2009年北京市普通高等学校招生全国统一考试

数学（理工农医类）

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷1至2页，第II卷3至9页，共150分。考试时间120分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷（选择题 共40分）

注意事项：

1．答第I卷前，考生务必将答题卡上的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔填写，用2B铅笔将准考证号对应的信息点涂黑。

2．每小题选出答案后，将答题卡上对应题目的答案选中涂满涂黑，黑度以盖住框内字母为准，修改时用橡皮擦除干净。在试卷上作答无效。

一、本大题每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．在复平面内，复数 $z=i(1+2i)$ 对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

2．已知向量 a,b 不共线，$c=ka+b(k\in R),d=a-b$ 如果 $c//d$，那么

A．$k=1$ 且 c 与 d 同向　　B．$k=1$ 且 c 与 d 反向
C．$k=-1$ 且 c 与 d 同向　　D．$k=-1$ 且 c 与 d 反向

3．为了得到函数 $y=\lg\dfrac{x+3}{10}$ 的图像，只需把函数 $y=\lg x$ 的图像上所有的点

A．向左平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度
B．向右平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度
C．向左平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度
D．向右平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度

4．若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为1，AB_1 与底面 $ABCD$ 成60°角，则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

5．“$\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$”是“$\cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．若 $(1+\sqrt{2})^5+a+b\sqrt{2}(a,b$ 为有理数），则 $a+b=$

A．45　　B．55　　C．70　　D．80

7．用0到9这10个数字，可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为

A．324　　B．328　　C．360　　D．648

8．点 P 在直线 $l: y=x-1$ 上，若存在过 P 的直线交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点，且 $|PA|=|AB|$，则称点 P 为"$\mathscr{A}$点"，那么下列结论中正确的是

A．直线 l 上的所有点都是"$\mathscr{A}$点"

B．直线 l 上仅有有限个点是"$\mathscr{A}$点"

C．直线 l 上的所有点都不是"$\mathscr{A}$点"

D．直线 l 上有无穷多个点（点不是所有的点）是"$\mathscr{A}$点"

第II卷（共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。把答案填在题中横线上。

9．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$__________。

10．若实数 x,y 满足 $\begin{cases} x+y-2\geq 0 \\ x\leq 4 \\ y\leq 5 \end{cases}$ 则 $s=y-x$ 的最小值为_________。

11．设 $f(x)$ 是偶函数，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为1，则该曲线在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线的斜率为____________。

12．椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1|=4$，则 $|PF_2|=$________；$\angle F_1PF_2$ 的小大为___________。

13．若函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0 \\ (\dfrac{1}{3})^x, & x\geq 0 \end{cases}$ 则不等式 $|f(x)|\geq\dfrac{1}{3}$ 的解集为___________。

14．已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{4n-3}=1, a_{4n-1}=0, a_{2n}=a_n, n\in \mathrm{N}^*$, 则 $a_{2009}=$________；$a_{2014}=$___________。

三、解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15．（本小题共13分）

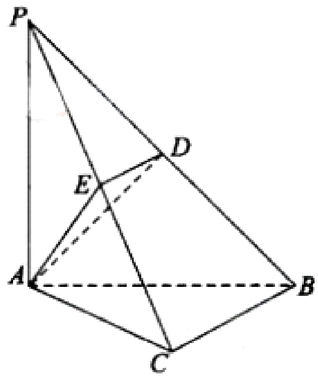
在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为$a,b,c,B=\dfrac{\pi}{3}$，$\cos A=\dfrac{4}{5},b=\sqrt{3}$。

（I）求$\sin C$的值；

（II）求ΔABC的面积。

16．（本小题共14分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$底面$ABC,PA=AB,\angle ABC=60^{\circ},\angle BCA=90^{\circ}$，点$D$，$E$分别在棱$PB,PC$上，且$DE // BC$



（I）求证：$BC\perp$平面PAC；

（II）当D为PB的中点时，求AD与平面PAC所成的角的大小；

（III）是否存在点E使得二面角$A-DE-P$为直二面角？并说明理由。

17．（本小题共13分）

某学生在上学路上要经过4个路口，假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的，遇到红灯的概率都是$\dfrac{1}{3}$，遇到红灯时停留的时间都是2min。

（I）求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率；

（II）求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间ξ的分布列及期望。

18．（本小题共13分）

设函数 $f(x)=xe^{kx}(k\neq 0)$

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（III）若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内单调递增，求 k 的取值范围。

19．（本小题共14分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，右准线方程为 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（I）求双曲线 C 的方程；

（II）设直线 l 是圆 $O:x^2+y^2=2$ 上动点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 处的切线，l 与双曲线 C 交于不同的两点 A,B，证明 $\angle AOB$ 的大小为定值。

20．（本小题共13分）

已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}(1\leq a_1<a_2<\cdots a_n,n\geq 2)$ 具有性质 P；对任意的 $i,j(1\leq i\leq j\leq n)$，a_ia_j 与 $\dfrac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A。

（I）分别判断数集 $\{1,3,4\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（II）证明：$a_1=1$，且 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$；

（III）证明：当$n=5$时，a_1,a_2,a_3,a_4,a_5成等比数列。

参考答案解析

1．B 2．D 3．C 4．D 5．A 6．C 7．B 8．A

9．$\dfrac{1}{2}$ 10．-6 11．-1 12．2，120° 13．$[-3,1]$ 14．1，0

三 、解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15.（I）∵A、B、C为△ABC的内角，且$B=\dfrac{\pi}{3},\cos A=\dfrac{4}{5}$，

$$\therefore C=\frac{2\pi}{3}-A,\sin A=\frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin C=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

（II）由（I）知$\sin A=\dfrac{3}{5},\sin C=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$，

又∵$B=\dfrac{\pi}{3},b=\sqrt{3}$，

∴在△ABC中，由正弦定理，得

$$\therefore a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{6}{5}.$$

∴△ABC的面积$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{5}\times\sqrt{3}\times\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}=\dfrac{36+9\sqrt{3}}{50}$.

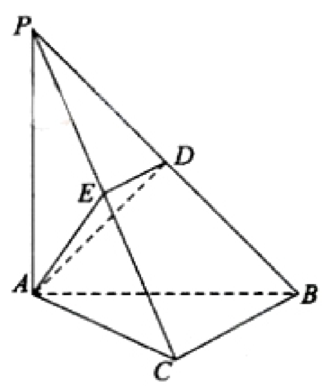
16．（I）∵PA⊥底面ABC，∴PA⊥BC.

又$\angle BCA=90^{\circ}$，∴AC⊥BC.

∴BC⊥平面PAC.

（II）∵D为PB的中点，DE//BC，

$$\therefore DE=\frac{1}{2}BC,$$



又由（I）知，BC⊥平面PAC，

∴DE⊥平面PAC，垂足为点E.

∴∠DAE是AD与平面PAC所成的角，

∵PA⊥底面ABC，∴PA⊥AB，又PA=AB，

∴△ABP为等腰直角三角形，∴ $AD=\frac{1}{\sqrt{2}}AB$，

∴在Rt△ABC中，$\angle ABC=60^{\circ}$，∴ $BC=\frac{1}{2}AB$.

∴在Rt△ADE中，$\sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{BC}{2AD}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

∴ AD 与平面 PAC 所成的角的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$.

（III）∵DE//BC，又由（I）知，BC⊥平面PAC，∴DE⊥平面PAC，

又∵AE⊂平面PAC，PE⊂平面PAC，∴DE⊥AE，DE⊥PE，

∴∠AEP为二面角 $A-DE-P$ 的平面角，

∵PA⊥底面ABC，∴PA⊥AC，∴ $\angle PAC=90^{\circ}$.

∴在棱PC上存在一点E，使得AE⊥PC，这时 $\angle AEP=90^{\circ}$，

故存在点E使得二面角 $A-DE-P$ 是直二面角.

17（I）设这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯为事件A，因为事件A等价于事件“这名学生在第一和第二个路口没有遇到红灯，在第三个路口遇到红灯”，所以事件A的概率为 $P\left(A\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$.

（II）由题意可得，ξ 可能取的值为0，2，4，6，8（单位：min）.

事件“$\xi=2k$”等价于事件“该学生在路上遇到 k 次红灯”（$k=$0，1，2，3，4），

∴ $P\left(\xi=2k\right)=C_4^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}\left(k=0,1,2,3,4\right)$，

∴即 ξ 的分布列是

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

∴ ξ 的期望是 $E\xi=0\times\frac{16}{81}+2\times\frac{32}{81}+4\times\frac{8}{27}+6\times\frac{8}{81}+8\times\frac{1}{81}=\frac{8}{3}$.

18. （I）$f'\left(x\right)=\left(1+kx\right)e^{kx},f'\left(0\right)=1,f\left(0\right)=0$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$

（II）由 $f'(x)=(1+kx)e^{kx}=0$，得 $x=-\frac{1}{k}(k\neq 0)$，

若 $k>0$，则当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(-\frac{1}{k},+\infty,\right)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

若 $k<0$，则当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(-\frac{1}{k},+\infty,\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

（III）由（II）知，若 $k>0$，则当且仅当 $-\frac{1}{k}\leq -1$，即 $k\leq 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调递增；

若 $k<0$，则当且仅当 $-\frac{1}{k}\geq 1$，即 $k\geq -1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调递增，

综上可知，函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内单调递增时，k 的取值范围是 $[-1,0)\cup(0,1]$.

19. （I）由题意，得 $\begin{cases}\frac{a^2}{c}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{c}{a}=\sqrt{3}\end{cases}$，解得 $a=1,c=\sqrt{3}$，$\therefore b^2=c^2-a^2=2$，

$\therefore$所求双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

（II）点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 在圆 $x^2+y^2=2$ 上，

圆在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，化简得 $x_0x+y_0y=2$

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1\\ x_0x+y_0y=2\end{cases}$ 及 $x_0^2+y_0^2=2$ 得 $(3x_0^2-4)x^2-4x_0x+8-2x_0^2=0$，

$\because$切线 l 与双曲线C交于不同的两点A、B，且 $0<x_0^2<2$，

$\therefore 3x_0^2-4\neq 0$，且 $\Delta=16x_0^2-4\left(3x_0^2-4\right)\left(8-2x_0^2\right)>0$，

设A、B两点的坐标分别为 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{4x_0}{3x_0^2-4},x_1x_2=\dfrac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}$，$\because \cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}$，

且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\dfrac{1}{y_0^2}\left(2-x_0x_1\right)\left(2-x_0x_2\right)$，

$$=x_1x_2+\frac{1}{2-x_0^2}\left[4-2x_0\left(x_1+x_2\right)+x_0^2x_1x_2\right]$$

$$=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{1}{2-x_0^2}\left[4-\frac{8x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{x_0^2\left(8-2x_0^2\right)}{3x_0^2-4}\right]$$

$$=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{2x_0^2-8}{3x_0^2-4}=0.$$

$\therefore$ $\angle AOB$ 的大小为 90°.

20. （I）由于 3×4 与 $\dfrac{4}{3}$ 均不属于数集 $\{1,3,4\}$，$\therefore$该数集不具有性质P.

由于 $1\times 2,1\times 3,1\times 6,2\times 3,\dfrac{6}{2},\dfrac{6}{3},\dfrac{1}{1},\dfrac{2}{2},\dfrac{3}{3},\dfrac{6}{6}$ 都属于数集 $\{1,2,3,6\}$，

$\therefore$该数集具有性质P.

（II）$\because A=\left\{a_1,a_2,\cdots a_n\right\}$ 具有性质P，$\therefore a_na_n$ 与 $\dfrac{a_n}{a_n}$ 中至少有一个属于A，

由于 $1\leq a_1<a_2<\cdots<a_n$，$\therefore a_na_n>a_n$，故 $a_na_n\notin A$.

从而 $1=\dfrac{a_n}{a_n}\in A$，$\therefore a_1=1$

$\because 1=a_1<a_2<\cdots<a_n$，　$\therefore a_ka_n>a_n$，故 $a_ka_n\notin A\left(k=2,3,\cdots,n\right)$.

由A具有性质P可知 $\dfrac{a_n}{a_k}\in A\left(k=1,2,3,\cdots,n\right)$.

又 $\because \dfrac{a_n}{a_n}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<\cdots<\dfrac{a_n}{a_2}<\dfrac{a_n}{a_1}$，　　$\therefore \dfrac{a_n}{a_n}=a_1,\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a_2,\cdots\dfrac{a_n}{a_2}=a_{n-1},\dfrac{a_n}{a_1}=a_n$，

从而$\dfrac{a_n}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_{n-1}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_2}+\dfrac{a_n}{a_1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$，$\therefore\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$.

（III）由（II）知，当$n=5$时，有$\dfrac{a_5}{a_4}=a_2,\dfrac{a_5}{a_3}=a_3$，即$a_5=a_2a_4=a_3^2$，

$\because 1=a_1<a_2<\cdots<a_5$，$\therefore a_3a_4>a_2a_4=a_5$，$\therefore a_3a_4\notin A$，由A具有性质P可知$\dfrac{a_4}{a_3}\in A$.

由$a_2a_4=a_3^2$，得$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}\in A$，且$1<\dfrac{a_3}{a_2}<a_3$，$\therefore\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_2}=a_2$，$\therefore$

$\dfrac{a_5}{a_4}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_1}=a_2$，

即a_1,a_2,a_3,a_4,a_5是首项为1，公比为a_2成等比数列.

解析

一、本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．在复平面内，复数 $z=i(1+2i)$ 对应的点位于　　　　　　　　（　）

A．第一象限　　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

【答案】B

【解析】本题主要考查复数在坐标系数内复数与点的对应关系. 属于基础知识的考查.

$\because z=i(1+2i)=i+2i=-2+i$，$\therefore$复数 z 所对应的点为 $\left(-2,1\right)$，故选B.

2．已知向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线，$\boldsymbol{c}=k\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,(k\in\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 如果$\boldsymbol{c}\,//\,\boldsymbol{d}$，那么　　　（　）

A．$k=1$ 且$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$同向　　　　B．$k=1$ 且$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$反向

C．$k=-1$ 且$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$同向　　　D．$k=-1$ 且$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$反向

【答案】D

【解析】本题主要考查向量的共线（平行）、向量的加减法.

属于基础知识、基本运算的考查.

取$\boldsymbol{a}=\left(1,0\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(0,1\right)$，若 $k=1$，则$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(1,1\right)$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\left(1,-1\right)$，

显然，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行，排除A、B.

若 $k=-1$，则$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(-1,1\right)$，$\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\left(-1,1\right)$，

即$\boldsymbol{c}\,//\,\boldsymbol{d}$且$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$反向，排除C，故选D.

3．为了得到函数 $y=\lg\dfrac{x+3}{10}$ 的图像，只需把函数 $y=\lg x$ 的图像上所有的点　（　）

A．向左平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度

B．向右平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度

C．向左平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度

D．向右平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度

【答案】C

【解析】本题主要考查函数图象的平移变换. 属于基础知识、基本运算的考查.

A．$y=\lg\left(x+3\right)+1=\lg10\left(x+3\right)$，

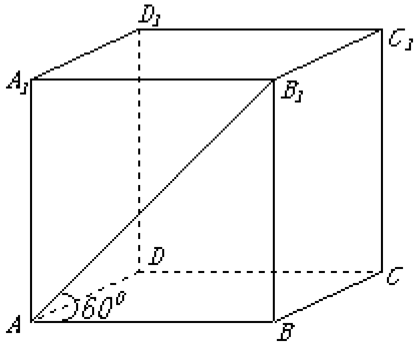
B．$y=\lg\left(x-3\right)+1=\lg10\left(x-3\right)$，

C．$y=\lg\left(x+3\right)-1=\lg\dfrac{x+3}{10}$，

D．$y=\lg\left(x-3\right)-1=\lg\dfrac{x-3}{10}$.

故应选C.

4．若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为1，



AB_1与底面$ABCD$成$60°$角，则A_1C_1

到底面$ABCD$的距离为　　　　（　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　B．1

C．$\sqrt{2}$　　　D．$\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】本题主要考查正四棱柱的概念、
直线与平面所成的角以及直线与平面的距离等概念.　（第4题解答图）
属于基础知识、基本运算的考查.

依题意，$\angle B_1AB = 60^\circ$，如图，

$BB_1 = 1\times\tan 60^\circ = \sqrt{3}$，故选D.

5．“$\alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi(k\in Z)$”是“$\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$”的　　　　（　）

A．充分而不必要条件　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】本题主要考查三角函数的基本概念、简易逻辑中充要条件的判断.
属于基础知识、基本运算的考查.

当$\alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi(k\in Z)$时，$\cos 2\alpha = \cos\left(4k\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$，

反之，当$\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$时，有$2\alpha = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = k\pi + \dfrac{\pi}{6}(k\in Z)$，

或$2\alpha = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = k\pi - \dfrac{\pi}{6}(k\in Z)$，故应选A.

6．若$(1+\sqrt{2})^5 = a + b\sqrt{2}$（$a,b$为有理数），则$a+b=$　　　　（　）

A．45　　B．55　　C．70　　D．80

【答案】C

【解析】本题主要考查二项式定理及其展开式. 属于基础知识、基本运算的考查.

$\because\left(1+\sqrt{2}\right)^5 = C_5^0\left(\sqrt{2}\right)^0 + C_5^1\left(\sqrt{2}\right)^1 + C_5^2\left(\sqrt{2}\right)^2 + C_5^3\left(\sqrt{2}\right)^3 + C_5^4\left(\sqrt{2}\right)^4 + C_5^5\left(\sqrt{2}\right)^5$

$= 1 + 5\sqrt{2} + 20 + 20\sqrt{2} + 20 + 4\sqrt{2} = 41 + 29\sqrt{2}$，

由已知，得$41 + 29\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$，$\therefore a + b = 41 + 29 = 70$. 故选C.

7．用0到9这10个数字，可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为　　（　）

A．324　　B．328　　C．360　　D．648

【答案】B

【解析】本题主要考查排列组合知识以及分类计数原理和分步计数原理知识.
属于基础知识、基本运算的考查.

首先应考虑“0”是特殊元素，当0排在末位时，有 $A_9^2=9\times8=72$（个），

当0不排在末位时，有 $A_4^1\cdot A_8^1\cdot A_8^1=4\times8\times8=256$（个），

于是由分类计数原理，得符合题意的偶数共有 $72+256=328$（个）. 故选B.

8．点 P 在直线 $l:y=x-1$ 上，若存在过 P 的直线交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点，且

$|PA=|AB|$，则称点 P 为“$\mathscr{A}$点”，那么下列结论中正确的是（　）

A．直线 l 上的所有点都是“$\mathscr{A}$点”

B．直线 l 上仅有有限个点是“$\mathscr{A}$点”

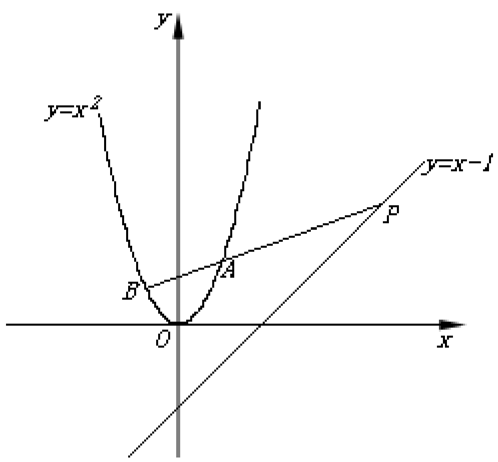
C．直线 l 上的所有点都不是“$\mathscr{A}$点”

D．直线 l 上有无穷多个点（但不是所有的点）是“$\mathscr{A}$点”

【答案】A

【解析】本题主要考查阅读与理解、信息迁移以及学生的学习潜力, 考查学生分析问题和解决问题的能力. 属于创新题型.

本题采作数形结合法易于求解，如图，



设 $A(m,n),P(x,x-1)$，

则 $B(2m-x,2n-x-2)$，

$\because A,B$在$y=x^2$上，

$$\therefore\begin{cases}n=m^2\\2n-x+1=(2m-x)^2\end{cases}$$

消去n,整理得关于x的方程 $x^2-(4m-1)x+2m^2-1=0$　　（1）

$\because\Delta=(4m-1)^2-4(2m^2-1)=8m^2-8m+5>0$ 恒成立，

$\therefore$方程（1）恒有实数解，$\therefore$应选A.

2009年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理工农医类）（北京卷）

第II卷（共110分）

注意事项：

1．用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上。

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚。

题号	二	三						总分
		15	16	17	18	19	20	
分数								

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。把答案填在题中横线上。

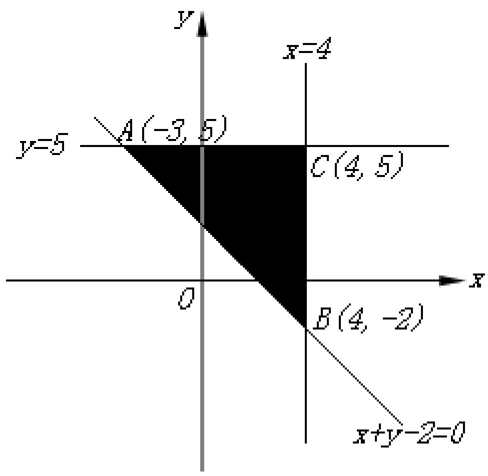
9．$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】本题主要考极限的基本运算，其中重点考查如何约去“零因子”.属于基础知识、基本运算的考查.

$$\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$，故应填$\dfrac{1}{2}$.

10．若实数x,y满足$\begin{cases}x+y-2\ge0\\x\le4\\y\le5\end{cases}$则$s=y-x$的最小值为________.



【答案】-6

【解析】本题主要考查线性规划方面的基础知.属于基础知识、基本运算的考查.

如图，当$x=4,y=-2$时，

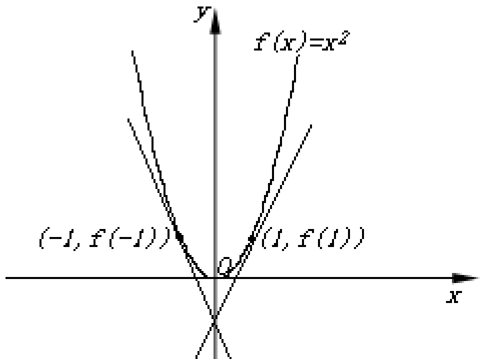
$s=y-x-2-4=-6$为最小值.

故应填-6.

11．设$f(x)$是偶函数，若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的斜率为1，则该曲线在$(-1,f(-1))$处的切线的斜率为________.

【答案】-1

【解析】本题主要考查导数与曲线在某一点处切线的斜率的概念．属于基础知识、基本运算的考查.



取 $f\left(x\right)=x^2$，如图，采用数形结合法，

易得该曲线在 $(-1, f(-1))$ 处的切线的斜率为 -1.

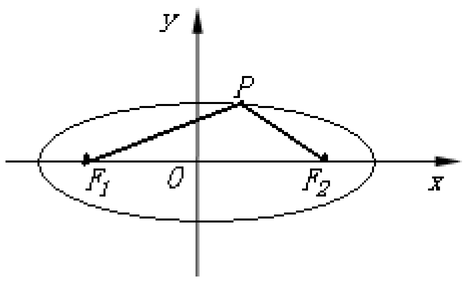
故应填 -1.

12．椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1|=4$，则 $|PF_2|=$________

_；$\angle F_1PF_2$ 的小大为_________.

【答案】 2，120°

【解析】 本题主要考查椭圆的定义、焦点、长轴、短轴、焦距之间的关系以及余弦定理.
属
于基础知识、基本运算的考查.



$\because a^2=9, b^2=3$，

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$，

$\therefore \left|F_1F_2\right|=2\sqrt{7}$，

又 $\left|PF_1\right|=4, \left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a=6$，

$\therefore \left|PF_2\right|=2$，

又由余弦定理，得 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{2^2+4^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}{2\times2\times4}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle F_1PF_2=120^\circ$，故应填 2，$120^\circ$.

13．若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ (\dfrac{1}{3})^x, & x\geq 0\end{cases}$ 则不等式 $|f(x)|\geq\dfrac{1}{3}$ 的解集为___________.

【答案】 $\left[-3,1\right]$

【解析】 本题主要考查分段函数和简单绝对值不等式的解法.
属于基础知识、基本运算的考查.

（1）由 $|f(x)|\geq\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ \left|\dfrac{1}{x}\right|\geq\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow -3\leq x<0$.

（2）由$|f(x)|\geq\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x\right|\geq\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x\geq\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow 0\leq x\leq 1$.

$\therefore$不等式$|f(x)|\geq\frac{1}{3}$的解集为$\{x|-3\leq x\leq 1\}$，$\therefore$应填$[-3,1]$.

14．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{4n-3}=1,a_{4n-1}=0,a_{2n}=a_n,n\in\mathrm{N}^*$,则$a_{2009}=$________；

$a_{2014}=$_________.

【答案】1，0

【解析】本题主要考查周期数列等基础知识.属于创新题型.

依题意，得$a_{2009}=a_{4\times 503-3}=1$，$a_{2014}=a_{2\times 1007}=a_{1007}=a_{4\times 252-1}=0$.

$\therefore$应填1，0.

三、解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15．（本小题共13分）

在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为$a,b,c,B=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{4}{5},b=\sqrt{3}$.

（I）求$\sin C$的值；

（II）求ΔABC的面积.

【解析】本题主要考查三角形中的三角函数变换及求值、诱导公式、三角形的面积公式等基础知识，主要考查基本运算能力.

（I）$\because$A、B、C为△ABC的内角，且$B=\frac{\pi}{3},\cos A=\frac{4}{5}$，

$\therefore C=\frac{2\pi}{3}-A,\sin A=\frac{3}{5}$，

$$\therefore\sin C=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

（II）由（I）知$\sin A=\frac{3}{5},\sin C=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$，

又$\because B=\frac{\pi}{3},b=\sqrt{3}$，

$\therefore$在△ABC中，由正弦定理，得

$\therefore a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{6}{5}$.

$\therefore$△ABC的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times\sqrt{3}\times\frac{3+4\sqrt{3}}{10}=\frac{36+9\sqrt{3}}{50}$.

16．（本小题共14分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$底面$ABC,PA=AB,\angle ABC=60^\circ,\angle BCA=90^\circ$，

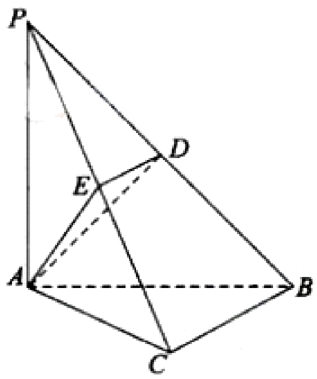
点D，E分别在棱PB,PC上，且$DE//BC$.

（I）求证：$BC\perp$平面PAC；

（II）当D为PB的中点时，求AD与平面PAC所成的角的大小；

（III）是否存在点E使得二面角$A-DE-P$为直二面角？并说明理由.

【解法1】本题主要考查直线和平面垂直、直线与平面所成的角、二面角等基础知识，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力.



（I）∵PA⊥底面ABC，∴PA⊥BC.

又$\angle BCA=90^\circ$，∴AC⊥BC.

∴BC⊥平面PAC.

（II）∵D为PB的中点，DE//BC，

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}BC$，

又由（I）知，BC⊥平面PAC，

∴DE⊥平面PAC，垂足为点E.

∴∠DAE是AD与平面PAC所成的角，

∵PA⊥底面ABC，∴PA⊥AB，又PA=AB，

∴△ABP为等腰直角三角形，$\therefore AD=\dfrac{1}{\sqrt{2}}AB$，

∴在Rt△ABC中，$\angle ABC=60^\circ$，$\therefore BC=\dfrac{1}{2}AB$.

∴在Rt△ADE中，$\sin\angle DAE=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{BC}{2AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore AD$与平面PAC所成的角的大小为$\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

（III）∵DE//BC，又由（I）知，BC⊥平面PAC，∴DE⊥平面PAC，

又∵AE⊂平面PAC，PE⊂平面PAC，∴DE⊥AE，DE⊥PE，

∴∠AEP为二面角$A-DE-P$的平面角，

∵PA⊥底面ABC，∴PA⊥AC，$\therefore\angle PAC=90^\circ$.

∴在棱PC上存在一点E，使得AE⊥PC，这时$\angle AEP=90^\circ$，

故存在点E使得二面角$A-DE-P$是直二面角.

【解法2】如图，以A为原点建立空间直角坐标系$A-xyz$，

设$PA=a$，由已知可得

$$A(0,0,0),B\left(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right),C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right),P(0,0,a).$$

（I）$\because \overrightarrow{AP}=\left(0,0,a\right),\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2}a,0,0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，∴BC⊥AP.

又$\because \angle BCA=90^{\circ}$，∴BC⊥AC，∴BC⊥平面PAC.

（II）∵D为PB的中点，DE//BC，∴E为PC的中点，

$\therefore D\left(-\frac{1}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{2}a\right),E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{2}a\right)$，

∴又由（I）知，BC⊥平面PAC，∴DE⊥平面PAC，垂足为点E.

∴∠DAE是AD与平面PAC所成的角，

$\because \overrightarrow{AD}=\left(-\frac{1}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{2}a\right),\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{2}a\right)$，

$\therefore \cos\angle DAE=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.

$\therefore AD$ 与平面 PAC 所成的角的大小为$\arccos\frac{\sqrt{14}}{4}$.

（III）同解法1.

17．（本小题共13分）

某学生在上学路上要经过4个路口，假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的，遇到红灯的概率都是$\frac{1}{3}$，遇到红灯时停留的时间都是2min.

（I）求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率；

（II）求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间ξ的分布列及期望.

【解析】本题主要考查随机事件、互斥事件、相互独立事件等概率知识、考查离散型随机变量的分布列和期望等基础知识，考查运用概率与统计知识解决实际问题的能力.

（I）设这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯为事件A，因为事件A等价于事件“这名学生在第一和第二个路口没有遇到红灯，在第三个路口遇到红灯”，所以事件A的概率为$P\left(A\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$.

（II）由题意可得，ξ可能取的值为0，2，4，6，8（单位：*min*）.

事件“$\xi=2k$”等价于事件“该学生在路上遇到k次红灯”（$k=$0，1，2，3，4）

，

$\therefore P\left(\xi=2k\right)=C_4^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}\left(k=0,1,2,3,4\right)$，

$\therefore$即ξ的分布列是

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$\therefore\xi$的期望是$E\xi=0\times\frac{16}{81}+2\times\frac{32}{81}+4\times\frac{8}{27}+6\times\frac{8}{81}+8\times\frac{1}{81}=\frac{8}{3}$.

18．（本小题共13分）

设函数$f(x)=xe^{kx}(k\neq 0)$

（I）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（II）求函数$f(x)$的单调区间；

（III）若函数$f(x)$在区间$(-1,1)$内单调递增，求k的取值范围.

【解析】本题主要考查利用导数研究函数的单调性和极值、解不等式等基础知识，考查综合分析和解决问题的能力.

（I）$f'(x)=(1+kx)e^{kx},f'(0)=1,f(0)=0$，

曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=x$

（II）由$f'(x)=(1+kx)e^{kx}=0$，得$x=-\frac{1}{k}(k\neq 0)$，

若$k>0$，则当$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

当$x\in\left(-\frac{1}{k},+\infty,\right)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

若$k<0$，则当$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

当$x\in\left(-\frac{1}{k},+\infty,\right)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

（III）由（II）知，若$k>0$，则当且仅当$-\frac{1}{k}\leq-1$，即$k\leq 1$时，函数$f(x)$在$(-1,1)$内单调递增；

若 $k<0$，则当且仅当 $-\frac{1}{k}\geq 1$，即 $k\geq -1$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 内单调递增，

综上可知，函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-1,1\right)$ 内单调递增时，k 的取值范围是 $\left[-1,0\right)\cup\left(0,1\right]$.

19. （本小题共14分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，右准线方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

（I）求双曲线 C 的方程；

（II）设直线 l 是圆 $O:x^2+y^2=2$ 上动点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 处的切线，l 与双曲线 C 交于不同的两点 A,B，证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

【解法1】本题主要考查双曲线的标准方程、圆的切线方程等基础知识，考查曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法，考查推理、运算能力.

（I）由题意，得 $\begin{cases}\frac{a^2}{c}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{c}{a}=\sqrt{3}\end{cases}$，

解得 $a=1,c=\sqrt{3}$，

$\therefore b^2=c^2-a^2=2$，

$\therefore$所求双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

（II）点 $P\left(x_0,y_0\right)\left(x_0y_0\neq 0\right)$ 在圆 $x^2+y^2=2$ 上，

圆在点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 处的切线方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}\left(x-x_0\right)$，

化简得 $x_0x+y_0y=2$

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1\\ x_0x+y_0y=2\end{cases}$ 及 $x_0^2+y_0^2=2$ 得 $\left(3x_0^2-4\right)x^2-4x_0x+8-2x_0^2=0$，

$\because$切线 l 与双曲线C交于不同的两点A、B，且 $0<x_0^2<2$，

$\therefore 3x_0^2-4\neq 0$，且 $\Delta=16x_0^2-4\left(3x_0^2-4\right)\left(8-2x_0^2\right)>0$，

设A、B两点的坐标分别为$\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$，

则$x_1+x_2=\dfrac{4x_0}{3x_0^2-4},x_1x_2=\dfrac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}$，

$\because \cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}$，

且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\dfrac{1}{y_0^2}\left(2-x_0x_1\right)\left(2-x_0x_2\right)$，

$$=x_1x_2+\frac{1}{2-x_0^2}\left[4-2x_0\left(x_1+x_2\right)+x_0^2x_1x_2\right]$$

$$=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{1}{2-x_0^2}\left[4-\frac{8x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{x_0^2\left(8-2x_0^2\right)}{3x_0^2-4}\right]$$

$$=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{2x_0^2-8}{3x_0^2-4}=0.$$

$\therefore$ $\angle AOB$的大小为90°.

【解法2】

（I）同解法1

（II）点$P\left(x_0,y_0\right)\left(x_0y_0\neq 0\right)$在圆$x^2+y^2=2$上，

圆在点$P\left(x_0,y_0\right)$处的切线方程为$y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}\left(x-x_0\right)$，

化简得$x_0x+y_0y=2$.

由$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\\x_0x+y_0y=2\end{cases}$　　及$x_0^2+y_0^2=2$得

$\left(3x_0^2-4\right)x^2-4x_0x+8-2x_0^2=0$　　①

$\left(3x_0^2-4\right)y^2-8y_0x-8+2x_0^2=0$　　②

$\because$切线l与双曲线C交于不同的两点A、B，$\therefore 3x_0^2-4\neq 0$，

设A、B两点的坐标分别为$\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$，

则 $x_1x_2=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4},y_1y_2=\frac{2x_0^2-8}{3x_0^2-4}$，

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，

$\therefore\ \angle AOB$ 的大小为 90°.

（$\because x_0^2+y_0^2=2$ 且 $x_0y_0\neq 0$，$\therefore 0<x_0^2<2,0<y_0^2<2$，从而当 $3x_0^2-4\neq 0$ 时，方程①和方程②的判别式均大于零）.

20．（本小题共13分）

已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}(1\le a_1<a_2<\cdots a_n,n\ge 2)$ 具有性质 P：对任意的 $i,j(1\le i\le j\le n)$，a_ia_j 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A.

（I）分别判断数集 $\{1,3,4\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（II）证明：$a_1=1$，且 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$；

（III）证明：当 $n=5$ 时，a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等比数列.

【解析】本题主要考查集合、等比数列的性质，考查运算能力、推理论证能力、分类讨论等数学思想方法．本题是数列与不等式的综合题，属于较难层次题.

（I）由于 3×4 与 $\frac{4}{3}$ 均不属于数集 $\{1,3,4\}$，∴该数集不具有性质P.

由于 $1\times 2,1\times 3,1\times 6,2\times 3,\frac{6}{2},\frac{6}{3},\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{6}{6}$ 都属于数集 $\{1,2,3,6\}$，

∴该数集具有性质P.

（II）$\because A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$ 具有性质P，$\therefore a_na_n$ 与 $\frac{a_n}{a_n}$ 中至少有一个属于A，

由于 $1\le a_1<a_2<\cdots<a_n$，$\therefore a_na_n>a_n$，故 $a_na_n\notin A$.

从而 $1=\frac{a_n}{a_n}\in A$，$\therefore a_1=1$

$\because 1=a_1<a_2<\cdots<a_n$，　$\therefore a_ka_n>a_n$，故 $a_ka_n\notin A(k=2,3,\cdots,n)$.

由A具有性质P可知 $\frac{a_n}{a_k}\in A(k=1,2,3,\cdots,n)$.

又$\because \frac{a_n}{a_n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \cdots < \frac{a_n}{a_2} < \frac{a_n}{a_1}$，

$\therefore \frac{a_n}{a_n} = a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_2, \cdots \frac{a_n}{a_2} = a_{n-1}, \frac{a_n}{a_1} = a_n$，

从而$\frac{a_n}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_2} + \frac{a_n}{a_1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$，

$\therefore \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n$.

（III）由（II）知，当$n = 5$时，有$\frac{a_5}{a_4} = a_2, \frac{a_5}{a_3} = a_3$，即$a_5 = a_2 a_4 = a_3^2$，

$\because 1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_5$，

$\therefore a_3 a_4 > a_2 a_4 = a_5$，$\therefore a_3 a_4 \notin A$，

由A具有性质P可知$\frac{a_4}{a_3} \in A$.

由$a_2 a_4 = a_3^2$，得$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \in A$，且$1 < \frac{a_3}{a_2} < a_3$，$\therefore \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = a_2$，

$\therefore \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = a_2$，

即a_1, a_2, a_3, a_4, a_5是首项为1，公比为a_2成等比数列.