绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.

4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题

1．计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+20}{3n+13}=$______

2．设$m\in R$，$m^2+m-2+(m^2-1)\mathrm{i}$是纯虚数，其中i是虚数单位，则$m=$________

3．若$\begin{vmatrix}x^2 & y^2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & x\\ y & -y\end{vmatrix}$，则$x+y=$______

4．已知△ABC的内角A、B、C所对应边分别为a、b、c，若$3a^2+2ab+3b^2-3c^2=0$，则角C的大小是______________（结果用反三角函数值表示）

5．设常数$a\in R$，若$\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$的二项展开式中$x^7$项的系数为$-10$，则$a=$______.

6．方程$\dfrac{3}{3^x-1}+\dfrac{1}{3}=3^{x-1}$的实数解为________

7．在极坐标系中，曲线$\rho=\cos\theta+1$与$\rho\cos\theta=1$的公共点到极点的距离为_________.

8．盒子中装有编号为1，2，3，4，5，6，7，8，9的九个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是__________（结果用最简分数表示）

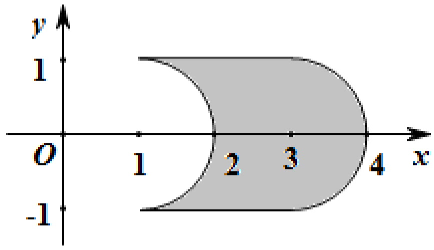
9．设AB是椭圆Γ的长轴，点C在Γ上，且$\angle CBA=\dfrac{\pi}{4}$，若AB=4，$BC=\sqrt{2}$，则$\Gamma$的两个焦点之间的距离为_______

10．设非零常数d是等差数列$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{19}$的公差，随机变量$\xi$等可能地取值$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{19}$，则方差$D\xi=$________

11．若$\cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{2},\sin 2x+\sin 2y=\dfrac{2}{3}$，则$\sin(x+y)=$________.

12．设a为实常数，$y=f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x<0$时，$f(x)=9x+\dfrac{a^2}{x}+7$，若$f(x)\ge a+1$对一切$x\ge 0$成立，则a的取值范围为________

13．在xOy平面上，将两个半圆弧$(x-1)^2+y^2=1(x\ge 1)$和$(x-3)^2+y^2=1(x\ge 3)$、两条直线$y=1$和$y=-1$围成的封闭图形记为D，如图中阴影部分．记D绕y轴旋转一周而成的几何体为Ω，过$(0,y)(|y|\le 1)$作Ω的水平截面，所得



截面面积为$4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$，试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体，得出Ω的体积值为________

14．对区间I上有定义的函数$g(x)$，记$g(I)=\{y\mid y=g(x),x\in I\}$，已知定义域为$[0,3]$的函数$y=f(x)$有反函数$y=f^{-1}(x)$，且$f^{-1}([0,1))=[1,2),f^{-1}((2,4])=[0,1)$，若方程$f(x)-x=0$有解$x_0$，则$x_0=$______

二、选择题

15．设常数$a\in R$，集合$A=\{x\mid(x-1)(x-a)\geq 0\},B=\{x\mid x\geq a-1\}$，若$A\cup B=R$，则$a$的取值范围为（ ）

(A) $(-\infty,2)$　　(B) $(-\infty,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

16．钱大姐常说“便宜没好货”，她这句话的意思是：“不便宜”是“好货”的（）

(A)充分条件　(B)必要条件　(C)充分必要条件　(D)既非充分也非必要条件

17．在数列$\{a_n\}$中，$a_n=2^n-1$，若一个7行12列的矩阵的第i行第j列的元素$a_{i,j}=a_i\cdot a_j+a_i+a_j$，（$i=1,2,\cdots,7;j=1,2,\cdots,12$）则该矩阵元素能取到的不同数值的个数为（ ）

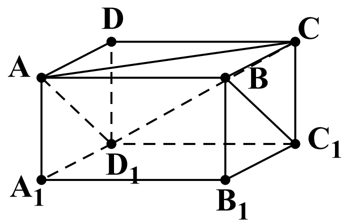
(A)18　　(B)28　　(C)48　　(D)63

18．在边长为1的正六边形ABCDEF中，记以A为起点，其余顶点为终点的向量分别为$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_4},\overrightarrow{a_5}$；以D为起点，其余顶点为终点的向量分别为$\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{d_3},\overrightarrow{d_4},\overrightarrow{d_5}$.若$m,M$分别为$(\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{a_j}+\overrightarrow{a_k})\cdot(\overrightarrow{d_r}+\overrightarrow{d_s}+\overrightarrow{d_t})$的最小值、最大值，其中$\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，$\{r,s,t\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,则$m,M$满足（ ）.

(A) $m=0,M>0$　　(B) $m<0,M>0$　　(C) $m<0,M=0$　　(D) $m<0,M<0$

三、解答题

19.（本题满分12分）如图，在长方体ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，AB=2,AD=1,A_1A=1，证明直线BC_1平行于平面DA_1C，并求直线BC_1到平面D_1AC的距离.



20．（6分+8分）甲厂以x千克/小时的速度运输生产某种产品（生产条件要求$1\leq x\leq 10$），每小时可获得利润是$100(5x+1-\frac{3}{x})$元.

(1)要使生产该产品2小时获得的利润不低于3000元，求x的取值范围；

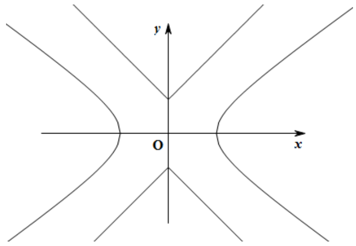
(2)要使生产900千克该产品获得的利润最大，问：甲厂应该选取何种生产速度？并求最大利润.

21．（6分+8分）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$，其中常数 $\omega>0$；

（1）若 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，求 ω 的取值范围；

（2）令 $\omega=2$，将函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像，区间 $[a,b]$（$a,b\in R$ 且 $a<b$）满足：$y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少含有30个零点，在所有满足上述条件的 $[a,b]$ 中，求 $b-a$ 的最小值．

22．（3分+5分+8分）如图，已知曲线$C_1:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$，曲线$C_2:|y|=|x|+1$，P是平面上一点，若存在过点P的直线与C_1,C_2都有公共点，则称P为"C_1—C_2型点".



(1)在正确证明C_1的左焦点是"C_1—C_2型点"时，要使用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；

(2)设直线$y=kx$与C_2有公共点，求证$|k|>1$，进而证明原点不是"C_1—C_2型点"；

(3)求证：圆$x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$内的点都不是"C_1—C_2型点".

23．（3 分+6分+9分）给定常数$c>0$，定义函数$f(x)=2|x+c+4|-|x+c|$，数列$a_1,a_2,a_3,\cdots$满足$a_{n+1}=f(a_n),n\in N^*$.

（1）若$a_1=-c-2$，求a_2及a_3；（2）求证：对任意$n\in N^*,a_{n+1}-a_n\geq c$，；

（3）是否存在a_1，使得$a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$成等差数列？若存在，求出所有这样的$a_1$，若不存在，说明理由.