

# 2008年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

## 文科数学能力测试

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $U = \{2,3,4,5,6,7\}$ ,  $M = \{3,4,5,7\}$ ,  $N = \{2,4,5,6\}$ , 则( )

A.  $M \cap N = \{4,6\}$     B.  $M \cup N = U$

C.  $(C_U N) \cup M = U$     D.  $(C_U M) \cap N = N$

2. “ $|x-1| < 2$ ” 是 “ $x < 3$ ” 的( )

- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件    D. 既不充分也不必要条件

3. 已知变量  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \leq 2, \\ x - y \leq 0, \end{cases}$  则  $x + y$  的最小值是( )

- A. 4    B. 3    C. 2    D. 1

4. 函数  $f(x) = x^2 (x \leq 0)$  的反函数是( )

A.  $f^{-1}(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$     B.  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} (x \geq 0)$

C.  $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x} (x \leq 0)$     D.  $f^{-1}(x) = -x^2 (x \leq 0)$

5. 已知直线  $m, n$  和平面  $\alpha, \beta$  满足  $m \perp n, m \perp \alpha, \alpha \perp \beta$ , 则( )

- A.  $n \perp \beta$     B.  $n // \beta$ , 或  $n \subset \beta$     C.  $n \perp \alpha$     D.  $n // \alpha$ , 或  $n \subset \alpha$

6. 下面不等式成立的是( )

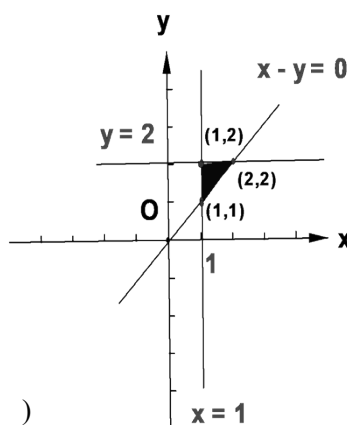
A.  $\log_3 2 < \log_2 3 < \log_2 5$     B.  $\log_3 2 < \log_2 5 < \log_2 3$

C.  $\log_2 3 < \log_3 2 < \log_2 5$     D.  $\log_2 3 < \log_2 5 < \log_3 2$

7. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=3$ ,  $AC=2$ ,  $BC=\sqrt{10}$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$  ( )

A.  $-\frac{3}{2}$     B.  $-\frac{2}{3}$     C.  $\frac{2}{3}$     D.  $\frac{3}{2}$

8. 某市拟从4个重点项目和6个一般项目中各选2个项目作为本年度启动的项目，

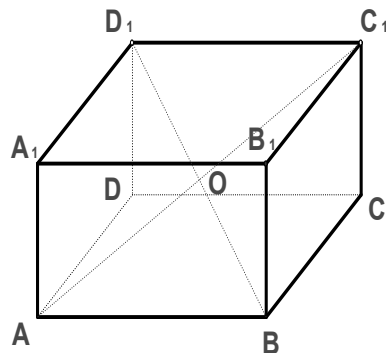


- 则重点项目A和一般项目B至少有一个被选中的不同选法种数是( )
- A. 15      B. 45      C. 60      D. 75

9. 长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的8个顶点在同一个球面上, 且  $AB=2$ ,  $AD=\sqrt{3}$ ,

$AA_1=1$ , 则顶点A、B间的球面距离是( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$     B.  $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$     C.  $\sqrt{2}\pi$     D.  $2\sqrt{2}\pi$



10. 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右支上存在一点, 它到右焦点及左准线的距离

相等, 则双曲线离心率的取值范围是( )

- A.  $(1, \sqrt{2}]$       B.  $[\sqrt{2}, +\infty)$     C.  $(1, \sqrt{2} + 1]$     D.  $[\sqrt{2} + 1, +\infty)$

二. 填空题: 本大题共5小题, 每小题5分, 共25分, 把答案填在横线上。

11. 已知向量  $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ,  $\vec{b} = (-2, 0)$ , 则  $|\vec{a} + \vec{b}| =$ \_\_\_\_\_.

12. 从某地区15000位老人中随机抽取500人, 其生活能否自理的情况如下表所示:

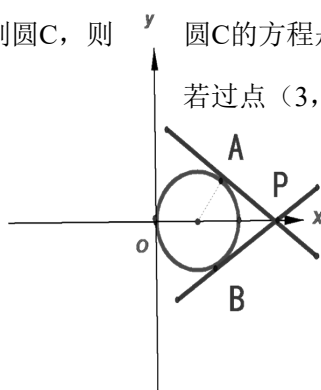
人数 \ 性别	男	女
	生活能否自理	
能	178	278
不能	23	21

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多\_\_\_\_\_人。

13. 记  $(2x + \frac{1}{x})^n$  的展开式中第m项的系数为  $b_m$ , 若  $b_3 = 2b_4$ , 则  $n =$ \_\_\_\_\_.

14. 将圆  $x^2 + y^2 = 1$  沿x轴正向平移1个单位后所得圆C, 则 圆C的方程是\_\_\_\_\_.

若过点 (3, 0) 的直线  $l$  和圆C相切, 则直线  $l$  的斜率为\_\_\_\_\_.



15. 设 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数, (如 $[2]=2, [\frac{5}{4}]=1$ )。对于给定的 $n \in N^+$ ,

定义 $C_n^x = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}, x \in [1, +\infty)$ , 则 $C_8^{\frac{3}{2}} =$ \_\_\_\_\_;

当 $x \in [2, 3)$ 时, 函数 $C_8^x$ 的值域是\_\_\_\_\_。

### 三. 解答题: 本大题共6小题, 共75分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分12分)

甲乙丙三人参加一家公司的招聘面试, 面试合格者可正式签约。甲表示只要面试合格就签约, 乙、丙则约定: 两人面试都合格就一同签约, 否则两人都不签约。设每人面试合格的概率都是 $\frac{1}{2}$ , 且面试是否合格互不影响。求:

- (I) 至少一人面试合格的概率;
- (II) 没有人签约的概率。

17. (本小题满分12分)

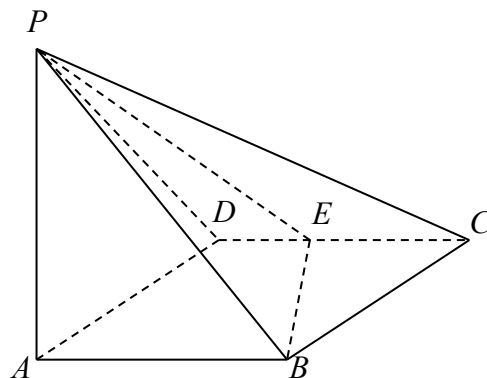
已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$ .

- (I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- (II) 当 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ 且 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 时, 求 $f(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值。

18. (本小题满分12分)

如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形,  $\angle BCD = 60^\circ$ ,  $E$ 是 $CD$ 的中点,  $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ,  $PA = \sqrt{3}$ 。

- (I) 证明: 平面 $PBE \perp$ 平面 $PAB$ ;
- (II) 求二面角 $A-BE-P$ 的大小。



19（本小题满分13分）

已知椭圆的中心在原点，一个焦点是  $F(2,0)$ ，且两条准线间的距离为  $\lambda(\lambda > 4)$ 。

(I) 求椭圆的方程；

(II) 若存在过点  $A(1, 0)$  的直线  $l$ ，使点  $F$  关于直线  $l$  的对称点在椭圆上，求  $\lambda$  的取值范围。

20.（本小题满分13分）

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} = (1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2})a_n + 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$ ,

(I) 求  $a_3, a_4$ ，并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 设  $S_k = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1}$ ， $T_k = a_2 + a_4 + \dots + a_{2k}$ ， $W_k = \frac{2S_k}{2 + T_k} (k \in N^+)$ ，

求使  $W_k > 1$  的所有  $k$  的值，并说明理由。

21.（本小题满分13分）

已知函数  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + cx$  有三个极值点。

(I) 证明： $-27 < c < 5$ ；

(II) 若存在实数  $c$ ，使函数  $f(x)$  在区间  $[a, a+2]$  上单调递减，求  $a$  的取值范围。