

2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（文科）

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 已知集合 $A = \{1, 3, m\}$, $B = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ 则 $m = \underline{2}$ 。

解析：考查并集的概念，显然 $m=2$

2. 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 0$ 的解集是 $\underline{\{x | -4 < x < 2\}}$ 。

解析：考查分式不等式的解法 $\frac{2-x}{x+4} > 0$ 等价于 $(x-2)(x+4) < 0$, 所以 $-4 < x < 2$

3. 行列式 $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$ 的值是 $\underline{0.5}$ 。

解析：考查行列式运算法则 $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix} = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

4. 若复数 $z = 1 - 2i$ (i 为虚数单位)，则 $z \cdot \bar{z} + z = \underline{6 - 2i}$ 。

解析：考查复数基本运算 $z \cdot \bar{z} + z = (1 - 2i)(1 + 2i) + 1 - 2i = 6 - 2i$

5. 将一个总数为 A 、 B 、 C 三层，其个体数之比为 5:3:2。若用分层抽样方法抽取容量为 100 的样本，则应从 C 中抽取 $\underline{20}$ 个个体。

解析：考查分层抽样应从 C 中抽取 $100 \times \frac{2}{10} = 20$

6. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 6 的正方形，侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PA = 8$ ，则该四棱锥的体积是 $\underline{96}$ 。

解析：考查棱锥体积公式 $V = \frac{1}{3} \times 36 \times 8 = 96$

7. 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 的圆心到直线 $3x + 4y + 4 = 0$ 的距离 $d = \underline{3}$ 。

解析：考查点到直线距离公式

圆心 (1,2) 到直线 $3x + 4y + 4 = 0$ 距离为 $\frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 + 4|}{5} = 3$

8. 动点 P 到点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $x + 2 = 0$ 的距离相等，则 P 的轨迹方程为 $y^2 = 8x$ 。

解析：考查抛物线定义及标准方程

定义知 P 的轨迹是以 $F(2, 0)$ 为焦点的抛物线， $p=2$ 所以其方程为 $y^2=8x$

9. 函数 $f(x) = \log_3(x+3)$ 的反函数的图像与 y 轴的交点坐标是 $(0, -2)$ 。

解析：考查反函数相关概念、性质

法一：函数 $f(x) = \log_3(x+3)$ 的反函数为 $y = 3^x - 3$ ，另 $x=0$ ，有 $y=-2$

法二：函数 $f(x) = \log_3(x+3)$ 图像与 x 轴交点为 $(-$

$2, 0)$ ，利用对称性可知，函数 $f(x) = \log_3(x+3)$ 的反函数的图像与 y

轴的交点为 $(0, -2)$

10.

从一副混合后的扑克牌（52张）中随机抽取2张，则“抽出的2张均为红桃”的概率为 $\frac{3}{51}$ 。（结果用最简分数表示）。

解析：考查等可能事件概率

“抽出的2张均为红桃”的概率为 $\frac{C_{13}^2}{C_{52}^2} = \frac{3}{51}$

11.

2010年上海世博会园区每天9:00开园，20:00停止入园。在右边的框图中， S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数， a 表示整点报道前1个小时内入园人数，则空白的执行框内应填入 $S \leftarrow S + a$ 。

解析：考查算法

12. 在 n 行 m 列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ 中，

记位于第 i 行第 j 列的数为 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$)。当 $n = 9$ 时， $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{99} = 45$ 。

解析： $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{99} = 1+3+5+7+9+2+4+6+8=45$

13. 在平面直角坐标系中，双曲线 Γ 的中心在原点，它的一个焦点坐标为 $(\sqrt{5}, 0)$ ，

$\vec{e}_1 = (2, 1)$ 、 $\vec{e}_2 = (2, -1)$ 分别是两条渐近线的方向向量。任取双曲线 Γ 上的点 P ，若

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ae_1} + \overrightarrow{be_2}$ ($a, b \in R$)，则 a, b 满足的一个等式是 $4ab=1$ 。

解析：因为 $\vec{e}_1 = (2, 1)$ 、 $\vec{e}_2 = (2, -1)$ 是渐进线方向向量，所以双曲线渐近线方程为

$$y = \pm \frac{1}{2}x, \text{ 又 } c = \sqrt{5}, \therefore a = 2, b = 1$$

双曲线方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ， $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ae_1} + \overrightarrow{be_2} = (2a+2b, a-b) = (2a+2b, a-b)$ ，

$$\therefore \frac{(2a+2b)^2}{4} - (a-b)^2 = 1, \text{ 化简得 } 4ab=1$$

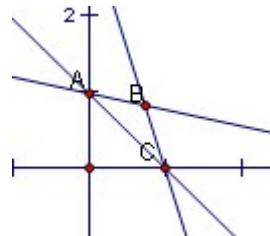
14. 将直线 $l_1: x+y-1=0$ 、 $l_2: nx+y-n=0$ 、 $l_3: x+ny-n=0$ ($n \in N^*$, $n \geq 2$) 围

成的三角形面积记为 S_n ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$ 。

解析： $B\left(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right)$ 所以 $BO \perp AC$ ，

$$S_n = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \left(\frac{n}{n+1} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{n-1}{2(n+1)}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$

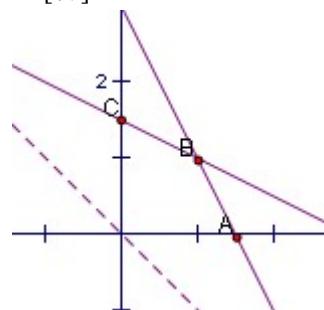


二. 选择题（本大题满分20分）本大题共有4题，每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分。

15. 满足线性约束条件 $\begin{cases} 2x+y \leq 3, \\ x+2y \leq 3, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的目标函数 $z = x+y$ 的最大值是 [答] ()

- (A) 1. (B) $\frac{3}{2}$. (C) 2. (D) 3.

解析：当直线 $z = x+y$ 过点 $B(1,1)$ 时， z 最大值为 2



16. “ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k \in Z$)”是“ $\tan x = 1$ ”成立的 [答] ()

- (A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.
(C) 充分条件. (D) 既不充分也不必要条件.

解析： $\tan(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ ，所以充分；但反之不成立，如 $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$

17. 若 x_0 是方程式 $\lg x + x = 2$ 的解，则 x_0 属于区间 [答] ()

- (A) (0, 1). (B) (1, 1.25). (C) (1.25, 1.75) (D) (1.75, 2)

解析：构造函数 $f(x) = \lg x + x - 2$, 由 $f(1.75) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \lg \frac{7}{4} - \frac{1}{4} < 0$

$f(2) = \lg 2 > 0$ 知 x_0 属于区间 $(1.75, 2)$

18. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 11 : 13$, 则 $\triangle ABC$

- (A) 一定是锐角三角形. (B) 一定是直角三角形.
(C) 一定是钝角三角形. (D) 可能是锐角三角形, 也可能是钝角三角形.

解析：由 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 11 : 13$ 及正弦定理得 $a:b:c=5:11:13$

由余弦定理得 $\cos C = \frac{5^2 + 11^2 - 13^2}{2 \times 5 \times 11} < 0$, 所以角C为钝角

三、解答题（本大题满分74分）本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19. (本题满分12分)

已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 化简：

$$\lg(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) + \lg[\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{2})] - \lg(1 + \sin 2x).$$

解析：原式 $= \lg(\sin x + \cos x) + \lg(\cos x + \sin x) - \lg(\sin x + \cos x)^2 = 0$.

20. (本大题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分7分, 第2小题满分7分.

如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作4个全等的矩形骨架, 总计耗用9.6米铁丝, 再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面(不安装上底面).

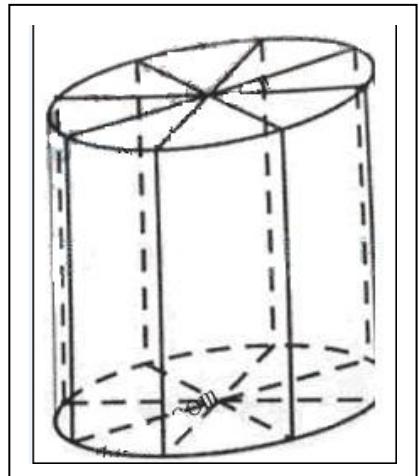
- (1) 当圆柱底面半径 r 取何值时, S 取得最大值? 并求出该最大值(结果精确到0.01平方米);
(2) 若要制作一个如图放置的, 底面半径为0.3米的灯笼, 请作出用于灯笼的三视图(作图时, 不需考虑骨架等因素).

解析：(1)

设圆柱形灯笼的母线长为 l , 则 $l=1.2-2r(0 < r < 0.6)$, $S=3\pi(r - 0.4)^2 + 0.48\pi$,

所以当 $r=0.4$ 时, S 取得最大值约为1.51平方米;

(2) 当 $r=0.3$ 时, $l=0.6$, 作三视图略.



21. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第一个小题满分6分, 第2个小题满分8分.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n - 5a_n - 85$, $n \in N^*$

(1) 证明: $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并求出使得 $S_{n+1} > S_n$ 成立的最小正整数 n .

解析: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1=-14$; 当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=-5a_n+5a_{n-1}+1$, 所以 $a_n-1=\frac{5}{6}(a_{n-1}-1)$,

又 $a_1-1=-15\neq 0$, 所以数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列;

(2)

由(1)知: $a_n-1=-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, 得 $a_n=1-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, 从而 $S_n=75\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+n-90$ ($n\in\mathbb{N}^*$)

);

由 $S_{n+1}>S_n$, 得 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}<\frac{2}{5}$, $n>\log_{\frac{5}{6}}\frac{2}{25}+1\approx 14.9$, 最小正整数 $n=15$.

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分8分。

若实数 x 、 y 、 m 满足 $|x-m|<|y-m|$, 则称 x 比 y 接近 m .

(1) 若 x^2-1 比3接近0, 求 x 的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数 a 、 b , 证明: a^2b+ab^2 比 a^3+b^3 接近 $2ab\sqrt{ab}$;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D\{x|x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R}\}$. 任取 $x\in D$, $f(x)$ 等于

$1+\sin x$ 和 $1-\sin x$ 中接近0的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并指出它的奇偶性、最小正周期、最小值和单调性(结论不要求证明).

解析: (1) $x\in(-2,2)$;

(2) 对任意两个不相等的正数 a 、 b , 有 $a^2b+ab^2>2ab\sqrt{ab}$, $a^3+b^3>2ab\sqrt{ab}$,

因为 $|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}| - |a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}| = -(a+b)(a-b)^2 < 0$,

所以 $|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}| < |a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|$, 即 a^2b+ab^2 比 a^3+b^3 接近 $2ab\sqrt{ab}$:

$$(3) f(x)=\begin{cases} 1+\sin x, & x\in(2k\pi-\pi, 2k\pi) \\ 1-\sin x, & x\in(2k\pi, 2k\pi+\pi) \end{cases}=1-|\sin x|, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z},$$

$f(x)$ 是偶函数, $f(x)$ 是周期函数, 最小正周期 $T=\pi$, 函数 $f(x)$ 的最小值为0,

函数 $f(x)$ 在区间 $[k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi]$ 单调递增, 在区间 $(k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}]$ 单调递减, $k\in\mathbb{Z}$.

23 (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

已知椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, $A(0,b)$ 、 $B(0,-b)$ 和 $Q(a,0)$ 为 Γ 的三个顶

点.

(1) 若点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB})$, 求点 M 的坐标;

(2) 设直线 $l_1 : y = k_1 x + p$ 交椭圆 Γ 于 C 、 D 两点, 交直线 $l_2 : y = k_2 x$ 于点 E . 若

$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$, 证明: E 为 CD 的中点;

(3) 设点 P 在椭圆 Γ 内且不在 x 轴上, 如何构作过 PQ 中点 F 的直线 l , 使得 l 与椭圆 Γ

的两个交点 P_1 、 P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$ $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$? 令 $a = 10$, $b = 5$, 点 P 的坐标是 $(-8, -1)$, 若椭圆 Γ 上的点 P_1 、 P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$, 求点 P_1 、 P_2 的坐标.

解析: (1) $M(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$;

(2) 由方程组 $\begin{cases} y = k_1 x + p \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, 消 y 得方程 $(a^2 k_1^2 + b^2)x^2 + 2a^2 k_1 p x + a^2(p^2 - b^2) = 0$,

因为直线 $l_1 : y = k_1 x + p$ 交椭圆 Γ 于 C 、 D 两点,

所以 $\Delta > 0$, 即 $a^2 k_1^2 + b^2 - p^2 > 0$,

设 $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$, CD 中点坐标为 (x_0, y_0) ,

则 $\begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 k_1 p}{a^2 k_1^2 + b^2}, \\ y_0 = k_1 x_0 + p = \frac{b^2 p}{a^2 k_1^2 + b^2} \end{cases}$

由方程组 $\begin{cases} y = k_1 x + p \\ y = k_2 x \end{cases}$, 消 y 得方程 $(k_2 - k_1)x = p$,

又因为 $k_2 = -\frac{b^2}{a^2 k_1}$, 所以 $\begin{cases} x = \frac{p}{k_2 - k_1} = -\frac{a^2 k_1 p}{a^2 k_1^2 + b^2} = x_0, \\ y = k_2 x = \frac{b^2 p}{a^2 k_1^2 + b^2} = y_0 \end{cases}$

故 E 为 CD 的中点;

(3) 因为点 P 在椭圆 Γ 内且不在 x 轴上, 所以点 F 在椭圆 Γ 内, 可以求得直线 OF 的斜率 k_2 , 由

$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$ 知 F 为 $P_1 P_2$ 的中点, 根据(2)可得直线 l 的斜率 $k_1 = -\frac{b^2}{a^2 k_2}$, 从而得直线 l 的方

程.

$F(1, -\frac{1}{2})$, 直线 OF 的斜率 $k_2 = -\frac{1}{2}$, 直线 l 的斜率 $k_1 = -\frac{b^2}{a^2 k_2} = \frac{1}{2}$,

解方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \end{cases}$, 消 y : $x^2 - 2x - 48 = 0$, 解得 $P_1(-6, -4)$ 、 $P_2(8, 3)$.