

绝密★本科目考试启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

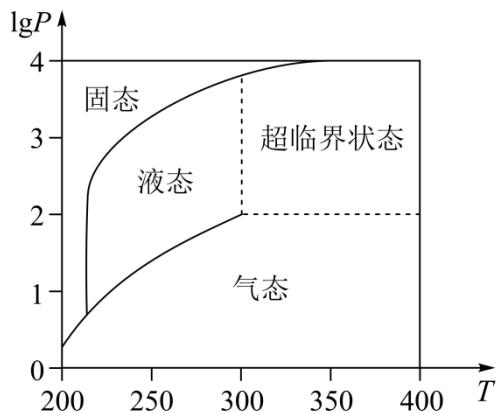
数学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$ ，集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$ ，则 $C_U A =$ ()
A. $(-2, 1]$ B. $(-3, -2) \cup [1, 3)$ C. $[-2, 1)$ D. $(-3, -2] \cup (1, 3)$
2. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 3 - 4i$ ，则 $|z| =$ ()
A. 1 B. 5 C. 7 D. 25
3. 若直线 $2x + y - 1 = 0$ 是圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 的一条对称轴，则 $a =$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1
4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+2^x}$ ，则对任意实数 x ，有 ()
A. $f(-x) + f(x) = 0$ B. $f(-x) - f(x) = 0$
C. $f(-x) + f(x) = 1$ D. $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$
5. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ，则 ()
A. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减 B. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增
C. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减 D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递增
6. 设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列，则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 ，当 $n > N_0$ 时， $a_n > 0$ ”的 ()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献。如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系，其中 T 表示温度，单位是 K ； P 表示压强，单位是 bar 。下列结论中正确的是 ()



- A. 当 $T = 220$, $P = 1026$ 时, 二氧化碳处于液态
B. 当 $T = 270$, $P = 128$ 时, 二氧化碳处于气态
C. 当 $T = 300$, $P = 9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态
D. 当 $T = 360$, $P = 729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态
8. 若 $(2x - 1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 =$ ()
A. 40 B. 41 C. -40 D. -41
9. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6, S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合. 设集合 $T = \{Q \in S | PQ \leq 5\}$, 则 T 表示的区域的面积为 ()
A. $\frac{3\pi}{4}$ B. π C. 2π D. 3π
10. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3, BC = 4, \angle C = 90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC = 1$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ()
A. $[-5, 3]$ B. $[-3, 5]$ C. $[-6, 4]$ D. $[-4, 6]$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____.

12. 已知双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则 $m =$ _____.

13. 若函数 $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $A =$ _____; $f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$ _____.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为_____; a

的最大值为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $a_n \cdot S_n = 9(n=1,2,\dots)$. 给出下列四个结论:

- ① $\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3; ② $\{a_n\}$ 为等比数列;
③ $\{a_n\}$ 为递减数列; ④ $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项.

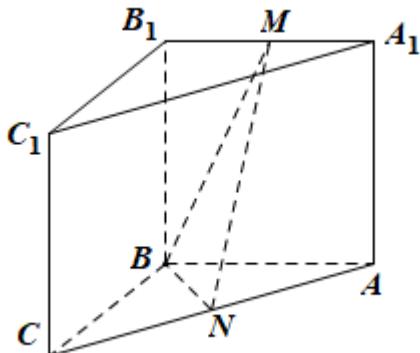
其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$.

- (1) 求 $\angle C$;
(2) 若 $b = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BCC_1B_1 为正方形, 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $AB = BC = 2$, M, N 分别为 A_1B_1, AC 的中点.



- (1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;
(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件①: $AB \perp MN$;

条件②: $BM = MN$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

18. 在校运动会上, 只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛, 比赛成绩达到 9.50m 以上 (含 9.50m) 的同学将获得优秀奖. 为预测获得优秀奖的人数及冠军得主, 收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩, 并整理得到如下数据 (单位: m):

甲: 9.80, 9.70, 9.55, 9.54, 9.48, 9.42, 9.40, 9.35, 9.30, 9.25;

乙: 9.78, 9.56, 9.51, 9.36, 9.32, 9.23;

丙: 9.85, 9.65, 9.20, 9.16.

假设用频率估计概率, 且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

- (1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率;
- (2) 设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数, 估计 X 的数学期望 $E(X)$;
- (3) 在校运动会铅球比赛中, 甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大? (结论不要求证明)

19. 已知椭圆: $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 分别与 x 轴交于点 M, N , 当 $|MN|=2$ 时, 求 k 的值.

20. 已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

- (1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 设 $g(x)=f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;
- (3) 证明: 对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.

21. 已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为有穷整数数列. 给定正整数 m , 若对任意的 $n \in \{1, 2, \dots, m\}$, 在 Q 中存在 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j} (j \geq 0)$, 使得 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$, 则称 Q 为 m -连续可表数列.

- (1) 判断 $Q: 2, 1, 4$ 是否为 5 -连续可表数列? 是否为 6 -连续可表数列? 说明理由;
- (2) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 8 -连续可表数列, 求证: k 的最小值为 4 ;
- (3) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 20 -连续可表数列, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$, 求证: $k \geq 7$.