2021年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

第I卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，

2，本卷共9小题，每小题5分，共45分

参考公式：

•如果事件*A*、*B*互斥，那么$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

•如果事件*A*、*B*相互独立，那么$P(AB)=P(A)\ P(B)$．

•球的体积公式$V=\frac{1}{3}\pi R^3$，其中*R*表示球的半径．

•圆锥的体积公式$V=\frac{1}{3}Sh$，其中*S*表示圆锥的底面面积，*h*表示圆锥的高．

一、选择题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,3,5\},C=\{0,2,4\}$，则$(A\cap B)\cup C=$（　）

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1,3,5\}$　　C. $\{0,1,2,4\}$　　D. $\{0,2,3,4\}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据交集并集的定义即可求出.

【详解】$\because A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,3,5\},C=\{0,2,4\}$，

$\therefore A\cap B=\{1\}$，$\therefore (A\cap B)\cup C=\{0,1,2,4\}$.

故选：C.

2. 已知$a\in\mathbf{R}$，则“$a>6$”是“$a^2>36$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不允分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由充分条件、必要条件的定义判断即可得解.

【详解】由题意，若 $a>6$，则 $a^2>36$，故充分性成立；

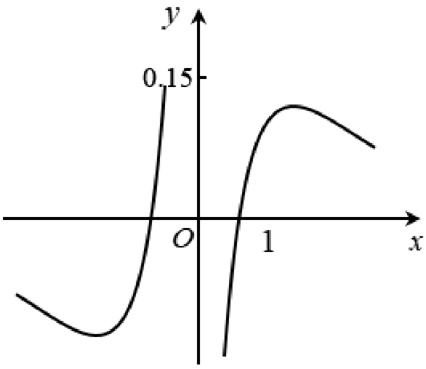
若 $a^2>36$，则 $a>6$ 或 $a<-6$，推不出 $a>6$，故必要性不成立；

所以“$a>6$”是“$a^2>36$”的充分不必要条件.

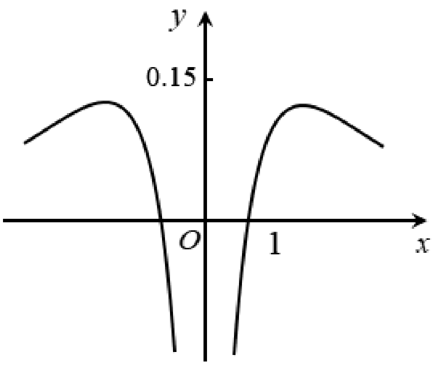
故选：A.

3. 函数 $y=\dfrac{\ln|x|}{x^2+2}$ 的图像大致为（　）

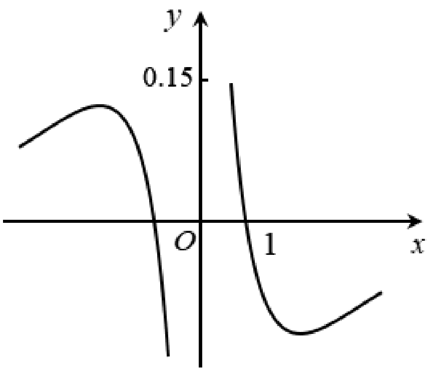
A.



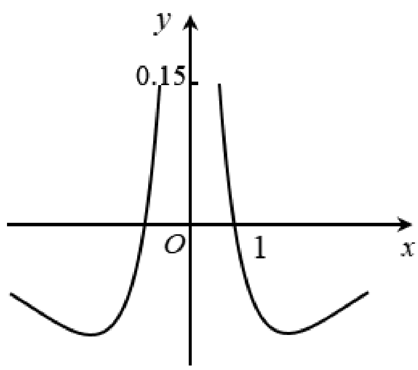
B.



C.



D.



【答案】B

【解析】

【分析】由函数为偶函数可排除AC，再由当$x\in(0,1)$时，$f(x)<0$，排除D，即可得解.

【详解】设$y=f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+2}$，则函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，关于原点对称，

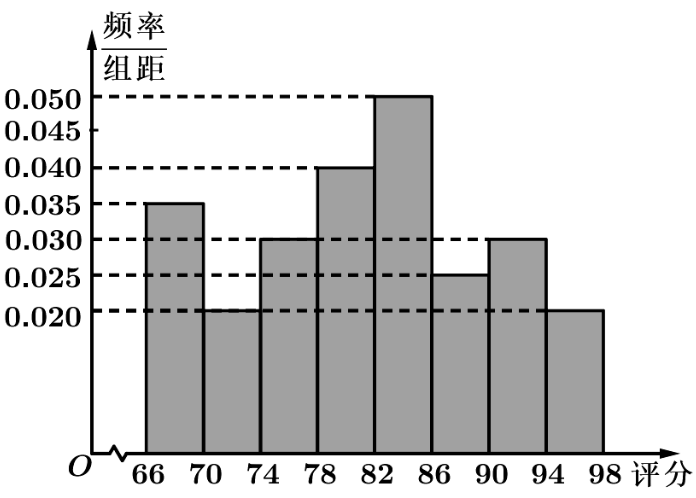
又$f(-x)=\dfrac{\ln|-x|}{(-x)^2+2}=f(x)$，所以函数$f(x)$为偶函数，排除AC；

当$x\in(0,1)$时，$\ln|x|<0, x^2+1>0$，所以$f(x)<0$，排除D.

故选：B.

4.

从某网络平台推荐的影视作品中抽取400部，统计其评分分数据，将所得400个评分数据分为8组：$[66,70)$、$[70,74)$、$\cdots$、$[94,98]$，并整理得到如下的费率分布直方图，则评分在区间$[82,86)$内的影视作品数量是（　）



A. 20　　B. 40　　C. 64　　D. 80

【答案】D

【解析】

【分析】利用频率分布直方图可计算出评分在区间$[82,86)$内的影视作品数量.

【详解】由频率分布直方图可知，评分在区间$[82,86)$内的影视作品数量为

$400\times 0.05\times 4=80$.

故选：D.

5. 设$a=\log_2 0.3, b=\log_{\frac{1}{2}} 0.4, c=0.4^{0.3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　）

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<c<a$　　D. $a<c<b$

【答案】D

【解析】

【分析】根据指数函数和对数函数的性质求出a,b,c的范围即可求解.

【详解】$\because \log_2 0.3<\log_2 1=0$，$\therefore a<0$，

$\because \log_{\frac{1}{2}} 0.4=-\log_2 0.4=\log_2 \frac{5}{2}>\log_2 2=1$，$\therefore b>1$，

$\because 0<0.4^{0.3}<0.4^0=1$，$\therefore 0<c<1$，

$\therefore a<c<b$.

故选：D.

6.

两个圆锥的底面是一个球的同一截面，顶点均在球面上，若球的体积为$\frac{32\pi}{3}$，两个圆锥的高之比为$1:3$，则这两个圆锥的体积之和为（　）

A. 3π　　B. 4π　　C. 9π　　D. 12π

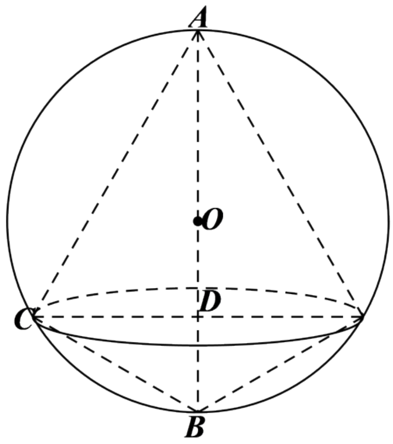
【答案】B

【解析】

【分析】作出图形，计算球体的半径，可计算得出两圆锥的高，利用三角形相似计算出圆锥的底面圆半径，再利用锥体体积公式可求得结果.

【详解】如下图所示，设两个圆锥的底面圆圆心为点D，

设圆锥AD和圆锥BD的高之比为$3:1$，即$AD=3BD$，



设球的半径为R，则$\dfrac{4\pi R^3}{3}=\dfrac{32\pi}{3}$，可得$R=2$，所以，$AB=AD+BD=4BD=4$，

所以，$BD=1$，$AD=3$，

$\because CD\perp AB$，则$\angle CAD+\angle ACD=\angle BCD+\angle ACD=90^\circ$，所以，$\angle CAD=\angle BCD$，

又因为$\angle ADC=\angle BDC$，所以，$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$，

所以，$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD}{BD}$，$\therefore CD=\sqrt{AD\cdot BD}=\sqrt{3}$，

因此，这两个圆锥的体积之和为$\dfrac{1}{3}\pi\times CD^2\cdot\left(AD+BD\right)=\dfrac{1}{3}\pi\times3\times4=4\pi$.

故选：B.

7. 若$2^a=5^b=10$，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$（　）

A. -1　　B. $\lg 7$　　C. 1　　D. $\log_7 10$

【答案】C

【解析】

【分析】由已知表示出a,b，再由换底公式可求.

【详解】$\because$ $2^a=5^b=10$，$\therefore a=\log_2 10, b=\log_5 10$，

$\therefore\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\log_2 10}+\dfrac{1}{\log_5 10}=\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$.

故选：C.

8.

已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点与抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点重合，

抛物线的准线交双曲线于A，B两点，交双曲线的渐近线于C、D两点，若

$|CD|=\sqrt{2}\,|AB|$．则双曲线的离心率为（　）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】设公共焦点为$(c,0)$，进而可得准线为$x=-c$，代入双曲线及渐近线方程，结合线段长度比值可得$a^2=\frac{1}{2}c^2$，再由双曲线离心率公式即可得解.

【详解】设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与抛物线$y^2=2px(p>0)$的公共焦点为$(c,0)$，

则抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线为$x=-c$，

令$x=-c$，则$\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，解得$y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以$|AB|=\frac{2b^2}{a}$，

又因为双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，所以$|CD|=\frac{2bc}{a}$，

所以$\frac{2bc}{a}=\frac{2\sqrt{2}b^2}{a}$，即$c=\sqrt{2}b$，所以$a^2=c^2-b^2=\frac{1}{2}c^2$，

所以双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

故选：A.

9.

设$a\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}\cos(2\pi x-2\pi a). & x<a\\ x^2-2(a+1)x+a^2+5, & x\ge a\end{cases}$，若$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内恰有6个零点，则$a$的取值范围是（　）

A. $\left(2,\frac{9}{4}\right]\cup\left(\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right]$　　　　B. $\left(\frac{7}{4},2\right)\cup\left(\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right)$

C. $\left(2,\frac{9}{4}\right]\cup\left[\frac{11}{4},3\right)$　　　　D. $\left(\frac{7}{4},2\right)\cup\left[\frac{11}{4},3\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】由$x^2-2(a+1)x+a^2+5=0$最多有2个根，可得$\cos(2\pi x-2\pi a)=0$至少有4个根，分别讨论当$x<a$和$x\geqslant a$时两个函数零点个数情况，再结合考虑即可得出.

【详解】$\because x^2-2\left(a+1\right)x+a^2+5=0$最多有2个根，所以$\cos\left(2\pi x-2\pi a\right)=0$至少有4个根，

由$2\pi x-2\pi a=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$可得$x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+a,k\in Z$，

由$0<\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+a<a$可得$-2a-\frac{1}{2}<k<-\frac{1}{2}$，

（1）$x<a$时，当$-5\le-2a-\frac{1}{2}<-4$时，$f\left(x\right)$有4个零点，即$\frac{7}{4}<a\le\frac{9}{4}$；

当$-6\le-2a-\frac{1}{2}<-5$，$f\left(x\right)$有5个零点，即$\frac{9}{4}<a\le\frac{11}{4}$；

当$-7\le-2a-\frac{1}{2}<-6$，$f\left(x\right)$有6个零点，即$\frac{11}{4}<a\le\frac{13}{4}$；

（2）当$x\geqslant a$时，$f(x)=x^2-2(a+1)x+a^2+5$，

$\Delta=4(a+1)^2-4\left(a^2+5\right)=8\left(a-2\right)$，

当$a<2$时，$\Delta<0$，$f\left(x\right)$无零点；

当$a=2$时，$\Delta=0$，$f\left(x\right)$有1个零点；

当$a>2$时，令$f(a)=a^2-2a(a+1)+a^2+5=-2a+5\ge0$，则$2<a\le\frac{5}{2}$，此时$f\left(x\right)$有2个零点；

所以若$a>\frac{5}{2}$时，$f\left(x\right)$有1个零点.

综上，要使$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内恰有6个零点，则应满足

$$\begin{cases}\frac{7}{4}<a\le\frac{9}{4}\\2<a\le\frac{5}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{9}{4}<a\le\frac{11}{4}\\a=2\text{或}a>\frac{5}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{11}{4}<a\le\frac{13}{4}\\a<2\end{cases},$$

则可解得a的取值范围是$\left(2,\frac{9}{4}\right]\cup\left(\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right]$.

【点睛】关键点睛：解决本题的关键是分成$x<a$和$x\geqslant a$两种情况分别讨论两个函数的零点个数情况.

第II卷

注意事项

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上．

2．本卷共11小题，共105分．

二、填空题，本大题共6小题，每小题5分，共30分，试题中包含两个空的，答对1个的给3分，全部答对的给5分．

10. i是虚数单位，复数$\frac{9+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$____________.

【答案】$4-\mathrm{i}$

【解析】

【分析】利用复数的除法化简可得结果.

【详解】$\frac{9+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{(9+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{20-5\mathrm{i}}{5}=4-\mathrm{i}$.

故答案为：$4-\mathrm{i}$.

11. 在$\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中，$x^6$的系数是__________.

【答案】160

【解析】

【分析】求出二项式的展开式通项，令x的指数为6即可求出.

【详解】$\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^r\left(2x^3\right)^{6-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=2^{6-r}C_6^r\cdot x^{18-4r}$，

令$18-4r=6$，解得$r=3$，

所以x^6的系数是$2^3C_6^3=160$.

故答案为：160.

12.

若斜率为$\sqrt{3}$的直线与y轴交于点A，与圆$x^2+(y-1)^2=1$相切于点B，则$|AB|=$_____________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】设直线AB的方程为$y=\sqrt{3}x+b$，则点$A(0,b)$，利用直线AB与圆$x^2+(y-1)^2=1$相切求出b的值，求出$|AC|$，利用勾股定理可求得$|AB|$.

【详解】设直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}x+b$，则点 $A\left(0,b\right)$，

由于直线 AB 与圆 $x^2+\left(y-1\right)^2=1$ 相切，且圆心为 $C\left(0,1\right)$，半径为 1，

则 $\dfrac{|b-1|}{2}=1$，解得 $b=-1$ 或 $b=3$，所以 $|AC|=2$，

因为 $|BC|=1$，故 $|AB|=\sqrt{|AC|^2-|BC|^2}=\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

13. 若 $a>0$，$b>0$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}+b$ 的最小值为__________.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】两次利用基本不等式即可求出.

【详解】$\because a>0$，$b>0$，

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}+b\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{b^2}}+b=\dfrac{2}{b}+b\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{b}\cdot b}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{b^2}$ 且 $\dfrac{2}{b}=b$，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时等号成立，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$.

14.

甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语，若一方猜对且另一方猜错，则猜对的一方获胜，否则本次平局，已知每次活动中，甲、乙猜对的概率分别为 $\dfrac{5}{6}$ 和 $\dfrac{1}{5}$，且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响，各次活动也互不影响，则一次活动中，甲获胜的概率为__________，3次活动中，甲至少获胜2次的概率为__________.

【答案】 ①. $\dfrac{2}{3}$ ②. $\dfrac{20}{27}$

【解析】

【分析】根据甲猜对乙没有才对可求出一次活动中，甲获胜的概率；在3次活动中，甲至少获胜2次分为甲获胜2次和3次都获胜求解.

【详解】由题可得一次活动中，甲获胜的概率为 $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{3}$；

则在3次活动中，甲至少获胜2次的概率为$C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$；$\frac{20}{27}$.

15. 在边长为1的等边三角形ABC中，D为线段BC上的动点，$DE\perp AB$且交AB于点E.

$DF//AB$且交AC于点F,则$|2\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}|$的值为____________；$(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{DA}$的最小值为____________.

【答案】 ①. 1 ②. $\frac{11}{20}$

【解析】

【分析】设$BE=x$，由$(2\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF})^2=4\overrightarrow{BE}^2+4\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DF}^2$可求出；将$(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{DA}$化为关于$x$的关系式即可求出最值.

【详解】设$BE=x$，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\because\triangle ABC$为边长为1的等边三角形，$DE\perp AB$，

$\therefore\angle BDE=30^\circ, BD=2x, DE=\sqrt{3}x, DC=1-2x$，

$\because DF//AB$，$\therefore\triangle DFC$为边长为$1-2x$的等边三角形，$DE\perp DF$，

$\therefore(2\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF})^2=4\overrightarrow{BE}^2+4\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DF}^2=4x^2+4x(1-2x)\times\cos 0^\circ+(1-2x)^2=1$，

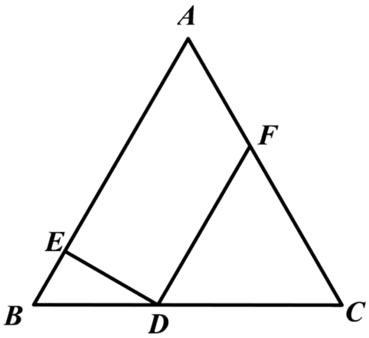
$\therefore|2\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}|=1$，

$\because(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA})=\overrightarrow{DE}^2+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EA}$

$=(\sqrt{3}x)^2+(1-2x)\times(1-x)=5x^2-3x+1=5\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{11}{20}$，

所以当$x=\frac{3}{10}$时，$(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{DA}$的最小值为$\frac{11}{20}$.

故答案为：1；$\frac{11}{20}$.



三、解答题，本大题共5小题，共75分，解答应写出文字说明，证明过程成演算步骤.

16. 在$\triangle ABC$，角 A,B,C 所对的边分别为a,b,c，已知

$\sin A:\sin B:\sin C=2:1:\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$.

（I）求a的值；

（II）求$\cos C$的值；

（III）求$\sin\left(2C-\dfrac{\pi}{6}\right)$的值.

【答案】（I）$2\sqrt{2}$；（II）（III）$\dfrac{3\sqrt{21}-1}{16}$

【解析】

【分析】（I）由正弦定理可得$a:b:c=2:1:\sqrt{2}$，即可求出；

（II）由余弦定理即可计算；

（III）利用二倍角公式求出$2C$的正弦值和余弦值，再由两角差的正弦公式即可求出.

【详解】（I）因为$\sin A:\sin B:\sin C=2:1:\sqrt{2}$，由正弦定理可得$a:b:c=2:1:\sqrt{2}$，

$\because b=\sqrt{2}$，$\therefore a=2\sqrt{2},c=2$；

（II）由余弦定理可得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{8+2-4}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$；

（III）$\because\cos C=\dfrac{3}{4}$，$\therefore\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

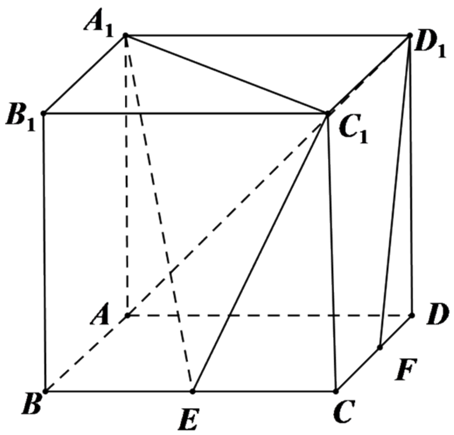
$\therefore\sin 2C=2\sin C\cos C=2\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，$\cos 2C=2\cos^2 C-1=2\times\dfrac{9}{16}-1=\dfrac{1}{8}$，

所以 $\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2C\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2C\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{21}-1}{16}$.

17.

如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E为棱BC的中点，F为棱CD的中点

.



（I）求证：$D_1F\,//$ 平面 A_1EC_1；

（II）求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值.

（III）求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值.

【答案】（I）证明见解析；（II）$\frac{\sqrt{3}}{9}$；（III）$\frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】（I）建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{D_1F}$ 及平面 A_1EC_1 的一个法向量 $\vec{m}$，证明 $\overrightarrow{D_1F}\perp\vec{m}$，即可得证；

（II）求出 $\overrightarrow{AC_1}$，由 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{AC_1}\right\rangle\right|$ 运算即可得解；

（III）求得平面 AA_1C_1 的一个法向量 $\overrightarrow{DB}$，由 $\cos\left\langle\overrightarrow{DB},\vec{m}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|}$ 结合同角三角函数的平方关系即可得解.

【详解】（I）以 A 为原点，AB,AD,AA_1 分别为 x,y,z 轴，建立如图空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$, $A_1(0,0,2)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $C_1(2,2,2)$, $D_1(0,2,2)$,

因为E为棱BC的中点，F为棱CD的中点，所以 $E(2,1,0)$ ， $F(1,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{D_1F}=(1,0,-2)$, $\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$, $\overrightarrow{A_1E}=(2,1,-2)$,

设平面 A_1EC_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x_1+2y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=2x_1+y_1-2z_1=0\end{cases}$ ，令 $x_1=2$ ，则 $\vec{m}=(2,-2,1)$,

因为 $\overrightarrow{D_1F}\cdot\vec{m}=2-2=0$ ，所以 $\overrightarrow{D_1F}\perp\vec{m}$,

因为 $D_1F\not\subset$ 平面 A_1EC_1 ，所以 $D_1F//$ 平面 A_1EC_1 ；

（II）由（1）得， $\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$,

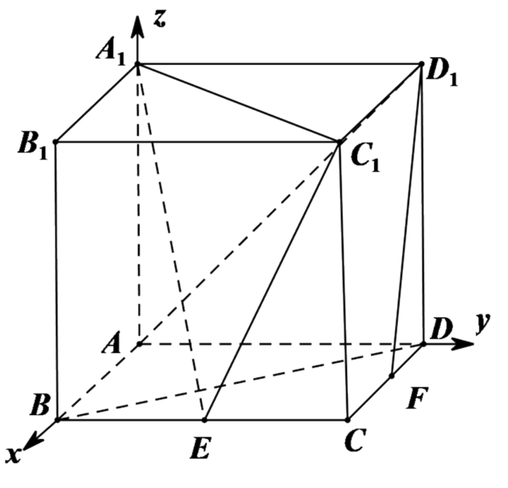
设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角为 θ ,

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{AC_1}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}\right|=\dfrac{2}{3\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ ；

（III）由正方体的特征可得，平面 AA_1C_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{DB}=(2,-2,0)$,

则 $\cos\left\langle\overrightarrow{DB},\vec{m}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DB}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{8}{3\times2\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\cos^2\left\langle\overrightarrow{DB},\vec{m}\right\rangle}=\dfrac{1}{3}$.



18.

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点为$F$，上顶点为$B$，离心率为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且$\left|BF\right|=\sqrt{5}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）直线l与椭圆有唯一的公共点M，与y轴的正半轴交于点N，过N与BF垂直的直线交x轴于点P．若$MP//BF$，求直线l的方程.

【答案】（1）$\frac{x^2}{5}+y^2=1$；（2）$x-y+\sqrt{6}=0$.

【解析】

【分析】（1）求出a的值，结合c的值可得出b的值，进而可得出椭圆的方程；

（2）设点$M\left(x_0,y_0\right)$，分析出直线l的方程为$\frac{x_0x}{5}+y_0y=1$，求出点P的坐标，根据$MP//BF$可得出$k_{MP}=k_{BF}$，求出x_0、y_0的值，即可得出直线l的方程.

【详解】（1）易知点$F\left(c,0\right)$、$B\left(0,b\right)$，故$\left|BF\right|=\sqrt{c^2+b^2}=a=\sqrt{5}$，

因为椭圆的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故$c=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

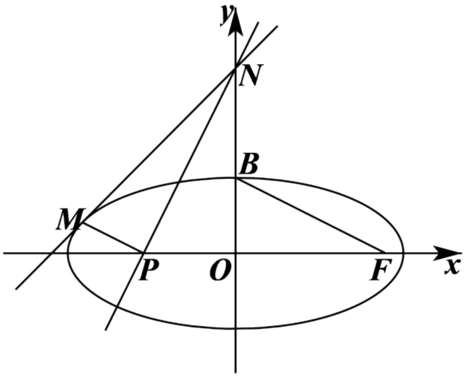
因此，椭圆的方程为$\frac{x^2}{5}+y^2=1$；

（2）设点$M\left(x_0,y_0\right)$为椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$上一点，

先证明直线MN的方程为$\frac{x_0x}{5}+y_0y=1$，

联立$\begin{cases}\frac{x_0x}{5}+y_0y=1\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}$，消去$y$并整理得$x^2-2x_0x+x_0^2=0$，$\Delta=4x_0^2-4x_0^2=0$，

因此，椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$在点$M\left(x_0,y_0\right)$处的切线方程为$\frac{x_0x}{5}+y_0y=1$.



在直线MN的方程中，令$x=0$，可得$y=\frac{1}{y_0}$，由题意可知$y_0>0$，即点$N\left(0,\frac{1}{y_0}\right)$，

直线BF的斜率为$k_{BF}=-\frac{b}{c}=-\frac{1}{2}$，所以，直线$PN$的方程为$y=2x+\frac{1}{y_0}$，

在直线PN的方程中，令$y=0$，可得$x=-\frac{1}{2y_0}$，即点$P\left(-\frac{1}{2y_0},0\right)$，

因为$MP//BF$，则$k_{MP}=k_{BF}$，即$\frac{y_0}{x_0+\frac{1}{2y_0}}=\frac{2y_0^2}{2x_0y_0+1}=-\frac{1}{2}$，整理可得$\left(x_0+5y_0\right)^2=0$

，

所以，$x_0=-5y_0$，因为$\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=6y_0^2=1$，$\therefore y_0>0$，故$y_0=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$x_0=-\frac{5\sqrt{6}}{6}$，

所以，直线l的方程为$-\frac{\sqrt{6}}{6}x+\frac{\sqrt{6}}{6}y=1$，即$x-y+\sqrt{6}=0$.

【点睛】结论点睛：在利用椭圆的切线方程时，一般利用以下方法进行直线：

（1）设切线方程为$y=kx+m$与椭圆方程联立，由$\Delta=0$进行求解；

（2）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在其上一点$\left(x_0,y_0\right)$的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，再应用此方程时

，首先应证明直线$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$相切.

19.

已知$\left\{a_n\right\}$是公差为2的等差数列，其前8项和为64．$\left\{b_n\right\}$是公比大于0的等比数列，

$b_1=4,b_3-b_2=48$.

（I）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）记$c_n=b_{2n}+\frac{1}{b_n},n\in N^*$，

（i）证明$\{c_n^2-c_{2n}\}$是等比数列；

（ii）证明$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_ka_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}<2\sqrt{2}\left(n\in N^*\right)$

【答案】（I）$a_n=2n-1,n\in N^*$，$b_n=4^n,n\in N^*$；（II）（i）证明见解析；（ii）证明见解析.

【解析】

【分析】（I）由等差数列的求和公式运算可得$\{a_n\}$的通项，由等比数列的通项公式运算可得$\{b_n\}$的通项公式；

（II）（i）运算可得$c_n^2-c_{2n}=2\cdot4^n$，结合等比数列的定义即可得证；

（ii）放缩得$\frac{a_na_{n+1}}{c_n^2-c_{2n}}<\frac{4n^2}{2\cdot2^{2n}}$，进而可得$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_ka_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}$，结合错位相减法即可得证.

【详解】（I）因为$\{a_n\}$是公差为2的等差数列，其前8项和为64.

所以$a_1+a_2+\cdots+a_8=8a_1+\frac{8\times7}{2}\times2=64$，所以$a_1=1$，

所以$a_n=a_1+2\left(n-1\right)=2n-1,n\in N^*$；

设等比数列$\{b_n\}$的公比为$q,\left(q>0\right)$，

所以$b_3-b_2=b_1q^2-b_1q=4\left(q^2-q\right)=48$，解得$q=4$（负值舍去），

所以$b_n=b_1q^{n-1}=4^n,n\in N^*$；

（II）（i）由题意，$c_n=b_{2n}+\frac{1}{b_n}=4^{2n}+\frac{1}{4^n}$，

所以$c_n^2-c_{2n}=\left(4^{2n}+\frac{1}{4^n}\right)^2-\left(4^{4n}+\frac{1}{4^{2n}}\right)=2\cdot4^n$，

所以$c_n^2-c_{2n}\neq0$，且$\frac{c_{n+1}^2-c_{2n+2}}{c_n^2-c_{2n}}=\frac{2\cdot4^{n+1}}{2\cdot4^n}=4$，

所以数列$\left\{c_n^2-c_{2n}\right\}$是等比数列；

（ii）由题意知，$\dfrac{a_na_{n+1}}{c_n^2-c_{2n}}=\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4^n}=\dfrac{4n^2-1}{2\cdot 2^{2n}}<\dfrac{4n^2}{2\cdot 2^{2n}}$，

所以$\sqrt{\dfrac{a_na_{n+1}}{c_n^2-c_{2n}}}<\sqrt{\dfrac{4n^2}{2\cdot 2^{2n}}}=\dfrac{2n}{\sqrt{2}\cdot 2^n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{a_ka_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^{k-1}}$，

设$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^{k-1}}=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

则$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，

两式相减得$\dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$，

所以$T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{a_ka_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^{k-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}\right)<2\sqrt{2}$.

【点睛】关键点点睛：

最后一问考查数列不等式的证明，因为$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{a_ka_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}$无法直接求解，应先放缩去除根号，再由错位相减法即可得证.

20. 已知$a>0$，函数$f(x)=ax-xe^x$.

（I）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程：

（II）证明$f(x)$存在唯一的极值点

（III）若存在a，使得$f(x)\le a+b$对任意$x\in\mathbf{R}$成立，求实数b的取值范围.

【答案】（I）$y=(a-1)x,(a>0)$；（II）证明见解析；（III）$[-e,+\infty)$

【解析】

【分析】（I）求出$f\left(x\right)$在$x=0$处的导数，即切线斜率，求出$f\left(0\right)$，即可求出切线方程

；

（II）令 $f'(x)=0$，可得 $a=(x+1)e^{x}$，则可化为证明 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 仅有一个交点，利用导数求出 $g(x)$ 的变化情况，数形结合即可求解；

（III）令 $h(x)=\left(x^{2}-x-1\right)e^{x},(x>-1)$，题目等价于存在 $x\in(-1,+\infty)$，使得 $h(x)\le b$，即 $b\ge h(x)_{\min}$，利用导数即可求出 $h(x)$ 的最小值.

【详解】（I）$f'(x)=a-(x+1)e^{x}$，则 $f'(0)=a-1$，

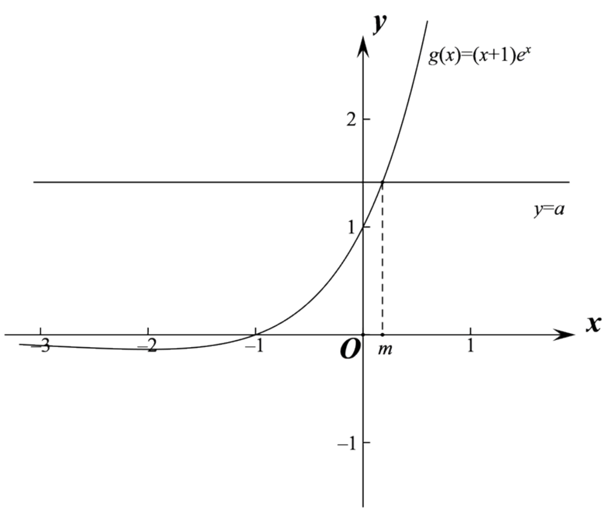
又 $f(0)=0$，则切线方程为 $y=(a-1)x,(a>0)$；

（II）令 $f'(x)=a-(x+1)e^{x}=0$，则 $a=(x+1)e^{x}$，

令 $g(x)=(x+1)e^{x}$，则 $g'(x)=(x+2)e^{x}$，

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)<0$，$g(-1)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)>0$，画出 $g(x)$ 大致图像如下：



所以当 $a>0$ 时，$y=a$ 与 $y=g(x)$ 仅有一个交点，令 $g(m)=a$，则 $m>-1$，且

$f'(m)=a-g(m)=0$，

当 $x\in(-\infty,m)$ 时，$a>g(x)$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(m,+\infty)$ 时，$a<g(x)$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x=m$ 为 $f\left(x\right)$ 的极大值点，故 $f(x)$ 存在唯一的极值点；

（III）由（II）知 $f(x)_{\max}=f(m)$，此时 $a=(1+m)e^{m}, m>-1$，

所以 $\{f(x)-a\}_{\max}=f(m)-a=\left(m^{2}-m-1\right)e^{m},(m>-1)$，

令 $h(x)=\left(x^{2}-x-1\right)e^{x},(x>-1)$，

若存在a，使得 $f(x)\le a+b$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，等价于存在 $x\in(-1,+\infty)$，使得 $h(x)\le b$，

即 $b\ge h(x)_{\min}$，

$h'(x)=\left(x^{2}+x-2\right)e^{x}=(x-1)(x+2)e^{x}$， $x>-1$，

当 $x\in(-1,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h\left(x\right)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h\left(x\right)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=-e$，故 $b\ge -e$，

所以实数b的取值范围$\left[-e,+\infty\right)$.

【点睛】关键点睛：第二问解题的关键是转化为证明 $y=a$ 与 $y=g\left(x\right)$ 仅有一个交点；第三问解题的关键是转化为存在 $x\in(-1,+\infty)$，使得 $h(x)\le b$，即 $b\ge h(x)_{\min}$.