2012年高考重庆理科数学试卷解析（教师版）

试卷总评

2012年高考重庆卷数学文理科的特点是"稳中有降、梯度合理、试题亲切、背景公平"。

稳中有降：

1、整份试题继承了去年试题的框架结构，全面考查了《考试大纲》各部分的内容，函数、三角函数、不等式、数列、圆锥曲线等仍是稳定的主干考点；

2、客观题（选择、填空）的压轴题都较往年降低了难度，连接解答题的难度也略低于往年，试题面向全体考生，体现了向新课改主干知识平稳过渡。

梯度合理：

整份试题层次分明，问题设置科学、合理，对数学基础、数学水平、数学能力不同的学生有着较好的区分度，部分试题设计巧妙，能考察学生综合分析以及继续学习的潜能，不仅有利于优秀学生的发挥，也有利于数学中等生取得满意的成绩。

试题亲切：全卷试题表述清晰、富有数学美感，考生审题无文字障碍；淡化特殊技巧，回归常态，运算量适中；试题紧扣教材，对高中主干知识考察的明晰且突出，经典数学问题的重构与改编所考察的数学思想与方法体现出了命题者的匠心独用。

背景公平：

全卷无偏、难、怪、繁的试题，体现数学应用意识的一些题目选材自然、具有生活体验，如学生轮流投篮胜负的探讨、学校课表安排等题目，这些题目对城乡学生的审题、分析以至于解题过程均体现出公平的认知背景，同时也较好地体现了新课改中数学文化的渗透。

值得一提的是，命题者注重文理科差异，命题具有针对性。(21道试题中有9道是同源题目，其他均采用了不同的试题，考察体现了文理科学生的数学学习能力差异)

总之，整份试题应该说是一份对如何考查双基内容作出了完美的诠释的试题，不仅是一份有利于高校选拔人才的试卷，更对高中数学课堂教学改革起到了风向标的引领作用。

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个备选项中，只有一项是符合题目要求的

（1）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=1,a_4=5$，则$\{a_n\}$的前5项和$S_5=$

（A）7　　（B）15　　（C）20　　（D）25

【答案】：B

【解析】：$2d=a_4-a_2=5-1=4,\ d=2$，

$a_1=a_2-d=1-2=-1, a_5=a_2+3d=1+6=7$

$$S_5=\frac{(a_1+a_5)\times 5}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$$

【考点定位】本题考查等差数列的通项公式及前 n 项和公式，解题时要认真审题，仔细解答．

（2）不等式$\frac{x-1}{2x+1}\le 0$的解集为

（A）$\left(-\frac{1}{2},1\right]$　（B）$\left[-\frac{1}{2},1\right]$　（C）$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup[1,+\infty)$　（D）$\left[-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

【答案】：A

【解析】：$\frac{x-1}{2x+1}\le 0\Rightarrow\begin{cases}(x-1)(2x+1)\le 0\\ 2x+1\ne 0\end{cases}\Rightarrow-\frac{1}{2}<x\le 1$

【考点定位】本题主要考查了分式不等式的解法，解题的关键是灵活利用不等式的性质属于基础试题，属基本题.

（3）对任意的实数k，直线$y=kx+1$与圆$x^2+y^2=2$的位置关系一定是

（A）相离　（B）相切　（C）相交但直线不过圆心　（D）相交且直线过圆心

【答案】：C

【解析】：圆心$C(0,0)$到直线$kx-y+1=0$的距离为d，$d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\le r=\sqrt{2}$

【考点定位】此题考查了直线与圆的位置关系，涉及的知识有：两点间的距离公式，点与圆的位置关系，以及恒过定点的直线方程，直线与圆的位置关系利用用 d 与 r 的大小来判断，当 0≤d＜r 时，直线与圆相交；当 d=r 时，直线与圆相切；当 d＞r 时，直线与圆相离.

（4）$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$的展开式中常数项为

（A）$\frac{35}{16}$　（B）$\frac{35}{8}$　（C）$\frac{35}{4}$　（D）105

【答案】B

【解析】：$T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}(\frac{1}{2\sqrt{x}})^r=C_8^r(\frac{1}{2})^r(\sqrt{x})^{8-2r}$ 令$8-2r=0$解得$r=4$展开式中常

数项为$T_5=C_8^4(\frac{1}{2})^4=\frac{35}{8}$

【考点定位】本题考查利用二项展开式的通项公式求展开式的常数项

（5）设$\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2-3x+2=0$的两根，则$\tan(\alpha+\beta)$的值

（A）-3　　（B）-1　（C）1　　（D）3

【答案】：A

【解析】：$\tan\alpha+\tan\beta=3,\tan\alpha\tan\beta=2$，则$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3}{1-2}=-3$

【考点定位】本此题考查学生灵活运用韦达定理及两角和的正切函数公式化简求值.

（6）设$x,y\in R$,向量$\vec{a}=(x,1),\vec{b}=(1,y),\vec{c}=(2,-4)$，且$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}//\vec{c}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$

（A）$\sqrt{5}$　　（B）$\sqrt{10}$　　（C）$2\sqrt{5}$　　（D）10

【答案】：B

【解析】：由$\vec{a}\perp\vec{c}$,得$2x-4=0$ 则$x=2$，　由$\vec{b}//\vec{c}$得$-4=2y$则$y=-2$，

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(2+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$

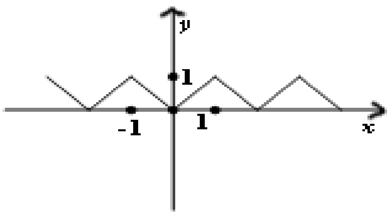
【考点定位】本题主要考查两个向量垂直和平行的的坐标表示、模长公式．解决问题的关键在于根据$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}//\vec{c}$，得到$x,y$的值．只要记住两个向量垂直、平行和向量的模的坐标形式的充要条件，就不会出错，注意数字的运算．

（7）已知$f(x)$是定义在R上的偶函数，且以2为周期，则“$f(x)$为[0,1]上的增函数”是“$f(x)$为[3，4]上的减函数”的

（A）既不充分也不必要的条件　　（B）充分而不必要的条件

（C）必要而不充分的条件　　（D）充要条件

【答案】：D

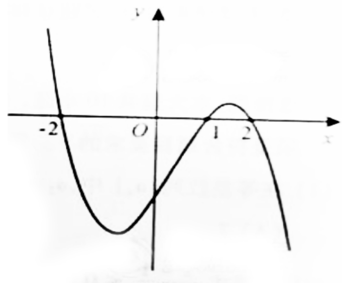


【解析】：由$f(x)$是定义在R上的偶函数及[0,1]上的增函数可知在[-1,0]减函数，又2为周期，所以[3，4]上的减函数

【考点定位】本题主要通过常用逻辑用语来考查函数的奇偶性和对称性，进而来考查函数的周期性．根据图象分析出函数的性质及其经过的特殊点是解答本题的关键.

（8）设函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图像如题

（8）图所示，则下列结论中一定成立的是



题(8)图

（A）函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

（B）函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

（C）函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

（D）函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

【答案】：D

【解析】：$x<-2, 1-x>0, (1-x)f'(x)>0$ 则 $f'(x)>0$ 函数 $f(x)$ 增；

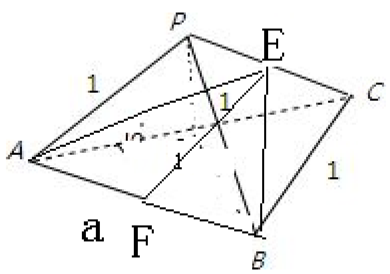
$-2<x<1, 1-x>0, (1-x)f'(x)<0$ 则 $f'(x)<0$ 函数 $f(x)$ 减；

$1<x<2, 1-x<0, (1-x)f'(x)>0$ 则 $f'(x)<0$ 函数 $f(x)$ 减；

$x>2, 1-x<0, (1-x)f'(x)<0$ 则 $f'(x)>0$ 函数 $f(x)$ 增；

【考点定位】判断函数的单调性一般利用导函数的符号，当导函数大于 0 则函数递增，当导函数小于 0 则函数递减.

（9）设四面体的六条棱的长分别为 1，1，1，1，$\sqrt{2}$ 和 a，且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面，则 a 的取值范围是



（A）$(0,\sqrt{2})$　　（B）$(0,\sqrt{3})$

（C）$(1,\sqrt{2})$　　（D）$(1,\sqrt{3})$

【答案】：A

【解析】：$BE=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BF<BE$，$AB=2BF<\sqrt{2}$，

【考点定位】本题考查棱锥的结构特征，考查空间想象能力，极限思想的应用，是中档题.

（10）设平面点集 $A=\left\{(x,y)\middle|(y-x)(y-\frac{1}{x})\geq 0\right\}, B=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\leq 1\right\}$，则

$A\cap B$ 所表示的平面图形的面积为

（A）$\frac{3}{4}\pi$　　（B）$\frac{3}{5}\pi$　　（C）$\frac{4}{7}\pi$　　（D）$\frac{\pi}{2}$

【答案】：D

【解析】：由对称性：$y\ge x,y\ge\frac{1}{x},(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$围成的面积与$y\le x,y\ge\frac{1}{x},(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$围成的面积相等得：$A\bigcap B$所表示的平面图形的面积为$y\le x,(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$围成的面积即$\frac{1}{2}\times\pi R^2=\frac{\pi}{2}$

【考点定位】本小题主要考查二元一次不等式（组）与平面区域、圆的方程等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，把答案填写在答题卡相应位置上

（11）若(1+i)(2+i)=a+bi，其中$a,b\in R,i$为虚数单位，则$a+b=$______；

【答案】：4

【解析】：(1+i)(2+i)=1+3i=a+bi $\Rightarrow$ a=1, b=3，$a+b=4$

【考点定位】本题主要考查复数的乘法运算与复数相等的充要条件，此题属于基础题，只要认真的计算即可得到全分.

（12）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}=$______。

【答案】：$\frac{2}{5}$

【解析】：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{(\sqrt{n^2+5n}-n)(\sqrt{n^2+5n}+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{n^2+5n-n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}{5}=\frac{1+1}{5}=\frac{2}{5}$$

【考点定位】本题考查极限的求法和应用，因$\sqrt{n^2+5n}-n$都没有极限，可先分母有理化再求极限；

（13）设ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\cos A=\frac{3}{5},\cos B=\frac{5}{13},b=3,$则$c=$______

【答案】：$c=\frac{14}{5}$

【解析】：由 $\cos A=\frac{3}{5},\cos B=\frac{5}{13}$，得 $\sin A=\frac{4}{5},\sin B=\frac{12}{13}$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得

$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{3\times\frac{4}{5}}{\frac{12}{13}}=\frac{13}{5}$ 由余弦定理 $a^2=c^2+b^2-2cb\cos A$ 得 $25c^2-90c+56=0$ 则 $c=\frac{14}{5}$

【考点定位】利用同角三角函数间的基本关系求出 sinB 的值本题的突破点，然后利用正弦定理建立已知和未知之间的关系．同时要求学生牢记特殊角的三角函数值．

（14）过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 作直线交抛物线于 A,B 两点，若 $|AB|=\frac{25}{12},|AF|<|BF|$，则

$|AF|$=_____________________。

【答案】：$\frac{5}{6}$

【解析】：设 $|AF|=m,|BF|=n$，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p}$ 又 $|AB|=\frac{25}{12}$，

所以 $m+n=\frac{25}{12},mn=\frac{25}{24}$ 则 $m=\frac{5}{6},n=\frac{5}{4}$

【考点定位】本题主要考查了抛物线的简单性质及抛物线与直线的关系，当遇到抛物线焦点弦问题时，常根据焦点设出直线方程与抛物线方程联立，把韦达定理和抛物线定义相结合解决问题，属于难题．

（15）某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课个 1 节，则在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的概率为_______（用数字作答）．

【答案】：$\frac{3}{5}$

【解析】：语文、数学、外语三门文化课间隔 1 节艺术课排列有 $A_3^3A_4^3$ 种排法，语文、数学、外语三门文化课相邻有 $A_4^4A_3^3$ 种排法，语文、数学、外语三门文化课两门相邻有 $C_3^2A_2^2C_2^1C_2^1A_3^3$ 种排法，故所有的排法种数有 $2A_3^3A_4^3+C_3^2A_2^2C_2^1C_2^1A_3^3$，在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的概率为 $p=\frac{2A_3^3A_4^3+C_3^2A_2^2C_2^1C_2^1A_3^3}{A_6^6}=\frac{3}{5}$

【考点定位】本题在计数时根据具体情况选用了插空法，做题时要注意体会这些方法的原理及其实际意义．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（本小题满分 13 分，（Ⅰ）小问 6 分，（Ⅱ）小问 7 分）

设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+1$，其中在 $a\in R$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于 y 轴（Ⅰ）求 a 的值；（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 极值.

【答案】：$a=-1$ （Ⅱ）极小值 $f(1)=3$

【解析】：（Ⅰ）因 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+1$ ，故 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$ 由于曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于 y 轴，故该切线斜率为 0，即 $f'(1)=0$ ，从而 $a-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=0$ ，解得 $a=-1$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=-\ln x+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+1(x>0)$，$f'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$ $=\frac{3x^2-2x-1}{2x^2}=\frac{(3x+1)(x-1)}{2x^2}$ 令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1,x_2=-\frac{1}{3}$（因 $x_2=-\frac{1}{3}$ 不在定义域内，舍去）当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$ 故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=3$

【考点定位】本小题主要考查利用导数研究曲线上某点切线方程、函数的最值及其几何意义、两条直线平行的判定等基础知识，考查运算求解能力.

17.（本小题满分 13 分，（Ⅰ）小问 7 分，（Ⅱ）小问 6 分）

甲、乙两人轮流投篮，每人每次投一票.约定甲先投中者获胜，一直到有人获胜或每人都已投球 3 次时投篮结束.设甲每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{3}$，乙每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{2}$，且各次投篮互不影响.　（Ⅰ） 求甲获胜的概率；（Ⅱ） 求投篮结束时甲的投篮次数 ξ 的分布列与期望

【答案】：（Ⅰ）$\frac{13}{27}$ （Ⅱ）$\frac{13}{9}$

【解析】：设 A_k,B_k, 分别表示甲、乙在第 k 次投篮中，则

$p(A_k)=\frac{1}{3},p(B_k)=\frac{1}{2},(k=1,2,3)$

（Ⅰ）记“甲获胜”为事件 C，由互斥事件有一个发生的概率与相互独立事件同时发生的概率计算公式知 $p(C)=p(A_1)+p(\overline{A_1B_1}A_2)+p(\overline{A_1B_1A_2B_2}A_3)$

$=p(A_1)+p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})P(A_2)+p(\overline{A_1})p(\overline{B_1})P(\overline{A_2})P(\overline{B_2})p(A_3)$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{13}{27}$

（Ⅱ）ξ 的所有可能值为 1，2，3。

由独立性知 $p(\xi=1)=p(A_1)+p(\overline{A_1}B_1)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

$p(\xi=2)=p(\overline{A_1}\,\overline{B_1}A_2)+p(\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}B_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{2}{9}$

$p(\xi=3)=p(\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}\,\overline{B_2})=(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$

综上知，ξ 有分布列

ξ	1	2	3
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

从而，$E\xi=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{13}{9}$ （次）

【考点定位】本题考查离散型随机变量的分布列和期望即相互独立事件的概率，考查运用概率知识解决实际问题的能力，相互独立事件是指，两事件发生的概率互不影响，注意应用相互独立事件同时发生的概率公式.

18.（本小题满分 13 分，（Ⅰ）小问 8 分，（Ⅱ）小问 5 分）设

$f(x)=4\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})-\cos(2\omega x+\pi)$ 其中 $\omega>0$（Ⅰ）求函数 $y=f(x)$ 的值域；（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上为增函数，求 ω 的最大值

【答案】:（Ⅰ）$[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$（Ⅱ）$\frac{1}{6}$

【解析】:：（Ⅰ）$f(x)=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x+\frac{1}{2}\sin\omega x)\sin\omega x+\cos 2\omega x$

$=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\sin^2\omega x+\cos^2\omega x-\sin^2\omega x=\sqrt{3}\sin 2\omega x+1$

因 $-1\le\sin 2\omega x\le 1$ ，所以函数 $y=f(x)$ 的值域为 $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$

（Ⅱ）因 $y=\sin x$ 在每个闭区间 $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$ （$k\in Z$ ）上为增函数，故

$f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+1$（$\omega>0$）在每个闭区间 $[\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{4\omega},\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}]$（$k\in Z$ ）上为增函数

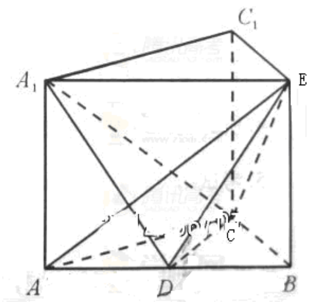
依题意知$[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\subseteq[\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{4\omega},\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}]$ 对某个$k\in Z$ 成立，此时必有$k=0$ 于是

$$\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}\ge-\frac{\pi}{4\omega}\\ \frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{4\omega}\end{cases}$$ 解得$\omega\le\frac{1}{6}$，故ω的最大值为$\frac{1}{6}$

【考点定位】本题以三角函数的化简求值为主线，三角函数的性质为考查目的一道综合题，考查学生分析问题解决问题的能力．由正弦函数的单调性结合条件可列$\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}\ge-\frac{\pi}{4\omega}\\ \frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{4\omega}\end{cases}$，从而解得ω的取值范围，即可得ω的最大值．

19．（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 8 分）

已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=4$，$AC=BC=3$，D为AB的中点。（Ⅰ）求点 C 到平面A_1ABB_1的距离；（Ⅱ）若$AB_1\perp A_1C$，求二面角A_1-CD-C_1的平面角的余弦值。



【答案】:（Ⅰ）（Ⅱ）$\frac{1}{3}$

【解析】:（Ⅰ）因$AC=BC=3$，D 为 AB 的中点，得$CD\perp AB$。又$CD\perp AA_1$故$CD\perp$面A_1ABB_1所以C到平面A_1ABB_1的距离为

CD=$\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{5}$

（Ⅱ）：如答（19）图 1，取D_1为A_1B_1的中点，连接DD_1，则$DD_1 // AA_1 // CC_1$又由（Ⅰ）知CD$\perp$ 面A_1ABB_1故CD$\perp A_1D$ ，CD$\perp DD_1$故$\angle A_1DD_1$ 为所求的二面角A_1-CD-C_1的平面角。

因A_1D是A_1C在面A_1ABB_1上的射影，又已知$AB_1\perp A_1$C，由三垂线定理的逆定理得$AB_1\perp A_1$D,从而$\angle A_1AB_1$，$\angle A_1DA$都与$\angle B_1AB$互余，因此$\angle A_1AB_1=\angle A_1DA$，所以$Rt\triangle A_1AD\cong Rt\triangle B_1A_1A$，因此$\frac{AA_1}{AD}=\frac{A_1B_1}{AA_1}$，$AA_1^{\ 2}=AD\cdot A_1B_1=8$得$AA_1=2\sqrt{2}$

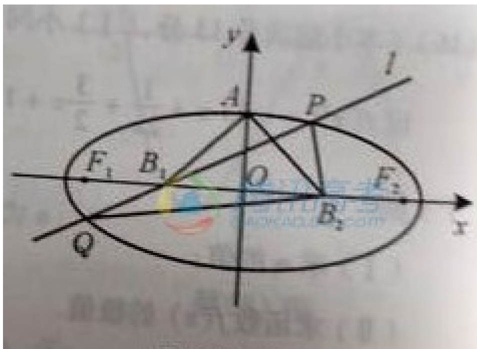
从而$A_1D=\sqrt{AA_1^{\ 2}+AD^2}=2\sqrt{3}$,所以在$Rt\triangle A_1DD_1$中，$\cos A_1DD_1=\frac{DD_1}{A_1D}=\frac{AA_1}{A_1D}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

【考点定位】本小题主要考查立体几何的相关知识，具体涉及到线面垂直的关系、二面角的求法及空间向量在立体几何中的应用，解决此类问题的关键是熟悉几何体的结构特征，熟练进行线线垂直与线面垂直的转化，主要考查学生的空间想象能力与推理论证能力．本题可以利用空间向量来解题从而降低了题目的难度．

（20）（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 7 分）

已知椭圆的中心为原点 O，长轴在 x 轴上，上顶点为 A，左、右焦点分别为 F_1,F_2，线段 OF_1,OF_2 的中点分别为 B_1,B_2，且△ AB_1B_2 是面积为 4 的直角三角形。（Ⅰ）求该椭圆的离心率和标准方程；

（Ⅱ）过 B_1 作直线 l 交椭圆于 P,Q，$PB_2\perp QB_2$，求直线 l 的方程



题(20) 图

【答案】:（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$（Ⅱ）$x+2y+2=0$ 和 $x-2y+2=0$

【解析】: ．（Ⅰ）如答（20）图，设所求椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），

右焦点为 $F_2(C,0)$ 因 $\triangle AB_1B_2$ 是直角三角形且 $|AB_1|=|AB_2|$，故 $\angle B_1AB_2$ 为直角，从而 $|OA|=|OB_2|$，即 $b=\dfrac{c}{2}$，结合 $c^2=a^2-b^2$ 得 $4b^2=a^2-b^2$。故 $a^2=5b^2$，$c^2=4b^2$ 所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，在 $Rt\triangle AB_1B_2$ 中，$OA\perp B_1B_2|$ 故

$S\triangle AB_1B_2=\dfrac{1}{2}\cdot|B_1B_2|\cdot|OA|$

$=|OB_2|\cdot|OA|=\dfrac{c}{2}\cdot b=b^2$ 由题设条件 $S\triangle AB_1B_2=4$ 得 $b^2=4$，从而 $a^2=5b^2=20$ 因此所求 椭圆的的标准方程为：$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $B_1(-2,0),B_2(2,0)$，由题意，直线 PQ 的倾斜角不为 0，故可设直线 PQ

的方程为 $x=my-2$，代入椭圆方程 $(m^2+5)y^2-4my-16=0$（*）

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 y_1,y_2 是上面方程的两根，因此 $y_1+y_2=\dfrac{4m}{m^2+5}$，

$y_1\cdot y_2=\dfrac{-16}{m^2+5}$ 又 $\overrightarrow{B_1P}=(x_1-2,y_1),\overrightarrow{B_2P}=(x_2-2,y_2)$，

所以 $\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{B_2P}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$

$=(my_1-4)(my_2-4)+y_1y_2=(m^2+1)y_1y_2-4m(y_1+y_2)+16$

$=\dfrac{-16(m^2+1)}{m^2+5}-\dfrac{16m^2}{m^2+5}+16=-\dfrac{16m^2-64}{m^2+5}$ 由 $PB_2\perp QB_2$，知 $\overrightarrow{B_2P}\cdot\overrightarrow{B_2Q}=0$，即

$16m^2-64=0$，解得 $m=\pm2$

所以满足条件的直线有两条，其方程分别为 $x+2y+2=0$ 和 $x-2y+2=0$

【考点定位】本题考查椭圆的标准方程；平面向量数量积的运算；直线的一般式方程；直线与圆锥曲线的综合问题.

21.（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 7 分）已知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1}=a_2S_n+a_1$，其中 $a_2\neq0$（Ⅰ）求证：$\{a_n\}$ 首项为 1 的等比数列；（Ⅱ）若 $a_2>-1$，求证：$S_n\leq\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$，并给指出等号成立的充要条件。

【答案】：（Ⅰ）（Ⅱ）当且仅当 $n=1,2$ 或 $a_2=1$ 时等号成立

【解析】：（Ⅰ）由 $S_2=a_2S_1+a_1$ 得 $a_1+a_2=a_2a_1+a_1$，即 $a_2=a_2a_1$，

因 $a_2\neq0$，故 $a_1=1$，得 $\dfrac{a_2}{a_1}=a_2$

又由题设条件知 $S_{n+2}=a_2S_{n+1}+a_1$，$S_{n+1}=a_2S_n+a_1$

两式相减得 $S_{n+2}-S_{n+1}=a_2(S_{n+1}-S_n)$，即 $a_{n+2}=a_2a_{n+1}$ 由 $a_2\neq0$，知 $a_{n+1}\neq0$，

因此 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=a_2$ 综上 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=a_2$ 对所有 $n\in N^*$ 成立，从而 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 a_2 的等比数列。

（Ⅱ）当 $n=1,2$ 时，显然 $S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$，等号成立

设$n\ge 3, a_2>-1$ 且$a_2\ne 0$，由（Ⅰ）知$a_1=1$ ，$a_{n+1}=a_2^{n-1}$所以要证的不等式化为

$1+a_2+a_2^2+\cdots+a_2^{n-1}\le\frac{n+1}{2}(1+a_2^{n-1})(n\ge 3)$

即证：$1+a_2+a_2^2+\cdots+a_2^n\le\frac{n+1}{2}(1+a_2^n)(n\ge 2)$，当$a_2=1$ 时，上面不等式的等号成立

当$-1<a_2<1$ 时，a_2^r-1 与$a_2^{n-r}-1\ (r=1,2,\cdots,n-1)$ 同为负；当$a_2>1$ 时a_2^r-1

与$a_2^{n-r}-1\ (r=1,2,\cdots,n-1)$ 同为正，因此当$a_2>-1$ 且$a_2\ne 1$ 时，

总有$(a_2^r-1)(a_2^{n-r}-1)>0$，即$a_2^r+a_2^{n-r}<1+a_2^n\ (r=1,2,\cdots,n-1)$

上面不等式对r从 1 到$n-1$ 求各得$2(a_2+a_2^2+\cdots+a_2^{n-1})\le(n-1)(1+a_2^n)$

由此得$1+a_2+a_2^2+\cdots+a_2^n\le\frac{n+1}{2}(1+a_2^n)$

综上，当$a_2>-1$ 且$a_2\ne 0$ 时，有$S_n\le\frac{n}{2}(a_1+a_n)$，当且仅当$n=1,2$ 或$a_2=1$时等号成立。

【考点定位】本题考查了数列前 n 项和的概念，不等式恒成立问题，数学归纳法的应用，合理猜想与逻辑推理的概念．对不等式的考查有一定的难度，综合性较强，需要同学有深厚的功底才能胜任本题的解答，对数学归纳法的考查较深．