2023年上海市春季高考数学试卷

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写 结果，第 1 题至第 6 题每个空格填对得 4 分，第 7 题至第 12 题每个空格填对得 5 分，否则一律得零分.

1．(4 分）已知集合 $A=\{1，2\}$，$B=\{1，a\}$，且 $A=B$，则 $a=$ ________.

2．(4 分）已知向量 $\vec{a}=(3，4)$，$\vec{b}=(1，2)$，则 $\vec{a}-2\vec{b}=$ ________.

3．(4 分）若不等式 $|x-1|\le 2$，则实数 x 的取值范围为 ________.

4．(4 分）已知圆 C 的一般方程为 $x^2+2x+y^2=0$，则圆 C 的半径为 ________.

5．(4 分）已知事件 A 发生的概率为 P（A）=0.5，则它的对立事件 $\overline{A}$ 发生的概率 P（$\overline{A}$）= ________.

6．(4 分）已知正实数 a、b 满足 $a+4b=1$，则 ab 的最大值为 ________.

7．(5 分）某校抽取 100 名学生测身高，其中身高最大值为 186cm，最小值为 154cm，根据身高数据绘制频率组距分布直方图，组距为 5，且第一组下限为 153.5，则组数为 ________.

8．(5 分）设 $(1-2x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_0+a_4=$ ________.

9．(5 分）已知函数 $f(x)=2^{-x}+1$，且 $g(x)=\begin{cases}\log_2(x+1)，x\geqslant 0\\ f(-x)，x<0\end{cases}$，则方程 $g(x)=2$ 的解为 ________.

10．(5 分）已知有 4 名男生 6 名女生，现从 10 人中任选 3 人，则恰有 1 名男生 2 名女生的概率为 ________.

11．(5 分）设 $z_1，z_2\in\mathbf{C}$ 且 $z_1=i\cdot\overline{z_2}$，满足 $|z_1-1|=1$，则 $|z_1-z_2|$ 的取值范围为 ________.

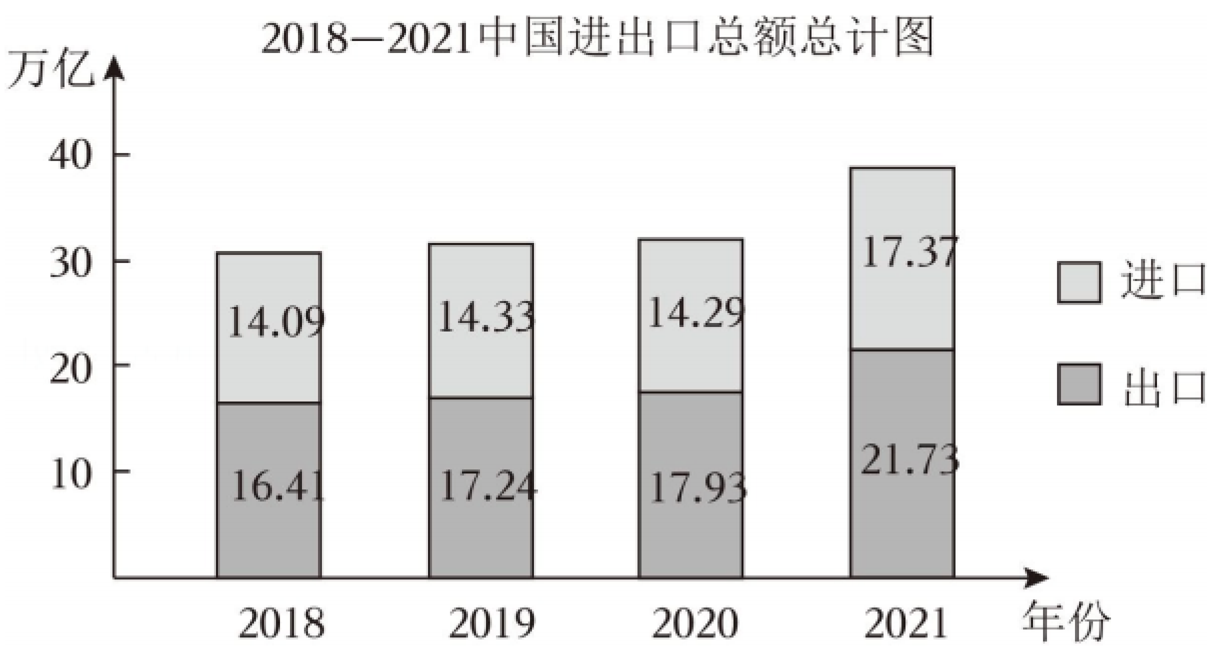
12．(5 分）已知空间向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 都是单位向量，且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 60°,若P 为空间任意一点，且 $|\overrightarrow{OP}|=1$，满足 $|\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}|\le|\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}|\le|\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}|$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的最大值为 ________.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸 的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，第 13 题至第 14 题选对得 4 分，第 15 题至第 16 题选对得 5 分，否则一律得零分.

13．(4 分）下列函数是偶函数的是(　　)

A．$y=\sin x$　　B．$y=\cos x$　　C．$y=x^3$　　D．$y=2^x$

14．（4 分）根据下图判断，下列选项错误的是（　　）



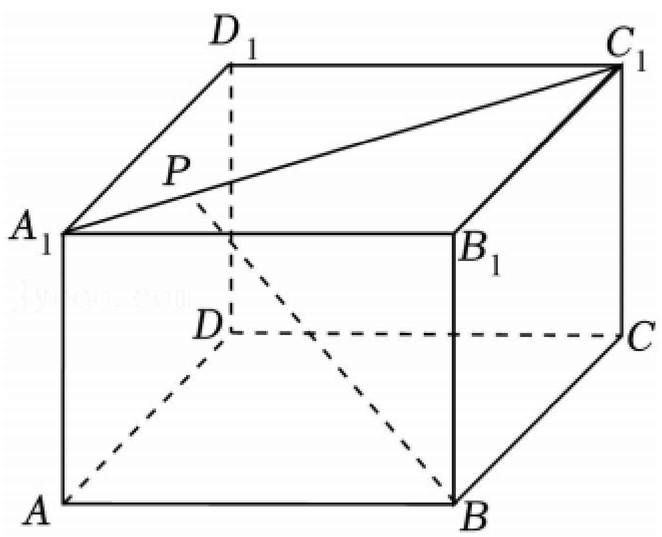
A．从 2018 年开始后，图表中最后一年增长率最大

B．从 2018 年开始后，进出口总额逐年增大

C．从 2018 年开始后，进口总额逐年增大

D．从 2018 年开始后，图表中 2020 年的增长率最小

15．（5 分）如图，P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 边 A_1C_1 上的动点，下列哪条边与边 BP 始终异面（　　）



A．DD_1　　B．AC　　C．AD_1　　D．B_1C

16．（5 分）已知数列$\{a_n\}$的各项均为实数，S_n为其前 n 项和，若对任意 $k>2022$，都有$|S_k|>|S_{k+1}|$，则下列说法正确的是（　　）

A．a_1，a_3，a_5，…，a_{2n-1}为等差数列，a_2，a_4，a_6，…，a_{2n}为等比数列

B．a_1，a_3，a_5，…，a_{2n-1}为等比数列，a_2，a_4，a_6，…，a_{2n}为等差数列

C．a_1，a_2，a_3，…，a_{2022}为等差数列，a_{2022}，a_{2023}，…，a_n为等比数列

D．a_1，a_2，a_3，…，a_{2022}为等比数列，a_{2022}，a_{2023}，…，a_n为等差数列

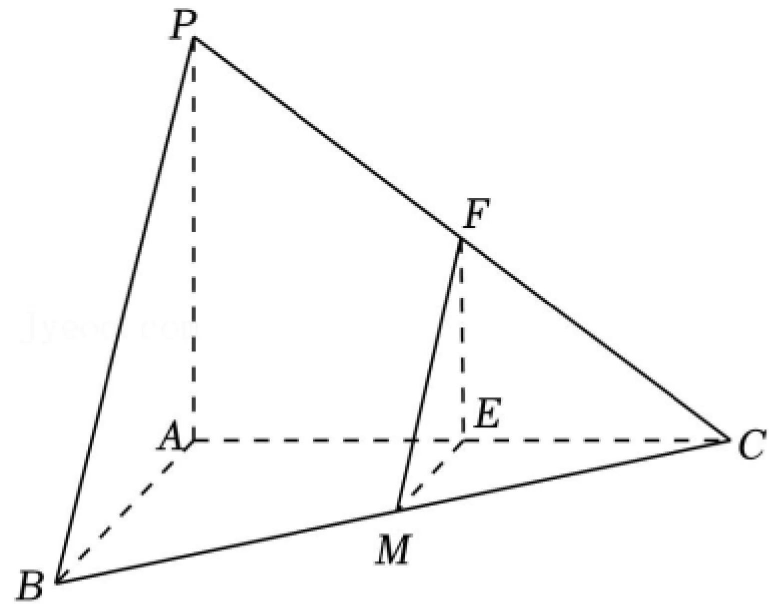
三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区

域内写出必要的步骤．

17．（14 分）已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AB\perp AC$，$PB=AB=3$，$AC=4$，M 为 BC 中点，过点 M 分别作平行于平面 PAB 的直线交 AC、PC 于点 E，F．

（1）求直线 PM 与平面 ABC 所成角的大小；

（2）证明：$ME\parallel$平面 PAB，并求直线 ME 到平面 PAB 的距离．



18．（14 分）在△ABC 中，角 A，B，C 对应边为 a，b，c，其中 $b=2$．

（1）若 $A+C=120°$,且 $a=2c$，求边长 c；

（2）若 $A-C=15°$，$a=\sqrt{2}c\sin A$，求△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$．

19．（14 分）为了节能环保，节约材料，定义建筑物的“体形系数”为 $S=\frac{F_0}{V_0}$，其中 F_0 为建筑物暴露在空气中的面积（单位：平方米），V_0为建筑物的体积（单位：立方米）．

（1）若有一个圆柱体建筑的底面半径为 R，高度为 H，求该建筑体的 S（用 R，H 表示）；

（2）现有一个建筑体，侧面皆垂直于地面，设 A 为底面面积，L 为建筑底面周长．已知 f为正比例系数，L^2 与 A 成正比，定义：$f=\frac{L^2}{A}$，建筑面积即为每一层的底面面积，总建筑面积即为每层建筑面积之和，值为 T．已知该建筑体推导得出 $S=\sqrt{\frac{f\cdot n}{T}}+\frac{1}{3n}$，$n$ 为层数，层高为 3 米，其中$f=18$，$T=10000$，试求当取第几层时，该建筑体 S 最小?

20．（18 分）已知椭圆Γ：$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{3}=1$（$m>0$，$m\neq\sqrt{3}$）．

（1）若 $m=2$，求椭圆Γ的离心率；

（2）设 A_1、A_2 为椭圆Γ的左右顶点，若椭圆Γ上一点 E 的纵坐标为 1，且$\overrightarrow{EA_1}\cdot\overrightarrow{EA_2}=-2$，求$m$ 的值;

（3）存在过椭圆Γ上一点P、且斜率为$\sqrt{3}$的直线 l，使得直线 l 与双曲线$\frac{y^2}{5m^2}-\frac{x^2}{5}=1$仅有一个公共点，求 m 的取值范围．

21．（18分）设函数f（x）$=ax^3-(a+1)x^2+x$，g（x）$=kx+m$，其中 $a\geq0$，k、$m\in R$，若 对任意 $x\in[0,1]$均有f（x）≤g（x），则称函数y＝g（x）是函数y＝f（x）的“控制函数”，且对所有的函数y＝g（x）取最小值定义为$\overline{f}$（x）．

（1）若 a＝2，g（x）＝x，试问 y＝g（x）是否为 y＝f（x）的“控制函数”；

（2）若 a＝0，使得直线 y＝h（x）是曲线 y＝f（x）在 $x=\frac{1}{4}$处的切线，求证：函数y＝h （x）是为函数 y＝f（x）的“控制函数”，并求$\overline{f}$（$\frac{1}{4}$）的值；

（3）若曲线 y＝f（x）在 $x=x_0$（$x_0\in$（0，1））处的切线过点（1，0），且 $c\in[x_0,1]$，求证：当且仅当 $c=x_0$或 c＝1 时，$\overline{f}$（c）＝f（c）．