2014年普通高等学校招生全国统一考试（辽宁卷）

文科数学

第Ⅰ卷（共60分）

一、选择题：本大题共12个小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集$U=R,A=\{x|x\le 0\},B=\{x|x\ge 1\}$，则集合$C_U(A\cup B)=$（　　）

A. $\{x|x\ge 0\}$　B. $\{x|x\le 1\}$　C. $\{x|0\le x\le 1\}$　D. $\{x|0<x<1\}$

【答案】D
【解析】

试题分析：由已知得，$A\cup B=\{x|x\le 0$或$x\ge 1\}$，故$C_U(A\cup B)=\{x|0<x<1\}$.

【考点定位】集合的运算．学科网

2．设复数z满足$(z-2i)(2-i)=5$，则$z=$（　　）

A. $2+3i$　B. $2-3i$　C. $3+2i$　D. $3-2i$

【答案】A
【解析】

试题分析：由已知得，$z=\frac{5}{2-i}+2i=\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}+2i=2+3i$.

【考点定位】复数的运算.

3.已知$a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\frac{1}{3},c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则（　　）

A. $a>b>c$　B. $a>c>b$　C. $c>a>b$　D. $c>b>a$

【答案】C
【解析】

试题分析：因为$a=2^{-\frac{1}{3}}\in(0,1)$，$b=\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$，故$c>a>b$.

【考点定位】指数函数和对数函数的图象和性质．学科网

4.已知m，n表示两条不同直线，α表示平面，下列说法正确的是（　　）

A. 若$m//\alpha,n//\alpha$,则$m//n$　　B. 若$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m\perp n$

C．若$m \perp \alpha$，$m \perp n$，则$n // \alpha$　　D．若$m // \alpha$，$m \perp n$，则$n \perp \alpha$

【答案】B

【解析】

试题分析：若$m // \alpha, n // \alpha$,则$m // n$或m, n相交或m, n异面，故 A 错；若$m \perp \alpha$，$n \subset \alpha$,，由直线和平面垂直的定义知，$m \perp n$，故 B 正确；若$m \perp \alpha$，$m \perp n$，则$n // \alpha$或$n \subset \alpha$，故 C 错；若$m // \alpha$，$m \perp n$，则n与α位置关系不确定，故 D 错．

【考点定位】空间直线和平面的位置关系．

5.设$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$是非零向量，已知命题 P：若$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$，则$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$；命题 q：若$\vec{a} // \vec{b}, \vec{b} // \vec{c}$，则$\vec{a} // \vec{c}$，则下列命题中真命题是（　　）

A．$p \vee q$　B．$p \wedge q$　C．$(\neg p) \wedge (\neg q)$　D．$p \vee (\neg q)$

【答案】A

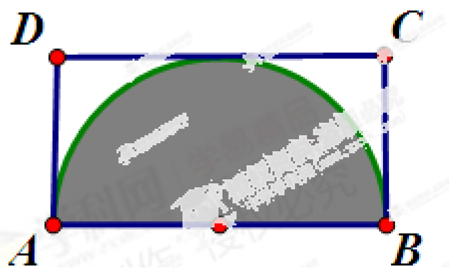
【解析】

试题分析：若$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$，则$\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{b} \perp \vec{c}$，故$\vec{a} // \vec{c}$，故命题$p$是假命题；若$\vec{a} // \vec{b}, \vec{b} // \vec{c}$，则$\vec{a} // \vec{c}$，故命题$q$是真命题，由复合命题真假判断知，学科网$p \vee q$是真命题，选 A．

【考点定位】1、平面向量的数量积运算；2、向量共线．

6.若将一个质点随机投入如图所示的长方形 ABCD 中，其中 AB=2，BC=1，则质点落在以 AB 为直径的半圆内的概率是（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　B．$\frac{\pi}{4}$　C．$\frac{\pi}{6}$　D．$\frac{\pi}{8}$



【答案】B

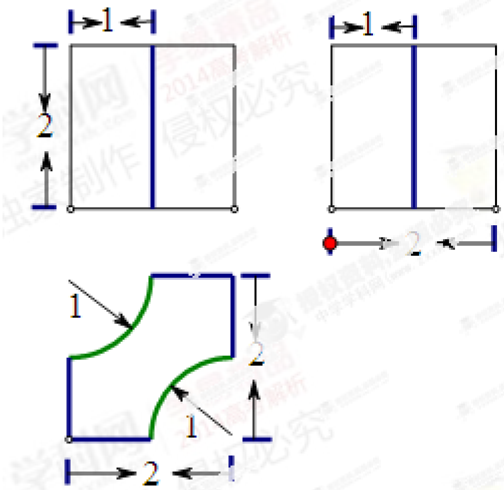
【解析】

试题分析：将一个质点随机投入长方形 ABCD 中，基本事件总数有无限多个，故可考虑几何概型求概率．由已知得，以 AB 为直径的半圆的面积为$\frac{1}{2} \cdot \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$．又长方形 ABCD 的面积为 2，故质点落在以 AB 为直径的半圆内的概率是$P = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$，选 B．

【考点定位】几何概型．

7. 某几何体三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）

A．$8-2\pi$　　B．$8-\pi$　　C．$8-\frac{\pi}{2}$　　D．$8-\frac{\pi}{4}$



【答案】B

【解析】

试题分析：由三视图还原几何体，得该几何体是棱长为 2 的正方体，切去底面半径为 1、高为 4 的两个四分之一圆柱得到的几何体，故体积为 $V=8-\frac{1}{2}\cdot\pi\times1^2\times2=8-\pi$，选 B．

【考点定位】三视图．

8. 已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 C：$y^2=2px$ 的准线上，记 C 的焦点为 F，则直线 AF 的斜率为（　　）

A．$-\frac{4}{3}$　　B．-1　　C．$-\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

试题分析：由已知得，抛物线 $y^2=2px$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，且过点 $A(-2,3)$，故 $-\frac{p}{2}=-2$，则 $p=4$，$F(2,0)$，则直线 AF 的斜率 $k=\frac{3-0}{-2-2}=-\frac{3}{4}$，选 C．

【考点定位】1、抛物线的标准方程和简单几何性质；2、直线的斜率．

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，若数列 $\{2^{a_1a_n}\}$ 为递减数列，则（　　）

A．$d<0$　　B．$d>0$　　C．$a_1d<0$　　D．$a_1d>0$

【答案】C

【解析】

试题分析：由已知得，$2^{a_1a_n}<2^{a_1a_{n-1}}$，即 $\frac{2^{a_1a_n}}{2^{a_1a_{n-1}}}<1$，$2^{a_1(a_n-a_{n-1})}<1$，又 $a_n-a_{n-1}=d$，故 $2^{a_1d}<1$，从而

$a_1 d < 0$，选 C．

【考点定位】1、等差数列的定义；2、数列的单调性．

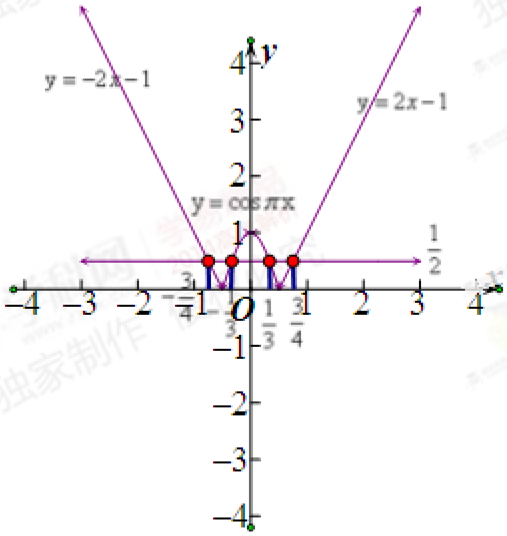
10.已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x \ge 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}\cos \pi x, x\in[0,\frac{1}{2}]\\ 2x-1, x\in(\frac{1}{2},+\infty)\end{cases}$，则不等式 $f(x-1)\le\frac{1}{2}$ 的解集为（　　）

A．$[\frac{1}{4},\frac{2}{3}]\cup[\frac{4}{3},\frac{7}{4}]$　　B．$[-\frac{3}{4},-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{4},\frac{2}{3}]$　　C．$[\frac{1}{3},\frac{3}{4}]\cup[\frac{4}{3},\frac{7}{4}]$　D．$[-\frac{3}{4},-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},\frac{3}{4}]$

【答案】A

【解析】

试题分析：先画出当 $x \ge 0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象，又 $f(x)$ 为偶函数，故将 y 轴右侧的函数图象关于 y 轴对称，得 y 轴左侧的图象，如下图所示，直线 $y=\frac{1}{2}$ 与函数 $f(x)$ 的四个交点横坐标从左到右依次为 $-\frac{3}{4},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{3}{4}$，由图象可知，$\frac{1}{3}\le x-1\le\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{3}{4}\le x-1\le-\frac{1}{3}$，学科网解得 $x\in[\frac{1}{4},\frac{2}{3}]\cup[\frac{4}{3},\frac{7}{4}]$，选 A.



【考点定位】1、分段函数；2、函数的图象和性质；3、不等式的解集.

11. 将函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（　　）

A．在区间 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减

B．在区间 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 上单调递增

C．在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减

D．在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增

【答案】B

【解析】

试题分析：将函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到 $y=3\sin[2(x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{3}]=3\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{2\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得 $k\pi+\frac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{7\pi}{12}$，故递增区间为 $[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}]$（$k\in z$），当 $k=0$ 时，得递增区间为 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$，选 B.

【考点定位】1、三角函数图象变换；2、三角函数的单调性.

12. 当 $x\in[-2,1]$ 时，不等式 $ax^3-x^2+4x+3\ge 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-5,-3]$　　B．$[-6,-\frac{9}{8}]$　　C．$[-6,-2]$　　D．$[-4,-3]$

【答案】C

【解析】

试题分析：不等式 $ax^3-x^2+4x+3\ge 0$ 变形为 $ax^3\ge x^2-4x-3$．当 $x=0$ 时，$0\ge -3$，故实数 a 的取值范围是 R；当 $x\in(0,1]$ 时，$a\ge\frac{x^2-4x-3x}{x^3}$，记 $f(x)=\frac{x^2-4x-3x}{x^3}$，

$f'(x)=\frac{-x^2+8x+9}{x^4}=\frac{-(x-9)(x+1)}{x^4}>0$，故函数学科网 $f(x)$ 递增，则 $f(x)_{max}=f(1)=-6$，故 $a\ge -6$；

当 $x\in[-2,0)$ 时，$a\le\frac{x^2-4x-3x}{x^3}$，记 $f(x)=\frac{x^2-4x-3x}{x^3}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=9$（舍去），

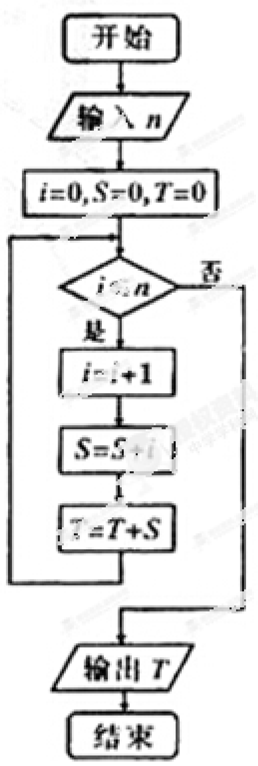
当 $x\in(-2,-1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)_{min}=f(-1)=-2$，则 $a\le -2$．综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-6,-2]$．

【考点定位】利用导数求函数的极值和最值.

第Ⅱ卷（共 90 分）

二、填空题（每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上）

13. 执行右侧的程序框图，若输入 $n=3$，则输出 $T=$__________.



【答案】20

【解析】

试题分析：输入n =3，在程序执行过程中，i,S,T 的值依次为 $i=0,S=0,T=0$；$i=1,S=1,$ $T=1$；$i=2,S=3,T=4$；$i=3,S=6,T=10$；$i=4,S=10,T=20$，程序结束．输出 $T=20$．

【考点定位】程序框图．

14.

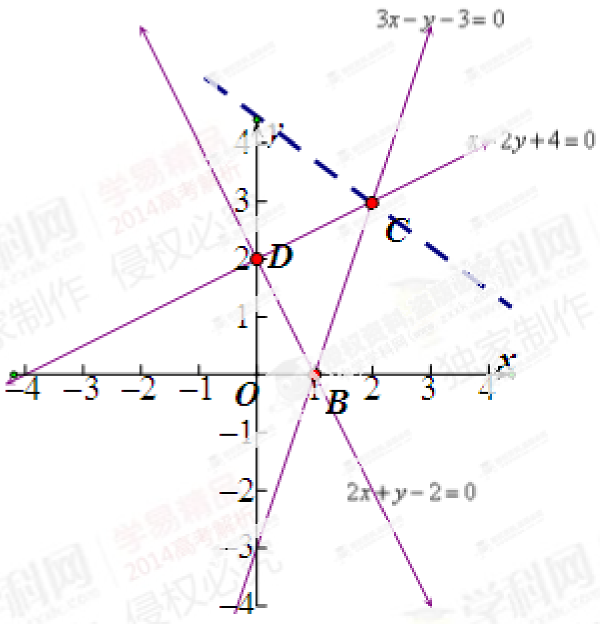
已知 x，y 满足条件 $\begin{cases}2x+y-2\geq 0\\ x-2y+4\geq 0\\ 3x-y-3\leq 0\end{cases}$，则目标函数 $z=3x+4y$ 的最大值为__________．

【答案】18

【解析】

试题分析：画出可行域，如下图所示，将目标函数变形为 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{z}{4}$，当 z 取到最大值时，直线的纵截距最大，故将直线 $y=-\frac{3}{4}x$ 向上平移到过点 C 时，目标函数取到最大值，$\begin{cases}x-2y+4=0\\ 3x-y-3=0\end{cases}$，得 $C(2,3)$，

故 $z_{max}=3\times 2+4\times 3=18$．



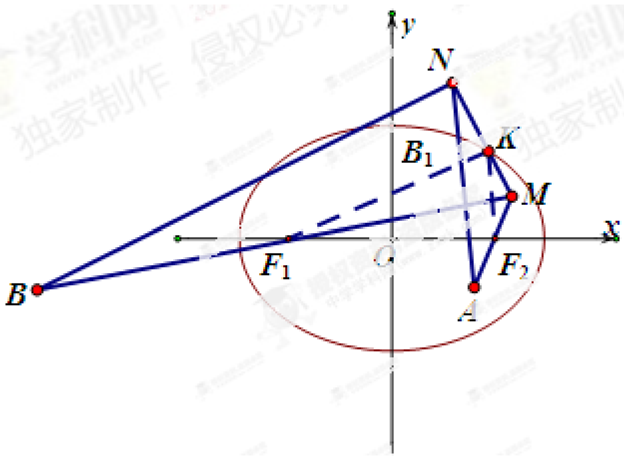
【考点定位】线性规划.

15. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，点 M 与 C 的焦点不重合，若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A，B，线段 MN 的中点在 C 上，则$|AN|+|BN|=$__________.

【答案】12

【解析】

试题分析：如图所示，由已知条件得，点 F_1,F_2 分布是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点，且 F_1,F_2， K 分别是线段 MB,MA,MN 的中点，则在 ΔNBM 和 ΔNAM 中，学科网 $|NB|=2|KF_1|$， $|NA|=2|KF_2|$，又由椭圆定义得， $|KF_1|+|KF_2|=2a=6$，故$|AN|+|BN|=2(|KF_1|+|KF_2|)=12$.



16. 对于 $c>0$，当非零实数 a，b 满足 $4a^2-2ab+b^2-c=0$，且使 $|2a+b|$ 最大时，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}$ 的最小值为__________.

【答案】-1

【解析】

试题分析：设 $2a+b=t$，则 $b=t-2a$，代入到 $4a^2-2ab+b^2-c=0$ 中，得

$4a^2-2a(t-2a)+(t-2a)^2-c=0$，即 $12a^2-6ta+t^2-c=0$……①

因为关于 a 的二次方程①有实根，所以 $\Delta=36t^2-4\times12(t^2-c)\geq0$，可得 $t^2\leq4c$，

$|2a+b|$ 取最大值时，$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\sqrt{c}\\b=\sqrt{c}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\sqrt{c}\\b=-\sqrt{c}\end{cases}$，

当 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\sqrt{c}\\b=\sqrt{c}\end{cases}$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=\frac{2}{\sqrt{c}}+\frac{2}{\sqrt{c}}+\frac{4}{c}=\frac{4}{\sqrt{c}}+\frac{4}{c}=4(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{2})^2-1>0$，

当 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\sqrt{c}\\b=-\sqrt{c}\end{cases}$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=-\frac{2}{\sqrt{c}}-\frac{2}{\sqrt{c}}+\frac{4}{c}=-\frac{4}{\sqrt{c}}+\frac{4}{c}=4(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{2})^2-1\geq-1$，

综上可知当 $c=4,a=-1,b=-2$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}$ 的最小值为 -1.

【考点定位】1、一元二次方程根的判别式；2、二次函数求值域.

三、解答题 （本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）

17. （本小题满分 12 分）

在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边 a，b，c，且 $a>c$，已知 $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=2$，$\cos B=\frac{1}{3}$，$b=3$，求：

（Ⅰ）a 和 c 的值；

（Ⅱ）$\cos(B-C)$ 的值.

【答案】（Ⅰ）$a=3,c=2$；（Ⅱ）$\frac{23}{27}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$ 及向量数量积的定义，得 $ca\cos B=2$，从而 $ca=6$，故再寻求关于 a,c 的等式是解题关键．由 $\cos B=\frac{1}{3}$，$b=3$ 不难想到利用余弦定理，得 $a^2+c^2=9+2\times2=13$，进而联立求

a,c；

（Ⅱ）利用差角余弦公式将 $\cos(B-C)$ 展开，涉及 B,C 的正弦值和余弦值．由 $\cos B=\frac{1}{3}$ 可求 $\sin B$，因为三角形三边确定，故可利用正弦定理或余弦定理求 $\sin A, \cos A$ 值，代入即可求 $\cos(B-C)$ 的值．

试题解析：（Ⅰ）由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$ 得，$ca\cos B=2$．又 $\cos B=\frac{1}{3}$．所以 $ca=6$．由余弦定理，得

$a^2+c^2=b^2+2ac\cos B$．

又 $b=3$．所以 $a^2+c^2=9+2\times 2=13$．解 $\begin{cases} ac=6, \\ a^2+c^2=13, \end{cases}$ 得 $a=2,c=3$ 或 $a=3,c=2$．因为 $a>c$．所以

$a=3,c=2$．

（Ⅱ）在 ΔABC 中，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．由正弦定理得，

$\sin C=\frac{c}{b}\sin B=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$．因 $a=b>c$，所以 C 为锐角．因此 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\sqrt{1-(\frac{4\sqrt{2}}{9})^2}$

$=\frac{7}{9}$．于是 $\cos(B-C)=\cos B\cos C+\sin B\sin C=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{23}{27}$．

【考点定位】1、平面向量数量积定义；2、正弦定理；3、余弦定理．

18. （本小题满分 12 分）

某大学餐饮中心为了了解新生的饮食习惯，在全校一年级学生中进行了抽样调查，调查结果如下表所示：

	喜欢甜品	不喜欢甜品	合计
南方学生	60	20	80
北方学生	10	10	20
合计	70	30	100

（Ⅰ）根据表中数据，问是否有 95%的把握认为“南方学生和北方学生在选用甜品的饮食习惯方面有差异”；

（Ⅱ）已知在被调查的北方学生中有 5 名数学系的学生，其中 2 名喜欢甜品，现在从这 5 名学生中随机抽取 3 人，求至多有 1 人喜欢甜品的概率.

附：$\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$.

$P(\chi^2\geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

【答案】（Ⅰ）有$95^0/_0$的把握认为“南方学生和北方学生在选用甜品的饮食习惯方面有差异”；（Ⅱ）$\frac{7}{10}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）将2×2列联表中的数据代入公式计算，得χ^2的值，然后与表格中的3.841比较，若小于3.841，则有95%的把握认为“南方学生和北方学生在选用甜品的饮食习惯方面有差异”；（Ⅱ）从5名学生中随机抽取3人，有10种结果，构成基本事件空间，其中“至多有1人喜欢甜品”这个事件包含7个基本事件，代入古典概型的概率计算公式即可.

试题解析：（Ⅰ）将2×2列联表中的数据代入公式计算．得

$x^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}=\frac{100\times(60\times10-20\times10)^2}{70\times30\times80\times20}=\frac{100}{21}\approx4.672$．由于$4.672>3.841$．所以有$95^0/_0$的把握认为“南方学生和北方学生在选用甜品的饮食习惯方面有差异”.

（Ⅱ）从5名数学系的学生任取3人的一切可能结果所组成的基本事件空间

$\Omega=\{(a_1,a_2,b_1),(a_1,a_2,b_2),(a_1,a_2,b_3),(a_1,b_1,b_2)$，$(a_1,b_2,b_3),(a_1,b_1,b_3),(a_2,b_1,b_2)$，$(a_2,b_2,b_3)$，$(a_2,b_1,b_3)$，$(b_1,b_2,b_3)\}$．其中$a_i$表示喜欢甜品的学生，$i=1,2$．$b_j$表示不喜欢甜品的学生，$j=1,2,3$．

Ω由10个基本事件组成，切这些基本事件出现是等可能的．用A表示“3人中至多有1人喜欢甜品”这一事件，则$A=\{(a_1,b_1,b_2),(a_1,b_2,b_3),(a_1,b_1,b_3),(a_2,b_1,b_2),(a_2,b_2,b_3),(a_2,b_1,b_3),(b_1,b_2,b_3)\}$．事件A是由7个基本事件组成．因而$P(A)=\frac{7}{10}$.

【考点定位】1、独立性检验；2、古典概型.

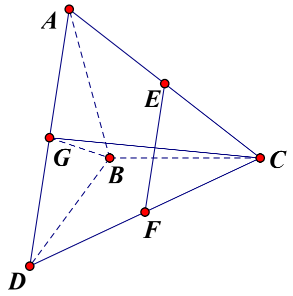
19.（本小题满分12分）

如图，ΔABC和ΔBCD所在平面互相垂直，且$AB=BC=BD=2$，$\angle ABC=\angle DBC=120^0$，E、F、G分别为AC、DC、AD的中点.

（Ⅰ）求证：$EF\perp$平面BCG；

（Ⅱ）求三棱锥D-BCG的体积.

附：椎体的体积公式$V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 为底面面积，h 为高.



【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）$\frac{1}{2}$

【解析】

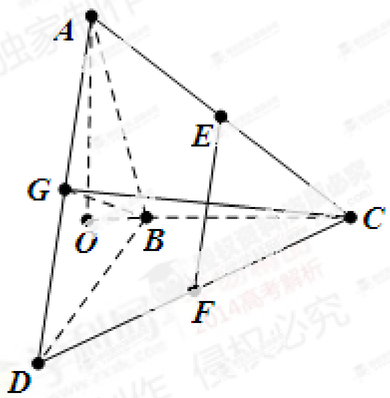
试题分析：（Ⅰ）由已知得，EF是ΔADC的中位线，故$EF//AD$，则可转化为证明$AD\perp$平面 BCG．易证$\Delta ABC\cong\Delta DBC$，则有$AC=DC$，则在等腰三角形$ADC$和等腰三角形$ABD$中，且$G$是$AD$中点，故$CG\perp AD$，$BG\perp AD$．从而$AD\perp$平面 BCG，进而$EF\perp$平面 BCG；（Ⅱ）求四面体体积，为了便于计算底面积和高，往往可采取等体积转化法．由平面$ABC\perp$平面BCD，利用面面垂直的性质，易作出面BCD的垂线，同时求出点A到面BCD的距离，从而可求出点G到平面BCD距离，即四面体$G-BCD$的高，进而求四面体体积．

试题解析：（Ⅰ）证明：由已知得$\Delta ABC\cong\Delta DBC$．因此$AC=DC$．又$G$为$AD$中点，所以$CG\perp AD$；同理$BG\perp AD$；因此$AD\perp$平面$BGC$．又$EF//AD$．所以$EF\perp$平面 BCG．

（Ⅱ）在平面ABC内．作$AO\perp BC$．交CB延长线于O．由平面$ABC\perp$平面BCD．知$AO\perp$平面BDC．

又G为AD中点，因此G到平面BCD距离h是AO长度的一半．在ΔAOB中，$AO=AB\cdot\sin 60^0=\sqrt{3}$．

所以$V_{D-BCG}=V_{G-BCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta DBC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BD\cdot BC\cdot\sin 120^0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$.



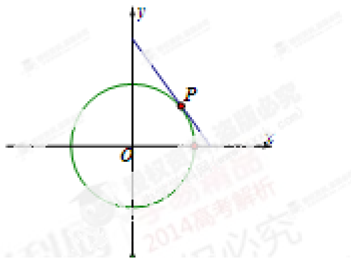
【考点定位】1、直线和平面垂直的判定；2、面面垂直的性质；3、四面体的体积．

20. （本小题满分 12 分）

圆$x^2+y^2=4$的切线与 x 轴正半轴，y 轴正半轴围成一个三角形，当该三角形面积最小时，切点为 P（如图）．

（Ⅰ）求点 P 的坐标；

（Ⅱ）焦点在 x 轴上的椭圆 C 过点 P，且与直线 $l: y=x+\sqrt{3}$ 交于 A，B 两点，若 ΔPAB 的面积为 2，求 C 的标准方程.



【答案】（Ⅰ）$(\sqrt{2},\sqrt{2})$；（Ⅱ）$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）首先设切点 $P\,(x_0,y_0)\,(x_0>0,,y_0>0)$，由圆的切线的性质，根据半径 OP 的斜率可求切线斜率，进而可表示切线方程为 $x_0x+y_0y=4$，建立目标函数 $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{x_0}\cdot\dfrac{4}{y_0}=\dfrac{8}{x_0y_0}$．故要求面积最小值，只需确定 x_0y_0 的最大值，由 $x_0{}^2+y_0{}^2=4\geq 2x_0y_0$ 结合目标函数，易求；（Ⅱ）设椭圆标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 P 在椭圆上，代入点得 $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$①，利用弦长公式表示 $|AB|$，利用点到直线距离公式求高，进而表示 ΔPAB 的面积，与①联立，可确定 a,b，进而确定椭圆的标准方程.

试题解析：（Ⅰ）设切点坐标为 $(x_0,y_0)\,(x_0>0,,y_0>0)$．则切线斜率为 $-\dfrac{x_0}{y_0}$．切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$．即 $x_0x+y_0y=4$．此时，两个坐标轴的正半轴于切线围成的三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{x_0}\cdot\dfrac{4}{y_0}=\dfrac{8}{x_0y_0}$．由 $x_0{}^2+y_0{}^2=4\geq 2x_0y_0$ 知当且仅当 $x_0=y_0=\sqrt{2}$ 时，x_0y_0 有最大值．即 S 有最小值．因此点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$．

（Ⅱ）设 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．由点 P 在 C 上知

$\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$．并由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=x+\sqrt{3},\end{cases}$得$b^2x^2+4\sqrt{3}x+6-2b^2=0$．又$x_1,x_2$是方程的根，因此

$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4\sqrt{3}}{b^2}\\ x_1x_2=\frac{6-2b^2}{b^2}\end{cases}$，由

$y_1=x_1+\sqrt{3}$，$y_2=x_2+\sqrt{3}$，得$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{48-24b^2+8b^4}}{b^2}$．由点$P$到直线$l$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

及$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}|AB|=2$得$b^4-9b^2+18=0$．解得$b^2=6$或$3$．因此$b^2=6$，$a^2=3$（舍）或$b^2=3$，

$a^2=6$．从而所求C的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$．

【考点定位】1、直线方程；2、椭圆的标准方程；3、弦长公式和点到直线的距离公式．

21．（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\pi(x-\cos x)-2\sin x-2$，$g(x)=(x-\pi)\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}+\frac{2x}{\pi}-1$．

证明：（Ⅰ）存在唯一$x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使$f(x_0)=0$；

（Ⅱ）存在唯一$x_1\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使$g(x_1)=0$，且对（1）中的$x_0+x_1>\pi$．

【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）详见解析

【解析】

试题分析：（Ⅰ）依题意，只需证明函数$f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上存在唯一零点．往往转化为利用导数判断函数单调性、极值点，从而判断函数大致图象，进而说明零点分布情况．本题当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上为增函数，再说明端点函数值异号；（Ⅱ）与（Ⅰ）类似，只需证明函数$g(x)$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$上存在唯一零点．但是不易利用导数判断函数$g(x)=(\pi-x)\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{2x}{\pi}-1$大致图象，考虑到结论中$x_0+x_1>\pi$，故需考虑第二问与第一问的关系，利用（Ⅰ）的结论，设$t=\pi-x$，则$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，

$u'(t)=\frac{f(t)}{\pi(1+\sin t)}$，根据第一问中$f(t)$的符号，从而可判断函数$u(t)$的单调性，进而判断函数$u(t)$大致图象，确定函数$u(t)$的零点，寻求函数$g(x)$的零点与$u(t)$零点的关系，从而证明不等式．

试题解析：证明：（Ⅰ）当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，$f'(x)=\pi+\pi\sin x-2\cos x>0$，所以$f(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$上为增函数．又$f(0)=-\pi-2<0$．$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi^2}{2}-4>0$．所以存在唯一$x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使$f(x_0)=0$．

（Ⅱ）当$x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$时，化简得$g(x)=(\pi-x)\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{2x}{\pi}-1$．令$t=\pi-x$．记$u(t)=g(\pi-t)=-\dfrac{t\cos t}{1+\sin t}-\dfrac{2t}{\pi}+1$．$t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．则$u'(t)=\dfrac{f(t)}{\pi(1+\sin t)}$．由（Ⅰ）得，当$t\in(0,x_0)$时，$u'(t)<0$；当$t\in(x_0,\dfrac{\pi}{2})$

时，$u'(t)>0$．从而在$(x_0,\dfrac{\pi}{2})$上$u(t)$为增函数，由$u(\dfrac{\pi}{2})=0$知，当$t\in[x_0,\dfrac{\pi}{2})$时，$u(t)<0$，所以$u(t)$在$[x_0,\dfrac{\pi}{2})$上无零点．在$(0,x_0)$上$u(t)$为减函数，由$u(0)=1$及$u(x_0)<0$知存在唯一$t_0\in(0,x_0)$，使得$u(x_0)=0$．于是存在唯一$t_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得$u(t_0)=0$．设$x_1=\pi-t_0\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$．$g(x_1)=g(\pi-t_0)=u(t_0)=0$．因此存在唯一的$x_1\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，使得$g(x_1)=0$．由于$x_1=\pi-t_0$，$t_0<x_0$，所以$x_0+x_1>\pi$．

【考点定位】1、函数的零点；2、利用导数判断函数单调性；3、利用导数求函数的最值.

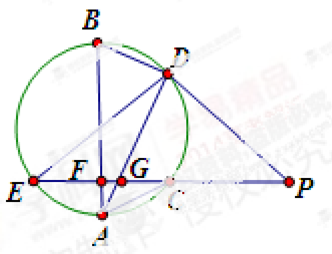
请考生在第22、23、24三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分，作答时用2B铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑.

22. （本小题满分10分）选修4-1：几何证明选讲

如图，EP交圆于E、C两点，PD切圆于D，G为CE上一点且$PG=PD$，连接DG并延长交圆于点A，作弦AB垂直EP，垂足为F.

（Ⅰ）求证：AB为圆的直径；

（Ⅱ）若AC=BD，求证：AB=ED.



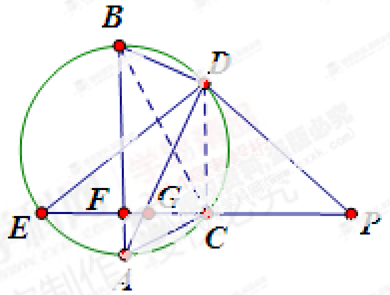
【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）详见解析

【解析】

试题分析：（Ⅰ）要证明 AB 为圆的直径，只需证明 $\angle BDA=90^0$，结合 $\angle GFA=90^0$，在 ΔGFA 和 ΔBDA 中，只需证明 $\angle DBA=\angle FGA$，从而转化为证明 $\angle DBA=\angle DGP$，由弦切角定理以及 $PG=PD$ 很容易证明；（Ⅱ）要证明 $ED=AB$，由（Ⅰ）得，只需证明 ED 为圆的直径．连接 BC、DC，只需证明 $DC\perp EP$．只需证明 $DC//AB$．因为 $Rt\Delta BDA\cong Rt\Delta ACB$，故 $\angle DAB=\angle CBA$，根据同弧所对的圆周角相等得 $\angle DCB=\angle DAB$，故 $\angle DCB=\angle CBA$，从而．得证

试题解析：（Ⅰ）因为 $PG=PD$．所以 $\angle PDG=\angle PGD$．由于 PD 为切线，所以 $\angle PDA=\angle DBA$．又由于 $\angle PGD=\angle EGA$，所以 $\angle DBA=\angle EGA$．由于 $AF\perp EP$，所以 $\angle PFA=90^0$，$\angle BDA=90^0$．故 AB 为圆的直径．

（Ⅱ）连接 BC、DC．由于 AB 是直径，故 $\angle BDA=\angle ACB=90^0$．在 $Rt\Delta BDA$ 和 $Rt\Delta ACB$ 中，$AB=BA$，$AC=BD$．从而 $Rt\Delta BDA\cong Rt\Delta ACB$．于是 $\angle DAB=\angle CBA$．又因为 $\angle DCB=\angle DAB$，所以 $\angle DCB=\angle CBA$．又因为 $\angle DCB=\angle DAB$，所以 $\angle DCB=\angle CBA$．故 $DC//AB$．由于 $AB\perp EP$，所以 $DC\perp EP$，$\angle DCE$ 为直角．于是 ED 为直径．由（Ⅰ）得，$ED=AB$．



【考点定位】1、三角形全等；2、弦切角定理；3、圆的性质．

23.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

将圆 $x^2+y^2=1$ 上每一点的横坐标保持不变，纵坐标变为原来的 2 倍，得曲线 C.

（Ⅰ）写出 C 的参数方程；

（Ⅱ）设直线 $l:2x+y-2=0$ 与 C 的交点为 P_1,P_2，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极坐标建立极坐标系，求过线段 P_1P_2 的中点且与 l 垂直的直线的极坐标方程.

【答案】（Ⅰ）$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=2\sin t,\end{cases}$（$t$为参数）；（Ⅱ）$\rho=\dfrac{3}{4\sin\theta-2\cos\theta}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由平面直角坐标系中的伸缩变换得变换前后对应的坐标关系．即$\begin{cases}x=x_1,\\ y=2y_1,\end{cases}$，反解$x_1,y_1$并代入圆$x^2+y^2=1$中，得曲线C的普通方程，进而写出参数方程；（Ⅱ）将直线$2x+y-2=0$与圆$x^2+y^2=1$联立，求的交点P_1,P_2的坐标，从而可确定与l垂直的直线方程$y-1=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})$．再利用$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$化直线的直角坐标方程为极坐标方程．

试题解析：（Ⅰ）设(x_1,y_1)为圆上的点，经变换为C上点(x,y)．依题意，得$\begin{cases}x=x_1,\\ y=2y_1,\end{cases}$由$x_1^2+y_1^2=1$得$x^2+(\frac{y}{2})^2=1$．

即曲线C的方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$．故C的参数方程为$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=2\sin t,\end{cases}$（$t$为参数）．

（Ⅱ）由$\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{4}=1,\\ 2x+y-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=0,\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\ y=2,\end{cases}$不妨设$P_1(1,0)$，$P_2(0,2)$．则线段$P_1P_2$的中点坐标为$(\frac{1}{2},1)$．所求直线的斜率为$k=\frac{1}{2}$．于是所求直线方程为$y-1=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})$．化为极坐标方程为$2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=-3$，即$\rho=\dfrac{3}{4\sin\theta-2\cos\theta}$．

【考点定位】1、伸缩变换；2、曲线的参数方程；3、曲线的极坐标方程．

24．（本小题满分10分）选修4-5：不等式选讲

设函数$f(x)=2|x-1|+x-1$，$g(x)=16x^2-8x+1$，记$f(x)\le 1$的解集为M，$g(x)\le 4$的解集为N.

（Ⅰ）求M；

（Ⅱ）当$x\in M\cap N$时，证明：$x^2f(x)+x[f(x)]^2\le\frac{1}{4}$.

【答案】（Ⅰ）$M=\left\{x\middle|0\le x\le\frac{4}{3}\right\}$；（Ⅱ）详见解析.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）不等式 $f(x)\le 1$ 变形为 $2|x-1|+x-1\le 1$，然后分类讨论去绝对号解不等式得不等式解集 $M=\left\{x\middle|0\le x\le\frac{4}{3}\right\}$；（Ⅱ）解不等式 $g(x)\le 4$，得 $N=\left\{x\middle|-\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}\right\}$．故 $M\cap N=\left\{x\middle|0\le x\le\frac{3}{4}\right\}$．当 $x\in M\cap N$ 时，$0\le x\le\frac{3}{4}$，此时 $f(x)=1-x$．代入 $x^2f(x)+x[f(x)]^2$ 中为二次函数，求其最大值即可．

试题解析：（Ⅰ）$f(x)=\begin{cases}3x-3, x\in[1,+\infty),\\1-x, x\in(-\infty,1),\end{cases}$ 当 $x\ge 1$ 时，由 $f(x)=3x-3\le 1$ 得 $x\le\frac{4}{3}$．故 $1\le x\le\frac{4}{3}$；当 $x<1$ 时，

由 $f(x)=1-x\le 1$ 得 $x\ge 0$，故 $0\le x<1$．所以 $f(x)\le 1$ 的解集为 $M=\left\{x\middle|0\le x\le\frac{4}{3}\right\}$．

（Ⅱ）由 $g(x)=16x^2-8x+1\le 4$ 得 $-\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}$，$N=\left\{x\middle|-\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}\right\}$，故 $M\cap N=\left\{x\middle|0\le x\le\frac{3}{4}\right\}$．

当 $x\in M\cap N$ 时，$f(x)=1-x$，故 $x^2f(x)+x[f(x)]^2=xf(x)[x+f(x)]=xf(x)=x(1-x)=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}$．

【考点定位】1、绝对值不等式解法；2、二次函数最值．