2012年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数　学（文类）

【试题总评】历年的四川高考试题都始终遵从源于教材、注重基础、全面考查、突出主干、注重思想、考查本质、多考点想，少考点算、能力立意、突出思维、稳中有进， 2012年高考数学四川卷也不例外，作为四川省最后一届的大纲版学习考试，在此次的高考中，试卷在题型、题量、难度分布上保持了相对的稳定，同时也有适当的创新，在2010年四川高考中把17、18、19题考点内容进行调整后，此次高考试卷也对试题的顺序做了适当的顺序调整，打破了以前的传统式的考题顺序。2012年四川高考数学卷很大一部分试题直接源于教材或由教材上的例题、习题、复习题改变而成，这些试题注重基础知识的理解和运用。例如第(1)、(5)、(8)等15个题目。从而也充分说明了高考对基础知识的重视，立足于教材、回归到教材、重视课本、减轻学业负担，实施素质教育的导向作用。2012年四川高考数学解答题目注重学生对基础知识的理解和运用，在题型上面略有创新，题目的灵活性加强，不再像以往试题固定化模式解题。解答题部分注重考察学生的思维能力，运算能力，分析问题和解决问题的能力，创新意识，考察函数，方程的转化、划归，特殊和一般等思想方法。总的来说，2012年四川高考数学试题相对稳定，注重基础，保持了四川卷的命题风格，同时又立足于现行高中数学教材和教学实际试题。

参考公式：

如果事件互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件A、B相互独立，那么

$P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是p，那么

在n次独立重复试验中事件A恰好发生k次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\dots,n)$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi P^3$

其中R表示球的半径

第一部分　（选择题 共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5份，共60份。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、设集合$A=\{a,b\}$，$B=\{b,c,d\}$，则$A\cup B=$（　　）

A、$\{b\}$　　B、$\{b,c,d\}$　　C、$\{a,c,d\}$　　D、$\{a,b,c,d\}$

答案：D

解析：　$A\cup B=\{a,b\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}$

考点定位：本题考查集合，意在考查考生集合并集的运算。

2、$(1+x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是（　　）

A、21　　　　B、28　　　　C、35　　　　D、42

答案：21

解析：$(1+x)^7$ 的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r x^r$，当 $r=2$ 时，得展开式中 x^2 的系数是 $C_7^2=21$。

考点定位：本题考查二项式定理，意在考查考生对二项式定理通项的应用

3、交通管理部门为了解机动车驾驶员（简称驾驶员）对某新法规的知晓情况，对甲、乙、丙、丁四个社区做分层抽样调查。假设四个社区驾驶员的总人数为 N，其中甲社区有驾驶员 96 人。若在甲、乙、丙、丁四个社区抽取驾驶员的人数分别为 12,21,25,43，则这四个社区驾驶员的总人数 N 为（　　）

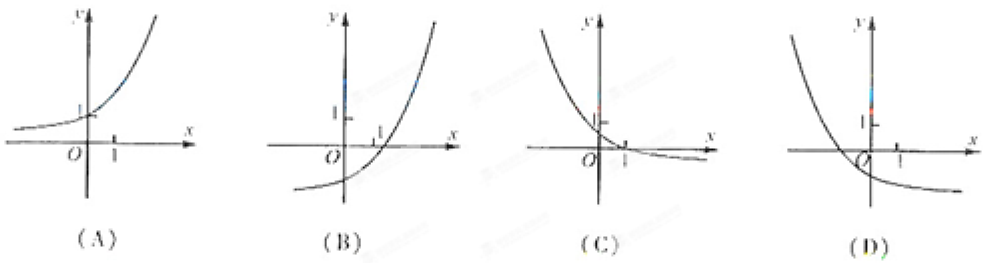
A、101　　　　B、808　　　　C、1212　　　　D、2012

答案：B

解析：四个社区抽取的总人数为 $12+21+25+43=101$，由分层抽样知，$\dfrac{96}{12}=\dfrac{N}{101}$，解得 $N=808$。

考点定位：本题考查抽样方法，意在考查考生分层抽样方法的应用

4、函数 $y=a^x-a(a>0,a\neq 1)$ 的图象可能是（　　）

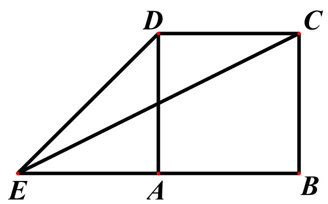


答案：D

解析：当 a>1 时，函数 $y=a^x$ 单调递增，$-a<-1$，所以 $y=a^x-a$ 的图像与 y 轴的交点的在 x 轴的下方，所以选项 A 不正确；$y=a^x-a$ 的图像与 x 轴的交点为（1,0），故 B 不正确；当 0<a<1 时，函数 $y=a^x$ 单调递减，故 C 正确；当 0<a<1 时，$-a<0$，所以函数 $y=a^x-a$ 与 y 轴的交点在 x 轴的上方，选项 D 不符合条件.

考点定位：本题考查函数图像，意在考查考生对指数函数图像、单调性的理解和应用能力。

5、如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，延长 BA 至 E，使 $AE=1$，连接 EC、ED 则 $\sin\angle CED=$（　　）



A、$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　　　B、$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　　　C、$\dfrac{\sqrt{5}}{10}$　　　　D、$\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

答案：B

解析：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，且 $AE=AD=1$，所以 $\angle AED=\frac{\pi}{4}$，

又因为在 $Rt\Delta EBC$ 中，$EB=2, BC=1$，所以 $\sin\angle BEC=\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\angle BEC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

于是 $\sin\angle CED=\sin(\frac{\pi}{4}-\angle BEC)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\angle BEC-\cos\frac{\pi}{4}\sin\angle BEC=\frac{\sqrt{10}}{10}$。

考点定位：本题考查三角函数求值，意在考查考生借助图形将所求角用已知角表示的转化能力。

6、下列命题正确的是（　　）

A、若两条直线和同一个平面所成的角相等，则这两条直线平行

B、若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等，则这两个平面平行

C、若一条直线平行于两个相交平面，则这条直线与这两个平面的交线平行

D、若两个平面都垂直于第三个平面，则这两个平面平行

答案：C

解析：若两条直线和同一个平面所成的角相等，则这两条直线可平行、可相交、可异面，故选项 A 错；

如果到一个平面距离相等的三个点在同一条直线上或在这个平面的两侧，则经过这三个点的平面与这个平面相交，故选项 B 错；

若两个平面都垂直于第三个平面，则这两个平面可平行、可相交，故选项 D 错。

考点定位：本题考查立体几何中的公理、定理，意在考查考生应用公理、定理判断命题的正确性。

7、设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 都是非零向量，下列四个条件中，使 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立的充分条件是（　　）

A、$\vec{a}=-\vec{b}$　　B、$\vec{a}//\vec{b}$　　C、$\vec{a}=2\vec{b}$　　D、$\vec{a}//\vec{b}$ 且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

答案：C

解析：因为 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，则向量 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 与 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 是方向相同的单位向量，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线同向，即使 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立的充分条件为选项 C.

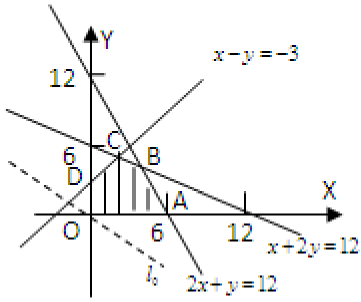
考点定位：本题考查充分必要条件以及向量的模的运算，意在考查考生对单位向量的理解能力和对充分必要条件的理解能力.

8、若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geq -3, \\ x+2y\leq 12, \\ 2x+y\leq 12 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$，则的最大值是（　　）

A、12　　B、26　　C、28　　D、33

答案：C

解析：做出可行域如图五边形 $OABCD$ 边界及其内部，作直线 $l_0: 3x+4y=0$，平移直线 l_0 经可行域内点 B 时，z 取最大值。



由 $\begin{cases} x+2y=12 \\ 2x+y=12 \end{cases}$，得 $B(4,4)$，

于是 $z_{\max}=3\times 4+4\times 4=28$

考点定位：本题考查简单的线性规划，意在考查考生数形结合求最值。

9、已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点 O，并且经过点 $M(2, y_0)$。若点 M 到该抛物线焦点的距离为3，则 $|OM|=$（　　）

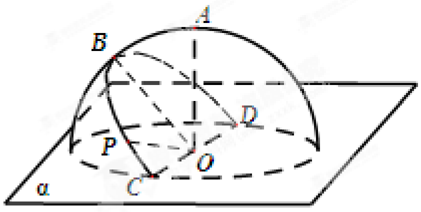
A、$2\sqrt{2}$　　B、$2\sqrt{3}$　　C、4　　D、$2\sqrt{5}$

答案：　B

解析：由抛物线定义知，$\frac{p}{2}+2=3$，所以 $p=2$，抛物线方程为 $y^2=4x$，因为点 $M(2, y_0)$ 在此抛物线上，所以 $y_0{}^2=8$，于是 $|OM|=\sqrt{4+y_0{}^2}=2\sqrt{3}$

考点定位：本题考查抛物线，意在考查考生对抛物线标准方程的应用能力。

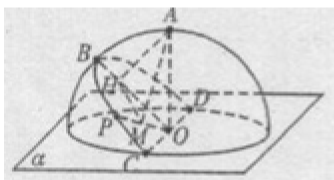
10、如图，半径为 R 的半球 O 的底面圆 O 在平面 α 内，过点 O 作平面 α 的垂线交半球面于点 A，过圆 O 的直径 CD 作平面 α 成 45° 角的平面与半球面相交，所得交线上到平面 α 的距离最大的点为 B，该交线上的一点 P 满足 $\angle BOP=60^\circ$，则 A、P 两点间的球面距离为（　　）



A、$R\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B、$\frac{\pi R}{4}$

C、$R\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D、$\frac{\pi R}{3}$

答案：A



解析：过点 A 作 $AH\perp$ 平面 BCD，平面 BCD 与底面所成的角为 45^0，$AO\perp$ 平面 α，且点 B 为交线上与平面 α 的距离最大的点，∴点 H 在 OB 上，且 $\angle AOB=45^0$.过点 H 作 $HM\perp OP$，垂足为 M，连接 AM，在等腰直角三角形 AOH 中，$AH=OH=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.在 $Rt\Delta HOM$ 中，$\angle HOP=60^0$，

$\therefore HM=OH\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}R$.

在 $Rt\Delta AHM$ 中， $AM=\sqrt{AH^2+HM^2}=\sqrt{\frac{2}{4}R^2+\frac{6}{16}R^2}=\sqrt{\frac{14}{16}R^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}R$

则在 $Rt\Delta AMO$ 中， $\sin\angle AOP=\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}R}{R}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

$\therefore \cos\angle AOP=\frac{\sqrt{2}}{4}$， $\therefore \angle AOP=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

∴A,P 两点的球面距离为 $R\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

考点定位：本题考查球体的几何性质，意在考查考生作图的能力和空间想象能力.

11、方程 $ay=b^2x^2+c$ 中的 $a,b,c\in\{-2,0,1,2,3\}$，且 a,b,c 互不相同，在所有这些方程所表示的曲线中，不同的抛物线共有（　.）

A、28 条　　B、32 条　　C、36 条　　D、48 条

答案：B

解析：因为 a,b 不能为 0，先安排 a,b，有 A_4^2 种，c 有 A_3^1 种，所以表示的抛物线共有

$A_4^2A_3^1=36$（条），又因为当 $b=\pm2$ 时，b^2 都为 4，所以重复的抛物线有 $A_2^1A_2^1=4$（条），

所以这些方程所表示的曲线中，不同的抛物线共有 $36-4=32$（条）

考点定位：本题考查排列组合问题，意在考查考生在抛物线的背景下求解，注意到重复的抛物线是解决本题的关键。

12、设函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$，$\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，

$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$（　　）

A、0　　B、7　　C、14　　D、21

答案：D

解析：由 $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_7)=14$，

知 $(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+...+(a_7-3)^3+(a_1+a_2+...+a_7)-7=14$，

因为 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，

所以 $(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+...+(a_7-3)^3+7(a_4-3)=0$，

因为 $(a_1-3)^3+(a_7-3)^3=\left[(a_1-3)+(a_7-3)\right]\left[(a_1-3)^2+(a_7-3)^3-(a_1-3)(a_7-3)\right]$，

$=2(a_4-3)\left\{\left[(a_1-3)-\frac{1}{2}(a_7-3)\right]^2+\frac{3}{4}(a_7-3)^2\right\}$，

$=2(a_4-3)\left[\left(a_1-\frac{1}{2}a_7-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a_7-3)^2\right]$，

令 $=2\left[\left(a_1-\frac{1}{2}a_7-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a_7-3)^2\right]=M_1>0$，

同理 $(a_2-3)^3+(a_6-3)^3=2(a_4-3)\left[\left(a_2-\frac{1}{2}a_6-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a_6-3)^2\right]=(a_4-3)\cdot M_2$，

$(a_3-3)^3+(a_5-3)^3=2(a_4-3)\left[\left(a_3-\frac{1}{2}a_5-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a_5-3)^2\right]=(a_4-3)\cdot M_3$，

$(a_4-3)^3=(a_4-3)(a_4-3)^2$，其中 $M_2>0,M_3>0$，

所以 $(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+\dots+(a_7-3)^3+7(a_4-3)$，

$=(a_4-3)M_1+(a_4-3)M_2+(a_4-3)M_3+(a_4-3)(a_4-3)^2+7(a_4-3)$，

$=(a_4-3)\left[M_1+M_2+M_3+(a_4-3)^2+7\right]=0$，

因为 $M_1+M_2+M_3+(a_4-3)^2+7>0$ 恒成立，所以 $(a_4-3)=0,a_4=0$，

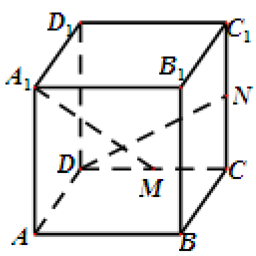
而 $a_1+a_2+\dots+a_7=7a_4=21$。

考点定位：本题考查函数与数列的综合问题，意在考查考生推理计算能力。

第二部分 （非选择题 共 90 分）

二、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 4 分，共 16 分）

13、函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ 的定义域是____________。（用区间表示）

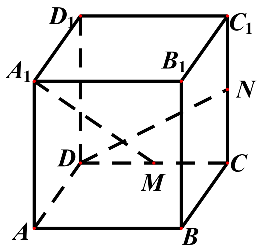


答案：$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

解析：$\because 1-2x>0,\therefore x<\frac{1}{2},\therefore f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$。

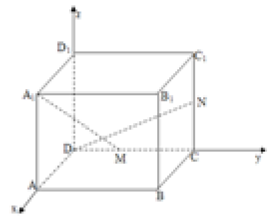
考点定位：本题考查函数的定义域，意在考查考生求解函数定义域的方法。

14、如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 、 N 分别是棱 CD 、 CC_1 的中点，则异面直线 A_1M 与 DN 所成角的大小是____________。



答案： 90^0

解析：如图，以点 D 为原点，以 DA,DC, DD_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立坐标系 D-xyz.



设正方体的棱长为 2，

则 $\overrightarrow{MA_1}=(2,-1,2)$, $\overrightarrow{DN}=(0,2,1)$, $\overrightarrow{MA_1}\bullet\overrightarrow{DN}=0$,

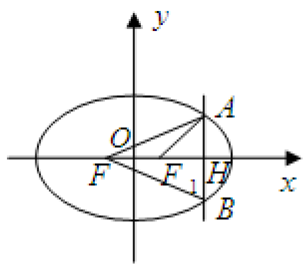
故异面直线 A_1M 与 ND 所成角为 90^0 .

考点定位：本题主要考查正方体中异面直线所成角问题，意在考查考生以空间向量为背景解题的方法求解.突出考查空间想象能力和计算能力.

15、椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{5}=1(a$ 为定值，且 $a>\sqrt{5})$ 的左焦点为 F ，直线 $x=m$ 与椭圆相交于点 A 、 B ， ΔFAB 的周长的最大值是 12，则该椭圆的离心率是______。

答案： $\dfrac{2}{3}$

解析：如图所示，设椭圆的右焦点为 F_1， AB 与 x 轴交于点 H ，则



$|AF|=2a-|AF_1|$, ΔABF 的周长为

$2|AF|+2|AH|=2(2a-|AF_1|+|AH|)$, $\because$ ΔAF_1H 为直角三角形，

$\therefore |AF_1|>|AH|$ 仅当 $|AF_1|=|AH|$, 即 F_1 与 H 重合时，ΔABF 的周长最大，

即最大周长为 $2(|AF|+|AF_1|)=4a=12$, $\therefore a=3$ ，而 $b=\sqrt{5}$, $\therefore c=2$ ，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$ 。

考点定位：本题考查椭圆的离心率，意在考查考生借助于数形结合和定义求解离心率。

16、设 a,b 为正实数，现有下列命题：

①若 $a^2-b^2=1$ ，则 $a-b<1$ ；

②若 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=1$ ，则 $a-b<1$ ；

③若 $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=1$ ，则 $|a-b|<1$ ；

④若 $|a^3-b^3|=1$ ，则 $|a-b|<1$ 。

其中的真命题有____________。（写出所有真命题的编号）

答案：①④

解析：①$a^2-b^2=1,\because b^2>0,\therefore b^2>1,$

故$a>1,$而$a-b=\dfrac{1}{a+b},\because a>1,b>0,\therefore a+b>1,\dfrac{1}{a+b}<1$，所以①正确；

②$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=1,\because$当$b=\dfrac{2}{3},a=2$时，满足$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$，而此时$a-b>1$，所以②错；

③$\because a,b$为正实数，且$\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|=1$，不妨设$a>b$，则

$a-b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，而$\sqrt{a}=\sqrt{b}+1>1,\therefore a-b=\sqrt{a}+\sqrt{b}>1$，所以③错；

④$\because a,b$为正实数，不妨设$a>b$，

则$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab),\therefore a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}$，

$\because a^3=1+b^3>1,\therefore a^2>1,a^2+b^2+ab>1,$

则$0<\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}<1,\therefore a-b=\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}<1$，即$|a-b|<1$，同理，设$a<b$，也能得到$|a-b|<1$的结论，故④正确。

考点定位：本题考查不等式的真假命题，意在考查考生特值法验证不等式和证明不等式。

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 74 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17、(本小题满分 12 分)

某居民小区有两个相互独立的安全防范系统（简称系统）A和B，系统A和系统B在任意时刻发生故障的概率分别为$\dfrac{1}{10}$和p。

（Ⅰ）若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为$\dfrac{49}{50}$，求p的值；

（Ⅱ）求系统A在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数的概率。

答案：（Ⅰ）$\dfrac{1}{5}$，（Ⅱ）$\dfrac{243}{250}$

解析：（Ⅰ）设“至少有一个系统不发生故障”为事件 C，那么

$1-P(\overline{C})=1-\dfrac{1}{10}\cdot P=\dfrac{49}{50}$，解得$P=\dfrac{1}{5}$……………………6 分

（Ⅱ）设“系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数”为事件 D，那么$P(D)=C_3^2\dfrac{1}{10}\cdot\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^3=\dfrac{972}{1000}=\dfrac{243}{250}$，

答：系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数的概率为 $\dfrac{243}{250}$……………………………… ……………………………12 分

考点定位：本题考查相互独立事件、独立重复试验、互斥事件等概念即相关的计算，意在考查考生运用概率知识与方法解决实际问题的能力。

18、(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$。

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

（Ⅱ）若 $f(\alpha)=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值。

答案：（Ⅰ）2π，$\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，（Ⅱ）$\dfrac{7}{25}$

解析：（Ⅰ）由已知，

$$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos x)-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}),$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，值域为 $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$……………………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$，$\therefore\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{5}$

所以 $\sin 2\alpha=-\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{2})=-\cos 2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=1-2\cos^2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=1-\dfrac{18}{25}=\dfrac{7}{25}$……12 分

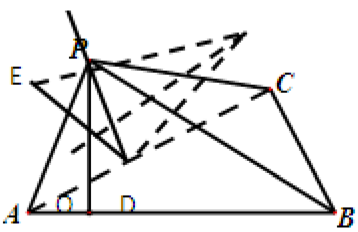
考点定位：本题考查三角函数的性质、两角和的正（余）弦公式、二倍角公式等基础知识，意在考查考生运算能力、化归与转化等数学思想。

19、(本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle APB=90^\circ$，$\angle PAB=60^\circ$，$AB=BC=CA$，点 P 在平面 ABC 内的射影 O 在 AB 上。

（Ⅰ）求直线 PC 与平面 ABC 所成的角的大小；

（Ⅱ）求二面角 $B-AP-C$ 的大小。



答案：（Ⅰ）$\arctan\dfrac{\sqrt{39}}{13}$（Ⅱ）$\arctan 2$

解析：解法一：

（Ⅰ）连接 OC，由已知 $\angle OCP$ 为直线 PC 与平面 ABC 所成的角，设 AB 的中点为 D，连接 PD，CD，

因为 $AB=BC=CA$，所以 $CD\perp AB$，

因为 $\angle APB=90°, \angle PAB=60°$，所以 ΔPAD 为等边三角形，

不妨设 $PA=2$，则 $OD=1, OP=\sqrt{3}, AB=4$，

所以 $CD=2\sqrt{3}, OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{1+12}=\sqrt{13}$，

在 $Rt\Delta OCP$ 中，$\tan\angle OCP=\dfrac{OP}{OC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$，

故直线 PC 与平面 ABC 所成的角的大小为 $arc\tan\dfrac{\sqrt{39}}{13}$ ……………………………6 分

（Ⅱ）过 D 作 $DE\perp AP$ 于 E，连接 CE，由已知可得 $CD\perp$ 面 APB。

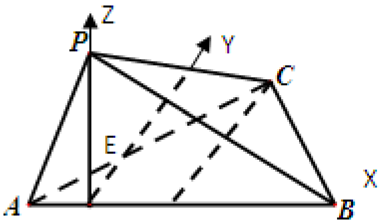
根据三垂线定理知，$CE\perp AP$，所以 $\angle CED$ 为二面角 $B-AP-C$ 的平面角，

由（Ⅰ）知，$DE=\sqrt{3}$，在 $Rt\Delta CDE$ 中，$\tan\angle CDE=\dfrac{CD}{DE}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$，

故二面角 $B-AP-C$ 的大小为 $arc\tan 2$ ……………………………12 分

解法二：

（Ⅰ）设 AB 的中点为 D，连接 CD，因为 O 在 AB，且 O 为 P 在平面 ABC 上的射影，



所以 $PO\perp$ 面 ABC，所以 $PO\perp AB$，且 $PO\perp CD$，由

$AB=BC=CA$，知 $CD\perp AB$，从而 $PO\perp OE, AB\perp OE$，

如图，以 O 为坐标原点，OB, OE, OP 所在直线分别为 x, y, z

轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

不妨设 $AP=2$，由已知可得 $AB=4, OA=OD=1, OP=\sqrt{3}, CD=2\sqrt{3}$，

所以 $O(0,0,0), A(-1,0,0), C(1,2\sqrt{3},0), P(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CP}=(-1,-2\sqrt{3},\sqrt{3})$，而 $\overrightarrow{OP}=(0,0,\sqrt{3})$ 为平面 ABC 的一个法向量，

设 α 为直线 PC 与平面 ABC 所成的角，则 $\sin\alpha=\left|\dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{OP}|}\right|=\left|\dfrac{0+0+3}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

故直线 PC 与平面 ABC 所成的角的大小为 $arc\sin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ……………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）有 $\overrightarrow{AP}=(1,0,\sqrt{3}), \overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{3},0)$，

设平面 APC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AP}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x,y,z)\cdot(1,0,\sqrt{3})=0\\ (x,y,z)\cdot(2,2\sqrt{3},0)=0\end{cases}$

从而 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\ 2x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，取 $x=-\sqrt{3}$，则 $y=1,z=1$，所以 $\vec{n}=(-\sqrt{3},1,1)$，

设二面角 $B-AP-C$ 的平面角为 β，易知 β 为锐角，

而面 ABP 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$，则 $\cos\beta=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{3+1+1}\sqrt{0+1+0}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

故二面角 $B-AP-C$ 的大小为 $arc\cos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………………12 分

考点定位：本题考查线面关系、直线与平面所成的角、二面角等基础知识，意在考查考生思维能力、空间想象能力，并考查应用向量知识解决数学问题的能力。

20、(本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，常数 $\lambda>0$，且 $\lambda a_1a_n=S_1+S_n$ 对一切正整数 n 都成立。

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $a_1>0$，$\lambda=100$。当 n 为何值时，数列 $\{\lg\dfrac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和最大？

答案：（Ⅰ）当 $a_1=0$ 时，$a_n=0$；当 $a_1\neq 0$ 时，$a_n=\dfrac{2^n}{\lambda}$，（Ⅱ）6

解析：（Ⅰ）取 $n=1$，的 $\lambda a_1^2=2S_1=2a_1, a_1(\lambda a_1-2)=0$，若 $a_1=0$，则 $S_n=0$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=0-0=0$，所以 $a_n=0(n\geq 1)$，

若 $a_1\neq 0$，则 $a_1=\dfrac{2}{\lambda}$，

当 $n\geq 2$ 时，$2a_n=\dfrac{2}{\lambda}+S_n, 2a_{n-1}=\dfrac{2}{\lambda}+S_{n-1}$，两式相减得 $2a_n-2a_{n-1}=a_n$，所以

$a_n=2a_{n-1}(n\geq 2)$，从而数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_n=a_1\cdot 2^{n-1}=\dfrac{2}{\lambda}\cdot 2^{n-1}=\dfrac{2^n}{\lambda}$，

综上，当 $a_1=0$ 时，$a_n=0$；当 $a_1\neq 0$ 时，$a_n=\dfrac{2^n}{\lambda}$

（Ⅱ）当 $a_1>0$ 且 $\lambda=100$ 时，令 $b_n=\lg\dfrac{1}{a_n}$，由（Ⅰ）有 $b_n=\lg\dfrac{100}{2^n}=2-n\lg 2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是单调递减的等差数列（公差为 $-\lg 2$）

$b_1>b_2>\ldots>b_6=\lg\dfrac{100}{2^6}=\lg\dfrac{100}{64}>\lg 1=0$，

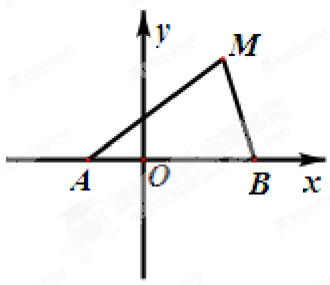
当 $n\geq 7$ 时，$b_n\leq b_7=\lg\dfrac{100}{2^7}=\lg\dfrac{100}{128}<\lg 1=0$，

故数列 $\{\lg\dfrac{1}{a_n}\}$ 的前 6 项的和最大。

考点定位：本题考查等比数列、等差数列、对数等基本知识，意在考查考生思维能力、运算能力、分析问题与解决问题的能力，并考查方程、分类与整合、化归与转化的数学思想。

21、(本小题满分 12 分)

如图，动点 M 到两定点 $A(-1,0)$、$B(2,0)$ 构成 ΔMAB，且 $\angle MBA=2\angle MAB$，设动点 M 的轨迹为 C。



（Ⅰ）求轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=-2x+m$ 与 y 轴交于点 P，与轨迹 C 相交于点 Q、R，且 $|PQ|<|PR|$，求 $\dfrac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围。

解：（1）设 M 的坐标为（x,y），显然有 x>0，且 $y \neq 0$．

当 $\angle MBA = 90^0$ 时，点 M 的坐标为 $(2, \pm 3)$．

当 $\angle MBA \neq 90^0$ 时，$x \neq 2$，由 $\angle MBA = 2\angle MAB$，有 $\tan\angle MBA = \dfrac{2\tan\angle MAB}{1-\tan^2\angle MAB}$

即 $-\dfrac{|y|}{x-2} = \dfrac{2\dfrac{|y|}{x+1}}{1-(\dfrac{|y|}{x+1})^2}$．

化简可得，$3x^2 - y^2 - 3 = 0$．

而点 $(2, \pm 3)$ 在曲线 $3x^2 - y^2 - 3 = 0$ 上，

综上可知，轨迹 C 的方程为 $3x^2 - y^2 - 3 = 0$（x>1）．

（2）由 $\begin{cases} y = -2x + m \\ 3x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases}$ 消去 y，可得 $x^2 - 4mx + m^2 + 3 = 0$．（*）

由题意，方程（*）有两根且均在 $(1, +\infty)$ 内.

设 $f(x)=x^2-4mx+m^2+3$

所以 $\begin{cases} -\dfrac{-4m}{2}>1 \\ f(1)=1^2-4m+m^2+3>0 \\ \Delta=(-4m)^2-4(m^2+3)>0 \end{cases}$

解得，$m>1$，且 $m\neq 2$.

设 Q,R 的坐标分别为 (x_Q,y_Q)，(x_R,y_R)，

由 $|PQ|<|PR|$ 有 $x_R=2m+\sqrt{3(m^2-1)}$，$x_Q=2m-\sqrt{3(m^2-1)}$

所以 $\dfrac{|PR|}{|PQ|}=\dfrac{x_R}{x_Q}=\dfrac{2m+\sqrt{3(m^2-1)}}{2m-\sqrt{3(m^2-1)}}$

$$=\frac{2+\sqrt{3(1-\frac{1}{m^2})}}{2-\sqrt{3(1-\frac{1}{m^2})}}$$

$$=-1+\frac{4}{2-\sqrt{3(1-\frac{1}{m^2})}}$$

由 m>1，且 $m\neq 2$，有 $1<-1+\dfrac{4}{2-\sqrt{3(1-\frac{1}{m^2})}}<7+4\sqrt{3}$ 且 $-1+\dfrac{4}{2-\sqrt{3(1-\frac{1}{m^2})}}\neq 7$

所以 $\dfrac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围是 $(1,7)\cup(7,7+4\sqrt{3})$.

考点定位：本小题主要考查直线、双曲线、轨迹方程的求法等基础知识.考查思维能力、运算能力.考查函数、分类与整合等数学思想，并考查思维的严谨性.

22、(本小题满分 14 分)

已知 a 为正实数，n 为自然数，抛物线 $y=-x^2+\dfrac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A，设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距。

（Ⅰ）用 a 和 n 表示 $f(n)$；

（Ⅱ）求对所有 n 都有 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n}{n+1}$ 成立的 a 的最小值；

（Ⅲ）当 $0<a<1$ 时，比较 $\frac{1}{f(1)-f(2)}+\frac{1}{f(2)-f(4)}+\cdots+\frac{1}{f(n)-f(2n)}$ 与

$6 \bullet \frac{f(1)-f(n+1)}{f(0)-f(1)}$ 的大小，并说明理由。

答案：（Ⅰ） $f(n)=a^n$，（Ⅱ）3，（Ⅲ）详见解析

解析：（Ⅰ）由已知得，交点 A 的坐标为 $\left(\sqrt{\frac{a^n}{2}}, 0\right)$，

对 $y=-x^2+\frac{1}{2}a^n$ 求导得 $y'=-2x$，则抛物线在点 A 处的切线方程为

$y=-\sqrt{2a^n}\left(x-\sqrt{\frac{a^n}{2}}\right)$，即 $y=-\sqrt{2a^n}x+a^n$，则 $f(n)=a^n$……………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(n)=a^n$，则 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n}{n+1}$ 成立的充要条件是 $a^n \geq 2n+1$，

即知 $a^n \geq 2n+1$ 对所有 n 成立，特别地，取 $n=1$ 得到 $a \geq 3$，

当 $a=3, n \geq 1$ 时，$a^n=3^n=(1+2)^n=1+C_n^1 \cdot 2+\ldots \geq 2n+1$

当 $n=0$ 时，$a^n=2n+1$，

故 $a=3$ 时，$\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n}{n+1}$ 对所有自然数 n 均成立，

所以满足条件的 a 的最小值为 3……………………………8 分

（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $f(k)=a^k$，

下面证明：$\frac{1}{f(1)-f(2)}+\frac{1}{f(2)-f(4)}+\ldots+\frac{1}{f(n)-f(2n)}>6\frac{f(1)-f(n+1)}{f(0)-f(1)}$，

首先证明：当 $0<x<1$ 时，$\frac{1}{x-x^2}>6x$，

设函数 $g(x)=6x\left(x^2-x\right)+1$，$0<x<1$，则 $g'(x)=18x\left(x-\frac{2}{3}\right)$

当 $0<x<\frac{2}{3}$ 时，$g'(x)<0$；当 $\frac{2}{3}<x<1$ 时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的最小值 $g(x)_{\max}=g(\frac{2}{3})=\frac{1}{9}>0$，

所以当 $0<x<1$ 时， $g(x)>0$，即得 $\frac{1}{x-x^2}>6x$，

从而 $\frac{1}{f(1)-f(2)}+\frac{1}{f(2)-f(4)}+\ldots+\frac{1}{f(n)-f(2n)}=\frac{1}{a-a^2}+\frac{1}{a^2-a^4}+\ldots+\frac{1}{a^n-a^{2n}}$

$>6(a+a^2+a^n)+6\frac{a-a^{n+1}}{1-a}>6\frac{f(1)-f(n+1)}{f(0)-f(1)}$ ……………………………14 分

考点定位：本题考查导数的应用、不等式、数列等基本知识，意在考查考生思维能力、运算能力、分析问题与解决问题的能力和创新意识，考查函数、转化与化归、特殊与一般等数学思想方法。