

2012年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科A卷）

本试卷共4页，21小题，满分150分。考试用时120分钟。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设*i*为虚数单位，则复数 $\frac{5-6i}{i} =$

- A. $6+5i$ B. $6-5i$ C. $-6+5i$ D. $-6-5i$

2. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 2, 4\}$ 则 $\complement_U M =$

- A. U B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{3, 5, 6\}$ D. $\{2, 4, 6\}$

3. 若向量 $\overrightarrow{BA} = (2, 3)$, $\overrightarrow{CA} = (4, 7)$, 则 $\overrightarrow{BC} =$

- A. $(-2, -4)$ B. $(3, 4)$ C. $(6, 10)$ D. $(-6, -10)$

4. 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是

- A. $y = \ln(x+2)$ B. $y = -\sqrt{x+1}$ C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ D. $y = x + \frac{1}{x}$

5. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2 \\ x+y \geq 1 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = 3x + y$ 的最大值为

- A. 12 B. 11 C. 3 D. -1

6. 某几何体的三视图如图1所示，它的体积为

- A. 12π B. 45π C. 57π D. 81π

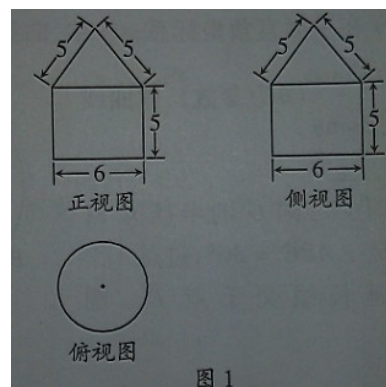


图 1

7. 从个位数与十位数之和为奇数的两位数中任取一个，其中个位数为0的概率是

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

8. 对任意两个非零的平面向量 α, β , 定义 $\alpha \circ \beta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \beta}$. 若平面向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| \geq |\vec{b}| > 0$, \vec{a} 与 \vec{b} 的

夹角 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 且 $\alpha \circ \beta$ 和 $\beta \circ \alpha$ 都在集合 $\left\{\frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ 中, 则 $\vec{a} \circ \vec{b} =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

二、填空题：本大题共7小题．考生作答6小题．每小题5分，满分30分．

（一）必做题（9~13题）

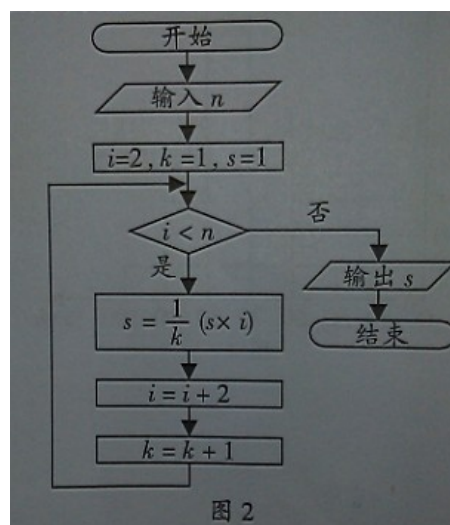
9. 不等式 $|x+2| - |x| \leq 1$ 的解集为_____.

10. $(x^2 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中 x^3 的系数为_____．（用数字作答）

11. 已知递增的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2^2 - 4$, 则 $a_n =$ _____.

12. 曲线 $y = x^3 - x + 3$ 在点 $(1, 3)$ 处的切线方程为_____.

13. 执行如图2所示的程序框图，若输入 n 的值为8，则输出 s 的值为_____.



（二）选做题（14、15题，考生只能从中选做一题）

14. （坐标系与参数方程选做题）在平面直角坐标系中 xOy 中，曲线 C_1 和曲线 C_2 的

参数方程分别为 $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数) 和 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)，则曲线 C_1 和曲线 C_2 的交点坐标为_____.

15. （几何证明选讲选做题）如图3，圆 O 的半径为1， A , B , C 是圆上三点，且满足 $\angle ABC = 30^\circ$ ，过点 A 做圆 O 的切线与 OC 的延长线交与点 P ，则 $PA =$ _____.

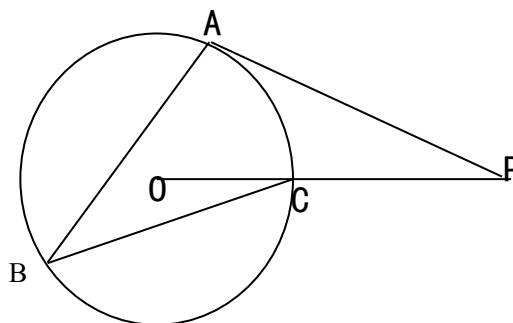


图3

三、解答题：本大题共6小题，满分80分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

16. （本小题满分12分）

已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ （其中 $\omega > 0, x \in R$ ）的最小正周期为 10π ．

（1）求 ω 的值；

（2）设 $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(5\alpha + \frac{5\pi}{3}) = -\frac{6}{5}$, $f(5\beta - \frac{5\pi}{6}) = \frac{16}{17}$, 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值．

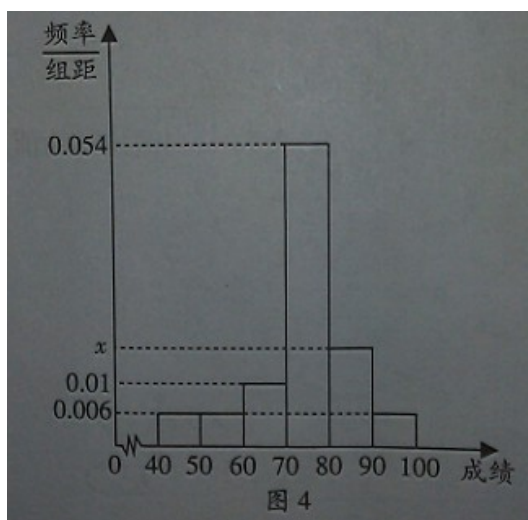
17. （本小题满分13分）

某班50位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图4所示，其中成绩分组区间是：

$[40,50)$, $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$,

(1)求图中x的值；

(2)从成绩不低于80分的学生中随机选取2人，2人中成绩在90分以上（含90分）的人数记为 ξ ，求 ξ 的数学期望．

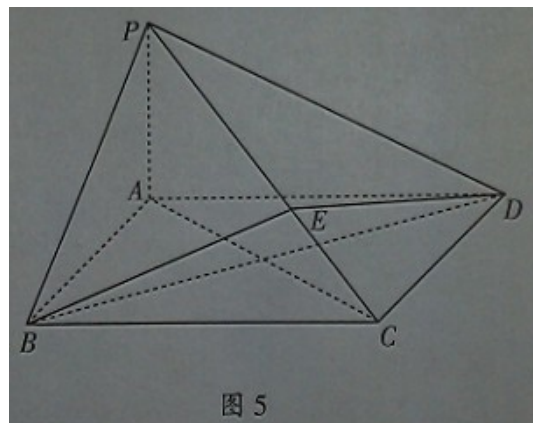


18. （本小题满分13分）

如图5所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 E 在线段 PC 上， $PC \perp$ 平面 BDE ．

（1）证明： $BD \perp$ 平面 PAC ；

（2）若 $PA=1$ ， $AD=2$ ，求二面角 $B-PC-A$ 的正切值．



19. (本小题满分14分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$, $n \in N^*$, 且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

20. (本小题满分14分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$, 且椭圆 C 上的点到点 Q

$(0, 2)$ 的距离的最大值为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程

(2) 在椭圆 C 上, 是否存在点 $M(m, n)$, 使得直线 $l: mx + ny = 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于不同的两点 A 、 B , 且 ΔOAB 的面积最大? 若存在, 求出点 M 的坐标及对应的 ΔOAB 的面积; 若不存在, 请说明理由.

)

21. (本小题满分14分)

设 $a < 1$, 集合 $A = \{x \in R \mid x > 0\}$, $B = \{x \in R \mid 2x^2 - 3(1+a)x + 6a > 0\}$, $D = A \cap B$.

(1) 求集合 D (用区间表示);

(2) 求函数 $f(x) = 2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax$ 在 D 内的极值点.

2012广东高考数学（理科）参考答案

选择题答案：1-8: DCAAB CDC

填空题答案：

9. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ 10. $\underline{20}$ 11. $\underline{2n-1}$ 12. $\underline{y=2x+1}$

13. $\underline{8}$ 14. $\underline{(1,1)}$ 15. $\underline{\sqrt{3}}$

解答题

16.

(1) $\omega = \frac{1}{5}$

(2) 代入得 $2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{6}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$

$$2\cos\beta = \frac{16}{17} \Rightarrow \cos\beta = \frac{8}{17}$$

$$\because \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}, \sin\beta = \frac{15}{17}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \frac{4}{5} \times \frac{8}{17} - \frac{3}{5} \times \frac{15}{17} = -\frac{13}{85}$$

17.

(1) 由 $30 \times 0.006 + 10 \times 0.01 + 10 \times 0.054 + 10x = 1$ 得 $x = 0.018$

(2) 由题意知道：不低于80分的学生有12人，90分以上的学生有3人

随机变量 ξ 的可能取值有0,1,2

$$P(\xi=0) = \frac{C_9^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{11}$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_9^1 C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{9}{22}$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} = \frac{1}{22}$$

$$\therefore E\xi = 0 \times \frac{6}{11} + 1 \times \frac{9}{22} + 2 \times \frac{1}{22} = \frac{1}{2}$$

18.

(1) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore PA \perp BD$

$$\because PC \perp \text{平面} BDE$$

$$\therefore PC \perp BD$$

$$\therefore BD \perp \text{平面} PAC$$

(2) 设AC与BD交点为O, 连OE

$$\because PC \perp \text{平面} BDE$$

$$\therefore PC \perp OE$$

又 $\because BO \perp \text{平面} PAC$

$$\therefore PC \perp BO$$

$$\therefore PC \perp \text{平面} BOE$$

$$\therefore PC \perp BE$$

$\therefore \angle BEO$ 为二面角 $B-PC-A$ 的平面角

$$\because BD \perp \text{平面} PAC$$

$$\therefore BD \perp AC$$

\therefore 四边形ABCD为正方形

$$\therefore BO = \sqrt{2}$$

$$\text{在 } \triangle PAC \text{ 中, } \frac{OE}{OC} = \frac{PA}{AC} \Rightarrow \frac{OE}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow OE = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \tan \angle BEO = \frac{BO}{OE} = 3$$

\therefore 二面角 $B-PC-A$ 的平面角的正切值为3

19.

(1) 在 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$ 中

$$\text{令 } n=1 \text{ 得: } 2S_1 = a_2 - 2^2 + 1$$

$$\text{令 } n=2 \text{ 得: } 2S_2 = a_3 - 2^3 + 1$$

$$\text{解得: } a_2 = 2a_1 + 3, \quad a_3 = 6a_1 + 13$$

$$\text{又 } 2(a_2 + 5) = a_1 + a_3$$

$$\text{解得 } a_1 = 1$$

(2) 由 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$

$$2S_{n+1} = a_{n+2} - 2^{n+2} + 1 \text{ 得}$$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2^{n+1}$$

又 $a_1 = 1, a_2 = 5$ 也满足 $a_2 = 3a_1 + 2^1$

所以 $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ 对 $n \in N^*$ 成立

$$\therefore a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)$$

$$\therefore a_n + 2^n = 3^n$$

$$\therefore a_n = 3^n - 2^n$$

(3)

(法一) $\because a_n = 3^n - 2^n = (3-2)(3^{n-1} + 3^{n-2} \times 2 + 3^{n-3} \times 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \geq 3^{n-1}$

$$\therefore \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{3}{2}$$

(法二) $\because a_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1} > 2 \times 3^n - 2^{n+1} = 2a_n$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n}$$

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_2}$

$$\frac{1}{a_4} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_3}$$

$$\frac{1}{a_5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_4}$$

.....

$$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{n-1}}$$

累乘得: $\frac{1}{a_n} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{a_2}$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times \frac{1}{5} < \frac{7}{5} < \frac{3}{2}$$

20.

$$(1) \text{ 由 } e = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ 得 } a^2 = 3b^2, \text{ 椭圆方程为 } x^2 + 3y^2 = 3b^2$$

$$\begin{aligned} \text{椭圆上的点到点Q的距离 } d &= \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{3b^2 - 3y^2 + (y-2)^2} \\ &= \sqrt{-2y^2 - 4y + 4 + 3b^2} \quad (-b \leq y \leq b) \end{aligned}$$

$$\text{当① } -b \leq -1 \text{ 即 } b \geq 1, d_{\max} = \sqrt{6 + 3b^2} = 3 \text{ 得 } b = 1$$

$$\text{当② } -b > -1 \text{ 即 } b < 1, d_{\max} = \sqrt{b^2 + 4b + 4} = 3 \text{ 得 } b = 1 \text{ (舍)}$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$$

$$(2) S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \sin \angle AOB$$

$$\text{当 } \angle AOB = 90^\circ, S_{\triangle AOB} \text{ 取最大值 } \frac{1}{2},$$

$$\text{点O到直线 } l \text{ 距离 } d = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 2$$

$$\text{又 } \because \frac{m^2}{3} + n^2 = 1$$

$$\text{解得: } m^2 = \frac{3}{2}, n^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以点M的坐标为 } \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\triangle AOB \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}$$

21.

$$(1) \text{ 记 } h(x) = 2x^2 - 3(1+a)x + 6a \quad (a < 1)$$

$$\Delta = 9(1+a)^2 - 48a = (3a-1)(3a-9)$$

$$\text{① 当 } \Delta < 0, \text{ 即 } \frac{1}{3} < a < 1, D = (0, +\infty)$$

② 当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$,

$$D = \left(0, \frac{3+3a-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4} \right) \cup \left(\frac{3+3a+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}, +\infty \right)$$

③ 当 $a \leq 0$, $D = \left(\frac{3+3a+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}, +\infty \right)$

(2) 由 $f'(x) = 6x^2 - 6(1+a)x + 6a = 0$ 得 $x=1$, a 得

① 当 $\frac{1}{3} < a < 1$, $f(x)$ 在 D 内有一个极大值点 a , 有一个极小值点 1

② 当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$, $\because h(1) = 2 - 3(1+a) + 6a = 3a - 1 \leq 0$

$$h(a) = 2a^2 - 3(1+a)a + 6a = 3a - a^2 > 0$$

$\therefore 1 \notin D, a \in D$

$\therefore f(x)$ 在 D 内有一个极大值点 a

③ 当 $a \leq 0$, 则 $a \notin D$

又 $\because h(1) = 2 - 3(1+a) + 6a = 3a - 1 < 0$

$\therefore f(x)$ 在 D 内无极值点