

2011年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（理工农医类）

参考公式：（1） $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ ，其中 A, B 为两个事件，且 $P(A) > 0$ ，

（2）柱体体积公式 $V = Sh$ ，其中 S 为底面面积， h 为高。

（3）球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，其中 R 为球的半径。

一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1. （5分）（2011•湖南）若 $a, b \in \mathbb{R}$ ， i 为虚数单位，且 $(a+i)i = b+i$ 则（ ）

- A $a=1, b=1$ B $a=-1, b=1$ C $a=-1, b=-1$ D $a=1, b=-1$

2. （5分）（2011•湖南）设集合 $M = \{1, 2\}$ ， $N = \{a^2\}$ ，则“ $a=1$ ”是“ $N \subseteq M$ ”的（ ）

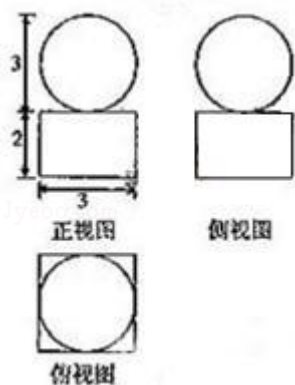
- A 充分不必要条 B 必要不充分条

件 件

- C 充分必要条件 D 既不充分又不

必要条件

3. （5分）（2011•湖南）设如图是某几何体的三视图，则该几何体的体积为（ ）



- A $9\pi+42$

- B $36\pi+18$

- C $\frac{9}{2}\pi+12$

- D $\frac{9}{2}\pi+18$

4. （5分）（2011•湖南）通过随机询问110名性别不同的大学生是否爱好某项运动，得到如下的列联表：

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由 $k^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得,

$$k^2 = \frac{110 \times (40 \times 30 - 20 \times 20)^2}{60 \times 50 \times 60 \times 50} \approx 7.8.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表,得到的正确结论是 ()

- A 在犯错误的概率不超过0.1%的前提下,认为“爱好该项运动与性别有关”
- B 在犯错误的概率不超过0.1%的前提下,认为“爱好该项运动与性别无关”
- C 有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”
- D 有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

5. (5分) (2011•湖南) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ ($a > 0$) 的渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$, 则 a 的

值为 ()

- A 4
- B 3
- C 2
- D 1

6. (5分) (2011•湖南) 由直线 $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$ 与曲线 $y = \cos x$ 所围成的封闭图形的

面积为 ()

- A $\frac{1}{2}$
- B 1
- C $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D $\sqrt{3}$

7. (5分) (2011•湖南) 设 $m > 1$, 在约束条件 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq mx \\ x+y \leq 1 \end{cases}$ 下, 目标函数 $Z = X + my$ 的最大值

小于2, 则 m 的取值范围为 ()

- A $(1, 1+\sqrt{2})$ B $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ C $(1, 3)$ D $(3, +\infty)$

8. (5分) (2011•湖南) 设直线 $x=t$

与函数 $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$ 的图象分别交于点M, N, 则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为 ()

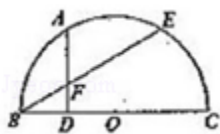
- A 1 B $\frac{1}{2}$ C $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题 (共8小题, 每小题5分, 满分35分)

9. (5分) (2011•湖南) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos \theta - \sin \theta) + 1 = 0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为_____.

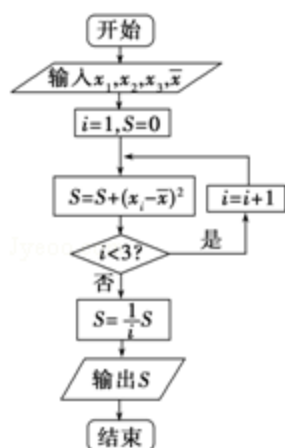
10. (5分) (2011•湖南) 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $xy \neq 0$, 则 $(x^2 + \frac{1}{y^2})(\frac{1}{x^2} + 4y^2)$ 的最小值为_____.

11. (2011•湖南) 如图, A, E是半圆周上的两个三等分点, 直径 $BC=4$, $AD \perp BC$, 垂足为D, BE与AD相交与点F, 则AF的长为_____.



12. (5分) (2011•湖南) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的前 n 项和, 且 $a_1=1$, $a_4=7$, 则 S_9 =_____.

13. (5分) (2011•湖南) 若执行如图所示的框图, 输入 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $\overline{x}=2$, 则输出的数等于_____.

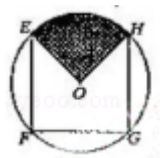


14. (5分) (2011•湖南) 在边长为1的正三角形ABC中, 设 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$ 则

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} =$ _____.

15. (5分) (2011•湖南) 如图, EFGH 是以O为圆心, 半径为1的圆的内接正方形. 将一颗豆子随机地扔到该院内, 用A表示事件“豆子落在正方形EFGH内”, B表示事件“豆子落在扇形OHE (阴影部分) 内”, 则

(1) $P(A) =$ _____; (2) $P(B|A) =$ _____.



16. (5分) (2011•湖南) 对于 $n \in \mathbb{N}^+$, 将n表示 $n = a_0 \times 2^k + a_1 \times 2^{k-1} + a_2 \times 2^{k-2} + \dots + a_{k-1} \times 2^1 + a_k \times 2^0$, 当 $i=0$ 时, $a_i=1$, 当 $1 \leq i \leq k$ 时, a_i 为0或1. 记 $I(n)$ 为上述表示中 a_i 为0的个数 (例如: $1=1 \times 2^0$, $4=1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, 故 $I(1)=0$, $I(4)=2$), 则

(1) $I(12) =$ _____; (2) $\sum_{n=1}^{127} 2^{I(n)} =$ _____.

三、解答题 (共6小题, 满分75分)

17. (12分) (2011•湖南) 在 $\triangle ABC$ 中, 角A, B, C所对的边分别为a, b, c, 且满足 $c \sin A = a \cos C$.

(1) 求角C的大小;

(2) 求 $\sqrt{3} \sin A - \cos \left(B + \frac{\pi}{4} \right)$ 的最大值, 并求取得最大值时角A、B的大小.

18. (12分) (2011•湖南) 某商店试销某种商品20天, 获得如下数据:

日销售量 (件)	0	1	2	3
频数	1	5	9	5

试销结束后（假设该商品的日销售量的分布规律不变），设某天开始营业时有该商品3件，当天营业结束后检查存货，若发现存货少于2件，则当天进货补充至3件，否则不进货，将频率视为概率.

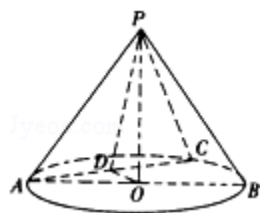
（I）求当天商品不进货的概率；

（II）记X为第二天开始营业时该商品的件数，求X的分布列和数学期望.

19. （12分）（2011•湖南）如图，在圆锥PO中，已知 $PO=\sqrt{2}$ ， $\odot O$ 的直径AB=2，C是 \widehat{AB} 的中点，D为AC的中点.

（I）证明：平面POD \perp 平面PAC；

（II）求二面角B - PA - C的余弦值.

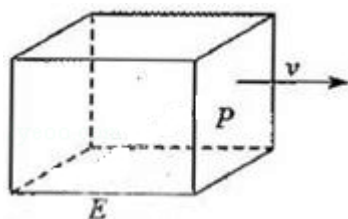


20. （13分）（2011•湖南）如图，长方形物体E在雨中沿面P（面积为S）的垂直方向作匀速移动，速度为v（ $v>0$ ），雨速沿E移动方向的分速度为c（ $c\in\mathbb{R}$ ）. E移动时单位时间内的淋雨量包括两部分：（1）P或P的平行面（只有一个面淋雨）的淋雨量，假设其值与 $|v - c|\times S$ 成正比，比例系数为 $\frac{1}{10}$ ；（2）其它面的淋雨量之和，其值为 $\frac{1}{2}$ ，记y为E移动过程中的

总淋雨量，当移动距离d=100，面积 $S=\frac{3}{2}$ 时.

（I）写出y的表达式

（II）设 $0<v\leq 10$ ， $0<c\leq 5$ ，试根据c的不同取值范围，确定移动速度v，使总淋雨量y最少.



21. （13分）（2011•湖南）如图，椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ （ $a>b>0$ ）的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，x轴被

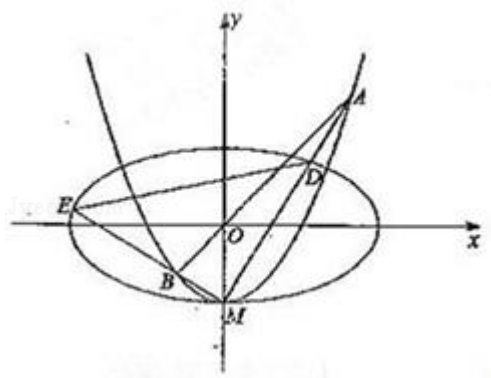
曲线 $C_2: y=x^2 - b$ 截得的线段长等于 C_1 的长半轴长.

（I）求 C_1 ， C_2 的方程；

（II）设 C_2 与y轴的交点为M，过坐标原点O的直线l与 C_2 相交于点A、B，直线MA，MB分别与 C_1 相交与D，E.

（i）证明：MD \perp ME；

(ii) 记 $\triangle MAB$, $\triangle MDE$ 的面积分别是 S_1 , S_2 . 问: 是否存在直线 l , 使得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{32}$? 请说明理由.



22. (13分) (2011•湖南) 已知函数 $f(x) = x^3$, $g(x) = x + \sqrt{x}$.

(I) 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数. 并说明理由;

(II) 设数列 $\{$

$a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 满足 $a_1 = a$ ($a > 0$), $f(a_{n+1}) = g(a_n)$, 证明: 存在常数 M , 使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n \leq M$.

一选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1.若 $a, b \in R$, i 为虚数单位, 且 $(a+i)i = b+i$, 则 ()

A. $a=1, b=1$ B. $a=-1, b=1$ C. $a=-1, b=-1$ D. $a=1, b=-1$

答案：D

2. 设 $M = \{1, 2\}$, $N = \{a^2\}$, 则 “ $a = 1$ ” 是 “ $N \subseteq M$ ” 则 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件
D. 既不充分又不必要条件

答案：A

解析：因“ $a=1$ ”，即 $N=\{1\}$ ，满足“ $N\subseteq M$ ”，反之“ $N\subseteq M$ ”，则

$N = \{a^2\} = \{1\}$ ，或 $N = \{a^2\} = \{2\}$ ，不一定有“ $a = 1$ ”。

3. 设图一是某几何体的三视图，则该几何体的体积为（ ）

A. $\frac{9}{2}\pi + 12$ B. $\frac{9}{2}\pi + 18$
C. $9\pi + 42$ D. $36\pi + 18$

答案: B

解析：有三视图可知该几何体是一个长方体和球构成的组合体，其体积

$$V = \frac{4}{3}\pi(\frac{3}{2})^3 + 3 \times 3 \times 2 = \frac{9}{2}\pi + 18。$$

4.通过随机询问110名性别不同的大学生是否爱好某项运动,得到如下的列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

$$\text{由 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \text{ 算得 } K^2 = \frac{110 \times (40 \times 30 - 20 \times 20)^2}{60 \times 50 \times 60 \times 50} \approx 7.8$$

附表:

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表，得到的正确结论是（ ）

A. 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别有关”
B. 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别无关”
C. 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”
D. 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

答案：C

解析：由 $K^2 \approx 7.8 > 6.635$ ，而 $P(K^2 \geq 6.635) = 0.010$ ，故由独立性检验的意义可知选C。

5. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 的渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$ ，则 a 的值为 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

答案：C

解析：由双曲线方程可知渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{a}x$ ，故可知 $a = 2$ 。

6. 由直线 $x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}, y = 0$ 与曲线 $y = \cos x$ 所围成的封闭图形的面积为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

答案：D

解析：由定积分知识可得 $S = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$ ，故选D。

7.

设 $m > 1$ ，在约束条件 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq mx \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ 下，目标函数 $z = x + my$ 的最大值小于2，则 m 的取值范围

为 ()

A. $(1, 1 + \sqrt{2})$ B. $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$ C. $(1, 3)$ D. $(3, +\infty)$

答案：A

解析：画出可行域，可知 $z = x + 5y$ 在点 $(\frac{1}{1+m}, \frac{m}{1+m})$ 取最大值，由 $\frac{1}{1+m} + \frac{m^2}{1+m} < 2$ 解

得 $1 < m < \sqrt{2} + 1$ 。

8. 设直线 $x = t$ 与函数 $f(x) = x^2, g(x) = \ln x$ 的图像分别交于点 M, N ，则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为 ()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案：D

解析：由题 $|MN| = x^2 - \ln x$ ，($x > 0$) 不妨令 $h(x) = x^2 - \ln x$ ，则 $h'(x) = 2x - \frac{1}{x}$ ，令

$h'(x) = 0$ 解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时， $h'(x) < 0$ ，当 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ，

所以当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $|MN|$ 达到最小。即 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

二填空题: 本大题共8小题, 考生作答7小题, 每小题5分, 共35分, 把答案填在答题卡中对应题号的横线上。

一、选做题 (请考生在第9、10、11三题中任选两题作答, 如果全做, 则按前两题记分)

9. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 在极坐标

系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos \theta - \sin \theta) + 1 = 0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为__。

答案: 2

解析: 曲线 $C_1: x^2 + (y-1)^2 = 1$, $C_2: x - y + 1 = 0$, 由圆心到直线的距离

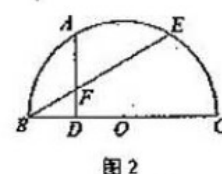
$$d = \frac{|0-1+1|}{\sqrt{2}} = 0 < 1, \text{ 故 } C_1 \text{ 与 } C_2 \text{ 的交点个数为 } 2.$$

10. 设 $x, y \in R$, 则 $(x^2 + \frac{1}{y^2})(\frac{1}{x^2} + 4y^2)$ 的最小值为_____。

答案: 9

解析: 由柯西不等式可知 $(x^2 + \frac{1}{y^2})(\frac{1}{x^2} + 4y^2) \geq (1+2)^2 = 9$ 。

11. 如图2, A, E 是半圆周上的两个三等分点, 直径 $BC = 4$, $AD \perp BC$, 垂足为 D , BE 与 AD 相交与点 F , 则 AF 的长为_____。



答案: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析: 由题可知, $\angle AOB = \angle EOC = 60^\circ$, $OA = OB = 2$, 得 $OD = BD = 1$, $DF = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $AD^2 = BD \cdot CD = 3$, 所以 $AF = AD - DF = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

二、必做题（12~16题）

12、设 S_n 是等差数列 $\{a_n\} (n \in N^*)$ 的前 n 项和，且 $a_1 = 1, a_4 = 7$ ，则 $S_5 =$ _____

答案：25

解析：由 $a_1 = 1, a_4 = 7$ 可得 $a_1 = 1, d = 2, a_n = 2n - 1$ ，所以 $S_5 = \frac{(1+9) \times 5}{2} = 25$ 。

13、若执行如图3所示的框图，输入 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \bar{x} = 2$

，则输出的数等于_____。

答案： $\frac{2}{3}$

解析：由框图的算法功能可知，输出的数为三个数的方差，

$$\text{则 } S = \frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2}{3} = \frac{2}{3}。$$

14、在边长为1的正三角形 ABC 中，设 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CE}$

，则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} =$ _____。

答案： $-\frac{1}{4}$

解析：由题 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ ， $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot (\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{7}{6}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{4}。$$

15、如图4，

$EFGH$ 是以 O 为圆心，半径为1的圆的内接正方形，将一颗豆子随机地扔到该圆内，用 A 表示事件“豆子落在正方形 $EFGH$ 内”， B 表示事件“豆子落在扇形 OHE （阴影部分）内”，则

(1) $P(A) =$ _____； (2) $P(B|A) =$ _____

答案： (1) $\frac{2}{\pi}$ ； (2) $P(B|A) = \frac{1}{4}$

解析： (1) 由几何概型概率计算公式可得 $P(A) = \frac{S_{\text{正}}}{S_{\text{圆}}} = \frac{2}{\pi}$ ；

$$(2) \text{ 由条件概率的计算公式可得 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{4}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{4}。$$

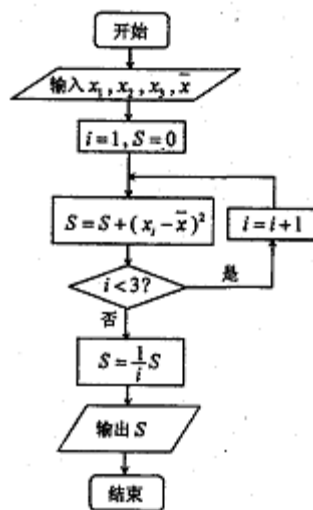


图 3

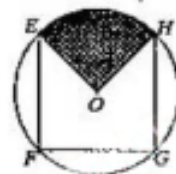


图 4

16、对于 $n \in N^*$ ，将 n 表示为 $n = a_0 \times 2^k + a_1 \times 2^{k-1} + a_2 \times 2^{k-2} + \dots + a_{k-1} \times 2^1 + a_k \times 2^0$ ，

当 $i=0$ 时, $a_i=1$, 当 $1 \leq i \leq k$ 时, a_i 为 0 或 1. 记 $I(n)$ 为上述表示中 a_i 为 0 的个数, (例

如 $1=1 \times 2^0$, $4=1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$: 故 $I(1)=0, I(4)=2$) 则

$$(1) I(12) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (2) \sum_{n=1}^{127} 2^{I(n)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

答案: (1) 2; (2) 1093

解析: (1) 因 $12=1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, 故 $I(12)=2$;

(2) 在 2 进制的 $k(k \geq 2)$ 位数中, 没有 0 的有 1 个, 有 1 个 0 的有 C_{k-1}^1 个, 有 2 个 0 的有 C_{k-1}^2 个, ……有 m 个 0 的有 C_{k-1}^m 个, ……有 $k-1$ 个 0 的有 $C_{k-1}^{k-1}=1$ 个. 故对所有 2 进制为 k 位数的数 n , 在所求式中的 $2^{I(n)}$ 的和为:

$$1 \cdot 2^0 + C_{k-1}^1 \cdot 2^1 + C_{k-1}^2 \cdot 2^2 + \cdots + C_{k-1}^{k-1} \cdot 2^{k-1} = 3^{k-1}.$$

又 $127=2^7-1$ 恰为 2 进制的最大 7 位数, 所以 $\sum_{n=1}^{127} 2^{I(n)} = 2^0 + \sum_{k=2}^7 3^{k-1} = 1093$.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足

$$c \sin A = a \cos C.$$

(I) 求角 C 的大小;

(II) 求 $\sqrt{3} \sin A - \cos(B + \frac{\pi}{4})$ 的最大值, 并求取得最大值时角 A, B 的大小.

解析: (I) 由正弦定理得 $\sin C \sin A = \sin A \cos C$.

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A > 0$. 从而 $\sin C = \cos C$. 又 $\cos C \neq 0$, 所以 $\tan C = 1$, 则 $C = \frac{\pi}{4}$

(II) 由 (I) 知 $B = \frac{3\pi}{4} - A$. 于是

$$\sqrt{3} \sin A - \cos(B + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} \sin A - \cos(\pi - A)$$

$$= \sqrt{3} \sin A + \cos A = 2 \sin(A + \frac{\pi}{6}).$$

$\because 0 < A < \frac{3\pi}{4}, \therefore \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{12}$, 从而当 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 时,

$2 \sin(A + \frac{\pi}{6})$ 取最大值 2.

又 $PO \perp$ 底面 $\odot O$, $AC \subset$ 底面 $\odot O$, 所以 $AC \perp PO$. 因为 OD, PO 是平面 POD 内的两条相交直线, 所以 $AC \perp$ 平面 POD . 而 $AC \subset$ 平面 PAC , 所以平面 $POD \perp$ 平面 PAC 。

(II) 在平面 POD 中, 过 O 作 $OH \perp PD$ 于 H , 由 (I) 知, 平面 $POD \perp$ 平面 PAC , 所以 $OH \perp$ 平面 PAC , 又 $PA \subset$ 平面 PAC , 所以 $PA \perp OH$.

在平面 PAO 中, 过 O 作 $OG \perp PA$ 于 G , 连接 HG , 则有 $PA \perp$ 平面 OGH , 从而 $PA \perp HG$, 所以 $\angle OGH$ 是二面角 $B-PA-C$ 的平面角.

$$\text{在 } Rt\triangle ODA \text{ 中, } OD = OA \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{在 } Rt\triangle POD \text{ 中, } OH = \frac{PO \cdot OD}{\sqrt{PO^2 + OD^2}} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{在 } Rt\triangle POA \text{ 中, } OG = \frac{PO \cdot OA}{\sqrt{PO^2 + OA^2}} = \frac{\sqrt{2} \times 1}{\sqrt{2 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{在 } Rt\triangle OHG \text{ 中, } \sin \angle OGH = \frac{OH}{OG} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{5}, \text{ 所以 } \cos \angle OGH = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

故二面角 $B-PA-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

20.

如图6, 长方形物体E在雨中沿面P(面积为S)的垂直方向作匀速移动, 速度为 $v(v > 0)$, 雨速沿E移动方向的分速度为 $c(c \in R)$ 。E移动时单位时间内的淋雨量包括两部分: (1) P或P的平行面(只有一个面淋雨)的淋雨量, 假设其值与 $|v-c| \times S$ 成正比, 比例系数为 $\frac{1}{10}$; (2) 其它面的淋雨量之和, 其值为 $\frac{1}{2}$, 记 y 为E移动过程中的总淋雨量, 当移动距离 $d=100$, 面积 $S=\frac{3}{2}$ 时。

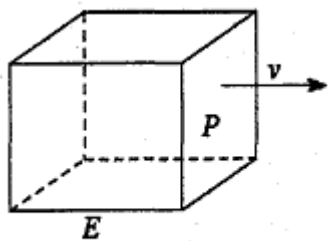


图6

(I) 写出 y 的表达式

(II) 设 $0 < v \leq 10, 0 < c \leq 5$, 试根据 c 的不同取值范围, 确定移动速度 v , 使总淋雨量 y 最少。

解析: (I) 由题意知, E 移动时单位时间内的淋雨量为 $\frac{3}{20}|v-c| + \frac{1}{2}$,

$$\text{故 } y = \frac{100}{v} \left(\frac{3}{20}|v-c| + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{v} (3|v-c| + 10).$$

$$(II) \text{ 由(I)知, 当 } 0 < v \leq c \text{ 时, } y = \frac{5}{v} (3c - 3v + 10) = \frac{5(3c+10)}{v} - 15;$$

$$\text{当 } c < v \leq 10 \text{ 时, } y = \frac{5}{v} (3v - 3c + 10) = \frac{5(10-3c)}{v} + 15.$$

$$\text{故 } y = \begin{cases} \frac{5(3c+10)}{v} - 15, & 0 < v \leq c \\ \frac{5(10-3c)}{v} + 15, & c < v \leq 10 \end{cases}.$$

(1) 当 $0 < c \leq \frac{10}{3}$ 时, y 是关于 v 的减函数. 故当 $v=10$ 时, $y_{\min} = 20 - \frac{3c}{2}$ 。

(2)

当 $\frac{10}{3} < c \leq 5$ 时, 在 $(0, c]$ 上, y 是关于 v 的减函数; 在 $(c, 10]$ 上, y 是关于 v 的

增函数; 故当 $v=c$ 时, $y_{\min} = \frac{50}{c}$ 。

A.(本小题满分13分)

如图7, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, x 轴被曲线 $C_2: y = x^2 - b$

截得的线段长等于 C_1 的长半轴长。

(I) 求 C_1, C_2 的方程;

(II) 设 C_2 与 y 轴的交点为 M , 过坐标原点 O 的直线 l 与 C_2 相交于点 A, B , 直线 MA, MB 分别与 C_1 相交于 D, E .

(i) 证明: $MD \perp ME$;

(ii) 记 $\triangle MAB, \triangle MDE$ 的面积分别是 S_1, S_2 . 问: 是否存在直线 l , 使得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{32}$?

请说明理由。

解析: (I) 由题意知 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而 $a = 2b$, 又 $2\sqrt{b} = a$, 解得 $a = 2, b = 1$ 。

故 C_1, C_2 的方程分别为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, y = x^2 - 1$ 。

(II) (i) 由题意知, 直线 l 的斜率存在, 设为 k , 则直线 l 的方程为 $y = kx$ 。

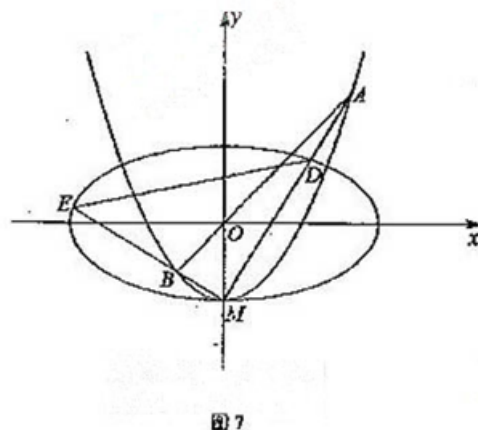
由 $\begin{cases} y = kx \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$ 得 $x^2 - kx - 1 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 x_1, x_2 是上述方程的两个

实根, 于是 $x_1 + x_2 = k, x_1 x_2 = -1$ 。

又点 M 的坐标为 $(0, -1)$, 所以

$$k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{y_1 + 1}{x_1} \cdot \frac{y_2 + 1}{x_2} = \frac{(kx_1 + 1)(kx_2 + 1)}{x_1 x_2} = \frac{k^2 x_1 x_2}{x_1 x_2}$$



故 $MA \perp MB$ ，即 $MD \perp ME$ 。

(ii) 设直线的斜率为 k_1 ，则直线的方程为 $y = k_1x - 1$ ，由 $\begin{cases} y = k_1x - 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = k_1 \\ y = k_1^2 - 1 \end{cases}, \text{ 则点的坐标为 } (k_1, k_1^2 - 1)$$

又直线 MB 的斜率为 $-\frac{1}{k_1}$ ，同理可得点 B 的坐标为 $(-\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_1^2} - 1)$ 。

$$\text{于是 } S_1 = \frac{1}{2} |MA| \cdot |MB| = \frac{1}{2} \sqrt{1+k_1^2} \cdot |k_1| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{k_1^2}} \cdot |-\frac{1}{k_1}| = \frac{1+k_1^2}{2|k_1|}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1x - 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \text{ 得 } (1+4k_1^2)x^2 - 8k_1x = 0,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{8k_1}{1+4k_1^2} \\ y = \frac{4k_1^2-1}{1+4k_1^2} \end{cases}, \text{ 则点 } D \text{ 的坐标为 } (\frac{8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{4k_1^2-1}{1+4k_1^2});$$

又直线的斜率为 $-\frac{1}{k_1}$ ，同理可得点 E 的坐标 $(\frac{-8k_1}{4+k_1^2}, \frac{4-k_1^2}{4+k_1^2})$

$$\text{于是 } S_2 = \frac{1}{2} |MD| \cdot |ME| = \frac{32(1+k_1^2) \cdot |k_1|}{(1+4k_1^2)(4+k_1^2)}$$

$$\text{因此 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{64} (4k_1^2 + \frac{1}{k_1^2} + 17)$$

$$\text{由题意知, } \frac{1}{64} (4k_1^2 + \frac{1}{k_1^2} + 17) = \frac{17}{32} \text{ 解得 } k_1^2 = 4 \text{ 或 } k_1^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{又由点 } A, B \text{ 的坐标可知, } k = \frac{k_1^2 - \frac{1}{k_1^2}}{k_1 + \frac{1}{k_1}} = k_1 - \frac{1}{k_1}, \text{ 所以 } k = \pm \frac{3}{2}.$$

故满足条件的直线 l 存在，且有条，其方程分别为 $y = \frac{3}{2}x$ 和 $y = -\frac{3}{2}x$ 。

22. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = x^3$, $g(x) = x + \sqrt{x}$ 。

(I) 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数, 并说明理由;

(II) 设数列 $\{a_n\} (n \in N^*)$ 满足 $a_1 = a (a > 0)$, $f(a_{n+1}) = g(a_n)$, 证明: 存在常数 M , 使得对于任意的 $n \in N^*$, 都有 $a_n \leq M$ 。

解析: (I) 由 $h(x) = x^3 - x - \sqrt{x}$ 知, $x \in [0, +\infty)$, 而 $h(0) = 0$, 且

$h(1) = -1 < 0$, $h(2) = 6 - \sqrt{2} > 0$, 则 $x = 0$ 为 $h(x)$ 的一个零点, 且 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点, 因此 $h(x)$ 至少有两个零点

解法1: $h'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, 记 $\varphi(x) = 3x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, 则 $\varphi'(x) = 6x + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ 。

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 因此 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内

至多只有一个零点。又因为 $\varphi(1) > 0$, $\varphi(\frac{\sqrt{3}}{3}) < 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 内有零点, 所

以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点。记此零点为 x_1 , 则当 $x \in (0, x_1)$ 时,

$\varphi(x) < \varphi(x_1) = 0$; 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > \varphi(x_1) = 0$;

所以,

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $h(x)$ 单调递减, 而 $h(0) = 0$, 则 $h(x)$ 在 $(0, x_1]$ 内无零点;

当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $h(x)$ 单调递增, 则 $h(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 内至多只有一个零点;

从而 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点。综上所述, $h(x)$ 有且只有两个零点。

解法2: $h(x) = x(x^2 - 1 - x^{-\frac{1}{2}})$, 记 $\varphi(x) = x^2 - 1 - x^{-\frac{1}{2}}$, 则 $\varphi'(x) = 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ 。

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 因此 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内

至多只有一个零点。因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内也至多只有一个零点,

综上所述, $h(x)$ 有且只有两个零点。

(II) 记 $h(x)$ 的正零点为 x_0 ，即 $x_0^3 = x_0 + \sqrt{x_0}$ 。

(1) 当 $a < x_0$ 时，由 $a_1 = a$ ，即 $a_1 < x_0$ 。而 $a_2^3 = a_1 + \sqrt{a_1} < x_0 + \sqrt{x_0} = x_0^3$ ，因此 $a_2 < x_0$ 。

由此猜测： $a_n < x_0$ 。下面用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时， $a_1 < x_0$ 显然成立；

②假设当 $n=k(k \geq 1)$ 时，有 $a_k < x_0$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，由

$a_{k+1}^3 = a_k + \sqrt{a_k} < x_0 + \sqrt{x_0} = x_0^3$ 知， $a_{k+1} < x_0$ ，因此，当 $n=k+1$ 时， $a_{k+1} < x_0$ 成立。

故对任意的 $n \in N^*$ ， $a_n < x_0$ 成立。

(2) 当 $a \geq x_0$ 时，由 (1) 知， $h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增。则 $h(a) \geq h(x_0) = 0$ ，即

$a^3 \geq a + \sqrt{a}$ 。从而 $a_2^3 = a_1 + \sqrt{a_1} = a + \sqrt{a} \leq a^3$ ，即 $a_2 \leq a$ ，由此猜测： $a_n \leq a$ 。下面用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时， $a_1 \leq a$ 显然成立；

②假设当 $n=k(k \geq 1)$ 时，有 $a_k \leq a$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，由

$a_{k+1}^3 = a_k + \sqrt{a_k} \leq a + \sqrt{a} \leq a^3$ 知， $a_{k+1} \leq a$ ，因此，当 $n=k+1$ 时， $a_{k+1} \leq a$ 成立。

故对任意的 $n \in N^*$ ， $a_n \leq a$ 成立。

综上所述，存在常数 $M = \max\{x_0, a\}$ ，使得对于任意的 $n \in N^*$ ，都有 $a_n \leq M$ 。