

2012年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

文科数学试题和答案（详细解析版）

本试题共4页，21小题，满分150分，考试用时120分钟。

参考公式：锥体的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 为柱体的底面积， h 为柱体的高。

球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，其中 R 为球的半径。

一组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]},$$

其中 \bar{x} 表示这组数据的平均数。

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 i 为虚数单位，则复数 $\frac{3+4i}{i} =$

A. $-4i-3i$ B. $-4i+3i$ C. $4+3i$ D. $4-3i$

2. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $M = \{1, 3, 5\}$ ，则 $\complement_U M =$

A. $\{2, 4, 6\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{1, 2, 4\}$ D. U

3. 若向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ ， $\overrightarrow{BC} = (3, 4)$ ，则 $\overrightarrow{AC} =$

A. $(4, 6)$ B. $(-4, -6)$ C. $(-2, -2)$ D. $(2, 2)$

4. 下列函数为偶函数的是

A. $y = \sin x$ B. $y = x^3$ C. $y = e^x$ D. $y = \ln \sqrt{x^2 + 1}$

5. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x-y \leq 1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x + 2y$ 的最小值为

- A. 3 B.1 C.-5 D.-6

6.在 $\triangle ABC$ 中,若 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $BC=3\sqrt{2}$,则 $AC=$

- A. $4\sqrt{3}$ B $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 某几何的三视图如图1所示,它的体积为

- A. 72π B 48π C. 30π D. 24π

8. 在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $3x+4y$

-

$5=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交A、B两点,则弦A

B的长等于

- A. $3\sqrt{3}$ B $2\sqrt{3}$ C $\sqrt{3}$ D 1

9. 执行如图2所示的程序图,若输入 n 的值为6,则输出 s 的值为

- A. 105 B. 16 C. 15 D. 1

10. 对任意两个非零的平面向量 α 和 β ,定义

$$\alpha \bullet \beta = \frac{\alpha \bullet \beta}{\beta \bullet \beta}.$$

若两个非零的平面向量 a , b 满足 a 与 b 的夹角

$\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $a \bullet b$ 和 $b \bullet a$ 都在集合 $\left\{\frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ 中, 则 $a \bullet b$

=

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

二、填空题: 本大题共5小题, 考生作答4小题, 每小题5分, 满分20

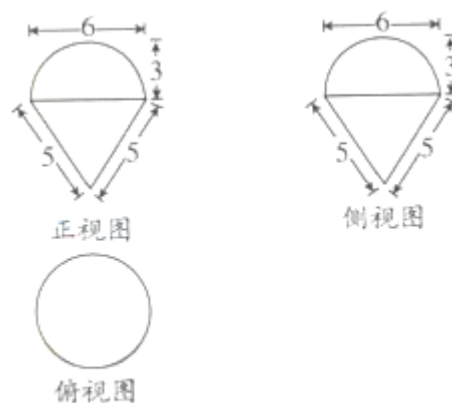


图 1

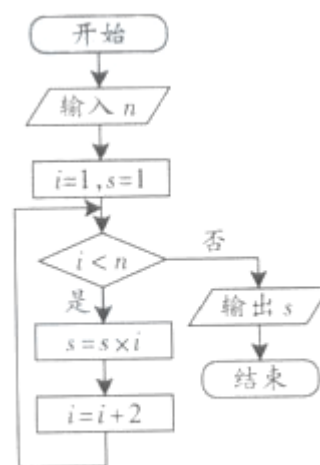


图 2

分。

(一) 必做题 (11~13题)

11. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为_____.

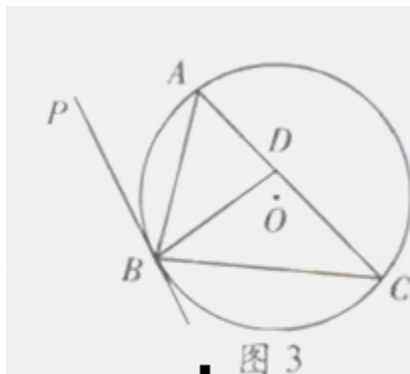
12. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 a_4 = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 a_3^2 a_5 =$ _____.

13. 由正整数组成的一组数据 x_1, x_2, x_3, x_4 , 其平均数和中位数都是2, 且标准差等于1, 则这组数据为_____. (从小到大排列)

(二) (坐标系与参数方程选做题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 和 C_2 的参数方程分别为 $\left\{ \frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ $\left\{ \frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ (θ 为参数,

$(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ $\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 则曲线 C_1 和 C_2 的交点坐标为_____.

15. (几何证明选讲选做题) 如图3所示, 直线 PB 与圆 O 相切于点 B , D 是弦 AC 上的点, $\angle PBA = \angle DBA$. 若 $AD = m, AC = n$, 则 $AB =$ _____.



三、解答题: 本大题共6小题, 满分80分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = A \cos(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6})$, $x \in R$, 且 $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$.

(1) 求A的值;

(2) 设 $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(4\alpha + \frac{4}{3}\pi) = -\frac{30}{17}$, $f(4\beta - \frac{2}{3}\pi) = \frac{8}{5}$. 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值.

17. (本小题满分13分)

某校100名学生期中考试语文成绩的频率分布直方图如图4所示, 其中成绩分组区间是:

$[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$.

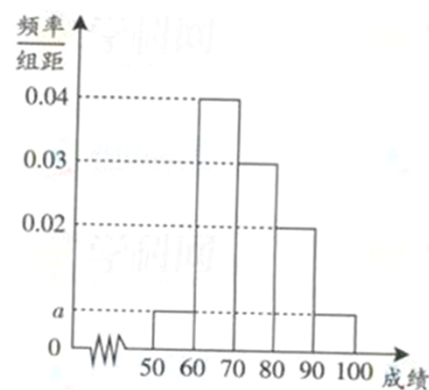


图 4

(1) 求图中 a 的值;

(2) 根据频率分布直方图, 估计这100名学生语文成绩的平均分.

(3) 若这100名学生语文成绩某些分数段的人数 (x) 与数学成绩相应分数段的人数 (y) 之比如下表所示, 求数学成绩在 $[50, 90)$ 之外的人数.

分数段	$[50, 60)$	$[60, 70)$	$[70, 80)$	$[80, 90)$
$x : y$	1 : 1	2 : 1	3 : 4	4 : 5

18 (本小题满分13分)

如图5所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \perp$ 平面 PAD , $AB \parallel CD$, $PD = AD$, E 是 PB 的中点, F 是 CD 上的点, 且 $DF = \frac{1}{2} AB$,

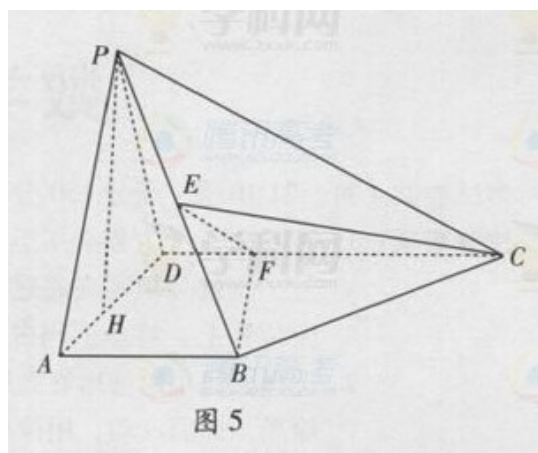


图 5

PH 为 $\triangle PAD$ 中 AD 边上的高。

(1) 证明: $PH \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 $PH=1$, $AD=\sqrt{2}$, $FC=1$, 求三棱锥 $E-BCF$ 的体积;

(3) 证明: $EF \perp$ 平面 PAB .

19. (本小题满分14分)

设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 数列 $\{S_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 满足 $T_n = 2S_n - n^2$, $n \in N^*$.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (本小题满分14分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F_1(-1, 0)$, 且点 $P(0, 1)$ 在 C_1 .

(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 设直线 l 同时与椭圆 C_1 和抛物线 $C_2: y^2 = 4x$ 相切, 求直线 l 的方程.

21. (本小题满分14分)

设 $0 < a < 1$, 集合 $A = \{x \in R \mid x > 0\}$, $B = \{x \in R \mid 2x^2 - 3(1+a)x + 6a > 0\}$,

$D = A \cap B$.

(1) 求集合 D (用区间表示)

(2) 求函数 $f(x) = 2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax$ 在 D 内的极值点.

2012年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（文科）答案（详细解析版）

1. 【解析】选 D 依题意： $\frac{3+4i}{i} = \frac{(3+4i)i}{i^2} = 4-3i$

2. 【解析】选 A $C_U M = \{2, 4, 6\}$

3. 【解析】选 A $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (4, 6)$

4. 【解析】选 D $y = \sin x$ 与 $y = x^3$ 是奇函数， $y = e^x$ 是非奇非偶函数

5. 【解析】选 C 约束条件对应 $\triangle ABC$ 边际及内的区域：

$A(1, 0), B(-1, 2), C(-1, -2)$

则 $z = x + 2y \in [-5, 3]$

6. 【解析】选 B

由正弦定理得： $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{3}$

【解析】选 C 几何体是半球与圆锥叠加而成

它的体积为 $V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 3^3 + \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times \sqrt{5^2 - 3^2} = 30\pi$

8. 【解析】选 B

圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $O(0, 0)$ 到直线 $3x + 4y - 5 = 0$ 的距离

$d = \frac{|-5|}{5} = 1$

弦 AB 的长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{3}$

9. 【解析】选C

s	1	1	3	15
i	1	3	5	7

10. 【解析】选A

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cos \theta > 0, \vec{b} \circ \vec{a} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cos \theta > 0 \Rightarrow (\vec{a} \circ \vec{b}) \times (\vec{b} \circ \vec{a}) = \cos^2 \theta \in (0, \frac{1}{2})$$

$\vec{a} \circ \vec{b}, \vec{b} \circ \vec{a}$ 都在集合 $\left\{ \frac{n}{2} | n \in \mathbb{Z} \right\}$ 中得:

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \times (\vec{b} \circ \vec{a}) = \frac{n_1 n_2}{4} (n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = \frac{1}{2}$$

二、填空题：本大题共5小题，考生作答4小题，每小题5分，满分20分。

(一) 必做题 (11-13题)

11. 【解析】定义域为 $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{x} \text{ 中的 } x \text{ 满足: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0 \text{ 或 } x > 0$$

12. 【解析】 $a_1 a_3^2 a_5 = \frac{1}{4}$

$$a_2 a_4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_3^2 = \frac{1}{2}, a_1 a_3^2 a_5 = a_3^4 = \frac{1}{4}$$

13. 【解析】这组数据为 $1, 1, 3, 3$

不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ 得:

$$x_2 + x_3 = 4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \Rightarrow x_1 + x_4 = 4$$

$$s^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 + (x_4 - 2)^2 = 4 \Rightarrow |x_i - 2| = 0, 1, 2$$

①如果有一个数为0或4；则其余数为2，不合题意

②只能取 $|x_i - 2| = 1$ ；得：这组数据为1,1,3,3

(二) 选做题 (14 - 15题, 考生只能从中选做一题)

14. 【解析】它们的交点坐标为_____ (2,1)

$C_1: x^2 + y^2 = 5 (x, y \geq 0), C_2: y = x - 1$ 解得：交点坐标为(2,1)

15. (【解析】 $AB = \underline{\hspace{2cm}} \sqrt{mn}$

$$\angle PBA = \angle DBA = \angle ACB, \angle BAD = \angle CAB \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle CAB$$

$$\text{得: } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AC \times AD = mn \Leftrightarrow AB = \sqrt{mn}$$

三、解答题：本大题共6小题，满分80分。解答需写出文字说明、证明过程和演算步骤。

16. (本小题满分12分)

$$\text{【解析】 (1) } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow A \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \Leftrightarrow A = 2$$

$$(2) f\left(4\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{30}{17} \Leftrightarrow \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{17} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{15}{17}, \cos \alpha = \frac{8}{17}$$

$$f\left(4\beta - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8}{5} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{4}{5}, \sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{8}{17} - \frac{3}{5} \times \frac{15}{17} = -\frac{13}{85}$$

17. 【解析】 (1) $(2a + 0.02 + 0.03 + 0.04) \times 10 = 1 \Leftrightarrow a = 0.005$

(2) 平均分为 $55 \times 0.05 + 65 \times 0.4 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.2 + 95 \times 0.05 = 73$

(3) 数学成绩在[50,90)内的人数为

$$(0.005 + \frac{1}{2} \times 0.04 + \frac{4}{3} \times 0.03 + \frac{5}{4} \times 0.02) \times 10 \times 100 = 90 \text{ 人}$$

数学成绩在[50,90)外的人数为 $100 - 90 = 10$ 人

答： (1) $a = 0.005$ (2) 这100名学生语文成绩的平均分为73

(3) 数学成绩在 $[50, 90)$ 外的人数为10人。

18. 【解析】 (1) $AB \perp$ 平面 PAD , $PH \subset$ 面 $PAD \Rightarrow PH \perp AB$

又 $PH \perp AD, AD \cap AB = A \Rightarrow PH \perp$ 面 $ABCD$

(2) E 是 PB 中点 \Rightarrow 点 E 到面 BCF 的距离 $h = \frac{1}{2} PH = \frac{1}{2}$

三棱锥 $E-BCF$ 的体积

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle BCF} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times FC \times AD \times h = \frac{1}{6} \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

(3) 取 PA 的中点为 G , 连接 DG, EG

$PD = AD \Rightarrow DG \perp PA$, 又 $AB \perp$ 平面 $PAD \Rightarrow$ 面 $PAD \perp$ 面 $PAB \Rightarrow DG \perp$ 面 PAB

点 E, G 是棱 PB, PA 的中点

$$\Rightarrow EG \parallel \frac{1}{2} AB, DF \parallel \frac{1}{2} AB \Rightarrow EG \parallel DF \Rightarrow DG \parallel EF$$

得: $EF \perp$ 平面 PAB

19. (本小题满分14分)

【解析】 (1) 在 $T_n = 2S_n - n^2$, $n \in N^*$ 中, 令 $n=1 \Rightarrow a_1 = 2a_1 - 1 \Leftrightarrow a_1 = 1$

(2) $T_n = 2S_n - n^2$, $T_{n+1} = 2S_{n+1} - (n+1)^2$, 相减得: $S_{n+1} = 2S_n + (2n+1)$

$S_{n+1} = 2S_n + (2n+1)$, $S_{n+2} = 2S_{n+1} + (2n+3)$, 相减得: $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2$

$a_1 = 1 \Rightarrow S_2 = 2S_1 + 3 \Leftrightarrow a_2 = 4$, 得 $a_{n+1} = 2a_n + 2$

$a_{n+1} = 2a_n + 2 \Leftrightarrow a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$

得: 数列 $\{a_n + 2\}$ 是以 $a_1 + 2 = 3$ 为首项, 公比为2的等比数列

$$a_n + 2 = 3 \times 2^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 3 \times 2^{n-1} - 2$$

20. (本小题满分14分)

【解析】 (1) 由题意得: $b=1, c=\sqrt{a^2-b^2}=1 \Leftrightarrow a=\sqrt{2}, b=c=1$

故椭圆 C_1 的方程为: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) ① 设直线 $l: x=m$, 直线 l 与椭圆 C_1 相切 $\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$

直线与抛物线 $C_2: y^2 = 4x$ 相切 $\Leftrightarrow m = 0$ ，得： m 不存在

② 设直线 $l: y = kx + m$

直线 l 与椭圆 C_1 相切 $\Leftrightarrow (1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$ 两根相等

$$\Leftrightarrow \Delta_1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 2k^2 + 1$$

直线与抛物线 $C_2: y^2 = 4x$ 相切 $\Leftrightarrow k^2x^2 + 2(km-2)x + m^2 = 0$

两根相等

$$\Leftrightarrow \Delta_2 = 0 \Leftrightarrow km = 1$$

$$\text{解得: } k = \frac{\sqrt{2}}{2}, m = \sqrt{2} \text{ 或 } k = -\frac{\sqrt{2}}{2}, m = -\sqrt{2} \Rightarrow l: y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$$

21. (本小题满分14分)

【解析】(1) 对于方程 $2x^2 - 3(1+a)x + 6a = 0$

判别式 $\Delta = 9(1+a)^2 - 48a = 3(a-3)(3a-1)$

因为 $a < 1$ ，所以 $a-3 < 0$

① 当 $1 > a > \frac{1}{3}$ 时， $\Delta < 0$ ，此时 $B = R$ ，所以 $D = A$ ；

② 当 $a = \frac{1}{3}$ 时， $\Delta = 0$ ，此时 $B = \{x \mid x \neq 1\}$ ，所以 $D = (0,1) \cup (1,+\infty)$ ；

当 $a < \frac{1}{3}$ 时， $\Delta > 0$ ，设方程 $2x^2 - 3(1+a)x + 6a = 0$ 的两根为 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$ ，

则

$$x_1 = \frac{3(1+a) - \sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}, \quad x_2 = \frac{3(1+a) + \sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}$$

$$B = \{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$$

③ 当 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时， $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}(1+a) > 0$ ， $x_1x_2 = 3a > 0$ ，所以 $x_1 > 0, x_2 > 0$

此时， $D = (x, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

$$= (0, \frac{3(1+a) - \sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}) \cup (\frac{3(1+a) + \sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}, +\infty)$$

$$(2) \quad f'(x) = 6x^2 - 6(1+a)x + 6a = 6(x-1)(x-a), \quad a < 1$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[a, 1]$ 上为减函数，在区间 $(-\infty, a]$ 和 $[1, +\infty)$ 上为增函数

$$\textcircled{1} \quad x=1 \text{ 是极点} \Leftrightarrow 1 \in B \Leftrightarrow \frac{1}{3} < a < 1$$

$$\textcircled{2} \quad x=a \text{ 是极点} \Leftrightarrow a \in A, a \in B \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

得：

$0 < a \leq \frac{1}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 极值点为 a ， $\frac{1}{3} < a < 1$ 时，函数 $f(x)$ 极值点为 1 与 a

