2016年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5分）已知z=（m+3）+（m﹣1）i在复平面内对应的点在第四象限，则实数m的取值范围是（　　）

A．（﹣3，1）　B．（﹣1，3）　C．（1，+∞）　D．（﹣∞，﹣3）

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义.

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；5N：数系的扩充和复数.

【分析】利用复数对应点所在象限，列出不等式组求解即可.

【解答】解：z=（m+3）+（m﹣1）i在复平面内对应的点在第四象限，

可得：$\begin{cases}m+3>0\\m-1<0\end{cases}$，解得﹣3<m<1.

故选：A.

【点评】本题考查复数的几何意义，考查计算能力.

2．（5分）已知集合A={1，2，3}，B={x|（x+1）（x﹣2）<0，x∈Z}，则A∪B等于（　　）

A．{1}　B．{1，2}

C．{0，1，2，3}　D．{﹣1，0，1，2，3}

【考点】1D：并集及其运算.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4O：定义法；5J：集合.

【分析】先求出集合A，B，由此利用并集的定义能求出A∪B的值.

【解答】解：∵集合A={1，2，3}，

B={x|（x+1）（x﹣2）<0，x∈Z}={0，1}，

$\therefore A\cup B=\{0，1，2，3\}$.

故选：C.

【点评】本题考查并集的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意并集定义的合理运用.

3．（5分）已知向量$\vec{a}=(1，m)$，$\vec{b}=(3，-2)$，且$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则m=（　　）

A．﹣8　　B．﹣6　　C．6　　D．8

【考点】9H：平面向量的基本定理.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；5A：平面向量及应用.

【分析】求出向量$\vec{a}+\vec{b}$的坐标，根据向量垂直的充要条件，构造关于m的方程，解得答案.

【解答】解：∵向量$\vec{a}=(1，m)$，$\vec{b}=(3，-2)$，

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=(4，m-2)$，

又$\because (\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，

$\therefore 12-2(m-2)=0$，

解得：m=8，

故选：D.

【点评】本题考查的知识点是向量垂直的充要条件，难度不大，属于基础题.

4．（5分）圆$x^2+y^2-2x-8y+13=0$的圆心到直线$ax+y-1=0$的距离为1，则a=（　　）

A．$-\frac{4}{3}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【考点】IT：点到直线的距离公式；J9：直线与圆的位置关系.

【专题】35：转化思想；4R：转化法；5B：直线与圆.

【分析】求出圆心坐标，代入点到直线距离方程，解得答案．

【解答】解：圆$x^2+y^2-2x-8y+13=0$的圆心坐标为：（1，4），

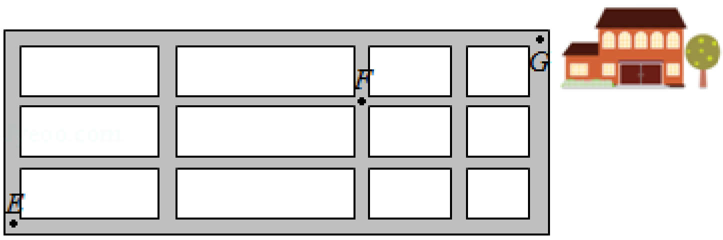
故圆心到直线$ax+y-1=0$的距离$d=\frac{|a+4-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$，

解得：$a=-\frac{4}{3}$，

故选：A．

【点评】本题考查的知识点是圆的一般方程，点到直线的距离公式，难度中档．

5．（5分）如图，小明从街道的E处出发，先到F处与小红会合，再一起到位于G处的老年公寓参加志愿者活动，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为（　　）



A．24　　B．18　　C．12　　D．9

【考点】D2：分步乘法计数原理；D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】12：应用题；34：方程思想；49：综合法；5O：排列组合．

【分析】从E到F最短的走法，无论怎样走，一定包括4段，其中2段方向相同，另2段方向相同，每种最短走法，即是从4段中选出2段走东向的，选出2段走北向的，由组合数可得最短的走法，同理从F到G，最短的走法，有$C_3^1=3$种走法，利用乘法原理可得结论．

【解答】解：从E到F，每条东西向的街道被分成2段，每条南北向的街道被分成2段，

从E到F最短的走法，无论怎样走，一定包括4段，其中2段方向相同，另2段方向相同，

每种最短走法，即是从4段中选出2段走东向的，选出2段走北向的，故共有C_4^2C

$_2{}^2$=6种走法.

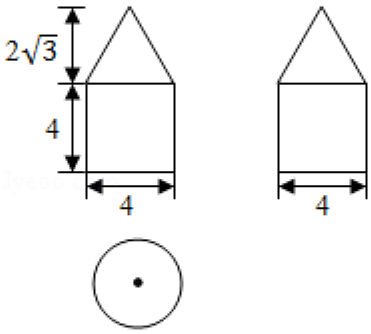
同理从F到G，最短的走法，有$C_3^1C_2^2$=3种走法.

∴小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为6×3=18种走法.

故选：B.

【点评】本题考查排列组合的简单应用，得出组成矩形的条件和最短走法是解决问题的关键，属基础题

6．（5分）如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为（　　）



A．20π　　B．24π　　C．28π　　D．32π

【考点】L!：由三视图求面积、体积.

【专题】15：综合题；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离.

【分析】空间几何体是一个组合体，上面是一个圆锥，圆锥的底面直径是4，圆锥的高是$2\sqrt{3}$，在轴截面中圆锥的母线长使用勾股定理做出的，写出表面积，下面是一个圆柱，圆柱的底面直径是4，圆柱的高是4，做出圆柱的表面积，注意不包括重合的平面.

【解答】解：由三视图知，空间几何体是一个组合体，

上面是一个圆锥，圆锥的底面直径是4，圆锥的高是$2\sqrt{3}$，

∴在轴截面中圆锥的母线长是$\sqrt{12+4}$=4，

∴圆锥的侧面积是π×2×4=8π，

下面是一个圆柱，圆柱的底面直径是4，圆柱的高是4，

∴圆柱表现出来的表面积是$\pi\times2^2+2\pi\times2\times4=20\pi$

∴空间组合体的表面积是28π，

故选：C．

【点评】本题考查由三视图求表面积，本题的图形结构比较简单，易错点可能是两个几何体重叠的部分忘记去掉，求表面积就有这样的弊端．

7．（5分）若将函数y=2sin2x的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，则平移后的图象的对称轴为（　　）

A．$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$（k∈Z）　　B．$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$（k∈Z）

C．$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$（k∈Z）　　D．$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$（k∈Z）

【考点】H6：正弦函数的奇偶性和对称性；HJ：函数y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】35：转化思想；49：综合法；57：三角函数的图像与性质．

【分析】利用函数y=Asin（ωx+φ）（A＞0，ω＞0）的图象的变换及正弦函数的对称性可得答案．

【解答】解：将函数y=2sin2x的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到$y=2\sin2(x+\frac{\pi}{12})=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

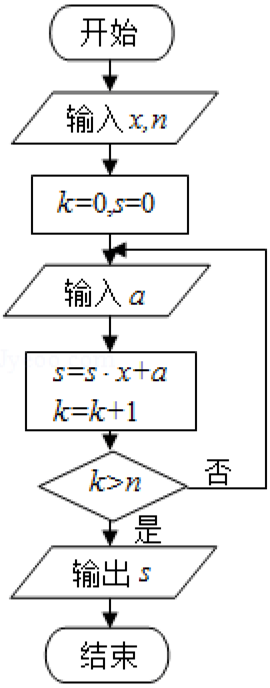
由$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$（k∈Z）得：$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$（k∈Z），

即平移后的图象的对称轴方程为$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$（k∈Z），

故选：B．

【点评】本题考查函数y=Asin（ωx+φ）（A＞0，ω＞0）的图象的变换规律的应用及正弦函数的对称性质，属于中档题．

8．（5分）中国古代有计算多项式值的秦九韶算法，如图是实现该算法的程序框图．执行该程序框图，若输入的x=2，n=2，依次输入的a为2，2，5，则输出的s=（　　）



A．7　　　　B．12　　　　C．17　　　　D．34

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；28：操作型；5K：算法和程序框图．

【分析】根据已知的程序框图可得，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量S的值，模拟程序的运行过程，可得答案．

【解答】解：∵输入的x=2，n=2，

当输入的a为2时，S=2，k=1，不满足退出循环的条件；

当再次输入的a为2时，S=6，k=2，不满足退出循环的条件；

当输入的a为5时，S=17，k=3，满足退出循环的条件；

故输出的S值为17，

故选：C．

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环次数不多，或有规律可循时，可采用模拟程序法进行解答．

9．（5分）若cos（$\frac{\pi}{4}$﹣α）=$\frac{3}{5}$，则sin2α=（　　）

A．$\frac{7}{25}$　　　　B．$\frac{1}{5}$　　　　C．﹣$\frac{1}{5}$　　　　D．﹣$\frac{7}{25}$

【考点】GF：三角函数的恒等变换及化简求值．

【专题】36：整体思想；4R：转化法；56：三角函数的求值．

【分析】法1°：利用诱导公式化sin2α=cos（$\frac{\pi}{2}$﹣2α），再利用二倍角的余弦可得答案．

法°：利用余弦二倍角公式将左边展开，可以得sinα+cosα的值，再平方，即得sin2α的值

【解答】解：法1°：∵cos（$\frac{\pi}{4}$﹣α）=$\frac{3}{5}$，

∴sin2α=cos（$\frac{\pi}{2}$﹣2α）=cos2（$\frac{\pi}{4}$﹣α）=2cos²（$\frac{\pi}{4}$﹣α）﹣1=2×$\frac{9}{25}$﹣1=﹣$\frac{7}{25}$，

法2°：∵cos（$\frac{\pi}{4}$﹣α）=$\frac{\sqrt{2}}{2}$（sinα+cosα）=$\frac{3}{5}$，

∴$\frac{1}{2}$（1+sin2α）=$\frac{9}{25}$，

∴sin2α=2×$\frac{9}{25}$﹣1=﹣$\frac{7}{25}$，

故选：D．

【点评】本题考查三角函数的恒等变换及化简求值，熟练掌握诱导公式化与二倍角的余弦是关键，属于中档题．

10．（5分）从区间[0，1]随机抽取2n个数x_1，x_2，…，x_n，y_1，y_2，…，y_n构成n个数对（x_1，y_1），（x_2，y_2）…（x_n，y_n），其中两数的平方和小于1的数对共有m个，则用随机模拟的方法得到的圆周率π的近似值为（　　）

A．$\frac{4n}{m}$　　B．$\frac{2n}{m}$　　C．$\frac{4m}{n}$　　D．$\frac{2m}{n}$

【考点】CF：几何概型．

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；5I：概率与统计．

【分析】以面积为测度，建立方程，即可求出圆周率π的近似值．

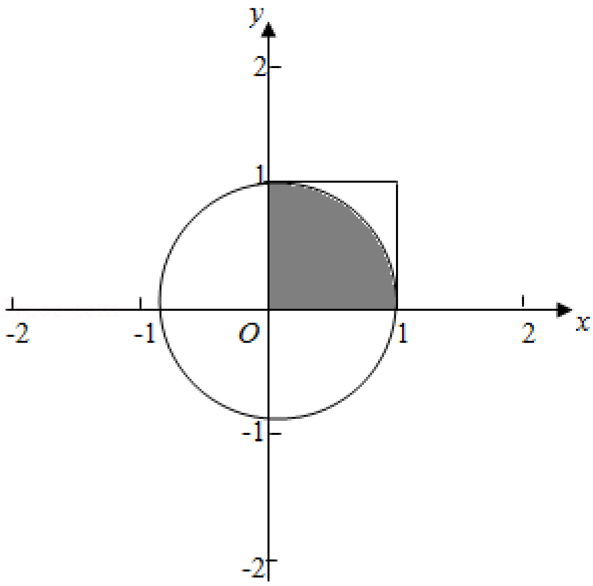
【解答】解：由题意，两数的平方和小于1，对应的区域的面积为$\frac{1}{4}$π•1²，从区间[0，1】随机抽取2n个数x_1，x_2，…，x_n，y_1，y_2，…，y_n，构成n个数对（x_1

，y_1），（x_2，y_2），…，（x_n，y_n），对应的区域的面积为1^2.

$\therefore\frac{m}{n}=\frac{\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2}{1^2}$

$\therefore\pi=\frac{4m}{n}$.

故选：C.



【点评】古典概型和几何概型是我们学习的两大概型，古典概型要求能够列举出所有事件和发生事件的个数，而不能列举的就是几何概型，几何概型的概率的值是通过长度、面积和体积的比值得到．

11．（5分）已知F_1，F_2是双曲线E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左，右焦点，点M在E上，$MF_1$与x轴垂直，$\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$，则E的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\frac{3}{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．2

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】31：数形结合；44：数形结合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由条件$MF_1\perp MF_2$，$\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$，列出关系式，从而可求离心率．

【解答】解：由题意，M为双曲线左支上的点，

则$|MF_1|=\frac{b^2}{a}$，$|MF_2|=\sqrt{4c^2+(\frac{b^2}{a})^2}$，

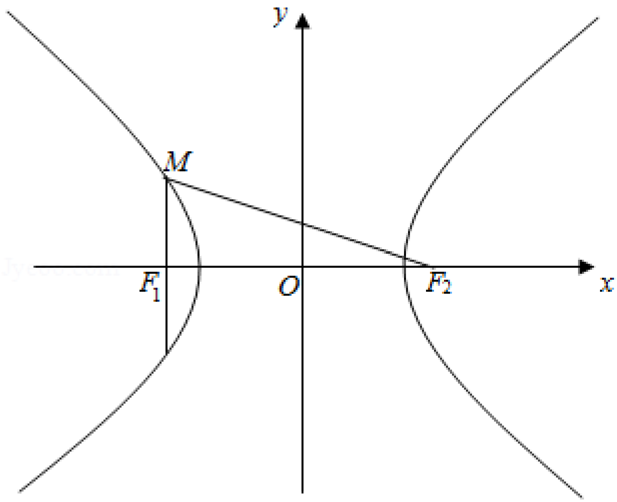
$\therefore\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$，$\therefore\frac{\frac{b^2}{a}}{\sqrt{4c^2+\frac{b^4}{a^2}}}=\frac{1}{3}$，

可得：$2b^4=a^2c^2$，即$\sqrt{2}b^2=ac$，又$c^2=a^2+b^2$，

可得$\sqrt{2}e^2-e-\sqrt{2}=0$，

$e>1$，解得$e=\sqrt{2}$.

故选：A.



【点评】本题考查双曲线的定义及离心率的求解，关键是找出几何量之间的关系，考查数形结合思想，属于中档题.

12. （5分）已知函数f（x）（x∈R）满足f（﹣x）=2﹣f（x），若函数$y=\frac{x+1}{x}$与y=f（x）图象的交点为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_m,y_m)，则$\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$（　　）

A．0　　B．m　　C．2m　　D．4m

【考点】3P：抽象函数及其应用.

【专题】33：函数思想；48：分析法；51：函数的性质及应用．

【分析】由条件可得f（x）+f（﹣x）=2，即有f（x）关于点（0，1）对称，又函数$y=\frac{x+1}{x}$，即$y=1+\frac{1}{x}$的图象关于点（0，1）对称，即有（x_1，y_1）为交点，即有（﹣x_1，2﹣y_1）也为交点，计算即可得到所求和．

【解答】解：函数f（x）（x∈R）满足f（﹣x）=2﹣f（x），

即为f（x）+f（﹣x）=2，

可得f（x）关于点（0，1）对称，

函数$y=\frac{x+1}{x}$，即$y=1+\frac{1}{x}$的图象关于点（0，1）对称，

即有（x_1，y_1）为交点，即有（﹣x_1，2﹣y_1）也为交点，

（x_2，y_2）为交点，即有（﹣x_2，2﹣y_2）也为交点，

…

则有$\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_m+y_m)$

$=\frac{1}{2}[(x_1+y_1)+(-x_1+2-y_1)+(x_2+y_2)+(-x_2+2-y_2)+\ldots+(x_m+y_m)+(-x_m+2-y_m)]$

=m．

故选：B．

【点评】本题考查抽象函数的运用：求和，考查函数的对称性的运用，以及化简整理的运算能力，属于中档题．

二、填空题：本题共4小题，每小题5分．

13．（5分）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，a=1，则b=$\underline{\frac{21}{13}}$．

【考点】HU：解三角形．

【专题】34：方程思想；48：分析法；56：三角函数的求值；58：解三角形．

【分析】运用同角的平方关系可得sinA，sinC，再由诱导公式和两角和的正弦

公式，可得sinB，运用正弦定理可得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$，代入计算即可得到所求值.

【解答】解：由$\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，可得

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$，

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$，

$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{63}{65}$，

由正弦定理可得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$

$=\frac{1\times\frac{63}{65}}{\frac{3}{5}}=\frac{21}{13}$.

故答案为：$\frac{21}{13}$.

【点评】本题考查正弦定理的运用，同时考查两角和的正弦公式和诱导公式，以及同角的平方关系的运用，考查运算能力，属于中档题.

14．（5分）α，β是两个平面，m，n是两条直线，有下列四个命题：

①如果m⊥n，m⊥α，n∥β，那么α⊥β.

②如果m⊥α，n∥α，那么m⊥n.

③如果α∥β，m⊂α，那么m∥β.

④如果m∥n，α∥β，那么m与α所成的角和n与β所成的角相等.

其中正确的命题是__②③④__（填序号）

【考点】2K：命题的真假判断与应用；LO：空间中直线与直线之间的位置关系；LP：空间中直线与平面之间的位置关系.

【专题】2A：探究型；5F：空间位置关系与距离；5Q：立体几何.

【分析】根据空间直线与平面的位置关系的判定方法及几何特征，分析判断各个结论的真假，可得答案.

【解答】解：①如果m⊥n，m⊥α，n∥β，不能得出α⊥β，故错误；

②如果n∥α，则存在直线l⊂α，使n∥l，由m⊥α，可得m⊥l，那么m⊥n．故正确；

③如果α∥β，m⊂α，那么m与β无公共点，则m∥β．故正确

④如果m∥n，α∥β，那么m，n与α所成的角和m，n与β所成的角均相等．故正确；

故答案为：②③④

【点评】本题以命题的真假判断与应用为载体，考查了空间直线与平面的位置关系，难度中档．

15．（5分）有三张卡片，分别写有1和2，1和3，2和3．甲，乙，丙三人各取走一张卡片，甲看了乙的卡片后说："我与乙的卡片上相同的数字不是2"，乙看了丙的卡片后说："我与丙的卡片上相同的数字不是1"，丙说："我的卡片上的数字之和不是5"，则甲的卡片上的数字是__1和3__．

【考点】F4：进行简单的合情推理．

【专题】2A：探究型；49：综合法；5L：简易逻辑．

【分析】可先根据丙的说法推出丙的卡片上写着1和2，或1和3，分别讨论这两种情况，根据甲和乙的说法可分别推出甲和乙卡片上的数字，这样便可判断出甲卡片上的数字是多少．

【解答】解：根据丙的说法知，丙的卡片上写着1和2，或1和3；

（1）若丙的卡片上写着1和2，根据乙的说法知，乙的卡片上写着2和3；

∴根据甲的说法知，甲的卡片上写着1和3；

（2）若丙的卡片上写着1和3，根据乙的说法知，乙的卡片上写着2和3；

又甲说，"我与乙的卡片上相同的数字不是2"；

∴甲的卡片上写的数字不是1和2，这与已知矛盾；

∴甲的卡片上的数字是1和3．

故答案为：1和3．

【点评】考查进行简单的合情推理的能力，以及分类讨论得到解题思想，做这类题注意找出解题的突破口．

16．（5分）若直线y=kx+b是曲线y=lnx+2的切线，也是曲线y=ln（x+1）的切线

，则b=$\underline{\quad 1-\ln 2\quad}$.

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】53：导数的综合应用.

【分析】先设切点，然后利用切点来寻找切线斜率的联系，以及对应的函数值，综合联立求解即可

【解答】解：设y=kx+b与y=lnx+2和y=ln（x+1）的切点分别为（x_1，kx_1+b）、（x_2，kx_2+b）；

由导数的几何意义可得$k=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1}$，得$x_1=x_2+1$

再由切点也在各自的曲线上，可得$\begin{cases}kx_1+b=\ln x_1+2\\kx_2+b=\ln(x_2+1)\end{cases}$

联立上述式子解得$\begin{cases}k=2\\x_1=\frac{1}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$；

从而$kx_1+b=\ln x_1+2$得出$b=1-\ln 2$.

【点评】本题考查了导数的几何意义，体现了方程思想，对学生综合计算能力有一定要求，中档题

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（12分）S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1=1$，$S_7=28$，记$b_n=[\lg a_n]$，其中[x]表示不超过x的最大整数，如[0.9]=0，[lg99]=1.

（Ⅰ）求b_1，b_{11}，b_{101}；

（Ⅱ）求数列$\{b_n\}$的前1000项和.

【考点】83：等差数列的性质；8E：数列的求和.

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；54：等差数列与等比数列.

【分析】（Ⅰ）利用已知条件求出等差数列的公差，求出通项公式，然后求解b_1，b_{11}，b_{101}；

（Ⅱ）找出数列的规律，然后求数列$\{b_n\}$的前1000项和．

【解答】解：（Ⅰ）S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1=1$，$S_7=28$，$7a_4=28$．

可得$a_4=4$，则公差$d=1$．

$a_n=n$，

$b_n=[\lg n]$，则$b_1=[\lg 1]=0$，

$b_{11}=[\lg 11]=1$，

$b_{101}=[\lg 101]=2$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知：$b_1=b_2=b_3=\ldots=b_9=0$，$b_{10}=b_{11}=b_{12}=\ldots=b_{99}=1$．

$b_{100}=b_{101}=b_{102}=b_{103}=\ldots=b_{999}=2$，$b_{10，00}=3$．

数列$\{b_n\}$的前1000项和为：$9\times0+90\times1+900\times2+3=1893$．

【点评】本题考查数列的性质，数列求和，考查分析问题解决问题的能力，以及计算能力．

18．（12分）某保险的基本保费为a（单位：元），继续购买该保险的投保人成为续保人，续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下：

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保费	0.85a	a	1.25a	1.5a	1.75a	2a

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下：

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥5
概率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

（Ⅰ）求一续保人本年度的保费高于基本保费的概率；

（Ⅱ）若一续保人本年度的保费高于基本保费，求其保费比基本保费高出60%的概率；

（Ⅲ）求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值．

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5I：概率与统计．

【分析】（Ⅰ）上年度出险次数大于等于2时，续保人本年度的保费高于基本保费，由此利用该险种一续保人一年内出险次数与相应概率统计表根据对立

事件概率计算公式能求出一续保人本年度的保费高于基本保费的概率.

（Ⅱ）设事件A表示“一续保人本年度的保费高于基本保费”，事件B表示“一续保人本年度的保费比基本保费高出60%”，由题意求出P（A），P（AB），由此利用条件概率能求出若一续保人本年度的保费高于基本保费，则其保费比基本保费高出60%的概率.

（Ⅲ）由题意，能求出续保人本年度的平均保费与基本保费的比值.

【解答】解：（Ⅰ）∵某保险的基本保费为a（单位：元），

上年度出险次数大于等于2时，续保人本年度的保费高于基本保费，

∴由该险种一续保人一年内出险次数与相应概率统计表得：

一续保人本年度的保费高于基本保费的概率：

$p_1=1-0.30-0.15=0.55$.

（Ⅱ）设事件A表示“一续保人本年度的保费高于基本保费”，事件B表示“一续保人本年度的保费比基本保费高出60%”，

由题意P（A）=0.55，P（AB）=0.10+0.05=0.15，

由题意得若一续保人本年度的保费高于基本保费，

则其保费比基本保费高出60%的概率：

$p_2=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.15}{0.55}=\frac{3}{11}$.

（Ⅲ）由题意，续保人本年度的平均保费与基本保费的比值为：

$\frac{0.85a\times0.30+a\times0.15+1.25a\times0.2+1.5a\times0.20+1.75a\times0.1+2a\times0.05}{a}=1.23$，

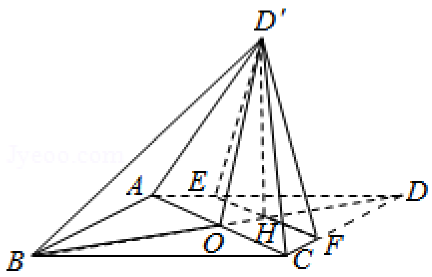
∴续保人本年度的平均保费与基本保费的比值为1.23.

【点评】本题考查概率的求法，是中档题，解题时要认真审题，注意对立事件概率计算公式、条件概率计算公式的合理运用.

19．（12分）如图，菱形ABCD的对角线AC与BD交于点O，AB=5，AC=6，点E，F分别在AD，CD上，AE=CF=$\frac{5}{4}$，EF交于BD于点H，将△DEF沿EF折到△D′EF的位置，OD′=$\sqrt{10}$.

（Ⅰ）证明：D′H⊥平面ABCD；

（Ⅱ）求二面角B﹣D′A﹣C的正弦值.



【考点】MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】15：综合题；35：转化思想；44：数形结合法；5G：空间角．

【分析】（Ⅰ）由底面ABCD为菱形，可得AD=CD，结合AE=CF可得EF∥AC，再由ABCD是菱形，得AC⊥BD，进一步得到EF⊥BD，由EF⊥DH，可得EF⊥D′H，然后求解直角三角形得D′H⊥OH，再由线面垂直的判定得D′H⊥平面ABCD；

（Ⅱ）以H为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系，由已知求得所用点的坐标，得到$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD'}$、$\overrightarrow{AC}$的坐标，分别求出平面ABD′与平面AD′C的一个法向量$\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$，设二面角二面角B﹣D′A﹣C的平面角为θ，求出|cosθ|．则二面角B﹣D′A﹣C的正弦值可求．

【解答】（Ⅰ）证明：∵ABCD是菱形，

∴AD=DC，又AE=CF=$\frac{5}{4}$，

∴$\frac{DE}{EA}=\frac{DF}{FC}$，则EF∥AC，

又由ABCD是菱形，得AC⊥BD，则EF⊥BD，

∴EF⊥DH，则EF⊥D′H，

∵AC=6，

∴AO=3，

又AB=5，AO⊥OB，

∴OB=4，

∴OH=$\frac{AE}{AD}\cdot OD$=1，则DH=D′H=3，

∴$|OD'|^2=|OH|^2+|D'H|^2$，则D′H⊥OH，

又OH∩EF=H，

∴D′H⊥平面ABCD；

（Ⅱ）解：以H为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系，

∵AB=5，AC=6，

∴B（5，0，0），C（1，3，0），D′（0，0，3），A（1，﹣3，0），

$\overrightarrow{AB}=(4,\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{AD'}=(-1,\ 3,\ 3)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ 6,\ 0)$，

设平面ABD′的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x,\ y,\ z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD'}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}4x+3y=0\\ -x+3y+3z=0\end{cases}$，取x=3，得y=﹣4，z=5．

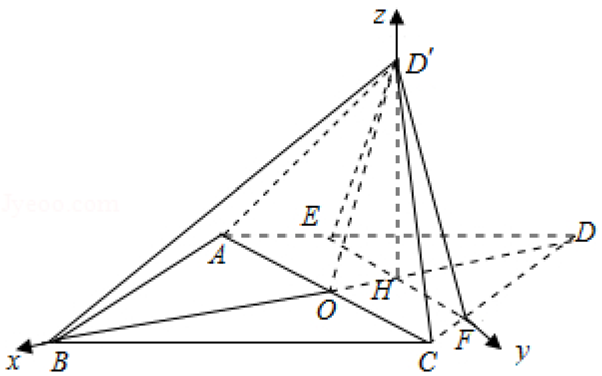
∴$\overrightarrow{n_1}=(3,\ -4,\ 5)$．

同理可求得平面AD′C的一个法向量$\overrightarrow{n_2}=(3,\ 0,\ 1)$，

设二面角二面角B﹣D′A﹣C的平面角为θ，

则$|\cos\theta|=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{|3\times3+5\times1|}{5\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{25}$．

∴二面角B﹣D′A﹣C的正弦值为$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{95}}{25}$．



【点评】本题考查线面垂直的判定，考查了二面角的平面角的求法，训练了利用平面的法向量求解二面角问题，体现了数学转化思想方法，是中档题．

20．（12分）已知椭圆E：$\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$的焦点在x轴上，A是E的左顶点，斜率为k（k＞0）的直线交E于A，M两点，点N在E上，MA⊥NA．

（Ⅰ）当t=4，|AM|=|AN|时，求△AMN的面积；

（Ⅱ）当2|AM|=|AN|时，求k的取值范围．

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】35：转化思想；48：分析法；5E：圆锥曲线中的最值与范围问题．

【分析】（Ⅰ）方法一、求出t=4时，椭圆方程和顶点A，设出直线AM的方程，代入椭圆方程，求交点M，运用弦长公式求得|AM|，由垂直的条件可得|AN|，再由|AM|=|AN|，解得k=1，运用三角形的面积公式可得△AMN的面积；

方法二、运用椭圆的对称性，可得直线AM的斜率为1，求得AM的方程代入椭圆方程，解方程可得M，N的坐标，运用三角形的面积公式计算即可得到；

（Ⅱ）直线AM的方程为$y=k(x+\sqrt{t})$，代入椭圆方程，求得交点M，可得|AM|，|AN|，再由2|AM|=|AN|，求得t，再由椭圆的性质可得t＞3，解不等式即可得到所求范围．

【解答】解：（Ⅰ）方法一、t=4时，椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，A（﹣2，0），

直线AM的方程为$y=k(x+2)$，代入椭圆方程，整理可得$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，

解得$x=-2$或$x=-\frac{8k^2-6}{3+4k^2}$，则$|AM|=\sqrt{1+k^2}\bullet\left|2-\frac{8k^2-6}{3+4k^2}\right|=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{12}{3+4k^2}$，

由AN⊥AM，可得$|AN|=\sqrt{1+(-\frac{1}{k})^2}\bullet\frac{12}{3+4\bullet(\frac{-1}{k})^2}=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{12}{3|k|+\frac{4}{|k|}}$，

由|AM|=|AN|，k＞0，可得$\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{12}{3+4k^2}=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{12}{3k+\frac{4}{k}}$，

整理可得$(k-1)(4k^2+k+4)=0$，由$4k^2+k+4=0$无实根，可得k=1，

即有△AMN的面积为$\frac{1}{2}|AM|^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+1}\bullet\frac{12}{3+4}\right)^2=\frac{144}{49}$；

方法二、由|AM|=|AN|，可得M，N关于x轴对称，

由MA⊥NA．可得直线AM的斜率为1，直线AM的方程为y=x+2，

代入椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，可得$7x^2+16x+4=0$，

解得x=﹣2或$-\frac{2}{7}$，M（$-\frac{2}{7}$，$\frac{12}{7}$），N（$-\frac{2}{7}$，$-\frac{12}{7}$），

则△AMN的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{24}{7}\times(-\frac{2}{7}+2)=\frac{144}{49}$；

（Ⅱ）直线AM的方程为$y=k(x+\sqrt{t})$，代入椭圆方程，

可得$(3+tk^2)x^2+2t\sqrt{t}k^2x+t^2k^2-3t=0$，

解得$x=-\sqrt{t}$或$x=-\frac{t\sqrt{t}k^2-3\sqrt{t}}{3+tk^2}$，

即有$|AM|=\sqrt{1+k^2}\bullet|\frac{t\sqrt{t}k^2-3\sqrt{t}}{3+tk^2}-\sqrt{t}|=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{6\sqrt{t}}{3+tk^2}$，

$|AN|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\bullet\frac{6\sqrt{t}}{3+\frac{t}{k^2}}=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{6\sqrt{t}}{3k+\frac{t}{k}}$，

由$2|AM|=|AN|$，可得$2\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{6\sqrt{t}}{3+tk^2}=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{6\sqrt{t}}{3k+\frac{t}{k}}$，

整理得$t=\frac{6k^2-3k}{k^3-2}$，

由椭圆的焦点在x轴上，则$t>3$，即有$\frac{6k^2-3k}{k^3-2}>3$，即有$\frac{(k^2+1)(k-2)}{k^3-2}<0$，

可得$\sqrt[3]{2}<k<2$，即k的取值范围是$(\sqrt[3]{2},2)$．

【点评】本题考查椭圆的方程的运用，考查直线方程和椭圆方程联立，求交点，以及弦长公式的运用，考查化简整理的运算能力，属于中档题．

21．（12分）（Ⅰ）讨论函数$f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x$的单调性，并证明当$x>0$时，$(x-2)e^x+x+2>0$；

（Ⅱ）证明：当$a\in[0,1)$时，函数$g(x)=\frac{e^x-ax-a}{x^2}$ $(x>0)$有最小值．设g(x)的最小值为h(a)，求函数h(a)的值域．

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6D：利用导数研究函数的极值．

【专题】53：导数的综合应用．

【分析】从导数作为切入点探求函数的单调性，通过函数单调性来求得函数的

值域，利用复合函数的求导公式进行求导，然后逐步分析即可

【解答】解：（1）证明：f（x）$=\frac{x-2}{x+2}e^{x}$

f'（x）$=e^{x}\left(\frac{x-2}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^{2}}\right)=\frac{x^{2}e^{x}}{(x+2)^{2}}$

∵当x∈（﹣∞，﹣2）∪（﹣2，+∞）时，f'（x）≥0

∴f（x）在（﹣∞，﹣2）和（﹣2，+∞）上单调递增

∴x＞0时，$\frac{x-2}{x+2}e^{x}>f(0)=-1$

即（x﹣2）$e^{x}+x+2>0$

（2）g'（x）$=\frac{(e^{x}-a)x^{2}-2x(e^{x}-ax-a)}{x^{4}}$

$=\frac{x(xe^{x}-2e^{x}+ax+2a)}{x^{4}}=\frac{(x+2)\left(\frac{x-2}{x+2}\cdot e^{x}+a\right)}{x^{3}}$

a∈[0，1）

由（1）知，当x＞0时，f（x）$=\frac{x-2}{x+2}e^{x}$的值域为（﹣1，+∞），只有一解使得

$\frac{t-2}{t+2}\cdot e^{t}=-a$，

只需$\frac{t-2}{t+2}\bullet e^{t}\le 0$恒成立，可得﹣2＜t≤2，

由x＞0，可得

t∈（0，2]

当x∈（0，t）时，g'（x）＜0，g（x）单调减；

当x∈（t，+∞），g'（x）＞0，g（x）单调增；

h（a）$=\frac{e^{t}-a(t+1)}{t^{2}}=\frac{e^{t}+(t+1)\frac{t-2}{t+2}\cdot e^{t}}{t^{2}}=\frac{e^{t}}{t+2}$

记k（t）$=\frac{e^{t}}{t+2}$，在t∈（0，2]时，k'（t）$=\frac{e^{t}(t+1)}{(t+2)^{2}}>0$，

故k（t）单调递增，

所以h（a）=k（t）∈$\left(\frac{1}{2}，\frac{e^{2}}{4}\right]$.

【点评】该题考查了导数在函数单调性上的应用，重点是掌握复合函数的求导

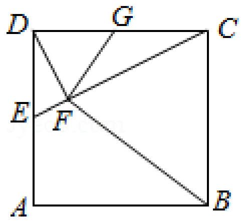
，以及导数代表的意义，计算量较大，难度较大．

请考生在第22～24题中任选一个题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.[选修4-1：几何证明选讲]

22．（10分）如图，在正方形ABCD中，E，G分别在边DA，DC上（不与端点重合），且DE=DG，过D点作DF⊥CE，垂足为F．

（Ⅰ）证明：B，C，G，F四点共圆；

（Ⅱ）若AB=1，E为DA的中点，求四边形BCGF的面积．



【考点】N8：圆内接多边形的性质与判定．

【专题】14：证明题．

【分析】（Ⅰ）证明B，C，G，F四点共圆可证明四边形BCGF对角互补，由已知条件可知∠BCD=90°，因此问题可转化为证明∠GFB=90°；

（Ⅱ）在Rt△DFC中，$GF=\frac{1}{2}CD=GC$，因此可得△GFB≌△GCB，则$S_{四边形BCGF}=2S_{\triangle BCG}$，据此解答．

【解答】（Ⅰ）证明：∵DF⊥CE，

∴Rt△DFC∽Rt△EDC，

$\therefore \frac{DF}{ED}=\frac{CF}{CD}$，

∵DE=DG，CD=BC，

$\therefore \frac{DF}{DG}=\frac{CF}{BC}$，

又∵∠GDF=∠DEF=∠BCF，

∴△GDF∽△BCF，

∴∠CFB=∠DFG，

∴∠GFB=∠GFC+∠CFB=∠GFC+∠DFG=∠DFC=90°，

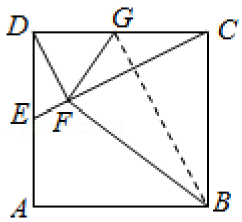
∴∠GFB+∠GCB=180°，

∴B，C，G，F四点共圆．

（Ⅱ）∵E为AD中点，AB=1，∴DG=CG=DE=$\frac{1}{2}$，

∴在Rt△DFC中，GF=$\frac{1}{2}$CD=GC，连接GB，Rt△BCG≌Rt△BFG，

∴$S_{四边形BCGF}=2S_{\triangle BCG}=2\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$．



【点评】本题考查四点共圆的判断，主要根据对角互补进行判断，注意三角形相似和全等性质的应用．

[选修4-4：坐标系与参数方程]

23．在直角坐标系xOy中，圆C的方程为（x+6）^{2}+y^2=25．

（Ⅰ）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求C的极坐标方程；

（Ⅱ）直线l的参数方程是$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$（t为参数），l与C交与A，B两点，|AB|=$\sqrt{10}$，求l的斜率．

【考点】J1：圆的标准方程；J8：直线与圆相交的性质．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5B：直线与圆．

【分析】（Ⅰ）把圆C的标准方程化为一般方程，由此利用$\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\alpha$，$y=\rho\sin\alpha$，能求出圆C的极坐标方程．

（Ⅱ）由直线l的参数方程求出直线l的一般方程，再求出圆心到直线距离，由此能求出直线l的斜率．

【解答】解：（Ⅰ）∵圆C的方程为（x+6）^{2}+y^2=25，

∴$x^2+y^2+12x+11=0$，

∵$\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\alpha$，$y=\rho\sin\alpha$，

∴C的极坐标方程为$\rho^2+12\rho\cos\alpha+11=0$.

（Ⅱ）∵直线l的参数方程是$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$（t为参数），

∴$t=\frac{x}{\cos\alpha}$，代入$y=t\sin\alpha$，得：直线l的一般方程$y=\tan\alpha\bullet x$，

∵l与C交与A，B两点，$|AB|=\sqrt{10}$，圆C的圆心C（﹣6，0），半径r=5，

圆心到直线的距离$d=\sqrt{r^2-(\frac{|AB|}{2})^2}$.

∴圆心C（﹣6，0）到直线距离$d=\frac{|-6\tan\alpha|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\sqrt{25-\frac{10}{4}}$，

解得$\tan^2\alpha=\frac{5}{3}$，∴$\tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$.

∴l的斜率$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$.

【点评】本题考查圆的极坐标方程的求法，考查直线的斜率的求法，是中档题，解题时要认真审题，注意点到直线公式、圆的性质的合理运用.

[选修4-5：不等式选讲]

24．已知函数$f(x)=|x-\frac{1}{2}|+|x+\frac{1}{2}|$，M为不等式f（x）＜2的解集.

（Ⅰ）求M；

（Ⅱ）证明：当a，b∈M时，$|a+b|<|1+ab|$.

【考点】R5：绝对值不等式的解法.

【专题】32：分类讨论；35：转化思想；4C：分类法；4R：转化法；59：不等式的解法及应用.

【分析】（I）分当$x<-\frac{1}{2}$时，当$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$时，当$x>\frac{1}{2}$时三种情况，分别求解不等式，综合可得答案；

（Ⅱ）当a，b∈M时，$(a^2-1)(b^2-1)>0$，即$a^2b^2+1>a^2+b^2$，配方后，可证得结论.

【解答】解：（I）当$x<-\frac{1}{2}$时，不等式f（x）＜2可化为：$\frac{1}{2}-x-x-\frac{1}{2}<2$，

解得：$x>-1$，

$\therefore -1<x<-\frac{1}{2}$，

当$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$时，不等式f（x）＜2可化为：$\frac{1}{2}-x+x+\frac{1}{2}=1<2$，

此时不等式恒成立，

$\therefore -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$，

当$x>\frac{1}{2}$时，不等式f（x）＜2可化为：$-\frac{1}{2}+x+x+\frac{1}{2}<2$，

解得：x＜1，

$\therefore\frac{1}{2}<x<1$，

综上可得：M=（﹣1，1）；

证明：（Ⅱ）当a，b∈M时，

$(a^2-1)(b^2-1)>0$，

即$a^2b^2+1>a^2+b^2$，

即$a^2b^2+1+2ab>a^2+b^2+2ab$，

即$(ab+1)^2>(a+b)^2$，

即$|a+b|<|1+ab|$.

【点评】本题考查的知识点是绝对值不等式的解法，不等式的证明，难度中档

.