2018年上海市高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1．（4分）（2018•上海）行列式$\begin{vmatrix}4&1\\2&5\end{vmatrix}$的值为__18__.

【考点】OM：二阶行列式的定义.

【专题】11：计算题；49：综合法；5R：矩阵和变换.

【分析】直接利用行列式的定义，计算求解即可.

【解答】解：行列式$\begin{vmatrix}4&1\\2&5\end{vmatrix}$=4×5﹣2×1=18.

故答案为：18.

【点评】本题考查行列式的定义，运算法则的应用，是基本知识的考查.

2．（4分）（2018•上海）双曲线$\frac{x^2}{4}$﹣y^2=1的渐近线方程为__$\pm\frac{1}{2}x$__.

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】先确定双曲线的焦点所在坐标轴，再确定双曲线的实轴长和虚轴长，最后确定双曲线的渐近线方程.

【解答】解：∵双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的a=2，b=1，焦点在x轴上

而双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为y=±$\frac{b}{a}x$

∴双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的渐近线方程为y=±$\frac{1}{2}x$

故答案为：y=±$\frac{1}{2}x$

【点评】本题考察了双曲线的标准方程，双曲线的几何意义，特别是双曲线的渐近线方程，解题时要注意先定位，再定量的解题思想

3．（4分）（2018•上海）在（1+x）^{7}的二项展开式中，x^2项的系数为__21__

（结果用数值表示）.

【考点】DA：二项式定理.

【专题】38：对应思想；4O：定义法；5P：二项式定理.

【分析】利用二项式展开式的通项公式求得展开式中x^2的系数.

【解答】解：二项式$(1+x)^7$展开式的通项公式为

$T_{r+1}=C_7^r\bullet x^r$，

令r=2，得展开式中x^2的系数为$C_7^2=21$.

故答案为：21.

【点评】本题考查了二项展开式的通项公式的应用问题，是基础题.

4．（4分）（2018•上海）设常数a∈R，函数f（x）=$\log_2$（x+a）．若f（x）的反函数的图象经过点（3，1），则a=__7__.

【考点】4R：反函数.

【专题】11　：计算题；33　：函数思想；4O：定义法；51　：函数的性质及应用.

【分析】由反函数的性质得函数f（x）=$\log_2$（x+a）的图象经过点（1，3），由此能求出a.

【解答】解：∵常数a∈R，函数f（x）=$\log_2$（x+a）.

f（x）的反函数的图象经过点（3，1），

∴函数f（x）=$\log_2$（x+a）的图象经过点（1，3），

∴$\log_2$（1+a）=3，

解得a=7.

故答案为：7.

【点评】本题考查实数值的求法，考查函数的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

5．（4分）（2018•上海）已知复数z满足（1+i）z=1﹣7i（i是虚数单位），则|z|=__5__.

【考点】A8：复数的模.

【专题】38：对应思想；4A：数学模型法；5N：数系的扩充和复数．

【分析】把已知等式变形，然后利用复数代数形式的乘除运算化简，再由复数求模公式计算得答案．

【解答】解：由（1+i）z=1﹣7i，

得 $z=\frac{1-7i}{1+i}=\frac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-6-8i}{2}=-3-4i$，

则 $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$．

故答案为：5．

【点评】本题考查了复数代数形式的乘除运算，考查了复数模的求法，是基础题．

6．（4分）（2018•上海）记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3=0$，$a_6+a_7=14$，则$S_7=$__14__．

【考点】85：等差数列的前n项和．

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；54：等差数列与等比数列．

【分析】利用等差数列通项公式列出方程组，求出$a_1=-4$，d=2，由此能求出S_7．

【解答】解：∵等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=0$，$a_6+a_7=14$，

$\therefore\begin{cases}a_1+2d=0\\a_1+5d+a_1+6d=14\end{cases}$，

解得$a_1=-4$，d=2，

$\therefore S_7=7a_1+\frac{7\times6}{2}d=-28+42=14$．

故答案为：14．

【点评】本题考查等差数列的前7项和的求法，考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题．

7．（5分）（2018•上海）已知α∈$\{-2，-1，-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}，1，2，3\}$，若幂函数f（x）=$x^{\alpha}$为奇函数，且在（0，+∞）上递减，则α=__﹣1__．

【考点】4U：幂函数的概念、解析式、定义域、值域．

【专题】11　　　　　：计算题；34　　　　　：方程思想；4O：定义法；51　：函数的性质及应用．

【分析】由幂函数f（x）=x^{α}为奇函数，且在（0，+∞）上递减，得到a是奇数，且a＜0，由此能求出a的值．

【解答】解：∵α∈{﹣2，﹣1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，2，3}，

幂函数f（x）=x^{α}为奇函数，且在（0，+∞）上递减，

∴a是奇数，且a＜0，

∴a=﹣1．

故答案为：﹣1．

【点评】本题考查实数值的求法，考查幂函数的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题．

8．（5分）（2018•上海）在平面直角坐标系中，已知点A（﹣1，0）、B（2，0），E、F是y轴上的两个动点，且$|\overrightarrow{EF}|=2$，则$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BF}$的最小值为__﹣3__．

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】11：计算题；35：转化思想；41：向量法；5A：平面向量及应用．

【分析】据题意可设E（0，a），F（0，b），从而得出|a﹣b|=2，即a=b+2，或b=a+2，并可求得$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BF}=-2+ab$，将a=b+2带入上式即可求出$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BF}$的最小值，同理将b=a+2带入，也可求出$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BF}$的最小值．

【解答】解：根据题意，设E（0，a），F（0，b）；

$\therefore|\overrightarrow{EF}|=|a-b|=2$；

∴a=b+2，或b=a+2；

且$\overrightarrow{AE}=(1,\ a)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,\ b)$；

$\therefore\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BF}=-2+ab$；

当a=b+2时，$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BF}=-2+(b+2)\bullet b=b^2+2b-2$；

∵b^2+2b-2的最小值为$\frac{-8-4}{4}=-3$；

∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$的最小值为﹣3，同理求出b=a+2时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$的最小值为﹣3.

故答案为：﹣3.

【点评】考查根据点的坐标求两点间的距离，根据点的坐标求向量的坐标，以及向量坐标的数量积运算，二次函数求最值的公式.

9．（5分）（2018•上海）有编号互不相同的五个砝码，其中5克、3克、1克砝码各一个，2克砝码两个，从中随机选取三个，则这三个砝码的总质量为9克的概率是__$\frac{1}{5}$__（结果用最简分数表示）.

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；5I：概率与统计.

【分析】求出所有事件的总数，求出三个砝码的总质量为9克的事件总数，然后求解概率即可.

【解答】解：编号互不相同的五个砝码，其中5克、3克、1克砝码各一个，2克砝码两个，

从中随机选取三个，3个数中含有1个2；2个2，没有2，3种情况，

所有的事件总数为：$C_5^3=10$，

这三个砝码的总质量为9克的事件只有：5，3，1或5，2，2两个，

所以：这三个砝码的总质量为9克的概率是：$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，

故答案为：$\frac{1}{5}$.

【点评】本题考查古典概型的概率的求法，是基本知识的考查.

10．（5分）（2018•上海）设等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=q^{n-1}$（n∈N*），前n项和为S_n．若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}$，则q=__3__.

【考点】8J：数列的极限.

【专题】11 ：计算题；34 ：方程思想；35 ：转化思想；49 ：综合法；55

：点列、递归数列与数学归纳法．

【分析】利用等比数列的通项公式求出首项，通过数列的极限，列出方程，求解公比即可．

【解答】解：等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=q^{n-1}$（$n\in N^*$），可得$a_1=1$，

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}$，所以数列的公比不是1，

$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$a_{n+1}=q^n$．

可得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1-q^n}{1-q}}{q^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{(1-q)q^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{q^n}-1}{1-q}=\frac{1}{q-1}=\frac{1}{2}$，

可得$q=3$．

故答案为：3．

【点评】本题考查数列的极限的运算法则的应用，等比数列求和以及等比数列的简单性质的应用，是基本知识的考查．

11．（5分）（2018•上海）已知常数$a>0$，函数$f(x)=\frac{2^x}{2^x+ax}$的图象经过点$P(p,\frac{6}{5})$，$Q(q,-\frac{1}{5})$．若$2^{p+q}=36pq$，则$a=$__6__．

【考点】3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】35：转化思想；51：函数的性质及应用．

【分析】直接利用函数的关系式，利用恒等变换求出相应的a值．

【解答】解：函数$f(x)=\frac{2^x}{2^x+ax}$的图象经过点$P(p,\frac{6}{5})$，$Q(q,-\frac{1}{5})$．

则：$\frac{2^p}{2^p+ap}+\frac{2^q}{2^q+aq}=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}=1$，

整理得：$\frac{2^{p+q}+2^paq+2^qap+2^{p+q}}{2^{p+q}+2^paq+2^qap+a^2pq}=1$，

解得：$2^{p+q}=a^2pq$，

由于：$2^{p+q}=36pq$，

所以：$a^2=36$，

由于$a>0$，

故：$a=6$．

故答案为：6

【点评】本题考查的知识要点：函数的性质的应用，代数式的变换问题的应用

．

12．（5分）（2018•上海）已知实数x_1、x_2、y_1、y_2满足：$x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$，则$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$的最大值为__$\sqrt{2}+\sqrt{3}$__．

【考点】7F：基本不等式及其应用；IT：点到直线的距离公式．

【专题】35：转化思想；48：分析法；59：不等式的解法及应用．

【分析】设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），$\overrightarrow{OA}$=（x_1，y_1），$\overrightarrow{OB}$=（x_2，y_2），由圆的方程和向量数量积的定义、坐标表示，可得三角形OAB为等边三角形，AB=1，$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$的几何意义为点A，B两点到直线$x+y-1=0$的距离$d_1$与$d_2$之和，由两平行线的距离可得所求最大值．

【解答】解：设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

$\overrightarrow{OA}$=（x_1，y_1），$\overrightarrow{OB}$=（x_2，y_2），

由$x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$，

可得A，B两点在圆$x^2+y^2=1$上，

且$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos\angle AOB=\frac{1}{2}$，

即有$\angle AOB=60°$，

即三角形OAB为等边三角形，

AB=1，

$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$的几何意义为点A，B两点

到直线x+y﹣1=0的距离d_1与d_2之和，

显然A，B在第三象限，AB所在直线与直线x+y=1平行，

可设AB：x+y+t=0，（t＞0），

由圆心O到直线AB的距离$d=\frac{|t|}{\sqrt{2}}$，

可得$2\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}=1$，解得$t=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

即有两平行线的距离为$\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$，

即$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$的最大值为$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

【点评】本题考查向量数量积的坐标表示和定义，以及圆的方程和运用，考查点与圆的位置关系，运用点到直线的距离公式是解题的关键，属于难题.

二、选择题（本大题共有4题，满分20分，每题5分）每题有且只有一个正确选项.考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

13．（5分）（2018•上海）设P是椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$上的动点，则P到该椭圆的两个焦点的距离之和为（　　）

A．$2\sqrt{2}$B．$2\sqrt{3}$C．$2\sqrt{5}$D．$4\sqrt{2}$

【考点】K4：椭圆的性质.

【专题】11：计算题；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】判断椭圆长轴（焦点坐标）所在的轴，求出a，接利用椭圆的定义，转化求解即可.

【解答】解：椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$的焦点坐标在x轴，$a=\sqrt{5}$，

P是椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$上的动点，由椭圆的定义可知：则P到该椭圆的两个焦点的距离之和为$2a=2\sqrt{5}$.

故选：C.

【点评】本题考查椭圆的简单性质的应用，椭圆的定义的应用，是基本知识的考查.

14．（5分）（2018•上海）已知a∈R，则“a＞1”是“$\frac{1}{a}$＜1”的（　　）

A．充分非必要条件 B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件.

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；5L：简易逻辑.

【分析】“a＞1”⇒“$\frac{1}{a}$＜1”，“$\frac{1}{a}$＜1”⇒“a＞1或a＜0”，由此能求出结果.

【解答】解：a∈R，则“a＞1”⇒“$\frac{1}{a}$＜1”，

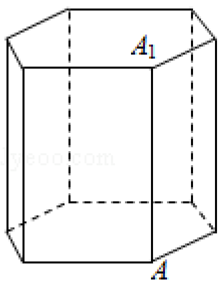
“$\frac{1}{a}$＜1”⇒“a＞1或a＜0”，

∴“a＞1”是“$\frac{1}{a}$＜1”的充分非必要条件.

故选：A.

【点评】本题考查充分条件、必要条件的判断，考查不等式的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

15．（5分）（2018•上海）《九章算术》中，称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马，设AA_1是正六棱柱的一条侧棱，如图，若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以AA_1为底面矩形的一边，则这样的阳马的个数是（　　）



A．4　B．8　C．12　D．16

【考点】D8：排列、组合的实际应用.

【专题】11：计算题；38：对应思想；4R：转化法；5O：排列组合.

【分析】根据新定义和正六边形的性质可得答案．

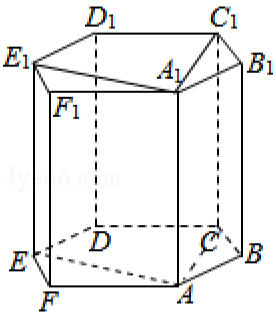
【解答】解：根据正六边形的性质，则D_1﹣A_1ABB_1，D_1﹣A_1AFF_1满足题意，而C_1，E_1，C，D，E，和D_1一样，有2×6=12，

当A_1ACC_1为底面矩形，有2个满足题意，

当A_1AEE_1为底面矩形，有2个满足题意，

故有12+2+2=16

故选：D．



【点评】本题考查了新定义，以及排除组合的问题，考查了棱柱的特征，属于中档题．

16．（5分）（2018•上海）设D是含数1的有限实数集，f（x）是定义在D上的函数，若f（x）的图象绕原点逆时针旋转$\frac{\pi}{6}$后与原图象重合，则在以下各项中，f（1）的可能取值只能是（　　）

A．$\sqrt{3}$ B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$ C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$ D．0

【考点】3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】35：转化思想；51：函数的性质及应用；56：三角函数的求值．

【分析】直接利用定义函数的应用求出结果．

【解答】解：由题意得到：问题相当于圆上由12个点为一组，每次绕原点逆时针旋转$\frac{\pi}{6}$个单位后与下一个点会重合．

我们可以通过代入和赋值的方法当f（1）=$\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，0时，此时得到的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$，0，然而此时x=0或者x=1时，都有2个y与之对应，而我们知道函数的定义就是要求一个x只能对应一个y，因此只有当x=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时旋转$\frac{\pi}{6}$，此时满足

一个x只会对应一个y，因此答案就选：B.

故选：B.

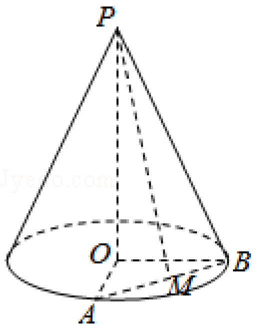
【点评】本题考查的知识要点：定义性函数的应用.

三、解答题（本大题共有5题，满分76分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17. （14分）（2018•上海）已知圆锥的顶点为P，底面圆心为O，半径为2.

（1）设圆锥的母线长为4，求圆锥的体积；

（2）设PO=4，OA、OB是底面半径，且∠AOB=90°，M为线段AB的中点，如图.求异面直线PM与OB所成的角的大小.



【考点】LM：异面直线及其所成的角；L5：旋转体（圆柱、圆锥、圆台）；LF：棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】11 ：计算题；31 ：数形结合；41 ：向量法；5F ：空间位置关系与距离；5G ：空间角.

【分析】（1）由圆锥的顶点为P，底面圆心为O，半径为2，圆锥的母线长为4能求出圆锥的体积.

（2）以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OP为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出异面直线PM与OB所成的角.

【解答】解：（1）∵圆锥的顶点为P，底面圆心为O，半径为2，圆锥的母线长为4，

∴圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times h=\frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times\sqrt{4^2-2^2}$

$=\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$.

（2）∵PO=4，OA，OB是底面半径，且∠AOB=90°，

M为线段AB的中点，

∴以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OP为z轴，

建立空间直角坐标系，

P（0，0，4），A（2，0，0），B（0，2，0），

M（1，1，0），O（0，0，0），

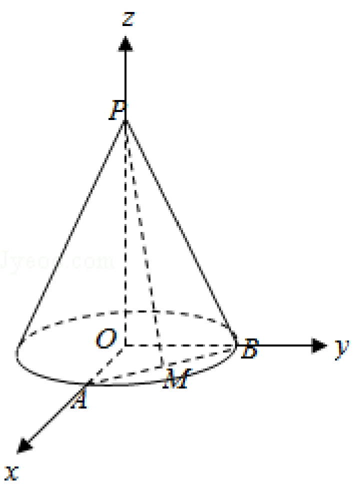
$\overrightarrow{PM}$=（1，1，﹣4），$\overrightarrow{OB}$=（0，2，0），

设异面直线PM与OB所成的角为θ，

则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{2}{\sqrt{18}\cdot2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

∴$\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

∴异面直线PM与OB所成的角的为$\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.



【点评】本题考查圆锥的体积的求法，考查异面直线所成角的正切值的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

18．（14分）（2018•上海）设常数a∈R，函数f（x）=asin2x+2cos²x.

（1）若f（x）为偶函数，求a的值；

（2）若$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}+1$，求方程$f(x)=1-\sqrt{2}$在区间[﹣π，π]上的解.

【考点】GP：两角和与差的三角函数；GS：二倍角的三角函数.

【专题】11：计算题；38：对应思想；4R：转化法；58：解三角形.

【分析】（1）根据函数的奇偶性和三角形的函数的性质即可求出，

（2）先求出a的值，再根据三角形函数的性质即可求出．

【解答】解：（1）∵f（x）$=a\sin 2x+2\cos^2x$，

∴f（﹣x）$=-a\sin 2x+2\cos^2x$，

∵f（x）为偶函数，

∴f（﹣x）=f（x），

∴$-a\sin 2x+2\cos^2x=a\sin 2x+2\cos^2x$，

∴$2a\sin 2x=0$，

∴a=0；

（2）∵f（$\frac{\pi}{4}$）$=\sqrt{3}+1$，

∴$a\sin\frac{\pi}{2}+2\cos^2$（$\frac{\pi}{4}$）$=a+1=\sqrt{3}+1$，

∴$a=\sqrt{3}$，

∴f（x）$=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin$（$2x+\frac{\pi}{6}$）+1，

∵f（x）$=1-\sqrt{2}$，

∴$2\sin$（$2x+\frac{\pi}{6}$）$+1=1-\sqrt{2}$，

∴$\sin$（$2x+\frac{\pi}{6}$）$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$，或$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$，$k\in Z$，

∴$x=-\frac{5\pi}{24}\pi+k\pi$，或$x=\frac{13}{24}\pi+k\pi$，$k\in Z$，

∵$x\in[-\pi,\pi]$，

∴$x=\frac{13\pi}{24}$或$x=\frac{19\pi}{24}$或$x=-\frac{5\pi}{24}$或$x=-\frac{11\pi}{24}$

【点评】本题考查了三角函数的化简和求值，以及三角函数的性质，属于基础题．

19．（14分）（2018•上海）某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时．某地上班族S中的成员仅以自驾或公交方式通勤．分析显示：当S中x%（0＜x＜100）的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x)=\begin{cases}30,\ 0<x\leqslant 30\\ 2x+\dfrac{1800}{x}-90,\ 30<x<100\end{cases}$$（单位：分钟），

而公交群体的人均通勤时间不受x影响，恒为40分钟，试根据上述分析结果回答下列问题：

（1）当x在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？

（2）求该地上班族S的人均通勤时间g（x）的表达式；讨论g（x）的单调性，并说明其实际意义．

【考点】5B：分段函数的应用．

【专题】12　　　　：应用题；33　　　　：函数思想；4C　　　　：分类法；51　　　　：函数的性质及应用．

【分析】（1）由题意知求出f（x）＞40时x的取值范围即可；

（2）分段求出g（x）的解析式，判断g（x）的单调性，再说明其实际意义．

【解答】解；（1）由题意知，当30＜x＜100时，

$f(x)=2x+\dfrac{1800}{x}-90>40$，

即$x^2-65x+900>0$，

解得x＜20或x＞45，

∴x∈（45，100）时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间；

（2）当0＜x≤30时，

$g(x)=30\bullet x\%+40(1-x\%)=40-\dfrac{x}{10}$；

当30＜x＜100时，

$g(x)=(2x+\dfrac{180}{x}-90)\bullet x\%+40(1-x\%)=\dfrac{x^2}{50}-\dfrac{13}{10}x+58$；

$$\therefore g(x)=\begin{cases}40-\dfrac{x}{10}\\ \dfrac{x^2}{50}-\dfrac{13}{10}x+58\end{cases}$$；

当0＜x＜32.5时，g（x）单调递减；

当32.5＜x＜100时，g（x）单调递增；

说明该地上班族S中有小于32.5%的人自驾时，人均通勤时间是递减的；

有大于32.5%的人自驾时，人均通勤时间是递增的；

当自驾人数为32.5%时，人均通勤时间最少．

【点评】本题考查了分段函数的应用问题，也考查了分类讨论与分析问题、解决问题的能力．

20．（16分）（2018•上海）设常数t＞2．在平面直角坐标系xOy中，已知点F（2，0），直线l：x=t，曲线Γ：$y^2=8x$（$0\le x\le t$，$y\ge 0$）．l与x轴交于点A、与Γ交于点B．P、Q分别是曲线Γ与线段AB上的动点．

（1）用t表示点B到点F的距离；

（2）设t=3，|FQ|=2，线段OQ的中点在直线FP上，求△AQP的面积；

（3）设t=8，是否存在以FP、FQ为邻边的矩形FPEQ，使得点E在Γ上？若存在，求点P的坐标；若不存在，说明理由．

【考点】KN：直线与抛物线的位置关系．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（1）方法一：设B点坐标，根据两点之间的距离公式，即可求得|BF|；

方法二：根据抛物线的定义，即可求得|BF|；

（2）根据抛物线的性质，求得Q点坐标，即可求得OD的中点坐标，即可求得直线PF的方程，代入抛物线方程，即可求得P点坐标，即可求得△AQP的面积；

（3）设P及E点坐标，根据直线$k_{PF}\bullet k_{FQ}=-1$，求得直线QF的方程，求得Q点坐标，根据$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{FE}$，求得E点坐标，则$\left(\frac{48+y^2}{4y}\right)^2=8\left(\frac{y^2}{8}+6\right)$，即可求得P点坐标．

【解答】解：（1）方法一：由题意可知：设B（t，$2\sqrt{2}t$），

则$|BF|=\sqrt{(t-2)^2+8t}=t+2$，

∴|BF|=t+2；

方法二：由题意可知：设B（t，$2\sqrt{2}t$），

由抛物线的性质可知：$|BF|=t+\frac{p}{2}=t+2$，∴|BF|=t+2；

（2）F（2，0），|FQ|=2，t=3，则|FA|=1，

∴$|AQ|=\sqrt{3}$，∴Q（3，$\sqrt{2}$），设OQ的中点D， D（$\frac{3}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），

$k_{QF}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{3}{2}-2}=-\sqrt{3}$，则直线PF方程：$y=-\sqrt{3}(x-2)$，

联立$\begin{cases}y=-\sqrt{3}(x-2)\\y^2=8x\end{cases}$，整理得：$3x^2-20x+12=0$，

解得：$x=\frac{2}{3}$，$x=6$（舍去），

∴△AQP的面积$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{7}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$；

（3）存在，设P（$\frac{y^2}{8}$，y），E（$\frac{m^2}{8}$，m），则$k_{PF}=\frac{y}{\frac{y^2}{8}-2}=\frac{8y}{y^2-16}$，$k_{FQ}=\frac{16-y^2}{8y}$

，

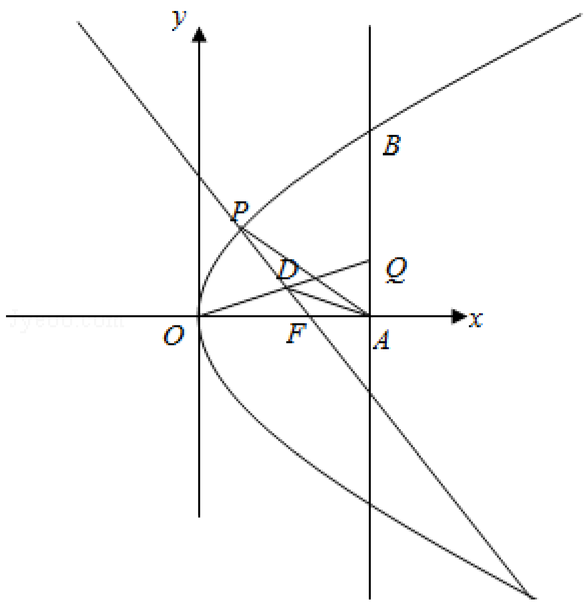
直线QF方程为$y=\frac{16-y^2}{8y}(x-2)$，∴$y_Q=\frac{16-y^2}{8y}(8-2)=\frac{48-3y^2}{4y}$，Q（8，

$\frac{48-3y^2}{4y}$），

根据$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{FE}$，则E（$\frac{y^2}{8}+6$，$\frac{48+y^2}{4y}$），

∴$\left(\frac{48+y^2}{4y}\right)^2=8\left(\frac{y^2}{8}+6\right)$，解得：$y^2=\frac{16}{5}$，

∴存在以FP、FQ为邻边的矩形FPEQ，使得点E在Γ上，且P（$\frac{2}{5}$，$\frac{4\sqrt{5}}{5}$）．



【点评】本题考查抛物线的性质，直线与抛物线的位置关系，考查转化思想，计算能力，属于中档题.

21．（18分）（2018•上海）给定无穷数列$\{a_n\}$，若无穷数列$\{b_n\}$满足：对任意$n\in N^*$，都有$|b_n-a_n|\le 1$，则称$\{b_n\}$与$\{a_n\}$“接近”.

（1）设$\{a_n\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，$b_n=a_{n+1}+1$，$n\in N^*$，判断数列$\{b_n\}$是否与$\{a_n\}$接近，并说明理由；

（2）设数列$\{a_n\}$的前四项为：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=8$，$\{b_n\}$是一个与$\{a_n\}$接近的数列，记集合$M=\{x|x=b_i$，$i=1$，2，3，4$\}$，求M中元素的个数m；

（3）已知$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，若存在数列$\{b_n\}$满足：$\{b_n\}$与$\{a_n\}$接近，且在b_2-b_1，b_3-b_2，…，$b_{201}-b_{200}$中至少有100个为正数，求d的取值范围.

【考点】8M：等差数列与等比数列的综合.

【专题】34：方程思想；48：分析法；54：等差数列与等比数列.

【分析】（1）运用等比数列的通项公式和新定义“接近”，即可判断；

（2）由新定义可得$a_n-1\le b_n\le a_n+1$，求得b_i，$i=1$，2，3，4的范围，即可得到所求个数；

（3）运用等差数列的通项公式可得a_n，讨论公差$d>0$，$d=0$，$-2<d<0$，$d\le-2$，结合新定义“接近”，推理和运算，即可得到所求范围.

【解答】解：（1）数列$\{b_n\}$与$\{a_n\}$接近.

理由：$\{a_n\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，

可得$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$b_n=a_{n+1}+1=\frac{1}{2^n}+1$，

则$|b_n-a_n|=|\frac{1}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n-1}}|=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1$，$n\in N^*$，

可得数列$\{b_n\}$与$\{a_n\}$接近；

（2）$\{b_n\}$是一个与$\{a_n\}$接近的数列，

可得$a_n-1\le b_n\le a_n+1$，

数列$\{a_n\}$的前四项为：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=8$，

可得$b_1\in[0,2]$，$b_2\in[1,3]$，$b_3\in[3,5]$，$b_4\in[7,9]$，

可能b_1与b_2相等，b_2与b_3相等，但b_1与b_3不相等，b_4与b_3不相等，

集合$M=\{x|x=b_i,i=1,2,3,4\}$，

M中元素的个数m=3或4；

（3）$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，若存在数列$\{b_n\}$满足：$\{b_n\}$与$\{a_n\}$接近，

可得$a_n=a_1+(n-1)d$，

①若$d>0$，取$b_n=a_n$，可得$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n=d>0$，

则b_2-b_1，b_3-b_2，…，$b_{201}-b_{200}$中有200个正数，符合题意；

②若$d=0$，取$b_n=a_1-\frac{1}{n}$，则$|b_n-a_n|=|a_1-\frac{1}{n}-a_1|=\frac{1}{n}<1$，$n\in N^*$，

可得$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$，

则b_2-b_1，b_3-b_2，…，$b_{201}-b_{200}$中有200个正数，符合题意；

③若$-2<d<0$，可令$b_{2n-1}=a_{2n-1}-1$，$b_{2n}=a_{2n}+1$，

则$b_{2n}-b_{2n-1}=a_{2n}+1-(a_{2n-1}-1)=2+d>0$，

则b_2-b_1，b_3-b_2，…，$b_{201}-b_{200}$中恰有100个正数，符合题意；

④若$d\le-2$，若存在数列$\{b_n\}$满足：$\{b_n\}$与$\{a_n\}$接近，

即为$a_n-1\le b_n\le a_n+1$，$a_{n+1}-1\le b_{n+1}\le a_{n+1}+1$，

可得$b_{n+1}-b_n\le a_{n+1}+1-(a_n-1)=2+d\le 0$，

b_2-b_1，b_3-b_2，…，$b_{201}-b_{200}$中无正数，不符合题意.

综上可得，d的范围是$(-2,+\infty)$.

【点评】本题考查新定义“接近”的理解和运用，考查等差数列和等比数列的定义和通项公式的运用，考查分类讨论思想方法，以及运算能力和推理能力，属

于难题.