2015年普通高等学校招生全国统一考试
山东卷文科数学试题

第Ⅰ卷（共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1．已知集合 $A=\{x\mid 2<x<4\}$，$B=\{x\mid (x-1)(x-3)<0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

（A）$(1,3)$　　（B）$(1,4)$　　（C）$(2,3)$　　（D）$(2,4)$

2．若复数Z满足 $\dfrac{\overline{z}}{1-i}=i$，其中 i 为虚数单位，则Z=(　　)

（A）$1-i$　　（B）$1+i$　　（C）$-1-i$　　（D）$-1+i$

3．设 $a=0.6^{0.6}$，$b=0.6^{1.5}$，$c=1.5^{0.6}$,则 a，b，c 的大小关系是(　　)

（A）$a<b<c$　　（B）$a<c<b$　　（C）$b<a<c$　　（D）$b<c<a$

4．要得到函数 $y=sin(4x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图象，只需要将函数 $y=sin4x$ 的图象（　　）

（A）向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位　（B）向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位

（C）向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　（D）向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

5．　设 $m\in R$，命题“若 $m>0$，则方程 $x^2+x-m=0$ 有实根”的逆否命题是(　　)

（A）若方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，则 $m>0$

(B) 若方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，则 $m\le 0$

(C) 若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m>0$

(D) 若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m\le 0$

6．

为比较甲、乙两地某月14时的气温状况，随机选取该月中的5天，将这5天中14时的气温数据（单位：℃）制成如图所示的茎叶图. 考虑以下结论：

甲		乙
9 8 6	2	8 9
1 1	3	0 1 2

①甲地该月14时的平均气温低于乙地该月14时的平均气温；

②甲地该月14时的平均气温高于乙地该月14时的平均气温；

③甲地该月14时的平均气温的标准差小于乙地该月14时的气温的标准差；

④甲地该月14时的平均气温的标准差大于乙地该月14时的气温的标准差.

其中根据茎叶图能得到的统计结论的标号为(　　)

（A）①③　(B) ①④　(C) ②③　(D) ②④

7. 在区间$\left[0,2\right]$上随机地取一个数x，则事件“$-1\le \log_{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})\le 1$”发生的概率为(

)

（A）$\frac{3}{4}$　（B）$\frac{2}{3}$　（C）$\frac{1}{3}$　（D）$\frac{1}{4}$

8. 若函数$f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-a}$是奇函数，则使$f(x)>3$成立的x的取值范围为(　　)

（A）($-\infty,-1$)　(B)(-1，0)　（C）$(0,1)$　（D）$(1,+\infty)$

9.

已知等腰直角三角形的直角边的长为 ，将该三角形绕其斜边所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为(　　)

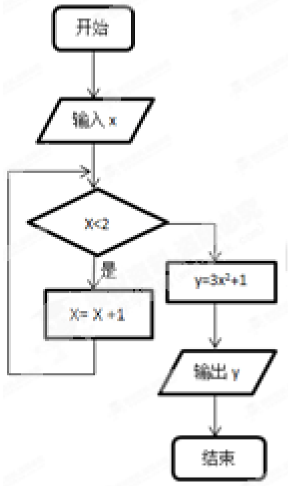
（A）$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　（B）$\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$　（C）$2\sqrt{2}\pi$　（D）$4\sqrt{2}\pi$

10. 设函数$f(x)=\begin{cases}3x-b, x<1\\ 2^x, x\ge 1\end{cases}$，若$f(f(\frac{5}{6}))=4$，则$b=$（　　）

（A）1　（B）$\frac{7}{8}$　（C）$\frac{3}{4}$　(D)$\frac{1}{2}$

第Ⅱ卷（共100分）

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.



11. 执行右边的程序框图，若输入的x的值为1，则输出的y的值是________.

12. 若x,y满足约束条件$\begin{cases} y-x\le 1 \\ x+y\le 3 \\ y\ge 1 \end{cases}$，则$z=x+3y$的最大值为________.

13. 过点$P(1,\sqrt{3})$作圆$x^2+y^2=1$的两条切线，切点分别为A,B，则$PA\cdot PB$=________.

14. 定义运算“$\otimes$”： $x\otimes y=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$（$x$，$y\in R,xy\ne 0$）. 当$x>0$，$y>0$时，

$x\otimes y+(2y)\otimes x$的最小值是________.

15.

过双曲线C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$（$a>0,b>0$）的右焦点作一条与其渐近线平行的直线，交$C$于点

P. 若点P的横坐标为$2a$，则C的离心率为________.

三、解答题：本大题共6小题，共75分.

16. （本小题满分12分）

某中学调查了某班全部45名同学参加书法社团和演讲社团的情况，数据如下表：（单位：人）

	参加书法社团	未参加书法社团
参加演讲社团	8	5
未参加演讲社团	2	30

（1）从该班随机选1名同学，求该同学至少参加上述一个社团的概率；

（2）在既参加书法社团又参加演讲社团的8名同学中，有5名男同学

A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，3名女同学B_1，B_2，B_3. 现从这5名男同学和3名女同学中各随机选1

人，求A_1被选中且B_1未被选中的概率.

17. （本小题满分12分）

ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a,b,c. 已知

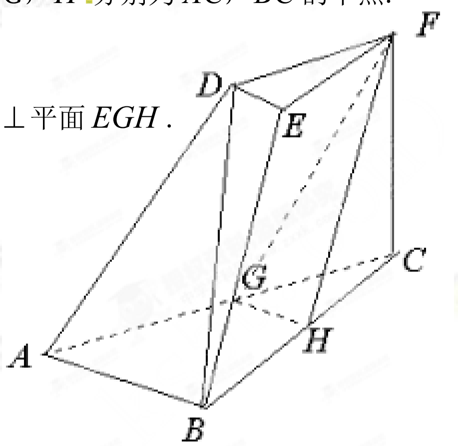
$$\cos\ B=\frac{\sqrt{3}}{3},\sin\ (A+B)=\frac{\sqrt{6}}{9},ac=2\sqrt{3}$$

求$\sin A$ 和c 的值.

18. 如图，三棱台$DEF-ABC$中，$AB=2DE$，G，H分别为AC，BC的中点.

（I）求证：$BD//$平面FGH；

（II）若$CF\perp BC$，$AB\perp BC$，求证：平面$BCD\perp$平面EGH.



19. （本小题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$是首项为正数的等差数列，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n \bullet a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$\dfrac{n}{2n+1}$.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设$b_n=\left(a_n+1\right)\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

20.（本小题满分13分）

设函数$f(x)=(x+a)\ln x$，$g(x)=\frac{x^2}{e^x}$. 已知曲线$y=f(x)$

在点$(1, f(1))$处的切线与直线$2x-y=0$平行.

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）是否存在自然数k，使得方程$f(x)=g(x)$在$(k,k+1)$内存在唯一的根？如果存在

，求出k；如果不存在，请说明理由；

（Ⅲ）设函数$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$（$min\{p,q\}$表示，p,q中的较小值），求$m(x)$

的最大值.

21.（本小题满分14分）

平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(\alpha>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且点（$\sqrt{3}$，$\frac{1}{2}$）在椭圆 C 上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设椭圆 E：$\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$，$P$ 为椭圆 C 上任意一点，过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A,B 两点，射线 PO 交椭圆 E 于点 Q.

（i）求 $\frac{|OQ|}{|OP|}$ 的值；

(ii)求 ΔABQ 面积的最大值.

2015年普通高等学校招生全国统一考试
山东卷文科数学试题答案

一、选择题：

CACBD　BACBD

二、填空题：

（11）13；（12）7；（13）$\frac{3}{2}$；（14）$\sqrt{2}$；（15）$2+\sqrt{3}$；

三、解答题：

（16）参考答案：

（1）由调查数据可知，既未参加书法社团又未参加演讲社团的有30人，故至少参加上述一个社团的共有$45-30=15$人，所以从该班级随机选1名同学，该同学至少参加上述一个社团的概率为$P=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

(2)从这5名男同学和3名女同学中各随机选1人，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_2,B_3\},\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{A_3,B_3\}$,

$\{A_4,B_1\},\{A_4,B_2\},\{A_4,B_3\},\{A_5,B_1\},\{A_5,B_2\},\{A_5,B_3\}$，共$15$个．学科网

根据题意，这些基本事件的出现是等可能的.

事件“A_1被选中且B_1未被选中”所包含的基本事件有：$\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\}$，共2个.

因此A_1被选中且B_1未被选中的概率为$P=\frac{2}{15}$.

（17）参考答案：

在ΔABC中，由$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得$\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin C=\sin(A+B)=\frac{\sqrt{6}}{9}$，

因为$\sin C<\sin B$，所以$C<B$，C为锐角，$\cos C=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，

因此$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, 可得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}c}{\frac{\sqrt{6}}{9}}=2\sqrt{3}c$，又 $ac=2\sqrt{3}$，所以 $c=1$.

（18）参考答案：

（I）证法一：连接 $DG,CD.$ 设 $CD\cap GF=M$, 连接 MH，在三棱台 $DEF-ABC$ 中，

$AB=2DE$，G 分别为 AC 的中点，可得 $DF//GC,DF=GC$，所以四边形 $DFCG$ 是平行四边形，则 M 为 CD 的中点，又 H 是 BC 的中点，所以 $HM//BD$,

又 $HM\subset$ 平面 FGH， $BD\not\subset$ 平面 FGH，所以 $BD//$ 平面 FGH.

证法二：在三棱台 $DEF-ABC$ 中，由 $BC=2EF,H$ 为 BC 的中点，

可得 $BH//EF,BH=EF,$ 所以 $HBEF$ 为平行四边形，可得 $BE//HF.$

在 ΔABC 中，G，H 分别为 AC，BC 的中点，

所以 $GH//AB,$ 又 $GH\cap HF=H$，

所以平面 $FGH//$ 平面 $ABED$，

因为 $BD\subset$ 平面 $ABED$，

所以 $BD//$ 平面 FGH.

(II)证明：连接 HE. 因为 G，H 分别为 AC，BC 的中点，所以 $GH//AB,$ 由 $AB\perp BC,$ 得 $GH\perp BC$，又 H 为 BC 的中点，所以 $EF//HC,EF=HC,$ 因此四边形 $EFCH$ 是平行四边形，所以 $CF//HE.$

又 $CF\perp BC$，所以 $HE\perp BC$.

又 $HE,GH\subset$ 平面 EGH， $HE\cap GH=H$，所以 $BC\perp$ 平面 EGH，

又 $BC\subset$ 平面 BCD，所以平面 $BCD\perp$ 平面 $EGH.$

（19）参考答案：

（I）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

令 $n=1,$ 得 $\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{3}$，所以 $a_1a_2=3$.

令 $n=2$, 得 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{5}$，所以 $a_2a_3=15$.

解得 $a_1=1, d=2$，所以 $a_n=2n-1$.

（II）由（I）知 $b_n=2n\cdot 2^{2n-4}=n\cdot 4^n$, 所以 $T_n=1\cdot 4^1+2\cdot 4^2+......+n\cdot 4^n$,

所以 $4T_n=1\cdot 4^2+2\cdot 4^3+......+(n-1)\cdot 4^n+n\cdot 4^{n+1}$,

两式相减，得 $-3T_n=4^1+4^2+......+4^n-n\cdot 4^{n+1}$

$=\frac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 4^{n+1}=\frac{1-3n}{3}\times 4^{n+1}-\frac{4}{3}$,

所以 $T_n=\frac{3n-1}{9}\times 4^{n+1}+\frac{4}{9}=\frac{4+(3n-1)\cdot 4^{n+1}}{9}$.

（20）参考答案：

（I）由题意知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 2，所以 $f'(1)=2$，

又 $f'(x)=\ln x+\frac{a}{x}+1$, 所以 $a=1$.

（II）$k=1$ 时，方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一的根.

设 $h(x)=f(x)-g(x)=(x+1)\ln x-\frac{x^2}{e^x}$,

当 $x\in(0,1]$ 时，$h(x)<0$.

又 $h(2)=3\ln 2-\frac{4}{e^2}=\ln 8-\frac{4}{e^2}>1-1=0$,

所以存在 $x_0\in(1,2)$，使 $h(x_0)=0$.

因为 $h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1+\frac{x(x-2)}{e^x}$, 所以当 $x\in(1,2)$ 时，$h'(x)>1-\frac{1}{e}>0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)$ 单调递增.

所以 $k=1$ 时，方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(k,k+1)$ 内存在唯一的根.

（III）由（II）知，方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一的根 x_0，且 $x\in(0,x_0)$ 时，

$f(x)<g(x)$，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)$，所以 $m(x)=\begin{cases}(x+1)\ln x, x\in(0,x_0]\\ \dfrac{x^2}{e^x}, x\in(x_0,+\infty)\end{cases}$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，若 $x\in(0,1], m(x)\le 0;$

若 $x\in(1,x_0)$, 由 $m'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1>0,$ 可知 $0<m(x)\le m(x_0);$ 故 $m(x)\le m(x_0).$

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，由 $m'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^x},$ 可得 $x\in(x_0,2)$ 时，$m'(x)>0, m(x)$ 单调递增；

$x\in(2,+\infty)$ 时，$m'(x)<0, m(x)$ 单调递减；

可知 $m(x)\le m(2)=\dfrac{4}{e^2}$, 且 $m(x_0)<m(2)$.

综上可得函数 $m(x)$ 的最大值为 $\dfrac{4}{e^2}$.

（16）参考答案：

（I）由题意知 $\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1,$ 又 $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a^2=4, b^2=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1.$

（II）由（I）知椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

（i）设 $P(x_0,y_0), \dfrac{|OQ|}{|OP|}=\lambda,$ 由题意知 $Q(-\lambda x_0,-\lambda y_0)$.

因为 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1.$ 又 $\dfrac{(-\lambda x_0)^2}{16}+\dfrac{(-\lambda y_0)^2}{4}=1$，即 $\dfrac{\lambda^2}{4}(\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2)=1.$

所以 $\lambda=2$，即 $\dfrac{|OQ|}{|OP|}=2.$

（ii）设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2),$ 将 $y=kx+m$ 代入椭圆 E 的方程，可得

$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$，由 $\Delta>0,$ 可得 $m^2<4+16k^2$ ………………①

则有 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-16}{1+4k^2}$.所以 $|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{16k^2+4-m^2}}{1+4k^2}$.因为直线

$y=kx+m$ 与 y 轴交点的坐标为 $(0,m)$，所以 ΔOAB 的面积

$$S=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=\frac{2|m|\sqrt{16k^2+4-m^2}}{1+4k^2}=\frac{2\sqrt{(16k^2+4-m^2)m^2}}{1+4k^2}$$

$$=2\sqrt{(4-\frac{m^2}{1+4k^2})\frac{m^2}{1+4k^2}}.$$

设 $\frac{m^2}{1+4k^2}=t$.将直线 $y=kx+m$ 代入椭圆 C 的方程，可得

$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，由 $\Delta\geq 0,$ 可得 $m^2\leq 1+4k^2$ ………………②

由①②可知 $0<t\leq 1,S=2\sqrt{(4-t)t}=2\sqrt{-t^2+4t}$. 故 $S\leq 2\sqrt{3}$.

当且仅当 $t=1$，即 $m^2=1+4k^2$ 时取得最大值 $2\sqrt{3}$.

由（i）知，ΔABQ 的面积为 $3S$，所以 ΔABQ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}$.