

**2024 年普通高等学校招生全国统一考试**  
**全国甲卷理科数学**

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

**注意事项：**

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

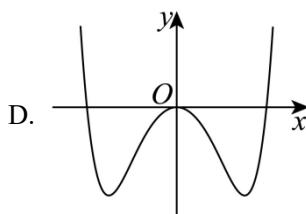
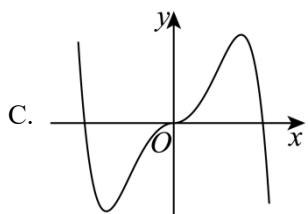
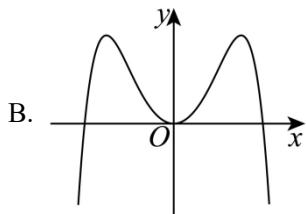
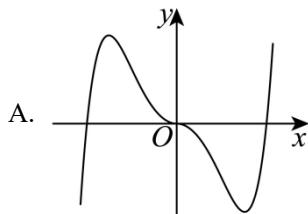
**一、选择题：**本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设  $z = 5 + i$ ，则  $i(\bar{z} + z) = (\quad)$
- A.  $10i$       B.  $2i$       C.  $10$       D.  $-2$
2. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ,  $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$ ，则  $\complement_A(A \cap B) = (\quad)$
- A.  $\{1, 4, 9\}$       B.  $\{3, 4, 9\}$       C.  $\{1, 2, 3\}$       D.  $\{2, 3, 5\}$
3. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 4x - 3y - 3 \geq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ 2x + 6y - 9 \leq 0 \end{cases}$ ，则  $z = x - 5y$  的最小值为  $(\quad)$
- A.  $5$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-2$       D.  $-\frac{7}{2}$
4. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $S_5 = S_{10}$ ,  $a_5 = 1$ ，则  $a_1 = (\quad)$
- A.  $-2$       B.  $\frac{7}{3}$       C.  $1$       D.  $2$
5. 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的上、下焦点分别为  $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$ ，点  $P(-6, 4)$  在该双曲线上，则该双曲线的离心率为  $(\quad)$
- A.  $4$       B.  $3$       C.  $2$       D.  $\sqrt{2}$

6. 设函数  $f(x) = \frac{e^x + 2 \sin x}{1+x^2}$ , 则曲线  $y=f(x)$  在  $(0,1)$  处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 ( )

- A.  $\frac{1}{6}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{2}{3}$

7. 函数  $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x$  在区间  $[-2.8, 2.8]$  的大致图像为 ( )



8. 已知  $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \sqrt{3}$ , 则  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )

- A.  $2\sqrt{3}+1$       B.  $2\sqrt{3}-1$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $1-\sqrt{3}$

9. 已知向量  $\vec{a} = (x+1, x)$ ,  $\vec{b} = (x, 2)$ , 则 ( )

- A. “ $x=-3$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的必要条件      B. “ $x=-3$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的必要条件  
C. “ $x=0$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的充分条件      D. “ $x=-1+\sqrt{3}$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的充分条件

10. 设  $\alpha$ 、 $\beta$  是两个平面,  $m$ 、 $n$  是两条直线, 且  $\alpha \cap \beta = m$ . 下列四个命题:

- ①若  $m // n$ , 则  $n // \alpha$  或  $n // \beta$       ②若  $m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha, n \perp \beta$   
③若  $n // \alpha$ , 且  $n // \beta$ , 则  $m // n$       ④若  $n$  与  $\alpha$  和  $\beta$  所成的角相等, 则  $m \perp n$

其中所有真命题的编号是 ( )

- A. ①③      B. ②④      C. ①②③      D. ①③④

11. 在  $\triangle ABC$  中内角  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ , 若  $B = \frac{\pi}{3}$ ,  $b^2 = \frac{9}{4}ac$ , 则  $\sin A + \sin C =$  ( )

- A.  $\frac{3}{2}$       B.  $\sqrt{2}$       C.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知  $b$  是  $a, c$  的等差中项, 直线  $ax + by + c = 0$  与圆  $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$  交于  $A, B$  两点, 则  $|AB|$  的最小值为 ( )

A. 2

B. 3

C. 4

D.  $2\sqrt{5}$

**二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.**

13.  $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$  的展开式中, 各项系数的最大值是\_\_\_\_\_.

14. 已知甲、乙两个圆台上、下底面的半径均为  $r_1$  和  $r_2$ , 母线长分别为  $2(r_2 - r_1)$  和  $3(r_2 - r_1)$ , 则两个圆台

的体积之比  $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \text{_____}$ .

15. 已知  $a > 1$ ,  $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$ , 则  $a = \text{_____}$ .

16. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1、2、3、4、5、6, 从中不放回地随机抽取 3 次, 每次取 1 个球. 记  $m$  为前两次取出的球上数字的平均值,  $n$  为取出的三个球上数字的平均值, 则  $m$  与  $n$  差的绝对值不超过  $\frac{1}{2}$  的概率是\_\_\_\_\_.

**三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 题~第 21 题为必考题, 每个考题考生必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.**

**(一) 必考题: 共 60 分.**

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造, 升级改造后, 从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验, 数据如下:

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表:

	优级品	非优级品
甲车间		

乙车间		
-----	--	--

能否有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有99%的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异？

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率  $p = 0.5$ ，设  $\bar{p}$  为升级改造后抽取的  $n$  件产品的优级品率。如果

$\bar{p} > p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ，则认为该工厂产品的优级品率提高了，根据抽取的 150 件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？( $\sqrt{150} \approx 12.247$ )

附：  $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

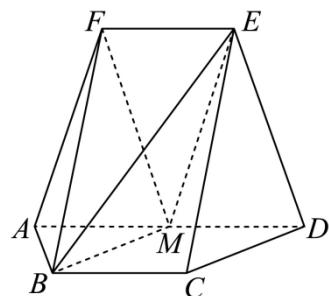
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

18. 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，且  $4S_n = 3a_n + 4$ 。

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 设  $b_n = (-1)^{n-1}na_n$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ 。

19. 如图，在以  $A, B, C, D, E, F$  为顶点的五面体中，四边形  $ABCD$  与四边形  $ADEF$  均为等腰梯形， $BC // AD, EF // AD$ ， $AD = 4, AB = BC = EF = 2$ ， $ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}$ ， $M$  为  $AD$  的中点。



(1) 证明： $BM // \text{平面 } CDE$ ；

(2) 求二面角  $F - BM - E$  的正弦值。

20. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ ，点  $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$  在  $C$  上，且  $MF \perp x$  轴。

(1) 求  $C$  的方程；

(2) 过点  $P(4,0)$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $N$  为线段  $FP$  的中点, 直线  $NB$  交直线  $MF$  于点  $Q$ , 证明:  $AQ \perp y$  轴.

21. 已知函数  $f(x) = (1-ax)\ln(1+x) - x$ .

(1) 当  $a=-2$  时, 求  $f(x)$  的极值;

(2) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = \rho \cos \theta + 1$ .

(1) 写出  $C$  的直角坐标方程;

(2) 设直线  $l: \begin{cases} x = t \\ y = t + a \end{cases}$  ( $t$  为参数), 若  $C$  与  $l$  相交于  $A, B$  两点, 若  $|AB| = 2$ , 求  $a$  的值.

[选修 4-5: 不等式选讲]

23. 实数  $a, b$  满足  $a+b \geq 3$ .

(1) 证明:  $2a^2 + 2b^2 > a+b$ ;

(2) 证明:  $|a-2b^2| + |b-2a^2| \geq 6$ .