

2010年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）设全集 $U = \{x \in \mathbb{N}_+ | x < 6\}$ ，集合 $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{3, 5\}$ ，则 $C_U(A \cup B) =$ （ ）

- A. $\{1, 4\}$ B. $\{1, 5\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{2, 5\}$

【考点】1H：交、并、补集的混合运算.

【专题】11：计算题.

【分析】由全集 $U = \{x \in \mathbb{N}_+ | x < 6\}$ ，可得 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，然后根据集合混合运算的法则即可求解.

【解答】解：∵ $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{3, 5\}$ ，

∴ $A \cup B = \{1, 3, 5\}$ ，

∴ $U = \{x \in \mathbb{N}_+ | x < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，

∴ $C_U(A \cup B) = \{2, 4\}$ ，

故选：C.

【点评】本题考查了集合的基本运算，属于基础知识，注意细心运算.

2. （5分）不等式 $\frac{x-3}{x+2} < 0$ 的解集为（ ）

- A. $\{x | -2 < x < 3\}$ B. $\{x | x < -2\}$ C. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x | x > 3\}$

【考点】73：一元二次不等式及其应用.

【专题】11：计算题.

【分析】本题的方法是：要使不等式小于0即要分子与分母异号，得到一个一元二次不等式，讨论x的值即可得到解集.

【解答】解：∵ $\frac{x-3}{x+2} < 0$ ，得到 $(x-3)(x+2) < 0$

即 $x - 3 > 0$ 且 $x + 2 < 0$ 解得： $x > 3$ 且 $x < -2$ 所以无解；

或 $x - 3 < 0$ 且 $x + 2 > 0$ ，解得 $-2 < x < 3$ ，

所以不等式的解集为 $-2 < x < 3$

故选：A.

【点评】本题主要考查学生求不等式解集的能力，是一道基础题.

3. (5分) 已知 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ，则 $\cos(\pi - 2\alpha) = (\quad)$

A. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $-\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【考点】G0：运用诱导公式化简求值；GS：二倍角的三角函数.

【专题】11：计算题.

【分析】先根据诱导公式求得 $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$ 进而根据二倍角公式把 $\sin\alpha$ 的值代入即可求得答案.

【解答】解： $\because \sin\alpha = \frac{2}{3}$ ，

$$\therefore \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2\alpha) = -\frac{1}{9}.$$

故选：B.

【点评】本题考查了二倍角公式及诱导公式，考查了学生对三角函数基础公式的记忆.

4. (5分) 函数 $y = \frac{1 + \ln(x-1)}{2} (x > 1)$ 的反函数是 (\quad)

A. $y = e^{2x-1} - 1 (x > 0)$

B. $y = e^{2x-1} + 1 (x > 0)$

C. $y = e^{2x-1} - 1 (x \in \mathbb{R})$

D. $y = e^{2x-1} + 1 (x \in \mathbb{R})$

【考点】4H：对数的运算性质；4R：反函数.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】从条件中 $y = \frac{1 + \ln(x-1)}{2} (x > 1)$ 中反解出 x ，再将 x, y 互换即得. 解答本

题首先熟悉反函数的概念，然后根据反函数求解三步骤：1、换： x, y 换位

，2、解：解出 y ，3、标：标出定义域，据此即可求得反函数.

【解答】解：由原函数解得

$$x = e^{2y-1} + 1,$$

$$\therefore f^{-1}(x) = e^{2x-1} + 1,$$

$$\text{又 } x > 1, \therefore x - 1 > 0;$$

$$\therefore \ln(x - 1) \in \mathbb{R} \therefore \text{在反函数中 } x \in \mathbb{R},$$

故选：D.

【点评】求反函数，一般应分以下步骤：（1）由已知解析式 $y=f(x)$ 反求出 $x=\Phi(y)$ ；（2）交换 $x=\Phi(y)$ 中 x 、 y 的位置；（3）求出反函数的定义域（一般可通过求原函数的值域的方法求反函数的定义域）.

5. （5分）若变量 x ， y 满足约束条件
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq x \\ 3x + 2y \leq 5 \end{cases}$$
，则 $z=2x+y$ 的最大值为（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】31：数形结合.

【分析】先根据约束条件画出可行域，设 $z=2x+y$ ，再利用 z 的几何意义求最值，

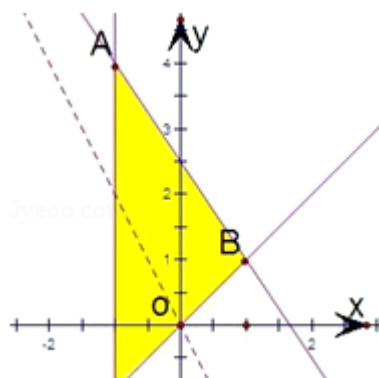
只需求出直线 $z=2x+y$ 过可行域内的点B时，从而得到 m 值即可.

【解答】解：作出可行域，作出目标函数线，

可得直线与 $y=x$ 与 $3x+2y=5$ 的交点为最优解点，

\therefore 即为B（1，1），当 $x=1$ ， $y=1$ 时 $z_{\max}=3$.

故选：C.



【点评】 本题考查了线性规划的知识，以及利用几何意义求最值，属于基础题

6. (5分) 如果等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_3+a_4+a_5=12$ ，那么 $a_1+a_2+\dots+a_7=$ ()

- A. 14 B. 21 C. 28 D. 35

【考点】 83: 等差数列的性质; 85: 等差数列的前 n 项和.

【分析】 由等差数列的性质求解.

【解答】 解: $a_3+a_4+a_5=3a_4=12$, $a_4=4$,

$$\therefore a_1+a_2+\dots+a_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=28$$

故选: C.

【点评】 本题主要考查等差数列的性质.

7. (5分) 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点 $(1, b)$ 处的切线方程是 $x-y+1=0$, 则 ()

- A. $a=1, b=2$ B. $a=-1, b=2$ C. $a=1, b=-2$ D. $a=-1, b=-2$

【考点】 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】 11: 计算题; 52: 导数的概念及应用.

【分析】 由 $y=x^2+ax+b$, 知 $y'=2x+a$, 再由曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点 $(1, b)$ 处的切线方程为 $x-y+1=0$, 求出 a 和 b .

【解答】 解: $\because y=x^2+ax+b$,

$$\therefore y'=2x+a,$$

$$\therefore y'|_{x=1}=2+a,$$

$$\therefore \text{曲线 } y=x^2+ax+b \text{ 在点 } (1, b) \text{ 处的切线方程为 } y-b=(2+a)(x-1),$$

$$\therefore \text{曲线 } y=x^2+ax+b \text{ 在点 } (1, b) \text{ 处的切线方程为 } x-y+1=0,$$

$$\therefore a=-1, b=2.$$

故选: B.

【点评】 本题考查利用导数求曲线上某点切线方程的应用，解题时要认真审题，仔细解答.

8. (5分) 已知三棱锥S - ABC中，底面ABC为边长等于2的等边三角形，SA垂直于底面ABC，SA=3，那么直线AB与平面SBC所成角的正弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

【考点】 MI： 直线与平面所成的角.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 由图，过A作AE垂直于BC交BC于E，连接SE，过A作AF垂直于SE交SE于F，连BF，由题设条件证出 $\angle ABF$ 即所求线面角. 由数据求出其正弦值.

【解答】 解：过A作AE垂直于BC交BC于E，连接SE，过A作AF垂直于SE交SE于F，连BF，

\because 正三角形ABC，

\therefore E为BC中点，

$\because BC \perp AE, SA \perp BC,$

$\therefore BC \perp$ 面SAE，

$\therefore BC \perp AF, AF \perp SE,$

$\therefore AF \perp$ 面SBC，

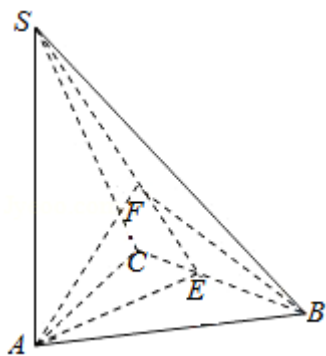
$\therefore \angle ABF$ 为直线AB与面SBC所成角，由正三角形边长2，

$\therefore AE = \sqrt{3}, AS = 3,$

$\therefore SE = 2\sqrt{3}, AF = \frac{3}{2},$

$\therefore \sin \angle ABF = \frac{3}{4}.$

故选：D.



【点评】 本题考查了立体几何的线与面、面与面位置关系及直线与平面所成角

9. (5分) 将标号为1, 2, 3, 4, 5, 6的6张卡片放入3个不同的信封中, 若每个信封放2张, 其中标号为1, 2的卡片放入同一信封, 则不同的方法共有 ()

A. 12种 B. 18种 C. 36种 D. 54种

【考点】 D9: 排列、组合及简单计数问题.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 本题是一个分步计数问题, 首先从3个信封中选一个放1, 2有3种不同的选法, 再从剩下的4个数中选两个放一个信封有 C_4^2 , 余下放入最后一个信封, 根据分步计数原理得到结果.

【解答】 解: 由题意知, 本题是一个分步计数问题,

∴先从3个信封中选一个放1, 2, 有 $C_3^1=3$ 种不同的选法; 根据分组公式, 其他四

封信放入两个信封, 每个信封两个有 $\frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} \cdot A_2^2=6$ 种放法,

∴共有 $3 \times 6 \times 1=18$.

故选: B.

【点评】 本题考查分步计数原理, 考查平均分组问题, 是一个易错题, 解题的关键是注意到第二步从剩下的4个数中选两个放到一个信封中, 这里包含两个步骤, 先平均分组, 再排列.

10. (5分) $\triangle ABC$ 中, 点D在边AB上, CD平分 $\angle ACB$, 若 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $|\vec{a}|=1$,

$|\vec{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{CD}=(\quad)$

- A. $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ C. $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$ D. $\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

【考点】9B: 向量加减混合运算.

【分析】由 $\triangle ABC$ 中, 点D在边AB上, CD平分 $\angle ACB$, 根据三角形内角平分线定理, 我们易得到 $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$, 我们将 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$ 后, 将各向量用 \vec{a} , \vec{b} 表示, 即可得到答案.

【解答】解: \because CD为角平分线,

$$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2},$$

$$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

故选: B.

【点评】本题考查了平面向量的基础知识, 解答的核心是三角形内角平分线定理, 即若AD为三角形ABC的内角A的角平分线, 则AB: AC=BD: CD

11. (5分) 与正方体ABCD - $A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱AB、 CC_1 、 A_1D_1 所在直线的距离相等的点()

- A. 有且只有1个 B. 有且只有2个 C. 有且只有3个 D. 有无数个

【考点】LO: 空间中直线与直线之间的位置关系.

【专题】16: 压轴题.

【分析】由于点D、 B_1 显然满足要求, 猜想 B_1D 上任一点都满足要求, 然后想办法证明结论.

【解答】解: 在正方体ABCD - $A_1B_1C_1D_1$ 上建立如图所示空间直角坐标系, 并设该正方体的棱长为1, 连接 B_1D , 并在 B_1D 上任取一点P,

因为 $\overrightarrow{DB_1} = (1, 1, 1)$,

所以设 $P(a, a, a)$, 其中 $0 \leq a \leq 1$.

作 $PE \perp$ 平面 A_1D , 垂足为 E , 再作 $EF \perp A_1D_1$, 垂足为 F ,

则 PF 是点 P 到直线 A_1D_1 的距离.

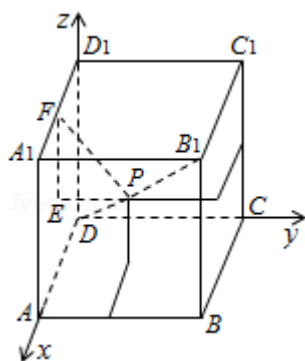
所以 $PF = \sqrt{a^2 + (1-a)^2}$;

同理点 P 到直线 AB 、 CC_1 的距离也是 $\sqrt{a^2 + (1-a)^2}$.

所以 B_1D 上任一点与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB 、 CC_1 、 A_1D_1 所在直线的距离都相等,

所以与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB 、 CC_1 、 A_1D_1 所在直线的距离相等的点有无数个.

故选: D.



【点评】 本题主要考查合情推理的能力及空间中点到线的距离的求法.

12. (5分) 已知椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过右焦点 F 且

斜率为 k ($k > 0$) 的直线与 T 相交于 A , B 两点, 若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 则 $k =$ ()

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【考点】 KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 根据 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ 求得 y_1 和 y_2 关系根据离心率

设 $a = 2t$, $c = \sqrt{3}t$, $b = t$, 代入椭圆方程与直线方程联立, 消去 x , 根据韦达定

理表示出 y_1+y_2 和 y_1y_2 ，进而根据 y_1 和 y_2 关系求得 k 。

【解答】解：A (x_1, y_1)，B (x_2, y_2)，

$$\because \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}, \therefore y_1 = -3y_2,$$

$$\because e = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 设 } a=2t, c=\sqrt{3}t, b=t,$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4t^2 = 0 \text{ ①},$$

设直线AB方程为 $x = sy + \sqrt{3}t$ ，代入①中消去 x ，可得 $(s^2 + 4)y^2 + 2\sqrt{3}sty - t^2 = 0$

,

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}st}{s^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{t^2}{s^2 + 4}, -2y_2 = -\frac{2\sqrt{3}st}{s^2 + 4}, -3y_2^2 = -\frac{t^2}{s^2 + 4},$$

$$\text{解得 } s^2 = \frac{1}{2}, k = \sqrt{2}$$

故选：B。

【点评】本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题。此类题问题综合性强，

要求考生有较高地转化数学思想的运用能力，能将已知条件转化到基本知识的运用。

二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

13. （5分）已知 α 是第二象限的角， $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ ，则 $\cos\alpha = \underline{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ 。

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系。

【分析】根据 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ，以及 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 可求出答案。

【解答】解： $\because \tan\alpha = \frac{1 - \sin\alpha}{2 \cos\alpha}, \therefore 2\sin\alpha = -\cos\alpha$

又 $\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ， α 是第二象限的角

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

故答案为： $\underline{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

【点评】本题考查了同角三角函数的基础知识。

14. (5分) $(x+\frac{1}{x})^9$ 展开式中 x^3 的系数是 84. (用数字作答)

【考点】DA: 二项式定理.

【分析】本题考查二项式定理的展开式, 解题时需要先写出二项式定理的通项 T_{r+1} , 因为题目要求展开式中 x^3 的系数, 所以只要使 x 的指数等于3就可以, 用通项可以解决二项式定理的一大部分题目.

【解答】解: 写出 $(x+\frac{1}{x})^9$ 通项 $C_9^r x^{9-r} (\frac{1}{x})^r = C_9^r x^{9-2r}$,

\because 要求展开式中 x^3 的系数

\therefore 令 $9-2r=3$ 得 $r=3$,

$\therefore C_9^3=84$

故答案为: 84.

【点评】本题是一个二项展开式的特定项的求法. 解本题时容易公式记不清楚导致计算错误, 所以牢记公式. 它是经常出现的一个客观题.

15. (5分) 已知抛物线C: $y^2=2px$ ($p>0$) 的准线 l , 过M (1, 0) 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 l 相交于A, 与C的一个交点为B, 若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, 则 $p=$ 2.

【考点】K8: 抛物线的性质.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】设直线AB的方程与抛物线方程联立消去 y 得 $3x^2+(-6-2p)x+3=0$, 进而根据 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, 可知M为A、B的中点,

可得 p 的关系式, 解方程即可求得 p .

【解答】解: 设直线AB: $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$, 代入 $y^2=2px$ 得 $3x^2+(-6-2p)x+3=0$,

又 $\because \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, 即M为A、B的中点,

$\therefore x_B+(-\frac{p}{2})=2$, 即 $x_B=2+\frac{p}{2}$,

得 $p^2+4p-12=0$,

解得 $p=2$, $p=-6$ (舍去)

故答案为：2

【点评】本题考查了抛物线的几何性质．属基础题．

16. （5分）已知球O的半径为4，圆M与圆N为该球的两个小圆，AB为圆M与圆N的公共弦，AB=4，若OM=ON=3，则两圆圆心的距离MN= 3 .

【考点】JE：直线和圆的方程的应用；ND：球的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】根据题意画出图形，欲求两圆圆心的距离，将它放在与球心组成的三角形MNO中，只要求出球心角即可，通过球的性质构成的直角三角形即可解得．

【解答】解法一：∵ON=3，球半径为4，

∴小圆N的半径为 $\sqrt{7}$ ，

∴小圆N中弦长AB=4，作NE垂直于AB，

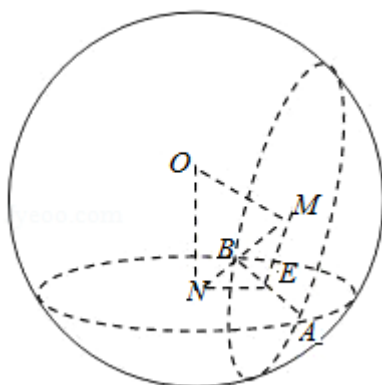
∴NE= $\sqrt{3}$ ，同理可得ME= $\sqrt{3}$ ，在直角三角形ONE中，

∴NE= $\sqrt{3}$ ，ON=3，

∴ $\angle EON = \frac{\pi}{6}$ ，

∴ $\angle MON = \frac{\pi}{3}$ ，

∴MN=3.



故填：3.

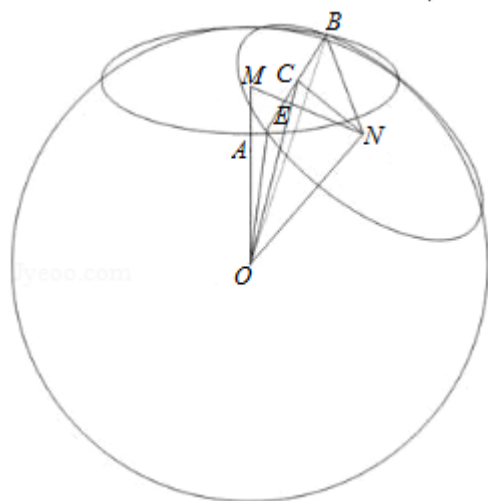
解法二：如下图：设AB的中点为C，则OC与MN必相交于MN中点为E，因为OM=ON=3，

故小圆半径NB为 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

C为AB中点，故CB=2；所以 $NC=\sqrt{\sqrt{7}^2-2^2}=\sqrt{3}$ ，

$\because \triangle ONC$ 为直角三角形，NE为 $\triangle ONC$ 斜边上的高， $OC=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$$\therefore MN=2EN=2 \cdot CN \cdot \frac{ON}{CO}=2 \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2\sqrt{3}}=3$$



故填：3.

【点评】 本题主要考查了点、线、面间的距离计算，还考查球、直线与圆的基础知识，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题.

三、解答题（共6小题，满分70分）

17. （10分） $\triangle ABC$ 中，D为边BC上的一点， $BD=33$ ， $\sin B=\frac{5}{13}$ ， $\cos \angle ADC=\frac{3}{5}$ ，求AD.

【考点】 GG：同角三角函数间的基本关系；HP：正弦定理.

【分析】 先由 $\cos \angle ADC=\frac{3}{5}$ 确定角ADC的范围，因为 $\angle BAD=\angle ADC-B$ 所以可求其正弦值，最后由正弦定理可得答案.

【解答】 解：由 $\cos \angle ADC=\frac{3}{5}>0$ ，则 $\angle ADC<\frac{\pi}{2}$ ，

又由知 $B<\angle ADC$ 可得 $B<\frac{\pi}{2}$ ，

由 $\sin B=\frac{5}{13}$ ，可得 $\cos B=\frac{12}{13}$ ，

又由 $\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$, 可得 $\sin\angle ADC=\frac{4}{5}$.

从而 $\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-B)=\sin\angle ADC\cos B-\cos\angle ADC\sin B=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$.

由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$,

所以 $AD=\frac{BD\cdot\sin B}{\sin\angle BAD}=\frac{33\times\frac{5}{13}}{\frac{33}{65}}=25$.

【点评】三角函数与解三角形的综合性问题, 是近几年高考的热点, 在高考试题中频繁出现. 这类题型难度比较低, 一般出现在17或18题, 属于送分题, 估计以后这类题型仍会保留, 不会有太大改变. 解决此类问题, 要根据已知条件, 灵活运用正弦定理或余弦定理, 求边角或将边角互化.

18. (12分) 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 $a_1+a_2=2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)$, $a_3+a_4+a_5=64\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}\right)$

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n=\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【考点】88: 等比数列的通项公式; 8E: 数列的求和.

【专题】11: 计算题.

【分析】(1) 由题意利用等比数列的通项公式建立首项 a_1 与公比 q 的方程, 然后求解即可

(2) 由 b_n 的定义求出通项公式, 再由通项公式, 利用分组求和法即可求解

【解答】解: (1) 设正等比数列 $\{a_n\}$ 首项为 a_1 , 公比为 q , 由题意得:

$$\begin{cases} a_1(1+q)=2\cdot\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{q}(1+q) \\ a_1q^2(1+q+q^2)=64\cdot\frac{1}{a_1q^4}(1+q+q^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2q=2 \\ a_1^2q^6=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ q=2 \end{cases} \therefore a_n=2^{n-1} \quad (6\text{分})$$

$$(2) \quad b_n = \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = 4^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 2$$

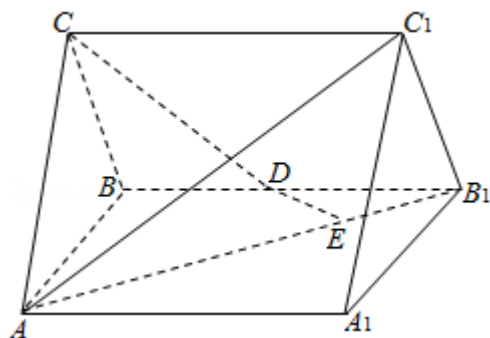
$$\therefore b_n \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{1(1-4^n)}{1-4} + \frac{1(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}} + 2n = \frac{1}{3} \cdot 4^n - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2n + 1 \quad (12 \text{ 分})$$

【点评】 (1) 此问重基础及学生的基本运算技能 (2) 此处重点考查了高考常考的数列求和方法之一的分组求和，及指数的基本运算性质

19. (12分) 如图，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AC=BC$ ， $AA_1=AB$ ， D 为 BB_1 的中点， E 为 AB_1 上的一点， $AE=3EB_1$ 。

(I) 证明： DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线；

(II) 设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45° ，求二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的大小。



【考点】 LM：异面直线及其所成的角；LQ：平面与平面之间的位置关系。

【专题】 11：计算题；14：证明题。

【分析】 (1) 欲证 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线，即证 DE 与异面直线 AB_1 与 CD 垂直相交即可；

(2) 将 AB_1 平移到 DG ，故 $\angle CDG$ 为异面直线 AB_1 与 CD 的夹角，作 $HK \perp AC_1$ ， K 为垂足，连接 B_1K ，由三垂线定理，得 $B_1K \perp AC_1$ ，因此 $\angle B_1KH$ 为二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的平面角，在三角形 B_1KH 中求出此角即可。

【解答】 解：(1) 连接 A_1B ，记 A_1B 与 AB_1 的交点为 F 。

因为面 AA_1BB_1 为正方形，故 $A_1B \perp AB_1$ ，且 $AF = FB_1$ ，

又 $AE = 3EB_1$ ，所以 $FE = EB_1$ ，

又 D 为 BB_1 的中点，

故 $DE \parallel BF$, $DE \perp AB_1$.

作 $CG \perp AB$, G 为垂足, 由 $AC=BC$ 知, G 为 AB 中点.

又由底面 $ABC \perp$ 面 AA_1B_1B . 连接 DG , 则 $DG \parallel AB_1$,

故 $DE \perp DG$, 由三垂线定理, 得 $DE \perp CD$.

所以 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线.

(2) 因为 $DG \parallel AB_1$, 故 $\angle CDG$ 为异面直线 AB_1 与 CD 的夹角, $\angle CDG=45^\circ$

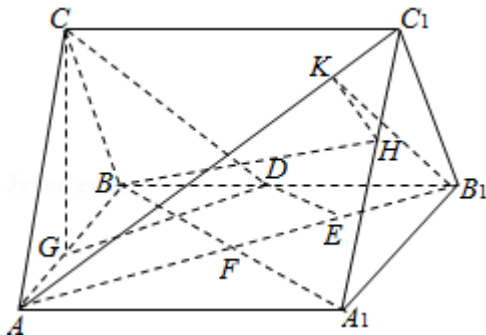
设 $AB=2$, 则 $AB_1=2\sqrt{2}$, $DG=\sqrt{2}$, $CG=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{3}$.

作 $B_1H \perp A_1C_1$, H 为垂足, 因为底面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 AA_1CC_1 , 故 $B_1H \perp$ 面 AA_1C_1C . 又作 $HK \perp AC_1$, K 为垂足, 连接 B_1K , 由三垂线定理, 得 $B_1K \perp AC_1$, 因此 $\angle B_1KH$ 为二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的平面角.

$$B_1H = \frac{2\sqrt{6}}{3}, C_1H = \frac{\sqrt{3}}{3}, AC_1 = \sqrt{7}, HK = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\tan \angle B_1KH = \sqrt{14},$$

\therefore 二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的大小为 $\arctan \sqrt{14}$.

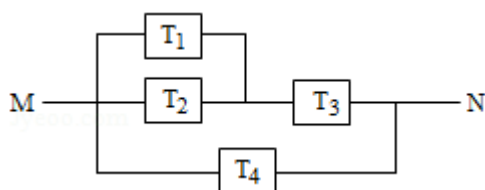


【点评】 本试题主要考查空间的线面关系与空间角的求解, 考查考生的空间想象与推理计算的能力. 三垂线定理是立体几何的最重要定理之一, 是高考的热点, 它是处理线线垂直问题的有效方法, 同时它也是确定二面角的平面角的主要手段. 通过引入空间向量, 用向量代数形式来处理立体几何问题, 淡化了传统几何中的“形”到“形”的推理方法, 从而降低了思维难度, 使解题变得程序化, 这是用向量解立体几何问题的独到之处.

20. (12分) 如图, 由 M 到 N 的电路中有4个元件, 分别标为 T_1, T_2, T_3, T_4 , 电流能通过 T_1, T_2, T_3 的概率都是 P , 电流能通过 T_4 的概率是 0.9 , 电流能否通过各元件相互独立. 已知 T_1, T_2, T_3 中至少有一个能通过电流的概率为 0.999 .

(I) 求 P ;

(Ⅱ) 求电流能在M与N之间通过的概率.



【考点】 C5: 互斥事件的概率加法公式; C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 (1) 设出基本事件, 将要求事件用基本事件的来表示, 将 T_1 , T_2 , T_3 至少有一个能通过电流用基本事件表示并求出概率即可求得 p .

(Ⅱ) 根据题意, B 表示事件: 电流能在M与N之间通过, 根据电路图, 可得 $B = A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3$, 由互斥事件的概率公式, 代入数据计算可得答案.

【解答】 解: (Ⅰ) 根据题意, 记电流能通过 T_i 为事件 A_i , $i=1, 2, 3, 4$,
 A 表示事件: T_1, T_2, T_3 , 中至少有一个能通过电流,
 易得 A_1, A_2, A_3 相互独立, 且 $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$,

$$P(\bar{A}) = (1 - p)^3 = 1 - 0.999 = 0.001,$$

计算可得, $p=0.9$;

(Ⅱ) 根据题意, B 表示事件: 电流能在M与N之间通过,
 有 $B = A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3$,
 则 $P(B) = P(A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3)$
 $= 0.9 + 0.1 \times 0.9 \times 0.9 + 0.1 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.9$
 $= 0.9891$.

【点评】 本题考查了概率中的互斥事件、对立事件及独立事件的概率, 注意先明确事件之间的关系, 进而选择对应的公式来计算.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 1 - \ln x$.

(Ⅰ) 当 $a=3$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上是减函数, 求实数 a 的取值范围.

【考点】3D: 函数的单调性及单调区间; 3E: 函数单调性的性质与判断.

【专题】16: 压轴题.

【分析】(1) 求单调区间, 先求导, 令导函数大于等于0即可.

(2) 已知 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上是减函数, 即 $f'(x) \leq 0$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上

恒成立, 然后用分离参数求最值即可.

【解答】解: (Ⅰ) 当 $a=3$ 时, $f(x) = -x^2 + 3x + 1 - \ln x$

$$\therefore f'(x) = -2x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{-(2x^2 - 3x + 1)}{x}$$

$$\text{解 } f'(x) > 0,$$

$$\text{即: } 2x^2 - 3x + 1 < 0$$

函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{1}{2}, 1)$.

$$(Ⅱ) f'(x) = -2x + a - \frac{1}{x},$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上为减函数,

$\therefore x \in (0, \frac{1}{2})$ 时 $-2x + a - \frac{1}{x} \leq 0$ 恒成立.

即 $a \leq 2x + \frac{1}{x}$ 恒成立.

$$\text{设 } g(x) = 2x + \frac{1}{x}, \text{ 则 } g'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$$

$\therefore x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $\frac{1}{x^2} > 4$,

$$\therefore g'(x) < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上递减,

$$\therefore g(x) > g(\frac{1}{2}) = 3,$$

$$\therefore a \leq 3.$$

【点评】本题考查函数单调性的判断和已知函数单调性求参数的范围, 此类问题一般用导数解决, 综合性较强.

22. (12分) 已知斜率为1的直线l与双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 相交于B

、D两点，且BD的中点为M (1, 3) .

(I) 求C的离心率；

(II) 设C的右顶点为A，右焦点为F， $|DF| \cdot |BF| = 17$ ，证明：过A、B、D三点的圆与x轴相切.

【考点】 J9: 直线与圆的位置关系；KC: 双曲线的性质；KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 11: 计算题；14: 证明题；16: 压轴题.

【分析】 (I) 由直线过点 (1, 3) 及斜率可得直线方程，直线与双曲线交于B、D两点的中点为 (1, 3)，可利用直线与双曲线消元后根据中点坐标公式找出a, b的关系式即求得离心率.

(II) 利用离心率将条件 $|FA| \cdot |FB| = 17$ ，用含a的代数式表示，即可求得a，则A点坐标可得 (1, 0)，由于A在x轴上所以，只要证明 $2AM = BD$ 即证得.

【解答】 解：(I) 由题设知，l的方程为：y=x+2，代入C的方程，并化简，得 $(b^2 - a^2)x^2 - 4a^2x - a^2b^2 - 4a^2 = 0$,

$$\text{设 } B(x_1, y_1), D(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{4a^2}{b^2 - a^2}, x_1 x_2 = -\frac{4a^2 + a^2b^2}{b^2 - a^2}, \quad (1)$$

$$\text{由 } M(1, 3) \text{ 为 } BD \text{ 的中点知 } \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.$$

$$\text{故 } \frac{1}{2} \times \frac{4a^2}{b^2 - a^2} = 1, \text{ 即 } b^2 = 3a^2, \quad (2)$$

$$\text{故 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2a,$$

$$\therefore C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = 2.$$

(II) 由①②知，C的方程为： $3x^2 - y^2 = 3a^2$ ，A (a, 0)，F (2a, 0)，

$$x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = -\frac{4 + 3a^2}{2}.$$

故不妨设 $x_1 \leq -a, x_2 \geq a$,

$$|BF| = \sqrt{(x_1 - 2a)^2 + y_1^2} = a - 2x_1, |FD| = \sqrt{(x_2 - 2a)^2 + y_2^2} = 2x_2 - a,$$

$$|BF| \cdot |FD| = (a - 2x_1)(2x_2 - a) = -4x_1x_2 + 2a(x_1 + x_2) - a^2 = 5a^2 + 4a + 8.$$

又 $|BF| \cdot |FD| = 17$ ，故 $5a^2 + 4a + 8 = 17$ 。

解得 $a = 1$ ，或 $a = -\frac{9}{5}$ （舍去），

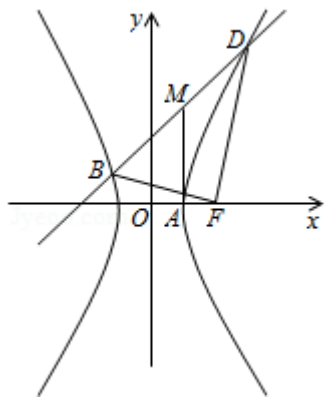
$$\text{故 } |BD| = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 6,$$

连接 MA ，则由 $A(1, 0)$ ， $M(1, 3)$ 知 $|MA| = 3$ ，

从而 $MA = MB = MD$ ，且 $MA \perp x$ 轴，

因此以 M 为圆心， MA 为半径的圆经过 A 、 B 、 D 三点，且在点 A 处与 x 轴相切，

所以过 A 、 B 、 D 三点的圆与 x 轴相切。



【点评】 本题考查了圆锥曲线、直线与圆的知识，考查学生运用所学知识解决问题的能力。