2021年上海市春季高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共12题，满分54分，第1～6题每题4分，第7～12题每题5分）

1．已知等差数列$\{a_n\}$的首项为3，公差为2，则$a_{10}=$__21__．

【思路分析】由已知结合等差数列的通项公式即可直接求解．

【解析】：因为等差数列$\{a_n\}$的首项为3，公差为2，

则$a_{10}=a_1+9d=3+9\times 2=21$．故答案为：21．

【归纳总结】本题主要考查了等差数列的通项公式，属于基础题．

2．已知$z=1-3i$，则$|\overline{z}-i|=$__$\sqrt{5}$__．

【思路分析】由已知求得$\overline{z}-i$，再由复数模的计算公式求解．

【解析】：$\because z=1-3i$，$\therefore \overline{z}-i=1+3i-i=1+2i$，

则$|\overline{z}-i|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$．故答案为：$\sqrt{5}$．

【归纳总结】本题考查复数的加减运算，考查复数的基本概念，考查复数模的求法，是基础题．

3．已知圆柱的底面半径为1，高为2，则圆柱的侧面积为__4π__．

【思路分析】根据圆柱的侧面积公式计算即可．

【解析】：圆柱的底面半径为$r=1$，高为$h=2$，

所以圆柱的侧面积为$S_{侧}=2\pi rh=2\pi\times 1\times 2=4\pi$．故答案为：$4\pi$．

【归纳总结】本题考查了圆柱的侧面积公式应用问题，是基础题．

4．不等式$\dfrac{2x+5}{x-2}<1$的解集为__$(-7,2)$__．

【思路分析】由已知进行转化$\dfrac{x+7}{x-2}<0$，进行可求．

【解析】：$\dfrac{2x+5}{x-2}<1\Rightarrow\dfrac{2x+5}{x-2}-1<0\Rightarrow\dfrac{x+7}{x-2}<0$，解得，$-7<x<2$．故答案为：$(-7,2)$．

【归纳总结】本题主要考查了分式不等式的求解，属于基础题．

5．直线$x=-2$与直线$\sqrt{3}x-y+1=0$的夹角为__$\dfrac{\pi}{6}$__．

【思路分析】先求出直线的斜率，可得它们的倾斜角，从而求出两条直线的夹角．

【解析】：$\because$直线$x=-2$的斜率不存在，倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}$，

直线$\sqrt{3}x-y+1=0$的斜率为$\sqrt{3}$，倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$，

故直线$x=-2$与直线$\sqrt{3}x-y+1=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$故答案为：$\dfrac{\pi}{6}$．

【归纳总结】本题主要考查直线的斜率和倾斜角，两条直线的夹角，属于基础题．

6．若方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$无解，则$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=$__0__．

【思路分析】利用二元一次方程组的解的行列式表示进行分析即可得到答案．

【解析】：对于方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$，有$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix},D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix},D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$，

当 $D\neq 0$ 时，方程组的解为 $\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D} \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases}$，

根据题意，方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 无解，

所以 $D=0$，即 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，故答案为：0．

【归纳总结】本题考查的是二元一次方程组的解行列式表示法，这种方法可以使得方程组的解与对应系数之间的关系表示的更为清晰，解题的关键是熟练掌握二元一次方程组的解行列式表示法中对应的公式．

7．已知 $(1+x)^n$ 的展开式中，唯有 x^3 的系数最大，则 $(1+x)^n$ 的系数和为__64__．

【思路分析】由已知可得 $n=6$，令 $x=1$，即可求得系数和．

【解析】：由题意，$C_n^3>C_n^2$，且 $C_n^3>C_n^4$，

所以 $n=6$，所以令 $x=1$，$(1+x)^6$ 的系数和为 $2^6=64$．故答案为：64．

【归纳总结】本题主要考查二项式定理．考查二项式系数的性质，属于基础题．

8．已知函数 $f(x)=3^x+\dfrac{a}{3^x+1}(a>0)$ 的最小值为5，则 $a=$__9__．

【思路分析】利用基本不等式求最值需要满足"一正、二定、三相等"，该题只需将函数解析式变形成 $f(x)=3^x+1+\dfrac{a}{3^x+1}-1$，然后利用基本不等式求解即可，注意等号成立的条件．

【解析】：$f(x)=3^x+\dfrac{a}{3^x+1}=3^x+1+\dfrac{a}{3^x+1}-1\geqslant 2\sqrt{a}-1=5$，

所以 $a=9$，经检验，$3^x=2$ 时等号成立．故答案为：9．

【归纳总结】本题主要考查了基本不等式的应用，以及整体的思想，解题的关键是构造积为定值，属于基础题．

9．在无穷等比数列 $\{a_n\}$ 中，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1-a_n)=4$，则 a_2 的取值范围是__$(-4,0)\cup(0,4)$__．

【思路分析】由无穷等比数列的概念可得公比 q 的取值范围，再由极限的运算知 $a_1=4$，从而得解．

【解析】：$\because$ 无穷等比数列 $\{a_n\}$，$\therefore$ 公比 $q\in(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a_1-a_n)=a_1=4$，$\therefore a_2=a_1q=4q\in(-4,\ 0)\cup(0,\ 4)$．

故答案为：$(-4,\ 0)\cup(0,\ 4)$．

【归纳总结】本题考查无穷等比数列的概念与性质，极限的运算，考查学生的运算求解能力，属于基础题．

10．某人某天需要运动总时长大于等于60分钟，现有五项运动可以选择，如表所示，问有几种运动方式组合__23种__．

A 运动	B 运动	C 运动	D 运动	E 运动
7点 -8 点	8点 -9 点	9点 -10 点	10点 -11 点	11点 -12 点

30分钟	20分钟	40分钟	30分钟	30分钟

【思路分析】由题意知至少要选2种运动，并且选2种运动的情况中，AB、DB、EB的组合不符合题意，由此求出结果．

【解析】：由题意知，至少要选2种运动，并且选2种运动的情况中，AB、DB、EB的组合不符合题意；

所以满足条件的运动组合方式为：$C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5-3=10+10+5+1-3=23$（种）．

故答案为：23种．

【归纳总结】本题考查了组合数公式的应用问题，也考查了统筹问题的思想应用问题，是基础题．

11．已知椭圆$x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$的左、右焦点为$F_1$、$F_2$，以$O$为顶点，$F_2$为焦点作抛物线交椭圆于$P$，且$\angle PF_1F_2=45^\circ$，则抛物线的准线方程是__ $x=1-\sqrt{2}$ __．

【思路分析】先设出椭圆的左右焦点坐标，进而可得抛物线的方程，设出直线PF_1的方程并与抛物线联立，求出点P的坐标，由此可得$PF_2\perp F_1F_2$，进而可以求出PF_1，PF_2的长度，再由椭圆的定义即可求解．

【解析】：设$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则抛物线$y^2=4cx$，

直线$PF_1:y=x+c$，联立方程组$\begin{cases}y^2=4cx\\y=x+c\end{cases}$，解得$x=c$，$y=2c$，

所以点P的坐标为$(c,2c)$，所以$PF_2\perp F_1F_2$，又$PF_2=F_2F_1=2c$,所以$PF_1=2\sqrt{2}c$

所以$PF_1=2\sqrt{2}c$，所以$PF_1+PF_2=(2+2\sqrt{2})c=2a=2$，

则$c=\sqrt{2}-1$，

所以抛物线的准线方程为：$x=-c=1-\sqrt{2}$，

故答案为：$x=1-\sqrt{2}$．

【归纳总结】本题考查了抛物线的定义以及椭圆的定义和性质，考查了学生的运算推理能力，属于中档题．

12．已知$\theta>0$，存在实数φ，使得对任意$n\in N^*$，$\cos(n\theta+\varphi)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\theta$的最小值是__ $\dfrac{2\pi}{5}$ __．

【思路分析】在单位圆中分析可得$\theta>\dfrac{\pi}{3}$，由$\dfrac{2\pi}{\theta}\in N^*$，即$\theta=\dfrac{2\pi}{k}$，$k\in N^*$，即可求得$\theta$的最小值．

【解析】：在单位圆中分析，由题意可得$n\theta+\varphi$的终边要落在图中阴影部分区域（其中$\angle AOx=\angle BOx=\dfrac{\pi}{6}$），

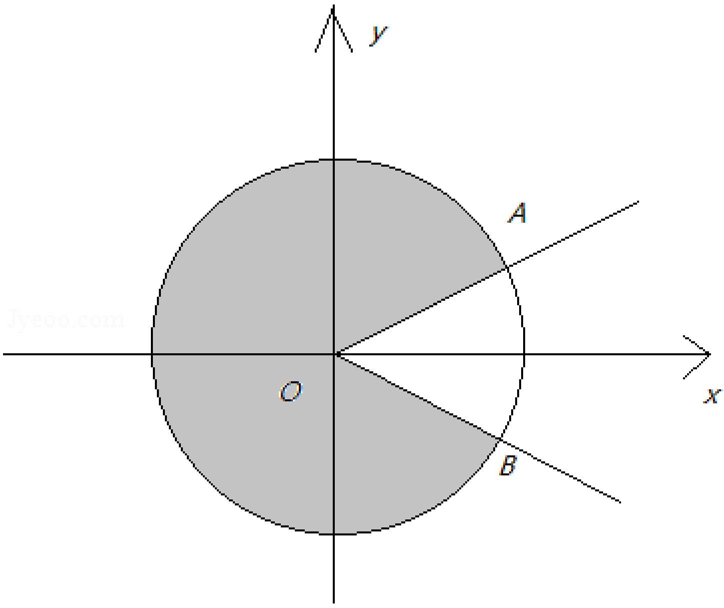
所以$\theta>\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，

因为对任意$n\in N^*$都成立，

所以$\dfrac{2\pi}{\theta}\in N^*$，即$\theta=\dfrac{2\pi}{k}$，$k\in N^*$，

同时$\theta > \dfrac{\pi}{3}$，所以θ的最小值为$\dfrac{2\pi}{5}$．

故答案为：$\dfrac{2\pi}{5}$．



【归纳总结】本题主要考查三角函数的最值，考查数形结合思想，属于中档题．

二、选择题（本大题共4题，每题5分，共20分）

13．下列函数中，在定义域内存在反函数的是(　　)

A．$f(x)=x^2$　　B．$f(x)=\sin x$　　C．$f(x)=2^x$　　D．$f(x)=1$

【思路分析】根据函数的定义以及映射的定义即可判断选项是否正确．

【解析】：选项A：因为函数是二次函数，属于二对一的映射，

根据函数的定义可得函数不存在反函数，A错误，

选项B：因为函数是三角函数，有周期性和对称性，属于多对一的映射，

根据函数的定义可得函数不存在反函数，B错误，

选项C：因为函数的单调递增的指数函数，属于一一映射，所以函数存在反函数，C正确

，

选项D：因为函数是常数函数，属于多对一的映射，所以函数不存在反函数，D错误，

故选：C．

【归纳总结】本题考查了函数的定义以及映射的定义，考查了学生对函数以及映射概念的理解，属于基础题．

14．已知集合$A=\{x\,|\,x>-1$，$x\in R\}$，$B=\{x\,|\,x^2-x-2\geqslant 0$，$x\in R\}$，则下列关系中，正确的是(　　)

A．$A\subseteq B$　　B．$\complement_R A\subseteq \complement_R B$　　C．$A\bigcap B=\varnothing$　　D．$A\bigcup B=R$

【思路分析】根据集合的基本运算对每一选项判断即可．

【解析】：已知集合$A=\{x\,|\,x>-1$，$x\in R\}$，$B=\{x\,|\,x^2-x-2\geqslant 0$，$x\in R\}$，

解得$B=\{x\,|\,x\geqslant 2$或$x\leqslant -1$，$x\in R\}$，

$\complement_R A=\{x\,|\,x\leqslant -1$，$x\in R\}$，$\complement_R B=\{x\,|\,-1<x<2\}$；

则 $A\bigcup B=R$ ， $A\bigcap B=\{x\mid x\ldots 2\}$ ，

故选： D .

【归纳总结】本题主要考查集合的基本运算，比较基础.

15．已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R ，下列是 $f(x)$ 无最大值的充分条件是(　　)

A． $f(x)$ 为偶函数且关于点 $(1,1)$ 对称

B． $f(x)$ 为偶函数且关于直线 $x=1$ 对称

C． $f(x)$ 为奇函数且关于点 $(1,1)$ 对称

D． $f(x)$ 为奇函数且关于直线 $x=1$ 对称

【思路分析】根据题意，依次判断选项：对于 ABD ，举出反例可得三个选项错误，对于 C ，利用反证法可得其正确.

【解析】：根据题意，依次判断选项：

对于 A ， $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}+1$ ， $f(x)$ 为偶函数，且关于点 $(1,1)$ 对称，存在最大值， A 错误，

对于 B ， $f(x)=\cos(\pi x)$ ， $f(x)$ 为偶函数且关于直线 $x=1$ 对称，存在最大值， B 错误，

对于 C ，假设 $f(x)$ 有最大值，设其最大值为 M ，其最高点的坐标为 (a,M) ，

$f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，则 $f(x)$ 的图象存在最低点 $(-a,-M)$ ，

又由 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称，则 $(-a,-M)$ 关于点 $(1,1)$ 对称的点为 $(2+a,2+M)$ ，

与最大值为 M 相矛盾，则此时 $f(x)$ 无最大值， C 正确，

对于 D ， $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ ， $f(x)$ 为奇函数且关于直线 $x=1$ 对称， D 错误，

故选： C .

【归纳总结】本题考查了充分条件和反证法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

16．在 ΔABC 中， D 为 BC 中点， E 为 AD 中点，则以下结论：①存在 ΔABC ，使得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ ；②存在三角形 ΔABC ，使得 $\overrightarrow{CE}//(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$ ；它们的成立情况是(　　)

A．①成立，②成立　　B．①成立，②不成立

C．①不成立，②成立　　D．①不成立，②不成立

【思路分析】设 $A(2x,2y)$ ， $B(-1,0)$ ， $C(1,0)$ ， $D(0,0)$ ， $E(x,y)$ ，由向量数量的坐标运算即可判断①； F 为 AB 中点，可得 $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=2\overrightarrow{CF}$ ，由 D 为 BC 中点，可得 CF 与 AD 的交点即为重心 G ，从而可判断②

【解析】：不妨设 $A(2x,2y)$ ， $B(-1,0)$ ， $C(1,0)$ ， $D(0,0)$ ， $E(x,y)$ ，

① $\overrightarrow{AB}=(-1-2x,-2y)$ ， $\overrightarrow{CE}=(x-1,y)$ ，

若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ ，则 $-(1+2x)(x-1)-2y^2=0$ ，即 $-(1+2x)(x-1)=2y^2$ ，

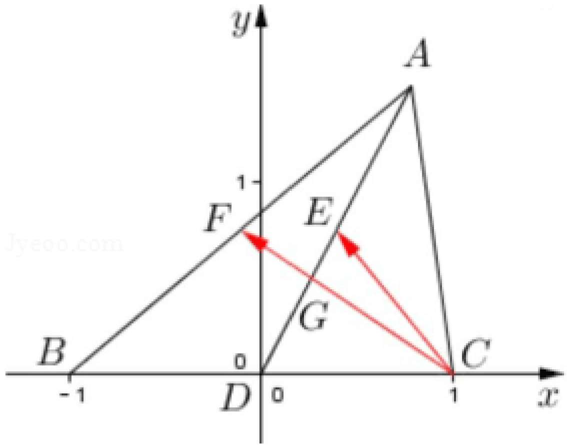
满足条件的 (x,y) 存在，例如 $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ ，满足上式，所以①成立；

② F 为 AB 中点， $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=2\overrightarrow{CF}$ ， CF 与 AD 的交点即为重心 G ，

因为 G 为 AD 的三等分点， E 为 AD 中点，

所以 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{CG}$ 不共线，即②不成立.

故选： B .



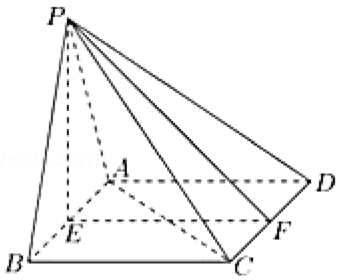
【归纳总结】本题主要考查平面向量数量积的运算，共线向量的判断，属于中档题．

三、解答题（本大题共5题，共14+14+14+16+18＝76分）

17．（14分）四棱锥 $P-ABCD$，底面为正方形 $ABCD$，边长为4，E 为 AB 中点，$PE\perp$ 平面 $ABCD$．

（1）若 ΔPAB 为等边三角形，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（2）若 CD 的中点为 F，PF 与平面 $ABCD$ 所成角为 $45°$，求 PC 与 AD 所成角的大小．



【思路分析】（1）由 $V=\dfrac{1}{3}PE\cdot S_{正方形ABCD}$，代入相应数据，进行运算，即可；

（2）由 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，知 $\angle PFE=45°$，进而有 $PE=FE=4$，$PB=2\sqrt{5}$，由 $AD//BC$，知 $\angle PCB$ 或其补角即为所求，可证 $BC\perp$ 平面 PAB，从而有 $BC\perp PB$，最后在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{PBC}$ 中，由 $\tan\angle PCB=\dfrac{PB}{BC}$，得解．

【解析】：（1）$\because\Delta PAB$ 为等边三角形，且 E 为 AB 中点，$AB=4$，

$\therefore PE=2\sqrt{3}$，

又 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}PE\cdot S_{正方形ABCD}=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times4^2=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$．

（2）$\because PE\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore\angle PFE$ 为 PF 与平面 $ABCD$ 所成角为 $45°$，即 $\angle PFE=45°$，

$\therefore\Delta PEF$ 为等腰直角三角形，

$\because E$，F 分别为 AB，CD 的中点，

$\therefore PE=FE=4$，

$\therefore PB=\sqrt{PE^2+BE^2}=2\sqrt{5}$，

$\because AD//BC$，

$\therefore \angle PCB$ 或其补角即为 PC 与 AD 所成角，

$\because PE \perp$ 平面 $ABCD$， $\therefore PE \perp BC$，

又 $BC \perp AB$， $PE \bigcap AB = E$， PE 、 $AB \subset$ 平面 PAB，

$\therefore BC \perp$ 平面 PAB， $\therefore BC \perp PB$，

在 RtΔPBC 中， $\tan \angle PCB = \dfrac{PB}{BC} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

故 PC 与 AD 所成角的大小为 $\arctan \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

【归纳总结】本题考查棱锥的体积、线面角和异面直线夹角的求法，理解线面角的定义，以及利用平移法找到异面直线所成角是解题的关键，考查学生的空间立体感、逻辑推理能力和运算能力，属于基础题.

18．（14分）已知 A 、 B 、 C 为 ΔABC 的三个内角， a 、 b 、 c 是其三条边， $a = 2$，$\cos C = -\dfrac{1}{4}$.

（1）若 $\sin A = 2\sin B$，求 b 、 c；

（2）若 $\cos(A - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{4}{5}$，求 c .

【思路分析】（1）由已知利用正弦定理即可求解 b 的值；利用余弦定理即可求解 c 的值.

（2）根据已知利用两角差的余弦公式，同角三角函数基本关系式可求得 $\cos A$， $\sin A$，$\sin C$ 的值，进而根据正弦定理可得 c 的值.

【解析】：（1）因为 $\sin A = 2\sin B$，可得 $a = 2b$，

又 $a = 2$，可得 $b = 1$，

由于 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{2^2 + 1^2 - c^2}{2 \times 2 \times 1} = -\dfrac{1}{4}$，可得 $c = \sqrt{6}$.

（2）因为 $\cos(A - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \sin A) = \dfrac{4}{5}$，

可得 $\cos A + \sin A = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，

又 $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$，

可解得 $\cos A = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$， $\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$，或 $\sin A = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$， $\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$，

因为 $\cos C = -\dfrac{1}{4}$，可得 $\sin C = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$， $\tan C = -\sqrt{15}$，

若 $\sin A = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$， $\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$，可得 $\tan A = 7$，可得

$\tan B = -\tan(A + C) = \dfrac{\tan A + \tan C}{\tan A \tan C - 1} = \dfrac{7 - \sqrt{15}}{7 \times (-\sqrt{15}) - 1} < 0$，

可得 B 为钝角，这与 C 为钝角矛盾，舍去，

所以 $\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$，由正弦定理 $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$，可得 $c = \dfrac{5\sqrt{30}}{2}$.

【归纳总结】本题主要考查了正弦定理，余弦定理，两角差的余弦公式，同角三角函数基本关系式在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于中档题.

19．（14分）（1）团队在O点西侧、东侧20千米处设有A、B两站点，测量距离发现一点P满足$|PA|-|PB|=20$千米，可知P在A、B为焦点的双曲线上，以O点为原点，东侧为x轴正半轴，北侧为y轴正半轴，建立平面直角坐标系，P在北偏东60°处，求双曲线标准方程和P点坐标．

（2）团队又在南侧、北侧15千米处设有C、D两站点，测量距离发现$|QA|-|QB|=30$千米，$|QC|-|QD|=10$千米，求$|OQ|$（精确到1米）和Q点位置（精确到1米，1°）

【思路分析】（1）求出a，c，b的值即可求得双曲线方程，求出直线OP的方程，与双曲线方程联立，即可求得P点坐标；

（2）分别求出以A、B为焦点，以C，D为焦点的双曲线方程，联立即可求得点Q的坐标，从而求得$|OQ|$，及Q点位置．

【解析】：（1）由题意可得$a=10$，$c=20$，所以$b^{2}=300$，

所以双曲线的标准方程为$\dfrac{x^{2}}{100}-\dfrac{y^{2}}{300}=1$，

直线$OP:y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，联立双曲线方程，可得$x=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$，

即点P的坐标为$(\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{5\sqrt{6}}{2})$．

（2）①$|QA|-|QB|=30$，则$a=15$，$c=20$，所以$b^{2}=175$，

双曲线方程为$\dfrac{x^{2}}{225}-\dfrac{y^{2}}{175}=1$；

②$|QC|-|QD|=10$，则$a=5$，$c=15$，所以$b^{2}=200$，

所以双曲线方程为$\dfrac{y^{2}}{25}-\dfrac{x^{2}}{200}=1$，

两双曲线方程联立，得$Q(\sqrt{\dfrac{14400}{47}}$，$\sqrt{\dfrac{2975}{47}})$，

所以$|OQ|\approx 19$米，Q点位置北偏东66°．

【归纳总结】本题主要考查双曲线方程在实际中的应用，属于中档题．

20．（16分）已知函数$f(x)=\sqrt{|x+a|-a}-x$．

（1）若$a=1$，求函数的定义域；

（2）若$a\neq 0$，若$f(ax)=a$有2个不同实数根，求a的取值范围；

（3）是否存在实数a，使得函数$f(x)$在定义域内具有单调性？若存在，求出a的取值范围．

【思路分析】（1）把$a=1$代入函数解析式，由根式内部的代数式大于等于0求解绝对值的不等式得答案；

（2）$f(ax)=a\Leftrightarrow\sqrt{|ax+a|-a}=ax+a$，设$ax+a=t\ldots 0$，得$a=t-t^{2}$，$t\ldots 0$，求得等式右边关于$t$的函数的值域可得$a$的取值范围；

（3）分$x\ldots -a$与$x<-a$两类变形，结合复合函数的单调性可得使得函数$f(x)$在定义域内具有单调性的a的范围．

【解析】：（1）当$a=1$时，$f(x)=\sqrt{|x+1|-1}-x$，

由$|x+1|-1\ldots 0$，得$|x+1|\ldots 1$，解得$x„-2$或$x\ldots 0$．

$\therefore$函数的定义域为$(-\infty，-2]\bigcup[0，+\infty)$；

（2）$f(ax)=\sqrt{|ax+a|-a}-ax$，

$f(ax)=a\Leftrightarrow\sqrt{|ax+a|-a}=ax+a$，

设$ax+a=t\geqslant 0$，$\therefore\sqrt{t-a}=t$有两个不同实数根，整理得$a=t-t^{2}$，$t\geqslant 0$，

$\therefore a=-(t-\dfrac{1}{2})^{2}+\dfrac{1}{4}$，$t\geqslant 0$，当且仅当$0\leqslant a<\dfrac{1}{4}$时，方程有2个不同实数根，

又$a\neq 0$，$\therefore a$的取值范围是$(0,\dfrac{1}{4})$；

（3）当$x\geqslant -a$时，$f(x)=\sqrt{|x+a|-a}-x=\sqrt{x}-x=-(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2})^{2}+\dfrac{1}{4}$，在$[\dfrac{1}{4}，+\infty)$上单调递减，

此时需要满足$-a\geqslant\dfrac{1}{4}$，即$a\leqslant -\dfrac{1}{4}$，函数$f(x)$在$[-a，+\infty)$上递减；

当$x<-a$时，$f(x)=\sqrt{|x+a|-a}-x=\sqrt{-x-2a}-x$，在$(-\infty，-2a]$上递减，

$\because a\leqslant -\dfrac{1}{4}<0$，$\therefore -2a>-a>0$，即当$a\leqslant -\dfrac{1}{4}$时，函数$f(x)$在$(-\infty,-a)$上递减．

综上，当$a\in(-\infty，-\dfrac{1}{4}]$时，函数$f(x)$在定义域$R$上连续，且单调递减．

【归纳总结】本题考查函数定义域的求法，考查函数零点与方程根的关系，考查函数单调性的判定及其应用，考查逻辑思维能力与推理论证能力，属难题．

21．（18分）已知数列$\{a_{n}\}$满足$a_{n}\geqslant 0$，对任意$n\geqslant 2$，a_{n}和a_{n+1}中存在一项使其为另一项与a_{n-1}的等差中项．

（1）已知$a_{1}=5$，$a_{2}=3$，$a_{4}=2$，求a_{3}的所有可能取值；

（2）已知$a_{1}=a_{4}=a_{7}=0$，a_{2}、a_{5}、a_{8}为正数，求证：a_{2}、a_{5}、a_{8}成等比数列，并求出公比q；

（3）已知数列中恰有3项为0，即$a_{r}=a_{s}=a_{t}=0$，$2<r<s<t$，且$a_{1}=1$，$a_{2}=2$，求$a_{r+1}+a_{s+1}+a_{t+1}$的最大值．

【思路分析】（1）根据a_{n}和a_{n+1}中存在一项使其为另一项与a_{n-1}的等差中项建立等式，然后将a_{1}，a_{2}，a_{4}的值代入即可；

（2）根据递推关系求出a_{5}、a_{8}，然后根据等比数列的定义进行判定即可；

（3）分别求出a_{r+1}，a_{s+1}，a_{t+1}的通项公式，从而可求出各自的最大值，从而可求出所求．

【解析】：（1）由题意，$2a_{n}=a_{n+1}+a_{n-1}$或$2a_{n+1}=a_{n}+a_{n-1}$，

$\therefore 2a_{2}=a_{3}+a_{1}$解得$a_{3}=1$，$2a_{3}=a_{2}+a_{1}$解得$a_{3}=4$，经检验，$a_{3}=1$，

（2）证明：$\because a_{1}=a_{4}=a_{7}=0$，$\therefore a_{3}=2a_{2}$，或$a_{3}=\dfrac{a_{2}}{2}$，经检验，$a_{3}=\dfrac{a_{2}}{2}$；

$\therefore a_{5}=\dfrac{a_{3}}{2}=\dfrac{a_{2}}{4}$，或$a_{5}=-a_{1}=-\dfrac{a_{2}}{2}$（舍），$\therefore a_{5}=\dfrac{a_{2}}{4}$；

$\therefore a_{6}=\dfrac{a_{5}}{2}=\dfrac{a_{2}}{8}$，或$a_{6}=-a_{5}=-\dfrac{a_{2}}{4}$（舍），$\therefore a_{6}=\dfrac{a_{2}}{8}$；

$\therefore a_{8}=\dfrac{a_{6}}{2}=\dfrac{a_{2}}{16}$，或$a_{8}=-a_{6}=-\dfrac{a_{2}}{8}$（舍），$\therefore a_{8}=\dfrac{a_{2}}{16}$；

综上，a_2、a_5、a_8成等比数列，公比为$\frac{1}{4}$；

（3）由$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$或$2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，可知$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=1$或$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=-\frac{1}{2}$，

由第（2）问可知，$a_r=0$，则$a_{r-2}=2a_{r-1}$，即$a_{r-1}-a_{r-2}=-a_{r-1}$，

$\therefore a_r=0$，则$a_{r+1}=\frac{1}{2}a_{r-1}=-\frac{1}{2}(a_{r-1}-a_{r-2})=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^i\cdot 1^{r-3-i}\cdot(a_2-a_1)=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^i,i\in N*$，

$\therefore (a_{r+1})_{max}=\frac{1}{4}$，

同理，$a_{s+1}=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^j\cdot 1^{s-2-r-j}\cdot(a_{r+1}-a_r)=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^j\cdot\frac{1}{4},j\in N^*$，

$\therefore (a_{s+1})_{max}=\frac{1}{16}$，同理，$(a_{t+1})_{max}=\frac{1}{64}$，$\therefore a_{r+1}+a_{s+1}+a_{t+1}$的最大值$\frac{21}{64}$．

【归纳总结】本题主要考查了数列的综合应用，等比数列的判定以及通项公式的求解，同时考查了学生计算能力，属于难题．