绝密★启用前

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数　学（文史类）

[学科网试卷总评] 今年的文科数学试题试卷结构稳定，考点分布合理，语言简洁，设问坡度平缓，整体难度适中. 纵观全卷，选择题、填空题比较平和，立足课本，思维量和运算量适当. 试题几乎涵盖了高中数学的所有章节的知识内容，所涉及的八大主干内容占全卷的 90%左右，全面考查了重点内容。试卷贴近生活实际，以社会生活热点为背景命题，加强了对学生数学应用意识的考查，凸显了数学服务社会的功能. 今年数学试题背景丰富，进一步渗透新课改理念, 16 题以生活背景为例，考查了学生体积公式的运用和计算能力. 17 题是一道根据规律探究问题的好题，考查了学生分析问题，归纳推理能力，22 题考查了直线与椭圆的位置关系，并突出考查了学生的运算能力. 本套试卷计算量偏大，如果学生的计算能力不强，就会时间较紧，或容易出错. 今年新课标高考数学试题对老师的数学教学和学生的复习有很大启示：注重回归课本、扎实基础，努力提高学生的能力，在教学中要体现过程教学，精选习题，有效训练. 倡导理性思维，强化探究能力的培养是高中数学教与学的大势所趋，而尊重学生的个性差异，因材施教，突出复习的针对性与实效性则是取得考试成功的良方.

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $B\cap \complement_U A=$

A．$\{2\}$　　B．$\{3,4\}$　　C．$\{1,4,5\}$　　D．$\{2,3,4,5\}$

[答案] B

[解析] $C_U A=\{3,4,5\}$, $B=\{2,3,4\}$, 所以 $B\cap C_U A=\{3,4\}$, 故选 B.

[学科网考点定位] 本题考查集合的运算，考查基本计算能力.

2．已知 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，则双曲线 C_1：$\frac{x^2}{\sin^2\theta}-\frac{y^2}{\cos^2\theta}=1$ 与 C_2：$\frac{y^2}{\cos^2\theta}-\frac{x^2}{\sin^2\theta}=1$ 的

A．实轴长相等　　B．虚轴长相等　　C．离心率相等　　D．焦距相等

[答案] D

[解析] 易知 C_1 的，易知焦距 $c_1^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 C_2 的焦距

$c_2^2=\cos^2+\sin^2\theta=1$，所以 $c_2=1$，故 $c_1=c_2$．故选 D

[学科网考点定位] 本题考查椭圆的性质及同角三角函数的基本公式的综合运用，考查基本概念的理解能力及化简计算能力.

3．在一次跳伞训练中，甲、乙两位学员各跳一次．设命题 p 是“甲降落在指定范围”，q 是“乙降落在指定范围”，则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为

A．$(\neg p)\vee(\neg q)$　　B．$p\vee(\neg q)$　　C．$(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D．$p\vee q$

[答案] A
[解析] 至少有一位学员没有降落在指定范围即为甲乙中至少有一位没降落在指定范围，故可表示成为$(\neg p)\vee(\neg q)$.
[学科网考点定位] 本题考查逻辑连接词的应用，考查对基本数学概念的理解能力.

4．四名同学根据各自的样本数据研究变量x,y之间的相关关系，并求得回归直线方程，分别得到以下四个结论：

① y与x负相关且$\hat{y}=2.347x-6.423$；　　② y与x负相关且$\hat{y}=-3.476x+5.648$；

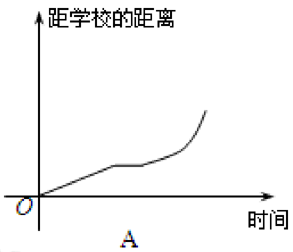
③ y与x正相关且$\hat{y}=5.437x+8.493$；　　④ y与x正相关且$\hat{y}=-4.326x-4.578$.

其中一定不正确的结论的序号是

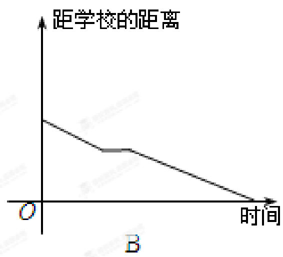
A．①②　　　　B．②③　　　　C．③④　　　　D．　①④

[答案] D
[解析] 由正负相关的定义知，①错，表达式表示的是正相关，④错，表达式表示的负相关，故①④一定错,选 D.
[学科网考点定位] 本题考查回归分析的相关概念，考查基本概念的理解能力.

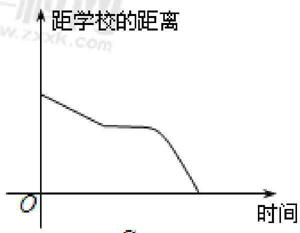
5．小明骑车上学，开始时匀速行驶，途中因交通堵塞停留了一段时间，后为了赶时间加快速度行驶. 与以上事件吻合得最好的图象是



A



B



C

D

[答案] C
[解析] 由题意，先匀速行驶，位移时间图像应是直线，停留一段时间，应该是平行于 x 轴的一段线段，之后加速，故应该是上凸的曲线，故选 C.
[学科网考点定位] 本题考查函数的图像的性质，考查根据函数模型识别图形的能力.

6．将函数$y=\sqrt{3}\cos x+\sin x\ (x\in\mathbf{R})$的图象向左平移$m\ (m>0)$个单位长度后，所得到的图象关于$y$轴对称，则$m$的最小值是

A．$\dfrac{\pi}{12}$　　　　B．$\dfrac{\pi}{6}$　　　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

[答案] B

[解析] 易知 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，向左平移 m 个单位后得 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{3}+m)$，图像关于 y 轴对称，则令 $\frac{\pi}{3}+m=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$，得 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$；又 $m>0$，故 m 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.选 B.

[学科网考点定位] 本题考查三角函数的图像及平移变换，考查分析问题能力及转化思想.

7．已知点 $A(-1,1)$、$B(1,2)$、$C(-2,-1)$、$D(3,4)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为

A．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{15}}{2}$　　C．$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$-\frac{3\sqrt{15}}{2}$

[答案] A

[解析] $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{(2,1)\cdot(5,5)}{5\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，选 A.

[学科网考点定位] 本题考查投影的定义及数量积的运算，考查概念的理解及基本运算能力.

8．x 为实数，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则函数 $f(x)=x-[x]$ 在 **R** 上为

A．奇函数　　B．偶函数　　C．增函数　　D．周期函数

[答案] D

[解析] 设（x）为x的小数部分，所以 $f(x)=x-[x]=[x]+(x)-[x]=(x)$，

$f(x+T)=x+T-[x+T]=[x+T]+(x+T)-[x+T]=(x+T)=(x)$，

所以 $f(x+T)=f(x)$，故 $f(x)$ 为周期函数.

[学科网考点定位] 本题考查抽象函数的性质，考查函数性质的判断能力.

9．某旅行社租用 A、B 两种型号的客车安排 900 名客人旅行，A、B 两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人，租金分别为 1600 元/辆和 2400 元/辆，旅行社要求租车总数不超过 21 辆，且 B 型车不多于 A 型车 7 辆．则租金最少为

A．31200 元　　B．36000 元　　C．36800 元　　D．38400 元

[答案] C

[解析]

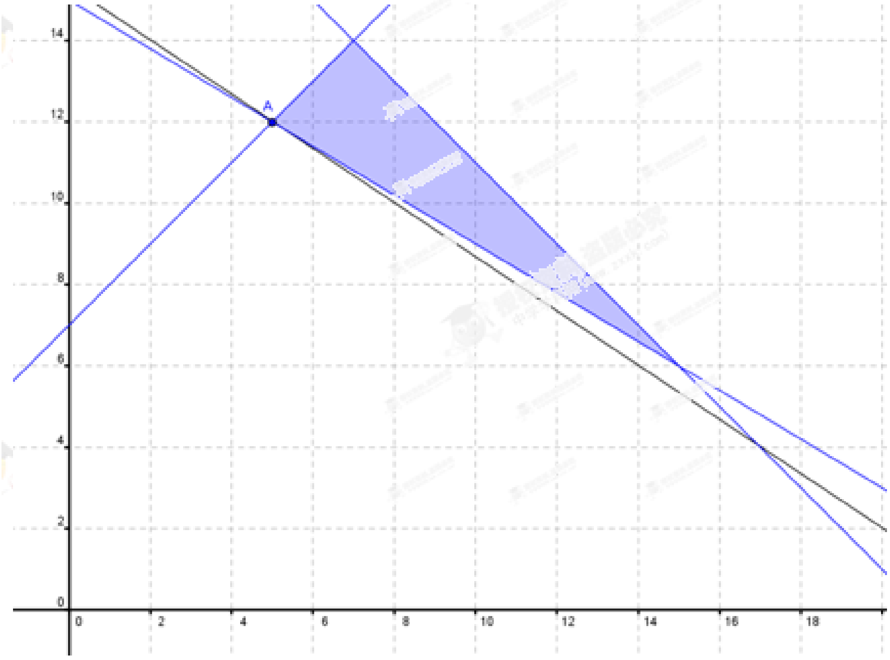
设租用 A 型车辆 x 辆，B 型车辆 y 辆，总租金 z 元，则

$$\begin{cases}36x+60y\ge 900\\ x+y\le 21\\ y\le 7\\ x,y\in N\end{cases}$$

，$z=1600x+2400y$，易知当 $l_0:2x+3y=0$ 平移至 $A(14,6)$ 时，

$2x+3y=\dfrac{z}{800}$ 在 y 轴上的截距最小，最小值 $z=14\times1600+2400\times6=36800$ 元.

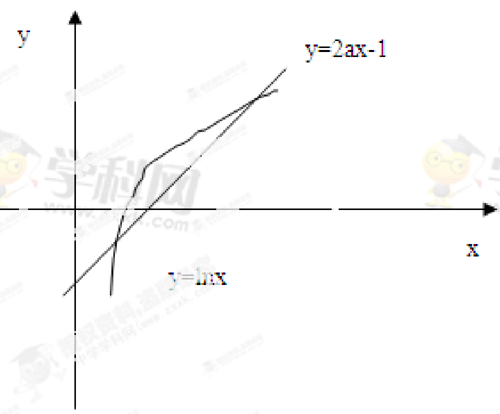
[学科网考点定位] 本题考查线性规划的求法，考查用图解法解题的能力.



10．已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是

A．$(-\infty,0)$　　B．$(0,\dfrac{1}{2})$　　C．$(0,1)$　　D．$(0,+\infty)$

[答案] B



[解析]

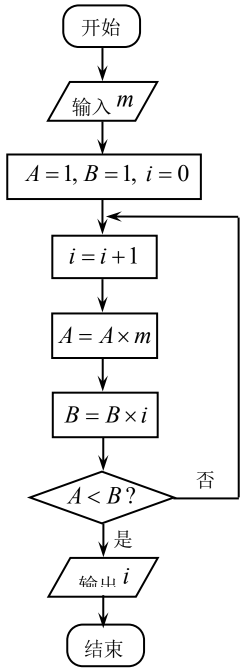
$f'(x)=1+\ln x-2ax=0$,所以 $\ln x=2ax-1$，令 $y=\ln x$，$y=2ax-1$，在同一坐标系画出两函数的图像，可得要使两图像有两交点，则 $0<2a<1$，所 $0<a<\dfrac{1}{2}$，故选 B.

[学科网考点定位]本题考查函数极值的求法，考查数型结合的方法处理交点问题.

二、填空题：本大题共 7 小题，每小题 5 分，共 35 分．请将答案填在答题卡对

应题号的位置上．答错位置，书写不清，模棱两可均不得分．

11．i 为虚数单位，设复数 z_1， z_2 在复平面内对应的点关于原点对称，若 $z_1 = 2-3\text{i}$，则 $z_2 =$__________.



第 13 题图

[答案] $-2+3\text{i}$

[解析] 因为 $z_1 = 2-3i$ 对应的点为 $(2,-3)$，故 z_2 对应的点为 $(-2,3)$，所以 $z_2 = -2+3i$.

[学科网考点定位] 本题考查复数在复平面内对应的点的理解，考查基本概念的理解能力.

12．某学员在一次射击测试中射靶 10 次，命中环数如下：

7，8，7，9，5，4，9，10，7，4

则（Ⅰ）平均命中环数为__________；

（Ⅱ）命中环数的标准差为__________.

[答案] （Ⅰ）7　（Ⅱ）2

[解析] 平均命中环数 $\bar{x} = \dfrac{7\times3+8+9\times2+10+4\times2+5}{10} = 7$，

命中环数的标准差为

$$s = \sqrt{\frac{1}{10}[(7-7)^2\times3+(8-7)^2+(9-7)^2\times2+(10-7)^2+(4-7)^2\times2+(5-7)^2]} =$$

[学科网考点定位]本题考查平均数及标准差的求法，考查计算能力.

13．阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序．若输入 m 的值为 2，则输出的结果 $i =$__________.

[答案] $i=4$
[解析] 第一次执行，$i=1, A=2, B=1$，第二次执行，$i=2, A=4, B=2$，第三次执行，$i=3, A=8, B=6$，第四次执行，$i=4, A=16, B=24$，满足 $A<B$，推出循环，故 $i=4$.
[学科网考点定位] 本题考查了程序框图及条件结构的判断，考查了算法的理解的理解能力和计算能力.

14．已知圆 O：$x^2+y^2=5$，直线 l：$x\cos\theta+y\sin\theta=1$（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）.设圆 O 上到直线 l 的距离等于 1 的点的个数为 k，则 $k=$________.

[答案] 4

[解析] 圆心 $(0,0)$ 到直线的距离 $\mathrm{d}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=1$，所以直线两侧的圆弧上离直线最远的距离分别为 $\sqrt{5}+1$ 和 $\sqrt{5}-1$，且都大于 1，故直线两侧分别能找到 2 个点到直线的距离等于 1，共有 4 个点.
[学科网考点定位] 本题考查直线与圆的位置关系，考查数型结合的思想.

15．在区间 $[-2,4]$ 上随机地取一个数 x，若 x 满足 $|x|\le m$ 的概率为 $\frac{5}{6}$，则 $m=$__________.

[答案] 3
[解析] 若 $m\le 2$，则 $|x|\le m$ 的概率 $P\le\frac{4}{6}$，不满足题意，故 $m>2$，所以 $|x|\le m$ 的概率为 $P=\frac{2+\mathrm{m}}{6}=\frac{5}{6}$，所以 $m=3$.
[学科网考点定位] 本题考查几何概型的求法，考查概率模型的判断及简单计算能力.

16．我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题：在下雨时，用一个圆台形的天池盆接雨水．天池盆盆口直径为二尺八寸，盆底直径为一尺二寸，盆深一尺八寸．若盆中积水深九寸，则平地降雨量是__________寸.

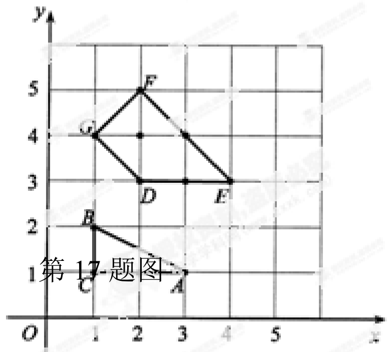
（注：①平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积；②一尺等于十寸）

[答案] 3
[解析] 盆中水平圆的半径为 r，则有 $\frac{r-6}{14-6}=\frac{9}{18}$，所以 $r=10$，
盆水体积为 $V=\frac{1}{3}(10^2+10\times6+6^2)\pi\times9=196\pi$，故平均降雨量为 $\frac{196\pi}{14^2\pi}=3$.
[学科网考点定位] 本题考查空间几何体体积的求法，考查计算能力.

17．在平面直角坐标系中，若点 $P(x,y)$ 的坐标 x，y 均为整数，则称点 P 为格点．若一个多边形的顶点全是格点，则称该多边形为格点多边形．格点多边形的面积记为 S，其内部的格点数记为 N，边界上的格点数记为 L．例如图中△ABC 是格点三角形，对应的 $S=1$，$N=0$，$L=4$.

（Ⅰ）图中格点四边形 $DEFG$ 对应的 S, N, L 分别是__________；

（Ⅱ）已知格点多边形的面积可表示为 $S=aN+bL+c$，其中 a，b，c 为常数. 若某格点多边形对应的 $N=71$，$L=18$，则 $S=$__________（用数值作答）.



第 17 题图

[答案]（Ⅰ）$S=3$，$N=1$，$L=6$. （Ⅱ）79

[解析] (1) 由图知，面积 $S=\frac{1}{2}\times4+1=3$，内部整点有 1 个，则 $N=1$，边界上有整点 6 个，则 $L=6$. 即 $S=3$，$N=1$，$L=6$.

(2) 又在图中可以发现一个面积为 $\frac{1}{2}$ 的三角形，$S=\frac{1}{2}$，$N=0$，$L=3$，则根据题意有

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=a\times0+b\times3+c\\3=a\times1+b\times6+c\\1=a\times0+b\times4+c\end{cases}$$，则 $a=1, b=\frac{1}{2}, c=-1$，所以 $S=N+\frac{L}{2}-1$，

所以当 $N=71, L=18$ 时，$S=71+\frac{18}{2}-1=79$.

[学科网考点定位] 本题考查了直角三角形中相似比问题，考查了综合分析问题的能力.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 65 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18．（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 对应的边分别是 a，b，c．已知 $\cos2A-3\cos(B+C)=1$.

（Ⅰ）求角 A 的大小；

（Ⅱ）若△ABC 的面积 $S=5\sqrt{3}$，$b=5$，求 $\sin B\sin C$ 的值.

[答案]（Ⅰ）$A=\frac{\pi}{3}$ （Ⅱ）$\frac{5}{7}$

[解析] 分析：由已知条件 $\cos 2A-3\cos(B+C)=1$，先用 $B+C=\pi-A$ 消去 B,C，再利用倍角公式就可求出 $\cos A$．先用面积公式和余弦定理分别求出 a,c，再用正弦定理即可求得 $\sin B\sin C$．

解：（Ⅰ）由 $\cos 2A-3\cos(B+C)=1$，得 $2\cos^2 A+3\cos A-2=0$，

即 $(2\cos A-1)(\cos A+2)=0$，解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-2$（舍去）．

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．

（Ⅱ）由 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=5\sqrt{3}$，得 $bc=20$．又 $b=5$，知 $c=4$．

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+16-20=21$，故 $a=\sqrt{21}$．

又由正弦定理得 $\sin B\sin C=\frac{b}{a}\sin A\cdot\frac{c}{a}\sin A=\frac{bc}{a^2}\sin^2 A=\frac{20}{21}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{7}$．

[学科网考点定位] 本题考查解三角形及三角恒等变换，考查等价变换的转化思想．

19．（本小题满分 13 分）

已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，S_4，S_2，S_3 成等差数列，且 $a_2+a_3+a_4=-18$．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）是否存在正整数 n，使得 $S_n\geq 2013$？若存在，求出符合条件的所有 n 的集合；若不存在，说明理由．

[答案]（Ⅰ）$a_n=3(-2)^{n-1}$ （Ⅱ）存在 $\{n\mid n=2k+1,k\in N,k\geq 5\}$

[解析] 分析：（1）先由已知建立方程组解出 a_1,q 即可．（2）先求出 S_n 再讨论．

解：（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_1\neq 0$，$q\neq 0$．由题意得

$$\begin{cases}S_2-S_4=S_3-S_2,\\ a_2+a_3+a_4=-18,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-a_1q^2-a_1q^3=a_1q^2,\\ a_1q(1+q+q^2)=-18,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a_1=3,\\ q=-2.\end{cases}$ 故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3(-2)^{n-1}$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）有 $S_n=\frac{3\cdot[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=1-(-2)^n$．

若存在 n，使得 $S_n\geq 2013$，则 $1-(-2)^n\geq 2013$，即 $(-2)^n\leq -2012$．

当 n 为偶数时，$(-2)^n>0$，上式不成立；

当 n 为奇数时，$(-2)^n=-2^n\leq -2012$，即 $2^n\geq 2012$，则 $n\geq 11$．

综上，存在符合条件的正整数 n，且所有这样的 n 的集合为 $\{n\mid n=2k+1,k\in \mathbf{N},k\geq 5\}$．

[学科网考点定位] 本题考查等比等差数列的性质，考查分析问题和计算能力．

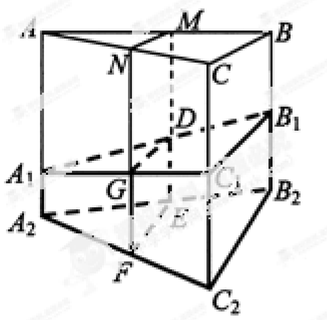
20．（本小题满分 13 分）

如图，某地质队自水平地面 A，B，C 三处垂直向地下钻探，自 A 点向下钻到 A_1 处发现矿藏，再继续下钻到 A_2 处后下面已无矿，从而得到在 A 处正下方的矿层厚度为 $A_1A_2=d_1$．同样可

得在 B，C 处正下方的矿层厚度分别为 $B_1B_2=d_2$， $C_1C_2=d_3$，且 $d_1<d_2<d_3$. 过 AB， AC 的中点 M， N 且与直线 AA_2 平行的平面截多面体 $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$ 所得的截面 $DEFG$ 为该多面体的一个中截面，其面积记为 $S_{中}$.

（I）证明：中截面 $DEFG$ 是梯形；

（Ⅱ）在△ABC 中，记 $BC=a$，BC 边上的高为 h，面积为 S. 在估测三角形 ABC 区域内正下方的矿藏储量（即多面体 $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$ 的体积 V ）时，可用近似公式 $V_{估}=S_{中}\cdot h$ 来估算. 已知 $V=\dfrac{1}{3}(d_1+d_2+d_3)S$，试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系，并加以证明.



第 20 题图

[答案] （Ⅰ）先证 DE,FG 是中位线　（Ⅱ）$V_{估}<V$

[解析] 分析：（Ⅰ）先证 DE,FG 是中位线,再证平行即可.（Ⅱ）先用体积公式求出 $V_{估}$，V,再作差比较大小.

解：（Ⅰ）依题意 $A_1A_2\perp$ 平面 ABC，$B_1B_2\perp$ 平面 ABC，$C_1C_2\perp$ 平面 ABC，

所以 $A_1A_2/\!/B_1B_2/\!/C_1C_2$. 又 $A_1A_2=d_1$，$B_1B_2=d_2$，$C_1C_2=d_3$，且 $d_1<d_2<d_3$.

因此四边形 $A_1A_2B_2B_1$、$A_1A_2C_2C_1$ 均是梯形.

由 $AA_2/\!/$ 平面 $MEFN$，$AA_2\subset$ 平面 AA_2B_2B，且平面 $AA_2B_2B\cap$ 平面 $MEFN=ME$，

可得 $AA_2/\!/ME$，即 $A_1A_2/\!/DE$. 同理可证 $A_1A_2/\!/FG$，所以 $DE/\!/FG$.

又 M、N 分别为 AB、AC 的中点，

则 D、E、F、G 分别为 A_1B_1、A_2B_2、A_2C_2、A_1C_1 的中点，

即 DE、FG 分别为梯形 $A_1A_2B_2B_1$、$A_1A_2C_2C_1$ 的中位线.

因此 $DE=\frac{1}{2}(A_1A_2+B_1B_2)=\frac{1}{2}(d_1+d_2)$，$FG=\frac{1}{2}(A_1A_2+C_1C_2)=\frac{1}{2}(d_1+d_3)$，

而 $d_1<d_2<d_3$，故 $DE<FG$，所以中截面 $DEFG$ 是梯形.

（Ⅱ）$V_{估}<V$. 证明如下：

由 $A_1A_2\perp$ 平面 ABC，$MN\subset$ 平面 ABC，可得 $A_1A_2\perp MN$.

而 $EM/\!/A_1A_2$，所以 $EM\perp MN$，同理可得 $FN\perp MN$.

由 MN 是△ ABC 的中位线，可得 $MN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$ 即为梯形 $DEFG$ 的高，

因此 $S_{中}=S_{梯形DEFG}=\frac{1}{2}(\frac{d_1+d_2}{2}+\frac{d_1+d_3}{2})\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{8}(2d_1+d_2+d_3)$，

即 $V_{估}=S_{中}\cdot h=\frac{ah}{8}(2d_1+d_2+d_3)$.

又 $S=\frac{1}{2}ah$，所以 $V=\frac{1}{3}(d_1+d_2+d_3)S=\frac{ah}{6}(d_1+d_2+d_3)$.

于是 $V-V_{估}=\frac{ah}{6}(d_1+d_2+d_3)-\frac{ah}{8}(2d_1+d_2+d_3)=\frac{ah}{24}[(d_2-d_1)+(d_3-d_1)]$.

由 $d_1<d_2<d_3$，得 $d_2-d_1>0$，$d_3-d_1>0$，故 $V_{估}<V$.

[学科网考点定位] 本题考查空间中的线面位置关系，考查空间想象能力.

21.（本小题满分 13 分）

设 $a>0$，$b>0$，已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+1}$.

（Ⅰ）当 $a\neq b$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $x>0$ 时，称 $f(x)$ 为 a、b 关于 x 的加权平均数.

（i）判断 $f(1)$，$f(\sqrt{\frac{b}{a}})$，$f(\frac{b}{a})$ 是否成等比数列，并证明 $f(\frac{b}{a})\leq f(\sqrt{\frac{b}{a}})$；

（ii）a、b 的几何平均数记为 G. 称 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 为 a、b 的调和平均数，记为 H.

若 $H\leq f(x)\leq G$，求 x 的取值范围.

[答案]（Ⅰ）对a,b大小讨论来证明　（Ⅱ）$a=b, x\in(0,+\infty)$，$a<b, x\in[\sqrt{\frac{b}{a}},\frac{b}{a}]$，$a>b, x\in[\frac{b}{a},\sqrt{\frac{b}{a}}]$.

[解析] 分析：（Ⅰ）先求导，再讨论导数的正负．(2)先分别表示出$f(1)$，$f(\sqrt{\frac{b}{a}})$，$f(\frac{b}{a})$，再判断是否成等比数列.

解：（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{a(x+1)-(ax+b)}{(x+1)^2}=\frac{a-b}{(x+1)^2}.$$

当$a>b$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$上单调递增；

当$a<b$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$上单调递减.

（Ⅱ）(i) 计算得$f(1)=\frac{a+b}{2}>0$，$f(\frac{b}{a})=\frac{2ab}{a+b}>0$，$f(\sqrt{\frac{b}{a}})=\sqrt{ab}>0$.

故$f(1)f(\frac{b}{a})=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=[f(\sqrt{\frac{b}{a}})]^2$，即

$$f(1)f(\frac{b}{a})=[f(\sqrt{\frac{b}{a}})]^2. \qquad ①$$

所以$f(1), f(\sqrt{\frac{b}{a}}), f(\frac{b}{a})$成等比数列.

因$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，即$f(1)\ge f(\sqrt{\frac{b}{a}})$．由①得 $f(\frac{b}{a})\le f(\sqrt{\frac{b}{a}})$.

(ii) 由 (i) 知$f(\frac{b}{a})=H$，$f(\sqrt{\frac{b}{a}})=G$．故由$H\le f(x)\le G$，得

$$f(\frac{b}{a})\le f(x)\le f(\sqrt{\frac{b}{a}}). \qquad ②$$

当$a=b$时，$f(\frac{b}{a})=f(x)=f(\sqrt{\frac{b}{a}})=a$.

这时，x的取值范围为$(0,+\infty)$；

当$a>b$时，$0<\frac{b}{a}<1$，从而$\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}$，由$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增与②式，

得$\frac{b}{a}\le x\le\sqrt{\frac{b}{a}}$，即$x$的取值范围为$\left[\frac{b}{a},\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$；

当$a<b$时，$\frac{b}{a}>1$，从而$\frac{b}{a}>\sqrt{\frac{b}{a}}$，由$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减与②式，

得$\sqrt{\frac{b}{a}}\le x\le\frac{b}{a}$，即$x$的取值范围为$\left[\sqrt{\frac{b}{a}},\frac{b}{a}\right]$.

[学科网考点定位] 本题考查函数的性质，考查分类讨论的思想方法.

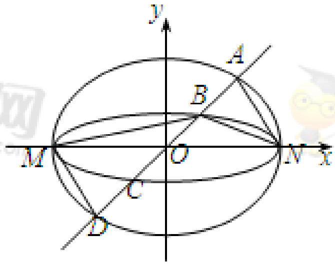
22．（本小题满分 14 分）

如图，已知椭圆C_1与C_2的中心在坐标原点O，长轴均为MN且在x轴上，短轴长分别

为 $2m$，$2n\ (m>n)$，过原点且不与 x 轴重合的直线 l 与 C_1，C_2 的四个交点按纵坐标从大到小依次为 A，B，C，D．记 $\lambda=\frac{m}{n}$，△BDM 和△ABN 的面积分别为 S_1 和 S_2．

（Ⅰ）当直线 l 与 y 轴重合时，若 $S_1=\lambda S_2$，求 λ 的值；

（Ⅱ）当 λ 变化时，是否存在与坐标轴不重合的直线 l，使得 $S_1=\lambda S_2$？并说明理由．



第 22 题图

[答案]（Ⅰ）$\lambda=\sqrt{2}+1$

（Ⅱ）当 $1<\lambda\le 1+\sqrt{2}$，不存在；当 $\lambda>1+\sqrt{2}$，存在.

[解析] 分析：(I) 先把 S_1，S_2 用面积公式表示出来，再根据 $S_1=\lambda S_2$ 即可求得.

(II) 先假设存在，再根据题意分别求出 S_1，S_2，令 $S_1=\lambda S_2$，再计算即可得.

解：依题意可设椭圆 C_1 和 C_2 的方程分别为

C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{m^2}=1$，$C_2$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$．其中 $a>m>n>0$，$\lambda=\frac{m}{n}>1$.

（Ⅰ）**解法 1**：如图 1，若直线 l 与 y 轴重合，即直线 l 的方程为 $x=0$，则

$S_1=\frac{1}{2}|BD|\cdot|OM|=\frac{1}{2}a|BD|$，$S_2=\frac{1}{2}|AB|\cdot|ON|=\frac{1}{2}a|AB|$，所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|BD|}{|AB|}$.

在 C_1 和 C_2 的方程中分别令 $x=0$，可得 $y_A=m$，$y_B=n$，$y_D=-m$，

于是 $\frac{|BD|}{|AB|}=\frac{|y_B-y_D|}{|y_A-y_B|}=\frac{m+n}{m-n}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$.

若 $\frac{S_1}{S_2}=\lambda$，则 $\frac{\lambda+1}{\lambda-1}=\lambda$，化简得 $\lambda^2-2\lambda-1=0$．由 $\lambda>1$，可解得 $\lambda=\sqrt{2}+1$.

故当直线 l 与 y 轴重合时，若 $S_1=\lambda S_2$，则 $\lambda=\sqrt{2}+1$.

解法 2：如图 1，若直线 l 与 y 轴重合，则

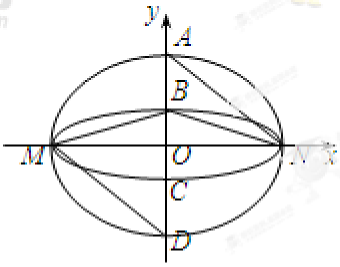
$|BD|=|OB|+|OD|=m+n$，$|AB|=|OA|-|OB|=m-n$；

$S_1=\frac{1}{2}|BD|\cdot|OM|=\frac{1}{2}a|BD|$，$S_2=\frac{1}{2}|AB|\cdot|ON|=\frac{1}{2}a|AB|$.

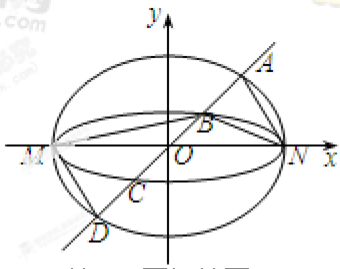
所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|BD|}{|AB|}=\dfrac{m+n}{m-n}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$.

若 $\dfrac{S_1}{S_2}=\lambda$，则 $\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}=\lambda$，化简得 $\lambda^2-2\lambda-1=0$. 由 $\lambda>1$，可解得 $\lambda=\sqrt{2}+1$.

故当直线 l 与 y 轴重合时，若 $S_1=\lambda S_2$，则 $\lambda=\sqrt{2}+1$.



第 22 题解答图 1



第 22 题解答图 2

（Ⅱ）**解法 1：** 如图 2，若存在与坐标轴不重合的直线 l，使得 $S_1=\lambda S_2$. 根据对称性，不妨设直线 l：$y=kx\ (k>0)$，

点 $M(-a,0)$，$N(a,0)$ 到直线 l 的距离分别为 d_1，d_2，则

因为 $d_1=\dfrac{|-ak-0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$，$d_2=\dfrac{|ak-0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $d_1=d_2$.

又 $S_1=\dfrac{1}{2}|BD|d_1$，$S_2=\dfrac{1}{2}|AB|d_2$，所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|BD|}{|AB|}=\lambda$，即 $|BD|=\lambda|AB|$.

由对称性可知 $|AB|=|CD|$，所以 $|BC|=|BD|-|AB|=(\lambda-1)|AB|$，

$|AD|=|BD|+|AB|=(\lambda+1)|AB|$，于是

$$\frac{|AD|}{|BC|}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}. \qquad ①$$

将 l 的方程分别与 C_1，C_2 的方程联立，可求得

$$x_A=\frac{am}{\sqrt{a^2k^2+m^2}},\quad x_B=\frac{an}{\sqrt{a^2k^2+n^2}}.$$

根据对称性可知 $x_C=-x_B$，$x_D=-x_A$，于是

$$\frac{|AD|}{|BC|}=\frac{\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_D|}{\sqrt{1+k^2}\,|x_B-x_C|}=\frac{2x_A}{2x_B}=\frac{m}{n}\sqrt{\frac{a^2k^2+n^2}{a^2k^2+m^2}}. \qquad ②$$

从而由①和②式可得

$$\sqrt{\frac{a^2k^2+n^2}{a^2k^2+m^2}}=\frac{\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}. \qquad ③$$

令 $t=\dfrac{\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}$，则由 $m>n$，可得 $t\neq 1$，于是由③可解得 $k^2=\dfrac{n^2(\lambda^2t^2-1)}{a^2(1-t^2)}$.

因为 $k\neq 0$，所以 $k^2>0$. 于是③式关于 k 有解，当且仅当 $\dfrac{n^2(\lambda^2t^2-1)}{a^2(1-t^2)}>0$，

等价于 $(t^2-1)(t^2-\dfrac{1}{\lambda^2})<0$. 由 $\lambda>1$，可解得 $\dfrac{1}{\lambda}<t<1$，

即$\frac{1}{\lambda}<\frac{\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}<1$，由$\lambda>1$，解得$\lambda>1+\sqrt{2}$，所以

当$1<\lambda\le 1+\sqrt{2}$时，不存在与坐标轴不重合的直线l，使得$S_1=\lambda S_2$；

当$\lambda>1+\sqrt{2}$时，存在与坐标轴不重合的直线l使得$S_1=\lambda S_2$.

解法 2：如图 2，若存在与坐标轴不重合的直线l，使得$S_1=\lambda S_2$. 根据对称性，不妨设直线l：$y=kx$ ($k>0$)，

点$M(-a,0)$，$N(a,0)$到直线l的距离分别为d_1，d_2，则

因为$d_1=\frac{|-ak-0|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$，$d_2=\frac{|ak-0|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$，所以$d_1=d_2$.

又$S_1=\frac{1}{2}|BD|d_1$，$S_2=\frac{1}{2}|AB|d_2$，所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|BD|}{|AB|}=\lambda$.

因为$\frac{|BD|}{|AB|}=\frac{\sqrt{1+k^2}\,|x_B-x_D|}{\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|}=\frac{x_A+x_B}{x_A-x_B}=\lambda$，所以$\frac{x_A}{x_B}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$.

由点$A(x_A,kx_A)$，$B(x_B,kx_B)$分别在C_1，C_2上，可得

$\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{k^2x_A^2}{m^2}=1$，$\frac{x_B^2}{a^2}+\frac{k^2x_B^2}{n^2}=1$，两式相减可得$\frac{x_A^2-x_B^2}{a^2}+\frac{k^2(x_A^2-\lambda^2x_B^2)}{m^2}=0$，

依题意$x_A>x_B>0$，所以$x_A^2>x_B^2$. 所以由上式解得$k^2=\frac{m^2(x_A^2-x_B^2)}{a^2(\lambda^2x_B^2-x_A^2)}$.

因为$k^2>0$，所以由$\frac{m^2(x_A^2-x_B^2)}{a^2(\lambda^2x_B^2-x_A^2)}>0$，可解得$1<\frac{x_A}{x_B}<\lambda$.

从而$1<\frac{\lambda+1}{\lambda-1}<\lambda$，解得$\lambda>1+\sqrt{2}$，所以

当$1<\lambda\le 1+\sqrt{2}$时，不存在与坐标轴不重合的直线l，使得$S_1=\lambda S_2$.

当$\lambda>1+\sqrt{2}$时，存在与坐标轴不重合的直线l使得$S_1=\lambda S_2$.

[学科网考点定位] 本题考查直线与椭圆的位置关系，考查综合分析问题的能力.