2022年全国普通高等学校春季招生统一考试

上海　数学试卷

考生注意:

1. 本试卷共4页，21道试题，满分150分，考试时间120分钟.

2. 本考试分设试卷和答题纸，试卷包括试题与答题要求，作答必须涂(选择题)或写(非选择题)在答题纸上，在试卷上作答一律不得分.

3. 答卷前，务必用黑色钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、班级、准考证号.

一、填空题(本大题共有12题，满分54分)考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，第1题至第6题每个空格填对得4分，第7题至第12题每个空格填对得5分，否则一律得零分.

1. 已知复数z=2+i　(其中i 为虚数单位),则z= ________

【解析】根据定义，　Z=2-i.

2. 已知区间A=(-1,2)B=(1,3),　则A∩B= ________

【解析】(1,2).

3. 求不等式$\frac{x-1}{x}<0$的解集为________

【解析】(0,1).

4. 已知角α满足:　tanα=3,　则t$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$________.

【解析】$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan(\alpha)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan(\alpha)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-2$.

5. 设二元一次方程组$\begin{cases}x+my=2\\mx+16y=8\end{cases}$,若方程组有无穷组解，则m 的值为________

【解析】只需$D=D_2=D_,=0$,　即$\frac{1}{m}=\frac{2}{8}=\frac{m}{16}$, 从而m=4.

6. 已知函数$f(x)=x^3$,$f^{-1}(x)$　为 f(x) 的反函数，则f'(27)=　________

【解析】 $f(x)=x^3=27=x=3$,　所以f'(27)=3.

7. 已知有二项式$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{12}$,其展开式的则$x^4$　前的系数为________

【解析】展开通项为$C_{12}^{10}\cdot\left(x^3\right)^{12-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r$，需3(12-r)-r=-4，　则r=10，即$C_{12}^{10}\cdot\frac{1}{x^4}$，系数为66.

8. 在三角形ABC中，AB=2,AC=3，　$A=\frac{\pi}{3}$，则AABC外接圆的半径为__________

【解析】利用余弦定理，得 |BCF= |ABP+ |ACP-2 |AB |- |AC |-cosA　代入可得

$|BC|=\sqrt{2^2+3^2-2\times2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{7}$，再利用正弦定理，得！$2R=\frac{BC}{\sin A}=\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

从而外接圆半径$R=\frac{\sqrt{21}}{3}$

9. 设由数字1、2、3、4组成上各个位置上数字不能重复的四位数，则大于2134的四位数的个数为__________

【解析】显然，首位只为2或3或4，当首位为3或4时，均符合要求，共2×F³=12 种当

首位为2时$\begin{cases}\text{首位为3或4均符合要求，共}2\times P_2^2=4\text{ 种}\\ \text{首位为1时，只有2143一种情况}\end{cases}$综上，共12+4+1=17种.

10. 已知直角三角形ABC，　且AC=BC=2，M　为边AC 的中点，若P 在边AB 上运动(点P可与A,B 重合)，则MP·CP 的最小值为__________

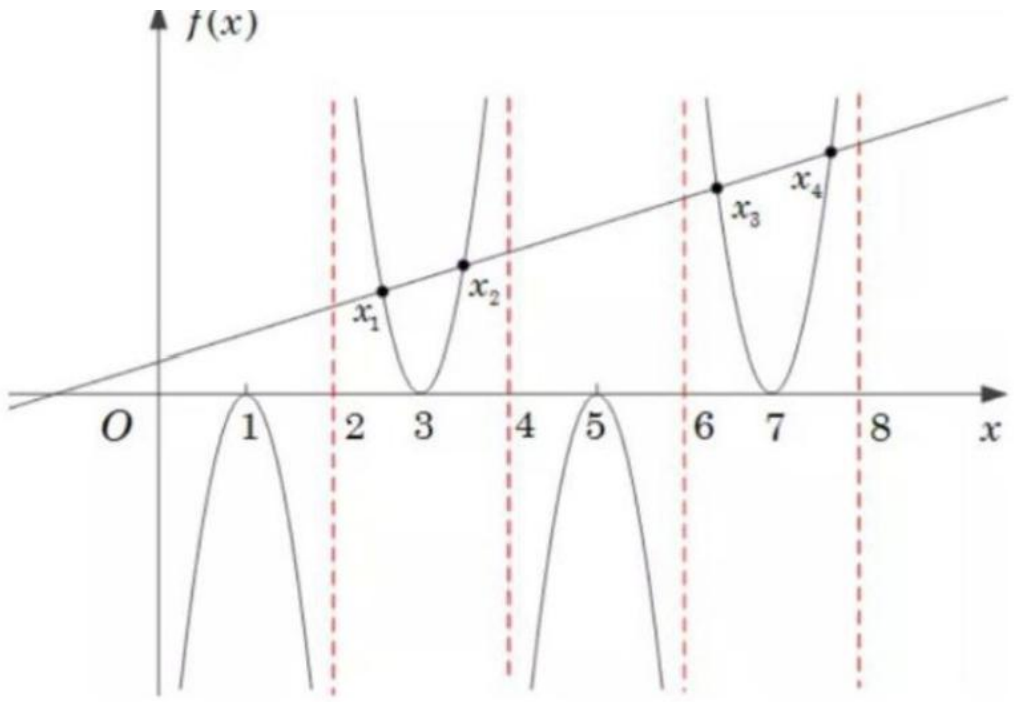
【解析】建系可得各点坐标为C(0,0),B(2,0),A(2,0),M(2,0),P(x,2-x)，其中0≤x≤2，　则$\overline{\text{MP}}$=(x,1-x),CP=(x,2-x)，　从而MP.CP=x²+(1-x)(2-x)=2x²-3x+3，　其最小值为$\frac{15}{8}$

11. 已知双曲线T:$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$，任取双曲线T右支上两个不相同的点P(x,y₁),P(x₂,y₂)，　都有xx,-yy,>0　成立，则a 的取值范围是________

【解析】设B(x₂-y₂)　显然B也在右支上，转化为OF·OF>0 恒成立，即角小于90° 利用渐近线和a≥1

12. 已知奇函数f(x) 在xe(0,1)时的解析式为f(x)=lnx，　且f(x) 关于x=1对称，设方程f(x)=x+1的正数根从小到大依次记为x, x₂⋯, x，则$\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=$__________

【解析】如图所示，答案为2.



二、选择题(本大题共有4题，满分20分)每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分.

13. 以下函数的定义域为R的 是（　　）

A. $y=x^{-1}$　　　B. $y=x^{-\frac{1}{2}}$　　　C. $y=x^{\frac{1}{3}}$　　　D. $y=x^{\frac{1}{2}}$

【答案】C

14. 已知实数a,b,c,d 满足： a>b>c>d,　　则下列选项正确的是（　　）

A.　a+d>b+c　　　B.　a+c>b+d

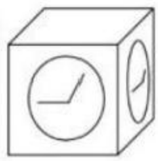
C.　ad>bc　　　D.　ab>cd

【答案】B

【解析】

对于A，可举反例：3>2>1>-1；B 显然是正确的；　对于C，可举反例：2>1>-2>-3.

15. 如图所示，设上海海关楼的钟楼为正方体，且钟楼的四个侧面均有时钟悬挂. 在0点到12点中时针与分针的转动中(包括0点，但不包括12点)，相邻两面的时针出现两两相互垂直的情况的次数为（　）



A.0　　　B.2

C.4　　　　　　　　　　D.12

【答案】B

【解析】根据对称性，不妨考虑0, 2, 3点的情况，可结合垂直相关理论，或者建立空间向量，均可判断出只有3点和9点是垂直的，共2次.

16. 设{a,}为等比数列，设S,和T,分别为{a.}的前n项和与前n项积，则下列命题正确的是：

（　　）

A. 若S>Smu,　　则{S,}为递增数列　　B. 若T>T,　　　则{T}为递增数列

C. 若{S} 为递增数列，则a202≥a2021　　D. 若{T}为递增数列，则a₂z≥a22

【答案】D

【解析】

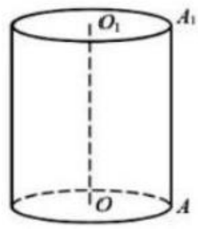
对于A,a2o₂≥0,　　不正确；对于B,a₁=-2,q=2,T22>0,T₂<0　　　不正确；

对于C,S-S=a>0,　　　　不正确；对于D,　$a_n>0,\frac{T_{n+1}}{T_n}=a_{n+1}>1$，则q≥1，　正 确

三、解答题(本大题共有5题，满分76分)解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17. (本题满分14分)本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

设有底面半径为1的圆柱OO,AA,为圆柱的母线.



(1)若AA=4,　设M为AA,的中点，求直线MO与圆柱上底面所成角；

(2)若过OO,的轴截面为正方形，求圆柱OO,的侧面积和体积

【解析】

(1)　$\frac{MA}{AO}=\frac{2}{1}=\tan\alpha\Rightarrow\theta=\arctan2$；

(2)AA=α　　侧面积Sm=2π×1×2=4π,　　体积V=π×1²×2=2π.

18. (本题满分14分)本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

设有无穷数列{a.},记{a　}的前n项和为S,　其中a₂=1

(1)若{a,} 为等比数列，且S₂=3,　求ミ$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

⑵若$\{a_n\}$为等差数列，且$S_{2n}\geq n$，求公差d的取值范围.

【解析】

（1）$a_2=1,S_2=a_1+a_2=3\Rightarrow a_1=2\Rightarrow q=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{2}}=4$；

⑵ $S_{2n}=\dfrac{\left(a_1+a_{2n}\right)2n}{2}=n\left(a_2+a_{2n-1}\right)=n[1+1+(2n-3)d]\geq n\Rightarrow(2n-3)d\geq-1$，

当n=1=d≤1;　　当 $n\geq2,d\geq\dfrac{-1}{2n-3}\Rightarrow d\geq0\Rightarrow d\in[0,1]$.

19.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

上海某地区想设计建造一个自然保护区，如图所示，在一块矩形绿地ABCD中（其中AB为30米，AD为15米），过道EF将其分为两个主要区域(E,F分别是AB,CD边上动点)，监测区为以D为圆心，AD为半径的四分之一圆，古树区为四边形BEFC，且EF与圆弧相切，记切点为G.

(1)若∠ADE=20°，求EF的长(结果精确到0.1)；

(2)E点在线段AB上何处时，才能使古树区的面积最大，并求出最大值(结果精确到0.01)，

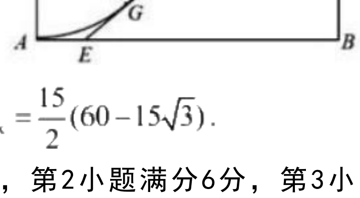
如图所示：DG⊥EF,FH⊥AB

【解析】

设角∠DFE=θ，　则 $DF=\dfrac{DG}{\sin\theta}=\dfrac{15}{\sin\theta},FC=30-\dfrac{15}{\sin\theta}$，　$EH=\dfrac{15}{\tan\theta}=\dfrac{15\cos\theta}{\sin\theta}$，

则 $S_{(圆)}=\dfrac{1}{2}(FC+BE)BC=\dfrac{15}{2}(2FC+EH)=\dfrac{15}{2}\left(60-\dfrac{30}{\sin\theta}+\dfrac{15\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$=\dfrac{15}{2}\left[60-15\left(\dfrac{2-\cos\theta}{8\sin\theta}\right)\right]$



令 $f(\theta)=\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}=m\Rightarrow2-\cos=m\sin\theta$，

2=cosθ+msin0=√m²+1sin0+φ≤√m²+1→m≥√3,　　则 $S_{\max}=\dfrac{15}{2}(60-15\sqrt{3})$.

20.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分.

椭圆T:: $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$,A,B　分别为椭圆的左顶点和下顶点，且直线x=a　上有两个不相同的点C,D(C　是第一象限的点)

（1）设F 是椭圆T 的右焦点，且$\angle AFB=\frac{\pi}{6}$, 求椭圆T 的标准方程;

(2)若C,D 两点的纵坐标分别为2和1,判断：直线BC 与AD 的交点是否在椭圆r 上，并说明理由;

(3)设直线AD与直线BC 交椭圆T 于P,Q 两点，且P,Q 关于原点对称，求 |CD| 的最小值.

【解析】

(1)　$\angle AFB=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle OFB=\frac{\pi}{8}$　IOB=1　　∴ |OF√3,c=√3,b=1,　$\frac{x^2}{4}+y^2=1$;

(3)　$l_{AD}:y=\frac{x}{2a}+\frac{1}{2}$　$l_{BC}:y=\frac{3x}{a}-1$　∴　$l_{AD}:y=\frac{y_0}{x_0+a}(x+a)$,

令 $x=a\Rightarrow y=\frac{2ay_0}{x_0+a}$; $l_{BC}:y+1=\frac{-y_0+1}{-x_0}$,

令 $x=a\Rightarrow y=\frac{ay_0-a-x_0}{x_0}$.

所以 $|CD|=\left|\frac{2ay_0}{x_0+a}-\frac{ay_0-a-x_0}{x_0}\right|$,　设xo=acosθ;yo=sinθ,

代入得：$|CD|=\left|\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}-\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+1\right|=\left|2\tan\frac{\theta}{2}+\frac{2}{1+\tan\frac{\theta}{2}}-2\right|$　(注意：$\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$),

$|CD|=\left|2\tan\frac{\theta}{2}+\frac{2}{1+\tan\frac{\theta}{2}}\right|\geq 6$,

当且仅当$\tan\frac{\theta}{2}=-2$时取等号;

21.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分.

在定义域为R 的函数f(x)上，定义下面两个变换：Φ:f(x)→f(x)-f(x-1),

ø:f(x)→|f(x+1)-f(x)|,　　　其中t>0

(1)若t=1,f(x)=2*,　对 f(x)进行Φ变换后得到函数g(x)，求方程g(x)=2 的解;

（2）若f(x)=x²，对f(x)进行　变换后得到函数h(x),解不等式：h(x)≥f(x);

⑶已知定义在R上的函数f(x)，在(−x,0)上单调递增，对函数f(x)先作φ变换再做w变换得到函数h(x)，对函数f(x)先作 变换再做φ变换得到函数$h_2(x)$，若对任意t>0恒有h(x)=$h_2(x)$，证明：函数f(x)在R上单调递增.

【解析】(1) $g(x)=2^4-2^{-1}=2=x=2$,

(2)$|(x+1)^2-x^2|=|2x+^2|\geq x^2$,

当$x<-\frac{t}{2}$时$2x+t^2\geq x^2=x\in[(1-\sqrt{2})r,(1+\sqrt{2})]$,

综上x∈[(1- √2)t, (1+ √2)U{-};

(3)h(x)=[f(x+t)-f(x)]-[f(x)-f(x-t)]|,

$h_2(x)$=|f(x+1)-f(x)|- 1f(x)-f(x- 1)|,

|A-BHA|-|B| 当且仅当AB≥0 且 |A|B| 时成立，进一步，若B>0,

则必有A>B>0,

所以若f(x)-f(x- 1)>0, 必有f(x+t)-f(x)>f(x)-f(x- 1)>0(△);

(反证法)假设存在$x_1<x_2$，满足$f(x_1)\geq f(x_2)$，令$t=x_2-x$，显然t>0,

此时必存在keN，满足$x_2-kt<0$，由$h(x_2-k)=h_2(x_2-kr)$，知

$[f(x_2-(k-1)r)-f(x_2-kr)]-[f(x_2-kr)-f(x_1-kr)]$

$=|f(x_2-(k-1))-f(x_2-kr)\}-|f(x_2-kr)-f(x_1-k)|$,

而由于$0>x_2-kt>x_1-kt$,f(x) 在(−x,0)上递增，

知$f(x_2-kr)-f(x_1-kt)>0$,

根据(△)，知$f(x_2-(k-1)r)-f(x_2-kr)>0$,

再由$h_1(x_2-(k-1)t)=h_2(x_2-(k-1)r)$,

知$f(x_2-(k-2)r)-f(x_2-(k-1))>0$,

依次类推，最终得到$f(x_2)-f(x_1)>0$,

与假设矛盾，命题得证.

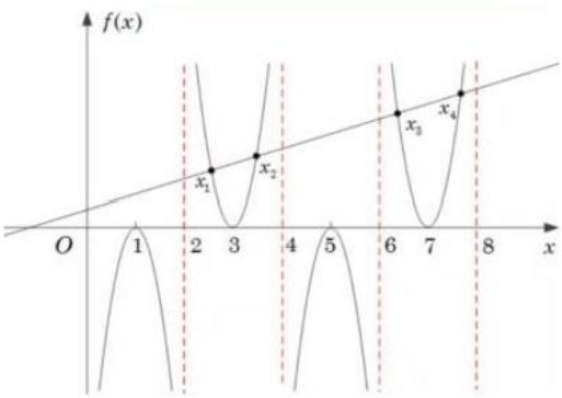
题目：已知奇函数f(x)在xe(0,1)时的解析式为f(x)=lnx，且f(x)关于x=1 对称.
设方程 f(x)=x+1 的所有正实数解从小到大排列为x，x₂，，x⋯，则

$\lim\limits_{x\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=$ ________.

证明：先证f(x)以4为周期，由条件

f(-x)=-f(x), f(a+x)=f(1-x), 则

f(x+4)=f(-x-2)=-f(x+2)=-f(-x)=f(x).



易知4n-2<x₂i<4n-1<x₂<4n, neN'.

设xm₁=4n-1+5, , 0<s, <1; x₂=4n-1, 0<t, <1.

0=f(xm)-x₂1- 1=f(4n-2+s,)-(4n-2+s,)-1

=f(2+s,)-s-(4n-1)=f(-s,)-s,-(4n-1)

=-f(,)-s,-(4n-1)=-lnsa-sa-(4n-1).

Ins,=-s,-(4n-1)<-(4n-1),

故0<s, <e(4-°,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}[x_{2n-1}-2(2n-1)]=0$

0=f(x₂)-x₂- 1=f(4n-t,)-(4n-1,)-1

=f(-t)+t,-(4n+1)=-f(,)+t,-(4n+1)

=-Int,+1,-(4n+1).

Int,=t,-(4n+1)<-4n,

故0<t, <e″,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}-2\cdot 2n)=0$

综上可知， $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-2n)=0$

于是

$\lim\limits_{x\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim\limits_{x\to\infty}[(x_{n+1}-2(n+1))-(x_n-2n)+2]=2$