

2011 年高考理科数学试题（天津卷）

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2. 本卷共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

棱柱的体积公式 $V = Sh$.

其中 S 表示棱柱的底面面积

h 表示棱柱的高

圆锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$.

其中 S 表示圆锥的底面面积

h 表示圆锥的高

一、选择题：在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

1. i 是虚数单位，复数 $\frac{1-3i}{1-i} =$

A. $2+i$

B. $2-i$

C. $-1+2i$

D. $-1-2i$

2. 设 $x, y \in R$, 则 “ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \geq 4$ ” 的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 即不充分也不必要条件

3. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，则输出 i 的值为

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，其公差为 -2，且 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项， S_n 为

$\{a_n\}$ 的前 n 项和， $n \in N^*$ ，则 S_{10} 的值为

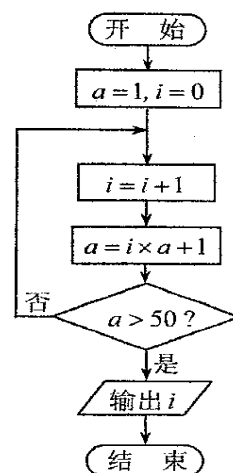
A. -110

B. -90

C. 90

D. 110

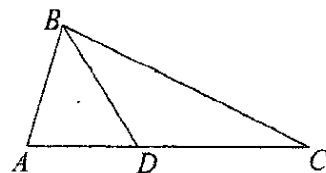
5. 在 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中， x^2 的系数为



- A. $-\frac{15}{4}$ B. $\frac{15}{4}$ C. $-\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{8}$

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, 且 $AB = CD, 2AB = \sqrt{3}BD, BC = 2BD$, 则 $\sin C$ 的值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$



7. 已知 $a = 5^{\log_2 3.4}, b = 5^{\log_4 3.6}, c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$, 则

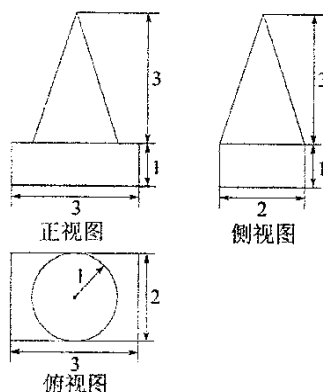
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

8. 对实数 a 和 b , 定义运算 “ \otimes ”: $a \otimes b = \begin{cases} a, & a - b \leq 1, \\ b, & a - b > 1. \end{cases}$ 设函数

$f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2), x \in R$. 若函数 $y = f(x) - c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ B. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$
C. $\left(-1, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

第 II 卷



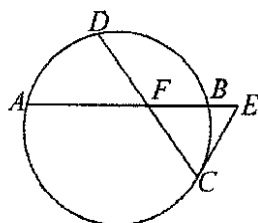
二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 一支田径队有男运动员 48 人, 女运动员 36 人, 若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本, 则抽取男运动员的

数为_____

10. 一个几何体的三视图如右图所示（单位： m ），则该几何体的体积为_____ m^3

11. 已知抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=8t^2, \\ y=8t. \end{cases}$ (t 为参数) 若斜率为 1 的



直线经过抛物线 C 的焦点，且与圆 $(x-4)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相切，则 $r =$ _____.

12. 如图，已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F ， E 是 AB 延长线上一点，且 $DF = CF = \sqrt{2}$, $AF : FB : BE = 4 : 2 : 1$. 若 CE 与圆相切，则线段 CE 的长为_____.

13. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| + |x-4| \leq 9\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 4t + \frac{1}{t} - 6, t \in (0, +\infty)\right\}$, 则集合 $A \cap B =$ _____.

14. 已知直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2, BC = 1$, P 是腰 DC 上的动点，则 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,

(I) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

(II) 设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 若 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos 2\alpha$, 求 α 的大小.

16. (本小题满分 13 分)

学校游园活动有这样一个游戏项目：甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球，乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球，这些球除颜色外完全相同，每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球，若摸出的白球不少于 2 个，则获奖。（每次游戏结束后将球放回原箱）

(I) 求在 1 次游戏中，

(i) 摸出 3 个白球的概率；

(ii) 获奖的概率；

(II) 求在 2 次游戏中获奖次数 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

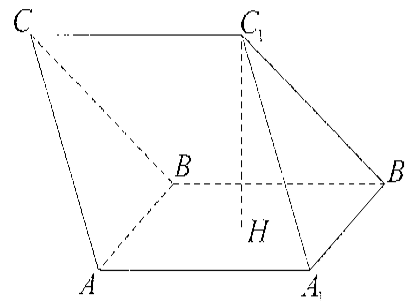
17. (本小题满分 13 分) 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，

H 是正方形 AA_1B_1B 的中心， $AA_1 = 2\sqrt{2}$ ， $C_1H \perp$ 平面 AA_1B_1B ， 且 $C_1H = \sqrt{5}$.

(I) 求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值；

(II) 求二面角 $A - A_1C_1 - B_1$ 的正弦值；

(III) 设 N 为棱 B_1C_1 的中点，点 M 在平面 AA_1B_1B 内，且 $MN \perp$ 平面 A_1B_1C ，求线段 BM 的长.



18. (本小题满分 13 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(a,b)$ ($a > b > 0$) 为动点， F_1, F_2

分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点. 已知 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形.

(I) 求椭圆的离心率 e ;

(II) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, M 是直线 PF_2 上的点, 满足 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$, 求点 M 的轨迹方程.

19. (本小题满分 14 分)

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - ax^2, x > 0$. ($f(x)$ 的图像连续不断)

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a = \frac{1}{8}$ 时, 证明: 存在 $x_0 \in (2, +\infty)$, 使 $f(x_0) = f(\frac{3}{2})$;

(III) 若存在均属于区间 $[1, 3]$ 的 α, β , 且 $\beta - \alpha \geq 1$, 使 $f(\alpha) = f(\beta)$, 证明

$$\frac{\ln 3 - \ln 2}{5} \leq a \leq \frac{\ln 2}{3}.$$

20. (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足: $b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0, b_n = \frac{3 + (-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}^*$, 且

$$a_1 = 2, a_2 = 4.$$

(I) 求 a_3, a_4, a_5 的值;

(II) 设 $c_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}, n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\{c_n\}$ 是等比数列;

(III) 设 $S_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, k \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} < \frac{7}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$.

