

## 2009 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

### 一、选择题（每小题 5 分）

(1)  $i$  是虚数单位,  $\frac{5i}{2-i} =$

- (A)  $1+2i$       (B)  $-1-2i$       (C)  $1-2i$       (D)  $-1+2i$

(2) 设变量  $x, y$  满足约束条件: 
$$\begin{cases} x+y \geq 3 \\ x-y \geq -1 \\ 2x-y \leq 3 \end{cases}$$
 则目标函数  $z=2x+3y$  的最小值为

- (A) 6      (B) 7      (C) 8      (D) 23

(3) 命题 “存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $2^{x_0} \leq 0$ ” 的否定是

- (A) 不存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $2^{x_0} > 0$       (B) 存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $2^{x_0} \geq 0$   
(C) 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $2^x \leq 0$       (D) 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $2^x > 0$

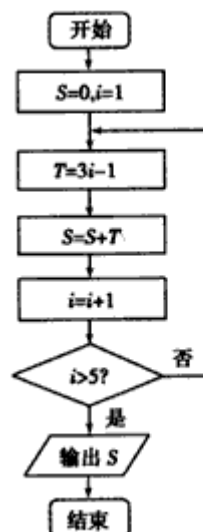
(4) 设函数  $f(x) = \frac{1}{3}x - \ln x (x > 0)$ , 则  $y = f(x)$

A 在区间  $(\frac{1}{e}, 1), (1, e)$  内均有零点。

B 在区间  $(\frac{1}{e}, 1), (1, e)$  内均无零点。

C 在区间  $(\frac{1}{e}, 1)$  内有零点, 在区间  $(1, e)$  内无零点。

D 在区间  $(\frac{1}{e}, 1)$  内无零点, 在区间  $(1, e)$  内有零点。



(5) 阅读右图的程序框图，则输出的  $S=$

- A 26      B 35      C 40      D 57

(6) 设  $a > 0, b > 0$ . 若  $\sqrt{3}$  是  $3^a$  与  $3^b$  的等比中项，则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为

- A 8      B 4      C 1      D  $\frac{1}{4}$

(7) 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (x \in \mathbb{R}, \omega > 0)$  的最小正周期为  $\pi$ ，为了得到函数

$g(x) = \cos \omega x$  的图象，只要将  $y = f(x)$  的图象

- A 向左平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度      B 向右平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度  
C 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度      D 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度

(8) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0, \\ 4x - x^2, & x < 0, \end{cases}$  若  $f(2-a^2) > f(a)$ , 则实数  $a$  的取值范围是

- A  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$       B  $(-1, 2)$       C  $(-2, 1)$       D  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

(9) . 设抛物线  $y^2 = 2x$  的焦点为  $F$ , 过点  $M(\sqrt{3}, 0)$  的直线与抛物线相交于  $A, B$  两点,

与抛物线的准线相交于  $C$ ,  $|BF| = 2$ , 则  $\triangle BCF$  与  $\triangle ACF$  的面积之比  $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}} =$

- (A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{4}{7}$  (D)  $\frac{1}{2}$

(10)  $0 < b < 1+a$ , 若关于  $x$  的不等式  $(x-b)^2 > (ax)^2$  的解集中的整数恰有 3 个, 则

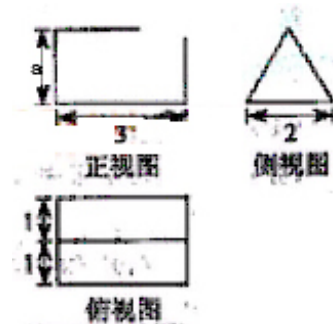
- (A)  $-1 < a < 0$  (B)  $0 < a < 1$  (C)  $1 < a < 3$  (D)  $3 < a < 6$

二. 填空题: (6 小题, 每题 4 分, 共 24 分)

(11) 某学院的 A, B, C 三个专业共有 1200 名学生, 为了调查这些学生勤工俭学的情况, 拟采用分层抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本。已知该学院的 A 专业有 380 名学生, B 专业有 420 名学生, 则在该学院的 C 专业应抽取\_\_\_\_\_名学生。

(12) 如图是一个几何体的三视图, 若它的体积是  $3\sqrt{3}$ , 则

$a =$ \_\_\_\_\_



(13) 设直线  $l_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+3t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 直线  $l_2$  的方程

为  $y = 3x + 4$  则  $l_1$  与  $l_2$  的距离为\_\_\_\_\_

(14) 若圆  $x^2 + y^2 = 4$  与圆  $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0$  ( $a > 0$ ) 的公共弦的长为  $2\sqrt{3}$ ,

则  $a =$ \_\_\_\_\_

(15) 在四边形 ABCD 中,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1, 1)$ ,  $\frac{1}{|\overrightarrow{BA}|} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{|\overrightarrow{BC}|} \overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{BD}|} \overrightarrow{BD}$ , 则

四边形 ABCD 的面积是\_\_\_\_\_

(16) 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成没有重复数字的四位数, 其中个位、十位和百位上的数字之和为偶数的四位数共有\_\_\_\_\_个 (用数字作答)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 76 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

(17) (满分 12 分) 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = \sqrt{5}$ ,  $AC = 3$ ,  $\sin C = 2\sin A$

(I) 求 AB 的值: ..

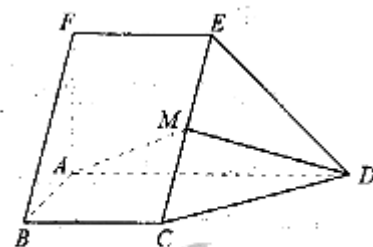
(II) 求  $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$  的值

(18) (满分 12 分) 在 10 件产品中, 有 3 件一等品, 4 件二等品, 3 件三等品。从这 10 件产品中任取 3 件, 求:

(I) 取出的 3 件产品中一等品件数  $X$  的分布列和数学期望;

(II) 取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数的概率。

(19) (满分 12 分) 如图, 在五面体 ABCDEF 中,  $FA \perp$  平面 ABCD,  $AD \parallel BC \parallel FE$ ,  $AB \perp AD$ , M 为 EC 的中点,  $AF = AB = BC = FE =$



$$\frac{1}{2}AD.$$

- (I) 求异面直线 BF 与 DE 所成的角的大小;  
 (II) 证明平面 AMD ⊥ 平面 CDE;  
 (III) 求二面角 A-CD-E 的余弦值

(20) (满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (x^2 + ax - 2a^2 + 3a)e^x (x \in R)$ , 其中  $a \in R$

(1) 当  $a = 0$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线的斜率;

(2) 当  $a \neq \frac{2}{3}$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间与极值。

(21) (满分 14 分)

以知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点分别为  $F_1(-c, 0)$  和  $F_2(c, 0) (c > 0)$ , 过点

$E(\frac{a^2}{c}, 0)$  的直线与椭圆相交与  $A, B$  两点, 且  $F_1A \parallel F_2B, |F_1A| = 2|F_2B|$ 。

- (1) 求椭圆的离心率。  
 (2) 求直线 AB 的斜率;  
 (3) 设点 C 与点 A 关于坐标原点对称, 直线  $F_2B$  上有一点  $H(m, n) (m \neq 0)$  在  $\Delta$

$AF_1C$  的外接圆上, 求  $\frac{n}{m}$  的值。

(22) (满分 14 分) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d (d \neq 0)$ , 等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$

( $q > 1$ )。设  $s_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n, T_n = a_1b_1 - a_2b_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_nb_n, n \in N^+$ 。

(I) 若  $a_1 = b_1 = 1, d=2, q=3$ , 求  $S_3$  的值;

(II) 若  $b_1 = 1$ , 证明  $(1-q) S_{2n} - (1+q) T_{2n} = \frac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}, n \in N^+;$

(III) 若正数  $n$  满足  $2 \leq n \leq q$ , 设  $k_1, k_2, \dots, k_n$  和  $l_1, l_2, \dots, l_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的两个不同的排列,

$c_1 = a_{k_1}b_1 + a_{k_2}b_2 + \dots + a_{k_n}b_n, c_2 = a_{l_1}b_1 + a_{l_2}b_2 + \dots + a_{l_n}b_n$  证明  $c_1 \neq c_2$ 。