2014年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)

数学(理科)

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.满足 $\frac{z+i}{z}=i$（i是虚数单位）的复数 $z=$（　　）

A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$　　B. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$　　C. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$　　D. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

【答案】B

【解析】由题可得 $\frac{z+i}{z}=i\Rightarrow z+i=zi\Rightarrow z(1-i)=-i\Rightarrow z=\frac{-i}{1-i}=\frac{-i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$,故选B.

【考点定位】复数 复数除法

2.对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本，当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时，总体中每个个体被抽中的概率分别为 p_1,p_2,p_3，则（　　）

A. $p_1=p_2<p_3$　　B. $p_2=p_3<p_1$　　C. $p_1=p_3<p_2$　　D. $p_1=p_2=p_3$

【答案】D

【解析】根据抽样调查的原理可得简单随机抽样,分层抽样,系统抽样都必须满足每个个体被抽到的概率相等,即 $p_1=p_2=p_3$,故选D.

【考点定位】抽样调查 学科网

3.已知 $f(x),g(x)$ 分别是定义在 R 上的偶函数和奇函数，且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$，则 $f(1)+g(1)=$(　　)

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

【答案】C

【解析】分别令 $x=1$ 和 $x=-1$ 可得 $f(1)-g(1)=3$ 和 $f(-1)-g(-1)=1$,因为函数 $f(x),g(x)$ 分别是定义在 R 上的偶函数和奇函数,所以 $f(-1)=f(1),g(-1)=-g(1)$,即 $f(-1)-g(-1)=1$

$\Rightarrow f(1)+g(1)=1$,则 $\begin{cases}f(1)-g(1)=3\\f(1)+g(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=2\\g(1)=-1\end{cases}\Rightarrow f(1)+g(1)=1$,故选C.

【考点定位】奇偶性

4.$\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数是（　　）

A.-20　　B.-5　　C.5　　D.20

【答案】A

【解析】根据二项式定理可得第 $n+1$ 项展开式为 $C_5^n\left(\frac{1}{2}x\right)^n(-2y)^{5-n}$,则 $n=2$ 时,

$C_5^n\left(\frac{1}{2}x\right)^n(-2y)^{5-n}=10\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^2(-2y)^3=-20x^2y^3$,所以 x^2y^3 的系数为 -20,故选 A.

【考点定位】二项式定理

5.已知命题 $p:若x>y,则-x<-y$；命题$q:若x<y,则x^2>y^2$.在命题

① $p\wedge q$;②$p\vee q$;③$p\wedge(\neg q)$;④（$\neg p$）$\vee q$ 中，真命题是（　　）

A①③　　B.①④　　C.②③　　D.②④

【答案】C

【解析】当 $x>y$ 时,两边乘以 -1 可得 $-x<-y$,所以命题 p 为真命题,当 $x=1,y=-2$ 时,因为 $1=x^2<y^2=4$,所以命题 q 为假命题,则 $\neg q$ 为真命题,所以根据真值表可得②③为真命题,故选 C.

【考点定位】命题真假 逻辑连接词 不等式学科网

6.执行如图 1 所示的程序框图，如果输入的 $t\in[-2,2]$，则输出的 S 属于（　　）

A.$[-6,-2]$　　B.$[-5,-1]$　　C.$[-4,5]$　　D.$[-3,6]$

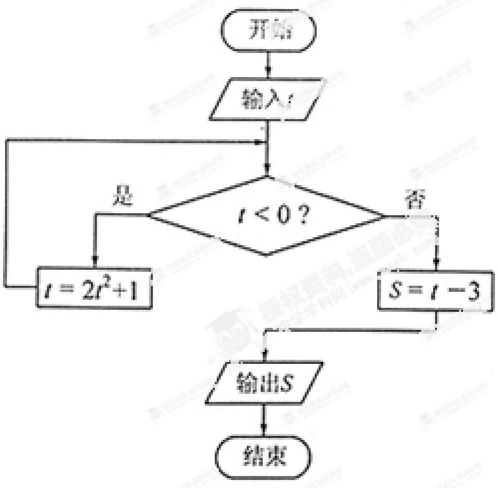


图1

【答案】D

【解析】当$t\in[-2,0)$时,运行程序如下,$t=2t^2+1\in(1,9]$,$S=t-3\in(-2,6]$,

当$t\in[0,2]$时,$S=t-3\in[-3,-1]$,则$S\in(-2,6]\cup[-3,-1]=[-3,6]$,故选D.

【考点定位】程序框图 二次函数值域

7.一块石材表示的几何体的三视图如图2所示，将该石材切削、打磨、加工成球，则能得到的最大球的半径等于（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

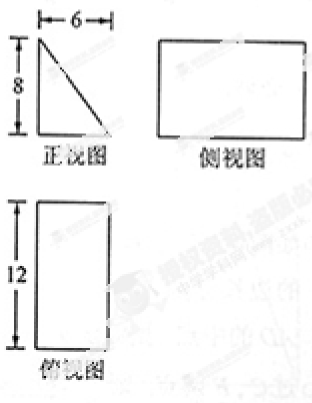


图2

【答案】B

【解析】由图可得该几何体为三棱柱,因为正视图,侧视图,俯视图的内切圆半径最小的是正视图(直角三角形)所对应的内切圆,所以最大球的半径为正视图直角三角形内切圆的半径r,

则$8-r+6-r=\sqrt{8^2+6^2}\Rightarrow r=2$,故选B.

【考点定位】三视图 内切圆 球 三棱柱

8. 某市生产总值连续两年持续增加. 第一年的增长率为 p，第二年的增长率为 q，则该市这两年生产总值的年平均增长率为(　　)

A. $\dfrac{p+q}{2}$　　　　B. $\dfrac{(p+1)(q+1)-1}{2}$

C. $\sqrt{pq}$　　　　D. $\sqrt{(p+1)(q+1)}-1$

【答案】D

【解析】设两年的平均增长率为 $x(x>0)$, 则有 $(1+x)^2=(1+p)(1+q)\Rightarrow x=\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$, 故选 D.

【考点定位】实际应用题 二次方程

9. 已知函数 $f(x)=\sin(x-\varphi)$, 且 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx=0$, 则函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴是(　　　)

A. $x=\dfrac{5\pi}{6}$　　B. $x=\dfrac{7\pi}{12}$　　C. $x=\dfrac{\pi}{3}$　　D. $x=\dfrac{\pi}{6}$

【答案】A

【解析】函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x-\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi\Rightarrow x=\varphi+\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi$,

因为 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin(x-\varphi)dx=0\Rightarrow-\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\varphi\right)+\cos\varphi=0\Rightarrow\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\varphi\right)=0$,

所以 $\dfrac{\pi}{3}-\varphi=k_2\pi\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{3}-k_2\pi$, 即对称轴 $x=\varphi+\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi=\dfrac{5\pi}{6}-k_2\pi+k_1\pi$ $(k_1,k_2\in N)$

则 $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 是其中一条对称轴, 故选 A. 学科网

【考点定位】三角函数图像 辅助角公式 定积分

10.已知函数 $f(x)=x^2+e^x-\dfrac{1}{2}(x<0)$ 与 $g(x)=x^2+\ln(x+a)$ 图象上存在关于 y 轴对称的点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,\dfrac{1}{\sqrt{e}})$　　B. $(-\infty,\sqrt{e})$　　C. $(-\dfrac{1}{\sqrt{e}},\sqrt{e})$　　D. $(-\sqrt{e},\dfrac{1}{\sqrt{e}})$

【答案】B

【解析】由题可得存在 $x_0\in(-\infty,0)$ 满足 $f(x_0)=g(-x_0)\Rightarrow x_0^2+e^{x_0}-\frac{1}{2}=(-x_0)^2+\ln(-x_0+a)$

$\Rightarrow e^{x_0}-\ln(-x_0+a)-\frac{1}{2}=0$,令 $h(x)=e^x-\ln(-x+a)-\frac{1}{2}$,因为函数 $y=e^x$ 和 $y=-\ln(-x+a)$ 在定义域内都是单调递增的,所以函数 $h(x)=e^x-\ln(-x+a)-\frac{1}{2}$ 在定义域内是单调递增的,又因为 x 趋近于 $-\infty$ 时,函数 $h(x)<0$ 且 $h(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 上有解(即函数 $h(x)$ 有零点),

当 $a\le 0$ 时,当 x 趋近于 a 时, $h(x)=e^x-\ln(-x+a)-\frac{1}{2}$ 趋近于 $+\infty$,所以符合题意.

当 $a>0$ 时,$h(0)=e^0-\ln(0+a)-\frac{1}{2}>0\Rightarrow \ln a<\ln\sqrt{e}\Rightarrow a<\sqrt{e}$,

综上 $a<\sqrt{e}$,故选 B.

【考点定位】指对数函数 方程 单调性

二. 填空题：本大题共 6 小题，考生作答 5 小题，没小题 5 分，共 25 分.

(一)选做题（请考生在第 11, 12, 13 三题中任选两题作答，如果全做，则按前两题记分）

11.在平面直角坐标系中，倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 与曲线 $C:\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）交于 A、B 两点，且 $|AB|=2$，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，则直线 l 的极坐标方程是________.

【答案】 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$

【解析】利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$,即曲线 C 为直角 $2r=2$ 的圆,因为弦长 $|AB|=2=2r$,所以圆心在直线 l 上,又因为直线的斜率为 1,所以直线的直角坐标方程为 $y=x-1$,则根据直角坐标与极坐标之间的转化可得

$y=x-1\Rightarrow\rho\sin\theta=\rho\cos\theta-1\Rightarrow\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$,故填 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$.

【考点定位】极坐标 参数方程

12.如图 3,已知 AB,BC 是 $\odot O$ 的两条弦,$AO\perp BC$,$AB=\sqrt{3}$,$BC=2\sqrt{2}$,则 $\odot O$ 的半径等于________.

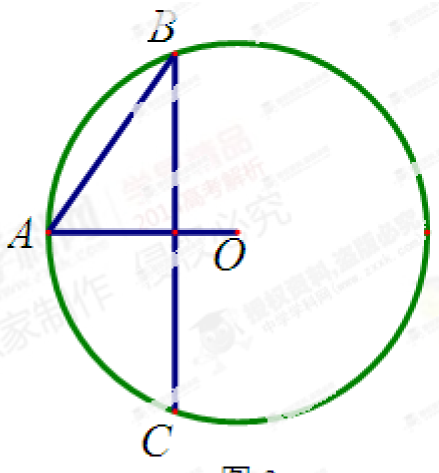


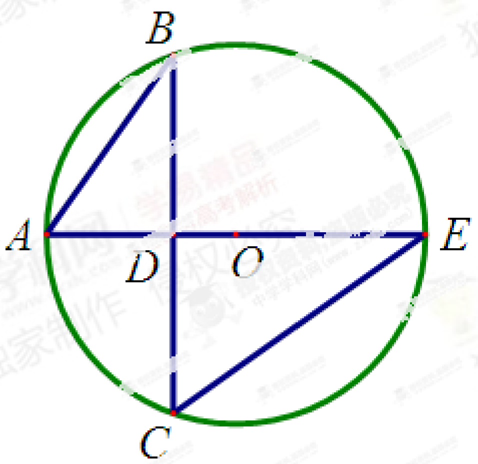
图 3

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】设线段 AO 交 BC 于点 D 延长 AO 交圆与另外一点 E,因为 $AO \perp BC$ 且 AO 为圆半径,

所以 $BD = DC = \sqrt{2}$,由三角形 ABD 的勾股定理可得 $AD = 1$,

由双割线定理可得 $BD \cdot DC = AD \cdot DE \Rightarrow DE = 2$,则直径 $AE = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$,故填 $\frac{3}{2}$.



【考点定位】勾股定理 双割线定理

13.若关于 x 的不等式 $|ax-2|<3$ 的解集为 $\left\{x \middle| -\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}\right\}$，则 $a=$________.

【答案】-3

【解析】因为等式$|ax-2|<3$的解集为$\left\{x\middle|-\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}\right\}$,所以$-\frac{5}{3},\frac{1}{3}$为方程$|ax-2|=3$的根,

即$\begin{cases}\left|-\frac{5}{3}a-2\right|=3\\ \left|\frac{1}{3}a-2\right|=3\end{cases}\Rightarrow a=-3$,故填$-3$

【考点定位】绝对值不等式 绝对值方程

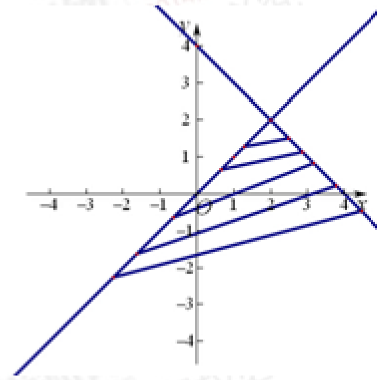
(二)必做题(14-16 题)

14.若变量x,y满足约束条件$\begin{cases}y\le x\\ x+y\le 4\\ y\ge k\end{cases}$,且$z=2x+y$的最小值为$-6$,则$k=$_____.

【答案】-2

【解析】求出约束条件中三条直线的交点为(k,k),$(4-k,k)$,$(2,2)$,且不等式组$y\le x,x+y\le 4$限制的区域如图,所以$k\le 2$,则当(k,k)为最优解时,学科网 $3k=-6\Rightarrow k=-2$,

当$(4-k,k)$为最优解时,$2(4-k)+k=-6\Rightarrow k=14$,因为$k\le 2$,所以$k=-2$,故填$-2$.



【考点定位】线性规划

15.如图 4,正方形$ABCD$和正方形$DEFG$的边长分别为$a,b(a<b)$,原点O为AD的中点,抛物线$y^2=2px(p>0)$经过C,F两点,则$\frac{b}{a}=$______.

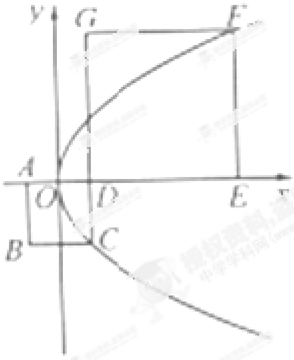


图 4

【答案】$\sqrt{2}+1$

【解析】由题可得 $C\left(\frac{a}{2},-a\right)$, $F\left(\frac{a}{2}+b,b\right)$,因为 C, F 在抛物线上,

所以 $\begin{cases} a^2=pa \\ b^2=2p\left(\frac{a}{2}+b\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{a+2b} \Rightarrow \frac{a}{b}=\sqrt{2}+1$,故填 $\sqrt{2}+1$.

【考点定位】抛物线

16.在平面直角坐标系中,O 为原点, $A(-1,0)$, $B(0,\sqrt{3})$, $C(3,0)$, 动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的最大值是_________.

【答案】$1+\sqrt{7}$

【解析】因为 C 坐标为 $(3,0)$ 且 $|CD|=1$,所以动点 D 的轨迹为以 C 为圆心的单位圆,则 D 满足参数方程

$\begin{cases} x_D=3+\cos\theta \\ y_D=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数且 $\theta\in[0,2\pi)$),所以设 D 的坐标为 $(3+\cos\theta,\sin\theta)$ $(\theta\in[0,2\pi))$,

则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|=\sqrt{(3+\cos\theta-1)^2+\left(\sin\theta+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8+2\left(2\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)}$.

因为 $2\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ 的最大值为 $\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{7}$,所以 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的最大值为

$\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{7}\right)^2}=1+\sqrt{7}$,故填 $1+\sqrt{7}$.

【考点定位】参数方程 圆 三角函数

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算过程.

17. 某企业甲,乙两个研发小组,他们研发新产品成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$,现安排甲组研发新产品 A,乙组研发新产品 B .设甲,乙两组的研发是相互独立的.

(1)求至少有一种新产品研发成功的概率;

(2)若新产品 A 研发成功,预计企业可获得120万元,若新产品 B 研发成功,预计企业可获得利润100万元,求该企业可获得利润的分布列和数学期望.

【答案】(1) $\frac{13}{15}$ (2)详见解析

【解析】

试题分析:(1)首先设出至少有一种新产品研发成功为事件A,包含情况较多,所以要求该事件的概率,考虑求其对立事件,即没有一种新产品研发成功,根据独立试验同时发生的概率计算方法即可求的对立事件的概率,再利用互为对立事件概率之间的关系,即和为1,即可求的相应的概率.

(2)根据题意,研发新产品的结果分为四种情况,利用独立试验同时发生的概率计算方法分别得到每种情况的概率,再根据题意算出此时的利润,即可得到关于利润的分布列,学科网再利用概率与对应的利润成绩之和即可得到数学期望.

试题解析: (1)解:设至少有一组研发成功的事件为事件 A 且事件 B 为事件 A 的对立事件,则事件 B 为新产品 A,B 都没有成功,因为甲,乙成功的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{3}{5}$,则 $P(B)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$,再根据对立事件概率之间的概率公式可得 $P(A)=1-P(B)=\frac{13}{15}$,所以至少一种产品研发成功的概率为 $\frac{13}{15}$.

(2)由题可得设该企业可获得利润为 ξ,则 ξ 的取值有 0, $120+0$, $100+0$, $120+100$,即 $\xi=0,120,100,220$,

由独立试验同时发生的概率计算公式可得:

$P(\xi=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{15}$; $P(\xi=120)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}$;

$P(\xi=100)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$; $P(\xi=220)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$;

所以 ξ 的分布列如下:

ξ	0	120	100	220
$P(\xi)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

则数学期望 $E_\xi=0\times\frac{2}{15}+120\times\frac{4}{15}+100\times\frac{1}{5}+220\times\frac{2}{5}=32+20+88=140$.

【考点定位】分布列 数学期望 概率

18.如图5,在平面四边形 $ABCD$ 中, $AD=1,CD=2,AC=\sqrt{7}$.

(1)求 $\cos\angle CAD$ 的值;

(2)若 $\cos\angle BAD=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$, $\sin\angle CBA=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$,求 BC 的长.

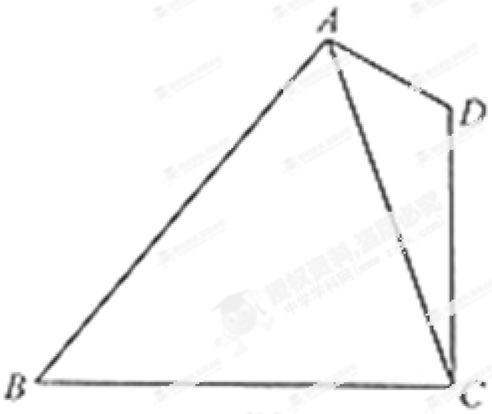


图 5

【答案】(1) $\cos\angle CAD=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ (2) 3

【解析】

试题分析:(1)题目已知三角形 ACD 的三条边,利用 $\angle CAD$ 的余弦定理即可得到该角的余弦值.

(2)利用(1)问得到的 $\angle CAD$ 的余弦结合正余弦之间的关系即可求的该角的正弦值,再利用正余弦之间的关系即可得到 $\angle BAD$,而 $\angle CAD$ 与 $\angle BAD$ 之差即为 $\angle BAC$,则利用正弦的和差角公式即可得到角 $\angle BAC$ 的正弦值,再利用三角形 ABC 的正弦定理即可求的 BC 边长.

试题解析: (1)由 ΔDAC 关于 $\angle CAD$ 的余弦定理可得

$$\cos\angle CAD=\frac{AD^2+AC^2-DC^2}{2AD\bullet AC}=\frac{1+7-4}{2\times 1\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$,所以 $\cos\angle CAD=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

(2)因为 $\angle BAD$ 为四边形内角,所以 $\sin\angle BAD>0$ 且 $\sin\angle CAD>0$,则由正余弦的关系可得

$$\sin\angle BAD=\sqrt{1-\cos^2\angle BAD}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$$ 且 $$\sin\angle CAD=\sqrt{1-\cos^2\angle CAD}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$,再由正弦的和差角公式

可得 $\sin\angle BAC=\sin\left(\angle BAD-\angle CAD\right)=\sin\angle BAD\cos\angle CAD-\sin\angle CAD\cos\angle BAD$

$$=\frac{3\sqrt{21}}{14}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}-\frac{\sqrt{21}}{7}\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$,再由 ΔABC 的正弦定理可得

$$\frac{AC}{\sin\angle CBA}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}\Rightarrow BC=\frac{\sqrt{7}}{\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3.$$

【考点定位】三角形正余弦定理 正余弦之间的关系与和差角公式

19.如图 6,四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等, $AC\cap BD=O, A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$,四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 为矩形.

(1)证明: $O_1O\perp$ 底面 $ABCD$;

(2)若 $\angle CBA=60^0$,求二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值.

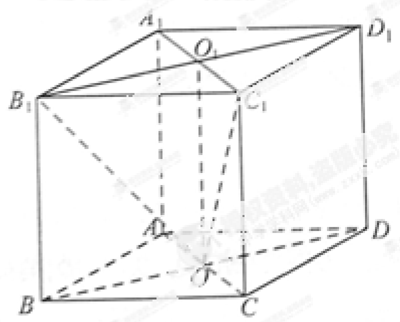


图 6

【答案】(1) 详见解析 (2) $\frac{2\sqrt{57}}{19}$

【解析】

试题分析:(1)要证明线面垂直,只需要在面内找到两条相交的线段与之垂直即可,即证明 AC, BD 与 O_1O 垂直,首先利用四棱柱所有棱相等,得到上下底面为菱形,进而得到 O_1, O 均为中点,得到 A_1A, O_1O, B_1B 三者相互平行,四边形 BDD_1B_1, ACC_1A_1 均为矩形与平行相结合即可得到 AC, BD 与 O_1O 垂直,进而证明线面垂直.

(2)要求二面角,此问可以以以 O 为坐标原点, OB, OC, OO_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立三维直角坐标系,利用空间向量的方法得到二面角的余弦值.在此说明第一种方法,做出二面角的平面角, 过 O_1 作 B_1O 的垂线交 B_1O 于点 H ,连接 HO_1, HC_1 .利用(1)得到 $O_1O \perp A_1C_1$,在利用四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为菱形,对角线相互垂直,两个垂直关系即可得到 A_1C_1 垂直于平面 BDD_1B_1 ,进而得到 $B_1O \perp O_1C_1$,结合 $B_1O \perp O_1H$ 得到线面垂直,说明角 O_1HC_1 即为哦所求二面角的平面角,设四棱柱各边长为 $2a$,利用勾股定理求出相应边长即可得到角 O_1HC_1 的余弦值,进而得到二面角的余弦值.

试题解析:(1)证明:$\because$ 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 均为菱形

$\because AC \cap BD = O, A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$

$\therefore O, O_1$ 分别为 BD, B_1D_1 中点

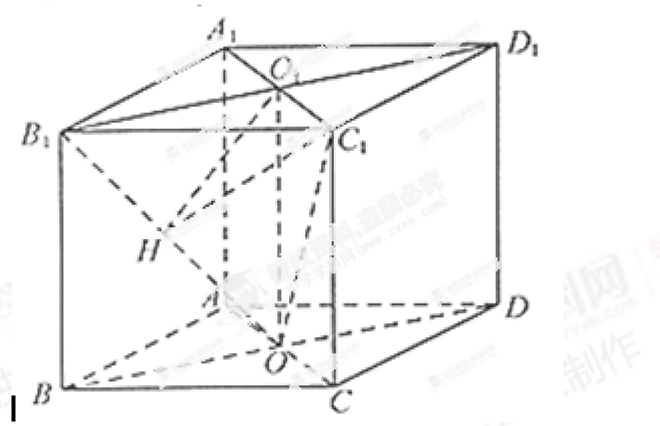
$\because$ 四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 为矩形

$\therefore OO_1 // CC_1 // BB_1$ 且 $CC_1 \perp AC, BB_1 \perp BD$

$\therefore OO_1 \perp BD, OO_1 \perp AC$

又 $\because AC \cap BD = O$ 且 $AC, BD \subseteq$ 底面 $ABCD$

$\therefore OO_1 \perp$ 底面 $ABCD$.



(2)法 1:过 O_1 作 B_1O 的垂线交 B_1O 于点 H ,连接 HO_1,HC_1.不妨设四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 $2a$.

$\because OO_1\perp$底面 $ABCD$ 且底面 $ABCD$ // 面 $A_1B_1C_1D_1$

$\therefore OO_1\perp$面 $A_1B_1C_1D_1$

又 $\because O_1C_1\subseteq$面 $A_1B_1C_1D_1$

$\therefore O_1C_1\perp OO_1$

$\because$四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为菱形

$\therefore O_1C_1\perp O_1B_1$

又 $\because O_1C_1\perp OO_1$ 且 $OO_1\cap O_1C_1=O_1$, $O_1O,O_1B_1\subseteq$面 OB_1D

$\therefore O_1C_1\perp$面 OB_1D

又 $\because B_1O\subseteq$面 OB_1D

$\therefore B_1O\perp O_1C_1$

又 $\because B_1O\perp O_1H$ 且 $O_1C_1\cap O_1H=O_1$, $O_1C_1,O_1H\subseteq$面 O_1HC_1

$\therefore B_1O\perp$面 O_1HC_1

$\therefore \angle O_1HC_1$ 为二面角 C_1-OB_1-D 的平面角,则 $\cos\angle O_1HC_1=\dfrac{O_1H}{HC_1}$

$\because \angle CBA=60^0$ 且四边形 $ABCD$ 为菱形

$\therefore O_1C_1=a$, $B_1O_1=\sqrt{3}a,\ OO_1=2a,B_1O=\sqrt{B_1O_1^{\ 2}+OO_1^{\ 2}}=\sqrt{7}a$,

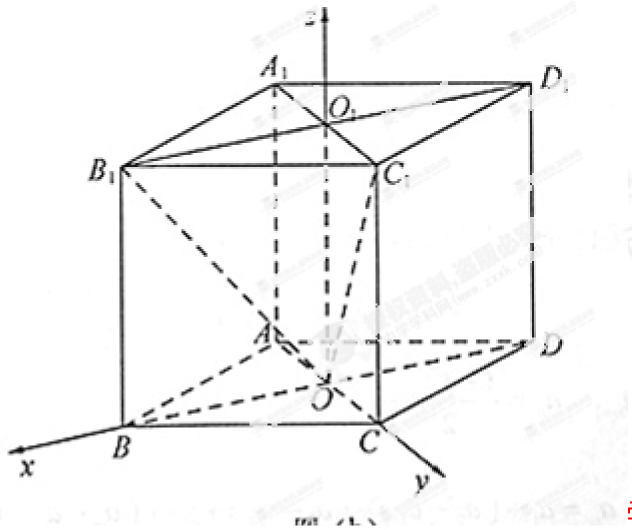
则 $O_1H=B_1O_1\bullet\sin\angle O_1B_1O=B_1O_1\bullet\frac{O_1O}{B_1O}=\sqrt{3}a\bullet\frac{2a}{\sqrt{7}a}=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$

再由 ΔO_1HC_1 的勾股定理可得 $HC_1=\sqrt{O_1H^2+O_1C_1^2}=\sqrt{\frac{12}{7}a^2+a^2}=\sqrt{\frac{19}{7}}a$,

则 $\cos\angle O_1HC_1=\frac{O_1H}{HC_1}=\frac{\frac{2\sqrt{21}}{7}a}{\sqrt{\frac{19}{7}}a}=\frac{2\sqrt{57}}{19}$,所以二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

法 2:因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等,所以四边形 $ABCD$ 是菱形,因此 $AC\perp BD$,又 $O_1O\perp$ 面 $ABCD$,从而 OB,OC,O_1O 两两垂直,如图以 O 为坐标原点, OB,OC,OO_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立三维直角坐标系,不妨设 $AB=2$ 因为 $\angle CBA=60^0$,所以 $OB=\sqrt{3}$, $OC=1$,于是各点的坐标为: $O(0,0,0)$, $B_1(\sqrt{3},0,2)$, $C_1(0,1,2)$,已知 $n_1=(0,1,0)$ 是平面 BDD_1B_1 的一个法向量,设 $n_2=(x,y,z)$ 是平面 OB_1C_1 的一个法向量,则 $\begin{cases}n_2\bullet\overline{OB_1}=0\\ n_2\bullet\overline{OC_1}=0\end{cases}$, $\begin{cases}\sqrt{3}x+2z=0\\ y+2z=0\end{cases}$,取 $z=-\sqrt{3}$,则 $x=2,y=2\sqrt{3}$,

所以 $n_2=(2,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $\cos\theta=\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\frac{2\sqrt{57}}{19}$,故二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.



学科网

【考点定位】线面垂直 二面角 勾股定理 菱形

20.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,|a_{n+1}-a_n|=p^n,n\in N^*$.

(1)若$\{a_n\}$为递增数列,且$a_1,2a_2,3a_3$成等差数列,求P的值;

(2)若$p=\dfrac{1}{2}$,且$\{a_{2n-1}\}$是递增数列,$\{a_{2n}\}$是递减数列,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【答案】(1) $p=\dfrac{1}{3}$　(2) $a_n=\begin{cases}\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}},n为奇数\\ \dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}},n为偶数\end{cases}$ 或 $a_n=\dfrac{4}{3}+\dfrac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n-1}}$

【解析】

试题分析:(1)利用数列$\{a_n\}$的单调性,得到$a_{n+1}-a_n$的符号去掉$|a_{n+1}-a_n|=p^n$的绝对值,再分布令$n=1,2$得到a_1,a_2,a_3之间的关系,再利用题目已知等差中项的性质列出关于p的等式,即可求出p的值.

(2)根据数列$\{a_n\}$在n为奇数和偶数的单调性可得到$a_{2n+1}>a_{2n-1}$且$a_{2n+2}<a_{2n}$,两不等式变为同号相加即可得到$a_{2n}-a_{2n-1}>a_{2n+2}-a_{2n+1}$,根据题意可得$|a_{2n}-a_{2n-1}|=\dfrac{1}{2^{2n-1}}$,$|a_{2n+2}-a_{2n+1}|=\dfrac{1}{2^{2n+1}}$结合$a_{2n}-a_{2n-1}>a_{2n+2}-a_{2n+1}$与$\dfrac{1}{2^{2n-1}}>\dfrac{1}{2^{2n}}$可去掉$|a_{2n}-a_{2n-1}|=\dfrac{1}{2^{2n-1}}$,$|a_{2n+2}-a_{2n+1}|=\dfrac{1}{2^{2n+1}}$的绝对值,分$n$为奇或偶数,利用叠加法即可求出数列$a_n$的通项公式.

试题解析:(1)因为数列$\{a_n\}$为递增数列,所以$a_{n+1}-a_n\geq 0$,则$|a_{n+1}-a_n|=p^n\Rightarrow a_{n+1}-a_n=p^n$,分别令$n=1,2$可得$a_2-a_1=p,a_3-a_2=p^2\Rightarrow a_2=1+p,a_3=p^2+p+1$,因为$a_1,2a_2,3a_3$成等差数列,所以$4a_2=a_1+3a_3\Rightarrow 4(1+p)=1+3(p^2+p+1)\Rightarrow 3p^2-p=0\Rightarrow p=\dfrac{1}{3}$或0,

当$p=0$时,数列a_n为常数数列不符合数列$\{a_n\}$是递增数列,所以$p=\dfrac{1}{3}$.

(2)由题可得$|a_{n+1}-a_n|=\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow|a_{2n}-a_{2n-1}|=\dfrac{1}{2^{2n-1}}$,$|a_{2n+2}-a_{2n+1}|=\dfrac{1}{2^{2n+1}}$,因为$\{a_{2n-1}\}$是递增数列且$\{a_{2n}\}$是递减数列,所以$a_{2n+1}>a_{2n-1}$且$a_{2n+2}<a_{2n}$,则有$\begin{cases}-a_{2n}<-a_{2n+2}\\ a_{2n-1}<a_{2n+1}\end{cases}\Rightarrow a_{2n-1}-a_{2n}<a_{2n+1}-a_{2n+2}$,因为

(2)由题可得$|a_{n+1}-a_n|=\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow|a_{2n}-a_{2n-1}|=\dfrac{1}{2^{2n-1}}$,$|a_{2n+2}-a_{2n+1}|=\dfrac{1}{2^{2n+1}}$,因为$\{a_{2n-1}\}$是递增数列且$\{a_{2n}\}$是递减数列,所以$a_{2n+1}-a_{2n-1}>0$且$a_{2n+2}-a_{2n}<0\Rightarrow-(a_{2n+2}-a_{2n})>0$,两不等式相加可得

$a_{2n+1}-a_{2n-1}-(a_{2n+2}-a_{2n})>0\Rightarrow a_{2n}-a_{2n-1}>a_{2n+2}-a_{2n+1}$,

又因为 $|a_{2n}-a_{2n-1}|=\frac{1}{2^{2n-1}}>|a_{2n+2}-a_{2n+1}|=\frac{1}{2^{2n+1}}$,所以 $a_{2n}-a_{2n-1}>0$,即 $a_{2n}-a_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-1}}$,

同理可得 $a_{2n+3}-a_{2n+2}>a_{2n+1}-a_{2n}$ 且 $|a_{2n+3}-a_{2n+2}|<|a_{2n+1}-a_{2n}|$,所以 $a_{2n+1}-a_{2n}=-\frac{1}{2^{2n}}$,

则当 $n=2m\ (m\in N^*)$ 时, $a_2-a_1=\frac{1}{2}, a_3-a_2=-\frac{1}{2^2}, a_4-a_3=\frac{1}{2^3},\cdots,a_{2m}-a_{2m-1}=\frac{1}{2^{2m-1}}$,这 $2m-1$ 个等式相加可得 $a_{2m}-a_1=\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2m-1}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2m-2}}\right)$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{2m-2}}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{2m-1}}\Rightarrow a_{2m}=\frac{4}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{2m-1}}.$$

当 $n=2m+1$ 时, $a_2-a_1=\frac{1}{2}, a_3-a_2=-\frac{1}{2^2}, a_4-a_3=\frac{1}{2^3},\cdots,a_{2m+1}-a_{2m}=-\frac{1}{2^{2m}}$,这 $2m$ 个等式相加可得

$$a_{2m+1}-a_1=\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2m-1}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2m}}\right)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{2m}}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2m}}$$

$a_{2m+1}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2m}}$,当 $m=0$ 时, $a_1=1$ 符合,故 $a_{2m-1}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2m-2}}$

综上 $a_n=\begin{cases}\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}, & n\text{为奇数}\\ \frac{4}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}, & n\text{为偶数}\end{cases}$.

【考点定位】叠加法 等差数列 等比数列 数列单调性

21.如图 7, O 为坐标原点,椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2,离心率为 e_1;双曲线 $C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点分别为 F_3,F_4,离心率为 e_2,已知 $e_1e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且 $|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$.

(1)求 C_1,C_2 的方程;

(2)过 F_1 点作 C_1 的不垂直于 y 轴的弦 AB, M 为 AB 的中点,当直线 OM 与 C_2 交于 P,Q 两点时,求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.

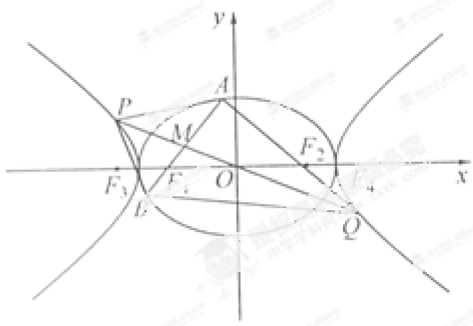


图 7

【答案】(1) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ (2) 2

【解析】

试题分析:(1)利用椭圆和双曲线 a,b,c 之间的关系可以用 a,b 分别表示双曲线和椭圆的离心率和焦点,由题目 $e_1e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$ 即可得到 a,b 之间的两个方程,联立方程消元即可求出 a,b 的值,得到双曲线和椭圆的标准方程.

(2)利用(1)求出焦点 F_1 的坐标,设出弦 AB 的直线的方程 $x=ny-1$,联立直线与椭圆消 x 得到关于 y 的一元二次方程,再利用根与系数的关系得到 A,B 两点纵坐标之间的和与积,进而得到 M 点的纵坐标带入 AB 直线即可得到 M 的横坐标,进而求出直线 OM 的方程,即为直线 PQ 的方程,联立直线 PQ 的方程 $\Delta>0$ 得到 n 的取值范围和求出点 P,Q 的坐标得到 PQ 的长度,利用点到直线的距离得到 A,B 到直线 PQ 的距离表达式,进而用 n 表示四边形的面积,利用不等式的性质和 n 的取值范围即可得到面积的最小值.

试题解析:(1)由题可得 $e_1=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$, $e_2=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$,且 $|F_1F_2|=2\sqrt{a^2-b^2}$,因为 $e_1e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且 $|F_2F_4|=\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}$,所以 $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}-1\Rightarrow a=\sqrt{2}b$ 且 $b=1,a=\sqrt{2}$,所以椭圆 C_1 方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$,双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

(2)由(1)可得 $F_2(-1,0)$,因为直线 AB 不垂直于 y 轴,所以设直线 AB 的方程为 $x=ny-1$,联立直线与椭圆方程可得 $(n^2+2)y^2-2ny-1=0$,则 $y_A+y_B=\frac{2n}{n^2+2}$, $y_Ay_B=\frac{-1}{n^2+2}$,则 $y_M=\frac{n}{n^2+2}$,因为 $M(x_M,y_M)$ 在

直线 AB 上,所以 $x_M=\frac{n^2}{n^2+2}-1=\frac{-2}{n^2+2}$,则直线 PQ 的方程为 $y=\frac{y_M}{x_M}x\Rightarrow y=-\frac{n}{2}x$,联立直线 PQ 与双曲线可得 $x^2-2\left(-\frac{n}{2}x\right)^2-2=0\Rightarrow x^2=\frac{4}{2-n^2}$,$y^2=\frac{n^2}{2-n^2}$,则 $2-n^2>0\Rightarrow -\sqrt{2}<n<\sqrt{2}$,则

$|PQ|=2\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{\frac{4+n^2}{2-n^2}}$,设点 A 到直线 PQ 的距离为 d,则 B 到直线 PQ 的距离也为 d,则

$2d=\frac{|nx_A+2y_A|+|nx_B+2y_B|}{\sqrt{n^2+4}}$,因为 A,B 在直线 PQ 的两端,所以 $(nx_B+2y_B)(nx_A+2y_A)<0$,

则 $2d=\frac{|nx_A+2y_A|+|nx_B+2y_B|}{\sqrt{n^2+4}}=\frac{|nx_A+2y_A-(nx_B+2y_B)|}{\sqrt{n^2+4}}$,又因为 A,B 在直线 $x=my-1$ 上,所以

$2d=\frac{(n^2+2)|y_A-y_B|}{\sqrt{n^2+4}}=\frac{(n^2+2)\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}}{\sqrt{n^2+4}}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{n^2+4}}$,

则四边形 $APBQ$ 面积 $S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot 2d=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{2-n^2}}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1+\frac{3}{2-n^2}}$,因为 $0<2-n^2\le 2$,所以当 $n^2=0$ 时,四边形 $APBQ$ 面积的最小值为 2.

【考点定位】弦长 双曲线 椭圆 最值

22.已知常数 $a>0$,函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\frac{2x}{x+2}$.

(1)讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性;

(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2,且 $f(x_1)+f(x_2)>0$,求 a 的取值范围.

【答案】(1)详见解析 (2)$\left(\frac{1}{2},1\right)$

【解析】

试题分析:(1)首先对函数 $f(x)$ 求导并化简得到导函数 $f'(x)$.导函数的分母恒大于 0,分子为含参的二次函数,故讨论分子的符号,确定导函数符号得到原函数的单调性,即分 $\Delta\le 0$ 和 $\Delta>0$ 得到导函数分子大于 0 和小于 0 的解集进而得到函数的单调性.

(2)利用第(1)可得到当 $0<a<1$ 时,导数等于 0 有两个根,根据题意即为两个极值点,首先导函数等于 0 的两个根必须在原函数 $f(x)$ 的可行域内,把 x_1,x_2 关于 a 的表达式带入 $f(x_1)+f(x_2)>0$,得到关于 a 的不等式,

然后利用导函数讨论 a 的取值范围使得 $f(x_1)+f(x_2)>0$ 成立.即可解决该问题.

试题解析:(1)对函数 $f(x)$ 求导可得

$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{a(x+2)^2-4(1+ax)}{(1+ax)(x+2)^2}=\frac{ax^2-4(1-a)}{(1+ax)(x+2)^2}$,因为 $(1+ax)(x+2)^2>0$,所以当 $1-a\le 0$ 时,即 $a\ge 1$ 时, $f'(x)\ge 0$ 恒成立,则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,当 $a\le 1$ 时, $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$,则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}\right)$ 单调递减,在 $\left(\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a},+\infty\right)$ 单调递增的.

(2).由(1)可得,当 $a\ge 1$ 时, $f'(x)\ge 0$,此时 $f(x)$ 不存在极值点.因而要使得 $f(x)$ 有两个极值点,必有 $0<a<1$.当 $0<a<1$ 时, $f'(x)=0\Rightarrow x_1=\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$, $x_2=-\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$,由 $f(x)$ 的定义可知, $x>-\frac{1}{a}$ 且 $x\ne -2$,所以 $-\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}>-\frac{1}{a}$, $-\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}\ne -2\Rightarrow a\ne\frac{1}{2}$,即 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$,则 x_1,x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点,代入 $f(x_1)+f(x_2)>0$ 可得

$$f(x_1)+f(x_2)=\ln(1+ax_1)-\frac{2x_1}{x_1+2}+\ln(1+ax_2)-\frac{2x_2}{x_2+2}$$

$$=\ln\left[1+a(x_1+x_2)+a^2x_1x_2\right]-\frac{4x_1x_2+4(x_1+x_2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\ln(2a-1)^2-\frac{4(a-1)}{2a-1}=\ln(2a-1)^2+\frac{2}{2a-1}-2$$

令 $2a-1=x$ 且 $g(x)=\ln x^2+\frac{2}{x}-2$,由 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ 知:当 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时, $x\in(-1,0)$,

当 $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时, $x\in(0,1)$,

当 $x\in(-1,0)$ 时, $g(x)=2\ln(-x)+\frac{2}{x}-2$,对 $g(x)$ 求导可得 $g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x-1)}{x^2}<0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减,则 $g(x)<g(-1)=-4<0$,即 $f(x_1)+f(x_2)<0$ 不符合题意.

当 $x\in(0,1)$ 时, $g(x)=2\ln x+\frac{2}{x}-2$,对 $g(x)$ 求导可得 $g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x-1)}{x^2}<0$,所以函数 $g(x)$ 在

$(0,1)$ 上单调递减,则 $g(x)>g(1)=0$,即 $f(x_1)+f(x_2)>0$ 恒成立,

综上 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

【考点定位】导数 含参二次不等式 对数 单调性