2017年浙江省高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共10小题，每小题5分，满分50分）

1．（5分）已知集合 $P=\{x|-1<x<1\}$，$Q=\{x|0<x<2\}$，那么 $P\cup Q=$（　　）

A．$(-1,2)$　B．$(0,1)$　C．$(-1,0)$　D．$(1,2)$

【分析】直接利用并集的运算法则化简求解即可．

【解答】解：集合 $P=\{x|-1<x<1\}$，$Q=\{x|0<x<2\}$，

那么 $P\cup Q=\{x|-1<x<2\}=(-1,2)$．

故选：A．

【点评】本题考查集合的基本运算，并集的求法，考查计算能力．

2．（5分）椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的离心率是（　　）

A．$\frac{\sqrt{13}}{3}$　B．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　C．$\frac{2}{3}$　D．$\frac{5}{9}$

【分析】直接利用椭圆的简单性质求解即可．

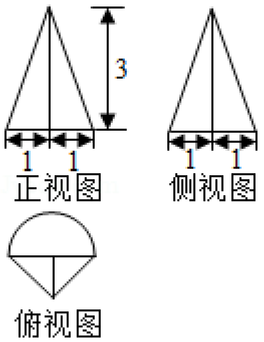
【解答】解：椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，可得 $a=3$，$b=2$，则 $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$，

所以椭圆的离心率为：$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$．

故选：B．

【点评】本题考查椭圆的简单性质的应用，考查计算能力．

3．（5分）某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^2）是（　　）



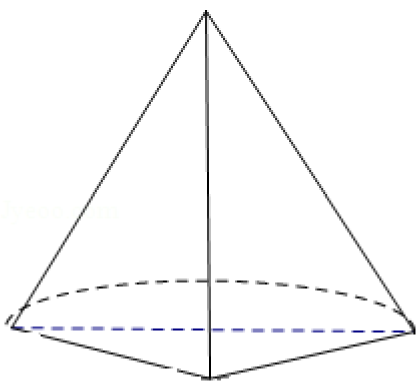
A．$\frac{\pi}{2}$+1　B．$\frac{\pi}{2}$+3　C．$\frac{3\pi}{2}$+1　D．$\frac{3\pi}{2}$+3

【分析】根据几何体的三视图，该几何体是圆锥的一半和一个三棱锥组成，画出图形，结合图中数据即可求出它的体积．

【解答】解：由几何的三视图可知，该几何体是圆锥的一半和一个三棱锥组成，圆锥的底面圆的半径为 1，三棱锥的底面是底边长 2 的等腰直角三角形，圆锥的高和棱锥的高相等均为 3，

故该几何体的体积为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times3+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times3=\frac{\pi}{2}+1$，

故选：A



【点评】本题考查了空间几何体三视图的应用问题，解题的关键是根据三视图得出原几何体的结构特征，是基础题目．

4．（5 分）若 x、y 满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant0\\x+y-3\geqslant0\\x-2y\leqslant0\end{cases}$，则 z=x+2y 的取值范围是（　　）

A．[0，6]　B．[0，4]　C．[6，+∞）　D．[4，+∞）

【分析】画出约束条件的可行域，利用目标函数的最优解求解即可．

【解答】解：x、y 满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant 0\\x+y-3\geqslant 0\\x-2y\leqslant 0\end{cases}$，表示的可行域如图：

目标函数 z=x+2y 经过坐标原点时，函数取得最小值，

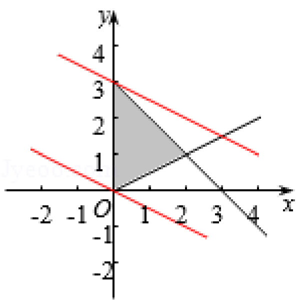
经过 A 时，目标函数取得最大值，

由$\begin{cases}x=0\\x+y=3\end{cases}$解得 A（0，3），

目标函数的直线为：0，最大值为：36

目标函数的范围是[0，6].

故选：A.



【点评】本题考查线性规划的简单应用，画出可行域判断目标函数的最优解是解题的关键.

5.（5 分）若函数 f（x）=x^2+ax+b 在区间[0，1]上的最大值是 M，最小值是 m，则 M﹣m（　　）

A．与 a 有关，且与 b 有关　B．与 a 有关，但与 b 无关

C．与 a 无关，且与 b 无关　D．与 a 无关，但与 b 有关

【分析】结合二次函数的图象和性质，分类讨论不同情况下 M﹣m 的取值与 a，b 的关系，综合可得答案.

【解答】解：函数 f（x）=x^2+ax+b 的图象是开口朝上且以直线 x=﹣$\frac{a}{2}$为对称轴的抛物线，

①当﹣$\frac{a}{2}$>1 或﹣$\frac{a}{2}$<0，即 a<﹣2，或 a>0 时，

函数 f（x）在区间[0，1]上单调，

此时 M﹣m=|f（1）﹣f（0）|=|a|，

故 M﹣m 的值与 a 有关，与 b 无关

②当$\frac{1}{2}\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 1$，即$-2\leqslant a\leqslant -1$时，

函数 f（x）在区间$[0, -\frac{a}{2}]$上递减，在$[-\frac{a}{2}, 1]$上递增，

且 f（0）＞f（1），

此时 $M-m=f(0)-f(-\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}$，

故 M﹣m 的值与 a 有关，与 b 无关

③当$0\leqslant -\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$，即$-1<a\leqslant 0$时，

函数 f（x）在区间$[0, -\frac{a}{2}]$上递减，在$[-\frac{a}{2}, 1]$上递增，

且 f（0）＜f（1），

此时 $M-m=f(0)-f(-\frac{a}{2})=a-\frac{a^2}{4}$，

故 M﹣m 的值与 a 有关，与 b 无关

综上可得：M﹣m 的值与 a 有关，与 b 无关

故选：B

【点评】本题考查的知识点是二次函数的图象和性质，熟练掌握二次函数的图象和性质，是解答的关键．

6．（5 分）已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为 S_n，则“$d>0$”是“$S_4+S_6>2S_5$”的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充分必要条件　 D．既不充分也不必要条件

【分析】根据等差数列的求和公式和 $S_4+S_6>2S_5$，可以得到 $d>0$，根据充分必要条件的定义即可判断．

【解答】解：∵$S_4+S_6>2S_5$，

∴$4a_1+6d+6a_1+15d>2(5a_1+10d)$，

∴$21d>20d$，

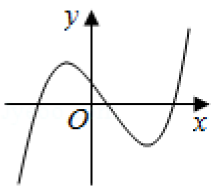
∴$d>0$，

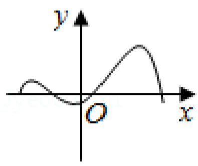
故“$d>0$”是“$S_4+S_6>2S_5$”充分必要条件，

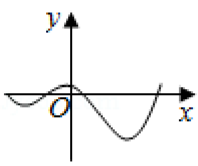
故选：C

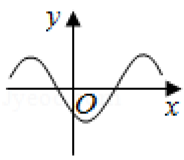
【点评】本题借助等差数列的求和公式考查了充分必要条件，属于基础题

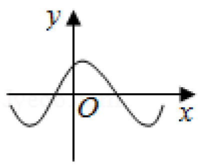
7．（5 分）函数 y=f（x）的导函数 y=f′（x）的图象如图所示，则函数 y=f（x）的图象可能是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【分析】根据导数与函数单调性的关系，当 f′（x）＜0 时，函数 f（x）单调递减，当 f′（x）＞0 时，函数 f（x）单调递增，根据函数图象，即可判断函数的单调性，然后根据函数极值的判断，即可判断函数极值的位置，即可求得函数 y=f（x）的图象可能

【解答】解：由当 f′（x）＜0 时，函数 f（x）单调递减，当 f′（x）＞0 时，函数 f（x）单调递增，

则由导函数 y=f′（x）的图象可知：f（x）先单调递减，再单调递增，然后单调递减，最后单调递增，排除 A，C，

且第二个拐点（即函数的极大值点）在 x 轴上的右侧，排除 B，

故选 D

【点评】本题考查导数的应用，考查导数与函数单调性的关系，考查函数极值的判断，考查数形结合思想，属于基础题．

8．（5 分）已知随机变量 ξ_i 满足 P（ξ_i=1）=p_i，P（ξ_i=0）=1﹣p_i，i=1，2．若 0＜p_1＜p_2＜$\frac{1}{2}$，则（　　）

A．E（ξ_1）＜E（ξ_2），D（ξ_1）＜D（ξ_2）　B．E（ξ_1）＜E（ξ_2），D（ξ_1）＞D（ξ_2）

C．E（ξ_1）＞E（ξ_2），D（ξ_1）＜D（ξ_2）　D．E（ξ_1）＞E（ξ_2），D（ξ_1）＞D（ξ_2）

【分析】由已知得 0＜p_1＜p_2＜$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$＜1﹣p_2＜1﹣p_1＜1，求出 E（ξ_1）=p_1，E

（ξ_2）$=p_2$，从而求出 D（ξ_1），D（ξ_2），由此能求出结果．

【解答】解：∵随机变量 ξ_i 满足 P（$\xi_i=1$）$=p_i$，P（$\xi_i=0$）$=1-p_i$，$i=1$，2，…，

$0<p_1<p_2<\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{1}{2}<1-p_2<1-p_1<1$，

E（ξ_1）$=1\times p_1+0\times(1-p_1)=p_1$，

E（ξ_2）$=1\times p_2+0\times(1-p_2)=p_2$，

D（ξ_1）$=(1-p_1)^2p_1+(0-p_1)^2(1-p_1)=p_1-p_1^2$，

D（ξ_2）$=(1-p_2)^2p_2+(0-p_2)^2(1-p_2)=p_2-p_2^2$，

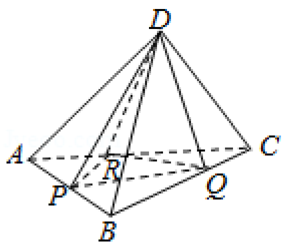
D（ξ_1）$-$D（ξ_2）$=p_1-p_1^2-(p_2-p_2^2)=(p_2-p_1)(p_1+p_2-1)<0$，

∴E（ξ_1）<E（ξ_2），D（ξ_1）<D（ξ_2）．

故选：A．

【点评】本题考查离散型随机变量的数学期望和方差等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题．

9．（5 分）如图，已知正四面体 D﹣ABC（所有棱长均相等的三棱锥），P、Q、R 分别为 AB、BC、CA 上的点，AP=PB，$\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RA}=2$，分别记二面角 D﹣PR﹣Q，D﹣PQ﹣R，D﹣QR﹣P 的平面角为 α、β、γ，则（　　）



A．γ<α<β B．α<γ<β C．α<β<γ D．β<γ<α

【分析】解法一：如图所示，建立空间直角坐标系．设底面△ABC 的中心为 O．不妨设 OP=3．则 O（0，0，0），P（0，﹣3，0），C（0，﹣6，0），D（0，0，$6\sqrt{2}$），Q$(\sqrt{3},2,0)$，R$(-2\sqrt{3},0,0)$，利用法向量的夹角公式即可得出二面角．

解法二：如图所示，连接 OD，OQ，OR，过点 O 发布作垂线：OE⊥DR，OF⊥DQ，OG⊥QR，垂足分别为 E，F，G，连接 PE，PF，PG．设 OP=h．可得 cosα=$\frac{S_{\triangle ODR}}{S_{\triangle PDR}}=\frac{OE}{PE}=\frac{OE}{\sqrt{OE^2+h^2}}$． 同 理 可 得 ： cosβ=$\frac{OF}{PF}=\frac{OF}{\sqrt{OF^2+h^2}}$，cosγ=$\frac{OG}{PG}=\frac{OG}{\sqrt{OG^2+h^2}}$．由已知可得：OE＞OG＞OF．即可得出．

【解答】解法一：如图所示，建立空间直角坐标系．设底面△ABC 的中心为 O．不妨设 OP=3．则 O（0，0，0），P（0，－3，0），C（0，－6，0），D（0，0，$6\sqrt{2}$），

Q$(\sqrt{3}, 2, 0)$，R$(-2\sqrt{3}, 0, 0)$，

$\overrightarrow{PR}=(-2\sqrt{3}, 3, 0)$，$\overrightarrow{PD}=$（0，3，$6\sqrt{2}$），$\overrightarrow{PQ}=$（$\sqrt{3}$，5，0），

$\overrightarrow{QR}=(-3\sqrt{3}, -2, 0)$，

$\overrightarrow{QD}=(-\sqrt{3}, -2, 6\sqrt{2})$．

设平面 PDR 的法向量为$\overrightarrow{n}=$（x，y，z），则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PR}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，可得$\begin{cases}-2\sqrt{3}x+3y=0\\ 3y+6\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

可得$\overrightarrow{n}=(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, -1)$，取平面 ABC 的法向量$\overrightarrow{m}=$（0，0，1）．

则 cos$<\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}>=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{-1}{\sqrt{15}}$，取 α=arccos$\frac{1}{\sqrt{15}}$．

同理可得：β=arccos$\frac{3}{\sqrt{681}}$．γ=arccos$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{95}}$．

$\because \frac{1}{\sqrt{15}}>\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{95}}>\frac{3}{\sqrt{681}}$．

∴α＜γ＜β．

解法二：如图所示，连接 OD，OQ，OR，过点 O 发布作垂线：OE⊥DR，OF⊥DQ，OG⊥QR，垂足分别为 E，F，G，连接 PE，PF，PG．

设 OP=h．

则 cosα=$\frac{S_{\triangle ODR}}{S_{\triangle PDR}}=\frac{OE}{PE}=\frac{OE}{\sqrt{OE^2+h^2}}$．

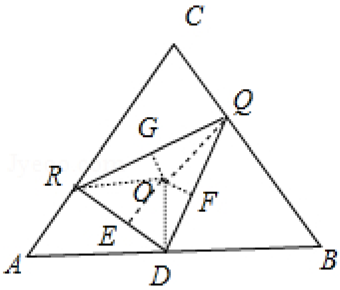
同理可得：$\cos\beta=\frac{OF}{PF}=\frac{OF}{\sqrt{OF^2+h^2}}$，$\cos\gamma=\frac{OG}{PG}=\frac{OG}{\sqrt{OG^2+h^2}}$.

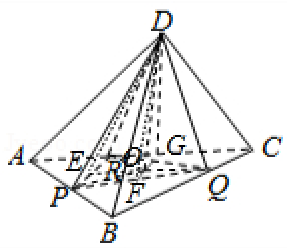
由已知可得：OE＞OG＞OF.

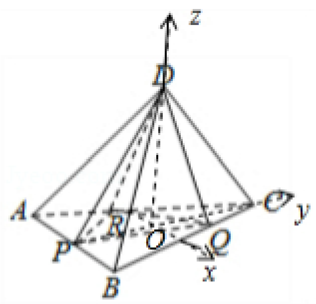
∴cosα＞cosγ＞cosβ，α，β，γ 为锐角.

∴α＜γ＜β.

故选：B.

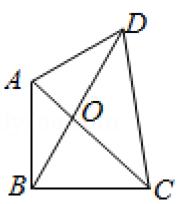






【点评】本题考查了空间角、空间位置关系、正四面体的性质、法向量的夹角公式，考查了推理能力与计算能力，属于难题.

10．（5 分）如图，已知平面四边形 ABCD，AB⊥BC，AB=BC=AD=2，CD=3，AC 与 BD 交于点 O，记 $I_1=\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OD}$，则（　　）



A．$I_1<I_2<I_3$　B．$I_1<I_3<I_2$　C．$I_3<I_1<I_2$　D．$I_2<I_1<I_3$

【分析】根据向量数量积的定义结合图象边角关系进行判断即可．

【解答】解：∵$AB\perp BC$，$AB=BC=AD=2$，$CD=3$，

∴$AC=2\sqrt{2}$，

∴$\angle AOB=\angle COD>90°$，

由图象知 $OA<OC$，$OB<OD$，

∴$0>\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}>0$，

即 $I_3<I_1<I_2$，

故选：C．

【点评】本题主要考查平面向量数量积的应用，根据图象结合平面向量数量积的定义是解决本题的关键．

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分

11．（4 分）我国古代数学家刘徽创立的"割圆术"可以估算圆周率 π，理论上能把 π 的值计算到任意精度，祖冲之继承并发展了"割圆术"，将 π 的值精确到小数点后七位，其结果领先世界一千多年，"割圆术"的第一步是计算单位圆内接正六边形的面积 S_6，S_6=__$\frac{3\sqrt{3}}{2}$__．

【分析】根据题意画出图形，结合图形求出单位圆的内接正六边形的面积．

【解答】解：如图所示，

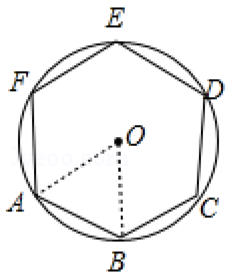
单位圆的半径为 1，则其内接正六边形 ABCDEF 中，

△AOB 是边长为 1 的正三角形，

所以正六边形 ABCDEF 的面积为

$S_6=6\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

故答案为：$\frac{3\sqrt{3}}{2}$．



【点评】本题考查了已知圆的半径求其内接正六边形面积的应用问题，是基础题．

12．（6 分）已知 a、b∈R，（a+bi）^{2}=3+4i（i 是虚数单位），则 a^2+b^2=__5__，ab=__2__．

【分析】a、b∈R，（a+bi）^{2}=3+4i（i 是虚数单位），可得 $3+4i=a^2-b^2+2abi$，可得 $3=a^2-b^2$，2ab=4，解出即可得出．

【解答】解：a、b∈R，（a+bi）^{2}=3+4i（i 是虚数单位），

∴$3+4i=a^2-b^2+2abi$，

∴$3=a^2-b^2$，2ab=4，

解得 ab=2，$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$，$\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$．

则 $a^2+b^2=5$，

故答案为：5，2．

【点评】本题考查了复数的运算法则、复数的相等、方程的解法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

13．（6 分）已知多项式（x+1）^{3}（x+2）^{2}=$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$，则 a_4=__16__，a_5=__4__．

【分析】利用二项式定理的展开式，求解 x 的系数就是两个多项式的展开式中 x 与常数乘积之和，a_5 就是常数的乘积．

【解答】解：多项式（x+1）^{3}（x+2）^{2}=$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$，

（x+1）^{3} 中，x 的系数是：3，常数是 1；（x+2）^{2} 中 x 的系数是 4，常数是 4，

$a_4=3\times4+1\times4=16$；

$a_5=1\times4=4$．

故答案为：16；4．

【点评】本题考查二项式定理的应用，考查计算能力，是基础题．

14．（6 分）已知△ABC，AB=AC=4，BC=2，点 D 为 AB 延长线上一点，BD=2，连结 CD，则△BDC 的面积是__$\frac{\sqrt{15}}{2}$__，com∠BDC=__$\frac{\sqrt{10}}{4}$__．

【分析】如图，取 BC 得中点 E，根据勾股定理求出 AE，再求出 $S_{\triangle ABC}$，再根据 $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ 即可求出，根据等腰三角形的性质和二倍角公式即可求出

【解答】解：如图，取 BC 得中点 E，

∵AB=AC=4，BC=2，

∴$BE=\frac{1}{2}BC=1$，AE⊥BC，

∴$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{15}$，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\bullet AE=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$，

∵BD=2，

∴$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

∵BC=BD=2，

∴∠BDC=∠BCD，

∴∠ABE=2∠BDC

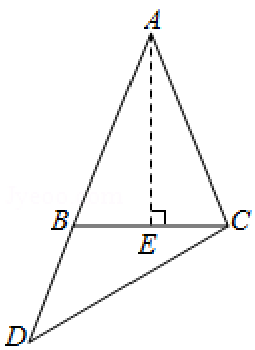
在 Rt△ABE 中，

∵$\cos\angle ABE=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{4}$，

∴$\cos\angle ABE=2\cos^2\angle BDC-1=\frac{1}{4}$，

∴$\cos\angle BDC=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{15}}{2}$，$\frac{\sqrt{10}}{4}$



【点评】本题考查了解三角形的有关知识，关键是转化，属于基础题

15．（6 分）已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值是__4__，最大值是__$2\sqrt{5}$__．

【分析】通过记∠AOB=α（0≤α≤π），利用余弦定理可可知$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5-4\cos\alpha}$、$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5+4\cos\alpha}$，进而换元，转化为线性规划问题，计算即得结论．

【解答】解：记∠AOB=α，则 0≤α≤π，如图，

由余弦定理可得：

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5-4\cos\alpha}$，

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5+4\cos\alpha}$，

令 $x=\sqrt{5-4\cos\alpha}$，$y=\sqrt{5+4\cos\alpha}$，

则 $x^2+y^2=10$（x、y≥1），其图象为一段圆弧 MN，如图，

令 $z=x+y$，则 $y=-x+z$，

则直线 $y=-x+z$ 过 M、N 时 z 最小为 $z_{min}=1+3=3+1=4$，

当直线 $y=-x+z$ 与圆弧 MN 相切时 z 最大，

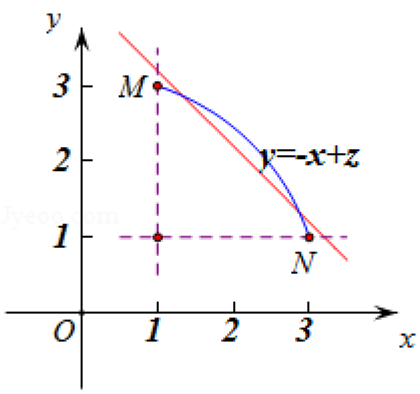
由平面几何知识易知 z_{max} 即为原点到切线的距离的$\sqrt{2}$倍，

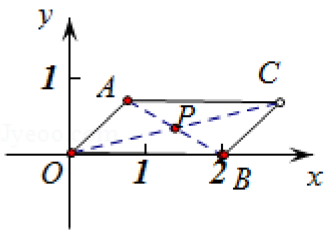
也就是圆弧 MN 所在圆的半径的$\sqrt{2}$倍，

所以 $z_{max}=\sqrt{2}\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}$.

综上所述，$|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值是 4，最大值是 $2\sqrt{5}$.

故答案为：4、$2\sqrt{5}$.





【点评】本题考查函数的最值及其几何意义，考查数形结合能力，考查运算求解能力，涉及余弦定理、线性规划等基础知识，注意解题方法的积累，属于中档题．

16．（4 分）从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人，副队长 1 人，普通队员 2 人组成 4 人服务队，要求服务队中至少有 1 名女生，共有__660__种不同的选法．（用数字作答）

【分析】由题意分两类选 1 女 3 男或选 2 女 2 男，再计算即可

【解答】解：第一类，先选 1 女 3 男，有 $C_6^3C_2^1=40$ 种，这 4 人选 2 人作为队长和副队有 $A_4^2=12$ 种，故有 40×12=480 种，

第二类，先选 2 女 2 男，有 $C_6^2C_2^2=15$ 种，这 4 人选 2 人作为队长和副队有 $A_4^2=12$ 种，故有 15×12=180 种，

根据分类计数原理共有 480+180=660 种，

故答案为：660

【点评】本题考查了分类计数原理和分步计数原理，属于中档题

17．（4 分）已知 a∈R，函数 f（x）$=|x+\frac{4}{x}-a|+a$ 在区间[1，4]上的最大值是 5，则 a 的取值范围是__$(-\infty，\frac{9}{2})$__．

【分析】通过转化可知 $|x+\frac{4}{x}-a|+a\leqslant 5$ 且 $a\leqslant 5$，进而解绝对值不等式可知 2a﹣5

$\leqslant x+\frac{4}{x}\leqslant 5$，进而计算可得结论.

【解答】解：由题可知$|x+\frac{4}{x}-a|+a\leqslant 5$，即$|x+\frac{4}{x}-a|\leqslant 5-a$，所以$a\leqslant 5$，

又因为$|x+\frac{4}{x}-a|\leqslant 5-a$，

所以$a-5\leqslant x+\frac{4}{x}-a\leqslant 5-a$，

所以$2a-5\leqslant x+\frac{4}{x}\leqslant 5$，

又因为$1\leqslant x\leqslant 4$，$4\leqslant x+\frac{4}{x}\leqslant 5$，

所以$2a-5\leqslant 4$，解得$a\leqslant \frac{9}{2}$，

故答案为：$(-\infty，\frac{9}{2})$.

【点评】本题考查函数的最值，考查绝对值函数，考查转化与化归思想，注意解题方法的积累，属于中档题.

三、解答题（共 5 小题，满分 74 分）

18.（14 分）已知函数 $f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$（$x\in R$）.

（Ⅰ）求 $f(\frac{2\pi}{3})$ 的值.

（Ⅱ）求 f（x）的最小正周期及单调递增区间.

【分析】利用二倍角公式及辅助角公式化简函数的解析式，

（Ⅰ）代入可得：$f(\frac{2\pi}{3})$ 的值.

（Ⅱ）根据正弦型函数的图象和性质，可得 f（x）的最小正周期及单调递增区间

【解答】解：∵函数 $f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x+\frac{7\pi}{6})$

（Ⅰ）$f(\frac{2\pi}{3})=2\sin(2\times\frac{2\pi}{3}+\frac{7\pi}{6})=2\sin\frac{5\pi}{2}=2$，

（Ⅱ）∵$\omega=2$，故 $T=\pi$，

即 f（x）的最小正周期为 π，

由 $2x+\frac{7\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{\pi}{2}+2k\pi]$，$k\in Z$ 得：

$x\in[-\frac{5\pi}{6}+k\pi，-\frac{\pi}{3}+k\pi]$，$k\in Z$，

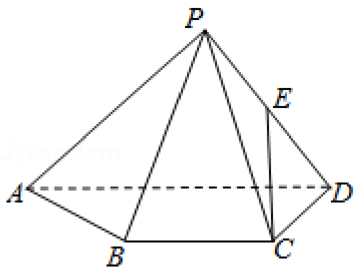
故 f（x）的单调递增区间为[$-\frac{5\pi}{6}+k\pi$， $-\frac{\pi}{3}+k\pi$]，k∈Z.

【点评】本题考查的知识点是三角函数的化简求值，三角函数的周期性，三角函数的单调区间，难度中档.

19.（15 分）如图，已知四棱锥 P﹣ABCD，△PAD 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，BC∥AD，CD⊥AD，PC=AD=2DC=2CB，E 为 PD 的中点.

（Ⅰ）证明：CE∥平面 PAB；

（Ⅱ）求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.



【分析】（Ⅰ）以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，过 D 作平面 ABCD 的垂线为 z 轴，建立空间直角系，利用向量法能证明 CE∥平面 PAB.

（Ⅱ）求出平面 PBC 的法向量和$\overrightarrow{CE}$，利用向量法能求出直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.

【解答】证明：（Ⅰ）∵四棱锥 P﹣ABCD，△PAD 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，

BC∥AD，CD⊥AD，PC=AD=2DC=2CB，E 为 PD 的中点，

∴以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，过 D 作平面 ABCD 的垂线为 z 轴，建立空间直角系，

设 PC=AD=2DC=2CB=2，

则 C（0，1，0），D（0，0，0），P（1，0，1），E（$\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{2}$），A（2，0，0），B（1，1，0），

$\overrightarrow{CE}$=（$\frac{1}{2}$，-1，$\frac{1}{2}$），$\overrightarrow{PA}$=（1，0，﹣1），$\overrightarrow{PB}$=（0，1，﹣1），

设平面 PAB 的法向量$\vec{n}$=（x，y，z），

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=x-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=y-z=0\end{cases}$，取 z=1，得$\vec{n}$=（1，1，1），

∵$\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}=0$，CE⊄平面 PAB，

∴CE∥平面 PAB．

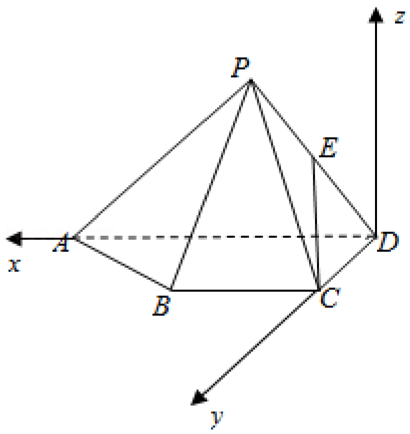
解：（Ⅱ）$\overrightarrow{PC}$=（﹣1，1，﹣1），设平面 PBC 的法向量$\vec{m}$=（a，b，c），

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=b-c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=-a+b-c=0\end{cases}$，取 b=1，得$\vec{m}$=（0，1，1），

设直线 CE 与平面 PBC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{CE},\vec{m}>|=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{6}{4}}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

∴直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.



【点评】本题考查线面平行的证明，考查线面角的正弦值的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题．

20．（15 分）已知函数 f（x）=（x﹣$\sqrt{2x-1}$）e^{-x}（$x\geq\frac{1}{2}$）.

（1）求 f（x）的导函数；

（2）求 f（x）在区间$[\frac{1}{2}$，+∞）上的取值范围．

【分析】（1）求出 f（x）的导数，注意运用复合函数的求导法则，即可得到所求；

（2）求出 f（x）的导数，求得极值点，讨论当$\frac{1}{2}$<x<1 时，当 1<x<$\frac{5}{2}$时，当 x>$\frac{5}{2}$时，f（x）的单调性，判断 f（x）≥0，计算 f（$\frac{1}{2}$），f（1），f（$\frac{5}{2}$），即可得到所求取值范围.

【解答】解：（1）函数 $f(x)=(x-\sqrt{2x-1})e^{-x}$（$x\geq\frac{1}{2}$），

导数 $f'(x)=(1-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\bullet 2)e^{-x}-(x-\sqrt{2x-1})e^{-x}$

$=(1-x+\frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}})e^{-x}=(1-x)(1-\frac{2}{\sqrt{2x-1}})e^{-x}$；

（2）由 f（x）的导数 $f'(x)=(1-x)(1-\frac{2}{\sqrt{2x-1}})e^{-x}$，

可得 f′（x）=0 时，x=1 或$\frac{5}{2}$，

当$\frac{1}{2}$<x<1 时，f′（x）<0，f（x）递减；

当 1<x<$\frac{5}{2}$时，f′（x）>0，f（x）递增；

当 x>$\frac{5}{2}$时，f′（x）<0，f（x）递减，

且 $x\geq\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow x^2\geq 2x-1\Leftrightarrow(x-1)^2\geq 0$，

则 f（x）≥0.

由 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$，f（1）=0，$f(\frac{5}{2})=\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}}$，

即有 f（x）的最大值为$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$，最小值为 f（1）=0.

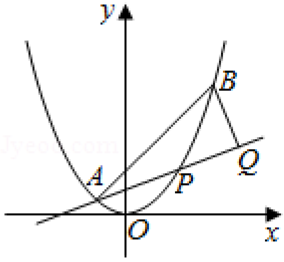
则 f（x）在区间$[\frac{1}{2},+\infty)$上的取值范围是$[0,\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}]$.

【点评】本题考查导数的运用：求单调区间和极值、最值，考查化简整理的运算能力，正确求导是解题的关键，属于中档题.

21.（15 分）如图，已知抛物线 $x^2=y$，点 A（$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$），B（$\frac{3}{2}$，$\frac{9}{4}$），抛物线上的点 P（x，y）（$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$），过点 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q.

（Ⅰ）求直线 AP 斜率的取值范围；

（Ⅱ）求$|PA|\bullet|PQ|$的最大值.



【分析】（Ⅰ）通过点 P 在抛物线上可设 P（x，x^2），利用斜率公式结合$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$可得结论；

（Ⅱ）通过（Ⅰ）知 P（x，x^2）、$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，设直线 AP 的斜率为 k，联立直线 AP、BP 方程可知 Q 点坐标，进而可用 k 表示出$\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PA}$，计算可知$|PA|\bullet|PQ|=(1+k)^3(1-k)$，通过令 $f(x)=(1+x)^3(1-x)$，$-1<x<1$，求导结合单调性可得结论.

【解答】解：（Ⅰ）由题可知 P（x，x^2），$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，

所以$k_{AP}=\dfrac{x^2-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}=x-\frac{1}{2}\in(-1,1)$，

故直线 AP 斜率的取值范围是：$(-1,1)$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 P（x，x^2），$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，

所以$\overrightarrow{PA}=\left(-\frac{1}{2}-x,\ \frac{1}{4}-x^2\right)$，

设直线 AP 的斜率为 k，则 AP：$y=kx+\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}$，BP：$y=-\frac{1}{k}x+\frac{3}{2k}+\frac{9}{4}$，

联立直线 AP、BP 方程可知 Q $\left(\dfrac{3+4k-k^2}{2k^2+2},\ \dfrac{9k^2+8k+1}{4k^2+4}\right)$，

故$\overrightarrow{PQ}=\left(\dfrac{1+k-k^2-k^3}{1+k^2},\ \dfrac{-k^4-k^3+k^2+k}{1+k^2}\right)$，

又因为$\overrightarrow{PA}=(-1-k,\ -k^2-k)$，

故$-|PA|\bullet|PQ|=\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PQ}=\dfrac{(1+k)^3(k-1)}{1+k^2}+\dfrac{k^2(1+k)^3(k-1)}{1+k^2}=(1+k)^3(k-1)$，

所以$|PA|\bullet|PQ|=(1+k)^3(1-k)$，

令 $f(x)=(1+x)^3(1-x)$，$-1<x<1$，

则 $f'(x)=(1+x)^2(2-4x)=-2(1+x)^2(2x-1)$，

由于当 $-1<x<-\frac{1}{2}$时 $f'(x)>0$，当$\frac{1}{2}<x<1$ 时 $f'(x)<0$，

故 $f(x)_{max}=f(\frac{1}{2})=\frac{27}{16}$，即$|PA|\bullet|PQ|$的最大值为$\frac{27}{16}$.

【点评】本题考查圆锥曲线的最值问题，考查运算求解能力，考查函数思想，注意解题方法的积累，属于中档题.

22.（15 分）已知数列$\{x_n\}$满足：$x_1=1$，$x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})$（$n\in N^*$），证明：当 $n\in N^*$时，

（Ⅰ）$0<x_{n+1}<x_n$；

（Ⅱ）$2x_{n+1}-x_n\leqslant\frac{x_nx_{n+1}}{2}$；

（Ⅲ）$\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}$.

【分析】（Ⅰ）用数学归纳法即可证明，

（Ⅱ）构造函数，利用导数判断函数的单调性，把数列问题转化为函数问题，即可证明，

（Ⅲ）由$\frac{x_nx_{n+1}}{2}\geqslant 2x_{n+1}-x_n$得$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{2}\geqslant 2(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2})>0$，继续放缩即可证明

【解答】解：（Ⅰ）用数学归纳法证明：$x_n>0$，

当 $n=1$ 时，$x_1=1>0$，成立，

假设当 $n=k$ 时成立，则 $x_k>0$，

那么 $n=k+1$ 时，若 $x_{k+1}<0$，则 $0<x_k=x_{k+1}+\ln(1+x_{k+1})<0$，矛盾，

故 $x_{n+1}>0$，

因此 $x_n>0$，（$n\in N^*$）

∴$x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})>x_{n+1}$，

因此 $0<x_{n+1}<x_n$（$n\in N^*$），

（Ⅱ）由 $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})$ 得 $x_nx_{n+1}-4x_{n+1}+2x_n=x_{n+1}^2-2x_{n+1}+(x_{n+1}+2)\ln(1+x_{n+1})$，

记函数 $f(x)=x^2-2x+(x+2)\ln(1+x)$，$x\geqslant 0$

$\therefore f'(x)=\frac{2x^2+x}{x+1}+\ln(1+x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$，

因此 $x_{n+1}^2-2x_{n+1}+(x_{n+1}+2)\ln(1+x_{n+1})\geqslant 0$，

故 $2x_{n+1}-x_n\leqslant\frac{x_nx_{n+1}}{2}$；

（Ⅲ）$\because x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\leqslant x_{n+1}+x_{n+1}=2x_{n+1}$，

$\therefore x_n\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}$，

由 $\frac{x_nx_{n+1}}{2}\geqslant 2x_{n+1}-x_n$ 得 $\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{2}\geqslant 2\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\right)>0$，

$\therefore \frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\geqslant 2\left(\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{2}\right)\geqslant\dots\geqslant 2^{n-1}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2}\right)=2^{n-2}$，

$\therefore x_n\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}$，

综上所述 $\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}$.

【点评】本题考查了数列的概念，递推关系，数列的函数的特征，导数和函数的单调性的关系，不等式的证明，考查了推理论证能力，分析解决问题的能力，运算能力，放缩能力，运算能力，属于难题