2013年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数学试题（文史类）

【学科网试卷总评】

优点 1．立足基础，适度创新

作为中学数学主体内容中的函数与导数、数列、统计与概率、三角函数、解析几何、立体几何等六大主干知识，在文、理科试卷中不但占分比例大，而且在各类题型中都作了较为深入的考查.

适度创新如理 9 以等比数列的片断和、积为背景，考查考生从特殊到一般地解决数学问题的能力；理 10、文 16、理 15 依托新情境材料，考查考生阅读理解、提取相关信息的能力，考查考生的学习潜能；文 11、理 18、理 19 都要求考生运用直观感知、操作确认等数学实验方法予以解决，其中，理 19 第（III）问要求考生能将空间几何体的拼接转化为平面图形的拼接，需要较高的空间想象能力；理 20 以三角函数为载体，将数列、函数与导数合理交汇，考查考生对问题的理解及综合地应用知识分析问题、解决问题所需要的抽象概括能力和推理论证能力.

优点 2．区分度明显

既有容易题，也有中等题、难题，使得不同层次的考生的水平都得到合理的评价.

各种题型的试题梯度明显，例如选择题和填空题的起点低，再逐步增加难度，而最后两题有较大的思维量.解答题在整体难度递进的同时，每一小题也均从易到难.例如理 19、20、文 21、22 的第（Ⅰ）问入题较易，而第（Ⅱ）或第（III）问则将检测考生是否具备在自然语言、图形语言和符号语言之间进行熟练的转化和思考的能力作为重要的考查目标.

这些试题的解法多样，不同的解法体现了考生思维层次的差异.试题既体现对考生的人文关怀，又真正体现了“多思少算”的命题理念，使大部分考生都能得到一定的基本分，同时又有助于思维层次较高的考生充分发挥，彰显了选拔功能.

优点 3．注重探究，突出能力

例如理 10、文 16 考生需先理解“保序同构”的概念，并搜索已有的知识进而运用最本源的函数知识予以解决，考查考生解决新情境问题的能力；理 9 在探究两个新数列生成的过程中，考生需将问题回归到等差、等比数列的定义，并予以解决，考查了考生抽象概括能力；理 15 的解决需考生阅读理解相关的知识材料，提练解决问题的思想方法（类比）并加以应用，考查了考生学习新知

识、解决新问题的能力；理 18 证明 9 个点都在同一条抛物线上，考生可从特殊入手，通过合情推理得出结论并加以验证，也可通过演绎推理直接证明，考查考生推理论证的能力；理 19 的拼接过程需要考生严谨、简捷和深刻的思维，考查考生的空间想象能力；理 20 第（Ⅱ）问在探究三个数成等差数列的过程中，需要考生对三个数的大小进行辨析，从而优化解题过程，考查考生思维的简捷性，较好地考查了考生的运算求解能力.理 20 第（III）问要求考生化整体到局部，先研究函数在一个周期内图象的性态，再从特殊到一般地解决问题，综合地考查了考生的抽象概括能力、推理论证能力和运算求解能力；文 22 也需要考生对问题进行不断地转化，考查了考生的推理论证能力和运算求解能力.

优点 4．关注过程

试题规避模式化的解题和公式的直接套用，考查学生探究和解决问题的思维方法.如理 8、文 12 以函数图象的变换为载体考查考生对极值定义本质的理解；理 9 则回避了对等差、等比数列公式的直接套用，着重考查考生对等差、等比数列定义本质的理解；理 10、文 16 则考查了考生对函数的定义本质的理解；文 11 对线性回归的考查不再是以往的套用公式，而是考查考生对线性回归知识发生、发展的过程性理解；理 15 体现了对新材料的学习、理解和运用的过程.

综上：本套试题作为高考的选拔性考试非常有优势，就是题题的设问方式都规避了模式化的单刀直入法，可谓题题都有新鲜感，不过不足之处也恰恰在于此，对于那些理解能力、化归转化能力、阅读能力偏弱的同学来说就是一大灾难.合理加大了文、理科试卷的差异.两份试卷中，完全相同的试题只有三道（文 10 和理 7，文 12 和理 8，文 15 和理 14），分值为 15，占 10%；姊妹题（背景或设问方式相似度较高）只有三对（文 1 和理 1，文 16 和理 10.文 14 和理 11），分值约为 13，占 8.7%.

第Ⅰ卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．复数的 $Z=-1-2i\left(i\text{为虚数单位}\right)$ 在复平面内对应的点位于模为（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

[答案]C

[解析] 所对应的点为（-1，-2）位于第三象限.

[学科网考点定位]本题只考查了复平面的概念，属于简单题.

2．设点 $P(x,y)$，则“$x=2$且$y=-1$”是“点P在直线$l:x+y-1=0$上”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

[答案]A

[解析]点 P（2，-1）满足直线方程，所以在线上，反之不能推出点 P 的坐标必为（2，-1）．故选 A

[学科网考点定位]考查了点与线的位置关系的判断及条件的判断，属于简单题.

3．若集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,3,4\}$，则$A\cap B$的子集个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．16

[答案]C

[解析] $A\cap B=\{1,3\}$其子集个数为$2^2=4$个.

[学科网考点定位]考查集合的运算及子集个数的算法，属于简单题.

4．双曲线$x^2-y^2=1$的顶点到其渐近线的距离等于（　　）

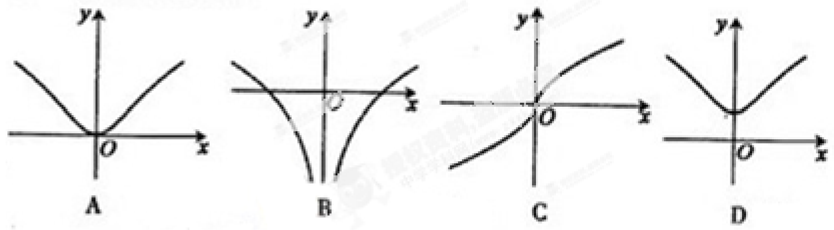
A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

[答案]B

[解析] 由于对称性，我们不妨取顶点 $A(1,0)$，取渐近线为 $x-y=0$，所以由点到直线的距离公式可得 $d=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，亦可根据渐近线倾斜角为 45° 得到.

[学科网考点定位] 本题考查了双曲线的渐近线及点到直线的距离公式，如果能画图可简化计算，属于简单题.

5．函数 $f(x)=\ln(x^2+1)$的图像大致是（　　）



[答案]A

[解析]由于函数为偶函数又过（0，0）所以直接选 A.

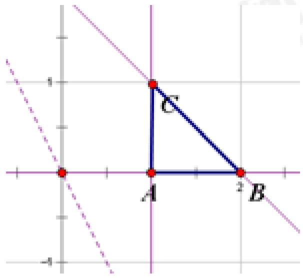
[学科网考点定位]对图像的考查其实是对性质的考查，注意函数的特征即可，属于简单题.

6．若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\le 2 \\ x\ge 1, \\ y\ge 0, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值和最小值分别为（　　）

A．4和3　　　B．4和2　　　C．3和2　　　D．2和0

[答案]B

[解析]如图可行域为 $\triangle ABC$ 的内部，显然分别在点 A 和点 B 处取到最小值 2 和最大值 4.



[学科网考点定位]简单的线性规划问题，牢记目标函数的几何意义即可.

7．若 $2^x+2^y=1$,则$x+y$的取值范围是（　　）

A．$[0,2]$　　　B．$[-2,0]$　　　C．$[-2,+\infty]$　　　D．$[-\infty,-2]$

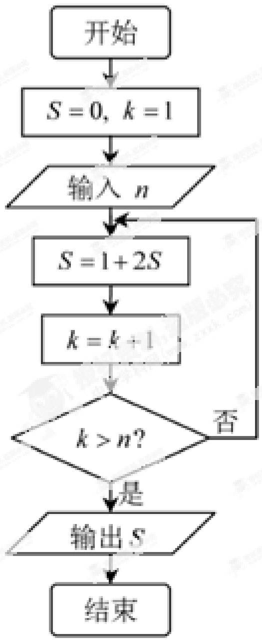
[答案]D

[解析] $\because 1=2^x+2^y\ge 2\sqrt{2^x\bullet 2^y}=2\sqrt{2^{x+y}}$ $\therefore 2^{x+y}\le \frac{1}{4}=2^{-2}$ 故 $x+y\le -2$.

[学科网考点定位]本题主要考查基本不等式的应用及指数不等式的解法，属于简单题.

8．阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，如果输入某个正整数 n 后，输出的$S\in(10,20)$,那么n的值为（　　）

A．3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



[答案]B

[解析]注意到 S 的值比较小，所以可以考虑依次循环可知 n=4 的时候 S=15 满足，亦可通过数列考虑 S 的表达式.

[学科网考点定位]属于程序框图中比较简单的考查方法，只要学生看懂图即可.

9．将函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\theta\right)\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$的图像向右平移$\varphi\left(\varphi>1\right)$个单位长度后得到函数$g\left(x\right)$的图像,若$f\left(x\right),g\left(x\right)$的图像都经过点$P\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则$\varphi$的值可以是（　　）

A．$\frac{5\pi}{3}$　　B．$\frac{5\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

[答案]B

[解析]由平移得 $g(x)=\sin(2x-2\phi+\theta)$，两个图像都过点 P，有

$f(0)=\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},g(0)=\sin(\theta-2\phi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$故

$\sin(\frac{\pi}{3}-2\phi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\theta-2\phi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$或者$\theta-2\phi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，验证可得$\phi$可取$\frac{5\pi}{6}$.

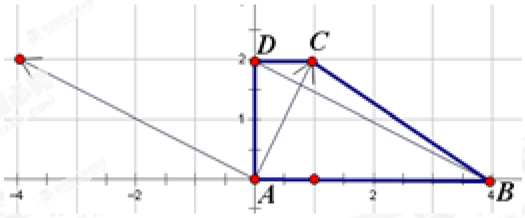
[学科网考点定位]对于三角函数图像的考察，属于中等题，特别注意平移的量.

10．在四边形 $ABCD$中，$\overrightarrow{AC}=\left(1,2\right),\overrightarrow{BD}=\left(-4,2\right)$,则该四边形的面积为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．5　　D．10

[答案]C

[解析]注意到两向量的纵坐标都为 2，所以借助坐标系如图，$S=\frac{1}{2}(1+4)*2=5$.或者注意到 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$分为四个小直角三角形算面积.



[学科网考点定位]本题的处理方法主要是向量的平移，所以向量只要能合理的转化还是属于容易题.

11．已知x与y之间的几组数据如下表：

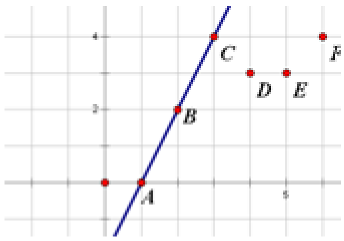
x	1	2	3	4	5	6
y	0	2	1	3	3	4

假设根据上表数据所得线性回归直线方程为$\dot{y}=\dot{b}x+\dot{a}$,若某同学根据上表中的前两组数据$(1,0)$和$(2,2)$求得的直线方程为$y'=b'x+a'$,则以下结论正确的是（　　）

A．$\dot{b}>b',\dot{a}>a'$　　B．$\dot{b}>b',\dot{a}<a'$　　C．$\dot{b}<b',\dot{a}>a'$　　D．$\dot{b}<b',\dot{a}<a'$

[答案]C

[解析]散点图如右，显然后四个点都不在直线$y=b'x+a'$的左上方，所以回归直线斜率应该更小，纵截距更大，故选 C.



[学科网考点定位]本题主要考查回归直线的概念，通过图像很容易得到正确答案.属于容易题.

12．设函数$f(x)$的定义域为R，$x_0(x_0\neq0)$是$f(x)$的极大值点，以下结论一定正确的是（　　）

A．$\forall x\in R,f(x)\le f(x_0)$　　B．$-x_0$是$f(-x)$的极小值点

C．$-x_0$是$-f(x)$的极小值点　　D．$-x_0$是$-f(-x)$的极小值点

[答案]D

[解析]对于 A 选项函数的极大值不一定是函数的最大值，所以错；对于 B 中的$f(-x)$是将$f(x)$的图像关于 Y 轴对称，所以$-x_0$是其极大值点；对于 C 中的$-f(x)$是将$f(x)$的图像关 X 轴对称，所

以x_0才是其极小值点；而对于 D 中的$-f(-x)$是将$f(x)$的图像关原点对称，故$-x_0$是其极小值点，故正确.

[学科网考点定位]本题主要考查学生对于函数极值与最值关系及函数图像的变换，牢记几种常见变换.属于难度较大的题目.

第 II 卷（非选择题 共 60 分）

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x^3, x<0,\\ -\tan x, 0\le x\le\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 则$f\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=$________

[答案]-2

[解析] $f(\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$ ，$f(-1)=2\cdot(-1)^3=-2$

[学科网考点定位]对于分段函数的考查属容易题.

14. 利用计算机产生$0\sim1$之间的均匀随机数a,则事件“ $3a-1<0$” 发生的概率为________

[答案] $\frac{1}{3}$

[解析] 由$3a-1<0$知$a<\frac{1}{3}$，由几何概型知$p=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$

[学科网考点定位]简单的几何概型的考查.

15. 椭圆$r:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，焦距为$2c$. 若直线$y=\sqrt{3}(x+c)$与椭圆r的一个交点$M$满足$\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$,则该椭圆的离心率等于_______.

[答案] $\sqrt{3}-1$

[解析]注意到直线过点$(-c,0)$即为左焦点F_1，又斜率为$\sqrt{3}$，所以倾斜角为60^0，即$\angle MF_1F_2=60^0$.

又$\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$故$\angle MF_2F_1=30^0$，那么

$\angle F_2MF_1=90^0$. $MF_1=F_1F_2\bullet\cos 60^0=2c\bullet\frac{1}{2}=c$，$MF_2=F_1F_2\bullet\sin 60^0=2c\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}c$，

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{2c}{MF_1+MF_2}=\frac{2c}{\sqrt{3}c+c}=\sqrt{3}-1.$$

[学科网考点定位]考查离心率的算法，要求学生要有敏锐的观察力，比如直线的特征.属于难题.

16．设 S，T 是 R 的两个非空子集，如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足：

（i）$T=\{f(x)|x\in S\}$；（ii）对任意$x_1,x_2\in S$,当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$,

那么称这两个集合“保序同构”，现给出以下 3 对集合：

① $A=N,B=N^*$;

② $A=\{x|-1\le x\le 3\},B=\{x|-8\le x\le 10\}$;

③ $A=\{x|0\le x\le 1\},B=R.$

其中，“保序同构”的集合对的序号是_______.（写出“保序同构”的集合对的序号）.

[答案] ① ② ③

[解析]条件（i）说明 S 到 T 是一个一一映射，条件（ii）说明函数单调增.对于①可拟合函数

$y=x+1(x\in N)$满足上述两个条件，故是保序同构；对于②可拟合函数

$$y=\begin{cases}-8,(x=-1)\\ \frac{5}{2}(x-1),(-1<x\le 3)\end{cases}$$满足上述两个条件，故是保序同构；对于③可考虑经过平移压缩的正切

函数也满足上述两个条件，故都是保序同构.

[学科网考点定位]本题考查学生对新概念的理解，转化和应用，属于难题.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的公差d=1，前n项和为S_n.(I)若$1,a_1,a_3$成等比数列，求a_1；

(II)若$S_5>a_1a_9$，求a_1的取值范围。

[答案]（1）因为数列$\{a_n\}$的公差$d=1$，且$1,a_1,a_3$成等比数列，

所以$a_1^2=1\times(a_1+2)$，

即$a_1^2-a_1-2=0$，解得$a_1=-1$或$a_1=2$.

（2）因为数列$\{a_n\}$的公差$d=1$，且$S_5>a_1a_9$，

所以$5a_1+10>a_1^2+8a_1$；

即$a_1^2+3a_1-10<0$，解得$-5<a_1<2$

[解析]此数列的考查个人认为太过简单，只需要懂得等差等比数列的公式即可，所以只要注意计算就可以轻松拿到12分.

[学科网考点定位]本小题主要考查等差数列、等比数列、不等式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想、化归与转化思想．属于容易题.

18．（本小题满分12分）

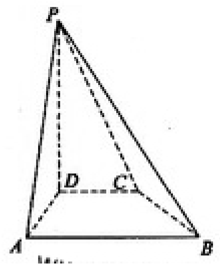
如图，在四棱柱$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，$AB//DC$，

$AB\perp AD,BC=5,DC=3,AD=4,\angle PAD=60^{\circ}$.

（I）当正视方向与向量$\overrightarrow{AD}$的方向相同时，画出四棱锥$P-ABCD$的正视图（要求标出尺寸，并写出演算过程）；

（II）若M为PA的中点，求证：求二面角$DM//$平面PBC;

（III）求三棱锥$D-PBC$的体积.



[答案]（Ⅰ）在梯形$ABCD$中，过点C作$CE\perp AB$，垂足为E，

由已知得，四边形$ADCE$为矩形，$AE=CD=3$

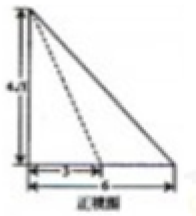
在$Rt\Delta BEC$中，由$BC=5$，$CE=4$，依勾股定理得：

$BE=3$，从而 $AB=6$

又由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$ 得，$PD\perp AD$

从而在 $Rt\Delta PDA$ 中，由 $AD=4$，$\angle PAD=60°$，得 $PD=4\sqrt{3}$

正视图如右图所示：



（Ⅱ）取 PB 中点 N，连结 MN，CN

在 ΔPAB 中，M 是 PA 中点，

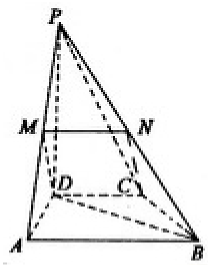
$\therefore MN\parallel AB$，$MN=\dfrac{1}{2}AB=3$，又 $CD\parallel AB$，$CD=3$

$\therefore MN\parallel CD$，$MN=CD$

$\therefore$ 四边形 $MNCD$ 为平行四边形，$\therefore DM\parallel CN$

又 $DM\not\subset$ 平面 PBC，$CN\subset$ 平面 PBC

$\therefore DM\parallel$ 平面 PBC



（Ⅲ）$V_{D-PBC}=V_{P-DBC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta DBC}\cdot PD$

又 $S_{\Delta PBC}=6$，$PD=4\sqrt{3}$，所以 $V_{D-PBC}=8\sqrt{3}$

解法二：

（Ⅰ）同解法一

（Ⅱ）取 AB 的中点 E，连结 ME，DE

在梯形 $ABCD$ 中，$BE\parallel CD$，且 $BE=CD$

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形

$\therefore DE\parallel BC$，又 $DE\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC

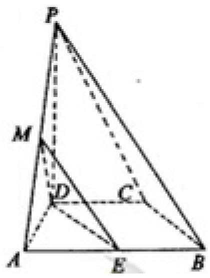
$\therefore DE\parallel$ 平面 PBC，又在 ΔPAB 中，$ME\parallel PB$

$ME\not\subset$ 平面 PBC，$PB\subset$ 平面 PBC

$\therefore ME\parallel$ 平面 PBC．又 $DE\cap ME=E$，

$\therefore$ 平面 $DME\parallel$ 平面 PBC，又 $DM\subset$ 平面 DME

$\therefore DM\parallel$ 平面 PBC



（Ⅲ）同解法一

[解析]对于立体几何的考查所有关系的决断往往基于对公理定理推论掌握的比较熟练，又要善于做出一线辅助线加以证明，再者就是体积和表面积的计算公式要熟悉.

[学科网考点定位] 本题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系及几何体的三视图和体积等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想．属容易题

19.（本小题满分 12 分）

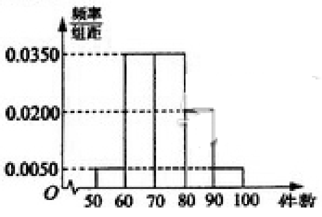
某工厂有 25 周岁以上（含 25 周岁）工人 300 名，25 周岁以下工人 200 名. 为研究工人的日平均生产量是否与年龄有关，现采用分层抽样的方法，从中抽取了 100 名工人，先统计了他们某月的日平均生产件数，然后按工人年龄在“25 周岁以上（含 25 周岁）”和“25 周岁以下”分为两组，再将两组工人的日平均生产件数分为 5 组：$\left[50,60\right),\left[60,70\right),\left[70,80\right),\left[80,90\right),\left[90,100\right)$ 分别加以统计，得到如图所示的频率分布直方图.

（I）从样本中日平均生产件数不足 60 件的工人中随机抽取 2 人，求至少抽到一名“25 周岁以下组”工人的概率；

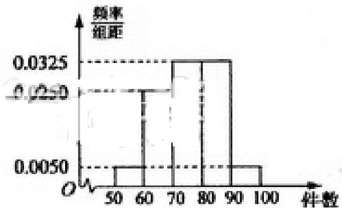
（II）规定日平均生产件数不少于 80 件者为“生产能手”，请你根据已知条件完成列联表，并判断是否有 90%的把握认为“生产能手与工人所在的年龄组有关”？

附：$x^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})}{n_{1*}n_{2*}n_{*1}n_{*2}}$（注：此公式也可以写成$k^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$）

$P(x^2\geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828



25 周岁以上组



25 周岁以下组

[答案]（Ⅰ）由已知得，样本中有25周岁以上组工人60名，25周岁以下组工人40名

所以，样本中日平均生产件数不足60件的工人中，25周岁以上组工人有$60\times 0.05=3$（人），

记为A_1，A_2，A_3；25周岁以下组工人有$40\times 0.05=2$（人），记为B_1，B_2

从中随机抽取2名工人，所有可能的结果共有10种，他们是：(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_2,A_3)，(A_1,B_1)，

(A_1,B_2)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(B_1,B_2)

其中，至少有名“25周岁以下组”工人的可能结果共有7种，它们是：(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,B_1)，

(A_2,B_2)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(B_1,B_2). 故所求的概率：$P=\frac{7}{10}$

（Ⅱ）由频率分布直方图可知，在抽取的100名工人中，“25周岁以上组”中的生产能手

$60\times 0.25=15$（人），“25周岁以下组”中的生产能手$40\times 0.375=15$（人），据此可得2×2列联表

如下：

	生产能手	非生产能手	合计
25周岁以上组	15	45	60
25周岁以下组	15	25	40
合计	30	70	100

所以得：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100\times(15\times 25-15\times 45)^2}{60\times 40\times 30\times 70}=\frac{25}{14}\approx 1.79$

因为$1.79<2.706$，所以没有90%的把握认为“生产能手与工人所在的年龄组有关”

[解析] 对于独立性检验的考查要求学生会用公式，并且懂得算法过程并懂得结论的给出，应该算容易题，可往往学生会被这么长的题目所吓倒，再加上统计与概率的结合就会变为难点.此题比较容易出现计算和结论上的失误，而造成不必要的失分.

[学科网考点定位] 本题主要考查古典概型、抽样方法、独立性检验等基础知识，考查运算求解能力、应用意识，考查必然与或然思想、化归与转化思想等. 属于中等难度.

20.（本小题满分12分）

如图，抛物线$E:y^2=4x$的焦点为F，准线l与x轴的交点为A. 点C在抛物线E上，以C为圆

心，$|CO|$为半径作圆，设圆 C 与准线l交于不同的两点 M，N.

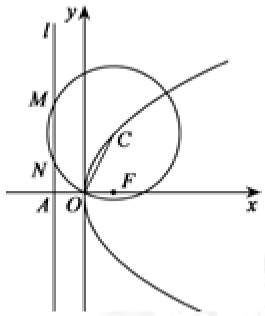
（I）若点 C 的纵坐标为 2，求$|MN|$；

（II）若$|AF|^2=|AM|\cdot|AN|$，求圆 C 的半径.

[答案]（Ⅰ）抛物线$y^2=4x$的准线l的方程为$x=-1$，

由点C的纵坐标为2，得点C的坐标为$(1,2)$

所以点C到准线l的距离$d=2$，又$|CO|=\sqrt{5}$.



所以$|MN|=2\sqrt{|CO|^2-d^2}=2\sqrt{5-4}=2$.

（Ⅱ）设$C(\frac{y_0^2}{4},y_0)$，则圆C的方程为$(x-\frac{y_0^2}{4})^2+(y-y_0)^2=\frac{y_0^4}{16}+y_0^2$，

即$x^2-\frac{y_0^2}{2}x+y^2-2y_0y=0$.

由$x=-1$，得$y^2-2y_0y+1+\frac{y_0^2}{2}=0$

设$M(-1,y_1)$，$N(-1,y_2)$，则：

$$\begin{cases}\Delta=4y_0^2-4(1+\frac{y_0^2}{2})=2y_0^2-4>0\\ y_1y_2=\frac{y_0^2}{2}+1\end{cases}$$

由$|AF|^2=|AM|\cdot|AN|$，得$|y_1y_2|=4$

所以$\frac{y_0^2}{2}+1=4$，解得$y_0=\pm\sqrt{6}$，此时$\Delta>0$

所以圆心C的坐标为$(\frac{3}{2},\sqrt{6})$或$(\frac{3}{2},-\sqrt{6})$

从而$|CO|^2=\frac{33}{4}$，$|CO|=\frac{\sqrt{33}}{2}$，即圆C的半径为$\frac{\sqrt{33}}{2}$

[解析]此题以圆为背景考查了解析几何中的常用方法（如设而不求）及圆锥曲线的性质.平时只要注意计算此题问题就不会太大.

[学科网考点定位] 本题考查抛物线的方程、圆的方程与性质、直线与圆的位置关系等基础知识，考查运算求解　能力、推理论证能力，考查函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思想．属于中等难度.

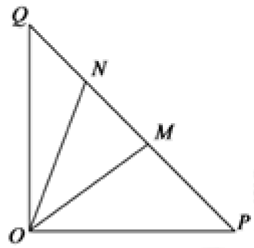
21．（本小题满分 12 分）

如图，在等腰直角ΔOPQ中，$\angle POQ=90^0$，$OP=2\sqrt{2}$，点M在线段PQ上.

（Ⅰ）若$OM=\sqrt{5}$，求PM的长；

（Ⅱ）若点N在线段MQ上，且$\angle MON=30^0$，问：当$\angle POM$取何值时，ΔOMN的面积最小？并求出面积的最小值.

[答案]（Ⅰ）在ΔOMP中，$\angle OPM=45°$，$OM=\sqrt{5}$，$OP=2\sqrt{2}$，



由余弦定理得，$OM^2=OP^2+MP^2-2\times OP\times MP\times\cos 45°$，

得$MP^2-4MP+3=0$，

解得$MP=1$或$MP=3$.

（Ⅱ）设$\angle POM=\alpha$，$0°\le\alpha\le 60°$，

在ΔOMP中，由正弦定理，得$\dfrac{OM}{\sin\angle OPM}=\dfrac{OP}{\sin\angle OMP}$，

所以$OM=\dfrac{OP\sin 45°}{\sin(45°+\alpha)}$，

同理$ON=\dfrac{OP\sin 45°}{\sin(75°+\alpha)}$

故$S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}\times OM\times ON\times\sin\angle MON$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{OP^2\sin^2 45°}{\sin(45°+\alpha)\sin(75°+\alpha)}$$

$$=\frac{1}{\sin(45°+\alpha)\sin(45°+\alpha+30°)}$$

$$=\frac{1}{\sin(45°+\alpha)\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(45°+\alpha)+\frac{1}{2}\cos(45°+\alpha)\right]}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\left(45^\circ+\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin\left(45^\circ+\alpha\right)\cos\left(45^\circ+\alpha\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\cos\left(90^\circ+2\alpha\right)\right]+\frac{1}{4}\sin\left(90^\circ+2\alpha\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\cos 2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha+30^\circ\right)}$$

因为$0^\circ\le\alpha\le 60^\circ$，$30^\circ\le 2\alpha+30^\circ\le 150^\circ$，所以当$\alpha=30^\circ$时，$\sin\left(2\alpha+30^\circ\right)$的最大值为1，此时$\Delta OMN$的面积取到最小值．即$2\angle POM=30^\circ$时，$\Delta OMN$的面积的最小值为$8-4\sqrt{3}$．

[解析] 此题通过正余弦定理巧妙的将面积最值问题通过三角函数呈现，而三角函数的化简过程又比较复杂，但还是有规律可循的，比如差异分析．这就要在平时注意积累，而且计算基本功要硬．

[学科网考点定位] 本题主要考查解三角形、同角三角函数的基本关系、两角和与差的三角函数等基础知识，考查推理论证能力、抽象概括能力、运算求解能力，考查函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思.计算难度比较大，属于难题．

22. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$（$a\in R,e$为自然对数的底数）

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在点$\left(1,f(x)\right)$处的切线平行于x轴，求a的值；

（Ⅱ）求函数$f(x)$的极值；

（Ⅲ）当$a=1$时，若直线$l:y=kx-1$与曲线$y=f(x)$没有公共点，求k的最大值.

[答案] （Ⅰ）由$f\left(x\right)=x-1+\frac{a}{e^x}$，得$f'\left(x\right)=1-\frac{a}{e^x}$．

又曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于 x 轴，

得 $f'(1)=0$，即 $1-\dfrac{a}{e}=0$，解得 $a=e$.

（Ⅱ）$f'(x)=1-\dfrac{a}{e^x}$，

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，所以函数 $f(x)$ 无极值.

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $e^x=a$，$x=\ln a$.

$x\in(-\infty,\ln a)$，$f'(x)<0$；$x\in(\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值，且极小值为 $f(\ln a)=\ln a$，无极大值.

综上，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 无极小值；

当 $a>0$，$f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值 $\ln a$，无极大值.

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x-1+\dfrac{1}{e^x}$

令 $g(x)=f(x)-(kx-1)=(1-k)x+\dfrac{1}{e^x}$，

则直线 l：$y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，

等价于方程 $g(x)=0$ 在 R 上没有实数解.

假设 $k>1$，此时 $g(0)=1>0$，$g\left(\dfrac{1}{k-1}\right)=-1+\dfrac{1}{e^{\frac{1}{k-1}}}<0$，

又函数 $g(x)$ 的图象连续不断，由零点存在定理，可知 $g(x)=0$ 在 R 上至少有一解，与“方程 $g(x)=0$ 在 R 上没有实数解”矛盾，故 $k\le 1$.

又 $k=1$ 时，$g(x)=\dfrac{1}{e^x}>0$，知方程 $g(x)=0$ 在 R 上没有实数解.

所以 k 的最大值为1.

解法二：

（Ⅰ）（Ⅱ）同解法一.

（III）当 $a=1$ 时，$f(x)=x-1+\frac{1}{e^x}$.

直线 l：$y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，

等价于关于 x 的方程 $kx-1=x-1+\frac{1}{e^x}$ 在 R 上没有实数解，即关于 x 的方程：

$$(k-1)x=\frac{1}{e^x} \qquad (*)$$

在 R 上没有实数解.

①当 $k=1$ 时，方程（*）可化为 $\frac{1}{e^x}=0$，在 R 上没有实数解.

②当 $k\neq 1$ 时，方程（*）化为 $\frac{1}{k-1}=xe^x$.

令 $g(x)=xe^x$，则有 $g'(x)=(1+x)e^x$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=-1$，

当 x 变化时，$g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

当 $x=-1$ 时，$g(x)_{min}=-\frac{1}{e}$，同时当 x 趋于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋于 $+\infty$，

从而 $g(x)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

所以当 $\frac{1}{k-1}\in\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$ 时，方程（*）无实数解，

解得 k 的取值范围是 $(1-e,1)$.

综上，得 k 的最大值为 1.

[解析] 此题的一二问考查的是最基本的函数切线问题及对极值含参情况的讨论，所以导数公式必需牢记，对于参数的讨论找到一个合理的分类标准做到不重不漏即可，可这往往又是学生最容易出

现问题的地方.而第三问对于曲线是否无交点要懂得转化成函数零点或方程根的个数问题处理，这也是常规处理含参就比较麻烦，平时要多加练习.

[学科网考点定位] 本小题主要考查函数与导数，两数的单调性、极值、零点等基础知识，考查推理论证能力、运算求解 能力，考查函数与方程思想、数形结合思想、分类与整合思想、化归与转化思想. 属综合要求比较高的难题.