

2021年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学

第一部分（选择题共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$ ， $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ，则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-1, 2)$ B. $(-1, 2]$ C. $[0, 1)$ D. $[0, 1]$

【答案】B

【解析】

【分析】结合题意利用并集的定义计算即可.

【详解】由题意可得： $A \cup B = \{x | -1 < x \leq 2\}$ ，即 $A \cup B = (-1, 2]$.

故选：B.

2. 在复平面内，复数 z 满足 $(1-i)z = 2$ ，则 $z =$ ()

- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $1-i$ D. $1+i$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意利用复数的运算法则整理计算即可求得最终结果.

【详解】由题意可得： $z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$.

故选：D.

3.

已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0, 1]$ 的函数，那么“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用两者之间的推出关系可判断两者之间的条件关系.

【详解】若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ，

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$,

比如 $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$,

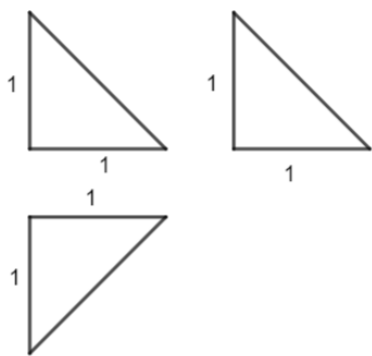
但 $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ 在 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 为减函数, 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 为增函数,

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$ 推不出 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,

故 “函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增” 是 “ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ” 的充分不必要条件,

故选: A.

4. 某四面体的三视图如图所示, 该四面体的表面积为 ()



A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

B. 4

C. $3+\sqrt{3}$

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据三视图可得如图所示的几何体 (三棱锥), 根据三视图中的数据可计算该几何体的表面积.

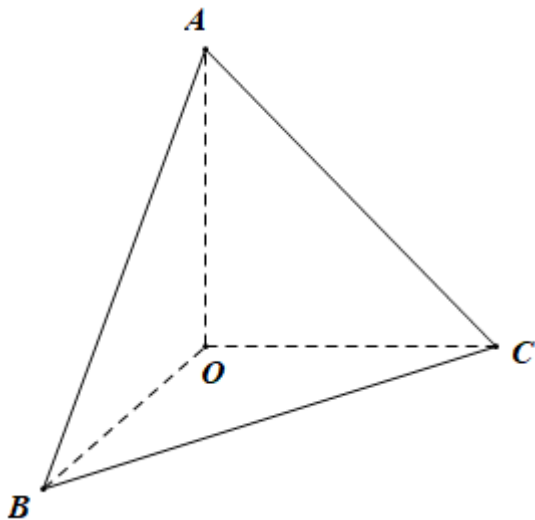
【详解】根据三视图可得如图所示的几何体-正三棱锥 $O-ABC$,

其侧面为等腰直角三角形, 底面等边三角形,

由三视图可得该正三棱锥的侧棱长为1,

故其表面积为 $3 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$,

故选: A.



5. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ，且离心率为 2，则该双曲线的标准方程为 ()

- A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ C. $x^2 - \frac{\sqrt{3}y^2}{3} = 1$ D. $\frac{\sqrt{3}x^2}{3} - y^2 = 1$

【答案】A

【解析】

【分析】分析可得 $b = \sqrt{3}a$ ，再将点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 代入双曲线的方程，求出 a 的值，即可得出双曲线的标准方程.

【详解】 $\because e = \frac{c}{a} = 2$ ，则 $c = 2a$ ， $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}a$ ，则双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ ，

将点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的坐标代入双曲线的方程可得 $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{3a^2} = \frac{1}{a^2} = 1$ ，解得 $a = 1$ ，故 $b = \sqrt{3}$ ，

因此，双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

故选：A.

6. $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列，其中 $\frac{a_k}{b_k} (1 \leq k \leq 5)$ 为常值， $a_1 = 288$ ， $a_5 = 96$ ， $b_1 = 192$ ，则 $b_3 =$ (

)

- A. 64 B. 128 C. 256 D. 512

【答案】B

【解析】

【分析】由已知条件求出 b_5 的值，利用等差中项的性质可求得 b_3 的值.

【详解】由已知条件可得 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_5}{b_5}$ ，则 $b_5 = \frac{a_5 b_1}{a_1} = \frac{96 \times 192}{288} = 64$ ，因此， $b_3 = \frac{b_1 + b_5}{2} = \frac{192 + 64}{2} = 128$.

故选：B.

7. 函数 $f(x) = \cos x - \cos 2x$ ，试判断函数的奇偶性及最大值（ ）

A. 奇函数，最大值为2

B. 偶函数，最大值为2

C. 奇函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

D. 偶函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

【答案】D

【解析】

【分析】由函数奇偶性的定义结合三角函数的性质可判断奇偶性；利用二倍角公式结合二次函数的性质可判断最大值.

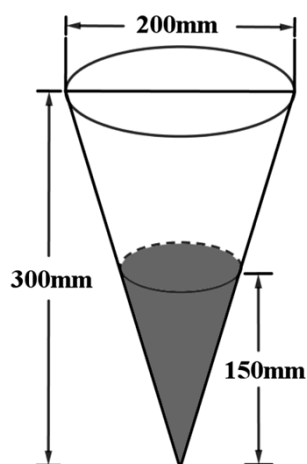
【详解】由题意， $f(-x) = \cos(-x) - \cos(-2x) = \cos x - \cos 2x = f(x)$ ，所以该函数为偶函数，

$$\text{又 } f(x) = \cos x - \cos 2x = -2\cos^2 x + \cos x + 1 = -2\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8},$$

所以当 $\cos x = \frac{1}{4}$ 时， $f(x)$ 取最大值 $\frac{9}{8}$.

故选：D.

8. 定义：24小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度．其中小雨（<10mm），中雨（10mm-25mm），大雨（25mm-50mm），暴雨（50mm-100mm），小明用一个圆锥形容器接了24小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级（ ）



A. 小雨

B. 中雨

C. 大雨

D. 暴雨

【答案】B

【解析】

【分析】计算出圆锥体积，除以圆面的面积即可得降雨量，即可得解.

【详解】由题意，一个半径为 $\frac{200}{2}=100(\text{mm})$ 的圆面内的降雨充满一个底面半径为 $\frac{200}{2}\times\frac{150}{300}=50(\text{mm})$ ，高为 $150(\text{mm})$ 的圆锥，
所以积水厚度 $d=\frac{\frac{1}{3}\pi\times 50^2\times 150}{\pi\times 100^2}=12.5(\text{mm})$ ，属于中雨.

故选：B.

9. 已知圆 $C:x^2+y^2=4$ ，直线 $l:y=kx+m$ ，当 k 变化时， l 截得圆 C 弦长的最小值为2，则 $m=($

A. ± 2 B. $\pm\sqrt{2}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\pm\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】先求得圆心到直线距离，即可表示出弦长，根据弦长最小值得出 m

【详解】由题可得圆心为 $(0,0)$ ，半径为2，

则圆心到直线的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$ ，

则弦长为 $2\sqrt{4-\frac{m^2}{k^2+1}}$ ，

则当 $k=0$ 时，弦长取得最小值为 $2\sqrt{4-m^2}=2$ ，解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

故选：C.

10. 数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列，且 $a_1\geq 3$ ， $a_1+a_2+\cdots+a_n=100$ ，则 n 的最大值为（ ）

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】使数列首项、递增幅度均最小，结合等差数列的通项及求和公式即可得解.

【详解】若要使 n 尽可能的大，则 a_1 ，递增幅度要尽可能小，

不妨设数列 $\{a_n\}$ 是首项为3，公差为1的等差数列，其前 n 项和为 S_n ，

$$\text{则 } a_n = n + 2, \quad S_{11} = \frac{3+13}{2} \times 11 = 88 < 100, \quad S_{12} = \frac{3+14}{2} \times 12 = 102 > 100,$$

所以 n 的最大值为11.

故选：C.

第二部分（非选择题共110分）

二、填空题5小题，每小题5分，共25分.

11. $(x^3 - \frac{1}{x})^4$ 展开式中常数项为_____.

【答案】 -4

【解析】

【详解】 试题分析： $(x^3 - \frac{1}{x})^4$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_4^r (x^3)^{4-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r C_4^r x^{12-4r}$,

令 $r = 3$ 得常数项为 $T_4 = (-1)^3 C_4^3 = -4$.

考点：二项式定理.

12.

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，焦点为 F ，点 M 为抛物线 C 上的点，且 $|FM| = 6$ ，则 M 的横坐标是_____；

作 $MN \perp x$ 轴于 N ，则 $S_{\triangle FMN} =$ _____.

【答案】 ①. 5 ②. $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据焦半径公式可求 M 的横坐标，求出纵坐标后可求 $S_{\triangle FMN}$.

【详解】 因为抛物线的方程为 $y^2 = 4x$ ，故 $p = 2$ 且 $F(1, 0)$.

因为 $|MF| = 6$ ， $x_M + \frac{p}{2} = 6$ ，解得 $x_M = 5$ ，故 $y_M = \pm 2\sqrt{5}$ ，

所以 $S_{\triangle FMN} = \frac{1}{2} \times (5-1) \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ ，

故答案为：5， $4\sqrt{5}$.

13. $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{b} = (2, -1)$ ， $\vec{c} = (0, 1)$ ，则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$ _____； $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

【答案】 ①. 0 ②. 3

【解析】

【分析】根据坐标求出 $\vec{a} + \vec{b}$ ，再根据数量积的坐标运算直接计算即可.

【详解】 $\because \vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (2, -1), \vec{c} = (0, 1)$,

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (4, 0), \therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 4 \times 0 + 0 \times 1 = 0,$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 2 + 1 \times (-1) = 3.$$

故答案为：0；3.

14. 若点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称，写出一个符合题意的 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5\pi}{12}$ (满足 $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z$ 即可)

【解析】

【分析】根据 P, Q 在单位圆上，可得 $\theta, \theta + \frac{\pi}{6}$ 关于 y 轴对称，得出 $\theta + \frac{\pi}{6} + \theta = \pi + 2k\pi, k \in Z$ 求解.

【详解】 $\because P(\cos \theta, \sin \theta)$ 与 $Q\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right)$ 关于 y 轴对称，

即 $\theta, \theta + \frac{\pi}{6}$ 关于 y 轴对称，

$$\theta + \frac{\pi}{6} + \theta = \pi + 2k\pi, k \in Z,$$

$$\text{则 } \theta = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in Z,$$

当 $k = 0$ 时，可取 θ 的一个值为 $\frac{5\pi}{12}$.

故答案为： $\frac{5\pi}{12}$ (满足 $\theta = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in Z$ 即可).

15. 已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$ ，给出下列四个结论：

①若 $k = 0$ ，则 $f(x)$ 有两个零点；

② $\exists k < 0$ ，使得 $f(x)$ 有一个零点；

③ $\exists k < 0$ ，使得 $f(x)$ 有三个零点；

④ $\exists k > 0$ ，使得 $f(x)$ 有三个零点.

以上正确结论得序号是_____.

【答案】 ①②④

【解析】

【分析】由 $f(x)=0$ 可得出 $|\lg x|=kx+2$ ，考查直线 $y=kx+2$ 与曲线 $g(x)=|\lg x|$ 的左、右支分别相切的情形，利用方程思想以及数形结合可判断各选项的正误。

【详解】对于①，当 $k=0$ 时，由 $f(x)=|\lg x|-2=0$ ，可得 $x=\frac{1}{100}$ 或 $x=100$ ，①正确；

对于②，考查直线 $y=kx+2$ 与曲线 $y=-\lg x(0 < x < 1)$ 相切于点 $P(t, -\lg t)$ ，

$$\text{对函数 } y = -\lg x \text{ 求导得 } y' = -\frac{1}{x \ln 10}, \text{ 由题意可得 } \begin{cases} kt+2 = -\lg t \\ k = -\frac{1}{t \ln 10} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} t = \frac{e}{100} \\ k = -\frac{100}{e} \lg e \end{cases},$$

所以，存在 $k = -\frac{100}{e} \lg e < 0$ ，使得 $f(x)$ 只有一个零点，②正确；

对于③，当直线 $y=kx+2$ 过点 $(1, 0)$ 时， $k+2=0$ ，解得 $k=-2$ ，

所以，当 $-\frac{100}{e} \lg e < k < -2$ 时，直线 $y=kx+2$ 与曲线 $y=-\lg x(0 < x < 1)$ 有两个交点，

若函数 $f(x)$ 有三个零点，则直线 $y=kx+2$ 与曲线 $y=-\lg x(0 < x < 1)$ 有两个交点，

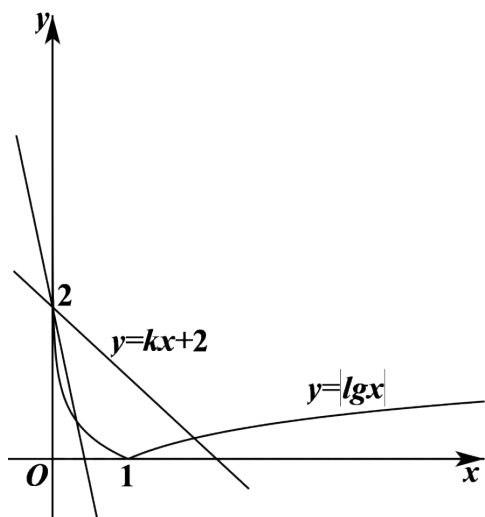
$$\text{直线 } y = kx+2 \text{ 与曲线 } y = \lg x(x > 1) \text{ 有一个交点，所以，} \begin{cases} -\frac{100}{e} \lg e < k < -2 \\ k+2 > 0 \end{cases}, \text{ 此不等式无解，}$$

因此，不存在 $k < 0$ ，使得函数 $f(x)$ 有三个零点，③错误；

对于④，考查直线 $y=kx+2$ 与曲线 $y=\lg x(x > 1)$ 相切于点 $P(t, \lg t)$ ，

$$\text{对函数 } y = \lg x \text{ 求导得 } y' = \frac{1}{x \ln 10}, \text{ 由题意可得 } \begin{cases} kt+2 = \lg t \\ k = \frac{1}{t \ln 10} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} t = 100e \\ k = \frac{\lg e}{100e} \end{cases},$$

所以，当 $0 < k < \frac{\lg e}{100e}$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点，④正确。



故答案为：①②④.

【点睛】思路点睛：已知函数的零点或方程的根的情况，求解参数的取值范围问题的本质都是研究函数的零点问题，求解此类问题的一般步骤：

- （1）转化，即通过构造函数，把问题转化成所构造函数的零点问题；
- （2）列式，即根据函数的零点存在定理或结合函数的图象列出关系式；
- （3）得解，即由列出的式子求出参数的取值范围.

三、解答题共6小题，共85分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $c = 2b \cos B$ ， $C = \frac{2\pi}{3}$.

- （1）求 B 的大小；
 - （2）在下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，并求出 BC 边上的中线的长度.
- ① $c = \sqrt{2}b$ ；② 周长为 $4 + 2\sqrt{3}$ ；③ 面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ；

【答案】（1） $\frac{\pi}{6}$ ；（2）答案不唯一，具体见解析.

【解析】

【分析】（1）由正弦定理化边为角即可求解；

（2）若选择①：由正弦定理求解可得不存在；

若选择②：由正弦定理结合周长可求得外接圆半径，即可得出各边，再由余弦定理可求；

若选择③：由面积公式可求各边长，再由余弦定理可求.

【详解】(1) $\because c = 2b \cos B$, 则由正弦定理可得 $\sin C = 2 \sin B \cos B$,

$$\therefore \sin 2B = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore C = \frac{2\pi}{3}, \therefore B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), 2B \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\therefore 2B = \frac{\pi}{3}, \text{解得 } B = \frac{\pi}{6};$$

$$(2) \text{若选择①: 由正弦定理结合 (1) 可得 } \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

与 $c = \sqrt{2}b$ 矛盾, 故这样的 $\triangle ABC$ 不存在;

$$\text{若选择②: 由 (1) 可得 } A = \frac{\pi}{6},$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ,

$$\text{则由正弦定理可得 } a = b = 2R \sin \frac{\pi}{6} = R,$$

$$c = 2R \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}R,$$

$$\text{则周长 } a + b + c = 2R + \sqrt{3}R = 4 + 2\sqrt{3},$$

$$\text{解得 } R = 2, \text{ 则 } a = 2, c = 2\sqrt{3},$$

由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为:

$$\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 1 \times \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{7};$$

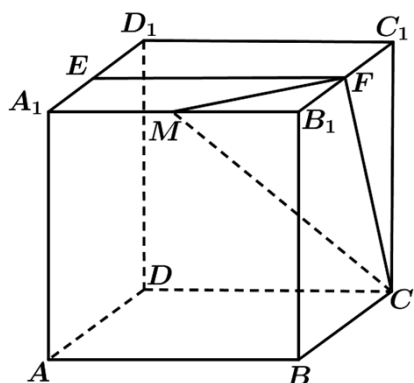
$$\text{若选择③: 由 (1) 可得 } A = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } a = b,$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ 解得 } a = \sqrt{3},$$

则由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为:

$$\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \times b \times \frac{a}{2} \times \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

17. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 点 E 为 A_1D_1 中点, 直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F .



(1) 证明：点 F 为 B_1C_1 的中点；

(2) 若点 M 为棱 A_1B_1 上一点，且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.

【答案】 (1) 证明见解析； (2) $\frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】 (1) 首先将平面 CDE 进行扩展，然后结合所得的平面与直线 B_1C_1 的交点即可证得题中的结论；

(2) 建立空间直角坐标系，利用空间直角坐标系求得相应平面的法向量，然后解方程即可求得实数 λ 的值.

【详解】 (1) 如图所示，取 B_1C_1 的中点 F' ，连结 $DE, EF', F'C$ ，

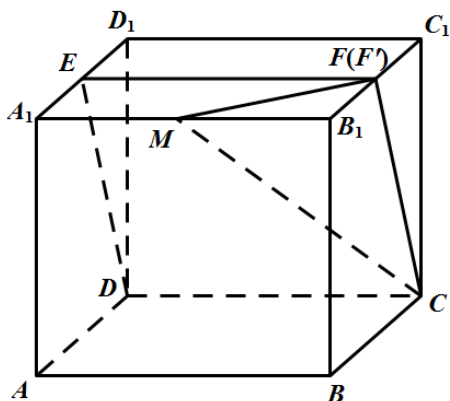
由于 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体， E, F' 为中点，故 $EF' \parallel CD$ ，

从而 E, F', C, D 四点共面，即平面 CDE 即平面 $CDEF'$ ，

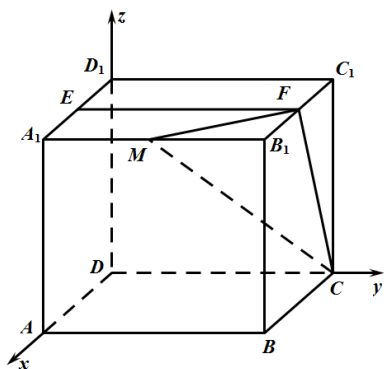
据此可得：直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F' ，

当直线与平面相交时只有唯一的交点，故点 F 与点 F' 重合，

即点 F 为 B_1C_1 中点.



(2) 以点 D 为坐标原点， DA, DC, DD_1 方向分别为 x 轴， y 轴， z 轴正方形，建立空间直角坐标系 $D-xyz$



不妨设正方体的棱长为2，设 $\frac{A_1M}{A_1B_1} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ ，

则： $M(2, 2\lambda, 2), C(0, 2, 0), F(1, 2, 2), E(1, 0, 2)$ ，

从而： $\overrightarrow{MC} = (-2, 2-2\lambda, -2), \overrightarrow{CF} = (1, 0, 2), \overrightarrow{FE} = (0, -2, 0)$ ，

设平面 MCF 的法向量为： $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，则：

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{MC} = -2x_1 + (2-2\lambda)y_1 - 2z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CF} = x_1 + 2z_1 = 0 \end{cases},$$

令 $z_1 = -1$ 可得： $\vec{m} = \left(2, \frac{1}{1-\lambda}, -1\right)$ ，

设平面 CFE 的法向量为： $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则：

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{FE} = -2y_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = x_2 + 2z_2 = 0 \end{cases},$$

令 $z_2 = -1$ 可得： $\vec{n} = (2, 0, -1)$ ，

从而： $\vec{m} \cdot \vec{n} = 5, |\vec{m}| = \sqrt{5 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2}, |\vec{n}| = \sqrt{5}$ ，

则： $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \times |\vec{n}|} = \frac{5}{\sqrt{5 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，

整理可得： $(\lambda - 1)^2 = \frac{1}{4}$ ，故 $\lambda = \frac{1}{2}$ ($\lambda = \frac{3}{2}$ 舍去)。

【点睛】本题考查了立体几何中的线面关系和二面角的求解问题，意在考查学生的空间想象能力和逻辑推理能力，对于立体几何中角的计算问题，往往可以利用空间向量法，通过求解平面的法向量，利用向量的夹角公式求解。

18.

为加快新冠肺炎检测效率，某检测机构采取“ k 合1检测法”，即将 k 个人的拭子样本合并检测，若为阴性，则可以确定所有样本都是阴性的；若为阳性，则还需要对本组的每个人再做检测．现有100人，已知其中2人感染病毒．

(1) ①若采用“10合1检测法”，且两名患者在同一组，求总检测次数；

②已知10人分成一组，分10组，两名感染患者在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$ ，定义随机变量 X 为总检测次数，求检测次数 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ ；

(2) 若采用“5合1检测法”，检测次数 Y 的期望为 $E(Y)$ ，试比较 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 的大小(直接写出结果)．

【答案】(1) ①20次；②分布列见解析；期望为 $\frac{320}{11}$ ；(2) 见解析．

【解析】

【分析】(1) ①由题设条件还原情境，即可得解；

②求出 X 的取值情况，求出各情况下的概率，进而可得分布列，再由期望的公式即可得解；

(2) 求出 $E(Y)$ ，分类即可得解．

【详解】(1) ①对每组进行检测，需要10次；再对结果为阳性的组每个人进行检测，需要10次；所以总检测次数为20次；

②由题意， X 可以取20，30，

$$P(X=20)=\frac{1}{11}, \quad P(X=30)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11},$$

则 X 的分布列：

X	20	30
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

$$\text{所以 } E(X)=20 \times \frac{1}{11} + 30 \times \frac{10}{11} = \frac{320}{11};$$

(2) 由题意， Y 可以取25，30，设两名感染者在同一组的概率为 p ，

$$P(Y=25)=p, \quad P(Y=30)=1-p,$$

$$\text{则 } E(Y)=25p+30(1-p)=30-5p,$$

$$\text{若 } p=\frac{2}{11} \text{ 时, } E(X)=E(Y);$$

$$\text{若 } p>\frac{2}{11} \text{ 时, } E(X)>E(Y);$$

若 $p < \frac{2}{11}$ 时, $E(X) < E(Y)$.

19. 已知函数 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}$.

(1) 若 $a=0$, 求 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 以及最大值和最小值.

【答案】 (1) $4x+y-5=0$; (2) 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -1)$ 、 $(4, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 4)$, 最大值为 1, 最小值为 $-\frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】 (1) 求出 $f(1)$ 、 $f'(1)$ 的值, 利用点斜式可得出所求切线的方程;

(2) 由 $f'(-1)=0$ 可求得实数 a 的值, 然后利用导数分析函数 $f(x)$ 的单调性与极值, 由此可得出结果.

【详解】 (1) 当 $a=0$ 时, $f(x) = \frac{3-2x}{x^2}$, 则 $f'(x) = \frac{2(x-3)}{x^3}$, $\therefore f(1)=1$, $f'(1)=-4$,

此时, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=-4(x-1)$, 即 $4x+y-5=0$;

(2) 因为 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}$, 则 $f'(x) = \frac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2} = \frac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2}$,

由题意可得 $f'(-1) = \frac{2(4-a)}{(a+1)^2} = 0$, 解得 $a=4$,

故 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+4}$, $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$, 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -1)$ 、 $(4, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 4)$.

当 $x < \frac{3}{2}$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $f(x) < 0$.

所以, $f(x)_{\max} = f(-1) = 1$, $f(x)_{\min} = f(4) = -\frac{1}{4}$.

20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(0, -2)$ ，以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$ 。

(1) 求椭圆 E 的标准方程；

(2) 过点 $P(0, -3)$ 的直线 l 斜率为 k ，交椭圆 E 于不同的两点 B, C ，直线 AB, AC 交 $y = -3$ 于点 M, N ，直线 AC 交 $y = -3$ 于点 N ，若 $|PM| + |PN| \leq 15$ ，求 k 的取值范围。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ ； (2) $[-3, -1) \cup (1, 3]$ 。

【解析】

【分析】 (1) 根据椭圆所过的点及四个顶点围成的四边形的面积可求 a, b ，从而可求椭圆的标准方程。

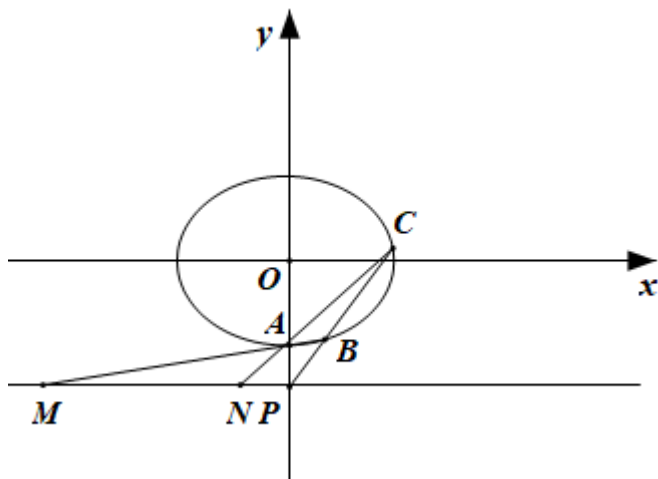
(2) 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ ，求出直线 AB, AC 的方程后可得 M, N 的横坐标，从而可得 $|PM| + |PN|$ ，联立直线 BC 的方程和椭圆的方程，结合韦达定理化简 $|PM| + |PN|$ ，从而可求 k 的范围，注意判别式的要求。

【详解】 (1) 因为椭圆过 $A(0, -2)$ ，故 $b = 2$ ，

因为四个顶点围成的四边形的面积为 $4\sqrt{5}$ ，故 $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4\sqrt{5}$ ，即 $a = \sqrt{5}$ ，

故椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2)



设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ ，

因为直线 BC 的斜率存在，故 $x_1 x_2 \neq 0$ ，

故直线 $AB: y = \frac{y_1+2}{x_1}x - 2$, 令 $y = -3$, 则 $x_M = -\frac{x_1}{y_1+2}$, 同理 $x_N = -\frac{x_2}{y_2+2}$.

直线 $BC: y = kx - 3$, 由 $\begin{cases} y = kx - 3 \\ 4x^2 + 5y^2 = 20 \end{cases}$ 可得 $(4+5k^2)x^2 - 30kx + 25 = 0$,

故 $\Delta = 900k^2 - 100(4+5k^2) > 0$, 解得 $k < -1$ 或 $k > 1$.

又 $x_1 + x_2 = \frac{30k}{4+5k^2}$, $x_1x_2 = \frac{25}{4+5k^2}$, 故 $x_1x_2 > 0$, 所以 $x_Mx_N > 0$

$$\begin{aligned} \text{又 } |PM| + |PN| &= |x_M + x_N| = \left| \frac{x_1}{y_1+2} + \frac{x_2}{y_2+2} \right| \\ &= \left| \frac{x_1}{kx_1-1} + \frac{x_2}{kx_2-1} \right| = \left| \frac{2kx_1x_2 - (x_1+x_2)}{k^2x_1x_2 - k(x_1+x_2) + 1} \right| = \left| \frac{\frac{50k}{4+5k^2} - \frac{30k}{4+5k^2}}{\frac{25k^2}{4+5k^2} - \frac{30k^2}{4+5k^2} + 1} \right| = 5|k| \end{aligned}$$

故 $5|k| \leq 15$ 即 $|k| \leq 3$,

综上, $-3 \leq k < -1$ 或 $1 < k \leq 3$.

21. 定义 R_p 数列 $\{a_n\}$: 对实数 p , 满足: ① $a_1 + p \geq 0$, $a_2 + p = 0$; ② $\forall n \in N^*, a_{4n-1} < a_{4n}$; ③

$$a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\}, \quad m, n \in N^*.$$

(1) 对于前4项2, -2, 0, 1的数列, 可以是 R_2 数列吗? 说明理由;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是 R_0 数列, 求 a_5 的值;

(3) 是否存在 p , 使得存在 R_p 数列 $\{a_n\}$, 对 $\forall n \in N^*, S_n \geq S_{10}$? 若存在, 求出所有这样的 p ; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) 不可以是 R_2 数列; 理由见解析; (2) $a_5 = 1$; (3) 存在; $p = 2$.

【解析】

【分析】(1) 由题意考查 a_3 的值即可说明数列不是 R_2 数列;

(2) 由题意首先确定数列的前4项, 然后讨论计算即可确定 a_5 的值;

(3) 构造数列 $b_n = a_n + p$, 易知数列 $\{b_n\}$ 是 R_0 的, 结合(2)中的结论求解不等式即可确定满足题意的实数 p 的值.

【详解】(1) 由性质③结合题意可知 $0 = a_3 \in \{a_1 + a_2 + 2, a_1 + a_2 + 2 + 1\} = \{2, 3\}$,

矛盾，故前4项 $2, -2, 0, 1$ 的数列，不可能是 R_2 数列.

(2)性质① $a_1 \geq 0, a_2 = 0$,

由性质③ $a_{m+2} \in \{a_m, a_m + 1\}$ ，因此 $a_3 = a_1$ 或 $a_3 = a_1 + 1$ ， $a_4 = 0$ 或 $a_4 = 1$ ，

若 $a_4 = 0$ ，由性质②可知 $a_3 < a_4$ ，即 $a_1 < 0$ 或 $a_1 + 1 < 0$ ，矛盾；

若 $a_4 = 1, a_3 = a_1 + 1$ ，由 $a_3 < a_4$ 有 $a_1 + 1 < 1$ ，矛盾.

因此只能是 $a_4 = 1, a_3 = a_1$.

又因为 $a_4 = a_1 + a_3$ 或 $a_4 = a_1 + a_3 + 1$ ，所以 $a_1 = \frac{1}{2}$ 或 $a_1 = 0$.

若 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，则 $a_2 = a_{1+1} \in \{a_1 + a_1 + 0, a_1 + a_1 + 0 + 1\} = \{2a_1, 2a_1 + 1\} = \{1, 2\}$ ，

不满足 $a_2 = 0$ ，舍去.

当 $a_1 = 0$ ，则 $\{a_n\}$ 前四项为: 0, 0, 0, 1,

下面用纳法证明 $a_{4n+i} = n (i=1, 2, 3), a_{4n+4} = n+1 (n \in N)$ ：

当 $n=0$ 时，经验证命题成立，假设当 $n \leq k (k \geq 0)$ 时命题成立，

当 $n=k+1$ 时：

若 $i=1$ ，则 $a_{4(k+1)+1} = a_{4k+5} = a_{j+(4k+5-j)}$ ，利用性质③：

$\{a_j + a_{4k+5-j} \mid j \in N^*, 1 \leq j \leq 4k+4\} = \{k, k+1\}$ ，此时可得： $a_{4k+5} = k+1$ ；

否则，若 $a_{4k+5} = k$ ，取 $k=0$ 可得： $a_5 = 0$ ，

而由性质②可得： $a_5 = a_1 + a_4 \in \{1, 2\}$ ，与 $a_5 = 0$ 矛盾.

同理可得：

$\{a_j + a_{4k+6-j} \mid j \in N^*, 1 \leq j \leq 4k+5\} = \{k, k+1\}$ ，有 $a_{4k+6} = k+1$ ；

$\{a_j + a_{4k+8-j} \mid j \in N^*, 2 \leq j \leq 4k+6\} = \{k+1, k+2\}$ ，有 $a_{4k+8} = k+2$ ；

$\{a_j + a_{4k+7-j} \mid j \in N^*, 1 \leq j \leq 4k+6\} = \{k+1\}$ ，又因为 $a_{4k+7} < a_{4k+8}$ ，有 $a_{4k+7} = k+1$.

即当 $n=k+1$ 时命题成立，证毕.

综上所述可得： $a_1 = 0$ ， $a_5 = a_{4 \times 1 + 1} = 1$.

(3)令 $b_n = a_n + p$ ，由性质③可知：

$$\forall m, n \in N^*, b_{m+n} = a_{m+n} + p \in \{a_m + p + a_n + p, a_m + p + a_n + p + 1\} = \{b_m + b_n, b_m + b_n + 1\},$$

$$\text{由于 } b_1 = a_1 + p \geq 0, b_2 = a_2 + p = 0, b_{4n-1} = a_{4n-1} + p < a_{4n} + p = b_{4n},$$

因此数列 $\{b_n\}$ 为 R_0 数列.

由 (2) 可知:

$$\text{若 } \forall n \in N, a_{4n+i} = n - p (i=1,2,3), a_{4n+4} = n + 1 - p;$$

$$S_{11} - S_{10} = a_{11} = a_{4 \times 2 + 3} = 2 - p \geq 0, \quad S_9 - S_{10} = -a_{10} = -a_{4 \times 2 + 2} = -(2 - p) \geq 0,$$

因此 $p = 2$, 此时 $a_1, a_2, \dots, a_{10} \leq 0, a_j \geq 0 (j \geq 11)$, 满足题意.

【点睛】 本题属于数列中的“新定义问题”，“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解.但是，透过现象看本质，它们考查的还是基础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好三基，以不变应万变才是制胜法宝.