

## 2019 年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）数学

参考公式：

<p>若事件 <math>A, B</math> 互斥，则 <math>P(A+B) = P(A) + P(B)</math></p> <p>若事件 <math>A, B</math> 相互独立，则 <math>P(AB) = P(A)P(B)</math></p> <p>若事件 <math>A</math> 在一次试验中发生的概率是 <math>p</math>，则 <math>n</math> 次独立重复试验中事件 <math>A</math> 恰好发生 <math>k</math> 次的概率</p> $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0,1,2,\dots,n)$ <p>台体的体积公式</p> <p>其中 <math>S_1, S_2</math> 分别表示台体的上、下底面积，<math>h</math> 表示台体的高</p>	<p>柱体的体积公式 <math>V = Sh</math></p> <p>其中 <math>S</math> 表示柱体的底面积，<math>h</math> 表示柱体的高</p> <p>锥体的体积公式 <math>V = \frac{1}{3}Sh</math></p> <p>其中 <math>S</math> 表示锥体的底面积，<math>h</math> 表示锥体的高</p> <p>球的表面积公式 <math>S = 4\pi R^2</math></p> <p>球的体积公式 <math>V = \frac{4}{3}\pi R^3</math></p> <p>其中 <math>R</math> 表示球的半径</p>
---	---

### 选择题部分（共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集  $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合  $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 1\}$ ，则  $(C_U A) \cap B =$  ( )

- |                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| A. $\{-1\}$       | B. $\{0, 1\}$        |
| C. $\{-1, 2, 3\}$ | D. $\{-1, 0, 1, 3\}$ |

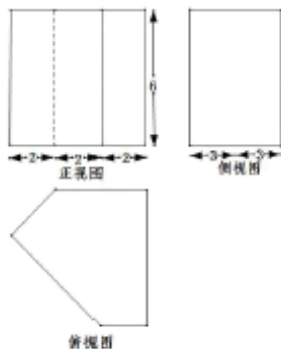
2. 渐近线方程为  $x \pm y = 0$  的双曲线的离心率是 ( )

- |                         |      |
|-------------------------|------|
| A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | B. 1 |
| C. $\sqrt{2}$           | D. 2 |

3. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 3y + 4 \geq 0 \\ 3x - y - 4 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = 3x + 2y$  的最大值是 ( )

- |       |       |
|-------|-------|
| A. -1 | B. 1  |
| C. 10 | D. 12 |

4.祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家.他提出的“幂势既同,则积不容易”称为祖暅原理,利用该原理可以得到柱体体积公式 $V_{\text{柱体}} = Sh$ ,其中 $S$ 是柱体的底面积, $h$ 是柱体的高,若某柱体的三视图如图所示,则该柱体的体积是( )

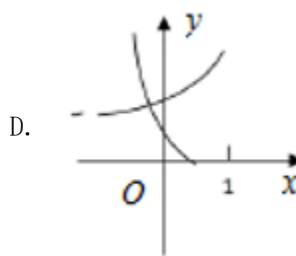
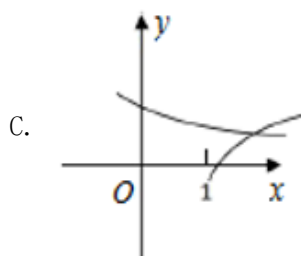
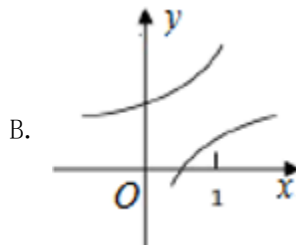
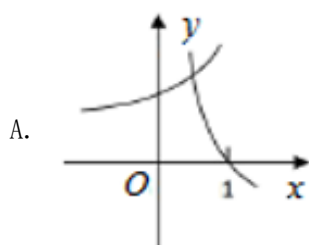


- A. 158  
B. 162  
C. 182  
D. 32

5.若 $a > 0, b > 0$ ,则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的( )

- A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件  
D. 既不充分也不必要条件

6.在同一直角坐标系中,函数 $y = \frac{1}{a^x}, y = \log_a \left( x + \frac{1}{2} \right)$  ( $a > 0$ 且 $a \neq 0$ )的图象可能是( )



7.设 $0 < a < 1$ ,则随机变量 $X$ 的分布列是:

$X$	0	$a$	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当  $a$  在  $(0,1)$  内增大时 ( )

- A.  $D(X)$  增大  
B.  $D(X)$  减小  
C.  $D(X)$  先增大后减小  
D.  $D(X)$  先减小后增大

8. 设三棱锥  $V-ABC$  的底面是正三角形, 侧棱长均相等,  $P$  是棱  $VA$  上的点 (不含端点), 记直线  $PB$  与直线  $AC$  所成角为  $\alpha$ , 直线  $PE$  与平面  $ABC$  所成角为  $\beta$ , 二面角  $P-AC-B$  的平面角为  $\gamma$ , 则 ( )

- A.  $\beta < \gamma, \alpha < \gamma$   
B.  $\beta < \alpha, \beta < \gamma$   
C.  $\beta < \alpha, \gamma < \alpha$   
D.  $\alpha < \beta, \gamma < \beta$

9. 已知  $a, b \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$ , 若函数  $y = f(x) - ax - b$  恰有三个零点, 则 ( )

- A.  $a < -1, b < 0$   
B.  $a < -1, b > 0$   
C.  $a > -1, b > 0$   
D.  $a > -1, b < 0$

10. 设  $a, b \in \mathbb{R}$ , 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 + b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 则 ( )

- A. 当  $b = \frac{1}{2}, a_{10} > 10$   
B. 当  $b = \frac{1}{4}, a_{10} > 10$   
C. 当  $b = -2, a_{10} > 10$   
D. 当  $b = -4, a_{10} > 10$

### 非选择题部分 (共 110 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分

11. 复数  $z = \frac{1}{1+i}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_.

12. 已知圆  $C$  的圆心坐标是  $(0, m)$ , 半径长是  $r$ . 若直线  $2x - y + 3 = 0$  与圆相切于点  $A(-2, -1)$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_,  $r =$  \_\_\_\_\_.

13. 在二项式  $(\sqrt{2} + x)^9$  的展开式中, 常数项是 \_\_\_\_\_; 系数为有理数的项的个数是 \_\_\_\_\_.

14. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 3$ , 点  $D$  在线段  $AC$  上, 若  $\angle BDC = 45^\circ$ , 则  $BD =$  \_\_\_\_\_;  $\cos \angle ABD =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  的左焦点为  $F$ , 点  $P$  在椭圆上且在  $x$  轴的上方, 若线段  $PF$  的中点在以原点  $O$  为圆

心,  $|OF|$  为半径的圆上, 则直线  $PF$  的斜率是\_\_\_\_\_.

16. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = ax^3 - x$ , 若存在  $t \in \mathbf{R}$ , 使得  $|f(t+2) - f(t)| \leq \frac{2}{3}$ , 则实数  $a$  的最大值是\_\_\_\_\_.

17. 已知正方形  $ABCD$  的边长为 1, 当每个  $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$  取遍  $\pm 1$  时,

$|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|$  的最小值是\_\_\_\_\_; 最大值是\_\_\_\_\_.

**三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

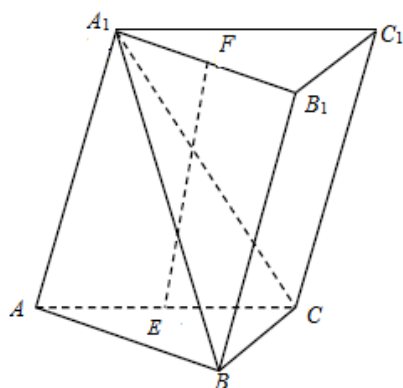
18. 设函数  $f(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$ .

(1) 已知  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 函数  $f(x+\theta)$  是偶函数, 求  $\theta$  的值;

(2) 求函数  $y = [f(x + \frac{\pi}{12})]^2 + [f(x + \frac{\pi}{4})]^2$  的值域.

19. 如图, 已知三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$ , 平面  $A_1AC_1C \perp$  平面  $ABC$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,

$\angle BAC = 30^\circ, A_1A = A_1C = AC, E, F$  分别是  $AC, A_1B_1$  的中点.



(1) 证明:  $EF \perp BC$ ;

(2) 求直线  $EF$  与平面  $A_1BC$  所成角的余弦值.

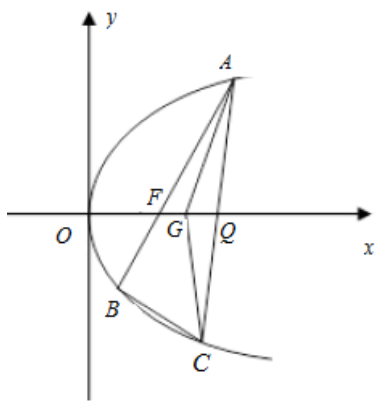
20. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = S_3$ , 数列  $\{b_n\}$  满足: 对每

$n \in \mathbf{N}^*, S_n + b_n, S_{n+1} + b_n, S_{n+2} + b_n$  成等比数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $C_n = \sqrt{\frac{a_n}{2b_n}}, n \in \mathbf{N}^*$ , 证明:  $C_1 + C_2 + \dots + C_n < 2\sqrt{n}, n \in \mathbf{N}^*$ .

21.如图，已知点  $F(1,0)$  为抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$ ，点  $F$  为焦点，过点  $F$  的直线交抛物线于  $A, B$  两点，点  $C$  在抛物线上，使得  $\triangle ABC$  的重心  $G$  在  $x$  轴上，直线  $AC$  交  $x$  轴于点  $Q$ ，且  $Q$  在点  $F$  右侧. 记  $\triangle AFG, \triangle CQG$  的面积为  $S_1, S_2$ .



(1) 求  $p$  的值及抛物线的标准方程;

(2) 求  $\frac{S_1}{S_2}$  的最小值及此时点  $G$  的坐标.

22.已知实数  $a \neq 0$ ，设函数  $f(x) = a \ln x + \sqrt{x+1}, x > 0$ .

(1) 当  $a = -\frac{3}{4}$  时，求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 对任意  $x \in [\frac{1}{e^2}, +\infty)$  均有  $f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2a}$ ，求  $a$  的取值范围.

注： $e = 2.71828\dots$  为自然对数的底数.