3}, 1)$, $b = (0, -1)$, $c = (k, \sqrt{3})$. 若 $a - 2b$ 与 c 共线，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 4$, 则公比 $q = \underline{\hspace{2cm}}$; $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根，则实数 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设 $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(t+4,3)$, $D(t,3)$ ($t \in \mathbb{R}$). 记 $N(t)$ 为平行四边形 $ABCD$ 内部（不含边界）的整点的个数，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，则 $N(0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $N(t)$ 的所有可能取值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题6小题，共80分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. (本小题共13分)

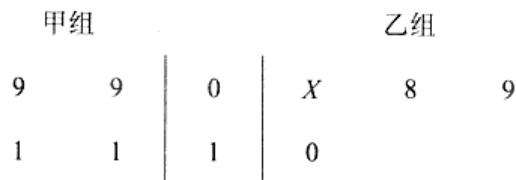
已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

16. (本小题共13分)

以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学的植树棵树.乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以X表示.



(1) 如果 $X=8$, 求乙组同学植树棵树的平均数和方差;

(2) 如果 $X=9$, 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 求这两名同学的植树总棵数为19的概率.

(注: 方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)

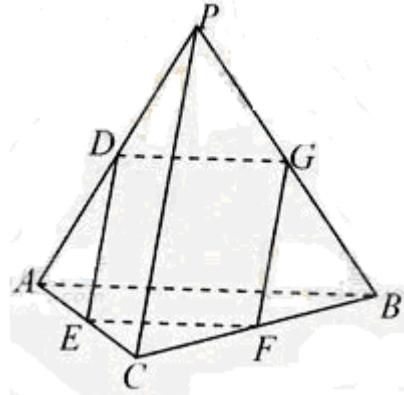
17. (本小题共14分)

如图, 在四面体PABC中, $PC \perp AB$, $PA \perp BC$, 点D,E,F,G分别是棱AP,AC,BC,PB的中点.

(I) 求证: $DE \parallel$ 平面 BCP ;

(II) 求证: 四边形 $DEFG$ 为矩形;

(III) 是否存在点Q, 到四面体PABC六条棱的中点的距离相等? 说明理由.



18. (本小题共13分)

已知函数 $f(x) = (x-k)e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值.

19. (本小题共14分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 右焦点为 $(2\sqrt{2}, 0)$, 斜率为 l 的直线

l 与椭圆 G 交于 A 、 B 两点, 以 AB 为底边作等腰三角形, 顶点为 $P(-3, 2)$.

- (I) 求椭圆 G 的方程;
- (II) 求 ΔPAB 的面积.

20. (本小题共13分)

若数列 $A_n : a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 满足 $|a_{k+1} - a_k| = 1 (k = 1, 2, \dots, n-1)$, 则称 A_n 为 E 数列, 记

$$S(A_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

- (I) 写出一个 E 数列 A_5 满足 $a_1 = a_3 = 0$;
- (II) 若 $a_1 = 12$, $n=2000$, 证明: E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$;
- (III) 在 $a_1 = 4$ 的 E 数列 A_n 中, 求使得 $S(A_n) = 0$ 成立得 n 的最小值.

参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

- (1) D (2) A (3) D (4) D
(5) B (6) C (7) B (8) A

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

(9) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ (10) 2

(11) 1 (12) 2 $2^{n-1} - \frac{1}{2}$

(13) (0, 1) (14) 6 6, 7, 8,

三、解答题（共6小题，共80分）

(15) (共13分)

解：(I) 因为 $f(x) = 4 \cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$

$$= 4 \cos x (\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x) - 1$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$$

$$= 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π

(II) 因为 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$.

于是, 当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2;

当 $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$, 即 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -1.

(16) (共13分)

解 (1) 当 $x=8$ 时, 由茎叶图可知, 乙组同学的植树棵数是: 8, 8, 9, 10,

所以平均数为

$$\bar{x} = \frac{8+8+9+10}{4} = \frac{35}{4};$$

方差为

$$s^2 = \frac{1}{4} [(8 - \frac{35}{4})^2 + (9 - \frac{35}{4})^2 + (10 - \frac{35}{4})^2] = \frac{11}{16}.$$

(Ⅱ) 记甲组四名同学为 A_1, A_2, A_3, A_4 , 他们植树的棵数依次为9, 9, 11, 11; 乙组四名同学为 B_1, B_2, B_3, B_4 , 他们植树的棵数依次为9, 8, 9, 10, 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 所有可能的结果有16个, 它们是:

$(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_1, B_4),$
 $(A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (A_2, B_4),$
 $(A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_3, B_3), (A_3, B_4),$
 $(A_4, B_1), (A_4, B_2), (A_4, B_3), (A_4, B_4),$

用C表示: “选出的两名同学的植树总棵数为19”这一事件, 则C中的结果有4个, 它们是: $(A_1, B_4), (A_2, B_4), (A_3, B_2), (A_4, B_2)$, 故所求概率为 $P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

(17) (共14分)

证明: (I) 因为D, E分别为AP, AC的中点,
所以DE//PC。

又因为DE $\not\subset$ 平面BCP,
所以DE//平面BCP。

(II) 因为D, E, F, G分别为
AP, AC, BC, PB的中点,
所以DE//PC//FG, DG//AB//EF。
所以四边形DEFG为平行四边形,
又因为PC \perp AB,
所以DE \perp DG,
所以四边形DEFG为矩形。

(III) 存在点Q满足条件, 理由如下:

连接DF, EG, 设Q为EG的中点

由(II)知, $DF \cap EG = Q$, 且 $QD = QE = QF = QG = \frac{1}{2} EG$.

分别取PC, AB的中点M, N, 连接ME, EN, NG, MG, MN。

与(II)同理, 可证四边形MENG为矩形, 其对角线点为EG的中点Q,

且 $QM = QN = \frac{1}{2} EG$,

所以Q为满足条件的点。

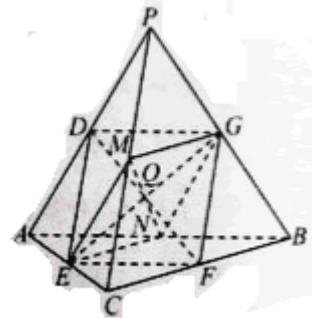
(18) (共13分)

解: (I) $f'(x) = (x - k + 1)e^x$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = k - 1$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, k - 1)$	$k - 1$	$(k - 1, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+



$$f(x) \quad \nearrow \quad -e^{k-1} \quad \nearrow$$

所以, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, k-1)$; 单调递增区间是 $(k-1, +\infty)$

(Ⅱ) 当 $k-1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(0) = -k$;

当 $0 < k-1 < 1$, 即 $1 < k < 2$ 时,

由 (I) 知 $f(x)$ 在 $[0, k-1]$ 上单调递减, 在 $(k-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(k-1) = -e^{k-1}$;

当 $k-1 \geq 1$, 即 $k = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(1) = (1-k)e$.

(19) (共14分)

解: (I) 由已知得 $c = 2\sqrt{2}$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

解得 $a = 2\sqrt{3}$.

又 $b^2 = a^2 - c^2 = 4$.

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(Ⅱ) 设直线 l 的方程为 $y = x + m$.

由 $\begin{cases} y = x + m \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 得

$$4x^2 + 6mx + 3m^2 - 12 = 0.$$

设 A 、 B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$), AB 中点为 $E(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3m}{4},$$

$$y_0 = x_0 + m = \frac{m}{4}$$

因为AB是等腰 $\triangle PAB$ 的底边，
所以PE $\perp AB$.

$$\text{所以PE的斜率 } k = \frac{2 - \frac{m}{4}}{-3 + \frac{3m}{4}} = -1.$$

解得 $m=2$ 。

此时方程①为 $4x^2 + 12x = 0$.

解得 $x_1 = -3, x_2 = 0$.

所以 $y_1 = -1, y_2 = 2$.

所以 $|AB| = 3\sqrt{2}$.

此时，点P(-3, 2)到直线AB: $x - y + 2 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-3 - 2 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\triangle PAB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{9}{2}$.

(20) (共13分)

解：(I) 0, 1, 0, 1, 0是一具满足条件的E数列 A_5 .

(答案不唯一，0, -1, 0, 1, 0; 0, ±1, 0, 1, 2; 0, ±1, 0, -1, -2; 0, ±1, 0, -1,

-2, 0, ±1, 0, -1, 0都是满足条件的E的数列 A_5)

(II) 必要性：因为E数列 A_5 是递增数列，

所以 $a_{k+1} - a_k = 1(k = 1, 2, \dots, 1999)$.

所以 A_5 是首项为12，公差为1的等差数列.

所以 $a_{2000} = 12 + (2000 - 1) \times 1 = 2011$.

充分性，由于 $a_{2000} - a_{1000} \leq 1$ ，

$a_{2000} - a_{1000} \leq 1$

.....

$a_2 - a_1 \leq 1$

所以 $a_{2000} - a_1 \leq 19999$ ，即 $a_{2000} \leq a_1 + 1999$.

又因为 $a_1 = 12$ ， $a_{2000} = 2011$ ，

所以 $a_{2000} = a_1 + 1999$.

故 $a_{n+1} - a_n = 1 > 0(k = 1, 2, \dots, 1999)$ ，即 A_n 是递增数列.

综上，结论得证.

(III) 对首项为4的E数列 A_k ，由于

$a_2 \geq a_1 - 1 = 3$ ，

$a_3 \geq a_2 - 1 \geq 2$ ，

.....

$$a_5 \geq a_7 - 1 \geq -3.$$

.....

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + \cdots + a_k > 0 \quad (k = 2, 3, \dots, 8)$$

所以对任意的首项为4的E数列A_m, 若 $S(A_m) = 0$,

则必有 $n \geq 9$.

又 $a_1 = 4$ 的E数列 $A_1 : 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$ 满足 $S(A_1) = 0$,

所以n是最小值是9.