2015 年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）

数　　学（文史类）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{1,2,3\},B=\{1,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

(A) $\{2\}$　　(B) $\{1,2\}$　　(C) $\{1,3\}$　　(D) $\{1,2,3\}$

【答案】C

【解析】由已知及交集的定义得 $A\cap B=\{1,3\}$；

故选 C.

【考点定位】集合的运算.

【名师点睛】本题考查集合的概念和运算，本题属于基础题，注意观察的仔细.

2. “$x=1$” 是 “$x^2-2x+1=0$” 的（　　）

(A) 充要条件　　(B) 充分不必要条件

(C)必要不充分条件　　(D)既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】由 “$x=1$ ” 显然能推出 “$x^2-2x+1=0$”，故条件是充分的；又由 “$x^2-2x+1=0$” 可得 $(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$，所以条件也是必要的；

故选 A.

【考点定位】充要条件.

【名师点睛】本题考查充要条件的概念和判断，采用推出法进行判断，本题属于基础题，注意推理的正确性.

3.函数 $f(x)=\log_2(x^2+2x-3)$ 的定义域是（　　）

(A) $[-3,1]$　　(B) $(-3,1)$

(C) $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$　　　　(D) $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

【答案】D

【解析】由 $x^2+2x-3>0\Rightarrow(x+3)(x-1)>0$ 解得 $x<-3$ 或 $x>1$；

故选 D.

【考点定位】函数的定义域与二次不等式.

【名师点睛】本题考查对数函数的定义域与一元二次不等式式的解法，由对数的真数大于零得不等式求解. 本题属于基础题，注意不等式只能是大于零不能等于零.

4.重庆市 2013 年各月的平均气温（°C）数据的茎叶图如下

0	8	9			
1	2	5	8		
2	0	0	3	3	8
3	1	2			

则这组数据中的中位数是（　　）

(A) 19　　(B) 20　　(C) 21.5　　(D)23

【答案】B

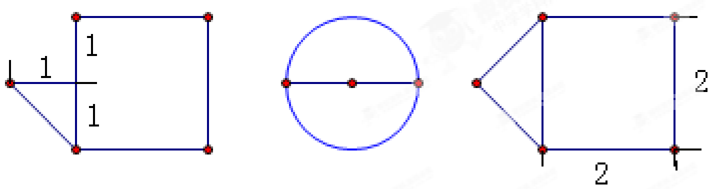
【解析】由茎叶图可知总共 12 个数据，处在正中间的两个数是第六和第七个数，它们都是 20，由中位数的定义可知：其中位数就是 20；

故选 B.

【考点定位】茎叶图与中位数.

【名师点睛】本题考查复数的概念和运算，采用分母实数化和利用共轭复数的概念进行化解求解. 本题属于基础题，注意运算的准确性.

5.某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



正视图　　侧视图　　俯视图

(A) $\frac{1}{3}+2\pi$　　(B) $\frac{13\pi}{6}$　　(C) $\frac{7\pi}{3}$　　(D) $\frac{5\pi}{2}$

【答案】B

【解析】由三视图可知该几何体是由一个底面半径为 1，高为 2 的圆柱，再加上一个半圆锥：其底面半径为 1，高也为 1；构成的一个组合体，故其体积为 $\pi\times1^2\times2+\frac{1}{6}\times\pi\times1^2\times1=\frac{13\pi}{6}$；

故选 B.学科网

【考点定位】三视图及柱体与锥体的体积.

【名师点睛】本题考查三视图的概念和组合体体积的计算，采用三视图还原成直观图，再利用简单几何体的体积公式进行求解.本题属于基础题，注意运算的准确性.

6.若 $\tan a=\frac{1}{3},\tan(a+b)=\frac{1}{2}$,则 $\tan b=$（　　）

(A) $\frac{1}{7}$　　(B) $\frac{1}{6}$　　(C) $\frac{5}{7}$　　(D) $\frac{5}{6}$

【答案】A

【解析】$\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{7}$；

故选 A.

【考点定位】正切差角公式及角的变换.

【名师点睛】本题考查角的变换及正切的差角公式，采用先将未知角 β 用已知角 α 和 $\alpha+\beta$ 表示出来，再用正切的差角公式求解.本题属于基础题，注意运算的准确性.

7.已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=4|\vec{a}|$，且 $\vec{a}\perp(2\vec{a}+\vec{b})$ 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

(A) $\frac{\pi}{3}$　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) $\frac{2\pi}{3}$　　(D) $\frac{5\pi}{6}$

【.答案】C

【解析】由已知可.得 $\vec{a}\bullet(2\vec{a}+\vec{b})=0\Rightarrow2\vec{a}^2+\vec{a}\bullet\vec{b}=0$；设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，则有

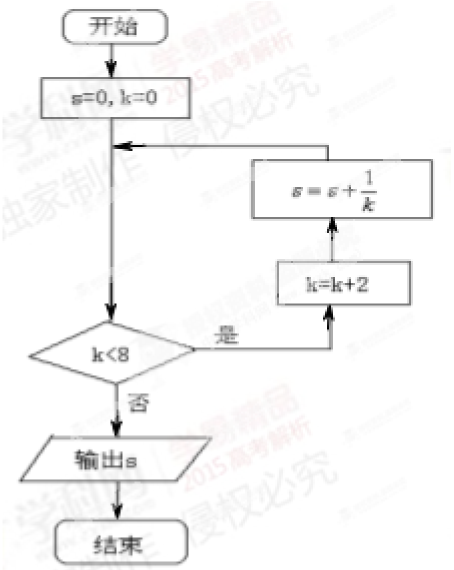
$$2\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta=-\frac{2\left|\vec{a}\right|^2}{4\left|\vec{a}\right|^2}=-\frac{1}{2}$$，又因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$；

故选 C.

【考点定位】向量的数量积运算及向量的夹角.

【名师点睛】本题考查向量的数量积运算与向量夹角之间的关系，采用两向量垂直时其数量积为零来进行转化.本题属于基础题，注意运算的准确性.

8.执行如图（8）所示的程序框图，则输出 s 的值为（　　）



(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{5}{6}$　　(C) $\frac{11}{12}$　　(D) $\frac{25}{24}$

【答案】D

【解析】初始条件：$s=0,k=0$；

第 1 次判断 0<8，是，$k=2,s=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

第 2 次判断 2<8，是，$k=4,s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$；

第 3 次判断 4<8，是，$k=6,s=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$；

第 4 次判断 6<8，是，$k=8,s=\frac{11}{12}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}$；

第 5 次判断 8<8，否，输出 $s=\frac{25}{24}$；

故选 D.

【考点定位】程序框图.

【名师点睛】本题考查程序框图，这是一个当循环结构，先判断条件是否成立再确定是否循环，一步一步进行求解.本题属于基础题，注意条件判断的准确性.

9.设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点是F，左、右顶点分别是$A_1,A_2$,过F做$A_1A_2$的垂线与双曲线交于B，C两点，若$A_1B\perp A_2C$,则双曲线的渐近线的斜率为（　　）

(A) $\pm\frac{1}{2}$　　(B) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) ± 1　　(D) $\pm\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】由已知得右焦点$F(c,0)$（其中$c^2=a^2+b^2,c>0$），

$A_1(-a,0),A_2(a,0)$；$B(c,-\frac{b^2}{a}),C(c,\frac{b^2}{a})$；

从而$\vec{A_1B}=(c+a,-\frac{b^2}{a}),\vec{A_2C}=(c-a,\frac{b^2}{a})$，又因为$A_1B\perp A_2C$，

所以$\vec{A_1B}\bullet\vec{A_2C}=0$，即$(c-a)\cdot(c+a)+(-\frac{b^2}{a})\cdot(\frac{b^2}{a})=0$；

化简得到$\frac{b^2}{a^2}=1\Rightarrow\frac{b}{a}=\pm1$，即双曲线的渐近线的斜率为$\pm1$；

故选C.学科网

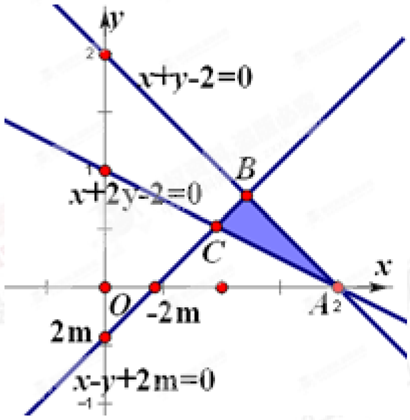
【考点定位】双曲线的几何性质与向量数量积.

【名师点睛】本题考查双曲线的简单几何性质，利用向量垂直的条件来转化两直线垂直的条件而得到a与b的关系式来求解.本题属于中档题，注意运算的准确性.

10.若不等式组$\begin{cases}x+y-2\le 0\\x+2y-2\ge 0\\x-y+2m\ge 0\end{cases}$,表示的平面区域为三角形，且其面积等于$\frac{4}{3}$，则m的值为（　　）

(A)-3　　(B) 1　　(C) $\frac{4}{3}$　　(D)3

【答案】B



【解析】如图，；

由于不等式组$\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ x+2y-2\ge 0 \\ x-y+2m\ge 0 \end{cases}$，表示的平面区域为$\Delta ABC$，且其面积等于$\frac{4}{3}$，

再注意到直线$AB: x+y-2=0$与直线$BC: x-y+2m=0$互相垂直，所以ΔABC是直角三角形；

易知，$A(2,0)$，$B(1-m,1+m)$，$C(\frac{2-4m}{3},\frac{2m+2}{3})$；

从而$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|2+2m|\cdot|m+1|-\frac{1}{2}|2+2m|\cdot\left|\frac{2m+2}{3}\right|=\frac{4}{3}$，

化简得：$(m+1)^2=4$，解得$m=-3$，或$m=1$；

检验知当$m=-3$时，已知不等式组不能表示一个三角形区域，故舍去；所以$m=1$；

故选B.学科网

【考点定位】线性规划与三角形的面积.

【名师点睛】本题考查线性规划问题中的二元一次不等式组表示平面区域，利用已知条件将三角形的面积用含m的代数式表示出来，从而得到关于m的方程来求解.本题属于中档题，注意运算的准确性及对结果的检验.

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.把答案填写在答题卡相应位置上.

11．复数$(1+2i)i$的实部为________.

【答案】-2

【解析】由于$(1+2i)i=i+2i^2=-2+i$，故知其实部为-2；

故填：-2.

【考点定位】复数的概念与运算.

【名师点睛】本题考查复数的概念和运算，利用复数的乘法法则进行求解.本题属于基础题，注意复数实部的概念.

12.若点 $P(1,2)$ 在以坐标原点为圆心的圆上，则该圆在点 P 处的切线方程为________.

【答案】 $x+2y-5=0$

【解析】由点 $P(1,2)$ 在以坐标原点为圆心的圆上知此圆的方程为：$x^2+y^2=5$，所以该圆在点 P 处的切线方程为 $1\times x+2\times y=5$ 即 $x+2y-5=0$；

故填：$x+2y-5=0$.学科网

【考点定位】圆的切线.

【名师点睛】本题考查复数的概念和运算，采用分母实数化和利用共轭复数的概念进行化解求解.本题属于基础题，注意运算的准确性.

13.设 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a,b,c，且 $a=2,\cos C=-\frac{1}{4},3\sin A=2\sin B$，则 c=________.

【答案】4

【解析】由 $3\sin A=2\sin B$ 及正弦定理知：$3a=2b$，又因为 $a=2$，所以 $b=2$；

由余弦定理得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+9-2\times2\times3\times(-\frac{1}{4})=16$，所以 $c=4$；

故填：4.

【考点定位】正弦定理与余弦定理.

【名师点睛】本题考查正弦定理与余弦定理的应用，先由正弦定理将 $3\sin A=2\sin B$ 转化为 3a=2b 结合已知即可求得 b 的值，再用余弦定理即可求解.本题属于基础题，注意运算的准确性及最后结果还需开方.

14.设 $a,b>0,a+b=5$，则 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$ 的最大值为________.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】由 $2ab\le a^2+b^2$ 两边同时加上 a^2+b^2

得 $(a+b)^2\le2(a^2+b^2)$ 两边同时开方即得：$a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$（$a>0,b>0$ 且当且仅当 $a=b$ 时取“=”）；

从而有 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}\le\sqrt{2(a+1+b+3)}=\sqrt{2\times 9}=3\sqrt{2}$（当且仅当 $a+1=b+3$,即 $a=\frac{7}{2},b=\frac{3}{2}$ 时，“=”成立）

故填：$3\sqrt{2}$.

【考点定位】基本不等式.

【名师点睛】本题考查应用基本不等式求最值，先将基本不等式 $2ab\le a^2+b^2$ 转化为 $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$（a>0, b>0 且当且仅当 a=b 时取“=”）再利用此不等式来求解.本题属于中档题，注意等号成立的条件.

15.在区间 $[0,5]$ 上随机地选择一个数 p，则方程 $x^2+2px+3p-2=0$ 有两个负根的概率为________.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】方程 $x^2+2px+3p-2=0$ 有两个负根的充要条件是 $\begin{cases}\Delta=4p^2-4(3p-2)\ge 0\\ x_1+x_2=-2p<0\\ x_1x_2=3p-2>0\end{cases}$ 即 $\frac{2}{3}<p\le 1, or, p\ge 2$；又因为 $p\in[0,5]$，所以使方程 $x^2+2px+3p-2=0$ 有两个负根的 p 的取值范围为 $(\frac{2}{3},1]\cup[2,5]$，故所求的概率 $\frac{(1-\frac{2}{3})+(5-2)}{5-0}=\frac{2}{3}$；

故填：$\frac{2}{3}$.

【考点定位】几何概率.

【名师点睛】本题考查几何概率及一元二次方程实根的分布，首先将方程 $x^2+2px+3p-2=0$ 有两个负根的充要条件找出来，求出 p 的取值范围，再利用几何概率公式求解，本题属于中档题，注意运算的准确性.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16、 (本小题满分 13 分，(I）小问 7 分，(II）小问 6 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 a_3=2，前 3 项和 $S_3=\frac{9}{2}$.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(Ⅱ)设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1$， $b_4=a_{15}$，求 $\{b_n\}$ 前 n 项和 T_n.

【答案】（Ⅰ） $a_n=\frac{n+1}{2}$；（Ⅱ） $T_n=2^n-1$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由已知及等差数列的通项公式和前 n 项和公式可得关于数列的首项 a_1 和公式 d 的二元一次方程组，解此方程组可求得首项及公差的值，从而可写出此数列的通项公式；

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结果可求出 b_1 和 b_4 的值，进而就可求出等比数列的公比，再由等比数列的前 n 项和公式 $T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ 即可求得数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和 T_n.

试题解析：（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由已知条件得

$$a_1+2d=2, 3a_1+\frac{3\times2}{2}d=\frac{9}{2},$$

化简得 $a_1+2d=2, a_1+d=\frac{3}{2}$,

解得 $a_1=1$, $d=\frac{1}{2}$,

故通项公式 $a_n=1+\frac{n-1}{2}$，即 $a_n=\frac{n+1}{2}$.

(2)由（1）得 $b_1=1$, $b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$.

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q,则 $q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$,从而 $q=2$.

故 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$$ 学科网

【考点定位】1. 等差数列；2. 等比数列.

【名师点睛】本题考查等差数列及等比数列的概念、通项公式及前 n 项的求和公式，利用方程组思想求解. 本题属于基础题，注意运算的准确性.

17、 (本小题满分 13 分，(I）小问 10 分，(II）小问 3 分)

随着我国经济的发展，居民的储蓄存款逐年增长.设某地区城乡居民人民币储蓄存款（年底余额）如下表：

年份	2010	2011	2012	2013	2014
时间代号 t	1	2	3	4	5

储蓄存款 y（千亿元）	5	6	7	8	10

(Ⅰ)求 y 关于 t 的回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$

(Ⅱ)用所求回归方程预测该地区 2015 年（$t=6$）的人民币储蓄存款.

附：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ 中

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}, \\ a=\overline{y}-b\overline{x}. \end{cases}$$

【答案】（Ⅰ）$\hat{y}=1.2t+3.6$；（Ⅱ）10.8 千亿元.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）列表分别计算出 $\overline{x},\overline{y}$，$l_{nt}=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i-n\overline{t}^2, l_{ny}=\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\overline{t}\overline{y}$.的值，然后代入 $\hat{b}=\dfrac{l_{ny}}{l_{nt}}$ 求得 $\hat{b}$，

再代入 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$ 求出 $\hat{a}$ 值，从而就可得到回归方程 $\hat{y}=1.2t+3.6$；

.（Ⅱ）将 $t=6$ 代入回归方程 $\hat{y}=1.2t+3.6$ 可预测该地区 2015 年的人民币储蓄存款.

试题解析： (1)列表计算如下

i	t_i	y_i	t_i^2	t_iy_i
1	1	5	1	5
2	2	6	4	12
3	3	7	9	21
4	4	8	16	32
5	5	10	25	50
$\sum$	15	36	55	120

这里 $n=5, \overline{t}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i=\dfrac{15}{5}=3, \overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=\dfrac{36}{5}=7.2.$

又 $l_{nt}=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i-n\overline{t}^2=55-5\times 3^2=10, l_{ny}=\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\overline{t}\overline{y}=120-5\times 3\times 7.2=12.$

从而 $\hat{b}=\dfrac{l_{ny}}{l_{nt}}=\dfrac{12}{10}=1.2,\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}=7.2-1.2\times 3=3.6$.

故所求回归方程为 $\hat{y}=1.2t+3.6$.

(2)将 $t=6$ 代入回归方程可预测该地区 2015 年的人民币储蓄存款为 $\hat{y}=1.2\times 6+3.6=10.8$(千亿元).

【考点定位】线性回归方程.

【名师点睛】本题考查线性回归直线方程的求法及应用，采用列表方式分别求出 $\overline{x},\overline{y}$，$1_{nt}=\sum_{i=1}^{n}t_i-n\overline{t}^2,l_{ny}=\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\overline{t}\overline{y}$.的值然后代入给出的公式中进行求解.本题属于基础题，特别注意运算的准确性.学科网

18、 (本小题满分 13 分，(I) 小问 7 分，(II) 小问 6 分)

已知函数 f(x)=$\dfrac{1}{2}$sin2x-$\sqrt{3}$ $\cos^2 x$.

(Ⅰ)求 f（x）的最小周期和最小值；

(Ⅱ)将函数 f（x）的图像上每一点的横坐标伸长到原来的两倍，纵坐标不变，得到函数 g（x）的图像.当 x$\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时，求 g(x)的值域.

【答案】(Ⅰ) $f(x)$ 的最小正周期为 p，最小值为 $-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$；(Ⅱ) $[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

【解析】

试题分析：(Ⅰ)首先用降幂公式将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x$ 的解析式化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的形式，从而就可求出 $f(x)$ 的最小周期和最小值；

(Ⅱ)由题目所给变换及(Ⅰ)的化简结果求出函数 $g(x)$ 的表达式，再由 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 并结合正弦函数的图象即可求出其值域.

试题解析： (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x-\frac{p}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

因此 $f(x)$ 的最小正周期为p，最小值为$-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

(2)由条件可知：$g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，有$x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$，

从而$\sin(x-\frac{\pi}{3})$的值域为$[\frac{1}{2},1]$，

那么$\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$的值域为$[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

故$g(x)$在区间$[\frac{\pi}{2},\pi]$上的值域是$[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

【考点定位】1. 三角恒等变换；2. 正弦函数的图象及性质；3. 三角函数图象变换.

【名师点睛】本题考查三角恒等变形公式及正弦函数的图象及性质，第一问采用先降幂再用辅助角公式将已知函数化为$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$的形式求解，第二小问在第一问的基础上应用三角函数图象变换知识首先求出函数$g(x)$的解析式，再结合正弦函数的图象求其值域.本题属于中档题，注意公式的准确性及变换时的符号.学科网

19、 (本小题满分 12 分，(I) 小问 4 分，(II) 小问 8 分)

已知函数 $f(x)=ax^3+x^2$ （$a\in R$）在 x=$-\frac{4}{3}$ 处取得极值.

(Ⅰ)确定 a 的值；

(Ⅱ)若 $g(x)=f(x)e^x$，讨论的单调性.

【答案】(Ⅰ) $a=\frac{1}{2}$；(Ⅱ) $g(x)$ 在$(-¥ ,-4)$和$(-1,0)$ 内为减函数，$(-4,-1)$和$(0,+¥)$内为增函数..

【解析】

试题分析：（Ⅰ）先求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=3ax^2+2x$，由已知有 $f'(-\frac{4}{3})=0$ 可得关于 a 的一个一元方程，解之即得 a 的值；

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结果可得函数 $g(x)=\left(\frac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x$，利用积的求导法则可求出 $g'(x)=\frac{1}{2}x(x+1)(x+4)e^x$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=0, x=-1或x=-4$.从而分别讨论 $x<-4$，$-4<x<-1$，$-1<x<0$ 及 $x>0$ 时 $g'(x)$ 的符号即可得到函数 $g(x)$ 的单调性.

试题解析：(1)对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=3ax^2+2x$

因为 $f(x)$ 在 $x=-\frac{4}{3}$ 处取得极值，所以 $f'(-\frac{4}{3})=0$，

即 $3a\times\frac{16}{9}+2\times(-\frac{4}{3})=\frac{16a}{3}-\frac{8}{3}=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)得，$g(x)=\left(\frac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x$，

故 $g'(x)=\left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)e^x+\left(\frac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x=\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right)e^x=\frac{1}{2}x(x+1)(x+4)e^x$

令 $g'(x)=0$，解得 $x=0, x=-1或x=-4$.

当 $x<-4$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 为减函数；

当 $-4<x<-1$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 为增函数；

当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 为减函数；

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 为增函数；

综上知 $g(x)$ 在 $(-\infty,-4)和(-1,0)$ 内为减函数，$(-4,-1)和(0,+\infty)$ 内为增函数.

【考点定位】1. 导数与极值；2. 导数与单调性.

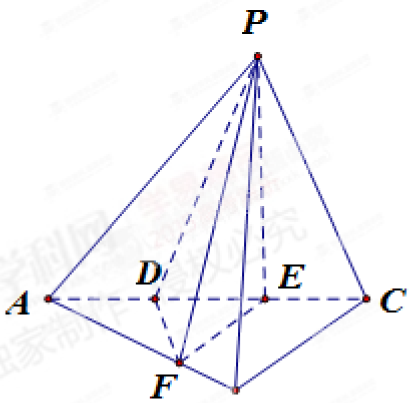
【名师点睛】本题考查函数导数的概念和运算，运用导数研究函数的单调性及导数与函数极值之间的关系，利用函数的极值点必是导数为零的点，使导函数大于零的 x 的区间函数必增，小于零的区间函数必减进行求解，本题属于中档题，注意求导的准确性及使导函数大于零或小于零的 x 的区间的确定.学科网

20、 .(本小题满分 12 分，(I）小问 5 分，(II）小问 7 分)

如题（20）图，三棱锥 P-ABC 中，平面 PAC⊥平面 ABC，∠ABC=$\frac{\pi}{2}$，点 D、E 在线段 AC 上，且 AD=DE=EC=2，PD=PC=4，点 F 在线段 AB 上，且 EF//BC.

(Ⅰ)证明：AB⊥平面 PFE.

(Ⅱ)若四棱锥 P-DFBC 的体积为 7，求线段 BC 的长.



题（20）图

【答案】(Ⅰ)祥见解析；(Ⅱ) $BC=3$ 或 $BC=3\sqrt{3}$.

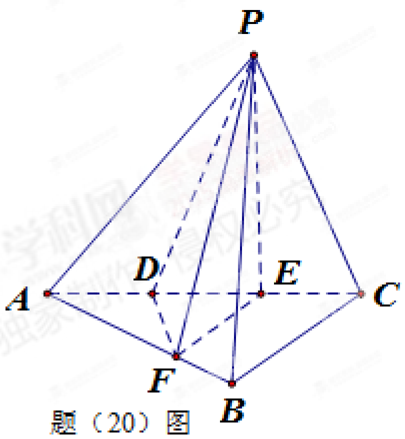
【解析】

试题分析：(Ⅰ)先由已知易得 $PE\perp AC$，再注意平面 $PAC\perp$平面 ABC，且交线为 AC，由面面垂直的性质可得 $PE\perp$平面 ABC，再由线面垂直的性质可得到 $AB\perp PE$；再注意到 $EF//BC$，而 $BC\perp AB$，从而有 $AB\perp EF$，那么由线面垂的判定定理可得 $AB\perp$平面 PFE；

(Ⅱ)设 BC=x 则可用 x 将四棱锥 $P-DFBC$ 的体积表示出来，由已知其体积等于 7，从而得到关于 x 的一个一元方程，解此方程，再注意到 $x>0$ 即可得到 BC 的长.

试题解析：证明：如题(20)图.由 $DE=EC, PD=PC$ 知，E 为等腰 DPDC 中 DC 边的中点，故

PE ^ AC，



题（20）图

又平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，$PE\subset$ 平面 PAC，$PE\perp AC$，

所以 $PE\perp$ 平面 ABC，从而 $PE\perp AB$.

因 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}, EF\parallel BC$, 故 $AB\perp EF$.

从而 AB 与平面 PFE 内两条相交直线 PE，EF 都垂直，

所以 $AB\perp$ 平面 PFE.

(2)解：设 BC=x,则在直角 ΔABC 中，

$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{36-x^2}$.从而 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times BC=\dfrac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$

由 $EF\parallel BC$，知 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{2}{3}$，得 $\Delta AEF\sim\Delta ABC$,故 $\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}=(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{4}{9}$，

即 $S_{\Delta AEF}=\dfrac{4}{9}S_{\Delta ABC}$.

由 $AD=\dfrac{1}{2}AE$, $S_{\Delta AFB}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta AFE}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{9}S_{\Delta ABC}=\dfrac{2}{9}S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}$,

从而四边形 DFBC 的面积为 $S_{DFBC}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ADF}=\dfrac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}-\dfrac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}\ =\dfrac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}$

由(1)知，PE $PE\perp$ 平面 ABC，所以 PE 为四棱锥 P-DFBC 的高.

在直角 ΔPEC 中，$PE=\sqrt{PC^2-EC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

体积 $V_{P-DFBC}=\dfrac{1}{3}\times S_{DFBC}\times PE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}\times 2\sqrt{3}=7$，

故得 $x^4-36x^2+243=0$，解得 $x^2=9$ 或 $x^2=7$，由于 $x>0$，可得 $x=3$ 或 $x=3\sqrt{3}$.

所以 $BC=3$ 或 $BC=3\sqrt{3}$.

【考点定位】1. 空间线面垂直关系；2. 锥体的体积；3. 方程思想.

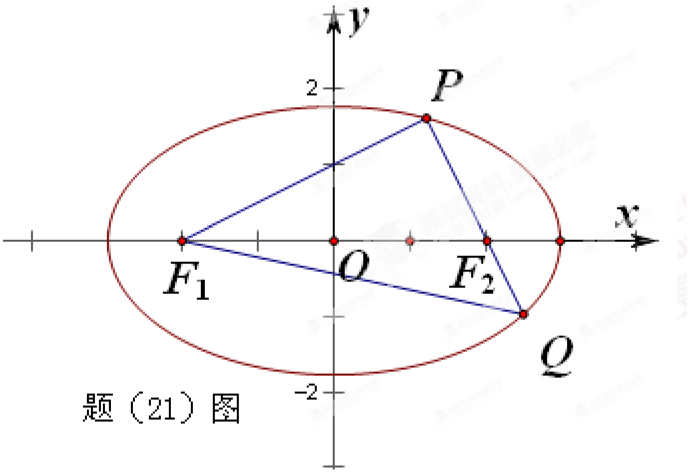
【名师点睛】本题考查空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直关系的判定及简单几何体的体积的运算，第一问通过应用面面垂直的性质定理将面面垂直转化为线面垂直，进而转化为线线垂直来完成证明，第二通过设元，将已知几何体的体积表示出来，建立方程，通过解方程完成解答.本题属于中档题，注意方程思想在解题过程中的应用.学科网

21、(本小题满分 12 分，(I) 小问 5 分，(II) 小问 7 分)

如题（21）图，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左右焦点分别为 F_1, F_2, 且过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点，且 PQ⊥ PF_1.

(Ⅰ)若 $|PF_1|=2+\sqrt{2}$， $|PF_2|=2-\sqrt{2}$，求椭圆的标准方程.

(Ⅱ)若 $|PQ|=\lambda|PF_1|$，且 $\frac{3}{4}\le\lambda\le\frac{4}{3}$，试确定椭圆离心率的取值范围.



题（21）图

【答案】(Ⅰ) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(Ⅱ) $\frac{\sqrt{2}}{2}<e\le\frac{\sqrt{5}}{3}$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由椭圆的定义知$2a=|PF_1|+|PF_2|$可求出a的值，再由$PF_1\perp PF_2$及勾股定理可求得c的值，最后由$b=\sqrt{a^2-c^2}$求得b的值，从而根据椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$得到结果；

（Ⅱ）由$PF_1\perp PQ$，$|PQ|=\lambda|PF_1|$，得$|QF_1|=\sqrt{|PF_1|^2+|PQ|^2}=\sqrt{1+\lambda^2}|PF_1|$

由椭圆的定义，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|QF_1|+|QF_2|=2a$，进而$|PF_1|+|PQ|+|QF_1|=4a$

于是$(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})|PF_1|=4a$，解得$|PF_1|=\frac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$，故$|PF_2|=2a-|PF_1|=\frac{2a(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$．

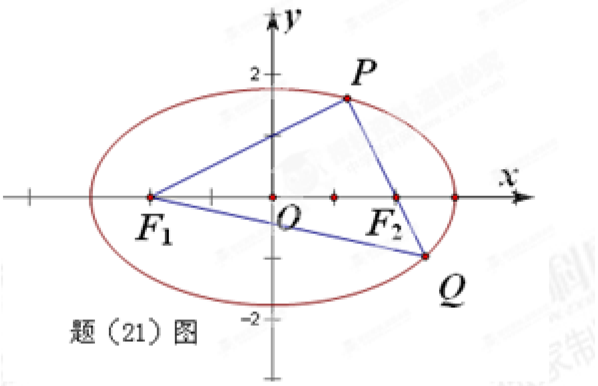
再注意到$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|PF_2|^2=(2c)^2=4c^2$从而$\left(\frac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2+\left(\frac{2a(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2=4c^2$，

两边除以$4a^2$，得$\frac{1}{\left(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2}+\frac{(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)^2}{\left(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2}=e^2$，若记$t=1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$，则上式变成

$e^2=\frac{4+(t-2)^2}{t^2}=8\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}$．再由$\frac{3}{4}\le\lambda<\frac{4}{3}$，并注意函数的单调性，即可求得离心率$e$的取值范围。

试题解析：(1)由椭圆的定义，$2a=|PF_1|+|PF_2|=\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)=4$，故$a=2$.

设椭圆的半焦距为c，由已知$PF_1\perp PF_2$，因此



题（21）图

$2c=|F_1F_2|=\sqrt{|PF_1|^2+|PF_2|^2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$，即$c=\sqrt{3}$.

从而$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$

故所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)如题(21)图，由$PF_1 \perp PQ$，$|PQ| = \lambda |PF_1|$，得

$|QF_1| = \sqrt{|PF_1|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{1+\lambda^2}\,|PF_1|$

由椭圆的定义，$|PF_1| + |PF_2| = 2a$，$|QF_1| + |QF_2| = 2a$，进而$|PF_1| + |PQ| + |QF_1| = 4a$

于是$(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})|PF_1| = 4a$.

解得$|PF_1| = \dfrac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$，故$|PF_2| = 2a - |PF_1| = \dfrac{2a(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$.

由勾股定理得$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = (2c)^2 = 4c^2$，

从而$\left(\dfrac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{2a(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2 = 4c^2$，

两边除以$4a^2$，得$\dfrac{1}{\left(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2} + \dfrac{(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)^2}{\left(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2} = e^2$，

若记$t = 1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$，则上式变成$e^2 = \dfrac{4+(t-2)^2}{t^2} = 8\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$.

由$\dfrac{3}{4} \le \lambda < \dfrac{4}{3}$，并注意到$1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$关于$\lambda$的单调性，得$3 \le t < 4$，即$\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{t} \le \dfrac{1}{3}$，

进而$\dfrac{1}{2} < e^2 \le \dfrac{5}{9}$，即$\dfrac{\sqrt{2}}{2} < e \le \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

【考点定位】1. 椭圆的标准方程；2. 椭圆的定义；3.函数与方程思想.

【名师点睛】本题椭圆的定义、标准方程、简单几何性质的应用，第一问题应用椭圆的定义及基本量间的关第易于求解，第二问应用条件、椭圆的定义及勾股定理建军立离心率与λ的关系式，从而将离心率e表示成为λ的函数，然后得用函数相关知识，求其值域，即是所求的范围.本题属于较难题，注意运算的准确性及函数思想方法的应用.