试卷类型：A

2011年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科）

本试题共4页，21小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：

1、答卷前，考生务必用黑色自己的钢笔或签字笔将自己的姓名、和考生号、试室号、座位号，填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2、选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3、非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求做大的答案无效。

4、作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题号对应的信息点，再做答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。

5、考生必须保持答题卡得整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式：柱体的体积公式　　V=Sh其中S为柱体的底面积，h为柱体的高

线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中系数计算公式 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x},$

其中 $\overline{x},\overline{y}$ 表示样本均值。

N是正整数，则 $a^n-b^n=\left(a-b\right)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1})$

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设复数z满足$(1+i)z=2$，其中i为虚数单位，则$z=$

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$2+2i$　　D．$2-2i$

2．已知集合$A=\{(x,y)\ \mid x,y$为实数，且$x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)\ x,y$为实数，且$y=x\}$，则$A\cap B$的元素个数为

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3．若向量a，b，c满足a∥b且a⊥b，则$c\bullet(a+2b)=$

A．4　　B．3　　C．2　　D．0

4．设函数$f(x)$和$g(x)$分别是R上的偶函数和奇函数，则下列结论恒成立的是

A．$f(x)+|g(x)|$是偶函数　　B．$f(x)-|g(x)|$是奇函数

C．$|f(x)|+g(x)$是偶函数　　D．$|f(x)|-g(x)$是奇函数

5．在平面直角坐标系xOy上的区域D由不等式组$\begin{cases}0\le x\le\sqrt{2}\\ y\le 2\\ x\le\sqrt{2}y\end{cases}$给定。若$M(x,y)$为$D$上的动点，点$A$的坐标为$(\sqrt{2},1)$，则$z=\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}$的最大值为

A．$4\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．4　　D．3

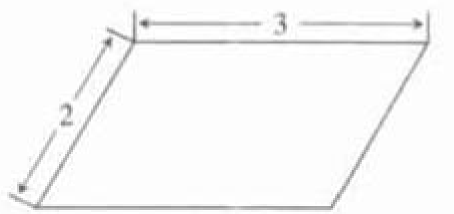
6．

甲、乙两队进行排球决赛，现在的情形是甲队只要在赢一次就获冠军，乙队需要再赢两局才能得冠军，若两队胜每局的概率相同，则甲队获得冠军的概率为

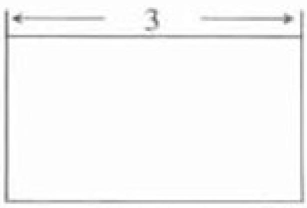
A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

7．

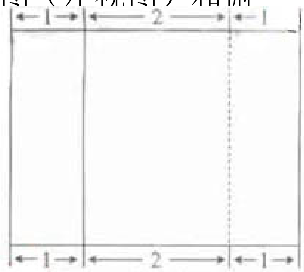
如图1—3，某几何体的正视图（主视图）是平行四边形，侧视图（左视图）和俯视图都是矩形，则该几何体的体积为



正视图



侧视图



俯视图

图3

A. $6\sqrt{3}$　　B. $9\sqrt{3}$　　C. $12\sqrt{3}$　　D. $18\sqrt{3}$

8. 设S是整数集Z的非空子集，如果$\forall a,b\in S,$有$ab\in S$，则称S关于数的乘法是封闭的. 若T,V是Z的两个不相交的非空子集，$T\cup U=Z,$且$\forall a,b,c\in T,$有$abc\in T;\forall x,y,z\in V,$有$xyz\in V$，则下列结论恒成立的是

A. T,V 中至少有一个关于乘法是封闭的

B. T,V 中至多有一个关于乘法是封闭的

C. T,V 中有且只有一个关于乘法是封闭的

D. T,V 中每一个关于乘法都是封闭的

16. 填空题：本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分。

（一）必做题（9-13题）

9. 不等式$|x+1|-|x-3|\ge 0$的解集是________.

10. $x\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^7$的展开式中，$x^4$的系数是_________（用数字作答）

11. 等差数列$|a_n|$前9项的和等于前4项的和. 若$a_1=1,a_k+a_4=0$，则k=____________.

12. 函数$f(x)=x-3x^2+1$在x=____________处取得极小值。

13. 某数学老师身高176cm，他爷爷、父亲和儿子的身高分别是173cm、170cm和182cm. 因儿子的身高与父亲的身高有关，该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高为_____cm.

（二）选做题（14 - 15题，考生只能从中选做一题）

14.（坐标系与参数方程选做题）已知两面线参数方程分别为

$\begin{cases} x=\sqrt{5}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}(0\le\theta<\pi)$ 和 $\begin{cases} x=\frac{5}{4}t^2 \\ y=t \end{cases}(t\in R)$，它们的交点坐标为____________.

15.（几何证明选讲选做题）如图4，过圆O外一点p分别作圆的切线和割线交圆于A，B，且PB=7，C是圆上一点使得BC=5，$\angle BAC=\angle APB$，则AB=________。

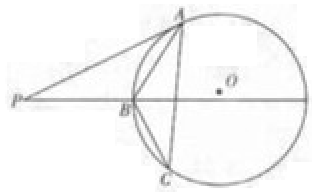


图 4

三．解答题。本大题共6小题，满分80分。解答需写出文字说明、证明过程和演算步骤。

（1） （本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}), x\in R.$

(1) 求 $f(\frac{5\pi}{4})$ 的值；

(2) 设 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(3a+\frac{\pi}{2})=\frac{10}{13}, f(3\beta+2\pi)=\frac{6}{5}$, 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

17.

为了解甲、乙两厂的产品质量，采用分层抽样的方法从甲、乙两厂生产的产品中分别抽出取14件和5件，测量产品中的微量元素x, y的含量（单位：毫克）. 下表是乙厂的5件产品的测量数据：

编号	1	2	3	4	5
x	169	178	166	175	180

y	75	80	77	70	81

（1）已知甲厂生产的产品共有98件，求乙厂生产的产品数量；

（2）当产品中的微量元素x,y满足x≥175，且y≥75时,该产品为优等品。用上述样本数据估计乙厂生产的优等品的数量；

（3）从乙厂抽出的上述5件产品中，随机抽取2件，求抽取的2件产品中优等品数ξ的分布列极其均值（即数学期望）。

18.(本小题满分13分)

如图5.在椎体P-ABCD中，ABCD是边长为1的棱形，且∠DAB=60°，$PA=PD=\sqrt{2}$,PB=2, E,F分别是BC,PC的中点.

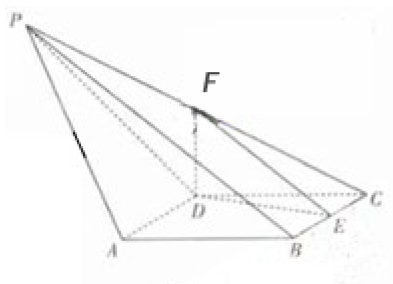


图 5

(1) 证明：AD ⊥平面DEF;

(2) 求二面角P-AD-B的余弦值.

19.(本小题满分14分)

设圆C与两圆$(x+\sqrt{5})^2+y^2=4,(x-\sqrt{5})^2+y^2=4$中的一个内切，另一个外切。

（1）求圆C的圆心轨迹L的方程;

（2）已知点M$(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5}),F(\sqrt{5},0)$，且P为L上动点，求$\left||MP|-|FP|\right|$的最大值及此时点P的坐标.

20.（本小题共14分）

设b>0,数列$\{a_n\}$满足a_1=b，$a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}(n\geq 2)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：对于一切正整数n，$a_n \le \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$.

21.（本小题满分14分）

在平面直角坐标系xOy上，给定抛物线L: $y=\frac{1}{4}x^2$. 实数p，q满足 $p^2-4q\ge 0$，x_1，x_2 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两根，记 $\varphi(p,q)=\max\{|x_1|,|x_2|\}$。

（1）过点 $A(p_0,\frac{1}{4}{p_0}^2)(p_0\ne 0)$ 作L的切线教y轴于点B.

证明：对线段AB上任一点Q(p，q)有 $\varphi(p,q)=\frac{|p_0|}{2}$;

（2）设M(a，b)是定点，其中a，b满足$a^2-4b>0$, $a\neq 0$.

过M(a，b)作L的两条切线 l_1,l_2，切点分别为 $E(p_1,\frac{1}{4}{p_1}^2),E'(p_2,\frac{1}{4}{p_2}^2)$，$l_1,l_2$ 与y轴分别交与F,F’。线段EF上异于两端点的点集记为X.证明：M(a,b) $\in$ X $\Leftrightarrow |P_1|>|P_2| \Leftrightarrow \varphi(a,b)=\frac{|p_1|}{2}$;

（3）设D={(x,y)|y≤x-1,y≥$\frac{1}{4}$(x+1)^2-$\frac{5}{4}$}.当点(p,q)取遍D时，求 $\varphi(p,q)$ 的最小值（记为 $\varphi_{\min}$）和最大值（记为 $\varphi_{\max}$）.

2011年广东高考理科数学参考答案

一、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	B	C	D	A	C	D	B	A

二、填空题

9．$[1,+\infty)$；　10. **84**；　11. **10**；　12. **2**；　13. **185**；

14. $(1,\dfrac{2\sqrt{5}}{5})$；　15. $\sqrt{35}$；

三、解答题

16．解：(1) $f(\dfrac{5\pi}{4})=2\sin(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6})=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$；

(2) $f(3\alpha+\dfrac{\pi}{2})=2\sin\alpha=\dfrac{10}{13}$，$\therefore \sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，又 $\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$\therefore \cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，

$f(3\beta+2\pi)=2\sin(\beta+\dfrac{\pi}{2})=2\cos\beta=\dfrac{6}{5}$，$\therefore \cos\beta=\dfrac{3}{5}$，

又 $\beta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$\therefore \sin\beta=\dfrac{4}{5}$，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{16}{65}$.

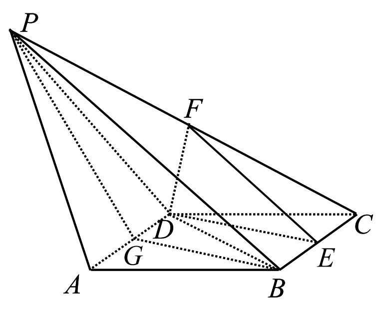
17．解：（1）乙厂生产的产品总数为 $5\div\dfrac{14}{98}=35$；

（2）样品中优等品的频率为 $\dfrac{2}{5}$，乙厂生产的优等品的数量为 $35\times\dfrac{2}{5}=14$；

（3）$\xi=0,1,2$，$P(\xi=i)=\dfrac{C_2^iC_3^{2-i}}{C_5^2}\ (i=0,1,2)$，$\xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

均值 $E(\xi)=1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{5}$.



18.解：(1) 取 AD 的中点 G，又 $PA=PD$，$\therefore PG\perp AD$，

由题意知 ΔABC 是等边三角形，$\therefore BG\perp AD$，

又 PG, BG 是平面 PGB 的两条相交直线，

$\therefore AD\perp$ 平面 PGB，

$\because EF//PB,\ DE//GB$，

$\therefore$ 平面 $DEF//$ 平面 PGB，

$\therefore AD\perp$ 平面 DEF

(2) 由（1）知 $\angle PGB$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角，

在 $Rt\Delta PGA$ 中，$PG^2=\sqrt{2}^2-(\frac{1}{2})^2=\frac{7}{4}$；在 $Rt\Delta BGA$ 中，$BG^2=1^2-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$；

在 ΔPGB 中，$\cos\angle PGB=\frac{PG^2+BG^2-PB^2}{2PG\cdot BG}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$.

19．解：（1）两圆半径都为2，设圆C的半径为R，两圆心为 $F_1(-\sqrt{5},0)$、$F_2(\sqrt{5},0)$，

由题意得 $R=|CF_1|-2=|CF_2|+2$ 或 $R=|CF_2|-2=|CF_1|+2$，

$\therefore ||CF_1|-|CF_2||=4<2\sqrt{5}=|F_1F_2|$，

可知圆心C的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点的双曲线，设方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则

$2a=4,a=2,c=\sqrt{5},b^2=c^2-a^2=1,b=1$，所以轨迹L的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

（2）$\because ||MP|-|FP||\le|MF|=2$，仅当 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PF}(\lambda>0)$ 时，取"＝"，

由 $k_{MF}=-2$ 知直线 $l_{MF}:y=-2(x-\sqrt{5})$，联立 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 并整理得

$15x^2-32\sqrt{5}x+9=0$ 解得 $x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $x=\frac{14\sqrt{5}}{15}$（舍去），此时 $P(\frac{6\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5})$

所以 $||MP|-|FP||$ 最大值等于2，此时 $P(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5})$.

20．解（1）法一：$\frac{a_n}{n}=\frac{ba_{n-1}}{a_{n-1}+2(n-1)}$，得 $\frac{n}{a_n}=\frac{a_{n-1}+2(n-1)}{ba_{n-1}}=\frac{1}{b}+\frac{2}{b}\cdot\frac{n-1}{a_{n-1}}$，

设 $\frac{n}{a_n}=b_n$，则 $b_n=\frac{2}{b}\cdot b_{n-1}+\frac{1}{b}\ (n\ge2)$，

（ⅰ）当 $b=2$ 时，$\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，

即 $b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$，$\therefore a_n=2$

（ⅱ）当 $b\ne2$ 时，设 $b_n+\lambda=\frac{2}{b}\cdot(b_{n-1}+\lambda)$，则 $b_n=\frac{2}{b}\cdot b_{n-1}+\lambda(\frac{2}{b}-1)$，

令 $\lambda(\frac{2}{b}-1)=\frac{1}{b}$，得 $\lambda=\frac{1}{2-b}$，$\therefore b_n+\frac{1}{2-b}=\frac{2}{b}\cdot(b_{n-1}+\frac{1}{2-b})\ (n\ge2)$，

知 $b_n+\frac{1}{2-b}$ 是等比数列，$\therefore b_n+\frac{1}{2-b}=(b_1+\frac{1}{2-b})\cdot(\frac{2}{b})^{n-1}$，又 $b_1=\frac{1}{b}$，

$\therefore b_n=\frac{1}{2-b}\cdot(\frac{2}{b})^n-\frac{1}{2-b}=\frac{1}{2-b}\cdot\frac{2^n-b^n}{b^n}$，$\therefore a_n=\frac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}$.

法二：（ⅰ）当$b=2$时，$\{b_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

即$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$，$\therefore a_n=2$

（ⅱ）当$b\neq 2$时，$a_1=b$，$a_2=\frac{2b^2}{b+2}=\frac{2b^2(b-2)}{b^2-2^2}$，$a_2=\frac{3b^3}{b^2+2b+4}=\frac{3b^3(b-2)}{b^3-2^3}$，

猜想$a_n=\frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}$，下面用数学归纳法证明：

①当$n=1$时，猜想显然成立；

②假设当$n=k$时，$a_k=\frac{kb^k(b-2)}{b^k-2^k}$，则

$a_{k+1}=\frac{(k+1)b\cdot a_k}{a_k+2(n-1)}=\frac{(k+1)b\cdot kb^k(b-2)}{kb^k(b-2)+2k\cdot(b^k-2^k)}=\frac{(k+1)b^{k+1}(b-2)}{b^{k+1}-2^{k+1}}$，

所以当$n=k+1$时，猜想成立，

由①②知，$\forall n\in N*$，$a_n=\frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}$.

（2）（ⅰ）当$b=2$时，$a_n=2=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}+1$，故$b=2$时，命题成立；

（ⅱ）当$b\neq 2$时，$b^{2n}+2^{2n}\geq 2\sqrt{b^{2n}\cdot 2^{2n}}=2^{n+1}b^n$，

$b^{2n-1}\cdot 2+b\cdot 2^{2n-1}\geq 2\sqrt{b^{2n}\cdot 2^{2n}}=2^{n+1}b^n$，

$\cdots\cdots, b^{n+1}\cdot 2^{n-1}+b^{n-1}\cdot 2^{n+1}\geq 2\sqrt{b^{2n}\cdot 2^{2n}}=2^{n+1}b^n$，以上n个式子相加得

$b^{2n}+b^{2n-1}\cdot 2+\cdots+b^{n+1}\cdot 2^{n-1}+b^{n-1}\cdot 2^{n+1}+\cdots+b\cdot 2^{2n-1}+2^{2n}\geq n\cdot 2^{n+1}b^n$，

$$a_n=\frac{n\cdot 2^{n+1}b^n(b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}\leq\frac{[(b^{2n}+b^{2n-1}\cdot 2+\cdots+b\cdot 2^{2n-1}+2^{2n})-b^n\cdot 2^n](b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$=\frac{(b^{2n}+b^{2n-1}\cdot 2+\cdots+b\cdot 2^{2n-1}+2^{2n})(b-2)-b^n\cdot 2^n(b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$=\frac{(b^{2n+1}-2^{2n+1})-b^{n+1}\cdot 2^n+b^n\cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$=\frac{(b^{2n+1}-b^{n+1}\cdot 2^n)+(b^n\cdot 2^{n+1}-2^{2n+1})}{2^{n+1}(b^n-2^n)}=\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$. 故当$b\neq 2$时，命题成立；

综上（ⅰ）（ⅱ）知命题成立.

21．解：（1）$k_{AB}=y'|_{x=p_0}=(\frac{1}{2}x)|_{x=p_0}=\frac{1}{2}p_0$，

直线AB的方程为$y-\frac{1}{4}{p_0}^2=\frac{1}{2}p_0(x-p_0)$，即$y=\frac{1}{2}p_0x-\frac{1}{4}{p_0}^2$，

$\therefore q=\frac{1}{2}p_0p-\frac{1}{4}{p_0}^2$，方程$x^2-px+q=0$的判别式$\Delta=p^2-4q=(p-p_0)^2$，

两根$x_{1,2}=\frac{p\pm|p_0-p|}{2}=\frac{p_0}{2}$或$p-\frac{p_0}{2}$，

$\because p\cdot p_0\ge 0$，$\therefore|p-\frac{p_0}{2}|=||p|-|\frac{p_0}{2}||$，又$0\le|p|\le|p_0|$，

$\therefore -|\frac{p_0}{2}|\le|p|-|\frac{p_0}{2}|\le|\frac{p_0}{2}|$，得$\therefore|p-\frac{p_0}{2}|=||p|-|\frac{p_0}{2}||\le|\frac{p_0}{2}|$，

$\therefore\varphi(p,q)=|\frac{p_0}{2}|$.

（2）由$a^2-4b>0$知点$M(a,b)$在抛物线L的下方，

①当$a>0,b\ge0$时，作图可知，若$M(a,b)\in X$，则$p_1>p_2\ge0$，得$|p_1|>|p_2|$；

若$|p_1|>|p_2|$，显然有点$M(a,b)\in X$；　$\therefore M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|$.

②当$a>0,b<0$时，点$M(a,b)$在第二象限，

作图可知，若$M(a,b)\in X$，则$p_1>0>p_2$，且$|p_1|>|p_2|$；

若$|p_1|>|p_2|$，显然有点$M(a,b)\in X$；

$\therefore M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|$.

根据曲线的对称性可知，当$a<0$时，$M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|$，

综上所述，$M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|$（*）；

由（1）知点M在直线EF上，方程$x^2-ax+b=0$的两根$x_{1,2}=\frac{p_1}{2}$或$a-\frac{p_1}{2}$，

同理点M在直线$E'F'$上，方程$x^2-ax+b=0$的两根$x_{1,2}=\frac{p_2}{2}$或$a-\frac{p_2}{2}$，

若$\varphi(a,b)=|\frac{p_1}{2}|$，则$|\frac{p_1}{2}|$不比$|a-\frac{p_1}{2}|$、$|\frac{p_2}{2}|$、$|a-\frac{p_2}{2}|$小，

$\therefore|p_1|>|p_2|$，又$|p_1|>|p_2|\Rightarrow M(a,b)\in X$，

$\therefore \varphi(a,b)=|\frac{p_1}{2}| \Rightarrow M(a,b)\in X$；又由（1）知，$M(a,b)\in X \Rightarrow \varphi(a,b)=|\frac{p_1}{2}|$；

$\therefore \varphi(a,b)=|\frac{p_1}{2}| \Leftrightarrow M(a,b)\in X$，综合（*）式，得证.

（3）联立 $y=x-1$，$y=\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{5}{4}$ 得交点 $(0,-1),(2,1)$，可知 $0\le p\le 2$，

过点 (p,q) 作抛物线L的切线，设切点为 $(x_0,\frac{1}{4}{x_0}^2)$，则 $\frac{\frac{1}{4}{x_0}^2-q}{x_0-p}=\frac{1}{2}x_0$，

得 ${x_0}^2-2px_0+4q=0$，解得 $x_0=p+\sqrt{p^2-4q}$，

又 $q\ge\frac{1}{4}(p+1)^2-\frac{5}{4}$，即 $p^2-4q\le 4-2p$，

$\therefore x_0\le p+\sqrt{4-2p}$，设 $\sqrt{4-2p}=t$，$\therefore x_0\le -\frac{1}{2}t^2+t+2=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{5}{2}$，

$\because \varphi_{\max}=|\frac{x_0}{2}|_{\max}$，又 $x_0\le\frac{5}{2}$，$\therefore \varphi_{\max}=\frac{5}{4}$；

$\because q\le p-1$，$\therefore x_0\ge p+\sqrt{p^2-4p+4}=p+|p-2|=2$，

$\therefore \varphi_{\min}=|\frac{x_0}{2}|_{\min}=1$.

【广东卷】（理科数学）

本试卷分**第I卷**（选择题）和**第II卷**（非选择题）两部分，第I卷第1至第2页，第II卷第3页至第4页．全卷满分150分，考试时间120分钟．

第 I 卷（选择题　共60分）

一、选择题：（每小题5分，共60分）

【2011·广东理，1】1．设复数 z 满足 $(1+i)z=2$，其中 i 为虚数单位，则 $z=($　　$)$.

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$2+2i$　　D．$2-2i$

【答案】B.

【解析】依题意得 $z=\dfrac{2}{1+i}=1-i$，故选 B．

【2011·广东理，2】2．已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x,y$ 为实数, 且 $x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)\,|$ x,y 为实数, 且 $y=x\}$, 则 $A\bigcap B$ 的元素个数为(　　).

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】C.

【解析】 题意等价于求直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的交点个数, 画大致图像可得答案.

【2011·广东理，3】3．若向量 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=($　　$)$.

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【答案】D.

【解析】因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 所以 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，从而 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$．

【2011·广东理，4】4．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是实数集 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数，则下列结论恒成立的是(　　).

A．$f(x)+|g(x)|$ 是偶函数　　　B．$f(x)-|g(x)|$ 是奇函数

C．$|f(x)|+g(x)$ 是偶函数　　　D．$|f(x)|-g(x)$ 是奇函数

【答案】A.

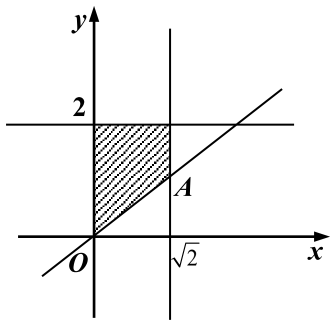
【解析】　依题意 $f(-x)=f(x),g(-x)=-g(x)$，故 $f(-x)+|g(-x)|=f(x)+|g(x)|$，从而 $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数，故选A.

【2011·广东理，5】5. 已知平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases}0\le x\le\sqrt{2}\\ y\le 2\\ x\le\sqrt{2}y\end{cases}$ 给定.

若 $M(x,y)$ 为 D 上的动点，点 A 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$，则

$z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$ 的最大值为(　　).

A. $4\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. 4　　D. 3



【答案】C.

【解析】目标函数即 $z=\sqrt{2}x+y$，画出可行域如图所示，代入端点比较之，易得当 $x=\sqrt{2},y=2$ 时 z 取得最大值 4，故选C.

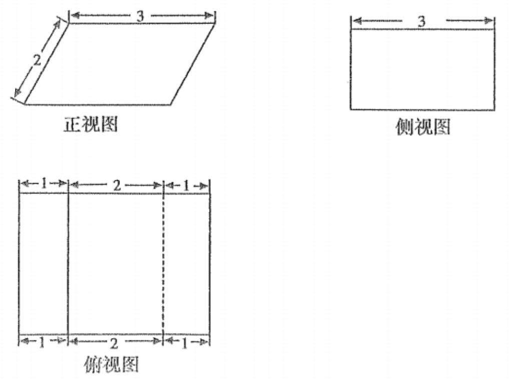
【2011·广东理，6】6. 甲、乙两队进行排球决赛，现在的情形是甲队只要再赢一局就获冠军，乙队需要再赢两局才能得冠军．若两队胜每局的概率相同，则甲队获得冠军的概率为(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

【答案】D.

【解析】设甲队获得冠军为事件 A，则 A 包含两种情况：(1)第一局胜；(2)第一局负但第二局胜；故所求概率 $P(A)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$，从而选D.

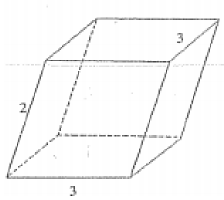
【2011·广东理，7】7. 如图，某几何体的正视图（主视图）是平行四边形，侧视图（左视图）和俯视图都是矩形，则该几何体的体积为(　　).



A．$6\sqrt{3}$　　B．$9\sqrt{3}$　　C．$12\sqrt{3}$　　D．$18\sqrt{3}$

【答案】B.

【解析】该几何体是以正视图所在的平行四边形为底面，高为3的四棱柱，又平行四边形的底边长为3，高为$\sqrt{3}$，所以面积$S=3\sqrt{3}$，从而所求几何体的体积$V=Sh=9\sqrt{3}$，故选B.



【2011·广东理，8】8．设S是整数集Z的非空子集，如果$\forall a,b\in S$，有$ab\in S$，则称S关于数的乘法是封闭的．若T,V是Z的两个不相交的非空子集，

$Y\bigcup V=Z$，且$\forall a,b,c\in T$，有$abc\in T$；$\forall x,y,z\in V$，有$xyz\in V$，则下列结论恒成立的是（　）.

A．T,V中至少有一个关于乘法是封闭的　B．T,V中至多有一个关于乘法是封闭的

C．T,V中有且只有一个关于乘法是封闭的　D．T,V中每一个关于乘法都是封闭的

【答案】A.

【解析】

因为$T\bigcup V=Z$，故必有$1\in T$或$1\in V$，不妨设$1\in T$，则令$c=1$，依题意对$\forall a,b\in T$，有$ab\in T$，从而T关于乘法是封闭的；(其实到此已经可以选A了，但为了严谨，我们往下证明可以有一个不封闭以及可以两个都封闭)，取$T=N$，则V为所有负整数组成的集合，显然T封闭，但

V 显然是不封闭的，如 $(-1)\times(-2)=2\notin V$；同理，若 $T=\{奇数\}$，$V=\{偶数\}$，显然两者都封闭，从而选A.

二、填空题：本大题共7小题．考生作答6小题．每小题5分，满分30分．

（一）必做题（9～13题）

【2011·广东理，9】9．不等式 $|x+1|-|x-3|\ge 0$ 的解集是_____．

【答案】$[1,+\infty)$．

【解析】解法一：原不等式 $\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ -(x+1)-(3-x)\ge 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1<x\le 3 \\ x+1-(3-x)\ge 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>3 \\ x+1-(x-3)\ge 0 \end{cases}$，解得 $x\ge 1$，从而原不等式的解集为 $[1,+\infty)$．

解法二（首选）：$|x+1|-|x-3|$ 的几何意义为到点 -1 的距离与到点 3 的距离的差，画出数轴易得 $x\ge 1$．

解法三：不等式即 $|x+1|\ge|x-3|$，平方得 $x^2+2x+1\ge x^2-6x+9$，解得 $x\ge 1$．．

【2011·广东理，10】10．$x(x-\dfrac{2}{x})^7$ 的展开式中 x^4 的系数是_____（用数字作答）．

【答案】84．

【解析】题意等价于求 $(x-\dfrac{2}{x})^7$ 的展开式中 x^3 的系数 $T_{k+1}=(-2)^k C_7^k x^{7-2k}$，$k=0,1,2,3,\cdots,7$，

令 $7-2k=3$ 得 $k=2$，故所求系数为 $4C_7^2=84$．

【2011·广东理，11】11．等差数列 $\{a_n\}$ 的前9项和等于前4项和，若 $a_1=1, a_k+a_4=0$，则

$k=$ _____．

【答案】10．

【解析】由 $S_9=S_4$ 得 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=5a_7=0$，$a_k+a_4=0=2a_7=a_4+a_{10}$，故 $k=10$．

【2011·广东理，12】12．函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 在 $x=$___处取得极小值．

【答案】2．

【解析】 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<2$ 时，

$f'(x)<0$，故当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得极小值．

【2011·广东理，12】13

．某数学老师身高176cm，他爷爷，父亲，儿子的身高分别是173cm,170cm和182cm，因儿子的身高与父亲的身高有关，该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高是___ cm．

【答案】185.

【解析】抓住“儿子的身高与父亲的身高有关”提炼数据$(173,170),(170,176),(176,182)$, 易得平均值$\overline{x}=173,\overline{y}=176$, 于是$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=3\times 6=18$，$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=18$，

从而$\hat{b}=1$，，$\hat{a}=176-1\times 173=3$，所以线性回归方程为$\hat{y}=x+3$，当$x=182$时，$\hat{y}=185$

.

第Ⅱ卷（非选择题 共90分）

（二）选做题（14、15题，考生只能从中选做一题）

二、填空题：（每小题5分，共25分）

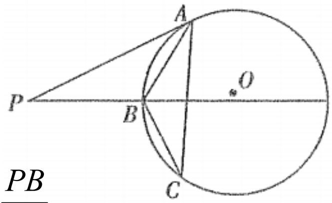
【2011·广东理，14】14．**（坐标系与参数方程选做题）**已知两曲线参数方程分别为

$\begin{cases} x=\sqrt{5}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$0\leqslant\theta<\pi$）和$\begin{cases} x=\frac{5}{4}t^2 \\ y=t \end{cases}$（$t\in R$），它们的交点坐标为_______.

【答案】$(1,\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

【解析】对应普通方程为$\frac{x^2}{5}+y^2=1(-\sqrt{5}<x\le\sqrt{5},0\le y\le 1)$, $y^2=\frac{4}{5}x$, 联立方程消去y得$x^2+4x-5=0$, 解得$x=1$或$x=-5$(舍去), 于是$x=1$, $y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故所求交点坐标为$(1,\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

【2011·广东理，15】15．**（几何证明选讲选做题）**如图4，过圆O外一点P分别做圆的切线和割线交圆于A，B两点，且$PB=7$，C是圆上一点使得$BC=5$，$\angle BAC=\angle APB$，则$AB=$_____.



【答案】$\sqrt{35}$.

【解析】结合弦切角定理易得$\Delta ABP\sim\Delta CBA$, 于是$\frac{AB}{BC}=\frac{PB}{AB}$,

代入数据解得$AB=\sqrt{35}$.

三、解答题：（本大题共6小题，共80分）

【2011·广东理，16】16. （本小题满分12分）已知函数 $f(x)=2\sin(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}),x\in R$.

(Ⅰ) 求 $f(\frac{5\pi}{4})$ 的值；

(Ⅱ) 设 $\alpha,\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$f(3\alpha+\frac{\pi}{2})=\frac{10}{13}$，$f(3\beta+2\pi)=\frac{6}{5}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

【解析】.

(Ⅰ) $f(\frac{5\pi}{4})=2\sin(\frac{1}{3}\cdot\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$；

(Ⅱ) 因为 $f(3\alpha+\frac{\pi}{2})=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})=2\sin\alpha=\frac{10}{13}$，所以 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，

因为 $f(3\beta+2\pi)=2\sin(\beta+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=2\sin(\beta+\frac{\pi}{2})=2\cos\beta=\frac{6}{5}$，所以 $\cos\beta=\frac{3}{5}$，

又 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{12}{13}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{65}$.

【2011·广东理，17】17. （本小题满分13分）为了解甲，乙两厂的产品质量，采取分层抽样的方法从甲，乙两厂的产品中分别抽取14件和5件，测量产品中微量元素 x,y 的含量（单位：毫克）. 下表是乙厂的5件产品的测量数据：

编号	1	2	3	4	5
x	169	178	166	175	180
y	75	80	77	70	81

(Ⅰ) 已知甲厂生产的产品共有98件，求乙厂生产的产品数量；

(Ⅱ) 当产品中微量元素 x,y 满足 $x\geq175$ 且 $y\geq75$ 时，该产品为优等品. 用上述样本数据估计乙厂生产的优等品的数量；

(Ⅲ) 从乙厂抽出的上述5件产品中，随即抽取2件，求抽出的2件产品中优等品数 ξ 的分布列及其均值（即数学期望）.

【解析】.

解：(Ⅰ) 乙厂生产的产品数量为 $98\times\frac{5}{14}$=35 件；

(Ⅱ)

样本中满足 $x\geq175$，且 $y\geq75$ 的产品有 2 件, 故样本频率为 $\frac{2}{5}$, 则可估计乙厂生产的优等品数

量为$35\times\frac{2}{5}$=14件；

(III) ξ的可能取值为$0,1,2$，且$P(\xi=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$．【或者$P(\xi=i)=\frac{C_2^iC_3^{2-i}}{C_5^2}\ (i=0,1,2)$】

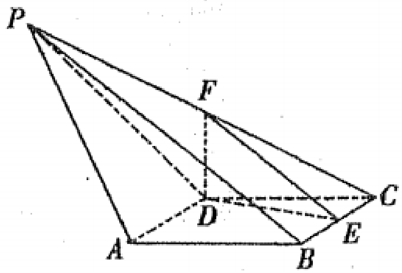
故ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

ξ的数学期望$E\xi=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$．

【2011·广东理，18】18．（本小题满分13分）如图，在锥体$P-ABCD$中，$ABCD$是边长为1的菱形，且$\angle DBA=60^\circ$，$PA=PD=\sqrt{2}$，PB=2，E，F分别是BC，PC的中点

.



(Ⅰ)证明：$AD\perp$平面DEF；

(Ⅱ)求二面角$P-AD-B$的平面角．

【解析】．

(Ⅰ)取AD的中点G，又$PA=PD$，$\therefore PG\perp AD$，

由题意知ΔABC是等边三角形，$\therefore BG\perp AD$，

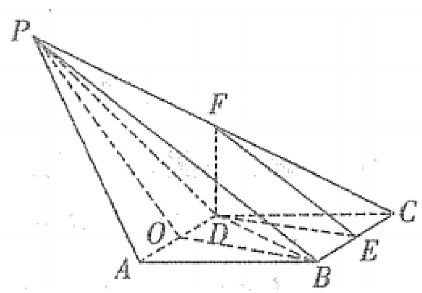
又PG, BG是平面PGB的两条相交直线，

$\therefore AD\perp$平面PGB，

$\because EF\,//\,PB, DE\,//\,GB$，

$\therefore$平面$DEF\,//$平面PGB，

$\therefore AD\perp$平面DEF



(Ⅱ)由（1）知$\angle PGB$为二面角$P-AD-B$的平面角，

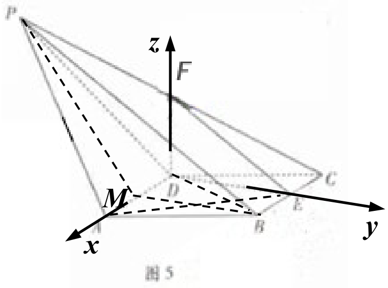
在$Rt\Delta PGA$中，$PG^2=\sqrt{2}^2-(\frac{1}{2})^2=\frac{7}{4}$；在$Rt\Delta BGA$中，$BG^2=1^2-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$；

在ΔPGB中，$\cos\angle PGB=\frac{PG^2+BG^2-PB^2}{2PG\cdot BG}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$．

另解：（Ⅰ）连接 AE， BD，

因为 $ABCD$ 是边长为1的菱形，且 $\angle DAB=60°$，

E 是 BC 的中点，所以 $\Delta ABD,\Delta BCD$ 均为正三角形，



且 $DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2},BE=\dfrac{1}{2},\angle ABE=120°$，

所以 $AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\cos\angle ABE=\dfrac{7}{4}$

所以 $AD^2+DE^2=1+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}=AE^2$，从而 $AD\perp DE$，

取 AD 的中点 M，连接 PM,BM，因为 $PA=PD$， $BA=BD$，所以 $PM\perp AD,BM\perp AD$，

又 $PM\cap BM=M$，所以 $AD\perp$ 平面 PBM，所以 $AD\perp PB$，

在 ΔBCP 中，因为 E,F 分别是 BC,PC 的中点，所以 $EF//PB$，所以 $AD\perp EF$

又 $EF\cap DE=E$，所以 $AD\perp$ 平面 DEF .

（Ⅱ）**解法一**:由（Ⅰ）知 $\angle BMP$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角,

易得 $BM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$PM=\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

在 ΔBPM 中，$PB=2$，由余弦定理得 $\cos\angle BMP=\dfrac{BM^2+PM^2-PB^2}{2BM\cdot PM}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

所以二面角 $P-AD-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

解法二:先证明 $DF\perp$ 平面 $ABCD$，即证明 $DF\perp DE$ 即可，

在 $Rt\Delta PBC$ 中， $PC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$；在 ΔPDC 中， $\cos\angle DCP=\dfrac{1^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}{2\times1\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

，

所以在 ΔFDC 中， $DF^2=1^2+(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2-2\times1\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{4}$， $DF=\dfrac{1}{2}$.

在 ΔDEF 中， $DE^2+DF^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+\dfrac{1}{4}=1=EF^2$，故 ΔDEF 为直角三角形，从而 $DF\perp DE$.

建立空间直角坐标系 $D-xyz$ 如图所示, 则 $D(0,0,0),A(1,0,0),P(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1)$，

所以 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0),\overrightarrow{DP}=(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1)$，设平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n_1}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\ \boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}$，从而 $\begin{cases}x=0\\ -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+z=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\end{cases}$，令 $y=2$ 得 $\boldsymbol{n_1}=(0,2,\sqrt{3})$

显然平面 DAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n_2}=(0,0,1)$，

从而 $\cos<\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}>=\dfrac{\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n_2}}{|\boldsymbol{n_1}||\boldsymbol{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，所以二面角 $P-AD-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．

【2011·广东理，19】19．（本小题满分14分）设圆 C 与两圆

$(x+\sqrt{5})^2+y^2=4,(x-\sqrt{5})^2+y^2=4$ 中的一个内切，另一个外切．

(I) 求圆 C 的圆心轨迹 L 的方程；

(II)

已知点 $M\ (\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\dfrac{4\sqrt{5}}{5}),F(\sqrt{5},0)$，且 P 为 L 上动点，求 $\|\ MP\ |-|\ FP\ \|$ 的最大值及此时点 P 的坐标．

【解析】．

（Ⅰ）设圆 C 的圆心为 $C(x,y)$，半径为 r，圆 $(x+\sqrt{5})^2+y^2=4$ 的圆心为 $F_1(-\sqrt{5},0)$，半径为2；圆 $(x-\sqrt{5})^2+y^2=4$ 的圆心为 $F_2(\sqrt{5},0)$，半径为2；依题意，有 $\begin{cases}|CF_1|=r+2\\|CF_2|=r-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|CF_1|=r-2\\|CF_2|=r+2\end{cases}$，所以 $||CF_1|-|CF_2||=4<2\sqrt{5}=|F_1F_2|$．

所以圆 C 的圆心轨迹 L 是以原点为中心，焦点在 x 轴上，焦距为 $2c=2\sqrt{5}$，实轴长为 $2a=4$ 的双曲线，因此 $a=2$，$c=\sqrt{5},b=1$，故轨迹 L 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$．

（Ⅱ）易得过点 $M\ (\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\dfrac{4\sqrt{5}}{5}),F(\sqrt{5},0)$ 的直线 l 的方程为 $y=-2(x-\sqrt{5})$，

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-y^2=1\\y=-2(x-\sqrt{5})\end{cases}$，消去 y 得 $15x^2-32\sqrt{5}x+84=0$，解得 $x_1=\dfrac{6\sqrt{5}}{5},x_2=\dfrac{14\sqrt{5}}{15}$，

则直线 l 与双曲线 L 的交点为 $P_1(\dfrac{6\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}),P_2(\dfrac{14\sqrt{5}}{15},\dfrac{2\sqrt{5}}{15})$，

因为 P_1 在线段 MF 外，所以 $||MP_1|-|FP_1||=|MF|=\sqrt{(\dfrac{2\sqrt{5}}{5})^2+(\dfrac{4\sqrt{5}}{5})^2}=2$，

因为 P_2 在线段 MF 内，所以 $||MP_1|-|FP_1||<|MF|$，

若点 P 不住 MF 上，则 $||MP|-|FP||<|MF|$，

综上，$\big||MP|-|FP|\big|$ 的最大值为 2，此时点 P 的坐标为 $(\dfrac{6\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5})$．

解析二：

(Ⅰ) 两圆半径都为2，设圆C的半径为R，两圆心为 $F_1(-\sqrt{5},0)$ 、 $F_2(\sqrt{5},0)$ ，

由题意得 $R=|CF_1|-2=|CF_2|+2$ 或 $R=|CF_2|-2=|CF_1|+2$ ，

$\therefore ||CF_1|-|CF_2||=4<2\sqrt{5}=|F_1F_2|$ ，

可知圆心C的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点的双曲线，设方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则

$2a=4, a=2, c=\sqrt{5}, b^2=c^2-a^2=1, b=1$，所以轨迹L的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

(Ⅱ) $\because ||MP|-|FP||\le|MF|=2$ ，仅当 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PF}(\lambda>0)$ 时，取 " = " ，

由 $k_{MF}=-2$ 知直线 $l_{MF}: y=-2(x-\sqrt{5})$ ，联立 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 并整理得

$15x^2-32\sqrt{5}x+9=0$ 解得 $x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $x=\frac{14\sqrt{5}}{15}$ (舍去)，此时 $P(\frac{6\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

所以 $||MP|-|FP||$ 最大值等于2，此时 $P(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5})$.

【2011·广东理，20】20. （本小题满分14分）设 $b>0$ ，数列 $\{a_n\}$ 满足, $a_1=b$

$$a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}(n\ge 2).$$

(Ⅰ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(Ⅱ) 证明：对于一切正整数 n ， $a_n\le\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$.

【解析】 .

（Ⅰ）由 $a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}$ 得 $\frac{n}{a_n}=\frac{2}{b}\cdot\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{1}{b}$,

当 $b=2$ 时, $\frac{n}{a_n}-\frac{n-1}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$, 所以 $\{\frac{n}{a_n}\}$ 是以首项为 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,

所以 $\frac{n}{a_n}=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$, 从而 $a_n=2$.

当 $b\ne 2$ 时, $\frac{n}{a_n}+\frac{1}{2-b}=\frac{2}{b}(\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{1}{2-b})$, 所以 $\{\frac{n}{a_n}+\frac{1}{2-b}\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2-b}=\frac{2}{b(2-b)}$,

公比为 $\frac{2}{b}$ 的等比数列, 所以 $\frac{n}{a_n}+\frac{1}{2-b}=\frac{2}{b(2-b)}\cdot(\frac{2}{b})^{n-1}=\frac{2^n}{b^n(2-b)}$,

从而 $a_n=\frac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}$.

综上所述，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}2, & b=2\\ \dfrac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}, & b\neq 2\end{cases}$

（Ⅱ）当$b=2$时，不等式显然成立；

当$b\neq 2$时，要证$a_n\le\dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$，只需证$\dfrac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}\le\dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$，即证

$n\cdot 2^{n+1}\cdot b^n\le(2^{n+1}+b^{n+1})\cdot\dfrac{b^n-2^n}{b-2}$　　(*)

因为$(2^{n+1}+b^{n+1})\cdot\dfrac{b^n-2^n}{b-2}=(2^{n+1}+b^{n+1})(b^{n-1}+2b^{n-2}+2^2b^{n-3}+\cdots+2^{n-1})$

$=(2^{n+1}b^{n-1}+2^{n+2}b^{n-2}+\cdots+2^{2n})+(b^{2n}+2b^{2n-1}+\cdots+2^{n-1}b^{n+1})$

$=2^{n+1}b^n[(\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{b^2}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{b^n})+(\dfrac{b^n}{2^{n+1}}+\dfrac{b^{n-1}}{2^n}+\cdots+\dfrac{b}{2^2})]$

$=2^{n+1}b^n[(\dfrac{1}{b}+\dfrac{b}{2^2})+(\dfrac{2}{b^2}+\dfrac{b^2}{2^3})+\cdots+(\dfrac{2^{n-1}}{b^n}+\dfrac{b^n}{2^{n+1}})]$

$\ge 2^{n+1}b^n(2\sqrt{\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{b}{2^2}}+2\sqrt{\dfrac{2}{b^2}\cdot\dfrac{b^2}{2^3}}+\cdots+2\sqrt{\dfrac{2^{n-1}}{b^n}\cdot\dfrac{b^n}{2^{n+1}}})=2^{n+1}b^n(1+1+\cdots+1)=n2^{n+1}b^n$

所以不等式（*）成立，从而原不等式成立；

综上所述，当$b>0$时，对于一切正整数n，$a_n\le\dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$.

解析二：

(Ⅰ)解法一：$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{ba_{n-1}}{a_{n-1}+2(n-1)}$，得$\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{a_{n-1}+2(n-1)}{ba_{n-1}}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{b}\cdot\dfrac{n-1}{a_{n-1}}$，

设$\dfrac{n}{a_n}=b_n$，则$b_n=\dfrac{2}{b}\cdot b_{n-1}+\dfrac{1}{b}\ (n\ge 2)$，

（ⅰ）当$b=2$时，$\{b_n\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，$\dfrac{1}{2}$为公差的等差数列，

即$b_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n$，$\therefore a_n=2$

（ⅱ）当$b\neq 2$时，设$b_n+\lambda=\dfrac{2}{b}\cdot(b_{n-1}+\lambda)$，则$b_n=\dfrac{2}{b}\cdot b_{n-1}+\lambda(\dfrac{2}{b}-1)$，

令$\lambda(\dfrac{2}{b}-1)=\dfrac{1}{b}$，得$\lambda=\dfrac{1}{2-b}$，$\therefore b_n+\dfrac{1}{2-b}=\dfrac{2}{b}\cdot(b_{n-1}+\dfrac{1}{2-b})\ (n\ge 2)$，

知$b_n+\dfrac{1}{2-b}$是等比数列，$\therefore b_n+\dfrac{1}{2-b}=(b_1+\dfrac{1}{2-b})\cdot(\dfrac{2}{b})^{n-1}$，又$b_1=\dfrac{1}{b}$，

$\therefore b_n=\dfrac{1}{2-b}\cdot(\dfrac{2}{b})^n-\dfrac{1}{2-b}=\dfrac{1}{2-b}\cdot\dfrac{2^n-b^n}{b^n}$，$\therefore a_n=\dfrac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}$.

解法二：（ⅰ）当$b=2$时，$\{b_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

即$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$，$\therefore a_n=2$

（ⅱ）当$b\neq 2$时，$a_1=b$，$a_2=\frac{2b^2}{b+2}=\frac{2b^2(b-2)}{b^2-2^2}$，$a_2=\frac{3b^3}{b^2+2b+4}=\frac{3b^3(b-2)}{b^3-2^3}$，

猜想$a_n=\frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}$，下面用数学归纳法证明：

①当$n=1$时，猜想显然成立；

②假设当$n=k$时，$a_k=\frac{kb^k(b-2)}{b^k-2^k}$，则

$$a_{k+1}=\frac{(k+1)b\cdot a_k}{a_k+2(n-1)}=\frac{(k+1)b\cdot kb^k(b-2)}{kb^k(b-2)+2k\cdot(b^k-2^k)}=\frac{(k+1)b^{k+1}(b-2)}{b^{k+1}-2^{k+1}},$$

所以当$n=k+1$时，猜想成立，

由①②知，$\forall n\in N^*$，$a_n=\frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}$.

(Ⅱ)（ⅰ）当$b=2$时，$a_n=2=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}+1$，故$b=2$时，命题成立；

（ⅱ）当$b\neq 2$时，$b^{2n}+2^{2n}\geq 2\sqrt{b^{2n}\cdot 2^{2n}}=2^{n+1}b^n$，

$b^{2n-1}\cdot 2+b\cdot 2^{2n-1}\geq 2\sqrt{b^{2n}\cdot 2^{2n}}=2^{n+1}b^n$，

$\cdots\cdots, b^{n+1}\cdot 2^{n-1}+b^{n-1}\cdot 2^{n+1}\geq 2\sqrt{b^{2n}\cdot 2^{2n}}=2^{n+1}b^n$，以上n个式子相加得

$b^{2n}+b^{2n-1}\cdot 2+\cdots+b^{n+1}\cdot 2^{n-1}+b^{n-1}\cdot 2^{n+1}+\cdots+b\cdot 2^{2n-1}+2^{2n}\geq n\cdot 2^{n+1}b^n$，

$$a_n=\frac{n\cdot 2^{n+1}b^n(b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}\leq\frac{[(b^{2n}+b^{2n-1}\cdot 2+\cdots+b\cdot 2^{2n-1}+2^{2n})-b^n\cdot 2^n](b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$=\frac{(b^{2n}+b^{2n-1}\cdot 2+\cdots+b\cdot 2^{2n-1}+2^{2n})(b-2)-b^n\cdot 2^n(b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$=\frac{(b^{2n+1}-2^{2n+1})-b^{n+1}\cdot 2^n+b^n\cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$=\frac{(b^{2n+1}-b^{n+1}\cdot 2^n)+(b^n\cdot 2^{n+1}-2^{2n+1})}{2^{n+1}(b^n-2^n)}=\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1.$$ 故当$b\neq 2$时，命题成立；

综上（ⅰ）（ⅱ）知命题成立.

【2011·广东理，21】21．（本小题满分14分）在平面直角坐标系xOy上，给定抛物线$L:y=\frac{1}{4}x^2$，实数p,q满足$p^2-4q\geq 0$，x_1,x_2是方程$x^2-px+q=0$的两根，记$\varphi(p,q)=\max\{|x_1|,|x_2|\}$.

(1) 过点 $A(p_0,\frac{1}{4}p_0^2)(p_0\neq 0)$ 作L的切线交 y 轴于点B．证明：对线段AB上的任一点 $Q(p,q)$，有 $\varphi(p,q)=\frac{|p_0|}{2}$；

(2) 设 $M(a,b)$ 是定点，其中 a,b 满足 $a^2-4b>0,a\neq 0$．过 $M(a,b)$ 作 L 的两条切线 l_1,l_2，切点分别为 $E(p_1,\frac{1}{4}p_1^2),E'(p_2,\frac{1}{4}p_2^2)$，$l_1,l_2$ 与 y 轴分别交于 F,F'．线段 EF 上异于两端点的点集记为 X，证明：$M(a,b)\in X\Leftrightarrow |p_1|>|p_2|\Leftrightarrow \varphi(a,b)=\frac{|p_1|}{2}$；

(3) 设 $D=\{(x,y)\,|\,y\leq x-1,y\geq\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{5}{4}\}$，当点 (p,q) 取遍 D 时，求 $\varphi(p,q)$ 的最小值（记为 $\varphi_{\min}$）和最大值（记为 $\varphi_{\max}$）．

【解析】．

（Ⅰ）因为 $y'=\frac{1}{2}x$，所以 $y'|_{x=p_0}=\frac{1}{2}p_0$，过点 A 的切线方程为 $y-\frac{1}{4}p_0^2=\frac{1}{2}p_0(x-p_0)$

即 $y=\frac{p_0}{2}x-\frac{p_0^2}{4}$，从而 $B(0,-\frac{p_0^2}{4})$，又 $Q(p,q)$ 在直线 AB 上，故 $q=\frac{p_0p}{2}-\frac{p_0^2}{4}$，其中 $0\leq|p|\leq|p_0|$

所以方程为 $x^2-px+\frac{p_0p}{2}-\frac{p_0^2}{4}=0$，解得 $x_1=\frac{p_0}{2}$，$x_2=p-\frac{p_0}{2}$

由于 $0\leq|p|\leq|p_0|$，且 p,p_0 同号，所以 $|x_2|=|p-\frac{p_0}{2}|=|\frac{p_0}{2}|=|x_1|$，所以 $\varphi(p,q)=\frac{|p_0|}{2}$.

（Ⅱ）过点 $M(a,b)$ 且切点为 $E(p_1,\frac{1}{4}p_1^2)$ 的 L 的切线 l_1 方程为 EF：$y=\frac{p_1}{2}x-\frac{p_1^2}{4}$

因为 $M(a,b)\in l_1$，所以 $b=\frac{p_1}{2}a-\frac{p_1^2}{4}$ 且 $0<|a|<|p_1|$，因为 $E'(p_2,\frac{1}{4}p_2^2)$，

所以 $k_{ME'}=\dfrac{\frac{1}{4}p_2^2-(\frac{p_1}{2}a-\frac{p_1^2}{4})}{p_2-a}=\frac{p_2}{2}$，即 $\frac{1}{4}p_2^2-(\frac{p_1}{2}a-\frac{p_1^2}{4})=\frac{p_2}{2}(p_2-a)$

即 $\frac{p_1^2}{4}-\frac{p_2^2}{4}=\frac{p_1}{2}a-\frac{p_2}{2}a$，所以 $\frac{p_1^2}{4}-\frac{p_2^2}{4}=(\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2}-a)(\frac{p_1}{2}-\frac{p_2}{2})=0$，所以 $p_2=2a-p_1$

因为 $0<|a|<|p_1|$，且 a,p_1 同号，所以 $|p_2|=|2a-p_1|<|2p_1-p_1|=|p_1|$

反之也成立，所以 $M(a,b)\in X\Leftrightarrow |p_1|>|p_2|$，

由（Ⅰ）可知，$M(a,b)\in X\Rightarrow \varphi(a,b)=\frac{|p_1|}{2}$，反之，逆推也成立，所以 $M(a,b)\in X$

$\Leftrightarrow \varphi(a,b)=\dfrac{|p_1|}{2}$,

综上, $M(a,b)\in X \Leftrightarrow |p_1|>|p_2| \Leftrightarrow \varphi(a,b)=\dfrac{|p_1|}{2}$.

（III）此题即求当点(p,q)取遍D时, 方程$x^2-px+q=0$的绝对值较大的根的最大值与最小值,

解方程得$x=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$, 因为$D=\{(x,y)\,|\,y\le x-1, y\ge \dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{5}{4}\}$,

令$x-1=\dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{5}{4}$, 解得$x=0$或$x=2$，所以$0\le p\le 2$，$\varphi(p,q)=\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$，

因为$(p,q)\in D$，所以$\dfrac{1}{4}(p+1)^2-\dfrac{5}{4}\le q\le p-1$，于是$(p+1)^2-5\le 4q\le 4p-4$，

所以$(p-2)^2\le p^2-4q\le -2p+4$，所以$\varphi(p,q)=\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\in[1,\dfrac{p+\sqrt{-2p+4}}{2}]$，

设$f(p)=\dfrac{p+\sqrt{-2p+4}}{2}$（$0\le p\le 2$），令$t=\sqrt{-2p+4}$，则$p=\dfrac{4-t^2}{2}(0\le t\le 2)$，

则$f(p)=g(t)=-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t+1=-\dfrac{1}{4}(t-1)^2+\dfrac{5}{4}$，所以$f(p)\in[1,\dfrac{5}{4}]$.

综上，当$p=2,q=1$或$p=0,q=-1$时，$\varphi_{\min}=1$；当$p=\dfrac{3}{2},q=\dfrac{5}{16}$时，$\varphi_{\max}=\dfrac{5}{4}$.

(III) 联立$y=x-1$，$y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{5}{4}$得交点$(0,-1),(2,1)$，可知$0\le p\le 2$，

过点(p,q)作抛物线L的切线，设切点为$(x_0,\dfrac{1}{4}{x_0}^2)$，则$\dfrac{\frac{1}{4}{x_0}^2-q}{x_0-p}=\dfrac{1}{2}x_0$，

得${x_0}^2-2px_0+4q=0$，解得$x_0=p+\sqrt{p^2-4q}$，

又$q\ge\dfrac{1}{4}(p+1)^2-\dfrac{5}{4}$，即$p^2-4q\le 4-2p$，

$\therefore x_0\le p+\sqrt{4-2p}$，设$\sqrt{4-2p}=t$，$\therefore x_0\le -\dfrac{1}{2}t^2+t+2=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+\dfrac{5}{2}$，

$\because \varphi_{\max}=|\dfrac{x_0}{2}|_{\max}$，又$x_0\le\dfrac{5}{2}$，$\therefore \varphi_{\max}=\dfrac{5}{4}$；

$\because q\le p-1$，$\therefore x_0\ge p+\sqrt{p^2-4p+4}=p+|p-2|=2$，

$\therefore \varphi_{\min}=|\dfrac{x_0}{2}|_{\min}=1$.

解析二：

(1) $k_{AB}=y'|_{x=p_0}=(\frac{1}{2}x)|_{x=p_0}=\frac{1}{2}p_0$，

直线AB的方程为 $y-\frac{1}{4}p_0{}^2=\frac{1}{2}p_0(x-p_0)$，即 $y=\frac{1}{2}p_0x-\frac{1}{4}p_0{}^2$，

$\therefore q=\frac{1}{2}p_0p-\frac{1}{4}p_0{}^2$，方程 $x^2-px+q=0$ 的判别式 $\Delta=p^2-4q=(p-p_0)^2$，

两根 $x_{1,2}=\frac{p\pm|p_0-p|}{2}=\frac{p_0}{2}$ 或 $p-\frac{p_0}{2}$，

$\because p\cdot p_0\geq 0$，$\therefore|p-\frac{p_0}{2}|=||p|-|\frac{p_0}{2}||$，又 $0\leq|p|\leq|p_0|$，

$\therefore -|\frac{p_0}{2}|\leq|p|-|\frac{p_0}{2}|\leq|\frac{p_0}{2}|$，得 $\therefore|p-\frac{p_0}{2}|=||p|-|\frac{p_0}{2}||\leq|\frac{p_0}{2}|$，

$\therefore \varphi(p,q)=|\frac{p_0}{2}|$.

(2) 由 $a^2-4b>0$ 知点 $M(a,b)$ 在抛物线L的下方，

①当 $a>0,b\geq 0$ 时，作图可知，若 $M(a,b)\in X$，则 $p_1>p_2\geq 0$，得 $|p_1|>|p_2|$；

若 $|p_1|>|p_2|$，显然有点 $M(a,b)\in X$；　$\therefore M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|$.

②当 $a>0,b<0$ 时，点 $M(a,b)$ 在第二象限，

作图可知，若 $M(a,b)\in X$，则 $p_1>0>p_2$，且 $|p_1|>|p_2|$；

若 $|p_1|>|p_2|$，显然有点 $M(a,b)\in X$；

$\therefore M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|$.

根据曲线的对称性可知，当 $a<0$ 时，$M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|$，

综上所述，$M(a,b)\in X\Leftrightarrow|p_1|>|p_2|$（*）；

由（1）知点M在直线EF上，方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根 $x_{1,2}=\frac{p_1}{2}$ 或 $a-\frac{p_1}{2}$，

同理点M在直线 $E'F'$ 上，方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根 $x_{1,2}=\frac{p_2}{2}$ 或 $a-\frac{p_2}{2}$，

若 $\varphi(a,b)=|\frac{p_1}{2}|$，则 $|\frac{p_1}{2}|$ 不比 $|a-\frac{p_1}{2}|$、$|\frac{p_2}{2}|$、$|a-\frac{p_2}{2}|$ 小，

$\therefore|p_1|>|p_2|$，又 $|p_1|>|p_2|\Rightarrow M(a,b)\in X$，

$\therefore \varphi(a,b)=|\frac{p_1}{2}|\Rightarrow M(a,b)\in X$；又由（1）知，$M(a,b)\in X\Rightarrow\varphi(a,b)=|\frac{p_1}{2}|$；

$\therefore \varphi(a,b)=|\dfrac{p_1}{2}| \Leftrightarrow M(a,b)\in X$，综合（*）式，得证.

(3) 联立 $y=x-1$， $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{5}{4}$ 得交点 $(0,-1),(2,1)$，可知 $0\le p\le 2$，

过点 (p,q) 作抛物线L的切线，设切点为 $(x_0,\dfrac{1}{4}{x_0}^2)$，则 $\dfrac{\frac{1}{4}{x_0}^2-q}{x_0-p}=\dfrac{1}{2}x_0$，

得 ${x_0}^2-2px_0+4q=0$，解得 $x_0=p+\sqrt{p^2-4q}$，

又 $q\ge\dfrac{1}{4}(p+1)^2-\dfrac{5}{4}$，即 $p^2-4q\le 4-2p$，

$\therefore x_0\le p+\sqrt{4-2p}$，设 $\sqrt{4-2p}=t$，$\therefore x_0\le -\dfrac{1}{2}t^2+t+2=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+\dfrac{5}{2}$，

$\because \varphi_{\max}=|\dfrac{x_0}{2}|_{\max}$，又 $x_0\le\dfrac{5}{2}$，$\therefore \varphi_{\max}=\dfrac{5}{4}$；

$\because q\le p-1$，$\therefore x_0\ge p+\sqrt{p^2-4p+4}=p+|p-2|=2$，

$\therefore \varphi_{\min}=|\dfrac{x_0}{2}|_{\min}=1$.