2014年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）

数学试题（理工农医类）

一.选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.复平面内表示复数$i(1-2i)$的点位于(　　)

$A.$ 第一象限　　　　$B.$第二象限

$C.$ 第三象限　　　　$D.$第四象限

【答案】A

【解析】

试题分析：因为复数$z=i(1-2i)=i-2i^2=2+i$，它在复平面内对应的点的坐标为，位于第一象限，故选A.

考点：1、复数的运算；2、复平面.

2. 对任意等比数列$\{a_n\}$,下列说法一定正确的是(　　)

$A.a_1,a_3,a_9$成等比数列　　　　$B.a_2,a_3,a_6$成等比数列

$C.a_2,a_4,a_8$成等比数列　　　　$D.a_3,a_6,a_9$成等比数列

【答案】D

【解析】

试题分析：因为数列$\{a_n\}$为等比数列，设其公比为q，则$a_3\cdot a_9=a_1\cdot q^2\cdot a_1\cdot q^8=\left(a_1\cdot q^5\right)^2=a_6^2$

所以，a_3,a_6,a_9一定成等比数列，故选D.

考点：1、等比数列的概念与通项公式；2、等比中项.学科网

3. 已知变量x与y正相关，且由观测数据算得样本平均数$\overline{x}=3$，$\overline{y}=3.5$，则由该观测的数据算得的线性回归方程可能是(　　)

$A.\hat{y}=0.4x+2.3$　　　　$B.\hat{y}=2x-2.4$

$C.\hat{y}=-2x+9.5$　　　　$C.\hat{y}=-0.3x+4.4$

【答案】A

【解析】

试题分析：因为变量与正相关，所以排除选项，又因为回归直线必过样本中心点$(3,3.5)$，代入检验知，只有直线$y=0.4x+2.3$过点$(3,3.5)$，故选 A.

考点：1、变量相关性的概念；2、回归直线.

4. 已知向量$\vec{a}=(k,3),\vec{b}=(1,4),\vec{c}=(2,1)$，且$(2\vec{a}-3\vec{b})\perp\vec{c}$，则实数$k=$（　　）

$A.-\dfrac{9}{2}$　　　　$B.0$　　　　$C.3$　　　　D.$\dfrac{15}{2}$

【答案】C

【解析】

试题分析：学科因为$\vec{a}=(k,3),\vec{b}=(1,4)$,所以$2\vec{a}-3\vec{b}=(2k-3,-6)$网

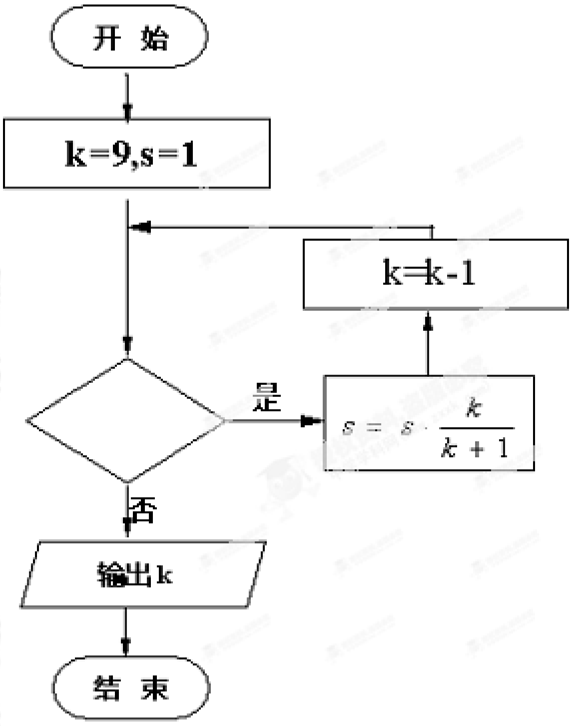
又因为$(2\vec{a}-3\vec{b})\perp\vec{c}$，所以，$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot\vec{c}=0$，所以，$2(2k-3)+(-6)=0$，解得：$k=3$

故选 C.

考点：1、平面向量的坐标运算；2、平面向量的数量积.

5.执行如题（5）图所示的程序框图，若输出k的值为 6，则判断框内可填入的条件是（　　）

A. $s>\dfrac{1}{2}$　　　　B. $s>\dfrac{3}{5}$　　　　C. $s>\dfrac{7}{10}$　　　　D. $s>\dfrac{4}{5}$



题（5）图

【答案】C

【解析】

试题分析：$k=9, s=1$条件成立，运行第一次，$s=\frac{9}{10}, k=8$；条件成立，运行第二次，$s=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}, k=7$；条件成立，运行第三次，$s=\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}, k=6$；条件不成立，输出$k=6$

由此可知判断框内可填入的条件是：$s>\frac{7}{10}$，故选C.

考点：循环结构.

6. 已知命题p:对任意$x\in R$，总有$2^x>0$；q:"$x>1$"是"$x>2$"的充分不必要条件则下列命题为真命题的是（　　）

$A.p\wedge q$　　　　$B.\neg p\wedge\neg q$　　　　$C.\neg p\wedge q$　　　　$D.p\wedge\neg q$

【答案】D

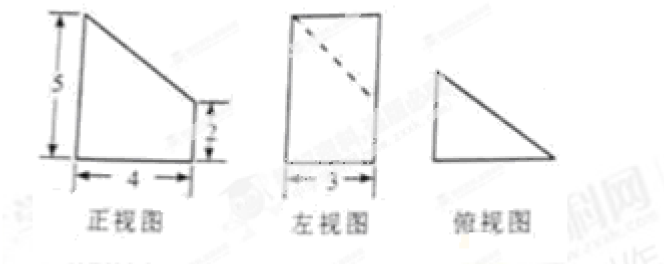
【解析】

试题分析：由题设可知：p是真命题，q是假命题；所以，$\neg p$是假命题，$\neg q$是真命题；

所以，$p\wedge q$是假命题，$\neg p\wedge\neg q$是假命题，$\neg p\wedge q$是假命题，$p\wedge\neg q$是真命题；故选D.

考点：1、指数函数的性质；2、充要条件；3、判断复合命题的真假. 学科 zxxk

7.某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）

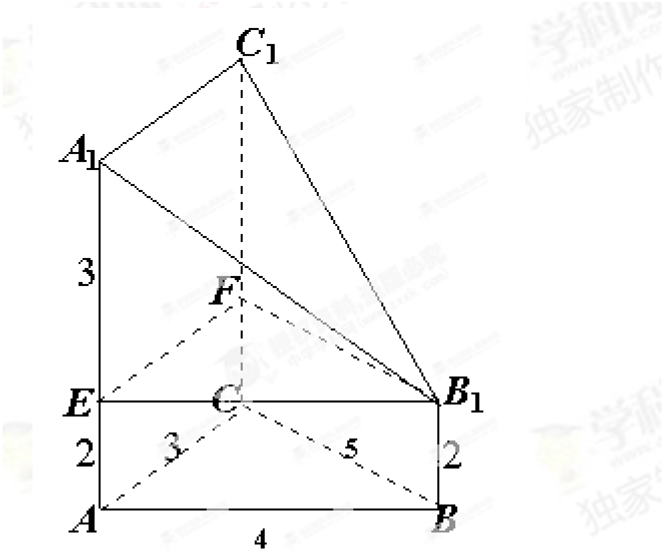


A.54　　　　B.60　　　　C.66　　　　D.72

【答案】B

【解析】

试题分析：



由三视图可知该几何体是一个底面为直角三角形的直三棱柱的一部分，其直观图如上图所示，

其中 $\angle BAC=90^\circ$，侧面 ACC_1A_1 是矩形，其余两个侧学科网面是直角梯形，由于 $A_1C_1//AC$，$AC\perp AB$，

平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $A_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以，$A_1C_1\perp A_1B_1$

故三角形 $A_1B_1C_1$ 是直角三角形，且 $A_1B_1=\sqrt{A_1E^2+EB_1^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以几何体的表面积为：$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+S_{\text{矩形}ACC_1A_1}+S_{\text{梯形}ABB_1A_1}+S_{\text{梯形}BCC_1B_1}$

$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times5+3\times5+\frac{1}{2}\times(5+2)\times4+\frac{1}{2}\times(5+2)\times5=60$

故选 B.

考点：1、三视图；2、空间几何体的表面积.

8. 设 F_1，F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得

$|PF_1|+|PF_2|=3b, |PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{9}{4}ab,$ 则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　　　B. $\frac{5}{3}$　　　　C. $\frac{9}{4}$　　　　D.3

【答案】B

【解析】

试题分析:因为 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点,所以 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a$,又 $|PF_1|+|PF_2|=3b$

所以，$(|PF_1|+|PF_2|)^2-(|PF_1|-|PF_2|)^2=9b^2-4a^2$，所以 $4|PF_1|\cdot|PF_2|=9b^2-4a^2$.

又因为 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{9}{4}ab$，所以有，$9ab=9b^2-4a^2$，即 $9\left(\frac{b}{a}\right)^2-9\left(\frac{b}{a}\right)-4=0$,解得：$\frac{b}{a}=-\frac{1}{3}$（舍去），

或 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$；所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，所以 $e=\frac{5}{3}$,故选 B.

考点：1、双曲线的定义和标准方程；2、双曲线的简单几何性质.

9.某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目、2 个小品类节目和 1 个相声类节目的演出顺序，则同类节目不相邻的排法种数是(　　)

A.72　　　　B.120　　　　C.144　　　　D.168

【答案】B

【解析】

试题分析：将所有的安排方法分成两类，第一类：歌舞类节目中间不穿插相声节目，有

$A_3^3A_2^2A_2^1=6\times2\times2=24$（种）；第二类：歌舞类节目中间穿插相声节目，有

$A_3^3A_2^1A_2^1A_4^1=6\times2\times2\times4=96$（种）；根据分类加法计学科网数原理，共有 96+24=120 种不同的排法. 故选 B.

考点：1、分类加法计数原理；2、排列.

10.已知 ΔABC 的内角 A，B,C 满足 $\sin 2A+\sin(A-B+C)=\sin(C-A-B)+\frac{1}{2}$，面积 S 满足

$1\le S\le 2$，记 a,b,c 分别为 A,B,C 所对的边，则下列不等式一定成立的是(　　)

A. $bc(b+c)>8$　　B. $ac(a+b)>16\sqrt{2}$　　C. $6\le abc\le 12$　　D. $12\le abc\le 24$

【答案】A

【解析】

试题分析：由题设得：$\sin 2A+\sin(\pi-2B)=\sin(2C-\pi)+\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin(2\pi-(2B+2C))+\sin 2B+\sin 2C=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 2B+\sin 2C-\sin(2B+2C)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 2B(1-\cos 2C)+\sin 2C(1-\cos 2B)=\frac{1}{2}\Rightarrow 4\sin B\sin C(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin A\sin B\sin C=\frac{1}{8}$…………………（1）

由三角形面积公式 $s=\frac{1}{2}ab\sin C$ 及正弦定理得：$s=\frac{1}{2}\times 4R^2\sin A\sin B\sin C$

所以 $R^2=4s$，又因为 $1\le s\le 2$，所以 $4\le R^2\le 8$，

所以 $bc(b+c)=abc\times\frac{b+c}{a}=8R^3\sin A\sin B\sin C\times\frac{b+c}{a}>R^3$ 恒成立，所以 $bc(b+c)>8$

故选 A.

考点：1、两角和与差的三角函数；2、正弦定理；3、三角形的面积公式.

二、填空题.

11. 设全集 $U=\{n\in N\,|\,1\le n\le 10\}$, $A=\{1,2,3,5,8\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$______.

【答案】$\{7,9\}$

【解析】

试题分析：$\complement_U A=\{4,6,7,9,10\}$，$\therefore(\complement_U A)\cap B=\{7,9\}$

所以答案应填：$\{7,9\}$

考点：集合的运算.

12. 函数 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为________.

【答案】$-\frac{1}{4}$

【解析】

试题分析：$f(x)=\frac{1}{2}\log_2 x\cdot[2(\log_2 x+1)]=(\log_2 x)^2+\log_2 x=\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

所以，当 $\log_2 x=-\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{4}$.

所以答案应填：$-\frac{1}{4}$.

考点：1、对数的运算；2、二次函数的最值.

13. 已知直线 $ax+y-2=0$ 与圆心为 C 的圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$ 相交于 A，B 两点，且 ΔABC 为等边三角形，则实数 $a=$________.

【答案】$4\pm\sqrt{15}$

【解析】

试题分析：由题设圆心到直线 $ax-y-2=0$ 的距离为 $\sqrt{3}$

$\therefore \frac{|a+a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{3}$.解得：$a=4\pm\sqrt{15}$

所以答案应填：$4\pm\sqrt{15}$.

考点：1、直线与圆的位置关系；2、点到直线的距离公式.

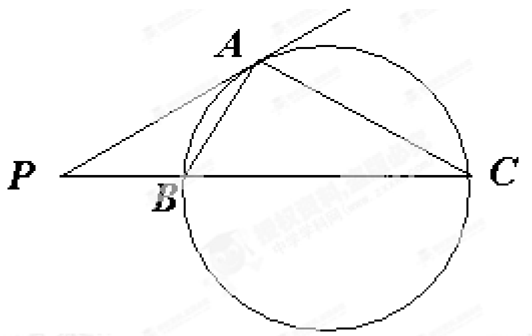
考生注意：14、15、16 三题为选做题，请从中任选两题作答，若三题全做，则按前两题给分.

14. 过圆外一点 P 作圆的切线 PA（A 为切点），再作割线 PBC 分别交圆于 B、C， 若 $PA=6$，AC=8，BC=9，则 AB=________.

【答案】4

【解析】

试题分析：



由切割线定理得：$|PA|^2=|PB|\cdot|PC|$，设 $|PB|=x$，则 $|PC|=9+x$

所以，$36=x(x+9)$，即 $x^2+9x-36=0$，解得：$x=-12$（舍去），或 $x=3$

又由是圆的切线，所以 $\angle ACP=\angle BAP$，所以 $\Delta ACP\sim\Delta BAP$、

$\therefore \frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|PA|}{|PC|}$，所以 $|AB|=\frac{8\times 6}{12}=4$

所以答案应填：4.

考点：1、切割线定理；2、三角形相似.

15. 已知直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0\left(\rho\ge 0,0\le\theta<2\pi\right)$，则直线$l$与曲线$C$的公共点的极径$\rho=$________.

【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

试题分析：由参数方程$\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\end{cases}$消法参数$t$得直线的一般式方程为：$x-y+1=0$………………（1）

由曲线的极坐标方程$\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$两边同乘以$\rho$得，$\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0$，所以，曲线C在直角坐标系下的方程为$y^2=4x$…………………………………（2）

解由方程（1）（2）能成的方程级得$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

所以，直线$x-y+1=0$与曲线C：$y^2=4x$的交点坐标为$(1,2)$，极径$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$

所以，答案应填：$\sqrt{5}$

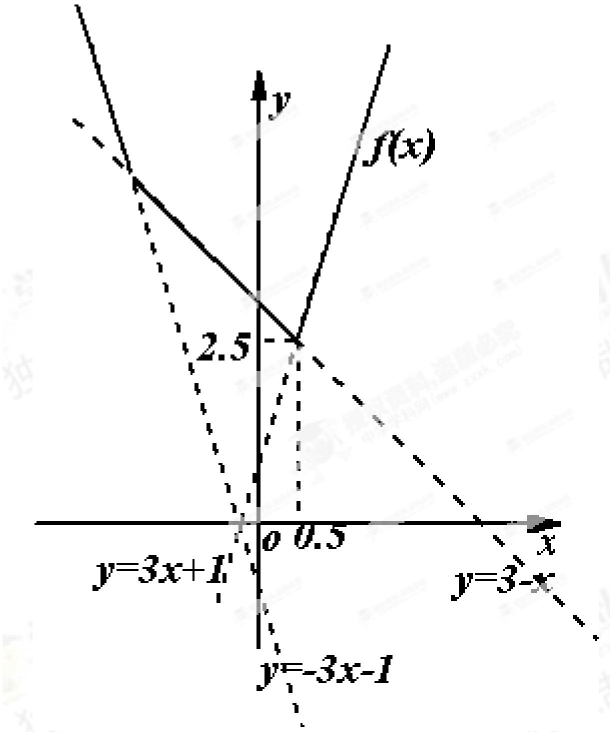
考点：参数方程与极坐标.

16.若不等式$|2x-1|+|x+2|\ge a^2+\frac{1}{2}a+2$对任意实数$x$恒成立，则实数$a$的取值范围是____________.

【答案】$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

【解析】

试题分析：令$f(x)=|2x-1|+|x+2|=\begin{cases}-3x-1 & (x\le -2)\\3-x & \left(-2<x\le\frac{1}{2}\right)\\3x+1 & \left(x>\frac{1}{2}\right)\end{cases}$，其图象如下所示（图中的实线部分）



由图可知：$f\left(x\right)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$，由题意得：$a^2+\frac{1}{2}a+2\le\frac{5}{2}$，解这得：$-1\le a\le\frac{1}{2}$，

所以答案应填：$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

考点：1、分段函数；2、等价转换的思想；3、数形结合的思想. zxxk

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （本小题 13 分，（I）小问 5 分，（II）小问 8 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0, -\frac{\pi}{2}\le\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，且图像上相邻两个最高点的距离为 π.

（I）求 ω 和 φ 的值；

（II）若 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{2\pi}{3}\right)$，求 $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$ 的值.

【答案】（I）$\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$；（II）$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}$

【解析】

试题分析：（I）由函数图像上相邻两个最学科网高点的距离为 π 求出周期，再利用公式 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 求出 ω 的值；

由函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称，可得

$\omega\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in z$，然后结合 $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，求出的值.

（II）由（I）知 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，由 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

结合 $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$ 利用同角三角函数的基本关系可求得 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值，因为 $\alpha=\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}$

可由两角和与差的三角函数公式求出 $\sin\alpha$ 从而用诱导公式求得 $\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的值.

试题解析：

解：(I) 因 $f(x)$ 的图象上相邻两个最高点的距离为 π，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，从而 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$.

又因 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称，所以

$2\cdot\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，因 $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 得 $k=0$

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}$.

（II）由（I）得 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

所以 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$.

由 $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$ 得 $0<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

因此 $\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}$

考点：1、诱导公式；2、同角三角函数的基本关系；3、两角和与差的三角函数公式；4、三角函数的图象和性质.

18. （本小题满分 13 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 8 分）

一盒中装有 9 张各写有一个数字的卡片，其中 4 张卡片上的数字是 1,3 张卡片上的数字是 2,2 张卡片上的数字是 3，从盒中任取 3 张卡片.

（Ⅰ）求所取 3 张卡片上的数字完全相同的概率;

（Ⅱ）X 表示所取 3 张卡片上的数字的中位数，求 X 的分布列与数学期望.

（注：若三个数 a,b,c 满足 $a \le b \le c$，则称 b 为这三个数的中位数）.

【答案】 （Ⅰ）$\frac{5}{84}$（Ⅱ）详见解析.

【解析】

试题分析:（Ⅰ）从 9 张卡片中任取 3 张，有 C_9^3 和不同的结果.其中,3 张卡片上的数字完全相同的有 $C_4^3+C_3^3$，由于是任取的，所以每个结果出现的可能性是相等的，故可根据古典概型的概率公式求得概率；

（Ⅱ）由题设随机变量 X 的所有可能取值有 1，2，3；

$X=1$ 表示抽出的三第卡片上的三个数字可以是 $(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3)$

$X=2$ 表示抽出的三第卡片上的三个数字可以是 $(1,2,2),(1,2,3),(2,2,2),(2,2,3)$

$X=3$ 表示抽出的三第卡片上的三个数字可以是 $(1,3,3),(2,3,3)$

于是可用古典概型的概率公式求出 X 的分布列与数学期望.

试题解析:

解:（Ⅰ）由古典概型中的概率计算公式知所求概率为

$$P=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$$

（Ⅱ）X 的所有可能值为 1，2，3，且

$$P(X=1)=\frac{C_4^2C_5^1+C_4^3}{C_9^3}=\frac{17}{42},P(X=2)=\frac{C_3^1C_4^1C_2^1+C_3^2C_6^1+C_3^3}{C_9^3}=\frac{43}{84},P(X=3)=\frac{C_2^2C_7^1}{C_9^3}=\frac{1}{12}.$$

故 X 的分布列为

X	1	2	3

P	$\frac{17}{42}$	$\frac{43}{84}$	$\frac{1}{12}$

从而 $E\left(X\right)=1\times\frac{17}{42}+2\times\frac{43}{84}+3\times\frac{1}{12}=\frac{47}{28}$

考点：1、组合；2、古典概型；3、离散型随机变量的分布列与数学期望.

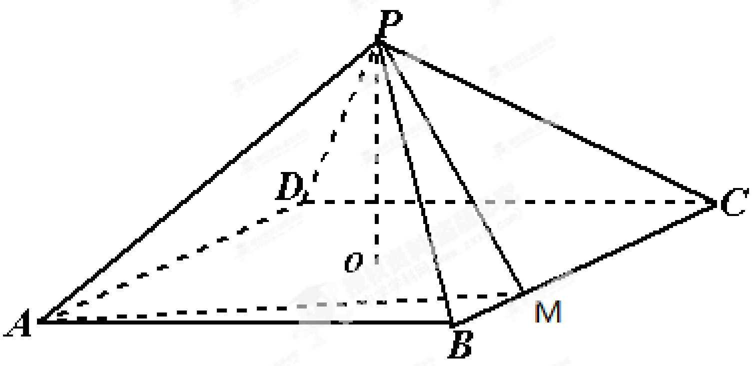
19. （本小题满分 13 分,(Ⅰ)小问 6 分，(Ⅱ)小问 7 分）

如题（19）图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是以 O 为中心的菱形，$PO\perp$ 底面 $ABCD$，

$AB=2,\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$M$ 为 BC 上一点，且 $BM=\frac{1}{2},MP\perp AP$.

（Ⅰ）求 PO 的长；

（Ⅱ）求二面角 $A-PM-C$ 的正弦值.



题（19）图

【答案】（Ⅰ）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（Ⅱ）$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

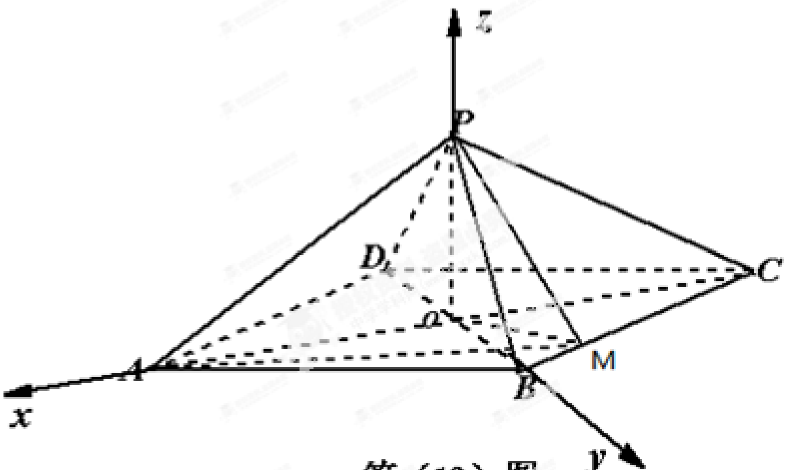
【解析】

试题分析：（Ⅰ）连结 AC 、BD ,因为是菱形 $ABCD$ 的中心，$AC\cap BD=O$,以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，根据题设条件写出 O,A,M 的坐标，并设出点 P 的坐标 $(0,0,a)$，根据空间两点间的距离学科网公式和勾股定理列方程解出 a 的值得到 PO 的长；.

（Ⅱ）设平面 APM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 PMC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，首先利用向量的数量积列方程求出向量 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 的坐标，再利用向量的夹角公式求出 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>$，进而求出二面角 $A-PM-C$ 的正弦值.

试题解析：

解：



答（19）图

（Ⅰ）如答（19）图，连结 AC, BD，因 $ABCD$ 为菱形，则 $AC \cap BD = O$，且 $AC \perp BD$，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $o-xyz$，

因 $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$，故 $OA = AB \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, OB = AB \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 1$，

所以 $O(0,0,0), A(\sqrt{3},0,0), B(0,1,0), C(-\sqrt{3},0,0), \overrightarrow{OB} = (0,1,0), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3},-1,0)$.

由 $BM = \frac{1}{2}, BC = 2$ 知，$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right)$

从而 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$，即 $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$.

设 $P(0,0,a), a>0$,，则 $\overrightarrow{AP} = (-\sqrt{3},0,a), \overrightarrow{MP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, a\right)$. 因为 $MP \perp AP$，

故 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$，即 $-\frac{3}{4} + a^2 = 0$，所以 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}, a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$（舍去），即 $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$\overrightarrow{AP} = \left(-\sqrt{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{MP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{CP} = \left(\sqrt{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

设平面 APM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$，平面 PMC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$

由 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$，得 $\begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 - \frac{3}{4}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \end{cases}$ 故可取 $\overrightarrow{n_1} = \left(1, \frac{5\sqrt{3}}{3}, 2\right)$,

由 $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{MP} = 0, \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$，得 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}x_2 - \frac{3}{4}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0 \\ \sqrt{3}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0 \end{cases}$ 故可取 $\overrightarrow{n_2} = (1, -\sqrt{3}, -2)$

从而法向量 $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ 的夹角的余弦值为 $\cos < \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} > = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$

故所求二面角 $A-PM-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

考点：1、空间直线与平面垂直的性质；2、空间直角坐标系；3、空间向量的数量积及其应用.

20.（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 3 分，（Ⅲ）小问 5 分）

已知函数 $f(x)=ae^{2x}-be^{-2x}-cx(a,b,c\in R)$ 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 $4-c$.

（Ⅰ）确定 a,b 的值；

（Ⅱ）若 $c=3$，判断 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 有极值，求 c 的取值范围.

【答案】（Ⅰ）$a=1,b=1$；（Ⅱ）增函数；（Ⅲ）$(4,+\infty)$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由 $f(x)=ae^{2x}-be^{-2x}-cx(a,b,c\in R)\Rightarrow f'(x)=2ae^{2x}+2be^{-2x}-c$

因为 $f'(x)$ 是偶函数，所以 $f'(-x)=f'(x)$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，又曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 $4-c$，所以有 $f'(0)=4-c$，利用以上两学科网条件列方程组可解 a,b 的值；

（Ⅱ）由（Ⅰ），$f'(x)=2e^{x}+2e^{-x}-c$，当 $c=3$ 时，利用 $f'(x)$ 的符号判断 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）要使函数 $f(x)$ 有极值，必须 $f'(x)$ 有零点，由于 $2e^{x}+2e^{-x}\geq 4$，所以可以对 c 的取值分类讨论，得到时满足条件的 c 的取值范围.

试题解析：

解：（Ⅰ）对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=2ae^{2x}+2be^{-2x}-c$，由 $f'(x)$ 为偶函数，知 $f'(-x)=f'(x)$，

即$2(a-b)(e^{2x}-e^{-2x})=0$对任意$x\in R$恒成立，所以$a=b$

又$f'(0)=2a+2b-c=4-c$，故$a=1,b=1$.

（Ⅱ）当$c=3$时，$f(x)=e^{2x}-e^{-2x}-3x$，那么

$f'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-3\ge 2\sqrt{2e^{2x}\cdot e^{-2x}}-3=1>0$

故$f(x)$在R上为增函数.

（Ⅲ）由（Ⅰ）知$f'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-c$，而$2e^{2x}+2e^{-2x}\ge 2\sqrt{2e^{2x}\cdot e^{-2x}}=4$，当$x=0$时等号成立.

下面分三种情况进行讨论.

当$c<4$时，对任意$x\in R$, $f'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-c>0$，此时$f(x)$无极值；

当$c=4$时，对任意$x\ne 0$, $f'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-4>0$，此时$f(x)$无极值；

当$c>4$时，令$e^{2x}=t$，注意到方程$2t+\frac{2}{t}-c=0$有两根，$t_{1,2}=\frac{c\pm\sqrt{c^2-16}}{4}>0$,

即$f'(x)=0$有两个根$x_1=\frac{1}{2}\ln t_1$或$x_2=\frac{1}{2}\ln t_2$.

当$x_1<x<x_2$时，$f'(x)<0$；又当$x>x_2$时，$f'(x)>0$从而$f(x)$在$x=x_2$处取得极小值.

综上，若$f(x)$有极值，则c的取值范围为$(4,+\infty)$.

考点：1、导数的几何意义及导数在研究函数性质中的应用；2、分类讨论的思想.

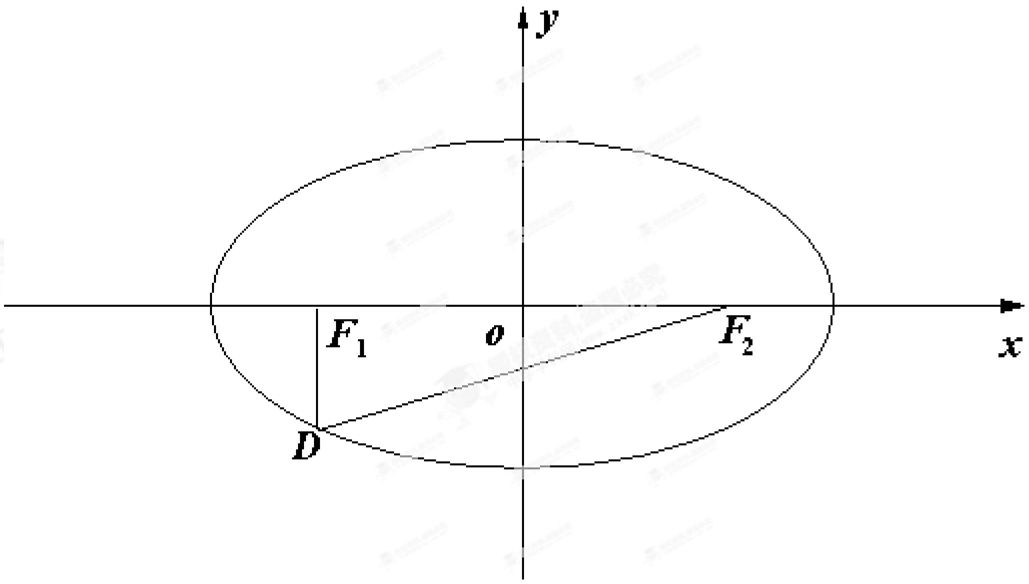
21. （本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 7 分）

如题（21）图，设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$D$在椭圆上，

$DF_1\perp F_1F_2$，$\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$，$\Delta DF_1F_2$的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求该椭圆的标准方程；

（Ⅱ）设圆心在y轴上的圆与椭圆在x轴的上方有两个交点，且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点，求圆的半径..



题（21）图

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；（Ⅱ）$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由题设知 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$ 其中 $c^2=a^2-b^2$

由 $\dfrac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}\Rightarrow|DF_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$，结合条件 ΔDF_1F_2 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可求 c 的值，再利用椭圆的定义和勾股定理即可求得 a,b 的值，从而确定椭圆的标准方程；

（Ⅱ）设圆心在 y 轴上的圆与椭圆在 x 轴的上方有两个交点为 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 由圆的对称性可知 $x_1=-x_2,y_1=y_2$，利用 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 在圆上及 $\overrightarrow{P_1F_1}\cdot\overrightarrow{P_2F_2}=0$ 确定交点的坐标，进而得到圆的方程.

试题解析：

解：（Ⅰ）设 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2-b^2$，

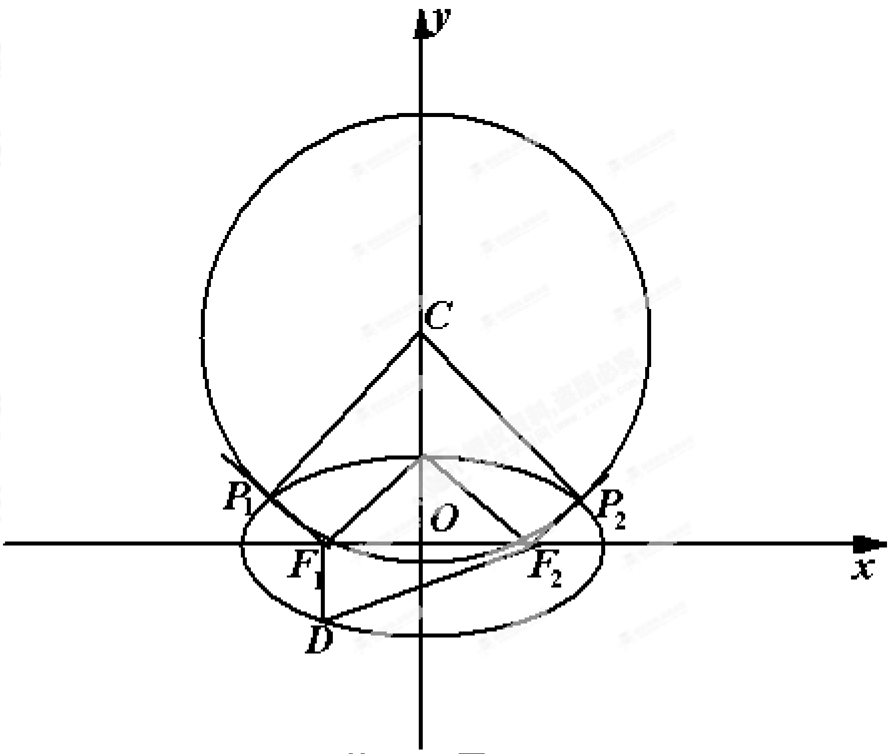
由 $\dfrac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$ 得 $|DF_1|=\dfrac{|F_1F_2|}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$

从而 $S_{\Delta DF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|DF_1|\cdot|F_1F_2|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $c=1$.

从而 $|DF_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，由 $DF_1\perp F_1F_2$ 得 $|DF_2|^2=|DF_1|^2+|F_1F_2|^2=\dfrac{9}{2}$，因此 $|DF_2|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以 $2a=|DF_1|+|DF_2|=2\sqrt{2}$，故 $a=\sqrt{2},b^2=a^2-c^2=1$

因此，所求椭圆的标准方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$



答（21）图

（Ⅱ）如答（21）图，设圆心在 y 轴上的圆 C 与椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交，$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 是两个交点，$y_1>0,y_2>0$，F_1P_1,F_2P_2 是圆 C 的切线，且 $F_1P_1\perp F_2P_2$ 由圆和椭圆的对称性，易知 $x_2=-x_1,y_1=y_2$

$|P_1P_2|=2|x_1|$.，

由（Ⅰ）知 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$，所以 $\overrightarrow{F_1P_1}=(x_1+1,y_1),\overrightarrow{F_2P_2}=(-x_1-1,y_1)$，再由 $F_1P_1\perp F_2P_2$ 得 $-(x_1+1)^2+y_1^2=0$，由椭圆方程得 $1-\dfrac{x_1^2}{2}=(x_1+1)^2$，即 $3x_1^2+4x_1=0$，解得 $x_1=-\dfrac{4}{3}$ 或 $x_1=0$.

当 $x_1=0$ 时，P_1,P_2 重合，此时题设要求的圆不存在.

当 $x_1=-\dfrac{4}{3}$ 时，过 P_1,P_2 分别与 F_1P_1,F_2P_2 垂直的直线的交点即为圆心 C.

由 F_1P_1,F_2P_2 是圆 C 的切线，且 $F_1P_1\perp F_2P_2$，知 $CP_2\perp CP_1$，又 $|CP_1|=|CP_2|$ 故圆 C 的半径

$|CP_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}|P_1P_2| = \sqrt{2}|x_1| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

考点：1、圆的标准方程；2、椭圆的标准方程；3、直线与圆的位置关系；4、平面向量的数量积的应用.

22.（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 8 分）

设 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 2} + b (n \in N^*)$

（Ⅰ）若 $b=1$，求 a_2, a_3 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $b=-1$，问：是否存在实数 c 使得 $a_{2n} < c < a_{2n+1}$ 对所有 $n \in N^*$ 成立？证明你的结论.

【答案】（Ⅰ）$a_n = \sqrt{n-1}+1\ (n \in N^*)$；（Ⅱ）存在，$c = \frac{1}{4}$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 2} + b (n \in N^*) \Rightarrow (a_{n+1}-1)^2 = (a_n - 1)^2 + 1$

所以数列 $\{(a_n-1)^2\}$ 是等差数列，可先求数列 $\{(a_n-1)^2\}$ 再求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；也可以先根据数列 $\{a_n\}$ 的前几项归纳出数列 $\{a_n\}$ 的通项学科网公式，然后由数学归纳法证明.

（Ⅱ）利用数列的递推公式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 2} + b (n \in N^*)$ 构造函数 $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+1} - 1$，由 $c = f(c) \Rightarrow c = \frac{1}{4}$，然后结合函数 $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+1} - 1$ 的单调性，用数学归纳法证明 $a_{2n} < c < a_{2n+1} < 1$ 即可.

试题解析：

解：（Ⅰ）解法一：$a_2 = 2, a_3 = \sqrt{2}+1$

再由题设条件知 $(a_{n+1}-1)^2 = (a_n - 1)^2 + 1$

从而 $\{(a_n-1)^2\}$ 是首项为 0 公差为 1 的等差数列，

故 $(a_n-1)^2 = n-1$，即 $a_n = \sqrt{n-1}+1, (n \in N^*)$

解法二：$a_2 = 2, a_3 = \sqrt{2}+1$

可写为 $a_1 = \sqrt{1-1}+1, a_2 = \sqrt{2-1}+1, a_3 = \sqrt{3-1}+1$. 因此猜想 $a_n = \sqrt{n-1}+1$.

下用数学归纳法证明上式：

当 $n=1$ 时结论显然成立.

假设$n=k$时结论成立，即$a_k=\sqrt{k-1}+1$.则

$$a_{k+1}=\sqrt{(a_k-1)^2+1}+1=\sqrt{(k-1)+1}+1=\sqrt{(k+1)-1}+1$$

这就是说，当$n=k+1$时结论成立.

所以$a_n=\sqrt{n-1}+1,(n\in N^*)$

（II）解法一：设$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}-1$，则$a_{n+1}=f(a_n)$.

令$c=f(c)$，即$c=\sqrt{(c-1)^2+1}-1$，解得$c=\frac{1}{4}$.

下用数学归纳法证明加强命：

$$a_{2n}<c<a_{2n+1}<1$$

当$n=1$时，$a_2=f(1)=0,a_3=f(0)=\sqrt{2}-1$，所以$a_2<\frac{1}{4}<a_3<1$，结论成立.

假设$n=k$时结论成立，即$a_{2k}<c<a_{2k+1}<1$

易知$f(x)$在$(-\infty,1]$上为减函数，从而

$$c=f(c)>f(a_{2k+1})>f(1)=a_2$$

即$1>c>a_{2k+2}>a_2$

再由$f(x)$在$(-\infty,1]$上为减函数得$c=f(c)<f(a_{2k+2})<f(a_2)=a_3<1$.

故$c<a_{2k+3}<1$，因此$a_{2(k+1)}<c<a_{2(k+1)+1}<1$，这就是说，当$n=k+1$时结论成立.

综上，符合条件的c存在，其中一个值为$c=\frac{1}{4}$.

解法二：设$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}-1$，则$a_{n+1}=f(a_n)$

先证：$0\le a_n\le 1\ (n\in N^*)$……………………①

当$n=1$时，结论学科网明显成立.

假设$n=k$时结论成立，即$0\le a_k\le 1$

易知$f(x)$在$(-\infty,1]$上为减函数，从而

$$0=f(1)\le f(a_k)\le f(0)=\sqrt{2}-1<1$$

即$0\le a_{k+1}\le 1$这就是说，当$n=k+1$时结论成立，故①成立.

再证：$a_{2n} < a_{2n+1}\left(n \in N^*\right)$……………………………②

当$n=1$时，$a_2=f(1)=0, a_3=f(0)=\sqrt{2}-1$，有$a_2<a_3$，即当$n=1$时结论②成立

假设$n=k$时，结论成立，即$a_{2k}<a_{2k+1}$

由①及$f(x)$在$(-\infty,1]$上为减函数，得

$a_{2k+1}=f(a_{2k})>f(a_{2k+1})=a_{2k+2}$

$a_{2(k+1)}=f(a_{2k+1})<f(a_{2k+2})=a_{2(k+1)+1}$

这就是说，当$n=k+1$时②成立，所以②对一切$n \in N^*$成立.

由②得$a_{2k}<\sqrt{a_{2k}^2-2a_{2k}+2}-1$

即$(a_{2k}+1)^2<a_{2k}^2-2a_{2k}+2$

因此$a_{2k}<\frac{1}{4}$

又由①、②及$f(x)$在$(-\infty,1]$上为减函数得$f(a_{2n})>f(a_{2n+1})$

即$a_{2n+1}>a_{2n+2}$

所以$a_{2n+1}>\sqrt{a_{2n+1}^2-2a_{2n+1}+2}-1$, 解得$a_{2n+1}>\frac{1}{4}$.

综上，由②③④知存在$c=\frac{1}{4}$使$a_{2n}<c<a_{2n+1}<1$对一切$n \in N^*$成立.

考点：1、数列通项公式的求法；2、等差数列；3、函数思想在解决数列问题中的应用.4、数学归纳法.