2010年江西高考理科数学真题及答案

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每个小题 5 分，共 60 分。在每个小题给出的四个选项中，有一项是符合题目要求的。

1.已知（x+i）（1-i）=y，则实数 x，y 分别为（　　）

A.x=-1，y=1　　　B. x=-1，y=2

C. x=1，y=1　　　D. x=1，y=2

2.若集合 A=$\left\{x \mid |x| \le 1,\ x \in R\right\}$，B=$\left\{y \mid y = x^2,\ x \in R\right\}$，则 A$\cap$B=（　　）

A. $\{x \mid -1 \le x \le 1\}$　　　B. $\{x \mid x \ge 0\}$

C. $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$　　　D. $\varnothing$

3.不等式 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right| > \dfrac{x-2}{x}$ 的解集是（　　）

A. $(0,2)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)=$（　　）

A. $\dfrac{5}{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 2　　D. 不存在

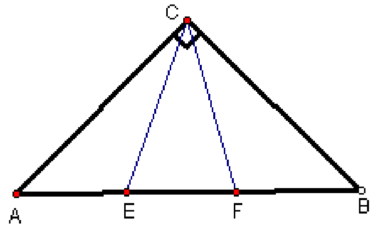
5.等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，a_8=4，函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)$，则 $f'(0)=$（　）

A. 2^6　　B. 2^9　　C. 2^{12}　　D. 2^{15}

6. $\left(2-\sqrt{x}\right)^8$ 展开式中不含 x^4 项的系数的和为（　　）

A.-1　　B.0　　C.1　　D.2

7.E,F是等腰直角△ABC斜边AB上的三等分点,则 $\tan\angle ECF=$（　　）



A. $\dfrac{16}{27}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

8.直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 M,N 两点，若 $|MN|\ge 2\sqrt{3}$，则 k 的取值范围是

A. $\left[-\frac{3}{4},0\right]$　　B. $\left[-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup[0,+\infty]$　C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　D. $\left[-\frac{2}{3},0\right]$

9．给出下列三个命题：

①函数 $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 是同一函数；

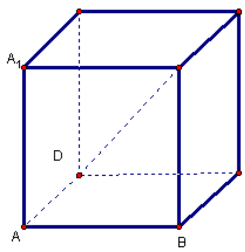
②若函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则函数 $y=f\left(2x\right)$ 与 $y=\frac{1}{2}g\left(x\right)$ 的图像也关于直线 $y=x$ 对称；

③若奇函数 $f\left(x\right)$ 对定义域内任意 x 都有 $f\left(x\right)=f(2-x)$，则 $f\left(x\right)$ 为周期函数。

其中真命题是

A. ①②　　B. ①③　　C.②③　　D. ②

10.过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 作直线 L，使 L 与棱 AB，AD，AA_1 所成的角都相等，这样的直线 L 可以作

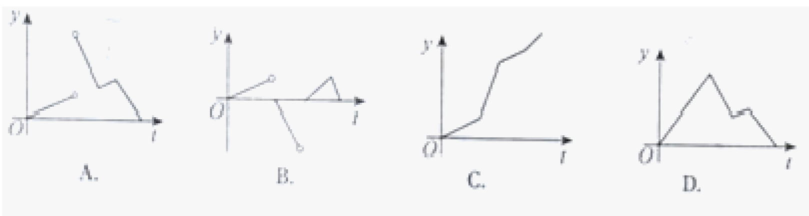


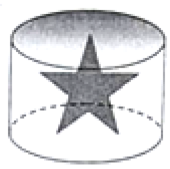
A.1 条　　B.2 条　　C.3 条　　D.4 条

11.一位国王的铸币大臣在每箱 100 枚的硬币中各掺入了一枚劣币，国王怀疑大臣作弊，他用两种方法来检测。方法一：在 10 箱子中各任意抽查一枚；方法二：在 5 箱中各任意抽查两枚。国王用方法一、二能发现至少一枚劣币的概率分别为 p_1 和 p_2，则

A. $p_1=p_2$　　B. $p_1<p_2$　　C. $p_1>p_2$　　D。以上三种情况都有可能

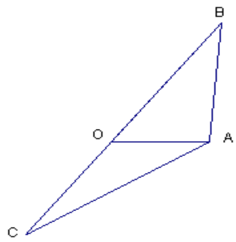
12.如图，一个正五角星薄片（其对称轴与水面垂直）匀速地升出水面，记 t 时刻五角星露出水面部分的图形面积为 $S\left(t\right)\left(S\left(0\right)=0\right)$，则导函数 $y=S'\left(t\right)$ 的图像大致为





二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。请把答案填在答题卡上。

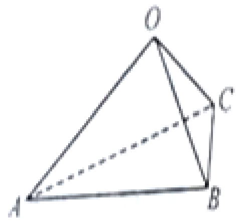
13.已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$__



14.将 6 位志愿者分成 4 组，其中两个各 2 人，另两个组各 1 人，分赴世博会的四个不同场馆服务，不同的分配方案有_______种（用数字作答）。

15. 点 $A(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 的右支上，若点 A 到右焦点的距离等于 $2x_0$，则 $x_0=$

16. 如图，在三棱锥 $O-ABC$ 中，三条棱 OA，OB，OC 两两垂直，且 $OA>OB>OC$，分别经过三条棱 OA，OB，OC 作一个截面平分三棱锥的体积，截面面积依次为 S_1，S_2，S_3，则 S_1，S_2，S_3 的大小关系为__________。



三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\left(1+\cot x\right)\sin^2 x+m\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$。

(1) 当 m=0 时，求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的取值范围；

(2) 当 $\tan a=2$ 时，$f\left(a\right)=\frac{3}{5}$，求 m 的值。

18. （本小题满分 12 分）

某迷宫有三个通道，进入迷宫的每个人都要经过一扇智能门。首次到达此门，系统会随机（即等可能）为你打开一个通道，若是 1 号通道，则需要 1 小时走出迷宫；若是 2 号、3 号通道，则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门。再次到达智能门时，系统会随机打开一个你未到过的通道，直至走完迷宫为止。令 ξ 表示走出迷宫所需的时间。

（1） 求 ξ 的分布列；

（2） 求 ξ 的数学期望。

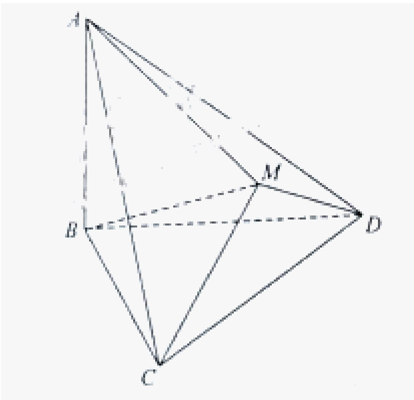
19. （本小题满分 12 分）

设函数 $f\left(x\right)=\ln x+\ln\left(2-x\right)+ax(a>0)$。

（1）当 a=1 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间。

（2）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$，求 a 的值。

20. （本小题满分 12 分）



如图△BCD 与△MCD 都是边长为 2 的正三角形，平面 MCD⊥平面 BCD，AB⊥平面 BCD，$AB=2\sqrt{3}$。

（1） 求点 A 到平面 MBC 的距离；

（2） 求平面 ACM 与平面 BCD 所成二面角的正弦值。

21. （本小题满分 12 分）

设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，抛物线 $C_2:x^2+by=b^2$。

（1） 若 C_2 经过 C_1 的两个焦点，求 C_1 的离心率；

（2） 设 A（0，b），$Q\left(3\sqrt{3},\frac{5}{4}\right)$，又 M、N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点，若△AMN 的垂心为 $B\left(0,\frac{3}{4}b\right)$，且△QMN 的重心在 C_2 上，求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程。

22. （本小题满分 14 分）

证明以下命题：

（1） 对任一正整 a，都存在整数 b，c（b<c），使得 a^2，b^2，c^2 成等差数列。

（2） 存在无穷多个互不相似的三角形△ $_n$，其边长 a_n，b_n，c_n 为正整数且 a_n^2，b_n^2，c_n^2 成等差数列。

2010年江西高考理科数学真题及答案

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每个小题5分，共60分。在每个小题给出的四个选项中，有一项是符合题目要求的。

1.已知（x+i）（1-i）=y，则实数x，y分别为（　　）

A.x=-1，y=1　　　　B. x=-1，y=2

C. x=1，y=1　　　　D. x=1，y=2

【答案】 D

【解析】考查复数的乘法运算。可采用展开计算的方法，得$(x-i^2)+(1-x)i=y$，没有虚部，x=1,y=2.

2.若集合A=$\left\{x\,\middle|\,|x|\le 1，x\in R\right\}$，B=$\left\{y\,|\,y=x^2，x\in R\right\}$，则$A\cap B$=（　　）

A. $\{x\,|-1\le x\le 1\}$　　　　B. $\{x\,|\,x\ge 0\}$

C. $\{x\,|\,0\le x\le 1\}$　　　　D. $\varnothing$

【答案】 C

【解析】考查集合的性质与交集以及绝对值不等式运算。常见的解法为计算出集合A、B；$A=\{x\,|-1\le x\le 1\}$，$B=\{y\,|\,y\ge 0\}$,解得$A\bigcap B=\{x|0\le x\le 1\}$。在应试中可采用特值检验完成。

3.不等式 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right|>\dfrac{x-2}{x}$ 的解集是（　　）

A. $(0,2)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty，0)\cup(0,+\infty)$

【答案】 A

【解析】考查绝对值不等式的化简.绝对值大于本身，值为负数.$\dfrac{x-2}{x}<0$，解得A。

或者选择x=1和x=-1,两个检验进行排除。

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)=$ （　　）

A. $\dfrac{5}{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 2　　D. 不存在

【答案】B

【解析】考查等比数列求和与极限知识.解法一：先求和，然后对和取极限。

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{2}$$

5. 等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，a_8=4，函数$f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)$，则$f'(0)=$（　）

A. 2^6　　B. 2^9　　C. 2^{12}　　D. 2^{15}

【答案】C

【解析】考查多项式函数的导数公式，重点考查学生创新意识，综合与灵活地应用所学的数学知识、思想和方法。考虑到求导中，含有 x 项均取 0，则$f'(0)$只与函数$f(x)$的一次项有关；得：$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_8=(a_1a_8)^4=2^{12}$。

6. $\left(2-\sqrt{x}\right)^8$展开式中不含$x^4$项的系数的和为（　　）

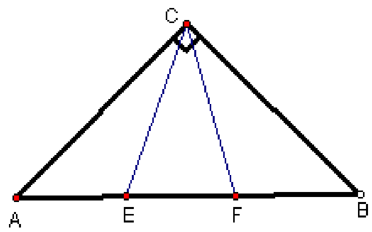
A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

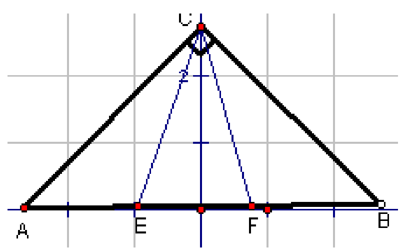
【答案】B

【解析】考查对二项式定理和二项展开式的性质，重点考查实践意识和创新能力，体现正难则反。采用赋值法，令 x=1 得：系数和为 1，减去x^4项系数$C_8^8 2^0(-1)^8=1$即为所求，答案为 0.

7. E，F 是等腰直角△ABC 斜边 AB 上的三等分点，则$\tan\angle ECF=$（　　）

A. $\frac{16}{27}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$





【答案】D

【解析】考查三角函数的计算、解析化应用意识。

解法 1：约定 AB=6, AC=BC=$3\sqrt{2}$, 由余弦定理 CE=CF=$\sqrt{10}$, 再由余弦定理得$\cos\angle ECF=\frac{4}{5}$，

解得$\tan\angle ECF=\frac{3}{4}$

解法 2：坐标化。约定 AB=6, AC=BC=$3\sqrt{2}$, F(1, 0), E(-1, 0), C（0, 3）利用向量的夹角公式得

$\cos\angle ECF=\frac{4}{5}$，解得$\tan\angle ECF=\frac{3}{4}$。

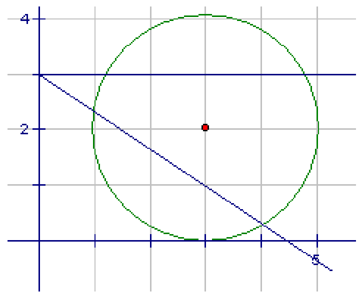
8. 直线 $y=kx+3$ 与圆 $\left(x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$ 相交于 M,N 两点，若 $\left|MN\right|\geq 2\sqrt{3}$，则 k 的取值范围是

A. $\left[-\frac{3}{4},0\right]$　　B. $\left[-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[0,+\infty\right]$　　C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　D. $\left[-\frac{2}{3},0\right]$

【答案】A

【解析】考查直线与圆的位置关系、点到直线距离公式，重点考察数形结合的运用.

解法 1：圆心的坐标为（3.，2），且圆与 y 轴相切．当 $|\mathrm{MN}|=2\sqrt{3}$时，由点到直线距离公式，解得$[-\frac{3}{4},0]$；



解法 2：数形结合，如图由垂径定理得夹在两直线之间即可，　不取 $+\infty$，排除 B，考虑区间不对称，排除 C，利用斜率估值，选 A

9．给出下列三个命题：

①函数 $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 是同一函数；

②若函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则函数 $y=f\left(2x\right)$ 与 $y=\frac{1}{2}g\left(x\right)$ 的图像也关于直线 $y=x$ 对称；

③若奇函数 $f\left(x\right)$ 对定义域内任意 x 都有 $f\left(x\right)=f(2-x)$，则 $f\left(x\right)$ 为周期函数。

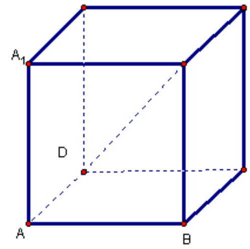
其中真命题是

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ②

【答案】C

【解析】考查相同函数、函数对称性的判断、周期性知识。考虑定义域不同，①错误；排除 A、B，验证③，$f\left(-x\right)=f[2-(-x)]=f(2+x)$，又通过奇函数得 $f\left(-x\right)=-f(x)$，所以 f（x）是周期为 2 的周期函数，选择 C。

10. 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 作直线 L，使 L 与棱 AB，AD，AA_1 所成的角都相等，这样的直线 L 可以作



A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

【答案】D

【解析】考查空间感和线线夹角的计算和判断，重点考查学生分类、划归转化的能力。第一类：通过点 A 位于三条棱之间的直线有一条体对角线 AC_1，第二类：在图形外部和每条棱的外角和另 2 条棱夹角相等，有 3 条，合计 4 条。

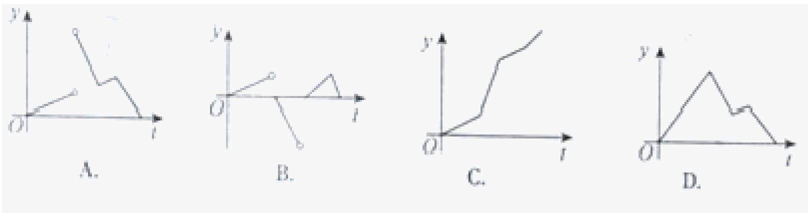
11. 一位国王的铸币大臣在每箱 100 枚的硬币中各掺入了一枚劣币，国王怀疑大臣作弊，他用两种方法来检测。方法一：在 10 箱子中各任意抽查一枚；方法二：在 5 箱中各任意抽查两枚。国王用方法一、二能发现至少一枚劣币的概率分别为 p_1 和 p_2，则

A. $p_1 = p_2$　　B. $p_1 < p_2$　　C. $p_1 > p_2$　　D。以上三种情况都有可能

【答案】B

【解析】考查不放回的抽球、重点考查二项分布的概率。本题是北师大版新课标的课堂作业，作为旧大纲的最后一年高考，本题给出一个强烈的导向信号。方法一：每箱的选中的概率为 $\frac{1}{10}$，总概率为 $1-C_{10}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{10}$；同理，方法二：每箱的选中的概率为 $\frac{1}{5}$，总事件的概率为 $1-C_5^0(\frac{1}{5})^0(\frac{4}{5})^5$，作差得 $p_1 < p_2$。

12. 如图，一个正五角星薄片（其对称轴与水面垂直）匀速地升出水面，记 t 时刻五角星露出水面部分的图形面积为 $S(t)(S(0)=0)$，则导函数 $y=S'(t)$ 的图像大致为

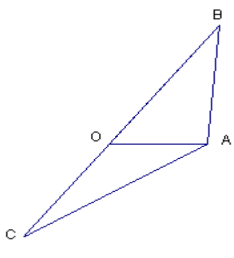


【答案】A

【解析】本题考查函数图像、导数图、导数的实际意义等知识，重点考查的是对数学的探究能力和应用能力。最初零时刻和最后终点时刻没有变化，导数取零，排除 C；总面积一直保持增加，没有负的改变量，排除 B；考察 A、D 的差异在于两肩位置的改变是否平滑，考虑到导数的意义，判断此时面积改变为突变，产生中断，选择 A。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。请把答案填在答题卡上。

13. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$__



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】考查向量的夹角和向量的模长公式，以及向量三角形法则、余弦定理等知识，如图 $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB},\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$，由余弦定理得：$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$

14. 将 6 位志愿者分成 4 组，其中两个各 2 人，另两个组各 1 人，分赴世博会的四个不同场

馆服务，不同的分配方案有_______种（用数字作答）。

【答案】 1080

【解析】考查概率、平均分组分配问题等知识，重点考查化归转化和应用知识的意识。先分组，考虑到有2个是平均分组，得两个两人组$\frac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}$两个一人组$\frac{C_2^1C_1^1}{A_2^2}$，再全排列得：

$$\frac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}\cdot\frac{C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_4^4=1080$$

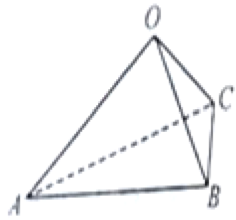
15. 点$A(x_0，y_0)$在双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$的右支上，若点A到右焦点的距离等于$2x_0$，则$x_0=$

【答案】 2

【解析】考查圆锥曲线的基本概念和第二定义的转化，读取 a=2. c=6, $\frac{r}{d}=e\Rightarrow r=3d$,

$$2x_0=3(x_0-\frac{a^2}{c})\Rightarrow x_0=2$$

16. 如图，在三棱锥$O-ABC$中，三条棱OA，OB，OC两两垂直，且$OA>OB>OC$，分别经过三条棱OA，OB，OC作一个截面平分三棱锥的体积，截面面积依次为S_1，S_2，S_3，则S_1，S_2，S_3的大小关系为__________。



【答案】 $S_3<S_2<S_1$

【解析】考查立体图形的空间感和数学知识的运用能力，通过补形，借助长方体验证结论，特殊化，令边长为1，2，3得$S_3<S_2<S_1$。

三、解答题：本大题共6小题，共74分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分12分）

已知函数$f\left(x\right)=\left(1+\cot x\right)\sin^2 x+m\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$。

(1) 当 m=0 时，求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的取值范围；

(2) 当 $\tan a=2$ 时，$f\left(a\right)=\frac{3}{5}$，求 m 的值。

【解析】考查三角函数的化简、三角函数的图像和性质、已知三角函数值求值问题。依托三角函数化简，考查函数值域，作为基本的知识交汇问题，考查基本三角函数变换，属于中等题.

解：（1）当 m=0 时，$f(x)=(1+\frac{\cos x}{\sin x})\sin^2 x=\sin^2 x+\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}[\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1]$，由已知 $x\in[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}]$，得 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

从而得：$f(x)$ 的值域为 $[0,\frac{1+\sqrt{2}}{2}]$

（2）$f(x)=(1+\frac{\cos x}{\sin x})\sin^2 x+m\sin(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4})$

化简得：$f(x)=\frac{1}{2}[\sin 2x+(1+m)\cos 2x]+\frac{1}{2}$

当 $\tan\alpha=2$，得：$\sin 2a=\frac{2\sin a\cos a}{\sin^2 a+\cos^2 a}=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}=\frac{4}{5}$，$\cos 2a=\frac{3}{5}$，

代入上式，m=-2.

18. （本小题满分 12 分）

某迷宫有三个通道，进入迷宫的每个人都要经过一扇智能门。首次到达此门，系统会随机（即等可能）为你打开一个通道，若是 1 号通道，则需要 1 小时走出迷宫；若是 2 号、3 号通道，则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门。再次到达智能门时，系统会随机打开一个你未到过的通道，直至走完迷宫为止。令 ξ 表示走出迷宫所需的时间。

（3） 求 ξ 的分布列；

（4） 求 ξ 的数学期望。

【解析】考查数学知识的实际背景，重点考查相互独立事件的概率乘法公式计算事件的概率、随机事件的数学特征和对思维能力、运算能力、实践能力的考查。

（1） 必须要走到 1 号门才能走出，ξ 可能的取值为 1，3，4，6

$P(\xi=1)=\frac{1}{3}$，　　$P(\xi=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，　　$P(\xi=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

$P(\xi=6)=A_2^2(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2})\times1=\frac{1}{3}$

分布列为：

ξ	1	3	4	6
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

（2）$E\xi=1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{3}=\frac{7}{2}$ 小时

19. （本小题满分 12 分）

设函数 $f\left(x\right)=\ln x+\ln\left(2-x\right)+ax(a>0)$。

（1）当 a=1 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间。

（2）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$，求 a 的值。

【解析】考查函数导数运算、利用导数处理函数最值等知识。

解：对函数求导得：$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2-x}+a$，定义域为（0，2）

（1） 单调性的处理，通过导数的零点进行穿线判别符号完成。

当 a=1 时，令 $f'(x)=0$ 得 $\frac{1}{x}-\frac{1}{2-x}+1=0\Rightarrow\frac{-x^2+2}{x(2-x)}=0$

当 $x\in(0,\sqrt{2}),f'(x)>0,$ 为增区间；当 $x\in(\sqrt{2},2),f'(x)<0,$ 为减函数。

（2） 区间 $\left(0,1\right]$ 上的最值问题，通过导数得到单调性，结合极值点和端点的比较得到，确定

待定量 a 的值。

当 $x\in\left(0,1\right]$ 有最大值，则必不为减函数，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2-x}+a$ >0，为单调递增区间。

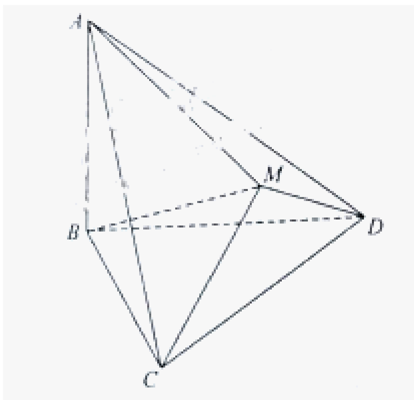
最大值在右端点取到。$f_{\max}=f(1)=a=\frac{1}{2}$。

20. （本小题满分 12 分）

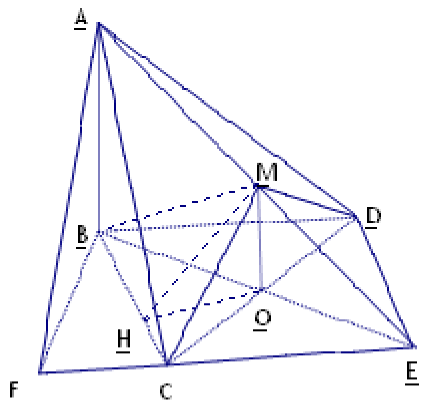
如图△BCD 与△MCD 都是边长为 2 的正三角形，平面 MCD⊥平面 BCD，AB⊥平面 BCD，$AB=2\sqrt{3}$。

（3） 求点 A 到平面 MBC 的距离；

（4） 求平面 ACM 与平面 BCD 所成二面角的正弦值。



【解析】本题以图形拼折为载体主要考查了考查立体图形的空间感、点到直线的距离、二面角、空间向量、二面角平面角的判断有关知识，同时也考查了空间想象能力和推理能力



解法一：（1）取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$. 又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD，所以 $MO// AB$，A、B、O、M 共面. 延长 AM、BO 相交于 E，则 $\angle AEB$ 就是 AM 与平面 BCD 所成的角. $OB=MO=\sqrt{3}$，$MO// AB$，MO//面 ABC，M、O 到平面 ABC 的距离相等，作 OH⊥BC 于 H，连 MH，则 MH⊥BC，求得：

$OH=OC\sin 60^{0}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$MH=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，利用体积相等得：

$$V_{A-MBC}=V_{M-ABC}\Rightarrow d=\frac{2\sqrt{15}}{5}。$$

（2）CE 是平面 ACM 与平面 BCD 的交线.

由（1）知，O 是 BE 的中点，则 $BCED$ 是菱形.

作 $BF\perp EC$ 于 F，连 AF，则 $AF\perp EC$，$\angle AFB$ 就是二面角 $A-EC-B$ 的平面角，设为 θ.

因为 $\angle BCE=120°$，所以 $\angle BCF=60°$.

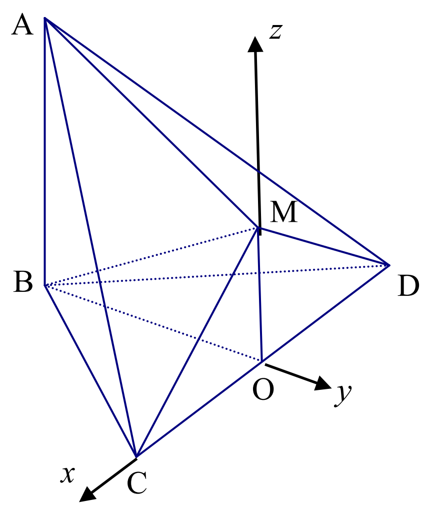
$$BF=BC\cdot\sin 60^{\circ}=\sqrt{3},$$

$$\tan\theta=\frac{AB}{BF}=2，\quad \sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

所以，所求二面角的正弦值是 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

【点评】传统方法在处理时要注意到辅助线的处理，一般采用射影、垂线、平行线等特殊位置的元素解决

解法二：取 CD 中点 O，连 OB，OM，则 $OB\perp CD$，$OM\perp CD$，又平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，则 $MO\perp$ 平面 BCD.



以 O 为原点，直线 OC、BO、OM 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系如图.

$OB=OM=\sqrt{3}$，则各点坐标分别为 O（0，0，0），C（1，0，0），M（0，0，$\sqrt{3}$），B（0，$-\sqrt{3}$，0），A（0，$-\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$），

（1）设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 MBC 的法向量，则 $\overline{BC}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BM}=(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$，由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}$ 得 $x+\sqrt{3}y=0$；由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{BM}$ 得 $\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0$；取 $\vec{n}=(\sqrt{3},-1,1),\overrightarrow{BA}=(0,0,2\sqrt{3})$，则距离

$d=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

（2）$\overrightarrow{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CA}=(-1,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$．

设平面 ACM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CM}\\ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{CA}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0\\ -x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$．解得 $x=\sqrt{3}z$， $y=z$， 取 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,1)$．又平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$， 则

$\cos<\overrightarrow{n_1},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

设所求二面角为θ，则$\sin\theta=\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{5}})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

【点评】向量方法作为沟通代数和几何的工具在考察中越来越常见，此类方法的要点在于建立恰当的坐标系，便于计算，位置关系明确，以计算代替分析，起到简化的作用，但计算必须慎之又慎

21．（本小题满分 12 分）

设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，抛物线 $C_2:x^2+by=b^2$。

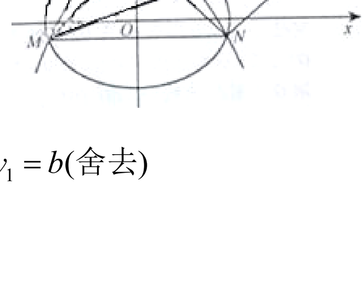
（3） 若 C_2 经过 C_1 的两个焦点，求 C_1 的离心率；

（4） 设 A（0，b），$Q\left(3\sqrt{3},\frac{5}{4}\right)$，又 M、N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点，若△AMN 的垂心为 $B\left(0,\frac{3}{4}b\right)$，且△QMN 的重心在 C_2 上，求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程。

【解析】考查椭圆和抛物线的定义、基本量，通过交点三角形来确认方程。

（1）由已知椭圆焦点(c,0)在抛物线上，可得：$c^2=b^2$，由

$a^2=b^2+c^2=2c^2,\text{有}\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{2}}{2}$。



(2) 由题设可知 M 、 N 关于 y 轴对称， 设 $M(-x_1,y_1),N(x_1,y_1)(x_1>0)$，由 ΔAMN 的垂心为 B，有

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}=0\Rightarrow -x_1^2+(y_1-\frac{3}{4}b)(y_1-b)=0$。

由点 $N(x_1,y_1)$ 在抛物线上，$x_1^2+by_1=b^2$，解得：$y_1=-\frac{b}{4}\text{或}y_1=b(\text{舍去})$

故$x_1=\dfrac{\sqrt{5}}{2}b, M(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}b,-\dfrac{b}{4}), N(\dfrac{\sqrt{5}}{2}b,-\dfrac{b}{4})$，得$\Delta QMN$重心坐标$(\sqrt{3},\dfrac{b}{4})$.

由重心在抛物线上得：$3+\dfrac{b^2}{4}=b^2,所以b=2$，$M(-\sqrt{5},-\dfrac{1}{2}), N(\sqrt{5},-\dfrac{1}{2})$，又因为

M、N在椭圆上得：$a^2=\dfrac{16}{3}$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{\frac{16}{3}}+\dfrac{y^2}{4}=1$，抛物线方程为$x^2+2y=4$。

22. （本小题满分14分）

证明以下命题：

（3） 对任一正整a,都存在整数b,c(b<c)，使得a^2，b^2，c^2成等差数列。

（4） 存在无穷多个互不相似的三角形△$_n$，其边长a_n，b_n，c_n为正整数且a_n^2，b_n^2，c_n^2成等差数列。

【解析】作为压轴题，考查数学综合分析问题的能力以及创新能力。

（1）考虑到结构要证$a^2+c^2=2b^2$,；类似勾股数进行拼凑。

证明：考虑到结构特征，取特值$1^2,5^2,7^2$满足等差数列，只需取b=5a，c=7a，对一切正整数a均能成立。

结合第一问的特征，将等差数列分解，通过一个可做多种结构分解的因式说明构成三角形，再证明互不相似，且无穷。

证明：当a_n^2，b_n^2，c_n^2成等差数列，则$b_n^2-a_n^2=c_n^2-b_n^2$，

分解得：$(b_n+a_n)(b_n-a_n)=(c_n+b_n)(c_n-b_n)$

选取关于n的一个多项式，$4n(n^2-1)$做两种途径的分解

$$4n(n^2-1)=(2n-2)(2n^2+2n)=(2n^2-2n)(2n+2)\ 4n(n^2-1)$$

对比目标式，构造$\begin{cases}a_n=n^2-2n-1\\ b_n=n^2+1 \quad (n\geq 4)\\ c_n=n^2+2n-1\end{cases}$，由第一问结论得，等差数列成立，

考察三角形边长关系，可构成三角形的三边。

下证互不相似。

任取正整数m，n，若△$_m$,△$_n$相似：则三边对应成比例

$$\frac{m^2-2m-1}{n^2-2n-1}=\frac{m^2+1}{n^2+1}=\frac{m^2+2m-1}{n^2+2n-1},$$

由比例的性质得：$\dfrac{m-1}{n-1}=\dfrac{m+1}{n+1}\Rightarrow m=n$，与约定不同的值矛盾，故互不相似。