

# 2025 年普通高等学校招生全国统一考试（新 1 卷）

★祝大家学习生活愉快★

注意事项：

- 1.答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号，试室号，座位号填写在答题卡上.用 2B 铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上.
- 2.选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑：如需改动，用橡皮擦干净后，再填涂其他答案.答案不能答在试卷上.
- 3.非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上：如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1.  $(1+5i)i$  的虚部为 ( )

- A. -1                                      B. 0                                      C. 1                                      D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则以及虚部的定义即可求出.

【详解】因为  $(1+5i)i = i + 5i^2 = -5 + i$ ，所以其虚部为 1，

故选：C.

2. 设全集  $U = \{x | x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$ ，集合  $A = \{1, 3, 5\}$ ，则  $\complement_U A$  中元素个数为 ( )

- A. 0                                      B. 3                                      C. 5                                      D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】根据补集的定义即可求出.

【详解】因为  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，所以  $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ ， $\complement_U A$  中的元素个数为 5，

故选：C.

3. 若双曲线  $C$  的虚轴长为实轴长的  $\sqrt{7}$  倍，则  $C$  的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$                                       B. 2                                      C.  $\sqrt{7}$                                       D.  $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题可知双曲线中  $a, b$  的关系，结合  $a^2 + b^2 = c^2$  和离心率公式求解

【详解】设双曲线的实轴，虚轴，焦距分别为  $2a, 2b, 2c$ ，

由题知， $b = \sqrt{7}a$ ，

于是  $a^2 + b^2 = c^2 = a^2 + 7a^2 = 8a^2$ ，则  $c = 2\sqrt{2}a$ ，

即  $e = \frac{c}{a} = 2\sqrt{2}$ 。

故选：D

4. 若点  $(a, 0) (a > 0)$  是函数  $y = 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象的一个对称中心，则  $a$  的最小值为 ( )

A.  $\frac{\pi}{4}$

B.  $\frac{\pi}{2}$

C.  $\frac{\pi}{3}$

D.  $\frac{4\pi}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据正切函数的对称中心的结论求解。

【详解】根据正切函数的性质， $y = 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  的对称中心横坐标满足  $x - \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ，

即  $y = 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  的对称中心是  $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$ ，

即  $a = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ，

又  $a > 0$ ，则  $k = 0$  时  $a$  最小，最小值是  $\frac{\pi}{3}$ ，

即  $a = \frac{\pi}{3}$ 。

故选：C

5. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上且周期为 2 的偶函数，当  $2 \leq x \leq 3$  时， $f(x) = 5 - 2x$ ，则  $f\left(-\frac{3}{4}\right) =$  ( )

A.  $-\frac{1}{2}$

B.  $-\frac{1}{4}$

C.  $\frac{1}{4}$

D.  $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据周期性和奇偶性把待求自变量转化为  $[2, 3]$  的范围中求解。

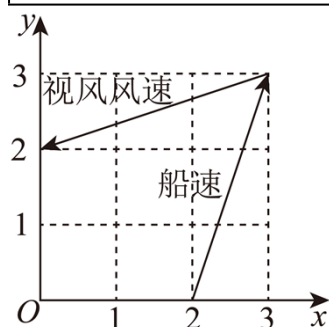
【详解】由题知  $f(x) = f(-x)$ ,  $f(x+2) = f(x)$  对一切  $x \in \mathbf{R}$  成立,

$$\text{于是 } f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{11}{4}\right) = 5 - 2 \times \frac{11}{4} = -\frac{1}{2}.$$

故选: A

6. 帆船比赛中, 运动员可借助风力计测定风速的大小和方向, 测出的结果在航海学中称为视风风速, 视风风速对应的向量, 是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和, 其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等, 方向相反. 图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2 (风速的大小和向量的大小相同), 单位 (m/s), 则真风为 ( )

等级	风速大小 m/s	名称
2	1.1~3.3	轻风
3	3.4~5.4	微风
4	5.5~7.9	和风
5	8.0~10.1	劲风



- A. 轻风                      B. 微风                      C. 和风                      D. 劲风

【答案】 A

【解析】

【分析】结合题目条件和图 2 写出视风风速对应的向量和船行风速对应的向量, 求出真风风速对应的向量, 得出真风风速的大小, 即可由图 1 得出结论.

【详解】由题意及图得,

$$\text{视风风速对应的向量为: } \vec{n} = (0, 2) - (3, 3) = (-3, -1),$$

视风风速对应的向量, 是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和,

船速方向和船行风速的向量方向相反,

设真风风速对应的向量为 $\vec{n}_1$ ，船行风速对应的向量为 $\vec{n}_2$ ，

$$\therefore \vec{n} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2, \text{ 船行风速: } \vec{n}_2 = -[(3, 3) - (2, 0)] = (-1, -3),$$

$$\therefore \vec{n}_1 = \vec{n} - \vec{n}_2 = (-3, -1) - (-1, -3) = (-2, 2),$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2.828,$$

$\therefore$ 由表得，真风风速为轻风，

故选：A.

7. 若圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$ 上到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为1的点有且仅有2个，则 $r$ 的取值范围是  
( )

A.  $(0, 1)$

B.  $(1, 3)$

C.  $(3, +\infty)$

D.  $(0, +\infty)$

【答案】B

【解析】

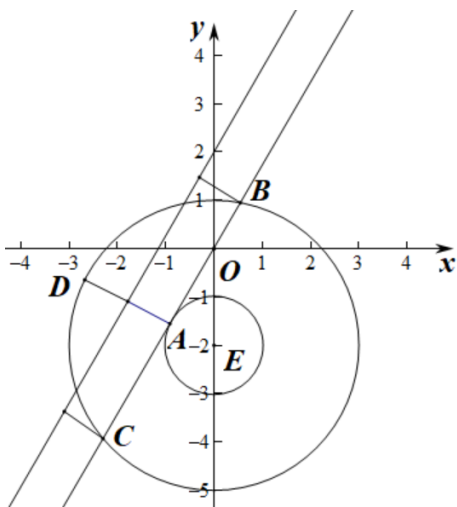
【分析】先求出圆心 $E(0, -2)$ 到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离，然后结合图象，即可得出结论.

【详解】由题意，

在圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$ 中，圆心 $E(0, -2)$ ，半径为 $r$ ，

到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为1的点有且仅有2个，

$$\therefore \text{圆心 } E(0, -2) \text{ 到直线 } y = \sqrt{3}x + 2 \text{ 的距离为: } d = \frac{|0 \times \sqrt{3} - (-2) \times 1 + 2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 2,$$



故由图可知，

当 $r = 1$ 时，

圆  $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$  上有且仅有一个点 (A 点) 到直线  $y = \sqrt{3}x + 2$  的距离等于 1;

当  $r = 3$  时,

圆  $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$  上有且仅有三个点 (B, C, D 点) 到直线  $y = \sqrt{3}x + 2$  的距离等于 1;

当则  $r$  的取值范围为  $(1, 3)$  时,

圆  $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$  上有且仅有两个点到直线  $y = \sqrt{3}x + 2$  的距离等于 1.

故选: B.

8. 若实数  $x, y, z$  满足  $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$ , 则  $x, y, z$  的大小关系不可能是 ( )

A.  $x > y > z$

B.  $x > z > y$

C.  $y > x > z$

D.  $y > z > x$

【答案】B

【解析】

【分析】法一: 设  $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z = m$ , 对  $m$  讨论赋值求出  $x, y, z$ , 即可得出大小关系, 利用排除法求出;

法二: 根据数形结合解出.

【详解】法一: 设  $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z = m$ , 所以

令  $m = 2$ , 则  $x = 1, y = 3^{-1} = \frac{1}{3}, z = 5^{-3} = \frac{1}{125}$ , 此时  $x > y > z$ , A 有可能;

令  $m = 5$ , 则  $x = 8, y = 9, z = 1$ , 此时  $y > x > z$ , C 有可能;

令  $m = 8$ , 则  $x = 2^6 = 64, y = 3^5 = 243, z = 5^3 = 125$ , 此时  $y > z > x$ , D 有可能;

故选: B.

法二: 设  $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z = m$ , 所以,  $x = 2^{m-2}, y = 3^{m-3}, z = 5^{m-5}$

根据指数函数的单调性, 易知各方程只有唯一的根,

作出函数  $y = 2^{x-2}, y = 3^{x-3}, y = 5^{x-5}$  的图象, 以上方程的根分别是函数  $y = 2^{x-2}, y = 3^{x-3}, y = 5^{x-5}$  的图象与直线  $x = m$  的交点纵坐标, 如图所示:



则  $AD \perp A_1C$  不成立，故 A 错误；

对于 B，因为在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ，

又  $BC \subset$  平面  $ABC$ ，则  $AA_1 \perp BC$ ，

因为  $\triangle ABC$  是正三角形， $D$  为  $BC$  中点，则  $AD \perp BC$ ，

又  $AA_1 \cap AD = A, AA_1, AD \subset$  平面  $AA_1D$ ，

所以  $BC \perp$  平面  $AA_1D$ ，故 B 正确；

对于 C，因为在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $CC_1 \parallel AA_1$

又  $AA_1 \subset$  平面  $AA_1D, CC_1 \not\subset$  平面  $AA_1D$ ，所以  $CC_1 \parallel$  平面  $AA_1D$ ，故 C 正确；

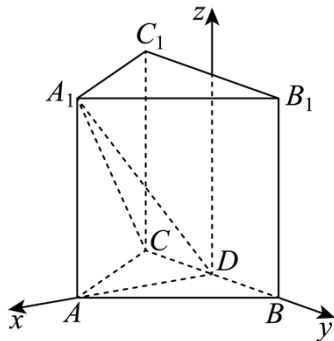
对于 D，因为在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $A_1B_1 \parallel AB$ ，

假设  $AD \parallel A_1B_1$ ，则  $AD \parallel AB$ ，这与  $AD \cap AB = A$  矛盾，

所以  $AD \parallel A_1B_1$  不成立，故 D 错误；

故选：BC.

法二：如图，建立空间直角坐标系，设该正三棱柱的底边为 2，高为  $h$ ，



则  $D(0,0,0), A(\sqrt{3},0,0), A_1(\sqrt{3},0,h), C(0,-1,0), C_1(0,-1,h), B(0,1,0), B_1(0,1,h)$ ，

对于 A， $\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3},0,0), \overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{3},-1,-h)$ ，

则  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) + 0 = 3 \neq 0$ ，

则  $AD \perp A_1C$  不成立，故 A 错误；

对于 BC， $\overrightarrow{BC} = (0,-2,0), \overrightarrow{CC_1} = (0,0,h), \overrightarrow{AA_1} = (0,0,h), \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3},0,0)$ ，

设平面  $AA_1D$  的法向量为  $\vec{n} = (x,y,z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{n} = hz = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}x = 0 \end{cases}, \text{得 } x = z = 0, \text{ 令 } y = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (0, 1, 0),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BC} = (0, -2, 0) = -2\vec{n}, \quad \overrightarrow{CC_1} \cdot \vec{n} = 0,$$

则  $BC \perp$  平面  $AA_1D$ ,  $CC_1 \parallel$  平面  $AA_1D$ , 故 BC 正确;

$$\text{对于 D, } \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{A_1B_1} = (-\sqrt{3}, 1, 0),$$

$$\text{则 } \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \neq \frac{0}{1}, \text{ 显然 } AD \nparallel A_1B_1 \text{ 不成立, 故 D 错误;}$$

故选: BC.

10. 设抛物线  $C: y^2 = 6x$  的焦点为  $F$ , 过  $F$  的直线交  $C$  于  $A, B$ , 过  $F$  且垂直于  $AB$  的直线交  $l: x = -\frac{3}{2}$  于  $E$ , 过点  $A$  作准线  $l$  的垂线, 垂足为  $D$ , 则 ( )

A.  $|AD| = |AF|$

B.  $|AE| = |AB|$

C.  $|AB| \geq 6$

D.  $|AE| \cdot |BE| \geq 18$

【答案】ACD

【解析】

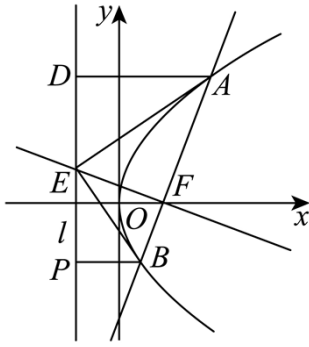
【分析】对于 A, 先判断得直线  $l: x = -\frac{3}{2}$  为抛物线的准线, 再利用抛物线的定义即可判断; 对于 B, 利用三角形相似证得  $\angle AEB = 90^\circ$ , 进而得以判断; 对于 C, 利用直线的反设法 (法一) 与正设法 (法二), 联立直线  $AB$  与抛物线方程, 结合韦达定理与焦点弦公式可判断 C; 利用利用三角形相似证得  $|AE|^2 = |AF| \cdot |AB|$ ,  $|BE|^2 = |BF| \cdot |AB|$ , 结合焦半径公式可判断 D.

【详解】法一: 对于 A, 对于抛物线  $C: y^2 = 6x$ ,

$$\text{则 } p = 3, \text{ 其准线方程为 } x = -\frac{3}{2}, \text{ 焦点 } F\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

则  $|AD|$  为抛物线上点到准线的距离,  $|AF|$  为抛物线上点到焦点的距离,





由抛物线的定义可知， $|AD| = |AF|$ ，故 A 正确；

对于 B，过点 B 作准线  $l$  的垂线，交于点 P，

由题意可知  $AD \perp l, EF \perp AB$ ，则  $\angle ADE = \angle AFE = 90^\circ$ ，

又  $|AD| = |AF|$ ， $|AE| = |AE|$ ，所以  $\triangle ADE \cong \triangle AFE$ ，

所以  $\angle AED = \angle AEF$ ，同理  $\angle BEP = \angle BEF$ ，

又  $\angle AED + \angle AEF + \angle BEP + \angle BEF = 180^\circ$ ，

所以  $\angle AEF + \angle BEF = 90^\circ$ ，即  $\angle AEB = 90^\circ$ ，

显然  $AB$  为  $\triangle ABE$  的斜边，则  $|AE| < |AB|$ ，故 B 错误；

对于 C，易知直线  $AB$  的斜率不为 0，

设直线  $AB$  的方程为  $x = my + \frac{3}{2}$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + \frac{3}{2} \\ y^2 = 6x \end{cases}, \text{得 } y^2 - 6my - 9 = 0,$$

易知  $\Delta > 0$ ，则  $y_1 + y_2 = 6m, y_1 y_2 = -9$ ，

又  $x_1 = my_1 + \frac{3}{2}$ ， $x_2 = my_2 + \frac{3}{2}$ ，

所以  $|AB| = x_1 + x_2 + p = m(y_1 + y_2) + 3 + 3 = 6m^2 + 6 \geq 6$ ，

当且仅当  $m = 0$  时取等号，故 C 正确；

对于 D，在  $\text{Rt}\triangle ABE$  与  $\text{Rt}\triangle AEF$  中， $\angle BAE = \angle EAF$ ，

所以  $\text{Rt}\triangle ABE \sim \text{Rt}\triangle AEF$ ，则  $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AF|}{|AE|}$ ，即  $|AE|^2 = |AF| \cdot |AB|$ ，

同理  $|BE|^2 = |BF| \cdot |AB|$ ，

$$\text{又 } |AF| \cdot |BF| = \left(x_1 + \frac{3}{2}\right) \left(x_2 + \frac{3}{2}\right) = (my_1 + 3)(my_2 + 3)$$

$$= m^2 y_1 y_2 + 3m(y_1 + y_2) + 9 = -9m^2 + 18m^2 + 9 = 9(m^2 + 1),$$

$$|AB| = 6m^2 + 6 = 6(m^2 + 1),$$

$$\text{所以 } |AE|^2 \cdot |BE|^2 = |BF| \cdot |AF| \cdot |AB|^2 = 9(m^2 + 1) \times 36(m^2 + 1)^2,$$

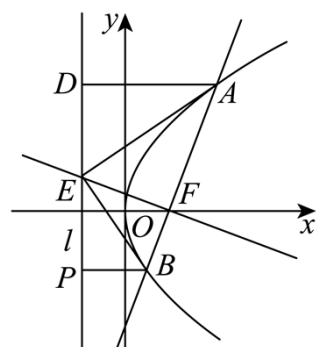
$$\text{则 } |AE| \cdot |BE| = 3(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \times 6(m^2 + 1) = 18(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \geq 18, \text{ 故 D 正确.}$$

故选: ACD.

法二: 对于 A, 对于抛物线  $C: y^2 = 6x$ ,

$$\text{则 } p = 3, \text{ 其准线方程为 } x = -\frac{3}{2}, \text{ 焦点 } F\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

则  $|AD|$  为抛物线上点到准线的距离,  $|AF|$  为抛物线上点到焦点的距离,



由抛物线的定义可知,  $|AD| = |AF|$ , 故 A 正确;

对于 B, 过点 B 作准线  $l$  的垂线, 交于点 P,

由题意可知  $AD \perp l, EF \perp AB$ , 则  $\angle ADE = \angle AFE = 90^\circ$ ,

又  $|AD| = |AF|$ ,  $|AE| = |AE|$ , 所以  $\triangle ADE \cong \triangle AFE$ ,

所以  $\angle AED = \angle AEF$ , 同理  $\angle BEP = \angle BEF$ ,

又  $\angle AED + \angle AEF + \angle BEP + \angle BEF = 180^\circ$ ,

所以  $\angle AEF + \angle BEF = 90^\circ$ , 即  $\angle AEB = 90^\circ$ ,

显然  $AB$  为  $\triangle ABE$  的斜边, 则  $|AE| < |AB|$ , 故 B 错误;

对于 C, 当直线  $AB$  的斜率不存在时,  $|AB| = 2p = 6$ ;

当直线  $AB$  的斜率存在时, 设直线  $AB$  方程为  $y = k\left(x - \frac{3}{2}\right)$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ y^2 = 6x \end{cases} \text{消去 } y, \text{ 得 } k^2 x^2 - (3k^2 + 6)x + \frac{9}{4}k^2 = 0,$$

$$\text{易知 } \Delta > 0, \text{ 则 } x_1 + x_2 = 3 + \frac{6}{k^2}, x_1 x_2 = \frac{9}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{\left(3 + \frac{6}{k^2}\right)^2 - 9} = 6\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) > 6, \end{aligned}$$

综上,  $|AB| \geq 6$ , 故 C 正确;

对于 D, 在  $\text{Rt}\triangle ABE$  与  $\text{Rt}\triangle AEF$  中,  $\angle BAE = \angle EAF$ ,

$$\text{所以 } \text{Rt}\triangle ABE \sim \text{Rt}\triangle AEF, \text{ 则 } \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AF|}{|AE|}, \text{ 即 } |AE|^2 = |AF| \cdot |AB|,$$

$$\text{同理 } |BE|^2 = |BF| \cdot |AB|,$$

$$\text{当直线 } AB \text{ 的斜率不存在时, } |AB| = 6, |AF| = |BF| = \frac{1}{2}|AB| = 3;$$

$$\text{所以 } |AE|^2 \cdot |BE|^2 = |BF| \cdot |AF| \cdot |AB|^2 = 3 \times 3 \times 6^2, \text{ 即 } |AE| \cdot |BE| = 18;$$

$$\text{当直线 } AB \text{ 的斜率存在时, } |AB| = 6\left(1 + \frac{1}{k^2}\right),$$

$$|AF| \cdot |BF| = \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)\left(x_2 + \frac{3}{2}\right) = x_1 x_2 + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\left(3 + \frac{6}{k^2}\right) + \frac{9}{4} = 9\left(1 + \frac{1}{k^2}\right),$$

$$\text{所以 } |AE|^2 \cdot |BE|^2 = |BF| \cdot |AF| \cdot |AB|^2 = 9\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \times 36\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^2,$$

$$\text{则 } |AE| \cdot |BE| = 3\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times 6\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = 18\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}} > 18;$$

综上,  $|AE| \cdot |BE| \geq 18$ , 故 D 正确.

故选: ACD.

11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$ ，若 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$ ,  $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$ ，则（ ）

A.  $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$

B.  $AB = \sqrt{2}$

C.  $\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}}{2}$

D.  $AC^2 + BC^2 = 3$

【答案】ABC

【解析】

【分析】对 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$ 由二倍角公式先可推知A选项正确，然后分情况比较 $A+B$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 的大小，亦可使用正余弦定理讨论解决，结合正弦函数的单调性可推出 $C = \frac{\pi}{2}$ ，然后利用 $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$ 算出 $A, B$ 取值，最后利用三角形面积求出三边长，即可判断每个选项.

【详解】 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$ ，由二倍角公式， $1 - 2\sin^2 A + 1 - 2\sin^2 B + 2\sin C = 2$ ，

整理可得， $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$ ，A选项正确；

由诱导公式， $\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$ ，

展开可得 $\sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin^2 A + \sin^2 B$ ，

即 $\sin A(\sin A - \cos B) + \sin B(\sin B - \cos A) = 0$ ，

若 $A+B = \frac{\pi}{2}$ ，则 $\sin A = \cos B, \sin B = \cos A$ 可知等式成立；

若 $A+B < \frac{\pi}{2}$ ，即 $A < \frac{\pi}{2} - B$ ，由诱导公式和正弦函数的单调性可知， $\sin A < \cos B$ ，同理 $\sin B < \cos A$ ，

又 $\sin A > 0, \sin B > 0$ ，于是 $\sin A(\sin A - \cos B) + \sin B(\sin B - \cos A) < 0$ ，

与条件不符，则 $A+B < \frac{\pi}{2}$ 不成立；

若 $A+B > \frac{\pi}{2}$ ，类似可推导出 $\sin A(\sin A - \cos B) + \sin B(\sin B - \cos A) > 0$ ，则 $A+B > \frac{\pi}{2}$ 不成立.

综上所述可知， $A+B = \frac{\pi}{2}$ ，即 $C = \frac{\pi}{2}$ .

方法二： $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$ 时，由 $C \in (0, \pi)$ ，则 $\sin C \in (0, 1]$ ，

于是 $1 \times \sin C = \sin^2 A + \sin^2 B \geq \sin^2 C$ ，

由正弦定理， $a^2 + b^2 \geq c^2$ ，

由余弦定理可知， $\cos C \geq 0$ ，则 $C \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ，

若  $C \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 则  $A+B > \frac{\pi}{2}$ , 注意到  $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$ , 则  $\cos A \cos B > 0$ ,

于是  $\cos A > 0, \cos B > 0$  (两者同负会有两个钝角, 不成立), 于是  $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,

结合  $A+B > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A > \frac{\pi}{2} - B$ , 而  $A, \frac{\pi}{2} - B$  都是锐角, 则  $\sin A > \sin(\frac{\pi}{2} - B) = \cos B > 0$ ,

于是  $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B > \cos^2 B + \sin^2 B = 1$ , 这和  $\sin C \leq 1$  相矛盾,

故  $C \in (0, \frac{\pi}{2})$  不成立, 则  $C = \frac{\pi}{2}$

由  $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4} = \cos A \cos B$ , 由  $A+B = \frac{\pi}{2}$ , 则  $\cos B = \sin A$ , 即  $\sin A \cos A = \frac{1}{4}$ ,

则  $\sin 2A = \frac{1}{2}$ , 同理  $\sin 2B = \frac{1}{2}$ , 注意到  $A, B$  是锐角, 则  $2A, 2B \in (0, \pi)$ ,

不妨设  $A < B$ , 则  $2A = \frac{\pi}{6}, 2B = \frac{5\pi}{6}$ , 即  $A = \frac{\pi}{12}, B = \frac{5\pi}{12}$ ,

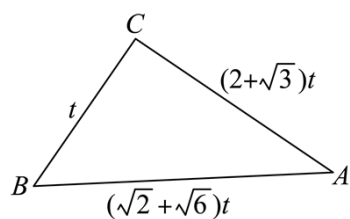
由两角和差的正弦公式可知  $\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , C 选项正确

由两角和的正切公式可得,  $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ ,

设  $BC = t, AC = (2 + \sqrt{3})t$ , 则  $AB = (\sqrt{2} + \sqrt{6})t$ ,

由  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})t^2 = \frac{1}{4}$ , 则  $t^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ , 则  $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ,

于是  $AB = (\sqrt{6} + \sqrt{2})t = \sqrt{2}$ , B 选项正确, 由勾股定理可知,  $AC^2 + BC^2 = 2$ , D 选项错误.



故选: ABC

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共计 15 分.

12. 若直线  $y = 2x + 5$  是曲线  $y = e^x + x + a$  的切线, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 4

【解析】

【分析】法一: 利用导数的几何性质与导数的四则运算求得切点, 进而代入曲线方程即可得解; 法二: 利用

导数的几何性质与导数的四则运算得到关于切点 $(x_0, y_0)$ 与 $a$ 的方程组，解之即可得解.

【详解】法一：对于 $y = e^x + x + a$ ，其导数为 $y' = e^x + 1$ ，

因为直线 $y = 2x + 5$ 是曲线的切线，直线的斜率为2，

令 $y' = e^x + 1 = 2$ ，即 $e^x = 1$ ，解得 $x = 0$ ，

将 $x = 0$ 代入切线方程 $y = 2x + 5$ ，可得 $y = 2 \times 0 + 5 = 5$ ，

所以切点坐标为 $(0, 5)$ ，

因为切点 $(0, 5)$ 在曲线 $y = e^x + x + a$ 上，

所以 $5 = e^0 + 0 + a$ ，即 $5 = 1 + a$ ，解得 $a = 4$ ．

故答案为：4．

法二：对于 $y = e^x + x + a$ ，其导数为 $y' = e^x + 1$ ，

假设 $y = 2x + 5$ 与 $y = e^x + x + a$ 的切点为 $(x_0, y_0)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} e^{x_0} + 1 = 2 \\ y_0 = 2x_0 + 5 \\ y_0 = e^{x_0} + x_0 + a \end{cases}, \text{解得 } a = 4.$$

故答案为：4．

13. 若一个等比数列的前4项和为4，前8项和为68，则该等比数列的公比为\_\_\_\_\_.

【答案】 $\pm 2$

【解析】

【分析】法一：利用等比数列的求和公式作商即可得解；法二：利用等比数列的通项公式与前 $n$ 项和的定义，得到关于 $q$ 的方程，解之即可得解；法三：利用等比数列的前 $n$ 项和性质得到关于 $q$ 的方程，解之即可得解.

【详解】法一：设该等比数列为 $\{a_n\}$ ， $S_n$ 是其前 $n$ 项和，则 $S_4 = 4, S_8 = 68$ ，

设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$ ，

当 $q = 1$ 时， $S_4 = 4a_1 = 4$ ，即 $a_1 = 1$ ，则 $S_8 = 8a_1 = 8 \neq 68$ ，显然不成立，舍去；

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时，则 } S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 4, S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 68,$$

$$\text{两式相除得 } \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{68}{4}, \text{ 即 } \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 17,$$

则  $1+q^4=17$ ，解得  $q=\pm 2$ ，

所以该等比数列公比为  $\pm 2$ 。

故答案为： $\pm 2$ 。

法二：设该等比数列为  $\{a_n\}$ ， $S_n$  是其前  $n$  项和，则  $S_4=4, S_8=68$ ，

设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ，

所以  $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=4$ ，

$$S_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$$

$$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_1q^4+a_2q^4+a_3q^4+a_4q^4$$

$$=(a_1+a_2+a_3+a_4)(1+q^4)=68，$$

所以  $4(1+q^4)=68$ ，则  $1+q^4=17$ ，解得  $q=\pm 2$ ，

所以该等比数列公比为  $\pm 2$ 。

故答案为： $\pm 2$ 。

法三：设该等比数列为  $\{a_n\}$ ， $S_n$  是其前  $n$  项和，则  $S_4=4, S_8=68$ ，

设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ，

$$\text{因为 } S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=(a_1+a_2+a_3+a_4)q^4=68-4=64，$$

$$\text{又 } S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=4，$$

$$\text{所以 } \frac{S_8-S_4}{S_4}=q^4=\frac{64}{4}=16，\text{ 解得 } q=\pm 2，$$

所以该等比数列公比为  $\pm 2$ 。

故答案为： $\pm 2$ 。

14. 一个箱子里有 5 个相同的球，分别以 1~5 标号，若有放回地取三次，记至少取出一次的球的个数  $X$ ，则数学期望  $E(X)=$ \_\_\_\_\_。

【答案】  $\frac{61}{25}$  ## 2.44

【解析】

【分析】法一：根据题意得到  $X$  的可能取值，再利用分步乘法原理与古典概型的概率公式求得  $X$  的分布列，从而求得  $E(X)$ ；法二，根据题意假设随机变量  $X_i$ ，利用对立事件与独立事件的概率公式求得  $E(X_i)$ ，进

而利用数学期望的性质求得  $E(X)$ .

【详解】法一：依题意， $X$  的可能取值为 1、2、3，

总的选取可能数为  $5^3 = 125$ ，

其中  $X = 1$ ：三次抽取同一球，选择球的编号有 5 种方式，

$$\text{故 } P(X = 1) = \frac{5}{125} = \frac{1}{25},$$

$X = 2$ ：恰好两种不同球被取出（即一球出现两次，另一球出现一次），

选取出现两次的球有 5 种方式，选取出现一次的球有 4 种方式，

其中选取出现一次球的位置有 3 种可能，故事件  $X = 2$  的可能情况有  $5 \times 4 \times 3 = 60$  种，

$$\text{故 } P(X = 2) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25},$$

$X = 3$ ：三种不同球被取出，

由排列数可知事件  $X = 3$  的可能情况有  $5 \times 4 \times 3 = 60$  种，

$$\text{故 } P(X = 3) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25},$$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3)$$

$$= 1 \times \frac{5}{125} + 2 \times \frac{12}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{61}{25}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{61}{25}.$$

法二：依题意，假设随机变量  $X_i$ ，其中  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ：

$$\text{其中 } X_i = \begin{cases} 1, & \text{这3次选取中,球}i\text{至少被取出一次} \\ 0, & \text{这3次选取中,球}i\text{一次都没被取出} \end{cases}, \text{ 则 } X = \sum_{i=1}^5 X_i,$$

由于球的对称性，易知所有  $E[X_i]$  相等，

$$\text{则由期望的线性性质，得 } E[X] = E\left[\sum_{i=1}^5 X_i\right] = \sum_{i=1}^5 E[X_i] = 5E[X_i],$$

由题意可知，球  $i$  在单次抽取中未被取出的概率为  $\frac{4}{5}$ ，

$$\text{由于抽取独立，三次均未取出球}i\text{的概率为 } P(X_i = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125},$$

$$\text{因此球}i\text{至少被取出一次的概率为: } P(X_i = 1) = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125},$$

$$\text{故 } E[X_i] = \frac{61}{125},$$



所以  $E[X] = 5E[X_i] = 5 \times \frac{61}{125} = \frac{61}{25}$ .

故答案为：  $\frac{61}{25}$ .

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. 为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下列联表：

组别 \ 超声波检查结果	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

- (1) 记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为  $P$ ，求  $P$  的估计值；
- (2) 根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附  $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$  ,

$P(x^2 \dots k)$	0.005	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

**【答案】** (1)  $\frac{9}{10}$

(2) 有关

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据古典概型的概率公式即可求出；

(2) 根据独立性检验的基本思想, 求出  $\chi^2$ , 然后与小概率值  $\alpha = 0.001$  对应的临界值 10.828 比较, 即可判断.

**【小问 1 详解】**

根据表格可知，检查结果不正常的 200 人中有 180 人患病，所以  $p$  的估计值为  $\frac{180}{200} = \frac{9}{10}$ ；

【小问 2 详解】

零假设为  $H_0$ ：超声波检查结果与患病无关，

根据表中数据可得， $\chi^2 = \frac{1000 \times (20 \times 20 - 780 \times 180)^2}{800 \times 200 \times 800 \times 200} = 765.625 > 10.828 = \chi_{0.001}^2$ ，

根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的  $\chi^2$  独立性检验，我们推断  $H_0$  不成立，即认为超声波检查结果与患该病有关，该推断犯错误的概率不超过 0.001.

16. 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ， $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

(1) 证明： $\{na_n\}$  为等差数列；

(2) 设  $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ ，求  $f'(-2)$ 。

【答案】(1) 证明见解析；

$$(2) f'(-2) = \frac{7}{9} - \frac{(3m+7)(-2)^m}{9}$$

【解析】

【分析】(1) 根据题目所给条件  $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$  化简，即可证明结论；

(2) 先求出  $\{a_n\}$  的通项公式，代入函数并求导，函数两边同乘以  $x$ ，作差并利用等比数列前  $n$  项和得出导函数表达式，即可得出结论。

【小问 1 详解】

由题意证明如下， $n \in \mathbb{N}^*$ ，

在数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 3$ ， $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ ，

$$\therefore (n+1)a_{n+1} = na_n + 1, \text{ 即 } (n+1)a_{n+1} - na_n = 1,$$

$\therefore \{na_n\}$  是以  $a_1 = 3$  为首项，1 为公差的等差数列。

【小问 2 详解】

由题意及 (1) 得， $n \in \mathbb{N}^*$ ，

在数列  $\{na_n\}$  中, 首项为 3, 公差为 1,

$$\therefore na_n = 3 + 1 \times (n-1), \text{ 即 } a_n = 1 + \frac{2}{n},$$

在  $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$  中,

$$f(x) = 3x + 2x^2 + \cdots + \left(1 + \frac{2}{m}\right)x^m, \quad f'(x) = 3 + 4x + \cdots + (m+2)x^{m-1}$$

$$\therefore \begin{cases} f'(x) = 3 + 4x + \cdots + (m+2)x^{m-1} \\ xf'(x) = 3x + 4x^2 + \cdots + (m+2)x^m \end{cases},$$

当  $x \neq 1$  且  $x \neq 0$  时,

$$\therefore (1-x)f'(x) = 3 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1} - (m+2)x^m = 3 + \frac{x(1-x)^{m-1}}{1-x} - (m+2)x^m,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{3}{1-x} + \frac{x(1-x^{m-1})}{(1-x)^2} - \frac{(m+2)x^m}{1-x}$$

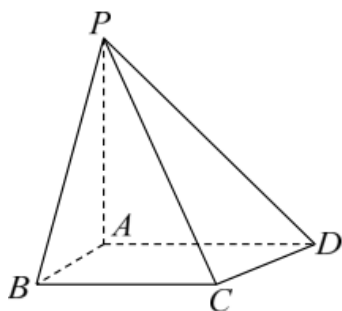
$$\therefore f'(-2) = \frac{3}{1-(-2)} + \frac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{[1-(-2)]^2} - \frac{(m+2)(-2)^m}{1-(-2)}$$

$$= 1 + \frac{(-2)[1-(-2)^{m-1}]}{9} - \frac{(m+2)(-2)^m}{3}$$

$$= 1 - \frac{2}{9} - \frac{(-2)^m}{9} - \frac{(m+2)(-2)^m}{3}$$

$$= \frac{7}{9} - \frac{(3m+7)(-2)^m}{9}.$$

17. 如图所示的四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BC \parallel AD, AB \perp AD$ .



(1) 证明: 平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ ;

(2)  $PA = AB = \sqrt{2}, AD = 1 + \sqrt{3}, BC = 2$ ,  $P, B, C, D$  在同一个球面上, 设该球面的球心为  $O$ .

- (i) 证明:  $O$  在平面  $ABCD$  上;  
(ii) 求直线  $AC$  与直线  $PO$  所成角的余弦值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) (i) 证明见解析;

(ii)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

【解析】

【分析】(1) 通过证明  $AP \perp AB$ ,  $AP \perp AD$ , 得出  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 即可证明面面垂直;

(2) (i) 法一: 建立空间直角坐标系并表达出各点的坐标, 假设  $P, B, C, D$  在同一球面  $O$  上, 在平面  $xAy$  中, 得出点  $O$  坐标, 进而得出点  $O$  在空间中的坐标, 计算出  $|OP| = |OB| = |OC| = |OD|$ , 即可证明结论;

法二: 作出  $\triangle BCD$  的边  $BC$  和  $CD$  的垂直平分线, 找到三角形的外心  $O_1$ , 求出  $PO_1$ , 求出出外心  $O_1$  到  $P, B, C, D$  的距离相等, 得出外心  $O_1$  即为  $P, B, C, D$  所在球的球心, 即可证明结论;

(ii) 法一: 写出直线  $AC$  和  $PO$  的方向向量, 即可求出余弦值.

法二: 求出  $AC$  的长, 过点  $O$  作  $AC$  的平行线, 交  $BC$  的延长线为  $C_1$ , 连接  $AC_1, PC_1$ , 利用勾股定理求出  $AC_1$  的长, 进而得出  $PC_1$  的长, 在  $\triangle POC_1$  中由余弦定理求出  $\cos \angle POC_1$ , 即可求出直线  $AC$  与直线  $PO$  所成角的余弦值.

【小问 1 详解】

由题意证明如下,

在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \perp AD$ ,

$AB \subset$  平面  $ABCD$ ,  $AD \subset$  平面  $ABCD$ ,

$\therefore AP \perp AB$ ,  $AP \perp AD$ ,

$\therefore AP \subset$  平面  $PAD$ ,  $AD \subset$  平面  $PAD$ ,  $AP \cap AD = A$ ,

$\therefore AB \perp$  平面  $PAD$ ,

$\therefore AB \subset$  平面  $PAB$ ,

$\therefore$  平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ .

【小问 2 详解】

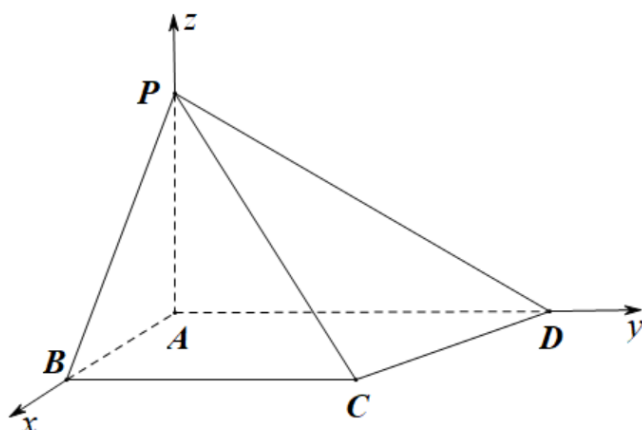
(i) 由题意及 (1) 证明如下,

法一:

在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AP \perp AB$ ,  $AP \perp AD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $BC \parallel AD$ ,

$$PA = AB = \sqrt{2}, \quad AD = 1 + \sqrt{3},$$

建立空间直角坐标系如下图所示，

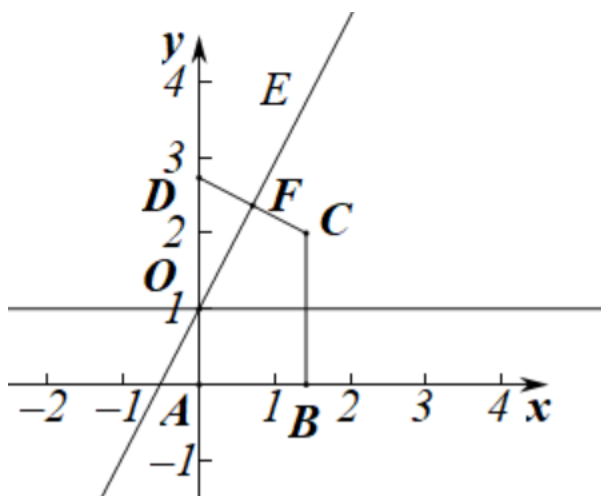


$$\therefore A(0,0,0), B(\sqrt{2},0,0), C(\sqrt{2},2,0), D(0,1+\sqrt{3},0), P(0,0,\sqrt{2}),$$

若  $P, B, C, D$  在同一个球面上，

$$\text{则 } |OP| = |OB| = |OC| = |OD|,$$

在平面  $xAy$  中，



$$\therefore A(0,0), B(\sqrt{2},0), C(\sqrt{2},2), D(0,1+\sqrt{3}),$$

$$\therefore \text{线段 } CD \text{ 中点坐标 } F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right),$$

$$\text{直线 } CD \text{ 的斜率: } k_1 = \frac{1+\sqrt{3}-2}{0-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{直线 } CD \text{ 的垂直平分线 } EF \text{ 斜率: } k_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的方程: } y - \frac{\sqrt{3}+3}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\text{即 } y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}+3}{2},$$

$$\text{当 } y=1 \text{ 时, } 1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \left( x_o - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}+3}{2}, \text{ 解得: } x_o = 0,$$

$$\therefore O(0,1)$$

在立体几何中,  $O(0,1,0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} |OP| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (0 - \sqrt{2})^2} \\ |OB| = \sqrt{(0 - \sqrt{2})^2 + 1^2 + 0^2} \\ |OC| = \sqrt{(0 - \sqrt{2})^2 + (1 - 2)^2 + 0^2} \\ |OD| = \sqrt{0^2 + (1 - 1 - \sqrt{3})^2 + 0^2} \end{cases}$$

$$\text{解得: } |OP| = |OB| = |OC| = |OD| = \sqrt{3},$$

$\therefore$  点  $O$  在平面  $ABCD$  上.

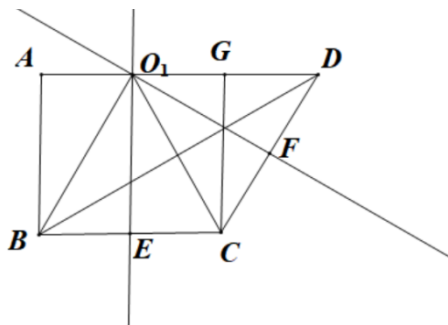
法二:

$\because P, B, C, D$  在同一个球面上,

$\therefore$  球心到四个点的距离相等

在  $\triangle BCD$  中, 到三角形三点距离相等的点是该三角形的外心,

作出  $BC$  和  $CD$  的垂直平分线, 如下图所示,



由几何知识得,

$$O_1E = AB = \sqrt{2}, \quad BE = CE = AO_1 = GO_1 = \frac{1}{2}BC = 1, \quad O_1D = AD - AO_1 = \sqrt{3}$$

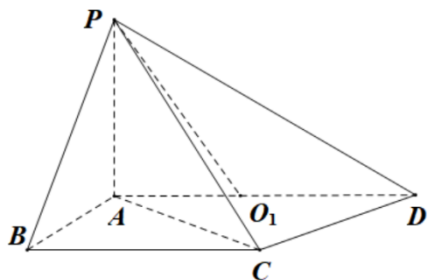
$$BO_1 = CO_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore O_1D = BO_1 = CO_1,$$

$\therefore$  点  $O_1$  是  $\triangle BCD$  的外心,

在  $\text{Rt}\triangle AOP$  中,  $AP \perp AD$ ,  $AP = \sqrt{2}$ ,

由勾股定理得,



$$PO_1 = \sqrt{AP^2 + AO_1^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

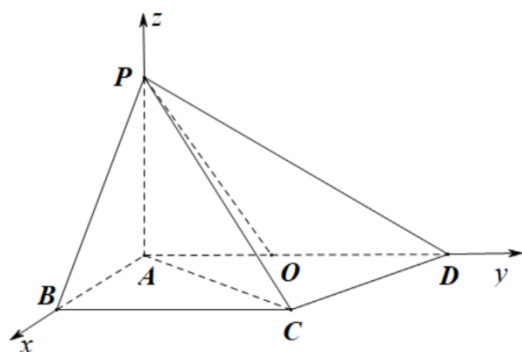
$$\therefore PO_1 = BO_1 = CO_1 = O_1D = \sqrt{3},$$

$\therefore$  点  $O_1$  即为点  $P$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  所在球的球心  $O$ ,

此时点  $O$  在线段  $AD$  上,  $AD \subset \text{平面 } ABCD$ ,

$\therefore$  点  $O$  在平面  $ABCD$  上.

(ii) 由题意, (1) (2) (ii) 及图得,



$$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{2}, 2, 0), \overrightarrow{PO} = (0, 1, -\sqrt{2}),$$

设直线  $AC$  与直线  $PO$  所成角为  $\theta$ ,

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PO}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{PO}|} = \frac{|0+2 \times 1+0|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2+0} \times \sqrt{0+1^2+(-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

法 2:

由几何知识得,  $PO = \sqrt{3}$ ,

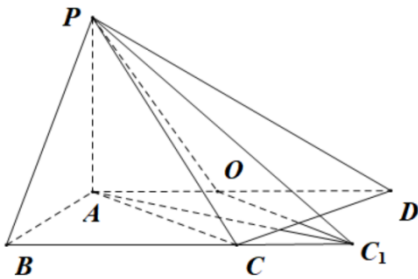
$AB \perp AD$ ,  $BC \parallel AD$ ,

$\therefore AB \perp BC$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $BC = 2$ , 由勾股定理得,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6},$$

过点  $O$  作  $AC$  的平行线, 交  $BC$  的延长线为  $C_1$ , 连接  $AC_1$ ,  $PC_1$ ,



则  $OC_1 = AC = \sqrt{6}$ , 直线  $AC$  与直线  $PO$  所成角即为  $\triangle POC_1$  中  $\angle POC_1$  或其补角.

$\because PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AC_1 \subset$  平面  $ABCD$ ,  $PA \cap AC_1 = A$ ,

$\therefore PA \perp AC_1$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABC_1$  中,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $BC_1 = BC + CC_1 = 2 + 1 = 3$ , 由勾股定理得,

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{11},$$

在  $\text{Rt}\triangle APC_1$  中,  $PA = \sqrt{2}$ , 由勾股定理得,

$$PC_1 = \sqrt{PA^2 + AC_1^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{11})^2} = \sqrt{13},$$

在  $\triangle POC_1$  中, 由余弦定理得,

$$PC_1^2 = PO^2 + OC_1^2 - 2PO \cdot OC_1 \cos \angle POC_1,$$

$$\text{即: } (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{6} \cos \angle POC_1$$



解得：  $\cos \angle POC_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$  直线  $AC$  与直线  $PO$  所成角的余弦值为：  $|\cos \angle POC_1| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

18. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 下顶点为  $A$ , 右顶点为  $B$ ,  $|AB| = \sqrt{10}$ .

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 已知动点  $P$  不在  $y$  轴上, 点  $R$  在射线  $AP$  上, 且满足  $|AR| \cdot |AP| = 3$ .

(i) 设  $P(m, n)$ , 求点  $R$  的坐标 (用  $m, n$  表示);

(ii) 设  $O$  为坐标原点,  $M$  是椭圆上的动点, 直线  $OR$  的斜率为直线  $OP$  的斜率的 3 倍, 求  $|PM|$  的最大值.

【答案】(1)  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

(2) (i)  $\left( \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{n+2-m^2-n^2}{m^2 + (n+1)^2} \right)$  (ii)  $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

【解析】

【分析】(1) 根据题意列出  $a, b, c$  的关系式, 解方程求出  $a, b, c$ , 即可得到椭圆的标准方程;

(2) (i) 设  $R(x_0, y_0)$ , 根据斜率相等以及题目条件列式, 化简即可求出或者利用数乘向量求出;

(ii) 根据斜率关系可得到点  $P$  的轨迹为圆 (除去两点), 再根据点与圆的最值求法结合三角换元或者直接运算即可解出.

【小问 1 详解】

由题可知,  $A(0, -b), B(a, 0)$ , 所以 
$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = 9, b^2 = 1, c^2 = 8,$$

故椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ;

【小问 2 详解】

(i) 设  $R(x_0, y_0)$ , 易知  $m \neq 0$ ,

法一：所以  $k_{AP} = \frac{n+1}{m}$ ，故  $\frac{y_0+1}{x_0} = \frac{n+1}{m}$ ，且  $mx_0 > 0$ 。

因为  $A(0, -1)$ ， $|AR||AP| = 3$ ，所以  $\sqrt{x_0^2 + (y_0+1)^2} \times \sqrt{m^2 + (n+1)^2} = 3$ ，

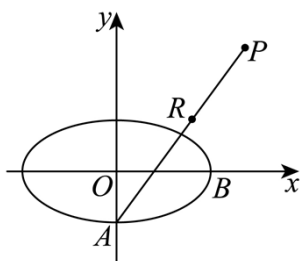
即  $\left[1 + \left(\frac{n+1}{m}\right)^2\right] x_0 m = 3$ ，解得  $x_0 = \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}$ ，所以  $y_0 = \frac{n+2-m^2-n^2}{m^2 + (n+1)^2}$ ，

所以点  $R$  的坐标为  $\left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{n+2-m^2-n^2}{m^2 + (n+1)^2}\right)$ 。

法二：设  $\overrightarrow{AR} = \lambda \overrightarrow{AP}$ ， $\lambda > 0$ ，则  $|AR||AP| = 3 \Rightarrow \lambda [m^2 + (n+1)^2] = 3$ ，所以

$\lambda = \frac{3}{m^2 + (n+1)^2}$ ， $\overrightarrow{AR} = \lambda \overrightarrow{AP} = \lambda(m, n+1) = \left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2}\right)$ ，故

点  $R$  的坐标为  $\left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{n+2-m^2-n^2}{m^2 + (n+1)^2}\right)$ 。



(ii) 因为  $k_{OR} = \frac{\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2 + (n+1)^2}}{\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}} = \frac{n+2-m^2-n^2}{3m}$ ， $k_{OP} = \frac{n}{m}$ ，由  $k_{OR} = 3k_{OP}$ ，可得

$\frac{3n}{m} = \frac{n+2-m^2-n^2}{3m}$ ，化简得  $m^2 + n^2 + 8n - 2 = 0$ ，即  $m^2 + (n+4)^2 = 18 (m \neq 0)$ ，

所以点  $P$  在以  $N(0, -4)$  为圆心， $3\sqrt{2}$  为半径的圆上（除去两个点），

$|PM|_{\max}$  为  $M$  到圆心  $N$  的距离加上半径，

法一：设  $M(3\cos\theta, \sin\theta)$ ，所以

$|MN|^2 = (3\cos\theta)^2 + (\sin\theta + 4)^2 = 9\cos^2\theta + \sin^2\theta + 8\sin\theta + 16$

$= 8\cos^2\theta + 1 + 8\sin\theta + 16$

$$= 8(1 - \sin^2 \theta) + 8 \sin \theta + 17$$

$$= -8 \sin^2 \theta + 8 \sin \theta + 25$$

$$= -8 \left( \sin \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + 27 \leq 27, \text{ 当且仅当 } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

$$\text{所以 } |PM|_{\max} = \sqrt{27} + 3\sqrt{2} = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

$$\text{法二: 设 } M(x_M, y_M), \text{ 则 } \frac{x_M^2}{9} + y_M^2 = 1,$$

$$|MN|^2 = x_M^2 + (y_M + 4)^2 = 9 - 9y_M^2 + y_M^2 + 8y_M + 16 = -8y_M^2 + 8y_M + 25$$

$$= -8 \left( y_M - \frac{1}{2} \right)^2 + 27 \leq 27, \text{ 当且仅当 } y_M = \frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

$$\text{故 } |PM|_{\max} = \sqrt{27} + 3\sqrt{2} = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

19. 设函数  $f(x) = 5 \cos x - \cos 5x$ .

(1) 求  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  的最大值;

(2) 给定  $\theta \in (0, \pi)$ , 设  $a$  为实数, 证明: 存在  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ , 使得  $\cos y \leq \cos \theta$ ;

(3) 若存在  $\varphi$  使得对任意  $x$ , 都有  $5 \cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$ , 求  $b$  的最小值.

**【答案】** (1)  $3\sqrt{3}$

(2) 证明见解析 (3)  $3\sqrt{3}$

**【解析】**

**【分析】** (1) 利用导数结合三角变换得导数零点, 讨论导数的符号后得单调性, 从而可求最大值; 或者利用均值不等式可求最大值.

(2) 利用反证法可证三角不等式有解;

(3) 先考虑  $t = 0, \pi$  时  $b$  的范围, 对于  $t \in (0, \pi)$  时, 可利用 (2) 中的结论结合特值法求得  $b \geq 3\sqrt{3}$ , 从而可得  $b$  的最小值; 或者先根据函数解析特征得  $b \geq 0$ , 再结合特值法可得  $b \geq 3\sqrt{3}$ , 结合 (1) 的结果可得  $b$  的最小值.

**【小问 1 详解】**

法 1:  $f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x = 10\cos 3x \sin 2x$ ,

因为  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ , 故  $2x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 故  $\sin 2x > 0$ ,

当  $0 < x < \frac{\pi}{6}$  时,  $\cos 3x > 0$  即  $f'(x) > 0$ ,

当  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$  时,  $\cos 3x < 0$  即  $f'(x) < 0$ ,

故  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  上为增函数, 在  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$  为减函数,

故  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  上的最大值为  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} = 3\sqrt{3}$ .

法 2: 我们有  $\cos 5x = \cos(x+4x) = \cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x$

$$= \cos x(2\cos^2 2x - 1) - \sin x \cdot 2\sin 2x \cos 2x$$

$$= \cos x(2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1) - \sin x \cdot 2 \cdot 2\sin x \cos x \cos 2x$$

$$= \cos x(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) - 4\cos x \cos 2x \sin^2 x$$

$$= 8\cos^5 x - 8\cos^3 x + \cos x - 4\cos x(2\cos^2 x - 1)(1 - \cos^2 x)$$

$$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.$$

所以:

$$f(x) = 5\cos x - \cos 5x = 5\cos x - (16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x) = 20\cos^3 x - 16\cos^5 x$$

$$= 4\cos^3 x(5 - 4\cos^2 x) \leq 4|\cos x|^3(5 - 4|\cos x|^2) = 4|\cos x|^3(\sqrt{5} - 2|\cos x|)(\sqrt{5} + 2|\cos x|)$$

$$= \frac{32}{3} \left( |\cos x| \cdot |\cos x| \cdot |\cos x| \cdot \frac{\sqrt{15}+3}{4}(\sqrt{5} - 2|\cos x|) \cdot \frac{\sqrt{15}-3}{4}(\sqrt{5} + 2|\cos x|) \right)$$

$$\leq \frac{32}{3} \left( \frac{1}{5} \left( |\cos x| + |\cos x| + |\cos x| + \frac{\sqrt{15}+3}{4}(\sqrt{5} - 2|\cos x|) + \frac{\sqrt{15}-3}{4}(\sqrt{5} + 2|\cos x|) \right) \right)^5$$

$$= \frac{32}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = 3\sqrt{3}.$$

这得到  $f(x) \leq 3\sqrt{3}$ , 同时又有  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} = 3\sqrt{3}$ ,

故  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  上的最大值为  $3\sqrt{3}$ ，在  $\mathbf{R}$  上的最大值也是  $3\sqrt{3}$ 。

【小问 2 详解】

法 1：由余弦函数的性质得  $\cos x \leq \cos \theta$  的解为  $[2k\pi + \theta, 2k\pi + 2\pi - \theta]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

若任意  $[2k\pi + \theta, 2k\pi + 2\pi - \theta]$ ， $k \in \mathbf{Z}$  与  $[a - \theta, a + \theta]$  交集为空，

则  $a - \theta > 2k\pi + 2\pi - \theta$  且  $a + \theta < 2k\pi + 2\pi + \theta$ ，此时  $a$  无解，

矛盾，故无解；故存在  $k \in \mathbf{Z}$ ，使得  $[2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta] \cap (a - \theta, a + \theta) \neq \emptyset$ ，

法 2：由余弦函数的性质知  $\cos y \leq \cos \theta$  的解为  $[2k\pi + \theta, 2(k+1)\pi - \theta]$  ( $k \in \mathbf{Z}$ )，

若每个  $[2k\pi + \theta, 2(k+1)\pi - \theta]$  与  $[a - \theta, a + \theta]$  交集都为空，

则对每个  $k \in \mathbf{Z}$ ，必有  $2(k+1)\pi - \theta < a - \theta$  或  $2k\pi + \theta > a + \theta$  之一成立。

此即  $k < \frac{a}{2\pi} - 1$  或  $k > \frac{a}{2\pi}$ ，但长度为 1 的闭区间  $\left[\frac{a}{2\pi} - 1, \frac{a}{2\pi}\right]$  上必有一整数  $k$ ，该整数  $k$  不满足条件，矛盾。

故存在  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ ，使得  $\cos y \leq \cos \theta$  成立。

【小问 3 详解】

法 1：记  $h(x) = 5\cos x - \cos(5x + t)$ ，

因为  $h(x + 2\pi) = 5\cos(x + 2\pi) - \cos(5x + 10\pi + t) = h(x)$ ，

故  $h(x)$  为周期函数且周期为  $2\pi$ ，故只需讨论  $x \in [0, 2\pi]$ ， $t \in [0, \pi]$  的情况。

当  $t = \pi$  时， $h(x) = 5\cos x - \cos(5x + \pi) = 6\cos x \leq 6$ ，

当  $t = 0$  时， $h(x) = 5\cos x - \cos 5x$ ，

此时  $h'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x = 10\cos 3x \sin 2x$ ， $x \in (0, 2\pi)$ ，

令  $h'(x) = 0$ ，则  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ ，

而  $h(\frac{\pi}{6}) = h(\frac{11\pi}{6}) = 3\sqrt{3}$ ， $h(\frac{\pi}{2}) = h(\frac{3\pi}{2}) = 0$ ， $h(\frac{5\pi}{6}) = h(\frac{7\pi}{6}) = -3\sqrt{3}$ ， $h(\pi) = -4$ ，

$h(0) = h(2\pi) = 4$ ，故  $h(x)_{\max} = h(\frac{\pi}{6}) = h(\frac{11\pi}{6}) = 3\sqrt{3}$ ，

当  $t \in (0, \pi)$ ，在 (2) 中取  $a = t$ ，则存在  $y \in (t - \theta, t + \theta)$ ，使得  $\cos y \leq \cos \theta$ ，

取  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ , 则  $\cos y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 取  $x = \frac{y-t}{5} \in \left(-\frac{\theta}{5}, \frac{\theta}{5}\right)$  即  $x = \frac{y-t}{5} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ ,

故  $5\cos x \geq \frac{5\sqrt{3}}{2}$ , 故  $5\cos x - \cos(5x+t) \geq 3\sqrt{3}$ ,

综上  $b \geq 3\sqrt{3}$ , 可取  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $t = 0$  使得等号成立.

综上,  $b_{\min} = 3\sqrt{3}$ .

法 2: 设  $g_t(x) = 5\cos x - \cos(5x+t)$ .

①一方面, 若存在  $t$ , 使得  $g_t(x) = 5\cos x - \cos(5x+t) \leq b$  对任意  $x$  恒成立, 则对这样的  $t$ , 同样有

$$g_t(x) = -g_t(x+\pi) \geq -b.$$

所以  $|g_t(x)| \leq b$  对任意  $x$  恒成立, 这直接得到  $b \geq 0$ .

设  $\frac{t}{6} - \frac{\pi}{6} = m$ , 则根据  $|g_t(x)| \leq b$  恒成立, 有

$$b \geq \left|g_t\left(-\frac{t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|5\cos\left(-\frac{t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{t}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)\right| = \left|5\cos\left(\frac{t}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{t}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|6\cos\left(\frac{t}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right| = 6|\cos m|$$

$$b \geq \left|g_t\left(-\frac{t}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|5\cos\left(-\frac{t}{6} - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{t}{6} - \frac{5\pi}{6}\right)\right| = \left|5\cos\left(\frac{t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|6\cos\left(\frac{t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 6\left|\cos\left(m + \frac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$b \geq \left|g_t\left(-\frac{t}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|5\cos\left(-\frac{t}{6} + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{6} + \frac{5\pi}{2}\right)\right| = \left|5\cos\left(\frac{t}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|6\cos\left(\frac{t}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\right| = 6\left|\cos\left(m - \frac{\pi}{3}\right)\right|$$

所以  $|\cos m|, \left|\cos\left(m + \frac{\pi}{3}\right)\right|, \left|\cos\left(m - \frac{\pi}{3}\right)\right|$  均不超过  $\frac{b}{6}$ ,

再结合  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ,

就得到  $\cos 2m, \cos\left(2m + \frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(2m - \frac{2\pi}{3}\right)$  均不超过  $2\left(\frac{b}{6}\right)^2 - 1 = \frac{b^2}{18} - 1$ .

假设  $b < 3\sqrt{3}$ , 则  $\frac{b^2}{18} - 1 < \frac{(3\sqrt{3})^2}{18} - 1 = \frac{1}{2}$ ,

故  $\cos 2m, \cos\left(2m + \frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(2m - \frac{2\pi}{3}\right) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right)$ .

但这是不可能的, 因为三个角  $2m, 2m + \frac{2\pi}{3}, 2m - \frac{2\pi}{3}$  和单位圆的交点将单位圆三等分, 这三个点不可能都

在直线  $x = \frac{1}{2}$  左侧.

所以假设不成立，这意味着  $b \geq 3\sqrt{3}$  .

②另一方面，若  $b = 3\sqrt{3}$ ，则由 (1) 中已经证明  $f(x) \leq 3\sqrt{3}$ ，

知存在  $t = 0$ ，使得

$$5 \cos x - \cos(5x + t) = 5 \cos x - \cos 5x = f(x) \leq 3\sqrt{3} = b .$$

从而  $b = 3\sqrt{3}$  满足题目要求.

综合上述两个方面，可知  $b$  的最小值是  $3\sqrt{3}$  .