2011年江西高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3至4页，满分150分，考试时间120分钟.

考试结束后，

考试注意：

1．答题前，考生在答题卡上务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上.考试要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考试本人的准考证号、姓名是否一致.

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，.第II卷用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答.若在试题卷上作答，答案无效.

3.考试结束后，监考员将试题卷、答题卡一并交回。

参考公式：

样本数据（x_1,y_1），（x_2,y_2），...，（x_n,y_n）的线性相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$ 其中

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

$$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+...+y_n}{n}$$

锥体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

其中S为底面积，h为高

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

（1） 若$z=\dfrac{1+2i}{i}$,则复数$\bar{z}$=（　）

A. $-2-i$　　B. $-2+i$　　C. $2-i$　　D. $2+i$

（2） 若集合$A=\{x|-1\le 2x+1\le 3\},B=\{x|\dfrac{x-2}{x}\le 0\}$,则$A\cap B$=（　）

A. $\{x|-1\le x<0\}$　　B. $\{x|0<x\le 1\}$　　C. $\{x|0\le x\le 2\}$　　D. $\{x|0\le x\le 1\}$

（3） 若$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^{(2x+1)}}}$,则$f(x)$的定义域为（　）

A. $(-\dfrac{1}{2},0)$　　B. $(-\dfrac{1}{2},0]$　　C. $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

（4） 若$f(x)=x^2-2x-4\ln^x$,则$f'(x)>0$的解集为（　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-1,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-1,0)$

（5） 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足:$S_n+S_m=S_{n+m}$,且$a_1=1$,那么$a_{10}=$（　）

A. 1　　B. 9　　C. 10　　D. 55

（6） 变量X与Y相对应的一组数据为(10,1),(11.3,2),(11.8,3),(12.5,4),(13,5);变量U与V相对应的一组数据为(10,5),(11.3,4),(11.8,3),(12.5,2),(13,1). r_1表示变量Y与X之间的线性相关系数,r_2表示变量V与U之间的线性相关系数,则（　）

A. $r_2<r_1<0$　　B. $0<r_2<r_1$　　C. $r_2<0<r_1$　　D. $r_2=r_1$

（7） 观察下列各式:$5^5=3125,5^6=15625,5^7=78125,...$,则$5^{2011}$的末四位数字为（　）

A.3125　　B. 5625　　C.0625　　D.8125

（8） 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三个相互平行的平面, 平面$\alpha_1,\alpha_2$之间的距离为$d_1$, 平面$\alpha_2,\alpha_3$之间的距离为$d_2$. 直线$l$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$分别交于$P_1,P_2,P_3$. 那么“$P_1P_2 = P_2P_3$”是“$d_1 = d_2$”的（ ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

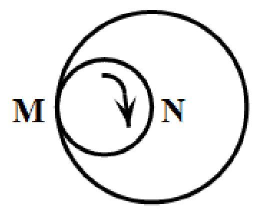
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

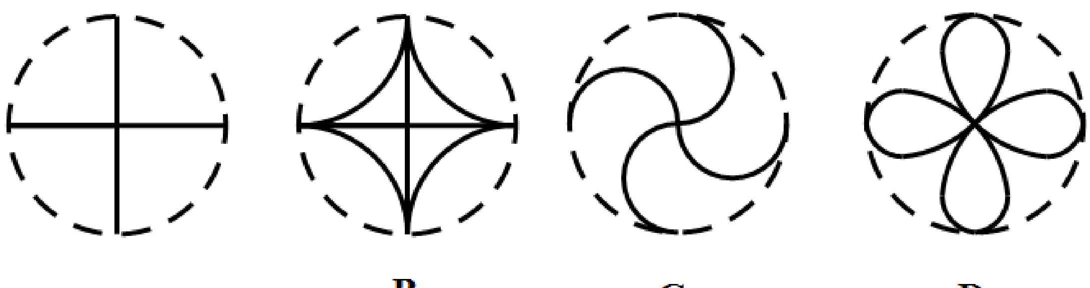
（9） 若曲线C_1：$x^2+y^2-2x=0$与曲线C_2：$y(y-mx-m)=0$有四个不同的交点, 则实数m的取值范围是（ ）

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　　B. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\cup(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$

C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D. $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

10. 如右图，一个直径为 1 的小圆沿着直径为 2 的大圆内壁的逆时针方向滚动，M 和 N 是小圆的一条固定直径的两个端点. 那么，当小圆这样滚过大圆内壁的一周，点 M，N 在大圆内所绘出的图形大致是（ ）





A　　B　　C　　D

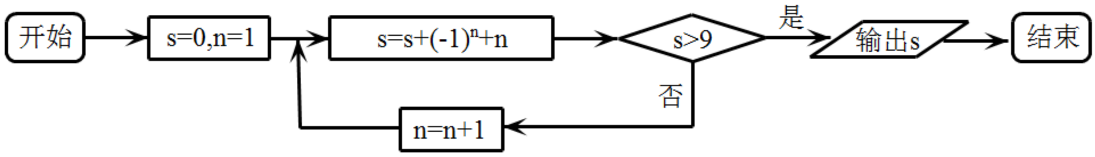
第 II 卷

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

11. 已知 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$(\vec{a}+2\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=-2$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为__________.

12. 小波通过做游戏的方式来确定周末活动，他随机地往单位圆内投掷一点，若此点到圆心的距离大于 $\frac{1}{2}$，则周末去看电影；若此点到圆心的距离小于 $\frac{1}{4}$，则去打篮球；否则，在家看书. 则小波周末不在家看书的概率为__________.

13. 下图是某算法程序框图，则程序运行后输出的结果是__________.



14. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点在 x 轴上，过点 $(1,\frac{1}{2})$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线，切点分别为 A，B，直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点，则椭圆方程是__________.

三. 选做题：请考生在下列两题中任选一题作答. 若两题都做，则按做的第一题评阅计分. 本题共 5 分.

15（1）.（坐标系与参数方程选做题）若曲线的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta+4\cos\theta$，以极点为原点，极轴为 x 轴正半轴建立直角坐标系，则改曲线的直角坐标方程为___________.

(2).（不等式选择题）对于实数 x，y，若 $|x-1|\le 1$，$|y-2|\le 1$，则 $|x-2y+1|$ 的最大值为____________.

四. 本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（本小题满分 12 分）

某饮料公司招聘一名员工，现对其进行一项测试，以便确定工资级别. 公司准备了两种不同的饮料共 8 杯，其颜色完全相同，并且其中 4 杯为 A 饮料，另外 4 杯为 B 饮料，公司要求此

员工一一品尝后，从 8 杯饮料中选出 4 杯 A 饮料. 若 4 杯都选对，则月工资定为 3500 元；若 4 杯选对 3 杯，则月工资定为 2800 元；否则月工资定为 2100 元. 令 X 表示此人选对 A 饮料的杯数. 假设次人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力.

（1）求 X 的分布列；

（2）求此员工月工资的期望.

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，已知 $\sin C+\cos C=1-\sin\frac{C}{2}$.

（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）若 $a^2+b^2=4(a+b)-8$，求边 c 的值.

18.（本小题满分 12 分）

已知两个等比数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足 $a_1=a(a>0),b_1-a_1=1,b_2-a_2=2,b_3-a_3=3$.

（1）若 a =1，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 唯一，求 a 的值.

19.（本小题满分 12 分）

设 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax.$

（1）若 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 上存在单调递增区间，求 a 的取值范围；

（2）当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $\left[1,4\right]$ 上的最小值为 $-\frac{16}{3}$，求 $f(x)$ 在该区间上的最大值.

20.（本小题满分 13 分）

$P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a)$ 是双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点，M,N 分别是双曲线 E 的左、右定点，直线 PM,PN 的斜率之积为 $\frac{1}{5}$.

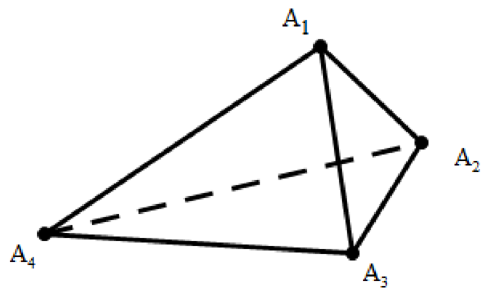
（1）求双曲线的离心率；

（2）过双曲线 E 的右焦点且斜率为 1 的直线交双曲线于 A,B 两点，O 为坐标原点，C 为双曲线上的一点，满足 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，求 λ 的值.

21.（本小题满分 14 分）

（1）如图，对于任一给定的四面体 $A_1A_2A_3A_4$，找出依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，使得 $A_i \in \alpha_i$（i=1, 2, 3, 4），且其中每相邻两个平面间的距离都相等；

（2）给定依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，其中每相邻两个平面间的距离为 1，若一个正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点满足：$A_i \in \alpha_i$（i=1, 2, 3, 4），求该正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积.



2011年江西高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3至4页，满分150分，考试时间120分钟.

考试结束后，

考试注意：

2．答题前，考生在答题卡上务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上.考试要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考试本人的准考证号、姓名是否一致.

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，.第II卷用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答.若在试题卷上作答，答案无效.

3.考试结束后，监考员将试题卷、答题卡一并交回。

参考公式：

样本数据（x_1,y_1），（x_2,y_2），...，（x_n,y_n）的线性相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$ 其中

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

$$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+...+y_n}{n}$$

锥体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

其中S为底面积，h为高

第Ⅰ卷

二、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

（10） 若 $z=\dfrac{1+2i}{i}$, 则复数 $\bar{z}$ =（　　）

A. $-2-i$　　　B. $-2+i$　　　C. $2-i$　　　D. $2+i$

答案：D　解析：$z=\dfrac{1+2i}{i}=\dfrac{i+2i^2}{i^2}=\dfrac{i-2}{-1}=2-i$，$\bar{z}=2+i$.

（11） 若集合 $A=\{x\mid -1\le 2x+1\le 3\}, B=\{x\mid \dfrac{x-2}{x}\le 0\}$, 则 $A\cap B$ =（　　）

A. $\{x\mid -1\le x<0\}$　　B. $\{x\mid 0<x\le 1\}$　　C. $\{x\mid 0\le x\le 2\}$　　D. $\{x\mid 0\le x\le 1\}$

答案：B　解析：$A=\{x/-1\le x\le 1\}, B=\{x/0<x\le 2\}, A\cap B=\{x/0<x\le 1\}$

（12） 若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^{(2x+1)}}}$, 则 $f(x)$ 的定义域为（　　）

A. $(-\dfrac{1}{2},0)$　　B. $(-\dfrac{1}{2},0]$　　C. $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

答案： A　解析：$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>0,\therefore 0<2x+1<1$

$\therefore x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

（13） 若 $f(x)=x^2-2x-4\ln^x$, 则 $f'(x)>0$ 的解集为（　　）

A. $(0,+\infty)$　　　B. $(-1,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$　　　D. $(-1,0)$

答案：C　解析：$f'(x)=2x-2-\dfrac{4}{x}>0,\dfrac{x^2-x-2}{x}>0,$

$\because x>0,\therefore (x-2)(x+1)>0,\therefore x>2$

（14） 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n+S_m=S_{n+m}$, 且 $a_1=1$, 那么 $a_{10}=$（　　）

A. 1　　B. 9　　C. 10　　D. 55

答案：A　解析：
$$\begin{aligned}&\because S_2=a_1+a_2=2S_1,\therefore a_2=1\\&\because S_3=S_1+S_2=3,\therefore a_3=1\\&\because S_4=S_1+S_3=4,\therefore a_4=1\\&\cdots a_{10}=1\end{aligned}$$

（15）　变量 X 与 Y 相对应的一组数据为(10,1),(11.3,2),(11.8,3),(12.5,4),(13,5);变量 U 与 V 相对应的一组数据为(10,5),(11.3,4)，(11.8,3)，(12.5,2)，(13,1). r_1 表示变量 Y 与 X 之间的线性相关系数, r_2 表示变量 V 与 U 之间的线性相关系数, 则（　）

A. $r_2<r_1<0$　　B. $0<r_2<r_1$　　C. $r_2<0<r_1$　　D. $r_2=r_1$

答案：C　解析：$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$　第一组变量正相关，第二组变量负相关。

（16）　观察下列各式: $5^5=3125,5^6=15625,5^7=78125,\ldots$, 则 5^{2011} 的末四位数字为（　）

A.3125　　B. 5625　　C.0625　　D.8125

答案：D　解析：

$$\begin{aligned}&\because f(x)=5^x, f(4)=625, f(5)=3125, f(6)=15625, f(7)=78125, f(8)=390625\\&2011-4=2008-1,\therefore f(2011)=***8125\end{aligned}$$

（17）　已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三个相互平行的平面, 平面 α_1,α_2 之间的距离为 d_1, 平面 α_2,α_3 之间的距离为 d_2. 直线 l 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别交于 P_1,P_2,P_3. 那么“$P_1P_2=P_2P_3$”是“$d_1=d_2$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

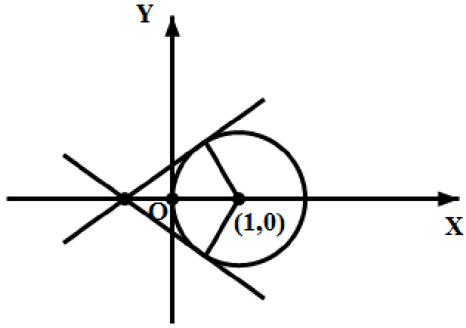
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

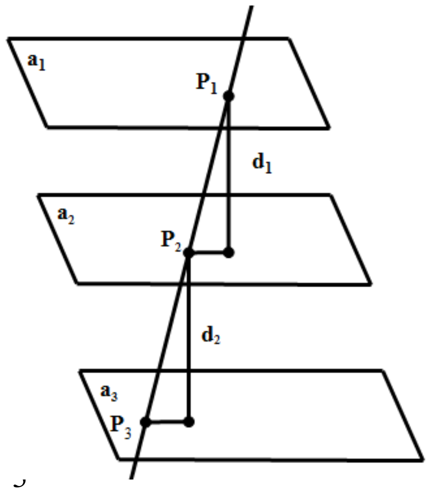
答案：C

解析：平面$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$平行，由图可以得知：

如果平面距离相等，根据两个三角形全等可知$P_1P_2=P_2P_3$

如果$P_1P_2=P_2P_3$，同样是根据两个三角形全等可知$d_1=d_2$





（18）　若曲线C_1：$x^2+y^2-2x=0$与曲线C_2：$y(y-mx-m)=$

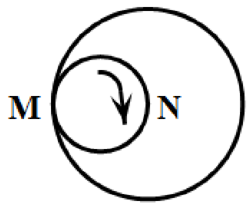
实数m的取值范围是（　　）

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　　B. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\cup(0,$

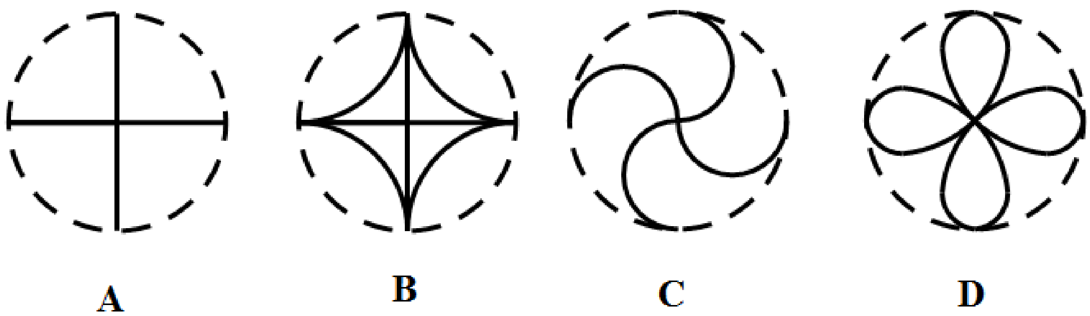
C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D. $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

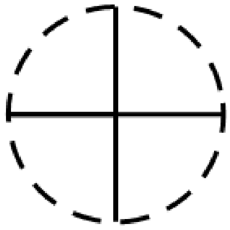
答案：B　曲线$x^2+y^2-2x=0$表示以$(1,0)$为圆心，以 1 为半径的圆，曲线$y(y-mx-m)=0$表示$y=0,或y-mx-m=0$过定点$(-1,0)$，$y=0$与圆有两个交点，故$y-mx-m=0$也应该与圆有两个交点，由图可以知道，临界情况即是与圆相切的时候，经计算可得，两种相切分别对应$m=-\frac{\sqrt{3}}{3}和m=\frac{\sqrt{3}}{3}$，由图可知，m 的取值范围应是

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



11. 如右图，一个直径为 1 的小圆沿着直径为 2 的大圆内壁的逆时针方向滚动，M 和 N 是小圆的一条固定直径的两个端点. 那么，当小圆这样滚过大圆内壁的一周，点 M，N 在大圆内所绘出的图形大致是(　　)





答案：A　　　　　　　　　　　　解析：根据小圆 与大圆半径 1：2 的关系，找上下左右四个点，根据这四个点的位置，小圆转半圈，刚好是大圆的四分之一，因此 M 点的轨迹是个大圆，而 N 点的轨迹是四条线，刚好是 M 产生的大圆的半径。

第 II 卷

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=2$，$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=-2$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_________.

答案：60°（$\dfrac{\pi}{3}$）　解析：根据已知条件 $(\vec{a}+2\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=-2$，去括号得：

$$\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\bullet\vec{b}-2\left|\vec{b}\right|^2=4+2\times2\times\cos\theta-2\times4=-2,\quad\Rightarrow\cos=\frac{1}{2},\theta=60^{\circ}$$

（PS：这道题其实 2010 年湖南文科卷的第 6 题翻版过来的，在我们寒假班的时候也讲过一道类似的，在文科讲义 72 页的第 2 题。 此题纯属送分题!）

14. 小波通过做游戏的方式来确定周末活动，他随机地往单位圆内投掷一点，若此点到圆心的距离大于 $\dfrac{1}{2}$，则周末去看电影；若此点到圆心的距离小于 $\dfrac{1}{4}$，则去打篮球；否则，在家看书.则小波周末不在家看书的概率为_________.

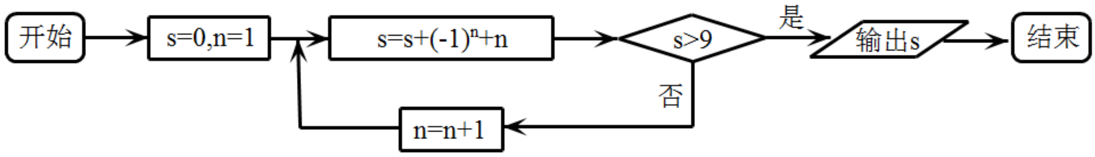
答案：$\dfrac{13}{16}$ 解析：方法一：不在家看书的概率=

$$\frac{\text{看电影}+\text{打篮球}}{\text{所有情况}}=\frac{\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\pi-\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\pi}{\pi}=\frac{13}{16}$$

方法二：不在家看书的概率=1—在家看书的概率=1—$\dfrac{\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\pi}=\dfrac{13}{16}$

（PS：通过生活实例与数学联系起来，是高考青睐的方向，但在我们春季班讲义二第一页的第五题已经做过类似题型，那么作为理科生，并且是上过新东方春季班课程的理科生，是不是应该作对，不解释。）

13. 下图是某算法程序框图，则程序运行后输出的结果是__________.



10. 解析：s=0, n=1;带入到解析式当中，s=0+(-1)+1=0，n=2;

s=0+1+2=3,　　n=3;

S=3+(-1)+3=5, n=4;

S=5+1+4=10,此时 s>9,输出。

（PS:此题实质是 2010 江苏理科卷第 7 题得翻版，同时在我们寒假题海班，理科讲义的第 200 页的第 6 题也讲过相似的。所以童鞋们再次遇到，应该也是灰常熟悉的。并且框图本来就是你们的拿手菜，所以最对也不觉奇怪。）

15. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点在 x 轴上，过点 $(1,\frac{1}{2})$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线，切点分别为 A，B，直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点，则椭圆方程是__________.

答案：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$　解析：设过点（1，$\frac{1}{2}$）的直线方程为：当斜率存在时，$y=k(x-1)+\frac{1}{2}$，

根据直线与圆相切，圆心（0,0）到直线的距离等于半径 1 可以得到 k=$-\frac{3}{4}$,直线与圆方程的联立可以得到切点的坐标（$\frac{3}{5},\frac{4}{5}$），当斜率不存在时，直线方程为：x=1，根据两点 A：

（1,0），B：（$\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}$）可以得到直线：2x+y-2=0,则与 y 轴的交点即为上顶点坐标（2,0）

$\Rightarrow b=2$，与 x 轴的交点即为焦点$\Rightarrow c=1$，根据公式$a^2=b^2+c^2=5,\Rightarrow a=\sqrt{5}$，即椭圆

方程为：$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

（PS:此题可能算是填空题，比较纠结的一道，因为要理清思路，计算有些繁琐。但是，是不是就做不出来呢，不是的，在我们寒假题海班的时候讲过一道与此相似的题型，也就在理科教材第 147 页第 23 题。所以最纠结的一道高考题也不过如此，你们还怕什么？）

三. 选做题：请考生在下列两题中任选一题作答. 若两题都做，则按做的第一题评阅计分. 本题共 5 分.

15（1）.（坐标系与参数方程选做题）若曲线的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta+4\cos\theta$，以极点为原点，极轴为 x 轴正半轴建立直角坐标系，则改曲线的直角坐标方程为___________.

答案：$x^2+y^2-4x-2y=0$。解析：做坐标系与参数方程的题，大家只需记住两点：1、$x=\rho\bullet\cos\theta, y=\rho\bullet\sin\theta$，2、$\rho^2=x^2+y^2$即可。根据已知$\rho=2\sin\theta+4\cos\theta$=

$2\bullet\dfrac{y}{\rho}+4\dfrac{x}{\rho}$,化简可得：$\rho^2=2\mathrm{y}+4x=x^2+y^2$,

所以解析式为：　$x^2+y^2-4x-2y=0$

15（2）.(不等式选择题）对于实数 x，y，若$|x-1|\le 1$，$|y-2|\le 1$，则$|x-2y+1|$的最大值为____________.

（2）此题，看似很难，但其实不难，首先解出 x 的范围，$0\le x\le 2$，再解出 y 的范围，$1\le y\le 3$，最后综合解出 x-2y+1 的范围$[-5,1]$，那么绝对值最大，就去 5

（PS: 此题作为最后一题，有失最后一题的分量，大家从解题步骤就可看出。所以高考注重

的还是基础+基础!）

五. 本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

20.（本小题满分 12 分）

某饮料公司招聘一名员工，现对其进行一项测试，以便确定工资级别. 公司准备了两种不同的饮料共 8 杯，其颜色完全相同，并且其中 4 杯为 A 饮料，另外 4 杯为 B 饮料，公司要求此员工一一品尝后，从 8 杯饮料中选出 4 杯 A 饮料. 若 4 杯都选对，则月工资定为 3500 元；若 4 杯选对 3 杯，则月工资定为 2800 元；否则月工资定为 2100 元. 令 X 表示此人选对 A 饮料的杯数. 假设次人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力.

（3）求 X 的分布列；

（4）求此员工月工资的期望.

解答：（1）选对 A 饮料的杯数分别为 $\mathrm{X}=0$，$\mathrm{X}=1$，$\mathrm{X}=2$，$\mathrm{X}=3$，$\mathrm{X}=4$，

其概率分布分别为： $P(0)=\dfrac{C_4^0C_4^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$，$P(1)=\dfrac{C_4^1C_4^3}{C_8^4}=\dfrac{16}{70}$，$P(2)=\dfrac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}=\dfrac{36}{70}$，

$P(3)=\dfrac{C_4^3C_4^1}{C_8^4}=\dfrac{16}{70}$，$P(4)=\dfrac{C_4^0C_4^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$。

（2）$\mathrm{E}(\zeta)=\dfrac{1}{70}\times3500+\dfrac{16}{70}\times2800+\left(\dfrac{36}{70}+\dfrac{16}{70}+\dfrac{1}{70}\right)\times2100=2280$。

21.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，已知 $\sin C+\cos C=1-\sin\dfrac{C}{2}$.

（3）求 $\sin C$ 的值；

（4）若 $a^2+b^2=4(a+b)-8$，求边 c 的值.

解：（1）已知$\sin C+\cos C=1-\sin\frac{C}{2}$

$\therefore 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}$

整理即有：$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}=0\Rightarrow\sin\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{C}{2}+1\right)=0$

又 C 为ΔABC中的角，$\therefore\sin\frac{C}{2}\neq0$

$\therefore\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin C=\frac{3}{4}$

（2）$\because a^2+b^2=4(a+b)-8$

$\therefore a^2+b^2-4a-4b+4+4=0\Rightarrow(a-2)^2+(b-2)^2=0\Rightarrow a=2,b=2$

又$\because\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{7}-1$

22.（本小题满分 12 分）

已知两个等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足$a_1=a(a>0),b_1-a_1=1,b_2-a_2=2,b_3-a_3=3$.

（3）若a=1，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（4）若数列$\{a_n\}$唯一，求a的值.

. 解：（1）当 a=1 时，$b_1=1+a=2,b_2=2+a_2,b_3=3+a_3$，又$\because\{a_n\},\{b_n\}$为等比数列，

不妨设$\{a_n\}$公比为q_1，由等比数列性质知： $b_2{}^2=b_1b_3\Rightarrow(2+a_2)^2=2(3+a_3)$，同时又

有

$a_2=a_1q_1,a_3=a_1q_1{}^2\Rightarrow(2+a_1q_1)^2=2\left(3+a_1q_1{}^2\right)\Rightarrow(2+q_1)^2=2\left(3+q_1{}^2\right)\Rightarrow q_1=2\pm\sqrt{2}$

所以：$a_n=\left(2\pm\sqrt{2}\right)^{n-1},n\geq1$

（2）$\{a_n\}$要唯一，$\therefore$当公比$q_1\neq0$时，由$b_1=1+a=2,b_2=2+a_2,b_3=3+a_3$且

$b_2{}^2=b_1b_3\Rightarrow(2+aq_1)^2=(1+a)\left(3+aq_1{}^2\right)\Rightarrow aq_1{}^2-4aq_1+3a-1=0$，

$\because a>0$，$\therefore a{q_1}^2-4aq_1+3a-1=0$ 最少有一个根（有两个根时，保证仅有一个正根）

$\therefore (4a)^2-4a(3a-1)\geq 0 \Rightarrow 4a(a+1)\geq 0$，此时满足条件的 a 有无数多个，不符合。

$\therefore$ 当公比 $q_1=0$ 时，等比数列 $\{a_n\}$ 首项为 a，其余各项均为常数 0，唯一，此时由 $(2+aq_1)^2=(1+a)(3+a{q_1}^2)\Rightarrow a{q_1}^2-4aq_1+3a-1=0$，可推得 $3a-1=0, a=\frac{1}{3}$ 符合

综上：$a=\frac{1}{3}$。

23.（本小题满分 12 分）

设 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax.$

（3）若 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 上存在单调递增区间，求 a 的取值范围；

（4）当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $-\frac{16}{3}$，求 $f(x)$ 在该区间上的最大值.

解:（1）已知 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$，$\therefore f'(x)=-x^2+x+2a$，函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上存在单调递增区间，即导函数在 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上存在函数值大于零的部分，

$\therefore f'\left(\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}+2a>0\Rightarrow a>-\frac{1}{9}$

（2）已知 0<a<2，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上取到最小值 $-\frac{16}{3}$，而 $f'(x)=-x^2+x+2a$ 的图像开口向下，且对轴 $x=\frac{1}{2}$，$\therefore f'(1)=-1+1+2a=2a>0,\ f'(4)=-16+4+2a=2a-12<0,$ 则必有一点 $x_0\in[1,4]$, 使得 $f'(x_0)=0,$ 此时函数 $f(x)$ 在 $[1,x_0]$ 上单调递增，在 $[x_0,4]$ 单调递减，$f(1)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2a=\frac{1}{6}+2a>0$，

$\therefore f(4)=-\frac{1}{3}\times 64+\frac{1}{2}\times 16+8a=-\frac{40}{3}+8a<0$

$\therefore f(4)=-\frac{40}{3}+8a=-\frac{16}{3}\Rightarrow a=1$

此时，由 $f'(x_0)=-{x_0}^2+x_0+2=0\Rightarrow x_0=2\text{或}-1(\text{舍去})$，所以函数

$f(x)_{\max}=f(2)=\dfrac{10}{3}$

21.（本小题满分 13 分）

$P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a)$ 是双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点，M,N 分别是双曲线 E 的左、右定点，直线 PM,PN 的斜率之积为 $\dfrac{1}{5}$.

（3）求双曲线的离心率；

（4）过双曲线 E 的右焦点且斜率为 1 的直线交双曲线于 A,B 两点，O 为坐标原点，C 为双曲线上的一点，满足 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，求 λ 的值.

解：(1) 已知双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$P(x_0,y_0)$ 在双曲线上，M，N 分别为双曲线 E 的左右顶点，所以 $M(-a,0)$，$N(a,0)$，直线 PM，PN 斜率之积为

$$K_{PM}\bullet K_{PN}=\frac{y_0}{x_0+a}\bullet\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{{y_0}^2}{{x_0}^2-a^2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{5{y_0}^2}{a^2}=1$$

而 $\dfrac{{x_0}^2}{a^2}-\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1$，比较得 $b^2=\dfrac{1}{5}a^2\Rightarrow c^2=a^2+b^2=\dfrac{6}{5}a^2\Rightarrow e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$

（2）设过右焦点且斜率为 1 的直线 L：$y=x-c$，交双曲线 E 于 A，B 两点，则不妨设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，又 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(\lambda x_1+x_2,\lambda y_1+y_2)$，点 C 在双曲线 E 上：

$(\lambda x_1+x_2)^2-5(\lambda y_1+y_2)^2=a^2\Rightarrow\lambda^2({x_1}^2-5{y_1}^2)+2\lambda x_1x_2-10\lambda y_1y_2+({x_2}^2-5{y_2}^2)=a^2$ ＊（1）

又 联立直线 L 和双曲线 E 方程消去 y 得：$4x^2-10cx+5c^2+a^2=0$

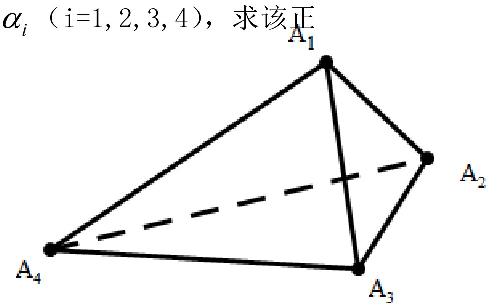
由韦达定理得：$x_1x_2=\dfrac{5c^2+a^2}{4}$，$y_1y_2=x_1x_2-c(x_1+x_2)+c^2=\dfrac{5c^2+a^2}{4}-\dfrac{5c^2}{2}+c^2$

代入（1）式得：$\lambda^2a^2+\dfrac{7}{2}\lambda a^2-\dfrac{71}{2}\lambda a^2+a^2=a^2\Rightarrow\lambda=0$，或 $\lambda=-4$

22.（本小题满分 14 分）

（1）如图，对于任一给定的四面体 $A_1A_2A_3A_4$，找出依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，使得 $A_i\in\alpha_i$（i=1, 2, 3, 4)，且其中每相邻两个平面间的距离都相等；

（2）给定依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，其中每相邻两个平面间的距离为 1，若一个正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点满足：$A_i\in\alpha_i$（i=1, 2, 3, 4)，求该正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积.



解：

（1）将直线 A_1A_4 三等分，其中另两个分点依次为 A_2',A_3'，连接 A_2A_2',A_3A_3'，作平行于 A_2A_2',A_3A_3' 的平面，分别过 A_2A_2',A_3A_3'，即为 α_2,α_3。同理，过点 A_1,A_4 作平面 α_1,α_4 即可的出结论。

（2）现设正方体的棱长为 a, 若 $A_1M=MN=1$,则有，$A_1M_1=\dfrac{a}{2}$，

$D_1E_1=\sqrt{A_1D_1^2+A_1E_1^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，由于 $A_1D_1\times A_1E_1=A_1M\times D_1E_1$，得，$a=\sqrt{5}$，

那么，正四面体的棱长为 $d=\sqrt{2}a=\sqrt{10}$，其体积为 $V=\dfrac{1}{3}a^3=\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$（即一个棱长为 a 的正方体割去四个直角三棱锥后的体积）