

## 2015年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

### 一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）设复数 $z$ 满足 $\frac{1+z}{1-z}=i$ ，则 $|z|=(\quad)$
- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 2
2. （5分） $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ = (\quad)$
- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{2}$
3. （5分）设命题 $p: \exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ ，则 $\neg p$ 为 $(\quad)$
- A.  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$                       B.  $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$
- C.  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$                       D.  $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$
4. （5分）投篮测试中，每人投3次，至少投中2次才能通过测试. 已知某同学每次投篮投中的概率为0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为 $(\quad)$
- A. 0.648                      B. 0.432                      C. 0.36                      D. 0.312
5. （5分）已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点， $F_1, F_2$ 是 $C$ 的左、右两个焦点，若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$ ，则 $y_0$ 的取值范围是 $(\quad)$
- A.  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$                       B.  $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6})$
- C.  $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$                       D.  $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$
6. （5分）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺. 问：积及为米几何？”其意思为：“在屋内墙角处堆放米（如图，米堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧长为8尺，米堆的高为5尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已知1斛米的体积约为1.62立方尺，圆周率约为3，估算出堆放的米约有 $(\quad)$



A. 14斛

B. 22斛

C. 36斛

D. 66斛

7. (5分) 设D为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点,  $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$ , 则 ( )

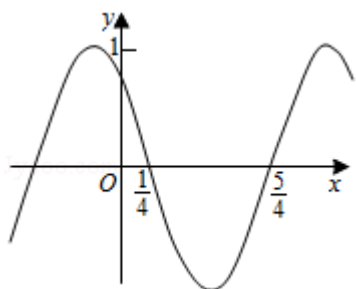
A.  $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

B.  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C.  $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

D.  $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

8. (5分) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ( )



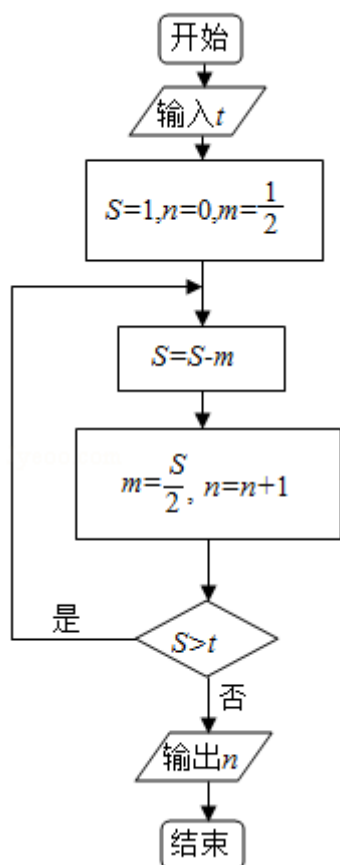
A.  $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

B.  $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

C.  $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

D.  $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

9. (5分) 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$ , 则输出的 $n=$  ( )

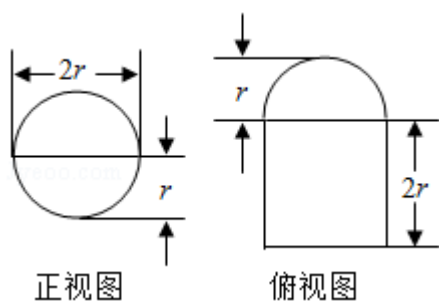


- A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8

10. (5分)  $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中,  $x^5y^2$ 的系数为 ( )

- A. 10                      B. 20                      C. 30                      D. 60

11. (5分) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 $r$ )组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$ , 则 $r=$  ( )



- A. 1                      B. 2                      C. 4                      D. 8

12. (5分) 设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax+a$ , 其中 $a < 1$ , 若存在唯一的整数 $x_0$ 使得 $f(x_0) < 0$ , 则 $a$ 的取值范围是 ( )

- A.  $[-\frac{3}{2e}, 1)$       B.  $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$       C.  $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$       D.  $[\frac{3}{2e}, 1)$

二、填空题（本大题共有4小题，每小题5分）

13. （5分）若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. （5分）一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点. 且圆心在 $x$ 轴的正半轴上.

则该圆标准方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. （5分）若 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \end{cases}$ . 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. （5分）在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$ .  $BC = 2$ , 则 $AB$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题：

17. （12分） $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，已知 $a_n > 0$ ,  $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$

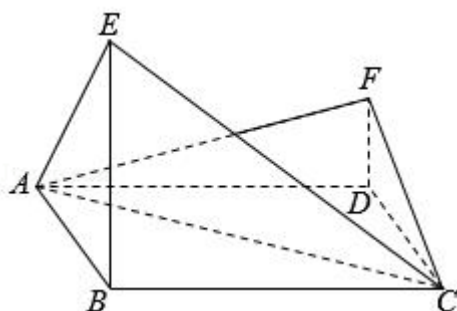
(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式：

(II) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和.

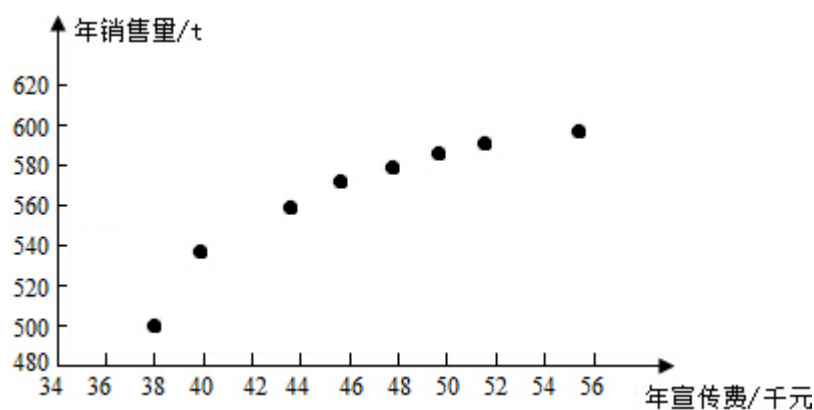
18. （12分）如图，四边形 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $E, F$ 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点， $BE \perp$ 平面 $ABCD$ ,  $DF \perp$ 平面 $ABCD$ ,  $BE = 2DF$ ,  $AE \perp EC$ .

(I) 证明：平面 $AEC \perp$ 平面 $AFC$

(II) 求直线 $AE$ 与直线 $CF$ 所成角的余弦值.



19. (12分) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 $x$  (单位：千元) 对年销售量 $y$  (单位：t) 和年利润 $z$  (单位：千元) 的影响，对近8年的年宣传费 $x_i$ 和年销售量 $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) 数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中  $w_i = \sqrt{x_i}$ ,  $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

- (I) 根据散点图判断,  $y=a+bx$  与  $y=c+d\sqrt{x}$  哪一个适宜作为年销售量  $y$  关于年宣传费  $x$  的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)
- (II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立  $y$  关于  $x$  的回归方程;
- (III) 已知这种产品的年利润  $z$  与  $x$ 、 $y$  的关系为  $z=0.2y-x$ . 根据 (II) 的结果回答下列问题:
- (i) 年宣传费  $x=49$  时, 年销售量及年利润的预报值是多少?
- (ii) 年宣传费  $x$  为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归线  $v=\alpha+\beta u$  的斜率和截距的最小二乘估计分别为:  $\hat{\beta} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

20. (12分) 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C: y = \frac{x^2}{4}$  与直线  $l: y=kx+a$  ( $a>0$ ) 交于  $M, N$  两点.

- (I) 当  $k=0$  时, 分别求  $C$  在点  $M$  和  $N$  处的切线方程.
- (II)  $y$  轴上是否存在点  $P$ , 使得当  $k$  变动时, 总有  $\angle OPM = \angle OPN$ ? (说明理由)

21. (12分) 已知函数  $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$ ,  $g(x) = -\ln x$

- (i) 当  $a$  为何值时,  $x$  轴为曲线  $y=f(x)$  的切线;
- (ii) 用  $\min\{m, n\}$  表示  $m, n$  中的最小值, 设函数  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

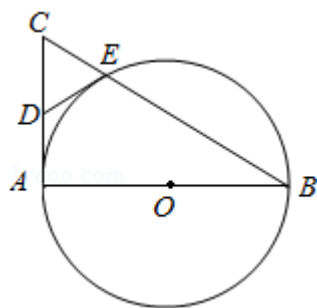
( $x > 0$ ), 讨论  $h(x)$  零点的个数.

#### 选修4—1:几何证明选讲

22. (10分) 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $AC$  是  $\odot O$  的切线,  $BC$  交  $\odot O$  于点  $E$ .

(I) 若  $D$  为  $AC$  的中点, 证明:  $DE$  是  $\odot O$  的切线;

(II) 若  $OA = \sqrt{3}CE$ , 求  $\angle ACB$  的大小.



#### 选修4—4: 坐标系与参数方程

23. (10分) 在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $C_1: x = -2$ , 圆  $C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求  $C_1, C_2$  的极坐标方程;

(II) 若直线  $C_3$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \in \mathbb{R}$ ), 设  $C_2$  与  $C_3$  的交点为  $M, N$ , 求  $\triangle C_2MN$  的面积.

**选修4—5：不等式选讲**

24. （10分）已知函数 $f(x) = |x+1| - 2|x-a|$ ， $a > 0$ .

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x) > 1$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 的图象与 $x$ 轴围成的三角形面积大于6，求 $a$ 的取值范围.