

绝密★本科目考试启用前

## 2022 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

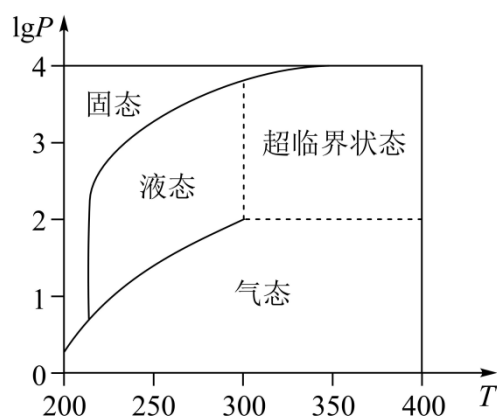
### 数学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

#### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集  $U = \{x | -3 < x < 3\}$ ，集合  $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$ ，则  $\complement_U A =$  ( )
- A.  $(-2, 1]$                       B.  $(-3, -2) \cup [1, 3)$                       C.  $[-2, 1)$                       D.  $(-3, -2] \cup (1, 3)$
2. 若复数  $z$  满足  $i \cdot z = 3 - 4i$ ，则  $|z| =$  ( )
- A. 1                                  B. 5                                  C. 7                                  D. 25
3. 若直线  $2x + y - 1 = 0$  是圆  $(x - a)^2 + y^2 = 1$  的一条对称轴，则  $a =$  ( )
- A.  $\frac{1}{2}$                                   B.  $-\frac{1}{2}$                                   C. 1                                  D. -1
4. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1 + 2^x}$ ，则对任意实数  $x$ ，有 ( )
- A.  $f(-x) + f(x) = 0$                                   B.  $f(-x) - f(x) = 0$
- C.  $f(-x) + f(x) = 1$                                   D.  $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$
5. 已知函数  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ，则 ( )
- A.  $f(x)$  在  $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$  上单调递减                                  B.  $f(x)$  在  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$  上单调递增
- C.  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  上单调递减                                  D.  $f(x)$  在  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right)$  上单调递增
6. 设  $\{a_n\}$  是公差为 0 的无穷等差数列，则“ $\{a_n\}$  为递增数列”是“存在正整数  $N_0$ ，当  $n > N_0$  时， $a_n > 0$ ”的 ( )
- A. 充分而不必要条件                                  B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件                                  D. 既不充分也不必要条件
7. 在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献。如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与  $T$  和  $\lg P$  的关系，其中  $T$  表示温度，单位是  $K$ ； $P$  表示压强，单位是  $\text{bar}$ 。下列结论中正确的是 ( )



- A. 当  $T = 220$  ,  $P = 1026$  时, 二氧化碳处于液态
- B. 当  $T = 270$  ,  $P = 128$  时, 二氧化碳处于气态
- C. 当  $T = 300$  ,  $P = 9987$  时, 二氧化碳处于超临界状态
- D. 当  $T = 360$  ,  $P = 729$  时, 二氧化碳处于超临界状态
8. 若  $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  , 则  $a_0 + a_2 + a_4 =$  ( )
- A. 40                                      B. 41                                      C. -40                                      D. -41
9. 已知正三棱锥  $P-ABC$  的六条棱长均为 6,  $S$  是  $\triangle ABC$  及其内部的点构成的集合. 设集合  $T = \{Q \in S | PQ \leq 5\}$  , 则  $T$  表示的区域的面积为 ( )
- A.  $\frac{3\pi}{4}$                                       B.  $\pi$                                       C.  $2\pi$                                       D.  $3\pi$
10. 在  $\triangle ABC$  中,  $AC = 3, BC = 4, \angle C = 90^\circ$  .  $P$  为  $\triangle ABC$  所在平面内的动点, 且  $PC = 1$  , 则  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的取值范围是 ( )
- A.  $[-5, 3]$                                       B.  $[-3, 5]$                                       C.  $[-6, 4]$                                       D.  $[-4, 6]$

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

### 二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 函数  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$  的定义域是\_\_\_\_\_.
12. 已知双曲线  $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$  , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.
13. 若函数  $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$  的一个零点为  $\frac{\pi}{3}$  , 则  $A =$ \_\_\_\_\_ ;  $f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$ \_\_\_\_\_.
14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$  若  $f(x)$  存在最小值, 则  $a$  的一个取值为\_\_\_\_\_ ;  $a$

的最大值为\_\_\_\_\_.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 其前 $n$ 项和 $S_n$ 满足 $a_n \cdot S_n = 9(n = 1, 2, \dots)$ . 给出下列四个结论:

- ① $\{a_n\}$ 的第2项小于3;    ② $\{a_n\}$ 为等比数列;  
③ $\{a_n\}$ 为递减数列;    ④ $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项.

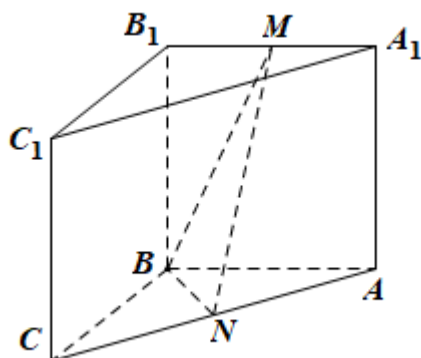
其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

**三、解答题共6小愿, 共85分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.**

16. 在 $\triangle ABC$ 中,  $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$ .

- (1) 求 $\angle C$ ;  
(2) 若 $b = 6$ , 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ , 求 $\triangle ABC$ 的周长.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 $BCC_1B_1$ 为正方形, 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 $ABB_1A_1$ ,  $AB = BC = 2$ ,  $M, N$ 分别为 $A_1B_1, AC$ 的中点.



- (1) 求证:  $MN \parallel$  平面 $BCC_1B_1$ ;  
(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线 $AB$ 与平面 $BMN$ 所成角的正弦值.

条件①:  $AB \perp MN$ ;

条件②:  $BM = MN$ .

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

18. 在校运动会上, 只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛, 比赛成绩达到9.50m以上(含9.50m)的同学将获得优秀奖. 为预测获得优秀奖的人数及冠军得主, 收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩, 并整理得到如下数据(单位: m):

甲: 9.80, 9.70, 9.55, 9.54, 9.48, 9.42, 9.40, 9.35, 9.30, 9.25;

乙: 9.78, 9.56, 9.51, 9.36, 9.32, 9.23;

丙：9.85, 9.65, 9.20, 9.16.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

(1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

(2) 设  $X$  是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计  $X$  的数学期望  $E(X)$ ；

(3) 在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

19. 已知椭圆： $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个顶点为  $A(0,1)$ ，焦距为  $2\sqrt{3}$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程；

(2) 过点  $P(-2,1)$  作斜率为  $k$  的直线与椭圆  $E$  交于不同的两点  $B, C$ ，直线  $AB, AC$  分别与  $x$  轴交于点  $M, N$ ，当  $|MN| = 2$  时，求  $k$  的值.

20. 已知函数  $f(x) = e^x \ln(1+x)$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程；

(2) 设  $g(x) = f'(x)$ ，讨论函数  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的单调性；

(3) 证明：对任意的  $s, t \in (0, +\infty)$ ，有  $f(s+t) > f(s) + f(t)$ .

21. 已知  $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$  为有穷整数数列. 给定正整数  $m$ ，若对任意的  $n \in \{1, 2, \dots, m\}$ ，在  $Q$  中存在  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j} (j \geq 0)$ ，使得  $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$ ，则称  $Q$  为  $m$ -连续可表数列.

(1) 判断  $Q: 2, 1, 4$  是否为 5-连续可表数列？是否为 6-连续可表数列？说明理由；

(2) 若  $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$  为 8-连续可表数列，求证： $k$  的最小值为 4；

(3) 若  $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$  为 20-连续可表数列，且  $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$ ，求证： $k \geq 7$ .