绝密★启用前

# 2022年普通高等学校招生全国统一考试

# 理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

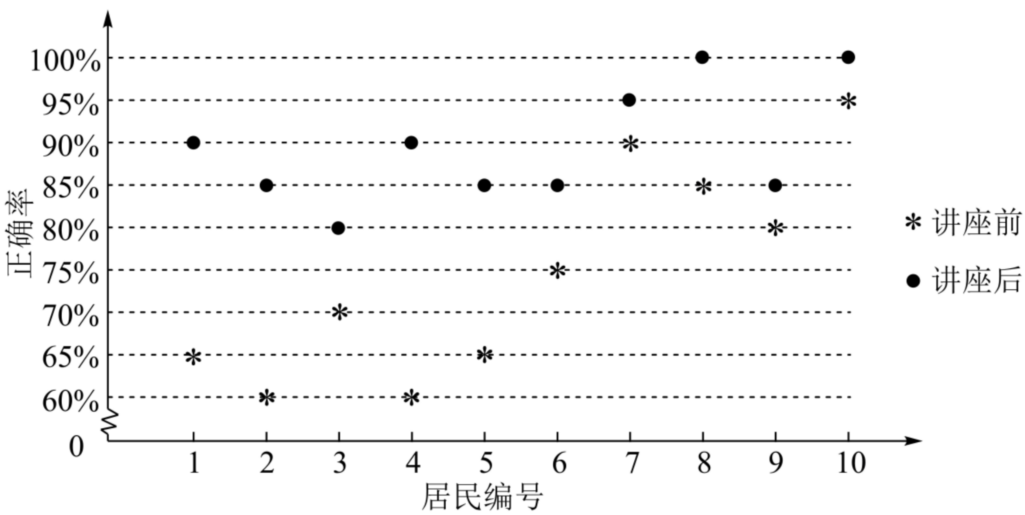
3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$\dfrac{z}{z\bar{z}-1}=$（　　）

A. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　C. $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：




则（　　）

A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

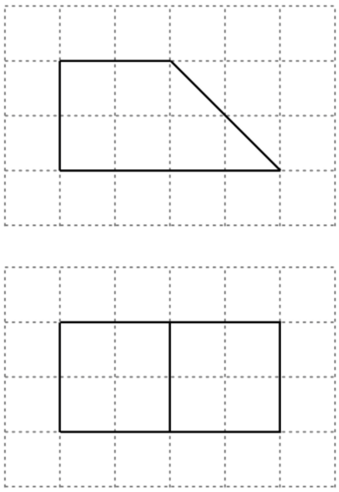
C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3. 设全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,2\},B=\left\{x\mid x^2-4x+3=0\right\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（　　）

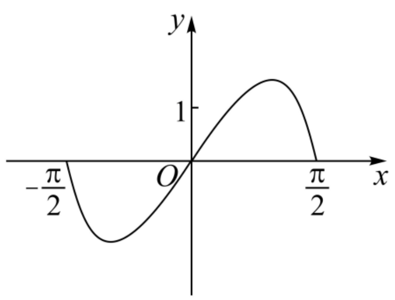
A. $\{1,3\}$　　B. $\{0,3\}$　　C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0\}$

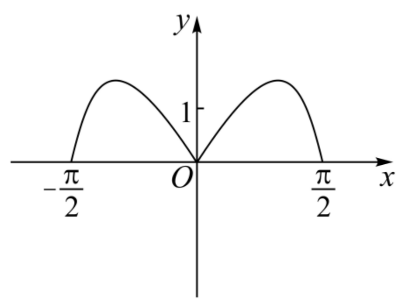
4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为1，则该多面体的体积为（　　）

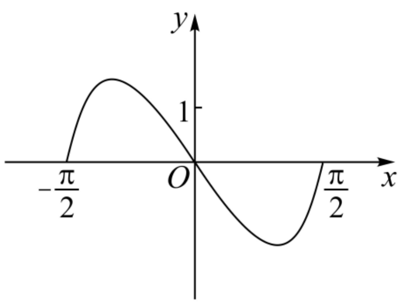


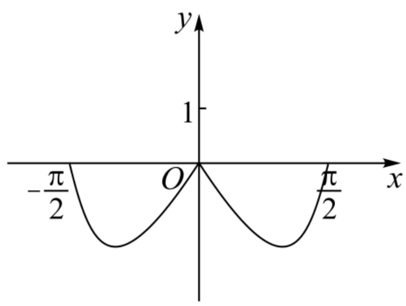
A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 20

5. 函数$y=\left(3^x-3^{-x}\right)\cos x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的图象大致为（　　）

A. 


B. 


C. 


D. 


6. 当$x=1$时，函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$取得最大值$-2$，则$f'(2)=$（　　）

A. $-1$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $B_1D$ 与平面 $ABCD$ 和平面 $AA_1B_1B$ 所成的角均为 $30°$，则（　　）

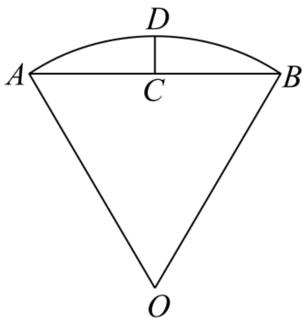
A. $AB=2AD$

B. $AB$ 与平面 $AB_1C_1D$ 所成的角为 $30°$

C. $AC=CB_1$

D. $B_1D$ 与平面 $BB_1C_1C$ 所成的角为 $45°$

8. 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图，$\overset{\frown}{AB}$ 是以 $O$ 为圆心，$OA$ 为半径的圆弧，$C$ 是 $AB$ 的中点，$D$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，$CD\perp AB$．“会圆术”给出 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长的近似值 $s$ 的计算公式：$s=AB+\dfrac{CD^2}{OA}$．当 $OA=2,\angle AOB=60°$ 时，$s=$（　　）




A. $\dfrac{11-3\sqrt{3}}{2}$

B. $\dfrac{11-4\sqrt{3}}{2}$

C. $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$

D. $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{2}$

9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 $2\pi$，侧面积分别为 $S_{甲}$ 和 $S_{乙}$，体积分别为 $V_{甲}$ 和 $V_{乙}$．若 $\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则 $\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　　）

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$

10. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 $A$，点 $P$，$Q$ 均在 $C$ 上，且关于 $y$ 轴对称．若直线 $AP,AQ$ 的斜率之积为 $\dfrac{1}{4}$，则 $C$ 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$

D. $\dfrac{1}{3}$

11. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0,\pi)$ 恰有三个极值点、两个零点，则 $\omega$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$　　B. $\left[\frac{5}{3},\frac{19}{6}\right)$　　C. $\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right]$

12. 已知 $a=\frac{31}{32},b=\cos\frac{1}{4},c=4\sin\frac{1}{4}$，则（　　）

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，则 $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=$________.

14. 若双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切，则 $m=$________.

15. 从正方体的 8 个顶点中任选 4 个，则这 4 个点在同一个平面的概率为________.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中，点 $D$ 在边 $BC$ 上，$\angle ADB=120°,AD=2,CD=2BD$．当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时，$BD=$________.

**三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.**

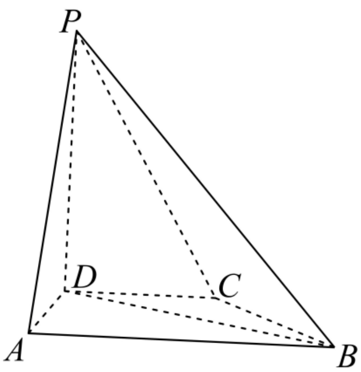
**（一）必考题：共 60 分.**

17. 记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和．已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$．

（1）证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）若 $a_4,a_7,a_9$ 成等比数列，求 $S_n$ 的最小值.

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD,CD\parallel AB,AD=DC=CB=1,AB=2,DP=\sqrt{3}$．




（1）证明：$BD\perp PA$；

（2）求 $PD$ 与平面 $PAB$ 所成的角的正弦值.

19. 甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平

局．三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军．已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为0.5，0.4，0.8，各项目的比赛结果相互独立．

（1）求甲学校获得冠军的概率；

（2）用$X$表示乙学校的总得分，求$X$的分布列与期望．

20. 设抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点为$F$，点$D\left(p,0\right)$，过$F$的直线交$C$于$M$，$N$两点．当直线$MD$垂直于$x$轴时，$\left|MF\right|=3$．

（1）求$C$的方程；

（2）设直线$MD,ND$与$C$的另一个交点分别为$A$，$B$，记直线$MN,AB$的倾斜角分别为$\alpha,\beta$．当$\alpha-\beta$取得最大值时，求直线$AB$的方程．

21. 已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x-a$．

（1）若$f\left(x\right)\geq 0$，求$a$的取值范围；

（2）证明：若$f\left(x\right)$有两个零点$x_1,x_2$，则$x_1x_2<1$．

**（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．**

**[选修4-4：坐标系与参数方程]**

22. 在直角坐标系$xOy$中，曲线$C_1$的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{2+t}{6}\\y=\sqrt{t}\end{cases}$（$t$为参数），曲线$C_2$的参数方程为$\begin{cases}x=-\dfrac{2+s}{6}\\y=-\sqrt{s}\end{cases}$（$s$为参数）．

（1）写出$C_1$的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_3$的极坐标方程为$2\cos\theta-\sin\theta=0$，求$C_3$与$C_1$交点的直角坐标，及$C_3$与$C_2$交点的直角坐标．

**[选修4-5：不等式选讲]**

23. 已知$a$，$b$，$c$均为正数，且$a^2+b^2+4c^2=3$，证明：

（1）$a+b+2c\leq 3$；

（2）若 $b=2c$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq 3$.