2015年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数　　学（文史类）

第Ⅰ卷（选择题共60分）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若$(1+i)+(2-3i)=a+bi$（$a,b\in R,i$是虚数单位），则a,b的值分别等于（　　）

A．$3,-2$　B．$3,2$　C．$3,-3$　D．$-1,4$

【答案】A

【解析】学科网

由已知得$3-2i=a+bi$，所以$a=3,b=-2$，选A.

【考点定位】复数的概念.

【名师点睛】本题考查复数相等的充要条件和复数运算，利用复数相等可以确定参数的取值，属于基础题，但是要注意运算准确.

2．若集合$M=\{x|-2\le x<2\}$，$N=\{0,1,2\}$，则$M\cap N$等于（　　）

A．$\{0\}$　B．$\{1\}$　C．$\{0,1,2\}$　D$\{0,1\}$

【答案】D

【解析】由交集定义得$M\cap N=\{0,1\}$，故选D.

【考点定位】集合的运算.

【名师点睛】本题考查集合的交集运算，理解交集的含义是正确解答的前提，属于基础题.

3．下列函数为奇函数的是(　　)

A．$y=\sqrt{x}$　B．$y=e^x$　C．$y=\cos x$　D．$y=e^x-e^{-x}$

【答案】D

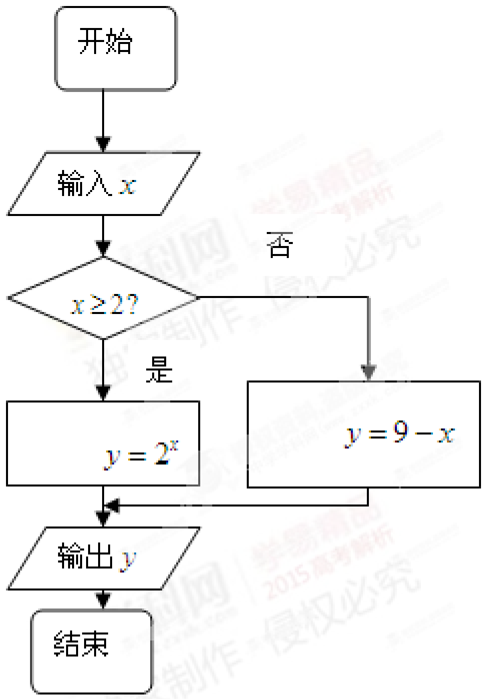
【解析】函数$y=\sqrt{x}$和$y=e^x$是非奇非偶函数；　$y=\cos x$是偶函数；　$y=e^x-e^{-x}$是奇函数，故选D.

【考点定位】函数的奇偶性.

【名师点睛】本题考查函数的奇偶性，除了要掌握奇偶性定义外，还要深刻理解其定义域特征即定义域关于原点对称，否则即使满足定义，但是不具有奇偶性，属于基础题.

4．阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序．若输入 x 的值为 1，则输出 y 的值为（　　）

A．2　 B．7　 C．8　　D．128



【答案】C

【解析】由题意得，该程序表示分段函数 $y=\begin{cases}2^x, x\geq 2,\\ 9-x, x<2\end{cases}$，则 $f(1)=9-1=8$，故选 C.

【考点定位】程序框图.

【名师点睛】本题考查程序框图，关键在于读懂框图有什么功能，要注意依序进行，认真判断条件来决定程序的执行方向．理解每个变量和框图的关系．运算量不大，重在理解，重在细心，属于基础题.

5．若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$ 过点 $(1,1)$，则 $a+b$ 的最小值等于（　　）

A．2　　B．3　 C．4　 D．5

【答案】C

【解析】由已知得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $a+b=(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$，因为 $a>0,b>0$，所以

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，故 $a+b\geq 4$，当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=2$ 时取等号．学科网

【考点定位】基本不等式.

【名师点睛】本题以直线方程为背景考查基本不等式，利用直线过点寻求变量 a,b 关系，进而利用基本不等式求最小值，要注意使用基本不等式求最值的三个条件“正，等，定”，属于中档题.

6．若$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，且α为第四象限角，则$\tan\alpha$的值等于（　　）

A．$\frac{12}{5}$　B．$-\frac{12}{5}$　C．$\frac{5}{12}$　D．$-\frac{5}{12}$

【答案】D

【解析】由$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，且α为第四象限角，则$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{12}{13}$，则$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$=-\frac{5}{12}$，故选D.

【考点定位】同角三角函数基本关系式.

【名师点睛】本题考查同角三角函数基本关系式，在$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$三个值之间，知其中的一个可以求剩余两个，但是要注意判断角α的象限，从而决定正负符号的取舍，属于基础题.

7．设$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(1,1)$，$\vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}$．若$\vec{b}\perp\vec{c}$，则实数k的值等于（　　）

A．$-\frac{3}{2}$　B．$-\frac{5}{3}$　C．$\frac{5}{3}$　D．$\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】由已知得$\vec{c}=(1,2)+k(1,1)=(k+1,k+2)$，因为$\vec{b}\perp\vec{c}$，则$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，因此$k+1+k+2=0$，解得$k=-\frac{3}{2}$，故选A．学科网

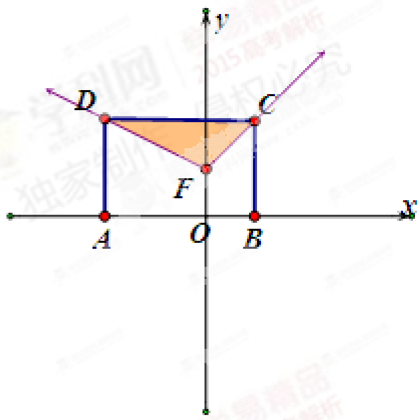
【考点定位】平面向量数量积.

【名师点睛】本题考查平面向量的线性运算和数量积运算以及平面向量基本定理，由已知$\vec{a},\vec{b}$的坐标计算$\vec{c}$的坐标，再利用已知条件列方程求参数的值；本题还可以先利用向量运算，即$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{b}^2=0$，再引入坐标运算，属于中档题.

8．如图，矩形$ABCD$中，点A在x轴上，点B的坐标为$(1,0)$．且点C与点D在函数

$f(x)=\begin{cases}x+1,x\geq 0\\ -\frac{1}{2}x+1,x<0\end{cases}$的图像上．若在矩形$ABCD$内随机取一点，则该点取自阴影部分的概率等于

（　　）



A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{1}{2}$

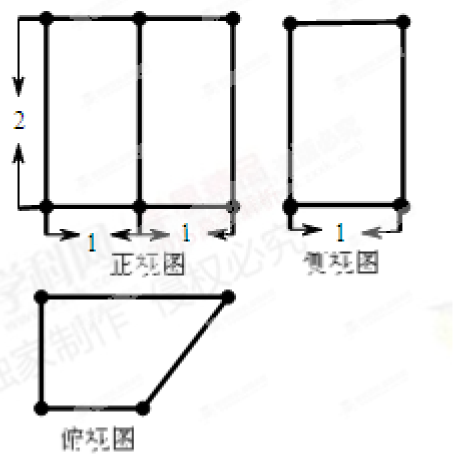
【答案】B

【解析】由已知得 $B(1,0)$， $C(1,2)$， $D(-2,2)$， $F(0,1)$．则矩形 $ABCD$ 面积为 $3\times 2=6$，阴影部分面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$，故该点取自阴影部分的概率等于 $\frac{\frac{3}{2}}{6}=\frac{1}{4}$．

【考点定位】几何概型．

【名师点睛】本题考查几何概型，当实验结果由等可能的无限多个结果组成时，利用古典概型求概率显然是不可能的，可以将所求概率转化为长度的比值（一个变量）、面积的比值（两个变量）、体积的比值（三个变量或根据实际意义）来求，属于中档题．

9．某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积等于（　　）



A．$8+2\sqrt{2}$　B．$11+2\sqrt{2}$　　C．$14+2\sqrt{2}$　　D．15

【答案】B

【解析】由三视图还原几何体，该几何体是底面为直角梯形，

高为2的直四棱柱，且底面直角梯形的两底分别为1,2，直角腰长为1，

斜腰为$\sqrt{2}$．底面积为$2\times\frac{1}{2}\times 3=3$，侧面积为$2+2+4+2\sqrt{2}=8+2\sqrt{2}$，

所以该几何体的表面积为$11+2\sqrt{2}$，故选B.

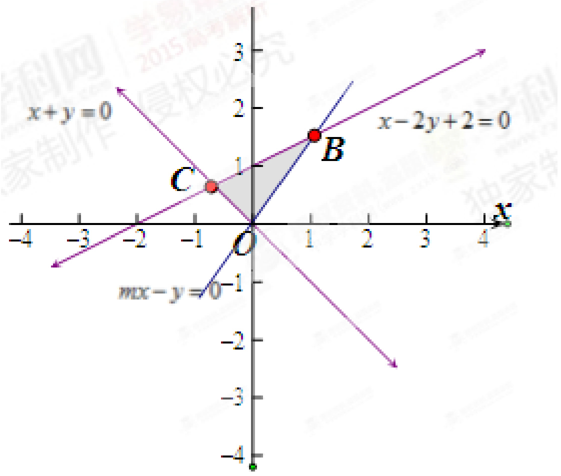
【考点定位】三视图和表面积.

【名师点睛】本题考查三视图和表面积计算，关键在于根据三视图还原体，要掌握常见几何体的三视图，比如三棱柱、三棱锥、圆锥、四棱柱、四棱锥、圆锥、球、圆台以及其组合体，并且要弄明白几何体的尺寸跟三视图尺寸的关系；有时候还可以利用外部补形法，将几何体补成长方体或者正方体等常见几何体，属于中档题.

10．变量x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geq 0\\ x-2y+2\geq 0\\ mx-y\leq 0\end{cases}$，若$z=2x-y$的最大值为2，则实数$m$等于（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【答案】C



【解析】将目标函数变形为$y=2x-z$，当z取最大值，则直线纵截距最小，故当$m\leq 0$时，不满足题意；当$m>0$时，画出可行域，如图所示，其中$B(\frac{2}{2m-1},\frac{2m}{2m-1})$．显然$O(0,0)$不是最优解，故只能$B(\frac{2}{2m-1},\frac{2m}{2m-1})$是最优解，代入目标函数得$\frac{4}{2m-1}-\frac{2m}{2m-1}=2$，解得$m=1$，故选C．学科网

【考点定位】线性规划.

【名师点睛】本题考查含参数的线性规划问题，首先要对目标函数进行分析，什么时候目标函数取到最大值，其次要对m的符号讨论，以确定可行域，解该类题目时候，往往还要将目标直线的斜率和可行域边界

的斜率比较，否则很容易出错．

11．已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F．短轴的一个端点为 M，直线 $l:3x-4y=0$ 交椭圆 E 于 A,B 两点．若 $|AF|+|BF|=4$，点 M 到直线 l 的距离不小于 $\dfrac{4}{5}$，则椭圆 E 的离心率的取值范围是（　）

A．$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$　B．$(0,\dfrac{3}{4}]$　C．$[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1)$　D．$[\dfrac{3}{4},1)$

【答案】A

【解析】设左焦点为 F，连接 AF_1，BF_1．则四边形 BF_1AF 是平行四边形，故 $|AF_1|=|BF|$，所以 $|AF|+|AF_1|=4=2a$，所以 $a=2$，设 $M(0,b)$，则 $\dfrac{4b}{5}\geq\dfrac{4}{5}$，故 $b\geq1$，从而 $a^2-c^2\geq1$，$0<c^2\leq3$，$0<c\leq\sqrt{3}$，所以椭圆 E 的离心率的取值范围是 $(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$，故选 A.

【考点定位】1、椭圆的定义和简单几何性质；2、点到直线距离公式．

【名师点睛】本题考查椭圆的简单几何性质，将 $|AF|+|BF|=4$ 转化为 $|AF|+|AF_1|=4=2a$，进而确定 a 的值，是本题关键所在，体现了椭圆的对称性和椭圆概念的重要性，属于难题．求离心率取值范围就是利用代数方法或平面几何知识寻找椭圆中基本量 a,b,c 满足的不等量关系，以确定 $\dfrac{c}{a}$ 的取值范围．

12．“对任意 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$k\sin x\cos x<x$”是“$k<1$”的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件　C．　充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】当 $k<1$ 时，$k\sin x\cos x=\dfrac{k}{2}\sin 2x$，构造函数 $f(x)=\dfrac{k}{2}\sin 2x-x$，则 $f'(x)=k\cos 2x-1<0$．故 $f(x)$ 在 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增，故 $f(x)<f(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{\pi}{2}<0$，则 $k\sin x\cos x<x$；　当 $k=1$ 时，不等式 $k\sin x\cos x<x$ 等价于 $\dfrac{1}{2}\sin 2x<x$，构造函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-x$，则 $g'(x)=\cos 2x-1<0$，故 $g(x)$ 在 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 递增，故 $g(x)<g(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{\pi}{2}<0$，则 $\sin x\cos x<x$．综上所述，“对任意 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$k\sin x\cos x<x$”是“$k<1$”的必要不充分条件，选 B．学科网

【考点定位】导数的应用．

【名师点睛】本题以充分条件和必要条件为载体考查三角函数和导数在单调性上的应用，根据已知条件构造函数，进而研究其图象与性质，是函数思想的体现，属于难题.

第 II 卷（非选择题共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.把答案填在答题卡的相应位置.

13．某校高一年级有 900 名学生，其中女生 400 名，按男女比例用分层抽样的方法，从该年级学生中抽取一个容量为 45 的样本，则应抽取的男生人数为_______.

【答案】25

【解析】由题意得抽样比例为$\frac{45}{900}=\frac{1}{20}$，故应抽取的男生人数为$500\times\frac{1}{20}=25$.

【考点】分层抽样.

【名师点睛】本题考查抽样方法，要搞清楚三种抽样方法的区别和联系，其中分层抽样是按比例抽样；系统抽样是等距离抽样，属于基础题.

14．若ΔABC中，$AC=\sqrt{3}$，$A=45^0$，$C=75^0$，则$BC=$_______.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】由题意得$B=180^0-A-C=60^0$．由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，则$BC=\frac{AC\sin A}{\sin B}$，

所以$BC=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$.

【考点定位】正弦定理.

【名师点睛】本题考查正弦定理，利用正弦定理可以求解一下两类问题：（1）已知三角形的两角和任意一边，求三角形其他两边与角；（2）已知三角形的两边和其中一边的对角，求三角形其他边与角．关键是计算准确细心，属于基础题.

15．若函数$f(x)=2^{|x-a|}(a\in R)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，且$f(x)$在$[m,+\infty)$单调递增，则实数m的最小值等于_______.

【答案】1

【解析】由 $f(1+x)=f(1-x)$ 得函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，故 $a=1$，则 $f(x)=2^{|x-1|}$，由复合函数单调性得 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 递增，故 $m\geq 1$，所以实数 m 的最小值等于 1.

【考点定位】函数的图象与性质.

【名师点睛】本题考查函数的图象和性质，由已知条件确定 $f(x)$ 的解析式，确定递增区间，进而确定参数取值范围，注意函数的单调递增区间是 D 和函数在区间 D 上递增是不同的概念，其中“单调递增区间是 D”反映了函数本身的属性，而“函数在区间 D 上递增”反映函数的局部性质.

16．若 a,b 是函数 $f(x)=x^2-px+q\left(p>0,q>0\right)$ 的两个不同的零点，且 $a,b,-2$ 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则 $p+q$ 的值等于________.

【答案】9

【解析】由韦达定理得 $a+b=p$，$a\cdot b=q$，则 $a>0,b>0$，当 $a,b,-2$ 适当排序后成等比数列时，-2 必为等比中项，故 $a\cdot b=q=4$，$b=\frac{4}{a}$. 当适当排序后成等差数列时，-2 必不是等差中项，当 a 是等差中项时，$2a=\frac{4}{a}-2$，解得 $a=1$，$b=4$；当 $\frac{4}{a}$ 是等差中项时，$\frac{8}{a}=a-2$，解得 $a=4$，$b=1$，综上所述，$a+b=p=5$，所以 $p+q=9$. 学科网

【考点定位】等差中项和等比中项.

【名师点睛】本题以零点为载体考查等比中项和等差中项，其中分类讨论和逻辑推理是解题核心. 三个数成等差数列或等比数列，项与项之间是有顺序的，但是等差中项或等比中项是唯一的，故可以利用中项进行讨论，属于难题.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．(本小题满分 12 分)

等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=4$，$a_4+a_7=15$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=2^{a_n-2}+n$，求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}$ 的值.

【答案】（Ⅰ）$a_n=n+2$；（Ⅱ）2101.

【解析】(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由已知得 $\begin{cases} a_1+d=4 \\ (a_1+3d)+(a_1+6d)=15 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a_1=3 \\ d=1 \end{cases}$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n+2$.

(II) 由 (I) 可得 $b_n=2^n+n$.

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=(2+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+\cdots+(2^{10}+10)$

$=(2+2^2+2^3+\cdots+2^{10})+(1+2+3+\cdots+10)$

$=\dfrac{2(1-2^{10})}{1-2}+\dfrac{(1+10)\times 10}{2}$

$=(2^{11}-2)+55$

$=2^{11}+53=2101$. 学科网

【考点定位】1、等差数列通项公式；2、分组求和法.

【名师点睛】确定等差数列的基本量是 a_1,d. 所以确定等差数列需要两个独立条件，求数列前 n 项和常用的方法有四种：(1) 裂项相消法（通过将通项公式裂成两项的差或和，在前 n 项相加的过程中相互抵消）；(2) 错位相减法（适合于等差数列乘以等比数列型）；(3) 分组求和法(根据数列通项公式的特点，将其分解为等差数列求和以及等比数列求和)；(4) 奇偶项分析法（适合于整个数列特征不明显，但是奇数项之间以及偶数项之间有明显的等差数列特征或等比数列特征）.

18.（本题满分 12 分）

全网传播的融合指数是衡量电视媒体在中国网民中影响了的综合指标. 根据相关报道提供的全网传播 2015 年某全国性大型活动的“省级卫视新闻台”融合指数的数据，对名列前 20 名的“省级卫视新闻台”的融合指数进行分组统计，结果如表所示.

组号	分组	频数
1	$[4,5)$	2

2	$[5,6)$	8
3	$[6,7)$	7
4	$[7,8]$	3

（Ⅰ）现从融合指数在 $[4,5)$ 和 $[7,8]$ 内的"省级卫视新闻台"中随机抽取 2 家进行调研，求至少有 1 家的融合指数在 $[7,8]$ 的概率；

（Ⅱ）根据分组统计表求这 20 家"省级卫视新闻台"的融合指数的平均数.

【答案】（Ⅰ）$\frac{9}{10}$；（Ⅱ）6.05.

【解析】解法一：（Ⅰ）融合指数在 $[7,8]$ 内的"省级卫视新闻台"记为 A_1，A_2，A_3；融合指数在 $[4,5)$ 内的"省级卫视新闻台"记为 B_1，B_2. 从融合指数在 $[4,5)$ 和 $[7,8]$ 内的"省级卫视新闻台"中随机抽取 2 家的所有基本事件是：$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$，共10个.

其中，至少有1家融合指数在 $[7,8]$ 内的基本事件是：$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，共9个.

所以所求的概率 $P=\frac{9}{10}$.

（Ⅱ）这20家"省级卫视新闻台"的融合指数平均数等于 $4.5\times\frac{2}{20}+5.5\times\frac{8}{20}+6.5\times\frac{7}{20}+7.5\times\frac{3}{20}=6.05$.

解法二：（Ⅰ）融合指数在 $[7,8]$ 内的"省级卫视新闻台"记为 A_1，A_2，A_3；融合指数在 $[4,5)$ 内的"省级卫视新闻台"记为 B_1，B_2. 从融合指数在 $[4,5)$ 和 $[7,8]$ 内的"省级卫视新闻台"中随机抽取 2 家的所有基本事件是：$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$，共10个.

其中，没有1家融合指数在 $[7,8]$ 内的基本事件是：$\{B_1,B_2\}$，共1个.

所以所求的概率 $P=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

（Ⅱ）同解法一．学科网

【考点定位】1、古典概型；2、平均值.

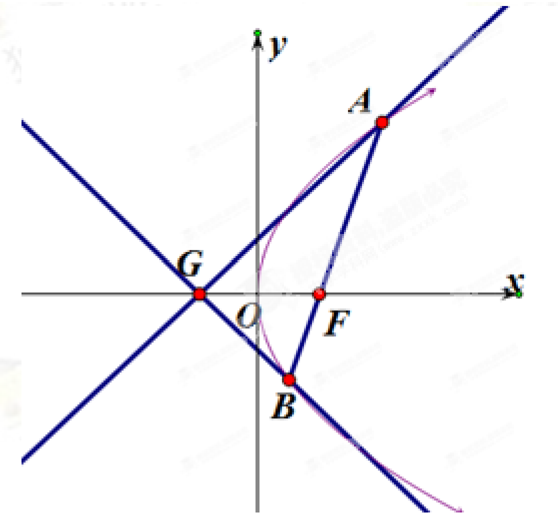
【名师点睛】本题考差古典概型和平均数，利用古典概型的“等可能”“有限”性的特点，能方便的求出概率. 由实际意义构造古典概型，首先确定试验的样本空间结构并计算它所含样本点总数，然后再求出事件A所含基本事件个数，代入古典概型的概率计算公式；根据频率分布表求平均数，对于每组的若干个数可以采取区间中点值作为该组数据的数值，再求平均数.

19.（本小题满分12分）

已知点F为抛物线$E: y^2=2px(p>0)$的焦点，点$A(2,m)$在抛物线E上，且$|AF|=3$.

（Ⅰ）求抛物线E的方程；

（Ⅱ）已知点$G(-1,0)$，延长AF交抛物线E于点B，证明：以点F为圆心且与直线GA相切的圆，必与直线GB相切.



【答案】（Ⅰ）$y^2=4x$；（Ⅱ）详见解析.

【解析】学科网

解法一：(Ⅰ) 由抛物线的定义得$|AF|=2+\frac{p}{2}$.

因为$|AF|=3$，即$2+\frac{p}{2}=3$，解得$p=2$，所以抛物线E的方程为$y^2=4x$.

(Ⅱ) 因为点$A(2,m)$在抛物线E：$y^2=4x$上，

所以$m=\pm 2\sqrt{2}$，由抛物线的对称性，不妨设$A(2,2\sqrt{2})$.

由$A(2,2\sqrt{2})$，$F(1,0)$可得直线AF的方程为$y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由$\begin{cases} y=2\sqrt{2}(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$，得$2x^2-5x+2=0$，

解得$x=2$或$x=\frac{1}{2}$，从而$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

又$G(-1,0)$，

所以$k_{GA}=\frac{2\sqrt{2}-0}{2-(-1)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$k_{GB}=\frac{-\sqrt{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$k_{GA}+k_{GB}=0$，从而$\angle AGF=\angle BGF$，这表明点F到直线GA，GB的距离相等，

故以F为圆心且与直线GA相切的圆必与直线GB相切.

解法二：（I）同解法一.

（II）设以点F为圆心且与直线GA相切的圆的半径为r.

因为点$A(2,m)$在抛物线E：$y^2=4x$上，

所以$m=\pm2\sqrt{2}$，由抛物线的对称性，不妨设$A\left(2,2\sqrt{2}\right)$.

由$A\left(2,2\sqrt{2}\right)$，$F(1,0)$可得直线AF的方程为$y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由$\begin{cases} y=2\sqrt{2}(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$，得$2x^2-5x+2=0$，

解得$x=2$或$x=\frac{1}{2}$，从而$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

又$G(-1,0)$，故直线GA的方程为$2\sqrt{2}x-3y+2\sqrt{2}=0$，

从而$r=\frac{\left|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{8+9}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

又直线GB的方程为$2\sqrt{2}x+3y+2\sqrt{2}=0$，

所以点F到直线GB的距离$d=\frac{\left|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{8+9}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=r$.

这表明以点F为圆心且与直线GA相切的圆必与直线GB相切.

【考点定位】1、抛物线标准方程；2、直线和圆的位置关系．

【名师点睛】利用抛物线的定义，将抛物线上的点到焦点距离和到准线距离进行转化，从而简化问题的求解过程，在解抛物线问题的同时，一定要善于利用其定义解题．直线和圆的位置关系往往利用几何判断简洁，即圆心到直线的距离与圆的半径比较；若由图形观察，结合平面几何知识，说明$\angle AGF=\angle BGF$即可，这样可以把问题转化为判断$k_{GA}+k_{GB}=0$，高效解题的过程就是优化转化的过程．

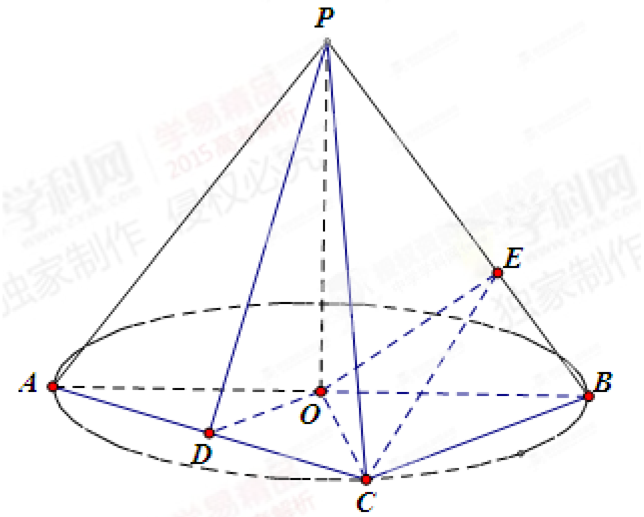
20．（本题满分 12 分）

如图，AB是圆O的直径，点C是圆O上异于A,B的点，PO 垂直于圆 O 所在的平面，且$PO=OB=1$．

（Ⅰ）若D为线段AC的中点，求证$AC\perp$平面PDO；

（Ⅱ）求三棱锥$P-ABC$体积的最大值；

（Ⅲ）若$BC=\sqrt{2}$，点E在线段PB上，求$CE+OE$的最小值．



【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）$\frac{1}{3}$；（Ⅲ）$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$．

【解析】解法一：（I）在ΔAOC中，因为$OA=OC$，D为AC的中点，

所以$AC\perp OD$．又PO垂直于圆O所在的平面，所以$PO\perp AC$．

因为$DO\cap PO=O$，所以$AC\perp$平面PDO．

（II）因为点C在圆O上，

所以当$CO\perp AB$时，C到AB的距离最大，且最大值为1.

又$AB=2$，所以ΔABC面积的最大值为$\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$．

又因为三棱锥$P-ABC$的高$PO=1$，故三棱锥$P-ABC$体积的最大值为$\frac{1}{3}\times 1\times 1=\frac{1}{3}$．

（III）在ΔPOB中，$PO=OB=1$，$\angle POB=90^{\circ}$，所以$PB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$．

同理$PC=\sqrt{2}$，所以$PB=PC=BC$．

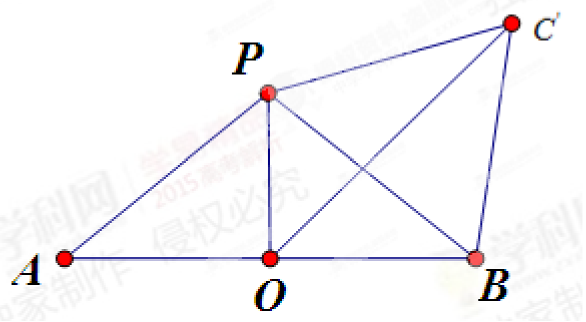
在三棱锥$P-ABC$中，将侧面BCP绕PB旋转至平面$BC'P$，使之与平面ABP共面，如图所示.

当O，E，C'共线时，$CE+OE$取得最小值.

又因为$OP=OB$，$C'P=C'B$，所以OC'垂直平分PB，

即E为PB中点．从而$OC'=OE+EC'=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，

亦即$CE+OE$的最小值为$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$．



解法二：(I)、(II) 同解法一.

(III) 在 ΔPOB 中，$PO=OB=1$，$\angle POB=90^\circ$，

所以 $\angle OPB=45^\circ$，$PB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$．同理 $PC=\sqrt{2}$．

所以 $PB=PC=BC$，所以 $\angle CPB=60^\circ$．

在三棱锥 $P-ABC$ 中，将侧面 BCP 绕 PB 旋转至平面 $BC'P$，使之与平面 ABP 共面，如图所示.

当 O，E，C' 共线时，$CE+OE$ 取得最小值.

所以在 $\Delta OC'P$ 中，由余弦定理得：

$$OC'^2=1+2-2\times1\times\sqrt{2}\times\cos\left(45^\circ+60^\circ\right)$$

$$=1+2-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2+\sqrt{3}.$$

从而 $OC'=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

所以 $CE+OE$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

【考点定位】1、直线和平面垂直的判定；2、三棱锥体积.

【名师点睛】证明直线和平面垂直可以利用判定定理，即线线垂直到线面垂直；也可以利用面面垂直的性质定理，即面面垂直到线面垂直；决定棱锥体积的量有两个，即底面积和高，当研究其体积的最值问题时，若其中有一个量确定，则只需另一个量的最值；若两个量都不确定，可通过设变量法，将体积表示为变量的函数解析式，利用函数思想确定其最值；将空间问题转化为平面问题是转化思想的重要体现，通过旋转到一个平面内，利用两点之间距离最短求解.

21.（本题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=10\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+10\cos^2\dfrac{x}{2}$.

（I）求函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期；

（II）将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，再向下平移 a（$a>0$）个单位长度后得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，且函数 $g\left(x\right)$ 的最大值为 2.

（ⅰ）求函数 $g\left(x\right)$ 的解析式；

（ⅱ）证明：存在无穷多个互不相同的正整数 x_0，使得 $g\left(x_0\right)>0$.

【答案】（Ⅰ）2π；（Ⅱ）（ⅰ）$g\left(x\right)=10\sin x-8$；（ⅱ）详见解析.

【解析】(Ⅰ) 因为 $f\left(x\right)=10\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+10\cos^2\frac{x}{2}$

$=5\sqrt{3}\sin x+5\cos x+5$

$=10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+5$.

所以函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 $T=2\pi$.

(Ⅱ) (ⅰ) 将 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $y=10\sin x+5$ 的图象，再向下平移 a（$a>0$）个单位长度后得到 $g\left(x\right)=10\sin x+5-a$ 的图象.

又已知函数 $g\left(x\right)$ 的最大值为 2，所以 $10+5-a=2$，解得 $a=13$.

所以 $g\left(x\right)=10\sin x-8$.

(ⅱ) 要证明存在无穷多个互不相同的正整数 x_0，使得 $g\left(x_0\right)>0$，就是要证明存在无穷多个互不相同的正整数 x_0，使得 $10\sin x_0-8>0$，即 $\sin x_0>\frac{4}{5}$.

由 $\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 知，存在 $0<\alpha_0<\frac{\pi}{3}$，使得 $\sin\alpha_0=\frac{4}{5}$.

由正弦函数的性质可知，当 $x\in\left(\alpha_0,\pi-\alpha_0\right)$ 时，均有 $\sin x>\frac{4}{5}$.

因为 $y=\sin x$ 的周期为 2π，

所以当 $x\in\left(2k\pi+\alpha_0,2k\pi+\pi-\alpha_0\right)$（$k\in Z$）时，均有 $\sin x>\frac{4}{5}$.

因为对任意的整数 k，$\left(2k\pi+\pi-\alpha_0\right)-\left(2k\pi+\alpha_0\right)=\pi-2\alpha_0>\frac{\pi}{3}>1$，

所以对任意的正整数 k，都存在正整数 $x_k\in\left(2k\pi+\alpha_0,2k\pi+\pi-\alpha_0\right)$，使得 $\sin x_k>\frac{4}{5}$.

亦即存在无穷多个互不相同的正整数 x_0，使得 $g\left(x_0\right)>0$.

【考点定位】1、三角函数的图像与性质；2、三角不等式.

【名师点睛】三角函数的定义域、值域、单调性、周期、奇偶性、对称性都是通过将解析式变形为 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$ 进行；若三角函数图象变换是纵向伸缩和纵向平移，都是相对于 $f(x)$ 而言，即 $f(x)\to Af(x)$ 和 $f(x)\to f(x)+k$，若三角函数图象变换是横向伸缩和横向平移，都是相对于自变量 x 而言，即 $f(x)\to f(\omega x)$ 和 $f(x)\to f(x+a)$；本题第（ii）问是解三角不等式问题，由函数周期性的性质，先在一个周期内求解，然后再加周期，将存在无穷多个互不相同的正整数 x_0，使得 $g\left(x_0\right)>0$，转化为解集长度大于 1，是本题的核心.

22.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{(x-1)^2}{2}$.

(Ⅰ)求函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）证明：当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)<x-1$；

（Ⅲ）确定实数 k 的所有可能取值，使得存在 $x_0>1$，当 $x\in(1,x_0)$ 时，恒有 $f\left(x\right)>k\left(x-1\right)$.

【答案】(Ⅰ) $\left(0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$；（Ⅱ）详见解析；（Ⅲ）$\left(-\infty,1\right)$.

【解析】(I) $f'(x)=\frac{1}{x}-x+1=\frac{-x^2+x+1}{x}$， $x\in(0,+\infty)$.

由 $f'(x)>0$ 得 $\begin{cases}x>0\\-x^2+x+1>0\end{cases}$ 解得 $0<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(II) 令 $F(x)=f(x)-(x-1)$， $x\in(0,+\infty)$.

则有 $F'(x)=\frac{1-x^2}{x}$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

故当 $x>1$ 时， $F(x)<F(1)=0$，即当 $x>1$ 时， $f(x)<x-1$.

(III) 由 (II) 知，当 $k=1$ 时，不存在 $x_0>1$ 满足题意.

当 $k>1$ 时，对于 $x>1$，有 $f(x)<x-1<k(x-1)$，则 $f(x)<k(x-1)$，从而不存在 $x_0>1$ 满足题意.

当 $k<1$ 时，令 $G(x)=f(x)-k(x-1)$， $x\in(0,+\infty)$，

则有 $G'(x)=\frac{1}{x}-x+1-k=\frac{-x^2+(1-k)x+1}{x}$.

由 $G'(x)=0$ 得， $-x^2+(1-k)x+1=0$.

解得 $x_1=\frac{1-k-\sqrt{(1-k)^2+4}}{2}<0$， $x_2=\frac{1-k+\sqrt{(1-k)^2+4}}{2}>1$.

当 $x\in(1,x_2)$ 时， $G'(x)>0$，故 $G(x)$ 在 $[1,x_2)$ 内单调递增.

从而当 $x\in(1,x_2)$ 时， $G(x)>G(1)=0$，即 $f(x)>k(x-1)$，

综上， k 的取值范围是 $(-\infty,1)$.

【考点定位】导数的综合应用.

【名师点睛】利用导数判断或求函数的单调区间，通过不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$ 求解，但是要兼顾定

义域；利用导数研究函数的单调性，再用单调性来证明不等式是函数、导数、不等式综合中的一个难点，解题技巧是构造辅助函数，把不等式的证明转化为利用导数研究函数的单调性或最值，从而证得不等式，注意 $f(x)>g(x)$ 与 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$ 不等价，$f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$ 只是 $f(x)>g(x)$ 的特例，但是也可以利用它来证明，在 2014 年全国 I 卷理科高考 21 题中，就是使用该种方法证明不等式；导数的强大功能就是通过研究函数极值、最值、单调区间来判断函数大致图象，这是利用研究基本初等函数方法所不具备的，而是其延续.