绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学（文史类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利

第Ⅰ卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2. 本卷共8小题，每小题5分共40分。

参考公式：

- 如果事件A，B互斥，那么$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- 圆柱的体积公式$V=Sh$，其中S表示圆柱的底面面积，h表示圆柱的高
- 棱锥的体积公式$V=\frac{1}{3}Sh$，其中S表示棱锥的底面面积，h表示棱锥的高

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设集合$A=\{-1,1,2,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{x\in R\,|\,1\leq x<3\}$，则$(A\cap C)\cup B=$

A. {2}　　B. {2，3}　　C. {-1，2，3}　　D. {1，2，3，4}

2.设变量x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant -1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$，则目标函数$z=-4x+y$的最大值为

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 6

3.设$x\in R$，则“$0<x<5$”是“$|x-1|<1$”的

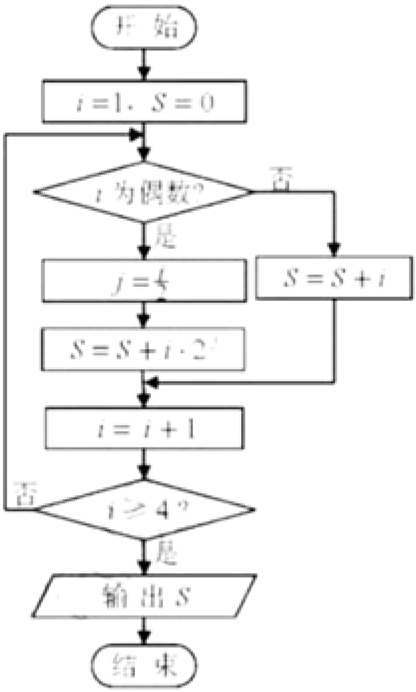
A. 充分而不必要条件

B 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4.阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出S的值为



A. 5　　B. 8　　C. 24　　D. 29

5.已知$a=\log_2 7$，$b=\log_3 8$，$c=0.3^{0.2}$，则a,b,c的大小关系为

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

6.已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线为l. 若与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的两条渐近线分别交于点$A$和点$B$，且$|AB|=4|OF|$（$O$为原点），则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

7.已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\,(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$是奇函数，且$f\left(x\right)$的最小正周期为$\pi$，将$y=f\left(x\right)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为$g\left(x\right)$. 若

$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=$

A. -2　　　　B. $-\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D. 2

8.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a\quad(a\in R)$ 恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围为

A. $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$　　　　B. $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$　　　　C. $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\cup\{1\}$　　　　D. $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\cup\{1\}$

绝密★启用前

第Ⅱ卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共12小题，共110分。

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

9. i 是虚数单位，则 $\left|\dfrac{5-i}{1+i}\right|$ 的值为__________.

10. 设 $x\in R$，使不等式 $3x^2+x-2<0$ 成立的 x 的取值范围为__________.

11. 曲线 $y=\cos x-\dfrac{x}{2}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为__________.

12.已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为__________.

13. 设 $x>0$，$y>0$，$x+2y=4$，则 $\dfrac{(x+1)(2y+1)}{xy}$ 的最小值为__________.

14. 在四边形 $ABCD$ 中，$AD\,//\,BC$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=5$，$\angle A=30^\circ$，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE=BE$，则 $\overline{BD}\cdot\overline{AE}=$__________.

三. 解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.2019年，我国施行个人所得税专项附加扣除办法，涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除. 某单位老、中、青员工分别有 72,108,120 人，现采用分层

抽样的方法，从该单位上述员工中抽取25人调查专项附加扣除的享受情况.

（Ⅰ）应从老、中、青员工中分别抽取多少人？

（Ⅱ）抽取的25人中，享受至少两项专项附加扣除的员工有6人，分别记为A,B,C,D,E,F.享受情况如右表，其中“○”表示享受，“×”表示不享受.现从这6人中随机抽取2人接受采访.

员工 项目	A	B	C	D	E	F
子女教育	○	○	×	○	×	○
继续教育	×	×	○	×	○	○
大病医疗	×	×	×	○	×	×
住房贷款利息	○	○	×	×	○	○
住房租金	×	×	○	×	×	×
赡养老人	○	○	×	×	×	○

（i）试用所给字母列举出所有可能的抽取结果；

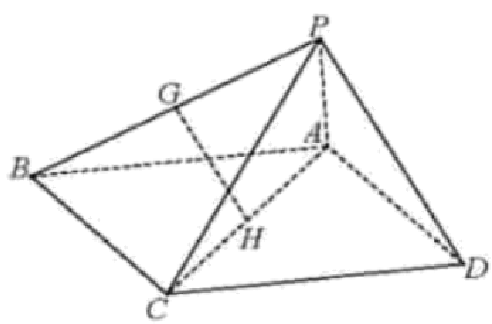
（ii）设M为事件“抽取的2人享受的专项附加扣除至少有一项相同”，求事件M发生的概率.

16. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a,b,c.已知$b+c=2a$，$3c\sin B=4a\sin C$.

（Ⅰ）求$\cos B$的值；

（Ⅱ）求$\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$\triangle PCD$为等边三角形，平面$PAC\perp$平面PCD，$PA\perp CD$，$CD=2$，$AD=3$，



（Ⅰ）设G，H分别为PB，AC的中点，求证：$GH //$ 平面PAD；

（Ⅱ）求证：$PA \perp$ 平面PCD；

（Ⅲ）求直线AD与平面PAC所成角的正弦值.

18. 设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，公比大于0，已知$a_1 = b_1 = 3$，$b_2 = a_3$ ，$b_3 = 4a_2 + 3$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{c_n\}$满足$c_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数}, \\ b_{\frac{n}{2}} & n\text{为偶数}, \end{cases}$ 求$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n} \quad \left(n \in N^*\right)$.

19.

设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(a > b > 0)$的左焦点为$F$，左顶点为$A$，顶点为$B$. 已知$\sqrt{3}\,|OA| = 2\,|OB|$（$O$为原点）

.

（Ⅰ）求椭圆的离心率；

（Ⅱ）设经过点F且斜率为$\dfrac{3}{4}$的直线l与椭圆在x轴上方的交点为P，圆C同时与x轴和直线l相切，圆心C在直线$x = 4$上，且$OC // AP$，求椭圆的方程.

20. 设函数$f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$，其中$a \in R$.

（Ⅰ）若$a \le 0$，讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（Ⅱ）若$0 < a < \dfrac{1}{e}$，

（i）证明$f\left(x\right)$恰有两个零点

（ii）设x为$f\left(x\right)$的极值点，x_1为$f\left(x\right)$的零点，且$x_1 > x_0$，证明$3x_0 - x_1 > 2$.

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$ ， $B=\{2,3,4\}$ ， $C=\{x\in R\,|\,1\leqslant x<3\}$ ，则 $(A\cap C)\cup B=$

A. {2}　　　　B. {2，3}　　　　C. {-1，2，3}　　　　D. {1，2，3，4}

【答案】D

【解析】

【分析】

先求 $A\cap B$ ，再求 $(A\cap C)\cup B$ 。

【详解】因为 $A\cap C=\{1,2\}$ ，

所以 $(A\cap C)\cup B=\{1,2,3,4\}$.

故选D。

【点睛】集合的运算问题，一般要先研究集合中元素的构成，能化简的要先化简，同时注意数形结合，即借助数轴、坐标系、韦恩图等进行运算.

2.设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant -1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ ，则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 5　　　　D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】

画出可行域，用截距模型求最值。

【详解】已知不等式组表示的平面区域如图中的阴影部分。

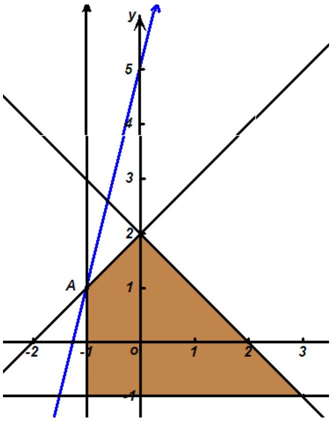
目标函数的几何意义是直线 $y=4x+z$ 在 y 轴上的截距，

故目标函数在点 A 处取得最大值。

由 $\begin{cases}x-y+2=0,\\ x=-1\end{cases}$ ，得 $A(-1,1)$ ，

所以 $z_{\max}=-4\times(-1)+1=5$ 。

故选C。



【点睛】线性规划问题，首先明确可行域对应的是封闭区域还是开放区域，分界线是实线还是虚线，其次确定目标函数的几何意义，是求直线的截距、两点间距离的平方、直线的斜率、还是点到直线的距离等等，最后结合图形确定目标函数最值或范围．即：一画，二移，三求．

3.设$x\in R$，则“$0<x<5$”是“$|x-1|<1$”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】

求出$|x-1|<1$的解集，根据两解集的包含关系确定.

【详解】$|x-1|<1$等价于$0<x<2$，故$0<x<5$推不出$|x-1|<1$；

由$|x-1|<1$能推出$0<x<5$。

故“$0<x<5$”是“$|x-1|<1$”的必要不充分条件。

故选B。

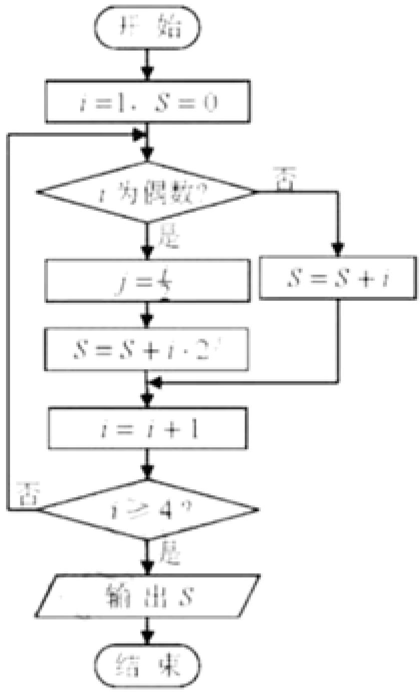
【点睛】充要条件的三种判断方法：

(1)定义法：根据$p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$进行判断；

(2)集合法：根据由p，q成立的对象构成的集合之间的包含关系进行判断；

(3)等价转化法：根据一个命题与其逆否命题的等价性，把要判断的命题转化为其逆否命题进行判断．这个方法特别适合以否定形式给出的问题．

4.阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



A. 5　　B. 8　　C. 24　　D. 29

【答案】B

【解析】

【分析】

根据程序框图，逐步写出运算结果。

【详解】$S=1,i=2\to$ $j=1,S=1+2\cdot 2^1=5,i=3$ $S=8,i=4$，

结束循环，故输出8。

故选B。

【点睛】解决此类型问题时要注意：①要明确是当型循环结构，还是直到型循环结构，根据各自的特点执行循环体；②要明确图中的累计变量，明确每一次执行循环体前和执行循环体后，变量的值发生的变化；③要明确循环体终止的条件是什么，会判断什么时候终止循环体．

5.已知 $a=\log_2 7$，$b=\log_3 8$，$c=0.3^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $c<b<a$

B. $a<b<c$

C. $b<c<a$

D. $c<a<b$

【答案】A

【解析】

【分析】

利用利用$0,1,2$等中间值区分各个数值的大小。

【详解】$c=0.3^{0.2}<0.3^{0}=1$；

$\log_2 7>\log_2 4=2$；

$1<\log_3 8<\log_3 9=2$。

故$c<b<a$。

故选A。

【点睛】利用指数函数、对数函数的单调性时要根据底数与1的大小区别对待。

6.已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线为l. 若与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的两条渐近线分别交于点$A$和点$B$，且$|AB|=4|OF|$（$O$为原点），则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】

只需把$\left|AB\right|=4\left|OF\right|$用$a,b,c$表示出来，即可根据双曲线离心率的定义求得离心率。

【详解】l的方程为$x=-1$，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，

故得$A(-1,\dfrac{b}{a}),B(-1,-\dfrac{b}{a})$，

所以$\left|AB\right|=\dfrac{2b}{a}$，$\dfrac{2b}{a}=4$，$b=2a$，

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{5}$。

故选D。

【点睛】双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

7.已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$是奇函数，且$f\left(x\right)$的最小正周期为$\pi$，将$y=f\left(x\right)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为$g\left(x\right)$. 若$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$

A. -2　　B. $-\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】

只需根据函数性质逐步得出A,ω,φ值即可。

【详解】$f(x)$为奇函数，可知$f(0)=A\sin\varphi=0$，

由$\left|\varphi\right|<\pi$可得$\varphi=0$；

把其图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍，得$g(x)=A\sin\frac{1}{2}\omega x$，

由$g(x)$的最小正周期为2π可得$\omega=2$，

由$g(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，可得$A=2$，

所以$f(x)=2\sin 2x$，$f(\frac{3\pi}{8})=2\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}$。

故选C。

8.已知函数$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1,\\ \frac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$若关于$x$的方程$f(x)=-\frac{1}{4}x+a\quad(a\in R)$恰有两个互异的实数解，则$a$的取值范围为

A. $\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$　　B. $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$　　C. $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$　　D. $\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$

【答案】D

【解析】

【分析】

画出 $f\left(x\right)$ 图象及直线 $y=-\frac{1}{4}x+a$，借助图象分析。

【详解】如图，当直线 $y=-\frac{1}{4}x+a$ 位于 B 点及其上方且位于 A 点及其下方，

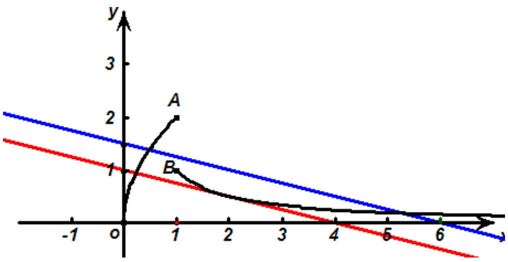
或者直线 $y=-\frac{1}{4}x+a$ 与曲线 $y=\frac{1}{x}$ 相切在第一象限时符合要求。

即 $1\le -\frac{1}{4}+a\le 2$，即 $\frac{5}{4}\le a\le \frac{9}{4}$，

或者 $-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{4}$，得 $x=2$， $y=\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\times 2+a$，得 $a=1$，

所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{5}{4},\frac{9}{9}\right]\cup\left\{1\right\}$。

故选D。



【点睛】根据方程实根个数确定参数范围，常把其转化为曲线交点个数，特别是其中一条为直线时常用此法。

绝密★启用前

第Ⅱ卷

注意事项：

1. **用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。**
2. **本卷共12小题，共110分。**

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

9. i 是虚数单位，则 $\left|\frac{5-i}{1+i}\right|$ 的值为__________.

【答案】$\sqrt{13}$

【解析】

【分析】

先化简复数，再利用复数模的定义求所给复数的模。

【详解】解法一：$\left|\frac{5-i}{1+i}\right|=\left|\frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right|=|2-3i|=\sqrt{13}$。

解法二：$\left|\frac{5-i}{1+i}\right|=\frac{|5-i|}{|1+i|}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}}=\sqrt{13}$。

【点睛】所以解答与复数概念或运算有关的问题时，需把所给复数化为代数形式，即$a+b\mathrm{i}(a$，$b\in\mathbf{R})$的形式，再根据题意求解.

10. 设$x\in R$，使不等式$3x^2+x-2<0$成立的x的取值范围为__________.

【答案】$(-1,\frac{2}{3})$

【解析】

【分析】

通过因式分解，解不等式。

【详解】$3x^2+x-2<0$，

即$(x+1)(3x-2)<0$，

即$-1<x<\frac{2}{3}$，

故x的取值范围是$(-1,\frac{2}{3})$。

【点睛】解一元二次不等式的步骤：(1)将二次项系数化为正数；(2)解相应的一元二次方程；(3)根据一元二次方程的根，结合不等号的方向画图；(4)写出不等式的解集．容易出现的错误有：①未将二次项系数化正，对应错标准形式；②解方程出错；③结果未按要求写成集合.

11. 曲线$y=\cos x-\frac{x}{2}$在点$\left(0,1\right)$处的切线方程为__________.

【答案】$x+2y-2=0$

【解析】

【分析】

利用导数值确定切线斜率，再用点斜式写出切线方程。

【详解】$y'=-\sin x-\frac{1}{2}$，

当$x=0$时其值为$-\frac{1}{2}$，

故所求的切线方程为$y-1=-\frac{1}{2}x$，即$x+2y-2=0$。

【点睛】曲线切线方程的求法：

(1)以曲线上的点$(x_0，f(x_0))$为切点的切线方程的求解步骤：

①求出函数$f(x)$的导数$f'(x)$；

②求切线的斜率$f'(x_0)$；

③写出切线方程$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，并化简．

(2)如果已知点$(x_1，y_1)$不在曲线上，则设出切点$(x_0，y_0)$，解方程组$\begin{cases}y_0=f(x_0)\\ \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=f'(x_0)\end{cases}$得切点$(x_0，y_0)$，进而确定切线方程．

12.已知四棱锥的底面是边长为$\sqrt{2}$的正方形，侧棱长均为$\sqrt{5}$.若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为__________.

【答案】$\frac{\pi}{4}$.

【解析】

【分析】

根据棱锥的结构特点，确定所求的圆柱的高和底面半径。

【详解】四棱锥的高为$\sqrt{5-1}=2$，

故圆柱的高为1，圆柱的底面半径为$\frac{1}{2}$，

故其体积为$\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1=\frac{\pi}{4}$。

【点睛】圆柱的底面半径是棱锥底面对角线长度的一半、不是底边棱长的一半。

13. 设$x>0$，$y>0$，$x+2y=4$，则$\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}$的最小值为__________.

【答案】$4\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】

把分子展开化为$2xy+6$，再利用基本不等式求最值。

【详解】$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}\geq\frac{2\sqrt{2xy\cdot 6}}{\sqrt{xy}}=4\sqrt{3}$,

等号当且仅当$xy=3$，即$x=3, y=1$时成立。

故所求的最小值为$4\sqrt{3}$。

【点睛】使用基本不等式求最值时一定要验证等号是否能够成立。

14. 在四边形$ABCD$中，$AD\,//\,BC$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=5$，$\angle A=30^{\circ}$，点E在线段CB的延长线上，且$AE=BE$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$__________.

【答案】-1.

【解析】

【分析】

可利用向量的线性运算，也可以建立坐标系利用向量的坐标运算求解。

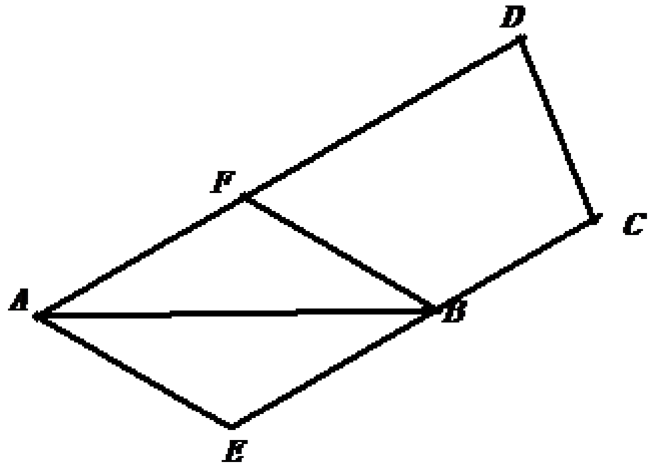
【详解】详解：解法一：如图，过点B作AE的平行线交AD于F，

因为$AE=BE$，故四边形$AEBF$为菱形。

因为$\angle BAD=30^{\circ}$，$AB=2\sqrt{3}$，所以$AF=2$，即$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.

因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$,

所以$\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\bullet(\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD})=\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}^2=\frac{7}{5}\times 2\sqrt{3}\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}-12-10=-1$.



解法二：建立如图所示的直角坐标系，则 $B(2\sqrt{3},0)$，$D(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2})$。

因为 $AD\parallel BC$，$\angle BAD=30^\circ$，所以 $\angle CBE=30^\circ$，

因为 $AE=BE$，所以 $\angle BAE=30^\circ$，

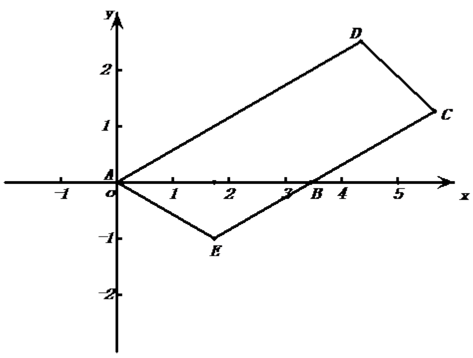
所以直线 BE 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，其方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2\sqrt{3})$，

直线 AE 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，其方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$。

由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2\sqrt{3}), \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$ 得 $x=\sqrt{3}$，$y=-1$，

所以 $E(\sqrt{3},-1)$。

所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2})\cdot(\sqrt{3},-1)=-1$。



【点睛】平面向量问题有两大类解法：基向量法和坐标法，在便于建立坐标系的问题中使用坐标方法更为方便。

三. 解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.2019年，我国施行个人所得税专项附加扣除办法，涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除. 某单位老、中、青员工分别有$72,108,120$人，现采用分层抽样的方法，从该单位上述员工中抽取25人调查专项附加扣除的享受情况.

（Ⅰ）应从老、中、青员工中分别抽取多少人？

（Ⅱ）抽取的25人中，享受至少两项专项附加扣除的员工有6人，分别记为A,B,C,D,E,F. 享受情况如右表，其中“○”表示享受，“×”表示不享受. 现从这6人中随机抽取2人接受采访.

员工 项目	A	B	C	D	E	F
子女教育	○	○	×	○	×	○
继续教育	×	×	○	×	○	○
大病医疗	×	×	×	○	×	×
住房贷款利息	○	○	×	×	○	○
住房租金	×	×	○	×	×	×
赡养老人	○	○	×	×	×	○

（i）试用所给字母列举出所有可能的抽取结果；

（ii）设M为事件“抽取的2人享受的专项附加扣除至少有一项相同”，求事件M发生的概率.

【答案】（Ⅰ）6人，9人，10人；

（Ⅱ）（i）见解析；（ii）$\frac{11}{15}$.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）根据题中所给的老、中、青员工人数，求得人数比，利用分层抽样要求每个个体被抽到的概率是相等

的，结合样本容量求得结果；

（II）（I）根据6人中随机抽取2人，将所有的结果一一列出；

（ii）根据题意，找出满足条件的基本事件，利用公式求得概率.

【详解】（I）由已知，老、中、青员工人数之比为$6:9:10$，

由于采取分层抽样的方法从中抽取25位员工，

因此应从老、中、青员工中分别抽取6人，9人，10人.

（II）（i）从已知的6人中随机抽取2人的所有可能结果为

$\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,E\},\{A,F\},\{B,C\},\{B,D\},\{B,E\},\{B,F\},\{C,D\},\{C,E\},\{C,F\}$,

$\{D,E\},\{D,F\},\{E,F\}$,共15种；

（ii）由表格知，符合题意的所有可能结果为$\{A,B\},\{A,D\},\{A,E\},\{A,F\},\{B,D\},\{B,E\},\{B,F\}$,

$\{C,E\},\{C,F\},\{D,F\},\{E,F\}$,共11种，

所以，时间M发生的概率$P(M)=\dfrac{11}{15}$.

【点睛】本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型即其概率计算公式等基本知识，考查运用概率知识解决简单实际问题的能力.

16. 在$\vee ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a,b,c. 已知$b+c=2a$，$3c\sin B=4a\sin C$.

（Ⅰ）求$\cos B$的值；

（Ⅱ）求$\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值.

【答案】(Ⅰ) $-\dfrac{1}{4}$；

(Ⅱ) $-\dfrac{3\sqrt{5}+7}{16}$.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意结合正弦定理得到a,b,c的比例关系，然后利用余弦定理可得$\cos B$的值

(Ⅱ)利用二倍角公式首先求得$\sin 2B,\cos 2B$的值，然后利用两角和的正弦公式可得$a=2$的值.

【详解】(Ⅰ)在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得$b\sin C=c\sin B$，

又由$3c\sin B=4a\sin C$，得$3b\sin C=4a\sin C$，即$3b=4a$.

又因为$b+c=2a$，得到$b=\frac{4}{3}a$，$c=\frac{2}{3}a$.

由余弦定理可得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\frac{2}{3}a}=-\frac{1}{4}$.

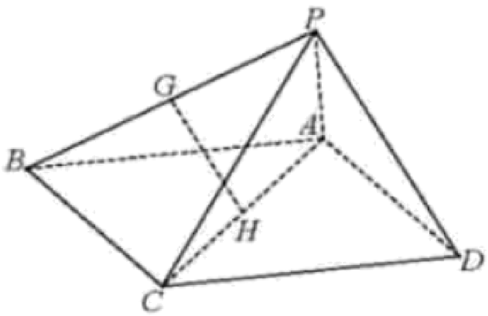
(Ⅱ)由(Ⅰ)可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

从而$\sin 2B=2\sin B\cos B=-\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=-\frac{7}{8}$.

故$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$.

【点睛】本题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识.考查计算求解能力.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$\triangle PCD$为等边三角形，平面$PAC\perp$平面PCD，$PA\perp CD$，$CD=2$，$AD=3$，



（Ⅰ）设G，H分别为PB，AC的中点，求证：GH//平面PAD；

（Ⅱ）求证：$PA\perp$平面PCD；

（Ⅲ）求直线AD与平面PAC所成角的正弦值.

【答案】（Ⅰ）见解析；（Ⅱ）见解析；（Ⅲ）$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

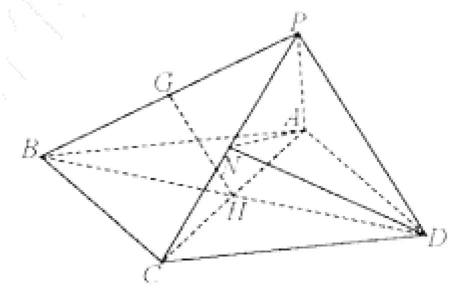
【分析】

（Ⅰ）连接 BD，结合平行四边形的性质，以及三角形中位线的性质，得到 $GH \parallel PD$，利用线面平行的判定定理证得结果；

（Ⅱ）取棱 PC 的中点 N，连接 DN，依题意，得 $DN \perp PC$，结合面面垂直的性质以及线面垂直的性质得到 $DN \perp PA$，利用线面垂直的判定定理证得结果；

（Ⅲ）利用线面角的平面角的定义得到 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角，放在直角三角形中求得结果.

【详解】（Ⅰ）证明：连接 BD，易知 $AC \cap BD = H$， $BH = DH$，



又由 $BG = PG$，故 $GH \parallel PD$，

又因为 $GH \not\subset$ 平面 PAD， $PD \subset$ 平面 PAD，

所以 $GH //$ 平面 PAD.

（Ⅱ）证明：取棱 PC 的中点 N，连接 DN，依题意，得 $DN \perp PC$，

又因为平面 $PAC \perp$ 平面 PCD，平面 $PAC \bigcap$ 平面 $PCD = PC$，

所以 $DN \perp$ 平面 PAC，又 $PA \subset$ 平面 PAC，故 $DN \perp PA$，

又已知 $PA \perp CD$， $CD \bigcap DN = D$，

所以 $PA \perp$ 平面 PCD.

（Ⅲ）解：连接 AN，由（Ⅱ）中 $DN \perp$ 平面 PAC，

可知 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角.

因为 ΔPCD 为等边三角形，$CD = 2$ 且 N 为 PC 的中点，

所以 $DN = \sqrt{3}$，又 $DN \perp AN$，

在 $Rt\Delta AND$ 中，$\sin \angle DAN = \dfrac{DN}{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以，直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本小题主要考查直线与平面平行、直线与平面垂直、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识，考查空间想象能力和推理能力.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，公比大于 0，已知 $a_1=b_1=3$，$b_2=a_3$，$b_3=4a_2+3$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\begin{cases}1, & n\text{为奇数,}\\ b_{\frac{n}{2}} & n\text{为偶数,}\end{cases}$ 求 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}\quad\left(n\in N^*\right)$.

【答案】（Ⅰ）$a_n=3n$，$b_n=3^n$；

（Ⅱ）$\frac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}(n\in N^*)$

【解析】

【分析】

（Ⅰ）首先设出等差数列的公差，等比数列的公比，根据题意，列出方程组，求得 $\begin{cases}d=3\\ q=3\end{cases}$，进而求得等差数列和等比数列的通项公式；

（Ⅱ）根据题中所给的 c_n 所满足的条件，将 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$ 表示出来，之后应用分组求和法，结合等差数列的求和公式，以及错位相减法求和，最后求得结果.

【详解】（Ⅰ）解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

依题意，得 $\begin{cases}3q=3+2d\\ 3q^2=15+4d\end{cases}$，解得 $\begin{cases}d=3\\ q=3\end{cases}$，

故 $a_n=3+3(n-1)=3n$，$b_n=3\times3^{n-1}=3^n$，

所以，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3^n$；

（Ⅱ）$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2b_1+a_4b_2+a_6b_3+\cdots+a_{2n}b_n)$

$=[n\times 3+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 6]+(6\times 3^1+12\times 3^2+18\times 3^3+\cdots+6n\times 3^n)$

$=3n^2+6\times(1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n)$，

记 $T_n=1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n$ ①

则 $3T_n=1\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+n\times 3^{n+1}$ ②

②−①得，$2T_n=-3-3^2-3^3-\cdots-3^n+n\times 3^{n+1}=-\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}+n\times 3^{n+1}=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$，

所以 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}=3n^2+6T_n=3n^2+3\times\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$

$=\dfrac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}(n\in N^*)$.

【点睛】本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等基础知识，考查数列求和的基本方法和运算求解能力，属于中档题目.

19.

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左焦点为 F，左顶点为 A，顶点为B. 已知 $\sqrt{3}\,|OA|=2\,|OB|$（O 为原点）.

（Ⅰ）求椭圆的离心率；

（Ⅱ）设经过点 F 且斜率为 $\dfrac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P，圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切，圆心 C 在直线 $x=4$ 上，且 $OC\,/\!/\,AP$，求椭圆的方程.

【答案】（I）首先设椭圆的半焦距为 c，根据题意得到 $\sqrt{3}a=2b$，结合椭圆中 a,b,c 的关系，得到 $a^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)^2+c^2$，化简得出 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，从而求得其离心率；

（II）结合（I）的结论，设出椭圆的方程 $\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，写出直线的方程，两个方程联立，求得交点的坐标，利用直线与圆相切的条件，列出等量关系式，求得 $c=2$，从而得到椭圆的方程.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）$\frac{1}{2}$；

（Ⅱ）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

【详解】（Ⅰ）解：设椭圆的半焦距为c，由已知有$\sqrt{3}a=2b$，

又由$a^2=b^2+c^2$，消去b得$a^2=(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+c^2$，解得$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

所以，椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知，$a=2c,b=\sqrt{3}c$，故椭圆方程为$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，

由题意，$F(-c,0)$，则直线l的方程为$y=\frac{3}{4}(x+c)$，

点P的坐标满足$\begin{cases}\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1\\ y=\frac{3}{4}(x+c)\end{cases}$，消去$y$并化简，得到$7x^2+6cx-13c^2=0$，

解得$x_1=c,x_2=-\frac{13c}{7}$，

代入到l的方程，解得$y_1=\frac{3}{2}c,y_2=-\frac{9}{14}c$，

因为点P在x轴的上方，所以$P(c,\frac{3}{2}c)$，

由圆心在直线$x=4$上，可设$C(4,t)$，因为$OC\mathbin{/\mkern-6mu/}AP$，

且由（Ⅰ）知$A(-2c,0)$，故$\frac{t}{4}=\frac{\frac{3}{2}c}{c+2c}$，解得$t=2$，

因为圆C与x轴相切，所以圆的半径为2，

又由圆C与l相切，得$\frac{\left|\frac{3}{4}(4+c)-2\right|}{\sqrt{1+(\frac{3}{4})^2}}=2$，解得$c=2$，

所以椭圆的方程为：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

【点睛】本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程、圆等基础知识，考查用代数方法研究圆锥曲线的性质，考查运算求解能力，以及用方程思想、数形结合思想解决问题的能力.

20. 设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)e^x$，其中 $a\in R$.

（Ⅰ）若 $a\le 0$，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $0<a<\frac{1}{e}$，

（i）证明 $f\left(x\right)$ 恰有两个零点

（ii）设 x 为 $f\left(x\right)$ 的极值点，x_1 为 $f\left(x\right)$ 的零点，且 $x_1>x_0$，证明 $3x_0-x_1>2$.

【答案】（I）$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.；

（II）（i）见解析；（ii）见解析.

【解析】

【分析】

（I）；首先写出函数的定义域，对函数求导，判断导数在对应区间上的符号，从而得到结果；

（II）（i）对函数求导，确定函数的单调性，求得极值的符号，从而确定出函数的零点个数，得到结果；

（ii）首先根据题意，列出方程组，借助于中介函数，证得结果.

【详解】（I）解：由已知，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=\frac{1}{x}-[ae^x+a(x-1)e^x]=\frac{1-ax^2e^x}{x}$，

因此当 $a\le 0$ 时，$1-ax^2e^x>0$，从而 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

（II）证明：（i）由（I）知，$f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$，

令 $g(x)=1-ax^2e^x$，由 $0<a<\frac{1}{e}$，可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，

又 $g(1)=1-ae>0$，且 $g(\ln\frac{1}{a})=1-a(\ln\frac{1}{a})^2\frac{1}{a}=1-(\ln\frac{1}{a})^2<0$，

故 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，

从而 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，不妨设为 x_0，

则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$，

所以 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{(x_0,+\infty)}$ 内单调递减，

因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，

从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，所以 $\ln x<x-1$，

从而 $f(\ln\frac{1}{a})=\ln\ln\frac{1}{a}-a(\ln\frac{1}{aa}-1)e^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\ln\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}+1=h(\ln\frac{1}{a})<0$，

又因为 $f(x_0)>f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{(x_0,+\infty)}$ 内有唯一零点，

又 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内有唯一零点1，从而，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有两个零点.

（ii）由题意，$\begin{cases}f'(x_0)=0\\f(x_1)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a{x_0}^2e^{x_0=1}\\\ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1}\end{cases}$，

从而 $\ln x_1=\frac{x_1-1}{{x_0}^2}e^{x_1-x_0}$，即 $e^{x_1-x_0}=\frac{{x_0}^2\ln x_1}{x_1-1}$，

以内当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，又 $x_1>x_0>1$，故 $e^{x_1-x_0}<\frac{{x_0}^2(x_1-1)}{x_1-1}={x_0}^2$，

两边取对数，得 $\ln e^{x_1-x_0}<\ln{x_0}^2$，

于是 $x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$，整理得 $3x_0-x_1>2$，

【点睛】本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法，考查函数思想、化归与转化思想，考查综合分析问题和解决问题的能力.