

2012 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（理工农医类）

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 6 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

试卷总评：总体来说 2012 湖南理科数学试题相对于 2010，2011 年有着很大的变化：试题难度变大，体现于解答题的难度相对于前两年有显著提高。着重体现在 19 题的内容更换为数列的充分必要性的证明，考数列解答题可能很多人都有预测到，但是靠充分必要性的证明可能预测到的少，另外函数应用问题较去年也有提高，着重了函数、不等式应用思想的考查应用。而相对而言今年的选择题、填空题的布局与前两年吻合，注重对考生基础知识，基本技能的考查。内容变换，将原有的三角解答题去掉，对立体集合问题不直接考查角度的计算，而考查几何体体积的计算。突出了重点内容的考查，如函数与导数，圆锥曲线等。

一选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$ ， $N = \{x | x^2 \leq x\}$ ，则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

【答案】B

【解析】因 $N = \{x | x^2 \leq x\} = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ ，故 $M \cap N = \{0, 1\}$ ，选 B。

【考点定位】集合的运算

2. 命题“若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ，则 $\tan \alpha = 1$ ”的逆否命题是 ()

- A. 若 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ ，则 $\tan \alpha \neq 1$ B. 若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ，则 $\tan \alpha \neq 1$

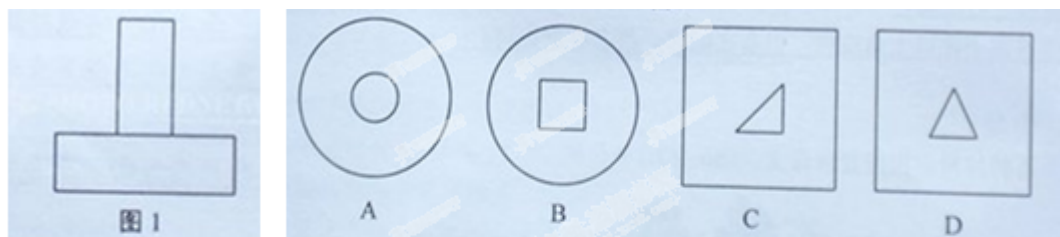
- C. 若 $\tan \alpha \neq 1$ ，则 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ D. 若 $\tan \alpha \neq 1$ ，则 $\alpha = \frac{\pi}{4}$

【答案】C

【解析】逆否命题是将原命题的条件和结论同时否定，并交换位置，故可知选 C。

【考点定位】四种命题

3. 某几何体的正视图和侧视图均如图 1 所示，则该几何体的俯视图不可能是 ()



【答案】D

【解析】由三视图的识图原理可知，D 不对，其正视图与侧视图有不同，正视图应在中间画一虚线。

【考点定位】三视图和直观图

4. 设某大学的女生体重 y （单位： kg ）与身高 x （单位： cm ）具有线性相关关系，根据

一组样本数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ ，用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y} = 0.85x - 85.71$ ，则下列结论不正确的是 ()

- A. y 与 x 具有正的线性相关关系
- B. 回归直线过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y})
- C. 若该大学某女生身高增加 1 cm ，则其体重约增加 0.85 kg
- D. 若该大学某女生身高为 170 cm ，则可断定其体重必为 58.79 kg

【答案】D

【解析】由回归方程的相关知识可知，D 显然不正确，利用回归方程我们只能进行回顾预报，而不能得出绝对预报的结论。

【考点定位】相关关系与回归方程

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 10，点 $P(2, 1)$ 在 C 的渐近线上，则 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
- B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$
- C. $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$
- D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$

【答案】A

【解析】因焦距为 10，则 $c = 5$ ，又渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，因点 $P(2, 1)$ 在 C 的渐近线，则

$a = 2b$ ，故可得 $a^2 = 20, b^2 = 5$ ，选 A。

【考点定位】双曲线方程与性质

6. 函数 $f(x) = \sin x - \cos(x + \frac{\pi}{6})$ 的值域为 ()

- A. $[-2, 2]$
- B. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
- C. $[-1, 1]$
- D. $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

【答案】B

【解析】因

$$f(x) = \sin x - \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x - (\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{6})$$

，故 $f(x) \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ，选 B。

【考点定位】三角函数恒等变换

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2, AC = 3, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$ ，则 $BC =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{7}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{23}$

【答案】A

【解析】由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 = 2 \times BC \times \cos(\pi - B)$ ，所以 $\cos B = -\frac{1}{2BC}$ ，又由余弦定理可得

$$\cos B = \frac{4 + BC^2 - 9}{2 \times 2 \times BC}, \text{故可得 } BC^2 = 3, \text{即 } BC = \sqrt{3}. \text{选 A.}$$

【考点定位】平面向量数量积与解三角形

8. 已知两条直线 $l_1: y = m$ 和 $l_2: y = \frac{8}{2m+1} (m > 0)$ ， l_1 与函数 $y = |\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 A, B ， l_2 与函数 $y = |\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 C, D ，记线段 AC 和 BD 在 x 轴上的投影长度分别为 a, b ，当 m 变化时， $\frac{b}{a}$ 的最小值为 ()

- A. $16\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $8\sqrt[3]{4}$ D. $4\sqrt[3]{4}$

【答案】B

【解析】由题可知， $x_A = 2^{-m}, x_B = 2^m, x_C = 2^{-\frac{8}{2m+1}}, x_D = 2^{\frac{8}{2m+1}}$ ，所以 $a = |2^{-\frac{8}{2m+1}} - 2^{-m}|$ ，

$b = |2^{\frac{8}{2m+1}} - 2^m|$ ，若 $m = \frac{8}{2m+1}$ ，则 $a = b = 0$ ，不合题意；若 $m > \frac{8}{2m+1}$ ，则

$$a = 2^{-\frac{8}{2m+1}} - 2^{-m}, \quad b = 2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}, \text{即}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}}{2^{-\frac{8}{2m+1}} - 2^{-m}} = \frac{(2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}) \cdot 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m}{(2^{-\frac{8}{2m+1}} - 2^{-m}) \cdot 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m} = \frac{(2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}) \cdot 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m}{2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}} = 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m = 2^{\frac{8}{2m+1} + m}$$

因 $\frac{8}{2m+1} + m = \frac{4}{m + \frac{1}{2}} + m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ ，即此时 $\frac{b}{a}$ 的最小值为

$$2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}. \text{同理若 } m < \frac{8}{2m+1}, \text{则 } a = 2^{-m} - 2^{-\frac{8}{2m+1}}, \quad b = 2^{\frac{8}{2m+1}} - 2^m, \text{即}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2^{\frac{8}{2m+1}} - 2^m}{2^{-m} - 2^{-\frac{8}{2m+1}}} = 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m = 2^{\frac{8}{2m+1} + m},$$

因 $\frac{8}{2m+1} + m = \frac{4}{m + \frac{1}{2}} + m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ ，即此时 $\frac{b}{a}$ 的最小值为

$$2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}。 \text{ 综上可知 } \frac{b}{a} \text{ 的最小值为 } 8\sqrt{2}。$$

【考点定位】函数图像与性质，基本不等式。

二填空题：本大题共 8 小题，考生作答 7 小题，每小题 5 分，共 35 分，把答案填在答题卡中对应题号的横线上。

一、选做题（请考生在第 9、10、11 三题中任选两题作答，如果全做，则按前两题记分）

9. 在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 $C_1: \begin{cases} x=t+1 \\ y=1-2t \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 $C_2: \begin{cases} x=a \sin \theta \\ y=3 \cos \theta \end{cases}$

(θ 为参数, $a > 0$) 有一个公共点在 x 轴上, 则 $a =$ _____。

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】曲线 $C_1: \begin{cases} x=t+1 \\ y=1-2t \end{cases}$ (t 为参数) 化普通方程得 $2x+y-3=0$, 曲线 $C_2: \begin{cases} x=a \sin \theta \\ y=3 \cos \theta \end{cases}$

(θ 为参数, $a > 0$) 化普通方程得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$, 因有一个公共点在 x 轴上, 令 $y=0$, 则

得公共点 $(\frac{3}{2}, 0)$, 代入 C_2 得 $a = \frac{3}{2}$ 。

【考点定位】极坐标与参数方程

10. 不等式 $|2x+1|-2|x-1| > 0$ 的解集为_____

【答案】 $\{x | x > \frac{1}{4}\}$

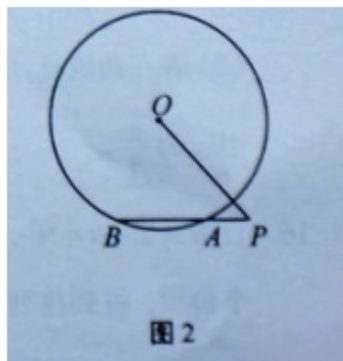
【解析】由零点分段法可知原不等式等价于 $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x+1-2(x-1) > 0 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -(2x+1)+2(x-1) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ (2x+1)+2(x-1) > 0 \end{cases}$, 分别解不等式组得 $x \geq 1$ 或 \emptyset 或

$\frac{1}{4} < x < 1$, 综上可得解集为 $\{x | x > \frac{1}{4}\}$ 。

【考点定位】不等式选讲—解绝对值不等式

11. 如图 2, 过点 P 的直线与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点. 若 $PA=1, AB=2, PO=3$, 则 $\odot O$ 的半径等于_____。



【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】 设半径为 r , 则由割线定理得 $PA \cdot PB = (PO + r)(PO - r)$, 即 $1 \times 3 = (3 + r)(3 - r)$,

化简得 $r^2 = 6$, 故 $r = \sqrt{6}$ 。

【考点定位】 几何证明选讲

二、必做题 (12~16 题)

12. 已知复数 $z = (3 + i)^2$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____。

【答案】 10

【解析】 因 $z = (3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 8 + 6i$, 所以 $|z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ 。

【考点定位】 复数的运算。

13. $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为_____。(用数字作答)

【答案】 -160

【解析】 由二项式展开通项公式得 $T_{r+1} = C_6^r (2\sqrt{x})^{6-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_6^r 2^{6-r} (-1)^r x^{3-r}$, 令

$3 - r = 0$, 则 $r = 3$, 故常数项为 $T_4 = C_6^3 2^3 \times (-1)^3 = -160$ 。

【考点定位】 二项式定理求指定项

14. 如果执行如图 3 所示的程序框图, 输入 $x = -1, n = 3$, 则输出的数 $S =$ _____。

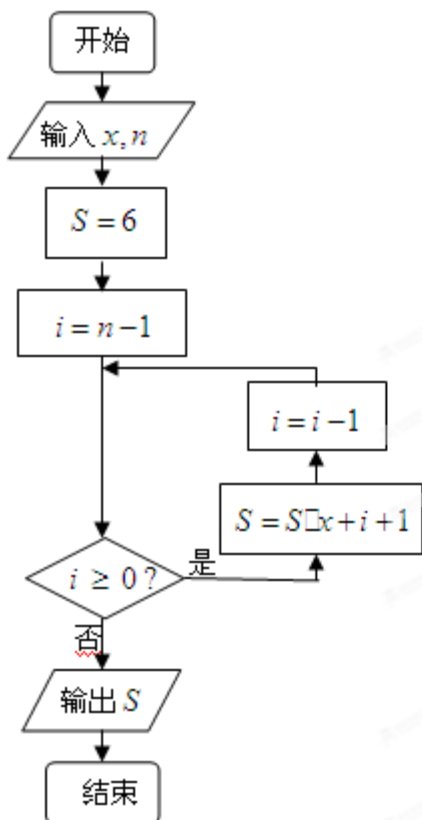


图 3

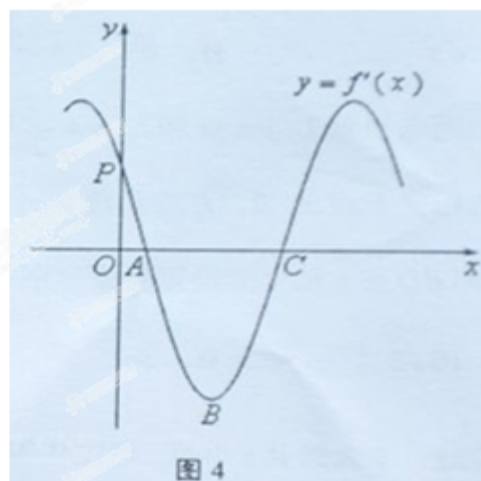


图 4

【答案】-4

【解析】由程序框图的流程可得 $x = -1, n = 3, S = 6; i = 2, S = 6 \times (-1) + 2 + 1 = -3,$

$i = 1; S = (-3) \times (-1) + 1 + 1 = 5, i = 0; S = 5 \times (-1) + 0 + 1 = -4, i = -1,$ 输出 $S = -4.$

【考点定位】程序框图的推理运.

15. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的部分图象如图 4 所示, 其中, P 为图象与 y 轴的交点, A, C 为图象与 x 轴的两个交点, B 为图象的最低点。

(1) 若 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\omega =$ _____;

(2) 若在曲线段 \widehat{ABC} 与 x 轴所围成的区域内随机取一点, 则该点在 $\triangle ABC$ 内的概率为 _____。

【答案】(1) 3, (2) $\frac{\pi}{4}$

【解析】(1) 因 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 所以 $f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi)$, 由 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时点 P 的

坐标为 $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\frac{3\sqrt{3}}{2} = \omega \cos \frac{\pi}{6}$, 解得 $\omega = 3$;

(2) 由题可知曲线段 \overline{ABC} 与 x 轴所围成的区域为 $S_n = \int_{x_1}^{x_2} |\omega \cos(\omega x + \varphi)| = 2$, 而 $\triangle ABC$

的面积为 $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \frac{T}{2} \times |\omega| = \frac{\pi}{2}$, 由几何概型概率计算公式可得所求概率为 $P = \frac{\pi}{4}$.

【考点定位】三角函数的图像与性质和几何概型概率计算。

16. 设 $N = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$), 将 N 个数 x_1, x_2, \dots, x_N 依次放入编号为 $1, 2, \dots, N$

的 N 个位置, 得到排列 $P_0 = x_1 x_2 \cdots x_N$. 将该排列中分别位于奇数与偶数位置的数取出, 并

按原顺序依次放入对应的前 $\frac{N}{2}$ 和后 $\frac{N}{2}$ 个位置, 得到排列 $P_1 = x_1 x_3 \cdots x_{N-1} x_2 x_4 \cdots x_N$, 将此

操作称为 C 变换. 将 P_1 分成两段, 每段 $\frac{N}{2}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_2 ; 当

$2 \leq i \leq n-2$ 时, 将 P_i 分成 2^i 段, 每段 $\frac{N}{2^i}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_{i+1} , 例

如, 当 $N = 8$ 时, $P_2 = x_1 x_3 x_5 x_7 x_2 x_6 x_4 x_8$, 此时 x_7 位于 P_2 中的第 4 个位置。

(1) 当 $N = 16$ 时, x_7 位于 P_2 中的第 _____ 个位置;

(2) 当 $N = 2^n$ ($n \geq 8$) 时, x_{173} 位于 P_4 中的第 _____ 个位置。

【答案】(1) 6 ; (2) $3 \times 2^{n-4} + 11$

【解析】

(1) 由题, $P_0 = x_1 x_2 \cdots x_{16}$, $P_1 = x_1 x_3 \cdots x_{15} x_2 x_4 \cdots x_{16}$, $P_2 = x_1 x_5 x_9 x_{13} x_3 x_7 x_{11} x_{15} x_2 x_6 x_{10} x_{14} x_4 x_8 x_{12} x_{16}$,

可知 x_7 位于 P_2 中的第 6 个位置;

(2) 当 $N = 2^n$ ($n \geq 8$) 时, 因 x_{173} 位于 P_0 中的第 173 个位置, 将 P_0 分为 2 段, 每段有 $\frac{N}{2}$ 个,

经过一次变换后, 位于 P_1 中的前 $\frac{N}{2}$ 的第 87 个位置; 接下来将 P_1 中每段再分成 2 段, 每段 2^{n-2}

个, 经过变换后此时位于 P_2 中的第 1 段的第 44 个位置; 接下来将 P_2 分成 8 段, 每段有

$\frac{2^n}{8} = 2^{n-3}$, 此时位于 P_3 中第二段的 22 个位置, 接下来将 P_3 分成 16 段, 每段有 $\frac{2^n}{16} = 2^{n-4}$,

此时位于 P_4 中第 4 段的 11 个位置, 即 $3 \times 2^{n-4} + 11$.

【考点定位】数列的综合应用

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分) 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	x	30	25	y	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

(1) 确定 x, y 的值, 并求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列与数学期望;

(2) 若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算, 且各顾客的结算相互独立, 求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率.

(注: 将频率视为概率)

【解析】(1) 由已知得 $25 + y + 10 = 55, x + 30 = 45$, 所以 $x = 15, y = 20$.

该超市所有顾客一次购物的结算时间组成一个总体, 所收集的 100 位顾客一次购物的结算时间可视为总体的一个容量为 100 的简单随机样本, 将频率视为概率得

$$P(X=1) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, P(X=1.5) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, P(X=2) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=2.5) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, P(X=3) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

X 的分布列为

X	1	1.5	2	2.5	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

X 的数学期望为

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{20} + 1.5 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{4} + 2.5 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = 1.9.$$

(II) 记 A 为事件“该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟”, $X_i (i=1, 2)$ 为该顾客前面第 i 位顾客的结算时间, 则

$$P(A) = P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1) + P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1.5) + P(X_1=1.5 \text{ 且 } X_2=1),$$

由于各顾客的结算时间相互独立, 且 X_1, X_2 的分布列都与 X 的分布列相同, 所以

$$P(A) = P(X_1=1) \times P(X_2=1) + P(X_1=1) \times P(X_2=1.5) + P(X_1=1.5) \times P(X_2=1)$$

$$= \frac{3}{20} \times \frac{3}{20} + \frac{3}{20} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{20} = \frac{9}{80}$$

故该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率为 $\frac{9}{80}$.

【考点定位】 概率与随机变量的分布列和数学期望

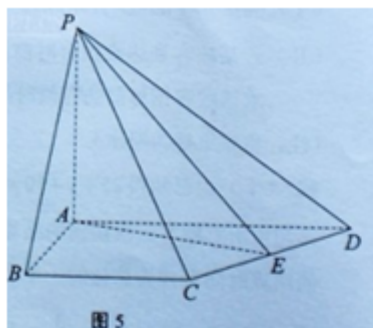
18. (本小题满分 12 分)

如图 5, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=3, BC=4, AD=5$,

$\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, E 是 CD 的中点。

(I) 证明: $CD \perp$ 平面 PAE

(II) 若直线 PB 与平面 PAE 所成的角和 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角相等, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。



解法 1 (I) 如图(1), 连接 AC 。由 $AB = 4, BC = 3, \angle ABC = 90^\circ$, 得 $AC = 5$ 。又 $AD = 5$, E 是 CD 的中点, 所以 $CD \perp AE$, 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$, 而 PA, PE 是平面 PAE 内的两条相交直线, 所以 $CD \perp$ 平面 PAE 。

(II) 过点 B 作 $BG \parallel CD$, 分别与 AE, AD 相交于点 F, G , 连接 PF ,

由 (I) $CD \perp$ 平面 PAE 知, $BG \perp$ 平面 PAE , 于是 $\angle BPE$ 为直线 PB 与平面 PAE 所成的角, 且 $BG \perp AE$

由 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 知, $\angle PBA$ 为直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角。

由题意 $\angle PBA = \angle BPF$, 因为 $\sin \angle PBA = \frac{PA}{PB}$, $\sin \angle BPF = \frac{BF}{PB}$, 所以 $PA = BF$, 由

$\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ 知 $AD \parallel BC$, 又 $BG \parallel CD$, 所以四边形 $BCDG$ 是平行四边形, 故 $GD = BC = 3$, 于是 $AG = 2$ 。

在 $Rt\triangle BAG$ 中, $AB = 4, AG = 2, BG \perp AF$, 所以

$$BG = \sqrt{AB^2 + AG^2} = 2\sqrt{5}, BF = \frac{AB^2}{BG} = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

于是 $PA = BF = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ 。

又梯形 $ABCD$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times (5+3) \times 4 = 16$, 所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为

$$V = \frac{1}{3} \times S \times PA = \frac{1}{3} \times 16 \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{128\sqrt{5}}{15}.$$

解法 2 如图 (2), 以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立

空间直角坐标系，设 $PA=h$ ，则相关各点的坐标为：

$$A(0,0,0), B(4,0,0), C(4,3,0), D(0,5,0), E(2,4,0), P(0,0,h).$$

(I) 易知 $\overrightarrow{CD}=(-4,2,0)$, $\overrightarrow{AE}=(2,4,0)$, $\overrightarrow{AP}=(0,0,h)$. 因为

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AE} = -8 + 8 + 0 = 0$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, 所以 $CD \perp AE$, $CD \perp AP$, 而 AP, AE 是平面 PAE 内的两条相交直线，所以 $CD \perp$ 平面 PAE 。

(II) 由题设和 (I) 知， $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PA}$ 分别是平面 PAE , 平面 $ABCD$ 的法向量，而 PB 与平面 PAE 所成的角和 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角相等，所以

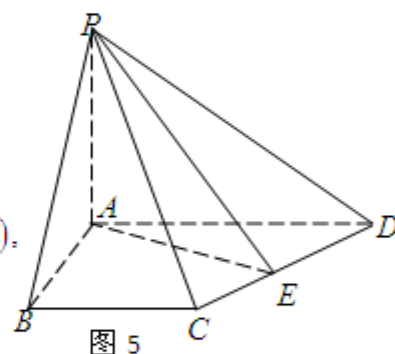
$$\left| \cos \langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PB} \rangle \right| = \left| \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle \right|, \text{ 即 } \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|}.$$

由题 (I) 知， $\overrightarrow{CD}=(-4,2,0)$, $\overrightarrow{PA}=(0,0,-h)$, 又 $\overrightarrow{PB}=(4,0,-h)$,

$$\text{故 } \frac{\left| \frac{-16+0+0}{2\sqrt{5}\sqrt{16+h^2}} \right|}{\left| \frac{0+0+h^2}{h\sqrt{16+h^2}} \right|} = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \text{ 解得 } h = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

又梯形 $ABCD$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times (5+3) \times 4 = 16$, 所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为

$$V = \frac{1}{3} \times S \times PA = \frac{1}{3} \times 16 \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{128\sqrt{5}}{15}.$$



【考点定位】立体几何的证明与体积计算

19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 $A(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

$$B(n) = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}$$

$$C(n) = a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(I) 若 $a_1 = 1, a_2 = 5$, 且对任意 $n \in N^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成等差数列,

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列的充分必要条件是: 对任意 $n \in N^*$, 三个数

$A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列.

【解析】(I) 对任意 $n \in N^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成等差数列, 所以

$$B(n) - A(n) = C(n) - B(n).$$

即 $a_{n+1} - a_1 = a_{n+2} - a_2$, 亦即 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_2 - a_1 = 4$.

故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 4 的等差数列. 于是 $a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$.

(II) (1) 必要性: 若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则对任意 $n \in N^*$, 有

$a_{n+1} = a_n q$. 由 $a_n > 0$ 知, $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 均大于 0, 于是

$$\frac{B(n)}{A(n)} = \frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{q(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = q$$

$$\frac{C(n)}{B(n)} = \frac{a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+2}}{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}} = \frac{q(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1})}{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}} = q$$

即 $\frac{B(n)}{A(n)} = \frac{C(n)}{B(n)} = q$. 所以三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列.

(2) 充分性: 若对任意 $n \in N^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列,

则 $B(n) = qA(n)$, $C(n) = qB(n)$.

于是 $C(n) - B(n) = q[B(n) - A(n)]$, 得 $a_{n+2} - a_2 = q(a_{n+1} - a_1)$, 即

$$a_{n+2} - qa_{n+1} = a_2 - qa_1.$$

由 $n=1$ 有 $B(1) = qA(1)$, 即 $a_2 = qa_1$, 从而 $a_{n+2} - qa_{n+1} = 0$.

因为 $a_n > 0$, 所以 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_2}{a_1} = q$. 故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列.

综上所述, 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列的充分必要条件是: 对任意 $n \in N^*$, 三个数

$A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列.

【考点定位】数列的证明

20. (本小题满分 13 分)

某企业接到生产 3000 台某产品的 A, B, C 三种部件的订单, 每台产品需要这三种部件的数量分别为 2, 2, 1 (单位: 件). 已知每个工人每天可生产 A 部件 6 件, 或 B 部件 3 件, 或 C 部件 2 件. 该企业计划安排 200 名工人分成三组分别生产这三种部件, 生产 B 部件的人数与

生产 A 部件的人数成正比，比例系数为 k (k 为正整数)。

(I) 设生产 A 部件的人数为 x ，分别写出完成 A, B, C 三种部件生产需要的时间；

(II) 假设这三种部件的生产同时开工，试确定正整数 k 的值，使完成订单任务的时间最短，并给出时间最短时具体的人数分组方案。

【解析】

(I) 设完成 A, B, C 三种部件的生产任务需要事件 (单位：天) 分别为 $T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ ，

由题设有 $T_1(x) = \frac{2 \times 3000}{6x} = \frac{1000}{x}$, $T_2(x) = \frac{2000}{kx}$, $T_3(x) = \frac{1500}{200 - (1+k)x}$ ，其中

$x, kx, 200 - (1+k)x$ 均为 1 到 200 之间的正整数。

(II) 完成订单任务的时间为 $f(x) = \max\{T_1(x), T_2(x), T_3(x)\}$ ，其定义域为

$\{x | 0 < x < \frac{200}{1+k}, x \in N^*\}$ 。易知， $T_1(x), T_2(x)$ 为减函数， $T_3(x)$ 为增函数。注意到

$T_2(x) = \frac{2}{k} T_1(x)$ ，于是

①当 $k=2$ 时， $T_1(x) = T_2(x)$ ，此时

$f(x) = \max\{T_1(x), T_3(x)\} = \max\{\frac{1000}{x}, \frac{1500}{200-3x}\}$ 。

由函数 $T_1(x), T_3(x)$ 的单调性知，当 $\frac{1000}{x} = \frac{1500}{200-3x}$ 时 $f(x)$ 取得最小值，解得 $x = \frac{400}{9}$ 。

由于 $44 < \frac{400}{9} < 45$ ，而 $f(44) = T_1(44) = \frac{250}{11}$, $f(45) = T_3(45) = \frac{300}{13}$ ， $f(44) < f(45)$ 。

故当 $x=44$ 时完成订单任务的时间最短，且最短时间为 $f(44) = \frac{250}{11}$ 。

②当 $k > 2$ 时， $T_1(x) > T_2(x)$ ，由于 k 为正整数，故 $k \geq 3$ ，此时

$\frac{1500}{200 - (1+k)x} \geq \frac{1500}{200 - (1+3)x} = \frac{375}{50-x}$ ，记 $T(x) = \frac{375}{50-x}$ ，

$\varphi(x) = \max\{T_1(x), T(x)\}$ 。易知 $T(x)$ 是增函数，则

$f(x) = \max\{T_1(x), T_3(x)\} \geq \max\{T_1(x), T(x)\} = \varphi(x) = \max\{\frac{1000}{x}, \frac{375}{50-x}\}$

由函数 $T_1(x), T(x)$ 的单调性知，当 $\frac{1000}{x} = \frac{375}{50-x}$ 时 $f(x)$ 取得最小值，解得 $x = \frac{400}{11}$ 。由

于 $36 < \frac{400}{11} < 37$ ，而 $\varphi(36) = T_1(36) = \frac{250}{9} > \frac{250}{11}$, $\varphi(37) = T(37) = \frac{375}{13} > \frac{250}{11}$ 。此时完

成订单任务的时间最短时间大于 $\frac{250}{11}$ 。

③当 $k < 2$ 时, $T_1(x) < T_2(x)$, 由于 k 为正整数, 故 $k = 1$, 此时

$$f(x) = \max\{T_2(x), T_3(x)\} = \max\left\{\frac{2000}{x}, \frac{750}{100-x}\right\}.$$

由函数 $T_2(x), T_3(x)$ 的单调性知, 当 $\frac{2000}{x} = \frac{750}{100-x}$ 时 $f(x)$ 取得最小值, 解得 $x = \frac{800}{11}$. 类

似①的讨论, 此时完成订单任务的最短时间为 $\frac{250}{9}$, 大于 $\frac{250}{11}$.

综上所述, 当 $k = 2$ 时, 完成订单任务的时间最短, 此时 A, B, C 三种部件的人数分别为 44, 88, 68.

【考点定位】函数的应用问题

21. (本小题满分 13 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 上的点均在圆 $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 9$ 外, 且对 C_1 上任意一点 M , M 到直线 $x = -2$ 的距离等于该点与 C_2 上点的距离的最小值。

(I) 求曲线 C_1 的方程;

(II) 设 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 \neq \pm 3$) 为 C_2 外一点, 过 P 作圆 C_2 的两条切线, 分别与曲线 C_1 相交于点 A, B 和 C, D , 证明: 当 P 在直线 $x = -4$ 上运动时, 四点 A, B, C, D 的纵坐标之积为定值。

【解析】(I) 解法 1 设 M 的坐标为 (x, y) , 由已知得 $|x+2| = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} - 3$.

易知圆 C_2 上的点位于直线 $x = -2$ 的右侧, 于是 $x+2 > 0$, 所以 $\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = x+5$

化简得曲线 C_1 的方程为 $y^2 = 20x$

解法 2: 由题设知, 曲线 C_1 上任意一点 M 到圆心 C_2 的距离等于它到直线 $x = -5$ 的距离,

因此, 曲线 C_1 是以 $(5, 0)$ 为焦点, 直线 $x = -5$ 为准线的抛物线, 故方程为 $y^2 = 20x$

(II) 当 P 在直线 $x = -4$ 上运动时, P 的坐标为 $(-4, y_0)$, 又 $y_0 \neq \pm 3$, 则过 P 且与圆 C_2 相切的直线的斜率为 k 存在且不为 0, 每条切线都与抛物线有两个交点, 切线方程为 $y - y_0 = k(x + 4)$, 即 $kx - y + y_0 + 4k = 0$, 于是

$$\frac{|5k + y_0 + 4k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$$

整理得 $72k^2 + 18y_0k + y_0^2 - 9 = 0$ ①

设过点 P 所作的两条切线 PA, PC 的斜率为 k_1, k_2 , 则 k_1, k_2 是方程①的两个实根, 故

$$k_1 + k_2 = -\frac{18y_0}{72} = -\frac{y_0}{4} \quad ②$$

$$\text{由} \begin{cases} k_1x - y + y_0 + 4k_1 = 0 \\ y^2 = 20x \end{cases} \text{得 } k_1y^2 - 20y + 20(y_0 + 4k_1) = 0 \quad ③$$

设四点 A, B, C, D 的纵坐标为 y_1, y_2, y_3, y_4

$$\text{则 } y_1, y_2 \text{ 是方程③的两个实根, 所以 } y_1y_2 = \frac{20(y_0 + 4k_1)}{k_1} \quad ④$$

$$\text{同理可得 } y_3y_4 = \frac{20(y_0 + 4k_2)}{k_2} \quad ⑤$$

由②④⑤三式得

$$\begin{aligned} y_1y_2y_3y_4 &= \frac{400(y_0 + 4k_1)(y_0 + 4k_2)}{k_1k_2} \\ &= \frac{400[y_0^2 + 4(k_1 + k_2)y_0 + 16k_1k_2]}{k_1k_2} \\ &= \frac{400[y_0^2 - y_0^2 + 16k_1k_2]}{k_1k_2} = 6400 \end{aligned}$$

所以, 当 P 在直线 $x = -4$ 上运动时, 四点 A, B, C, D 的纵坐标之积 6400。

【考点定位】 直线与曲线的位置关系

22. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^{ax} - x$, 其中 $a \neq 0$.

(I) 若对一切 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 a 的取值集合;

(II) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)) (x_1 < x_2)$, 记直线 AB 的斜率为 k . 问: 是否存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(x_0) > k$ 成立? 若存在, 求 x_0 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

【解析】 (I) 若 $a < 0$, 则对一切 $x > 0$, $f(x) = e^{ax} - x < 1$ 这与题设矛盾. 又 $a \neq 0$, 故

$a > 0$. 而 $f'(x) = ae^{ax} - 1$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$,

当 $x < \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 故当 $x = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取最小值 $f(\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$.

于是对一切 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 当且仅当 $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} \geq 1$ ①

令 $g(t) = t - t \ln t$, 则 $g'(t) = -\ln t$.

当 $0 < t < 1$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调递增; 当 $t > 1$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 单调递减, 故当 $t = 1$ 时,

$g(t)$ 取最大值 $g(1) = 1$, 因此, 当且仅当 $\frac{1}{a} = 1$, 即 $a = 1$ 时, ①式成立.

综上所述, a 的取值集合为 $\{1\}$.

(II) 由题意知, $k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{x_2 - x_1} - 1$.

令 $\varphi(x) = f'(x) - k = ae^{ax} - \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{x_2 - x_1}$, 则 $\varphi(x_1) = -\frac{e^{ax_1}}{x_2 - x_1} [e^{a(x_2 - x_1)} - a(x_2 - x_1) - 1]$,

$\varphi(x_2) = \frac{e^{ax_2}}{x_2 - x_1} [e^{a(x_1 - x_2)} - a(x_1 - x_2) - 1]$.

令 $F(t) = e^t - t - 1$, 则 $F'(t) = e^t - 1$.

当 $t < 0$ 时, $F'(t) < 0$, $F(t)$ 单调递减; 当 $t > 0$ 时, $F'(t) > 0$, $F(t)$ 单调递增, 故当 $t \neq 0$ 时,

$F(t) > F(0) = 0$ 即 $e^t - t - 1 > 0$.

从而 $e^{a(x_2 - x_1)} - a(x_2 - x_1) - 1 > 0$, $e^{a(x_1 - x_2)} - a(x_1 - x_2) - 1 > 0$, 又 $\frac{e^{ax_1}}{x_2 - x_1} > 0$, $\frac{e^{ax_2}}{x_2 - x_1} > 0$,

所以 $\varphi(x_1) < 0$, $\varphi(x_2) > 0$.

因为函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 所以存在 $c \in (x_1, x_2)$,

使得 $\varphi(c) = 0$. 又 $\varphi'(x) = a^2 e^{ax} > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增, 故这样的 c 是唯一的, 且

$c = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{a(x_2 - x_1)}$. 故当且仅当 $x \in (\frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{a(x_2 - x_1)}, x_2)$ 时, $f'(x) > k$.

综上所述, 存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(x_0) > k$ 成立, 且 x_0 的取值范围为 $(\frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{a(x_2 - x_1)}, x_2)$.

【考点定位】导数的综合应用。