

# 2014 年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. （5 分）已知集合  $A = \{x | x^2 - 2x = 0\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，则  $A \cap B =$  （     ）

- A.  $\{0\}$                       B.  $\{0, 1\}$                       C.  $\{0, 2\}$                       D.  $\{0, 1, 2\}$

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】解出集合 A，再由交的定义求出两集合的交集．

【解答】解：∵  $A = \{x | x^2 - 2x = 0\} = \{0, 2\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，

∴  $A \cap B = \{0, 2\}$

故选：C．

【点评】本题考查交的运算，理解好交的定义是解答的关键．

2. （5 分）下列函数中，在区间  $(0, +\infty)$  上为增函数的是 （     ）

- A.  $y = \sqrt{x+1}$                       B.  $y = (x - 1)^2$   
C.  $y = 2^{-x}$                       D.  $y = \log_{0.5}(x+1)$

【考点】4O：对数函数的单调性与特殊点．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】根据基本初等函数的单调性，判断各个选项中函数的单调性，从而得出结论．

【解答】解：由于函数  $y = \sqrt{x+1}$  在  $(-1, +\infty)$  上是增函数，故满足条件，

由于函数  $y = (x - 1)^2$  在  $(0, 1)$  上是减函数，故不满足条件，

由于函数  $y = 2^{-x}$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数，故不满足条件，

由于函数  $y = \log_{0.5}(x+1)$  在  $(-1, +\infty)$  上是减函数，故不满足条件，

故选：A.

【点评】本题主要考查函数的单调性的定义和判断，基本初等函数的单调性，属于基础题.

3. (5分) 曲线  $\begin{cases} x=-1+\cos \theta \\ y=2+\sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数) 的对称中心 ( )

A. 在直线  $y=2x$  上

B. 在直线  $y=-2x$  上

C. 在直线  $y=x-1$  上

D. 在直线  $y=x+1$  上

【考点】QK: 圆的参数方程.

【专题】17: 选作题; 5S: 坐标系和参数方程.

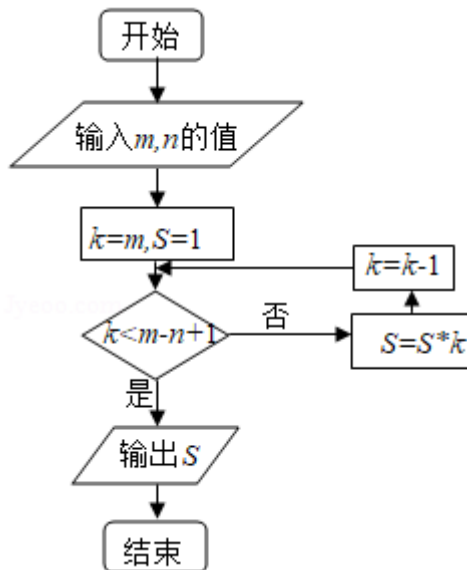
【分析】曲线  $\begin{cases} x=-1+\cos \theta \\ y=2+\sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数) 表示圆，对称中心为圆心，可得结论.

【解答】解：曲线  $\begin{cases} x=-1+\cos \theta \\ y=2+\sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数) 表示圆，圆心为  $(-1, 2)$ ，在直线  $y=-2x$  上，

故选：B.

【点评】本题考查圆的参数方程，考查圆的对称性，属于基础题.

4. (5分) 当  $m=7$ ,  $n=3$  时，执行如图所示的程序框图，输出的  $S$  的值为 ( )



A. 7

B. 42

C. 210

D. 840

【考点】E7：循环结构.

【专题】11：计算题；5K：算法和程序框图.

【分析】算法的功能是求  $S=7 \times 6 \times \dots \times k$  的值，根据条件确定跳出循环的  $k$  值，  
计算输出  $S$  的值.

【解答】解：由程序框图知：算法的功能是求  $S=7 \times 6 \times \dots \times k$  的值，

当  $m=7$ ， $n=3$  时， $m - n + 1 = 7 - 3 + 1 = 5$ ，

$\therefore$  跳出循环的  $k$  值为 4，

$\therefore$  输出  $S=7 \times 6 \times 5=210$ .

故选：C.

【点评】本题考查了循环结构的程序框图，根据框图的流程判断算法的功能是解答本题的关键.

5. (5 分) 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列，则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$  为递增数列”的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件；87：等比数列的性质.

【专题】54：等差数列与等比数列；5L：简易逻辑.

【分析】根据等比数列的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可得到结论.

【解答】解：等比数列  $-1, -2, -4, \dots$ ，满足公比  $q=2 > 1$ ，但  $\{a_n\}$  不是递增数列，充分性不成立.

若  $a_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  为递增数列，但  $q=\frac{1}{2} > 1$  不成立，即必要性不成立，

故“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$  为递增数列”的既不充分也不必要条件，

故选：D.

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，利用等比数列的性质，利用特殊值法是解决本题的关键.

6. (5分) 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ kx-y+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 且  $z=y-x$  的最小值为  $-4$ , 则  $k$  的值为 ( )

A. 2

B. -2

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $-\frac{1}{2}$

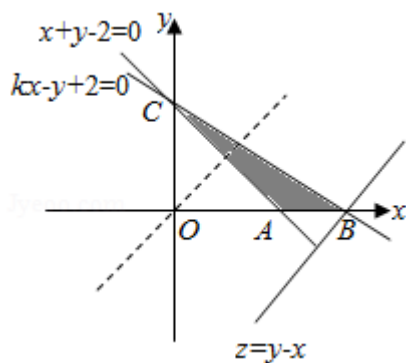
【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】31: 数形结合; 59: 不等式的解法及应用.

【分析】对不等式组中的  $kx - y + 2 \geq 0$  讨论, 当  $k \geq 0$  时, 可行域内没有使目标函数  $z = y - x$  取得最小值的最优解,  $k < 0$  时, 若直线  $kx - y + 2 = 0$  与  $x$  轴的交点在  $x + y - 2 = 0$  与  $x$  轴的交点的左边,  $z = y - x$  的最小值为  $-2$ , 不合题意, 由此结合约束条件作出可行域, 化目标函数为直线方程的斜截式, 由图得到最优解, 联立方程组求出最优解的坐标, 代入目标函数得答案.

【解答】解: 对不等式组中的  $kx - y + 2 \geq 0$  讨论, 可知直线  $kx - y + 2 = 0$  与  $x$  轴的交点在  $x + y - 2 = 0$  与  $x$  轴的交点的右边,

故由约束条件  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ kx-y+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$  作出可行域如图,



当  $y=0$ , 由  $kx - y + 2 = 0$ , 得  $x = -\frac{2}{k}$ ,

$\therefore B(-\frac{2}{k}, 0)$ .

由  $z = y - x$  得  $y = x + z$ .

由图可知, 当直线  $y = x + z$  过  $B(-\frac{2}{k}, 0)$  时直线在  $y$  轴上的截距最小, 即  $z$  最小.

此时  $z_{\min} = 0 + \frac{2}{k} = -4$ , 解得:  $k = -\frac{1}{2}$ .

故选：D.

【点评】本题考查简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题.

7. (5 分) 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中，已知  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(1, 1, \sqrt{2})$ ，若  $S_1, S_2, S_3$  分别表示三棱锥  $D-ABC$  在  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $zOx$  坐标平面上的正投影图形的面积，则 ( )
- A.  $S_1=S_2=S_3$       B.  $S_2=S_1$  且  $S_2 \neq S_3$       C.  $S_3=S_1$  且  $S_3 \neq S_2$       D.  $S_3=S_2$  且  $S_3 \neq S_1$

【考点】JG: 空间直角坐标系.

【专题】5H: 空间向量及应用.

【分析】分别求出三棱锥在各个面上的投影坐标即可得到结论.

【解答】解：设  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(1, 1, \sqrt{2})$ ,

则各个面上的射影分别为  $A', B', C', D'$ ,

在  $xOy$  坐标平面上的正投影  $A'(2, 0, 0)$ ,  $B'(2, 2, 0)$ ,  $C'(0, 2, 0)$ ,  $D'(1, 1, 0)$ ,  $S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ .

在  $yOz$  坐标平面上的正投影  $A'(0, 0, 0)$ ,  $B'(0, 2, 0)$ ,  $C'(0, 2, 0)$ ,  $D'(0, 1, \sqrt{2})$ ,  $S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$

在  $zOx$  坐标平面上的正投影  $A'(2, 0, 0)$ ,  $B'(2, 0, 0)$ ,  $C'(0, 0, 0)$ ,  $D'(0, 1, \sqrt{2})$ ,  $S_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ,

则  $S_3=S_2$  且  $S_3 \neq S_1$ ,

故选：D.

【点评】本题主要考查空间坐标系的应用，求出点对于的投影坐标是解决本题的关键.

8. (5 分) 学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级，依次为“优秀”“合格”“不合格”. 若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙，且其中至少有一门成绩高于乙，则称“学生甲比学生乙成绩好”. 如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好，并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生，

则这一组学生最多有（ ）

- A. 2 人                      B. 3 人                      C. 4 人                      D. 5 人

【考点】F4：进行简单的合情推理.

【专题】5M：推理和证明.

【分析】分别用 ABC 分别表示优秀、及格和不及格，根据题干中的内容推出文成绩得 A，B，C 的学生各最多只有 1 个，继而推得学生的人数.

【解答】解：用 ABC 分别表示优秀、及格和不及格，显然语文成绩得 A 的学生最多只有 1 个，

语文成绩得 B 得也最多只有一个，

得 C 最多只有一个，

因此学生最多只有 3 人，

显然 (AC)(BB)(CA) 满足条件，

故学生最多有 3 个.

故选：B.

【点评】本题主要考查了合情推理，关键是找到语句中的关键词，培养了推理论证的能力.

## 二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. (5 分) 复数  $(\frac{1+i}{1-i})^2 = \underline{-1}$ .

【考点】A5：复数的运算.

【专题】5N：数系的扩充和复数.

【分析】由复数代数形式的除法运算化简括号内部，然后由虚数单位 i 的运算性质得答案.

【解答】解： $(\frac{1+i}{1-i})^2 = [\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}]^2 = (\frac{2i}{2})^2 = -1$ .

故答案为：-1.

【点评】本题考查了复数代数形式的除法运算，考查了虚数单位 i 的运算性质，是基础题.

10. (5 分) 已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}|=1$ ,  $\vec{b}=(2, 1)$ , 且  $\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), 则  $|\lambda| = \underline{\sqrt{5}}$ .

【考点】90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A: 平面向量及应用.

【分析】设  $\vec{a}=(x, y)$ . 由于向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}|=1$ ,  $\vec{b}=(2, 1)$ , 且  $\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), 可得 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=1 \\ \lambda x+2=0 \\ \lambda y+1=0 \end{cases}, \text{ 解出即可.}$$

【解答】解: 设  $\vec{a}=(x, y)$ .

$\because$  向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}|=1$ ,  $\vec{b}=(2, 1)$ , 且  $\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ),

$\therefore \lambda \vec{a} + \vec{b} = \lambda(x, y) + (2, 1) = (\lambda x + 2, \lambda y + 1),$

$\therefore \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=1 \\ \lambda x+2=0 \\ \lambda y+1=0 \end{cases}, \text{ 化为 } \lambda^2=5.$

解得  $|\lambda| = \sqrt{5}$ .

故答案为:  $\sqrt{5}$ .

【点评】本题考查了向量的坐标运算、向量的模的计算公式、零向量等基础知识与基本技能方法, 属于基础题.

11. (5 分) 设双曲线 C 经过点  $(2, 2)$ , 且与  $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$  具有相同渐近线, 则 C

的方程为  $\underline{\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1}$ ; 渐近线方程为  $\underline{y = \pm 2x}$ .

【考点】KC: 双曲线的性质.

【专题】5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用双曲线渐近线之间的关系，利用待定系数法即可得到结论.

【解答】解：与  $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$  具有相同渐近线的双曲线方程可设为  $\frac{y^2}{4} - x^2 = m$ , ( $m \neq 0$ ),

$\because$  双曲线 C 经过点 (2, 2),

$$\therefore m = \frac{2^2}{4} - 2^2 = 1 - 4 = -3,$$

即双曲线方程为  $\frac{y^2}{4} - x^2 = -3$ , 即  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$ ,

对应的渐近线方程为  $y = \pm 2x$ ,

故答案为:  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$ ,  $y = \pm 2x$ .

【点评】本题主要考查双曲线的性质，利用渐近线之间的关系，利用待定系数法是解决本题的关键，比较基础.

12. (5 分) 若等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_7 + a_8 + a_9 > 0$ ,  $a_7 + a_{10} < 0$ , 则当  $n = \underline{8}$  时,  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和最大.

【考点】83: 等差数列的性质.

【专题】54: 等差数列与等比数列.

【分析】可得等差数列  $\{a_n\}$  的前 8 项为正数，从第 9 项开始为负数，进而可得结论.

【解答】解：由等差数列的性质可得  $a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 > 0$ ,

$\therefore a_8 > 0$ , 又  $a_7 + a_{10} = a_8 + a_9 < 0$ ,  $\therefore a_9 < 0$ ,

$\therefore$  等差数列  $\{a_n\}$  的前 8 项为正数，从第 9 项开始为负数，

$\therefore$  等差数列  $\{a_n\}$  的前 8 项和最大，

故答案为: 8.

【点评】本题考查等差数列的性质和单调性，属中档题.

13. (5 分) 把 5 件不同产品摆成一排，若产品 A 与产品 B 相邻，且产品 A 与产



品 C 不相邻, 则不同的摆法有 36 种.

【考点】D9: 排列、组合及简单计数问题.

【专题】50: 排列组合.

【分析】分 3 步进行分析: ①用捆绑法分析 A、B, ②计算其中 A、B 相邻又满足 B、C 相邻的情况, 即将 ABC 看成一个元素, 与其他产品全排列, ③在全部数目中将 A、B 相邻又满足 A、C 相邻的情况排除即可得答案.

【解答】解: 先考虑产品 A 与 B 相邻, 把 A、B 作为一个元素有  $A_4^4$  种方法, 而 A、B 可交换位置, 所以有  $2A_4^4=48$  种摆法,

又当 A、B 相邻又满足 A、C 相邻, 有  $2A_3^3=12$  种摆法,

故满足条件的摆法有  $48 - 12=36$  种.

故答案为: 36.

【点评】本题考查分步计数原理的应用, 要优先分析受到限制的元素, 如本题的 A、B、C.

14. (5 分) 设函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$  ( $A, \omega, \phi$  是常数,  $A > 0, \omega > 0$ ) 若  $f(x)$  在区间  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  上具有单调性, 且  $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}) = -f(\frac{\pi}{6})$ , 则  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ .

【考点】H1: 三角函数的周期性; HK: 由  $y = A\sin(\omega x + \phi)$  的部分图象确定其解析式.

【专题】57: 三角函数的图像与性质.

【分析】由  $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$  求出函数的一条对称轴, 结合  $f(x)$  在区间  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  上具有单调性, 且  $f(\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{\pi}{6})$

可得函数的半周期, 则周期可求.

【解答】解: 由  $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$ , 可知函数  $f(x)$  的一条对称轴为

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{12},$$

则  $x = \frac{\pi}{2}$  离最近对称轴距离为  $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$ .

又  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , 则  $f(x)$  有对称中心  $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ,

由于  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$  上具有单调性,

则  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}T \Rightarrow T \geq \frac{2\pi}{3}$ , 从而  $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{T}{4} \Rightarrow T = \pi$ .

故答案为:  $\pi$ .

**【点评】** 本题考查  $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$  型图象的形状, 考查了学生灵活处理问题和解决问题的能力, 是中档题.

### 三、解答题 (共 6 小题, 共 80 分, 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15. (13 分) 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = \frac{\pi}{3}$ ,  $AB = 8$ , 点  $D$  在边  $BC$  上, 且  $CD = 2$ ,

$$\cos \angle ADC = \frac{1}{7}.$$

(1) 求  $\sin \angle BAD$ ;

(2) 求  $BD$ ,  $AC$  的长.



**【考点】** HR: 余弦定理.

**【专题】** 58: 解三角形.

**【分析】** 根据三角形边角之间的关系, 结合正弦定理和余弦定理即可得到结论.

**【解答】** 解: (1) 在  $\triangle ABC$  中,  $\because \cos \angle ADC = \frac{1}{7}$ ,

$$\therefore \sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\text{则 } \sin \angle BAD = \sin(\angle ADC - \angle B) = \sin \angle ADC \cdot \cos B - \cos \angle ADC \cdot \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} -$$

$$\frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } BD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB} = \frac{8 \times \frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = 3,$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot BC \cos B = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 49,$$

即  $AC=7$ .

**【点评】** 本题主要考查解三角形的应用，根据正弦定理和余弦定理是解决本题本  
题的关键，难度不大.

16. (13 分) 李明在 10 场篮球比赛中的投篮情况统计如下 (假设各场比赛相互  
独立);

场次	投篮次数	命中次数	场次	投篮次数	命中次数
主场 1	22	12	客场 1	18	8
主场 2	15	12	客场 2	13	12
主场 3	12	8	客场 3	21	7
主场 4	23	8	客场 4	18	15
主场 5	24	20	客场 5	25	12

- (1) 从上述比赛中随机选择一场，求李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 的概率;
- (2) 从上述比赛中随机选择一个主场和一个客场，求李明的投篮命中率一场超过 0.6，一场不超过 0.6 的概率;
- (3) 记  $\bar{x}$  是表中 10 个命中次数的平均数，从上述比赛中随机选择一场，记  $x$  为李明在这场比赛中的命中次数，比较  $EX$  与  $\bar{x}$  的大小 (只需写出结论).

**【考点】** C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式; CH: 离散型随机变量的期望与方差.

**【专题】** 5I: 概率与统计.

**【分析】** (1) 根据概率公式，找到李明在该场比赛中超过 0.6 的场次，计算即可，

(2) 根据互斥事件的概率公式，计算即可.

(3) 求出平均数和 EX，比较即可.

**【解答】**解：(1) 设李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 为事件 A，由题意知，李明在该场比赛中超过 0.6 的场次有：主场 2，主场 3，主场 5，客场 2，客场 4，共计 5 场

所以李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 的概率  $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ,

(2) 设李明的投篮命中率一场超过 0.6，一场不超过 0.6 的概率为事件 B，同理可知，李明主场命中率超过 0.6 的概率  $P_1 = \frac{3}{5}$ ，客场命中率超过 0.6 的概率  $P_2 = \frac{2}{5}$ ,

故  $P(B) = P_1 \times (1 - P_2) + P_2 \times (1 - P_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{25}$ ;

(3)  $\bar{x} = \frac{1}{10} (12+8+12+12+8+7+8+15+20+12) = 11.4$

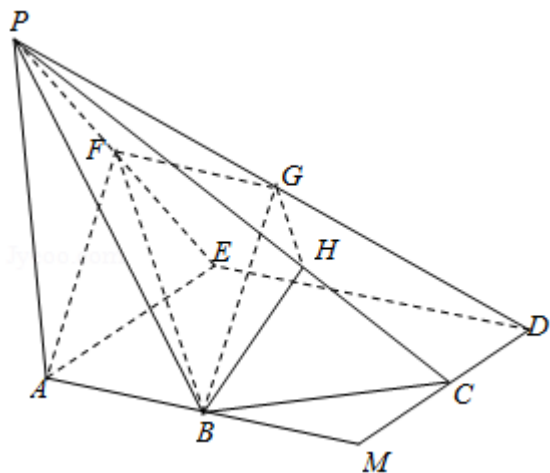
$EX = \bar{x}$

**【点评】**本题主要考查了概率的计算、数学期望，平均数，互斥事件的概率，属于中档题.

17. (14 分) 如图，正方形 AMDE 的边长为 2，B，C 分别为 AM，MD 的中点，在五棱锥 P - ABCDE 中，F 为棱 PE 的中点，平面 ABF 与棱 PD，PC 分别交于点 G，H.

(1) 求证：AB // FG;

(2) 若  $PA \perp$  底面 ABCDE，且  $PA=AE$ ，求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小，并求线段 PH 的长.



【考点】MI：直线与平面所成的角．

【专题】11：计算题；14：证明题；5F：空间位置关系与距离；5G：空间角．

【分析】（1）运用线面平行的判定定理和性质定理即可证得；

（2）由于  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ，底面  $AMDE$  为正方形，建立如图的空间直角坐标系  $Axyz$ ，分别求出  $A$ ， $B$ ， $C$ ， $E$ ， $P$ ， $F$ ，及向量  $BC$  的坐标，设平面  $ABF$  的法向量为  $n = (x, y, z)$ ，求出一个值，设直线  $BC$  与平面  $ABF$  所成的角为  $\alpha$ ，运用  $\sin \alpha = |\cos \langle n, \overrightarrow{BC} \rangle|$ ，求出角  $\alpha$ ；设  $H(u, v, w)$ ，再设  $\overrightarrow{PH} = \lambda \overrightarrow{PC} (0 < \lambda < 1)$ ，用  $\lambda$  表示  $H$  的坐标，再由  $n \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ ，求出  $\lambda$  和  $H$  的坐标，再运用空间两点的距离公式求出  $PH$  的长．

【解答】（1）证明：在正方形  $AMDE$  中， $\because B$  是  $AM$  的中点，

$\therefore AB \parallel DE$ ，又  $\because AB \notin$  平面  $PDE$ ， $\therefore AB \parallel$  平面  $PDE$ ，

$\because AB \subset$  平面  $ABF$ ，且平面  $ABF \cap$  平面  $PDE = FG$ ，

$\therefore AB \parallel FG$ ；

（2）解： $\because PA \perp$  底面  $ABCD$ ， $\therefore PA \perp AB$ ， $PA \perp AE$ ，

如图建立空间直角坐标系  $Axyz$ ，则  $A(0, 0, 0)$ ，

$B(1, 0, 0)$ ， $C(2, 1, 0)$ ， $P(0, 0, 2)$ ，

$E(0, 2, 0)$ ， $F(0, 1, 1)$ ， $\overrightarrow{BC} = (1, 1, 0)$ ，

设平面  $ABF$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases},$$

令  $z=1$ , 则  $y=-1$ ,  $\therefore \vec{n} = (0, -1, 1)$ ,

设直线  $BC$  与平面  $ABF$  所成的角为  $\alpha$ , 则

$$\sin \alpha = |\cos \langle \vec{n}, \vec{BC} \rangle| = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{BC}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{BC}|} \right| = \frac{1}{2},$$

$\therefore$  直线  $BC$  与平面  $ABF$  所成的角为  $\frac{\pi}{6}$ ,

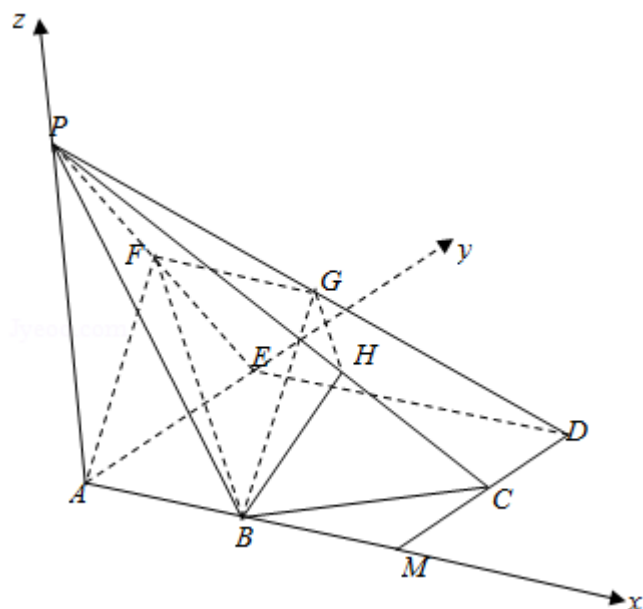
设  $H(u, v, w)$ ,  $\because H$  在棱  $PC$  上,  $\therefore$  可设  $\vec{PH} = \lambda \vec{PC} (0 < \lambda < 1)$ ,

即  $(u, v, w - 2) = \lambda (2, 1, -2)$ ,  $\therefore u = 2\lambda, v = \lambda, w = 2 - 2\lambda$ ,  $\because \vec{n}$  是平面  $ABF$  的法向量,

$\therefore \vec{n} \cdot \vec{AH} = 0$ , 即  $(0, -1, 1) \cdot (2\lambda, \lambda, 2 - 2\lambda) = 0$ , 解得  $\lambda = \frac{2}{3}$ ,  $\therefore H$

$$\left( \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right),$$

$$\therefore PH = \sqrt{\left( \frac{4}{3} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \left( -\frac{4}{3} \right)^2} = 2.$$



**【点评】** 本题主要考查空间直线与平面的位置关系，考查直线与平面平行、垂直的判定和性质，同时考查直线与平面所成的角的求法，考查运用空间直角坐标系求角和距离，是一道综合题.

18. (13分) 已知函数  $f(x) = x\cos x - \sin x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(1) 求证:  $f(x) \leq 0$ ;

(2) 若  $a < \frac{\sin x}{x} < b$  对  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  上恒成立, 求  $a$  的最大值与  $b$  的最小值.

【考点】6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】53: 导数的综合应用.

【分析】(1) 求出  $f'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$ , 判定出在区间  $\in (0, \frac{\pi}{2})$

上  $f'(x) = -x\sin x < 0$ , 得  $f(x)$  在区间  $\in [0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减, 从而  $f(x) \leq$

$f(0) = 0$ .

(2) 当  $x > 0$  时, “ $\frac{\sin x}{x} > a$ ”等价于“ $\sin x - ax > 0$ ”, “ $\frac{\sin x}{x} < b$ ”等价于“ $\sin x - bx <$

0”构造函数  $g(x) = \sin x - cx$ , 通过求函数的导数讨论参数  $c$  求出函数的最值, 进一步求出  $a, b$  的最值.

【解答】解: (1) 由  $f(x) = x\cos x - \sin x$  得

$f'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$ ,

此在区间  $\in (0, \frac{\pi}{2})$  上  $f'(x) = -x\sin x < 0$ ,

所以  $f(x)$  在区间  $\in [0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减,

从而  $f(x) \leq f(0) = 0$ .

(2) 当  $x > 0$  时, “ $\frac{\sin x}{x} > a$ ”等价于“ $\sin x - ax > 0$ ”, “ $\frac{\sin x}{x} < b$ ”等价于“ $\sin x - bx <$

0”

令  $g(x) = \sin x - cx$ , 则  $g'(x) = \cos x - c$ ,

当  $c \leq 0$  时,  $g(x) > 0$  对  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  上恒成立,

当  $c \geq 1$  时, 因为对任意  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $g'(x) = \cos x - c < 0$ ,

所以  $g(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减,

从而,  $g(x) < g(0) = 0$  对任意  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  恒成立,

当  $0 < c < 1$  时, 存在唯一的  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  使得  $g'(x_0) = \cos x_0 - c = 0$ ,

$g(x)$  与  $g'(x)$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  上的情况如下:

$x$	$(0, x_0)$	$x_0$	$(x_0, \frac{\pi}{2})$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	↑		↓

因为  $g(x)$  在区间  $(0, x_0)$  上是增函数,

所以  $g(x_0) > g(0) = 0$  进一步  $g(x) > 0$  对任意  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  恒成立,

当且仅当  $g(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2}c \geq 0$  即  $0 < c \leq \frac{2}{\pi}$

综上所述当且仅当  $c \leq \frac{2}{\pi}$  时,  $g(x) > 0$  对任意  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  恒成立,

当且仅当  $c \geq 1$  时,  $g(x) < 0$  对任意  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  恒成立,

所以若  $a < \frac{\sin x}{x} < b$  对  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  上恒成立, 则  $a$  的最大值为  $\frac{2}{\pi}$ ,  $b$  的最小值为 1

**【点评】** 本题考查利用导数求函数的单调区间; 利用导数求函数的最值; 考查解决不等式问题常通过构造函数解决函数的最值问题, 属于一道综合题.

19. (14 分) 已知椭圆  $C: x^2 + 2y^2 = 4$ ,

(1) 求椭圆  $C$  的离心率

(2) 设  $O$  为原点, 若点  $A$  在椭圆  $C$  上, 点  $B$  在直线  $y=2$  上, 且  $OA \perp OB$ , 求直线  $AB$  与圆  $x^2 + y^2 = 2$  的位置关系, 并证明你的结论.

**【考点】** K4: 椭圆的性质; KJ: 圆与圆锥曲线的综合.

**【专题】** 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** (1) 化椭圆方程为标准式, 求出半长轴和短半轴, 结合隐含条件求出半焦距, 则椭圆的离心率可求;

(2) 设出点  $A, B$  的坐标分别为  $(x_0, y_0), (t, 2)$ , 其中  $x_0 \neq 0$ , 由  $OA \perp OB$  得到  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ , 用坐标表示后把  $t$  用含有  $A$  点的坐标表示, 然后分  $A, B$  的横坐



标相等和不相等写出直线 AB 的方程，然后由圆  $x^2+y^2=2$  的圆心到 AB 的距离和圆的半径相等说明直线 AB 与圆  $x^2+y^2=2$  相切.

【解答】解：（1）由  $x^2+2y^2=4$ ，得椭圆 C 的标准方程为  $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ .

$\therefore a^2=4$ ,  $b^2=2$ , 从而  $c^2=a^2-b^2=2$ .

因此  $a=2$ ,  $c=\sqrt{2}$ .

故椭圆 C 的离心率  $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

（2）直线 AB 与圆  $x^2+y^2=2$  相切.

证明如下：

设点 A, B 的坐标分别为  $(x_0, y_0)$ ,  $(t, 2)$ , 其中  $x_0 \neq 0$ .

$\because OA \perp OB$ ,

$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ , 即  $tx_0+2y_0=0$ , 解得  $t=-\frac{2y_0}{x_0}$ .

当  $x_0=t$  时,  $y_0=\frac{t^2}{2}$ , 代入椭圆 C 的方程, 得  $t=\pm\sqrt{2}$ .

故直线 AB 的方程为  $x=\pm\sqrt{2}$ , 圆心 O 到直线 AB 的距离  $d=\sqrt{2}$ .

此时直线 AB 与圆  $x^2+y^2=2$  相切.

当  $x_0 \neq t$  时, 直线 AB 的方程为  $y-2=\frac{y_0-2}{x_0-t}(x-t)$ ,

即  $(y_0-2)x-(x_0-t)y+2x_0-ty_0=0$ .

圆心 O 到直线 AB 的距离  $d=\frac{|2x_0-ty_0|}{\sqrt{(y_0-2)^2+(x_0-t)^2}}$ .

又  $x_0^2+2y_0^2=4$ ,  $t=-\frac{2y_0}{x_0}$ .

故  $d=\frac{|2x_0+\frac{2y_0^2}{x_0}|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+\frac{4y_0^2}{x_0^2}+4}}=\frac{|\frac{4+x_0^2}{x_0}|}{\sqrt{\frac{x_0^4+8x_0^2+16}{2x_0^2}}}=\sqrt{2}$ .

此时直线 AB 与圆  $x^2+y^2=2$  相切.

【点评】本题考查椭圆的简单几何性质，考查了圆与圆锥曲线的综合，训练了由

圆心到直线的距离判断直线和圆的位置关系，体现了分类讨论的数学思想方法，考查了计算能力和逻辑思维能力，是压轴题.

20. (13 分) 对于数对序列  $P: (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ , 记  $T_1(P) = a_1 + b_1$ ,  $T_k(P) = b_k + \max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$  ( $2 \leq k \leq n$ ), 其中  $\max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$  表示  $T_{k-1}(P)$  和  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$  两个数中最大的数,
- (I) 对于数对序列  $P: (2, 5), (4, 1)$ , 求  $T_1(P)$ ,  $T_2(P)$  的值;
- (II) 记  $m$  为  $a, b, c, d$  四个数中最小的数, 对于由两个数对  $(a, b), (c, d)$  组成的数对序列  $P: (a, b), (c, d)$  和  $P': (c, d), (a, b)$ , 试分别对  $m=a$  和  $m=d$  两种情况比较  $T_2(P)$  和  $T_2(P')$  的大小;
- (III) 在由五个数对  $(11, 8), (5, 2), (16, 11), (11, 11), (4, 6)$  组成的所有数对序列中, 写出一个数对序列  $P$  使  $T_5(P)$  最小, 并写出  $T_5(P)$  的值 (只需写出结论).

【考点】F9: 分析法和综合法.

【专题】23: 新定义; 48: 分析法.

【分析】(I) 利用  $T_1(P) = a_1 + b_1$ ,  $T_k(P) = b_k + \max\{T_{k-1}(P), a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$  ( $2 \leq k \leq n$ ), 可求  $T_1(P)$ ,  $T_2(P)$  的值;

(II)  $T_2(P) = \max\{a+b+d, a+c+d\}$ ,  $T_2(P') = \max\{c+d+b, c+a+b\}$ , 分类讨论, 利用新定义, 可比较  $T_2(P)$  和  $T_2(P')$  的大小;

(III) 根据新定义, 可得结论.

【解答】解: (I)  $T_1(P) = 2+5=7$ ,  $T_2(P) = 1+\max\{T_1(P), 2+4\} = 1+\max\{7, 6\} = 8$ ;

(II)  $T_2(P) = \max\{a+b+d, a+c+d\}$ ,  $T_2(P') = \max\{c+d+b, c+a+b\}$ .

当  $m=a$  时,  $T_2(P') = \max\{c+d+b, c+a+b\} = c+d+b$ ,

$\because a+b+d \leq c+d+b$ , 且  $a+c+d \leq c+b+d$ ,  $\therefore T_2(P) \leq T_2(P')$ ;

当  $m=d$  时,  $T_2(P') = \max\{c+d+b, c+a+b\} = c+a+b$ ,

$\because a+b+d \leq c+a+b$ , 且  $a+c+d \leq c+a+d$ ,  $\therefore T_2(P) \leq T_2(P')$ ;

$\therefore$  无论  $m=a$  和  $m=d$ ,  $T_2(P) \leq T_2(P')$ ;

(Ⅲ) 根据数对序列  $(4, 6)$ ,  $(11, 11)$ ,  $(16, 11)$ ,  $(11, 8)$ ,  $(5, 2)$ ,  
可得  $T_1(P) = 4+6=10$ ;  $T_2(P) = 11+15=26$ ;  $T_3(P) = 31+11=42$ ;  $T_4(P)$   
 $= 8+42=50$ ;  
 $T_5(P) = 2+50=52$ ;

逐一检验可得, 此数对序列使  $T_5(P)$  最小.

**【点评】** 本题考查新定义, 考查学生分析解决问题的能力, 正确理解与运用新定义是解题的关键, 属于难题.