2011年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）复数z=1+i，$\overline{z}$为z 的共轭复数，则$z\bullet\overline{z}-z-1=$（　　）

A．﹣2i　　B．﹣i　　C．i　　D．2i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题．

【分析】求出复数z的共轭复数，代入表达式，求解即可．

【解答】解：$\overline{z}=1-i$，所以$z\overline{z}-z-1=(1+i)(1-i)-1-i-1=-i$

故选：B．

【点评】本题是基础题，考查复数代数形式的混合运算，考查计算能力，常考题型．

2．（5分）函数$y=2\sqrt{x}$（x≥0）的反函数为（　　）

A．$y=\frac{x^2}{4}$（x∈R）　B．$y=\frac{x^2}{4}$（x≥0）　C．$y=4x^2$（x∈R）　D．$y=4x^2$（x≥0）

【考点】4R：反函数．

【专题】11：计算题．

【分析】由原函数的解析式解出自变量x的解析式，再把x和y交换位置，注明反函数的定义域（即原函数的值域）．

【解答】解：∵$y=2\sqrt{x}$（x≥0），

∴$x=\frac{y^2}{4}$，y≥0，

故反函数为$y=\frac{x^2}{4}$（x≥0）．

故选：B．

【点评】本题考查函数与反函数的定义，求反函数的方法和步骤，注意反函数的定义域是原函数的值域．

3．（5分）下面四个条件中，使$a>b$成立的充分而不必要的条件是（　　）

A．$a>b+1$　　B．$a>b-1$　　C．$a^2>b^2$　　D．$a^3>b^3$

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件．

【专题】5L：简易逻辑．

【分析】利用不等式的性质得到$a>b+1\Rightarrow a>b$；反之，通过举反例判断出$a>b$推不出$a>b+1$；利用条件的定义判断出选项．

【解答】解：$a>b+1\Rightarrow a>b$；

反之，例如$a=2$，$b=1$满足$a>b$，但$a=b+1$即$a>b$推不出$a>b+1$，

故$a>b+1$是$a>b$成立的充分而不必要的条件．

故选：A．

【点评】本题考查不等式的性质、考查通过举反例说明某命题不成立是常用方法．

4．（5分）设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=1$，公差$d=2$，$S_{k+2}-S_k=24$，则$k=$（　　）

A．8　　B．7　　C．6　　D．5

【考点】85：等差数列的前n项和．

【专题】11：计算题．

【分析】先由等差数列前n项和公式求得S_{k+2}，S_k，将$S_{k+2}-S_k=24$转化为关于k的方程求解．

【解答】解：根据题意：

$S_{k+2}=(k+2)^2$，$S_k=k^2$

$\therefore S_{k+2}-S_k=24$转化为：

$(k+2)^2-k^2=24$

∴k=5

故选：D．

【点评】本题主要考查等差数列的前n项和公式及其应用，同时还考查了方程思想，属中档题．

5．（5分）设函数f（x）=cosωx（ω＞0），将y=f（x）的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后，所得的图象与原图象重合，则ω的最小值等于（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．3　　C．6　　D．9

【考点】HK：由y=Asin（ωx+φ）的部分图象确定其解析式．

【专题】56：三角函数的求值．

【分析】函数图象平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后，所得的图象与原图象重合，说明函数平移整数个周期，容易得到结果．

【解答】解：f（x）的周期T=$\frac{2\pi}{\omega}$，函数图象平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后，所得的图象与原图象重合，说明函数平移整数个周期，所以$\frac{\pi}{3}=k\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，k∈Z．令k=1，可得ω=6．

故选：C．

【点评】本题是基础题，考查三角函数的图象的平移，三角函数的周期定义的理解，考查技术能力，常考题型．

6．（5分）已知直二面角α﹣l﹣β，点A∈α，AC⊥l，C为垂足，B∈β，BD⊥l，D为垂足，若AB=2，AC=BD=1，则D到平面ABC的距离等于（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．1

【考点】MK：点、线、面间的距离计算．

【专题】11：计算题；13：作图题；35：转化思想．

【分析】画出图形，由题意通过等体积法，求出三棱锥的体积，然后求出D到

平面ABC的距离．

【解答】解：由题意画出图形如图：

直二面角α﹣l﹣β，点A∈α，AC⊥l，C为垂足，B∈β，BD⊥l，D为垂足，

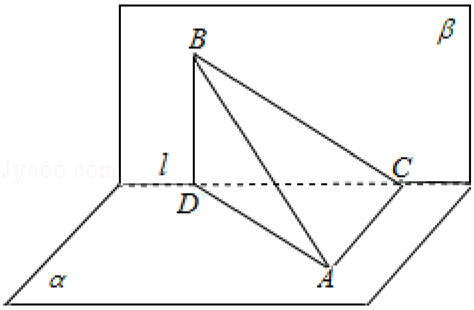
若AB=2，AC=BD=1，则D到平面ABC的距离转化为三棱锥D﹣ABC的高为h，

所以AD=$\sqrt{3}$，CD=$\sqrt{2}$，BC=$\sqrt{3}$

由$V_{B-ACD}=V_{D-ABC}$可知$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\bullet CD\bullet BD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\bullet BC\bullet h$

所以，h=$\frac{\sqrt{6}}{3}$

故选C．



【点评】本题是基础题，考查点到平面的距离，考查转化思想的应用，等体积法是求解点到平面距离的基本方法之一，考查计算能力．

7．（5分）某同学有同样的画册2本，同样的集邮册3本，从中取出4本赠送给4位朋友，每位朋友1本，则不同的赠送方法共有（　　）

A．4种　　B．10种　　C．18种　　D．20种

【考点】D3：计数原理的应用．

【专题】11：计算题．

【分析】本题是一个分类计数问题，一是3本集邮册一本画册，让一个人拿一本画册有4种，另一种情况是2本画册2本集邮册，只要选两个人拿画册C_4^2种，根据分类计数原理得到结果．

【解答】解：由题意知本题是一个分类计数问题，

一是3本集邮册一本画册，从4位朋友选一个有4种，

另一种情况是2本画册2本集邮册，只要选两个人拿画册C_4^2=6种，

根据分类计数原理知共10种，

故选：B．

【点评】本题考查分类计数问题，是一个基础题，这种题目可以出现在选择或填空中，也可以出现在解答题目的一部分中．

8．（5分）曲线$y=e^{-2x}+1$在点（0，2）处的切线与直线y=0和y=x围成的三角形的面积为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．1

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】11：计算题．

【分析】根据导数的几何意义求出函数f（x）在x=0处的导数，从而求出切线的斜率，再用点斜式写出切线方程，化成一般式，然后求出与y轴和直线y=x的交点，根据三角形的面积公式求出所求即可．

【解答】解：$\because y=e^{-2x}+1\therefore y'=(-2)e^{-2x}$

$\therefore y'|_{x=0}=(-2)e^{-2x}|_{x=0}=-2$

∴曲线$y=e^{-2x}+1$在点（0，2）处的切线方程为$y-2=-2(x-0)$即$2x+y-2=0$

令y=0解得x=1，令y=x解得$x=y=\frac{2}{3}$

∴切线与直线y=0和y=x围成的三角形的面积为$\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

故选：A．

【点评】本题主要考查了利用导数研究曲线上某点切线方程，以及两直线垂直的应用等有关问题，属于基础题．

9．（5分）设f（x）是周期为2的奇函数，当$0\leq x\leq1$时，$f(x)=2x(1-x)$，则$f(-\frac{5}{2})=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

【考点】3I：奇函数、偶函数；3Q：函数的周期性．

【专题】11：计算题．

【分析】由题意得 $f(-\frac{5}{2})$=f（$-\frac{1}{2}$）=－f（$\frac{1}{2}$），代入已知条件进行运算.

【解答】解：∵f（x）是周期为2的奇函数，当0≤x≤1时，f（x）=2x（1﹣x），

∴$f(-\frac{5}{2})$=f（$-\frac{1}{2}$）=－f（$\frac{1}{2}$）=－2×$\frac{1}{2}$（1－$\frac{1}{2}$）=－$\frac{1}{2}$，

故选：A.

【点评】本题考查函数的周期性和奇偶性的应用，以及求函数的值.

10．（5分）已知抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，直线$y=2x-4$与C交于A，B两点，则cos∠AFB=（　　）

A．$\frac{4}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{3}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合.

【专题】11：计算题.

【分析】根据已知中抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，直线$y=2x-4$与C交于A，B两点，我们可求出点A，B，F的坐标，进而求出向量$\overrightarrow{FA}$，$\overrightarrow{FB}$的坐标，进而利用求向量夹角余弦值的方法，即可得到答案.

【解答】解：∵抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，

∴F点的坐标为（1，0）

又∵直线$y=2x-4$与C交于A，B两点，

则A，B两点坐标分别为（1，﹣2）（4，4），

则$\overrightarrow{FA}$=（0，﹣2），$\overrightarrow{FB}$=（3，4），

则cos∠AFB=$\frac{\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FB}|}=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$，

故选：D.

【点评】本题考查的知识点是直线与圆锥曲线的关系，其中构造向量然后利用向量法处理是解答本题的重要技巧.

11．（5分）已知平面α截一球面得圆M，过圆心M且与α成60°二面角的平面β截该球面得圆N，若该球的半径为4，圆M的面积为4π，则圆N的面积为（

）

A．7π　　B．9π　　C．11π　　D．13π

【考点】MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】先求出圆M的半径，然后根据勾股定理求出求出OM的长，找出二面角的平面角，从而求出ON的长，最后利用垂径定理即可求出圆N的半径，从而求出面积．

【解答】解：∵圆M的面积为4π

∴圆M的半径为2

根据勾股定理可知OM= $2\sqrt{3}$

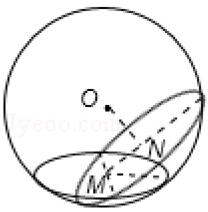
∵过圆心M且与α成60°二面角的平面β截该球面得圆N

∴∠OMN=30°，在直角三角形OMN中，ON=$\sqrt{3}$

∴圆N的半径为$\sqrt{13}$

则圆的面积为13π

故选：D．



【点评】本题主要考查了二面角的平面角，以及解三角形知识，同时考查空间想象能力，分析问题解决问题的能力，属于基础题．

12．（5分）设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，$<\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}>=60°$，则$|\vec{c}|$的最大值等于（　　）

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

【考点】9P：平面向量数量积的坐标表示、模、夹角．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】利用向量的数量积求出$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角；利用向量的运算法则作出图；结合图，判断出四点共圆；利用正弦定理求出外接圆的直径，求出$|\vec{c}|$最大值.

【解答】解：∵$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$

∴$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为120°，

设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$则$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$；$\overrightarrow{CB}=\vec{b}-\vec{c}$

如图所示

则∠AOB=120°；∠ACB=60°

∴∠AOB+∠ACB=180°

∴A，O，B，C四点共圆

∵$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

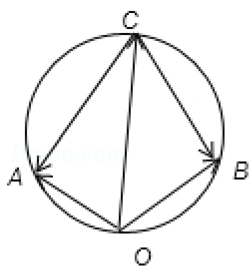
∴$\overrightarrow{AB}^2=\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2=3$

∴$AB=\sqrt{3}$

由三角形的正弦定理得外接圆的直径$2R=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2$

当OC为直径时，模最大，最大为2

故选：A.



【点评】本题考查向量的数量积公式、向量的运算法则、四点共圆的判断定理、三角形的正弦定理.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.把答案填在题中横线上.（注意：在试题卷上作答无效）

13．（5分）$(1-\sqrt{x})^{20}$的二项展开式中，x的系数与x^9的系数之差为<u> 0 </u>.

【考点】DA：二项式定理．

【专题】11：计算题．

【分析】利用二项展开式的通项公式求出通项，令x的指数分别取1，9求出x的系数与x^9的系数；求出值．

【解答】解：展开式的通项为$T_{r+1}=(-1)^r C_{20}^r x^{\frac{r}{2}}$

令$\frac{r}{2}=1$得r=2；令$\frac{r}{2}=9$得r=18

∴x的系数与x^9的系数C_{20}^2，C_{20}^{18}

∴x的系数与x^9的系数之差为$C_{20}^2-C_{20}^{18}=0$

故答案为：0

【点评】本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题．

14．（5分）已知α∈（$\frac{\pi}{2}$，π），sinα=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，则tan2α=____$-\frac{4}{3}$___．

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系；GS：二倍角的三角函数．

【专题】11：计算题．

【分析】利用题目提供的α的范围和正弦值，可求得余弦值从而求得正切值，然后利用二倍角的正切求得tan2α．

【解答】解：由α∈（$\frac{\pi}{2}$，π），sinα=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，得cosα=$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，tanα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$

∴tan2α=$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$

故答案为：$-\frac{4}{3}$

【点评】本题考查了二倍角的正切与同角三角函数间的基本关系，是个基础题．

15．（5分）已知F_1、F_2分别为双曲线C：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$的左、右焦点，点A∈C，点M的坐标为（2，0），AM为$\angle F_1AF_2$的平分线，则$|AF_2|$=__6__．

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】16：压轴题．

【分析】利用双曲线的方程求出双曲线的参数值；利用内角平分线定理得到两条焦半径的关系，再利用双曲线的定义得到两条焦半径的另一条关系，联立求出焦半径．

【解答】解：

不妨设A在双曲线的右支上

∵AM为$\angle F_1AF_2$的平分线

$\therefore \frac{|AF_1|}{|AF_2|}=\frac{|F_1M|}{|MF_2|}=\frac{8}{4}=2$

又∵$|AF_1|-|AF_2|=2a=6$

解得$|AF_2|=6$

故答案为6

【点评】本题考查内角平分线定理；考查双曲线的定义：解有关焦半径问题常用双曲线的定义．

16．（5分）已知E、F分别在正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$的棱BB_1、CC_1上，且$B_1E=2EB$，$CF=2FC_1$，则面AEF与面ABC所成的二面角的正切值等于__$\frac{\sqrt{2}}{3}$__．

【考点】MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】11：计算题；16：压轴题；31：数形结合．

【分析】由题意画出正方体的图形，延长CB、FE交点为S连接AS，过B作BP⊥AS连接PE，所以面AEF与面ABC所成的二面角就是：∠BPE，求出BP与正方体的棱长的关系，然后求出面AEF与面ABC所成的二面角的正切值．

【解答】解：由题意画出图形如图：

因为E、F分别在正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$的棱BB_1、CC_1上，且$B_1E=2EB$，$CF=2FC_1$，

延长CB、FE交点为S连接AS，过B作BP⊥AS连接PE，所以面AEF与面ABC所成的二

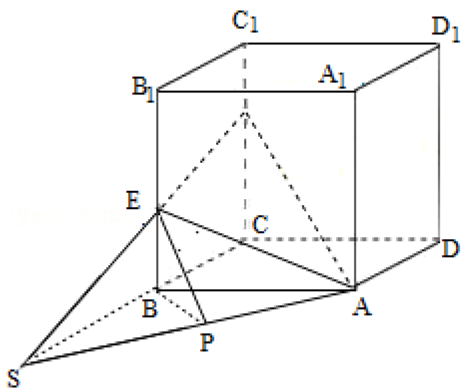
面角就是∠BPE，因为$B_1E=2EB$，$CF=2FC_1$，

所以BE：CF=1：2

所以SB：SC=1：2，

设正方体的棱长为：a，所以$AS=\sqrt{2}a$，$BP=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$BE=\frac{a}{3}$，在RT△PBE中，tan∠EPB=$\frac{BE}{PB}=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{3}$



【点评】本题是基础题，考查二面角的平面角的正切值的求法，解题的关键是能够作出二面角的棱，作出二面角的平面角，考查计算能力，逻辑推理能力.

三、解答题（共6小题，满分70分）

17．（10分）△ABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c．已知$A-C=\frac{\pi}{2}$，$a+c=\sqrt{2}b$，求C.

【考点】HU：解三角形.

【专题】11：计算题.

【分析】由A﹣C等于$\frac{\pi}{2}$得到A为钝角，根据诱导公式可知sinA与cosC相等，然后利用正弦定理把$a+c=\sqrt{2}b$化简后，把sinA换为cosC，利用特殊角的三角函数值和两角和的正弦函数公式把左边变为一个角的正弦函数，给方程的两边

都除以$\sqrt{2}$后，根据C和B的范围，得到$C+\frac{\pi}{4}=B$或$C+\frac{\pi}{4}+B=\pi$，根据A为钝角，所以$C+\frac{\pi}{4}+B=\pi$不成立舍去，然后根据三角形的内角和为π，列出关于C的方程，求出方程的解即可得到C的度数．

【解答】解：由$A-C=\frac{\pi}{2}$，得到A为钝角且$\sin A=\cos C$，

利用正弦定理，$a+c=\sqrt{2}b$可变为：$\sin A+\sin C=\sqrt{2}\sin B$，

即有$\sin A+\sin C=\cos C+\sin C=\sqrt{2}\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin B$，

又A，B，C是△ABC的内角，

故$C+\frac{\pi}{4}=B$或$C+\frac{\pi}{4}+B=\pi$（舍去），

所以$A+B+C=\left(C+\frac{\pi}{2}\right)+\left(C+\frac{\pi}{4}\right)+C=\pi$，

解得$C=\frac{\pi}{12}$．

【点评】此题考查学生灵活运用诱导公式、特殊角的三角函数值以及两角和的正弦函数公式化简求值，是一道中档题．学生做题时应注意三角形的内角和定理及角度范围的运用．

18．（12分）根据以往统计资料，某地车主购买甲种保险的概率为0.5，购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为0.3．设各车主购买保险相互独立．

（Ⅰ）求该地1位车主至少购买甲、乙两种保险中的1种的概率；

（Ⅱ）X表示该地的100位车主中，甲、乙两种保险都不购买的车主数．求X的期望．

【考点】C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】11：计算题．

【分析】（Ⅰ）首先求出购买乙种保险的概率，再由独立事件和对立事件的概率求出该车主甲、乙两种保险都不购买的概率，然后求该车主至少购买甲、乙两种保险中的1种的概率即可．

（Ⅱ）每位车主甲、乙两种保险都不购买的概率均相等，故为独立重复试验，

X服从二项分布，由二项分布的知识求概率即可.

【解答】解：（Ⅰ）设该车主购买乙种保险的概率为P，则P（1－0.5）=0.3，故P=0.6，

该车主甲、乙两种保险都不购买的概率为（1－0.5）（1－0.6）=0.2，

由对立事件的概率该车主至少购买甲、乙两种保险中的1种的概率1－0.2=0.8

（Ⅱ）甲、乙两种保险都不购买的概率为0.2，X～B（100，0.2）

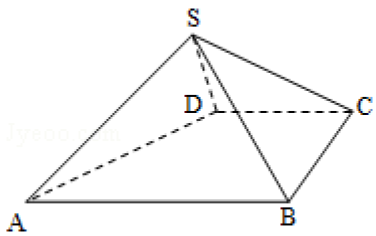
所以EX=100×0.2=20

【点评】本题考查对立事件独立事件的概率、独立重复试验即二项分布的期望等知识，考查利用所学知识分析问题、解决问题的能力.

19．（12分）如图，四棱锥S－ABCD中，AB∥CD，BC⊥CD，侧面SAB为等边三角形，AB=BC=2，CD=SD=1.

（Ⅰ）证明：SD⊥平面SAB；

（Ⅱ）求AB与平面SBC所成的角的大小.



【考点】LW：直线与平面垂直；MI：直线与平面所成的角.

【专题】11：计算题；14：证明题.

【分析】（1）利用线面垂直的判定定理，即证明SD垂直于面SAB中两条相交的直线SA，SB；在证明SD与SA，SB的过程中运用勾股定理即可

（Ⅱ）求AB与平面SBC所成的角的大小即利用平面SBC的法向量

$\vec{n}$与$\overrightarrow{AB}$间的夹角关系即可，当$\vec{n}$与$\overrightarrow{AB}$间的夹角为锐角时，所求的角即为它的余角；当$\vec{n}$与$\overrightarrow{AB}$间的夹角为钝角时，所求的角为$<\vec{n}，\overrightarrow{AB}>-\frac{\pi}{2}$

【解答】（Ⅰ）证明：在直角梯形ABCD中，

∵AB∥CD，BC⊥CD，AB=BC=2，CD=1

$\therefore AD=\sqrt{(AB-CD)^2+BC^2}=\sqrt{5}$

∵侧面SAB为等边三角形，AB=2

∴SA=2

∵SD=1

$\therefore AD^2=SA^2+SD^2$

∴SD⊥SA

同理：SD⊥SB

∵SA∩SB=S，SA，SB⊂面SAB

∴SD⊥平面SAB

（Ⅱ）建立如图所示的空间坐标系

则A（2，﹣1，0），B（2，1，0），C（0，1，0），

作出S在底面上的投影M，则由四棱锥S﹣ABCD中，AB∥CD，BC⊥CD，侧面SAB为等边三角形知，M点一定在x轴上，又AB=BC=2，CD=SD=1．可解得$MD=\frac{1}{2}$，从而解得$SM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故可得S（$\frac{1}{2}$，0，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）

则$\overrightarrow{SB}=(\frac{3}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{SC}=(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

设平面SBC的一个法向量为$\vec{n}=(x, y, z)$

则$\overrightarrow{SB}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{SC}\cdot\vec{n}=0$

即$\begin{cases}\frac{3}{2}x+y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ -\frac{1}{2}x+y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$

取x=0，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，z=1

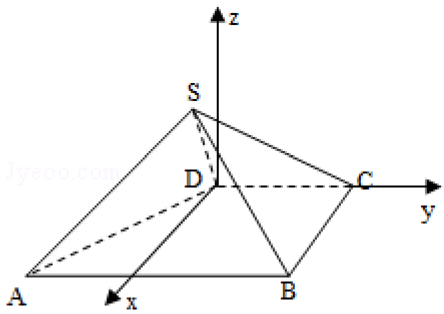
即平面SBC的一个法向量为$\vec{n}=(x, y, z)=$（0，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，1）

又$\overrightarrow{AB}=$（0，2，0）

$\cos<\overrightarrow{AB}, \vec{n}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\therefore<\overrightarrow{AB}, \vec{n}>=\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$

即AB与平面SBC所成的角的大小为arcsin$\frac{\sqrt{21}}{7}$



【点评】本题考查了直线与平面垂直的判定，直线与平面所成的角以及空间向量的基本知识，属于中档题．

20．（12分）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$且$\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=1$．

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$，记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，证明：$S_n<1$．

【考点】8E：数列的求和；8H：数列递推式；8K：数列与不等式的综合．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】（Ⅰ）由$\{\frac{1}{1-a_n}\}$是公差为1的等差数列，知

$\frac{1}{1-a_n}=\frac{1}{1-a_1}+(n-1)\times1=n$，由此能求出$\{a_n\}$的通项公式．

（Ⅱ）由$b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}=\frac{1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，能够证明$S_n<1$．

【解答】解：（Ⅰ）$\{\frac{1}{1-a_n}\}$是公差为1的等差数列，

$\frac{1}{1-a_n}=\frac{1}{1-a_1}+(n-1)\times1=n$，

$\therefore a_n=\frac{n-1}{n}$（$n\in N^*$）．

（Ⅱ）$b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}=\frac{1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，

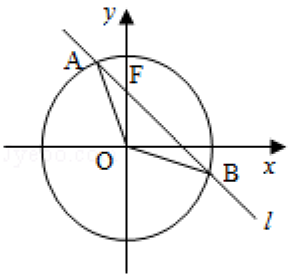
$\therefore S_n=(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<1$．

【点评】本题考查数列的性质和应用，解题时要注意裂项求和法的合理运用．

21．（12分）已知O为坐标原点，F为椭圆C：$x^2+\frac{y^2}{2}=1$在y轴正半轴上的焦点，过F且斜率为$-\sqrt{2}$的直线l与C交于A、B两点，点P满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{0}$.

（Ⅰ）证明：点P在C上；

（Ⅱ）设点P关于点O的对称点为Q，证明：A、P、B、Q四点在同一圆上．



【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】15：综合题；16：压轴题；35：转化思想．

【分析】（1）要证明点P在C上，即证明P点的坐标满足椭圆C的方程$x^2+\frac{y^2}{2}=1$，根据已知中过F且斜率为$-\sqrt{2}$的直线l与C交于A、B两点，点P满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{0}$，我们求出点P的坐标，代入验证即可．

（2）若A、P、B、Q四点在同一圆上，则我们可以先求出任意三点确定的圆的方程，然后将第四点坐标代入验证即可．

【解答】证明：（Ⅰ）设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）

椭圆C：$x^2+\frac{y^2}{2}=1$①，则直线AB的方程为：$y=-\sqrt{2}x+1$ ②

联立方程可得$4x^2-2\sqrt{2}x-1=0$，

则$x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_1\times x_2=-\frac{1}{4}$

则$y_1+y_2=-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2=1$

设P（p_1，p_2），

则有：$\overrightarrow{OA}=(x_1，y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2，y_2)$，$\overrightarrow{OP}=(p_1，p_2)$；

$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)=(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1)$；$\overrightarrow{OP}=(p_1,\ p_2)=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1)$

$\therefore$p的坐标为$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1)$代入①方程成立，所以点P在C上．

（Ⅱ）设点P关于点O的对称点为Q，证明：A、P、B、Q四点在同一圆上．

设线段AB的中点坐标为$(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2})$，即$(\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{1}{2})$，

则过线段AB的中点且垂直于AB的直线方程为：$y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{4})$，即$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{4}$；③

$\because$P关于点O的对称点为Q，故0（0.0）为线段PQ的中点，

则过线段PQ的中点且垂直于PQ的直线方程为：$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$④；

③④联立方程组，解之得：$x=-\frac{\sqrt{2}}{8}$，$y=\frac{1}{8}$

③④的交点就是圆心$O_1(-\frac{\sqrt{2}}{8},\ \frac{1}{8})$，

$r^2=|O_1P|^2=(-\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{2}}{8}))^2+(-1-\frac{1}{8})^2=\frac{99}{64}$

故过P Q两点圆的方程为：$(x+\frac{\sqrt{2}}{8})^2+(y-\frac{1}{8})^2=\frac{99}{64}$…⑤，

把$y=-\sqrt{2}x+1$ …②代入⑤，

有$x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_1+y_2=1$

$\therefore$A，B也是在圆⑤上的．

$\therefore$A、P、B、Q四点在同一圆上．

【点评】本题考查的知识点是直线与圆锥曲线的关系，向量在几何中的应用，其中判断点与曲线关系时，所使用的坐标代入验证法是解答本题的关键．

22．（12分）（Ⅰ）设函数$f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}$，证明：当$x>0$时，$f(x)>0$．

（Ⅱ）从编号1到100的100张卡片中每次随机抽取一张，然后放回，用这种方式连续抽取20次，设抽到的20个号码互不相同的概率为p，证明：

$p<(\frac{9}{10})^{19}<\frac{1}{e^2}$.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性.

【专题】14：证明题；16：压轴题.

【分析】（Ⅰ）欲证明当x＞0时，f（x）＞0，由于f（0）=0利用函数的单调性，只须证明f（x）在[0，+∞）上是单调增函数即可．先对函数进行求导，根据导函数大于0时原函数单调递减即可得到答案.

（Ⅱ）先计算概率P=$\frac{A_{20}^{100}}{100^{20}}$，再证明$\frac{A_{20}^{100}}{100^{20}}<(\frac{9}{10})^{19}<\frac{100}{90}(\frac{90}{100})^{20}$，即证明99×98×…×81＜（90）^{19}，最后证明$(\frac{9}{10})^{19}<e^{-2}$，即证$(\frac{10}{9})^{19}>e^2$，即证19ln$\frac{10}{9}$＞2，即证ln$\frac{10}{9}\frac{2}{19}$，而这个结论由（1）所得结论可得

【解答】（Ⅰ）证明：∵f′（x）=$\frac{1}{1+x}-\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}$，

∴当x＞﹣1，时f′（x）≥0，

∴f（x）在（﹣1，+∞）上是单调增函数，

∴当x＞0时，f（x）＞f（0）=0.

即当x＞0时，f（x）＞0.

（Ⅱ）从编号1到100的100张卡片中每次随机抽取一张，然后放回，连续抽取20次，则抽得的20个号码互不相同的概率为P=$\frac{A_{100}^{20}}{100^{20}}$，要证P＜$(\frac{9}{10})^{19}<\frac{1}{e^2}$.

先证：P=$\frac{A_{100}^{20}}{100^{20}}<(\frac{9}{10})^{19}$，即证$\frac{100\times 99\times\cdots\times 81}{100^{20}}<\frac{100}{90}(\frac{90}{100})^{20}$

即证99×98×…×81＜（90）^{19}

而99×81=（90+9）×（90﹣9）=$90^2-9^2<90^2$

98×82=（90+8）×（90﹣8）=$90^2-8^2<90^2$…

91×89=（90+1）×（90﹣1）=$90^2-1^2<90^2$

∴99×98×…×81＜（90）^{19}

即$P<\left(\frac{9}{10}\right)^{19}$

再证：$\left(\frac{9}{10}\right)^{19}<e^{-2}$，即证$\left(\frac{10}{9}\right)^{19}>e^{2}$，即证$19\ln\frac{10}{9}>2$，即证$\ln\frac{10}{9}>\frac{2}{19}$

由（Ⅰ）$f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}$，当$x>0$时，$f(x)>0$.

令$x=\frac{1}{9}$，则$\ln\left(1+\frac{1}{9}\right)-\frac{2\cdot\frac{1}{9}}{2+\frac{1}{9}}=\ln\left(1+\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{19}>0$，即$\ln\frac{10}{9}>\frac{2}{19}$

综上有：$P<\left(\frac{9}{10}\right)^{19}<\frac{1}{e^{2}}$

【点评】本题主要考查函数单调性的应用、函数的单调性与导数的关系等，考查运算求解能力，函数、导数、不等式证明及等可能事件的概率等知识．通过运用导数知识解决函数、不等式问题，考查了考生综合运用数学知识解决问题的能力．