2011年普通高等学校招全国统一考试（山东卷）

文科数学

本卷分第I卷和第II卷两部分，共4页。满分150分。考试用时120分钟。考试结束后，将本试卷与答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用0.5毫米的签字笔将自己的姓名、座号、准考证号、县区和科类填写在自己的答题卡和试卷规定的位置上。

2. 第I卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答案不能打在试卷上。

3. 第II卷必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求最大的答案无效。

4. 第II卷第六题为选做题，考生须从所给（一）（二）两题中任选一题作答，不能全选。

参考公式：

柱体的体积公式：$v=sh$，其中s是柱体的底面积，h是柱体的高。

圆柱的侧面积公式：$s=cl$，其中c是圆柱的底面周长，l是圆柱体的母线长。

球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^2$，其中R是球的半径。

球的表面积公式：$s=4\pi R^2$，其中R是球的半径

用最小二乘法求线性回归方程系数公式：$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$a=\overline{y}-b\overline{x}$

如果事件A,B互斥，那么P(A+B)=P(A)+P(B).

第I卷（共60分）

一、选择题：本大题共12小题，没小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

① 设集合 $M=\{x|(x+3)(x-2)\lhd 0\}$，$N=\{x|1\le x\le 3\}$，则 $M\bigcap N=$

(A) $[1,2)$ (B) $[1,2]$ (C) $(2,3]$ (D) $[2,3]$

(2)复数 $z=\dfrac{2-i}{2+i}$（i 虚数单位）在复平面内对应的点所在象限为

（A）第一象限 （B）第二象限 （C）第三象限 （D）第四象限

（3）若点（a,9)在函数y= 3^x 的图像上，则tan $\dfrac{a\pi}{6}$ 的值为 （ ）

（A）0 (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C)1 (D) $\sqrt{3}$

（4）曲线 $y=x^3+11$ 在点P(1,12)处的切线与y轴交点的纵坐标是

（A）-9 (B)-3 (C)9 (D)15

(5) $a,b,c\in R$，命题“$a+b+c=3$，则 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$”的否命题是

（A）若 $a+b+c\neq 3$，则 $a^2+b^2+c^2<3$ (B)若 $a+b+c=3$，则 $a^2+b^2+c^2<3$

(C) 若 $a+b+c\neq 3$，则 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$ (D) 若 $a+b+c\geqslant 3$，则 $a^2+b^2+c^2=3$

(6)若函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递增，在区间 $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减，则 $\omega=$

（A）$\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 2 (D)3

(7)设变量x,y满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-5\leqslant 0, \\ x-y-2\leqslant 0, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$ ，则目标函数z=2x+3y+1的最大值为

（A）11　　(B)10　　(C)9　　(D)8.5

（8）某产品的广告费用x与销售额y的统计数据如下表：

广告费用 x（万元）	4	2	3	5
销售额 y（万元）	49	26	39	54

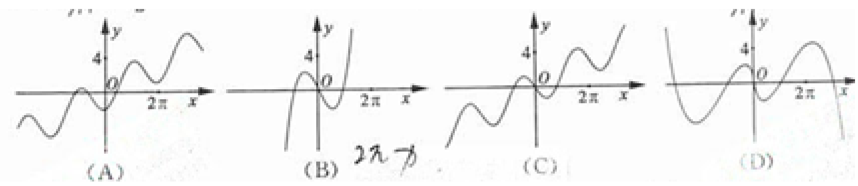
根据上表可得回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为9.4，据此模型预报广告费用为6万元时销售额为

（A）63.6 万元　(B)65.6万元　(C)67.7万元　(D)72.0万元

(9)设M(x_0,y_0)为抛物线C：x^2=8y上一点，F为抛物线C的焦点，以F为圆心、|FM|为半径的圆和抛物线C的准线相交，则 y的取值范围是

（A）(0,1)　　(B)　[0,2]　　(C)(2,+∞)　(D)[2,+ ∞)

（10）函数 $y=\dfrac{\pi}{2}-2\sin x$ 的图像大致是



（11）右图是长和宽分别相等的两个矩形，结合下列三个命题：①存在三棱柱，其正（主）视图、俯视图如右图；②存在四棱柱，其正（主）视图、俯视图如右图；③存在圆柱，其正（主）视图、俯视图如右图。其中真命题的个数是

（A）3　　　　（B）2

（C）1　　　　（D）0

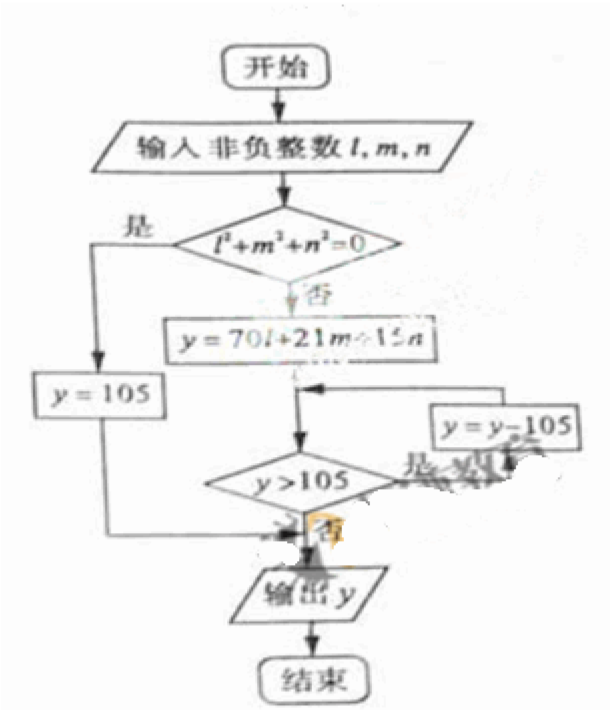
(12)设A_1，A_2，A_3，A_4是平面直角坐标系中两两不同的四点，若$\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}(\lambda\in R)$，$\overrightarrow{A_1A_4}=\mu\overrightarrow{A_1A_2}(\mu\in R)$，且$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，则称$A_3A_4$调和分割$A_1$,$A_2$. 已知C（c，0），D(d，0)（(c，d，∈ R)调和分割点A(1，0)，B(,1，0)，则下面说法正确的是

（A）C可能是限度那AB的中点

（B）D可能是限度那AB的中点

（C）C，D可能同时在线段AB上

（D）C，D不可能同时在线段AB的延长线上



第 II 卷（共90分）

一、填空题。本大题共4小题，每小题4分，共16分

（13）某高校甲、乙、丙、丁四个专业分别有150、150、400、300名学生，为了解学生的就业倾向，用分层抽样的方法从该校这四个专业共抽取40名学生进行调查，应在丙专业抽取的学生人数为________________.

（14）执行右图所示的程序框图，输入$! = 2.m = 3.n = 5$，则输出的y的值是________________.

（15）已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$=1（$a$＞0,

b＞0)和椭圆$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$有相同的焦点，且双曲线的离心率是椭圆离心率的两倍，则双曲线的方程为________________.

（16）已知函数$f\left(x\right)=\log_{a^2} x+x-b$（$a$＞0，且$a\neq 1$）.

当2＜a＜3＜b＜4时，函数$f\left(x\right)$的零点$x_0=\in\left(n,n+1\right),n\in N^*$，则$n$=______________________.

三、解答题：本大题共6小题，共74分。

（17）（本小题满分12分）

在 △ABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知$\dfrac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\dfrac{2c-a}{b}$。

（I）求$\dfrac{\sin C}{\sin A}$的值；

（II）若$\cos B=\dfrac{1}{4}$， △ABC的周长为5，求b的长。

（18）（本小题满分12分）

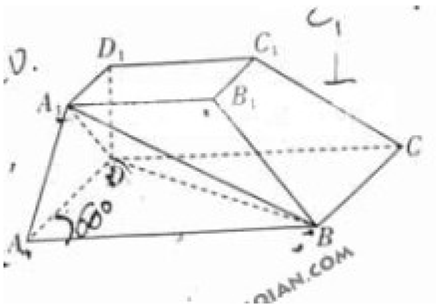
甲、乙两校各有3名教师报名支教，其中甲校2男1女，乙校1男2女。

（I）若从甲校和乙校报名的教师中各任选1名，写出所有可能的结果，并求选出的2名教师性别相同的概率；

（II）若从报名的6名教师中任选2名，写出所有可能的结果，并求选出的2名教师来自同一学校的概率。

（19）（本小题满分12分）

如图，在四棱台ABCD-$A_1B_2C_3D_4$中，D_1D⊥平面ABCD是平行四边形，AB=2AD,AD=A_1B_1，∠BAD=60°，



（I）证明：AA_1⊥ BD;

（II）证明：CC_1∥ABD

（20）（本小题满分12分）

数列｛ a_n ｝中 a_1、a_2、a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数，且 a_1、a_2、a_3 中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列

第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	9	8	18

（I）求数列｛ a_n ｝的通项公式；

（II）若数列｛ b_n ｝满足：$b_n = a_n + (-1)^n \ln a_n$，求数列｛ b_n ｝的前2 n 项和 S_{2n}.

（21）（本小题满分12分）

某企业拟建造如图所示的容器（不计厚度，长度单位：米），其中容器的中间为圆柱形，左右两端为半球形，按照设计要求容器的容积为 $\frac{80\pi}{3}$ 立方米，且 $l \geq 2r$，假设该容器的建造费用仅与其表面积有关。已知圆柱形部分每平方米建造费用为3千元，半球形部分每平方米费用为 $c(c>3)$ 千元。设该容器的建造费用为 y 千元。

（I）写出 y 关于 r 的函数表达式，并求该函数的定义域；

（II）求该容器的建造费用最小时的 r。

（22）（本小题满分14分）

在平面直角坐标系*xOy*中，已知椭圆*C*:

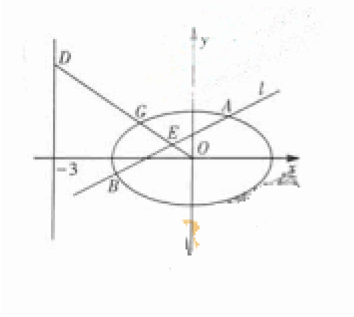
$\frac{x^2}{3}+y^2$ =1.如图所示，斜率为*k*（*k*＞0）且不过原点的直线*l*交椭圆*C*于*A,B*两点，线段*AB*的中点为*E*，射线*OE*交椭圆*C*于点*C*,交直线*x*=-3于点*D*(－3，*m*).

（I）求*m*2+*k*2的最小值；

（II）若 $|OG|$2= $|OD|\bullet|OE|$,

（i）求证：直线*l*过定点；

（ii）试问点*B,G*能否关于*x*轴对称？若能，求出此时△*ABG*的外接圆方程；若不能，请说明理由。


y
D
G
A
l
E
O
x
-3
B

参考答案

2011年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

文科数学试题参考答案

一、选择题

（1）A （2）D （3）D （4）C （5）A （6）B

（7）B （8）B （9）C （10）C （11）A （12）D

二、填空题

（13）16 （14）68 （15）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ （16）2

三、解答题

（17）

解：（Ⅰ）由正弦定理，设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，

则 $\frac{2c-a}{b}=\frac{2k\sin C-k\sin A}{k\sin B}=\frac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$，

所以 $\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$.

即 $(\cos A-2\cos C)\sin B=(2\sin C-\sin A)\cos B$，

化简可得 $\sin(A+B)=2\sin(B+C)$.

又 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=2\sin A$.

因此 $\frac{\sin C}{\sin A}=2$.

（Ⅱ）由 $\frac{\sin C}{\sin A}=2$ 得

$c=2a$，

由余弦定理及 $\cos B=\frac{1}{4}$ 得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=a^2+4a^2-4a^2\times\frac{1}{4}$

$=4a^2$.

所以 $b=2a$.

又 $a+b+c=5$，

从而 $a=1$，

因此 $b=2$.

(18)

解：(Ⅰ)甲校两男教师分别用 A、B 表示，女教师用 C 表示；乙校男教师用 D 表示，两女教师分别用 E、F 表示.

从甲校和乙校报名的教师中各任选1名的所有可能的结果为：

$(A,D),(A,E),(A,F),(B,D),(B,E),(B,F),(C,D),(C,E),(C,F)$ 共9种，

从中选出两名教师性别相同的结果有：$(A,D),(B,D),(C,E),(C,F)$ 共4种，

选出的两名教师性别相同的概率为 $P=\frac{4}{9}$.

(Ⅱ)从甲校和乙校报名的教师中任选2名的所有可能的结果为：

$(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(A,F),(B,C),(B,D),(B,E),(B,F),(C,D),(C,E),(C,F),(D,E),(D,F),(E,F)$ 共15种，

从中选出两名教师来自同一学校的结果有：

$(A,B),(A,C),(B,C),(D,E),(D,F),(E,F)$ 共6种，

选出的两名教师来自同一学校的概率为 $P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

(19)

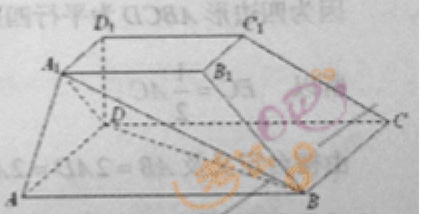
(Ⅰ)证法一：

因为 $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，且 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $D_1D\perp BD$.

又因为 $AB=2AD$, $\angle BAD=60^\circ$，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得



$BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos60^\circ=3AD^2$，

所以 $AD^2+BD^2=AB^2$，

因此 $AD\perp BD$.

又 $AD\cap D_1D=D$，

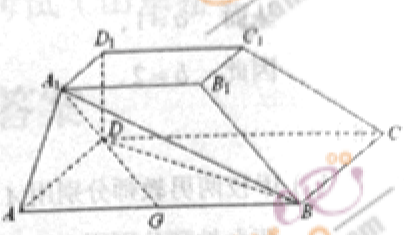
所以 $BD\perp$ 平面 ADD_1A_1.

又 $AA_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，

故 $AA_1\perp BD$.

证法二：

因为 $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，且 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，



所以 $BD\perp D_1D$.

取 AB 的中点 G，连接 DG，

在 $\triangle ABD$ 中，由 $AB=2AD$ 得 $AG=AD$，

又 $\angle BAD=60^\circ$，所以 $\triangle ADG$ 为等边三角形，

因此 $GD=GB$，

故 $\angle DBG=\angle GDB$，

又 $\angle AGD=60^\circ$，

所以 $\angle GDB=30^\circ$，

故 $\angle ADB=\angle ADG+\angle GDB=60^\circ+30^\circ=90^\circ$，

所以 $BD\perp AD$.

又 $AD\cap D_1D=D$，

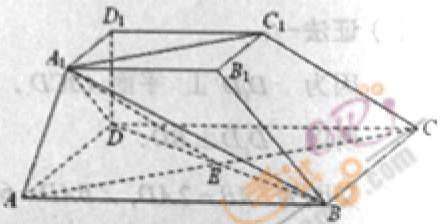
所以 $BD\perp$ 平面 ADD_1A_1.

又 $AA_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，

故 $AA_1\perp BD$.

（Ⅱ）连接 AC，A_1C_1，

设 $AC\cap BD=E$，连接 EA_1，



因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

所以 $EC=\frac{1}{2}AC$.

由棱台定义及 $AB=2AD=2A_1B_1$ 知

$A_1C_1/\!/EC$ 且 $A_1C_1=EC$，

所以四边形 A_1ECC_1 为平行四边形，

因此 $CC_1/\!/EA_1$.

又因为 $EA_1\subset$ 平面 A_1BD，$CC_1\not\subset$ 平面 A_1BD，

所以 $CC_1/\!/$ 平面 A_1BD.

（20）

解：（Ⅰ）当 $a_1=3$ 时，不合题意；

当 $a_1=2$ 时，当且仅当 $a_2=6$，$a_3=18$ 时，符合题意；

当 $a_1=10$ 时，不合题意.

因此 $a_1=2$，$a_2=6$，$a_3=18$．所以公比 $q=3$，

故 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$.

（Ⅱ）因为
$$\begin{aligned}b_n&=a_n+(-1)^n\ln a_n\\&=2\cdot 3^{n-1}+(-1)^n\ln(2\cdot 3^{n-1})\\&=2\cdot 3^{n-1}+(-1)^n\left[\ln 2+(n-1)\ln 3\right]\\&=2\cdot 3^{n-1}+(-1)^n(\ln 2-\ln 3)+(-1)^n n\ln 3,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}S_{2n}&=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}\\&=2(1+3+\cdots+3^{2n-1})+[-1+1-1+\cdots+(-1)^{2n}](\ln 2-\ln 3)\\&\quad+[-1+2-3+\cdots+(-1)^{2n}2n]\ln 3\\&=2\times\frac{1-3^{2n}}{1-3}+n\ln 3\\&=3^{2n}+n\ln 3-1.\end{aligned}$$

（21）

解：（Ⅰ）设容器的容积为 V，

由题意知 $V=\pi r^2 l+\frac{4}{3}\pi r^3$，又 $V=\frac{80\pi}{3}$，

故 $l=\dfrac{V-\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}=\dfrac{80}{3r^2}-\dfrac{4}{3}r=\dfrac{4}{3}(\dfrac{20}{r^2}-r)$.

由于 $l\ge 2r$，

因此 $0<r\le 2$.

所以建造费用 $y=2\pi rl\times 3+4\pi r^2 c=2\pi r\times\frac{4}{3}(\frac{20}{r^2}-r)\times 3+4\pi r^2 c$，

因此 $y=4\pi(c-2)r^2+\dfrac{160\pi}{r}$，　$0<r\le 2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $y'=8\pi(c-2)r-\dfrac{160\pi}{r^2}=\dfrac{8\pi(c-2)}{r^2}(r^3-\dfrac{20}{c-2})$，$0<r<2$.

由于 $c>3$，所以 $c-2>0$，

当 $r^3-\dfrac{20}{c-2}=0$ 时，$r=\sqrt[3]{\dfrac{20}{c-2}}$.

令 $\sqrt[3]{\dfrac{20}{c-2}}=m$，则 $m>0$，

所以 $y'=\dfrac{8\pi(c-2)}{r^2}(r-m)(r^2+rm+m^2)$.

（1）当 $0<m<2$ 即 $c>\dfrac{9}{2}$ 时，

当 $r=m$ 时，$y'=0$；

当 $r\in(0,m)$ 时，$y'<0$；

当 $r\in(m,2)$ 时，$y'>0$，

所以 $r=m$ 是函数 y 的极小值点，也是最小值点.

（2）当 $m\ge 2$ 即 $3<c\le\dfrac{9}{2}$ 时，

当 $r\in(0,2)$ 时，$y'<0$，函数单调递减，

所以 $r=2$ 是函数 y 的最小值点.

综上所述，当 $3<c\le\dfrac{9}{2}$ 时，建造费用最小时 $r=2$；

当 $c>\dfrac{9}{2}$ 时，建造费用最小时 $r=\sqrt[3]{\dfrac{20}{c-2}}$.

（22）

（Ⅰ）解：设直线 l 的方程为 $y=kx+t$ $(k>0)$，

由题意，$t>0$.

由方程组 $\begin{cases} y=kx+t, \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1, \end{cases}$ 得

$(3k^2+1)x^2+6ktx+3t^2-3=0$.

由题意 $\Delta>0$，

所以 $3k^2+1>t^2$.

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=-\dfrac{6kt}{3k^2+1}$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{2t}{3k^2+1}$.

由于 E 为线段 AB 的中点,

因此 $x_E=-\dfrac{3kt}{3k^2+1}$, $y_E=\dfrac{t}{3k^2+1}$,

此时 $k_{OE}=\dfrac{y_E}{x_E}=-\dfrac{1}{3k}$.

所以 OE 所在直线方程为 $y=-\dfrac{1}{3k}x$,

又由题设知 $D(-3,m)$,

令 $x=-3$, 得 $m=\dfrac{1}{k}$,

即 $mk=1$,

所以 $m^2+k^2\geq 2mk=2$,

当且仅当 $m=k=1$ 时上式等号成立,

此时 由 $\Delta>0$ 得 $0<t<2$,

因此 当 $m=k=1$ 且 $0<t<2$ 时, m^2+k^2 取最小值 2.

(Ⅱ)(ⅰ)由(Ⅰ)知 OD 所在直线的方程为 $y=-\dfrac{1}{3k}x$,

将其代入椭圆 C 的方程,并由 $k>0$,

解得 $G(-\dfrac{3k}{\sqrt{3k^2+1}},\dfrac{1}{\sqrt{3k^2+1}})$.

又 $E(-\dfrac{3kt}{3k^2+1},\dfrac{t}{3k^2+1})$, $D(-3,\dfrac{1}{k})$,

由距离公式及 $t>0$ 得

$$|OG|^2=(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2+1}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3k^2+1}})^2=\frac{9k^2+1}{3k^2+1},$$

$$|OD|=\sqrt{(-3)^2+(\frac{1}{k})^2}=\frac{\sqrt{9k^2+1}}{k},$$

$$|OE|=\sqrt{(-\frac{3kt}{3k^2+1})^2+(\frac{t}{3k^2+1})^2}=\frac{t\sqrt{9k^2+1}}{3k^2+1},$$

由 $|OG|^2=|OD|\cdot|OE|$ 得 $t=k$,

因此 直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$.

所以 直线 l 恒过定点 $(-1,0)$.

（ii）由（i）得 $G(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2+1}},\frac{1}{\sqrt{3k^2+1}})$，

若 B, G 关于 x 轴对称，

则 $B(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2+1}},-\frac{1}{\sqrt{3k^2+1}})$.

代入 $y=k(x+1)$ 整理得 $3k^2-1=k\sqrt{3k^2+1}$，

即 $6k^4-7k^2+1=0$，

解得 $k^2=\frac{1}{6}$（舍去）或 $k^2=1$，

所以 $k=1$.

此时 $B(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$，$G(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ 关于 x 轴对称.

又由（Ⅰ）得 $x_1=0$, $y_1=1$，所以 $A(0,1)$.

由于 $\triangle ABG$ 的外接圆的圆心在 x 轴上，可设 $\triangle ABG$ 的外接圆的圆心为 $(d,0)$，

因此 $d^2+1=(d+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$，解得 $d=-\frac{1}{2}$，

故 $\triangle ABG$ 的外接圆的半径为 $r=\sqrt{d^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

所以 $\triangle ABG$ 的外接圆方程为 $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{5}{4}$.