

# 2021 年普通高等学校招生全国统一考试

## 理科数学乙卷

### 注意事项:

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设  $2(z+\bar{z}) + 3(z-\bar{z}) = 4+6i$ ，则  $z = ( )$ .  
A.  $1-2i$       B.  $1+2i$   
C.  $1+i$       D.  $1-i$
2. 已知集合  $S = \{s | s=2n+1, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $T = \{t | t=4n+1, n \in \mathbb{Z}\}$ , 则  $S \cap T = ( )$   
A.  $\emptyset$       B.  $S$   
C.  $T$       D.  $Z$
3. 已知命题  $p: \exists x \in \mathbb{R}, \sin x < 1$ ; 命题  $q: \forall x \in \mathbb{R}, e^{|x|} \geq 1$ , 则下列命题中为真命题的是 ( )  
A.  $p \wedge q$       B.  $\neg p \wedge q$   
C.  $p \wedge \neg q$       D.  $\neg(p \vee q)$
4. 设函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , 则下列函数中为奇函数的是 ( )  
A.  $f(x-1)-1$       B.  $f(x-1)+1$   
C.  $f(x+1)-1$       D.  $f(x+1)+1$
5. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $P$  为  $B_1D_1$  的中点，则直线  $PB$  与  $AD_1$  所成的角为 ( )  
A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{3}$   
C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{6}$
6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的

分配方案共有 ( )

A. 60 种      B. 120 种

C. 240 种      D. 480 种

7. 把函数  $y=f(x)$  图象上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍, 纵坐标不变, 再把所

得曲线向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度, 得到函数  $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$  的图像, 则  $f(x)=$  ( )

A.  $\sin(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{12})$       B.  $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})$

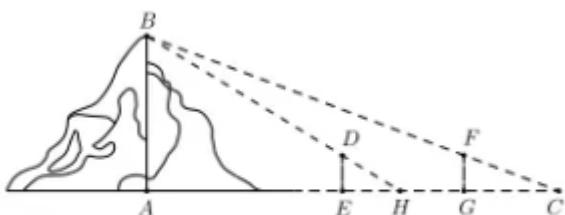
C.  $\sin(2x-\frac{7\pi}{12})$       D.  $\sin(2x+\frac{\pi}{12})$

8. 在区间  $(0, 1)$  与  $(1, 2)$  中各随机取 1 个数, 则两数之和大于  $\frac{7}{4}$  的概率为 ( )

A.  $\frac{7}{4}$       B.  $\frac{23}{32}$

C.  $\frac{9}{32}$       D.  $\frac{2}{9}$

9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海盗的高。如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”。则海岛的高 AB= ( ).



(第 9 题图)

A:  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$

B:  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$

C:  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$

D:  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

10. 设  $a \neq 0$ , 若  $x=a$  为函数  $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$  的极大值点, 则 ( ).

A:  $a < b$       B:  $a > b$

C:  $ab < a^2$       D:  $ab > a^2$

11. 设 B 是椭圆 C:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满

足  $|PB| \leq 2b$ , 则 C 的离心率的取值范围是 ( ).

A:  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

B:  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

C:  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

D:  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

12. 设  $a = 2\ln 1.01$ ,  $b = \ln 1.02$ ,  $c = \sqrt{1.04} - 1$ , 则 ( ).

A:  $a < b < c$

B:  $b < c < a$

C:  $b < a < c$

D:  $c < a < b$

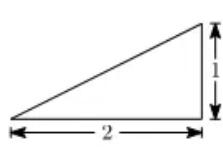
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1$  ( $m > 0$ ) 的一条渐近线为  $\sqrt{3}x + my = 0$ , 则  $C$  的焦距为\_\_\_\_\_.

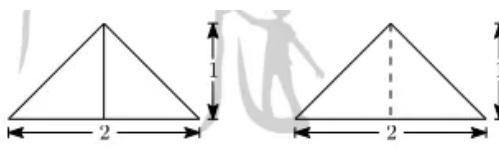
14. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 4)$ , 若  $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

15. 记  $\triangle ABC$  的内角  $A$ ,  $B$ ,  $C$  的对边分别为  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , 面积为  $\sqrt{3}$ ,  $B=60^\circ$ ,  $a^2+c^2=3ac$ , 则  $b=$ \_\_\_\_\_.

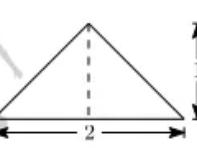
16. 以图①为正视图和俯视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为\_\_\_\_\_ (写出符合要求的一组答案即可).



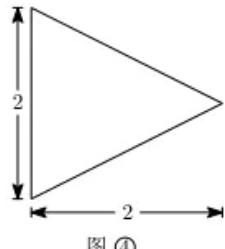
图①



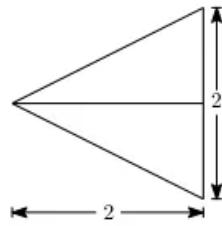
图②



图③



图④



图⑤

(第 16 题图)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某厂研究了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

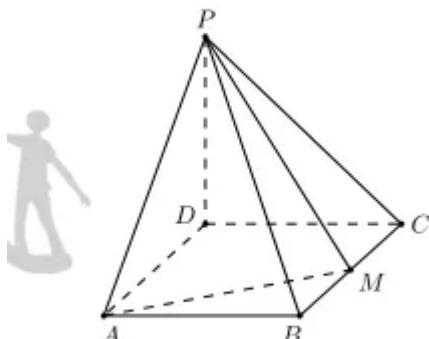
旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ ，样本方差分别记为  $s_1^2$  和  $s_2^2$

- (1) 求  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_1^2$ ,  $s_2^2$ ;
- (2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高(如果  $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$ , 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. (12 分)

如图, 四棱锥 P-ABCD 的底面是矩形,  $PD \perp$  底面 ABCD,  $PD=DC=1$ , M 为 BC 的中点, 且  $PB \perp AM$ ,

- (1) 求  $BC$ ;
- (2) 求二面角 A-PM-B 的正弦值。



(第 18 题图)

19. (12 分)

记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $b_n$  为数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ .

- (1) 证明: 数列  $\{b_n\}$  是等差数列;  
(2) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

20. (12 分)

设函数  $f(x) = \ln(a-x)$ , 已知  $x=0$  是函数  $y=xf(x)$  的极值点。

- (1) 求  $a$ ;  
(2) 设函数  $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$ , 证明:  $g(x) < 1$ .

21. (12 分)

已知抛物线  $C: x^2=2py$  ( $p>0$ ) 的焦点为  $F$ , 且  $F$  与圆  $M: x^2+(y+4)^2=1$  上点的距离的最小值为 4.

- (1) 求  $p$ ;  
(2) 若点  $P$  在  $M$  上,  $PA, PB$  是  $C$  的两条切线,  $A, B$  是切点, 求  $\Delta PAB$  的最大值.  
(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中,  $\odot C$  的圆心为  $C(2, 1)$ , 半径为 1.

- (1) 写出  $\odot C$  的一个参数方程; 将其极坐标方程化为直角坐标方程;  
(2) 过点  $F(4, 1)$  作  $\odot C$  的两条切线, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条直线的极坐标方程.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x-a| + |x+3|$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;

(2) 若  $f(x) \geq -a$ , 求  $a$  的取值范围.