2020 年上海市春季高考数学试卷

2020.01

一．填空题（本大题共 **12** 题，满分 **54** 分，第 **1~6** 题每题 **4** 分，第 **7~12** 题每题 **5** 分）

1. 集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{1,2,a\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$________

2. 不等式 $\frac{1}{x}>3$ 的解集为________

3. 函数 $y=\tan 2x$ 的最小正周期为________

4. 已知复数 z 满足 $z+2\bar{z}=6+\mathrm{i}$，则 z 的实部为________

5. 已知 $3\sin 2x=2\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $x=$________

6. 若函数 $y=a\cdot 3^x+\frac{1}{3^x}$ 为偶函数，则 $a=$________

7. 已知直线 $l_1: x+ay=1$，$l_2: ax+y=1$，若 $l_1 /\!/ l_2$，则 l_1 与 l_2 的距离为________

8. 已知二项式 $(2x+\sqrt{x})^5$，则展开式中 x^3 的系数为 ________

9. 三角形 ABC 中，D 是 BC 中点，$AB=2$，$BC=3$，$AC=4$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$________

10. 已知 $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，a、$b\in A$，则 $|a|<|b|$ 的情况有________种

11. 已知 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 五个点，满足 $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}=0$（$n=1,2,3$），

$|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}|\cdot|\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}|=n+1$（$n=1,2,3$），则 $|\overrightarrow{A_1A_5}|$ 的最小值为________

12. 已知 $f(x)=\sqrt{x-1}$，其反函数为 $f^{-1}(x)$，若 $f^{-1}(x)-a=f(x+a)$ 有实数根，则 a 的取值范围为________

二．选择题（本大题共 **4** 题，每题 **5** 分，共 **20** 分）

13. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}=$（　　）

A. 3　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. 5

14. “$\alpha=\beta$”是“$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$”的（　　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，作垂直于 x 轴的垂线交椭圆于 A、B 两点，作垂直于 y 轴的垂线交椭圆于 C、D 两点，且 $AB=CD$，两垂线相交于点 P，则点 P 的轨迹是（　　）

A. 椭圆　　B. 双曲线　　C. 圆　　D. 抛物线

16. 数列$\{a_n\}$各项均为实数，对任意$n\in \mathbf{N}^*$满足$a_{n+3}=a_n$，且行列式$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{vmatrix}=c$为定值，则下列选项中不可能的是（　　）

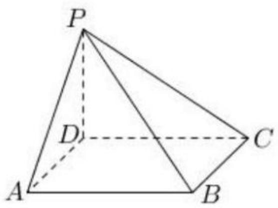
A. $a_1=1$，$c=1$　　B. $a_1=2$，$c=2$　　C. $a_1=-1$，$c=4$　　D. $a_1=2$，$c=0$

三. 解答题（本大题共 **5** 题，共 **14+14+14+16+18=76** 分）

17. 已知四棱锥$P-ABCD$，底面$ABCD$为正方形，边长为 3，$PD\perp$平面$ABCD$.

（1）若$PC=5$，求四棱锥$P-ABCD$的体积；

（2）若直线AD与BP的夹角为60°，求PD的长.



18. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$，其前n项和为S_n，$a_1=1$.

（1）若数列$\{a_n\}$为等差数列，$S_{10}=70$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_4=\dfrac{1}{8}$，求满足$S_n>100a_n$时n的最小值.

19. 有一条长为 120 米的步行道OA，A是垃圾投放点ω_1，若以O为原点，OA为x轴正半轴建立直角坐标系，设点$B(x,0)$，现要建设另一座垃圾投放点$\omega_2(t,0)$，函数$f_t(x)$表示与B点距离最近的垃圾投放点的距离.

（1）若$t=60$，求$f_{60}(10)$、$f_{60}(80)$、$f_{60}(95)$的值，并写出$f_{60}(x)$的函数解析式；

（2）若可以通过$f_t(x)$与坐标轴围成的面积来测算扔垃圾的便利程度，面积越小越便利.

问：垃圾投放点ω_2建在何处才能比建在中点时更加便利？

20. 已知抛物线 $y^2 = x$ 上的动点 $M(x_0, y_0)$，过 M 分别作两条直线交抛物线于 P、Q 两点，交直线 $x = t$ 于 A、B 两点.

（1）若点 M 纵坐标为 $\sqrt{2}$，求 M 与焦点的距离；

（2）若 $t = -1$，$P(1,1)$，$Q(1,-1)$，求证：$y_A \cdot y_B$ 为常数；

（3）是否存在 t，使得 $y_A \cdot y_B = 1$ 且 $y_P \cdot y_Q$ 为常数？若存在，求出 t 的所有可能值，若不存在，请说明理由.

21. 已知非空集合 $A \subseteq \mathbf{R}$，函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $t \in A$ 且 $x \in D$，不等式 $f(x) \le f(x+t)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 具有 A 性质.

（1）当 $A = \{-1\}$，判断 $f(x) = -x$、$g(x) = 2x$ 是否具有 A 性质；

（2）当 $A = (0,1)$，$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$，$x \in [a, +\infty)$，若 $f(x)$ 具有 A 性质，求 a 的取值范围；

（3）当 $A = \{-2, m\}$，$m \in \mathbf{Z}$，若 D 为整数集且具有 A 性质的函数均为常值函数，求所有符合条件的 m 的值.