绝密★启用前

2019年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅱ）

答案解析版

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.已知集合 $A=\{x\,|\,x>-1\}$，$B=\{x\,|\,x<2\}$，则$A\cap B$=

A. (﹣1，+∞)　　B. (﹣∞，2)

C. (–1，2)　　D. $\varnothing$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题借助于数轴，根据交集的定义可得．

【详解】由题知，$A\bigcap B=(-1,2)$，故选C．

【点睛】本题主要考查交集运算，容易题，注重了基础知识、基本计算能力的考查．易错点是理解集合的概念及交集概念有误，不能借助数轴解题．

2.设z=i(2+i)，则$\overline{z}=$

A. 1+2i　　B. –1+2i

C. 1–2i　　D. –1–2i

【答案】D

【解析】

【分析】

本题根据复数的乘法运算法则先求得z，然后根据共轭复数的概念，写出$\overline{z}$．

【详解】$z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})=2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1+2\mathrm{i}$，

所以$\overline{z}=-1-2i$，选D．

【点睛】本题主要考查复数的运算及共轭复数，容易题，注重了基础知识、基本计算能力的考查．理解概念，准确计算，是解答此类问题的基本要求．部分考生易出现理解性错误

．

3.已知向量$\boldsymbol{a}$=(2，3)，$\boldsymbol{b}$=(3，2)，则|$\boldsymbol{a}$ - $\boldsymbol{b}$|=

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $5\sqrt{2}$

D. 50

【答案】A

【解析】

【分析】

本题先计算$a-b$，再根据模的概念求出$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

【详解】由已知，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,3)-(3,2)=(-1,1)$，

所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，

故选A

【点睛】本题主要考查平面向量模长的计算，容易题，注重了基础知识、基本计算能力的考查．由于对平面向量的坐标运算存在理解错误，从而导致计算有误；也有可能在计算模的过程中出错．

4.生物实验室有5只兔子，其中只有3只测量过某项指标，若从这5只兔子中随机取出3只，则恰有2只测量过该指标的概率为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题首先用列举法写出所有基本事件，从中确定符合条件的基本事件数，应用古典概率的计算公式求解．

【详解】设其中做过测试的3只兔子为a,b,c，剩余的2只为A,B，则从这5只中任取3只的所有取法有$\{a,b,c\},\{a,b,A\},\{a,b,B\},\{a,c,A\},\{a,c,B\},\{a,A,B\}$，

$\{b,\mathrm{c},A\},\{b,\mathrm{c},B\},\{\mathrm{b},A,B\},\{\mathrm{c},A,B\}$共10种．其中恰有2只做过测试的取法有

$\{a,b,A\},\{a,b,B\},\{a,c,A\},\{a,c,B\},\{b,\mathrm{c},A\},\{b,\mathrm{c},B\}$ 共6种，

所以恰有2只做过测试的概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，选B．

【点睛】本题主要考查古典概率的求解，题目较易，注重了基础知识、基本计算能力的考查．应用列举法写出所有基本事件过程中易于出现遗漏或重复，将兔子标注字母，利用“树图法”，可最大限度的避免出错．

5.在“一带一路”知识测验后，甲、乙、丙三人对成绩进行预测．

甲：我的成绩比乙高．

乙：丙的成绩比我和甲的都高．

丙：我的成绩比乙高．

成绩公布后，三人成绩互不相同且只有一个人预测正确，那么三人按成绩由高到低的次序为

A. 甲、乙、丙　　　　B. 乙、甲、丙

C. 丙、乙、甲　　　　D. 甲、丙、乙

【答案】A

【解析】

【分析】

利用逐一验证的方法进行求解．

【详解】若甲预测正确，则乙、丙预测错误，则甲比乙成绩高，丙比乙成绩低，故3人成绩由高到低依次为甲，乙，丙；若乙预测正确，则丙预测也正确，不符合题意；若丙预测正确，则甲必预测错误，丙比乙的成绩高，乙比甲成绩高，即丙比甲，乙成绩都高，即乙预测正确，不符合题意，故选A．

【点睛】本题将数学知识与时政结合，主要考查推理判断能力．题目有一定难度，注重了基础知识、逻辑推理能力的考查．

6.设$f(x)$为奇函数，且当$x\geq 0$时，$f(x)=e^{x}-1$，则当$x<0$时，$f(x)=$

A. $\mathrm{e}^{-x}-1$　　　　B. $\mathrm{e}^{-x}+1$

C. $-\mathrm{e}^{-x}-1$　　　　D. $-\mathrm{e}^{-x}+1$

【答案】D

【解析】

【分析】

先把$x<0$，转化为$-x>0$,代入可得$f(-x)$，结合奇偶性可得$f(x)$.

【详解】$\because f(x)$是奇函数，$f'(x_0)=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{{x_0}^2}$．当$x<0$时，$-x>0$，

$f(-x)=\mathrm{e}^{-x}-1=-f(x)$，得$f(x)=-\mathrm{e}^{-x}+1$．故选D.

【点睛】本题考查分段函数的奇偶性和解析式，渗透了数学抽象和数学运算素养．采取代换法，利用转化与化归的思想解题.

7.设α，β为两个平面，则$\alpha // \beta$的充要条件是

A. α内有无数条直线与β平行

B. α内有两条相交直线与β平行

C. α，β平行于同一条直线

D. α，β垂直于同一平面

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查了空间两个平面的判定与性质及充要条件，渗透直观想象、逻辑推理素养，利用面面平行的判定定理与性质定理即可作出判断.

【详解】由面面平行的判定定理知：α 内两条相交直线都与β平行是$\alpha // \beta$的充分条件，由面面平行性质定理知，若$\alpha // \beta$，则α内任意一条直线都与β平行，所以α内两条相交直线都与β平行是$\alpha // \beta$的必要条件，故选B.

【点睛】面面平行的判定问题要紧扣面面平行判定定理，最容易犯的错误为定理记不住，凭主观臆断，如：“若$a \subset \alpha, b \subset \beta, a // b$，则$\alpha // \beta$”此类的错误.

8.若$x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$是函数$f(x)=\sin \omega x$ ($\omega>0$)两个相邻的极值点，则$\omega=$

A. 2

B. $\frac{3}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】

从极值点可得函数的周期，结合周期公式可得ω.

【详解】由题意知，$f(x)=\sin\omega x$的周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=2(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\pi$，得$\omega=2$．故选A.

【点睛】本题考查三角函数的极值、最值和周期，渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算素养．采取公式法，利用方程思想解题．

9.若抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点是椭圆$\frac{x^2}{3p}+\frac{y^2}{p}=1$的一个焦点，则$p=$

A. 2

B. 3

C. 4

D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】

利用抛物线与椭圆有共同的焦点即可列出关于p的方程，即可解出p，或者利用检验排除的方法，如$p=2$时，抛物线焦点为（1，0），椭圆焦点为（±2，0），排除A，同样可排除B，C，故选D.

【详解】因为抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点$(\frac{p}{2},0)$是椭圆$\frac{x^2}{3p}+\frac{y^2}{p}=1$的一个焦点，所以$3p-p=(\frac{p}{2})^2$，解得$p=8$，故选D.

【点睛】本题主要考查抛物线与椭圆的几何性质，渗透逻辑推理、运算能力素养．

10.曲线$y=2\sin x+\cos x$在点$(\pi，-1)$处的切线方程为

A. $x-y-\pi-1=0$

B. $2x-y-2\pi-1=0$

C. $2x+y-2\pi+1=0$

D. $x+y-\pi+1=0$

【答案】C

【解析】

【分析】

先判定点$(\pi,-1)$是否为切点，再利用导数的几何意义求解.

【详解】当$x=\pi$时，$y=2\sin\pi+\cos\pi=-1$，即点$(\pi,-1)$在曲线$y=2\sin x+\cos x$上. $\because y'=2\cos x-\sin x, \therefore y'\big|_{x=\pi}=2\cos\pi-\sin\pi=-2,$则$y=2\sin x+\cos x$在点$(\pi,-1)$处的切线方程为$y-(-1)=-2(x-\pi)$，即$2x+y-2\pi+1=0$．故选C.

【点睛】本题考查利用导数工具研究曲线的切线方程，渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算素养．采取导数法，利用函数与方程思想解题．学生易在非切点处直接求导数而出错，首先证明已知点是否为切点，若是切点，可以直接利用导数求解；若不是切点，设出切点，再求导，然后列出切线方程.

11.已知$\alpha\in$（0，$\frac{\pi}{2}$），2sin2α=cos2α+1，则sinα=

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】

利用二倍角公式得到正余弦关系，利用角范围及正余弦平方和为1关系得出答案.

【详解】$\because 2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，$\therefore 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cos^2\alpha . \because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \therefore \cos\alpha>0$.

$\sin\alpha>0, \quad \therefore \quad 2\sin\alpha=\cos\alpha$，又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\therefore 5\sin^2\alpha=1, \quad \sin^2\alpha=\frac{1}{5}$，又$\sin\alpha>0$，$\therefore \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故选B.

【点睛】本题为三角函数中二倍角公式、同角三角函数基本关系式的考查，中等难度，判断正余弦正负，运算准确性是关键，题目不难，需细心，解决三角函数问题，研究角的范围后得出三角函数值的正负，很关键，切记不能凭感觉．

12.设F为双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$>0，$b$>0）的右焦点，$O$为坐标原点，以$OF$为直径的圆与圆$x^2+y^2=a^2$交于$P$、$Q$两点．若$|PQ|=|OF|$，则$C$的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】

准确画图，由图形对称性得出P点坐标，代入圆的方程得到c与a关系，可求双曲线的离心率.

【详解】设PQ与x轴交于点A，由对称性可知$PQ\perp x$轴，

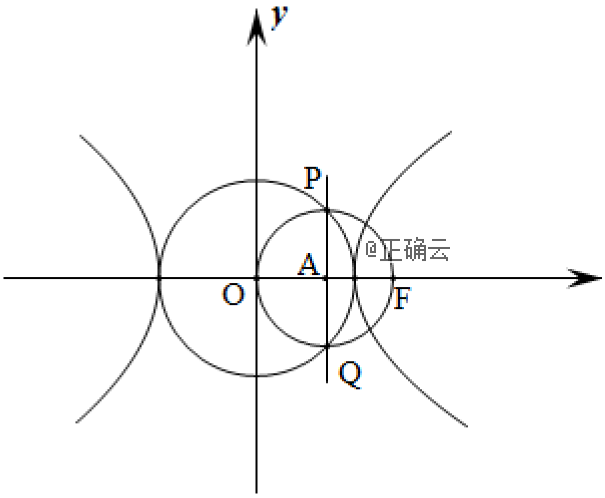
又$\because \left|PQ\right|=|OF|=c$，$\therefore |PA|=\frac{c}{2}$，$\therefore PA$为以$OF$为直径的圆的半径，

$\therefore A$为圆心$|OA|=\frac{c}{2}$.

$\therefore P\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$，又$P$点在圆$x^2+y^2=a^2$上，

$\therefore \frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}=a^2$，即$\frac{c^2}{2}=a^2$，$\therefore \quad e^2=\frac{c^2}{a^2}=2$.

$\therefore e=\sqrt{2}$，故选A.



【点睛】本题为圆锥曲线离心率的求解，难度适中，审题时注意半径还是直径，优先考虑几何法，避免代数法从头至尾，运算繁琐，准确率大大降低，双曲线离心率问题是圆锥曲线中的重点问题，需强化练习，才能在解决此类问题时事半功倍，信手拈来.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.若变量x，y满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-6\geq 0,\\ x+y-3\leq 0,\\ y-2\leq 0,\end{cases}$ 则$z=3x-y$的最大值是__________.

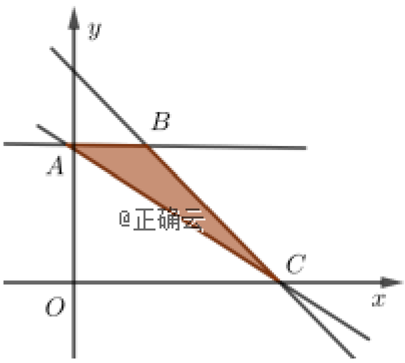
【答案】9.

【解析】

【分析】

作出可行域，平移$3x-y=0$找到目标函数取到最大值的点，求出点的坐标，代入目标函数可得.

【详解】画出不等式组表示的可行域，如图所示，



阴影部分表示的三角形ABC区域，根据直线$3x-y-z=0$中的z表示纵截距的相反数，当直线$z=3x-y$过点$C(3,0)$时，z取最大值为9.

【点睛】本题考查线性规划中最大值问题，渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算素养．采取图解法，利用数形结合思想解题．搞不清楚线性目标函数的几何意义致误，从线性目标函数对应直线的截距观察可行域，平移直线进行判断取最大值还是最小值．

14.我国高铁发展迅速，技术先进．经统计，在经停某站的高铁列车中，有10个车次的正点率为0.97，有20个车次的正点率为0.98，有10个车次的正点率为0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为__________.

【答案】0．98.

【解析】

【分析】

本题考查通过统计数据进行概率的估计，采取估算法，利用概率思想解题．

【详解】由题意得，经停该高铁站的列车正点数约为

$10\times 0.97+20\times 0.98+10\times 0.99=39.2$，其中高铁个数为10+20+10=40，所以该站所有高铁平均正点率约为$\dfrac{39.2}{40}=0.98$.

【点睛】本题考点为概率统计，渗透了数据处理和数学运算素养．侧重统计数据的概率估算，难度不大．易忽视概率的估算值不是精确值而失误，根据分类抽样的统计数据，估算出正点列车数量与列车总数的比值．

15.$\triangledown ABC$ 的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$b\sin A+a\cos B=0$，则B=___________.

【答案】$\dfrac{3\pi}{4}$.

【解析】

【分析】

先根据正弦定理把边化为角，结合角的范围可得.

【详解】由正弦定理，得$\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$．$\because A\in(0,\pi),B\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin A\neq 0,$得$\sin B+\cos B=0$，即$\tan B=-1$，$\therefore B=\dfrac{3\pi}{4}$.故选D.

【点睛】本题考查利用正弦定理转化三角恒等式，渗透了逻辑推理和数学运算素养．采取定理法，利用转化与化归思想解题．忽视三角形内角的范围致误，三角形内角均在$(0,\pi)$范围内，化边为角，结合三角函数的恒等变化求角．

16.中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一．印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”（图1）.半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体.半正多面体体现了数学的对称美．图2是一个棱数为48的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为1．则该半正多面体共有________个面，其棱长为_________．

图 1

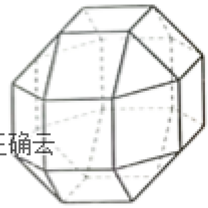


图 2

【答案】 (1). 共26个面． (2). 棱长为$\sqrt{2}-1$.

【解析】

【分析】

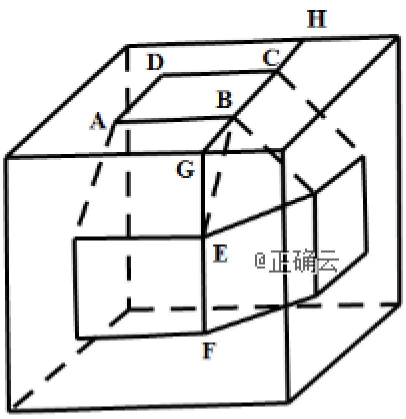
第一问可按题目数出来，第二问需在正方体中简单还原出物体位置，利用对称性，平面几何解决.

【详解】由图可知第一层与第三层各有9个面，计18个面，第二层共有8个面，所以该半正多面体共有$18+8=26$个面.

如图，设该半正多面体的棱长为x，则$AB=BE=x$，延长BC与FE交于点G，延长BC交正方体棱于H，由半正多面体对称性可知，ΔBGE为等腰直角三角形，

$$\therefore BG=GE=CH=\frac{\sqrt{2}}{2}x,\quad \therefore\quad GH=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}x+x=(\sqrt{2}+1)x=1，$$

$$\therefore x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1，即该半正多面体棱长为\frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$



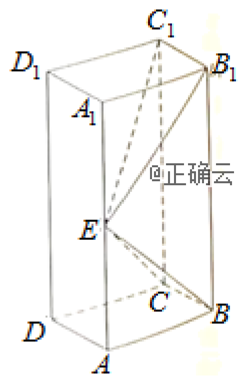
【点睛】本题立意新颖，空间想象能力要求高，物体位置还原是关键，遇到新题别慌

乱，题目其实很简单，稳中求胜是关键．立体几何平面化，无论多难都不怕，强大空间想象能力，快速还原图形．

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分。

17.如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面$ABCD$是正方形，点E在棱AA_1上，$BE\perp EC_1$.



（1）证明：$BE\perp$平面EB_1C_1；

（2）若$AE=A_1E$，$AB=3$，求四棱锥$E-BB_1C_1C$的体积．

【答案】（1）见详解；（2）18

【解析】

【分析】

（1）先由长方体得，$B_1C_1\perp$平面AA_1B_1B，得到$B_1C_1\perp BE$，再由$BE\perp EC_1$，根据线面垂直的判定定理，即可证明结论成立；

（2）先设长方体侧棱长为$2a$，根据题中条件求出$a=3$；再取BB_1中点F，连结EF，证明$EF\perp$平面BB_1C_1C，根据四棱锥的体积公式，即可求出结果．

【详解】（1）因为在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$B_1C_1\perp$平面AA_1B_1B；

$BE\subset$平面AA_1B_1B，所以$B_1C_1\perp BE$，

又$BE\perp EC_1$，$B_1C_1\cap EC_1=C_1$，且$EC_1\subset$平面EB_1C_1，$B_1C_1\subset$平面EB_1C_1，

所以$BE\perp$平面EB_1C_1；

（2）设长方体侧棱长为$2a$，则$AE=A_1E=a$，

由（1）可得 $EB_1 \perp BE$；所以 $EB_1^2 + BE^2 = BB_1^2$，即 $2BE^2 = BB_1^2$，

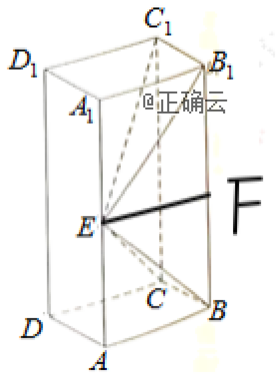
又 $AB = 3$，所以 $2AE^2 + 2AB^2 = BB_1^2$，即 $2a^2 + 18 = 4a^2$，解得 $a = 3$；

取 BB_1 中点 F，连结 EF，因为 $AE = A_1E$，则 $EF // AB$；

所以 $EF \perp$ 平面 BB_1C_1C，

所以四棱锥 $E - BB_1C_1C$ 的体积为

$$V_{E-BB_1C_1C} = \frac{1}{3}S_{矩形BB_1C_1C} \cdot EF = \frac{1}{3} \cdot BC \cdot BB_1 \cdot EF = \frac{1}{3} \times 3 \times 6 \times 3 = 18.$$



【点睛】本题主要考查线面垂直的判定，依据四棱锥的体积，熟记线面垂直的判定定理，以及四棱锥的体积公式即可，属于基础题型.

18.已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$a_1 = 2, a_3 = 2a_2 + 16$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n = \log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前n项和.

【答案】（1）$a_n = 2^{2n-1}$；（2）$S_n = n^2$.

【解析】

【分析】

(1)本题首先可以根据数列 $\{a_n\}$ 是等比数列将 a_3 转化为 a_1q^2，a_2 转化为 a_1q，再然后将其带入 $a_3 = 2a_2 + 16$ 中，并根据数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数以及 $a_1 = 2$ 即可通过运算得出结果；

(2)本题可以通过数列 $\{a_n\}$ 的通项公式以及对数的相关性质计算出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，

再通过数列$\{b_n\}$的通项公式得知数列$\{b_n\}$是等差数列，最后通过等差数列求和公式即可得出结果。

【详解】(1)因为数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$a_3=2a_2+16$，$a_1=2$，

所以令数列$\{a_n\}$的公比为q，$a_3=a_1q^2=2q^2$，$a_2=a_1q=2q$，

所以$2q^2=4q+16$，解得$q=-2$(舍去)或4，

所以数列$\{a_n\}$是首项为2、公比为4的等比数列，$a_n=2\times4^{n-1}=2^{2n-1}$。

(2)因为$b_n=\log_2 a_n$，所以$b_n=2n-1$，$b_{n+1}=2n+1$，$b_{n+1}-b_n=2$，

所以数列$\{b_n\}$是首项为1、公差为2的等差数列，$S_n=\frac{1+2n-1}{2}\times n=n^2$。

本题考查数列的相关性质，主要考查等差数列以及等比数列的通项公式的求法，考查等差数列求和公式的使用，考查化归与转化思想，考查计算能力，是简单题。

19.某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况，随机调查了100个企业，得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率y的频数分布表.

y的分组	$[-0.20,0)$	$[0,0.20)$	$[0.20,0.40)$	$[0.40,0.60)$	$[0.60,0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

（1）分别估计这类企业中产值增长率不低于40%的企业比例、产值负增长的企业比例；

（2）求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）.（精确到0.01）

附：$\sqrt{74}\approx8.602$.

【答案】(1)

增长率超过40%的企业比例为$\frac{21}{100}$，产值负增长的企业比例为$\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$；（2）平均数$0.3$；标准差$0.17$.

【解析】

【分析】

(1)本题首先可以通过题意确定100个企业中增长率超过40%的企业以及产值负增长的企

业的个数，然后通过增长率超过40%的企业以及产值负增长的企业的个数除随机调查的企业总数即可得出结果；

(2)可通过平均值以及标准差的计算公式得出结果。

【详解】(1)由题意可知，随机调查的100个企业中增长率超过40%的企业有$14+7=21$个，

产值负增长的企业有2个，

所以增长率超过40%的企业比例为$\frac{21}{100}$，产值负增长的企业比例为$\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$。

(2)由题意可知，平均值$\overline{y}=\frac{2\times(-0.1)+24\times0.1+53\times0.3+14\times0.5+7\times0.7}{100}=0.3$，

标准差的平方：

$$s^2=\frac{1}{100}\left[2\times(-0.1-0.3)^2+24\times(0.1-0.3)^2+53\times(0.3-0.3)^2+14\times(0.5-0.3)^2+7\times(0.7-0.3)^2\right]$$

$$=\frac{1}{100}\left[0.32+0.96+0.56+1.12\right]=0.0296,$$

所以标准差$s=\sqrt{0.0296}=\sqrt{0.0004\times74}\approx0.02\times8.602\approx0.17$。

【点睛】本题考查平均值以及标准差的计算，主要考查平均值以及标准差的计算公式，考查学生从信息题中获取所需信息的能力，考查学生的计算能力，是简单题。

20.已知F_1,F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$为$C$上一点，$O$为坐标原点.

（1）若$\triangle POF_2$为等边三角形，求C的离心率；

(2)如果存在点P，使得$PF_1\perp PF_2$，且$\triangle F_1PF_2$的面积等于16，求b的值和a的取值范围.

【答案】(1) $e=\sqrt{3}-1$；（2）$b=4$，a的取值范围为$[4\sqrt{2},+\infty)$.

【解析】

【分析】

（1）先连结PF_1，由$\triangle POF_2$为等边三角形，得到$\angle F_1PF_2=90^\circ$，$|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$；再由椭圆定义，即可求出结果；

（2）先由题意得到，满足条件的点 $P(x,y)$ 存在，当且仅当 $\frac{1}{2}|y|\cdot 2c=16$，

$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，根据三个式子联立，结合题中条件，即可求出结果.

【详解】（1）连结 PF_1，由 $\triangle POF_2$ 为等边三角形可知：在 $\triangle F_1PF_2$ 中，$\angle F_1PF_2=90^\circ$

，$|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$，

于是 $2a=|PF_1|+|PF_2|=c+\sqrt{3}c$，

故椭圆C的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$；

（2）由题意可知，满足条件的点 $P(x,y)$ 存在，当且仅当 $\frac{1}{2}|y|\cdot 2c=16$，

$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

即 $c|y|=16$ ①

$x^2+y^2=c^2$ ②

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ③

由②③以及 $a^2=b^2+c^2$ 得 $y^2=\frac{b^4}{c^2}$，又由①知 $y^2=\frac{16^2}{c^2}$，故 $b=4$；

由②③得 $x^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-b^2)$，所以 $c^2\ge b^2$，从而 $a^2=b^2+c^2\ge 2b^2=32$，故 $a\ge 4\sqrt{2}$；

当 $b=4$，$a\ge 4\sqrt{2}$ 时，存在满足条件的点 P.

故 $b=4$，a的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

【点睛】本题主要考查求椭圆的离心率，以及椭圆中存在定点满足题中条件的问题，熟记椭圆的简单性质即可求解，考查计算能力，属于中档试题.

21.已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$.证明：

（1）$f(x)$ 存在唯一的极值点；

（2）$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

【答案】（1）见详解；（2）见详解

【解析】

【分析】

（1）先对函数 $f(x)$ 求导，根据导函数的单调性，得到存在唯一 x_0，使得 $f'(x_0)=0$，进而可得判断函数 $f(x)$ 的单调性，即可确定其极值点个数，证明出结论成立；

（2）先由（1）的结果，得到 $f(x_0)<f(1)=-2<0$，$f(e^2)=e^2-3>0$，得到 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内存在唯一实根，记作 $x=\alpha$，再求出 $f(\frac{1}{\alpha})=0$，即可结合题意，说明结论成立.

【详解】（1）由题意可得，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$，

得 $f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}-1=\ln x-\frac{1}{x}$，

显然 $f'(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ 单调递增；

又 $f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-1}{2}>0$，

故存在唯一 x_0，使得 $f'(x_0)=0$；

又当 $x>x_0$ 时，$f'(x_0)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x_0)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

因此，$f(x)$ 存在唯一的极值点；

（2）由（1）知，$f(x_0)<f(1)=-2$，又 $f(e^2)=e^2-3>0$，

所以 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内存在唯一实根，记作 $x=\alpha$.

由 $1<x_0<\alpha$ 得 $\frac{1}{\alpha}<1<x_0$，

又 $f(\frac{1}{\alpha})=(\frac{1}{\alpha}-1)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，

故 $\frac{1}{\alpha}$ 是方程 $f(x)=0$ 在 $(0,x_0)$ 内的唯一实根；

综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

【点睛】本题主要考查导数的应用，通常需要对函数求导，用导数的方法研究函数的单调性、极值、以及函数零点的问题，属于常考题型.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分．

22.[选修4-4：坐标系与参数方程]

在极坐标系中，O为极点，点$M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$在曲线$C:\rho=4\sin\theta$上，直线$l$过点$A(4,0)$且与$OM$垂直，垂足为$P$.

（1）当$\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$时，求ρ_0及l的极坐标方程；

（2）当M在C上运动且P在线段OM上时，求P点轨迹的极坐标方程.

【答案】（1）$\rho_0=2\sqrt{3}$，l的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=2$；（2）$\rho=4\cos\theta(\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$

【解析】

【分析】

（1）先由题意，将$\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$代入$\rho=4sin\theta$即可求出ρ_0；根据题意求出直线l的直角坐标方程，再化为极坐标方程即可；

（2）先由题意得到P点轨迹的直角坐标方程，再化为极坐标方程即可，要注意变量的取值范围.

【详解】（1）因为点$M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$在曲线$C:\rho=4\sin\theta$上，

所以$\rho_0=4\sin\theta_0=4\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$；

即$M(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3})$，所以$k_{OM}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

因为直线l过点$A(4,0)$且与OM垂直，

所以直线l的直角坐标方程为$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$，即$x+\sqrt{3}y-4=0$；

因此，其极坐标方程为$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta=4$，即$l$的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=2$

；

（2）设$P(x,y)$，则$k_{OP}=\dfrac{y}{x}$，$k_{AP}=\dfrac{y}{x-4}$，

由题意，$OP\perp AP$，所以$k_{OP}k_{AP}=-1$，故$\dfrac{y^2}{x^2-4x}=-1$，整理得$x^2+y^2-4x=0$，

因为P在线段OM上，M在C上运动，所以$0\le x\le 2, 2\le y\le 4$，

所以，P点轨迹的极坐标方程为$\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，即$\rho=4\cos\theta(\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$.

【点睛】本题主要考查极坐标方程与直角坐标方程的互化，熟记公式即可，属于常考题型.

23.[选修4-5：不等式选讲]

已知$f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)<0$的解集；

（2）若$x\in(-\infty,1)$时，$f(x)<0$，求a的取值范围.

【答案】（1）$(-\infty,1)$；（2）$[1,+\infty)$

【解析】

【分析】

（1）根据$a=1$，将原不等式化为$|x-1|x+|x-2|(x-1)<0$，分别讨论$x<1$，$1\le x<2$，$x\ge 2$三种情况，即可求出结果；

（2）分别讨论$a\geqslant 1$和$a<1$两种情况，即可得出结果.

【详解】（1）当$a=1$时，原不等式可化为$|x-1|x+|x-2|(x-1)<0$；

当$x<1$时，原不等式可化为$(1-x)x+(2-x)(x-1)<0$，即$(x-1)^2>0$，显然成立，

此时解集为$(-\infty,1)$；

当$1\le x<2$时，原不等式可化为$(x-1)x+(2-x)(x-1)<0$，解得$x<1$，此时解集为空集；

当$x\ge 2$时，原不等式可化为$(x-1)x+(x-2)(x-1)<0$，即$(x-1)^2<0$，显然不成立；

此时解集为空集；

综上，原不等式的解集为$(-\infty,1)$；

（2）当$a\geqslant 1$时，因为$x\in(-\infty,1)$，所以由$f(x)<0$可得$(a-x)x+(2-x)(x-a)<0$，

即$(x-a)(x-1)>0$，显然恒成立；所以$a\geqslant 1$满足题意；

当$a<1$时，$f(x)=\begin{cases}2(x-a),a\le x<1\\2(x-a)(1-x),x<a\end{cases}$，因为$a\le x<1$时，

$f(x)<0$显然不能成立，所以$a<1$不满足题意；

综上，a的取值范围是$[1,+\infty)$.

【点睛】本题主要考查含绝对值的不等式，熟记分类讨论的方法求解即可，属于常考题型.