

2011年普通高等学校招生全国统一考试

数 学（理）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $P = \{x \mid x^2 \leq 1\}$ ， $M = \{a\}$ 。若 $P \cup M = P$ ，则 a 的取值范围是

- (A) $(-\infty, -1]$ (B) $[1, +\infty)$ (C) $[-1, 1]$ (D) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(2) 复数 $\frac{i-2}{1+2i} =$

- (A) i (B) $-i$ (C) $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ (D) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

(3) 在极坐标系中，圆 $\rho = -2\sin\theta$ 的圆心的极坐标是

- (A) $(1, \frac{\pi}{2})$ (B) $(1, -\frac{\pi}{2})$ (C) $(1, 0)$ (D) $(1, \pi)$

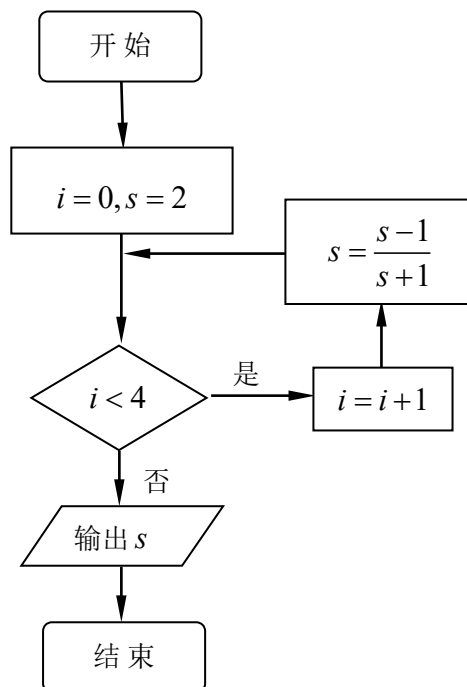
(4) 执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为

- (A) -3

- (B) $-\frac{1}{2}$

- (C) $\frac{1}{3}$

- (D) 2



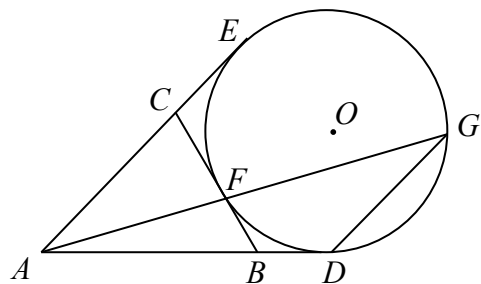
(5) 如图, AD, AE, BC 分别与圆 O 切于点 D, E, F , 延长 AF 与圆 O 交于另一点 G 。

给出下列三个结论:

① $AD + AE = AB + BC + CA$;

② $AF \cdot AG = AD \cdot AE$;

③ $\triangle AFB \sim \triangle ADG$



其中, 正确结论的序号是

(A) ① ② (B) ② ③

(C) ① ③ (D) ① ② ③

(6) 根据统计, 一名工人组装第 x 件某产品所用的时间 (单位: 分钟) 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases}$$

(A, c 为常数)。已知工人组装第4件产品用时30分钟, 组装第 A 件产品用时15分钟,

那么 c 和 A 的值分别是

(A) 75, 25 (B) 75, 16 (C) 60, 25 (D) 60, 16

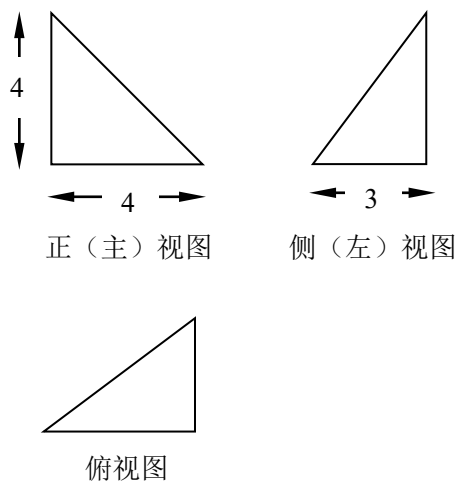
(7) 某四面体的三视图如图所示, 该四面体四个面的面积中最大的是

(A) 8

(B) $6\sqrt{2}$

(C) 10

(D) $8\sqrt{2}$



(8) 设 $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(t+4,4)$, $D(t,4)$ ($t \in \mathbb{R}$), 记 $N(t)$ 为平行四边形内

部 (不含边界) 的整点的个数, 其中整点是指横、纵坐标都是整数的点, 则函数 $N(t)$ 的
值域为

(A) $\{9, 10, 11\}$ (B) $\{9, 10, 12\}$ (C) $\{9, 11, 12\}$ (D) $\{10, 11, 12\}$

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

(9) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b = 5$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\tan A = 2$, 则 $\sin A = \underline{\hspace{1cm}}$; $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(10) 已知向量 $a = (\sqrt{3}, 1)$, $b = (0, -1)$, $c = (k, \sqrt{3})$, 若 $a - 2b$ 与 c 共线, 则 $k = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(11) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -4$, 则公比 $q = \underline{\hspace{1cm}}$;

$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(12) 用数字2, 3组成四位数, 且数字2, 3至少都出现一次, 这样的四位数共有 $\underline{\hspace{1cm}}$ 个。
(用数字作答)

(13) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$ 过关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

(14) 曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ 的距离的积等于常数 $a^2 (a > 1)$ 的点的

轨迹, 给出下列三个结论:

① 曲线 C 过坐标原点;

② 曲线 C 关于坐标原点对称;

③ 若点 P 在曲线 C 上, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于 $\frac{1}{2}a^2$;

其中, 所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

三、解答题共6小题,共80分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(15)(本小题共13分)

已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$,

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值;

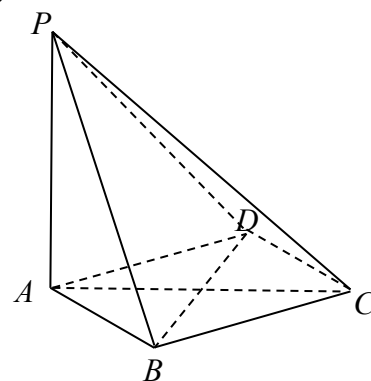
(16)(本小题共14分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $AB = 2, \angle BAD = 60^\circ$ 。

(I) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC

(II) 若 $PA = AB$, 求 PB 与 AC 所成角的余弦值;

(III) 当平面 PBC 与平面 PDC 垂直时, 求 PA 的长;



(17)(本小题共13分)

以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学植树的棵数, 乙组记录中有一个数据记录模糊无法确认, 在图中以 X 表示。

甲 组				乙 组	
9	9	0	X	8	9
1	1	1	0		

(I) 如果 $X = 8$, 求乙组同学植树棵树的平均数和方差;

(II) 如果 $X = 9$, 分别从甲、乙两组中随机选取一名学生, 求这两名同学的植树总棵数 Y 的分布列和数学期望;

注: 方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数

（18）（本小题共13分）

已知函数 $f(x) = (x-k)^2 e^{\frac{x}{k}}$ 。

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(x) \leq \frac{1}{e}$ ，求 k 的取值范围；

（19）（本小题共14分）

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，过点 $(m, 0)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A, B 两点

,

（I）求椭圆 G 的焦点坐标及离心率；

（II）将 $|AB|$ 表示为 m 的函数，并求 $|AB|$ 的最大值；

（20）（本小题共13分）

若数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) 满足 $|a_{k+1} - a_k| = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$)，则称 A_n 为 E 数列，记 $S(A_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

（I）写出一个满足 $a_1 = a_5 = 0$ ，且 $S(A_5) > 0$ 的 E 数列 A_5 ；

（II）若 $a_1 = 12, n = 2000$ ，证明 E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$ ；

（III）对任意给定的整数 n ($n \geq 2$)，是否存在首项为0的 E 数列 A_n ，使得 $S(A_n) = 0$ ，如果存在，写出一个满足条件的 E 数列 A_n ；如果不存在，说明理由。

,