2020年浙江省高考数学试卷（解析版）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $P=\{x|1<x<4\}$，$Q=\{x|2<x<3\}$，则 $P\cap Q=$（　　）

A．$\{x|1<x\leqslant 2\}$　　B．$\{x|2<x<3\}$　　C．$\{x|3\leqslant x<4\}$　　D．$\{x|1<x<4\}$

【分析】直接利用交集的运算法则求解即可.

解：集合 $P=\{x|1<x<4\}$，$Q=\{x|2<x<3\}$，

则 $P\cap Q=\{x|2<x<3\}$.

故选：B.

2．已知 $a\in R$，若 $a-1+(a-2)i$（i为虚数单位）是实数，则 $a=$（　　）

A．1　　B．－1　　C．2　　D．－2

【分析】利用复数的虚部为0，求解即可.

解：$a\in R$，若 $a-1+(a-2)i$（i为虚数单位）是实数，

可得 $a-2=0$，解得 $a=2$.

故选：C.

3．若实数 x，y满足约束条件$\begin{cases}x-3y+1\leqslant 0\\ x+y-3\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,4]$　　B．$[4,+\infty)$　　C．$[5,+\infty)$　　D．$(-\infty,+\infty)$

【分析】作出不等式组表示的平面区域；作出目标函数对应的直线；结合图象判断目标函数 $z=x+2y$ 的取值范围.

解：画出实数 x，y满足约束条件$\begin{cases}x-3y+1\leqslant 0\\ x+y-3\geqslant 0\end{cases}$所示的平面区域，如图：

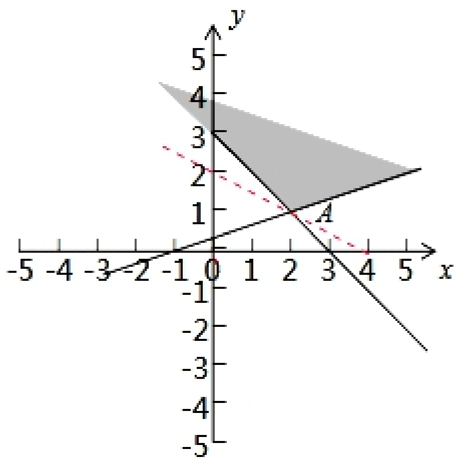
将目标函数变形为$-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}=y$，

则 z 表示直线在 y 轴上截距，截距越大，z 越大，

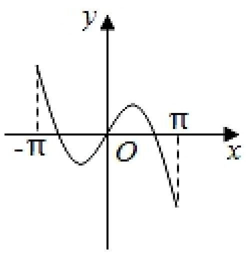
当目标函数过点 $A(2,1)$ 时，截距最小为 $z=2+2=4$，随着目标函数向上移动截距越来越大，

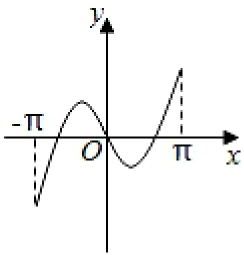
故目标函数 $z=2x+y$ 的取值范围是$[4,+\infty)$.

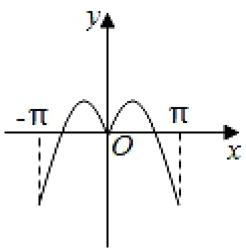
故选：B.

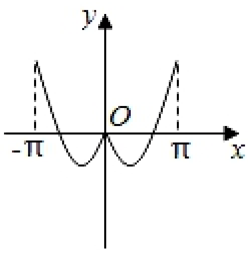


4．函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间[－π，＋π]的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【分析】先判断函数的奇偶性，再判断函数值的特点.

解：$y=f(x)=x\cos x+\sin x$，

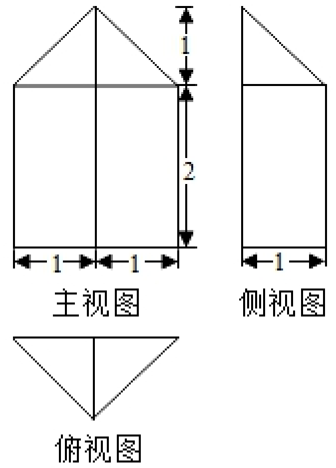
则 $f(-x)=-x\cos x-\sin x=-f(x)$，

∴$f(x)$ 为奇函数，函数图象关于原点对称，故排除 B，D，

当 $x=\pi$ 时，$y=f(\pi)=\pi\cos\pi+\sin\pi=-\pi<0$，故排除 B，

故选：A.

5．某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则该几何体的体积（单位：cm^3）是（　　）



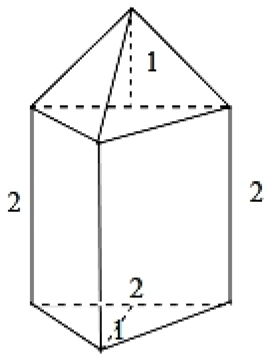
A. $\frac{7}{3}$　　B. $\frac{14}{3}$　　C. 3　　D. 6

【分析】画出几何体的直观图，利用三视图的数据求解几何体的体积即可.

解：由题意可知几何体的直观图如图，下部是直三棱柱，底面是斜边长为 2 的等腰直角三角形，棱锥的高为 2，上部是一个三棱锥，一个侧面与底面等腰直角三角形垂直，棱锥的高为 1，

所以几何体的体积为：$\frac{1}{2}\times2\times1\times2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times1=\frac{7}{3}$.

故选：A.



6．已知空间中不过同一点的三条直线 m，n，l，则“m，n，l 在同一平面”是“m，n，l 两两相交”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【分析】由 m，n，l 在同一平面，则 m，n，l 相交或 m，n，l 有两个平行，另一直线与之相交，或三条直线两两平行，根据充分条件，必要条件的定义即可判断.

解：空间中不过同一点的三条直线 m，n，l，若 m，n，l 在同一平面，则 m，n，l 相交或 m，n，l 有两个平行，另一直线与之相交，或三条直线两两平行.

故 m，n，l 在同一平面”是“m，n，l 两两相交”的必要不充分条件，

故选：B.

7．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n，公差 $d\neq0$，$\frac{a_1}{d}\leqslant1$．记 $b_1=S_2$，$b_{n+1}=S_{n+2}-S_{2n}$，$n\in N^*$，下列等式不可能成立的是（　　）

A．$2a_4=a_2+a_6$　　B．$2b_4=b_2+b_6$　　C．$a_4^2=a_2a_8$　　D．$b_4^2=b_2b_8$

【分析】由已知利用等差数列的通项公式判断 A 与 C；由数列递推式分别求得 b_2，b_4，b_6，b_8，分析 B，D 成立时是否满足公差 $d\neq0$，$\frac{a_1}{d}\leqslant1$ 判断 B 与 D.

解：在等差数列$\{a_n\}$中，$a_n=a_1+(n-1)d$，

$S_{n+2}=(n+2)a_1+\frac{(n+2)(n+1)}{2}d$，$S_{2n}=2na_1+\frac{2n(2n-1)}{2}d$，

$b_1=S_2=2a_1+d$，$b_{n+1}=S_{n+2}-S_{2n}=(2-n)a_1-\frac{3n^2-5n-2}{2}d$.

$\therefore b_2=a_1+2d$，$b_4=-a_1-5d$，$b_6=-3a_1-24d$，$b_8=-5a_1-55d$.

A. $2a_4=2(a_1+3d)=2a_1+6d$，$a_2+a_6=a_1+d+a_1+5d=2a_1+6d$，故 A 正确；

B. $2b_4=-2a_1-10d$，$b_2+b_6=a_1+2d-3a_1-24d=-2a_1-22d$，

若 $2b_4=b_2+b_6$，则 $-2a_1-10d=-2a_1-22d$，即 $d=0$，不合题意，故 B 错误；

C. 若 $a_4^2=a_2a_8$，则 $(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+7d)$，

即 $a_1^2+6a_1d+9d^2=a_1^2+8a_1d+7d^2$，得 $a_1d=d^2$，

$\because d\neq0$，$\therefore a_1=d$，符合 $\frac{a_1}{d}\leqslant1$，故 C 正确；

D. 若 $b_4^2=b_2b_8$，则 $(-a_1-5d)^2=(a_1+2d)(-5a_1-55d)$，

即 $2(\frac{a_1}{d})^2+25\frac{a_1}{d}+45=0$，则 $\frac{a_1}{d}$ 有两不等负根，满足 $\frac{a_1}{d}\leqslant1$，故 D 正确.

$\therefore$ 等式不可能成立的是 B.

故选：B.

8．已知点 $O(0,0)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$．设点 P 满足 $|PA|-|PB|=2$，且 P 为函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 图象上的点，则 $|OP|=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{22}}{2}$　　B．$\frac{4\sqrt{10}}{5}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．$\sqrt{10}$

【分析】求出 P 满足的轨迹方程，求出 P 的坐标，即可求解 $|OP|$.

解：点 $O(0,0)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$．设点 P 满足 $|PA|-|PB|=2$，

可知 P 的轨迹是双曲线$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$的右支上的点，

P 为函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$图象上的点，即$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{4}=1$在第一象限的点，

联立两个方程，解得 P（$\frac{\sqrt{13}}{2}$，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$），

所以$|OP|=\sqrt{\frac{13}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{10}$.

故选：D.

9．已知 a，$b\in R$ 且 $ab\neq 0$，若（$x-a$）（$x-b$）（$x-2a-b$）$\geqslant 0$ 在 $x\geqslant 0$ 上恒成立，则（　　）

A．$a<0$　　　　B．$a>0$　　　　C．$b<0$　　　　D．$b>0$

【分析】设 f（x）＝（$x-a$）（$x-b$）（$x-2a-b$），求得 f（x）的零点，根据 f（0）$\geqslant 0$ 恒成立，讨论 a，b 的符号，结合三次函数的图象，即可得到结论.

解：设 f（x）＝（$x-a$）（$x-b$）（$x-2a-b$），可得 f（x）的图象与 x 轴有三个交点，

即 f（x）有三个零点 a，b，$2a+b$ 且 f（0）＝$-ab$（$2a+b$），

由题意知，f（0）$\geqslant 0$ 恒成立，则 ab（$2a+b$）$\leqslant 0$，$a<0$，$b<0$，

可得 $2a+b<0$，ab（$2a+b$）$\leqslant 0$ 恒成立，排除 B，D；

我们考虑零点重合的情况，即中间和右边的零点重合，左边的零点在负半轴上.

则有 $a=b$ 或 $a=2a+b$ 或 $b=b+2a$ 三种情况，此时 $a=b<0$ 显然成立；

若 $b=b+2a$，则 $a=0$ 不成立；

若 $a=2a+b$，即 $a+b=0$，可得 $b<0$，$a>0$ 且 a 和 $2a+b$ 都在正半轴上，符合题意，

综上 $b<0$ 恒成立.

故选：C.

10．设集合 S，T，$S\subseteq N^*$，$T\subseteq N^*$，S，T 中至少有两个元素，且 S，T 满足：

①对于任意 x，$y\in S$，若 $x\neq y$，都有 $xy\in T$；

②对于任意 x，$y\in T$，若 $x<y$，则$\frac{y}{x}\in S$；下列命题正确的是（　　）

A．若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 7 个元素

B．若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 6 个元素

C．若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 4 个元素

D．若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 5 个元素

【分析】利用特殊集合排除选项，推出结果即可.

解：取：S＝{1，2，4}，则 T＝{2，4，8}，$S\cup T$＝{1，2，4，8}，4 个元素，排除 C.

S＝{2，4，8}，则 T＝{8，16，32}，$S\cup T$＝{2，4，8，16，32}，5 个元素，排除 D;

S＝{2，4，8，16}则 T＝{8，16，32，64，128}，$S\cup T$＝{2，4，8，16，32，64，128}，7 个元素，排除 B;

故选：A.

二、填空题：本大题共 7 小题，共 36 分。多空题每小题 4 分；单空题每小题 4 分。

11．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，则 S_3＝__10__.

【分析】求出数列的前 3 项，然后求解即可.

解：数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,

可得 a_1＝1，a_2＝3，a_3＝6，

所以 S_3＝1+3+6＝10.

故答案为：10.

12. 设$(1+2x)^5=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+a_6x^5$，则 a_5=________；$a_1+a_2+a_3$=________.

【解析】$(1+2x)^5$ 的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^r=2^rC_5^rx^r$，令 $r=4$，则 $T_5=2^4C_5^4x^4=80x^4$，故 $a_5=80$；

$a_1+a_3+a_5=2^1C_5^1+2^3C_5^3+2^5C_5^5=122$.

13．已知 tanθ＝2，则 cos2θ＝__$-\frac{3}{5}$__；tan（θ－$\frac{\pi}{4}$）＝__$\frac{1}{3}$__.

【分析】利用二倍角公式以及同角三角函数基本关系式求解第一问，利用两角和与差的三角函数转化求解第二问.

解：tanθ＝2，

则 $\cos2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$.

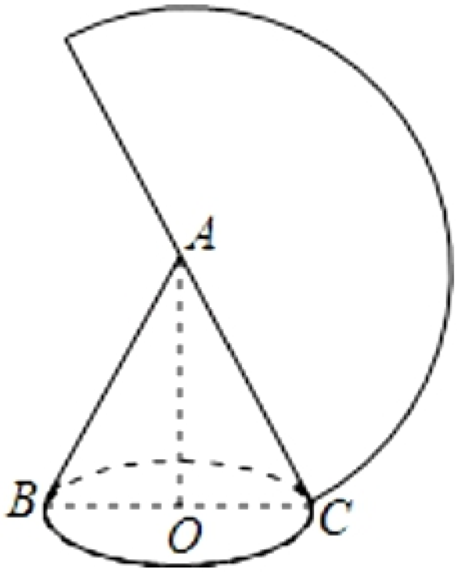
$\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2-1}{1+2\times1}=\frac{1}{3}$.

故答案为：$-\frac{3}{5}$；$\frac{1}{3}$.

14．已知圆锥展开图的侧面积为 2π，且为半圆，则底面半径为__1__.

【分析】利用圆锥的侧面积，求出母线长，求解底面圆的周长，然后求解底面半径.

解：∵圆锥侧面展开图是半圆，面积为 2π，



设圆锥的母线长为 a，则$\frac{1}{2}\times a^{2}\pi=2\pi$，∴$a=2$，

∴侧面展开扇形的弧长为 2π，

设圆锥的底面半径 $OC=r$，则 $2\pi r=2\pi$，解得 $r=1$.

故答案为：1.

15．设直线 l：$y=kx+b$（$k>0$），圆 C_1：$x^2+y^2=1$，C_2：$(x-4)^2+y^2=1$，若直线 l 与 C_1，C_2 都相切，则 $k=$__$\frac{\sqrt{3}}{3}$__；$b=$____$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$__.

【分析】根据直线 l 与两圆都相切，分别列出方程 $d_1=\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，$d_2=\frac{|4k+b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得即可.

解：由条件得 $C_1(0,0)$，$r_1=1$，$C_2(4,0)$，$r_2=1$，

因为直线 l 与 C_1，C_2 都相切，

故有 $d_1=\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，$d_2=\frac{|4k+b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，

则有$\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|4k+b|}{\sqrt{1+k^2}}$，故可得 $b^2=(4k+b)^2$，整理得 $k(2k+b)=0$，

因为 $k>0$，所以 $2k+b=0$，即 $b=-2k$，

代入 $d_1=\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $b=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$；$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16．一个盒子里有1个红1个绿2个黄四个相同的球，每次拿一个，不放回，拿出红球即停，设拿出黄球的个数为 ξ，则 P（ξ＝0）＝$\underline{\ \frac{1}{3}\ }$；$E$（ξ）＝$\underline{\ 1\ }$．

【分析】由题意知随机变量 ξ 的可能取值为0，1，2；分别计算 P（ξ＝0）、P（ξ＝1）和 P（ξ＝2），再求 E（ξ）的值．

解：由题意知，随机变量 ξ 的可能取值为0，1，2；

计算 $P(\xi=0)=\frac{C_1^1}{C_4^1}+\frac{C_1^1\cdot C_1^1}{C_4^1\cdot C_3^1}=\frac{1}{3}$；

$P(\xi=1)=\frac{C_2^1\cdot C_1^1}{A_4^2}+\frac{C_2^1C_1^1A_2^2C_1^1}{A_4^3}=\frac{1}{3}$；

$P(\xi=2)=\frac{A_2^2\cdot C_1^1}{A_4^3}+\frac{C_2^2C_1^1\frac{A_3^3}{A_2^2}C_1^1}{A_4^4}=\frac{1}{3}$；

所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$．

故答案为：$\frac{1}{3}$，1．

17．设 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 为单位向量，满足 $|2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\leqslant\sqrt{2}$，$\vec{a}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos^2\theta$ 的最小值为$\underline{\ \frac{28}{29}\ }$．

【分析】设 $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 α，由题意求出 $\cos\alpha\geqslant\frac{3}{4}$；

再求 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角 θ 的余弦值 $\cos^2\theta$ 的最小值即可．

解：设 $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 α，由 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 为单位向量，满足 $|2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\leqslant\sqrt{2}$，

所以 $4\overrightarrow{e_1}^2-4\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^2=4-4\cos\alpha+1\leqslant 2$，

解得 $\cos\alpha\geqslant\frac{3}{4}$；

又 $\vec{a}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，且 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}^2+4\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^2=4+4\cos\alpha$，

$\vec{a}^2=\overrightarrow{e_1}^2+2\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^2=2+2\cos\alpha$，

$\vec{b}^2=9\overrightarrow{e_1}^2+6\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^2=10+6\cos\alpha$；

则 $\cos^2\theta=\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{a}^2\times\vec{b}^2}=\dfrac{(4+4\cos\alpha)^2}{(2+2\cos\alpha)(10+6\cos\alpha)}=\dfrac{4+4\cos\alpha}{5+3\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{\frac{8}{3}}{5+3\cos\alpha}$，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$时，$\cos^2\theta$ 取得最小值为$\dfrac{4}{3}-\dfrac{\frac{8}{3}}{5+3\times\frac{3}{4}}=\dfrac{28}{29}$.

故答案为：$\dfrac{28}{29}$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

18．在锐角△ABC中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2b\sin A=\sqrt{3}a$.

（Ⅰ）求角 B;

（Ⅱ）求 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围.

【分析】（Ⅰ）根据正弦定理可得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合角的范围，即可求出，

（Ⅱ）根据两角和差的余弦公式，以及利用正弦函数的性质即可求出.

解：（Ⅰ）∵$2b\sin A=\sqrt{3}a$,

∴$2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A$,

∵$\sin A\neq 0$,

∴$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

∵$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$,

∴$B=\dfrac{\pi}{3}$,

（Ⅱ）∵△ABC为锐角三角形，$B=\dfrac{\pi}{3}$,

∴$C=\dfrac{2\pi}{3}-A$,

∴$\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+\cos(\dfrac{2\pi}{3}-A)+\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos A-\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}=\sin(A+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$,

△ABC为锐角三角形，$0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$0<C<\dfrac{\pi}{2}$,

解得$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$,

∴$\dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

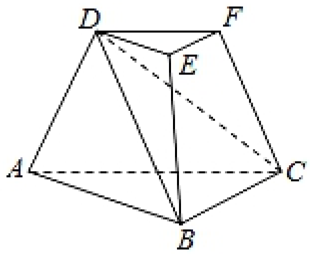
$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+1\leqslant\frac{3}{2}$，

$\therefore \cos A+\cos B+\cos C$的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}，\frac{3}{2}\right]$.

19．如图，三棱台$DEF-ABC$中，面$ADFC\perp$面ABC，$\angle ACB=\angle ACD=45°$，$DC=2BC$.

（Ⅰ）证明：$EF\perp DB$;

（Ⅱ）求DF与面DBC所成角的正弦值.



【分析】（Ⅰ）题根据已知条件，作$DH\perp AC$，根据面面垂直，可得$DH\perp BC$，进一步根据直角三角形的知识可判断出$\triangle BHC$是直角三角形，且$\angle HBC=90°$，则$HB\perp BC$，从而可证出$BC\perp$面DHB，最后根据棱台的定义有$EF// BC$，根据平行线的性质可得$EF\perp DB$;

（Ⅱ）题先可设$BC=1$，根据解直角三角形可得$BH=1$，$HC=\sqrt{2}$，$DH=\sqrt{2}$，$DC=2$，$DB=\sqrt{3}$，然后找到CH与面DBC的夹角即为$\angle HCG$，根据棱台的特点可知DF与面DBC所成角与CH与面DBC的夹角相等，通过计算$\angle HCG$的正弦值，即可得到DF与面DBC所成角的正弦值.

解：（Ⅰ）证明：作$DH\perp AC$，且交AC于点H，

$\because$面$ADFC\perp$面ABC，$DH\subset$面$ADFC$，$\therefore DH\perp BC$，

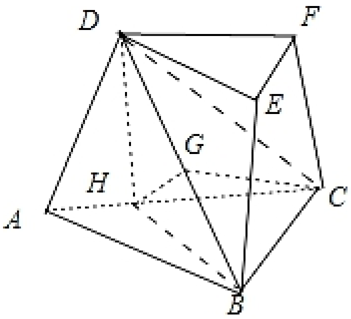
$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle DHC$中，$CH=CD\bullet\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}CD$，

$\because DC=2BC$，$\therefore CH=\frac{\sqrt{2}}{2}CD=\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet 2BC=\sqrt{2}\bullet BC$，

$\therefore \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CH}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\triangle BHC$是直角三角形，且$\angle HBC=90°$，

$\therefore HB\perp BC$，$\therefore BC\perp$面DHB，$\because BD\subset$面DHB，$\therefore BC\perp BD$，

$\because$在三棱台$DEF-ABC$中，$EF// BC$，$\therefore EF\perp DB$.



（Ⅱ）设 $BC=1$，则 $BH=1$，$HC=\sqrt{2}$，

在 Rt△DHC 中，$DH=\sqrt{2}$，$DC=2$，

在 Rt△DHB 中，$DB=\sqrt{DH^2+HB^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$，

作 $HG\perp BD$ 于 G，∵$BC\perp HG$，∴$HG\perp$面 BCD，∵$GC\subset$面 BCD，

∴$HG\perp GC$，∴△HGC 是直角三角形，且∠$HGC=90°$，

设 DF 与面 DBC 所成角为 θ，则 θ 即为 CH 与面 DBC 的夹角，

且 $\sin\theta=\sin\angle HCG=\frac{HG}{HC}=\frac{HG}{\sqrt{2}}$，

∵在 Rt△DHB 中，$DH\bullet HB=BD\bullet HG$，

∴$HG=\frac{DH\bullet HB}{BD}=\frac{\sqrt{2}\bullet 1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

∴$\sin\theta=\frac{HG}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20．已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$中，$a_1=b_1=c_1=1$，$c_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，$c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}\bullet c_n$（$n\in N^*$）．

（Ⅰ）若数列$\{b_n\}$为等比数列，且公比 $q>0$，且 $b_1+b_2=6b_3$，求 q 与 a_n 的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$为等差数列，且公差 $d>0$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<1+\frac{1}{d}$.

【分析】本题第（Ⅰ）题先根据等比数列的通项公式将 $b_2=q$，$b_3=q^2$ 代入 $b_1+b_2=6b_3$，计算出公比 q 的值，然后根据等比数列的定义化简 $c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}\bullet c_n$ 可得 $c_{n+1}=4c_n$，则可发现数列$\{c_n\}$是以 1 为首项，4 为公比的等比数列，从而可得数列$\{c_n\}$的通项公式，然后将通项公式代入 $c_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，可得 $a_{n+1}-a_n=c_{n+1}=4^n$，再根据此递推公式的特点运用累加法可计算出数列$\{a_n\}$的通项公式；

第（Ⅱ）题通过将已知关系式 $c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}\bullet c_n$ 不断进行转化可构造出数列$\{b_nb_{n+1}c_n\}$，且可

得到数列$\{b_nb_{n+1}c_n\}$是一个常数列，且此常数为$1+d$，从而可得$b_nb_{n+1}c_n=1+d$，再计算得到$c_n=\frac{1+d}{b_nb_{n+1}}$，根据等差数列的特点进行转化进行裂项，在求和时相消，最后运用放缩法即可证明不等式成立.

【解答】（Ⅰ）解：由题意，$b_2=q$，$b_3=q^2$，

$\because b_1+b_2=6b_3$，$\therefore 1+q=6q^2$，

整理，得$6q^2-q-1=0$，

解得$q=-\frac{1}{3}$（舍去），或$q=\frac{1}{2}$，

$\therefore c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}\bullet c_n=\frac{1}{\frac{b_{n+2}}{b_n}}\bullet c_n=\frac{1}{q^2}\bullet c_n=\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}\bullet c_n=4\bullet c_n$，

$\therefore$数列$\{c_n\}$是以1为首项，4为公比的等比数列，

$\therefore c_n=1\bullet 4^{n-1}=4^{n-1}$，$n\in N^*$.

$\therefore a_{n+1}-a_n=c_{n+1}=4^n$，

则$a_1=1$，

$a_2-a_1=4^1$，

$a_3-a_2=4^2$，

•

•

•

$a_n-a_{n-1}=4^{n-1}$，

各项相加，可得

$a_n=1+4^1+4^2+\cdots+4^{n-1}=\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{4^n-1}{3}$.

（Ⅱ）证明：依题意，由$c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}\bullet c_n$（$n\in N^*$），可得

$b_{n+2}\bullet c_{n+1}=b_n\bullet c_n$，

两边同时乘以b_{n+1}，可得

$b_{n+1}b_{n+2}c_{n+1}=b_nb_{n+1}c_n$，

$\because b_1b_2c_1=b_2=1+d$，

$\therefore$数列$\{b_nb_{n+1}c_n\}$是一个常数列，且此常数为$1+d$，

$b_nb_{n+1}c_n=1+d$,

$\therefore c_n=\frac{1+d}{b_nb_{n+1}}=\frac{1+d}{d}\cdot\frac{d}{b_nb_{n+1}}=(1+\frac{1}{d})\cdot\frac{b_{n+1}-b_n}{b_nb_{n+1}}=(1+\frac{1}{d})(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})$,

$\therefore c_1+c_2+\cdots+c_n$

$=(1+\frac{1}{d})(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2})+(1+\frac{1}{d})(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3})+\cdots+(1+\frac{1}{d})(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})$

$=(1+\frac{1}{d})(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})$

$=(1+\frac{1}{d})(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}})$

$=(1+\frac{1}{d})(1-\frac{1}{b_{n+1}})$

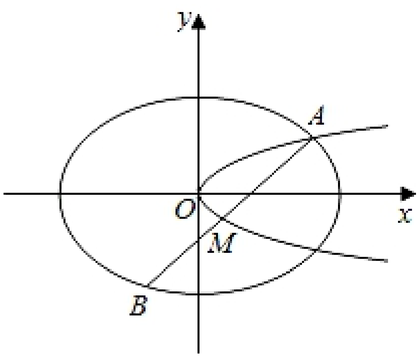
$<1+\frac{1}{d}$,

$\therefore c_1+c_2+\cdots+c_n<1+\frac{1}{d}$，故得证.

21．如图，已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，抛物线 C_2：$y^2=2px$（$p>0$），点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点，过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B，交抛物线 C_2 于 M（B，M 不同于 A）．

（Ⅰ）若 $p=\frac{1}{16}$，求抛物线 C_2 的焦点坐标；

（Ⅱ）若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点，求 p 的最大值．



【分析】（Ⅰ）直接由抛物线的定义求出焦点坐标即可；

（Ⅱ）设直线方程 $y=kx+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\y=kx+t\end{cases}$，

根据韦达定理定理求出 $M(-\frac{2kt}{1+2k^2},\frac{t}{1+2k^2})$，可得 p，再由 $\begin{cases}y^2=2px\\y=kx+t\end{cases}$，求出点 A

的坐标，代入椭圆方程可得 $t^2=\frac{8k^6}{(1+2k^2)^2+2k^2}$，化简整理得 $p^2=\frac{k^4}{2(1+2k^2)^2\cdot[(1+2k^2)^2+2k^2]}$，利用基本不等式即可求出 p 的最大值.

解：（Ⅰ）$p=\frac{1}{16}$，则 $\frac{p}{2}=\frac{1}{32}$，则抛物线 C_2 的焦点坐标（$\frac{1}{32}$，0），

（Ⅱ）直线 l 与 x 轴垂直时，此时点 M 与点 A 或点 B 重合，不满足题意，

设直线 l 的方程为 $y=kx+t$，A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），M（x_0，y_0），

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=kx+t\end{cases}$，消 y 可得（$2k^2+1$）$x^2+4kty+2t^2-2=0$，

$\therefore\triangle=16k^2t^2-4(2k^2+1)(2t^2-2)\geqslant0$，即 $t^2<1+2k^2$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4kt}{1+2k^2}$，$\therefore x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{2kt}{1+2k^2}$，

$\therefore y_0=kx_0+t=\frac{t}{1+2k^2}$，$\therefore M\left(-\frac{2kt}{1+2k^2},\ \frac{t}{1+2k^2}\right)$，

$\because$ 点 M 在抛物线 C_2 上，$\therefore y^2=2px$，

$\therefore p=\frac{y^2}{2x}=\frac{\frac{t^2}{(1+2k^2)^2}}{2\cdot\frac{-2kt}{1+2k^2}}=\frac{t}{-4k(1+2k^2)}$，

联立 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=kx+t\end{cases}$，解得 $x_1=\frac{t(1+2k^2)}{-2k^3}$，$y_1=\frac{t^2}{-2k^2}$，

代入椭圆方程可得 $\frac{t^2(1+2k^2)^2}{8k^6}+\frac{t^2}{4k^4}=1$，解得 $t^2=\frac{8k^6}{(1+2k^2)^2+2k^2}$

$\therefore p^2=\frac{t^2}{16k^2(1+2k^2)^2}=\frac{8k^6}{16k^2(1+2k^2)^2\cdot[(1+2k^2)^2+2k^2]}$

$=\frac{k^4}{2(1+2k^2)^2\cdot[(1+2k^2)^2+2k^2]}\leqslant\frac{k^4}{2(2\sqrt{2}k)^2[(2\sqrt{2}k)^2+2k^2]}=\frac{1}{160}$，

$\therefore p\leqslant\frac{\sqrt{10}}{40}$，当且仅当 $1=2k^2$，即 $k^2=\frac{1}{2}$，$t^2=\frac{1}{5}$ 时等号成立，

故 p 的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{40}$.

22．已知 $1<a\leqslant2$，函数 $f(x)=e^x-x-a$，其中 $e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

（Ⅰ）证明：函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点；

（Ⅱ）记 x_0 为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点，证明：

（ⅰ）$\sqrt{a-1}\leqslant x_0\leqslant\sqrt{2(a-1)}$；

（ⅱ）$x_0f(e^{x_0})\geqslant(e-1)(a-1)a$.

【分析】（Ⅰ）推导出 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$ 恒成立，$f(0)=<0$，$f(2)>0$，由此能证明函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

（Ⅱ）(i) 由 $f(x)$ 单调增，$1<a\leqslant 2$，设 x_0 的最大值为 t，则 $c^t=2+t$，$f(1)=c-1-2<0$，则 $t>1$，推导出 $x_0\leqslant\sqrt{2(a-1)}$．要证明 $x_0^2\geqslant a-1=e^{x_0}-x_0-1$，只需证明 $e^{x_0}-x_0^2-x_0-1\leqslant 0$，记 $h(x)=e^x-1-x-x^2(0\leqslant x\leqslant t)$，则 $h'(x)=e^x-1-2x$，利用导数性质能证明 $\sqrt{a-1}\leqslant x_0\leqslant\sqrt{2(a-1)}$.

(ii) 要证明 $x_0f(ex_0)\geqslant(e-1)(a-1)a$，只需证明 $x_0f(x_0+a)\geqslant(e-1)(a-1)a$，只需证 $\frac{a}{\sqrt{a-1}}-\frac{\sqrt{a-1}}{a}\geqslant 2(e-2)$，由此能证明 $x_0f(ex_0)\geqslant(e-1)(a-1)a$.

【解答】证明：（Ⅰ）$\because f(x)=e^x-x-a=0(x>0)$，$\therefore f'(x)=e^x-1>0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\because 1<a\leqslant 2$，$\therefore f(2)=e^2-2-a\geqslant e^2-4>0$，又 $f(0)=1-a<0$，

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

（Ⅱ）(i) $\because f(x)$ 单调增，$1<a\leqslant 2$，设 x_0 的最大值为 t，则 $c^t=2+t$，

$\therefore f(1)=c-1-2<0$，则 $t>1$，

右边：由于 $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1+x+\frac{1}{2}x^2$，且 $e^{x_0}-x_0-a=0$，

则 $a\geqslant 1+\frac{1}{2}x_0^2$，$\therefore x_0\leqslant\sqrt{2(a-1)}$.

左边：要证明 $x_0^2\geqslant a-1=e^{x_0}-x_0-1$，只需证明 $e^{x_0}-x_0^2-x_0-1\leqslant 0$，

记 $h(x)=e^x-1-x-x^2(0\leqslant x\leqslant t)$，则 $h'(x)=e^x-1-2x$，

$h''(x)=e^x-2$，$\therefore h'(x)$ 在 $(0,ln2)$ 上单调减，在 $(ln2,+\infty)$ 上单调增，

$\therefore h'(x)=e^x-1-2x\leqslant max\{h'(0),h'(t)\}=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant t$ 时单调减，$h(x)=e^x-1-x-x^2\leqslant h(0)=0$，

$\therefore\sqrt{a-1}\leqslant x_0\leqslant\sqrt{2(a-1)}$.

（ii）要证明 $x_0f(e^{x_0})\geqslant(e-1)(a-1)a$，只需证 $x_0f(x_0+a)\geqslant(e-1)(a-1)a$，

只需证 $e^{\sqrt{a-1}+a}-\sqrt{a-1}-2a\geqslant(e-1)a\sqrt{a-1}$，

∵ $e^x\geqslant1+x+\frac{1}{2}x^2$，∴只需证 $1+\frac{1}{2}(\sqrt{a-1}+a)^2-a\geqslant(e-1)a\sqrt{a-1}$，

只需证 $a^2-(\sqrt{a-1})^2-2(e-2)a\sqrt{a-1}\geqslant0$，即证 $\frac{a}{\sqrt{a-1}}-\frac{\sqrt{a-1}}{a}\geqslant2(e-2)$，

∵ $\frac{a}{\sqrt{a-1}}=\frac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1}\in(2,+\infty)$，

∴ $\frac{a}{\sqrt{a-1}}-\frac{\sqrt{a-1}}{a}\geqslant2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\geqslant(2e-2)$，

∴ $x_0f(e^{x_0})\geqslant(e-1)(a-1)a$.