# 2015年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）文

**一、选择题（本大题共8个小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）**

1. i为虚数单位，$i^{607}=$（　　）

A．$-i$　　B．$i$　　C．$-1$　　D．$1$

【答案】$A$.

【解析】因为$i^{607}=(i^2)^{303}\cdot i=-i$，所以应选$A$.

【考点定位】本题考查复数的概念及其运算，涉及分数指数幂的运算性质.

【名师点睛】将复数的幂次运算和分数指数幂运算结合在一起，不仅考查了复数的概念，也考查了分数指数幂的运算性质，充分体现了学科内知识之间的联系性，能够较好的反应学生基础知识的识记能力和计算能力.

2.我国古代数学名著《九章算术》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米1534石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得254粒内夹谷28粒，则这批米内夹谷约为（　　）

A．134石　B．169石　C．338石　D．1365石

【答案】$B$.

【解析】设这批米内夹谷的个数为$x$，则由题意并结合简单随机抽样可知，$\frac{28}{254}=\frac{x}{1534}$，即$x=\frac{28}{254}\times 1534\approx 169$，故应选$B$.

【考点定位】本题考查简单的随机抽样，涉及近似计算.

【名师点睛】本题以数学史为背景，重点考查简单的随机抽样及其特点，通过样本频率估算总体频率，虽然简单，但仍能体现方程的数学思想在解题中的应用，能较好考查学生基础知识的识记能力和估算能力、实际应用能力.

3.命题“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$”的否定是（　　）

A．$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0\neq x_0-1$　　B．$\exists x_0\notin(0,+\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$

C．$\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x\neq x-1$　　D．$\forall x\notin(0,+\infty)$，$\ln x=x-1$

【答案】$C$.

【解析】由特称命题的否定为全称命题可知，所求命题的否定为$\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x\neq x-1$，故应选$C$.

【考点定位】本题考查特称命题和全称命题的否定形式，，属识记基础题.

【名师点睛】本题主要考查特称命题的否定，其解题的关键是正确理解并识记其否定的形式特征. 扎根基础

知识，强调教材的重要性，充分体现了教材在高考中的地位和重要性，考查了基本概念、基本规律和基本操作的识记能力.

4.已知变量 $x$ 和 $y$ 满足关系 $y=-0.1x+1$，变量 $y$ 与 $z$ 正相关. 下列结论中正确的是（　　）

A．$x$ 与 $y$ 负相关，$x$ 与 $z$ 负相关　　B．$x$ 与 $y$ 正相关，$x$ 与 $z$ 正相关

C．$x$ 与 $y$ 正相关，$x$ 与 $z$ 负相关　　D．$x$ 与 $y$ 负相关，$x$ 与 $z$ 正相关

【答案】$A$.

【解析】因为变量 $x$ 和 $y$ 满足关系 $y=-0.1x+1$，其中 $-0.1<0$，所以 $x$ 与 $y$ 成负相关；又因为变量 $y$ 与 $z$ 正相关，不妨设 $z=ky+b\ (k>0)$，则将 $y=-0.1x+1$ 代入即可得到：$z=k(-0.1x+1)+b=-0.1kx+(k+b)$，所以 $-0.1k<0$，所以 $x$ 与 $z$ 负相关，综上可知，应选 $A$.

【考点定位】本题考查正相关、负相关，涉及线性回归方程的内容.

【名师点睛】将正相关、负相关、线性回归方程等联系起来，充分体现了方程思想在线性回归方程中的应用，能较好的考查学生运用基础知识的能力. 其易错点有二：其一，未能准确理解正相关与负相关的定义；其二，不能准确的将正相关与负相关问题进行转化为直线斜率大于和小于 0 的问题.

5.$l_1,l_2$ 表示空间中的两条直线，若 $p$：$l_1,l_2$ 是异面直线；$q$：$l_1,l_2$ 不相交，则（　　）

A．$p$ 是 $q$ 的充分条件，但不是 $q$ 的必要条件

B．$p$ 是 $q$ 的必要条件，但不是 $q$ 的充分条件

C．$p$ 是 $q$ 的充分必要条件

D．$p$ 既不是 $q$ 的充分条件，也不是 $q$ 的必要条件

【答案】$A$.

【解析】若 $p$：$l_1,l_2$ 是异面直线，由异面直线的定义知，$l_1,l_2$ 不相交，所以命题 $q$：$l_1,l_2$ 不相交成立，即 $p$ 是 $q$ 的充分条件；反过来，若 $q$：$l_1,l_2$ 不相交，则 $l_1,l_2$ 可能平行，也可能异面，所以不能推出 $l_1,l_2$ 是异面直线，即 $p$ 不是 $q$ 的必要条件，故应选 $A$.

【考点定位】本题考查充分条件与必要条件、异面直线，属基础题.

【名师点睛】以命题与命题间的充分条件与必要条件为契机，重点考查空间中直线的位置关系，其解题的关键是弄清谁是谁的充分条件谁是谁的必要条件，正确理解异面直线的定义，注意考虑问题的全面性、准确性.

6.函数 $f(x)=\sqrt{4-|x|}+\lg\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ 的定义域为（　　）

A．$(2,\ 3)$　　B．$(2,\ 4]$

C．$(2,3)\cup(3,4]$　　D．$(-1,\ 3)\cup(3,\ 6]$

【答案】$C$.

【解析】由函数 $y=f(x)$ 的表达式可知，函数 $f(x)$ 的定义域应满足条件：$4-|x|\geq 0,\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}>0$，解之得 $-2\leq x\leq 2,x>2,x\neq 3$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2,3)\cup(3,4]$，故应选 $C$.学科网

【考点定位】本题考查函数的定义域，涉及根式、绝对值、对数和分式、交集等内容.

【名师点睛】本题看似是求函数的定义域，实质上是将根式、绝对值、对数和分式、交集等知识联系在一起，重点考查学生思维能力的全面性和缜密性，凸显了知识之间的联系性、综合性，能较好的考查学生的计算能力和思维的全面性.

7.设 $x\in\mathbf{R}$，定义符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 则（　　）

A. $|x|=x|\operatorname{sgn} x|$　　　　B. $|x|=x\operatorname{sgn}|x|$

C. $|x|=|x|\operatorname{sgn} x$　　　　D. $|x|=x\operatorname{sgn} x$

【答案】$D$.

【解析】对于选项 $A$，右边 $=x|\operatorname{sgn} x|=\begin{cases}x,x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$，而左边 $=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\ -x,x<0\end{cases}$，显然不正确；对于选项 $B$，右边 $=x\operatorname{sgn}|x|=\begin{cases}x,x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$，而左边 $=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\ -x,x<0\end{cases}$，显然不正确；对于选项 $C$，右边 $=|x|\operatorname{sgn} x=\begin{cases}x,x>0\\ 0,x=0\\ x,x<0\end{cases}$，而左边 $=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\ -x,x<0\end{cases}$，显然不正确；对于选项 $D$，右边 $=x\operatorname{sgn} x=\begin{cases}x,x>0\\ 0,x=0\\ -x,x<0\end{cases}$，而左边 $=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\ -x,x<0\end{cases}$，显然正确；故应选 $D$.

【考点定位】本题考查分段函数及其表示法，涉及新定义，属能力题.

【名师点睛】以新定义为背景，重点考查分段函数及其表示，其解题的关键是准确理解题意所给的新定义，并结合分段函数的表示准确表达所给的函数. 不仅新颖别致，而且能综合考察学生信息获取能力以及知识运用能力.

8.在区间 $[0,1]$ 上随机取两个数 $x,y$，记 $p_1$ 为事件“$x+y\leq\dfrac{1}{2}$”的概率，$p_2$ 为事件“$xy\leq\dfrac{1}{2}$”的概率，则（　　）

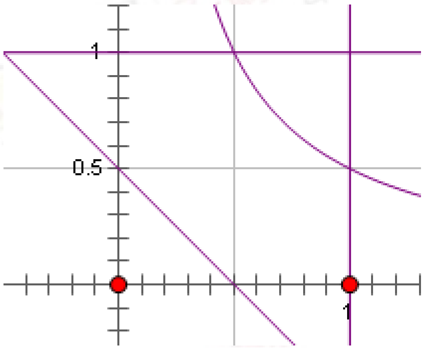
A. $p_1<p_2<\dfrac{1}{2}$　　　　B. $p_1<\dfrac{1}{2}<p_2$

C． $p_2<\frac{1}{2}<p_1$　　　　D． $\frac{1}{2}<p_2<p_1$

【答案】$B$.

【解析】由题意知，事件“$x+y\le\frac{1}{2}$”的概率为 $p_1=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times1}=\frac{1}{8}$，事件“$xy\le\frac{1}{2}$”的概率 $p_2=\frac{S_0}{S}$，其中

$S_0=\frac{1}{2}\times1+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}(1+\ln2)$， $S=1\times1=1$，所以 $p_2=\frac{S_0}{S}=\frac{\frac{1}{2}(1+\ln2)}{1\times1}=\frac{1}{2}(1+\ln2)>\frac{1}{2}$，故应选 $B$.




【考点定位】本题考查几何概型和微积分基本定理，涉及二元一次不等式所表示的区域和反比例函数所表示的区域.

【名师点睛】以几何概型为依托，融合定积分的几何意义、二元一次不等式所表示的区域和反比例函数所表示的区域等内容，充分体现了转化的数学思想在实际问题中的应用，能较好的考查学生灵活运用基础知识解决实际问题的能力.

9.将离心率为 $e_1$ 的双曲线 $C_1$ 的实半轴长 $a$ 和虚半轴长 $b$ $(a\ne b)$ 同时增加 $m$ $(m>0)$ 个单位长度，得到离心率为 $e_2$ 的双曲线 $C_2$，则（　　）

A． 对任意的 $a,b$， $e_1>e_2$　　　　B． 当 $a>b$ 时， $e_1>e_2$；当 $a<b$ 时， $e_1<e_2$

C． 对任意的 $a,b$， $e_1<e_2$　　　　D． 当 $a>b$ 时， $e_1<e_2$；当 $a<b$ 时， $e_1>e_2$

【答案】$D$.

【解析】不妨设双曲线 $C_1$ 的焦点在 $x$ 轴上，即其方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则双曲线 $C_2$ 的方程为：

$\frac{x^2}{(a+m)^2}-\frac{y^2}{(b+m)^2}=1$，所以 $e_1=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$，$e_2=\frac{\sqrt{(a+m)^2+(b+m)^2}}{a+m}=\sqrt{1+\frac{(b+m)^2}{(a+m)^2}}$，当 $a>b$ 时，

$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{(b+m)a-b(a+m)}{(a+m)a}=\frac{(a-b)m}{(a+m)a}>0$，所以 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$，所以 $\left(\frac{b+m}{a+m}\right)^2>\left(\frac{b}{a}\right)^2$，所以 $e_2>e_1$；当 $a<b$

时，$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{(b+m)a-b(a+m)}{(a+m)a}=\frac{(a-b)m}{(a+m)a}<0$，所以$\frac{b+m}{a+m}<\frac{b}{a}$，所以$\left(\frac{b+m}{a+m}\right)^2<\left(\frac{b}{a}\right)^2$，所以$e_2<e_1$；故应选$D$.

【考点定位】本题考查双曲线的定义及其简单的几何性质，考察双曲线的离心率的基本计算，涉及不等式及不等关系.

【名师点睛】将双曲线的离心率的计算与初中学习的溶液浓度问题联系在一起，突显了数学在实际问题中实用性和重要性，充分体现了分类讨论的数学思想方法在解题中的应用，能较好的考查学生思维的严密性和缜密性.

10.已知集合$A=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,\ x,y\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\big||x|\le 2,|y|\le 2,\ x,y\in \mathbf{Z}\}$，定义集合

$A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)\big|(x_1,y_1)\in A,\ (x_2,y_2)\in B\}$，则$A\oplus B$中元素的个数为（　　）

A．77　　　　B．49　　　　C．45　　　　D．30

【答案】$C$.

【解析】由题意知，$A=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,\ x,y\in \mathbf{Z}\}=\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$，$B=\{(x,y)\big||x|\le 2,|y|\le 2,\ x,y\in \mathbf{Z}\}$，所以由新定义集合$A\oplus B$可知，$x_1=\pm1,y_1=0$或$x_1=0,y_1=\pm1$.当$x_1=\pm1,y_1=0$时，$x_1+x_2=-3,-2,-1,0,1,2,3$，$y_1+y_2=-2,-1,0,1,2$，所以此时$A\oplus B$中元素的个数有：$7\times5=35$个；当$x_1=0,y_1=\pm1$时，学科网$x_1+x_2=-2,-1,0,1,2$，$y_1+y_2=-3,-2,-1,0,1,2,3$，这种情形下和第一种情况下除$y_1+y_2$的值取$-3$或$3$外均相同，即此时有$5\times2=10$，由分类计数原理知，$A\oplus B$中元素的个数为$35+10=45$个，故应选$C$.

【考点定位】本题考查用不等式表示平面区域和新定义问题，属高档题.

【名师点睛】用集合、不等式的形式表示平面区域，以新定义为背景，涉及分类计数原理，体现了分类讨论的思想方法的重要性以及准确计数的科学性，能较好的考查学生知识间的综合能力、知识迁移能力和科学计算能力.

## 第Ⅱ卷（共110分）（非选择题共110分）

## 二、填空题（每题7分，满分36分，将答案填在答题纸上）

11.已知向量$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$________.

【答案】9.

【解析】因为向量$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，即$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2=0$，即

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^2=9$，故应填$9$.

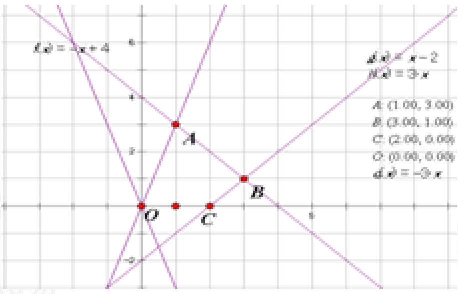
【考点定位】本题考查向量的数量积的基本运算，属基础题.

【名师点睛】将向量的加法运算法则（平行四边形法则和三角形法则）和向量的数量积的定义运算联系在一起，体现数学学科知识间的内在联系，渗透方程思想在解题中的应用，能较好的考查学生基础知识的识记能力和灵活运用能力.

12.若变量$x, y$满足约束条件$\begin{cases}x+y\le 4,\\ x-y\le 2,\\ 3x-y\ge 0,\end{cases}$ 则$3x+y$的最大值是________.

【答案】10.

【解析】首先根据题意所给的约束条件画出其表示的平面区域如下图所示，然后根据图像可得: 目标函数$z=3x+y$过点$B(3,1)$取得最大值，即$z_{\max}=3\times3+1=10$，故应填$10$.



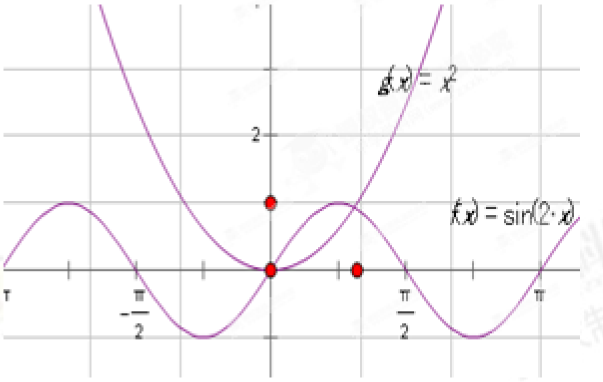

【考点定位】本题考查线性规划的最值问题，属基础题.

【名师点睛】这是一道典型的线性规划问题，重点考查线性规划问题的基本解决方法，体现了数形结合的思想在数学解题中重要性和实用性，能较好的考查学生准确作图能力和灵活运用基础知识解决实际问题的能力.

13.函数$f(x)=2\sin x\sin(x+\frac{\pi}{2})-x^2$的零点个数为________.

【答案】2.

【解析】函数$f(x)=2\sin x\sin(x+\frac{\pi}{2})-x^2$的零点个数等价于方程$2\sin x\sin(x+\frac{\pi}{2})-x^2=0$的根的个数，即函数$g(x)=2\sin x\sin(x+\frac{\pi}{2})=2\sin x\cos x=\sin 2x$与$h(x)=x^2$的图像交点个数.于是，分别画出其函数图像如下图所示，由图可知，函数$g(x)$与$h(x)$的图像有 2 个交点. 学科网



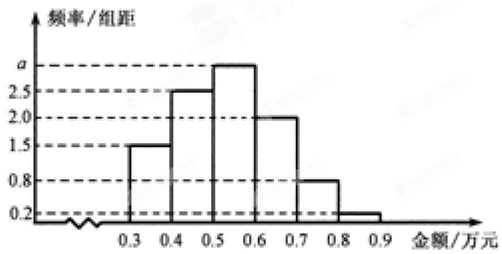

【考点定位】本题考查函数与方程，涉及常见函数图像绘画问题，属中档题.

【名师点睛】将函数的零点问题和方程根的问题、函数的交点问题联系在一起，凸显了数学学科内知识间的内在联系，充分体现了转化化归的数学思想在实际问题中的应用，能较好的考查学生准确绘制函数图像的能力和灵活运用基础知识解决实际问题的能力.

14.某电子商务公司对 10000 名网络购物者 2014 年度的消费情况进行统计，发现消费金额（单位：万元）都在区间 $[0.3, 0.9]$ 内，其频率分布直方图如图所示.

（Ⅰ）直方图中的 $a=$_________；

（Ⅱ）在这些购物者中，消费金额在区间 $[0.5, 0.9]$ 内的购物者的人数为_________.



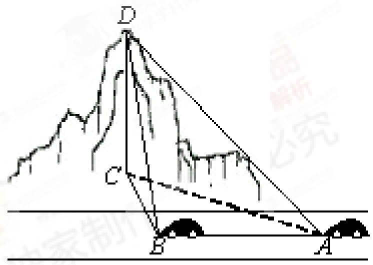

【答案】（Ⅰ）3；（Ⅱ）6000.

【解析】由频率分布直方图及频率和等于 1 可得 $0.2\times0.1+0.8\times0.1+1.5\times0.1+2\times0.1+2.5\times0.1+a\times0.1=1$，解之得 $a=3$.于是消费金额在区间 $[0.5, 0.9]$ 内频率为 $0.2\times0.1+0.8\times0.1+2\times0.1+3\times0.1=0.6$，所以消费金额在区间 $[0.5, 0.9]$ 内的购物者的人数为：$0.6\times10000=6000$，故应填 3；6000.

【考点定位】本题考查频率分布直方图，属基础题.

【名师点睛】以实际问题为背景，重点考查频率分布直方图，灵活运用频率直方图的规律解决实际问题，能较好的考查学生基本知识的识记能力和灵活运用能力.

15.如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到 $A$ 处时测得公路北侧一山顶 $D$ 在西偏北 $30^\circ$ 的方向上，行驶 600m 后到达 $B$ 处，测得此山顶在西偏北 $75^\circ$ 的方向上，仰角为 $30^\circ$，则此山的高度 $CD=$__________m.



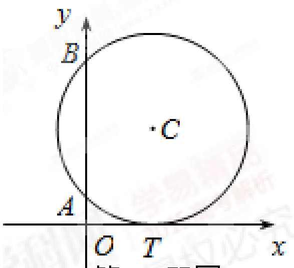

【答案】$100\sqrt{6}$.

【解析】在 $\Delta ABC$ 中，$\angle CAB=30^0$，$\angle ACB=75^0-30^0=45^0$，根据正弦定理知，$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$，即 $BC=\frac{AB}{\sin\angle ACB}\times\sin\angle BAC=\frac{600}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=300\sqrt{2}$，所以 $CD=BC\times\tan\angle DBC=300\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=100\sqrt{6}$，故应填 $100\sqrt{6}$.

【考点定位】本题考查解三角形的实际应用举例，属中档题.

【名师点睛】以实际问题为背景，将抽象的数学知识回归生活实际，凸显了数学的实用性和重要性，体现了“数学源自生活，生活中处处有数学”的数学学科特点，能较好的考查学生识记和理解数学基本概念的能力和基础知识在实际问题中的运用能力.

16.如图，已知圆 $C$ 与 $x$ 轴相切于点 $T(1,0)$，与 $y$ 轴正半轴交于两点 $A$，$B$（$B$ 在 $A$ 的上方），且 $|AB|=2$.



第 16 题图

（Ⅰ）圆 $C$ 的标准方程为_________；

（Ⅱ）圆 $C$ 在点 $B$ 处的切线在 $x$ 轴上的截距为_________.

【答案】（Ⅰ）$(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$；（Ⅱ）$-1-\sqrt{2}$.

【解析】设点 $C$ 的坐标为 $(x_0, y_0)$，则由圆 $C$ 与 $x$ 轴相切于点 $T(1,0)$ 知，点 $C$ 的横坐标为 1，即 $x_0=1$，半径 $r=y_0$．又因为 $|AB|=2$，所以 $1^2+1^2=y_0^2$，即 $y_0=\sqrt{2}=r$，所以圆 $C$ 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$，令 $x=0$ 得：$B(0,\sqrt{2}+1)$．设圆 $C$ 在点 $B$ 处的切线方程为 $y-(\sqrt{2}+1)=kx$，则圆心 $C$ 到其距离为：学科网

$d=\dfrac{|k-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，解之得 $k=1$．即圆 $C$ 在点 $B$ 处的切线方程为 $y=x+(\sqrt{2}+1)$，于是令 $y=0$ 可得

$x=-\sqrt{2}-1$，即圆 $C$ 在点 $B$ 处的切线在 $x$ 轴上的截距为 $-1-\sqrt{2}$，故应填 $(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$ 和 $-1-\sqrt{2}$．

【考点定位】本题考查圆的标准方程和圆的切线问题，属中高档题.

【名师点睛】将圆的标准方程、圆的切线方程与弦长问题联系起来，注重实际问题的特殊性，合理的挖掘问题的实质，充分体现了数学学科特点和知识间的内在联系，渗透着方程的数学思想，能较好的考查学生的综合知识运用能力. 其解题突破口是观察出点 $C$ 的横坐标.

17.$a$ 为实数，函数 $f(x)=|x^2-ax|$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值记为 $g(a)$．当 $a=$________时，$g(a)$ 的值最小.

【答案】$2\sqrt{2}-2$．

【解析】因为函数 $f(x)=|x^2-ax|$，所以分以下几种情况对其进行讨论：①当 $a\le 0$ 时，函数

$f(x)=|x^2-ax|=x^2-ax$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{max}=g(a)=1-a$；②当 $0<a<2\sqrt{2}-2$ 时，此时 $f(\frac{a}{2})=|(\frac{a}{2})^2-a\times\frac{a}{2}|=\frac{a^2}{4}$，$f(1)=1-a$，而 $\frac{a^2}{4}-(1-a)=\frac{(a+2)^2}{4}-2<0$，所以 $f(x)_{max}=g(a)=1-a$；③当 $2\sqrt{2}-2\le a<1$ 时，$f(x)=|x^2-ax|=-x^2+ax$ 在区间 $(0,\frac{a}{2})$ 上递增，在 $(\frac{a}{2},1)$ 上递减．当 $x=\frac{a}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}$；④当 $a\ge 2$ 时，$f(x)=|x^2-ax|=-x^2+ax$ 在区间 $[0,1]$ 上递增，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(1)=1-a$，则 $g(a)=\begin{cases}1-a, a<2\sqrt{2}-2\\ \frac{a^2}{4}, 2\sqrt{2}-2\le a<2\\ a-1, a\ge 2\end{cases}$ 在 $(-\infty,2\sqrt{2}-2)$ 上递减，$(2\sqrt{2}-2,+\infty)$ 上递增，即当 $a=2\sqrt{2}-2$ 时，$g(a)$ 的值最小．故应填 $2\sqrt{2}-2$．

【考点定位】本题考查分段函数的最值问题和函数在区间上的最值问题，属高档题.

【名师点睛】将含绝对值的二次函数在区间上的最值问题和分段函数的最值问题融合在一起，运用分类讨论的思想将含绝对值问题转化为分段函数的问题，充分体现了分类讨论和化归转化的数学思想，能较好的考查知识综合能力. 其解题的关键是运用分类讨论求出 $g(a)$ 的表达式和分段函数在区间上的最值求法.

## 三、解答题 （本大题共 5 小题，共 65 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

18.（本小题满分 12 分）

某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

| $\omega x+\varphi$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | |
| $A\sin(\omega x+\varphi)$ | $0$ | $5$ | | $-5$ | $0$ |

（Ⅰ）请将上表数据补充完整，填写在答题卡上相应位置，并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）将 $y=f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 图象，求 $y=g(x)$ 的图象离原点 $O$ 最近的对称中心.

【答案】（Ⅰ）根据表中已知数据，解得 $A=5,\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$.数据补全如下表：

| $\omega x+\varphi$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{13}{12}\pi$ |
| $A\sin(\omega x+\varphi)$ | $0$ | $5$ | $0$ | $-5$ | $0$ |

且函数表达式为 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$；（Ⅱ）离原点 $O$ 最近的对称中心为 $(-\frac{\pi}{12},0)$.

【解析】（Ⅰ）根据表中已知数据可得：$A=5$，$\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{6}\omega+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，解得 $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 数据补全如下表：

| $\omega x+\varphi$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{13}{12}\pi$ |
| $A\sin(\omega x+\varphi)$ | $0$ | $5$ | $0$ | $-5$ | $0$ |

且函数表达式为 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，因此 $g(x)=5\sin[2(x+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}]=5\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.因为 $y=\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$. 令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.即 $y=g(x)$ 图象的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0)$，$k\in\mathbf{Z}$，其中离原点 $O$ 最近的对称中心为 $(-\frac{\pi}{12},0)$.

【考点定位】本题考查五点作图法和三角函数图像的平移与三角函数的图像及其性质，属基础题.

【名师点睛】将五点作图法、三角函数图像的平移与三角函数的图像及其性质联系在一起，正确运用方程组的思想，合理的解三角函数值，准确使用三角函数图像的平移和三角函数的图像及其性质是解题的关键，能较好的考查学生基础知识的实际应用能力、准确计算能力和规范解答能力.

19.（本小题满分 12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，前 $n$ 项和为 $S_n$，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q$．已知 $b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）当 $d>1$ 时，记 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

【答案】（Ⅰ）$\begin{cases}a_n=2n-1,\\ b_n=2^{n-1}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{9}(2n+79),\\ b_n=9\cdot(\frac{2}{9})^{n-1}.\end{cases}$；（Ⅱ）$T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

【解析】（Ⅰ）由题意有，$\begin{cases}10a_1+45d=100,\\ a_1d=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a_1+9d=20,\\ a_1d=2,\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=9,\\ d=\frac{2}{9}.\end{cases}$

故 $\begin{cases}a_n=2n-1,\\ b_n=2^{n-1}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{9}(2n+79),\\ b_n=9\cdot(\frac{2}{9})^{n-1}.\end{cases}$.

（Ⅱ）由 $d>1$，知 $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，故 $c_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，于是

$$T_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}, \quad ①$$

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^5}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}. \quad ②$$

①-②可得

$$\frac{1}{2}T_n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n},$$

故 $T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

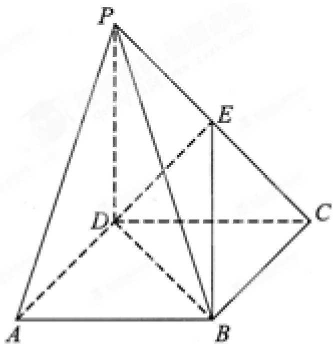
【考点定位】本题综合考查等差数列、等比数列和错位相减法求和，属中档题.

【名师点睛】这是一道简单综合试题，其解题思路：第一问直接借助等差、等比数列的通项公式列出方程进行求解，第二问运用错位相减法直接对其进行求和. 体现高考坚持以基础为主，以教材为蓝本，注重计算能力培养的基本方向.

20.（本小题满分 13 分）

《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

在如图所示的阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=CD$，点 $E$ 是 $PC$ 的中点，连接 $DE, BD, BE$.




（Ⅰ）证明：$DE\perp$ 平面 $PBC$. 试判断四面体 $EBCD$ 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，请说明理由；

（Ⅱ）记阳马 $P-ABCD$ 的体积为 $V_1$，四面体 $EBCD$ 的体积为 $V_2$，求 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值.

【答案】（Ⅰ）因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$. 由底面 $ABCD$ 为长方形，有 $BC\perp CD$，而 $PD\cap CD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 $PCD$. $DE\subset$ 平面 $PCD$，所以 $BC\perp DE$. 又因为 $PD=CD$，点 $E$ 是 $PC$ 的中点，所以 $DE\perp PC$. 而 $PC\cap BC=C$，所以 $DE\perp$ 平面 $PBC$. 四面体 $EBCD$ 是一个鳖臑；（Ⅱ）$\frac{V_1}{V_2}=4.$

【解析】（Ⅰ）因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$．由底面 $ABCD$ 为长方形，有 $BC\perp CD$，而 $PD\cap CD=D$，所以 $BC\perp$平面 $PCD$．$DE\subset$平面 $PCD$，所以 $BC\perp DE$．又因为 $PD=CD$，点 $E$ 是 $PC$ 的中点，所以 $DE\perp PC$．而 $PC\cap BC=C$，所以 $DE\perp$平面 $PBC$．由 $BC\perp$平面 $PCD$，$DE\perp$平面 $PBC$，可知四面体 $EBCD$ 的四个面都是直角三角形，即四面体 $EBCD$ 是一个鳖臑，其四个面的直角分别是 $\angle BCD,\angle BCE,\angle DEC,\angle DEB$.学科网

（Ⅱ）由已知，$PD$ 是阳马 $P-ABCD$ 的高，所以 $V_1=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PD=\frac{1}{3}BC\cdot CD\cdot PD$；由（Ⅰ）知，$DE$ 是鳖臑 $D-BCE$ 的高，$BC\perp CE$，所以 $V_2=\frac{1}{3}S_{\Delta BCE}\cdot DE=\frac{1}{6}BC\cdot CE\cdot DE$ .在 Rt $\triangle PDC$ 中，因为 $PD=CD$，点 $E$ 是 $PC$ 的中点，所以 $DE=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}CD$，于是 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}BC\cdot CD\cdot PD}{\frac{1}{6}BC\cdot CE\cdot DE}=\frac{2CD\cdot PD}{CE\cdot DE}=4.$

【考点定位】本题考查直线与平面垂直的判定定理、直线与平面垂直的性质定理和简单几何体的体积，属中高档题.

【名师点睛】以《九章算术》为背景，给予新定义，增添了试题的新颖性，但其实质仍然是考查线面垂直与简单几何体的体积计算，其解题思路：第一问通过线线、线面垂直相互之间的转化进行证明，第二问关键注意底面积和高之比，运用锥体的体积计算公式进行求解. 结合数学史料的给予新定义，不仅考查学生解题能力，也增强对数学的兴趣培养，为空间立体几何注入了新的活力.

21.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，$f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$，其中 e 为自然对数的底数.

（Ⅰ）求 $f(x)$，$g(x)$ 的解析式，并证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，$g(x)>1$；

（Ⅱ）设 $a\le 0$，$b\ge 1$，证明：当 $x>0$ 时，$ag(x)+(1-a)<\frac{f(x)}{x}<bg(x)+(1-b)$.

【答案】（Ⅰ）$f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$，$g(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.证明：当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>1$，$0<\mathrm{e}^{-x}<1$，故 $f(x)>0$.

又由基本不等式，有 $g(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})>\sqrt{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}=1$，即 $g(x)>1$. （Ⅱ）由（Ⅰ）得

$f'(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x})'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}})=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=g(x)$ ⑤ $g'(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x})'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}})=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})=f(x)$ ⑥

当 $x>0$ 时，$\frac{f(x)}{x}>ag(x)+(1-a)$ 等价于 $f(x)>axg(x)+(1-a)x$ ⑦ $\frac{f(x)}{x}<bg(x)+(1-b)$ 等价于 $f(x)<bxg(x)+(1-b)x.$ ⑧于是设函数 $h(x)=f(x)-cxg(x)-(1-c)x$，由⑤⑥，有 $h'(x)=g(x)-cg(x)-cxf(x)-(1-c)=(1-c)[g(x)-1]-cxf(x).$ 当 $x>0$ 时，（1）若 $c\le 0$，由③④，得 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，从而 $h(x)>h(0)=0$，即 $f(x)>cxg(x)+(1-c)x$，故⑦成立.（2）若 $c\ge 1$，由③

④，得 $h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，从而 $h(x)<h(0)=0$，即 $f(x)<cxg(x)+(1-c)x$，故⑧成立.

综合⑦⑧，得 $ag(x)+(1-a)<\dfrac{f(x)}{x}<bg(x)+(1-b)$.学科网

**【解析】**（Ⅰ）由 $f(x)$、$g(x)$的奇偶性及 $f(x)+g(x)=e^x$ ,①得：$-f(x)+g(x)=e^{-x}$.　　②

联立①②解得 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$g(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

当 $x>0$时，$e^x>1$，$0<e^{-x}<1$，故 $f(x)>0$.　　③

又由基本不等式，有 $g(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})>\sqrt{e^xe^{-x}}=1$，即 $g(x)>1$.　　④

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-\dfrac{1}{e^x})'=\dfrac{1}{2}(e^x+\dfrac{e^x}{e^{2x}})=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=g(x)$，　　⑤

$g'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+\dfrac{1}{e^x})'=\dfrac{1}{2}(e^x-\dfrac{e^x}{e^{2x}})=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=f(x)$，　　⑥

当 $x>0$时，$\dfrac{f(x)}{x}>ag(x)+(1-a)$等价于 $f(x)>axg(x)+(1-a)x$，　　⑦

$\dfrac{f(x)}{x}<bg(x)+(1-b)$等价于 $f(x)<bxg(x)+(1-b)x$.　　⑧

设函数 $h(x)=f(x)-cxg(x)-(1-c)x$，由⑤⑥，有 $h'(x)=g(x)-cg(x)-cxf(x)-(1-c)=(1-c)[g(x)-1]-cxf(x)$.
当 $x>0$时，（1）若 $c\le 0$，由③④，得 $h'(x)>0$，故 $h(x)$在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，从而 $h(x)>h(0)=0$，即 $f(x)>cxg(x)+(1-c)x$，故⑦成立.（2）若 $c\ge 1$，由③④，得 $h'(x)<0$，故 $h(x)$在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，从而 $h(x)<h(0)=0$，即 $f(x)<cxg(x)+(1-c)x$，故⑧成立.综合⑦⑧，得 $ag(x)+(1-a)<\dfrac{f(x)}{x}<bg(x)+(1-b)$.

【考点定位】本题考查函数的奇偶性和导数在研究函数的单调性与极值中的应用，属高档题.

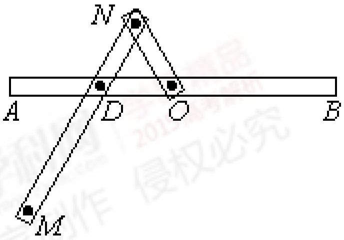
【名师点睛】将函数的奇偶性和导数在研究函数的单调性与极值中的应用联系在一起，重点考查函数的综合性，体现了函数在高中数学的重要地位，其解题的关键是第一问需运用奇函数与偶函数的定义及性质建立方程组进行求解；第二问属于函数的恒成立问题，需借助导数求解函数最值来解决.

22.（本小题满分 14 分）

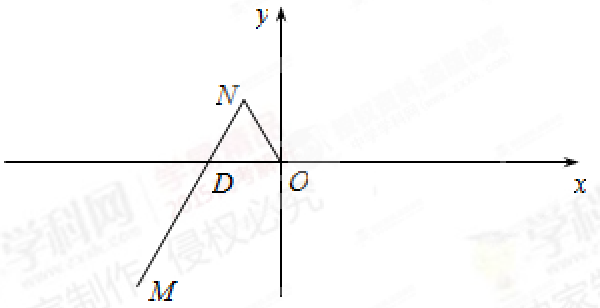
一种画椭圆的工具如图 1 所示．$O$是滑槽 $AB$ 的中点，短杆 $ON$ 可绕 $O$ 转动，长杆 $MN$ 通过 $N$ 处铰链与 $ON$ 连接，$MN$ 上的栓子 $D$ 可沿滑槽 $AB$ 滑动，且 $DN=ON=1$，$MN=3$．当栓子 $D$ 在滑槽 $AB$ 内作往复运动时，带动 $N$ 绕 $O$ 转动，$M$ 处的笔尖画出的椭圆记为 $C$．以 $O$ 为原点，$AB$ 所在的直线为 $x$ 轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系．

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的方程；

（Ⅱ）设动直线 $l$ 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 $P,Q$ 两点．若直线 $l$ 总与椭圆 $C$ 有且只有一个公共点，试探究：$\Delta OPQ$ 的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由．




第 22 题图 1




第 22 题图 2

【答案】（Ⅰ）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.（Ⅱ）当直线$l$与椭圆$C$在四个顶点处相切时，$\Delta OPQ$的面积取得最小值 8.

【解析】（Ⅰ）因为$|OM|\le|MN|+|NO|=3+1=4$，当$M,N$在$x$轴上时，等号成立；同理$|OM|\ge|MN|-|NO|=3-1=2$，当$D,O$重合，即$MN\perp x$轴时，等号成立. 所以椭圆$C$的中心为原点$O$，长半轴长为$4$，短半轴长为$2$，其方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）（1）当直线$l$的斜率不存在时，直线$l$为$x=4$或$x=-4$，都有$S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$.

（2）当直线$l$的斜率存在时，设直线$l:y=kx+m\ (k\ne\pm\frac{1}{2})$，由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+4y^2=16,\end{cases}$消去$y$，可得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$. 因为直线$l$总与椭圆$C$有且只有一个公共点，所以$\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-16)=0$，即$m^2=16k^2+4$.　　①

又由$\begin{cases}y=kx+m,\\x-2y=0,\end{cases}$可得$P(\frac{2m}{1-2k},\frac{m}{1-2k})$；同理可得$Q(\frac{-2m}{1+2k},\frac{m}{1+2k})$. 由原点$O$到直线$PQ$的距离为$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$和$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_Q|$，可得学科网

$$S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{1}{2}|m||x_P-x_Q|=\frac{1}{2}\cdot|m|\left|\frac{2m}{1-2k}+\frac{2m}{1+2k}\right|=\left|\frac{2m^2}{1-4k^2}\right|.\quad ②$$

将①代入②得，$S_{\Delta OPQ}=\left|\frac{2m^2}{1-4k^2}\right|=8\frac{|4k^2+1|}{|4k^2-1|}$. 当$k^2>\frac{1}{4}$时，$S_{\Delta OPQ}=8(\frac{4k^2+1}{4k^2-1})=8(1+\frac{2}{4k^2-1})>8$；当$0\le k^2<\frac{1}{4}$时，$S_{\Delta OPQ}=8(\frac{4k^2+1}{1-4k^2})=8(-1+\frac{2}{1-4k^2})$. 因$0\le k^2<\frac{1}{4}$，则$0<1-4k^2\le1$，$\frac{2}{1-4k^2}\ge2$，所以$S_{\Delta OPQ}=8(-1+\frac{2}{1-4k^2})\ge8$，当且仅当$k=0$时取等号.所以当$k=0$时，$S_{\Delta OPQ}$的最小值为 8.

综合（1）（2）可知，当直线$l$与椭圆$C$在四个顶点处相切时，$\Delta OPQ$的面积取得最小值 8.

【考点定位】本题考查椭圆的标准方程与直线与椭圆相交综合问题，属高档题.

【名师点睛】作为压轴大题，其第一问将椭圆的方程与课堂实际教学联系在一起，重点考查学生信息获取与运用能力和实际操作能力，同时为椭圆的实际教学提供教学素材；第二问考查直线与椭圆相交的综合问题，借助函数思想进行求解. 其解题的关键是注重基本概念的深层次理解，灵活运用所学知识.