2013年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题．每小题5分，共60分．在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5分）已知集合M={x|（x﹣1）^{2}＜4，x∈R}，N={﹣1，0，1，2，3}，则M∩N=（　　）

A．{0，1，2}　　B．{﹣1，0，1，2}　C．{﹣1，0，2，3}　　D．{0，1，2，3}

【考点】1E：交集及其运算；73：一元二次不等式及其应用．

【专题】11：计算题．

【分析】求出集合M中不等式的解集，确定出M，找出M与N的公共元素，即可确定出两集合的交集．

【解答】解：由（x﹣1）^{2}＜4，解得：﹣1＜x＜3，即M={x|﹣1＜x＜3}，

∵N={﹣1，0，1，2，3}，

∴M∩N={0，1，2}．

故选：A．

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．（5分）设复数z满足（1﹣i）z=2i，则z=（　　）

A．﹣1+i　　B．﹣1﹣i　　C．1+i　　D．1﹣i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题．

【分析】根据所给的等式两边同时除以1﹣i，得到z的表示式，进行复数的除法运算，分子和分母同乘以分母的共轭复数，整理成最简形式，得到结果．

【解答】解：∵复数z满足z（1﹣i）=2i，

∴$z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1+i$

故选：A．

【点评】本题考查代数形式的除法运算，是一个基础题，这种题目若出现一定是一个送分题目，注意数字的运算．

3．（5分）等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，则$a_1=$（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{9}$　　D．$-\frac{1}{9}$

【考点】89：等比数列的前n项和．

【专题】54：等差数列与等比数列．

【分析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，利用已知和等比数列的通项公式即可得到$\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=a_1q+10a_1\\a_1q^4=9\end{cases}$，解出即可．

【解答】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

$\because S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，

$\therefore\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=a_1q+10a_1\\a_1q^4=9\end{cases}$，解得$\begin{cases}q^2=9\\a_1=\frac{1}{9}\end{cases}$．

$\therefore a_1=\frac{1}{9}$．

故选：C．

【点评】熟练掌握等比数列的通项公式是解题的关键．

4．（5分）已知m，n为异面直线，m⊥平面α，n⊥平面β．直线l满足l⊥m，l⊥n，l⊄α，l⊄β，则（　　）

A．α∥β且l∥α　　B．α⊥β且l⊥β

C．α与β相交，且交线垂直于l　　D．α与β相交，且交线平行于l

【考点】LJ：平面的基本性质及推论；LQ：平面与平面之间的位置关系．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】由题目给出的已知条件，结合线面平行，线面垂直的判定与性质，可以直接得到正确的结论．

【解答】解：由m⊥平面α，直线l满足l⊥m，且l⊄α，所以l∥α，

又n⊥平面β，l⊥n，l⊄β，所以l∥β．

由直线m，n为异面直线，且m⊥平面α，n⊥平面β，则α与β相交，否则，若α∥β则推出m∥n，

与m，n异面矛盾．

故α与β相交，且交线平行于l．

故选：D．

【点评】本题考查了平面与平面之间的位置关系，考查了平面的基本性质及推论，考查了线面平行、线面垂直的判定与性质，考查了学生的空间想象和思维能力，是中档题．

5．（5分）已知（1+ax）（1+x）^{5}的展开式中x^2的系数为5，则a=（　　）

A．﹣4　　B．﹣3　　C．﹣2　　D．﹣1

【考点】DA：二项式定理．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】由题意利用二项展开式的通项公式求得展开式中x^2的系数为$C_5^2+a\bullet C_5^1=5$，由此解得a的值．

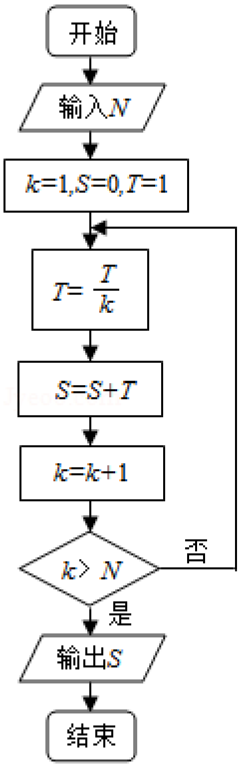
【解答】解：已知（1+ax）（1+x）^{5}=（1+ax）（$1+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5$）

展开式中x^2的系数为$C_5^2+a\bullet C_5^1=5$，解得a=﹣1，

故选：D．

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项式展开式的通项公式，求展开式中某项的系数，属于中档题．

6．（5分）执行右面的程序框图，如果输入的N=10，那么输出的S=（　　）



A．$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}$　　B．$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$

C．$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{11}$　　D．$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{11!}$

【考点】EF：程序框图．

【专题】27：图表型．

【分析】从赋值框给出的两个变量的值开始，逐渐分析写出程序运行的每一步，便可得到程序框图表示的算法的功能．

【解答】解：框图首先给累加变量S和循环变量i赋值，

S=0+1=1，k=1+1=2；

判断k＞10不成立，执行S=1+$\frac{1}{2}$，k=2+1=3；

判断k＞10不成立，执行S=1+$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}$，k=3+1=4；

判断k＞10不成立，执行S=1+$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}$，k=4+1=5；

…

判断i＞10不成立，执行S=$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$，k=10+1=11；

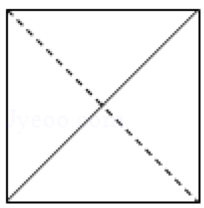
判断i＞10成立，输出S=$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$.

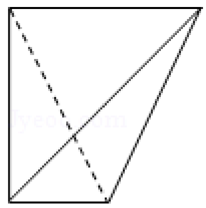
算法结束.

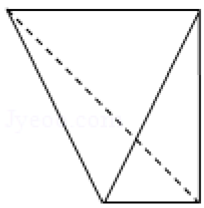
故选：B.

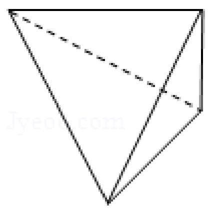
【点评】本题考查解决程序框图中的循环结构时，常采用写出前几次循环的结果，找规律.

7.（5分）一个四面体的顶点在空间直角坐标系O﹣xyz中的坐标分别是（1，0，1），（1，1，0），（0，1，1），（0，0，0），画该四面体三视图中的正视图时，以zOx平面为投影面，则得到正视图可以为（　　）

A. 

B. 

C. 

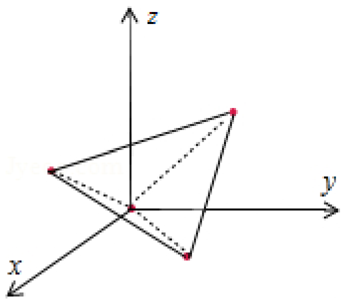
D. 

【考点】L7：简单空间图形的三视图.

【专题】11：计算题；13：作图题.

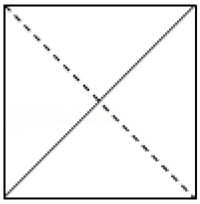
【分析】由题意画出几何体的直观图，然后判断以zOx平面为投影面，则得到正视图即可.

【解答】解：因为一个四面体的顶点在空间直角坐标系O﹣xyz中的坐标分别是（1，0，1），（1，1，0），（0，1，1），（0，0，0），几何体的直观图如图，是正方体的顶点为顶点的一个正四面体，所以以zOx平面为投影面



，则得到正视图为：

故选：A.



【点评】本题考查几何体的三视图的判断，根据题意画出几何体的直观图是解题的关键，考查空间想象能力.

8．（5分）设$a=\log_3 6$，$b=\log_5 10$，$c=\log_7 14$，则（　　）

A．c＞b＞a　　B．b＞c＞a　　C．a＞c＞b　　D．a＞b＞c

【考点】4M：对数值大小的比较.

【专题】11：计算题.

【分析】利用$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$（x、y＞0），化简a，b，c然后比较$\log_3 2$，$\log_5 2$，$\log_7 2$大小即可.

【解答】解：因为$a=\log_3 6=1+\log_3 2$，$b=\log_5 10=1+\log_5 2$，$c=\log_7 14=1+\log_7 2$，

因为$y=\log_2 x$是增函数，所以$\log_2 7>\log_2 5>\log_2 3$，

$\because \log_2 7=\frac{1}{\log_7 2}$，$\log_2 5=\frac{1}{\log_5 2}$，$\log_2 3=\frac{1}{\log_3 2}$

所以$\log_3 2>\log_5 2>\log_7 2$，

所以a＞b＞c，

故选：D.

【点评】本题主要考查不等式与不等关系，对数函数的单调性的应用，不等式的基本性质的应用，属于基础题.

9．（5分）已知a＞0，实数x，y满足：$\begin{cases}x\geqslant 1\\x+y\leqslant 3\\y\geqslant a(x-3)\end{cases}$，若z=2x+y的最小值为1，则a=（　　）

A．2　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】作出不等式对应的平面区域，利用线性规划的知识，通过平移即先确定z的最优解，然后确定a的值即可．

【解答】解：作出不等式对应的平面区域，（阴影部分）

由z=2x+y，得y=﹣2x+z，

平移直线y=﹣2x+z，由图象可知当直线y=﹣2x+z经过点C时，直线y=﹣2x+z的截距最小，此时z最小．

即2x+y=1，

由$\begin{cases}x=1\\2x+y=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$，

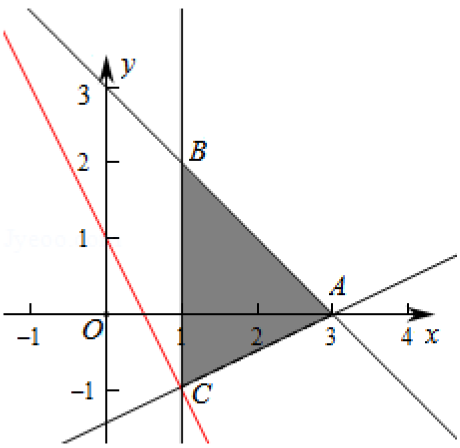
即C（1，﹣1），

∵点C也在直线y=a（x﹣3）上，

∴﹣1=﹣2a，

解得a=$\frac{1}{2}$．

故选：C．



【点评】本题主要考查线性规划的应用，利用数形结合是解决线性规划题目的

常用方法.

10. （5分）已知函数f（x）$=x^3+ax^2+bx+c$，下列结论中错误的是（　　）

A. $\exists x_0\in R$，f（x_0）=0

B. 函数y=f（x）的图象是中心对称图形

C. 若x_0是f（x）的极小值点，则f（x）在区间（﹣∞，x_0）单调递减

D. 若x_0是f（x）的极值点，则f′（x_0）=0

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6D：利用导数研究函数的极值.

【专题】53：导数的综合应用.

【分析】利用导数的运算法则得出f′（x），分△＞0与△≤0讨论，列出表格，即可得出.

【解答】解：f′（x）$=3x^2+2ax+b$.

（1）当$\triangle=4a^2-12b>0$时，f′（x）=0有两解，不妨设为$x_1<x_2$，列表如下

x	（﹣∞，x_1）	x_1	（x_1，x_2）	x_2	（x_2，+∞）
f′（x）	+	0	﹣	0	+
f（x）	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

由表格可知：

①x_2是函数f（x）的极小值点，但是f（x）在区间（﹣∞，x_2）不具有单调性，故C不正确.

②∵$f(-\frac{2a}{3}-x)+f(x)=(-\frac{2a}{3}-x)^3+a(-\frac{2a}{3}-x)^2+b(-\frac{2a}{3}-x)+c+x^3+ax^2+bx+c=\frac{4}{27}a^3-\frac{2ab}{3}+2c$，

$f(-\frac{a}{3})=(-\frac{a}{3})^3+a(-\frac{a}{3})^2+b(-\frac{a}{3})+c=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$，

∵$f(-\frac{2a}{3}-x)+f(x)=2f(-\frac{a}{3})$，

∴点P$(-\frac{a}{3},\ f(-\frac{a}{3}))$为对称中心，故B正确.

③由表格可知x_1，x_2分别为极值点，则$f'(x_1)=f'(x_2)=0$，故D正确.

④∵x→﹣∞时，f（x）→﹣∞；x→+∞，f（x）→+∞，函数f（x）必然穿过x轴，

即$\exists x_\alpha \in R$，f（x_α）=0，故A正确.

（2）当△≤0时，$f'(x)=3(x+\frac{a}{3})^2\geqslant 0$，故f（x）在R上单调递增，①此时不存在极值点，故D正确，C不正确；

②B同（1）中②正确；

③∵x→﹣∞时，f（x）→﹣∞；x→+∞，f（x）→+∞，函数f（x）必然穿过x轴，即$\exists x_0 \in R$，f（x_0）=0，故A正确.

综上可知：错误的结论是C.

由于该题选择错误的，故选：C.

【点评】熟练掌握导数的运算法则、中心得出的定义、单调性与极值的关系等基础知识与方法，考查了分类讨论的思想方法等基本方法.

11．（5分）设抛物线C：$y^2=2px$（p＞0）的焦点为F，点M在C上，|MF|=5，若以MF为直径的圆过点（0，2），则C的方程为（　　）

A．$y^2=4x$或$y^2=8x$　　B．$y^2=2x$或$y^2=8x$

C．$y^2=4x$或$y^2=16x$　　D．$y^2=2x$或$y^2=16x$

【考点】K7：抛物线的标准方程.

【专题】11：计算题；16：压轴题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】根据抛物线方程算出$|OF|=\frac{p}{2}$，设以MF为直径的圆过点A（0，2），在Rt△AOF中利用勾股定理算出$|AF|=\sqrt{4+\frac{p^2}{4}}$．再由直线AO与以MF为直径的圆相切得到∠OAF=∠AMF，Rt△AMF中利用∠AMF的正弦建立关系式，从而得到关于p的方程，解之得到实数p的值，进而得到抛物线C的方程.

【解答】解：∵抛物线C方程为$y^2=2px$（p＞0），

∴焦点F坐标为（$\frac{p}{2}$，0），可得$|OF|=\frac{p}{2}$，

∵以MF为直径的圆过点（0，2），

∴设A（0，2），可得AF⊥AM，

Rt△AOF中，$|AF|=\sqrt{2^2+(\frac{p}{2})^2}=\sqrt{4+\frac{p^2}{4}}$，

$\therefore \sin\angle OAF=\frac{|OF|}{|AF|}=\frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{4+\frac{p^2}{4}}}$，

∵根据抛物线的定义，得直线AO切以MF为直径的圆于A点，

$\therefore \angle OAF=\angle AMF$，可得Rt△AMF中，$\sin\angle AMF=\frac{|AF|}{|MF|}=\frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{4+\frac{p^2}{4}}}$，

∵$|MF|=5$，$|AF|=\sqrt{4+\frac{p^2}{4}}$

$\therefore \frac{\sqrt{4+\frac{p^2}{4}}}{5}=\frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{4+\frac{p^2}{4}}}$，整理得$4+\frac{p^2}{4}=\frac{5p}{2}$，解之可得p=2或p=8

因此，抛物线C的方程为$y^2=4x$或$y^2=16x$.

故选：C.

方法二：

∵抛物线C方程为$y^2=2px$（$p>0$），∴焦点F（$\frac{p}{2}$，0），

设M（x，y），由抛物线性质$|MF|=x+\frac{p}{2}=5$，可得$x=5-\frac{p}{2}$，

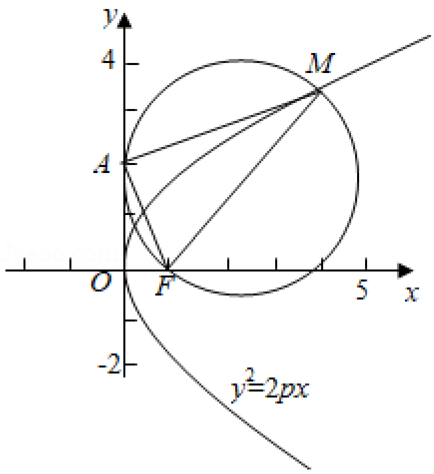
因为圆心是MF的中点，所以根据中点坐标公式可得，圆心横坐标为$\frac{5-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}}{2}=\frac{5}{2}$，

由已知圆半径也为$\frac{5}{2}$，据此可知该圆与y轴相切于点（0，2），故圆心纵坐标为2，则M点纵坐标为4，

即M（$5-\frac{p}{2}$，4），代入抛物线方程得$p^2-10p+16=0$，所以p=2或p=8.

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$或$y^2=16x$.

故选：C.



【点评】本题给出抛物线一条长度为5的焦半径MF，以MF为直径的圆交抛物线于点（0，2），求抛物线的方程，着重考查了抛物线的定义与简单几何性质、圆的性质和解直角三角形等知识，属于中档题．

12．（5分）已知点A（﹣1，0），B（1，0），C（0，1），直线y=ax+b（a＞0）将△ABC分割为面积相等的两部分，则b的取值范围是（　　）

A．（0，1）　　B．$(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2})$　　C．$(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{3}]$　　D．$[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2})$

【考点】%H：三角形的面积公式；I1：确定直线位置的几何要素；IT：点到直线的距离公式．

【专题】31：数形结合；35：转化思想；44：数形结合法；5B：直线与圆．

【分析】解法一：先求得直线y=ax+b（a＞0）与x轴的交点为M（$-\frac{b}{a}$，0），由$-\frac{b}{a}\leq 0$可得点M在射线OA上．求出直线和BC的交点N的坐标，①若点M和点A重合，求得$b=\frac{1}{3}$；②若点M在点O和点A之间，求得$\frac{1}{3}<b<\frac{1}{2}$；③若点M在点A的左侧，求得$\frac{1}{3}>b>1-\frac{\sqrt{2}}{2}$．再把以上得到的三个b的范围取并集，可得结果．

解法二：考查临界位置时对应的b值，综合可得结论．

【解答】解：解法一：由题意可得，三角形ABC的面积为$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC=1$，

由于直线y=ax+b（a＞0）与x轴的交点为M（$-\frac{b}{a}$，0），

由直线y=ax+b（a＞0）将△ABC分割为面积相等的两部分，可得b＞0，

故 $-\frac{b}{a}\leq 0$，故点M在射线OA上.

设直线y=ax+b和BC的交点为N，则由$\begin{cases}y=ax+b\\x+y=1\end{cases}$可得点N的坐标为（$\frac{1-b}{a+1}$，$\frac{a+b}{a+1}$）.

①若点M和点A重合，则点N为线段BC的中点，故N（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），

把A、N两点的坐标代入直线y=ax+b，求得$a=b=\frac{1}{3}$.

②若点M在点O和点A之间，此时$b>\frac{1}{3}$，点N在点B和点C之间，

由题意可得三角形NMB的面积等于$\frac{1}{2}$，

即$\frac{1}{2}\cdot MB\cdot y_N=\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}\times(1+\frac{b}{a})\cdot\frac{a+b}{a+1}=\frac{1}{2}$，可得$a=\frac{b^2}{1-2b}>0$，求得 $b<\frac{1}{2}$，

故有$\frac{1}{3}<b<\frac{1}{2}$.

③若点M在点A的左侧，则$b<\frac{1}{3}$，由点M的横坐标 $-\frac{b}{a}<-1$，求得b＞a.

设直线y=ax+b和AC的交点为P，则由

$\begin{cases}y=ax+b\\y=x+1\end{cases}$求得点P的坐标为（$\frac{1-b}{a-1}$，$\frac{a-b}{a-1}$），

此时，由题意可得，三角形CPN的面积等于$\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}\cdot(1-b)\cdot|x_N-x_P|=\frac{1}{2}$，

即$\frac{1}{2}(1-b)\cdot\left|\frac{1-b}{a+1}-\frac{1-b}{a-1}\right|=\frac{1}{2}$，化简可得$2(1-b)^2=|a^2-1|$.

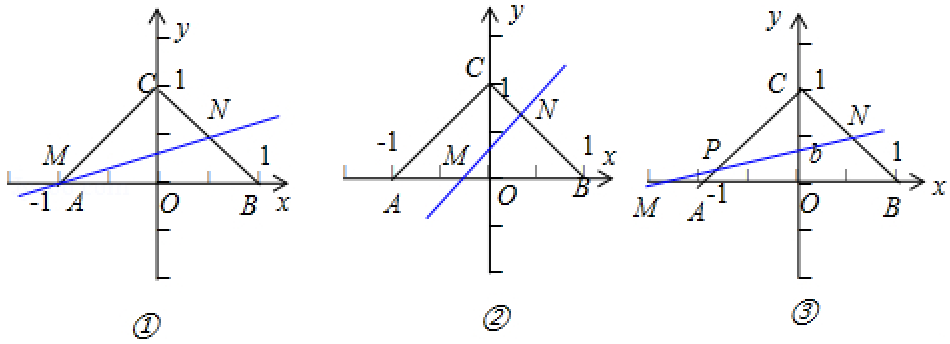
由于此时 b＞a＞0，0＜a＜1，$\therefore 2(1-b)^2=|a^2-1|=1-a^2$.

两边开方可得 $\sqrt{2}(1-b)=\sqrt{1-a^2}<1$，$\therefore 1-b<\frac{1}{\sqrt{2}}$，化简可得 $b>1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故有$1-\frac{\sqrt{2}}{2}<b<\frac{1}{3}$.

再把以上得到的三个b的范围取并集，可得b的取值范围应是 $(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$，

故选：B.



解法二：当a=0时，直线y=ax+b（a＞0）平行于AB边，

由题意根据三角形相似且面积比等于相似比的平方可得 $\left(\frac{1-b}{1}\right)^2=\frac{1}{2}$，b=1 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$

，趋于最小.

由于a＞0，∴b＞1 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当a逐渐变大时，b也逐渐变大，

当b=$\frac{1}{2}$时，直线经过点（0，$\frac{1}{2}$），再根据直线平分△ABC的面积，故a不存在，

故b＜$\frac{1}{2}$.

综上可得，1 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$＜b＜$\frac{1}{2}$，

故选：B.

【点评】本题主要考查确定直线的要素，点到直线的距离公式以及三角形的面积公式的应用，还考察运算能力以及综合分析能力，分类讨论思想，属于难题.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分.

13．（5分）已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BD}$=__2__.

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】根据两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，可得要求的式子为（$\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$）•（$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$），再根据两个向量垂直的性质，运算求得结果.

【解答】解：∵已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$=0，

故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=4+0-0-\frac{1}{2}\times4=2$，

故答案为 2．

【点评】本题主要考查两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，两个向量垂直的性质，属于中档题．

14．（5分）从n个正整数1，2，…，n中任意取出两个不同的数，若取出的两数之和等于5的概率为$\frac{1}{14}$，则n=__8__．

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】列出从n个正整数1，2，…，n中任意取出两个不同的数的所有取法种数，求出和等于5的种数，根据取出的两数之和等于5的概率为$\frac{1}{14}$列式计算n的值．

【解答】解：从n个正整数1，2，…，n中任意取出两个不同的数，取出的两数之和等于5的情况有：（1，4），（2，3）共2种情况；

从n个正整数1，2，…，n中任意取出两个不同的数的所有不同取法种数为C_n^2，

由古典概型概率计算公式得：

从n个正整数1，2，…，n中任意取出两个不同的数，取出的两数之和等于5的概率为$p=\frac{2}{C_n^2}=\frac{1}{14}$．

所以$C_n^2=28$，即$\frac{n(n-1)}{2}=28$，解得n=8．

故答案为8．

【点评】本题考查了古典概型及其概率计算公式，考查了组合数公式，解答此题时既可以按有序取，也可以按无序取，问题的实质是一样的．此题是基础题．

15．（5分）设θ为第二象限角，若$\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，则sinθ+cosθ=___$-\frac{\sqrt{10}}{5}$__

．

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系；GP：两角和与差的三角函数．

【专题】16：压轴题；56：三角函数的求值．

【分析】已知等式利用两角和与差的正切函数公式及特殊角的三角函数值化简，求出tanθ的值，再根据θ为第二象限角，利用同角三角函数间的基本关系求出sinθ与cosθ的值，即可求出sinθ+cosθ的值．

【解答】解：$\because\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\tan\theta=-\frac{1}{3}$，

而$\cos^2\theta=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$，

∵θ为第二象限角，

$\therefore\cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

则$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$．

故答案为：$-\frac{\sqrt{10}}{5}$

【点评】此题考查了两角和与差的正切函数公式，以及同角三角函数间的基本关系，熟练掌握公式是解本题的关键．

16．（5分）等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{10}=0$，$S_{15}=25$，则nS_n的最小值为___﹣49___．

【考点】6D：利用导数研究函数的极值；83：等差数列的性质；85：等差数列的前n项和．

【专题】16：压轴题；54：等差数列与等比数列．

【分析】由等差数列的前n项和公式化简已知两等式，联立求出首项a_1与公差d的值，结合导数求出nS_n的最小值．

【解答】解：设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，

∵$S_{10}=10a_1+45d=0$，$S_{15}=15a_1+105d=25$，

∴$a_1=-3$，$d=\frac{2}{3}$，

∴$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{3}n^2-\frac{10}{3}n$，

∴$nS_n=\frac{1}{3}n^3-\frac{10}{3}n^2$，令$nS_n=f(n)$，

∴$f'(n)=n^2-\frac{20}{3}n$，

∴当$n=\frac{20}{3}$时，f（n）取得极值，当$n<\frac{20}{3}$时，f（n）递减；当$n>\frac{20}{3}$时，f（n）递增；

因此只需比较f（6）和f（7）的大小即可．

f（6）=﹣48，f（7）=﹣49，

故nS_n的最小值为﹣49．

故答案为：﹣49．

【点评】此题考查了等差数列的性质，以及等差数列的前n项和公式，熟练掌握性质及公式是解本题的关键．

三．解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤：

17．（12分）△ABC在内角A、B、C的对边分别为a，b，c，已知a=bcosC+csinB．

（Ⅰ）求B；

（Ⅱ）若b=2，求△ABC面积的最大值．

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理．

【专题】58：解三角形．

【分析】（Ⅰ）已知等式利用正弦定理化简，再利用两角和与差的正弦函数公式及诱导公式变形，求出tanB的值，由B为三角形的内角，利用特殊角的三角函数值即可求出B的度数；

（Ⅱ）利用三角形的面积公式表示出三角形ABC的面积，把sinB的值代入，得到三角形面积最大即为ac最大，利用余弦定理列出关系式，再利用基本不等式

求出ac的最大值，即可得到面积的最大值．

【解答】解：（Ⅰ）由已知及正弦定理得：sinA=sinBcosC+sinBsinC①，

∵sinA=sin（B+C）=sinBcosC+cosBsinC②，

∴sinB=cosB，即tanB=1，

∵B为三角形的内角，

∴$B=\frac{\pi}{4}$；

（Ⅱ）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac$，

由已知及余弦定理得：$4=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{4}\geq 2ac-2ac\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，

整理得：$ac\leq\frac{4}{2-\sqrt{2}}$，当且仅当a=c时，等号成立，

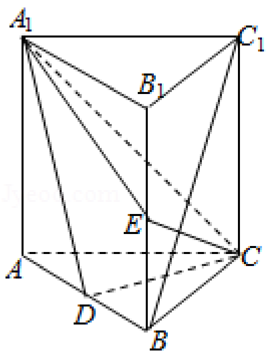
则△ABC面积的最大值为$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times（2+\sqrt{2}）=\sqrt{2}+1$．

【点评】此题考查了正弦、余弦定理，三角形的面积公式，两角和与差的正弦函数公式，以及基本不等式的运用，熟练掌握定理及公式是解本题的关键．

18．（12分）如图，直棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别是AB，BB_1的中点，$AA_1=AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$．

（Ⅰ）证明：BC_1∥平面A_1CD

（Ⅱ）求二面角$D-A_1C-E$的正弦值．



【考点】LS：直线与平面平行；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】11：计算题；14：证明题；5G：空间角．

【分析】（Ⅰ）通过证明BC_1平行平面A_1CD内的直线DF，利用直线与平面平行

的判定定理证明BC_1∥平面A_1CD

（Ⅱ）证明$DE\perp$平面A_1DC，作出二面角$D-A_1C-E$的平面角，然后求解二面角平面角的正弦值即可．

【解答】解：（Ⅰ）证明：连结AC_1交A_1C于点F，则F为AC_1的中点，

又D是AB中点，连结DF，则BC_1∥DF，

因为$DF\subset$平面A_1CD，$BC_1\not\subset$平面A_1CD，

所以BC_1∥平面A_1CD．

（Ⅱ）因为直棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，所以$AA_1\perp CD$，

由已知AC=CB，D为AB的中点，所以$CD\perp AB$，

又$AA_1\cap AB=A$，于是，$CD\perp$平面ABB_1A_1，

设$AB=2\sqrt{2}$，则$AA_1=AC=CB=2$，得$\angle ACB=90°$，

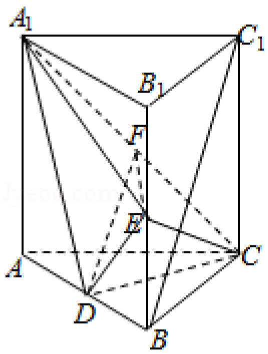
$CD=\sqrt{2}$，$A_1D=\sqrt{6}$，$DE=\sqrt{3}$，$A_1E=3$

故$A_1D^2+DE^2=A_1E^2$，即$DE\perp A_1D$，所以$DE\perp$平面A_1DC，

又$A_1C=2\sqrt{2}$，过D作$DF\perp A_1C$于F，$\angle DFE$为二面角$D-A_1C-E$的平面角，

在$\triangle A_1DC$中，$DF=\dfrac{A_1D\cdot DC}{A_1C}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$EF=\sqrt{DE^2+DF^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

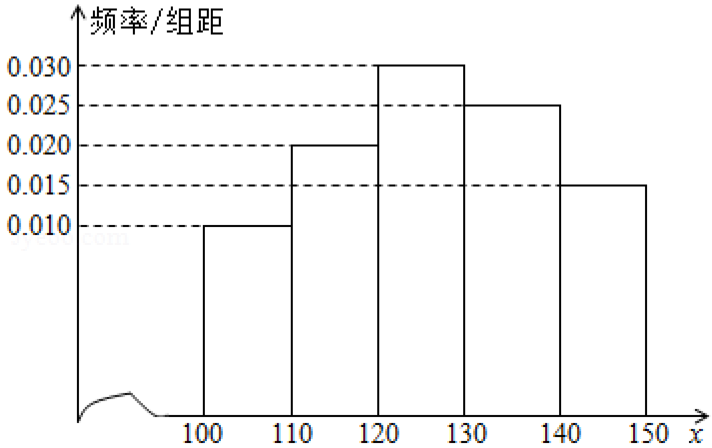
所以二面角$D-A_1C-E$的正弦值．$\sin\angle DFE=\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．



【点评】本题考查直线与平面平行的判定定理的应用，二面角的平面角的求法，考查空间想象能力与计算能力．

19．（12分）经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出1t该产品获利润500元，未售出的产品，每1t亏损300元．根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图所示．经销商为下一个销售季度购进

了130t该农产品．以x（单位：t，100≤x≤150）表示下一个销售季度内的市场需求量，T（单位：元）表示下一个销售季度内经销该农产品的利润．



（Ⅰ）将T表示为x的函数；

（Ⅱ）根据直方图估计利润T不少于57000元的概率；

（Ⅲ）在直方图的需求量分组中，以各组的区间中点值代表该组的各个值，并以需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率（例如：若x∈[100，110））则取x=105，且x=105的概率等于需求量落入[100，110）的频率，求T的数学期望．

【考点】B8：频率分布直方图；BE：用样本的数字特征估计总体的数字特征；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】（Ⅰ）由题意先分段写出，当x∈[100，130）时，当x∈[130，150）时，和利润值，最后利用分段函数的形式进行综合即可．

（Ⅱ）由（I）知，利润T不少于57000元，当且仅当120≤x≤150．再由直方图知需求量X∈[120，150]的频率为0.7，利用样本估计总体的方法得出下一个销售季度的利润T不少于57000元的概率的估计值．

（Ⅲ）利用利润T的数学期望=各组的区间中点值×该区间的频率之和即得．

【解答】解：（Ⅰ）由题意得，当x∈[100，130）时，T=500x－300（130－x）=800x－39000，

当x∈[130，150）时，T=500×130=65000，

$\therefore T=\begin{cases}800x-39000, & x\in[100,130)\\ 65000, & x\in[130,150]\end{cases}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，利润T不少于57000元，当且仅当$120\le x\le 150$.

由直方图知需求量$X\in[120,150]$的频率为0.7，

所以下一个销售季度的利润T不少于57000元的概率的估计值为0.7.

（Ⅲ）依题意可得T的分布列如图，

T	45000	53000	61000	65000
p	0.1	0.2	0.3	0.4

所以$ET=45000\times0.1+53000\times0.2+61000\times0.3+65000\times0.4=59400$.

【点评】本题考查用样本的频率分布估计总体分布及识图的能力，求解的重点是对题设条件及直方图的理解，了解直方图中每个小矩形的面积的意义，是中档题.

20．（12分）平面直角坐标系xOy中，过椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）右焦点的直线$x+y-\sqrt{3}=0$交M于A，B两点，P为AB的中点，且OP的斜率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求M的方程

（Ⅱ）C，D为M上的两点，若四边形ACBD的对角线CD⊥AB，求四边形ACBD面积的最大值.

【考点】IJ：直线的一般式方程与直线的垂直关系；KH：直线与圆锥曲线的综合.

【专题】16：压轴题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】（Ⅰ）把右焦点（c，0）代入直线可解得c．设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），线段AB的中点P（x_0，y_0），利用“点差法”即可得到a，b的关系式，再与$a^2=b^2+c^2$联立即可得到a，b，c.

（Ⅱ）由CD⊥AB，可设直线CD的方程为y=x+t，与椭圆的方程联立得到根与系数的关系，即可得到弦长|CD|．把直线$x+y-\sqrt{3}=0$与椭圆的方程联立得到根与

系数的关系，即可得到弦长|AB|，利用$S_{四边形ACBD}=\frac{1}{2}|AB|\ |CD|$即可得到关于t的表达式，利用二次函数的单调性即可得到其最大值.

【解答】解：（Ⅰ）把右焦点（c，0）代入直线$x+y-\sqrt{3}=0$得$c+0-\sqrt{3}=0$，解得$c=\sqrt{3}$.

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），线段AB的中点P（x_0，y_0），

则$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，相减得$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，

$\therefore\frac{x_1+x_2}{a^2}+\frac{y_1+y_2}{b^2}\times\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$，

$\therefore\frac{2x_0}{a^2}+\frac{2y_0}{b^2}\times(-1)=0$，又$k_{OP}=\frac{1}{2}=\frac{y_0}{x_0}$，

$\therefore\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2b^2}=0$，即$a^2=2b^2$.

联立得$\begin{cases}a^2=2b^2\\a^2=b^2+c^2\\c=\sqrt{3}\end{cases}$，解得$\begin{cases}b^2=3\\a^2=6\end{cases}$，

$\therefore$M的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）$\because CD\perp AB$，$\therefore$可设直线CD的方程为$y=x+t$，

联立$\begin{cases}y=x+t\\\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去y得到$3x^2+4tx+2t^2-6=0$，

$\because$直线CD与椭圆有两个不同的交点，

$\therefore\triangle=16t^2-12(2t^2-6)=72-8t^2>0$，解$-3<t<3$（*）.

设C（x_3，y_3），D（x_4，y_4），$\therefore x_3+x_4=-\frac{4t}{3}$，$x_3x_4=\frac{2t^2-6}{3}$.

$\therefore|CD|=\sqrt{(1+1^2)[(x_3+x_4)^2-4x_3x_4]}=\sqrt{2[(-\frac{4t}{3})^2-4\times\frac{2t^2-6}{3}]}=$

$\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{18-2t^2}}{3}$.

联立$\begin{cases}x+y-\sqrt{3}=0\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$得到$3x^2-4\sqrt{3}x=0$，解得$x=0$或$\frac{4}{3}\sqrt{3}$，

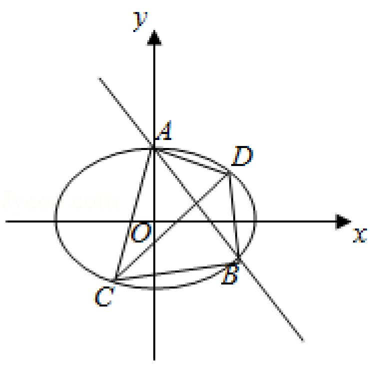
∴交点为A（0，$\sqrt{3}$），B（$\frac{4}{3}\sqrt{3}$，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$），

∴$|AB|=\sqrt{(\frac{4}{3}\sqrt{3}-0)^2+(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3})^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

∴$S_{四边形ACBD}=\frac{1}{2}|AB|\ \ |CD|=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{18-2t^2}}{3}=\frac{8\sqrt{3}\cdot\sqrt{18-2t^2}}{9}$，

∴当且仅当t=0时，四边形ACBD面积的最大值为$\frac{8}{3}\sqrt{6}$，满足（*）.

∴四边形ACBD面积的最大值为$\frac{8}{3}\sqrt{6}$.



【点评】本题综合考查了椭圆的定义、标准方程及其性质、“点差法”、中点坐标公式、直线与椭圆相交问题转化为方程联立得到一元二次方程根与系数的关系、弦长公式、四边形的面积计算、二次函数的单调性等基础知识，考查了推理能力、数形结合的思想方法、计算能力、分析问题和解决问题的能力.

21．（12分）已知函数f（x）=e^x﹣ln（x+m）

（I）设x=0是f（x）的极值点，求m，并讨论f（x）的单调性；

（Ⅱ）当m≤2时，证明f（x）＞0.

【考点】5C：根据实际问题选择函数类型；6B：利用导数研究函数的单调性.

【专题】16：压轴题；53：导数的综合应用.

【分析】（Ⅰ）求出原函数的导函数，因为x=0是函数f（x）的极值点，由极值点处的导数等于0求出m的值，代入函数解析式后再由导函数大于0和小于0求出原函数的单调区间；

（Ⅱ）证明当m≤2时，f（x）＞0，转化为证明当m=2时f（x）＞0．求出当m=2时函数的导函数，可知导函数在（﹣2，+∞）上为增函数，并进一步得到导函数在（﹣1，0）上有唯一零点x_0，则当$x=x_0$时函数取得最小值，借助于x_0是导函数的零点证出f（x_0）＞0，从而结论得证．

【解答】（Ⅰ）解：$\because f'(x)=e^x-\frac{1}{x+m}$，x=0是f（x）的极值点，∴

$f'(0)=1-\frac{1}{m}=0$，解得m=1．

所以函数f（x）=e^x﹣ln（x+1），其定义域为（﹣1，+∞）．

$\because f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}=\frac{e^x(x+1)-1}{x+1}$．

设g（x）=e^x（x+1）﹣1，则g′（x）=e^x（x+1）+e^x＞0，所以g（x）在（﹣1，+∞）上为增函数，

又∵g（0）=0，所以当x＞0时，g（x）＞0，即f′（x）＞0；当﹣1＜x＜0时，g（x）＜0，f′（x）＜0．

所以f（x）在（﹣1，0）上为减函数；在（0，+∞）上为增函数；

（Ⅱ）证明：当m≤2，x∈（﹣m，+∞）时，ln（x+m）≤ln（x+2），故只需证明当m=2时f（x）＞0．

当m=2时，函数$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$在（﹣2，+∞）上为增函数，且f′（﹣1）＜0，f′（0）＞0．

故f′（x）=0在（﹣2，+∞）上有唯一实数根x_0，且x_0∈（﹣1，0）．

当x∈（﹣2，x_0）时，f′（x）＜0，当x∈（x_0，+∞）时，f′（x）＞0，

从而当$x=x_0$时，f（x）取得最小值．

由f′（x_0）=0，得$e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$，ln（x_0+2）=﹣x_0．

故f（x）$\geq f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2}$＞0．

综上，当m≤2时，f（x）＞0．

【点评】本题考查了利用导数研究函数的单调性，利用导数求函数在闭区间上

的最值，考查了不等式的证明，考查了函数与方程思想，分类讨论的数学思想，综合考查了学生分析问题和解决问题的能力．熟练函数与导数的基础知识是解决该题的关键，是难题．

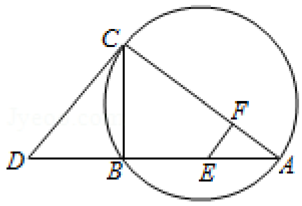
选考题：（第22题～第24题为选考题，考生根据要求作答．请考生在第22、23、24题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一部分评分，作答时请写清题号）

22．（10分）【选修4﹣1几何证明选讲】

如图，CD为△ABC外接圆的切线，AB的延长线交直线CD于点D，E、F分别为弦AB与弦AC上的点，且BC•AE=DC•AF，B、E、F、C四点共圆．

（1）证明：CA是△ABC外接圆的直径；

（2）若DB=BE=EA，求过B、E、F、C四点的圆的面积与△ABC外接圆面积的比值．



【考点】NC：与圆有关的比例线段．

【专题】5B：直线与圆．

【分析】（1）已知CD为△ABC外接圆的切线，利用弦切角定理可得∠DCB=∠A，及BC•AE=DC•AF，可知△CDB∽△AEF，于是∠CBD=∠AFE．

利用B、E、F、C四点共圆，可得∠CFE=∠DBC，进而得到∠CFE=∠AFE=90°即可证明CA是△ABC外接圆的直径；

（2）要求过B、E、F、C四点的圆的面积与△ABC外接圆面积的比值．只需求出其外接圆的直径的平方之比即可．由过B、E、F、C四点的圆的直径为CE，及DB=BE，可得CE=DC，利用切割线定理可得$DC^2=DB•DA$，$CA^2=CB^2+BA^2$，都用DB表示即可．

【解答】（1）证明：∵CD为△ABC外接圆的切线，∴∠DCB=∠A，

∵BC•AE=DC•AF，∴$\frac{BC}{FA}=\frac{DC}{EA}$．

∴△CDB∽△AEF，∴∠CBD=∠AFE．

∵B、E、F、C四点共圆，∴∠CFE=∠DBC，∴∠CFE=∠AFE=90°．

∴∠CBA=90°，∴CA是△ABC外接圆的直径；

（2）连接CE，∵∠CBE=90°，

∴过B、E、F、C四点的圆的直径为CE，由DB=BE，得CE=DC，

又$BC^2=DB\bullet BA=2DB^2$，

∴$CA^2=4DB^2+BC^2=6DB^2$．

而$DC^2=DB\bullet DA=3DB^2$，

故过B、E、F、C四点的圆的面积与△ABC面积的外接圆的面积比值=$\frac{CE^2}{AC^2}$=

$\frac{3DB^2}{6DB^2}=\frac{1}{2}$．

【点评】熟练掌握弦切角定理、相似三角形的判定与性质、四点共圆的性质、直径的判定、切割线定理、勾股定理等腰三角形的性质是解题的关键．

23．已知动点P、Q都在曲线C：$\begin{cases}x=2\cos\beta\\y=2\sin\beta\end{cases}$（β为参数）上，对应参数分别为β=α与β=2α（0＜α＜2π），M为PQ的中点．

（1）求M的轨迹的参数方程；

（2）将M到坐标原点的距离d表示为α的函数，并判断M的轨迹是否过坐标原点．

【考点】QH：参数方程化成普通方程．

【专题】5S：坐标系和参数方程．

【分析】（1）利用参数方程与中点坐标公式即可得出；

（2）利用两点之间的距离公式、三角函数的单调性即可得出．

【解答】解：（1）依题意有P（2cosα，2sinα），Q（2cos2α，2sin2α），

因此M（cosα+cos2α，sinα+sin2α）．

M的轨迹的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha+\cos2\alpha\\y=\sin2\alpha+\sin\alpha\end{cases}$（α为参数，0＜α＜2π）．

（2）M点到坐标原点的距离$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2\cos\alpha}$（$0<\alpha<2\pi$）．

当$\alpha=\pi$时，$d=0$，故M的轨迹过坐标原点．

【点评】本题考查了参数方程与中点坐标公式、两点之间的距离公式、三角函数的单调性，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

24．【选修4﹣﹣5；不等式选讲】

设a，b，c均为正数，且a+b+c=1，证明：

（Ⅰ）$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}$

（Ⅱ）$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 1$．

【考点】R6：不等式的证明．

【专题】14：证明题；16：压轴题．

【分析】（Ⅰ）依题意，由$a+b+c=1\Rightarrow(a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$，利用基本不等式可得$3(ab+bc+ca)\leq 1$，从而得证；

（Ⅱ）利用基本不等式可证得：$\frac{a^2}{b}+b\geq 2a$，$\frac{b^2}{c}+c\geq 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\geq 2c$，三式累加即可证得结论．

【解答】证明：（Ⅰ）由$a^2+b^2\geq 2ab$，$b^2+c^2\geq 2bc$，$c^2+a^2\geq 2ca$得：

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$，

由题设得$(a+b+c)^2=1$，即$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$，

所以$3(ab+bc+ca)\leq 1$，即$ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}$．

（Ⅱ）因为$\frac{a^2}{b}+b\geq 2a$，$\frac{b^2}{c}+c\geq 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\geq 2c$，

故$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c)\geq 2(a+b+c)$，即$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$．

所以$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 1$．

【点评】本题考查不等式的证明，突出考查基本不等式与综合法的应用，考查推理论证能力，属于中档题．