

2014 年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数学（文科）

一. 选择题

1. 若集合 $P = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $Q = \{x | x \geq 3\}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ()
- A. $\{x | 3 \leq x < 4\}$ B. $\{x | 3 < x < 4\}$ C. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ D. $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$

【答案】A

【解析】

试题分析：由已知， $P \cap Q = \{x | 3 \leq x < 4\}$, 选 A.

考点：集合的运算.

2. 复数 $(3+2i)i$ 等于 ()
- A. $-2-3i$ B. $-2+3i$ C. $2-3i$ D. $2+3i$

【答案】B

【解析】

试题分析： $(3+2i)i = 3i + 2i \cdot i = -2+3i$, 选 B.

考点：复数的四则运算.

3. 以边长为 1 的正方形的一边所在直线为旋转轴，将该正方形旋转一周所得圆柱的侧面积等于 ()
- A. 2π B. π C. 2 D. 1

【答案】A

【解析】

试题分析：由已知得，所得圆柱的底面半径和高均为 1，所以圆柱的侧面积为 2π ，选 A.

考点：旋转体的侧面积.

4. 阅读右图所示的程序框图，运行相应的程序，输出的 n 的值为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



【答案】B

【解析】

试题分析：执行程序， $n=1$ ，满足条件 $2^n > n^2$ ， $n=2$ ；

不满足条件 $2^n > n^2$ ，输出 $n=2$ ，选B.

考点：算法与程序框图.

5. 命题“ $\forall x \in [0, +\infty) . x^3 + x \geq 0$ ”的否定是（ ）

- A. $\forall x \in (-\infty, 0) . x^3 + x < 0$ B. $\forall x \in (-\infty, 0) . x^3 + x \geq 0$
 C. $\exists x_0 \in [0, +\infty) . x_0^3 + x_0 < 0$ D. $\exists x_0 \in [0, +\infty) . x_0^3 + x_0 \geq 0$

【答案】C

【解析】

试题分析：全称命题的否定是存在性命题，所以，命题“ $\forall x \in [0, +\infty) . x^3 + x \geq 0$ ”的否定是

$\exists x_0 \in [0, +\infty) . x_0^3 + x_0 < 0$ ，选C.

考点：全称命题与存在性命题.

6. 已知直线l过圆 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 的圆心，且与直线 $x + y + 1 = 0$ 垂直，则l的方程是. ()

- A. $x + y - 2 = 0$ B. $x - y + 2 = 0$ C. $x + y - 3 = 0$ D. $x - y + 3 = 0$

【答案】D

【解析】

试题分析：由已知得，圆心为 $(0, 3)$ ，所求直线的斜率为1，由直线方程的斜截式得， $y = x + 3$ ，即 $x - y + 3 = 0$ ，故选D.

考点：圆的方程，直线的垂直，直线方程.

7. 将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，得到函数 $y = f(x)$ 的函数图象，则下列说法正确的是

()

A. $y = f(x)$ 是奇函数

B. $y = f(x)$ 的周期是 π

C. $3y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

D. $y = f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称

【答案】D

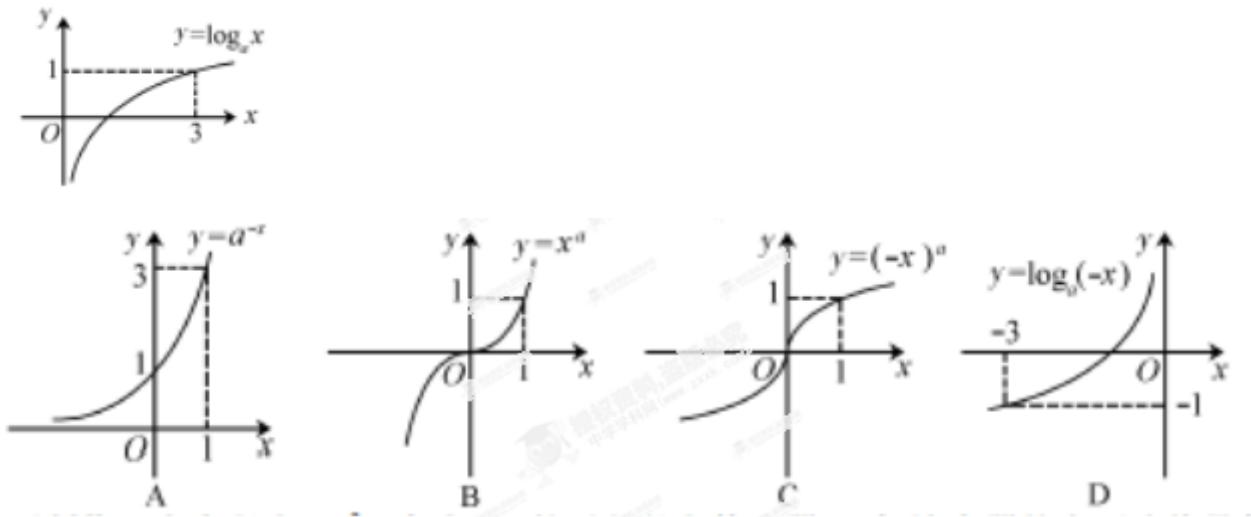
【解析】

试题分析：将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，得到函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ ，

因为 $y = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ ，所以 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称，选 D.

考点：三角函数图象的变换，三角函数诱导公式，学科网三角函数的图象和性质.

8. 若函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象如右图所示，则下列函数正确的是 ()



【答案】B

【解析】

试题分析：由函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象可知， $a = 3$ ，所以， $y = a^{-x}$ ， $y = (-x)^3 = -x^3$ 及

$y = \log_3(-x)$ 均为减函数，只有 $y = x^3$ 是增函数，选 B.

考点：幂函数、指数函数、对数函数的图象和性质.

9.要制作一个容积为 $4m^3$ ，高为 1m 的无盖长方体容器，已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是 ()

- A.80元 B.120元 C.160元 D.240元

【答案】C

【解析】

试题分析：设长方体底面边长分别为 x, y ，则 $y = \frac{4}{x}$ ，所以容器总造价为

$z = 2(x+y) \times 10 + 20xy = 20(x + \frac{4}{x}) + 80$ ，由基本不等式得， $z = 20(x + \frac{4}{x}) + 80 \geq 160$ ，当且仅当

底面为边长为 2 的正方形时，总造价最低，选 C.

考点：函数的应用，基本不等式的应用.

10.设 M 为平行四边形 ABCD 对角线的交点，O 为平行四边形 ABCD 所在平面内任意一点，则

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ 等于 ()

- A. \overrightarrow{OM} B. $2\overrightarrow{OM}$ C. $3\overrightarrow{OM}$ D. $4\overrightarrow{OM}$

【答案】D

【解析】

试题分析：由已知得， $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$,

而 $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$, 所以 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$. 选 D.

考点：平面向量的线性运算，相反向量.

11.已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ ，设平面区域 $\Omega = \begin{cases} x+y-7 \leq 0, \\ x-y+3 \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，若圆心 $C \in \Omega$ ，且圆 C 与 x 轴相切，则 $a^2 + b^2$ 的最大值为 ()

- A.5 B.29 C.37 D.49

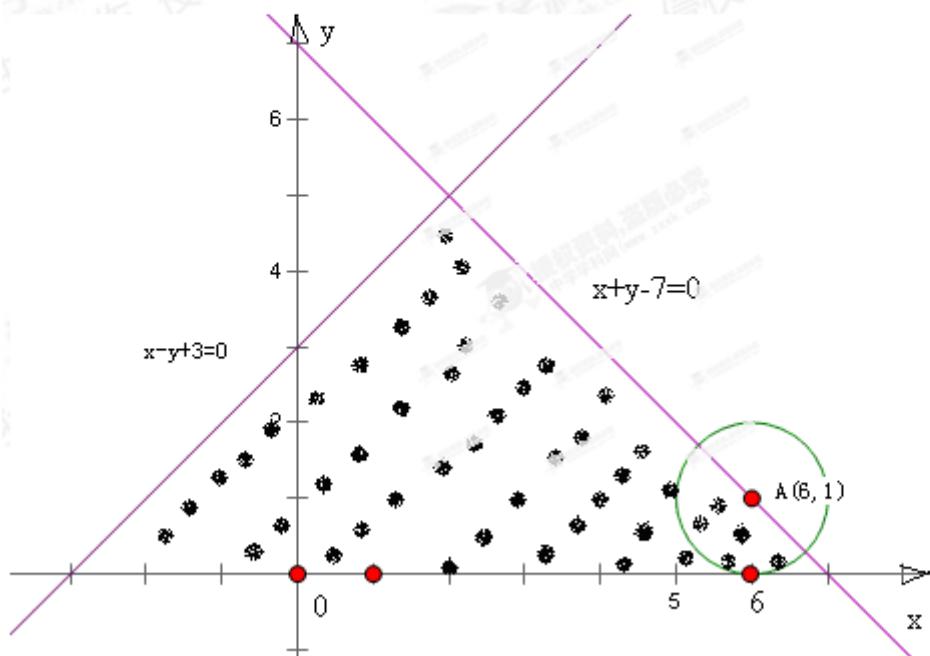
【答案】C

【解析】

试题分析: $a^2 + b^2$ 即圆心 (a, b) 到原点 O 距离的平方.

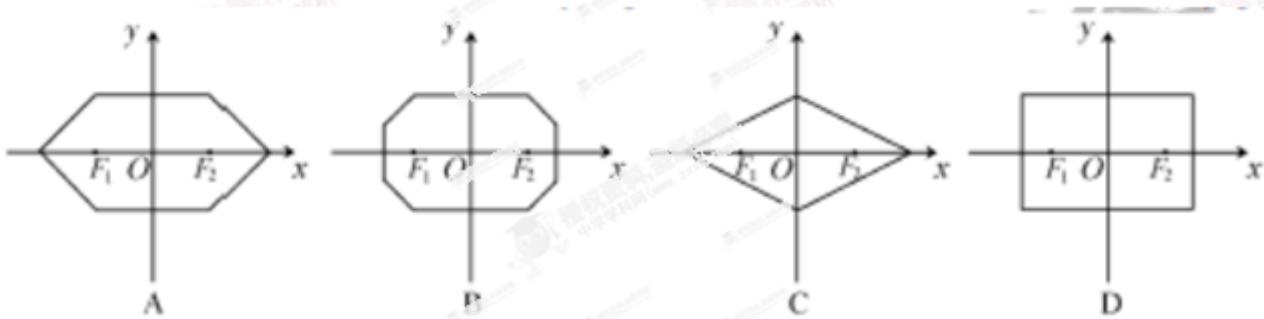
画出可行域, 由于圆心 $C \in \Omega$, 圆的半径为 1, 所以, 当圆心为 $A(6,1)$ 时, $|OA|$ 最大, 此时

$$(a^2 + b^2)_{\max} = 6^2 + 1^2 = 37, \text{ 选 } C.$$



考点: 简单线性规划的应用, 直线与圆的位置关系.

12. 在平面直角坐标系中, 两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 间的“L-距离” 定义为 $\|P_1P_2\| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. 则平面内与 x 轴上两个不同的定点 F_1, F_2 的“L-距离” 之和等于定值 (大于 $\|F_1F_2\|$) 的点的轨迹可以是 ()



【答案】A

【解析】

试题分析: 不妨设 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, $P(x, y)$ 是平面内符合条件的点, 则由“L-距离” 定义得

$$|x+1| + |y| + |x-1| + |y| = 2a \quad (a > 0, \quad 2a > ||F_1F_2| = 2).$$

$$\text{即} \begin{cases} x \leq -1 \\ y > 0 \end{cases} \text{时}, \quad x - y + a = 0; \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y < 0 \end{cases} \text{时}, \quad x + y + a = 0; \quad \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ y > 0 \end{cases} \text{时}, \quad y = a - 1 > 0; \quad \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ y < 0 \end{cases} \text{时},$$

$$y = 1 - a; \quad \begin{cases} x > 1 \\ y > 0 \end{cases} \text{时}, \quad x + y - a = 0; \quad \begin{cases} x > 1 \\ y < 0 \end{cases} \text{时}, \quad x - y - a = 0. \text{故选 } A.$$

考点：新定义，绝对值的概念，分类讨论思想。

二、填空题

13. 如图，在边长为 1 的正方形中，随机撒 1000 粒豆子，有 180 粒落到阴影部分，据此估计阴影部分的面积为_____。



【答案】0.18

【解析】

试题分析：由随机数的概念及几何概型得， $\frac{S_{\text{阴影}}}{1} = \frac{180}{1000}$ ，所以估计阴影部分的面积为 0.18。

考点：随机数，几何概型。

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $A = 60^\circ, AC = 2, BC = \sqrt{3}$ ，则 AB 等于_____。

【答案】1

【解析】

试题分析：由余弦定理得， $(\sqrt{3})^2 = AB^2 + 1^2 - 2 \cdot AB \cdot 1 \times \cos 60^\circ$ ，解得 $AB = 1$ 。

考点：余弦定理的应用。

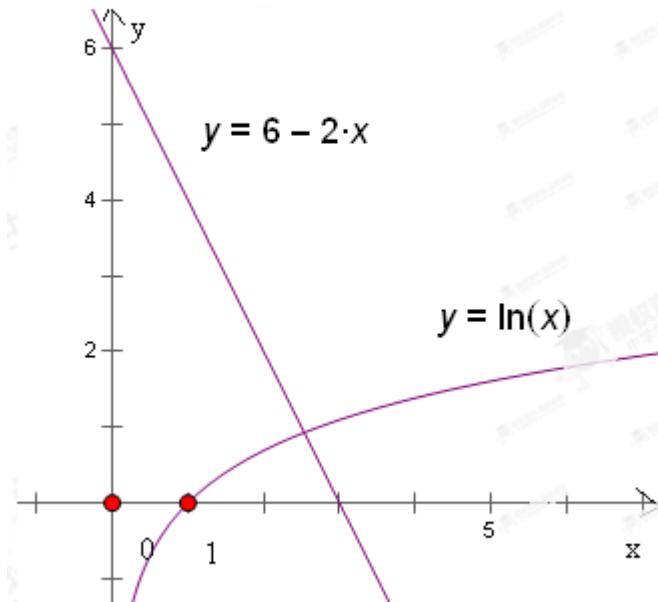
15. (函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ 2x - 6 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点个数是_____。

【答案】2

【解析】

试题分析：令 $x^2 - 2 = 0$ 得， $x = \pm\sqrt{2}$ ，只有 $x = -\sqrt{2}$ 符合题意；

令 $2x - 6 + \ln x = 0$ 得， $6 - 2x = \ln x$ ，在同一坐标系内，画出 $y = 6 - 2x, y = \ln x$ 的图象，观察知交点有 1，所以零点个数是 2.



考点：分段函数，函数的零点，函数的图象和性质。

16. (已知集合 $\{a, b, c\} = \{0, 1, 2\}$ ，且下列三个关系：① $a \neq 2$ ② $b = 2$ ③ $c \neq 0$ 有且只有一个正确，则

$$100a + 10b + c = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】201

【解析】

试题分析：由已知，若 $a \neq 2$ 正确，则 $c = 0$ 或 $c = 1$ ，即 $a = 0, b = 1, c = 2$ 或 $a = 0, b = 2, c = 1$ 或

$a = 1, b = 0, c = 2$ 或 $a = 1, b = 2, c = 0$ 均与“三个关系有且只有一个正确”矛盾；

若 $b = 2$ 正确，则 $a \neq 2$ 正确，不符合题意，所以， $c \neq 0$ 正确， $a = 2, b = 0, c = 1$ ，故

$$100a + 10b + c = 201.$$

考点：推理与证明。

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。

17. ((本小题满分 12 分)

在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 3, a_5 = 81$.

(1) 求 a_n ；

(2) 设 $b_n = \log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】(1) $a_n = 3^{n-1}$. (2) $S_n = \frac{n^2 - n}{2}$.

【解析】

试题分析: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 依题意得方程组 $\begin{cases} a_1 q = 3 \\ a_1 q^4 = 81 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$, 即可写出通项公式.

(2) 因为 $b_n = \log_3 a_n = n-1$, 利用等差数列的求和公式即得.

试题解析: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 依题意得

$$\begin{cases} a_1 q = 3 \\ a_1 q^4 = 81 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$,

因此, $a_n = 3^{n-1}$.

(2) 因为 $b_n = \log_3 a_n = n-1$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$.

考点: 等比数列、等差数列.

18. ((本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2 \cos x (\sin x + \cos x)$.

(1) 求 $f(\frac{5\pi}{4})$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

【答案】(1) $f(\frac{5\pi}{4}) = 2$; (2) $T = \pi$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}]$, $k \in \mathbb{Z}$.

【解析】

试题分析：思路一：（1）直接将 $\frac{5\pi}{4}$ 代入函数式，应用三角函数诱导公式计算.

（2）应用和差倍半的三角函数公式，将函数化简 $\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$.

得到 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

思路二：先应用和差倍半的三角函数公式化简函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$

$$= \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$$

（1）将 $\frac{5\pi}{4}$ 代入函数式计算；

（2） $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

试题解析：解法一：（1） $f(\frac{5\pi}{4}) = 2 \cos \frac{5\pi}{4} (\sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4})$

$$= -2 \cos \frac{\pi}{4} (-\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4})$$

$$= 2$$

（2）因为 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$

$$= \sin 2x + \cos 2x + 1$$

$$= \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1.$$

所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

得 $k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}], k \in \mathbb{Z}$.

解法二：

因为 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$

$$= \sin 2x + \cos 2x + 1$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

(1) $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) + 1 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2$

(2) $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

得 $k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}], k \in \mathbb{Z}$.

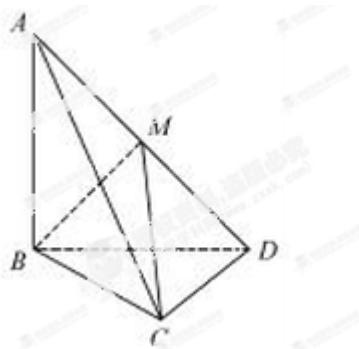
考点：和差倍半的三角函数公式，三角函数诱导公式，三角函数的图象和性质.

19. ((本小题满分 12 分))

如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB \perp$ 平面 BCD , $CD \perp BD$.

(1) 求证： $CD \perp$ 平面 ABD ;

(2) 若 $AB = BD = CD = 1$, M 为 AD 中点，求三棱锥 $A-MBC$ 的体积.



【答案】(1) 见解析 (2) $V_{A-MBC} = \frac{1}{12}$.

【解析】

试题分析:

(1) 由 $AB \perp$ 平面 BCD , $CD \subset$ 平面 BCD ,

得到 $AB \perp CD$.

进一步即得 $CD \perp$ 平面 ABD .

(2) 思路一: 由 $AB \perp$ 平面 BCD , 得 $AB \perp BD$.

确定 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4}$.

根据 $CD \perp$ 平面 ABD ,

知三棱锥 $C-ABM$ 的高 $h = CD = 1$,

得到三棱锥 $A-MBC$ 的体积 $V_{A-MBC} = V_{C-ABM}$.

思路二: 由 $AB \perp$ 平面 BCD 知, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ,

根据平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$,

通过过点 M 作 $MN \perp BD$ 交 BD 于点 N .

得到 $MN \perp$ 平面 BCD , 且 $MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$,

利用 $V_{A-MBC} = V_{A-BCD} - V_{M-BCD}$ 计算三棱锥 $A-MBC$ 的体积.

试题解析：解法一：

(1) $\because AB \perp$ 平面 BCD , $CD \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore AB \perp CD$.

又 $\because CD \perp BD$, $AB \perp BD = B$,

$AB \subset$ 平面 ABD , $BD \subset$ 平面 ABD , 学科网

$\therefore CD \perp$ 平面 ABD .

(2) 由 $AB \perp$ 平面 BCD , 得 $AB \perp BD$.

$\because AB = BD = 1$, $\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}$.

$\because M$ 是 AD 的中点,

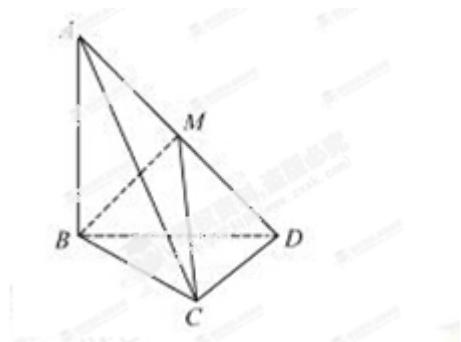
$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4}$.

由(1)知, $CD \perp$ 平面 ABD ,

\therefore 三棱锥 $C-ABM$ 的高 $h = CD = 1$,

因此三棱锥 $A-MBC$ 的体积

$$V_{A-MBC} = V_{C-ABM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABM} \cdot h = \frac{1}{12}.$$



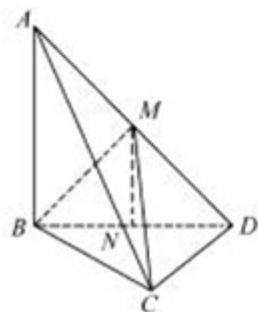
解法二：

(1) 同解法一.

(2) 由 $AB \perp$ 平面 BCD 知，平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ，

又平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$ ，

如图，过点 M 作 $MN \perp BD$ 交 BD 于点 N .



则 $MN \perp$ 平面 BCD ，且 $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$ ，

又 $CD \perp BD$, $BD = CD = 1$,

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}.$$

\therefore 三棱锥 $A-MBC$ 的体积

$$V_{A-MBC} = V_{A-BCD} - V_{M-BCD} = \frac{1}{3}AB \cdot S_{\triangle BCD} - \frac{1}{3}MN \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{12}.$$

考点：垂直关系，几何体的体积，“间接法”、“等积法”.

20. ((本小题满分 12 分)

根据世行 2013 年新标准，人均 GDP 低于 1035 美元为低收入国家；人均 GDP 为 1035-4085 元为中等偏下收入国家；人均 GDP 为 4085-12616 美元为中等偏上收入国家；人均 GDP 不低于 12616 美元为高收入国家. 某城市有 5 个行政区，各区人口占该城市人口比例及人均 GDP 如下表：

行政区	区人口占城市人口比例	区人均 GDP(单位：美元)
A	25%	8000
B	30%	4000
C	15%	6000
D	10%	3000
E	20%	10000

(1) 判断该城市人均 GDP 是否达到中等偏上收入国家标准；

(2) 现从该城市 5 个行政区中随机抽取 2 个，求抽到的 2 个行政区人均 GDP 都达到中等偏上收入国家标准的概率.

【答案】(1) 该城市人均 GDP 达到了中等偏上收入国家标准. (2) $P(M) = \frac{3}{10}$.

【解析】

试题分析: (1) 设该城市人口总数为 a , 通过计算该城市人均 GDP

$$\frac{8000 \times 0.25a + 4000 \times 0.30a + 6000 \times 0.15a + 3000 \times 0.10a + 10000 \times 0.20a}{a} = 6400$$

由 $6400 \in [4085, 12616]$, 作出结论.

(2) “从 5 个行政区中随机抽取 2 个”的所有基本事件是:

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$ 共 10 个,

设事件“抽到的 2 个行政区人均 GDP 都达到中等偏上收入国家标准”为 M,

则事件 M 包含的基本事件是: $\{A, C\}, \{A, E\}, \{C, E\}$, 共 3 个,

由古典概型概率的计算即得. 学科网

试题解析: (1) 设该城市人口总数为 a , 则该城市人均 GDP 为

$$\frac{8000 \times 0.25a + 4000 \times 0.30a + 6000 \times 0.15a + 3000 \times 0.10a + 10000 \times 0.20a}{a} = 6400$$

因为 $6400 \in [4085, 12616]$,

所以该城市人均 GDP 达到了中等偏上收入国家标准

(2) “从 5 个行政区中随机抽取 2 个”的所有基本事件是:

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$ 共 10 个,

设事件“抽到的 2 个行政区人均 GDP 都达到中等偏上收入国家标准”为 M,

则事件 M 包含的基本事件是: $\{A, C\}, \{A, E\}, \{C, E\}$, 共 3 个,

所以所求概率为 $P(M) = \frac{3}{10}$.

考点: 频率分布表, 古典概型.

21. ((本小题满分 12 分)

已知曲线 Γ 上的点到点 $F(0,1)$ 的距离比它到直线 $y = -3$ 的距离小 2.

(1) 求曲线 Γ 的方程;

(2) 曲线 Γ 在点 P 处的切线 l 与 x 轴交于点 A . 直线 $y = 3$ 分别与直线 l 及 y 轴交于点 M, N , 以 MN 为

直径作圆 C ，过点 A 作圆 C 的切线，切点为 B ，试探究：当点 P 在曲线 Γ 上运动（点 P 与原点不重合）时，线段 AB 的长度是否发生变化？证明你的结论.

【答案】(1) $x^2 = 4y$. (2) 当点 P 在曲线 Γ 上运动时，线段 AB 的长度不变，证明见解析.

【解析】

试题分析：(1) 思路一：设 $S(x, y)$ 为曲线 Γ 上任意一点，

依题意可知曲线 Γ 是以点 $F(0, 1)$ 为焦点，直线 $y = -1$ 为准线的抛物线，

得到曲线 Γ 的方程为 $x^2 = 4y$.

思路二：设 $S(x, y)$ 为曲线 Γ 上任意一点，

由 $|y - (-3)| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = 2$ ，化简即得.

(2) 当点 P 在曲线 Γ 上运动时，线段 AB 的长度不变，证明如下：

由(1)知抛物线 Γ 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2$ ，

设 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$)，得 $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$ ，

应用导数的几何意义，确定切线的斜率，进一步得切线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2$.

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2 \\ y = 0 \end{cases}$ ，得 $A(\frac{1}{2}x_0, 0)$.

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2 \\ y = 3 \end{cases}$ ，得 $M(\frac{1}{2}x_0 + \frac{6}{x_0}, 3)$.

根据 $N(0, 3)$ ，得圆心 $C(\frac{1}{4}x_0 + \frac{3}{x_0}, 3)$ ，半径 $r = \frac{1}{2}|MN| = |\frac{1}{4}x_0 + \frac{3}{x_0}|$ ，

由弦长、半径及圆心到直线的距离之关系，确定 $|AB| = \sqrt{6}$.

试题解析：解法一：(1) 设 $S(x, y)$ 为曲线 Γ 上任意一点，

依题意，点 S 到 $F(0, 1)$ 的距离与它到直线 $y = -1$ 的距离相等，

所以曲线 Γ 是以点 $F(0, 1)$ 为焦点，直线 $y = -1$ 为准线的抛物线，

所以曲线 Γ 的方程为 $x^2 = 4y$.

(2) 当点 P 在曲线 Γ 上运动时，线段 AB 的长度不变，证明如下：

由 (1) 知抛物线 Γ 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2$ ，

设 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$)，则 $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$ ，

由 $y' = \frac{1}{2}x$ ，得切线 l 的斜率

$$k = y'|_{x=x_0} = \frac{1}{2}x_0,$$

所以切线 l 的方程为 $y - y_0 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0)$ ，即 $y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2$.

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2 \\ y = 0 \end{cases}$ ，得 $A(\frac{1}{2}x_0, 0)$.

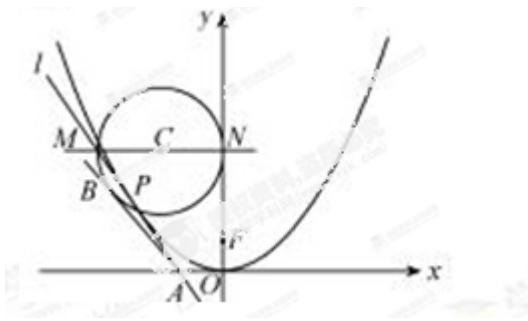
由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2 \\ y = 3 \end{cases}$ ，得 $M(\frac{1}{2}x_0 + \frac{6}{x_0}, 3)$.

又 $N(0, 3)$ ，所以圆心 $C(\frac{1}{4}x_0 + \frac{3}{x_0}, 3)$ ，

半径 $r = \frac{1}{2}|MN| = |\frac{1}{4}x_0 + \frac{3}{x_0}|$ ，

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 - r^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}x_0 - \left(\frac{1}{4}x_0 + \frac{3}{x_0}\right)\right]^2 + 3^2 - \left(\frac{1}{4}x_0 + \frac{3}{x_0}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

所以点 P 在曲线 Γ 上运动时，线段 AB 的长度不变.



解法二：

(1) 设 $S(x, y)$ 为曲线 Γ 上任意一点,

$$\text{则 } |y - (-3)| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = 2,$$

依题意, 点 $S(x, y)$ 只能在直线 $y = -3$ 的上方, 所以 $y > -3$,

$$\text{所以 } \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = y + 1,$$

化简得, 曲线 Γ 的方程为 $x^2 = 4y$.

(2) 同解法一.

考点: 抛物线的定义, 导数的几何意义, 直线方程, 直线与抛物线的位置关系, 直线与圆的位置关系.

22. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ (a 为常数) 的图像与 y 轴交于点 A , 曲线 $y = f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 -1 .

(1) 求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, $x^2 < e^x$

(3) 证明: 对任意给定的正数 c , 总存在 x_0 , 使得当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 恒有 $x < ce^x$

【答案】(1) 当 $x=\ln 2$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(\ln 2)=2-\ln 4$, $f(x)$ 无极大值.

(2) 见解析. (3) 见解析.

【解析】

试题分析: (1) 由 $f'(0)=1-a=-1$, 得 $a=2$.

从而 $f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=\ln 2$. 讨论可知:

当 $x < \ln 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > \ln 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

当 $x=\ln 2$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(\ln 2)=2-\ln 4$, $f(x)$ 无极大值.

(2) 令 $g(x)=e^x-x^2$, 则 $g'(x)=e^x-2x$.

根据 $g'(x)=f(x)\geq f(\ln 2)=2-\ln 4>0$, 知 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 又 $g(0)=1>0$,

当 $x>0$ 时, 由 $g(x)>g(0)>0$, 即得.

(3) 思路一: 对任意给定的正数 c , 取 $x_0=\frac{1}{c}$,

根据 $x^2 < e^x$. 得到当 $x>x_0$ 时, $e^x > x^2 > \frac{1}{c}x$.

思路二: 令 $k=\frac{1}{c}(k>0)$, 转化得到只需 $x>\ln x+\ln k$ 成立.

分 $0 < k \leq 1$, $k > 1$, 应用导数研究 $h(x)=x-\ln x-\ln k$ 的单调性.

思路三: 就① $c\geq 1$, ② $0 < c < 1$, 加以讨论.

试题解析：解法一：

(1) 由 $f(x) = e^x - ax$, 得 $f'(x) = e^x - a$.

又 $f'(0) = 1 - a = -1$, 得 $a = 2$.

所以 $f(x) = e^x - 2x$, $f'(x) = e^x - 2$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2$.

当 $x < \ln 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > \ln 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以当 $x = \ln 2$ 时, $f(x)$ 有极小值,

且极小值为 $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - \ln 4$,

$f(x)$ 无极大值.

(2) 令 $g(x) = e^x - x^2$, 则 $g'(x) = e^x - 2x$.

由(1)得, $g'(x) = f(x) \geq f(\ln 2) = 2 - \ln 4 > 0$, 即 $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 又 $g(0) = 1 > 0$,

所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) > 0$, 即 $x^2 < e^x$.

(3) 对任意给定的正数 c , 取 $x_0 = \frac{1}{c}$,

由(2)知, 当 $x > 0$ 时, $x^2 < e^x$.

所以当 $x > x_0$ 时, $e^x > x^2 > \frac{1}{c}x$, 即 $x < ce^x$.

因此, 对任意给定的正数 c , 总存在 x_0 , 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 恒有 $x < ce^x$.

解法二: (1) 同解法一.

(2) 同解法一.

(3) 令 $k = \frac{1}{c}$ ($k > 0$), 要使不等式 $x < ce^x$ 成立, 只要 $e^x > kx$ 成立.

而要使 $e^x > kx$ 成立, 则只需 $x > \ln(kx)$, 即 $x > \ln x + \ln k$ 成立.

①若 $0 < k \leq 1$, 则 $\ln k \leq 0$, 易知当 $x > 0$ 时, $x > \ln x \geq \ln x + \ln k$ 成立.

即对任意 $c \in [1, +\infty)$, 取 $x_0 = 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 恒有 $x < ce^x$.

②若 $k > 1$, 令 $h(x) = x - \ln x - \ln k$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

所以当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

取 $x_0 = 4k$,

$$h(x_0) = 4k - \ln(4k) - \ln k = 2(k - \ln k) + 2(k - \ln 2),$$

易知 $k > \ln k$, $k > \ln 2$, 所以 $h(x_0) > 0$.

因此对任意 $c \in (0, 1)$, 取 $x_0 = \frac{4}{c}$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 恒有 $x < ce^x$.

综上, 对任意给定的正数 c , 总存在 x_0 , 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 恒有 $x < ce^x$.

解法三: (1) 同解法一.

(2) 同解法一.

(3) ①若 $c \geq 1$, 取 $x_0 = 0$,

由(2)的证明过程知, $e^x > 2x$,

所以当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 有 $ce^x \geq e^x > 2x > x$, 即 $x < ce^x$.

②若 $0 < c < 1$,

令 $h(x) = ce^x - x$, 则 $h'(x) = ce^x - 1$,

令 $h'(x) = 0$ 得 $x = \ln \frac{1}{c}$.

当 $x > \ln \frac{1}{c}$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

取 $x_0 = 2\ln \frac{2}{c}$,

$$h(x_0) = ce^{2\ln \frac{2}{c}} - 2\ln \frac{2}{c} = 2\left(\frac{2}{c} - \ln \frac{2}{c}\right),$$

易知 $\frac{2}{c} - \ln \frac{2}{c} > 0$, 又 $h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递增,

所以当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 恒有 $h(x) > h(x_0) > 0$, 即 $x < ce^x$.

综上, 对任意给定的正数 c , 总存在 x_0 , 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 恒有 $x < ce^x$.

考点: 导数的计算及导数的应用, 全称量词与存在量词, 转化与化归思想, 分类讨论思想.