

# 2014 年普通高等学校招生全国统一考试 ( 辽宁卷 )

## 理科数学

### 第 I 卷 ( 共 60 分 )

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集  $U = R$ ,  $A = \{x | x \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x \geq 1\}$ , 则集合  $C_U(A \cup B) = (\quad)$

- A.  $\{x | x \geq 0\}$     B.  $\{x | x \leq 1\}$     C.  $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$     D.  $\{x | 0 < x < 1\}$

【答案】D

【解析】

试题分析：因为  $A \cup B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$ , 所以  $C_U(A \cup B) = \{x | 0 < x < 1\}$ , 故选 D.

考点：集合的运算。

2. 设复数  $z$  满足  $(z - 2i)(2 - i) = 5$ , 则  $z = (\quad)$

- A.  $2 + 3i$     B.  $2 - 3i$     C.  $3 + 2i$     D.  $3 - 2i$

【答案】A

【解析】

试题分析：因为  $z = \frac{5}{(2-i)} + 2i$ ,  $z = 2 + 3i$ , 故选 A.

考点：复数的运算。

3. 已知  $a = 2^{-\frac{1}{3}}$ ,  $b = \log_2 \frac{1}{3}$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ , 则 ( )

- A.  $a > b > c$     B.  $a > c > b$     C.  $c > a > b$     D.  $c > b > a$

【答案】C

【解析】

试题分析： $0 < a = 2^{-\frac{1}{3}} < 2^0 = 1$ ,  $b = \log_2 \frac{1}{3} < 0$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1$ , 所以  $c > a > b$ , 故选 C.

考点：1. 指数对数化简；2. 不等式大小比较。

4. 已知  $m$ ,  $n$  表示两条不同直线,  $\alpha$  表示平面, 下列说法正确的是 ( )

- A. 若  $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$ .      B. 若  $m \perp \alpha, n \subset \alpha$ , 则  $m \perp n$   
C. 若  $m \perp \alpha, m \perp n$ , 则  $n \parallel \alpha$ .    D. 若  $m \parallel \alpha, m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha$

【答案】B

【解析】

试题分析: 若 A. 若  $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m$  与  $n$  可能平行、相交、异面, 故 A 错误; B. 若  $m \perp \alpha, n \subset \alpha$ , 则  $m \perp n$ , 显然成立; C. 若  $m \perp \alpha, m \perp n$ , 则  $n \parallel \alpha$  或  $n \subset \alpha$  故 C 错误; D. 若  $m \parallel \alpha, m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha$  或  $n \parallel \alpha$  或  $n$  与  $\alpha$  相交.

考点: 1. 命题的真假; 2. 线面之间的位置关系.

5. 设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  是非零向量, 已知命题  $P$ : 若  $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0, \vec{b} \bullet \vec{c} = 0$ , 则  $\vec{a} \bullet \vec{c} = 0$ ; 命题  $q$ : 若  $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}$ , 则  $\vec{a} \parallel \vec{c}$ , 则下列命题中真命题是 ( )

- A.  $p \vee q$     B.  $p \wedge q$     C.  $(\neg p) \wedge (\neg q)$ .    D.  $p \vee (\neg q)$

【答案】A

【解析】

试题分析: 由题意可知, 命题  $P$  是假命题, 命题  $q$  是真命题, 故  $p \vee q$  为真命题.

考点: 命题的真假.

6.6 把椅子摆成一排, 3 人随机就座, 任何两人不相邻的做法种数为 ( )

- A. 144    B. 120    C. 72    D. 24

【答案】C

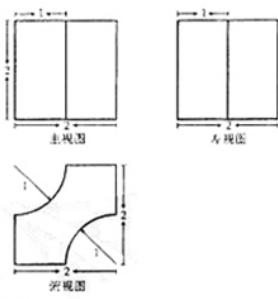
【解析】

试题分析: 如图, 将 6 把椅子依次编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 故任何两人不相邻的做法, 可安排: “1, 3, 5”, “1, 3, 6”, “1, 4, 6”, “2, 4, 6” 号位置做熟坐人, 故总数由  $4 \cdot A_3^3 = 24$ , 故选 D.

考点: 排列组合.

7. 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )

- A.  $8 - 2\pi$     B.  $8 - \pi$     C.  $8 - \frac{\pi}{2}$     D.  $8 - \frac{\pi}{4}$



**【答案】B**

**【解析】**

试题分析：由三视图可知，该几何体的直观图是棱长为 2 的正方体，分别在两个对角截去了底面半径为 1，

高为 2 的圆柱的四分之一，故该几何体的体积为： $2^3 - 2 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 2 = 8 - \pi$ .

考点：1.三视图；2.柱体的体积公式.

8.设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，若数列  $\{2^{a_n}\}$  为递减数列，则（ ）

- A.  $d < 0$       B.  $d > 0$       C.  $a_1 d < 0$       D.  $a_1 d > 0$

**【答案】C**

**【解析】**

试题分析：因为  $\{a_n\}$  是等差数列，则  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ， $2^{a_n} = 2^{a_1 + (n-1)d} = 2^{a_1^2 + a_1(n-1)d}$ ，又由于  $\{2^{a_n}\}$  为递减数列，所以  $\frac{2^{a_1 a_n}}{2^{a_1 a_{n+1}}} = 2^{a_1 d} > 1 = 2^0 \therefore a_1 d < 0$ ，故选 C.

考点：1.等差数列的概念；2.递减数列.

9.将函数  $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度，所得图象对应的函数（ ）

- A. 在区间  $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$  上单调递减  
 B. 在区间  $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$  上单调递增  
 C. 在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  上单调递减  
 D. 在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  上单调递增

**【答案】B**

**【解析】**

试题分析：将函数  $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度，所得图象对应的函数解析式为

$y = 3 \sin(2x - \frac{2\pi}{3})$ ，令  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ，即  $y = 3 \sin(2x - \frac{2\pi}{3})$  的增区间

为  $[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ，令  $k=0$ ，则可知 B 学科网正确。

考点：函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  的性质。

10. 已知点  $A(-2, 3)$  在抛物线  $C: y^2 = 2px$  的准线上，过点  $A$  的直线与  $C$  在第一象限相切于点  $B$ ，记  $C$  的焦点为  $F$ ，则直线  $BF$  的斜率为（ ）

- A.  $\frac{1}{2}$     B.  $\frac{2}{3}$     C.  $\frac{3}{4}$     D.  $\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】

试题分析：由于点  $A(-2, 3)$  在抛物线  $C: y^2 = 2px$  的准线上，所以  $-\frac{p}{2} = -2 \therefore p = 4 \therefore y^2 = 8x$ ，设直

线  $AB$  的方程为  $x = k(y - 3) - 2 \dots (*)$ ，将  $(*)$  与  $y^2 = 8x$  联立，即

$$\begin{cases} x = k(y - 3) - 2 \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 8ky + 24k + 16 = 0 \dots (\otimes), \text{ 则 } \Delta = 64k^2 - 96k - 64 = 0 \therefore k = 2 \text{ (负值舍去)},$$

去)，将  $k=2$  代入  $(\otimes)$  得  $y=8$ ，即可求出  $x=8$ ，故  $B(8, 8)$ ，所以  $k_{BF} = \frac{8-0}{8-2} = \frac{4}{3}$ ，故选 D.

考点：1. 直线与抛物线的位置关系；2. 斜率公式。

11. 当  $x \in [-2, 1]$  时，不等式  $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$  恒成立，则实数  $a$  的取值范围是（ ）

- A.  $[-5, -3]$     B.  $[-6, -\frac{9}{8}]$     C.  $[-6, -2]$     D.  $[-4, -3]$

【答案】C

【解析】

试题分析：当  $x=0$  时，原式恒成立；

当  $x \in (0, 1]$  时，原式等价于  $a \geq (\frac{x^3 - 4x - 3}{x^3})_{\max}$  恒成立；

当  $x \in [-2, 0]$  时, 原式等价于  $a \leq (\frac{x^2 - 4x - 3}{x^3})_{\min}$  恒成立,

令  $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}, x \in [-2, 0] \cup (0, 1]$ , ∵  $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3}$ , 令  $t = \frac{1}{x}$ , 即

$y = -3t^3 - 4t^2 + t$ , ∵  $y' = -9t^2 - 8t + 1$ , 可知  $(-1, \frac{1}{9})$  为  $y$  的增区间,  $(-\infty, -1), (\frac{1}{9}, +\infty)$  为  $y$

的减区间, 所以当  $x \in (0, 1]$  时, 即  $t \in [1, +\infty)$  时,  $t=1$  时  $y_{\max} = -6$ , 即  $f(x)_{\max} = -6 \therefore a \geq -6$ ; 当

$x \in [-2, 0]$  时, 即  $t \in (-\infty, -\frac{1}{2})$  时,  $y$  在  $(-\infty, -1)$  上递减, 在  $(-1, -\frac{1}{2})$  上递增, 所以  $t=-1$  时  $y_{\min} = -2$ ,

即  $f(x)_{\min} = -2 \therefore a \leq -2$ ; 综上, 可知  $a$  的取值范围是  $[-6, -2]$ , 故选 C.

考点: 不等式恒成立问题.

12. 已知定义在  $[0, 1]$  上的函数  $f(x)$  满足:

①  $f(0) = f(1) = 0$ ;

② 对所有  $x, y \in [0, 1]$ , 且  $x \neq y$ , 有  $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$ .

若对所有  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|f(x) - f(y)| < k$ , 则  $k$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{2\pi}$       D.  $\frac{1}{8}$

【答案】B

【解析】

试题分析: 不妨令  $0 \leq x < y \leq 1$ , 则  $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$

法一:  $2|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(0) + f(x) - f(y) - [f(y) - f(1)]|$

$\leq |f(x) - f(0)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(1)|$

$< \frac{1}{2}|x - 0| + \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|y - 1| = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{2}(y - 1) = \frac{1}{2}$ ,

即得  $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{4}$ ,

另一方面, 当  $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  时,  $f(x) = \begin{cases} ux & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -u(1-x), \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ , 符合题意,

当  $u \rightarrow \frac{1}{2}$  时,  $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| = \frac{u}{2} \rightarrow \frac{1}{4}$ ,

故  $k \leq \frac{1}{4}$

法二: 当  $x-y \leq \frac{1}{2}$  时,  $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y| \leq \frac{1}{4}$ .

当  $x-y > \frac{1}{2}$  时,  $|f(x)-f(y)| = [f(x)-f(0)] - [f(y)-f(1)]$

$\leq |f(x)-f(1)| + |f(y)-f(0)| < \frac{1}{2}|x-0| + \frac{1}{2}|y-1| = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(y-x) < \frac{1}{4}$ ,

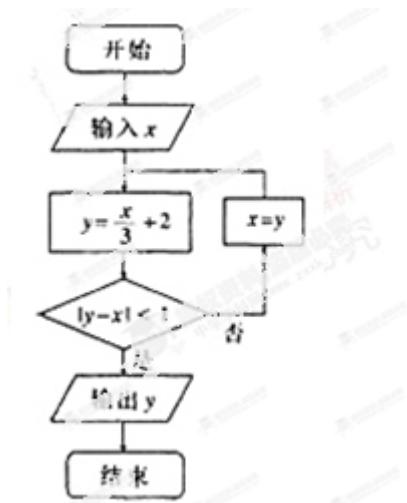
故  $k \leq \frac{1}{4}$

考点: 1. 抽象函数问题; 2. 绝对值不等式.

## 第 II 卷 (共 90 分)

### 二、填空题 (每题 5 分, 满分 20 分, 将答案填在答题纸上)

13. 执行右侧的程序框图, 若输入  $x=9$ , 则输出  $y= \underline{\hspace{2cm}}$ .



【答案】 $\frac{29}{9} C$

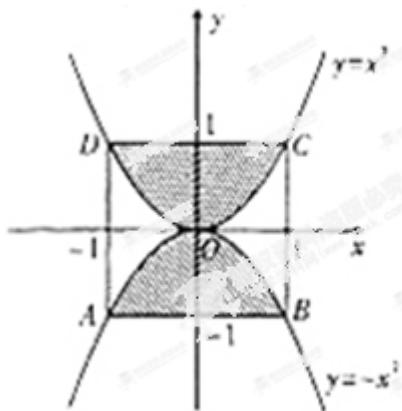
【解析】

试题分析：第一次运行后  $y=5$ ，第二次运行后  $y=\frac{11}{3}$ ，第三次运行后  $y=\frac{29}{9}$ ，此时

$$|y-x|=|\frac{29}{9}-\frac{11}{3}|=\frac{4}{9}<1 \text{, 满足条件, 故输出 } y=\frac{29}{9}.$$

考点：程序框图.

14. 正方形的四个顶点  $A(-1, -1), B(1, -1), C(1, 1), D(-1, 1)$  分别在抛物线  $y=-x^2$  和  $y=x^2$  上，如图所示，若将一个质点随机投入正方形  $ABCD$  中，则质点落在阴影区域的概率是\_\_\_\_\_.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

试题分析：有几何概型可知若将一个质点随机投入正方形  $ABCD$  中，则质点落在阴影区域的概率

$$P = \frac{2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx}{2^2} = \frac{2}{3}.$$

考点：1. 几何概型；2. 定积分.

15. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，点  $M$  与  $C$  的焦点不重合，若  $M$  关于  $C$  的焦点的对称点分别为  $A, B$ ，线段

$MN$  的中点在  $C$  上，则  $|AN| + |BN| =$  \_\_\_\_\_.

【答案】12

【解析】

试题分析：设  $M, N$  的中点坐标为  $P$ ,  $M(x_M, y_M), N(x_N, y_N), P(x_P, y_P), A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ . 则

$$x_M + x_A = -2\sqrt{5}, x_M + x_B = 2\sqrt{5},$$

$y_M + y_A = 0$ ,  $y_M + y_B = 0$ ,  $x_M + x_N = 2x_P$ ,  $y_M + y_N = 2y_P$ ; 由于

$$|AN| + |BN| = \sqrt{(x_A - x_N)^2 + (y_A - y_N)^2} + \sqrt{(x_B - x_N)^2 + (y_B - y_N)^2}, \text{ 化简可得}$$

$$|AN| + |BN| = 2(\sqrt{(x_p + \sqrt{5})^2 + y_p^2} + \sqrt{(x_p - \sqrt{5})^2 + y_p^2}), \text{ 根据椭圆的定义}$$

$$\sqrt{(x_p + \sqrt{5})^2 + y_p^2} + \sqrt{(x_p - \sqrt{5})^2 + y_p^2} = 2 \times 3 = 6, \text{ 所以 } |AN| + |BN| = 12.$$

考点: 1.椭圆的定义; 2.两点距离公式.

16.对于  $c > 0$ , 当非零实数  $a$ ,  $b$  满足  $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$ , 且使  $|2a+b|$  最大时,  $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$  的最小值

为\_\_\_\_\_.

【答案】-2

【解析】

试题分析: 法一: 判别式法: 令  $2a+b=t$ , 则  $b=t-2a$ , 代入到  $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$  中, 得

$$4a^2 - 2a(t-2a) + 4(t-2a)^2 - c = 0, \text{ 即 } 24a^2 - 18ta + 4t^2 - c = 0 \dots \dots \textcircled{1}$$

因为关于  $a$  的二次方程  $\textcircled{1}$  有实根, 所以  $\Delta = 18^2 t^2 - 4 \times 24(4t^2 - c) \geq 0$ , 可得  $t^2 \leq \frac{8c}{5}$ ,

$$|2a+b| \text{ 取最大值时, } \begin{cases} a = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \text{ 或 } a = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}, \\ b = \sqrt{\frac{c}{10}} \quad b = -\sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases}$$

$$\text{当 } \begin{cases} a = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = \sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases} \text{ 时, } \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} - \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = -2\sqrt{\frac{10}{c}} + \left(\sqrt{\frac{5}{c}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{c}} - \sqrt{2}\right)^2 - 2 \geq -2,$$

$$\text{当 } \begin{cases} a = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = -\sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases} \text{ 时, } \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = -\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} > 0,$$

综上可知当  $c = \frac{5}{2}$ ,  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  时,  $\left(\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}\right)_{\min} = -2$

法二: 柯西不等式: 由  $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$  可得:  $2c = 3(a+b)^2 + 5(a-b)^2$

$$(2a+b)^2 = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}(a+b) + \frac{\sqrt{5}}{10} \times \sqrt{5}(a+b) \right]^2$$

$$\leq \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{5}}{10} \right)^2 \right] \left[ (\sqrt{3}(a+b))^2 + (\sqrt{5}(a-b))^2 \right] = 2c \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{20} \right) = \frac{8c}{5},$$

当且仅当  $\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{5}}{10} = \sqrt{3}(a+b) : \sqrt{5}(a-b)$  时取等号, 即  $2a=3b$  时, 取等号,

这时  $\begin{cases} a = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = \sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases}$  或  $\begin{cases} a = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = -\sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases}$

当  $\begin{cases} a = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = \sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases}$  时,  $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} - \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = -\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = 5\left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 - 2 \geq -2,$

当  $\begin{cases} a = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = -\sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases}$  时,  $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = -\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} > 0,$

综上可知当  $c=\frac{5}{2}, a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{2}$  时,  $\left(\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}\right)_{\min} = -2$

**考点:** 柯西不等式.

**三、解答题** (本大题共 6 小题, 共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

在  $\Delta ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边  $a, b, c$ , 且  $a > c$ , 已知  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ ,  $\cos B = \frac{1}{3}$ ,  $b=3$ , 求:

(1)  $a$  和  $c$  的值;

(2)  $\cos(B-C)$  的值.

**【答案】**(1)  $a=3$ ,  $c=2$ ; (2)  $\frac{23}{27}$ .

**【解析】**

试题分析: (I) 由  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$  和  $\cos B = \frac{1}{3}$ , 得  $ac=6$ . 由余弦定理, 得  $a^2 + c^2 = 13$ .

解  $\begin{cases} ac = 6 \\ a^2 + c^2 = 13 \end{cases}$ , 即可求出  $a, c$ ; (II) 在  $\triangle ABC$  中, 利用同角基本关系得  $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

由正弦定理, 得  $\sin C = \frac{c}{b} \sin B = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ , 又因为  $a = b > c$ , 所以  $C$  为锐角, 因此

$\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{7}{9}$ , 利用  $\cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C$ , 即可求出结果.

试题解析: (I) 由  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 2$  得,  $c \cdot a \cos B = 2$ , 又  $\cos B = \frac{1}{3}$ , 所以  $ac = 6$ .

由余弦定理, 得  $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \cos B$ .

又  $b=3$ , 所以  $a^2 + c^2 = 9 + 2 \times 2 = 13$ .

解  $\begin{cases} ac = 6 \\ a^2 + c^2 = 13 \end{cases}$ , 得  $a=2, c=3$  或  $a=3, c=2$ .

因为  $a>c$ , 所以  $a=3, c=2$ .

(II) 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

由正弦定理, 得  $\sin C = \frac{c}{b} \sin B = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ , 又因为  $a = b > c$ , 所以  $C$  为锐角, 因此

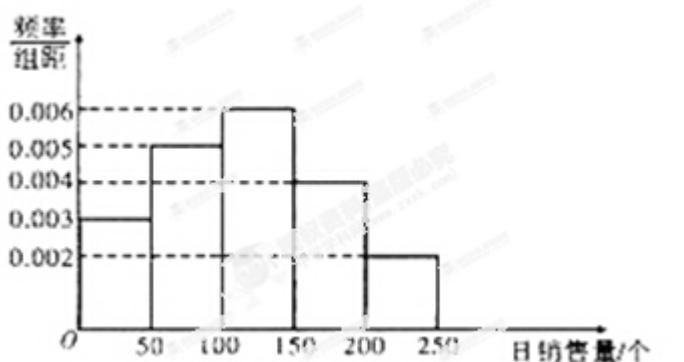
$\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - (\frac{4\sqrt{2}}{9})^2} = \frac{7}{9}$ .

于是  $\cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{23}{27}$ .

考点: 1.解三角形; 2.三角恒等变换.

18. (本小题满分 12 分)

一家面包房根据以往某种面包的销售记录, 绘制了日销售量的频率分布直方图, 如图所示:



将日销售量落入各组的频率视为概率，并假设每天的销售量相互独立。

- (1) 求在未来连续 3 天里，有连续 2 天的日销售量都不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个的概率；
- (2) 用  $X$  表示在未来 3 天里日销售量不低于 100 个的天数，求随机变量  $X$  的分布列，期望  $E(X)$  及方差  $D(X)$ 。

**【答案】( I ) 0.108; ( II ) 详见解析.**

**【解析】**

试题分析：( I ) 设  $A_1$  表示事件“日销售量不低于 100 个”， $A_2$  表示事件“日销售量低于 50 个”， $B$  表示事件“在未来连续 3 天里有连续 2 天日销售量不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个”。因此可求出  $P(A_1) = 0.6$ ,  $P(A_2) = 0.15$ ，利用事件的独立性即可求出  $P(B)$ ；( II ) 由题意可知  $X \sim B(3, 0.6)$ ，所以即可列出分布列，求出期望为  $E(X)$  和方差  $D(X)$  的值。

试题解析：( I ) 设  $A_1$  表示事件“日销售量不低于 100 个”， $A_2$  表示事件“日销售量低于 50 个”， $B$  表示事件“在未来连续 3 天里有连续 2 天日销售量不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个”.因此

$$P(A_1) = (0.006 + 0.004 + 0.002) \times 50 = 0.6.$$

$$P(A_2) = 0.003 \times 50 = 0.15.$$

$$P(B) = 0.6 \times 0.6 \times 0.15 \times 2 = 0.108.$$

( II )  $X$  的可能取值为 0,1,2,3. 相应的概率为

$$P(X=0) = C_3^0 \cdot (1-0.6)^3 = 0.064,$$

$$P(X=1) = C_3^1 \cdot 0.6(1-0.6)^2 = 0.288,$$

$$P(X=2) = C_3^2 \cdot 0.6^2(1-0.6) = 0.432,$$

$$P(X=3) = C_3^3 \cdot 0.6^3 = 0.216,$$

分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	0.064	0.288	0.432	0.216

因为  $X \sim B(3, 0.6)$ , 所以期望为  $E(X)=3 \times 0.6=1.8$ , 方差  $D(X)=3 \times 0.6 \times (1-0.6)=0.72$

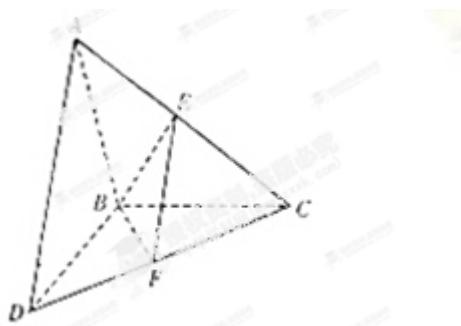
考点：1. 频率分布直方图；2. 二项分布.

19. (本小题满分 12 分)

如图,  $\Delta ABC$  和  $\Delta BCD$  所在平面互相垂直, 且  $AB = BC = BD = 2$ ,  $\angle ABC = \angle DBC = 120^\circ$ ,  $E$ 、 $F$  分别为  $AC$ 、 $DC$  的中点.

(1) 求证:  $EF \perp BC$ ;

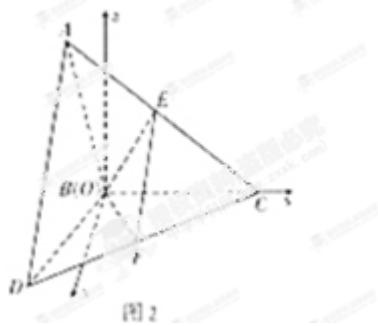
(2) 求二面角  $E-BF-C$  的正弦值.



【答案】(I) 详见解析; (II)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

### 【解析】

试题分析: (I) (方法一) 过  $E$  作  $EO \perp BC$ , 垂足为  $O$ , 连  $OF$ , 由  $\triangle ABC \cong \triangle DBC$  可证出  $\triangle EOC \cong \triangle FOC$ , 所以  $\angle EOC = \angle FOC = \frac{\pi}{2}$ , 即  $FO \perp BC$ ; 又  $EO \perp BC$ , 因此  $BC \perp EF$ , 即可证明  $EF \perp BC$ . (方法二) 由题意, 以  $B$  为坐标原点, 在平面  $DBC$  内过  $B$  且垂直  $BC$  的直线为  $x$  轴,  $BC$  所在直线为  $y$  轴, 在平面  $ABC$  内过  $B$  作垂直  $BC$  的直线为  $z$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



易得  $E(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ , 所以  $\overrightarrow{EF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$ , 因此  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ , 从而得  $EF \perp BC$ ;

(II) (方法一) 在图 1 中, 过  $O$  作  $OG \perp BF$ , 垂足为  $G$ , 连  $EG$ , 由平面  $ABC \perp$  平面  $BDC$ , 从而  $EO \perp$  平面  $BDC$ , 从而  $EO \perp BF$ , 又  $OG \perp BF$ , 由三垂线定理知  $EG \perp BF$ , 因此  $\angle EGO$  为二面角  $E-BF-C$  的平面角; 在  $\triangle EOC$  中,  $EO = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} BC \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 由  $\triangle BGO \sim \triangle BFC$  知,

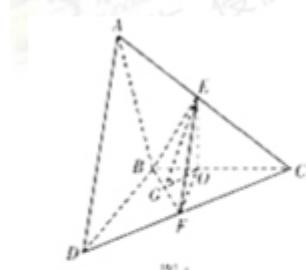
$OG = \frac{BO}{BC} \cdot FC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 因此  $\tan \angle EGO = \frac{EO}{OG} = 2$ , 从而  $\sin \angle ECO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 即可求出二面角  $E-BF-C$  的正弦值.

(方法二) 在图 2 中, 平面  $BFC$  的一个法向量为  $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ , 设平面  $BEF$  的法向量  $\vec{n}_2 = (x, y, z)$ , 又由  $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases}$  得其中一个  $\vec{n}_2 = (1, -\sqrt{3}, 1)$ , 设二面角  $E-BF-C$  的大小为  $\theta$ , 且由题意知  $\theta$  为锐角, 则

$\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , 学科网因此  $\sin \angle EGO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 即可求出二面角  $E-BF-C$  的正弦值.

#### 试题解析：( I ) 证明：

(方法一) 过  $E$  作  $EO \perp BC$ , 垂足为  $O$ , 连  $OF$ ,



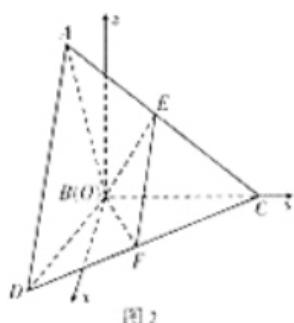
10

由 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$  可证出 $\triangle EOC \cong \triangle FOC$ , 所以 $\angle EOC = \angle FOC = \frac{\pi}{2}$ , 即 $FO \perp BC$ ,

又  $EO \perp BC$ , 因此  $BC \perp$  面  $EFO$ ,

又  $EF \subset$  面  $EFO$ , 所以  $EF \perp BC$ .

(方法二) 由题意, 以  $B$  为坐标原点, 在平面  $DBC$  内过  $B$  且垂直  $BC$  的直线为  $x$  轴,  $BC$  所在直线为  $y$  轴, 在平面  $ABC$  内过  $B$  且垂直  $BC$  的直线为  $z$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



(A) 2

易得  $B(0,0,0)$ ,  $A(0, -1, \sqrt{3})$ ,  $D(\sqrt{3}, -1, 0)$ ,  $C(0,2,0)$ , 因而  $E(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ , 所以

$\overrightarrow{EF} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$ , 因此  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ , 从而  $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{BC}$ , 所以  $EF \perp BC$ .

(II) (方法一) 在图 1 中, 过  $O$  作  $OG \perp BF$ , 垂足为  $G$ , 连  $EG$ , 由平面  $ABC \perp$  平面  $BDC$ , 从而  $EO \perp$  平面  $BDC$ , 从而  $EO \perp$  面  $BDC$ , 又  $OG \perp BF$ , 由三垂线定理知  $EG \perp BF$ .

因此  $\angle EGO$  为二面角  $E-BF-C$  的平面角;

在  $\triangle EOC$  中,  $EO = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} BC \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 由  $\triangle BGO \sim \triangle BFC$  知,  $OG = \frac{BO}{BC} \cdot FC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 因此  $\tan \angle EGO = \frac{EO}{OG} = 2$ , 从而  $\sin \angle EGO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 即二面角  $E-BF-C$  的正弦值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

(方法二) 在图 2 中, 平面  $BFC$  的一个法向量为  $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ , 设平面  $BEF$  的法向量  $\vec{n}_2 = (x, y, z)$ , 又  $\overline{BF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $\overline{BE} = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 由  $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overline{BF} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overline{BE} = 0 \end{cases}$  得其中一个  $\vec{n}_2 = (1, -\sqrt{3}, 1)$ , 设二面角  $E-BF-C$  的大小为  $\theta$ , 且由题意知  $\theta$  为锐角, 则  $\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , 因此  $\sin \angle EGO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 即二面角  $E-BF-C$  的正弦值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

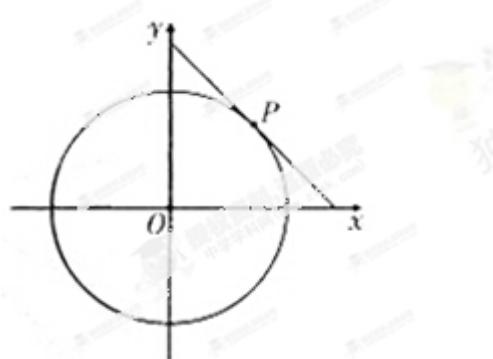
考点: 1. 线面垂直的判定; 2. 二面角.

20. (本小题满分 12 分)

圆  $x^2 + y^2 = 4$  的切线与  $x$  轴正半轴,  $y$  轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为  $P$  (如图), 双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  过点  $P$  且离心率为  $\sqrt{3}$ .

(1) 求  $C_1$  的方程;

(2) 椭圆  $C_2$  过点  $P$  且与  $C_1$  有相同的焦点, 直线  $l$  过  $C_2$  的右焦点且与  $C_2$  交于  $A, B$  两点, 若以线段  $AB$  为直径的圆心过点  $P$ , 求  $l$  的方程.



**【答案】**(I)  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ ; (II)  $x - (\frac{3\sqrt{6}}{2} - 1)y - \sqrt{3} = 0$ , 或  $x + (\frac{3\sqrt{6}}{2} - 1)y - \sqrt{3} = 0$

**【解析】**

试题分析: (I) 设切点坐标为  $(x_0, y_0)$  ( $x_0 > 0, y_0 > 0$ ), 则切线斜率为  $-\frac{x_0}{y_0}$ , 切线方程为

$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ , 即  $x_0x + y_0y = 4$ . 此时, 学科网两个坐标轴的正半轴与切线围成的三角形面积为

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x_0} \cdot \frac{4}{y_0} = \frac{8}{x_0 y_0}$ . 由  $x_0^2 + y_0^2 = 4 \geq 2x_0 y_0$  知当且仅当  $x_0 = y_0 = \sqrt{2}$  时  $x_0 y_0$  有最大值, 即  $S$  有最小值,

因此点  $P$  得坐标为  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , 由题意知  $\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 3a^2 \end{cases}$  解得  $a^2 = 1, b^2 = 2$ , 即可求出  $C_1$  的方程; (II) 由

(I) 知  $C_2$  的焦点坐标为  $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ , 由此  $C_2$  的方程为  $\frac{x^2}{3+b_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ , 其中  $b_1 > 0$ .

由  $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  在  $C_2$  上, 得  $\frac{2}{3+b_1^2} + \frac{2}{b_1^2} = 1$ , 显然,  $I$  不是直线  $y=0$ . 设  $I$  的方程为  $x=my+\sqrt{3}$ , 点

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  由  $\begin{cases} x = my + \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$  得  $(m^2+2)y^2 + 2\sqrt{3}my - 3 = 0$ , 因

$\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2} - x_1, \sqrt{2} - y_1), \overrightarrow{BP} = (\sqrt{2} - x_2, \sqrt{2} - y_2)$  由题意知  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ , 所以

$x_1 x_2 - \sqrt{2}(x_1 + x_2) + y_1 y_2 - \sqrt{2}(y_1 + y_2) + 4 = 0$ , 将韦达定理得到的结果代入

$x_1 x_2 - \sqrt{2}(x_1 + x_2) + y_1 y_2 - \sqrt{2}(y_1 + y_2) + 4 = 0$  式整理得  $2m^2 - 2\sqrt{6}m + 4\sqrt{6} - 11 = 0$ , 解得  $m = \frac{3\sqrt{6}}{2} - 1$

或  $m = -\frac{3\sqrt{6}}{2} + 1$ , 即可求出直线  $I$  的方程.

试题解析：(I) 设切点坐标为  $(x_0, y_0)$  ( $x_0 > 0, y_0 > 0$ )，则切线斜率为  $-\frac{x_0}{y_0}$ ，切线方程为

$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ ，即  $x_0x + y_0y = 4$ ，此时，两个坐标轴的正半轴与切线围成的三角形面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x_0} \cdot \frac{4}{y_0} = \frac{8}{x_0 y_0} \text{. 由 } x_0^2 + y_0^2 = 4 \geq 2x_0 y_0 \text{ 知当且仅当 } x_0 = y_0 = \sqrt{2} \text{ 时 } x_0 y_0 \text{ 有最大值，即 } S \text{ 有最小值，}$$

因此点  $P$  得坐标为  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ，

由题意知

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 3a^2 \end{cases} \text{解得 } a^2 = 1, b^2 = 2, \text{ 故 } C_1 \text{ 方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

(II) 由(I)知  $C_2$  的焦点坐标为  $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ ，由此  $C_2$  的方程为  $\frac{x^2}{3+b_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ ，其中  $b_1 > 0$ .

由  $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  在  $C_2$  上，得  $\frac{2}{3+b_1^2} + \frac{2}{b_1^2} = 1$ ，

显然， $l$  不是直线  $y=0$ . 设  $l$  的方程为  $x=ny+\sqrt{3}$ ，点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

由  $\begin{cases} x = ny + \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$  得  $(m^2+2)y^2 + 2\sqrt{3}ny - 3 = 0$ ，又  $y_1, y_2$  是方程的根，因此

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}n}{m^2+2} & ① \\ y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2+2} & ② \end{cases}, \text{ 由 } x_1 = ny_1 + \sqrt{3}, x_2 = ny_2 + \sqrt{3} \text{ 得}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{m^2 + 2} \\ x_1 x_2 = m^2 y_1 y_2 + \sqrt{3}m(y_1 + y_2) + 3 = \frac{6 - 6m^2}{m^2 + 2} \end{cases} \quad \begin{matrix} ③ \\ ④ \end{matrix}$$

因  $\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2} - x_1, \sqrt{2} - y_1)$ ,  $\overrightarrow{BP} = (\sqrt{2} - x_2, \sqrt{2} - y_2)$  由题意知  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ , 所以

$$x_1 x_2 - \sqrt{2}(x_1 + x_2) + y_1 y_2 - \sqrt{2}(y_1 + y_2) + 4 = 0 \quad ⑤, \text{ 将 } ①, ②, ③, ④ \text{ 代入 } ⑤ \text{ 式整理得}$$

$$2m^2 - 2\sqrt{6}m + 4\sqrt{6} - 11 = 0, \text{ 解得 } m = \frac{3\sqrt{6}}{2} - 1 \text{ 或 } m = -\frac{3\sqrt{6}}{2} + 1, \text{ 因此直线 } l \text{ 的方程为}$$

$$x - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - 1\right)y - \sqrt{3} = 0, \text{ 或 } x + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - 1\right)y - \sqrt{3} = 0.$$

**考点:** 1.椭圆的方程; 2.直线与椭圆的位置关系.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (\cos x - x)(\pi + 2x) - \frac{8}{3}(\sin x + 1)$ ,  $g(x) = 3(x - x)\cos x - 4(1 + \sin x) \ln\left(3 - \frac{2x}{\pi}\right)$ .

证明: (I) 存在唯一  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使  $f(x_0) = 0$ ;

(II) 存在唯一  $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 使  $g(x_1) = 0$ , 且对(I)中的  $x_0 + x_1 < \pi$ .

**【答案】**(I) 详见解析; (II) 详见解析.

**【解析】**

试题分析: (I) 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $f'(x) = -(1 + \sin x)(\pi + 2x) - 2x - \frac{2}{3} \cos x < 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上

为减函数, 又  $f(0) = \pi - \frac{8}{3} > 0$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) = -\pi^2 - \frac{16}{3} < 0$ , 所以存在唯一  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使  $f(x_0) = 0$ . (II) 考

虑函数  $h(x) = \frac{3(x - \pi) \cos x}{1 + \sin x} - 4 \ln\left(3 - \frac{2}{\pi}x\right)$ ,  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , 令  $t = \pi - x$ , 则  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  时,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

记  $u(t) = h(\pi - t) = \frac{3t \cos t}{1 + \sin t} - 4 \ln\left(1 + \frac{2}{\pi}t\right)$ , 则  $u'(t) = \frac{3f(t)}{(\pi + 2t)(1 + \sin t)}$ , 有(I)得, 当  $t \in (0, x_0)$  时,

$u'(t) > 0$ , 当  $t \in (x_0, \frac{\pi}{2})$  时,  $u'(t) < 0$ . 在  $(0, x_0)$  上  $u(t)$  是增函数, 又  $u(0) = 0$ , 从而当  $t \in (0, x_0]$  时,

$u(t) > 0$ , 所以  $u(t)$  在  $(0, x_0]$  上无零点. 在  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  上  $u(t)$  是减函数, 又  $u(x_0) > 0$ ,  $u(\frac{\pi}{2}) = -4 \ln 2 < 0$ , 存在

唯一的  $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ , 使  $u(t_1) = 0$ . 所以存在唯一的  $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$  使  $u(t_1) = 0$ . 因此存在唯一的

$x_1 = \pi - t_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 使  $h(x_1) = h(\pi - t_1) = u(t_1) = 0$ . 因为当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $1 + \sin x > 0$ , 故

$g(x) = (1 + \sin x)h(x)$  与  $h(x)$  有相同的零点，所以存在唯一的  $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，使  $g(x_1) = 0$ . 因

$x_1 = \pi - t_1, t_1 > x_0$ ，所以  $x_0 + x_1 < \pi$ ，即命题得证.

试题解析：(I) 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时， $f'(x) = -(1 + \sin x)(\pi + 2x) - 2x - \frac{2}{3} \cos x < 0$ ，函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上为减函数，又  $f(0) = \pi - \frac{8}{3} > 0, f(\frac{\pi}{2}) = -\pi^2 - \frac{16}{3} < 0$ ，所以存在唯一  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，使  $f(x_0) = 0$ .

(II) 考虑函数  $h(x) = \frac{3(x-\pi)\cos x}{1+\sin x} - 4\ln(3 - \frac{2}{\pi}x), x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ，

令  $t = \pi - x$ ，则  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  时， $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，

记  $u(t) = h(\pi - t) = \frac{3t\cos t}{1+\sin t} - 4\ln(1 + \frac{2}{\pi}t)$ ，则  $u'(t) = \frac{3f(t)}{(\pi+2t)(1+\sin t)}$ ，

由(I)得，当  $t \in (0, x_0)$  时， $u'(t) > 0$ ，当  $t \in (x_0, \frac{\pi}{2})$  时， $u'(t) < 0$ .

在  $(0, x_0)$  上  $u(t)$  是增函数，又  $u(0) = 0$ ，从而当  $t \in (0, x_0]$  时， $u(t) > 0$ ，所以  $u(t)$  在  $(0, x_0]$  上无零点.

在  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  上  $u(t)$  是减函数，又  $u(x_0) > 0, u(\frac{\pi}{2}) = -4\ln 2 < 0$ ，存在唯一的  $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ ，使  $u(t_1) = 0$ .

所以存在唯一的  $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$  使  $u(t_1) = 0$ .

因此存在唯一的  $x_1 = \pi - t_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，使  $h(x_1) = h(\pi - t_1) = u(t_1) = 0$ .

因为当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时， $1 + \sin x > 0$ ，故  $g(x) = (1 + \sin x)h(x)$  与  $h(x)$  有相同的零点，所以存在唯一的  $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，使  $g(x_1) = 0$ .

因  $x_1 = \pi - t_1, t_1 > x_0$ ，所以  $x_0 + x_1 < \pi$

考点：1. 零点唯一性的判断；2. 函数的单调性的应用.

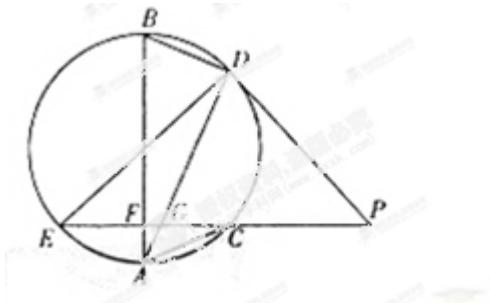
请考生在第 22、23、24 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分，作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-1：几何证明选讲

如图，EP 交圆于 E、C 两点，PD 切圆于 D，G 为 CE 上一点且  $PG = PD$ ，连接 DG 并延长交圆于点 A，作弦 AB 垂直 EP，垂足为 F.

(I) 求证：AB 为圆的直径；

(II) 若  $AC=BD$ ，求证： $AB=ED$ .



**【答案】(I) 详见解析; (II) 详见解析.**

**【解析】**

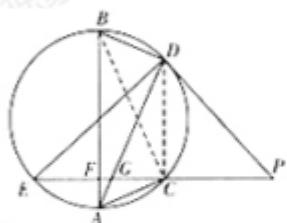
试题分析: (I) 因为  $PD=PG$ , 所以  $\angle PDC=\angle PGD$ . 由于  $PD$  为切线, 故  $\angle PDA=\angle DBA$ , 又由于  $\angle PGD=\angle EGA$ , 故  $\angle DBA=\angle EGA$ , 所以  $\angle DBA+\angle BAD=\angle EGA+\angle BAD$ . 从而  $\angle BDA=\angle PFA$ . 由于  $AF$  垂直  $EP$ , 所以  $\angle PFA=90^\circ$ , 于是  $\angle BDA=90^\circ$ , 故  $AB$  是直径. (II) 连接  $BC$ ,  $DC$ . 由于  $AB$  是直径, 故  $\angle BDA=\angle ACB=90^\circ$ , 在  $Rt\triangle BDA$  与  $Rt\triangle ACB$  中,  $AB=BA$ ,  $AC=BD$ , 从而  $Rt\triangle BDA \cong Rt\triangle ACB$ , 于是  $Rt\triangle BDA$  与  $\angle DAB=\angle CBA$ . 又因为  $\angle DCB=\angle DAB$ , 所以  $\angle DCB=\angle CBA$ , 故  $DC \parallel AB$ . 由于  $ED$  是直径, 即可得出结论.

试题解析: (I) 因为  $PD=PG$ , 所以  $\angle PDC=\angle PGD$ .

由于  $PD$  为切线, 故  $\angle PDA=\angle DBA$ , 又由于  $\angle PGD=\angle EGA$ , 故  $\angle DBA=\angle EGA$ , 所以  $\angle DBA+\angle BAD=\angle EGA+\angle BAD$ , 从而  $\angle BDA=\angle PFA$ .

由于  $AF$  垂直  $EP$ , 所以  $\angle PFA=90^\circ$ , 于是  $\angle BDA=90^\circ$ , 故  $AB$  是直径.

(II) 连接  $BC$ ,  $DC$ .



由于  $AB$  是直径, 故  $\angle BDA=\angle ACB=90^\circ$ ,

在  $Rt\triangle BDA$  与  $Rt\triangle ACB$  中,  $AB=BA$ ,  $AC=BD$ ,

从而  $Rt\triangle BDA \cong Rt\triangle ACB$ , 于是  $Rt\triangle BDA$  与  $\angle DAB=\angle CBA$ .

又因为  $\angle DCB=\angle DAB$ , 所以  $\angle DCB=\angle CBA$ , 故  $DC \parallel AB$ .

由于  $ED$  是直径, 由 (I) 得  $ED=AB$ .

考点: 1. 圆周角定理; 2. 与圆有关的比例线段.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

将圆  $x^2 + y^2 = 1$  上每一点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍, 得曲线  $C$ .

(I) 写出  $C$  的参数方程;

(II) 设直线  $l: 2x + y - 2 = 0$  与  $C$  的交点为  $P_1, P_2$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极坐标建立极坐标系, 求过线段  $P_1P_2$  的中点且与  $l$  垂直的直线的极坐标方程.

【答案】(I)  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$  (t 为参数); (II)  $\rho = \frac{3}{4 \sin \theta - 2 \cos \theta}$ .

【解析】

试题分析: (I) 设  $(x_1, y_1)$  为圆上的点, 在曲线  $C$  上任意取一点  $(x, y)$ , 再根据  $\begin{cases} x = x_1 \\ y = 2y_1 \end{cases}$ , 由于点  $(x_1, y_1)$

在圆  $x^2 + y^2 = 1$  上, 求出  $C$  的方程, 化为参数方程. (II) 解方程组求得  $P_1, P_2$  的坐标, 可得线段  $P_1P_2$  的中点坐标. 再根据与  $l$  垂直的直线的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 用点斜式求得所求的直线的方程, 再根据  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  可得所求的直线的极坐标方程.

试题解析: (I) 设  $(x_1, y_1)$  为圆上的点, 在已知变换下位  $C$  上点  $(x, y)$ , 依题意, 得  $\begin{cases} x = x_1 \\ y = 2y_1 \end{cases}$  由  $x_1^2 + y_1^2 = 1$

得  $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$ , 即曲线  $C$  的方程为  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ , 故  $C$  得参数方程为  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$  (t 为参数).

(II) 由  $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$  解得:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ , 或  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ .

不妨设  $P_1(1, 0), P_2(0, 2)$ , 则线段  $P_1P_2$  的中点坐标为  $(\frac{1}{2}, 1)$ , 所求直线的斜率为  $k = \frac{1}{2}$ , 于是所求直线方程为

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}),$$

化极坐标方程, 并整理得

$$2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta = -3, \text{ 即 } \rho = \frac{3}{4 \sin \theta - 2 \cos \theta}.$$

考点: 1. 参数方程化成普通方程; 2. 点的极坐标和直角坐标的互化.

24. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设函数  $f(x) = 2|x - 1| + x - 1$ ,  $g(x) = 16x^2 - 8x + 1$ , 记  $f(x) \leq 1$  的解集为  $M$ ,  $g(x) \leq 4$  的解集为  $N$ .

( I ) 求  $M$ ;

( II ) 当  $x \in M \cap N$  时, 证明:  $x^2 f(x) + x[f(x)]^2 \leq \frac{1}{4}$ .

【答案】( I )  $M = \{x \mid 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\}$ ; ( II ) 详见解析.

【解析】

试题分析: ( I ) 由所给的不等式可得当  $x \geq 1$  时, 由  $f(x) = 3x - 3 \leq 1$ , 或当  $x < 1$  时, 由  $f(x) = 1 - x \leq 1$ , 分别求得它们的解集, 再取并集, 即得所求. ( II ) 由  $g(x) \leq 4$ , 求得  $N$ , 可得  $M \cap N = \{x \mid 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\}$ . 当  $x \in M \cap N$  时,  $f(x) = 1 - x$ , 不等式的左边化为  $\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ , 显然它小于或等于  $\frac{1}{4}$ , 要证的不等式得证.

试题解析: ( I )  $f(x) = \begin{cases} 3x - 3, & x \in [1, +\infty) \\ 1 - x, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$

当  $x \geq 1$  时, 由  $f(x) = 3x - 3 \leq 1$  得  $x \leq \frac{4}{3}$ , 故  $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$ ;

当  $x < 1$  时, 由  $f(x) = 1 - x \leq 1$  得  $x \geq 0$ , 故  $0 \leq x < 1$ ;

所以  $f(x) \leq 1$  的解集为  $M = \{x \mid 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\}$ .

( II ) 由  $g(x) = 16x^2 - 8x + 1 \leq 4$  得  $16(x - \frac{1}{4})^2 \leq 4$ , 解得  $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ , 因此  $N = \{x \mid -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\}$ , 故  $M \cap N = \{x \mid 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\}$ .

当  $x \in M \cap N$  时,  $f(x) = 1 - x$ , 于是

$$x^2 f(x) + x[f(x)]^2 = xf(x)[x + f(x)]$$

$$= xf(x) = x(1 - x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}.$$

考点: 1. 其他不等式的解法; 2. 交集及其运算.