2014年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷理科）

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-x-2\le 0\}$，集合 B 为整数集，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,0,1,2\}$　　B．$\{-2,-1,0,1\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-1,0\}$

【答案】A

【解析】

试题分析：$A=\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$，$\therefore A\cap B=\{-1,0,1,2\}$，选A.

【考点定位】集合的基本运算.

2．在 $x(1+x)^6$ 的展开式中，含 x^3 项的系数为（　　）

A．30　B．20　C．15　D．10

【答案】C

【解析】

试题分析：$x(1+x)^6=x(1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6)$，所以含 x^3 项的系数为15.选C

【考点定位】二项式定理.

3．为了得到函数 $y=\sin(2x+1)$ 的图象，只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点（　　）

A．向左平行移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度　　B．向右平行移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度

C．向左平行移动1个单位长度　　D．向右平行移动1个单位长度

【答案】A

【解析】

试题分析：$y=\sin(2x+1)=\sin 2(x+\frac{1}{2})$，所以只需把 $y=\sin 2x$ 的图象上学科网所有的点向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位.选A.

【考点定位】三角函数图象的变换.

4．若 $a>b>0$，$c<d<0$，则一定有（　　）

A．$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　B．$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$　　C．$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　D．$\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$

【答案】D

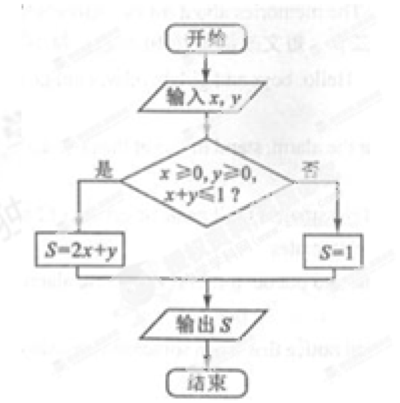
【解析】

试题分析：$\because c<d<0,\therefore -c>-d>0,-\frac{1}{d}>-\frac{1}{c}>0$，又 $a>b>0,\therefore -\frac{a}{d}>-\frac{b}{c}>0,\therefore \frac{a}{d}<\frac{b}{c}$.选D

【考点定位】不等式的基本性质.

5．执行如图 1 所示的程序框图，如果输入的 $x,y\in R$，则输出的 S 的最大值为（　　）

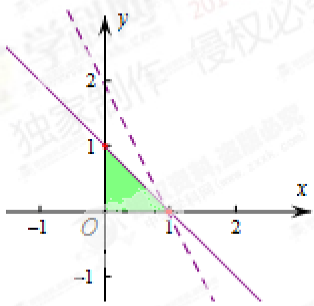
A． 0　　B． 1　　C． 2　　D． 3



【答案】C

【解析】

试题分析：该程序执行以下运算：已知$\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ x+y\le 1\end{cases}$，求 $S=2x+y$ 的最大值.作出$\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ x+y\le 1\end{cases}$表示的区域如图所示，由图可知，当$\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$时，$S=2x+y$ 最大，最大值为 $S=2+0=2$.选 C.



【考点定位】程序框图与线性规划.

6．六个人从左至右排成一行，最左端只能排甲或乙，学科网最右端不能排甲，则不同的排法共有（　）

A．192 种　　B．216 种　　C．240 种　　D．288 种

【答案】B

【解析】

试题分析：最左端排甲，有 $5!=120$ 种排法；最左端排乙，有 $4\times 4!=96$ 种排法，共有 $120+96=216$ 种排法.选 B.

【考点定位】排列组合.

7．平面向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(4,2)$，$\vec{c}=m\vec{a}+\vec{b}$（$m\in R$），且 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角等于 $\vec{c}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，则 $m=$（　　）

A． -2　　B． -1　　C． 1　　D． 2

【答案】 D.

【解析】

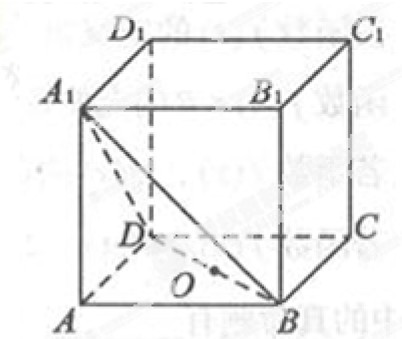
试题分析：由题意得：$\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{b}|}\Rightarrow\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\Rightarrow\frac{5m+8}{\sqrt{5}}=\frac{8m+20}{2\sqrt{5}}\Rightarrow m=2$，选 D.

法二、设起点在原点时，向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的终点分别对应点 A、B、C，显然 OA，OB 关于直线$y=x$对称，又因为$\vec{c}$与$\vec{a}$的夹角等于$\vec{c}$与$\vec{b}$的夹角，故点 C 必在直线$y=x$上，由此可得$m=2$

【考点定位】向量的夹角及向量的坐标运算.

8．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点O为线段BD的中点.设点P在线段CC_1上，直线OP与平面A_1BD所成的角为α，则$\sin\alpha$的取值范围是（　　）

A．$[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$　　B．$[\frac{\sqrt{6}}{3},1]$　　C．$[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}]$　　D．$[\frac{2\sqrt{2}}{3},1]$



【答案】B

【解析】

试题分析：设正方体的棱长为1，则$A_1C_1=\sqrt{2},A_1C=\sqrt{3},A_1O=OC_1=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}},OC=\sqrt{\frac{1}{2}}$，所以

$$\cos\angle A_1OC_1=\frac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{3},\sin\angle A_1OC_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}，\cos\angle A_1OC=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-3}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\sin\angle A_1OC=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

又直线与平面所成的角小于等于90°，而$\angle A_1OC$为钝角，所以$\sin\alpha$的范围为$[\frac{\sqrt{6}}{3},1]$，选 B.

【考点定位】空间直线与平面所成的角.

9．已知$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，$x\in(-1,1)$.现有下列命题：

①$f(-x)=-f(x)$；②$f(\frac{2x}{x^2+1})=2f(x)$；③$|f(x)|\geq 2|x|$.其中的所有正确命题的序号是（　　）

A．①②③　　　B．②③　　　C．①③　　　D．①②

【答案】A

【解析】

试题分析：对①，$f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-f(x)$，成立；

对②，左边的x可以取除± 1之外的任意值，而右边的$x\in(-1,1)$，故不成立；

注：$f(\frac{2x}{1+x^2})=\ln(1+\frac{2x}{1+x^2})-\ln(1-\frac{2x}{1+x^2})=\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}-\ln\frac{(1-x)^2}{1+x^2}=2\ln(1+x)-2\ln(1-x)=2f(x)$.

当$x\in(-1,1)$时成立.

对③，由①知$f(x)$是奇函数，根据图象的对称性，可只考虑$x\ge 0$的情况. $x>0$时，令$g(x)=f(x)-2x$，

则$g'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2=\frac{2x^2}{1-x^2}>0$，所以$x\ge 0$时$g(x)\ge g(0)=0,\therefore f(x)\ge 2x$，所以③成立.

标准答案选 A，笔者认为有错，应该选 C. 题干中的$x\in(-1,1)$应理解为函数$f(x)$的定义域，而不是后面三个命题中x的范围，因为在学科网它的前面是逗号.如果$x\in(-1,1)$前是句号，则选 A.

【考点定位】1、函数的奇偶性；2、对数运算；3、函数与不等式.

10．已知F是抛物线$y^2=x$的焦点，点A，B在该抛物线上且位于x轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$（其中$O$为坐标原点），则$\Delta ABO$与$\Delta AFO$面积之和的最小值是（　　）

A．2　　　B．3　　　C．$\frac{17\sqrt{2}}{8}$　　　D．$\sqrt{10}$

【答案】B

【解析】

试题分析：据题意得$F(\frac{1}{4},0)$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1=y_1^2,x_2=y_2^2$，$y_1^2y_2^2+y_1y_2=2,y_1y_2=-2$或$y_1y_2=1$，因为$A,B$位于$x$轴两侧所以．所以$y_1y_2=-2$两面积之和为

$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times|y_1|=\frac{1}{2}|y_1^2y_2-y_2^2y_1|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times|y_1|=|y_2-y_1|+\frac{1}{8}\times|y_1|=\left|\frac{2}{y_1}+y_1\right|+\frac{1}{8}\times|y_1|=\left|\frac{2}{y_1}+\frac{9}{8}y_1\right|$

$=\left|\frac{2}{y_1}\right|+\left|\frac{9}{8}y_1\right|\ge 3$.

【考点定位】1、抛物线；2、三角形的面积；3、重要不等式.

二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．复数$\frac{2-2i}{1+i}=$______.

【答案】$-2i$.

【解析】

试题分析：$\frac{2-2i}{1+i}=\frac{2(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-2i$.

【考点定位】复数的基本运算.

12．设 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 2 的函数，当 $x\in[-1,1)$ 时，$f(x)=\begin{cases}-4x^2+2, & -1\le x<0,\\ x, & 0\le x<1,\end{cases}$，则 $f(\frac{3}{2})=$______.

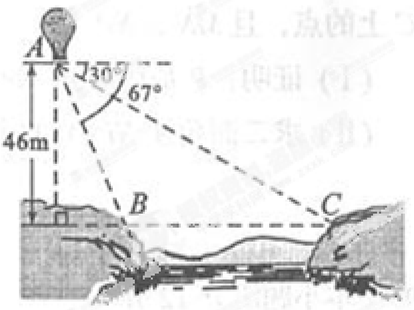
【答案】1

【解析】

试题分析：$f(\frac{3}{2})=f(-\frac{1}{2})=-4\times\frac{1}{4}+2=1$.

【考点定位】周期函数及分段函数.

13．如图，从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B，C 的俯角分别为 67°，30°，此时气球的高是 $46m$，则河流的宽度 BC 约等于______m．（用四舍五入法将结果精确到个位.参考数据：$\sin 67^\circ\approx 0.92$，$\cos 67^\circ\approx 0.39$，$\sin 37^\circ\approx 0.60$，$\cos 37^\circ\approx 0.80$，$\sqrt{3}\approx 1.73$）



【答案】60

【解析】

试题分析：$AC=92$，$AB=\frac{46}{\cos 67^\circ}$，$\frac{AB}{\sin 30^\circ}=\frac{BC}{\sin 37^\circ}$，$\therefore BC=\frac{AB\sin 37^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 60$.

【考点定位】解三角形.

14．设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值是______.

【答案】

【解析】

试题分析：易得 $A(0,0),B(1,3)$.设 $P(x,y)$，则消去 m 得：$x^2+y^2-x-3y=0$，所以点 P 在以 AB 为直径的圆上，$PA\perp PB$，所以 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$，$|PA|\times|PB|\le\frac{|AB|^2}{2}=5$.

法二、因为两直线的斜率互为负倒数，所以 $PA\perp PB$，点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆.以下同法一.

【考点定位】1、直线与圆；2、重要不等式.

15．以 A 表示值域为 R 的函数组成的集合，B 表示具有如下性质的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合：对于函数

$\varphi(x)$，存在一个正数M，使得函数$\varphi(x)$的值域包含于区间$[-M,M]$.例如，当$\varphi_1(x)=x^3$，$\varphi_2(x)=\sin x$时，$\varphi_1(x)\in A$，$\varphi_2(x)\in B$.现有如下命题：

①设函数$f(x)$的定义域为D，则."$f(x)\in A$"的充要条件是"$\forall b\in R$，$\exists a\in D$，$f(a)=b$"；

②学科网函数$f(x)\in B$的充要条件是$f(x)$有最大值和最小值；

③若函数$f(x)$，$g(x)$的定义域相同，且$f(x)\in A$，$g(x)\in B$，则$f(x)+g(x)\notin B$；

④若函数$f(x)=a\ln(x+2)+\frac{x}{x^2+1}$（$x>-2$，$a\in R$）有最大值，则$f(x)\in B$.

其中的真命题有_______.（写出所有真命题的序号）

【答案】①③④

【解析】

试题分析：对①，若对任意的$b\in R$，都$\exists a\in D$，使得$f(a)=b$，则$f(x)$的值域必为R；反之，$f(x)$的值域为R，则对任意的$b\in R$，都$\exists a\in D$，使得$f(a)=b$.故正确.

对②，比如函数$f(x)=x(-1<x<1)$属于B，但学科网是它既无最大值也无最小值.故错误.

对③，因为$f(x)\in(-\infty,+\infty)$，而$g(x)$有界，故$f(x)+g(x)\in(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)+g(x)\notin B$.故正确.

对④，$-\frac{1}{2}\le\frac{x}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$.当$a>0$或$a<0$时$a\ln x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)$均无最大值.所以若$f(x)$有最大值，则$a=0$，此时$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$，$f(x)\in B$.故正确.

【考点定位】1、新定义；2、函数的定义域值域.

三．解答题：本大题共6小题，共 75分.解答须写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16．已知函数$f(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{4})$.

（1）求$f(x)$的单调递增区间；

（2）若α是第二象限角，$f(\frac{\alpha}{3})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$，求$\cos\alpha-\sin\alpha$的值.

【答案】(1) $-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi(k\in Z)$；(2) $-\sqrt{2}$，$-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【解析】

试题分析：(1)将$3x+\frac{\pi}{4}$看作一个整体，根据正弦函数$y=\sin x$的单调递增区间便可得$f(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{4})$的单调递增区间.(2)将$\frac{\alpha}{3}$代入$f(\frac{\alpha}{3})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$得$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$.求三角函数值时，首先考虑统一角，故利用和角公式和倍角公式化为单角α的三角函数得：

$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{5}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)$.注意这里不能将 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 约了.接下来分 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$ 和 $\sin\alpha+\cos\alpha\neq 0$ 两种情况求值.

试题解答：(1) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 3x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi(k\in Z)$；

(2) 由题设得：$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos 2\alpha$，

即 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{5}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)$，.

若 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{2}$，

若 $\sin\alpha+\cos\alpha\neq 0$，则 $1=\frac{4}{5}(\cos\alpha-\sin\alpha)^2\Rightarrow\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【考点定位】三角函数的性质、三角恒等变换三角函数的求值.

17．一款击鼓小游戏的规则如下：每盘游戏都需要击鼓三次，每次击鼓要么出现一次音乐，要么不出现音乐；每盘游戏击鼓三次后，出现一次音乐获得 10 分，出现两次音乐获得 20 分，出现三次音乐获得 100 分，没有出现音乐则扣除 200 分（即获得 -200 分）.学科网设每次击鼓出现音乐的概率为 $\frac{1}{2}$，且各次击鼓出现音乐相互独立.

（1）设每盘游戏获得的分数为 X，求 X 的分布列；

（2）玩三盘游戏，至少有一盘出现音乐的概率是多少？

（3）玩过这款游戏的许多人都发现，若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而减少了.请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.

【答案】(1) $P(X=-200)=\frac{1}{8},P(X=10)=\frac{3}{8},P(X=20)=\frac{3}{8},P(X=100)=\frac{1}{8}$；(2) $p=\frac{511}{512}$；

(3) 每盘所得分数的期望为负数，所以玩得越多，所得分数越少.

【解析】

试题分析：(1) 本题属于独立重复试验问题，利用 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 即可求得 X 的分布列；(2) 玩一盘游戏，没有出现音乐的概率为 $p_0=\frac{1}{8}$.“玩三盘游戏，至少有学科网一盘出现音乐”的对立事件是“玩三盘游戏，三盘都没有出现音乐”由此可得“玩三盘游戏，至少有一盘出现音乐”的概率；(3)

试题解答：(1) $P(X=-200)=\frac{1}{8},P(X=10)=\frac{3}{8},P(X=20)=\frac{3}{8},P(X=100)=\frac{1}{8}$.所以 X 的分布列为

X	-200	10	20	100
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

（2）玩一盘游戏，没有出现音乐的概率为 $p_0=\frac{1}{8}$ ，玩三盘游戏，至少有一盘出现音乐的概率为 $p=1-(\frac{1}{8})^3=\frac{511}{512}$.

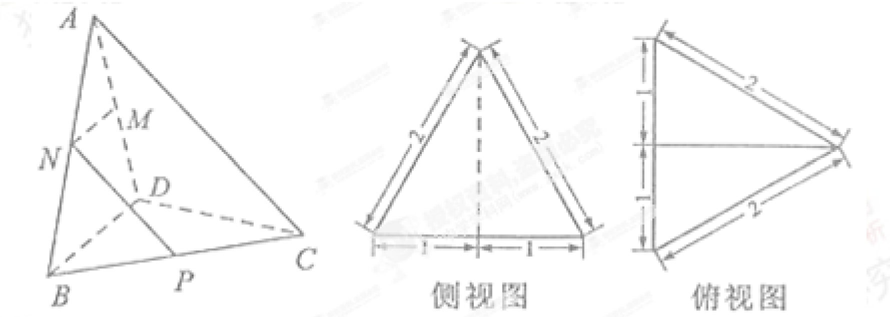
（3）由（1）得：$EX=(-200)\times\frac{1}{8}+10\times\frac{3}{8}+20\times\frac{3}{8}+100\times\frac{1}{8}=-\frac{5}{4}$，即每盘所得分数的期望为负数，所以玩得越多，所得分数越少的可能性更大.

【考点定位】1、随机变量的分布列；2、独立重复事件的概率；3、统计知识.

18．三棱锥 $A-BCD$ 及其侧视图、俯视图如图所示.设 M，N 分别为线段 AD，AB 的中点，P 为线段 BC 上的点，且 $MN\perp NP$.

（1）证明：P 为线段 BC 的中点；

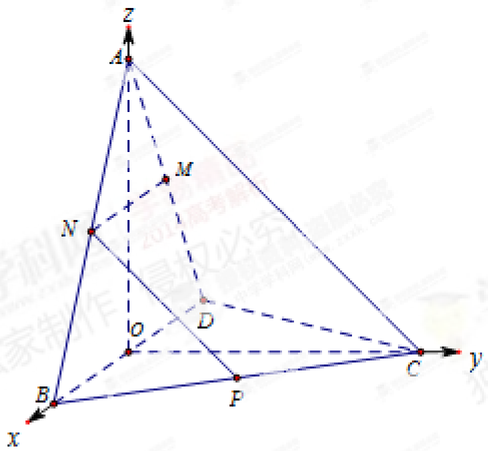
（2）求二面角 $A-NP-M$ 的余弦值.



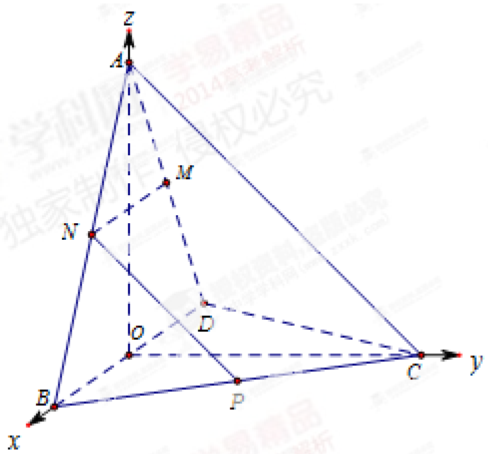
【答案】（1）证明详见解析；（2）$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】

试题分析：根据侧视图和俯视图可知，$\Delta ABD,\Delta BCD$ 为正三角形，顶点 D 在底面内的射影为 BD 的中点 O，所以 OB,OA,OC 两两互相垂直，故可以 OB,OA,OC 为坐标轴建立坐标系如图所示.（1）$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，为了证明点 P 是 BC 的中点，只需利用向量证明 $\lambda=\frac{1}{2}$ 即可.（2）利用向量求出平面 PMN 和平面 ABC 的法向量，求出法向量的夹角即可得二面角 $A-NP-M$ 的余弦值.



试题解答：根据侧视图和俯视图可知，$\Delta ABD,\Delta BCD$ 为正三角形，顶点 D 在底面内的射影为 BD 的中点 O，所以 OB,OA,OC 两两互相垂直，建坐标系如图所示，则 $A(0,0,\sqrt{3}),B(1,0,0),C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0),N(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，设（1）证明：设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda(-1,\sqrt{3},0)=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$，则 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{BC}=(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$，$\overrightarrow{NP}=(\frac{1}{2}-\lambda,\sqrt{3}\lambda,-\frac{3}{2})$.因为 $MN\perp PN,\therefore\ \frac{1}{2}-\lambda+0+0=0,\lambda=\frac{1}{2}$，所以点 P 是 BC 的中点.



（2）易得平面 PMN 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(0,1,1)$. $\overrightarrow{BA}=(-1,0,\sqrt{3}),\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$，设平面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-x+0+\sqrt{3}z=0\\-x+\sqrt{3}y+0=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},1,1)$，所以 $\cos\theta=\frac{1+1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【考点定位】1、空间直线与平面的位置关系；2、二面角.

19．设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，点 (a_n,b_n) 在函数 $f(x)=2^x$ 的图象上（$n\in N^*$）.

（1）若 $a_1=-2$，点 $(a_8,4b_7)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

（2）若 $a_1=1$，学科网函数 $f(x)$ 的图象在点 (a_2,b_2) 处的切线在 x 轴上的截距为 $2-\frac{1}{\ln 2}$，求数列 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 的

前 n 项和 T_n.

【答案】(1) $S_n=n(n-3)$;(2) $T_n=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

【解析】

试题分析：据题设可得，$b_n=2^{a_n}$.(1) $b_7=2^{a_7}=2^{-2+6d}$,$\therefore 4\times 2^{-2+6d}=2^{-2+7d}$,$d=2$，由等差数列的前 n 项和公式可得 S_n.(2) 首先可求出 $f(x)=2^x$ 在 (a_2,b_2) 处的切线为 $y-b_2=2^{a_2}\ln 2(x-a_2)$，令 $y=0$ 得 $-b_2=(2^{a_2}\ln 2)\times(x-a_2)$, $x=a_2-\frac{1}{\ln 2}$, $\therefore a_2=2$，由此可求出 $a_n=n$，$b_n=2^n$.所以 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{n}{2^n}$，这个数列用错位相学科网消法可得前 n 项和 T_n.

试题解答：据题设可得 $b_n=2^{a_n}$.(1) $b_7=2^{a_7}=2^{-2+6d}$,$\therefore 4\times 2^{-2+6d}=2^{-2+7d}$,$d=2$，所以 $S_n=-2n+n(n-1)=n(n-3)$.

(2) 将 $f(x)=2^x$ 求导得 $f'(x)=2^x\ln 2$，所以 $f(x)=2^x$ 在 (a_2,b_2) 处的切线为 $y-b_2=2^{a_2}\ln 2(x-a_2)$，

令 $y=0$ 得 $-b_2=(2^{a_2}\ln 2)\times(x-a_2)$, $x=a_2-\frac{1}{\ln 2}$, $\therefore a_2=2$，

所以 $d=2-1=1$, $\therefore a_n=n$，$b_n=2^n$.所以 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{n}{2^n}$，

其前 n 项和 $T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$ ……………………①

两边乘以 2 得：$2T_n=\frac{1}{1}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$ ……………………②

②−①得：$2T_n-T_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$，所以 $T_n=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

【考点定位】等差数列与等比数列.

20．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的焦距为 4，其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点，T 为直线 $x=-3$ 上任意一点，过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P，Q.

(i) 证明：OT 平分线段 PQ（其中 O 为坐标原点）；

(ii) 当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时，求点 T 的坐标.

【答案】(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$；(2) $T(-3,0)$

【解析】

试题分析：（1）因为焦距为 4，所以 $c=2$，又 $a=\sqrt{3}b, a^2=b^2+c^2$，由此可求出 a, b 的值，从而求得椭圆的方程.（2）椭圆方程化为 $x^2+3y^2=6$. 设 PQ 的方程为 $x=my-2$，代入椭圆方程得：$(m^2+3)y^2-4my-2=0$.（i）设 PQ 的中点为 $M(x_0, y_0)$，求出 k_{OM}, k_{OT}，只要 $k_{OM}=k_{OT}$，即证得 OT 平分线段 PQ.（ii）可用 m 表示出 PQ，TF 可得：

$$\frac{|TF|}{|PQ|}=\frac{m^2+3}{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}=\frac{(m^2+1)+2}{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{m^2+1}+\frac{2}{\sqrt{m^2+1}})\geq\frac{1}{2\sqrt{6}}\times 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

再根据取等号的条件，可得 T 的坐标.

试题解答：（1）$c=2$，又 $a=\sqrt{3}b\Rightarrow b^2=2, a^2=6, \therefore \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）椭圆方程化为 $x^2+3y^2=6$.

（i）设 PQ 的方程为 $x=my-2$，代入椭圆方程得：$(m^2+3)y^2-4my-2=0$.

设 PQ 的中点为 $M(x_0, y_0)$，则 $y_0=\frac{2m}{m^2+3}, x_0=-\frac{6}{m^2+3}$

又 TF 的方程为 $y-0=-m(x+2)$，则 $x=-3$ 得 $y=m$，

所以 $k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}=-\frac{m}{3}=k_{OT}$，即 OT 过 PQ 的中点，即 OT 平分线段 PQ.

（ii）$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\times\frac{\sqrt{16m^2+8(m^2+3)}}{m^2+3}=\frac{2\sqrt{6}(m^2+1)}{m^2+3}$，又 $|TF|=\sqrt{1+m^2}$，所以

$$\frac{|TF|}{|PQ|}=\frac{m^2+3}{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}=\frac{(m^2+1)+2}{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{m^2+1}+\frac{2}{\sqrt{m^2+1}})\geq\frac{1}{2\sqrt{6}}\times 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

当 $m=\pm 1$ 时取等号，此时 T 的坐标为 $T(-3,\pm 1)$.

【考点定位】1、椭圆的方程；2、直线与圆锥曲线；3、最值问题.

21．已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，其中 $a,b\in R$，$e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

（Ⅰ）设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值；

（Ⅱ）若 $f(1)=0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）当 $a\leq\frac{1}{2}$ 时，$g(x)\geq g(0)=1-b$；当 $\frac{1}{2}<a\leq\frac{e}{2}$ 时，$g(x)\geq 2a-2a\ln(2a)-b$；

当 $a>\frac{e}{2}$ 时，$g(x)\geq e-2a-b$.（Ⅱ）a 的范围为 $(0,1)$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）易得 $g(x)=e^x-2ax-b, g'(x)=e^x-2a$，再对分 a 情况确定 $g(x)$ 的单调区间，根据 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性即可得 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值.（Ⅱ）设 x_0 为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的一个零点，注意到 $f(0)=0, f(1)=0$.联系到函数的图象学科网可知，导函数 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 内存在零点 x_1，$g(x)$ 在区间 $(x_0,1)$ 内存在零点 x_2，即 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有两个零点. 由（Ⅰ）可知，当 $a\le\frac{1}{2}$ 及 $a\ge\frac{e}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 内都不可能有两个零点.所以 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$.此时，$g(x)$ 在 $[0,\ln 2a]$ 上单调递减，在 $[\ln 2a,1]$ 上单调递增，因此 $x_1\in(0,\ln(2a)], x_2\in(\ln(2a),1)$，且必有 $g(0)=1-b>0, g(1)=e-2a-b>0$. 由 $f(1)=e-a-b-1=0$ 得：$b=e-a-1$，代入这两个不等式即可得 a 的取值范围.

试题解答：（Ⅰ）$g(x)=e^x-2ax-b, g'(x)=e^x-2a$

①当 $a\le 0$ 时，$g'(x)=e^x-2a>0$，所以 $g(x)\ge g(0)=1-b$.

②当 $a>0$ 时，由 $g'(x)=e^x-2a>0$ 得 $e^x>2a, x>\ln(2a)$.

若 $a>\frac{1}{2}$，则 $\ln(2a)>0$；若 $a>\frac{e}{2}$，则 $\ln(2a)>1$.

所以当 $0<a\le\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $g(x)\ge g(0)=1-b$.

当 $\frac{1}{2}<a\le\frac{e}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[0,\ln 2a]$ 上单调递减，在 $[\ln 2a,1]$ 上单调递增，所以 $g(x)\ge g(\ln 2a)=2a-2a\ln 2a-b$.

当 $a>\frac{e}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以 $g(x)\ge g(1)=e-2a-b$.

（Ⅱ）设 x_0 为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的一个零点，则由 $f(0)=f(x_0)=0$ 可知，

$f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上不可能单调递增，也不可能单调递减.

则 $g(x)$ 不可能恒为正，也不可能恒为负.

故 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 内存在零点 x_1.

同理 $g(x)$ 在区间 $(x_0,1)$ 内存在零点 x_2.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有两个零点.

由（Ⅰ）知，当 $a\le\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个零点.

当 $a\ge\frac{e}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个零点.

所以 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$.

此时，$g(x)$在$[0,\ln 2a]$上单调递减，在$[\ln 2a,1]$上单调递增，

因此$x_1\in(0,\ln(2a)],x_2\in(\ln(2a),1)$，且必有

$g(0)=1-b>0,g(1)=e-2a-b>0$.

由$f(1)=e-a-b-1=0$得：$b=e-a-1$，代入上两个不等式得：

$g(0)=1-b=a-e+2>0,g(1)=e-2a-b=1-a>0$.

解得$e-2<a<1$.

当$e-2<a<1$时，$g(x)$在区间$[0,1]$内有最小值$g(\ln(2a))$.

若$g(\ln(2a))\geq 0$，则$g(x)\geq 0(x\in[0,1])$，

从而$f(x)$在区间$[0,1]$上单调学科网递增，这与$f(0)=f(1)=0$矛盾，所以$g(\ln(2a))<0$.

又$g(0)=a-e+2>0,g(1)=1-a>0$，

故此时$g(x)$在$(0,\ln(2a))$和$(\ln(2a),1)$内各只有一个零点x_1和x_2.

由此可知$f(x)$在$[0,x_1]$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减，在$[x_2,1]$上单调递增.

所以$f(x_1)>f(0)=0$，$f(x_2)<f(1)=0$，

故$f(x)$在(x_1,x_2)内有零点.综上可知，a的取值范围是$(e-2,1)$.

【考点定位】导数的应用及函数的零点.