2021年上海市夏季高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共12题，满分54分，第1～6题每题4分，第7～12题每题5分）

1.已知 $z_1=1+\mathrm{i}, z_2=2+3\mathrm{i}$ （其中 i 为虚数单位），则 $z_1+z_2=$______.

【思路分析】复数实部和虚部分别相加

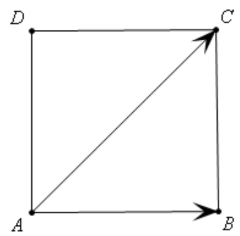
【解析】：$z_1+z_2=3+4i$

【归纳总结】本题主要考查了复数的加法运算，属于基础题.

2、已知 $A=\{x|2x\le 1\}, B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$_____

【思路分析】求出集合A，再求出 $A\cap B$

【解析】：$A=\{x|2x\le 1\}=\left\{x\middle|x\le \frac{1}{2}\right\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0\}$



【归纳总结】本题主要考查了集合的交集运算，属于基础题.

3、若 $x^2+y^2-2x-4y=0$，则圆心坐标为________

【思路分析】将圆一般方程化为标准方程，直接读取圆心坐标

【解析】：$x^2+y^2-2x-4y=0$ 可以化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 所以圆心为 $(1,2)$

【归纳总结】本题主要考查了圆的方程，属于基础题.

4、如图边长为3的正方形 $ABCD$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ __________

【思路分析】利用向量投影转化到边上.

【解析】**方法一：** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=9$

方法二： 由已知 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{2}$，$<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}>=\frac{\pi}{4}$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=9$；

【归纳总结】本题考查了平面向量的数量积的定义、正方形的几何性质；基础题；

5、已知 $f(x)=\frac{3}{x}+2$，则 $f^{-1}(1)=$ ___________

【思路分析】利用反函数定义求解.

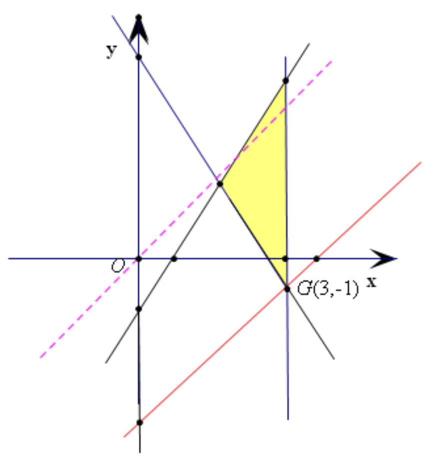
【解析】由题意，得原函数的定义域为：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，结合反函数的定义，得 $1=\frac{3}{x}+2$，

解得 $x=-3$，所以，$f^{-1}(1)=-3$；

【归纳总结】本题主要考查了反函数的定义的应用，属于基础题.

6.已知二项式 $(x+a)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为 80，则 $a=$_______

.



【思路分析】利用二项式展开式通项公式求解.

【解析】$T_{r+1}=C_5^r a^r x^{5-r}\Rightarrow r=3, C_5^3 a^3=80, a=2$

【归纳总结】本题考查了二项式定理的通项公式、组合数公式与指数幂运算；基础题。

7、已知$\begin{cases} x \le 3 \\ 2x - y - 2 \ge 0 \\ 3x + y - 8 \ge 0 \end{cases}$,目标函数$z = x - y$，则$z$的最大值为 ________

【思路分析】作出不等式表示的平面区域，根据z的几何意义求最值.

【解析】如图，可行域的三个顶点为：$(3,4)$、$(2,2)$，$(3,-1)$，

结合直线方程与z的几何意义，得$x = 3$，$y = -1$，则$z_{最大值}$=4；

当$x = 3, y = -1, z_{\max} = 4$

【归纳总结】本题主要考查线性规划的规范、准确作图与直线方程中“参数”的几何意义与数形结合思想；

8、已知无穷递缩等比数列$a_1 = 3, b_n = a_{2n}$, $\{a_n\}$的各项和为9,则数列$\{b_n\}$的各项和为_____

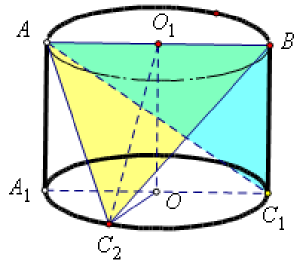
【思路分析】利用无穷递缩等比数列求和公式建立方程求出公比，再得到b_n通项公式，根据特点求和.

【解析】$S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{3}{1-q} = 9 \Rightarrow q = \dfrac{2}{3}$，

$b_n = a_{2n} = a_1 \times q^{2n-1} = 3 \times (\dfrac{2}{3})^{2n-1} \Rightarrow b_1 = 2, q_0 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow S_b = \dfrac{b_1}{1-q_0} = \dfrac{2}{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{18}{5}$

【归纳总结】本题考查了数列的基本问题：等比数列与无穷递缩等比数列的各项和的概念与公式；同时考查了学生的数学阅读与计算能力。

9、在圆柱底面半径为1,高为2，AB为上底底面的直径,点C是下底底面圆弧上的一个动点，点C绕着下底底面旋转一周，则ΔABC面积的范围_____



【思路分析】注意几何题设与几何性质选择求ΔABC面积的的方法；

【解析】由题意，当点C在下底底面圆弧上的运动时，ΔABC的底边$AB = 2$，

所以，ΔABC面积的取值与高C_2O_1相关；

当$C_2O \perp A_1C_1$时，C_2O_1最大为：$C_2O_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$，$\Delta ABC$面积的最大值为：$\dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$；

当$AB \perp BC_1$时，C_2O_1最小为：$BC_1 = 2$，ΔABC面积的最大值为：$\dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$；

所以，ΔABC面积的取值范围为：$[2, \sqrt{5}]$；

【归纳总结】本题主要考查了圆柱的几何性质，简单的数学建模（选择求三角形面积的方案），等价转化思想。

10.甲、乙两人在花博会的A、B、C、D不同展馆中各选2个去参观，则两人选择中恰有一个馆相同的概率为_______.

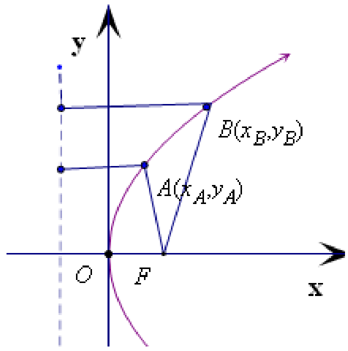
【思路分析】注意“阅读，理解”，等价为“两个”排列组合题；

【解析】由题意A、B、C、D四个不同的场馆，每人可选择的参观方法有：C_4^2种，则甲、乙两个人每人选2个场馆的参观方法有：$C_4^2 \cdot C_4^2$种；

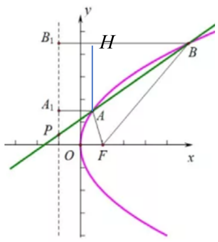
由此，甲、乙两人恰好参观同一个场馆的参观方法有：$C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1$种；

（或等价方法1：甲、乙两人恰好参观同一个场馆的参观方法有：$C_4^1 \cdot P_3^2$种）；

（或等价方法2【补集法】：甲、乙两人参观两个不同一个场馆的参观方法有：$C_4^2 \cdot C_2^2$种；
甲、乙两人参观两个相同场馆的参观方法有：C_4^2种；
所以，甲、乙两人恰好参观同一个场馆的参观方法有：$1-C_4^2 \cdot C_2^2 - C_4^2$种）；
所以，甲、乙两人恰好参观同一个场馆的概率为：$p=\dfrac{C_4^1 \cdot C_3^1 C_2^1}{C_4^2 \cdot C_4^2}=\dfrac{24}{36}=\dfrac{2}{3}$；
【归纳总结】本题主要考查考生的“数学阅读理解”，然后将古典概型问题等价转化为：两个排列、组合题解之；有点“区分度”；
11、已知抛物线$y^2=2px(p>0)$,若第一象限的点A、B在抛物线上，抛物线焦点为F，
$|AF|=2,|BF|=4,|AB|=3,$则直线AB的斜率为_____



【思路分析】注意理解与应用抛物线的定义以及直线斜率公式的特征；
【解析】**方法一：**如图，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，再由抛物线的定义结合题设得$|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}=2$，$|BF|=x_2+\dfrac{p}{2}=4$，则$x_2-x_1=2$，
又$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=3$，解得$y_2-y_1=\sqrt{5}$，
则直线AB的斜率为：$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；



方法二：过A、B分别向准线引垂线，垂足为A_1、B_1，
直线AB与x轴的交点为P，
由抛物线定义，得$AA_1=2$，$BB_1=4$，$AH \perp BB_1$于H，
则$BN=BB_1-HB_1==BB_1-AA_1=2$，又由已知$|AB|=3$，则$|AH|=\sqrt{5}$，
结合平面几何中，“内错角相等”，所以，直线AB的斜率为：$\tan\angle BPF=\tan\angle ABH=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$）
方法三：：结合本题是填充题的特点，数形结合并利用“二级结论”，弦长公式
$\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=3$，
即$\sqrt{1+k^2}\times 2=3$，解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，结合题设与图像$k>0$，所以$k=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$）
【归纳总结】本题主要考查直线与圆锥曲线的位置关系，属于解析几何的基本计算，甚至都不需要利用几何关系。定义、弦长、斜率都是解析几何的基本概念与公式；而用好抛物线的定义、数形结合与平面几何的性质，则可减少计算量；
考查了学生直观想象核心素养，通过几何意义容易求出斜率来；
12.已知$a_i \in \mathbf{N}^*(i=1,2,\dots 9)$，且对任意$k \in \mathbf{N}^*\left(2 \le k \le 8\right)$都有$a_k=a_{k-1}+1$或$a_k=a_{k+1}-1$中有且仅有一个成立，$a_1=6$，$a_9=9$，则$a_1+\cdots+a_9$的最小值为_______.
【思路分析】注意阅读与等价转化题设中的递推关系；
【答案】31；
【解析】**方法一：**由题设，知：$a_i \ge 1$；
$a_2=a_1+1$或$a_2=a_3-1$中恰有一个成立；
$a_3=a_2+1$或$a_3=a_4-1$中恰有一个成立；
...
$a_8=a_7+1$或$a_8=a_9-1$中恰有一个成立；

则① $a_2=a_1+1=7$，$a_3=a_4-1$，$a_5=a_6-1$，$a_7=a_8-1$，

则 $a_1+a_2+\cdots+a_9=25+2(a_3+a_5+a_7)$，当 $a_3=a_5=a_7$=1时，$a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的和为最小值为：31；

② $a_2=a_3-1$，$a_4=a_5-1$，$a_6=a_7-1$，$a_8=a_9-1$，

则 $a_1+a_2+\cdots+a_9=26+2(a_4+a_6+a_8)$，当 $a_4=a_6=a_8$=1时，$a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的和为最小值为：32；

因此，$a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的最小值为：31）；

方法二：：$a_2=a_1+1$ 或 $a_2=a_3-1$ 中恰有一个成立；等价为：$a_2=a_1+1$ 或 $a_3=a_2+1$ 中恰有一个成立；

$a_3=a_2+1$ 或 $a_3=a_4-1$ 中恰有一个成立；等价为：$a_3=a_2+1$ 或 $a_4=a_3+1$ 中恰有一个成立；

…

$a_8=a_7+1$ 或 $a_8=a_9-1$ 中恰有一个成立；等价为：$a_3=a_2+1$ 或 $a_9=a_8+1$ 中恰有一个成立；

又要求 $a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的和为最小，所以，希望尽量出现1和2，

则有数列：6，1，2，1，2，1，2，8，9或6，7，1，2，1，2，1，2，9；

因此，$a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的最小值为：31；）

方法三：：设 $b_k=a_{k+1}-a_k$，b_k 或 b_{k+1} 恰好只有一个为1；

① $b_1=b_3=b_5=b_7=1,$

$a_1=6,a_2=7,a_3\geq 1,a_4=a_3+1\geq 2,a_5\geq 1,a_6=a_5+1\geq 2,a_7\geq 1,a_8=a_7+1\geq 2,$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8++a_9=6+7+1+2+1+2+1+2+9=31$

② $b_2=b_4=b_6=b_8=1,$

$a_8=8,a_2\geq 1,a_3=a_2+1\geq 2,a_4\geq 1,a_5=a_4+1\geq 2,a_7\geq 1,a_7=a_6+1\geq 2,$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8++a_9=6+1+2+1+2+1+2+8+9=32$

$a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的最小值为 31）

方法四：：由题设，知：$a_i\geq 1$；由题设，得：

$a_2=a_1+1$ ⊕

$a_3=a_2+1$ ⊗

$a_4=a_3+1$ ⊕

$a_5=a_4+1$ ⊗

$a_6=a_5+1$ ⊕

$a_7=a_6+1$ ⊗

$a_8=a_7+1$ ⊕

$a_9=a_8+1$ ⊗

再结合题设，要使 $a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的和为最小，

①考虑按⊕：$a_1+a_2+\cdots+a_9=(a_1+a_3+\cdots+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8)$

$=6+9+(a_3+a_5+a_7)+(a_1+a_3+a_5+a_7+4)=25+2(a_3+a_5+a_7)\geq 25+2\times 3=31$

当且仅当 $a_3=a_5=a_7=1$ 时，等号成立；

②考虑按⊗：$a_1+a_2+\cdots+a_9=(a_1+a_3+\cdots+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8)$

$=6+9+(a_3+a_5+a_7)+(a_1+a_3+a_5+a_7-4)=20+2(a_3+a_5+a_7)$

$=20+2(a_2+a_4+a_6+3)=26+2(a_2+a_4+a_6)\geq 26+2\times 3=32>31$

当且仅当$a_2=a_4=a_6=1$时，等号成立；）

【归纳总结】本题的核心点在对于两个递推关系的理解与等价转化，然后，结合题设要求“和最小”；进行枚举或递推分析；对于考试的分析问题、解决问题能力有一定要求；主要考察了学生逻辑推理核心素养，根据题设推理出1，2连续造型值最小，从而判断出整体的最小值，虽然较为简单但容易出错；

二、选择题（本大题共有4题，每题5分，满分20分）

13、以下哪个函数既是奇函数，又是减函数（　　）

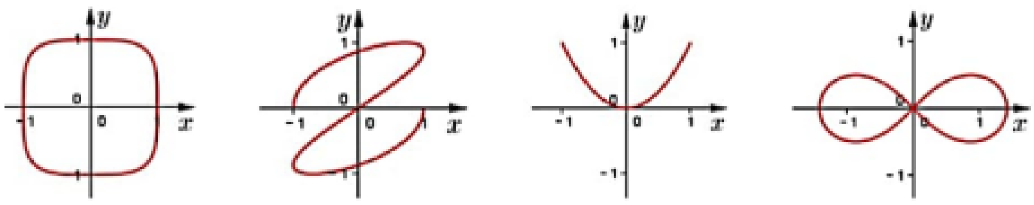
A. $f(x)=-3x$　　B. $f(x)=x^3$　　C. $f(x)=\log_3^x$　　D. $f(x)=3^x$

【思路分析】注意研究函数性质的方法；

【解析】排除法：B、C、D涉及函数都是增函数；

【归纳总结】本题主要考查函数性质的研究方法；基础题；

14、已知参数方程$\begin{cases}x=3t-4t^3\\ y=2t+\sqrt{1-t^2}\end{cases}(t\in[-1,1])$,以下哪个图像是该方程的图像　（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

【思路分析】注意利用集合观点，根据方程研究曲线的方法；

【解析】**方法一（特值法）：**令$y=2t\sqrt{1-t^2}=0$，解得$t=-1,0,1$，代入参数方程，得$x=1,0,-1$，

所以，方程对应的曲线一定过$(-1,\ 0)$、$(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$，故选B；

方法二：在方程对应的曲线上任取一点$P(x_1,y_1)$，对应的参数为：t_1，

由题意，得$\begin{cases}x_1=3t_1-4t_1^3\\ y_1=2t_1\sqrt{1-t_1^2}\end{cases}$；

当$t=-t_1$时，代入已知的参数方程，得$\begin{cases}x_2=3(-t_1)-4(-t_1)^3=-x_1\\ y_2=2(-t_1)\cdot\sqrt{1-(-t_1)^2}=-y_1\end{cases}$，

所以，点$Q(x_2,y_2)=(-x_1,-y_1)$也在方程对应的曲线上，

所以，方程对应的曲线关于原点成中心对称；

取$t=\dfrac{1}{2}$，代入参数方程，则$x=1$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即点$R(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$在曲线上；）

验证点$S(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$、$T(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$都不在曲线上；

因为，当$x=3t-4t^3=1$时，$t=-1$或$t=\dfrac{1}{2}$，

当 $y=2t\sqrt{1-t^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，

$t=-\frac{1}{2}$ 或 $t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以，点 $S(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 不在方程对应的曲线上；

故，方程对应的曲线不关于 x 轴成对称；

因为，当 $x=3t-4t^3=-1$ 时，$t=1$ 或 $t=-\frac{1}{2}$，

当 $y=2t\sqrt{1-t^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$t=\frac{1}{2}$ 或 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以，点 $T(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 不在方程对应的曲线上；

故，方程对应的曲线不关于 y 轴成对称；故选B；

【归纳总结】本题主要通过参数方程这个载体，考查了根据方程研究曲线的方法与过程；方法1：结合选择题的特点，使用了“特值法”；方法2：从参数方程视角实践根据方程研究曲线。

15.已知 $f\left(x\right)=3\sin x+2$，对于任意的 $x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在 $x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $f\left(x_1\right)+2f\left(x_2+\theta\right)=3$ 成立，则下列选项中，θ 可能的值是（ ）

$A.\frac{3\pi}{5}$　$B.\frac{4\pi}{5}$　$C.\frac{6\pi}{5}$　$D.\frac{7\pi}{5}$

【思路分析】注意仔细审题，关注关键词“任意的”、“都存在”；

【解析】**方法一：**由题设 $f(x_1)+2f(x_2+\theta)=3$，变形得 $f(x_1)=3-2f(x_2+\theta)$，

又由题设“$f(x)=3\sin x+2$ 对任意的 $x_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$，都存在 $x_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 使得 $f(x_1)+2f(x_2+\theta)=3$ 成立”，

若设函数 $f(x)=3\sin x+2$ 对任意的 $x_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 的值域为 A，

设函数 $y=3-2f(x_2+\theta)==-1-6\sin(x_2+\theta)$，$x_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 的值域为 B，则 $A\subseteq B$，

又因为 $f(x_1)\in[2,5]$　；而 $y=3-2f(x_2+\theta)==-1-6\sin(x_2+\theta)$，当 $\theta=\frac{7\pi}{5}$ 时，

$x_2+\theta\in[\frac{7\pi}{5},\frac{19\pi}{10}]$，

$y=3-2f(x_2+\theta)==-1-6\sin(x_2+\theta)\in[1-6\sin\frac{19\pi}{10},5]$，而 $1-6\sin\frac{19\pi}{10}\approx 0.85<2$ 符合题意；

方法二：由题意，得 $3\sin x_1+2+2[3sin(x_2+\theta)+2]=3$，解得 $sin(x_2+\theta)=\frac{-\sin x_1-1}{2}$，

又对于任意的 $x_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$sin(x_2+\theta)=\frac{-\sin x_1-1}{2}\in[-1,-\frac{1}{2}]$，

原问题，等价为：当 $x_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，即 $x_2+\theta\in[\theta,\theta+\frac{\pi}{2}]$ 时，$sin(x_2+\theta)$ 取遍 $[-1,-\frac{1}{2}]$ 能所有的数；

所以，一定存在整数 k，

使得：$[2k\pi+\frac{7\pi}{6},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]\subseteq[\theta,\theta+\frac{\pi}{2}]$ 或者 $[2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+\frac{11\pi}{6}]\subseteq[\theta,\theta+\frac{\pi}{2}]$，

解得 $\theta\in[2k\pi+\frac{6\pi}{6},2k\pi+\frac{7\pi}{6}]$ 或者 $\theta\in[2k\pi+\frac{8\pi}{6},2k\pi+\frac{9\pi}{6}]$，所以选D；）

方法三： $f(x_1)=3\sin x_1+2, 2f(x_2+\theta)=6\sin(x_2+\theta)+4, f(x_1)+2f(x_2+\theta)=3$

$\sin x_1+2\sin(x_2+\theta)=-1, \sin x_1\in[0,1], \sin(x_2+\theta)\in[-1,-\frac{1}{2}]$

$\theta\in[2k\pi+\pi, 2k\pi+\frac{7\pi}{6}]$或$\theta\in[2k\pi+\frac{4}{3}\pi, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}], k\in z$

$\theta=\frac{6\pi}{5}, x_1=0, x_2\in[0,2\pi]$上有2解，$x_2=\frac{19\pi}{30}, \frac{59\pi}{30}\notin[0,\frac{\pi}{2}]$，舍去 θ的可能值是$\frac{7\pi}{5}$，选D

【归纳总结】本题本质就是求三角函数的值域，通过关键词“任意”、“存在”与方程，构建了以集合间关系为解题的“切入点”，同时考查了：函数与方程、数形结合、等价转化思想；主要考查了学生数学抽象核心素养，通过整体代入法解决三角函数问题。

16、已知两两不同的$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$满足$x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3$，

且$x_1<y_1$，$x_2<y_2$，$x_3<y_3$，$x_1y_1+x_3y_3=2x_2y_2>0$，则下列选项中恒成立的是（　）

$A.\ 2x_2<x_1+x_3$　　$B.\ 2x_2>x_1+x_3$　　$C.\ x_2^2<x_1x_3$　　$D.\ x_2^2>x_1x_3$

【思路分析】注意通过审题与理解，进行合理的转化

【解析】**方法一：** $\begin{cases} x_1=s-a, y_1=s+a, a>0 \\ x_2=s-b, y_2=s+b, b>0 \Rightarrow a^2+c^2=2b^2, s^2-b^2>0 \\ x_3=s-c, y_3=s+c, c>0 \end{cases}$

$(a+c)^2=2(a^2+c^2)-(a-c)^2=a^2+c^2+2ac<2(a^2+c^2)=4b^2$

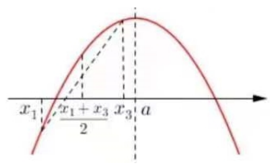
$a, b, c>0\Rightarrow a+c<2b\Leftrightarrow x_1+x_3<2x_2$

方法二：举特例去选择，$x_1=4, y_1=5, x_2=2, y_2=7, x_3=1, y_3=8$，代入

方法三：令$x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3=2a$，则由已知$x_1<a$，$x_2<a$，$x_3<a$，

又由$x_1(2a-x_1)+x_3(2a-x_3)=2x_2(2a-x_2)$　(*)，构造函数$f(x)=x(2a-x)$，

(*)　即为$f(x_1)+f(x_3)=2f(x_2)$，结合函数图像，



$f(\frac{x_1+x_3}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2}=f(x_2)$，又函数在$(-\infty, a)$递增，所以$\frac{x_1+x_3}{2}>x_2$)

【归纳总结】本题主要考察了考学生数学数据处理与数学建模核心素养，通过换元、引入参数或根据条件结构转化为二次函数问题，再通过函数的凹凸性确定出答案，难度较大；

三、解答题（本大题共有5题，满分76分,解答下列各题必须写出必要的步骤）

17、如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=2, AA_1=3$

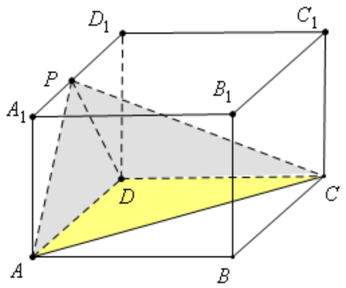
(1)若P是边A_1D_1的动点，求三棱锥$P-ADC$的体积；　(2)求AB_1与平面ACC_1A_1所成的角的大小.

【思路分析】(1)利用体积计算公式计算；（2）证明$OB_1\perp$平面ACC_1A_1，找到线面角度，再计算

【解析】(1)如图1，$V_{P-ADC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ADC}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times3=2$；

（2）如图2，Q$OB_1\perp A_1C_1, OB_1\perp OO_1\therefore OB_1\perp$平面$ACC_1A_1\therefore\theta=\angle B_1AO_1$为$AB_1$与平面$ACC_1A_1$所成的角；在$Rt\Delta B_1AO_1$中

$B_1O_1=\sqrt{2}, AB_1=\sqrt{13}, \sin\theta=\frac{B_1O_1}{AB_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{26}}{13}, \theta=arc\sin\frac{\sqrt{26}}{13}$



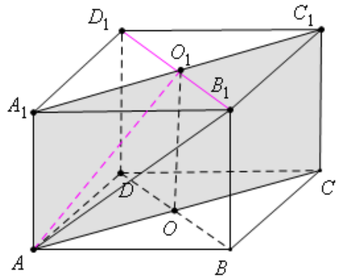


图1　　　　　　图2

【归纳总结】本题考查棱锥的体积、线面角的求法，理解线面角的定义，考查学生的空间立体感、逻辑推理能力和运算能力，属于基础题．

18、在ΔABC中，已知$a=3,b=2c$

(1)若$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$,求ΔABC的面积；　(2)若$2\sin B-\sin C=1$,求ΔABC的周长.

【思路分析】（1）由已知利用余弦定理即可求解b，c的值；再利用面积公式求ΔABC的面积．

（2）根据$b=2c$与$2\sin B-\sin C=1$建立关于角度的三角方程，求解$\sin C,\sin B$的值，在求$\sin A$，则根据正弦定理以及$a=3$，则三边可求．

【解析】（1）$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow\dfrac{(2c)^2+c^2-3^2}{2\times(2c)c}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow c=\dfrac{3\sqrt{7}}{7},b=\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$；

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2c^2\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times2\times(\frac{3\sqrt{7}}{7})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{14}$$

(2)　$b=2c\Rightarrow\sin B=2\sin C\Rightarrow2\times2\sin C-\sin C=1\Rightarrow\sin C=\dfrac{1}{3},\sin B=\dfrac{2}{3}$

$$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{4\sqrt{2}}{9}\pm\frac{\sqrt{5}}{9}$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{4\sqrt{2}\pm\sqrt{5}}{3},=\text{三角形周长}l=a+b+c=a+3c=3+4\sqrt{2}\pm\sqrt{5}$$

【归纳总结】本题主要考查了正弦定理，余弦定理，两角差的余弦公式在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于中档题．

19.已知某企业今年（2021年）第一季度的营业额为1.1亿元，以后每个季度（一年有四个季度）营业额都比前一季度多0.05亿元，该企业第一季度是利润为0.16亿元，以后每一季度的利润都比前一季度增长4%．

（1）求2021第一季度起20季度的营业额总和；

（2）问哪一年哪个季度的利润首次超过该季度营业额的18%？

【思路分析】（1）根据每个季度比上个季度营业额增加0.05亿元可以知道数列为一个等差数列，求解20季度营业收入总额为即为等差数列前20项的和；（2）通过数列通项公式建立数列不等式，利用计算器计算求解不等式即可。

【解析】（1）设a_n为第n季度的营业额，b_n为利润，由题意得，a_n的首项为1.1亿元，公差为0.05亿元,所以2021到2025年，

20季度营业收入总额为：$S_{20}=20a_1+\dfrac{20\times19}{2}\times d=31.5$（亿元）

（2）由已知得，$a_n = a_1 + (n-1)d = 1.1 + 0.5(n-1)$

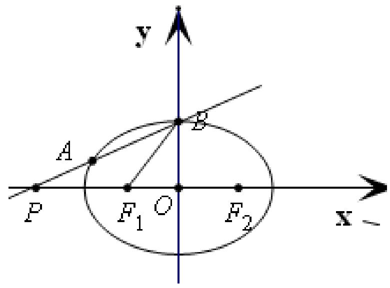
由已知的，b_n 的首项为 0.16 亿元，公比为 1.04 ,即 $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 0.16 \times 1.04^{n-1}$

所以 $a_n \cdot 18\% < b_n$，利用计算器991可得，$n_{\min} = 26$

所以2027年第二季度该公司的利润首次超过该季度营业收入的 18%

【归纳总结】本题主要考查了等差、比数列的通项公式与前n项和公式的应用，考查了阅读理解能力、计算能力，属于中档题.

20、已知 $\Gamma: \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1, F_1$、$F_2$ 是其左右焦点，$P(m,0)(m < -\sqrt{2})$,直线 l 过点 P 交 Γ 于 A、B 两点，且 A 在线段 BP 上.



(1)若 B 是上顶点，$\left|\overrightarrow{BF_1}\right| = \left|\overrightarrow{PF_1}\right|$,求 m 的值;

(2)若 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \dfrac{1}{3}$,且原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$，求直线 l 的方程;

(3)证明：对于任意 $m < -\sqrt{2}$,总存在唯一一条直线使得 $\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}$.

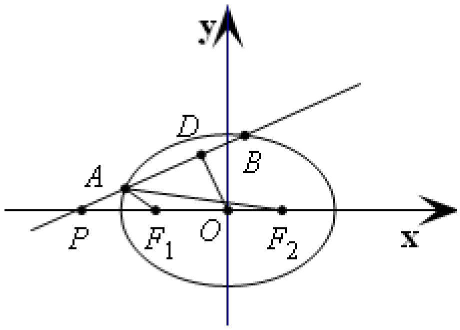
【思路分析】（1）根据椭圆的定义以及 $\left|\overrightarrow{BF_1}\right| = \left|\overrightarrow{PF_1}\right|$ 建立关于 m 的方程;

（2）通过原点 O 到直线 l 的距离建立关于直线斜率的方程，求解斜率；（3）找到直线斜率与m的函数关系，结合函数关系式判断 $m < -\sqrt{2}$ 是否是唯一解使得 $\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}$；

【解析】(1) $\Gamma: \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1, F_1(-1, 0)$、$F_2(1,0)$,$|BF_1| = \sqrt{2}, |PF_1| = -1-m$；

$\left|\overrightarrow{BF_1}\right| = \left|\overrightarrow{PF_1}\right|, -1-\mathrm{m} = \sqrt{2}, m = -1-\sqrt{2}$

(2) 设 $A(x_1, y_1), \overrightarrow{F_1A} = (x_1+1, y_1), \overrightarrow{F_2A} = (x_1-1, y_1),$；



$\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \dfrac{1}{3} = x_1^2 + y_1^2 - 1, x_1^2 + y_1^2 = \dfrac{4}{3},$

$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1 \end{cases} \therefore A(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{3})$

设 $l: y = k(x + \dfrac{\sqrt{6}}{3}) + \dfrac{\sqrt{6}}{3} = kx + \dfrac{\sqrt{6}}{3}(k+1)$，原点 O 到直线 l 的距离为

$\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$

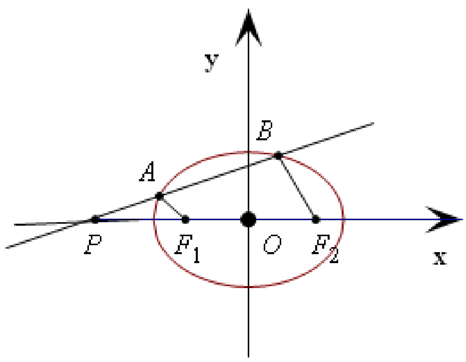
$d = \dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{6}}{3}k + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right|}{\sqrt{1+k^2}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{15} \Rightarrow 3k^2 - 10k + 3 = 0 = 3 \Rightarrow k = 3或k = \dfrac{1}{3}$（$A$ 在线段 BP 上，$k = 3,$ 舍去）

$l: 3x - 9y + 4\sqrt{6} = 0$

(3) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，直线 $l: x = hy + m$

$\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}$，则 $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{1-m}{-1-m} = \dfrac{m-1}{m+1}$，$\therefore y_2 = \dfrac{m-1}{m+1} y_1$

联立直线与椭圆得



$$\begin{cases} x = hy + m \\ \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(h^2+2\right)y^2 + 2mhy + m^2 - 2 = 0.$$

即 $y_1 + y_2 = -\dfrac{2mh}{h^2+2}$，　$y_1y_2 = \dfrac{m^2-2}{h^2+2}$ 所以 $\left(1+\dfrac{m-1}{m+1}\right)y_1 = -\dfrac{2mh}{h^2+2}, \dfrac{m-1}{m+1}y_1^2 = \dfrac{m^2-2}{h^2+2}$

代入 $y_1 = \dfrac{-h(2n+1)}{h^2+2}$，$\dfrac{m-1}{m+1} \times \dfrac{h^2(m+1)^2}{\left(h^2+2\right)^2} = \dfrac{m^2-2}{h^2+2}$

所以 $\left(m^2-1\right)h^2 = \left(m^2-2\right)\left(h^2+2\right)$，$m^2h^2 - h^2 = m^2h^2 - 2h^2 + 2m^2 - 4$

$\because h > 0 \therefore h^2 = 2m^2 - 4 \Rightarrow h = \sqrt{2m^2-4} \Rightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2-4}}$，

即对于任意 $m < -\sqrt{2}$，使得 $\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}$ 的直线有且仅有一条；

【归纳总结】本题主要考查直线与椭圆的位置关系以及根与系数的关系的应用，属于难题．

21、如果对任意 $x_1, x_2 \in$ ¡ 使得 $x_1 - x_2 \in S$ 都有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$，则称 $f(x)$ 是 S 关联的.

(1)判断并证明 $f(x) = 2x - 1$ 是否是 $[0,+\infty)$ 关联？是否是 $[0,1]$ 关联？

(2) $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的，在 $[0,3)$ 上有 $f(x) = x^2 - 2x$，解不等式 $2 \le f(x) \le 3$；

(3) “$f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的，且是 $[0,+\infty)$ 关联”当且仅当“$f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联的”．

【思路分析】（1）根据“关联”定义进行判断；

（2）根据“$f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联”有：$f(x+3) - f(x) = 3$；以及函数解析式作出函数图像，利用图像解不等式；

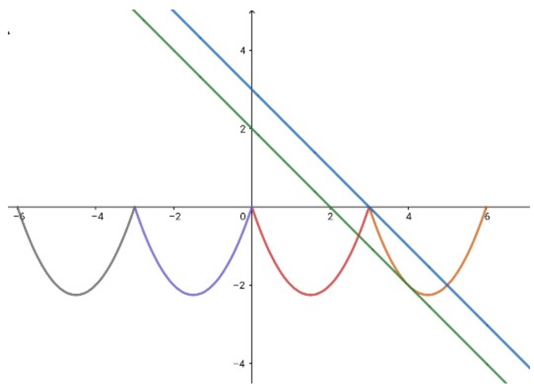
（3）分为充分性、必要性两个方面证明；

【解析】(1) $x_1 - x_2 \in [0,+\infty), f(x_1) - f(x_2) = (2x_1-1) - (2x_2-1) = x_1 - x_2 \in [0,+\infty)$, $f(x) = 2x - 1$ 是 $[0,+\infty)$ 关联；

$x_1 - x_2 \in [0,1], f(x_1) - f(x_2) = (2x_1-1) - (2x_2-1) = 2(x_1 - x_2) \in [0,2]$, $f(x) = 2x - 1$ 不是 $[0,1]$ 关联；

(2) $f(x) - x = x^2 - 3x$ 是以3为周期的函数，然后就是要在 $[2-x, 3-x]$ 里面，

可以看出只有 $[0,3),[3,6)$ 两个周期中可以找到解，答案是 $[1+\sqrt{3},5]$



（3）充分性：$\because f(x+1) = f(x) + 1$，且 $f(x)$ 递增，所以对于 $x + 1 \le y \le x + 2$

$f(x) + 1 = f(x+1) \le f(y) \le f(x+2) = f(x) + 2$ 成立。

必要性：$\because f(x+1) - f(x) \ge 1$，$f(x+2) - f(x+1) \ge 1$，$f(x+2) - f(x) \le 2$

可以得到 $f(x+1)=f(x)+1$

故对 $x<y\le x+1$，我们对 $x,y+1$ 用 $[1,2]$ 关联的条件得到 $f(x)+1\le f(y+1)=f(y)+1$

于是 $f(x)\le f(y)$.对于正整数 n， $x+n<y\le x+n+1$

则有 $f(y)=f(y-n)+n\ge f(x)+n>f(x)$.也成立.

方法二：（1）①设 $x_1-x_2\in[0,+\infty)$， $x_1-x_2\ge 1$ 且为 $[0,+\infty)$，

$f(x_1)-f(x_2)=2x_1-1-2x_2+1=2(x_1-x_2)\ge 2$ 且满足 $[0,+\infty)$， $f(x)=2x-1$ 是 $[0,+\infty)$ 关联的.

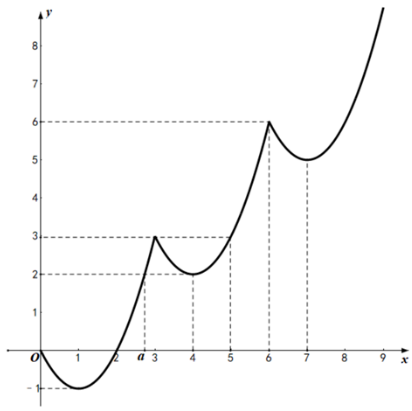
②设 $x_1-x_2\in[0,1]$， $f(x_1)-f(x_2)=2x_1-1-2x_2+1=2(x_1-x_2)\in[0,2]$，

故 $f(x)=2x-1$ 不是 $[0,1]$ 关联的.

（2）因为 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的，所以当任意的 $x\in\mathbf{R}$ 时， $f(x+3)-f(x)=3$，

又∵ $x\in[0,3)$ 时， $f(x)=x^2-2x$，函数图像如下图：

易知， $a=1+\sqrt{3}$，∴原不等式的解为 $[a,5]$ 即为 $[1+\sqrt{3},5]$.



（3）证明：∵ $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联，可知对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+1)-f(x)=1$，

∵ $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 关联，可知对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 有 $\begin{cases}x_1-x_2\ge 0\\ f(x_1)-f(x_2)\ge 0\end{cases}$，为不减函数；

可以设 $g(\Delta x)=f(x+\Delta x)-f(x)$，

当 $\Delta x=1$ 时， $g(1)=f(x+1)-f(x)=1$，

当 $\Delta x=2$ 时， $g(2)=f(x+2)-f(x)=f(x+1)+1-f(x)=2$，

因为当 x 确定时， $g(\Delta x)$ 是关于 Δx 的不减函数，所以 $\Delta x\in[1,2]$， $g(\Delta x)\in[1,2]$

∴有 $f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联.

②当 $f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联，有 $\Delta x\in[1,2]$，∴ $g(\Delta x)=f(x+\Delta x)-f(x)\in[1,2]$，

当 $g(1)=f(x+1)-f(x)\in[1,2]$， $g(2)=f(x+2)-f(x)\in[1,2]$ 时，

假设 $g(1)>1$，有 $f(x+1)-f(x)>1$.∴ $f(x+2)-f(x)>f(x+1)+1-f(x)>2$，

又∵ $g(2)=f(x+2)-f(x)\in[1,2]$，矛盾.

故只有 $g(1)=1$，易得 $g(2)=2$.

利用 $f(x+1)-f(x)=1$，得 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联，

依次可得 $g(n)=n$， $n\in\mathbf{Z}^+$，

即当 $\Delta x\in[n,n+1]$，有 $g(\Delta x)\in[n,n+1]$，

当在 $n\to+\infty$ 时， $\Delta x\in[0,+\infty)$， $g(\Delta x)\in[0,+\infty)$.

【归纳总结】本题主要考查了新定义以及函数性质的综合应用，体现了数形结合思想的应用，同时考查了学生分析理解能力、推理能力、计算能力，属于难题.