2016年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（5分）已知集合A={x||x|<2}，集合B={﹣1，0，1，2，3}，则A∩B=（　　）

A．{0，1}　　B．{0，1，2}　　C．{﹣1，0，1}　　D．{﹣1，0，1，2}

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5J：集合．

【分析】先求出集合A和B，由此利用交集的定义能求出A∩B．

【解答】解：∵集合A={x||x|<2}={x|﹣2<x<2}，

B={﹣1，0，1，2，3}，

∴A∩B={﹣1，0，1}．

故选：C．

【点评】本题考查交集的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意交集定义的合理运用．

2．（5分）若x，y满足$\begin{cases}2x-y\leqslant 0\\ x+y\leqslant 3\\ x\geqslant 0\end{cases}$，则2x+y的最大值为（　　）

A．0　　B．3　　C．4　　D．5

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；33：函数思想；35：转化思想．

【分析】作出不等式组对应的平面区域，目标函数的几何意义是直线的纵截距，利用数形结合即可求z的取值范围．

【解答】解：作出不等式组$\begin{cases}2x-y\leqslant 0\\x+y\leqslant 3\\x\geqslant 0\end{cases}$对应的平面区域如图：（阴影部分）.

设 z=2x+y 得 y=﹣2x+z，

平移直线 y=﹣2x+z，

由图象可知当直线 y=﹣2x+z 经过点 A 时，直线 y=﹣2x+z 的截距最大，

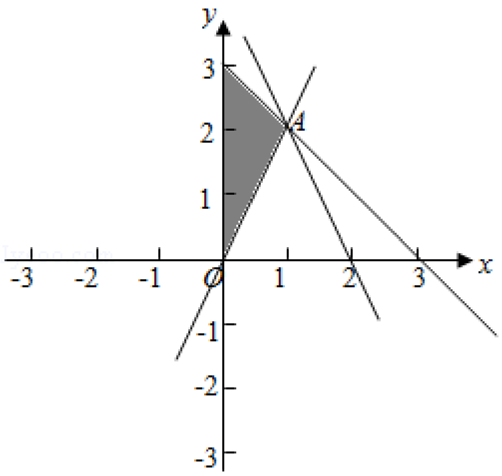
此时 z 最大.

由$\begin{cases}2x-y=0\\x+y=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，即 A（1，2），

代入目标函数 z=2x+y 得 z=1×2+2=4.

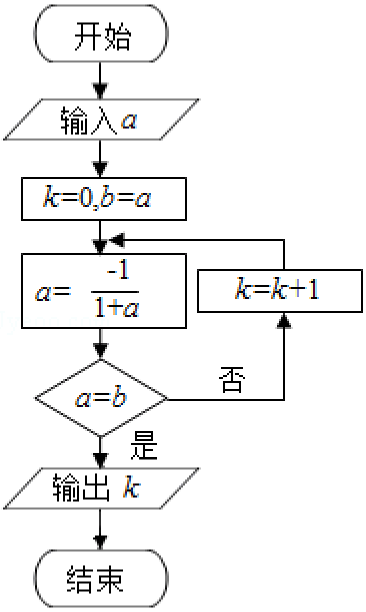
即目标函数 z=2x+y 的最大值为 4.

故选：C.



【点评】本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义，结合数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法.

3.（5 分）执行如图所示的程序框图，若输入的 a 值为 1，则输出的 k 值为（　　）



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；28：操作型；5K：算法和程序框图．

【分析】根据已知的程序框图可得，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，可得答案．

【解答】解：输入的 a 值为 1，则 b=1，

第一次执行循环体后，$a=-\frac{1}{2}$，不满足退出循环的条件，k=1；

第二次执行循环体后，a=﹣2，不满足退出循环的条件，k=2；

第三次执行循环体后，a=1，满足退出循环的条件，

故输出的 k 值为 2，

故选：B．

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环次数不多，或有规律可循时，可采用模拟程序法进行解答．

4．（5 分）设$\vec{a}$，$\vec{b}$是向量，则“$|\vec{a}|=|\vec{b}|$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件；91：向量的概念与向量的模．

【专题】35：转化思想；5A：平面向量及应用；5R：矩阵和变换．

【分析】根据向量模相等的几何意义，结合充要条件的定义，可得答案．

【解答】解：若“$|\vec{a}|=|\vec{b}|$”，则以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边的平行四边形是菱形；

若“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”，则以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边的平行四边形是矩形；

故“$|\vec{a}|=|\vec{b}|$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”的既不充分也不必要条件；

故选：D．

【点评】本题考查的知识点是充要条件，向量的模，分析出“$|\vec{a}|=|\vec{b}|$”与“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”表示的几何意义，是解答的关键．

5．（5分）已知x，y∈R，且x＞y＞0，则（　　）

A．$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>0$　　B．$\sin x-\sin y>0$

C．$(\frac{1}{2})^{x}-(\frac{1}{2})^{y}<0$　　D．$\ln x+\ln y>0$

【考点】71：不等关系与不等式．

【专题】35：转化思想；51：函数的性质及应用；5T：不等式．

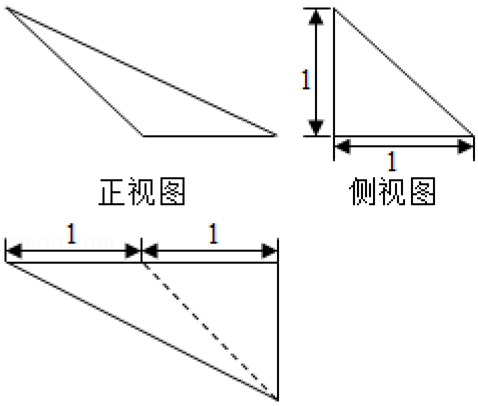
【分析】x，y∈R，且x＞y＞0，可得：$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，sinx与siny的大小关系不确定，$(\frac{1}{2})^{x}<(\frac{1}{2})^{y}$，lnx+lny与0的大小关系不确定，即可判断出结论．

【解答】解：∵x，y∈R，且x＞y＞0，则$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，sinx与siny的大小关系不确定，$(\frac{1}{2})^{x}<(\frac{1}{2})^{y}$，即$(\frac{1}{2})^{x}-(\frac{1}{2})^{y}<0$，lnx+lny与0的大小关系不确定．

故选：C．

【点评】本题考查了不等式的性质、函数的单调性，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

6．（5分）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为（　　）



A．$\frac{1}{6}$　　　　B．$\frac{1}{3}$　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．1

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离；5Q：立体几何．

【分析】由已知中的三视图可得：该几何体是一个以俯视图为底面的三棱锥，进而可得答案．

【解答】解：由已知中的三视图可得：该几何体是一个以俯视图为底面的三棱锥，

棱锥的底面面积 $S=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，

高为 1，

故棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{6}$，

故选：A．

【点评】本题考查的知识点是由三视图，求体积和表面积，根据已知的三视图，判断几何体的形状是解答的关键．

7．（5 分）将函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 图象上的点 $P(\frac{\pi}{4},t)$ 向左平移 s（s＞0）个单位长度得到点 P′，若 P′位于函数 $y=\sin2x$ 的图象上，则（　　）

A．$t=\frac{1}{2}$，s 的最小值为$\frac{\pi}{6}$　　　　B．$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，s 的最小值为$\frac{\pi}{6}$

C．$t=\frac{1}{2}$，s 的最小值为$\frac{\pi}{3}$　　　　D．$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，s 的最小值为$\frac{\pi}{3}$

【考点】HJ：函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；57：三角函数的图像与性质．

【分析】将 $x=\frac{\pi}{4}$代入得：$t=\frac{1}{2}$，进而求出平移后 P′的坐标，进而得到 s 的最小值．

【解答】解：将 $x=\frac{\pi}{4}$代入得：$t=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

将函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 图象上的点 P 向左平移 s 个单位，

得到 $P'(\frac{\pi}{4}-s，\frac{1}{2})$ 点，

若 P′位于函数 y=sin2x 的图象上，

则 $\sin(\frac{\pi}{2}-2s)=\cos2s=\frac{1}{2}$，

则 $2s=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$，k∈Z，

则 $s=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$，k∈Z，

由 s＞0 得：当 k=0 时，s 的最小值为$\frac{\pi}{6}$，

故选：A．

【点评】本题考查的知识点是函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$（A＞0，ω＞0）的图象和性质，难度中档．

8．（5 分）袋中装有偶数个球，其中红球、黑球各占一半．甲、乙、丙是三个空盒．每次从袋中任意取出两个球，将其中一个球放入甲盒，如果这个球是红球，就将另一个放入乙盒，否则就放入丙盒．重复上述过程，直到袋中所有球都被放入盒中，则（　　）

A．乙盒中黑球不多于丙盒中黑球

B．乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

C．乙盒中红球不多于丙盒中红球

D．乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

【考点】F5：演绎推理．

【专题】5M：推理和证明．

【分析】分析理解题意：乙中放红球，则甲中也肯定是放红球；往丙中放球的前提是放入甲中的不是红球，据此可以从乙中的红球个数为切入点进行分析．

【解答】解：取两个球共有 4 种情况：

①红+红，则乙盒中红球数加 1 个；

②黑+黑，则丙盒中黑球数加 1 个；

③红+黑（红球放入甲盒中），则乙盒中黑球数加 1 个；

④黑+红（黑球放入甲盒中），则丙盒中红球数加 1 个.

设一共有球 2a 个，则 a 个红球，a 个黑球，甲中球的总个数为 a，其中红球 x 个，黑球 y 个，x+y=a．

则乙中有 x 个球，其中 k 个红球，j 个黑球，k+j=x；

丙中有 y 个球，其中 l 个红球，i 个黑球，i+l=y；

黑球总数 a=y+i+j，又 x+y=a，故 x=i+j

由于 x=k+j，所以可得 i=k，即乙中的红球等于丙中的黑球.

故选：B．

【点评】该题考查了推理与证明，重点是找到切入点逐步进行分析，对学生的逻辑思维能力有一定要求，中档题

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．（5 分）设 a∈R，若复数（1+i）（a+i）在复平面内对应的点位于实轴上，则 a=_﹣1_．

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；5N：数系的扩充和复数．

【分析】（1+i）（a+i）=a﹣1+（a+1）i，则 a+1=0，解得答案．

【解答】解：（1+i）（a+i）=a﹣1+（a+1）i，

若复数（1+i）（a+i）在复平面内对应的点位于实轴上，

则 a+1=0，

解得：a=﹣1，

故答案为：﹣1

【点评】本题考查的知识点是复数的代数表示法及其几何意义，难度不大，属于基础题．

10．（5 分）在（1﹣2x）^{6}的展开式中，x^2的系数为 <u>60</u> ．（用数字作答）

【考点】DA：二项式定理．

【专题】34：方程思想；35：转化思想；5P：二项式定理．

【分析】利用二项式定理展开式的通项公式即可得出．

【解答】解：（1﹣2x）^{6}的展开式中，通项公式 $T_{r+1}=C_6^r(-2x)^r=(-2)^rC_6^r x^r$，

令 r=2，则 x^2 的系数$=(-2)^2C_6^2=60$．

故答案为：60．

【点评】本题考查了二项式定理的应用，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

11．（5 分）在极坐标系中，直线 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-1=0$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 交于 A，B 两点，则|AB|= <u>2</u> ．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程．

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；5B：直线与圆．

【分析】把圆与直线的极坐标方程化为直角坐标方程，利用圆心 C 在直线上可得|AB|．

【解答】解：直线 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-1=0$ 化为 y 直线 $x-\sqrt{3}y-1=0$．

圆 $\rho=2\cos\theta$ 化为 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，∴$x^2+y^2=2x$，配方为 $(x-1)^2+y^2=1$，可得圆心 C（1，0），半径 r=1．

则圆心 C 在直线上，∴|AB|=2．

故答案为：2．

【点评】本题考查了把圆与直线的极坐标方程化为直角坐标方程，考查了计算能力，属于基础题．

12．（5 分）已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前 n 项和．若 $a_1=6$，$a_3+a_5=0$，则 S_6= <u>6</u> ．

【考点】85：等差数列的前 n 项和.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；54：等差数列与等比数列.

【分析】由已知条件利用等差数列的性质求出公差，由此利用等差数列的前 n 项和公式能求出 S_6.

【解答】解：∵$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前 n 项和.

$a_1=6$，$a_3+a_5=0$，

∴$a_1+2d+a_1+4d=0$，

∴$12+6d=0$，

解得 $d=-2$，

∴$S_6=6a_1+\frac{6\times5}{2}d=36-30=6$.

故答案为：6.

【点评】本题考查等差数列的前 6 项和的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意等差数列的性质的合理运用.

13．（5 分）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的渐近线为正方形 OABC 的边 OA，OC 所在的直线，点 B 为该双曲线的焦点．若正方形 OABC 的边长为 2，则 a=__2__.

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】35：转化思想；4O：定义法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】根据双曲线渐近线在正方形的两个边，得到双曲线的渐近线互相垂直，即双曲线是等轴双曲线，结合等轴双曲线的性质进行求解即可.

【解答】解：∵双曲线的渐近线为正方形 OABC 的边 OA，OC 所在的直线，

∴渐近线互相垂直，则双曲线为等轴双曲线，即渐近线方程为 $y=\pm x$，

即 $a=b$，

∵正方形 OABC 的边长为 2，

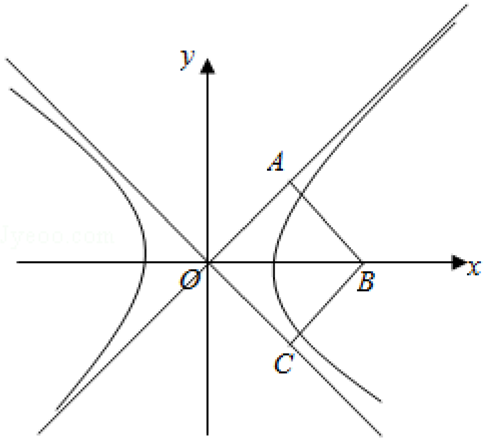
∴$OB=2\sqrt{2}$，即 $c=2\sqrt{2}$，

则 $a^2+b^2=c^2=8$，

即 $2a^2=8$，

则 $a^2=4$，$a=2$，

故答案为：2



【点评】本题主要考查双曲线的性质的应用，根据双曲线渐近线垂直关系得到双曲线是等轴双曲线是解决本题的关键.

14.（5 分）设函数 f（x）$=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant a\\ -2x, & x>a\end{cases}$.

①若 a=0，则 f（x）的最大值为__2__；

②若 f（x）无最大值，则实数 a 的取值范围是__（﹣∞，﹣1）__.

【考点】5B：分段函数的应用.

【专题】35：转化思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用.

【分析】①将 a=0 代入，求出函数的导数，分析函数的单调性，可得当 x=﹣1 时，f（x）的最大值为 2；

②若 f（x）无最大值，则$\begin{cases}a\leqslant -1\\ -2a>a^3-3a\end{cases}$，或$\begin{cases}a>-1\\ -2a>a^3-3a\\ -2a>2\end{cases}$，解得答案.

【解答】解：①若 a=0，则 f（x）$=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant 0\\ -2x, & x>0\end{cases}$，

则 f′（x）$=\begin{cases}3x^2-3, & x\leqslant 0\\ -2, & x>0\end{cases}$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，此时函数为增函数，

当 $x>-1$ 时，$f'(x)<0$，此时函数为减函数，

故当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 的最大值为 2；

②$f'(x)=\begin{cases}3x^2-3, & x\leqslant a\\ -2, & x>a\end{cases}$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=\pm1$，

若 $f(x)$ 无最大值，则 $\begin{cases}a\leqslant -1\\ -2a>a^3-3a\end{cases}$，或 $\begin{cases}a>-1\\ -2a>a^3-3a\\ -2a>2\end{cases}$，

解得：$a\in(-\infty,\ -1)$.

故答案为：2，$(-\infty,\ -1)$

【点评】本题考查的知识点是分段函数的应用，函数的最值，分类讨论思想，难度中档.

三、解答题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（13 分）在△ABC 中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

（Ⅰ）求∠B 的大小；

（Ⅱ）求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值.

【考点】HU：解三角形.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；58：解三角形.

【分析】（Ⅰ）根据已知和余弦定理，可得 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，进而得到答案；

（Ⅱ）由（I）得：$C=\frac{3\pi}{4}-A$，结合正弦型函数的图象和性质，可得 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值.

【解答】解：（Ⅰ）∵在△ABC 中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

∴$a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$.

∴$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$B=\frac{\pi}{4}$

（Ⅱ）由（I）得：$C=\frac{3\pi}{4}-A$，

∴$\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)$

$=\sqrt{2}\cos A-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$

$=\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$.

∵$A\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，

∴$A+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，

故当 $A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$时，$\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$取最大值 1，

即$\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值为 1.

【点评】本题考查的知识点是余弦定理，和差角公式，正弦型函数的图象和性质，难度中档.

16.（13 分）A，B，C 三个班共有 100 名学生，为调查他们的体育锻炼情况，通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间，数据如表（单位：小时）：

A 班	6 6.5 7 7.5 8
B 班	6 7 8 9 10 11 12
C 班	3 4.5 6 7.5 9 10.5 12 13.5

（Ⅰ）试估计 C 班的学生人数；

（Ⅱ）从 A 班和 C 班抽出的学生中，各随机选取一个人，A 班选出的人记为甲，C 班选出的人记为乙．假设所有学生的锻炼时间相对独立，求该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率；

（Ⅲ）再从 A，B，C 三班中各随机抽取一名学生，他们该周锻炼时间分别是 7，9，8.25（单位：小时），这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为 μ_1，表格中数据的平均数记为 μ_0，试判断 μ_0 和 μ_1 的大小．（结论不要求证明）

【考点】BE：用样本的数字特征估计总体的数字特征；CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】11：计算题；4O：定义法；5I：概率与统计.

【分析】（I）由已知先计算出抽样比，进而可估计 C 班的学生人数；

（Ⅱ）根据古典概型概率计算公式，可求出该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率；

（Ⅲ）根据平均数的定义，可判断出 $\mu_0>\mu_1$.

【解答】解：（I）由题意得：三个班共抽取 20 个学生，其中 C 班抽取 8 个，

故抽样比 $K=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$，

故 C 班有学生 $8\div\frac{1}{5}=40$ 人，

（Ⅱ）从从 A 班和 C 班抽出的学生中，各随机选取一个人，

共有 $5\times8=40$ 种情况，

而且这些情况是等可能发生的，

当甲锻炼时间为 6 时，甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 2 种情况；

当甲锻炼时间为 6.5 时，甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 3 种情况；

当甲锻炼时间为 7 时，甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 3 种情况；

当甲锻炼时间为 7.5 时，甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 3 种情况；

当甲锻炼时间为 8 时，甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 4 种情况；

故周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率 $P=\frac{2+3+3+3+4}{40}=\frac{3}{8}$；

（Ⅲ）$\mu_0>\mu_1$.

【点评】本题考查的知识点是用样本的频率分布估计总体分布，古典概型，难度中档.

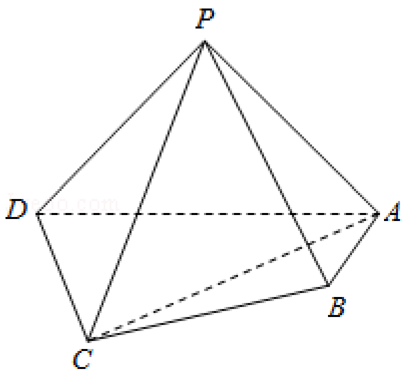
17.（14 分）如图，在四棱锥 P﹣ABCD 中，平面 PAD⊥平面 ABCD，PA⊥PD，PA=PD，AB⊥AD，AB=1，AD=2，AC=CD=$\sqrt{5}$.

（Ⅰ）求证：PD⊥平面 PAB；

（Ⅱ）求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在棱 PA 上是否存在点 M，使得 BM∥平面 PCD？若存在，求$\frac{AM}{AP}$的值，若

不存在，说明理由.



【考点】LP：空间中直线与平面之间的位置关系.

【专题】15：综合题；35：转化思想；49：综合法；5Q：立体几何.

【分析】（Ⅰ）由已知结合面面垂直的性质可得 AB⊥平面 PAD，进一步得到 AB⊥PD，再由 PD⊥PA，由线面垂直的判定得到 PD⊥平面 PAB；

（Ⅱ）取 AD 中点为 O，连接 CO，PO，由已知可得 CO⊥AD，PO⊥AD．以 O 为坐标原点，建立空间直角坐标系，求得 P（0，0，1），B（1，1，0），D（0，﹣1，0），C（2，0，0），进一步求出向量$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PD}$、$\overrightarrow{PC}$的坐标，再求出平面 PCD 的法向量$\overrightarrow{n}$，设 PB 与平面 PCD 的夹角为 θ，由 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{n},\overrightarrow{PB}>|=|\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{PB}|}|$求得直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值；

（Ⅲ）假设存在 M 点使得 BM∥平面 PCD，设$\frac{AM}{AP}=\lambda$，M（0，y_1，z_1），由$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$可得 M（0，1﹣λ，λ），$\overrightarrow{BM}=(-1,-\lambda,\lambda)$，由 BM∥平面 PCD，可得$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{n}=0$，由此列式求得当$\frac{AM}{AP}=\frac{1}{4}$时，M 点即为所求.

【解答】（Ⅰ）证明：∵平面 PAD⊥平面 ABCD，且平面 PAD∩平面 ABCD=AD，

且 AB⊥AD，AB⊂平面 ABCD，

∴AB⊥平面 PAD，

∵PD⊂平面 PAD，

∴AB⊥PD，

又 PD⊥PA，且 PA∩AB=A，

∴PD⊥平面 PAB；

（Ⅱ）解：取 AD 中点为 O，连接 CO，PO，

∵$CD=AC=\sqrt{5}$，

∴CO⊥AD，

又∵PA=PD，

∴PO⊥AD.

以 O 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图：

则 P（0，0，1），B（1，1，0），D（0，﹣1，0），C（2，0，0），

则$\overrightarrow{PB}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,\ -1,\ 0)$，

设$\overrightarrow{n}=(x_0,\ y_0,\ 1)$为平面 PCD 的法向量，

则由$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-y_0-1=0\\ 2x_0-1=0\end{cases}$，则$\overrightarrow{n}=(\frac{1}{2},\ -1,\ 1)$.

设 PB 与平面 PCD 的夹角为 θ，则$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{n},\ \overrightarrow{PB}>|=|\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{PB}|}|=$

$|\frac{\frac{1}{2}-1-1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}\times\sqrt{3}}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

（Ⅲ）解：假设存在 M 点使得 BM∥平面 PCD，设$\frac{AM}{AP}=\lambda$，M（0，y_1，z_1），

由（Ⅱ）知，A（0，1，0），P（0，0，1），$\overrightarrow{AP}=(0,\ -1,\ 1)$，B（1，1，0），

$\overrightarrow{AM}=(0,\ y_1-1,\ z_1)$，

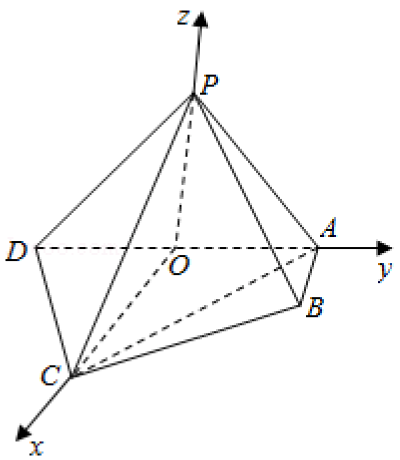
则有$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$，可得 M（0，1﹣λ，λ），

∴$\overrightarrow{BM}=(-1,\ -\lambda,\ \lambda)$，

∵BM∥平面 PCD，$\overrightarrow{n}=(\frac{1}{2},\ -1,\ 1)$为平面 PCD 的法向量，

∴$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{n}=0$，即$-\frac{1}{2}+\lambda+\lambda=0$，解得$\lambda=\frac{1}{4}$.

综上，存在点 M，即当$\frac{AM}{AP}=\frac{1}{4}$时，M 点即为所求.



【点评】本题考查线面垂直的判定，考查了直线与平面所成的角，训练了存在性问题的求解方法，建系利用空间向量求解降低了问题的难度，属中档题．

18．（13 分）设函数 f（x）=xe^{a-x}+bx，曲线 y=f（x）在点（2，f（2））处的切线方程为 y=（e﹣1）x+4，

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）求 f（x）的单调区间．

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】33：函数思想；35：转化思想；4R：转化法；52：导数的概念及应用．

【分析】（Ⅰ）求函数的导数，根据导数的几何意义求出函数的切线斜率以及 f（2），建立方程组关系即可求 a，b 的值；

（Ⅱ）求函数的导数，利用函数单调性和导数之间的关系即可求 f（x）的单调区间．

【解答】解：（Ⅰ）∵y=f（x）在点（2，f（2））处的切线方程为 y=（e﹣1）x+4，

∴当 x=2 时，y=2（e﹣1）+4=2e+2，即 f（2）=2e+2，

同时 f′（2）=e﹣1，

∵f（x）=xe^{a-x}+bx，

∴f′（x）=e^{a-x}﹣xe^{a-x}+b，

则$\begin{cases}f(2)=2e^{a-2}+2b=2e+2\\ f'(2)=e^{a-2}-2e^{a-2}+b=e-1\end{cases}$，

即 a=2，b=e；

（Ⅱ）∵a=2，b=e；

∴f（x）=$xe^{2-x}+ex$，

∴f′（x）=$e^{2-x}-xe^{2-x}+e$=（1－x）$e^{2-x}+e$=（$1-x+e^{x-1}$）e^{2-x}，

∵$e^{2-x}>0$，

∴$1-x+e^{x-1}$与 f′（x）同号，

令 g（x）=$1-x+e^{x-1}$，

则 g′（x）=$-1+e^{x-1}$，

由 g′（x）＜0，得 x＜1，此时 g（x）为减函数，

由 g′（x）＞0，得 x＞1，此时 g（x）为增函数，

则当 x=1 时，g（x）取得极小值也是最小值 g（1）=1，

则 g（x）≥g（1）=1＞0，

故 f′（x）＞0，即 f（x）的单调区间是（－∞，+∞），无递减区间．

【点评】本题主要考查导数的应用，根据导数的几何意义，结合切线斜率建立方程关系以及利用函数单调性和导数之间的关系是解决本题的关键．综合性较强．

19．（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，A（a，0），B（0，b），O（0，0），△OAB 的面积为 1．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 P 是椭圆 C 上一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N．求证：|AN|•|BM|为定值．

【考点】KL：直线与椭圆的综合．

【专题】34：方程思想；48：分析法；5B：直线与圆；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（Ⅰ）运用椭圆的离心率公式和三角形的面积公式，结合 a，b，c 的关系，解方程可得 a=2，b=1，进而得到椭圆方程；

（Ⅱ）方法一、设椭圆上点 P（x_0，y_0），可得 $x_0^2+4y_0^2=4$，求出直线 PA 的方程，令 x=0，求得 y，|BM|；求出直线 PB 的方程，令 y=0，可得 x，|AN|，化简整理，即可得到|AN|•|BM|为定值 4.

方法二、设 P（2cosθ，sinθ），（0≤θ<2π），求出直线 PA 的方程，令 x=0，求得 y，|BM|；求出直线 PB 的方程，令 y=0，可得 x，|AN|，运用同角的平方关系，化简整理，即可得到|AN|•|BM|为定值 4.

【解答】解：（Ⅰ）由题意可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又△OAB 的面积为 1，可得$\frac{1}{2}ab=1$，

且 $a^2-b^2=c^2$，

解得 a=2，b=1，$c=\sqrt{3}$，

可得椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）证法一：设椭圆上点 P（x_0，y_0），

可得 $x_0^2+4y_0^2=4$，

直线 PA：$y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，令 x=0，可得 $y=-\frac{2y_0}{x_0-2}$，

则$|BM|=|1+\frac{2y_0}{x_0-2}|$；

直线 PB：$y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$，令 y=0，可得 $x=-\frac{x_0}{y_0-1}$，

则$|AN|=|2+\frac{x_0}{y_0-1}|$.

可得$|AN|\bullet|BM|=|2+\frac{x_0}{y_0-1}|\bullet|1+\frac{2y_0}{x_0-2}|$

$=|\frac{(x_0+2y_0-2)^2}{(x_0-2)(y_0-1)}|=|\frac{x_0^2+4y_0^2+4+4x_0y_0-4x_0-8y_0}{2+x_0y_0-x_0-2y_0}|$

$=|\frac{8+4x_0y_0-4x_0-8y_0}{2+x_0y_0-x_0-2y_0}|=4$，

即有|AN|•|BM|为定值 4.

证法二：设 P（2cosθ，sinθ），（0≤θ<2π），

直线 PA：$y=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta-2}$（x﹣2），令 x=0，可得 $y=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}$，

则 $|BM|=|\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{1-\cos\theta}|$；

直线 PB：$y=\frac{\sin\theta-1}{2\cos\theta}x+1$，令 y=0，可得 $x=-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta-1}$，

则 $|AN|=|\frac{2\sin\theta+2\cos\theta-2}{1-\sin\theta}|$.

即有 $|AN|\bullet|BM|=|\frac{2\sin\theta+2\cos\theta-2}{1-\sin\theta}|\bullet|\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{1-\cos\theta}|$

$=2|\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+1+2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta}|$

$=2|\frac{2+2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta}|=4$.

则|AN|•|BM|为定值 4.

【点评】本题考查椭圆的方程的求法，注意运用椭圆的离心率和基本量的关系，考查线段积的定值的求法，注意运用直线方程和点满足椭圆方程，考查化解在合理的运算能力，属于中档题.

20.（13 分）设数列 A：a_1，a_2，…，a_N （N≥2）．如果对小于 n（2≤n≤N）的每个正整数 k 都有 $a_k<a_n$，则称 n 是数列 A 的一个“G 时刻”，记 G（A）是数列 A 的所有“G 时刻”组成的集合．

（Ⅰ）对数列 A：﹣2，2，﹣1，1，3，写出 G（A）的所有元素；

（Ⅱ）证明：若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n>a_1$，则 G（A）≠∅；

（Ⅲ）证明：若数列 A 满足 $a_n-a_{n-1}\leq 1$（n=2，3，…，N），则 G（A）的元素个数不小于 a_N-a_1.

【考点】8I：数列与函数的综合；RG：数学归纳法.

【专题】23：新定义；55：点列、递归数列与数学归纳法.

【分析】（Ⅰ）结合“G 时刻”的定义进行分析；

（Ⅱ）可以采用假设法和递推法进行分析；

（Ⅲ）可以采用假设法和列举法进行分析.

【解答】解：（Ⅰ）根据题干可得，$a_1=-2$，$a_2=2$，$a_3=-1$，$a_4=1$，$a_5=3$，$a_1<a_2$ 满足条件，2 满足条件，$a_2>a_3$ 不满足条件，3 不满足条件，

$a_2>a_4$ 不满足条件，4 不满足条件，a_1，a_2，a_3，a_4，均小于 a_5，因此 5 满足条件，因此 G（A）=$\{2，5\}$.

（Ⅱ）因为存在 $a_n>a_1$，设数列 A 中第一个大于 a_1 的项为 a_k，则 $a_k>a_1\geqslant a_i$，其中 $2\leqslant i\leqslant k-1$，所以 $k\in G(A)$，G（A）$\neq\emptyset$；

（Ⅲ）设 A 数列的所有"G 时刻"为 $i_1<i_2<\ldots<i_k$，

对于第一个"G 时刻"i_1，有 $a_{i_1}>a_1\geqslant a_i$（$i=2，3，\ldots，i_1-1$），则

$a_{i_1}-a_1\leqslant a_{i_1}-a_{i_1-1}\leqslant 1$.

对于第二个"G 时刻"i_1，有 $a_{i_2}>a_{i_1}\geqslant a_i$（$i=2，3，\ldots，i_1-1$），则

$a_{i_2}-a_{i_1}\leqslant a_{i_2}-a_{i_2-1}\leqslant 1$.

类似的 $a_{i_3}-a_{i_2}\leqslant 1$，…，$a_{i_k}-a_{i_{k-1}}\leqslant 1$.

于是，$k\geqslant(a_{i_k}-a_{i_{k-1}})+(a_{i_{k-1}}-a_{i_{k-2}})+\ldots+(a_{i_2}-a_{i_1})+(a_{i_1}-a_1)$

$=a_{i_k}-a_1$.

对于 a_N，若 $N\in G(A)$，则 $a_{i_k}=a_N$.

若 $N\notin G(A)$，则 $a_N\leqslant a_{i_k}$，否则由（2）知 a_{i_k}，$a_{i_{k+1}}$，…，a_N，中存在"G 时刻"与只有 k 个"G 时刻"矛盾.

从而 $k\geqslant a_{i_k}-a_1\geqslant a_N-a_1$.

【点评】本题属于新定义题型，重点在于对"G 时刻"定义的把握，难度较大.