

A.  $a = -2$

B. 点  $(2\sqrt{2}, 0)$  在  $C$  上

C.  $C$  在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点  $(x_0, y_0)$  在  $C$  上时,  $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$

### 三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  作平行于  $y$  轴的直线交  $C$  于  $A, B$

两点, 若  $|F_1 A| = 13, |AB| = 10$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

13. 若曲线  $y = e^x + x$  在点  $(0, 1)$  处的切线也是曲线  $y = \ln(x+1) + a$  的切线, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 甲、乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8, 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上数字的大小, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为\_\_\_\_\_.

### 四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sin C = \sqrt{2} \cos B$ ,  $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$

(1) 求  $B$ ;

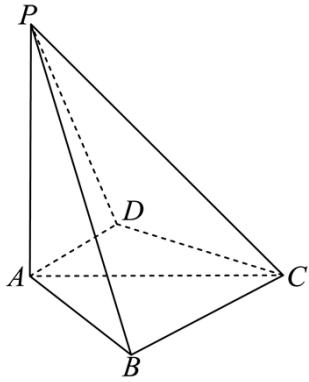
(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $3 + \sqrt{3}$ , 求  $c$ .

16. 已知  $A(0, 3)$  和  $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上两点.

(1) 求  $C$  的离心率;

(2) 若过  $P$  的直线  $l$  交  $C$  于另一点  $B$ , 且  $\triangle ABP$  的面积为 9, 求  $l$  的方程.

17. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PA = AC = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $AB = \sqrt{3}$ .



(1) 若  $AD \perp PB$  , 证明:  $AD \parallel$  平面  $PBC$  ;

(2) 若  $AD \perp DC$  , 且二面角  $A-CP-D$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{42}}{7}$  , 求  $AD$  .

18. 已知函数  $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$

(1) 若  $b=0$  , 且  $f'(x) \geq 0$  , 求  $a$  的最小值;

(2) 证明: 曲线  $y=f(x)$  是中心对称图形;

(3) 若  $f(x) > -2$  当且仅当  $1 < x < 2$  , 求  $b$  的取值范围.

19. 设  $m$  为正整数, 数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是公差不为 0 的等差数列, 若从中删去两项  $a_i$  和  $a_j$  ( $i < j$ ) 后剩余的  $4m$  项可被平均分为  $m$  组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列.

(1) 写出所有的  $(i, j)$  ,  $1 \leq i < j \leq 6$  , 使数列  $a_1, a_2, \dots, a_6$  是  $(i, j)$ -可分数列;

(2) 当  $m \geq 3$  时, 证明: 数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(2, 13)$ -可分数列;

(3) 从  $1, 2, \dots, 4m+2$  中一次任取两个数  $i$  和  $j$  ( $i < j$ ) , 记数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列的概率为  $P_m$  , 证明:  $P_m > \frac{1}{8}$  .