

2014 年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数学（理科）

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. i 为虚数单位，则 $(\frac{1-i}{1+i})^2 = (\quad)$

- A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i

2. 若二项式 $(2x + \frac{a}{x})^7$ 的展开式中 $\frac{1}{x^3}$ 的系数是 84，则实数 $a = (\quad)$

- A. 2 B. $\sqrt[3]{4}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. 设 U 为全集， A, B 是集合，则“存在集合 C 使得 $A \subseteq C, B \subseteq C_U C$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 (\quad)

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

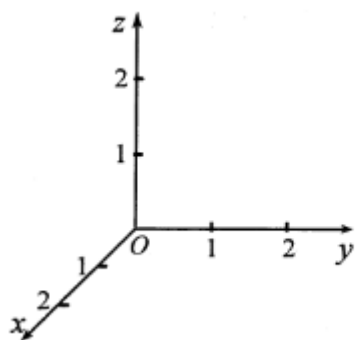
4. 根据如下样本数据

x	3	4	5	6	7	8
y	4.0	2.5	-0.5	0.5	-2.0	-3.0

得到的回归方程为 $\hat{y} = bx + a$ ，则 (\quad)

- A. $a > 0, b > 0$ B. $a > 0, b < 0$ C. $a < 0, b > 0$ D. $a < 0, b < 0$

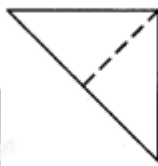
5. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，一个四面体的顶点坐标分别是 $(0, 0, 2), (2, 2, 0), (1, 2, 1), (2, 2, 2)$ ，给出编号①、②、③、④的四个图，则该四面体的正视图和俯视图分别为 (\quad)



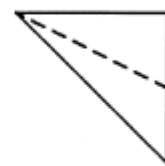
图①



图②



图③



图④

- A. ①和② B. ③和① C. ④和③ D. ④和②

6. 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 满足 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$ ，则称 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的一组正交函数，给出三组函数：① $f(x) = \sin \frac{1}{2}x, g(x) = \cos \frac{1}{2}x$ ；② $f(x) = x+1, g(x) = x-1$ ；③ $f(x) = x, g(x) = x^2$ 。

其中为区间 $[-1,1]$ 的正交函数的组数是（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 由不等式 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y - x - 2 \leq 0 \end{cases}$ 确定的平面区域记为 Ω_1 ，不等式 $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x + y \geq -2 \end{cases}$ ，确定的平面区域记为 Ω_2 ，在 Ω_1

中随机取一点，则该点恰好在 Ω_2 内的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{8}$

8. 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土，这是我国现存最早的有系统的数学典籍，其中记载有求“盖”的术：置如其周，令相承也。又以高乘之，三十六成一。该术相当于给出了有圆锥的底面周长 L 与高 h ，计算其体积 V 的近似公式 $v \approx \frac{1}{36}L^2h$ 。它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为

3. 那么近似公式 $v \approx \frac{2}{75}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为（ ）

- A. $\frac{22}{7}$ B. $\frac{25}{8}$ C. $\frac{157}{50}$ D. $\frac{355}{113}$

9. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点， P 是他们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$ ，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为（ ）

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 3 D. 2

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \frac{1}{2}(|x-a^2| + |x-2a^2| - 3a^2)$ ，若 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x-1) \leq f(x)$ ，则实数 a 的取值范围为（ ）

- A. $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$ B. $[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$ C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ D. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

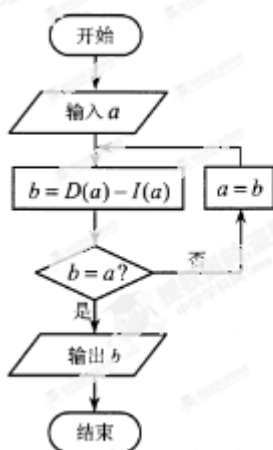
二．填空题：本大题共 6 小题，考生共需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分. 请将答案填在答题卡对应题号的位置上，答错位置，书写不清，模棱两可均不得分.

（一）必考题（11—14 题）

11. 设向量 $\mathbf{a} = (3,3)$ ， $\mathbf{b} = (1,-1)$ ，若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$ ，则实数 $\lambda =$ _____.

12. 直线 $l_1: y = x + a$ 和 $l_2: y = x + b$ 将单位圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 分成长度相等的四段弧, 则 $a^2 + b^2 =$ _____.

13. 设 a 是一个各位数字都不是 0 且没有重复数字的三位数. 将组成 a 的 3 个数字按从小到大排成的三位数记为 $I(a)$, 按从大到小排成的三位数记为 $D(a)$ (例如 $a = 815$, 则 $I(a) = 158$, $D(a) = 851$). 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 任意输入一个 a , 输出的结果 $b =$ _____.



14. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数, 且 $f(x) > 0$, 对任意 $a > 0, b > 0$, 若经过点 $(a, f(a)), (b, -f(b))$ 的直线与 x 轴的交点为 $(c, 0)$, 则称 c 为 a, b 关于函数 $f(x)$ 的平均数, 记为 $M_f(a, b)$, 例如, 当 $f(x) = 1(x > 0)$ 时, 可得 $M_f(a, b) = c = \frac{a+b}{2}$, 即 $M_f(a, b)$ 为 a, b 的算术平均数.

(1) 当 $f(x) =$ _____ $(x > 0)$ 时, $M_f(a, b)$ 为 a, b 的几何平均数;

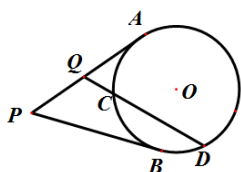
(2) 当 $f(x) =$ _____ $(x > 0)$ 时, $M_f(a, b)$ 为 a, b 的调和平均数 $\frac{2ab}{a+b}$;

(以上两空各只需写出一个符合要求的函数即可)

(二) 选考题

15. (选修 4-1: 几何证明选讲)

如图, P 为 $\odot O$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 过 PA 的中点 Q 作割线交 $\odot O$ 于 C, D 两点, 若 $QC = 1, CD = 3$, 则 $PB =$ _____.



16. (选修 4-4: 坐标系与参数方程)

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{\sqrt{3}t}{3} \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,

曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho = 2$, 则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_____.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 11 分)

某实验室一天的温度 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 随时间 t (单位: h) 的变化近似满足函数关系:

$$f(t) = 10 - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} t - \sin \frac{\pi}{12} t, t \in [0, 24).$$

(1) 求实验室这一天的最大温差;

(2) 若要求实验室温度不高于 11°C , 则在哪段时间实验室需要降温?

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, 且 a_1 、 a_2 、 a_5 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

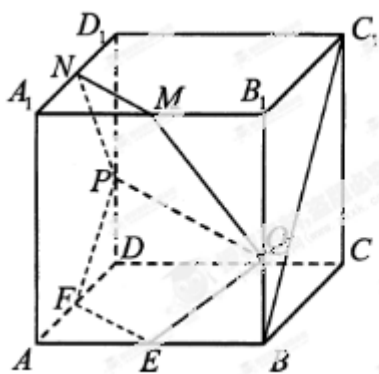
(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在正整数 n , 使得 $S_n > 60n + 800$? 若存在, 求 n 的最小值; 若不存在, 说明理由.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, M, N 分别是棱 AB, AD, A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BB_1 上移动, 且 $DP = BQ = \lambda (0 < \lambda < 2)$.

(1) 当 $\lambda = 1$ 时, 证明: 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EF PQ$;

(2) 是否存在 λ , 使平面 $EF PQ$ 与面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

计划在某水库建一座至多安装 3 台发电机的水电站，过去 50 年的水文资料显示，水库年入流量 X (年入流量：一年内上游来水与库区降水之和，单位：亿立方米) 都在 40 以上，其中，不足 80 的年份有 10 年，不低于 80 且不超过 120 的年份有 35 年，超过 120 的年份有 5 年. 将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率，并假设各年的年入流量相互独立.

- (1) 求未来 4 年中，至多 1 年的年入流量超过 120 的概率；
- (2) 水电站希望安装的发电机尽可能运行，但每年发电机最多可运行台数受年入流量 X 限制，并有如下关系：

年入流量 X	$40 < X < 80$	$80 \leq X \leq 120$	$X > 120$
发电量最多可运行台数	1	2	3

若某台发电机运行，则该台年利润为 5000 万元；若某台发电机未运行，则该台年亏损 800 万元，欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机多少台？

21. (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1，记点 M 的轨迹为 C .

- (1) 求轨迹为 C 的方程；
- (2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $p(-2,1)$ ，求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点，两个公共点，三个公共点时 k 的相应取值范围.

22. (本题满分 14 分)

π 为圆周率， $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.

- (1) 求函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调区间；
- (2) 求 e^3 ， 3^e ， e^π ， π^e ， 3^π ， π^3 这 6 个数中的最大数与最小数；

(3) 将 e^3 , 3^e , e^π , π^e , 3^π , π^3 这 6 个数按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.