

2010年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数学（理工农医类）

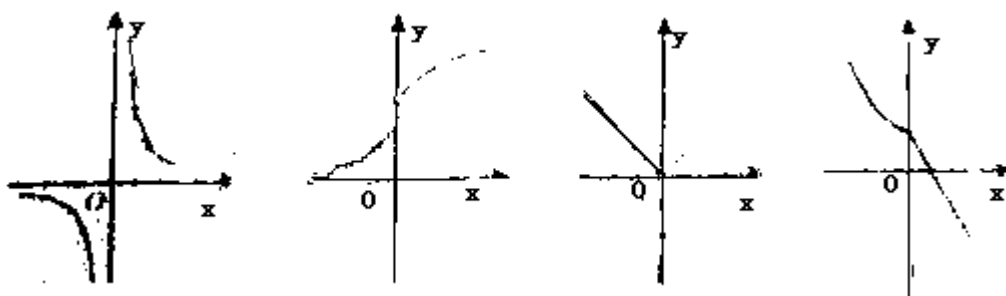
第 I 卷

一、选择题：

(1) i 是虚数单位，计算 $i + i^2 + i^3 =$

- (A) -1 (B) 1 (C) $-i$ (D) i

(2) 下列四个图像所表示的函数，在点 $x=0$ 处连续的是



- (A) (B) (C) (D)

(3) $2\log_5 10 + \log_5 0.25 =$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

(4) 函数 $f(x) = x^2 + mx + 1$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是

- (A) $m = -2$ (B) $m = 2$ (C) $m = -1$ (D) $m = 1$

(5) 设点M是线段BC的中点，点A在直线BC外， $\overrightarrow{BC}^2 = 16, |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ，则

$|\overrightarrow{AM}| =$

- (A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 1

(6) 将函数 $y = \sin x$ 的图像上所有的点向右平行移动 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，再把所得各点的横

坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图像的函数解析式是

(A) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{10})$

(B) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{5})$

(C) $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{10})$

(D) $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{20})$

- (7) 某加工厂用某原料由甲车间加工出A产品，由乙车间加工出B产品．甲车间加工一箱原料需耗费工时10小时可加工出7千克A产品，每千克A产品获利40元，乙车间加工一箱原料需耗费工时6小时可加工出4千克B产品，每千克B产品获利50元．甲、乙两车间每天共能完成至多70箱原料的加工，每天甲、乙两车间耗费工时总和不得超过480小时，甲、乙两车间每天总获利最大的生产计划为

(A) 甲车间加工原料10箱，乙车间加工原料60箱

(B) 甲车间加工原料15箱，乙车间加工原料55箱

(C) 甲车间加工原料18箱，乙车间加工原料50箱

(D) 甲车间加工原料40箱，乙车间加工原料30箱

- (8) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \neq 0$ ，其前 n 项的和为 S_n ，且 $S_{n+1} = 2S_n + a_1$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} =$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) 2

- (9) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F ，其右准线与 x 轴的交点为A，在椭圆上存在点P满足线段AP的垂直平分线过点 F ，则椭圆离心率的取值范围是

(A) $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(B) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

(C) $[\sqrt{2}-1, 1)$

(D) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

- (10) 由1、2、3、4、5、6组成没有重复数字且1、3都不与5相邻的六位偶数的个数是

(A) 72

(B) 96

(C) 108

(D) 144

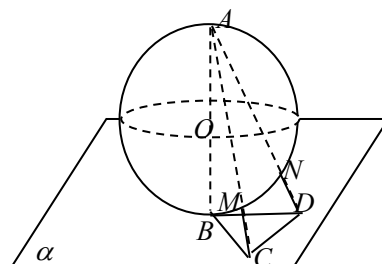
- (11) 半径为 R 的球 O 的直径 AB 垂直于平面 α ，垂足为 B ， $\triangle BCD$ 是平面 α 内边长为 R 的正三角形，线段 AC 、 AD 分别与球面交于点M，N，那么M、N两点间的球面距离是

(A) $R \arccos \frac{17}{25}$

(B) $R \arccos \frac{18}{25}$

(C) $\frac{1}{3} \pi R$

(D) $\frac{4}{15} \pi R$



(12) 设 $a > b > c > 0$, 则 $2a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} - 10ac + 25c^2$ 的最小值是

- (A) 2 (B) 4 (C) $2\sqrt{5}$ (D) 5

2010年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数学（理工农医类）

第 II 卷

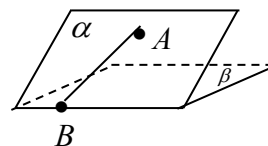
二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分。把答案填在题中横线上。

(13) $(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$ 的展开式中的第四项是_____。

(14) 直线 $x - 2y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 8$ 相交于 A、B 两点，则 $|AB| =$ _____。

(15) 如图，二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小是 60° ，线段 $AB \subset \alpha$ 。

$B \in l$ ， AB 与 l 所成的角为 30° 。则 AB 与平面 β 所成的角的正弦值是_____。



(16) 设 S 为复数集 C 的非空子集。若对任意 $x, y \in S$ ，都有 $x + y, x - y, xy \in S$ ，则称 S 为封闭集。下列命题：

- ① 集合 $S = \{a + bi \mid (a, b \text{ 为整数}, i \text{ 为虚数单位})\}$ 为封闭集；
- ② 若 S 为封闭集，则一定有 $0 \in S$ ；
- ③ 封闭集一定是无限集；
- ④ 若 S 为封闭集，则满足 $S \subseteq T \subseteq C$ 的任意集合 T 也是封闭集。

其中真命题是_____（写出所有真命题的序号）

三、解答题：本大题共6小题，共74分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) （本小题满分12分）

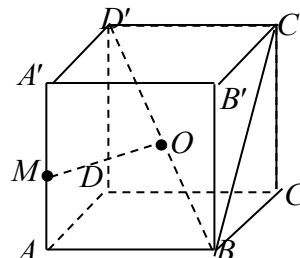
某种有奖销售的饮料，瓶盖内印有“奖励一瓶”或“谢谢购买”字样，购买一瓶若其瓶盖内印有“奖励一瓶”字样即为中奖，中奖概率为 $\frac{1}{6}$ 。甲、乙、丙三位同学每人购买了一瓶该饮料。

(I) 求甲中奖且乙、丙都没有中奖的概率;

(II) 求中奖人数 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

(18) (本小题满分12分)

已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为1, 点 M 是棱 AA' 的中点, 点 O 是对角线 BD' 的中点.



(I) 求证: OM 为异面直线 AA' 和 BD' 的公垂线;

(II) 求二面角 $M-BC'-B'$ 的大小;

(III) 求三棱锥 $M-OBC$ 的体积.

(19) (本小题满分12分)

(I) ①证明两角和的余弦公式 $C_{\alpha+\beta}: \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

②由 $C_{a+\beta}$ 推导两角和的正弦公式 $S_{a+\beta}: \sin(a+\beta) = \sin a\cos\beta + \cos a\sin\beta$.

(II) 已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 3$, 且 $\cos B = \frac{3}{5}$, 求 $\cos C$.

(20) (本小题满分12分)

已知定点 $A(-1,0), F(2,0)$, 定直线 $l: x = \frac{1}{2}$, 不在 x 轴上的动点 P 与点 F 的距离是它到直线 l 的距离的2倍. 设点 P 的轨迹为 E , 过点 F 的直线交 E 于 B, C 两点, 直线 AB, AC 分别交 l 于点 M, N

(I) 求 E 的方程;

(II) 试判断以线段 MN 为直径的圆是否过点 F , 并说明理由.

(21) (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_2 = 2$, 且对任意 $m, n \in N^*$ 都有

$$a_{2m-1} + a_{2n-1} = 2_{m+n-1} + 2(m-n)^2$$

(I) 求 a_3, a_5 ;

(II) 设 $b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}$ ($n \in N^*$) 证明: $\{b_n\}$ 是等差数列;

(III) 设 $c_n = (a_{2n+1} - a_n)q^{n-1}$ ($q \neq 0, n \in N^*$), 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(22) (本小题满分14分)

设 $f(x) = \frac{1+a^x}{1-a^x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

(I) 设关于 x 的方程 $\log_a \frac{t}{(x^2-1)(7-x)} = g(x)$ 在区间 $[2, 6]$ 上有实数解, 求

t 的取值范围;

(II) 当 $a = e$ (e 为自然对数的底数) 时, 证明: $\sum_{k=2}^n g(k) > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$;

(III) 当 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时, 试比较 $|\sum_{k=1}^n f(k) - n|$ 与 4 的大小, 并说明理由.