2017年普通高等学校招生全国统一考试上海--数学试卷

考生注意

1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.

4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1-6题每题4分，第7-12题每题5分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1.已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$,则 $A\cap B=$.

【解析】本题考查集合的运算，交集，属于基础题

【答案】$\{3,4\}$

2.若排列数 $\mathrm{P}_6^m=6\times5\times4$,则 $m=$.

【解析】本题考查排列的计算，属于基础题

【答案】3

3.不等式 $\frac{x-1}{x}>1$ 的解集为.

【解析】本题考查分式不等式的解法，属于基础题

【答案】$(-\infty,0)$

4.已知球的体积为 36π，则该球主视图的面积等于.

【解析】本题考查球的体积公式和三视图的概念，$\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi\Rightarrow R=3$,

所以 $S=\pi R^2=9\pi$，属于基础题

【答案】9π

5.已知复数 z 满足 $z+\frac{3}{z}=0$，则 $|z|=$.

【解析】本题考查复数的四则运算和复数的模，$z+\frac{3}{z}=0\Rightarrow z^2=-3$ 设 $z=a+bi$，

则 $a^2-b^2+2abi=-3\Rightarrow a=0,b=\pm\sqrt{3}i$，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，属于基础题

【答案】$\sqrt{3}$

6.设双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的焦点为 F_1、F_2, P 为该双曲线上的一点.若 $|PF_1|=5$,则

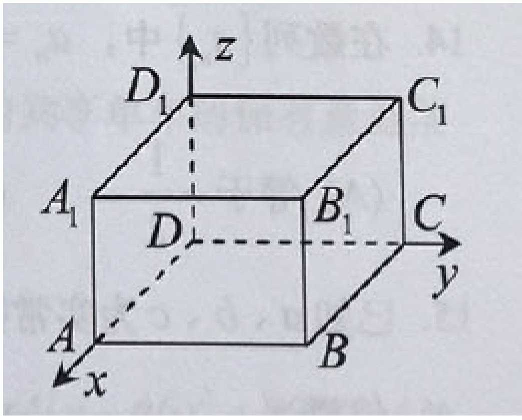
$\left|PF_2\right|=$.

【解析】本题考查双曲线的定义和性质，$\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=2a=6$（舍），

$\left|PF_2\right|-\left|PF_1\right|=2a=6\Rightarrow\left|PF_2\right|=11$

【答案】11

7.如图，以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点，过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴，建立空间直角坐标系.若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4,3,2)$,则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是.



【解析】本题考查空间向量，可得 $A(4,0,0)$， $C_1(0,3,2)\Rightarrow\overrightarrow{AC_1}=(-4,3,2)$,属于基础题

【答案】$(-4,3,2)$

8.定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.若 $g(x)=\begin{cases}3^x-1,x\le 0,\\ f(x),x>0\end{cases}$ 为奇函数，则 $f^{-1}(x)=2$ 的解为.

【解析】本题考查函数基本性质和互为反函数的两个函数之间的关系，属于中档题

$x>0,-x<0,g(-x)=3^{-x}-1=-g(x)\Rightarrow g(x)=1-\dfrac{1}{3^x}$,所以 $f(x)=1-\dfrac{1}{3^x}$,

当 $x=2$ 时， $f(x)=\dfrac{8}{9}$,所以 $f^{-1}(\dfrac{8}{9})=2$

【答案】$x=\dfrac{8}{9}$

9.已知四个函数：① $y=-x$；② $y=-\dfrac{1}{x}$；③ $y=x^3$；④ $y=x^{\frac{1}{2}}$.从中任选2个，则事件“所选2个函数的图像有且仅有一个公共点”的概率为.

【解析】本题考查事件的概率，幂函数的图像画法和特征，属于基础题

总的情况有：$C_4^2=6$ 种，符合题意的就两种：①和③，①和④

【答案】$\frac{1}{3}$

10.已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,其中$a_n=n^2,n\in\mathrm{N}^*$，$\{b_n\}$的项是互不相等的正整数.若对于任意$n\in\mathrm{N}^*,\{b_n\}$中的第a_n项等于$\{a_n\}$中的第b_n项，则$\frac{\lg\left(b_1b_4b_9b_{16}\right)}{\lg\left(b_1b_2b_3b_4\right)}=$.

【解析】本题考查数列概念的理解，对数的运算，属于中档题

由题意可得：$b_{a_n}=a_{b_n}\Rightarrow b_{n^2}=(b_n)^2\Rightarrow b_1={b_1}^2,b_4={b_2}^2,b_9={b_3}^2,b_{16}={b_4}^2$，

所以$\frac{\lg\left(b_1b_4b_9b_{16}\right)}{\lg\left(b_1b_2b_3b_4\right)}=\frac{\lg\left(b_1b_2b_3b_4\right)^2}{\lg\left(b_1b_2b_3b_4\right)}=2$

【答案】2

11. 设α_1，$\alpha_2\in\mathrm{R}$，且$\frac{1}{2+\sin\alpha_1}+\frac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}=2$，则$\left|10\pi-\alpha_1-\alpha_2\right|$的最小值等于.

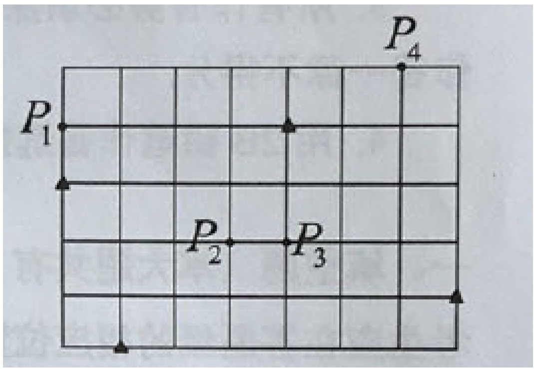
【解析】考查三角函数的性质和值域，$\frac{1}{2+\sin\alpha_1}\in\left[\frac{1}{3},1\right],\frac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}\in\left[\frac{1}{3},1\right]$,

要使$\frac{1}{2+\sin\alpha_1}+\frac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}=2$，则$\begin{cases}\frac{1}{2+\sin\alpha_1}=1\\\frac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\frac{\pi}{2}+2k_1\pi\\\alpha_2=-\frac{\pi}{4}+k_2\pi\end{cases},k_1,k_2\in Z$

$\left|10\pi-\alpha_1-\alpha_2\right|_{\min}=\left|10\pi+\frac{3}{4}\pi-(2k_1+k_2)\pi\right|_{\min}=\frac{\pi}{4}$，当$2k_1+k_2=11$时成立

【答案】$\frac{\pi}{4}$

12.如图，用35个单位正方形拼成一个矩形，点P_1,P_2,P_3,P_4以及四个标记为“▲”的点在正方形的顶点处.设集合$\Omega=\left\{P_1,P_2,P_3,P_4\right\}$，点$P\in\Omega$.过$P$作直线$l_P$，使得不在$l_P$上的“▲”的点分布在$l_P$的两侧.用$D_1(l_P)$和$D_2(l_P)$分别表示$l_P$一侧和另一侧的“▲”的点到$l_P$的距离之和.若过$P$的直线$l_P$中有且只有一条满足$D_1(l_P)=D_2(l_P)$，则$\Omega$中所有这样的$P$为.



【解析】本题考查有向距离，以左下角的顶点为原点建立直角坐标系。四个标记为“▲”的点的坐标分别为$(0,3),(1,0),(4,4),(7,1)$,设过P点的直线为：$ax+by+c=0$,

此时有向距离$d_1=\dfrac{3b+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$d_2=\dfrac{a+c}{\sqrt{a^2+b^2}},d_3=\dfrac{4a+4b+c}{\sqrt{a^2+b^2}},d_4=\dfrac{7a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

且由$d_1+d_2+d_3+d_4=12a+8b+4c=0\Rightarrow 3a+2b+c=0$

则过P_1的直线满足$4b+c=0$;此时$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3}b\\c=-4b\end{cases}$,直线为：

$-\dfrac{2}{3}bx+by-4b=0\Rightarrow b(-\dfrac{2}{3}x+y-4)=0$：

所以此时满足题意的直线为：$-\dfrac{2}{3}x+y-4=0$

则过P_2的直线满足$3a+2b+c=0$;此时有无数组解，例如：直线$x=3$，直线$y=2$等都满足题意.

则过P_3的直线满足$4a+2b+c=0$;此时$\begin{cases}a=0\\c=-2b\end{cases}$，直线为：$by-2b=0\Rightarrow b(y-2)=0$,

所以此时满足题意的直线为：$y-2=0$.

则过P_4的直线满足$6a+6b+c=0$;此时$\begin{cases}a=-\dfrac{4}{3}b\\c=2b\end{cases}$,直线为：

$-\dfrac{4}{3}bx+by+2b=0\Rightarrow b(-\dfrac{4}{3}x+y+2)=0$：

所以此时满足题意的直线为：$-\dfrac{4}{3}x+y+2=0$

【答案】P_1,P_3,P_4

二、选择题（本大题共有4题，满分20分，每题5分）每题有且只有一个正确选项.考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

13.关于x、y的二元一次方程组$\begin{cases}x+5y=0,\\2x+3y=4\end{cases}$的系数行列式$D$为（）

A．$\begin{vmatrix}0&5\\4&3\end{vmatrix}$　　B．$\begin{vmatrix}1&0\\2&4\end{vmatrix}$C．$\begin{vmatrix}1&5\\2&3\end{vmatrix}$D．$\begin{vmatrix}6&0\\5&4\end{vmatrix}$

【答案】C

14.在数列$\{a_n\}$，$a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n,n\in\mathrm{N}^*$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（）.

A．等于$-\dfrac{1}{2}$　　B．等于0C．等于$\dfrac{1}{2}$D．不存在

【答案】B

15．已知a、b、c为实常数，数列$\{x_n\}$的通项$x_n=an^2+bn+c,n\in\mathrm{N}^*$，则“存在$k\in\mathrm{N}^*$,使得$x_{100+k},x_{200+k},x_{300+k}$成等差数列”的一个必要条件是（）

A．$a\geq 0$　　B．$b\leq 0$C．$c=0$D．$a-2b+c=0$

【答案】A

16．在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$和$C_2:x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$．$P$为$C_1$上的动点，$Q$为$C_2$上的动点，$\omega$是$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$的最大值.记$\Omega=\left\{(P,Q)\mid P\text{在}C_1\text{上，}Q\text{在}C_2\text{上，且}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\omega\right\}$，则$\Omega$中（）

A．元素个数为2　　B．元素个数为4　C．元素个数为8　D．含有无穷个元素

【答案】D

三、解答题（本大题共有5题，满分76分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

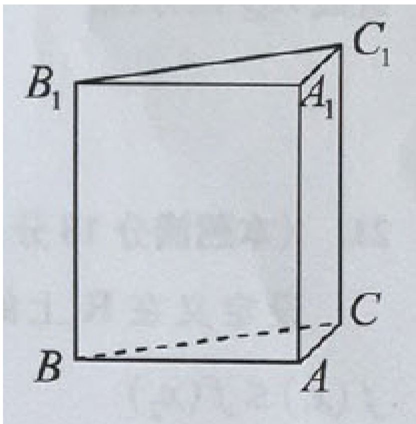
17．（本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分）

如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面为直角三角形，两直角边AB和AC的长分别为4和2

，侧棱 AA_1 的长为5.

（1）求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积；

（2）设 M 是 BC 中点，求直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小。



【答案】（1）$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\left(\frac{1}{2}\times 2\times 4\right)\times 5=20$

（2）$\arctan\sqrt{5}$

18．（本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分）

已知函数 $f\left(x\right)=\cos^2 x-\sin^2 x+\frac{1}{2},x\in\left(0,\pi\right)$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

（2）设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，角 A 所对的边 $a=\sqrt{19}$，角 B 所对的边 $b=5$.若 $f\left(A\right)=0$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】（1）$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$

（2）$S_{\triangle ABC}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

19．（本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分）

根据预测，某地第 n $\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n（单位：辆），其中 $a_n=\begin{cases}5n^4+15,1\le n\le 3,\\-10n+470,n\ge 4,\end{cases}$ $b_n=n+5$. 第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差.

（1）求该地第4个月底的共享单车的保有量；

（2）已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n=-4\left(n-46\right)^2+8800$（单位：辆）.设在某月底，共享单车保有量达到最大，问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量？

【答案】（1）935

（2）$Q=\begin{cases}14,n=1\\102,n=2\\514,n=3\\-\dfrac{11}{2}n^2+\dfrac{919}{2}n-815,n\geq 4\end{cases}$，所以当 $n=42$ 时 Q 取最大值，为8782

此时 $S_{42}=-4\left(42-46\right)^2+8800=8736<8782$，所以当 Q 取最大值时，停放点不能容纳

20．（本题满分16分，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分7分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A$ 为 Γ 的上顶点，P 为 Γ 上异于上、下顶点的动点.M 为 x 正半轴上的动点.

（1）若 P 在第一象限，且 $\left|OP\right|=\sqrt{2}$，求 P 的坐标；

（2）设 $P\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$.若以 A、P、M 为顶点的三角形是直角三角形，求 M 的横坐标；

（3）若 $\left|MA\right|=\left|MP\right|$,直线 AQ 与 Γ 交于另一点C，且 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$，求直线 AQ 的方程.

【答案】（1）$P\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$；

（2）$M\left(\dfrac{29}{20},0\right)$ 或 $M\left(\dfrac{3}{5},0\right)$ 或 $M\left(1,0\right)$；

（3）$y=\dfrac{\sqrt{5}}{10}x+1$

解析（3）$\because$点 P 是 Γ 上一动点，设 $P\left(2\cos\alpha,\sin\alpha\right)$，$M\left(t,0\right)$，$t>0$，$Q\left(x_q,y_q\right)$，$C\left(x_c,y_c\right)$，且 $A\left(0,1\right)$。

记线段 AP 中点为点 $N\left(x_n,y_n\right)$，则 $N\left(\cos\alpha,\dfrac{\sin\alpha+1}{2}\right)$

$\because \overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$，$\therefore \overrightarrow{PQ}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{QM}$，$\therefore \begin{cases} x_q=\dfrac{2\cos\alpha-\frac{4}{3}t}{1-\frac{4}{3}}=4t-6\cos\alpha \\ y_q=\dfrac{\sin\alpha-\frac{4}{3}\times 0}{1-\frac{4}{3}}=-3\sin\alpha \end{cases}$，

$Q\left(4t-6\cos\alpha,-3\sin\alpha\right)$；

又$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$，$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CQ}$，$\therefore C$是$AQ$中点，$\therefore C\left(2t-3\cos\alpha,\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sin\alpha\right)$

又∵C是Γ上的一点，∴

$\frac{\left(2t-3\cos\alpha\right)^2}{4}+\frac{\left(1-3\sin\alpha\right)^2}{4}=1\Rightarrow 2t^2+3-6t\cos\alpha-3\sin\alpha=0$

$\because \left|MA\right|=\left|MP\right|$，$\therefore \triangle MAP$为等腰三角形，$N$为底边$AP$中点，$\therefore \overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AP}$

$\because \overrightarrow{MN}=\left(\cos\alpha-t,\frac{\sin\alpha+1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(2\cos\alpha,\sin\alpha-1\right)$，

$\therefore \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AP}=2\cos\alpha\left(\cos\alpha-t\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\alpha+1\right)\left(\sin\alpha-1\right)=0$

$\Rightarrow 4\cos\alpha\left(\cos\alpha-t\right)-\cos^2\alpha=0\Rightarrow \cos\alpha\left(4\cos\alpha-4t-\cos\alpha\right)=0$

（1）若$\cos\alpha=0$，则$P\left(0,\sin\alpha\right)$，由$P$不在上顶点可知，$\sin\alpha\neq 1$，$P$为下顶点，$\sin\alpha=-1$，$P\left(0,-1\right)$

$\therefore 2t^2+3-6t\times 0-3\times\left(-1\right)=0\Rightarrow t^2=-3$，无解；

（2）$\cos\alpha\neq 0$，则$3\cos\alpha-4t=0\Rightarrow t=\frac{3}{4}\cos\alpha>0$，$\therefore \cos\alpha>0$

$\therefore 2\left(\frac{3}{4}\cos\alpha\right)^2+3-6\times\frac{3}{4}\cos\alpha\times\cos\alpha-3\sin\alpha=0\Rightarrow 9\sin^2\alpha-8\sin\alpha-1=0$

$\therefore \sin\alpha=-\frac{1}{9}$或$1$（舍），$\therefore \cos\alpha=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，$\therefore t=\frac{3}{4}\times\frac{4\sqrt{5}}{9}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore Q\left(-\frac{4\sqrt{5}}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\therefore k_{AQ}=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{0-\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{10}$，∴直线AQ方程$y=\frac{\sqrt{5}}{10}x+1$

21．（本题满分18分，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分）

设定义在R上的函数$f\left(x\right)$满足：对于任意的x_1，$x_2\in \mathrm{R}$，当$x_1<x_2$时，都有

$f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$.

（1）若$f\left(x\right)=ax^3+1$，求a的取值范围；

（2）若$f\left(x\right)$是周期函数，求证：$f\left(x\right)$是常值函数；

（3）若$f\left(x\right)$恒大于零.$g\left(x\right)$是定义在R上的、恒大于零的周期函数，M是$g\left(x\right)$的最大值.函数$h\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$，证明：“$h\left(x\right)$是周期函数”的充要条件是“$f\left(x\right)$是常值函数”.

【答案】（1）记$x_1<x_2$，若$f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$，$f\left(x\right)=ax^3+1$

则$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=a\left(x_1^3-x_2^3\right)\le 0$，$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1^3-x_2^3<0$，$\therefore a\ge 0$

（2）若$f\left(x\right)$是周期函数，记其周期为T_k，任取$x_0\in R$，则有$f\left(x_0\right)=f\left(x_0+T_k\right)$

又由题意，对任意$x\in\left[x_0,x_0+T_k\right]$, $f\left(x_0\right)\le f\left(x\right)\le f\left(x_0+T_k\right)$，$\therefore$

$f\left(x_0\right)=f\left(x\right)=f\left(x_0+T_k\right)$

又$\because f\left(x_0\right)=f\left(x_0+nT_k\right),n\in Z$，并且

$$...\bigcup\left[x_0-3T_k,x_0-2T_k\right]\bigcup\left[x_0-2T_k,x_0-T_k\right]\bigcup\left[x_0-T_k,x_0\right]\bigcup\left[x_0,x_0+T_k\right]\bigcup\left[x_0+T_k,x_0+2T_k\right]\bigcup...=R$$

所以对任意$x\in R$，$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)=C$，为常数，证毕。

（3）**充分性：**若$f\left(x\right)$是常值函数，记$f\left(x\right)=c_1$，设$g\left(x\right)$的一个周期为T_g，则

$h\left(x\right)=c_1\cdot g\left(x\right)$，则对任意$x_0\in R$，$h\left(x_0+T_g\right)=c_1\cdot g\left(x_0+T_g\right)=c_1\cdot g\left(x_0\right)=h\left(x_0\right)$，

故$h\left(x\right)$是周期函数成立。

必要性：若$h\left(x\right)$是周期函数，记其一个周期为T_h。集合$A=\left\{x\mid g\left(x\right)=m\right\}$

任取$x_0\in A$，则必存在$N_2\in N$，使得$x_0-N_2T_h\le x_0-T_g$，即

$\left[x_0-T_g,x_0\right]\subseteq\left[x_0-N_2T_h,x_0\right]$，

$$...\bigcup\left[x_0-3T_g,x_0-2T_g\right]\bigcup\left[x_0-2T_g,x_0-T_g\right]\bigcup\left[x_0-T_g,x_0\right]\bigcup\left[x_0,x_0+T_g\right]\bigcup\left[x_0+T_g,x_0+2T_g\right]\bigcup...=R$$

$\therefore$

$$...\bigcup\left[x_0-2N_2T_h,x_0-N_2T_h\right]\bigcup\left[x_0-N_2T_h,x_0\right]\bigcup\left[x_0,x_0+N_2T_h\right]\bigcup\left[x_0+N_2T_h,x_0+2N_2T_h\right]\bigcup...=R$$

$$h\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)\cdot f\left(x_0\right)=h\left(x_0-N_2T_h\right)=g\left(x_0-N_2T_h\right)\cdot f\left(x_0-N_2T_h\right)$$

因为$g\left(x_0\right)=M\geq g\left(x_0-N_2T_h\right)>0$，$f\left(x_0\right)\geq f\left(x_0-N_2T_h\right)>0$，因此若

$h\left(x_0\right)=h\left(x_0-N_2T_h\right)$

必有$g\left(x_0\right)=M=g\left(x_0-N_2T_h\right)$，且$f\left(x_0\right)=f\left(x_0-N_2T_h\right)=c$，而由第（2）问证明可知

对任意$x\in R$，$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)=C$，为常数。必要性证毕。