

2012 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学文科

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 6 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

一选择题：本大题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{x | x^4 = x\}$, 则 $M \cap N$ ()

A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{1\}$ D. $\{0\}$

2. 复数 $z = i(i+1)$ (i 为虚数单位) 的共轭复数是 ()

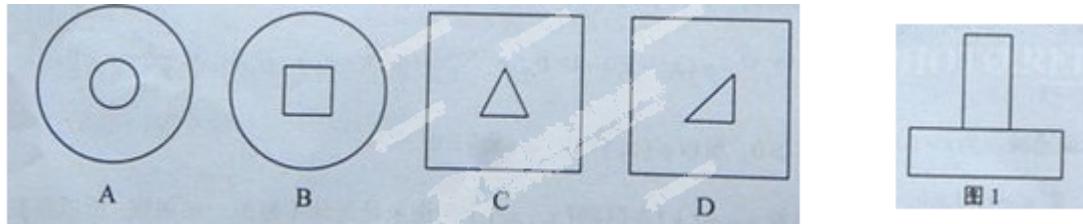
A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 - i$ D. $1 + i$

3. 命题 “若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha = 1$ ” 的逆否命题是 ()

A. 若 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha \neq 1$ B. 若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha \neq 1$

C. 若 $\tan \alpha \neq 1$, 则 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ D. 若 $\tan \alpha \neq 1$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{4}$

4. 某几何体的正视图和侧视图均如图 1 所示，则该几何体的俯视图不可能是 (C)



5. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据

一组样本数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y} = 0.85x - 85.71$,

则下列结论不正确的是 ()

A. y 与 x 具有正的线性相关关系

B. 回归直线过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y})

C. 若该大学某女生身高增加 1cm, 则其体重约增加 0.85kg

D. 若该大学某女生身高为 170cm, 则可断定其体重必为 58.79kg

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 10, 点 $P(2, 1)$ 在它的渐近线上, 则 C 的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ C. $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$ D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$

7. 设 $a > b > 1$, $c < 0$, 给出下列三个结论:

① $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$; ② $a^c < b^c$; ③ $\log_b(a-c) > \log_a(b-c)$.

其中所有的正确结论的序号是 ()

- A. ① B. ①② C. ②③ D. ①②③

8. 在 $DABC$ 中, $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2$, $B = 60^\circ$, 则 BC 边上的高等于 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{39}}{4}$

9. 设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 是最小正周期为 2π 的偶函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $0 < f(x) < 1$; 当 $x \in (0, \pi)$ 且 $x \neq \frac{\pi}{2}$ 时, $(x - \frac{\pi}{2})f'(x) > 0$.

则函数 $y = f(x) - \sin x$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的零点个数为 ()

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 8

二、填空题: 本大题共 7 小题, 考生作答 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 把答案填在答题卡中对应题号的横线上。

一、选做题 (请考生在第 10、11 二题中任选一题作答, 如果全做, 则按第一题记分)

10. 在极坐标系中, 曲线 $C_1: \rho(\sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta) = 1$ 与曲线 $C_2: \rho = a (a > 0)$ 的一个交点在极轴上, 则 $a =$ _____.

11. 某制药企业为了对某种药用液体进行生物测定, 需要优选培养温度, 试验范围定为 $29^\circ C : 63^\circ C$, 精确度要求 $\pm 1^\circ C$. 用分数法进行优选时, 能保证找到最佳培养温度需要的最少试验次数为 _____.

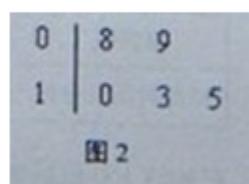
二、必做题 (12~16 题)

12. 不等式 $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ 的解集为 _____.

13. 图 2 是某学校一名篮球运动员在五场比赛中所得分数的茎叶图, 则该运动员在这五场比赛中得分的方差为 _____.

(注: 方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$,

其中 \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)



14. 如果执行如图 3 所示的程序框图, 输入 $x = 4.5$, 则输出的数 $i = \underline{\hspace{2cm}}$.

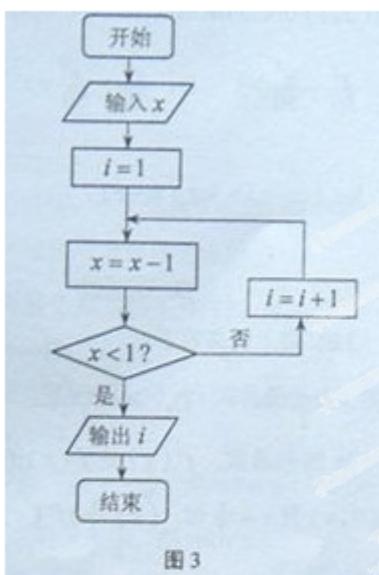


图 3

15. 如图 4, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AP \perp BD$, 垂足为 P , 且 $AP = 3$, 则

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

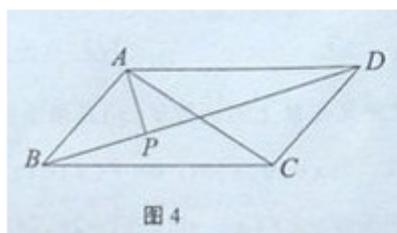


图 4

16. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 将 n 表示为 $n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$, 当 $i = k$ 时, $a_i = 1$, 当 $0 \leq i < k-1$ 时, a_i 为 0 或 1. 定义 b_n 如下: 在 n 的上述表示中, 当 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ 中等于 1 的个数为奇数时, $b_n = 1$; 否则 $b_n = 0$.

(1) $b_2 + b_4 + b_6 + b_8 = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 记 c_m 为数列 $\{b_n\}$ 中第 m 个为 0 的项与第 $m+1$ 个为 0 的项之间的项数, 则 c_m 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示:

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件以上
-------	---------	---------	----------	-----------	--------

顾客数(人)	x	30	25	y	10
结算时间(分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

- (1) 确定 x, y 的值，并估计顾客一次购物的结算时间的平均值；
- (2) 求一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率。(将频率视为概率)

18. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbb{R}, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图 5 所示，

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 求函数 $g(x) = f(x - \frac{\pi}{12}) - f(x + \frac{\pi}{12})$ 的单调递增区间。

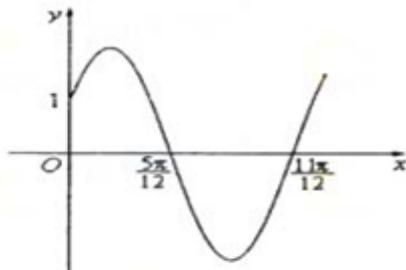


图 5

19. (本小题满分 12 分)

如图 6，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是等腰梯形， $AD \parallel BC$ ， $AC \perp BD$.

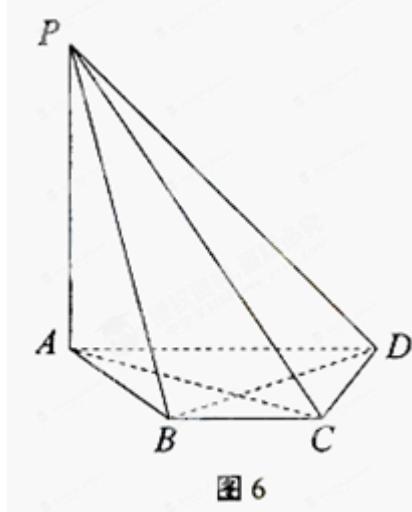


图 6

- (1) 证明： $BD \perp PC$ ；
- (2) 若 $AD = 4, BC = 2$ ，直线 PD 与平面 PAC 所成的角为 30° ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。

20. 某公司一下属企业从事某种高科技产品的生产.该企业第一年年初有资金 2000 万元,将其投入生产,到当年年底资金增长了 50%. 预计以后每年资金年增长率与第一年的相同.公司要求企业从第一年开始,每年年底上缴资金 d 万元,并将剩余资金全部投入下一年生产.设第 n 年年底企业上缴资金后的剩余资金为 a_n 万元.

(1) 用 d 表示 a_1, a_2 , 并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式;

(2) 若公司希望经过 $m(m \geq 3)$ 年使企业的剩余资金为 4000 万元, 试确定企业每年上交资金 d 的值(用 m 表示).

21.(本小题满分 13 分) 在直角坐标系 xOy 中, 已知中心在原点, 离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆 E

的一个焦点为圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ 的圆心.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 P 是椭圆 E 上一点, 过 P 作两条斜率之积为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l_1, l_2 . 当直线 l_1, l_2 都与圆 C 相切时, 求 P 的坐标.

22. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$, 其中 $a > 0$.

(I) 若对一切 $x \in R$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 a 的取值集合;

(II) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ ($x_1 < x_2$), 记直线 AB 的斜率为 k , 证明: 存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(x_0) = k$ 成立.