2024年上海市高考数学试卷（网络回忆版）

2024.06

一、填空题（本大题共有12题，满分54分.其中第1-6题每题4分，第7-12题每题满分5分)考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果.

1. 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合$A=\{2,4\}$，则$\overline{A}=$______.

2. 已知$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},x>0\\1,x\le 0\end{cases}$，则$f(3)=$______.

3. 已知$x\in\mathbf{R}$，则不等式$x^2-2x-3<0$的解集为______.

4. 已知$f(x)=x^3+a$，$x\in\mathbf{R}$，且$f(x)$是奇函数，则$a=$______.

5. 已知$k\in\mathbf{R},\vec{a}=(2,5),\vec{b}=(6,k)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，则$k$的值为______.

6. 在$(x+1)^n$的二项展开式中，若各项系数和为32，则x^2项的系数为______.

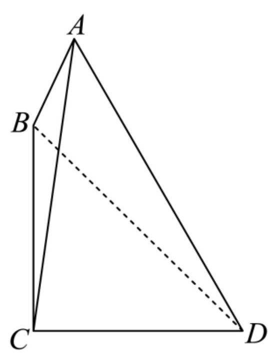
7. 已知抛物线$y^2=4x$上有一点P到准线的距离为9，那么点P到x轴的距离为______.

8. 某校举办科学竞技比赛，有A、B、C 3种题库，A题库有5000道题，B题库有4000道题，C题库有3000道题．小申已完成所有题，他A题库的正确率是0.92，B题库的正确率是0.86，C题库的正确率是0.72．现他从所有的题中随机选一题，正确率是______.

9. 已知虚数z，其实部为1，且$z+\frac{2}{z}=m(m\in\mathbf{R})$，则实数$m$为______.

10. 设集合A中的元素皆为无重复数字的三位正整数，且元素中任意两者之积皆为偶数，求集合中元素个数的最大值______.

11. 已知点B在点C正北方向，点D在点C的正东方向，$BC=CD$,存在点A满足$\angle BAC=16.5°,\angle DAC=37°$，则$\angle BCA=$______(精确到0.1度)



12. 无穷等比数列$\{a_n\}$满足首项$a_1>0,q>1$，记$I_n=\{x-y|x,y\in[a_1,a_2]\cup[a_n,a_{n+1}]\}$，若对任意正整数$n$集合$I_n$是闭区间，则$q$的取值范围是______.

二、选择题（本大题共有4题，满分18分，其中第13-14题每题满分4分，第15-16题每题满分5分)每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得满分，否则一律得零分.

13. 已知气候温度和海水表层温度相关，且相关系数为正数，对此描述正确的是（　　）

A. 气候温度高，海水表层温度就高

B. 气候温度高，海水表层温度就低

C. 随着气候温度由低到高，海水表层温度呈上升趋势

D. 随着气候温度由低到高，海水表层温度呈下降趋势

14. 下列函数$f(x)$的最小正周期是2π的是（　　）

A. $\sin x+\cos x$　　B. $\sin x\cos x$

C. $\sin^2 x+\cos^2 x$　　D. $\sin^2 x-\cos^2 x$

15. 定义一个集合Ω，集合中的元素是空间内的点集，任取$P_1,P_2,P_3\in\Omega$，存在不全为0的实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得$\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\lambda_2\overrightarrow{OP_2}+\lambda_3\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$．已知$(1,0,0)\in\Omega$，则$(0,0,1)\notin\Omega$的充分条件是（　　）

A. $(0,0,0)\in\Omega$　　B. $(-1,0,0)\in\Omega$

C. $(0,1,0)\in\Omega$　　D. $(0,0,-1)\in\Omega$

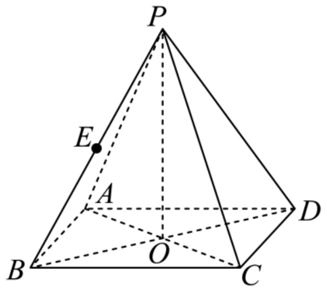
16. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，定义集合$M=\{x_0|x_0\in\mathbf{R},x\in(-\infty,x_0),f(x)<f(x_0)\}$，在使得$M=[-1,1]$的所有$f(x)$中，下列成立的是（　　）

A. 存在$f(x)$是偶函数　　B. 存在$f(x)$在$x=2$处取最大值

C. 存在$f(x)$是严格增函数　　D. 存在$f(x)$在$x=-1$处取到极小值

三、解答题（本大题共有5题，满分78分）解下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤

17. 如图为正四棱锥$P-ABCD,O$为底面$ABCD$的中心.



（1）若 $AP=5, AD=3\sqrt{2}$，求$\triangle POA$绕PO旋转一周形成的几何体的体积；

（2）若 $AP=AD, E$ 为 PB 的中点，求直线 BD 与平面 AEC 所成角的大小.

18. 若 $f\left(x\right)=\log_a x(a>0, a\neq 1)$.

（1）$y=f\left(x\right)$过$\left(4,2\right)$，求 $f\left(2x-2\right)<f\left(x\right)$ 的解集；

（2）存在x使得 $f\left(x+1\right)$、$f\left(ax\right)$、$f\left(x+2\right)$成等差数列，求a的取值范围.

19. 为了解某地初中学生体育锻炼时长与学业成绩的关系，从该地区 29000 名学生中抽取 580 人，得到日均体育锻炼时长与学业成绩的数据如下表所示：

时间范围 / 学业成绩	$\left[0,0.5\right)$	$\left[0.5,1\right)$	$\left[1,1.5\right)$	$\left[1.5,2\right)$	$\left[2,2.5\right)$
优秀	5	44	42	3	1
不优秀	134	147	137	40	27

（1）该地区 29000 名学生中体育锻炼时长不少于 1 小时人数约为多少？

（2）估计该地区初中学生日均体育锻炼的时长（精确到 0. 1）

（3）是否有95%的把握认为学业成绩优秀与日均体育锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 小时有关？

（附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$,其中$n=a+b+c+d$，$P\left(\chi^2\geq 3.841\right)\approx 0.05$.）

20. 已知双曲线$\Gamma: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1,(b>0)$,左右顶点分别为$A_1, A_2$，过点$M\left(-2,0\right)$的直线$l$交双曲线$\Gamma$于$P,Q$两点.

（1）若离心率$e=2$时，求b的值.

（2）若$b=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,$\triangle MA_2P$为等腰三角形时，且点P在第一象限，求点P的坐标.

（3）连接OQ并延长，交双曲线Γ于点R，若$\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=1$，求$b$的取值范围.

21. 对于一个函数$f\left(x\right)$和一个点$M\left(a,b\right)$，令$s\left(x\right)=(x-a)^2+(f\left(x\right)-b)^2$，若$P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$是$s\left(x\right)$取到最小值的点，则称$P$是$M$在$f\left(x\right)$的“最近点”.

（1）对于$f(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$，求证：对于点$M\left(0,0\right)$，存在点P，使得点P是M在$f\left(x\right)$的“最近点”；

（2）对于$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x,M\left(1,0\right)$，请判断是否存在一个点$P$，它是$M$在$f\left(x\right)$的“最近点”，且直线$MP$与$y=f(x)$在点$P$处的切线垂直；

（3）已知$y=f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上存在导函数$f'(x)$，且函数 $g(x)$ 在定义域$\mathbf{R}$上恒正，设点$M_1\left(t-1,f\left(t\right)-g\left(t\right)\right)$，$M_2\left(t+1,f\left(t\right)+g\left(t\right)\right)$. 若对任意的$t\in\mathbf{R}$，存在点$P$同时是$M_1,M_2$在$f\left(x\right)$的“最近点”，试判断$f\left(x\right)$的单调性.