绝密★启用前　　　　　　　　　　试卷类型：B

2009年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科）

本试卷共4页，21小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1．答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题组号对应的信息点，再作答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。

5．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式：锥体的体积公式$V=\frac{1}{3}sh$，其中S是锥体的底面积，h是锥体的高

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知全集$U=R$，集合$M=\{x|-2\le x-1\le 2\}$和$N=\{x|x=2k-1,k=1,2,\cdots\}$的关系的韦恩（Venn）图如图1所示，则阴影部分所示的集合的元素共有

A．3个　　　B．2个

C．1个　　　D．无穷个

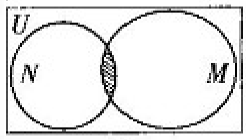


图1

2．设z是复数，$a(z)$表示满足$z^n=1$的最小正整数n，则对虚数单位i，$a(i)=$

A．8　B．6　C．4　D．2

3．若函数$y=f(x)$是函数$y=a^x(a>0,且a\ne 1)$的反函数，其图像经过点$(\sqrt{a},a)$，则$f(x)=$

A．$\log_2 x$　B．$\log_{\frac{1}{2}} x$　C．$\frac{1}{2^x}$　D．x^2

3。

4．已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_n>0,n=1,2,\cdots$，且$a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}(n\ge 3)$，则当$n\ge 1$时，

$\log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}=$

A．$n(2n-1)$　B．$(n+1)^2$　C．n^2　D．$(n-1)^2$

4

5．给定下列四个命题：

①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；

②若一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直；

③垂直于同一直线的两条直线相互平行；

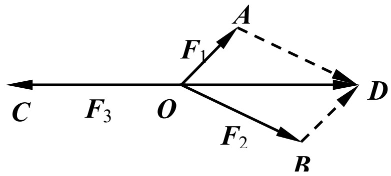
④若两个平面垂直，那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直．其中，为真命题的是

A．①和②　B．②和③　C．.③和④　D．②和④

6．一质点受到平面上的三个力F_1,F_2,F_3（单位：牛顿）的作用而处于平衡状态．已知F_1,F_2成60^0角，且F_1,F_2

的大小分别为 2 和 4，则 F_3 的大小为

A．6　B．2　C．$2\sqrt{5}$　D．$2\sqrt{7}$



7．2010年广州亚运会组委会要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作，若其中小张和小赵只能从事前两项工作，其余三人均能从事这四项工作，则不同的选派方案共有

A．36种　B．12种　C．18种　D．48种

8．已知甲、乙两车由同一起点同时出发,并沿同一路线（假定为直线）行驶．甲车、乙车的速度曲线分别为$v_{甲}$和$v_{乙}$（如图2所示）．那么对于图中给定的t_0和t_1，下列判断中一定正确的是

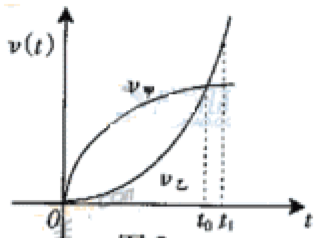


图 2

A．在t_1时刻，甲车在乙车前面

B．t_1时刻后，甲车在乙车后面

C．在t_0时刻，两车的位置相同

D．t_0时刻后，乙车在甲车前面

二、填空题：本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分．

（一）必做题（９～１２题）

９．随机抽取某产品n件，测得其长度分别为$a_1,a_2,\cdots,a_n$，则图3所示的程序框图输出的$s=$____，表示的样本的数字特征是____．（注：框图中的赋值符号"="也可以写成"←"":="）

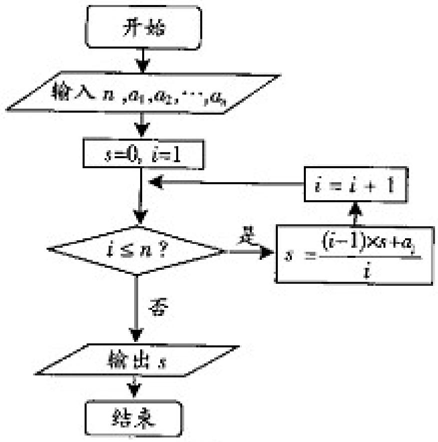


图 3

１０．若平面向量a,b满足$|a+b|=1$，$a+b$平行于x轴，$b=(2,-1)$，则$a=$____．

11．已知椭圆G的中心在坐标原点，长轴在x轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且G上一点到G的两个焦点的距离之和为12，则椭圆G的方程为________________．

12．已知离散型随机变量X的分布列如右表．若$EX=0$，$DX=1$，则$a=$____，$b=$____．

X	-1	0	1	2
P	a	b	c	$\frac{1}{12}$

（二）选做题（13～15题，考生只能从中选做两题）

13．（坐标系与参数方程选做题）若直线$l_1:\begin{cases}x=1-2t,\\y=2+kt.\end{cases}$($t$为参数)与直线$l_2:\begin{cases}x=s,\\y=1-2s.\end{cases}$（$s$为参数）垂直，则$k=$____．

14．（不等式选讲选做题）不等式$\frac{|x+1|}{|x+2|}\ge 1$的实数解为____．

15．（几何证明选讲选做题）如图4，点 A,B,C 是圆 O 上的点， 且 $AB=4,\angle ACB=45^0$，则圆 O 的面积等于____.

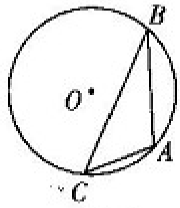


图 4

三、解答题：本大题共6小题，满分80分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤，

16．（本小题满分12分）

已知向量 $a=(\sin\theta,-2)$ 与 $b=(1,\cos\theta)$ 互相垂直，其中 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$．

（1）求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值；

（2）若 $\sin(\theta-\varphi)=\frac{\sqrt{10}}{10},0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，求 $\cos\varphi$ 的值．

17．（本小题满分12分）

根据空气质量指数API（为整数）的不同，可将空气质量分级如下表：

API	0 ~ 50	51 ~ 100	101 ~ 150	151 ~ 200	201 ~ 250	251 ~ 300	> 300
级别	Ⅰ	Ⅱ	$Ⅲ_1$	$Ⅲ_2$	$Ⅳ_1$	$Ⅳ_2$	Ⅴ
状况	优	良	轻微污染	轻度污染	中度污染	中度重污染	重度污染

对某城市一年（365天）的空气质量进行监测，获得API数据按照区间 $[0,50],(50,100],(100$ 进行分组，得到频率分布直方图如图5

（1）求直方图中 x 的值；

（2）计算一年中空气质量分别为良和轻微污染的天数；

（3）求该城市某一周至少有2天的空气质量为良或轻微污染的概率．

(结果用分数表示．已知 $5^7=78125,2^7=128$，

$\frac{3}{1825}+\frac{2}{365}+\frac{7}{1825}+\frac{3}{1825}+\frac{8}{9125}=\frac{123}{9125}$，

$365=73\times5$）

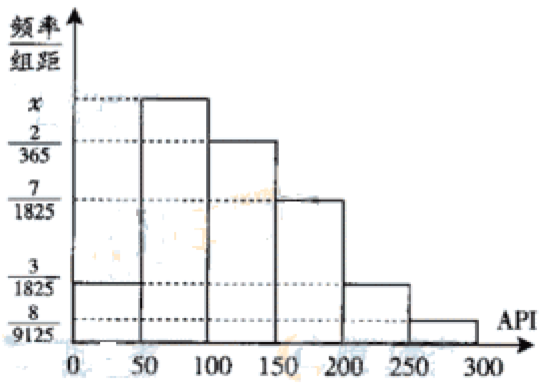


图 5

18．（本小题满分１４分）

如图６，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为２，点Ｅ是正方形 BCC_1B_1 的中心，点Ｆ、Ｇ分别是棱 C_1D_1,AA_1 的中点．设点 E_1,G_1 分别是点Ｅ、Ｇ在平面 DCC_1D_1 内的正投影．

（１）求以Ｅ为顶点，以四边形 $FGAE$ 在平面 DCC_1D_1 内的正投影为底面边界的棱锥的体积；

（２）证明：直线 $FG_1\perp$ 平面 FEE_1；

（３）求异面直线 E_1G_1 与 EA 所成角的正弦值

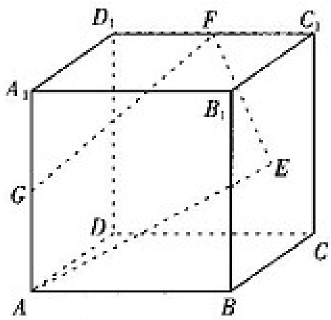


图 6

19．（本小题满分１４分）

已知曲线$C: y=x^2$与直线$l: x-y+2=0$交于两点$A(x_A, y_A)$和$B(x_B, y_B)$，且$x_A<x_B$．记曲线C在点A和点B之间那一段L与线段AB所围成的平面区域（含边界）为D．设点$P(s,t)$是L上的任一点，且点P与点A和点B均不重合．

（1）若点Q是线段AB的中点，试求线段PQ的中点M的轨迹方程；

（2）若曲线$G: x^2-2ax+y^2-4y+a^2+\dfrac{51}{25}=0$与$D$有公共点，试求$a$的最小值．

20．（本小题满分１４分）

已知二次函数$y=g(x)$的导函数的图像与直线$y=2x$平行，且$y=g(x)$在$x=-1$处取得极小值$m-1(m\neq 0)$．设$f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$．

（1）若曲线$y=f(x)$上的点P到点$Q(0,2)$的距离的最小值为$\sqrt{2}$，求m的值；

（2）$k(k\in R)$如何取值时，函数$y=f(x)-kx$存在零点，并求出零点．

21．（本小题满分１４分）

已知曲线$C_n: x^2-2nx+y^2=0(n=1,2,\ldots)$．从点$P(-1,0)$向曲线$C_n$引斜率为$k_n(k_n>0)$的切线$l_n$，切点为$P_n(x_n, y_n)$．

（1）求数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$的通项公式；

（2）证明：$x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\dfrac{x_n}{y_n}$

答 案

1.解：$M=\{x\mid -1\le x\le 3\}$，$N=\{1,3,5,\cdots\}$，所以 $M\bigcap N=\{1,3\}$

故，选B

2. 解：因为$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，所以满足$i^n=1$的最小正整数n的值是4。故，选C

.解：由函数y=$f(x)$是函数$y=a^x(a>0,且a\ne 1)$的反函数，可知$f(x)=\log_a x$，

又其图像经过点$(\sqrt{a},a)$，即$\log_a\sqrt{a}=a$，所以a=$\frac{1}{2}$，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$。故答B

。解：在$a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}(n\ge 3)$中，令n=5,得$a_5{}^2=2^{10}=(2^5)^2$，令n=3,得$a_5\cdot a_1=2^6$，

又$a_n>0,n=1,2,\cdots$，所以$a_5=2^5$，$a_1=2$，从而解得，公比$q=2$，$a_n=2^n$，

$a_{2n-1}=2^{2n-1}$，$\log_2 a_{2n-1}=2n-1$，

所以$\log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}$ = 1+3+…+（2n-1）= $\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$

5.解： 显然 ①和③是假命题，故否定A,B,C, 答 D.

6.解：依题意，可知$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$，所以$\overrightarrow{F_3}=-(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2})$，

$\left|\overrightarrow{F_3}\right|^2=\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|^2=(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2})^2=\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_2}\right|^2+2\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos 60^o=2^2+4^2+2\times 2\times 4\times\frac{1}{2}$=28.

所以，力$\overrightarrow{F_3}$的大小为$\left|\overrightarrow{F_3}\right|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$， 答D。

7。解：若小张和小赵两人都被选中，则不同的选派方案有$A_2^2\cdot A_3^2=12$种，

若小张和小赵两人只有一人都被选中，则不同的选派方案有$C_2^1C_2^1\cdot A_3^3=24$种，

故， 总的不同的选派方案共有12+24=36种。 答A。

8. 解：因为速度函数$v(t)$是路程函数$s(t)$的导函数，即$s'(t)=v(t)$，所以$s(t)=\int_0^t v(t)dt$，

根据定积分的定义，比较图中速度曲线$v_{甲}和v_{乙}$分别与x轴及直线$t=t_0$，$t=t_1$

围成的图形的面积，即可看出，应选A。

9.解：记$i=k$时求得的S值为S_k,记初始值为$S_0=0$,

则$S_1=\frac{0\times S_0+a_1}{1}=\frac{a_1}{1}$,$S_2=\frac{1\times S_1+a_2}{2}=\frac{a_1+a_2}{2}$,

$S_3=\frac{2\times S_2+a_3}{3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$,……,

$S_n=\frac{(n-1)\times S_{n-1}+a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

故,答案为(1) $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ ；(2)这n件产品的平均长度。

10。解：设$\vec{a}=(x,y)$，则$\vec{a}+\vec{b}=(x+2,y-1)$，依题意，得

$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=1\\ y-1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-3\\ y=1\end{cases}$，所以$\vec{a}=(-1,1)$或$\vec{a}=(-3,1)$。

答： $(-1,1)$或$(-3,1)$。

11.解：设椭圆G的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦半径为c,

依题意，得2a=12，且$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， 解得a=6，c=$3\sqrt{3}$，所以$b^2=a^2-c^2=36-27=9$

所以， 椭圆G的方程为$\underline{\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1}$。

12。解：依题意，得

$$\begin{cases}a+b+c+\dfrac{1}{12}=1\\ -a+0+c+2\times\dfrac{1}{12}=0\\ a+0+c+2^2\times\dfrac{1}{12}=1\end{cases}，解得\begin{cases}a=\dfrac{5}{12}\\ b=\dfrac{1}{4}\\ c=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

答： $\underline{\dfrac{5}{12}}$ ； $\underline{\dfrac{1}{4}}$

13．解：直线$l_1:\begin{cases}x=1-2t,\\ y=2+kt.\end{cases}$($t$为参数) 化为普通方程是$y-2=-\dfrac{k}{2}(x-1)$，

该直线的斜率为$-\dfrac{k}{2}$，

直线$l_2:\begin{cases}x=s,\\ y=1-2s.\end{cases}$（$s$为参数）化为普通方程是$y=-2x+1$，

该直线的斜率为-2，

则由两直线垂直的充要条件，得$\left(-\dfrac{k}{2}\right)\cdot(-2)=-1$， $\underline{k=-1}$。

14。解：$\dfrac{|x+1|}{|x+2|}\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases}|x+1|\ge|x+2|\\ x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2\ge(x+2)^2\\ x\ne -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3\le 0\\ x\ne -2\end{cases}$

解得$x\le-\dfrac{3}{2}$且$x\ne-2$。所以原不等式的解集为{x| $x\le-\dfrac{3}{2}$且$x\ne-2$}

15．解法一：连结OA，OB，则∠AOB=2∠ACB=90^0，

所以△AOB为等腰直角三角形，又$AB=4$，

所以，圆O的半径R=$2\sqrt{2}$，圆O的面积等于$\pi R^2=\pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$

解法二：设圆O的半径为R，在△ABC中，由正弦定理，

得$\dfrac{4}{\sin 45^o}=2R$，解得R=$2\sqrt{2}$，

所以，圆O的面积等于$\pi R^2=\pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$

16．解：（1）∵ 向量$a=(\sin\theta-2)$与$b=(1,\cos\theta)$互相垂直，

∴ $\vec{a}\bullet\vec{b}=\sin\theta-2\cos\theta=0$，即$\sin\theta=2\cos\theta$ ①，

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ②

① 代入②，整理，得$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$，

由$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，可知$\cos\theta>0$，

∴$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，代入①得$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

故 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。

（2）$\because 5\cos(\theta-\varphi)=3\sqrt{5}\cos\varphi$，

$\therefore 5(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)=3\sqrt{5}\cos\varphi$

将（1）的结果代入其中，得$5\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cos\varphi+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\sin\varphi\right)=3\sqrt{5}\cos\varphi$

整理，得$\sin\varphi=\cos\varphi$③，　　又$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$④

③代入④，整理，得$\cos^2\varphi=\dfrac{1}{2}$

由$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，可知$\cos\varphi>0$，

所以，解得$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

17. 解：（1）因为，在频率分布直方图中，各个小矩形的面积之和等于1，

依题意，得$\left(\dfrac{3}{1825}+x+\dfrac{2}{365}+\dfrac{7}{1825}+\dfrac{3}{1825}+\dfrac{8}{9125}\right)\times 50=1$

又 $\dfrac{3}{1825}+\dfrac{2}{365}+\dfrac{7}{1825}+\dfrac{3}{1825}+\dfrac{8}{9125}=\dfrac{123}{9125}$

所以 $x=\dfrac{1}{50}-\dfrac{123}{9125}=\dfrac{119}{18250}$。

（2）一年中空气质量为良和的天数为 $365\times\dfrac{119}{18250}\times 50=119$ （天）；

一年中空气质量为轻微污染的天数为 $365\times\dfrac{2}{365}\times 50=100$ （天）；

（3）由（2）可知，在一年之中空气质量为良或轻微污染的天数共有119+100=219（天）

所以，在一年之中的任何一天空气质量为良或轻微污染的概率是$p=\dfrac{219}{365}=\dfrac{3}{5}$，

设一周中的空气质量为良或轻微污染的天数为ξ，则ξ~B（7，$\dfrac{3}{5}$）

$P(\xi=k)=C_7^k\left(\dfrac{3}{5}\right)^k\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^{7-k}$，（k=0, 1, 2, …, 7）

设“该城市某一周至少有2天的空气质量为良或轻微污染”为事件A，则

$$P(A)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)=1-C_7^0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(1-\frac{3}{5}\right)^7-C_7^1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(1-\frac{3}{5}\right)^6$$

$$=1-\left(\frac{2}{5}\right)^7-7\times\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^6=1-\frac{2^7+21\times 2^6}{5^7}=1-\frac{128+1344}{78125}=\frac{76653}{78125}.$$

18.(1)解：$\because$点D, E_1, G_1分别是点A, E, G在平面DCC_1D_1内的正投影.

$\therefore$四边形$FGAE$在平面DCC_1D_1内的正投影为四边形FG_1DE_1

$$S_{FG_1DE_1}=2^2-\frac{1}{2}\times 2\times 1-(\frac{1}{2}\times 1\times 1)\times 2=2$$

又$EE_1\perp$平面 DCC_1D_1，且$EE_1=1$

所以，所求锥体的体积为

$$V_{E-FG_1DE_1}=\frac{1}{3}S_{FG_1DE_1}\cdot EE_1=\frac{1}{3}\times 2\times 1=\frac{2}{3}$$

（2）证明：$\because EE_1\perp$平面 DCC_1D_1，$FG_1\subset$平面 DCC_1D_1，

$\therefore EE_1\perp FG_1$

$\because$在正方形DCC_1D_1中，E_1, F, G_1分别是CC_1, C_1D_1, D_1D的中点，

$\therefore E_1C_1 = C_1F = FD_1 = D_1G_1 = 1$，

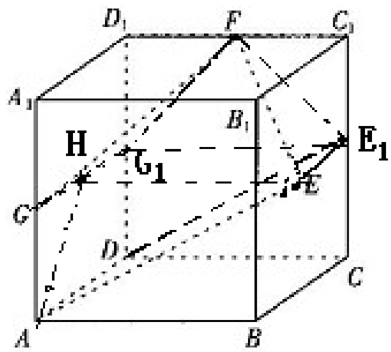
$\angle E_1FC_1 = \angle G_1FD_1 = 45^0$

$\therefore \angle E_1FG_1 = 90^O$

$\therefore E_1F \perp FG_1$

又 $EE_1 \cap E_1F = E_1$

$\therefore FG_1 \perp$ 平面FEE_1；



（3）设 GG_1 的中点为H，连结EH，E_1G_1

则EH∥E_1G_1∥CD，且EH=E_1G_1=CD=2，

∠AEH就是异面直线 E_1G_1与EA 所成角

又CD⊥平面 AA_1DD_1，

∴EH⊥平面 AA_1DD_1

在RT△AEH中，EH =2，AH=$\sqrt{2}$，所以EA=$\sqrt{6}$

所以，异面直线 E_1G_1与EA 所成角的正弦值为 $\sin\angle AEH = \dfrac{AH}{EA} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

解法2：（1）依题作点 E、G 在平面 DCC_1D_1 内的正投影 E_1、G_1，则 E_1、G_1 分别为 CC_1、DD_1 的中点，连结 EE_1、EG_1、ED、DE_1，则所求为四棱锥 $E-DE_1FG_1$ 的体积，其底面 DE_1FG_1 面积为

$S_{DE_1FG_1} = S_{Rt\Delta E_1FG_1} + S_{Rt\Delta DG_1E_1} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\times 1\times 2 = 2$，

又 $EE_1 \perp$ 面 DE_1FG_1，$EE_1 = 1$，$\therefore V_{E-DE_1FG_1} = \dfrac{1}{3}S_{DE_1FG_1}\cdot EE_1 = \dfrac{2}{3}$.

（2）以 D 为坐标原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别作 x 轴，y 轴，z 轴，得 $E_1(0,2,1)$、$G_1(0,0,1)$，又 $G(2,0,1)$，$F(0,1,2)$，$E(1,2,1)$，则 $\overrightarrow{FG_1} = (0,-1,-1)$，$\overrightarrow{FE} = (1,1,-1)$，$\overrightarrow{FE_1} = (0,1,-1)$，

$\therefore \overrightarrow{FG_1}\cdot\overrightarrow{FE} = 0 + (-1) + 1 = 0$，$\overrightarrow{FG_1}\cdot\overrightarrow{FE_1} = 0 + (-1) + 1 = 0$，即 $FG_1 \perp FE$，$FG_1 \perp FE_1$，

又 $FE_1 \cap FE = F$，$\therefore FG_1 \perp$ 平面 FEE_1.

（3）$\overrightarrow{E_1G_1} = (0,-2,0)$，$\overrightarrow{EA} = (1,-2,-1)$，则 $\cos < \overrightarrow{E_1G_1}, \overrightarrow{EA} > = \dfrac{\overrightarrow{E_1G_1}\cdot\overrightarrow{EA}}{\left|\overrightarrow{E_1G_1}\right|\left|\overrightarrow{EA}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$，设异面直线 E_1G_1与EA 所成角为 θ，则 $\sin\theta = \sqrt{1-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

19.解：（1）解曲线C与直线 l 的联立方程组 $\begin{cases} y = x^2 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$,得 $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 4 \end{cases}$,

又 $x_A < x_B$，所以点A，B的坐标分别为 $A(-1,1), B(2,4)$

∵点 Q 是线段 AB 的中点

∴点 Q 的坐标为 $Q\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

∵点 $P(s,t)$ 是 L 上的任一点，且点 P 与点 A 和点 B 均不重合.

$\therefore t = s^2$，　　即 $P(s,s^2)$，且 $-1 < s < 2$

设线段 PQ 的中点为 M (x,y),

则点M的轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x = \dfrac{\frac{1}{2}+s}{2} \\ y = \dfrac{\frac{5}{2}+s^2}{2} \end{cases}$（s为参数，且 $-1 < s < 2$）；

消去s 整理，得 $y=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$，且 $\left(-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}\right)$

所以，线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程是 $y=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$，$\left(-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}\right)$；

（2）曲线 $G: x^2-2ax+y^2-4y+a^2+\frac{51}{25}=0$ 可化为 $(x-a)^2+(y-2)^2=\left(\frac{7}{5}\right)^2$，

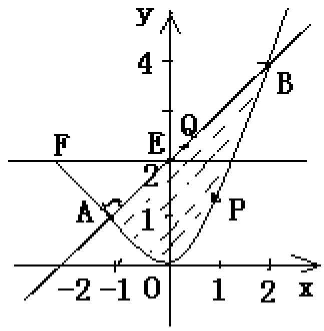
它是以G(a,2)为圆心，以 $\frac{7}{5}$ 为半径的圆，

设直线 $l: x-y+2=0$ 与y轴相交于点E，则E点的坐标为E(0,2)；

自点A做直线 $l: x-y+2=0$ 的垂线，交直线y=2 于点F，

在RT△EAF中，∠AEF= 45^0，$|AE|=\sqrt{2}$，所以 $|AF|=\sqrt{2}$，

$\because\ \frac{7}{5}<\sqrt{2}$，



∴当 $a<0$ 且圆G与直线 l 相切时，圆心G必定在线段FE上，

且切点必定在线段AE上，

于是，此时的a的值就是所求的最小值。

当圆G与直线 $l: x-y+2=0$ 相切时 $\frac{|a-2+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{7}{5}$，

解得 $a=-\frac{7\sqrt{2}}{5}$，或者 $a=\frac{7\sqrt{2}}{5}$（舍去）

所以，使曲线G与平面区域D有公共点的a的最小值是 $-\frac{7\sqrt{2}}{5}$.

（备注：**讨论圆G与直线 l 切点的位置的必要性**。若圆G的半径大于|AF|,则圆G与直线 l 的切点将落在线段EA的延长线上，此时，圆G与平面区域D没有公共点，这时令圆G过点A，求出的a的两个值，其中的那个较小的数，才是所求。）

20.解：设二次函数 $y=g(x)$ 的解析式为 $g(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

则它的导函数为 $g'(x)=2ax+b(a\neq 0)$，

$\because$ 函数 $g'(x)=2ax+b(a\neq 0)$ 的图像与直线 $y=2x$ 平行，

$\therefore$ 2a=2，解得a=1,

所以 $g(x)=x^2+bx+c$，$g'(x)=2x+b$

$\because y=g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $m-1(m\neq 0)$

$\therefore\begin{cases}g'(-1)=0\\ g(-1)=m-1\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2+b=0\\ 1-b+c=m-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=2\\ c=m\end{cases}$。

所以 $g(x)=x^2+2x+m$，$f(x)=\frac{g(x)}{x}=x+\frac{m}{x}+2$（$x\neq 0$）

（1）设点点P $\left(x,x+\frac{m}{x}+2\right)$（$x\neq 0$，$m\neq 0$）为曲线 $y=f(x)$ 上的任意一点

则点P到点 $Q(0,2)$ 的距离为 $|PQ|=\sqrt{x^2+\left(x+\frac{m}{x}\right)^2}=\sqrt{2x^2+\frac{m^2}{x^2}+2m}$

由基本不等式定理可知 $\sqrt{2x^2+\frac{m^2}{x^2}+2m}\geq\sqrt{2\sqrt{2}|m|+2m}$，

当且仅当$x^2=\dfrac{\sqrt{2}|m|}{2}$时，等号"="成立，此时$|PQ|_{\min}=\sqrt{2\sqrt{2}|m|+2m}$

又已知点P到点$Q(0,2)$的距离的最小值为$\sqrt{2}$，所以令$\sqrt{2\sqrt{2}|m|+2m}=\sqrt{2}$

两边平方整理，得$\sqrt{2}|m|+m=1$

当$m>0$时，$\sqrt{2}m+m=1$，解得$m=\sqrt{2}-1$

当$m<0$时，$-\sqrt{2}m+m=1$，解得$m=-\sqrt{2}-1$

所以，m的值为$\sqrt{2}-1$或者$-\sqrt{2}-1$；

（2）函数令$h(x)=f(x)-kx=x+\dfrac{m}{x}+2-kx=(1-k)x+\dfrac{m}{x}+2$（$x\neq 0$）

令$h(x)=0$，即$(1-k)x+\dfrac{m}{x}+2=0$（$x\neq 0$），

整理，得$(1-k)x^2+2x+m=0$（$x\neq 0$），①

函数$h(x)=f(x)-kx$存在零点，等价于方程①有非零实数根，

由$m\neq 0$可知，方程①不可能有零根，

当k=1时，方程①变为$2x+m=0$，解得$x=\dfrac{m}{2}\neq 0$，方程①有唯一实数根，

此时，函数$h(x)=f(x)-kx$存在唯一的零点$x=\dfrac{m}{2}$；

当k≠1时，方程①根的判别式为$\Delta=4-4m(1-k)$，$m\neq 0$

令$\Delta=4-4m(1-k)=0$，解得$k=1-\dfrac{1}{m}$，

方程①有两个相等的实数根$x_1=x_2=-m$，

此时，函数$h(x)=f(x)-kx$存在唯一的零点$x=-m$；

令$\Delta=4-4m(1-k)>0$，得$m(1-k)<1$，

当$m>0$时，解得$k>1-\dfrac{1}{m}$，

当$m<0$时，解得$k<1-\dfrac{1}{m}$，

以上两种情况下，方程①都有两个不相等的实数根

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-m(1-k)}}{1-k},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1-m(1-k)}}{1-k}$$

此时，函数$h(x)=f(x)-kx$存在两个零点

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-m(1-k)}}{1-k},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1-m(1-k)}}{1-k}$$

综上所述，函数$y=f(x)-kx$存在零点的情况可概括为

当k=1时，函数$h(x)=f(x)-kx$存在唯一的零点$x=\dfrac{m}{2}$；

当$k=1-\dfrac{1}{m}$时，函数$h(x)=f(x)-kx$存在唯一的零点$x=-m$；

当$m>0$且$k>1-\dfrac{1}{m}$，或者$m<0$且$k<1-\dfrac{1}{m}$时，函数$h(x)=f(x)-kx$存在两个零点

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-m(1-k)}}{1-k}，\ x_2=\frac{-1-\sqrt{1-m(1-k)}}{1-k}。$$

21.（1）解：曲线 $C_n: x^2-2nx+y^2=0(n=1,2,\ldots)$ 可化为 $(x-n)^2+y^2=n^2$，

所以，它表示以 $C_n(n,0)$ 为圆心，以n 为半径的圆，

切线 l_n 的方程为 $y=k_n(x+1)$，

联立 $\begin{cases} y=k_n(x+1) \\ x^2-2nx+y^2=0 \end{cases}$，消去y 整理，得 $(1+k_n{}^2)x^2+(2k_n{}^2-2n)x+k_n{}^2=0$，①

$\Delta=(2k_n{}^2-2n)^2-4k_n{}^2(1+k_n{}^2)=4n^2-4(2n+1)k_n{}^2$，$k_n>0$

令 $\Delta=0$，解得 $k_n{}^2=\frac{n^2}{2n+1}$，$k_n=\frac{n}{\sqrt{2n+1}}$

此时，方程①化为 $(1+\frac{n^2}{2n+1})x^2+(\frac{2n^2}{2n+1}-2n)x+\frac{n^2}{2n+1}=0$

整理，得 $\left[(n+1)x-n\right]^2=0$，解得 $x_x=\frac{n}{n+1}$，

所以 $y_n=\frac{n}{\sqrt{2n+1}}(\frac{n}{n+1}+1)=\frac{n}{n+1}\sqrt{2n+1}$

∴数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_x=\frac{n}{n+1}$

数列 $\{y_n\}$ 的通项公式为 $y_n=\frac{n}{n+1}\sqrt{2n+1}$。

（2）证明：$\because\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}=\sqrt{\frac{1-\frac{n}{n+1}}{1+\frac{n}{n+1}}}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$，

$$\frac{2n-1}{2n}=\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4n^2}}<\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4n^2-1}}=\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

$$\therefore x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}<\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}\times\sqrt{\frac{5}{7}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}=\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}$$

$\because\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}$，又 $0<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{\pi}{4}$

令 $\frac{x_n}{y_n}=x$，则 $0<x<\frac{\pi}{4}$，

要证明 $\frac{x_n}{y_n}<\sqrt{2}\sin\frac{x_n}{y_n}$，只需证明当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$x<\sqrt{2}\sin x$ 恒成立即可。

设函数 $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$，$0<x<\frac{\pi}{4}$

则 $f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x$，$0<x<\frac{\pi}{4}$

$\because$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上 $f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x$ 为增函数，

$\therefore$当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x<1-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=0$，

$\therefore f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上为单调递减函数，

$\therefore$ $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x<f(0)=0$ 对于一切 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 很成立，

$\therefore$ $x<\sqrt{2}\sin x$，即 $\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}=\dfrac{x_n}{y_n}<\sqrt{2}\sin\dfrac{x_n}{y_n}$

综上，得 $x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdots\cdots x_{2n-1}<\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\dfrac{x_n}{y_n}$