

2012年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科A卷）

本试卷共4页，21小题，满分150分。考试用时120分钟。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设*i*为虚数单位，则复数 $\frac{5-6i}{i} =$
 - A. $6+5i$
 - B. $6-5i$
 - C. $-6+5i$
 - D. $-6-5i$

2. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 2, 4\}$ 则 $\complement_U M =$
 - A. U
 - B. $\{1, 3, 5\}$
 - C. $\{3, 5, 6\}$
 - D. $\{2, 4, 6\}$

3. 若向量 $\overrightarrow{BA} = (2, 3)$, $\overrightarrow{CA} = (4, 7)$, 则 $\overrightarrow{BC} =$
 - A. $(-2, -4)$
 - B. $(3, 4)$
 - C. $(6, 10)$
 - D. $(-6, -10)$

4. 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是
 - A. $y = \ln(x+2)$
 - B. $y = -\sqrt{x+1}$
 - C. $y = (\frac{1}{2})^x$
 - D. $y = x + \frac{1}{x}$

5. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2 \\ x+y \geq 1 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = 3x+y$ 的最大值为
 - A. 12
 - B. 11
 - C. 3
 - D. -1

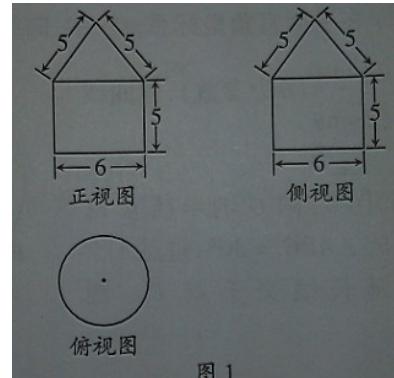


图 1

6. 某几何体的三视图如图1所示，它的体积为
 - A. 12π
 - B. 45π
 - C. 57π
 - D. 81π

7. 从个位数与十位数之和为奇数的两位数中任取一个，其中个位数为0的概率是
 - A. $\frac{4}{9}$
 - B. $\frac{1}{3}$
 - C. $\frac{2}{9}$
 - D. $\frac{1}{9}$

8. 对任意两个非零的平面向量 α, β , 定义 $\alpha \circ \beta = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\beta|}$. 若平面向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| \geq |\vec{b}| > 0$, \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 且 $\alpha \circ \beta$ 和 $\beta \circ \alpha$ 都在集合 $\left\{\frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ 中, 则 $\vec{a} \circ \vec{b} =$
 - A. $\frac{1}{2}$
 - B. 1
 - C. $\frac{3}{2}$
 - D. $\frac{5}{2}$

二、填空题：本大题共7小题。考生作答6小题，每小题5分，满分30分。

(一) 必做题(9~13题)

9. 不等式 $|x+2|-|x|\leq 1$ 的解集为_____。

10. $(x^2 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中 x^3 的系数为_____。(用数字作答)

11. 已知递增的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_3=a_2^2-4$, 则 $a_n=$ _____。

12. 曲线 $y=x^3-x+3$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为_____。

13. 执行如图2所示的程序框图, 若输入 n 的值为8, 则输出 s 的值为_____。

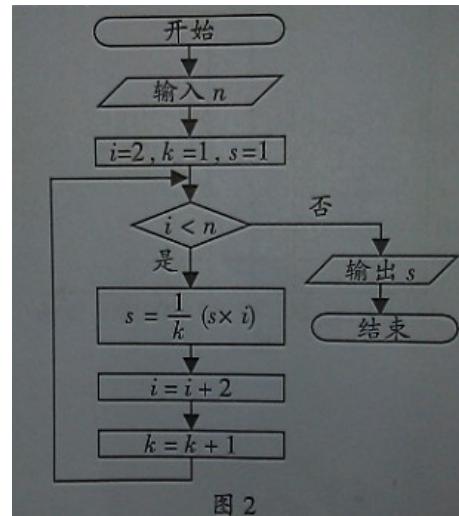


图2

(二) 选做题(14、15题, 考生只能从中选做一题)

14. (坐标系与参数方程选做题) 在平面直角坐标系中 xoy 中, 曲线 C_1 和曲线 C_2 的

参数方程分别为 $\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数) 和 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则曲线 C_1 和曲线 C_2 的交点坐标为_____。

15. (几何证明选讲选做题) 如图3, 圆 O 的半径为1, A , B , C 是圆上三点, 且满足 $\angle ABC=30^\circ$, 过点 A 做圆 O 的切线与 OC 的延长线交于点 P , 则 $PA=$ _____。

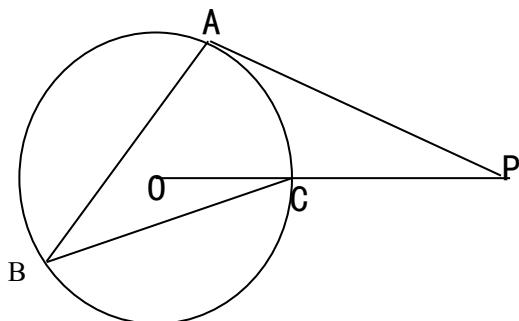


图3

三、解答题：本大题共6小题，满分80分。解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤。

16. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = 2 \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ (其中 $\omega > 0, x \in R$) 的最小正周期为 10π 。

(1) 求 ω 的值；

(2) 设 $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(5\alpha + \frac{5\pi}{3}) = -\frac{6}{5}$, $f(5\beta - \frac{5\pi}{6}) = \frac{16}{17}$, 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值。

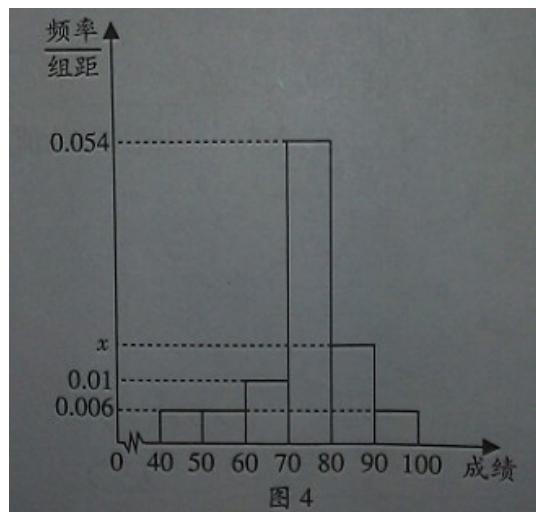
17. (本小题满分13分)

某班50位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图4所示，其中成绩分组区间是：

[40,50), [50,60), [60,70), [70,80), [80,90), [90,100],

(1)求图中x的值；

(2)从成绩不低于80分的学生中随机选取2人，2人中成绩在90分以上（含90分）的人数记为 ξ ，求 ξ 的数学期望。



18. (本小题满分13分)

如图5所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 E 在线段 PC 上， $PC \perp$ 平面 BDE 。

(1) 证明： $BD \perp$ 平面 PAC ；

(2) 若 $PA=1$, $AD=2$, 求二面角 $B-PC-A$ 的正切值。

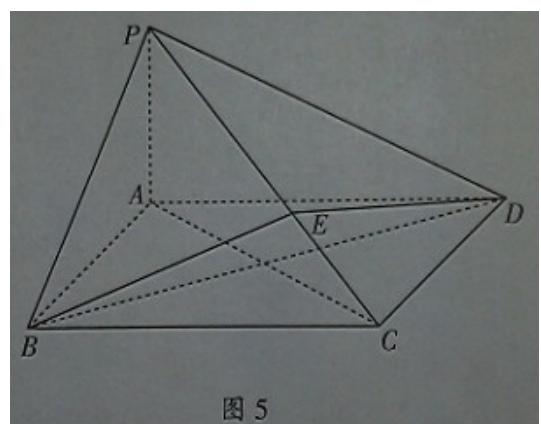


图 5

19. (本小题满分14分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$, $n \in N^*$, 且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

20. (本小题满分14分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$, 且椭圆 C 上的点到点 $Q(0,2)$ 的距离的最大值为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程

(2) 在椭圆 C 上, 是否存在点 $M(m,n)$, 使得直线 $l: mx + ny = 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于不同的两点 A 、 B , 且 ΔOAB 的面积最大? 若存在, 求出点 M 的坐标及对应的 ΔOAB 的面积; 若不存在, 请说明理由.

)

21. (本小题满分14分)

设 $a < 1$, 集合 $A = \{x \in R | x > 0\}, B = \{x \in R | 2x^2 - 3(1+a)x + 6a > 0\}$, $D = A \cap B$.

(1) 求集合 D (用区间表示);

(2) 求函数 $f(x) = 2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax$ 在 D 内的极值点.

2012广东高考数学（理科）参考答案

选择题答案：1-8： DCAAB CDC

填空题答案：

9. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ 10. 20 11. $2n-1$ 12. $y=2x+1$

13. 8 14. (1,1) 15. $\sqrt{3}$

解答题

16.

(1) $\omega = \frac{1}{5}$

(2) 代入得 $2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{6}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$

$$2 \cos \beta = \frac{16}{17} \Rightarrow \cos \beta = \frac{8}{17}$$

$$\therefore \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \beta = \frac{15}{17}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{8}{17} - \frac{3}{5} \times \frac{15}{17} = -\frac{13}{85}$$

17.

(1) 由 $30 \times 0.006 + 10 \times 0.01 + 10 \times 0.054 + 10x = 1$ 得 $x = 0.018$

(2) 由题意知道：不低于80分的学生有12人，90分以上的有3人

随机变量 ξ 的可能取值有0,1,2

$$P(\xi = 0) = \frac{C_9^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{11}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_9^1 C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{9}{22}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} = \frac{1}{22}$$

$$\therefore E\xi = 0 \times \frac{6}{11} + 1 \times \frac{9}{22} + 2 \times \frac{1}{22} = \frac{1}{2}$$

18.

(1) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$

$$\therefore PA \perp BD$$

$\because PC \perp$ 平面 BDE

$\therefore PC \perp BD$

$\therefore BD \perp$ 平面 PAC

(2) 设 AC 与 BD 交点为 O , 连 OE

$\because PC \perp$ 平面 BDE

$\therefore PC \perp OE$

又 $\because BO \perp$ 平面 PAC

$\therefore PC \perp BO$

$\therefore PC \perp$ 平面 BOE

$\therefore PC \perp BE$

$\therefore \angle BEO$ 为二面角 $B-PC-A$ 的平面角

$\because BD \perp$ 平面 PAC

$\therefore BD \perp AC$

\therefore 四边形 $ABCD$ 为正方形

$\therefore BO = \sqrt{2}$

在 ΔPAC 中, $\frac{OE}{OC} = \frac{PA}{AC} \Rightarrow \frac{OE}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow OE = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan \angle BEO = \frac{BO}{OE} = 3$

\therefore 二面角 $B-PC-A$ 的平面角的正切值为 3

19.

(1) 在 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$ 中

令 $n=1$ 得: $2S_1 = a_2 - 2^2 + 1$

令 $n=2$ 得: $2S_2 = a_3 - 2^3 + 1$

解得: $a_2 = 2a_1 + 3$, $a_3 = 6a_1 + 13$

又 $2(a_2 + 5) = a_1 + a_3$

解得 $a_1 = 1$

(2) 由 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$

$2S_{n+1} = a_{n+2} - 2^{n+2} + 1$ 得

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2^{n+1}$$

又 $a_1 = 1, a_2 = 5$ 也满足 $a_2 = 3a_1 + 2^1$

所以 $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ 对 $n \in N^*$ 成立

$$\therefore a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)$$

$$\therefore a_n + 2^n = 3^n$$

$$\therefore a_n = 3^n - 2^n$$

(3)

$$(法一) \because a_n = 3^n - 2^n = (3-2)(3^{n-1} + 3^{n-2} \times 2 + 3^{n-3} \times 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \geq 3^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{3}{2}$$

$$(法二) \because a_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1} > 2 \times 3^n - 2^{n+1} = 2a_n$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{a_3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_2}$$

$$\frac{1}{a_4} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_3}$$

$$\frac{1}{a_5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_4}$$

.....

$$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$\text{累乘得: } \frac{1}{a_n} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{a_2}$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times \frac{1}{5} < \frac{7}{5} < \frac{3}{2}$$

20.

(1) 由 $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 得 $a^2 = 3b^2$, 椭圆方程为 $x^2 + 3y^2 = 3b^2$

$$\begin{aligned} \text{椭圆上的点到点Q的距离 } d &= \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{3b^2 - 3y^2 + (y-2)^2} \\ &= \sqrt{-2y^2 - 4y + 4 + 3b^2} (-b \leq y \leq b) \end{aligned}$$

$$\text{当(1)} -b \leq -1 \text{ 即 } b \geq 1, d_{\max} = \sqrt{6+3b^2} = 3 \text{ 得 } b = 1$$

$$\text{当(2)} -b > -1 \text{ 即 } b < 1, d_{\max} = \sqrt{b^2 + 4b + 4} = 3 \text{ 得 } b = 1 \text{ (舍)}$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$$

$$(2) S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \sin \angle AOB$$

$$\text{当 } \angle AOB = 90^\circ, S_{\triangle AOB} \text{ 取最大值 } \frac{1}{2},$$

$$\text{点O到直线 } l \text{ 距离 } d = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 2$$

$$\text{又 } \because \frac{m^2}{3} + n^2 = 1$$

$$\text{解得: } m^2 = \frac{3}{2}, n^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以点M的坐标为 } \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Delta AOB \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}$$

21.

$$(1) \text{ 记 } h(x) = 2x^2 - 3(1+a)x + 6a (a < 1)$$

$$\Delta = 9(1+a)^2 - 48a = (3a-1)(3a-9)$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \Delta < 0, \text{ 即 } \frac{1}{3} < a < 1, D = (0, +\infty)$$

② 当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$,

$$D = \left(0, \frac{3+3a-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4} \right) \cup \left(\frac{3+3a+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}, +\infty \right)$$

③ 当 $a \leq 0$, $D = \left(\frac{3+3a+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}, +\infty \right)$

(2) 由 $f'(x) = 6x^2 - 6(1+a)x + 6a = 0$ 得 $x=1, a$ 得

① 当 $\frac{1}{3} < a < 1$, $f(x)$ 在 D 内有一个极大值点 a , 有一个极小值点 1

② 当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$, $\because h(1) = 2 - 3(1+a) + 6a = 3a - 1 \leq 0$

$$h(a) = 2a^2 - 3(1+a)a + 6a = 3a - a^2 > 0$$

$\therefore 1 \notin D, a \in D$

$\therefore f(x)$ 在 D 内有一个极大值点 a

③ 当 $a \leq 0$, 则 $a \notin D$

$$\text{又 } \because h(1) = 2 - 3(1+a) + 6a = 3a - 1 < 0$$

$\therefore f(x)$ 在 D 内有无极值点