2014年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

数学（理科）

一、选择题：

1. $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数. 若 $z+\bar{z}=2$，$(z-\bar{z})i=2$（i 为虚数单位），则 $z=$（　　）

A. $1+i$　　　B. $-1-i$　　　C. $-1+i$　　　D. $1-i$

【答案】D

【解析】

试题分析：设 $z=a+bi,(a,b\in R)$，则 $\bar{z}=a-bi$, 由 $z+\bar{z}=2$ 得：$a=1$，由 $(z-\bar{z})i=2$ 得：$b=-1$，所以 $z=1-i$, 选 D.学科网

考点：共轭复数

2.函数 $f(x)=\ln(x^2-x)$ 的定义域为（　　）

A. $(0,1)$　　　B. $[0,1]$　　　C. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　　D. $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

【答案】C

【解析】

试题分析：由题意得：$x^2-x>0$, 解得 $x>1$, 或 $x<0$，所以选 C.

考点：函数定义域

3.已知函数 $f(x)=5^{|x|}$，$g(x)=ax^2-x(a\in R)$，若 $f[g(1)]=1$，则 $a=$（　　）

A.1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. -1

【答案】A

【解析】

试题分析：因为 $f(g(1))=1=5^0$，所以 $g(1)=0$, 即 $a-1=0$, $a=1$. 选 A.

考点：求函数值

4.在 ΔABC 中，内角 A,B,C 所对应的边分别为 $a,b,c,$，若 $c^2=(a-b)^2+6, C=\dfrac{\pi}{3}$, 则 ΔABC 的面积（　　）

A.3　　　B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　　D. $3\sqrt{3}$

【答案】C

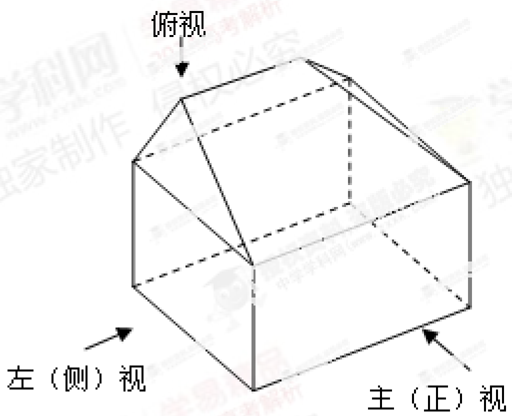
【解析】

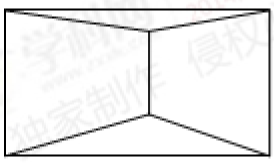
试题分析：因为$c^2=(a-b)^2+6, C=\dfrac{\pi}{3}$，所以学科网由余弦定理得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}$，即

$-2ab+6=-ab, ab=6$，因此ΔABC的面积为$\dfrac{1}{2}ab\sin C=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，选C.

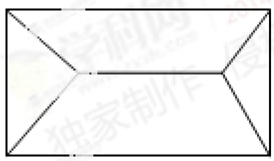
考点：余弦定理

5.一几何体的直观图如右图，下列给出的四个俯视图中正确的是（　　）

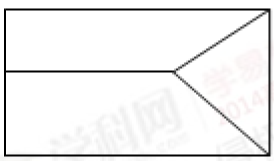




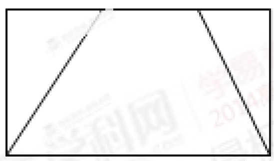
A



B



C



D

【答案】B

【解析】

试题分析：俯视图为几何体在底面上的投影，应为B中图形.

考点：三视图

6.某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这 4 个变量之间的关系，随机抽查 52 名中学生，得到统计数据如表 1 至表 4，这与性别有关联的可能性最大的变量是（　　）

表 1	不及格	及格	总计
男	6	14	20
女	10	22	32
总计	16	36	52

A.成绩

表 2	不及格	及格	总计
男	4	16	20
女	12	20	32
总计	16	36	52

B.视力

表 3	不及格	及格	总计
男	8	12	20
女	8	24	32
总计	16	36	52

C.智商

表 4	不及格	及格	总计
男	14	6	20
女	2	30	32
总计	16	36	52

D.阅读量

【答案】D

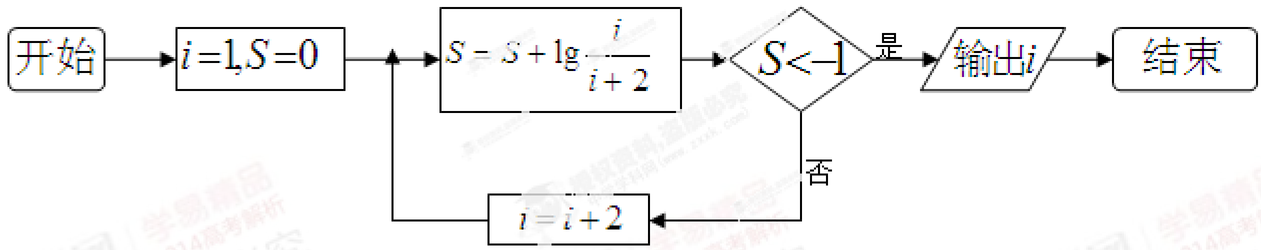
【解析】

试题分析：根据公式 $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 分别计算得：A. $\dfrac{64}{16\times36\times20\times32}$， B. $\dfrac{112^2}{16\times36\times20\times32}$

C. $\dfrac{96^2}{16\times36\times20\times32}$ D. $\dfrac{408^2}{16\times36\times20\times32}$，选项 D 的值最大，所以与性别有关联的可能性最大为 D.

考点：关联判断

7.阅读如下程序框图，运行相应的程序，则程序运行后输出的结果为（　　）



A.7　　B.9　　C.10　　D.11

【答案】B

【解析】

试题分析：第一次循环：$i=1,S=\lg\frac{1}{3}$,第二次循环：$i=3,S=\lg\frac{1}{3}+\lg\frac{3}{5}=\lg\frac{1}{5}$,

第三次循环：$i=5,S=\lg\frac{1}{5}+\lg\frac{5}{7}=\lg\frac{1}{7}$,第四次循环：$i=7,S=\lg\frac{1}{7}+\lg\frac{7}{9}=\lg\frac{1}{9}$,

第五次循环：$i=9,S=\lg\frac{1}{9}+\lg\frac{9}{11}=\lg\frac{1}{11}<-1$,学科网结束循环，输出$i=9$.选 B.

考点：循环结构流程图

8.若 $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(x)dx$,则$\int_0^1 f(x)dx=$（　　）

A.-1　　B.$-\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.1

【答案】B

【解析】

试题分析：设$\int_0^1 f(x)dx=m$，则 $f(x)=x^2+2m$, $m=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^2+2m)dx=(\frac{x^3}{3}+2mx)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+2m$,

因此$m=-\frac{1}{3}$.

考点：定积分

9.在平面直角坐标系中，A,B 分别是x轴和y轴上的动点，若以AB为直径的圆C与直线$2x+y-4=0$相切，则圆C面积的最小值为（　　）

A.$\frac{4}{5}\pi$　　B.$\frac{3}{4}\pi$　　C.$(6-2\sqrt{5})\pi$　　D.$\frac{5}{4}\pi$

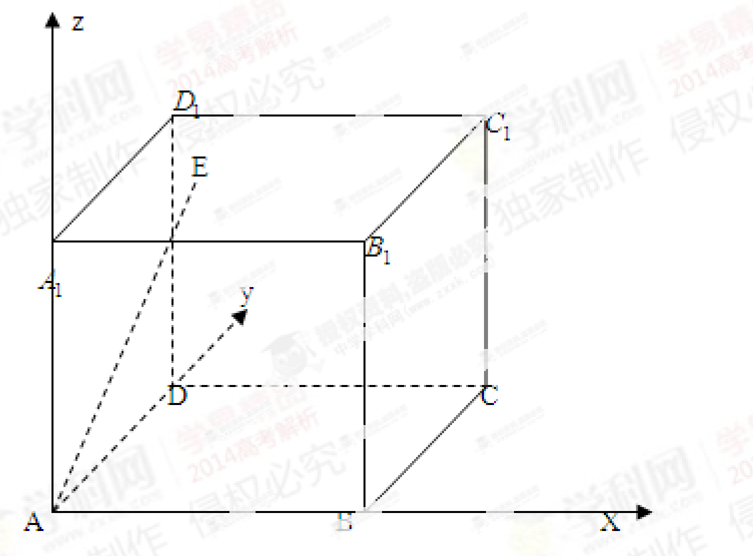
【答案】A

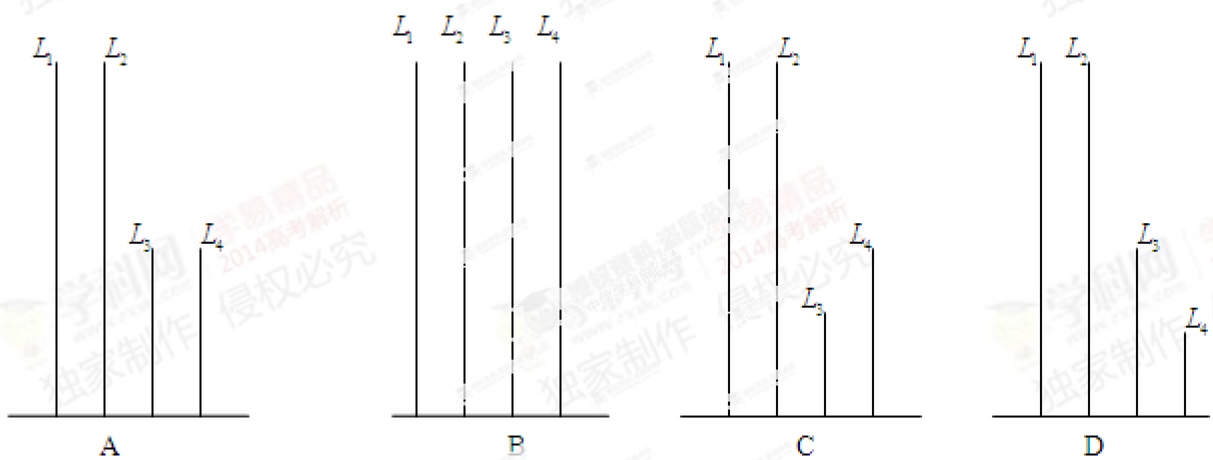
【解析】

试题分析：设直线l：$2x+y-4=0$.因为$|OC|=\frac{1}{2}|AB|=d_{c-l}$，所以圆心 C 的轨迹为以 O 为焦点，$l$为准线的抛物线.圆 C 半径最小值为$\frac{1}{2}d_{O-l}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，学科网圆$C$面积的最小值为$\pi(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=\frac{4\pi}{5}$.选 A.

考点：抛物线定义

10.如右图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=11$，$AD=7$，$AA_1=12$，一质点从顶点 A 射向点$E(4,3,12)$，遇长方体的面反射（反射服从光的反射原理），将$i-1$次到第i次反射点之间的线段记为$L_i(i=2,3,4)$，$L_1=AE$，将线段L_1,L_2,L_3,L_4竖直放置在同一水平线上，则大致的图形是（　　）

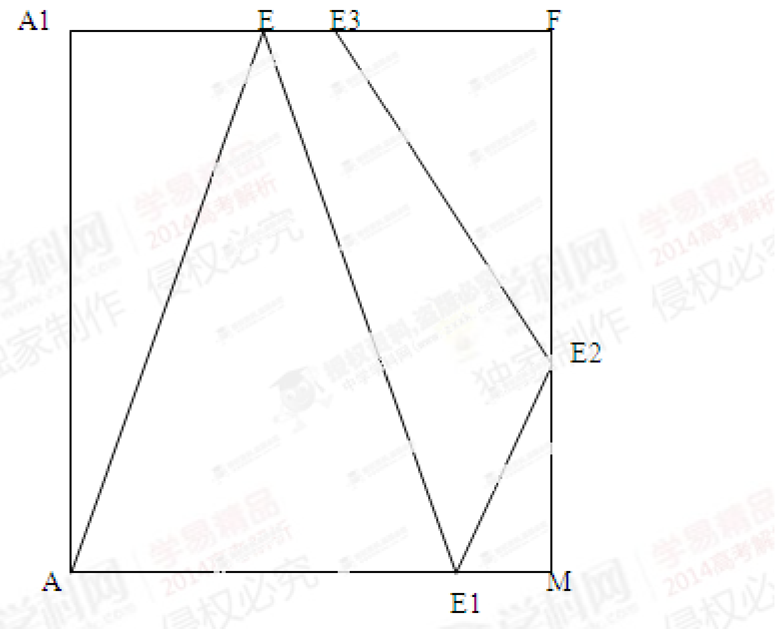




【答案】C

【解析】

试题分析：



因为 $\frac{3}{4}>\frac{7}{11}$，所以 A_1E 延长交 D_1C_1 于 F，过 F 作 FM 垂直 DC 于 M.在矩形 AA_1FM 中分析反射情况：由于 $AM=\frac{35}{5}>10$，第二次反射点为 E_1 在线段 AM 上，学科网此时 $E_1M=\frac{5}{3}$,第三次反射点为 E_2 在线段 FM 上，此时 $E_2M=4$,第四次反射点为 E_3 在线段 A_1F 上.由图可知，选 C.

考点：空间想象能力

二.选做题：请考生在下列两题中任选一题作答，若两题都做，则按所做的第一题评阅计分，本题共 5 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

11.(1).（不等式选做题）对任意 $x,y\in R$, $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为（ ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】C

【解析】

试题分析：因为 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|\geq|x-(x-1)|+|(y-1)-(y+1)|=1+2=3$，当且仅当 $0\leq x\leq 1,-1\leq y\leq 1$ 时取等号，所以 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为 3，选 C.

考点：含绝对值不等式性质

11.(2).（坐标系与参数方程选做题）若以直角坐标系的原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，则线段 $y=1-x\left(0\leq x\leq 1\right)$ 的极坐标为（ ）

A. $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta},0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta},0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\rho=\cos\theta+\sin\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\rho=\cos\theta+\sin\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$

【答案】A

【解析】

试题分析：根据 $\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y,\rho>0,\theta\in[0,2\pi]$，$y=1-x(0\le x\le 1)$ 得：

$y\in[0,1],\rho\sin\theta=1-\rho\cos\theta,(0\le\rho\cos\theta\le 1,0\le\rho\sin\theta\le 1)$ 解得 $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta},0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，选 A.

考点：极坐标

三、填空题

12.10 件产品中有 7 件正品，3 件次品，从中任取 4 件，则恰好取到 1 件次品的概率是________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】

试题分析：从 10 件产品中任取 4 件，共有 C_{10}^4 种基本事件，恰好取到 1 件次品就是取到 1 件次品且取到 3 件正品，共有 $C_3^1C_7^3$，因此所求概率为 $\dfrac{C_3^1C_7^3}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{2}$

考点：古典概型概率

13.若曲线 $y=e^{-x}$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x+y+1=0$，则点 P 的坐标是________.

【答案】$(-\ln 2,2)$

【解析】

试题分析：设切点 $P(a,b)$，则由 $y'=-e^{-x}$ 得：$k=-e^{-a}=-2,e^{-a}=2,a=-\ln 2,b=e^{-a}=2$，所以点 P 的坐标是 $(-\ln 2,2)$.

考点：利用导数求切点.

14.已知单位向量 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 的夹角为 α，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，向量 $\vec{a}=3\vec{e_1}-2\vec{e_2}$ 与 $\vec{b}=3\vec{e_1}-\vec{e_2}$ 的夹角为 β，则 $\cos\beta=$__________

【答案】$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

试题分析：因为$\vec{a}^2=9+4-2\times3\times2\times\frac{1}{3}=9,\vec{b}^2=9+1-2\times3\times1\times\frac{1}{3}=8,\vec{a}\cdot\vec{b}=9+2-9\times1\times1\times\frac{1}{3}=8$，所以$\cos\beta=\frac{8}{3\times2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

考点：向量数量积及夹角

15.过点$M(1,1)$作斜率为$-\frac{1}{2}$的直线与椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$相交于$A,B$，若$M$是线段$AB$的中点，则椭圆$C$的离心率为______

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

试题分析：设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则由$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$,两式相减变形得：

$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$,即$\frac{2}{a^2}+\frac{-\times2\frac{1}{2}}{b^2}=0$, $a^2=2b^2$，从而$a^2=2c^2,e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

考点：点差法，椭圆离心率

三、解答题

16.已知函数$f(x)=\sin(x+\theta)+a\cos(x+2\theta)$，其中$a\in R,\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

（1）当$a=\sqrt{2},\theta=\frac{\pi}{4}$时，求$f(x)$在区间$[0,\pi]$上的最大值与最小值；

（2）若$f(\frac{\pi}{2})=0,f(\pi)=1$，求$a,\theta$的值.

【答案】(1) 最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,最小值为-1. (2) $\begin{cases}a=-1\\ \theta=-\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

【解析】

试题分析：(1) 求三角函数最值，首先将其化为基本三角函数形式：当$a=\sqrt{2},\theta=\frac{\pi}{4}$时，

$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x=\sin(\frac{\pi}{4}-x)$，再结合基本三角函数性质求最值：因为$x\in[0,\pi]$，从而$\frac{\pi}{4}-x\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，故$f(x)$在$[0,\pi]$上学科网的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,最小值为-1. (2) 两个独立条件求两个未知数，联立方程组求解即可. 由$\begin{cases}f(\frac{\pi}{2})=0\\ f(\pi)=1\end{cases}$得$\begin{cases}\cos\theta(1-2a\sin\theta)=0\\ 2a\sin^2\theta-\sin\theta-a=1\end{cases}$，又$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$知

$\cos\theta \neq 0$, 解得 $\begin{cases} a=-1 \\ \theta=-\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$.

试题解析：解（1）当 $a=\sqrt{2}, \theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，

$$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x=\sin(\frac{\pi}{4}-x)$$

因为 $x\in[0,\pi]$，从而 $\dfrac{\pi}{4}-x\in[-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，最小值为-1.

（2）由 $\begin{cases} f(\frac{\pi}{2})=0 \\ f(\pi)=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \cos\theta(1-2a\sin\theta)=0 \\ 2a\sin^2\theta-\sin\theta-a=1 \end{cases}$，又 $\theta\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 知 $\cos\theta\neq 0$，解得 $\begin{cases} a=-1 \\ \theta=-\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$.

考点：三角函数性质

17.（本小题满分 12 分）

已知首项都是 1 的两个数列$\{a_n\}\{b_n\}$（$b_n\neq 0$，$n\in N^+$），满足$a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$.

（1）令$c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的通项公式；

（2）若 $b_n=3^{n-1}$，求数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n

【答案】（1） $c_n=2n-1$.（2） $S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.

【解析】

试题分析：（1）已知数列$c_n=\frac{a_n}{b_n}$，因此对$a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$变形为 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\dfrac{a_n}{b_n}=2, c_{n+1}-c_n=2$ 所以数列 $\{c_n\}$ 是以首项 $c_1=1$，公差 $d=2$ 的等差数列，故 $c_n=2n-1$.

（2）由 $b_n=3^{n-1}$ 知 $a_n=c_nb_n=(2n-1)3^{n-1}$，是等差乘等比型，所以求和用错位相减法.

$S_n=1\cdot 3^0+3\cdot 3^1+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$, $3S_n=1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$

相减得 $-2S_n=1+2\cdot(3^1+3^2\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n=2-(2n-2)\cdot 3^n$

所以 $S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.

试题解析：（1）因为$a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$，$b_n\neq 0$，$n\in N^+$

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\dfrac{a_n}{b_n}=2, c_{n+1}-c_n=2$

所以数列 $\{c_n\}$ 是以首项 $c_1=1$，公差 $d=2$ 的等差数列，故 $c_n=2n-1$.

（2）由 $b_n=3^{n-1}$ 知 $a_n=c_nb_n=(2n-1)3^{n-1}$ 学科网

于是数列$\{a_n\}$前 n 项和 $S_n=1\cdot 3^0+3\cdot 3^1+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

$3S_n=1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$

相减得 $-2S_n=1+2\cdot(3^1+3^2\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n=2-(2n-2)\cdot 3^n$

所以 $S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.

考点：等差数列定义，错位相减求和

18.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=(x^2+bx+b)\sqrt{1-2x}(b\in R)$.

（1）当$b=4$时，求f（x）的极值；

（2）若f（x）在区间 $(0,\frac{1}{3})$ 上单调递增，求 b 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $x=-2$ 取极小值 0，在 $x=0$ 取极大值 4.（2）$(-\infty,\frac{1}{9}]$.

【解析】

试题分析:（1）求函数极值，首先明确其定义域：$x\in(-\infty,\frac{1}{2})$，然后求导数：当$b=4$时，$f'(x)=\frac{-5x(x+2)}{\sqrt{1-2x}}$，再在定义域下求导函数的零点：$x=-2$ 或 $x=0$.根据导数符号变化规律，确定极值：当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 单调递减，当 $x\in(-2,0)$时，$f'(x)>0,f(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,\frac{1}{2})$时，$f'(x)<0,f(x)$ 单调递减，故 $f(x)$ 在 $x=-2$ 取极小值 0，在 $x=0$.取极大值 4.（2）已知函数单调性，求参数取值范围，一般转化为对应导数恒非负，再利用变量分离求最值. 由题意得 $f'(x)=\frac{-x(5x+3b-2)}{\sqrt{1-2x}}\ge 0$对 $x\in(0,\frac{1}{3})$恒成立，即 $5x+3b-2\le 0$ 对 $x\in(0,\frac{1}{3})$恒成立，即 $b\le(\frac{2-5x}{3})_{\max}$，$x\in(0,\frac{1}{3})$，即 $b\le\frac{1}{9}$.

试题解析:（1）当$b=4$时，$f'(x)=\frac{-5x(x+2)}{\sqrt{1-2x}}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=-2$ 或 $x=0$.

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 单调递减，当 $x\in(-2,0)$时，$f'(x)>0,f(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,\frac{1}{2})$时，

$f'(x)<0,f(x)$ 单调递减，故 $f(x)$ 在 $x=-2$ 取极小值 0，在 $x=0$.取极大值 4.

（2）$f'(x)=\frac{-x(5x+3b-2)}{\sqrt{1-2x}}$，因为当 $x\in(0,\frac{1}{3})$ 时，$\frac{-x}{\sqrt{1-2x}}<0$

依题意当 $x\in(0,\frac{1}{3})$时，有 $5x+3b-2\le 0$，从而 $\frac{5}{3}+3b-2\le 0$

所以 b 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{9}]$.

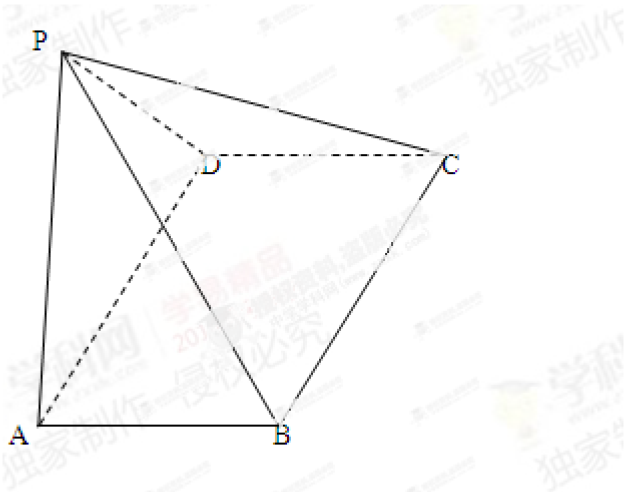
考点：利用导数求极值，利用导数求参数取值范围

19.(本小题满分12分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.

（1）求证： $AB\perp PD$;

（2）若 $\angle BPC=90^{\circ}, PB=\sqrt{2}, PC=2,$ 问 AB 为何值时，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大？并求此时平面 PBC 与平面 DPC 夹角的余弦值.



【答案】(1) 详见解析，(2) $AB=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，四棱锥的体积 P-ABCD 最大. 平面 BPC 与平面 DPC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】

试题分析：(1) 先将面面垂直转化为线面垂直：ABCD 为矩形，故 AB⊥AD，又平面 PAD⊥平面 ABCD，平面 PAD∩平面 ABCD=AD，所以 AB⊥平面 PAD，再根据线面垂直证线线垂直：因为 PD⊂平面 PAD，所以 AB⊥PD

(2)求四棱锥体积，关键要作出高.这可利用面面垂直性质定理：过 P 作 AD 的垂线，垂足为 O，又平面 PAD⊥平面 ABCD，平面 PAD∩平面 ABCD=AD，所以 PO⊥平面 ABCD，下面用 AB 表示高及底面积：设 $AB=m$,，则 $DP=\sqrt{PG^2-OG^2}=\sqrt{\frac{4}{3}-m^2}$,， 故四棱锥 P-ABCD 的体积为

$V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot m\cdot\sqrt{\frac{4}{3}-m^2}=\frac{m}{3}\sqrt{8-6m^2}$. 故当 $m=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，即 $AB=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，四棱锥的体积 P-ABCD 最大.

求二面角的余弦值，可利用空间向量求解，根据题意可建立空间坐标系，分别求出平面 BPC 的法向量及平面 DPC 的法向量，再利用向量数量积求夹角余弦值即可.

试题解析：（1）证明：ABCD 为矩形，故 AB⊥AD，

又平面 PAD⊥平面 ABCD

平面 PAD∩平面 ABCD=AD

所以 AB⊥平面 PAD，因为 PD⊂平面 PAD，故 AB⊥PD

（2）解：过 P 作 AD 的垂线，垂足为 O，过 O 作 BC 的垂线，垂足为 G，连接 PG

故 PO⊥平面 ABCD，BC⊥平面 POG,BC⊥PG

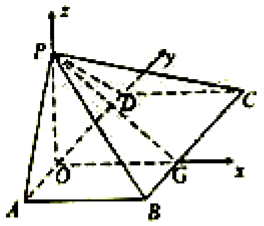
在直角三角形 BPC 中，$PG=\frac{2\sqrt{3}}{3},GC=\frac{2\sqrt{6}}{3},BG=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

设 $AB=m$,，则 $DP=\sqrt{PG^2-OG^2}=\sqrt{\frac{4}{3}-m^2}$,，故四棱锥 P-ABCD 的体积为

$V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot m\cdot\sqrt{\frac{4}{3}-m^2}=\frac{m}{3}\sqrt{8-6m^2}$.

因为 $m\sqrt{8-6m^2}=\sqrt{-6(m^2-\frac{2}{3})^2+\frac{8}{3}}$

故当 $m=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，即 $AB=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，四棱锥的体积 P-ABCD 最大.



建立如图所示的空间直角坐标系，$O(0,0,0),B(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3},0),C(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3},0),D(0,\frac{2\sqrt{6}}{3},0),P(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3})$

故 $\overline{PC}=(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}),\overline{BC}=(0,\sqrt{6},0),\overline{CD}=(-\frac{\sqrt{6}}{3},0,0)$

设平面 BPC 的法向量 $\mathbf{n}_1=(x,y,1)$,，则由 $\mathbf{n}_1\perp\overline{PC}$，$\mathbf{n}_1\perp\overline{BC}$ 得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{6}}{3}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}y-\frac{\sqrt{6}}{3}=0\\ \sqrt{6}y=0\end{cases}$

解得 $x=1,y=0$, $\mathbf{n}_1=(1,0,1)$,

同理可求出平面 DPC 的法向量 $\mathbf{n}_2=(0,\frac{1}{2},1)$,，从而平面 BPC 与平面 DPC 夹角 θ 的余弦值为

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

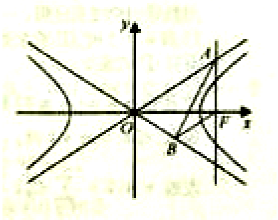
考点：面面垂直性质定理，四棱锥体积，利用空间向量求二面角

20.（本小题满分 13 分）

如图，已知双曲线 $C_n \frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的右焦点 F ,点 A,B 分别在 C 的两条渐近线上， $AF\perp x$ 轴，$AB\perp OB, BF \parallel OA$（$O$ 为坐标原点）.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）过 C 上一点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 的直线 $l:\frac{x_0x}{a^2}-y_0y=1$ 与直线 AF 相交于点 M ，与直线 $x=\frac{3}{2}$ 相交于点 N ，证明点 P 在 C 上移动时，$\left|\frac{MF}{NF}\right|$ 恒为定值，并求此定值.



【答案】（1） $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.（2） $\frac{MF}{NF}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

试题分析：（1）求双曲线 C 的方程就是要确定 a 的值，用 a,c 表示条件：$AF\perp x$ 轴，$AB\perp OB, BF \parallel OA$，即可得：直线 OB 方程为 $y=-\frac{1}{a}x$，直线 BF 的方程为 $y=\frac{1}{a}(x-c)$，解得 $B(\frac{c}{2},-\frac{c}{2a})$ 又直线 OA 的方程为 $y=\frac{1}{a}x$，则 $A(c,\frac{c}{a}), k_{AB}=\frac{3}{a}$.又因为 AB⊥OB，所以 $\frac{3}{a}(-\frac{1}{a})=-1$，解得 $a^2=3$，故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

（2）本题证明实质为计算 $\left|\frac{MF}{NF}\right|$ 的值.分别用坐标表示直线 l 与 AF 的交点 $M(2,\frac{2x_0-3}{3y_0})$ 及直线 l 与直线 $x=\frac{3}{2}$ 的交点为 $N(\frac{3}{2},\frac{\frac{3}{2}x_0-3}{3y_0})$，并利用 $\frac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$ 化简.：$\frac{MF^2}{NF^2}=\frac{4(2x_0-3)^2}{9[y_0^2+(x_0-2)^2]}=\frac{4(2x_0-3)^2}{9[\frac{x_0^2}{3}-1+(x_0-2)^2]}=\frac{4}{3}$.

试题解析：（1）设 $F(c,0)$，因为 $b=1$，所以 $c=\sqrt{a^2+1}$

直线 OB 方程为 $y=-\frac{1}{a}x$，直线 BF 的方程为 $y=\frac{1}{a}(x-c)$，解得 $B(\frac{c}{2},-\frac{c}{2a})$

又直线 O A 的方程为 $y=\frac{1}{a}x$，则 $A(c,\frac{c}{a}),k_{AB}=\frac{3}{a}$.

又因为 AB⊥OB，所以 $\frac{3}{a}(-\frac{1}{a})=-1$，解得 $a^2=3$，故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

（2）由（1）知 $a=\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{3}-y_0y=1(y_0\neq 0)$，即 $y=\frac{x_0x-3}{3y_0}$

因为直线 AF 的方程为 $x=2$，所以直线 l 与 AF 的交点 $M(2,\frac{2x_0-3}{3y_0})$

直线 l 与直线 $x=\frac{3}{2}$ 的交点为 $N(\frac{3}{2},\frac{\frac{3}{2}x_0-3}{3y_0})$

则 $\frac{MF^2}{NF^2}=\frac{4(2x_0-3)^2}{9[y_0^2+(x_0-2)^2]}$

因为是 C 上一点，则 $\frac{{x_0}^2}{3}-{y_0}^2=1$.，代入上式得

$\frac{MF^2}{NF^2}=\frac{4(2x_0-3)^2}{9[y_0^2+(x_0-2)^2]}=\frac{4(2x_0-3)^2}{9[\frac{x_0^2}{3}-1+(x_0-2)^2]}=\frac{4}{3}$，所求定值为 $\frac{MF}{NF}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

考点：双曲线方程，直线的交点

21.（满分 14 分）随机将 $1,2,\cdots,2n\left(n\in N^*,n\geq 2\right)$ 这 2n 个连续正整数分成 A,B 两组，每组 n 个数，A 组最小数为 a_1，最大数为 a_2；B 组最小数为 b_1，最大数为 b_2，记 $\xi=a_2-a_1,\eta=b_2-b_1$

（1）当 $n=3$ 时，求 ξ 的分布列和数学期望；

（2）令 C 表示事件 ξ 与 η 的取值恰好相等，求事件 C 发生的概率 $p\left(c\right)$；

（3）对（2）中的事件 C,$\overline{c}$ 表示 C 的对立事件，判断 $p\left(c\right)$ 和 $p\left(\overline{c}\right)$ 的大小关系，并说明理由。

【答案】(1)

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

$E\xi=\frac{7}{2}$.（2）当 $n=2$ 时，$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，当 $n\geq 3$ 时 $P(C)=\frac{2(2+\sum_{k=1}^{n-2}C_{2k}^{k})}{C_{2n}^{n}}$

（3）当 $n=2$ 时，$P(C)>P(\overline{C})$，当 $n\geq 3$ 时，$P(C)<P(\overline{C})$.

【解析】

试题分析：（1）当 $n=3$ 时，将 6 个正整数平均分成 A,B 两组，不同的分组方法共有 $C_6^3=20$ 种，ξ 所有可能

值为 2,3,4,5.对应组数分别为 4,6,6,4，对应概率为$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{1}{5}$，$E\xi=2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}=\frac{7}{2}$.（2）$\xi$和$\eta$恰好相等的所有可能值为$n-1,n,n+1,\cdots,2n-2$.当$\xi$和$\eta$恰好相等且等于$n-1$时，不同的分组方法有 2 种；当$\xi$和$\eta$恰好相等且等于$n$时，不同的分组方法有 2 种；当$\xi$和$\eta$恰好相等且等于$n+1$时，不同的分组方法有 $2C_2^1$种；当ξ和η恰好相等且等于$n+2$时，不同的分组方法有 $2C_4^2$种；以此类推：ξ和η恰好相等且等于$n+k(k=1,2,\cdots,n-2),(n\geq 3)$时，不同的分组方法有 $2C_{2k}^k$种；所以当$n=2$时，$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

当$n\geq 3$时$P(C)=\frac{2(2+\sum_{k=1}^{n-2}C_{2k}^k)}{C_{2n}^n}$（3）先归纳：当$n=2$时，$P(\overline{C})=\frac{1}{3}$,因此$P(C)>P(\overline{C})$,当$n\geq 3$时，$P(C)<P(\overline{C})$,

即证当$n\geq 3$时$P(C)=\frac{2(2+\sum_{k=1}^{n-2}C_{2k}^k)}{C_{2n}^n}<\frac{1}{2}$, $4(2+\sum_{k=1}^{n-2}C_{2k}^k)<C_{2n}^n$，这可用数学归纳法证明. 当$n=m+1$时，

$4(2+\sum_{k=1}^{m+1-2}C_{2k}^k)=4(2+\sum_{k=1}^{m-2}C_{2k}^k)+4C_{2m-2}^{m-1}<C_{2m}^m+4C_{2m-2}^{m-1}$，利用阶乘作差$C_{2m+2}^{m+1}-(C_{2m}^m+4C_{2m-2}^{m-1})$可得大小.

试题解析：（1）当$n=3$时，ξ所有可能值为 2,3,4,5.将 6 个正整数平均分成 A,B 两组，不同的分组方法共有 $C_6^3=20$种，所以ξ的分布列为

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

$E\xi=2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}=\frac{7}{2}$.

（2）ξ和η恰好相等的所有可能值为$n-1,n,n+1,\cdots,2n-2$.

又ξ和η恰好相等且等于$n-1$时，不同的分组方法有 2 种；

ξ和η恰好相等且等于n时，不同的分组方法有 2 种；

ξ和η恰好相等且等于$n+k(k=1,2,\cdots,n-2),(n\geq 3)$时，不同的分组方法有 $2C_{2k}^k$种；

所以当$n=2$时，$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

当$n\geq 3$时$P(C)=\frac{2(2+\sum_{k=1}^{n-2}C_{2k}^k)}{C_{2n}^n}$

（3）由（2）当$n=2$时，$P(\overline{C})=\frac{1}{3}$, 因此$P(C)>P(\overline{C})$,

而当$n\geq 3$时，$P(C)<P(\overline{C})$, 理由如下：

$P(C)<P(\overline{C})$, 等价于$4(2+\sum_{k=1}^{n-2}C_{2k}^k)<C_{2n}^n$ ①

用数学归纳法来证明：

1° 当 $n=3$ 时，①式左边 $=4(2+C_2^1)=16$，①式右边 $=C_6^3=20$，所以①式成立

2° 假设 $n=m(m\geq 3)$ 时①式成立，即 $4(2+\sum_{k=1}^{m-2}C_{2k}^k)<C_{2m}^m$ 成立

那么，当 $n=m+1$ 时，①式左边 $=4(2+\sum_{k=1}^{m+1-2}C_{2k}^k)=4(2+\sum_{k=1}^{m-2}C_{2k}^k)+4C_{2m+2}^{m+1}<C_{2m}^m+4C_{2m+2}^{m+1}$

$$=\frac{(2m)!}{m!m!}+\frac{4\times(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!}=\frac{(m+1)^2(2m)(2m-2)!(4m-1)}{(m+1)!(m+1)!}$$

$$<\frac{(m+1)^2(2m)(2m-2)!(4m)}{(m+1)!(m+1)!}=C_{2m+2}^{m+1}\cdot\frac{2(m+1)m}{(2m+1)(2m-1)}<C_{2m+2}^{m+1}$$ =①式右边

即当 $n=m+1$ 时①式也成立

综合 1° 2° 得，对于 $n\geq 3$ 的所有正整数，都有 $P(C)<P(\overline{C})$ 成立

考点：概率分布及数学期望，概率，组合性质，数学归纳法