

# 2009 年江西高考理科数学试题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页，共 150 分。

## 第 I 卷

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上，考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第 II 卷用黑色墨水签字笔在答题卡上作答。若在试题卷上作答，答案无效。
3. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回。

参考公式

如果事件  $A, B$  互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件  $A, B$ ，相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率是  $p$ ，那么

$n$  次独立重复试验中恰好发生  $k$  次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中  $R$  表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中  $R$  表示球的半径

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数  $z = (x^2 - 1) + (x - 1)i$  为纯虚数，则实数  $x$  的值为

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. -1 或 1

2. 函数  $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2 - 3x + 4}}$  的定义域为

- A.  $(-4, -1)$       B.  $(-4, 1)$       C.  $(-1, 1)$       D.  $(-1, 1]$

3. 已知全集  $U = A \cup B$  中有  $m$  个元素,  $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$  中有  $n$  个元素. 若  $A \cap B$  非空, 则  $A \cap B$  的元素个数为

- A.  $mn$       B.  $m+n$       C.  $n-m$       D.  $m-n$

4. 若函数  $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos x$ ,  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , 则  $f(x)$  的最大值为

- A. 1      B. 2      C.  $\sqrt{3} + 1$       D.  $\sqrt{3} + 2$

5. 设函数  $f(x) = g(x) + x^2$ , 曲线  $y = g(x)$  在点  $(1, g(1))$  处的切线方程为  $y = 2x + 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处切线的斜率为

- A. 4      B.  $-\frac{1}{4}$       C. 2      D.  $-\frac{1}{2}$

6. 过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点  $F_1$  作  $x$  轴的垂线交椭圆于点  $P$ ,  $F_2$  为右焦点, 若  $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$ , 则椭圆的离心率为

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{3}$

7.  $(1 + ax + by)^n$  展开式中不含  $x$  的项的系数绝对值的和为 243, 不含  $y$  的项的系数绝对值的和为 32, 则  $a, b, n$  的值可能为

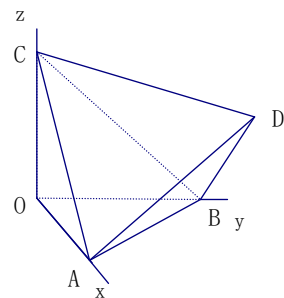
- A.  $a = 2, b = -1, n = 5$       B.  $a = -2, b = -1, n = 6$   
C.  $a = -1, b = 2, n = 6$       D.  $a = 1, b = 2, n = 5$

8. 数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = n^2 (\cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3})$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_{30}$  为

- A. 470      B. 490      C. 495  
D. 510

9. 如图, 正四面体  $ABCD$  的顶点  $A, B, C$  分别在两两垂直的三条射线  $Ox, Oy, Oz$  上, 则在下列命题中, 错误的为

- A.  $O-ABC$  是正三棱锥  
B. 直线  $OB \parallel$  平面  $ACD$



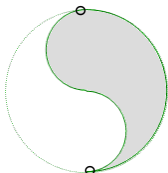
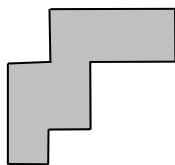
C. 直线  $AD$  与  $OB$  所成的角是  $45^\circ$

D. 二面角  $D-OB-A$  为  $45^\circ$

10. 为了庆祝六一儿童节,某食品厂制作了3种不同的精美卡片,每袋食品随机装入一张卡片,集齐3种卡片可获奖,现购买该种食品5袋,能获奖的概率为

- A.  $\frac{31}{81}$       B.  $\frac{33}{81}$       C.  $\frac{48}{81}$       D.  $\frac{50}{81}$

11. 一个平面封闭区域内任意两点距离的最大值称为该区域的“直径”,封闭区域边界曲线的长度与区域直径之比称为区域的“周率”,下面四个平面区域(阴影部分)的周率从左到右依次记为  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ , 则下列关系中正确的为



- A.  $\tau_1 > \tau_4 > \tau_3$       B.  $\tau_3 > \tau_1 > \tau_2$       C.  $\tau_4 > \tau_2 > \tau_3$       D.  $\tau_3 > \tau_4 > \tau_1$

12. 设函数  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  ( $a < 0$ ) 的定义域为  $D$ , 若所有点  $(s, f(t))$  ( $s, t \in D$ ) 构成一个正方形区域, 则  $a$  的值为

- A.  $-2$       B.  $-4$       C.  $-8$       D. 不能确定

## 第II卷

注意事项:

第II卷2页, 须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答, 若在试题上作答, 答案无效。

二.填空题: 本大题共4小题, 每小题4分, 共16分。请把答案填在答题卡上

13. 已知向量  $\vec{a} = (3, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 3)$ ,  $\vec{c} = (k, 7)$ , 若  $(\vec{a} - \vec{c}) \parallel \vec{b}$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

14. 正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  内接于半径为2的球, 若  $A, B$  两点的球面距离为  $\pi$ , 则正三棱柱的体积为\_\_\_\_\_.

15. 若不等式  $\sqrt{9-x^2} \leq k(x+2) - \sqrt{2}$  的解集为区间  $[a, b]$ , 且  $b-a=2$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

16. 设直线系  $M: x \cos \theta + (y-2) \sin \theta = 1$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), 对于下列四个命题:

A.  $M$  中所有直线均经过一个定点

B. 存在定点  $P$  不在  $M$  中的任一条直线上

C. 对于任意整数  $n(n \geq 3)$ , 存在正  $n$  边形, 其所有边均在  $M$  中的直线上

D.  $M$  中的直线所能围成的正三角形面积都相等

其中真命题的代号是\_\_\_\_\_ (写出所有真命题的代号) .

三.解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤

17. (本小题满分 12 分)

$$\text{设函数 } f(x) = \frac{e^x}{x}$$

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $k > 0$ , 求不等式  $f'(x) + k(1-x)f(x) > 0$  的解集.

18. (本小题满分 12 分)

某公司拟资助三位大学生自主创业, 现聘请两位专家, 独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是  $\frac{1}{2}$ . 若某人获得两个“支持”, 则给予 10 万元的创业资助; 若只获得一个“支持”, 则给予 5 万元的资助; 若未获得“支持”, 则不予资助, 令  $\xi$  表示该公司的资助总额.

(1) 写出  $\xi$  的分布列; (2) 求数学期望  $E\xi$ .

19. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\tan C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$ ,  $\sin(B-A) = \cos C$ .

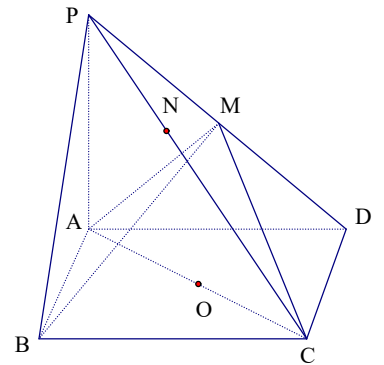
(1) 求  $A, C$ ;

(2) 若  $S_{\triangle ABC} = 3 + \sqrt{3}$ , 求  $a, c$ .

20. (本小题满分 12 分)

在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA = AD = 4$ ,  $AB = 2$ . 以  $AC$  的中点  $O$  为球心、 $AC$  为直径的球面交  $PD$  于点  $M$ , 交  $PC$  于点  $N$

- (1) 求证: 平面  $ABM \perp$  平面  $PCD$ ;
- (2) 求直线  $CD$  与平面  $ACM$  所成的角的大小;
- (3) 求点  $N$  到平面  $ACM$  的距离

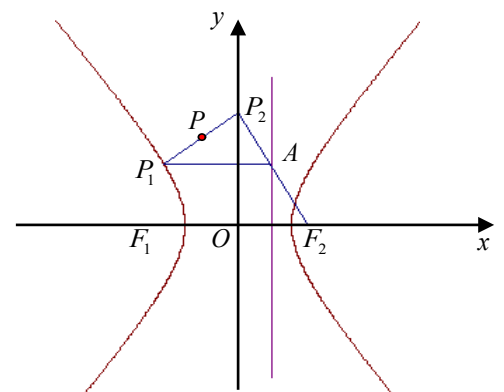


21. (本小题满分 12 分)

已知点  $P_1(x_0, y_0)$  为双曲线  $\frac{x^2}{8b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b$  为正常数) 上任一点,

$F_2$  为双曲线的右焦点, 过  $P_1$  作右准线的垂线, 垂足为  $A$ , 连接  $F_2A$  并延长交  $y$  轴于  $P_2$ .

- (1) 求线段  $P_1P_2$  的中点  $P$  的轨迹  $E$  的方程;



- (2) 设轨迹  $E$  与  $x$  轴交于  $B$ 、 $D$  两点,在  $E$  上任取一点  $Q(x_1, y_1)(y_1 \neq 0)$ , 直线  $QB$ ,  $QD$  分别交  $y$  轴于  $M$ ,  $N$  两点.求证:以  $MN$  为直径的圆过两定点.

22. (本小题满分 14 分)

各项均为正数的数列  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = a, a_2 = b$ , 且对满足  $m+n=p+q$  的正整数  $m, n, p, q$  都有

$$\frac{a_m + a_n}{(1+a_m)(1+a_n)} = \frac{a_p + a_q}{(1+a_p)(1+a_q)}.$$

(1) 当  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{4}{5}$  时, 求通项  $a_n$ ;

(2) 证明: 对任意  $a$ , 存在与  $a$  有关的常数  $\lambda$ , 使得对于每个正整数  $n$ , 都有

$$\frac{1}{\lambda} \leq a_n \leq \lambda.$$

## 参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	B	A	B	D	A	B	D	C	B

1. 由  $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1$  故选 A

2. 由  $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ -x^2 - 3x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ -4 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1$ . 故选 C

3. 因为  $A \cap B = \complement_U[(\complement_U A) \cup (\complement_U B)]$ ，所以  $A \cap B$  共有  $m - n$  个元素，故选 D

4. 因为  $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos x = \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos(x - \frac{\pi}{3})$

当  $x = \frac{\pi}{3}$  是，函数取得最大值为 2. 故选 B

5. 由已知  $g'(1) = 2$ ，而  $f'(x) = g'(x) + 2x$ ，所以  $f'(1) = g'(1) + 2 \times 1 = 4$  故选 A

6. 因为  $P(-c, \pm \frac{b^2}{a})$ ，再由  $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$  有  $\frac{3b^2}{a} = 2a$ ，从而可得  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故选 B

7.  $(1+b)^n = 243 = 3^5$ ， $(1+a)^n = 32 = 2^5$ ，则可取  $a = 1, b = 2, n = 5$ ，选 D

8. 由于  $\{\cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3}\}$  以 3 为周期，故

$$S_{30} = (-\frac{1^2 + 2^2}{2} + 3^2) + (-\frac{4^2 + 5^2}{2} + 6^2) + \cdots + (-\frac{28^2 + 29^2}{2} + 30^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} [-\frac{(3k-2)^2 + (3k-1)^2}{2} + (3k)^2] = \sum_{k=1}^{10} [9k - \frac{5}{2}] = \frac{9 \times 10 \times 11}{2} - 25 = 470 \text{ 故选 A}$$

9. 将原图补为正方体不难得出 B 为错误，故选 B

10.  $P = \frac{3^5 - (3 \times 2^5 - 3)}{3^5} = \frac{50}{81}$  故选 D

11. 前三个区域的周率依次等于正方形、圆、正三角形的周长和最远距离，所以  $\tau_1 = 2\sqrt{2}$ 、

$\tau_2 = \pi$ 、 $\tau_3 = 3$ ，第四个区域的周率可以转化为一个正六边形的周长与它的一对平行边之

间的距离之比，所以  $\tau_4 = 2\sqrt{3}$ ，则  $\tau_4 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_1$ ，选 C

12.  $|x_1 - x_2| = f_{\max}(x)$ ,  $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a}}$ ,  $|a| = 2\sqrt{-a}$ ,  $a = -4$ , 选 B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。

13. 5      14. 8      15.  $\sqrt{2}$       16. B, C

13.  $\frac{3-k}{1} = \frac{-6}{3} \Rightarrow k = 5$

14. 由条件可得  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $O$  到平面  $ABC$  的距离为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 所以所求体积等于 8

15. 由数形结合, 直线  $y = k(x+2) - \sqrt{2}$  在半圆  $y = \sqrt{9-x^2}$  之下必须  $b=3, a=1$ , 则直线  $y = k(x+2) - \sqrt{2}$  过点  $(1, 2\sqrt{2})$ , 则  $k = \sqrt{2}$

16.. 因为  $x \cos \theta + (y-2) \sin \theta = 1$  所以点  $P(0,2)$  到  $M$  中每条直线的距离

$$d = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = 1$$

即  $M$  为圆  $C: x^2 + (y-2)^2 = 1$  的全体切线组成的集合, 从而  $M$  中存在两条平行直线, 所以 A 错误

又因为  $(0,2)$  点不存在任何直线上, 所以 B 正确

对任意  $n \geq 3$ , 存在正  $n$  边形使其内切圆为圆  $C$ , 故 C 正确

$M$  中边能组成两个大小不同的正三角形  $ABC$  和  $AEF$ , 故 D 错误, 故命题中正确的序号是 B, C

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。

17. 解: (1)  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x = \frac{x-1}{x^2}e^x$ , 由  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 1$

因为 当  $x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ ;

所以  $f(x)$  的单调增区间是:  $[1, +\infty)$ ; 单调减区间是:  $(-\infty, 0), (0, 1]$ .

(2) 由  $f'(x) + k(1-x)f(x) = \frac{x-1+kx-kx^2}{x^2}e^x = \frac{(x-1)(-kx+1)}{x^2}e^x > 0$ ,

得:  $(x-1)(kx-1) < 0$ .

故: 当  $0 < k < 1$  时, 解集是:  $\{x | 1 < x < \frac{1}{k}\}$ ;



当  $k=1$  时, 解集是:  $\emptyset$ ;

当  $k>1$  时, 解集是:  $\{x \mid \frac{1}{k} < x < 1\}$

18. 解: (1)  $\xi$  的所有取值为 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30

$$P(\xi=0)=\frac{1}{64} \quad P(\xi=5)=\frac{3}{32} \quad P(\xi=10)=\frac{15}{64} \quad P(\xi=15)=\frac{5}{16}$$

$$P(\xi=20)=\frac{15}{64} \quad P(\xi=25)=\frac{3}{32} \quad P(\xi=30)=\frac{1}{64}$$

$$(2) E\xi = 5 \times \frac{3}{32} + 10 \times \frac{15}{64} + 15 \times \frac{5}{16} + 20 \times \frac{15}{64} + 25 \times \frac{3}{32} + 30 \times \frac{1}{64} = 15$$

19. 解: (1) 因为  $\tan C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$ , 即  $\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$ ,

所以  $\sin C \cos A + \sin C \cos B = \cos C \sin A + \cos C \sin B$ ,

即  $\sin C \cos A - \cos C \sin A = \cos C \sin B - \sin C \cos B$ ,

得  $\sin(C-A) = \sin(B-C)$ . 所以  $C-A = B-C$ , 或  $C-A = \pi - (B-C)$  (不成

立).

即  $2C = A+B$ , 得  $C = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $B+A = \frac{2\pi}{3}$

又因为  $\sin(B-A) = \cos C = \frac{1}{2}$ , 则  $B-A = \frac{\pi}{6}$ , 或  $B-A = \frac{5\pi}{6}$  (舍去)

得  $A = \frac{\pi}{4}$ ,  $B = \frac{5\pi}{12}$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} ac = 3 + \sqrt{3}$$

$$\text{又 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 即 } \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

得  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $c = 2\sqrt{3}$ .

20. 解:

方法一: (1) 依题设知, AC 是所作球面的直径, 则  $AM \perp MC$ 。

又因为  $PA \perp$  平面 ABCD, 则  $PA \perp CD$ , 又  $CD \perp AD$ ,

所以  $CD \perp$  平面 PAD, 则  $CD \perp AM$ , 所以  $AM \perp$  平面 PCD,

所以平面 ABM  $\perp$  平面 PCD。

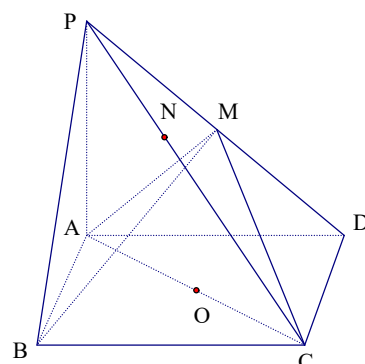
(2) 由 (1) 知,  $AM \perp PD$ , 又  $PA = AD$ , 则 M 是 PD 的中点可得

$$AM = 2\sqrt{2}, \quad MC = \sqrt{MD^2 + CD^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{则 } S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} AM \cdot MC = 2\sqrt{6}$$

设 D 到平面 ACM 的距离为  $h$ , 由  $V_{D-ACM} = V_{M-ACD}$  即  $2\sqrt{6}h = 8$ ,

$$\text{可求得 } h = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$



设所求角为  $\theta$ ，则  $\sin \theta = \frac{h}{CD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

(3) 可求得  $PC=6$ 。因为  $AN \perp NC$ ，由  $\frac{PN}{PA} = \frac{PA}{PC}$ ，得  $PN = \frac{8}{3}$ 。所以  $NC:PC = 5:9$ 。

故  $N$  点到平面  $ACM$  的距离等于  $P$  点到平面  $ACM$  距离的  $\frac{5}{9}$ 。

又因为  $M$  是  $PD$  的中点，则  $P$ 、 $D$  到平面  $ACM$  的距离相等，由 (2) 可知所求距离为

$$\frac{5}{9}h = \frac{10\sqrt{6}}{27}。$$

方法二：

(1) 同方法一；

(2) 如图所示，建立空间直角坐标系，则  $A(0,0,0)$ ， $P(0,0,4)$ ， $B(2,0,0)$ ， $C(2,4,0)$ ， $D(0,4,0)$ ， $M(0,2,2)$ ；设平面  $ACM$  的一个法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，由  $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ ， $\vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$  可得：

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}，令$$

$z=1$ ，则

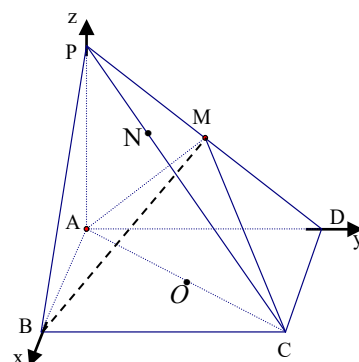
$$\vec{n} = (2, -1, 1)。设所求角为 \alpha，则 \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{CD}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}，$$

所以所求角的大小为  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

(3) 由条件可得， $AN \perp NC$ 。在  $Rt\triangle PAC$  中， $PA^2 = PN \cdot PC$ ，所以  $PN = \frac{8}{3}$ ，则

$NC = PC - PN = \frac{10}{3}$ ， $\frac{NC}{PC} = \frac{5}{9}$ ，所以所求距离等于点  $P$  到平面  $ACM$  距离的  $\frac{5}{9}$ ，设点  $P$

到平面  $ACM$  距离为  $h$  则  $h = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，所以所求距离为  $\frac{5}{9}h = \frac{10\sqrt{6}}{27}$ 。



21. 解：(1) 由已知得  $F_2(3b,0)$ ， $A(\frac{8}{3}b, y_0)$ ，则直线  $F_2A$  的方程为： $y = -\frac{3y_0}{b}(x-3b)$ ，

令  $x=0$  得  $y=9y_0$ ，即  $P_2(0,9y_0)$ ，

$$设 P(x, y), 则 \begin{cases} x = \frac{x_0}{2} \\ y = \frac{y_0 + 9y_0}{2} = 5y_0 \end{cases}, 即 \begin{cases} x_0 = 2x \\ y_0 = \frac{y}{5} \end{cases} 代入 \frac{x_0^2}{8b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 得: \frac{4x^2}{8b^2} - \frac{y^2}{25b^2} = 1,$$

即  $P$  的轨迹  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{2b^2} - \frac{y^2}{25b^2} = 1$

(2) 在  $\frac{x^2}{2b^2} - \frac{y^2}{25b^2} = 1$  中令  $y = 0$  得  $x^2 = 2b^2$ , 则不妨设  $B(-\sqrt{2}b, 0)$ ,  $D(\sqrt{2}b, 0)$ ,

于是直线  $QB$  的方程为:  $y = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{2}b}(x + \sqrt{2}b)$ , 直线  $QD$  的方程为:  $y = \frac{y_1}{x_1 - \sqrt{2}b}(x - \sqrt{2}b)$ ,

则  $M(0, \frac{\sqrt{2}by_1}{x_1 + \sqrt{2}b})$ ,  $N(0, \frac{-\sqrt{2}by_1}{x_1 - \sqrt{2}b})$ ,

则以  $MN$  为直径的圆的方程为:  $x^2 + (y - \frac{\sqrt{2}by_1}{x_1 + \sqrt{2}b})(y + \frac{\sqrt{2}by_1}{x_1 - \sqrt{2}b}) = 0$ ,

令  $y = 0$  得:  $x^2 = \frac{2b^2y_1^2}{x_1^2 - 2b^2}$ , 而  $Q(x_1, y_1)$  在  $\frac{x^2}{2b^2} - \frac{y^2}{25b^2} = 1$  上, 则  $x_1^2 - 2b^2 = \frac{2}{25}y_1^2$ ,

于是  $x = \pm 5b$ , 即以  $MN$  为直径的圆过两定点  $(-5b, 0), (5b, 0)$ .

22. 解: (1) 由  $\frac{a_m + a_n}{(1 + a_m)(1 + a_n)} = \frac{a_p + a_q}{(1 + a_p)(1 + a_q)}$  得

$\frac{a_1 + a_n}{(1 + a_1)(1 + a_n)} = \frac{a_2 + a_{n-1}}{(1 + a_2)(1 + a_{n-1})}$ . 将  $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{4}{5}$  代入化简得

$$a_n = \frac{2a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2}.$$

所以  $\frac{1 - a_n}{1 + a_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}$ ,

故数列  $\{\frac{1 - a_n}{1 + a_n}\}$  为等比数列, 从而

$$\frac{1 - a_n}{1 + a_n} = \frac{1}{3^n}, \text{ 即 } a_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}.$$

可验证,  $a_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$  满足题设条件.

(2) 由题设  $\frac{a_m + a_n}{(1 + a_m)(1 + a_n)}$  的值仅与  $m + n$  有关, 记为  $b_{m+n}$ , 则

$$b_{n+1} = \frac{a_1 + a_n}{(1 + a_1)(1 + a_n)} = \frac{a + a_n}{(1 + a)(1 + a_n)}.$$

考察函数  $f(x) = \frac{a+x}{(1+a)(1+x)}$  ( $x > 0$ ), 则在定义域上有

$$f(x) \geq g(a) = \begin{cases} \frac{1}{1+a}, & a > 1 \\ \frac{1}{2}, & a = 1 \\ \frac{a}{1+a}, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

故对  $n \in N^*$ ,  $b_{n+1} \geq g(a)$  恒成立

$$\text{又 } b_{2n} = \frac{2a_n}{(1+a_n)^2} \geq g(a),$$

注意到  $0 < g(a) \leq \frac{1}{2}$ , 解上式得

$$\frac{g(a)}{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}} = \frac{1-g(a)-\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)} \leq a_n \leq \frac{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)},$$

$$\text{取 } \lambda = \frac{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)}, \text{ 即有 } \frac{1}{\lambda} \leq a_n \leq \lambda.$$