

# 2018年北京市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. (5分) 已知集合  $A=\{x|x<2\}$ ,  $B=\{-2, 0, 1, 2\}$ , 则  $A \cap B = (\quad)$   
A.  $\{0, 1\}$  B.  $\{-1, 0, 1\}$  C.  $\{-2, 0, 1, 2\}$  D.  $\{-1, 0, 1, 2\}$

【考点】1E：交集及其运算。

【专题】38：对应思想；4O：定义法；5J：集合。

【分析】根据集合的基本运算进行计算即可。

【解答】解： $A=\{x|x<2\}=\{x| -2 < x < 2\}$ ,  $B=\{-2, 0, 1, 2\}$ ,  
则  $A \cap B = \{0, 1\}$ ,

故选：A.

【点评】本题主要考查集合的基本运算，根据集合交集的定义是解决本题的关键。比较基础。

2. (5分) 在复平面内，复数  $\frac{1}{1-i}$  的共轭复数对应的点位于（ ）  
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义。

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5N：数系的扩充和复数。

【分析】利用复数的除法运算法则，化简求解即可。

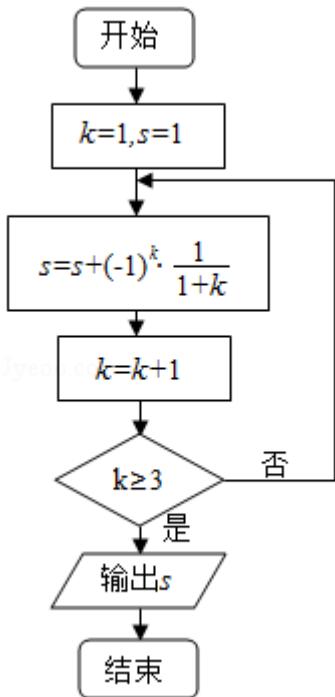
【解答】解：复数  $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ,

共轭复数对应的点的坐标  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  在第四象限。

故选：D.

【点评】本题考查复数的代数形式的乘除运算，复数的几何意义，是基本知识的考查。

3. (5分) 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ( )



- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{5}{6}$       C.  $\frac{7}{6}$       D.  $\frac{7}{12}$

【考点】EF：程序框图.

【专题】35：转化思想；5K：算法和程序框图.

【分析】直接利用程序框图的应用求出结果.

【解答】解：执行循环前： $k=1, S=1$ .

在执行第一次循环时， $S=1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

由于  $k=2 \leq 3$ ,

所以执行下一次循环。 $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ ,

$k=3$ , 直接输出  $S=\frac{5}{6}$ ,

故选：B.

【点评】本题考查的知识要点：程序框图和循环结构的应用.

4. (5分) 设  $a, b, c, d$  是非零实数，则“ $ad=bc$ ”是“ $a, b, c, d$  成等比数列”的 ( )

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

**【考点】**29: 充分条件、必要条件、充要条件.

**【专题】**38: 对应思想; 4O: 定义法; 5L: 简易逻辑.

**【分析】**根据充分条件和必要条件的定义结合等比数列的性质进行判断即可.

**【解答】**解: 若  $a, b, c, d$  成等比数列, 则  $ad=bc$ ,

反之数列 -1, -1, 1, 1. 满足  $-1 \times 1 = -1 \times 1$ ,

但数列 -1, -1, 1, 1 不是等比数列,

即“ $ad=bc$ ”是“ $a, b, c, d$  成等比数列”的必要不充分条件.

故选: B.

**【点评】**本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 结合等比数列的性质是解决本题的关键.

5. (5分) “十二平均律”是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献, 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$ . 若第一个单音的频率为  $f$ , 则第八个单音的频率为 ( )

- A.  $\sqrt[3]{2}f$
- B.  $\sqrt[3]{2^2}f$
- C.  $\sqrt[12]{2^5}f$
- D.  $\sqrt[12]{2^7}f$

**【考点】**88: 等比数列的通项公式.

**【专题】**11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 54: 等差数列与等比数列.

**【分析】**利用等比数列的通项公式, 转化求解即可.

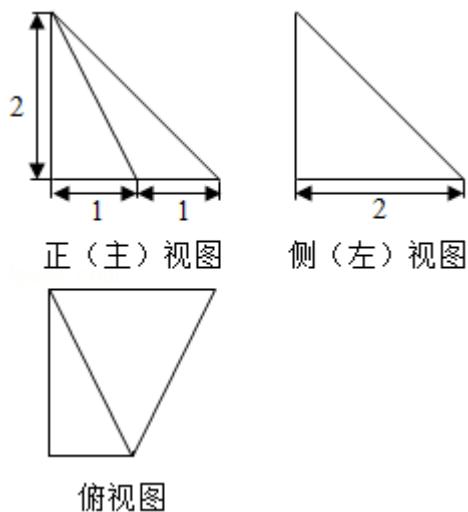
**【解答】**解: 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$ .

若第一个单音的频率为  $f$ , 则第八个单音的频率为:  $(\sqrt[12]{2})^7 \cdot f = \sqrt[12]{2^7}f$ .

故选: D.

**【点评】**本题考查等比数列的通项公式的求法，考查计算能力.

6. (5分) 某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，直角三角形的个数为（ ）



- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

**【考点】**L1：由三视图求面积、体积；L7：简单空间图形的三视图.

**【专题】**11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离.

**【分析】**画出三视图的直观图，判断各个面的三角形的情况，即可推出结果.

**【解答】**解：四棱锥的三视图对应的直观图为： $PA \perp$ 底面  $ABCD$ ，

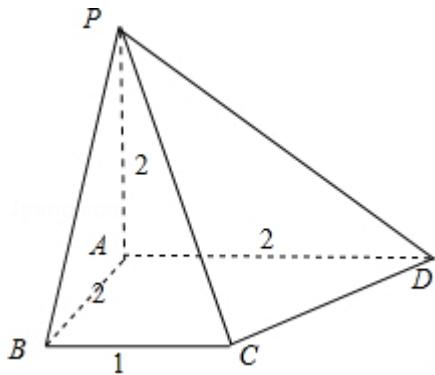
$$AC=\sqrt{5}, CD=\sqrt{5},$$

$$PC=3, PD=2\sqrt{2},$$
 可得三角形  $PCD$  不是直角三角形.

所以侧面中有 3 个直角三角形，分别为： $\triangle PAB, \triangle PBC,$

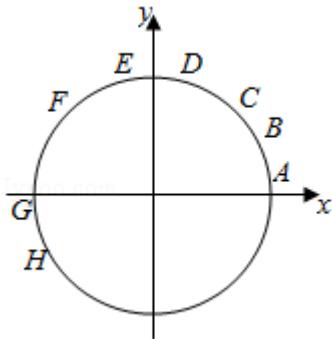
$\triangle PAD.$

故选：C.



**【点评】**本题考查简单几何体的三视图的应用，是基本知识的考查.

7. (5分) 在平面直角坐标系中， $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{EF}$ ,  $\widehat{GH}$ 是圆  $x^2+y^2=1$  上的四段弧（如图），点 P 其中一段上，角  $\alpha$  以  $Ox$  为始边， $OP$  为终边. 若  $\tan\alpha < \cos\alpha < \sin\alpha$ ，则 P 所在的圆弧是（ ）



- A.  $\widehat{AB}$       B.  $\widehat{CD}$       C.  $\widehat{EF}$       D.  $\widehat{GH}$

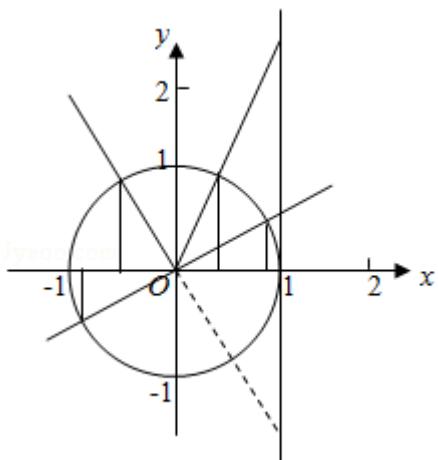
**【考点】**GA：三角函数线.

**【专题】**36：整体思想；40：定义法；56：三角函数的求值.

**【分析】**根据三角函数线的定义，分别进行判断排除即可.

- 【解答】**解：A. 在 AB 段，正弦线小于余弦线，即  $\cos\alpha < \sin\alpha$  不成立，故 A 不满足条件.
- B. 在 CD 段正切线最大，则  $\cos\alpha < \sin\alpha < \tan\alpha$ ，故 B 不满足条件.
- C. 在 EF 段，正切线，余弦线为负值，正弦线为正，满足  $\tan\alpha < \cos\alpha < \sin\alpha$ ，
- D. 在 GH 段，正切线为正值，正弦线和余弦线为负值，满足  $\cos\alpha < \sin\alpha < \tan\alpha$  不满足  $\tan\alpha < \cos\alpha < \sin\alpha$ .

故选：C.



**【点评】**本题主要考查三角函数象限和符号的应用，分别判断三角函数线的大小是解决本题的关键。

8. (5分) 设集合  $A=\{(x, y) | x-y \geq 1, ax+y > 4, x-ay \leq 2\}$ , 则 ( )
- A. 对任意实数  $a$ ,  $(2, 1) \in A$       B. 对任意实数  $a$ ,  $(2, 1) \notin A$   
C. 当且仅当  $a < 0$  时,  $(2, 1) \notin A$       D. 当且仅当  $a \leq \frac{3}{2}$  时,  $(2, 1) \notin A$

**【考点】**7C: 简单线性规划。

**【专题】**11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5T: 不等式。

**【分析】**利用  $a$  的取值, 反例判断  $(2, 1) \in A$  是否成立即可。

**【解答】**解: 当  $a=-1$  时, 集合  $A=\{(x, y) | x-y \geq 1, ax+y > 4, x-ay \leq 2\}=\{(x, y) | x-y \geq 1, -x+y > 4, x+y \leq 2\}$ , 显然  $(2, 1)$  不满足  $-x+y > 4, x+y \leq 2$ , 所以 A 不正确;

当  $a=4$ , 集合  $A=\{(x, y) | x-y \geq 1, ax+y > 4, x-ay \leq 2\}=\{(x, y) | x-y \geq 1, 4x+y > 4, x-4y \leq 2\}$ , 显然  $(2, 1)$  在可行域内, 满足不等式, 所以 B 不正确;

当  $a=1$ , 集合  $A=\{(x, y) | x-y \geq 1, ax+y > 4, x-ay \leq 2\}=\{(x, y) | x-y \geq 1, x+y > 4, x-y \leq 2\}$ , 显然  $(2, 1) \notin A$ , 所以当且仅当  $a < 0$  错误, 所以 C 不正确;

故选: D.

**【点评】**本题考查线性规划的解答应用, 利用特殊点以及特殊值转化求解, 避免可行域的画法, 简洁明了。

**二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。**

9. (5 分) 设向量  $\vec{a} = (1, 0)$ ,  $\vec{b} = (-1, m)$ . 若  $\vec{a} \perp (m\vec{a} - \vec{b})$ , 则  $m = \underline{-1}$ .

**【考点】**9T: 数量积判断两个平面向量的垂直关系.

**【专题】**11: 计算题; 49: 综合法; 5A: 平面向量及应用.

**【分析】**利用向量的坐标运算, 以及向量的垂直, 列出方程求解即可.

**【解答】**解: 向量  $\vec{a} = (1, 0)$ ,  $\vec{b} = (-1, m)$ .

$$m\vec{a} - \vec{b} = (m+1, -m).$$

$$\because \vec{a} \perp (m\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\therefore m+1=0, \text{ 解得 } m = -1.$$

故答案为:  $-1$ .

**【点评】**本题考查向量的数量积的应用, 向量的垂直条件的应用, 考查计算能力.

10. (5 分) 已知直线 l 过点  $(1, 0)$  且垂直于 x 轴. 若 l 被抛物线  $y^2=4ax$  截得的线段长为 4, 则抛物线的焦点坐标为  $\underline{(1, 0)}$ .

**【考点】**K8: 抛物线的性质.

**【专题】**11: 计算题; 38: 对应思想; 4R: 转化法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】**先求出直线  $x=1$ , 代入抛物线中, 求出  $y$ , 根据 l 被抛物线  $y^2=4ax$  截得的线段长为 4, 即可求出  $a$ , 问题得以解决.

**【解答】**解:  $\because$  直线 l 过点  $(1, 0)$  且垂直于 x 轴,

$$\therefore x=1,$$

代入到  $y^2=4ax$ , 可得  $y^2=4a$ , 显然  $a>0$ ,

$$\therefore y=\pm 2\sqrt{a},$$

$\because$  l 被抛物线  $y^2=4ax$  截得的线段长为 4,

$$\therefore 4\sqrt{a}=4,$$

解得  $a=1$ ,

$$\therefore y^2=4x,$$

$\therefore$  抛物线的焦点坐标为  $(1, 0)$ ,

故答案为:  $(1, 0)$

**【点评】**本题考查了直线和抛物线的位置关系, 属于基础题.

11. (5分) 能说明“若  $a>b$ , 则  $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ”为假命题的一组  $a$ ,  $b$  的值依次为  $a=1$ ,  
 $b=-1$ .

**【考点】**2K: 命题的真假判断与应用.

**【专题】**38: 对应思想; 4O: 定义法; 5L: 简易逻辑.

**【分析】**根据不等式的性质, 利用特殊值法进行求解即可.

**【解答】**解: 当  $a>0$ ,  $b<0$  时, 满足  $a>b$ , 但  $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$  为假命题,

故答案可以是  $a=1$ ,  $b=-1$ ,

故答案为:  $a=1$ ,  $b=-1$ .

**【点评】**本题主要考查命题的真假的应用, 根据不等式的性质是解决本题的关键. 比较基础.

12. (5分) 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$  ( $a>0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , 则  $a=$  4.

**【考点】**KC: 双曲线的性质.

**【专题】**11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】**利用双曲线的简单性质, 直接求解即可.

**【解答】**解: 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$  ( $a>0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ,

可得:  $\frac{a^2+4}{a^2} = \frac{5}{4}$ , 解得  $a=4$ .

故答案为：4.

**【点评】**本题考查双曲线的简单性质的应用，考查计算能力。

13. (5分) 若  $x, y$  满足  $x+1 \leq y \leq 2x$ , 则  $2y - x$  的最小值是 3.

**【考点】**7C: 简单线性规划。

**【专题】**31: 数形结合; 4R: 转化法; 59: 不等式的解法及应用。

**【分析】**作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义进行求解即可。

**【解答】**解：作出不等式组对应的平面区域如图：

设  $z=2y - x$ , 则  $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ ,

平移  $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ ,

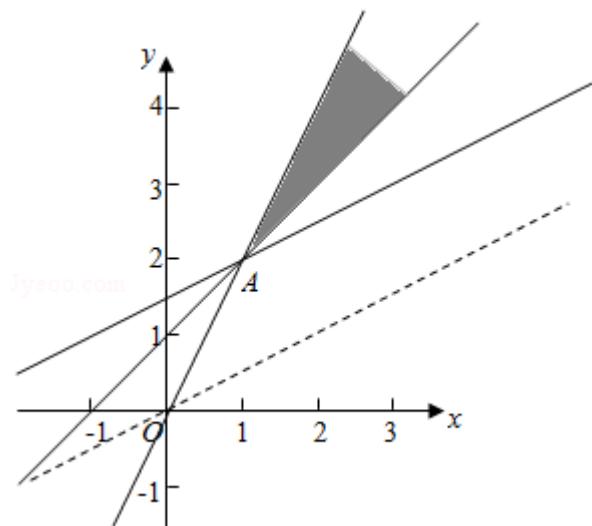
由图象知当直线  $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$  经过点 A 时，

直线的截距最小，此时 z 最小，

由  $\begin{cases} x+1=y \\ y=2x \end{cases}$  得  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ , 即 A (1, 2),

此时  $z=2\times 2 - 1=3$ ,

故答案为：3



**【点评】**本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义以及数形结合是解决本题的关键。

14. (5分) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$ , 且 $\angle C$ 为钝角, 则 $\angle B=\underline{\frac{\pi}{3}}$ ;  $\frac{c}{a}$ 的取值范围是(2, +∞).

**【考点】**HR: 余弦定理.

**【专题】**11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 58: 解三角形.

**【分析】**利用余弦定理, 转化求解即可.

**【解答】**解:  $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$ ,

$$\text{可得: } \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2) = \frac{1}{2}ac\sin B, \frac{\sin B}{\cos B} = \sqrt{3},$$

$$\text{可得: } \tan B = \sqrt{3}, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}, \angle C \text{ 为钝角, } A \in (0, \frac{\pi}{6}),$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A},$$

$$\frac{1}{\tan A} \in (\sqrt{3}, +\infty).$$

$$\frac{c \sin C - \sin(A+B)}{a \sin A} = \cos B + \frac{1}{\tan A} \sin B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\tan A} \in (2, +\infty).$$

$$\text{故答案为: } \frac{\pi}{3}; (2, +\infty).$$

**【点评】**本题考查三角形的解法, 余弦定理的应用, 考查计算能力.

**三、解答题共6小题, 共80分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。**

15. (13分) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=\ln 2$ ,  $a_2+a_3=5\ln 2$ .

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $e^{a_1}+e^{a_2}+\dots+e^{a_n}$ .

**【考点】**8E: 数列的求和; 8I: 数列与函数的综合.

**【专题】**11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 54: 等差数列与等比数列.

**【分析】**(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 化简数列的通项公式, 利用等比数列求和公式求解即可.

**【解答】**解: (I)  $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=\ln 2$ ,  $a_2+a_3=5\ln 2$ .

可得:  $2a_1+3d=5\ln 2$ , 可得 $d=\ln 2$ ,

$\{a_n\}$  的通项公式;  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ,  $d = n \ln 2$ ,

$$(II) e^{a_n} = e^{\ln 2^n} = 2^n,$$

$$\therefore e^{a_1} + e^{a_2} + \dots + e^{a_n} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2.$$

**【点评】**本题考查等差数列以及等比数列的应用, 数列的通项公式以及数列求和, 考查计算能力.

16. (13 分) 已知函数  $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$ .

(I) 求  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 若  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, m]$  上的最大值为  $\frac{3}{2}$ , 求  $m$  的最小值.

**【考点】** GP: 两角和与差的三角函数; H1: 三角函数的周期性; HW: 三角函数的最值.

**【专题】** 35: 转化思想; 48: 分析法; 57: 三角函数的图像与性质.

**【分析】** (I) 运用二倍角公式的降幂公式和两角差的正弦公式和周期公式, 即可得到所求值;

(II) 求得  $2x - \frac{\pi}{6}$  的范围, 结合正弦函数的图象可得  $2m - \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2}$ , 即可得到所求最小值.

**【解答】** 解: (I) 函数  $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$   
 $= \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ ,

$f(x)$  的最小正周期为  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ;

(II) 若  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, m]$  上的最大值为  $\frac{3}{2}$ ,

可得  $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{5\pi}{6}, 2m - \frac{\pi}{6}]$ ,

即有  $2m - \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2}$ , 解得  $m \geq \frac{\pi}{3}$ ,

则  $m$  的最小值为  $\frac{\pi}{3}$ .

**【点评】** 本题考查三角函数的化简和求值, 注意运用二倍角公式和三角函数的周期公式、最值, 考查运算能力, 属于中档题.

17. (13分) 电影公司随机收集了电影的有关数据，经分类整理得到下表：

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指：一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

- (I) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率；
- (II) 随机选取 1 部电影，估计这部电影没有获得好评的概率；
- (III) 电影公司为增加投资回报，拟改变投资策略，这将导致不同类型电影的好评率发生变化. 假设表格中只有两类电影的好评率数据发生变化，那么哪类电影的好评率增加 0.1，哪类电影的好评率减少 0.1，使得获得好评的电影总部数与样本中的电影总部数的比值达到最大？(只需写出结论)

**【考点】**CB：古典概型及其概率计算公式.

**【专题】**11：计算题；38：对应思想；4O：定义法；5I：概率与统计.

**【分析】**(I) 先求出总数，即可求出答案，

(II) 根据互斥事件的概率公式计算即可，

(III) 由题意可得，增加电影部数多的，减少部数少的，即可得到.

**【解答】**解：(I) 总的电影部数为  $140+50+300+200+800+510=2000$  部，

获得好评的第四类电影  $200 \times 0.25=50$ ，

故从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影

的概率  $\frac{50}{2000}=\frac{1}{40}$ ；

(II) 获得好评的电影部数为

$$140 \times 0.4 + 50 \times 0.2 + 300 \times 0.15 + 200 \times 0.25 + 800 \times 0.2 + 510 \times 0.1 = 372,$$

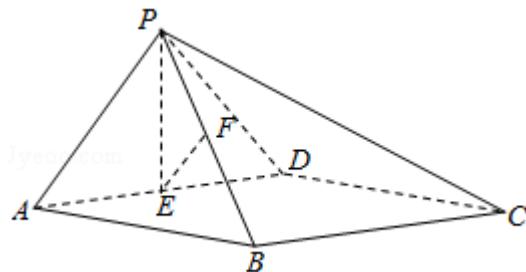
估计这部电影没有获得好评的概率为  $1 - \frac{372}{2000} = 0.814$ ，

(III) 故只要第五类电影的好评率增加 0.1，第二类电影的好评率减少 0.1，则使得获得好评的电影总部数与样本中的电影总部数的比值达到最大.

**【点评】**本题考查了用频率来估计概率，属于基础题.

18. (14分) 如图，在四棱锥 P - ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，平面 PAD $\perp$ 平面 ABCD，PA $\perp$ PD，PA=PD，E，F 分别为 AD，PB 的中点.

- (I) 求证：PE $\perp$ BC；
- (II) 求证：平面 PAB $\perp$ 平面 PCD；
- (III) 求证：EF $\parallel$ 平面 PCD.



**【考点】**LS：直线与平面平行；LW：直线与平面垂直；LY：平面与平面垂直.

**【专题】**35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离.

- 【分析】**(I) 由等腰三角形的三线合一性质和矩形的对边平行性质，即可得证；  
(II) 作出平面 PAB 和平面 PCD 的交线，注意运用公理 4，再由面面垂直的性质和两个平面所成角的定义，即可得证；  
(III) 取 PC 的中点 H，连接 DH，FH，运用中位线定理和平行四边形的判断和性质，结合线面平行的判定定理，即可得证.

**【解答】**证明：(I) PA=PD，E 为 AD 的中点，

可得 PE $\perp$ AD，

底面 ABCD 为矩形，可得 BC $\parallel$ AD，

则 PE $\perp$ BC；

(II) 由于平面 PAB 和平面 PCD 有一个公共点 P，且 AB $\parallel$ CD，

在平面 PAB 内过 P 作直线 PG $\parallel$ AB，

可得 PG $\parallel$ CD，

即有平面 PAB $\cap$ 平面 PCD=PG，

由平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 又  $AB \perp AD$ ,

可得  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 即有  $AB \perp PA$ ,

$PA \perp PG$ ;

同理可得  $CD \perp PD$ , 即有  $PD \perp PG$ ,

可得  $\angle APD$  为平面  $PAB$  和平面  $PCD$  的平面角,

由  $PA \perp PD$ ,

可得平面  $PAB \perp$  平面  $PCD$ ;

(III) 取  $PC$  的中点  $H$ , 连接  $DH$ ,  $FH$ ,

在三角形  $PCD$  中,  $FH$  为中位线, 可得  $FH \parallel BC$ ,

$$FH = \frac{1}{2}BC,$$

$$\text{由 } DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC,$$

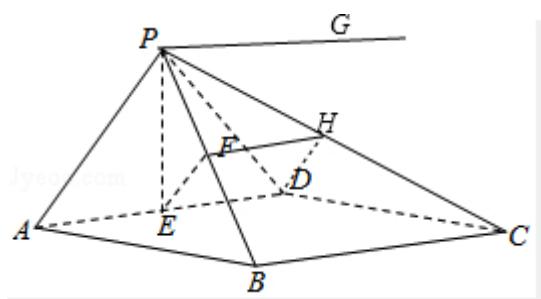
可得  $DE = FH$ ,  $DE \parallel FH$ ,

四边形  $EFHD$  为平行四边形,

可得  $EF \parallel DH$ ,

$EF \not\subset$  平面  $PCD$ ,  $DH \subset$  平面  $PCD$ ,

即有  $EF \parallel$  平面  $PCD$ .



**【点评】**本题考查线面和面面的位置关系, 考查线面平行、垂直的判定和性质, 以及面面垂直的判断和性质, 注意运用转化思想, 考查推理能力和空间想象能力, 属于中档题.

19. (13 分) 设函数  $f(x) = [ax^2 - (3a+1)x + 3a + 2]e^x$ .

(I) 若曲线  $y=f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线斜率为 0, 求  $a$ ;

(II) 若  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极小值, 求  $a$  的取值范围.

**【考点】**6D：利用导数研究函数的极值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

**【专题】**34：方程思想；48：分析法；52：导数的概念及应用；53：导数的综合应用.

**【分析】**(I) 求得  $f(x)$  的导数，由导数的几何意义可得  $f'(2)=0$ ，解方程可得  $a$  的值；

(II) 求得  $f(x)$  的导数，注意分解因式，讨论  $a=0$ ,  $a=1$ ,  $a>1$ ,  $0<a<1$ ,  $a<0$ ，由极小值的定义，即可得到所求  $a$  的范围.

**【解答】**解：(I) 函数  $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]e^x$  的导数为

$$f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x.$$

曲线  $y=f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线斜率为 0，

可得  $(4a-2a-2+1)e^2=0$ ,

$$\text{解得 } a=\frac{1}{2};$$

(II)  $f(x)$  的导数为  $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x=(x-1)(ax-1)e^x$ ，

若  $a=0$  则  $x<1$  时， $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  递增； $x>1$ ,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  递减.

$x=1$  处  $f(x)$  取得极大值，不符题意；

若  $a>0$ ，且  $a=1$ ，则  $f'(x)=(x-1)^2e^x\geq 0$ ,  $f(x)$  递增，无极值；

若  $a>1$ ，则  $\frac{1}{a}<1$ ,  $f(x)$  在  $(\frac{1}{a}, 1)$  递减；在  $(1, +\infty)$ ,  $(-\infty, \frac{1}{a})$  递增，

可得  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极小值；

若  $0<a<1$ ，则  $\frac{1}{a}>1$ ,  $f(x)$  在  $(1, \frac{1}{a})$  递减；在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$ ,  $(-\infty, 1)$  递增，

可得  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极大值，不符题意；

若  $a<0$ ，则  $\frac{1}{a}<1$ ,  $f(x)$  在  $(\frac{1}{a}, 1)$  递增；在  $(1, +\infty)$ ,  $(-\infty, \frac{1}{a})$  递减，

可得  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极大值，不符题意.

综上可得， $a$  的范围是  $(1, +\infty)$ .

**【点评】**本题考查导数的运用：求切线的斜率和极值，考查分类讨论思想方法，以及运算能力，属于中档题.

20. (14 分) 已知椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 焦距为

$2\sqrt{2}$ . 斜率为  $k$  的直线  $l$  与椭圆  $M$  有两个不同的交点  $A, B$ .

(I) 求椭圆  $M$  的方程;

(II) 若  $k=1$ , 求  $|AB|$  的最大值;

(III) 设  $P(-2, 0)$ , 直线  $PA$  与椭圆  $M$  的另一个交点为  $C$ , 直线  $PB$  与椭圆  $M$  的另一个交点为  $D$ . 若  $C, D$  和点  $Q(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$  共线, 求  $k$ .

**【考点】**K3: 椭圆的标准方程; K4: 椭圆的性质; KL: 直线与椭圆的综合.

**【专题】**35: 转化思想; 41: 向量法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】**(I) 根据椭圆的离心率公式即可求得  $a$  的值, 即可求得  $b$  的值, 求得椭圆方程;

(II) 当  $k=1$  时, 设直线  $AB$  的方程, 代入椭圆方程, 根据弦长公式即可求得  $|AB|$  的最大值;

(III) 求得直线  $PA$  的方程, 代入椭圆方程, 即可根据韦达定理即可求得  $C$  点坐标, 同理求得  $D$  点坐标, 即可求得  $\vec{QC}$  与  $\vec{QD}$ , 根据向量的共线定理, 即可求得直线  $AB$  的斜率.

**【解答】**解: (I) 由题意可知:  $2c=2\sqrt{2}$ , 则  $c=\sqrt{2}$ , 椭圆的离心率  $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 则  $a=\sqrt{3}$ ,

$$b^2=a^2-c^2=1,$$

$$\therefore \text{椭圆的标准方程: } \frac{x^2}{3}+y^2=1;$$

(II) 设直线  $AB$  的方程为:  $y=x+m$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

联立  $\begin{cases} y=x+m \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$ , 整理得:  $4x^2+6mx+3m^2-3=0$ ,  $\Delta=(6m)^2-4\times4\times3(m^2-1)>0$ , 整理得:  $m^2<4$ ,

$$x_1+x_2=-\frac{3m}{2}, \quad x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{4},$$

$$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{4-m^2},$$

∴当 m=0 时, |AB|取最大值, 最大值为  $\sqrt{6}$ ;

(III) 设直线 PA 的斜率  $k_{PA} = \frac{y_1}{x_1+2}$ , 直线 PA 的方程为:  $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ ,

联立  $\begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2) \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases}$ , 消去 y 整理得:  $(x_1^2 + 4x_1 + 4 + 3y_1^2)x^2 + 12y_1^2x + (12y_1^2 - 3x_1^2 - 12x_1 - 12) = 0$ ,

由  $\frac{x_1^2}{3} + y_1^2 = 1$  代入上式得, 整理得:  $(4x_1 + 7)x^2 + (12 - 4x_1^2)x - (7x_1^2 + 12x_1)$

$= 0$ ,

$x_1 \cdot x_C = -\frac{(7x_1^2 + 12x_1)}{4x_1 + 7}$ ,  $x_C = -\frac{7x_1 + 12}{4x_1 + 7}$ , 则  $y_C = \frac{y_1}{x_1 + 2}(-\frac{7x_1 + 12}{4x_1 + 7} + 2) = \frac{y_1}{4x_1 + 7}$ ,

则 C  $(-\frac{7x_1 + 12}{4x_1 + 7}, \frac{y_1}{4x_1 + 7})$ , 同理可得: D  $(-\frac{7x_2 + 12}{4x_2 + 7}, \frac{y_2}{4x_2 + 7})$ ,

由 Q  $(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$ , 则  $\vec{QC} = (\frac{1}{4(4x_1 + 7)}, \frac{4y_1 - 4x_1 - 7}{4(4x_1 + 7)})$ ,

$\vec{QD} = (\frac{1}{4(4x_2 + 7)}, \frac{4y_2 - 4x_2 - 7}{4(4x_2 + 7)})$ ,

由  $\vec{QC}$  与  $\vec{QD}$  共线, 则  $\frac{1}{4(4x_1 + 7)} \times \frac{4y_2 - 4x_2 - 7}{4(4x_2 + 7)} = \frac{1}{4(4x_2 + 7)} \times \frac{4y_1 - 4x_1 - 7}{4(4x_1 + 7)}$ ,

整理得:  $y_2 - x_2 = y_1 - x_1$ , 则直线 AB 的斜率  $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$ ,

∴k 的值为 1.

**【点评】**本题考查椭圆的标准方程及性质, 直线与椭圆的位置关系, 考查韦达定理, 弦长公式, 向量的共线定理, 考查转化思想, 属于中档题.