

2023 年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）
理科数学

一、选择题

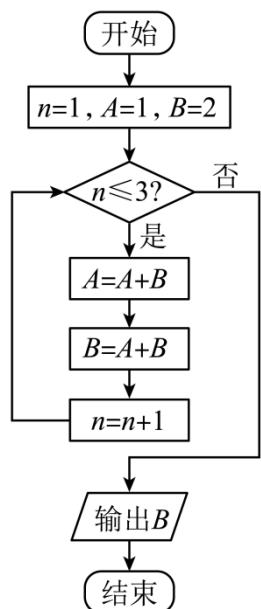
1. 设集合 $A = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$, U 为整数集, $\complement_U(A \cup B) = (\quad)$

- A. $\{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{x \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$
C. $\{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$ D. \emptyset

2. 若复数 $(a+i)(1-ai) = 2, a \in \mathbb{R}$, 则 $a = (\quad)$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

3. 执行下面的程序框图, 输出的 $B = (\quad)$



- A. 21 B. 34 C. 55 D. 89

4. 向量 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = \sqrt{2}$, 且 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 则 $\cos\langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle = (\quad)$

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, S_n$ 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $S_5 = 5S_3 - 4$, 则 $S_4 = (\quad)$

- A. 7 B. 9 C. 15 D. 30

6. 有 50 人报名足球俱乐部, 60 人报名乒乓球俱乐部, 70 人报名足球或乒乓球俱乐部, 若已知某人报足球俱乐部, 则其报乒乓球俱乐部的概率为 (\quad)

- A. 0.8 B. 0.4 C. 0.2 D. 0.1

7. “ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ”是“ $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ ”的（ ）
- A. 充分条件但不是必要条件 B. 必要条件但不是充分条件
C. 充要条件 D. 既不是充分条件也不是必要条件
8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$ ，其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 A, B 两点，则 $|AB| =$ （ ）
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
9. 有五名志愿者参加社区服务，共服务星期六、星期天两天，每天从中任选两人参加服务，则恰有 1 人连续参加两天服务的选择种数为（ ）
- A. 120 B. 60 C. 40 D. 30
10. 已知 $f(x)$ 为函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数，则 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的交点个数为（ ）
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $AB = 4, PC = PD = 3, \angle PCA = 45^\circ$ ，则 $\triangle PBC$ 的面积为（ ）
- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$
12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ ， F_1, F_2 为两个焦点， O 为原点， P 为椭圆上一点， $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{3}{5}$ ，则 $|PO| =$ （ ）
- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$
- 二、填空题**
13. 若 $y = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a =$ _____.
14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} -2x + 3y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$ ，设 $z = 3x + 2y$ ，则 z 的最大值为 _____.
15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 CD, A_1B_1 的中点，则以 EF 为直径的球面与正方体每条

棱的交点总数为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = \sqrt{6}$, D 为 BC 上一点, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, 则 $AD =$ _____.

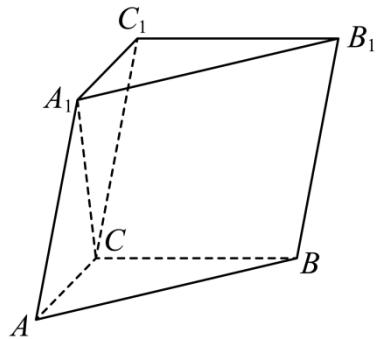
三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $2S_n = na_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n+1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 2$, $A_1C \perp$ 底面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.



(1) 求证: $AC = A_1C$;

(2) 若直线 AA_1 与 BB_1 距离为 2, 求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

19. 为探究某药物对小鼠的生长抑制作用, 将 40 只小鼠均分为两组, 分别为对照组(不加药物)和实验组(加药物).

(1) 设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 测得 40 只小鼠体重如下(单位: g): (已按从小到大排好)

对照组: 17.3 18.4 20.1 20.4 21.5 23.2 24.6 24.8 25.0 25.4

26.1 26.3 26.4 26.5 26.8 27.0 27.4 27.5 27.6 28.3

实验组: 5.4 6.6 6.8 6.9 7.8 8.2 9.4 10.0 10.4 11.2

14.4 17.3 19.2 20.2 23.6 23.8 24.5 25.1 25.2 26.0

(i) 求 40 只小鼠体重的中位数 m , 并完成下面 2×2 列联表:

	$< m$	$\geq m$
--	-------	----------

对照组		
实验组		

(ii) 根据 2×2 列联表, 能否有 95% 的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

参考数据:

k_0	0.10	0.05	0.010
$P(k^2 \geq k_0)$	2.706	3.841	6.635

20. 已知直线 $x - 2y + 1 = 0$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 4\sqrt{15}$.

(1) 求 p ;

(2) 设 C 的焦点为 F , M, N 为 C 上两点, $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NF} = 0$, 求 $\triangle MNF$ 面积的最小值.

21. 已知 $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) 若 $a = 8$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) < \sin 2x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

四、选做题

22. 已知 $P(2,1)$, 直线 $l: \begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), α 为 l 的倾斜角, l 与 x 轴, y 轴正半轴交于 A, B 两点, $|PA| \cdot |PB| = 4$.

(1) 求 α 的值;

(2) 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求 l 的极坐标方程.

23. 已知 $f(x) = 2|x-a| - a, a > 0$.

(1) 求不等式 $f(x) < x$ 的解集;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与坐标轴所围成的图形的面积为 2, 求 a .

