

2012 年北京市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. (5 分) 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-3) > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, -\frac{2}{3})$ C. $(-\frac{2}{3}, 3)$ D. $(3, +\infty)$

【考点】1E: 交集及其运算；73: 一元二次不等式及其应用。

【专题】5J: 集合。

【分析】求出集合 B, 然后直接求解 $A \cap B$.

【解答】解：因为 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-3) > 0\} = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$,

又集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+2 > 0\} = \{x \mid x > -\frac{2}{3}\}$,

所以 $A \cap B = \{x \mid x > -\frac{2}{3}\} \cap \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\} = \{x \mid x > 3\}$,

故选：D.

【点评】本题考查一元二次不等式的解法，交集及其运算，考查计算能力。

2. (5 分) 在复平面内，复数 $\frac{10i}{3+i}$ 对应的点的坐标为 ()

- A. (1, 3) B. (3, 1) C. (-1, 3) D. (3, -1)

【考点】A4: 复数的代数表示法及其几何意义；A5: 复数的运算。

【专题】5N: 数系的扩充和复数。

【分析】由 $\frac{10i}{3+i} = \frac{10i(3-i)}{(3+i)(3-i)} = 1+3i$, 能求出在复平面内，复数 $\frac{10i}{3+i}$ 对应的点的坐标。

【解答】解： $\because \frac{10i}{3+i} = \frac{10i(3-i)}{(3+i)(3-i)}$
 $= \frac{30i+10}{10} = 1+3i$,

\therefore 在复平面内, 复数 $\frac{10i}{3+i}$ 对应的点的坐标为 $(1, 3)$,

故选: A.

【点评】本题考查复数的代数形式的乘积运算, 是基础题. 解题时要认真审题,

注意复数的几何意义的求法.

3. (5分) 设不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$, 表示的平面区域为 D , 在区域 D 内随机取一个

点, 则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi-2}{2}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{4-\pi}{4}$

【考点】7B: 二元一次不等式(组)与平面区域; **CF:** 几何概型.

【专题】5I: 概率与统计.

【分析】本题属于几何概型, 利用“测度”求概率, 本例的测度即为区域的面积, 故只要求出题中两个区域: 由不等式组表示的区域 和到原点的距离大于 2 的点构成的区域的面积后再求它们的比值即可.

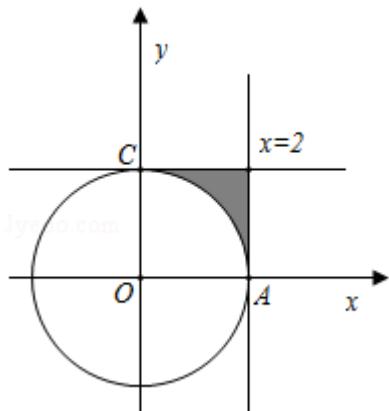
【解答】解: 其构成的区域 D 如图所示的边长为 2 的正方形, 面积为 $S_1=4$, 满足到原点的距离大于 2 所表示的平面区域是以原点为圆心, 以 2 为半径的圆外

部,

$$\text{面积为 } S_2 = 4 - \frac{\pi \times 2^2}{4} = 4 - \pi,$$

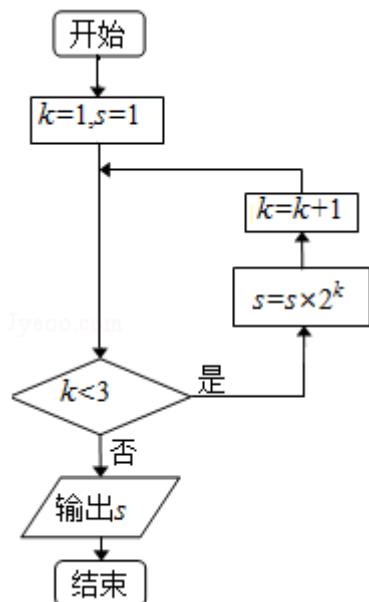
\therefore 在区域 D 内随机取一个点, 则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率 $P = \frac{4-\pi}{4}$

故选: D.



【点评】本题考查几何概型，几何概型的概率的值是通过长度、面积、和体积、的比值得到，本题是通过两个图形的面积之比得到概率的值.

4. (5分) 执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为（ ）



- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

【考点】 EF：程序框图.

【专题】 5K：算法和程序框图.

【分析】列出循环过程中 s 与 k 的数值，不满足判断框的条件即可结束循环.

【解答】解：第 1 次判断后 $s=1$, $k=1$,

第 2 次判断后 $s=2$, $k=2$,

第 3 次判断后 $s=8$, $k=3$,

第 4 次判断后 $3 < 3$ ，不满足判断框的条件，结束循环，输出结果：8.

故选：C.

【点评】本题考查循环框图的应用，注意判断框的条件的应用，考查计算能力.

5. (5分) 函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x$ 的零点个数为（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【考点】53：函数的零点与方程根的关系.

【专题】51：函数的性质及应用.

【分析】先判断函数的单调性，由于在定义域上两个增函数的和仍为增函数，故

函数 $f(x)$ 为单调增函数，而 $f(0) < 0$, $f(\frac{1}{2}) > 0$

由零点存在性定理可判断此函数仅有一个零点

【解答】解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$

$\because y = \frac{1}{x^2}$ 在定义域上为增函数， $y = -(\frac{1}{2})^x$ 在定义域上为增函数

\therefore 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} - (\frac{1}{2})^x$ 在定义域上为增函数

而 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = \frac{1}{2} > 0$

故函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} - (\frac{1}{2})^x$ 的零点个数为 1 个

故选：B.

【点评】本题主要考查了函数零点的判断方法，零点存在性定理的意义和运用，

函数单调性的判断和意义，属基础题

6. (5 分) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，下面结论中正确的是 ()

- A. $a_1 + a_3 \geq 2a_2$
- B. $a_1^2 + a_3^2 \geq 2a_2^2$
- C. 若 $a_1 = a_3$, 则 $a_1 = a_2$
- D. 若 $a_3 > a_1$, 则 $a_4 > a_2$

【考点】87：等比数列的性质.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】 $a_1 + a_3 = \frac{a_2}{q} + a_2 q$, 当且仅当 a_2 , q 同为正时, $a_1 + a_3 \geq 2a_2$ 成立;

$a_1^2 + a_3^2 = (\frac{a_2}{q})^2 + (a_2 q)^2 \geq 2a_2^2$, 所以 $a_1^2 + a_3^2 \geq 2a_2^2$; 若 $a_1 = a_3$, 则 $a_1 = a_1 q^2$,

从而可知 $a_1 = a_2$ 或 $a_1 = -a_2$; 若 $a_3 > a_1$, 则 $a_1 q^2 > a_1$, 而 $a_4 - a_2 = a_1 q (q^2 - 1)$,

其正负由 q 的符号确定，故可得结论.

【解答】解：设等比数列的公比为 q ，则 $a_1+a_3=\frac{a_2}{q}+a_2q$ ，当且仅当 a_2, q 同为

正时， $a_1+a_3 \geq 2a_2$ 成立，故 A 不正确；

$$a_1^2+a_3^2=\left(\frac{a_2}{q}\right)^2+(a_2q)^2 \geq 2a_2^2, \therefore a_1^2+a_3^2 \geq 2a_2^2, \text{ 故 B 正确；}$$

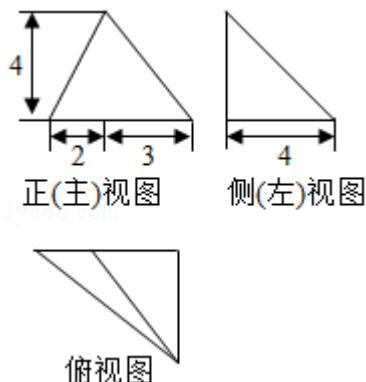
若 $a_1=a_3$ ，则 $a_1=a_1q^2$ ， $\therefore q^2=1$ ， $\therefore q=\pm 1$ ， $\therefore a_1=a_2$ 或 $a_1=-a_2$ ，故 C 不正确；

若 $a_3>a_1$ ，则 $a_1q^2>a_1$ ， $\therefore a_4-a_2=a_1q(q^2-1)$ ，其正负由 q 的符号确定，故 D 不正确

故选：B.

【点评】本题主要考查了等比数列的性质. 属基础题.

7. (5 分) 某三棱锥的三视图如图所示，该三棱锥的表面积是 ()



- A. $28+6\sqrt{5}$ B. $30+6\sqrt{5}$ C. $56+12\sqrt{5}$ D. $60+12\sqrt{5}$

【考点】L1：由三视图求面积、体积.

【专题】5Q：立体几何.

【分析】通过三视图复原的几何体的形状，利用三视图的数据求出几何体的表面积即可.

【解答】解：三视图复原的几何体是底面为直角边长为 4 和 5 的三角形，一个侧面垂直底面的等腰三角形，高为 4，底边长为 5，如图，

$$\text{所以 } S_{\text{底}}=\frac{1}{2} \times 4 \times 5=10,$$

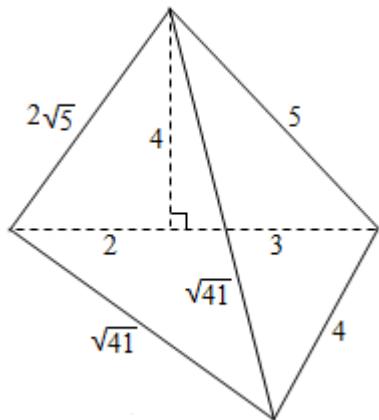
$$S_{\text{后}}=\frac{1}{2} \times 5 \times 4=10,$$

$$S_{\text{右}} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10,$$

$$S_{\text{左}} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{(\sqrt{41})^2 - (\sqrt{5})^2} = 6\sqrt{5}.$$

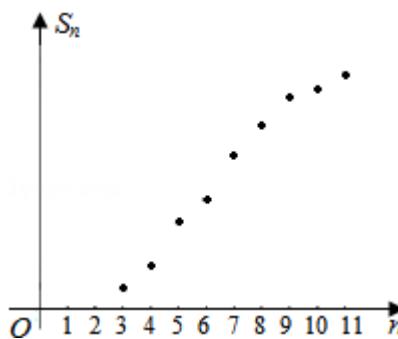
几何体的表面积为: $S = S_{\text{底}} + S_{\text{后}} + S_{\text{右}} + S_{\text{左}} = 30 + 6\sqrt{5}.$

故选: B.



【点评】本题考查三视图与几何体的关系, 注意表面积的求法, 考查空间想象能力计算能力.

8. (5分) 某棵果树前 n 年的总产量 S_n 与 n 之间的关系如图所示. 从目前记录的结果看, 前 m 年的年平均产量最高, 则 m 的值为 ()



- A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

【考点】 38: 函数的表示方法; 3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】 51: 函数的性质及应用.

【分析】由已知中图象表示某棵果树前 n 年的总产量 S 与 n 之间的关系, 可分析出平均产量的几何意义为原点与该点边线的斜率, 结合图象可得答案.

【解答】解: 若果树前 n 年的总产量 S 与 n 在图中对应 $P(S, n)$ 点
则前 n 年的年平均产量即为直线 OP 的斜率

由图易得当 $n=9$ 时，直线 OP 的斜率最大
即前 9 年的年平均产量最高，
故选：C.

【点评】本题以函数的图象与图象变化为载体考查了斜率的几何意义，其中正确分析出平均产量的几何意义是解答本题的关键.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. (5 分) 直线 $y=x$ 被圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$.

【考点】J8：直线与圆相交的性质.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】确定圆的圆心坐标与半径，求得圆心到直线 $y=x$ 的距离，利用垂径定理构造直角三角形，即可求得弦长.

【解答】解：圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 的圆心坐标为 $(0, 2)$ ，半径为 2

$$\because \text{圆心到直线 } y=x \text{ 的距离为 } \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{直线 } y=x \text{ 被圆 } x^2+(y-2)^2=4 \text{ 截得的弦长为 } 2\sqrt{4-2} = 2\sqrt{2}$$

故答案为： $2\sqrt{2}$

【点评】本题考查直线与圆相交，考查圆的弦长，解题的关键是求得圆心到直线 $y=x$ 的距离，利用垂径定理构造直角三角形求得弦长.

10. (5 分) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和，若 $a_1=\frac{1}{2}$ ， $S_2=a_3$ ，则 $a_2=\underline{\underline{1}}$ ， $S_n=\underline{\underline{\frac{1}{4}n(n+1)}}$.

【考点】84：等差数列的通项公式；85：等差数列的前 n 项和.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】根据等差数列的性质可求出公差，从而可求出第二项，以及等差数列的前 n 项和.

【解答】解：根据 $\{a_n\}$ 为等差数列， $S_2=a_1+a_2=a_3=\frac{1}{2}+a_2$ ；

$$\therefore d = a_3 - a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$S_n = \frac{1}{2}n + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}n(n+1)$$

$$\text{故答案为: } 1, \frac{1}{4}n(n+1)$$

【点评】本题主要考查了等差数列的前 n 项和, 以及等差数列的通项公式, 属于容易题.

11. (5 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=3$, $b=\sqrt{3}$, $\angle A=\frac{\pi}{3}$, 则 $\angle C$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$.

【考点】 HP: 正弦定理.

【专题】 58: 解三角形.

【分析】 利用正弦定理 $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B}$, 可求得 $\angle B$, 从而可得 $\angle C$ 的大小.

【解答】 解: $\because \triangle ABC$ 中, $a=3$, $b=\sqrt{3}$, $\angle A=\frac{\pi}{3}$,

\therefore 由正弦定理 $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B}$ 得: $\frac{3}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \angle B}$,

$\therefore \sin \angle B = \frac{1}{2}$. 又 $b < a$,

$\therefore \angle B < \angle A = \frac{\pi}{3}$.

$\therefore \angle B = \frac{\pi}{6}$.

$\therefore \angle C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

故答案为: $\frac{\pi}{2}$.

【点评】 本题考查正弦定理, 求得 $\angle B$ 是关键, 易错点在于忽视“ \triangle 中大边对大角, 小边对小角”结论的应用, 属于基础题.

12. (5 分) 已知函数 $f(x) = \lg x$, 若 $f(ab) = 1$, 则 $f(a^2) + f(b^2) = \underline{\quad}$.

【考点】4H：对数的运算性质.

【专题】51：函数的性质及应用.

【分析】由函数 $f(x) = \lg x$, $f(ab) = \lg(ab) = 1$, 知 $f(a^2) + f(b^2) = \lg a^2 + \lg b^2 = 2\lg(ab)$. 由此能求出结果.

【解答】解: \because 函数 $f(x) = \lg x$, $f(ab) = \lg(ab) = 1$,
 $f(a^2) + f(b^2) = \lg a^2 + \lg b^2$
 $= \lg(ab)^2 = 2\lg(ab) = 2$.

故答案为: 2.

【点评】本题考查对数的运算性质, 是基础题. 解题时要认真审题, 仔细解答.

13. (5分) 已知正方形ABCD的边长为1, 点E是AB边上的动点. 则 $\vec{DE} \cdot \vec{CB}$ 的值为 1.

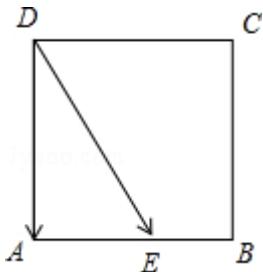
【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】直接利用向量转化, 求出数量积即可.

【解答】解: 因为 $\vec{DE} \cdot \vec{CB} = \vec{DE} \cdot \vec{DA} = |\vec{DE}| \cdot |\vec{DA}| \cos \angle \vec{DE} \cdot \vec{DA} = \vec{DA}^2 = 1$.

故答案为: 1



【点评】本题考查平面向量数量积的应用, 考查计算能力.

14. (5分) 已知 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3)$, $g(x) = 2^x - 2$. 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$, 则 m 的取值范围是 (-4, 0).

【考点】2E：复合命题及其真假; 2H：全称量词和全称命题.

【专题】 5L: 简易逻辑.

【分析】 由于 $g(x) = 2^x - 2 \geq 0$ 时, $x \geq 1$, 根据题意有 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3) < 0$ 在 $x > 1$ 时成立, 根据二次函数的性质可求

【解答】 解: $\because g(x) = 2^x - 2$, 当 $x \geq 1$ 时, $g(x) \geq 0$,

又 $\because \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$

\therefore 此时 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3) < 0$ 在 $x \geq 1$ 时恒成立

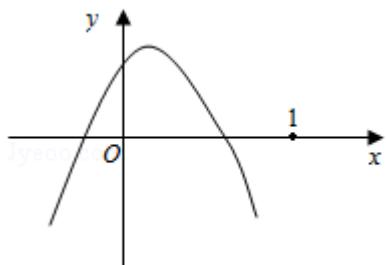
则由二次函数的性质可知开口只能向下, 且二次函数与 x 轴交点都在 $(1, 0)$ 的

左面

$$\text{则 } \begin{cases} m < 0 \\ -m-3 < 1 \\ 2m < 1 \end{cases}$$

$$\therefore -4 < m < 0$$

故答案为: $(-4, 0)$



【点评】 本题主要考查了全称命题与特称命题的成立, 指数函数与二次函数性质的应用是解答本题的关键

三、解答题共 6 小题, 共 80 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (13 分) 已知函数 $f(x) = \frac{(\sin x - \cos x) \sin 2x}{\sin x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递减区间.

【考点】 GL: 三角函数中的恒等变换应用; H4: 正弦函数的定义域和值域;

HM: 复合三角函数的单调性.

【专题】 57: 三角函数的图像与性质.

【分析】 (1) 由 $\sin x \neq 0$ 可得 $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 将 $f(x)$ 化为 $f(x) = \sqrt{2} \sin$

$(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$ 即可求其最小正周期;

(2) 由(1)得 $f(x) = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$, 再由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 即可求 $f(x)$ 的单调递减区间.

【解答】解: (1) 由 $\sin x \neq 0$ 得 $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

故求 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\because f(x) = \frac{(\sin x - \cos x)\sin 2x}{\sin x}$$

$$= 2\cos x (\sin x - \cos x)$$

$$= \sin 2x - \cos 2x - 1$$

$$= \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) \because 函数 $y = \sin x$ 的单调递减区间为 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

\therefore 由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

得 $k\pi + \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{8}$, ($k \in \mathbb{Z}$)

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为: $[k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{7\pi}{8}]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

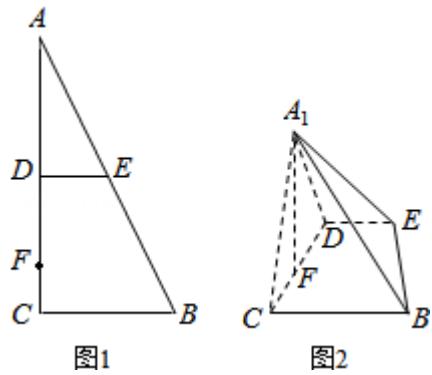
【点评】本题考查三角函数中的恒等变换应用, 着重考查正弦函数的单调性, 注重辅助角公式的考察应用, 求得 $f(x) = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$ 是关键, 属于中档题.

16. (14分) 如图1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, D, E 分别为 AC, AB 的中点, 点 F 为线段 CD 上的一点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使 $A_1F \perp CD$, 如图2.

(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 A_1CB ;

(2) 求证: $A_1F \perp BE$;

(3) 线段 A_1B 上是否存在点 Q, 使 $A_1C \perp$ 平面 DEQ ? 说明理由.



【考点】 LS: 直线与平面平行; LW: 直线与平面垂直.

【专题】 5F: 空间位置关系与距离; 5Q: 立体几何.

【分析】 (1) D, E 分别为 AC, AB 的中点, 易证 $DE \parallel$ 平面 A_1CB ;

(2) 由题意可证 $DE \perp$ 平面 A_1DC , 从而有 $DE \perp A_1F$, 又 $A_1F \perp CD$, 可证 $A_1F \perp$ 平面 $BCDE$, 问题解决;

(3) 取 A_1C , A_1B 的中点 P, Q, 则 $PQ \parallel BC$, 平面 DEQ 即为平面 DEP , 由 $DE \perp$ 平面, P 是等腰三角形 DA_1C 底边 A_1C 的中点, 可证 $A_1C \perp$ 平面 DEP , 从而 $A_1C \perp$ 平面 DEQ .

【解答】 解: (1) $\because D, E$ 分别为 AC, AB 的中点,

$\therefore DE \parallel BC$, 又 $DE \not\subset$ 平面 A_1CB ,

$\therefore DE \parallel$ 平面 A_1CB .

(2) 由已知得 $AC \perp BC$ 且 $DE \parallel BC$,

$\therefore DE \perp AC$,

$\therefore DE \perp A_1D$, 又 $DE \perp CD$,

$\therefore DE \perp$ 平面 A_1DC , 而 $A_1F \subset$ 平面 A_1DC ,

$\therefore DE \perp A_1F$, 又 $A_1F \perp CD$,

$\therefore A_1F \perp$ 平面 $BCDE$,

$\therefore A_1F \perp BE$.

(3) 线段 A_1B 上存在点 Q, 使 $A_1C \perp$ 平面 DEQ . 理由如下: 如图, 分别取 A_1C ,

A_1B 的中点 P, Q, 则 $PQ \parallel BC$.

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore DE \parallel PQ$.

\therefore 平面 DEQ 即为平面 DEP .

由 (II) 知 $DE \perp$ 平面 A_1DC ,

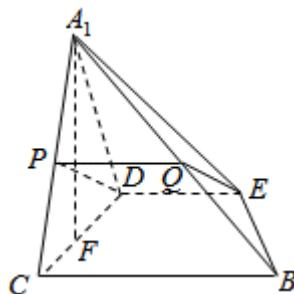
$\therefore DE \perp A_1C$,

又 $\because P$ 是等腰三角形 DA_1C 底边 A_1C 的中点,

$\therefore A_1C \perp DP$,

$\therefore A_1C \perp$ 平面 DEP , 从而 $A_1C \perp$ 平面 DEQ ,

故线段 A_1B 上存在点 Q , 使 $A_1C \perp$ 平面 DEQ .



【点评】本题考查直线与平面平行的判定, 直线与平面垂直的判定与性质, 考查学生的分析推理证明与逻辑思维能力, 综合性强, 属于难题.

17. (13 分) 近年来, 某市为促进生活垃圾的分类处理, 将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类, 并分别设置了相应的垃圾箱, 为调查居民生活垃圾分类投放情况, 先随机抽取了该市三类垃圾箱总计 1000 吨生活垃圾, 数据统计如下 (单位: 吨);

	“厨余垃圾”箱	“可回收物”箱	“其他垃圾”箱
厨余垃圾	400	100	100
可回收物	30	240	30
其他垃圾	20	20	60

(1) 试估计厨余垃圾投放正确的概率;

(2) 试估计生活垃圾投放错误的概率;

(3) 假设厨余垃圾在“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱、“其他垃圾”箱的投放量分别为 a , b , c , 其中 $a > 0$, $a+b+c=600$. 当数据 a , b , c 的方差 s^2 最大时, 写出

a, b, c 的值 (结论不要求证明), 并求此时 s^2 的值.

(求: $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)

【考点】 BC: 极差、方差与标准差; CE: 模拟方法估计概率.

【专题】 5I: 概率与统计.

【分析】 (1) 厨余垃圾 600 吨, 投放到“厨余垃圾”箱 400 吨, 故可求厨余垃圾投放正确的概率;

(2) 生活垃圾投放错误有 $200+60+20+20=300$, 故可求生活垃圾投放错误的概率;

(3) 计算方差可得 $s^2 = \frac{1}{3} [(a-200)^2 + (b-200)^2 + (c-200)^2] = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2 - 120000)$, 因此有当 $a=600, b=0, c=0$ 时, 有 $s^2=80000$.

【解答】 解: (1) 由题意可知: 厨余垃圾 600 吨, 投放到“厨余垃圾”箱 400 吨,

故厨余垃圾投放正确的概率为 $\frac{400}{600} = \frac{2}{3}$;

(2) 由题意可知: 生活垃圾投放错误有 $200+60+20+20=300$, 故生活垃圾投放错误的概率为 $\frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$;

(3) 由题意可知: $\because a+b+c=600$, $\therefore a, b, c$ 的平均数为 200

$$\therefore s^2 = \frac{1}{3} [(a-200)^2 + (b-200)^2 + (c-200)^2] = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2 - 120000),$$

$\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq a^2 + b^2 + c^2$, 因此有当 $a=600, b=0, c=0$ 时, 有 $s^2=80000$.

【点评】 本题考查概率知识的运用, 考查学生的阅读能力, 属于中档题.

18. (13 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + 1$ ($a > 0$), $g(x) = x^3 + bx$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处有公共切线, 求 a, b 的值;

(2) 当 $a=3, b=-9$ 时, 函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 $[k, 2]$ 上的最大值为 28, 求 k 的取值范围.

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程。

【专题】53：导数的综合应用。

【分析】(1) 根据曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线，可知切点处的函数值相等，切点处的斜率相等，故可求 a 、 b 的值；
(2) 当 $a=3$, $b=-9$ 时，设 $h(x)=f(x)+g(x)=x^3+3x^2-9x+1$ ，求导函数，确定函数的极值点，进而可得 $k \leq -3$ 时，函数 $h(x)$ 在区间 $[k, 2]$ 上的最大值为 $h(-3)=28$ ； $-3 < k < 2$ 时，函数 $h(x)$ 在区间 $[k, 2]$ 上的最大值小于 28，由此可得结论。

【解答】解：(1) $f(x)=ax^2+1$ ($a>0$)，则 $f'(x)=2ax$, $k_1=2a$,

$g(x)=x^3+bx$ ，则 $g'(x)=3x^2+b$, $k_2=3+b$,

由 $(1, c)$ 为公共切点，可得： $2a=3+b$ ①

又 $f(1)=a+1$, $g(1)=1+b$,

$\therefore a+1=1+b$,

即 $a=b$ ，代入①式，可得： $a=3$, $b=3$.

(2) 当 $a=3$, $b=-9$ 时，设 $h(x)=f(x)+g(x)=x^3+3x^2-9x+1$

则 $h'(x)=3x^2+6x-9$,

令 $h'(x)=0$,

解得： $x_1=-3$, $x_2=1$;

$\therefore k \leq -3$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调增，在 $(-3, 1]$ 上单调减，

$(1, 2)$ 上单调增，所以在区间 $[k, 2]$ 上的最大值为 $h(-3)=28$

$-3 < k < 2$ 时，函数 $h(x)$ 在区间 $[k, 2]$ 上的最大值小于 28

所以 k 的取值范围是 $(-\infty, -3]$

【点评】本题考查导数知识的运用，考查导数的几何意义，考查函数的单调性与最值，解题的关键是正确求出导函数。

19. (14 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>b>0$) 的一个长轴顶点为 $A(2, 0)$,

离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N ,

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 时, 求 k 的值.

【考点】K3: 椭圆的标准方程; **KH:** 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】(I) 根据椭圆一个顶点为 $A(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 可建立方程组,

从而可求椭圆 C 的方程;

(II) 直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 联立 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 消元可得 $(1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0$, 从而可求 $|MN|$, $A(2, 0)$ 到直线 $y=k(x-1)$ 的距离,

利用 $\triangle AMN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$, 可求 k 的值.

【解答】解: (I) \because 椭圆一个顶点为 $A(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore \begin{cases} a=2 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

$$\therefore b=\sqrt{2}$$

\therefore 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(II) 直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 联立 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 消元可得 $(1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0$

$$x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2k^2-4}{1+2k^2}$

$$\therefore |MN| = \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{2\sqrt{(1+k^2)(4+6k^2)}}{1+2k^2}$$

$\because A(2, 0)$ 到直线 $y=k(x-1)$ 的距离为 $d=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$

$$\therefore \triangle AMN \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |MN| d = \frac{|k|\sqrt{4+6k^2}}{1+2k^2}$$

$\therefore \triangle AMN \text{ 的面积为 } \frac{\sqrt{10}}{3}$,

$$\therefore \frac{|k|\sqrt{4+6k^2}}{1+2k^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\therefore k = \pm 1.$$

【点评】本题考查椭圆的标准方程，考查直线与椭圆的位置关系，考查三角形面积的计算，解题的关键是正确求出 $|MN|$.

20. (13分) 设 A 是如下形式的 2 行 3 列的数表，

a	b	c
d	e	f

满足性质 P: $a, b, c, d, e, f \in [-1, 1]$, 且 $a+b+c+d+e+f=0$.

记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之和 ($i=1, 2$), $c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之和 ($j=1, 2, 3$); 记 $k(A)$ 为 $|r_1(A)|, |r_2(A)|, |c_1(A)|, |c_2(A)|, |c_3(A)|$ 中的最小值.

(1) 对如下数表 A , 求 $k(A)$ 的值

1	1	- 0.8
0.1	- 0.3	- 1

(2) 设数表 A 形如

1	1	- 1 - 2d
d	d	- 1

其中 $-1 \leq d \leq 0$. 求 $k(A)$ 的最大值;

(III) 对所有满足性质 P 的 2 行 3 列的数表 A , 求 $k(A)$ 的最大值.

【考点】F5: 演绎推理.

【专题】5M：推理和证明.

【分析】(1) 根据 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之和 ($i=1, 2$), $c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之和 ($j=1, 2, 3$); 记 $k(A)$ 为 $|r_1(A)|, |r_2(A)|, |c_1(A)|, |c_2(A)|, |c_3(A)|$ 中的最小值可求出所求;

(2) $k(A)$ 的定义可求出 $k(A) = 1+d$, 然后根据 d 的取值范围可求出所求;

(III) 任意改变 A 三维行次序或列次序, 或把 A 中的每个数换成它的相反数, 所得数表 A^* 仍满足性质 P , 并且 $k(A) = k(A^*)$

因此, 不妨设 $r_1(A) \geq 0, c_1(A) \geq 0, c_2(A) \geq 0$, 然后利用不等式的性质可知 $3k(A) \leq r_1(A) + c_1(A) + c_2(A)$, 从而求出 $k(A)$ 的最大值.

【解答】解: (1) 因为 $r_1(A) = 1.2, r_2(A) = -1.2, c_1(A) = 1.1, c_2(A) = 0.7, c_3(A) = -1.8$,

所以 $k(A) = 0.7$

(2) $r_1(A) = 1 - 2d, r_2(A) = -1 + 2d, c_1(A) = c_2(A) = 1 + d, c_3(A) = -2 - 2d$

因为 $-1 \leq d \leq 0$,

所以 $|r_1(A)| = |r_2(A)| \geq 1 + d \geq 0, |c_3(A)| \geq 1 + d \geq 0$

所以 $k(A) = 1 + d \leq 1$

当 $d=0$ 时, $k(A)$ 取得最大值 1

(III) 任给满足性质 P 的数表 A (如下所示)

a	b	c
d	e	f

任意改变 A 三维行次序或列次序, 或把 A 中的每个数换成它的相反数, 所得数

表 A^* 仍满足性质 P , 并且 $k(A) = k(A^*)$

因此, 不妨设 $r_1(A) \geq 0, c_1(A) \geq 0, c_2(A) \geq 0$,

由 $k(A)$ 的定义知, $k(A) \leq r_1(A), k(A) \leq c_1(A), k(A) \leq c_2(A)$,

从而 $3k(A) \leq r_1(A) + c_1(A) + c_2(A) = (a+b+c) + (a+d) + (b+e) = (a+b+c+d+e+f) + (a+b-f) = a+b-f \leq 3$

所以 $k(A) \leq 1$

由(2)可知,存在满足性质P的数表A使 $k(A)=1$,故 $k(A)$ 的最大值为1.

【点评】本题主要考查了进行简单的演绎推理,同时分析问题的能力以及不等式性质的应用,同时考查了转化的思想,属于中档题.