

2014 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（理科）试卷

第 I 卷（选择题 共 50 分）

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1) 设 i 是虚数单位， \bar{z} 表示复数 z 的共轭复数. 若 $z=1+i$, 则 $\frac{z}{i}+i\cdot\bar{z}=(\quad)$

- A. -2 B. $-2i$ C. 2 D. $2i$

【答案】C

【解析】

试题分析：由题意 $\frac{z}{i}+i\cdot\bar{z}=\frac{1+i}{i}+i(1-i)=\frac{(1+i)i}{i^2}+1+i=1-i+1+i=2$ ，故选 C.

考点：1.复数的运算；2.共轭复数.学科网

(2) “ $x < 0$ ” 是 “ $\ln(x+1) < 0$ ” 的 (\quad)

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

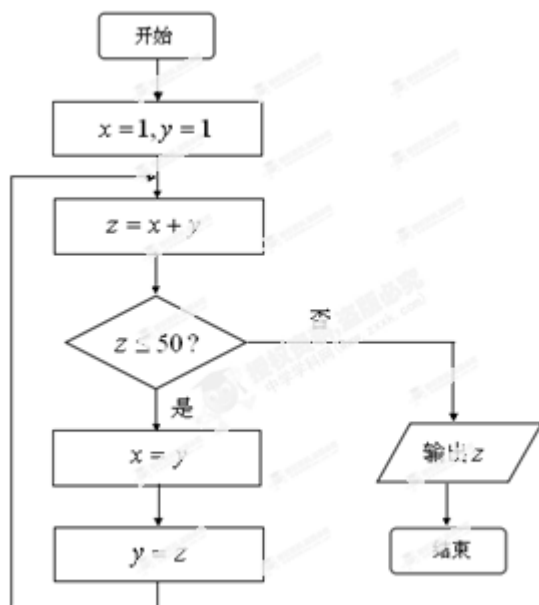
【解析】

试题分析：因为 $\ln(x+1) < 0$ ，所以 $\ln(x+1) < \ln 1$ ，即 $-1 < x < 0$ ，因而 “ $x < 0$ ” 是 “ $\ln(x+1) < 0$ ” 的必要而不充分条件.学科网

考点：1.对数的运算；2.充要条件.

(3) 如图所示，程序框图（算法流程图）的输出结果是 (\quad)

- A. 34 B. 55 C. 78 D. 89



【答案】B

【解析】

试题分析：由题意，① $x=1, y=1, z=2 \Rightarrow$ ② $x=y=1, y=z=2, z=3 \Rightarrow$ ③ $x=2, y=3, z=5 \Rightarrow$ ④ $x=3, y=5, z=8 \Rightarrow$ ⑤ $x=5, y=8, z=13 \Rightarrow$ ⑥ $x=8, y=13, z=21 \Rightarrow$ ⑦ $x=13, y=21, z=34 \Rightarrow$ ⑧ $x=21, y=34, z=55 > 50$ ，学科网从而输出 $z=55$ ，故选 B.

考点：1.程序框图的应用.

4.以平面直角坐标系的原点为极点， x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，两种坐标系中取相同的长度单位，

已知直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-3 \end{cases}$ (t 为参数)，圆 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$ ，则直线 l 被圆 C 截得的

弦长为 ()

- A. $\sqrt{14}$ B. $2\sqrt{14}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

试题分析：将直线 l 的参数方程消去参数 t ，化成直角坐标方程为 $x-y-4=0$ ，圆 C 的极坐标方程

$\rho=4\cos\theta$ 两边同乘 ρ 为 $\rho^2=4\rho\cos\theta$ ，化成直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=4$ ，则圆心 $(2,0)$

到直线 l 的距离 $d=\frac{|2-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ，所以直线 l 被圆 C 截得的弦长 $L=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{2}$ ，故选 D.

考点：1.极坐标方程、参数方程与平面直角方程之间的转化；2.圆中弦长的求解.

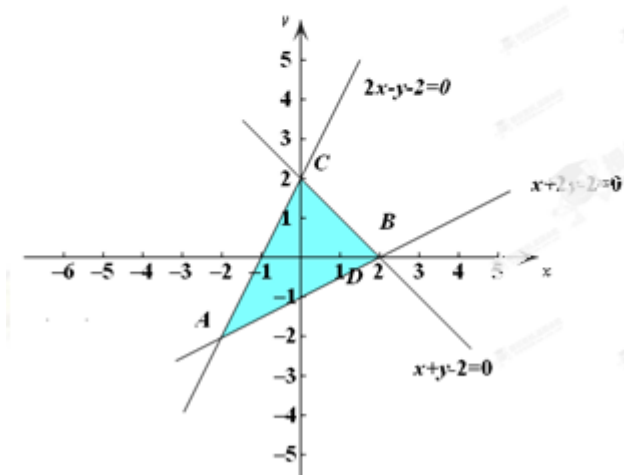
5. x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$ ，若 $z = y - ax$ 取得最大值的最优解不唯一，则实数 a 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$ 或 -1 B. 2 或 $\frac{1}{2}$ C. 2 或 1 D. 2 或 -1

【答案】D

【解析】

试题分析：题中的约束条件表示的区域如下图，将 $z = y - ax$ 化成斜截式为 $y = ax + z$ ，要使其取得最大值的最优解不唯一，则 $y = ax + z$ 在平移的过程中与 $x + y - 2 = 0$ 重合或与 $2x - y + 2 = 0$ 重合，所以 $a = 2$ 或 -1 .



考点：1.线性规划求参数的值.

6. 设函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$. 当 $0 \leq x < \pi$ 时， $f(x) = 0$ ，则 $f(\frac{23\pi}{6}) =$ ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 0 D. $-\frac{1}{2}$

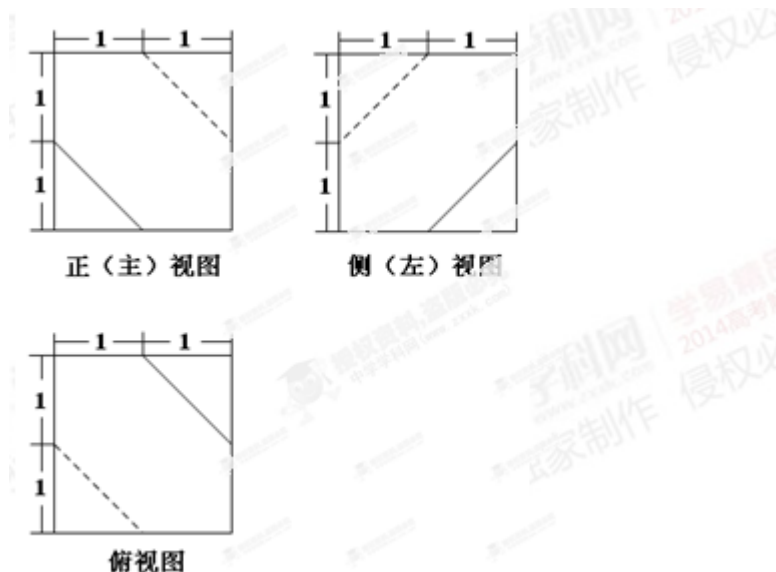
【答案】A

【解析】

试题分析：由题意， $f(\frac{23\pi}{6}) = f(\frac{17\pi}{6}) + \sin \frac{17\pi}{6} = f(\frac{11\pi}{6}) + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6}$
 $= f(\frac{5\pi}{6}) + \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ，故选 A.

考点：1.函数的求值.

7.一个多面体的三视图如图所示，则该多面体的表面积为（ ）



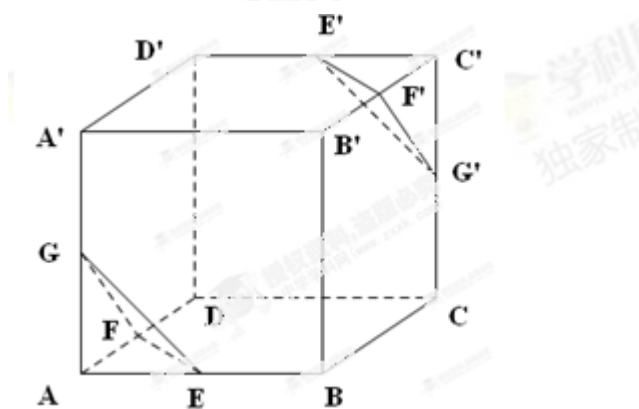
- A. $21 + \sqrt{3}$ B. $18 + \sqrt{3}$ C. 21 D. 18

【答案】A

【解析】

试题分析：由题意，该多面体的直观图是一个正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 挖去左下角三棱锥 $A - EFG$ 和右上角三棱锥 $C' - E'F'G'$ ，如下图，则多面体的表面积

$$S = 2 \times 2 \times 6 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 6 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} \times 2 = 21 + \sqrt{3}. \text{ 故选 A.}$$



考点：多面体的三视图与表面积.

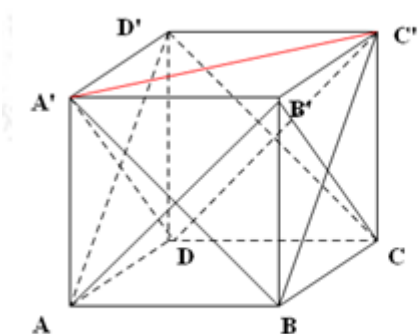
8.从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对，其中所成的角为 60° 的共有（ ）

- A. 24 对 B. 30 对 C. 48 对 D. 60 对

【答案】C

【解析】

试题分析：在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，与上平面 $A'B'C'D'$ 中一条对角线 $A'C'$ 成 60° 的直线有 $BC', B'C, A'D, AD', A'B, AB', D'C, DC'$ 共八对直线，与上平面 $A'B'C'D'$ 中另一条对角线 60° 的直线也有八对直线，所以一个平面中有 16 对直线，学科网正方体 6 个面共有 16×6 对直线，去掉重复，则有 $\frac{16 \times 6}{2} = 48$ 对. 故选 C.



考点：1. 直线的位置关系；2. 异面直线所成的角.

9. 若函数 $f(x) = |x+1| + |2x+a|$ 的最小值为 3，则实数 a 的值为 ()

A. 5 或 8 B. -1 或 5 C. -1 或 -4 D. -4 或 8

【答案】D

【解析】

试题分析：由题意，①当 $-1 > -\frac{a}{2}$ 时，即 $a > 2$ ， $f(x) = \begin{cases} -3x - (1+a), & x \leq -\frac{a}{2} \\ x + a - 1, & -\frac{a}{2} < x \leq -1 \\ 3x + (a+1), & x > -1 \end{cases}$ ，则当 $x = -\frac{a}{2}$ 时，

$f_{\min}(x) = f(-\frac{a}{2}) = |-\frac{a}{2} + 1| + |-a + a| = 3$ ，解得 $a = 8$ 或 $a = -4$ (舍)；②当 $-1 < -\frac{a}{2}$ 时，即 $a < 2$ ，

$$f(x) = \begin{cases} -3x - (1+a), & x \leq -1 \\ -x + 1 - a, & -1 < x \leq -\frac{a}{2} \\ 3x + (a+1), & x > -\frac{a}{2} \end{cases}, \text{ 则当 } x = -\frac{a}{2} \text{ 时, } f_{\min}(x) = f(-\frac{a}{2}) = |-\frac{a}{2} + 1| + |-a + a| = 3, \text{ 解}$$

得 $a = 8$ (舍) 或 $a = -4$; ③当 $-1 = -\frac{a}{2}$ 时, 即 $a = 2$, $f(x) = 3|x+1|$, 此时 $f_{\min}(x) = 0$, 不满足

题意, 所以 $a = 8$ 或 $a = -4$, 故选 D.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 点 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \sqrt{2}(\vec{a} + \vec{b})$. 曲线

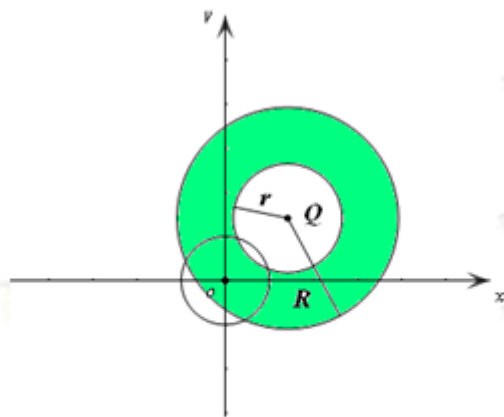
$C = \{P | \overrightarrow{OP} = \vec{a} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 区域 $\Omega = \{P | 0 < r \leq |\overrightarrow{PQ}| \leq R, r < R\}$. 若 $C \cap \Omega$ 为两段分离的曲线, 则()

- A. $1 < r < R < 3$ B. $1 < r < 3 \leq R$ C. $r \leq 1 < R < 3$ D. $1 < r < 3 < R$

【答案】A

【解析】

试题分析: 设 $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = (0, 1)$, 则 $\overrightarrow{OQ} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{OP} = (\cos x, \sin x)$, 区域 Ω 表示的是平面上的点到点 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 的距离从 r 到 R 之间. 学科网如下图所示的阴影部分圆环, 要使 $C \cap \Omega$ 为两段分离的曲线, 则 $1 < r < R < 3$, 故选 A.



考点: 1. 平面向量的应用; 2. 线性规划.

第 II 卷 (非选择题 共 100 分)

二. 选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 若将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像向右平移 φ 个单位, 所得图像关于 y 轴对称, 则 φ 的最小正值是

_____.

【答案】 $\frac{3\pi}{8}$

【解析】

试题分析：由题意 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ ，将其图象向右平移 φ 个单位，得

$\sqrt{2} \sin[2(x - \varphi) + \frac{\pi}{4}] = \sqrt{2} \sin[2x - 2\varphi + \frac{\pi}{4}]$ ，要使图象关于 y 轴对称，则 $\frac{\pi}{4} - 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ，解得

$\varphi = -\frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$ ，当 $k = -1$ 时， φ 取最小正值 $\frac{3\pi}{8}$ 。

考点：1.三角函数的平移；2.三角函数恒等变换与图象性质.

12. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_1 + 1, a_3 + 3, a_5 + 5$ 构成公比为 q 的等比数列，则 $q =$

_____.

【答案】 1

【解析】

试题分析： $\because a_1 + 1, a_3 + 3, a_5 + 5$ 成等比， $\therefore (a_1 + 1)[a_1 + 1 + 4(d + 1)] = [a_1 + 1 + 2(d + 1)]^2$ ，令

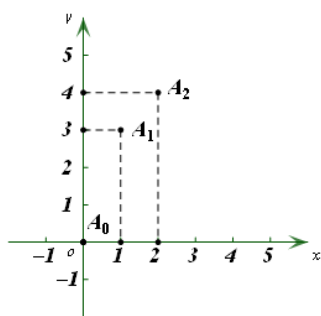
$a_1 + 1 = x, d + 1 = y$ ，则 $x(x + 4y) = (x + 2y)^2$ ，即 $x^2 + 4xy = x^2 + 4xy + 4y^2$ ， $\therefore y = 0$ ，即

$d + 1 = 0$ ， $\therefore q = 1$ 。

考点：1.等差，等比数列的性质. 学科网

(13) 设 $a \neq 0, n$ 是大于 1 的自然数， $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n$ 的展开式为 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. 若点

$A_i(i, a_i)(i = 0, 1, 2)$ 的位置如图所示，则 $a =$ _____.



【答案】3

【解析】

试题分析：由图易知 $a_0=1, a_1=3, a_2=4$ ，则 $a_1=C_n^1 \frac{1}{a}=3, a_2=C_n^2 (\frac{1}{a})^2=4$ ，即 $\begin{cases} \frac{n}{a}=3 \\ \frac{n(n-1)}{2a^2}=4 \end{cases}$ ，解得 $a=3$ 。

考点：1.二项展开式的应用.

(14) 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A, B 两点，

若 $|AF_1| = 3|BF_1|, AF_2 \perp x$ 轴，则椭圆 E 的方程为_____

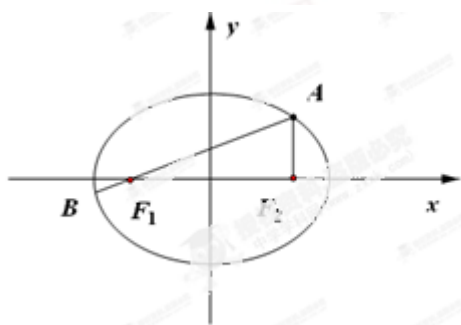
【答案】 $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1$

【解析】

试题分析：如下图， $\because AF_2 \perp x$ 轴， $\therefore AF_2 = \frac{b^2}{a} = b^2$ ，设 $A(c, b^2)$ ，又 $\because |AF_1| = 3|BF_1|$ ，则 B 点坐

标为 $(-\frac{5}{3}c, -\frac{1}{3}b^2)$ 带入椭圆为 $\begin{cases} (-\frac{5}{3}c)^2 + \frac{(-\frac{1}{3}b^2)^2}{b^2} = 1 \\ b^2 = 1 - c^2 \end{cases}$ 学科网解得 $c^2 = \frac{1}{3}, b^2 = \frac{2}{3}$ ，所以椭圆的方程为

$$x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1.$$



考点：1.椭圆的标准方程；2.椭圆的性质.

(15) 已知两个不相等的非零向量 \vec{a}, \vec{b} ，两组向量 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5$ 和 $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4, \vec{y}_5$ 均由 2 个 \vec{a} 和 3 个 \vec{b} 排

列而成.记 $S = \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 + \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_2 + \vec{x}_3 \cdot \vec{y}_3 + \vec{x}_4 \cdot \vec{y}_4 + \vec{x}_5 \cdot \vec{y}_5$ ， S_{\min} 表示 S 所有可能取值中的最小值.则下列命题

的是_____ (写出所有正确命题的编号) .

① S 有 5 个不同的值.

② 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 S_{\min} 与 $|\vec{a}|$ 无关.

③ 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 S_{\min} 与 $|\vec{b}|$ 无关.

④ 若 $|\vec{b}| > 4|\vec{a}|$, 则 $S_{\min} > 0$.

⑤ 若 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, $S_{\min} = 8|\vec{a}|^2$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$

【答案】②④

【解析】

试题分析: 由题意 S 有三种结果, 如下: $S_1 = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$;

$S_2 = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$; $S_3 = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$. 故①错误; \therefore

$S_1 - S_2 = S_2 - S_3 = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \geq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = (|\vec{a}| - |\vec{b}|)^2 \geq 0$, $\therefore S$ 中最小为

S_3 . 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $S_{\min} = S_3 = (\vec{b})^2$ 与 $|\vec{a}|$ 无关, 故②正确; 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则

$S_{\min} = S_3 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = (\vec{b})^2 + 4|\vec{a}| |\vec{b}|$ 或 $S_{\min} = S_3 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = (\vec{b})^2 - 4|\vec{a}| |\vec{b}|$ 与 $|\vec{b}|$ 有关,

故③错误; 若 $|\vec{b}| > 4|\vec{a}|$, 则 $S_{\min} = S_3 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = 4|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta + (\vec{b})^2 > -4|\vec{a}| |\vec{b}| + (\vec{b})^2$

$> -|\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 = 0$, 故④正确; 若 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$,

$S_{\min} = S_3 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = 8|\vec{a}|^2 \cos \theta + 4|\vec{a}|^2 = 8|\vec{a}|^2$, $\therefore 2 \cos \theta = 1$, $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$, 故⑤错误. 所以

正确的编号为②④.

考点: 1. 平面向量的运算; 2. 平面向量的数量积.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答写在答题卡上的指定区域内.

(16) (本小题满分 12 分) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别是 a, b, c , 且 $b = 3, c = 1, A = 2B$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $\sin(A + \frac{\pi}{4})$ 的值.

【答案】(1) $a = 2\sqrt{3}$; (2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

【解析】

试题分析：(1) 根据 $A = 2B$ ，则有 $\sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B$ ，再由正、余弦定理

$a = 2b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ，可以求得 $a^2 = 12$, $a = 2\sqrt{3}$. (2) 由余弦定理可以求出

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 1 - 12}{6} = -\frac{1}{3}, \text{ 而 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{故 } \sin(A + \frac{\pi}{4}) = \sin A \cos \frac{\pi}{4} + \cos A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{1}{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}.$$

试题解析：(1) 因为 $A = 2B$ ，所以 $\sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B$ ，由正、余弦定理得

$$a = 2b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \text{ 因为 } b = 3, c = 1, \text{ 所以 } a^2 = 12, a = 2\sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 1 - 12}{6} = -\frac{1}{3}. \text{ 由于 } 0 < A < \pi, \text{ 所以}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ 故 } \sin(A + \frac{\pi}{4}) = \sin A \cos \frac{\pi}{4} + \cos A \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{1}{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}.$$

考点：1.正、余弦定理；2.三角函数恒等变形.

(17) (本小题满分 12 分)

甲乙两人进行围棋比赛，约定先连胜两局者直接赢得比赛，若赛完 5 局仍未出现连胜，则判定获胜局数多

者赢得比赛，假设每局甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，各局比赛结果相互独立.

(1) 求甲在 4 局以内 (含 4 局) 赢得比赛的概率；

(2) 记 X 为比赛决出胜负时的总局数，求 X 的分布列和均值 (数学期望).

【答案】(1) $\frac{56}{81}$; (2) $\frac{224}{81}$.

【解析】

试题分析：（1）甲在4局以内（含4局）赢得比赛的情况有：前2局甲赢；第1局乙赢、第2、3局甲赢；第1局甲赢、第2局乙赢、第3、4局甲赢，从而就可以求出概率。（2）根据题意 X 的可能取值为2,3,4,5.

$$P(X=2)=P(A_1A_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(A_2)+P(B_1)P(B_2)=\frac{5}{9}.$$

$$P(X=3)=P(B_1A_2A_3)+P(A_1B_2B_3)=P(B_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(B_2)P(B_3)=\frac{2}{9}$$

$$P(X=4)=P(A_1B_2A_3A_4)+P(B_1A_2B_3B_4)=P(A_1)P(B_2)P(A_3)P(A_4)+P(B_1)P(A_2)P(B_3)P(B_4)=\frac{10}{81}$$

$$P(X=5)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=\frac{8}{81}.$$

列出分布列表格，就可以求出期望的值.

试题解析：用 A 表示“甲在4局以内（含4局）赢得比赛”， A_k 表示“第 k 局甲获胜”， B_k 表示“第 k 局乙获胜”.

则 $P(A_k)=\frac{2}{3}$ ， $P(B_k)=\frac{1}{3}$ ， $k=1,2,3,4,5$.

$$\begin{aligned} (1) \quad P(A) &= P(A_1A_2) + P(B_1A_2A_3) + P(A_1B_2A_3A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(B_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(B_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{81}. \end{aligned}$$

X 的可能取值为2,3,4,5.

$$P(X=2)=P(A_1A_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(A_2)+P(B_1)P(B_2)=\frac{5}{9}.$$

$$P(X=3)=P(B_1A_2A_3)+P(A_1B_2B_3)=P(B_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(B_2)P(B_3)=\frac{2}{9}$$

$$P(X=4)=P(A_1B_2A_3A_4)+P(B_1A_2B_3B_4)=P(A_1)P(B_2)P(A_3)P(A_4)+P(B_1)P(A_2)P(B_3)P(B_4)=\frac{10}{81}$$

$$P(X=5)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=\frac{8}{81}.$$

故 X 的分布列为

X	2	3	4	5
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{8}{81}$

所以 $EX = 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{10}{81} + 5 \times \frac{8}{81} = \frac{224}{81}$.

考点：1.概率的求解；2.期望的求解.

(18) (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = 1 + (1+a)x - x^2 - x^3$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在其定义域上的单调性;

(2) 当 $x \in [0, 1]$ 时, 求 $f(x)$ 取得最大值和最小值时的 x 的值.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 内单调递减, 在 (x_1, x_2) 内单调递增; (2) 所以当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值; 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处同时取得最小值; 当 $1 < a < 4$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值.

【解析】

试题分析: (1) 对原函数进行求导, $f'(x) = 1 + a - 2x - 3x^2$, 令 $f'(x) = 0$, 解得

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4+3a}}{3}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4+3a}}{3}, x_1 < x_2, \text{ 当 } x < x_1 \text{ 或 } x > x_2 \text{ 时 } f'(x) < 0; \text{ 从而得出, 当}$$

$x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 内单调递减, 在 (x_1, x_2) 内单调递增. (2) 依

据第 (1) 题, 对 a 进行讨论, ①当 $a \geq 4$ 时, $x_2 \geq 1$, 由 (1) 知, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$

在 $x=0$ 和 $x=1$ 处分别取得最小值和最大值. ②当 $0 < a < 4$ 时, $x_2 < 1$. 由 (1) 知, $f(x)$ 在 $[0, x_2]$ 上单

调递增, 在 $[x_2, 1]$ 上单调递减, 因此 $f(x)$ 在 $x = x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4+3a}}{3}$ 处取得最大值. 又 $f(0) = 1, f(1) = a$,

所以当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值; 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处同时取得最小值;

当 $1 < a < 4$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值.

试题解析: (1) $f(x)$ 的定义域为 R , $f'(x) = 1 + a - 2x - 3x^2$. 令 $f'(x) = 0$, 得

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4+3a}}{3}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4+3a}}{3}, x_1 < x_2, \text{ 所以 } f'(x) = -3(x-x_1)(x-x_2). \text{ 当 } x < x_1 \text{ 或 } x > x_2$$

时 $f'(x) < 0$; 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 内单调递减, 在 (x_1, x_2) 内单调递增.

(2) 因为 $a > 0$, 所以 $x_1 < 0, x_2 > 0$.

①当 $a \geq 4$ 时, $x_2 \geq 1$, 由 (1) 知, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处分别取得最小值和最大值. ②当 $0 < a < 4$ 时, $x_2 < 1$. 由 (1) 知, $f(x)$ 在 $[0, x_2]$ 上单调递增, 在 $[x_2, 1]$ 上单调递减,

因此 $f(x)$ 在 $x = x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4+3a}}{3}$ 处取得最大值. 又 $f(0) = 1, f(1) = a$, 所以当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在

$x=1$ 处取得最小值; 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处同时取得最小值; 当 $1 < a < 4$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值.

考点: 1. 含参函数的单调性; 2. 含参函数的最值求解.

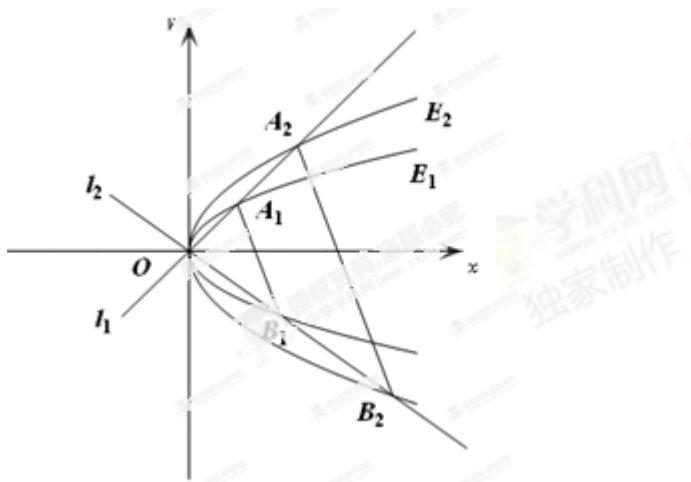
(19)(本小题满分 13 分)

如图, 已知两条抛物线 $E_1: y^2 = 2p_1x (p_1 > 0)$ 和 $E_2: y^2 = 2p_2x (p_2 > 0)$, 过原点 O 的两条直线 l_1 和 l_2 , l_1 与 E_1, E_2 分别交于 A_1, A_2 两点, l_2 与 E_1, E_2 分别交于 B_1, B_2 两点.

(1) 证明: $A_1B_1 \parallel A_2B_2$;

(2) 过原点 O 作直线 l (异于 l_1, l_2) 与 E_1, E_2 分别交于 C_1, C_2 两点. 记 $\Delta A_1B_1C_1$ 与 $\Delta A_2B_2C_2$ 的面积分别为 S_1

与 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.



【答案】(1) $A_1B_1 \parallel A_2B_2$; (2) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2}$.

【解析】

试题分析：(1) 要证明两直线平行，可以利用直线 l_1, l_2 的方程 $y = k_1x, y = k_2x (k_1, k_2 \neq 0)$ 与抛物线联立，

得出 $A_1\left(\frac{2p_1}{k_1^2}, \frac{2p_1}{k_1}\right), A_2\left(\frac{2p_2}{k_1^2}, \frac{2p_2}{k_1}\right), B_1\left(\frac{2p_1}{k_2^2}, \frac{2p_1}{k_2}\right), B_2\left(\frac{2p_2}{k_2^2}, \frac{2p_2}{k_2}\right)$ ，证明 $\overline{A_1B_1} = \frac{p_1}{p_2} \overline{A_2B_2}$ ，则 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ；(2) 因为 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ，同理可得 $B_1C_1 \parallel B_2C_2, C_1A_1 \parallel C_2A_2$ ，由 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ ，因此

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{A_2B_2}|} \right)^2, \text{ 由 (1) 中的 } \overline{A_1B_1} = \frac{p_1}{p_2} \overline{A_2B_2} \text{ 知 } \frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{A_2B_2}|} = \frac{p_1}{p_2}. \text{ 故 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2}.$$

试题解析：(1) 证：设直线 l_1, l_2 的方程分别为 $y = k_1 x, y = k_2 x (k_1, k_2 \neq 0)$ ，则

$$\text{由} \begin{cases} y = k_1 x \\ y^2 = 2p_1 x \end{cases}, \text{得 } A_1 \left(\frac{2p_1}{k_1^2}, \frac{2p_1}{k_1} \right),$$

$$\text{由} \begin{cases} y = k_2 x \\ y^2 = 2p_2 x \end{cases}, \text{得 } A_2 \left(\frac{2p_2}{k_2^2}, \frac{2p_2}{k_2} \right).$$

$$\text{同理可得 } B_1 \left(\frac{2p_1}{k_2^2}, \frac{2p_1}{k_2} \right), B_2 \left(\frac{2p_2}{k_2^2}, \frac{2p_2}{k_2} \right)$$

$$\text{所以 } \overline{A_1 B_1} = \left(\frac{2p_1}{k_2^2} - \frac{2p_1}{k_1^2}, \frac{2p_1}{k_2} - \frac{2p_1}{k_1} \right) = 2p_1 \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2}, \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right),$$

$$\overline{A_2 B_2} = \left(\frac{2p_2}{k_2^2} - \frac{2p_2}{k_1^2}, \frac{2p_2}{k_2} - \frac{2p_2}{k_1} \right) = 2p_2 \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2}, \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)$$

$$\text{故 } \overline{A_1 B_1} = \frac{p_1}{p_2} \overline{A_2 B_2}, \text{ 所以 } A_1 B_1 \parallel A_2 B_2.$$

(2) 解：由 (1) 知 $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$ ，同理可得 $B_1 C_1 \parallel B_2 C_2, C_1 A_1 \parallel C_2 A_2$.

$$\text{所以 } \triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2. \text{ 因此 } \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{|\overline{A_1 B_1}|}{|\overline{A_2 B_2}|} \right)^2. \text{ 又由 (1) 中的 } \overline{A_1 B_1} = \frac{p_1}{p_2} \overline{A_2 B_2} \text{ 知 } \frac{|\overline{A_1 B_1}|}{|\overline{A_2 B_2}|} = \frac{p_1}{p_2}.$$

$$\text{故 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2}.$$

考点：1. 直线与抛物线联立；2. 求面积问题.

(20) (本题满分 13 分)

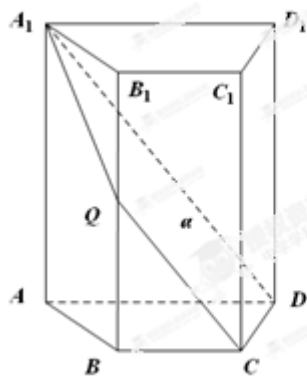
如图，四棱柱 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中， $A_1 A \perp$ 底面 $ABCD$. 四边形 $ABCD$ 为梯形， $AD \parallel BC$ ，且

$AD = 2BC$. 过 A_1, C, D 三点的平面记为 α ， BB_1 与 α 的交点为 Q .

(1) 证明： Q 为 BB_1 的中点；

(2) 求此四棱柱被平面 α 所分成上下两部分的体积之比；

(3) 若 $A_1 A = 4$ ， $CD = 2$ ，梯形 $ABCD$ 的面积为 6，求平面 α 与底面 $ABCD$ 所成二面角大小.



【答案】(1) Q 为 BB_1 的中点；(2) $\frac{11}{7}$ ；(3) $\frac{\pi}{4}$.

【解析】

试题分析：(1) 利用面面平行来证明线线平行 $QC \parallel A_1D$ ，则出现相似三角形，于是根据三角形相似即可

得出 $\frac{BQ}{BB_1} = \frac{BQ}{AA_1} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$ ，即 Q 为 BB_1 的中点。(2) 连接 QA, QD 。设 $AA_1 = h$ ，梯形 $ABCD$ 的高

为 d ，四棱柱被平面 α 所分成上下两部分的体积分别为 V_{\perp} 和 V_{\top} ， $BC = a$ ，则 $AD = 2a$ 。先表示出

$V_{\top} = V_{Q-A_1AD} + V_{Q-ABCD} = \frac{7}{12}ahd$ 和 $V_{A_1B_1C_1D_1-ABCD} = \frac{3}{2}ahd$ ，就可求出

$V_{\perp} = V_{A_1B_1C_1D_1-ABCD} - V_{\top} = \frac{3}{2}ahd - \frac{7}{12}ahd = \frac{11}{12}ahd$ ，从而 $\frac{V_{\perp}}{V_{\top}} = \frac{11}{7}$ 。(3) 可以有两种方法进行求解。第一种

方法，用常规法，作出二面角。在 $\triangle ADC$ 中，作 $AE \perp DC$ ，垂足为 E ，连接 A_1E 。又 $DE \perp AA_1$ 且

$AA_1 \cap AE = A$ ，所以 $DE \perp$ 平面 AEA_1 ，于是 $DE \perp A_1E$ 。所以 $\angle AEA_1$ 为平面 α 与底面 $ABCD$ 所成二面

角的平面角。第二种方法，建立空间直角坐标系，以 D 为原点， $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x 轴和 z 轴正方向建立空间

直角坐标系。设 $\angle CDA = \theta$ 。因为 $S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot 2 \sin \theta = 6$ ，所以 $a = \frac{2}{\sin \theta}$ 。从而 $C(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ ，

$A_1\left(\frac{4}{\sin \theta}, 0, 4\right)$ ，所以 $\overrightarrow{DC} = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ ， $\overrightarrow{DA_1} = \left(\frac{4}{\sin \theta}, 0, 4\right)$ 。设平面 A_1DC 的法向量

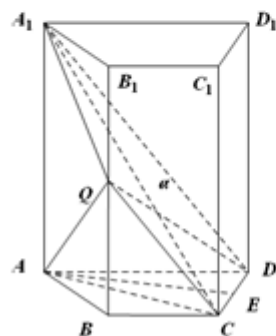
$\vec{n} = (x, y, 1)$ ，再利用向量求出二面角。

试题解析：(1) 证：因为 $BQ \parallel AA_1$, $BC \parallel AD$, $BC \cap BQ = B$, $AD \cap AA_1 = A$,

所以平面 $QBC \parallel$ 平面 A_1AD . 从而平面 A_1CD 与这两个平面的交线相互平行, 即 $QC \parallel A_1D$.

故 $\triangle QBC$ 与 $\triangle A_1AD$ 的对应边相互平行, 于是 $\triangle QBC \sim \triangle A_1AD$.

所以 $\frac{BQ}{BB_1} = \frac{BQ}{AA_1} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$, 即 Q 为 BB_1 的中点.



第(20)题图1

(2) 解：如第(20)题图1, 连接 QA_1, QD . 设 $AA_1 = h$, 梯形 $ABCD$ 的高为 d , 四棱柱被平面 α 所分成上

下两部分的体积分别为 V_{\perp} 和 V_{τ} , $BC = a$, 则 $AD = 2a$.

$$V_{Q-A_1AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h \cdot d = \frac{1}{3}ahd,$$

$$V_{Q-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a+2a}{2} \cdot d \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4}ahd,$$

$$\text{所以 } V_{\tau} = V_{Q-A_1AD} + V_{Q-ABCD} = \frac{7}{12}ahd,$$

$$\text{又 } V_{A_1B_1C_1D_1-ABCD} = \frac{3}{2}ahd$$

$$\text{所以 } V_{\perp} = V_{A_1B_1C_1D_1-ABCD} - V_{\tau} = \frac{3}{2}ahd - \frac{7}{12}ahd = \frac{11}{12}ahd,$$

$$\text{故 } \frac{V_{\perp}}{V_{\tau}} = \frac{11}{7}.$$

(3) 解法 1 如第 (20) 题图 1, 在 $\triangle ADC$ 中, 作 $AE \perp DC$, 垂足为 E , 连接 A_1E . 又 $DE \perp AA_1$ 且 $AA_1 \cap AE = A$, 所以 $DE \perp$ 平面 AEA_1 , 于是 $DE \perp A_1E$.

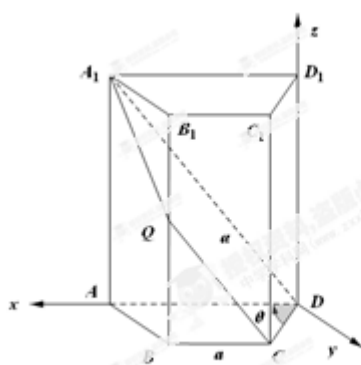
所以 $\angle AEA_1$ 为平面 α 与底面 $ABCD$ 所成二面角的平面角.

因为 $BC \parallel AD$, $AD = 2BC$, 所以 $S_{\triangle ADC} = 2S_{\triangle BCD}$.

又因为梯形 $ABCD$ 的面积为 6, $DC = 2$, 所以 $S_{\triangle ADC} = 4$, $AE = 4$.

于是 $\tan \angle AEA_1 = \frac{AA_1}{AE} = 1$, $\angle AEA_1 = \frac{\pi}{4}$.

故平面 α 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.



第 (20) 题图 2

解法 2 如第 (20) 题图 2, 以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x 轴和 z 轴正方向建立空间直角坐标系.

设 $\angle CDA = \theta$. 因为 $S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot 2 \sin \theta = 6$, 所以 $a = \frac{2}{\sin \theta}$.

从而 $C(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$, $A_1\left(\frac{4}{\sin \theta}, 0, 4\right)$,

所以 $\overrightarrow{DC} = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$, $\overrightarrow{DA_1} = \left(\frac{4}{\sin \theta}, 0, 4\right)$.

设平面 A_1DC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, 1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{DA_1} \cdot \vec{n} = \frac{4}{\sin \theta} x + 4 = 0, \\ \overrightarrow{DC} \cdot \vec{n} = 2x \cos \theta + 2y \sin \theta = 0, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x = -\sin \theta, \\ y = \cos \theta, \end{cases}$$

所以 $\vec{n} = (-\sin \theta, \cos \theta, 1)$.

又因为平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

所以 $\cos\langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故平面 α 与底面 $ABCD$ 所成的二面角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

考点：1.二面角的求解；2.几何体的体积求解.

(21) (本小题满分 13 分)

设实数 $c > 0$, 整数 $p > 1$, $n \in N^*$.

(1) 证明：当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时, $(1+x)^p > 1+px$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > c^{\frac{1}{p}}$, $a_{n+1} = \frac{p-1}{p}a_n + \frac{c}{p}a_n^{1-p}$, 证明: $a_n > a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}$.

【答案】(1) 证明：当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时, $(1+x)^p > 1+px$; (2) $a_n > a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}$.

【解析】

试题分析：(1) 证明原不等式成立，可以用数学归纳法，当 $p=2$ 时，当 $p=k(k \geq 2, k \in N^*)$ ，由

$$(1+x)^k > 1+kx \text{ 成立, 得出当 } p=k+1 \text{ 时, } (1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k > (1+x)(1+kx)$$

$$= 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x, \text{ 综合以上当 } x > -1 \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 时, 对一切整数 } p > 1, \text{ 不等式}$$

$(1+x)^p > 1+px$ 均成立. (2) 可以有两种方法证明：第一种方法，先用数学归纳法证明 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$. 其中要利

用到当 $n=k+1$ 时, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{p-1}{p} + \frac{c}{p}a_k^{1-p} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{c}{a_k^p} - 1)$. 当 $a_k > c^{\frac{1}{p}} > 0$ 得

$$-1 < -\frac{1}{p} < \frac{1}{p}(\frac{c}{a_k^p} - 1) < 0. \text{ 由 (1) 中的结论得}$$

$$(\frac{a_{k+1}}{a_k})^p = [1 + \frac{1}{p}(\frac{c}{a_k^p} - 1)]^p > 1 + p \cdot \frac{1}{p}(\frac{c}{a_k^p} - 1) = \frac{c}{a_k^p}. \text{ 因此 } a_{k+1}^p > c, \text{ 即 } a_{k+1} > c^{\frac{1}{p}}. \text{ 所以 } n=k+1$$

时, 不等式 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$ 也成立. 综合①②可得, 对一切正整数 n , 不等式 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$ 均成立. 再证由

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{c}{a_n^p} - 1) \text{ 可得 } \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \text{ 即 } a_{n+1} < a_n. \text{ 第二种方法, 构造函数设}$$

$$f(x) = \frac{p-1}{p}x + \frac{c}{p}x^{1-p}, x \geq c^{\frac{1}{p}}, \text{ 则 } x^p \geq c, \text{ 并且}$$

$f'(x) = \frac{p-1}{p} + \frac{c}{p}(1-p)x^{-p} = \frac{p-1}{p}(1 - \frac{c}{x^p}) > 0, x > c^{\frac{1}{p}}$. 由此可得, $f(x)$ 在 $[c^{\frac{1}{p}}, +\infty)$ 上单调递增,

因而, 当 $x > c^{\frac{1}{p}}$ 时, $f(x) > f(c^{\frac{1}{p}}) = c^{\frac{1}{p}}$. 再利用数学归纳法证明 $a_n > a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}$.

试题解析: (1) 证明: 用数学归纳法证明

①当 $p=2$ 时, $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$, 原不等式成立.

②假设 $p=k(k \geq 2, k \in N^*)$ 时, 不等式 $(1+x)^k > 1+kx$ 成立.

当 $p=k+1$ 时, $(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k > (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x$

所以 $p=k+1$ 时, 原不等式也成立.

综合①②可得, 当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时, 对一切整数 $p > 1$, 不等式 $(1+x)^p > 1+px$ 均成立.

(2) 证法 1: 先用数学归纳法证明 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$.

①当 $n=1$ 时, 由题设 $a_1 > c^{\frac{1}{p}}$ 知 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$ 成立. ②假设 $n=k(k \geq 1, k \in N^*)$ 时, 不等式 $a_k > c^{\frac{1}{p}}$ 成立.

由 $a_{n+1} = \frac{p-1}{p}a_n + \frac{c}{p}a_n^{1-p}$ 易知 $a_n > 0, n \in N^*$.

当 $n=k+1$ 时, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{p-1}{p} + \frac{c}{p}a_k^{-p} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{c}{a_k^p} - 1)$.

当 $a_k > c^{\frac{1}{p}} > 0$ 得 $-1 < -\frac{1}{p} < \frac{1}{p}(\frac{c}{a_k^p} - 1) < 0$.

由 (1) 中的结论得 $(\frac{a_{k+1}}{a_k})^p = [1 + \frac{1}{p}(\frac{c}{a_k^p} - 1)]^p > 1 + p \cdot \frac{1}{p}(\frac{c}{a_k^p} - 1) = \frac{c}{a_k^p}$.

因此 $a_{k+1}^p > c$, 即 $a_{k+1} > c^{\frac{1}{p}}$. 所以 $n=k+1$ 时, 不等式 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$ 也成立.

综合①②可得, 对一切正整数 n , 不等式 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$ 均成立.

再由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{c}{a_n^p} - 1)$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 即 $a_{n+1} < a_n$.

综上所述, $a_n > a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}, n \in N^*$.

证法 2: 设 $f(x) = \frac{p-1}{p}x + \frac{c}{p}x^{1-p}$, $x \geq c^{\frac{1}{p}}$, 则 $x^p \geq c$, 并且

$$f'(x) = \frac{p-1}{p} + \frac{c}{p}(1-p)x^{-p} = \frac{p-1}{p}(1 - \frac{c}{x^p}) > 0, x > c^{\frac{1}{p}}.$$

由此可得, $f(x)$ 在 $[c^{\frac{1}{p}}, +\infty)$ 上单调递增, 因而, 当 $x > c^{\frac{1}{p}}$ 时, $f(x) > f(c^{\frac{1}{p}}) = c^{\frac{1}{p}}$.

①当 $n=1$ 时, 由 $a_1 > c^{\frac{1}{p}} > 0$, 即 $a_1^p > c$ 可知

$$a_2 = \frac{p-1}{p}a_1 + \frac{c}{p}a_1^{1-p} = a_1[1 + \frac{1}{p}(\frac{c}{a_1^p} - 1)] < a_1, \text{ 并且 } a_2 = f(a_1) > c^{\frac{1}{p}}, \text{ 从而 } a_1 > a_2 > c^{\frac{1}{p}}.$$

故当 $n=1$ 时, 不等式 $a_n > a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}$ 成立.

②假设 $n=k(k \geq 1, k \in N^*)$ 时, 不等式 $a_k > a_{k+1} > c^{\frac{1}{p}}$ 成立, 则当 $n=k+1$ 时,

$$f(a_k) > f(a_{k+1}) > f(c^{\frac{1}{p}}), \text{ 即有 } a_{k+1} > a_{k+2} > c^{\frac{1}{p}}.$$

所以当 $n=k+1$ 时, 原不等式也成立.

综合①②可得, 对一切正整数 n , 不等式 $a_n > a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}$ 均成立.

考点: 1. 数学归纳法证明不等式; 2. 构造函数法证明不等式.