

# 2017 年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

## 一、选择题. (每小题 5 分)

1. (5 分) 若集合  $A = \{x \mid -2 < x < 1\}$ ,  $B = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{x \mid -2 < x < -1\}$       B.  $\{x \mid -2 < x < 3\}$       C.  $\{x \mid -1 < x < 1\}$   
D.  $\{x \mid 1 < x < 3\}$

【考点】1E: 交集及其运算.

【专题】11: 计算题; 37: 集合思想; 5J: 集合.

【分析】根据已知中集合 A 和 B, 结合集合交集的定义, 可得答案.

【解答】解:  $\because$  集合  $A = \{x \mid -2 < x < 1\}$ ,  $B = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ ,

$$\therefore A \cap B = \{x \mid -2 < x < -1\}$$

故选: A.

【点评】本题考查的知识点集合的交集运算, 难度不大, 属于基础题.

2. (5 分) 若复数  $(1 - i)(a + i)$  在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 1)$       B.  $(-\infty, -1)$       C.  $(1, +\infty)$       D.  $(-1, +\infty)$

【考点】A1: 虚数单位 i、复数.

【专题】35: 转化思想; 59: 不等式的解法及应用; 5N: 数系的扩充和复数.

【分析】复数  $(1 - i)(a + i) = a + 1 + (1 - a)i$  在复平面内对应的点在第二象限,

$$\text{可得} \begin{cases} a+1 < 0 \\ 1-a > 0 \end{cases}, \text{解得 } a \text{ 范围.}$$

【解答】解: 复数  $(1 - i)(a + i) = a + 1 + (1 - a)i$  在复平面内对应的点在第二象限,

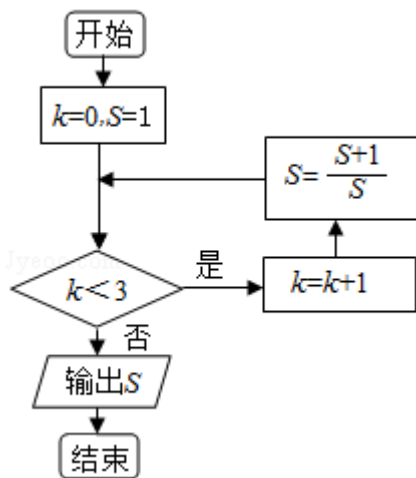
$$\therefore \begin{cases} a+1 < 0 \\ 1-a > 0 \end{cases}, \text{解得 } a < -1.$$

则实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -1)$ .

故选：B.

**【点评】** 本题考查了复数的运算法则、几何意义、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

3. (5 分) 执行如图所示的程序框图，输出的  $S$  值为 ( )



- A. 2                      B.  $\frac{3}{2}$                       C.  $\frac{5}{3}$                       D.  $\frac{8}{5}$

**【考点】** EF：程序框图.

**【专题】** 5K：算法和程序框图.

**【分析】** 由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量  $S$  的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

**【解答】** 解：当  $k=0$  时，满足进行循环的条件，执行完循环体后， $k=1$ ， $S=2$ ，  
 当  $k=1$  时，满足进行循环的条件，执行完循环体后， $k=2$ ， $S=\frac{3}{2}$ ，  
 当  $k=2$  时，满足进行循环的条件，执行完循环体后， $k=3$ ， $S=\frac{5}{3}$ ，  
 当  $k=3$  时，不满足进行循环的条件，  
 故输出结果为： $\frac{5}{3}$ ，

故选：C.

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环的次数不多，或有规律时，常采用模拟循环的方法解答.

4. (5分) 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \leq 3 \\ x+y \geq 2 \\ y \leq x \end{cases}$ , 则  $x+2y$  的最大值为 ( )

A. 1

B. 3

C. 5

D. 9

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】11: 计算题; 31: 数形结合; 35: 转化思想; 5T: 不等式.

【分析】画出约束条件的可行域，利用目标函数的最优解求解目标函数的最值即可.

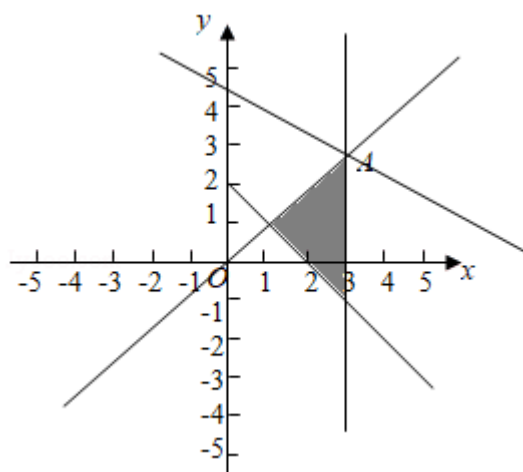
【解答】解:  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \leq 3 \\ x+y \geq 2 \\ y \leq x \end{cases}$  的可行域如图:

由可行域可知目标函数  $z=x+2y$  经过可行域的 A 时，取得最大值，由  $\begin{cases} x=3 \\ x=y \end{cases}$ ，可得

A (3, 3),

目标函数的最大值为:  $3+2 \times 3=9$ .

故选：D.



【点评】本题考查线性规划的简单应用，画出可行域判断目标函数的最优解是解题的关键.

5. (5分) 已知函数  $f(x) = 3^x - (\frac{1}{3})^x$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 是奇函数, 且在  $\mathbb{R}$  上是增函数      B. 是偶函数, 且在  $\mathbb{R}$  上是增函数  
C. 是奇函数, 且在  $\mathbb{R}$  上是减函数      D. 是偶函数, 且在  $\mathbb{R}$  上是减函数

【考点】3N: 奇偶性与单调性的综合.

【专题】2A: 探究型; 4O: 定义法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】由已知得  $f(-x) = -f(x)$ , 即函数  $f(x)$  为奇函数, 由函数  $y=3^x$  为增函数,  $y=(\frac{1}{3})^x$  为减函数, 结合“增”-“减”=“增”可得答案.

【解答】解:  $f(x) = 3^x - (\frac{1}{3})^x = 3^x - 3^{-x}$ ,

$$\therefore f(-x) = 3^{-x} - 3^x = -f(x),$$

即函数  $f(x)$  为奇函数,

又由函数  $y=3^x$  为增函数,  $y=(\frac{1}{3})^x$  为减函数,

故函数  $f(x) = 3^x - (\frac{1}{3})^x$  为增函数,

故选: A.

【点评】本题考查的知识点是函数的奇偶性, 函数的单调性, 是函数图象和性质的综合应用, 难度不大, 属于基础题.

6. (5分) 设  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  为非零向量, 则“存在负数  $\lambda$ , 使得  $\vec{m} = \lambda \vec{n}$ ”是“ $\vec{m} \cdot \vec{n} < 0$ ”的 ( )

- A. 充分而不必要条件      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件

【考点】29: 充分条件、必要条件、充要条件.

【专题】35: 转化思想; 5A: 平面向量及应用; 5L: 简易逻辑.

【分析】 $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  为非零向量, 存在负数  $\lambda$ , 使得  $\vec{m} = \lambda \vec{n}$ , 则向量  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  共线且方向相反, 可得  $\vec{m} \cdot \vec{n} < 0$ . 反之不成立, 非零向量  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  的夹角为钝角, 满足  $\vec{m} \cdot \vec{n} < 0$ , 而  $\vec{m} = \lambda \vec{n}$  不成立. 即可判断出结论.

【解答】解： $\vec{m}, \vec{n}$  为非零向量，存在负数  $\lambda$ ，使得  $\vec{m} = \lambda \vec{n}$ ，则向量  $\vec{m}, \vec{n}$  共线且方向相反，可得  $\vec{m} \cdot \vec{n} < 0$ 。

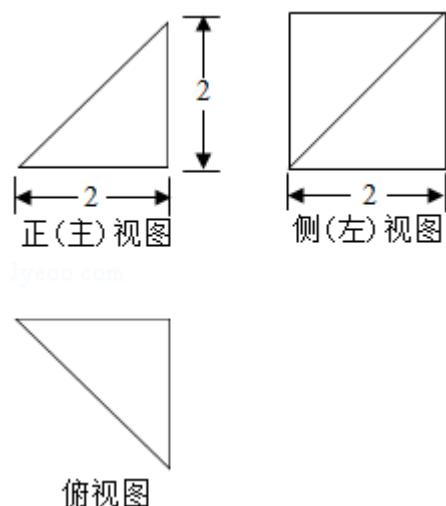
反之不成立，非零向量  $\vec{m}, \vec{n}$  的夹角为钝角，满足  $\vec{m} \cdot \vec{n} < 0$ ，而  $\vec{m} = \lambda \vec{n}$  不成立。

$\therefore \vec{m}, \vec{n}$  为非零向量，则“存在负数  $\lambda$ ，使得  $\vec{m} = \lambda \vec{n}$ ”是  $\vec{m} \cdot \vec{n} < 0$  的充分不必要条件。

故选：A。

【点评】本题考查了向量共线定理、向量夹角公式、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题。

7. (5 分) 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的最长棱的长度为 ( )



A.  $3\sqrt{2}$

B.  $2\sqrt{3}$

C.  $2\sqrt{2}$

D. 2

【考点】L1：由三视图求面积、体积。

【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5Q：立体几何。

【分析】根据三视图可得物体的直观图，结合图形可得最长的棱为 PA，根据勾股定理求出即可。

【解答】解：由三视图可得直观图，

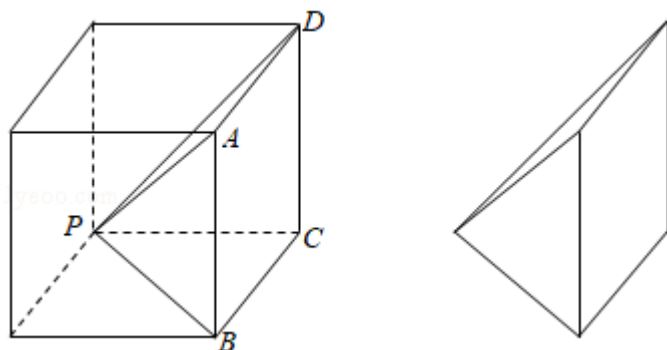
再四棱锥 P - ABCD 中，

最长的棱为 PA，

$$\text{即 } PA = \sqrt{PB^2 + PC^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$=2\sqrt{3},$$

故选：B.



【点评】本题考查了三视图的问题，关键画出物体的直观图，属于基础题.

8. (5 分) 根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限  $M$  约为  $3^{361}$ ，而可观测宇宙中普通物质的原子总数  $N$  约为  $10^{80}$ ，则下列各数中与  $\frac{M}{N}$  最接近的是 ( )

(参考数据： $\lg 3 \approx 0.48$ )

A.  $10^{33}$

B.  $10^{53}$

C.  $10^{73}$

D.  $10^{93}$

【考点】4G：指数式与对数式的互化.

【专题】11：计算题.

【分析】根据对数的性质： $T = a^{\log_a T}$ ，可得： $3 = 10^{\lg 3} \approx 10^{0.48}$ ，代入  $M$  将  $M$  也化为 10 为底的指数形式，进而可得结果.

【解答】解：由题意： $M \approx 3^{361}$ ， $N \approx 10^{80}$ ，

根据对数性质有： $3 = 10^{\lg 3} \approx 10^{0.48}$ ，

$$\therefore M \approx 3^{361} \approx (10^{0.48})^{361} \approx 10^{173},$$

$$\therefore \frac{M}{N} \approx \frac{10^{173}}{10^{80}} = 10^{93},$$

故选：D.

【点评】本题解题关键是将一个给定正数  $T$  写成指数形式： $T = a^{\log_a T}$ ，考查指数形式与对数形式的互化，属于简单题.

## 二、填空题（每小题 5 分）

9.（5 分）若双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$  的离心率为  $\sqrt{3}$ ，则实数  $m = \underline{2}$ .

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用双曲线的离心率，列出方程求和求解  $m$  即可.

【解答】解：双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$  ( $m > 0$ ) 的离心率为  $\sqrt{3}$ ,

可得：  $\frac{\sqrt{1+m}}{1} = \sqrt{3}$ ,

解得  $m = 2$ .

故答案为：2.

【点评】本题考查双曲线的简单性质，考查计算能力.

10.（5 分）若等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  满足  $a_1 = b_1 = -1$ ， $a_4 = b_4 = 8$ ，则  $\frac{a_2}{b_2} = \underline{1}$ .

【考点】8M：等差数列与等比数列的综合.

【专题】11：计算题；35：转化思想；54：等差数列与等比数列.

【分析】利用等差数列求出公差，等比数列求出公比，然后求解第二项，即可得到结果.

【解答】解：等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  满足  $a_1 = b_1 = -1$ ， $a_4 = b_4 = 8$ ,

设等差数列的公差为  $d$ ，等比数列的公比为  $q$ .

可得：  $8 = -1 + 3d$ ， $d = 3$ ， $a_2 = 2$ ;

$8 = -q^3$ ，解得  $q = -2$ ， $\therefore b_2 = 2$ .

可得  $\frac{a_2}{b_2} = 1$ .

故答案为：1.

【点评】 本题考查等差数列以及等比数列的通项公式的应用，考查计算能力.

11. (5 分) 在极坐标系中，点 A 在圆  $\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 4 = 0$  上，点 P 的坐标为 (1, 0)，则  $|AP|$  的最小值为 1.

【考点】 Q4: 简单曲线的极坐标方程.

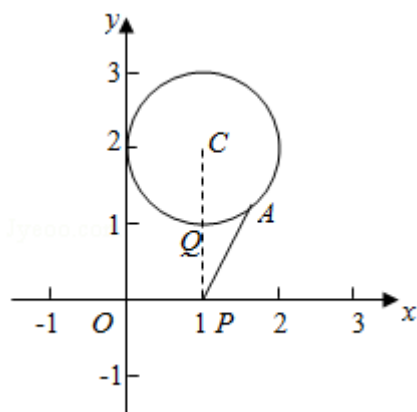
【专题】 31: 数形结合; 44: 数形结合法.

【分析】 先将圆的极坐标方程化为标准方程，再运用数形结合的方法求出圆上的点到点 P 的距离的最小值.

【解答】 解：设圆  $\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 4 = 0$  为圆 C，将圆 C 的极坐标方程化为：

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0,$$

再化为标准方程：  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ ;



如图，当 A 在 CP 与  $\odot C$  的交点 Q 处时， $|AP|$  最小为：

$$|AP|_{\min} = |CP| - r_C = 2 - 1 = 1,$$

故答案为：1.

【点评】 本题主要考查曲线的极坐标方程和圆外一点到圆上一点的距离的最值，难度不大.

12. (5 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中，角  $\alpha$  与角  $\beta$  均以  $Ox$  为始边，它们的终边关于  $y$  轴对称，若  $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ，则  $\cos(\alpha - \beta) = \underline{-\frac{7}{9}}$ .

【考点】 GP: 两角和与差的三角函数.



【专题】11：计算题；33：函数思想；4R：转化法；56：三角函数的求值.

【分析】方法一：根据角的对称得到  $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{3}$ ,  $\cos\alpha=-\cos\beta$ , 以及两角差的

余弦公式即可求出

方法二：分  $\alpha$  在第一象限, 或第二象限, 根据同角的三角函数的关系以及两角差的余弦公式即可求出

【解答】解：方法一： $\because$  角  $\alpha$  与角  $\beta$  均以  $Ox$  为始边, 它们的终边关于  $y$  轴对称,

$$\therefore \sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{3}, \cos\alpha=-\cos\beta,$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha-1=\frac{2}{9}-1=-\frac{7}{9}$$

方法二： $\because \sin\alpha=\frac{1}{3}$ ,

当  $\alpha$  在第一象限时,  $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$\because \alpha, \beta$  角的终边关于  $y$  轴对称,

$\therefore \beta$  在第二象限时,  $\sin\beta=\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ,  $\cos\beta=-\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{7}{9}$$

$\therefore \because \sin\alpha=\frac{1}{3}$ ,

当  $\alpha$  在第二象限时,  $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$\because \alpha, \beta$  角的终边关于  $y$  轴对称,

$\therefore \beta$  在第一象限时,  $\sin\beta=\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ,  $\cos\beta=-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{7}{9}$$

综上所述  $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{7}{9}$ ,

故答案为： $-\frac{7}{9}$

【点评】本题考查了两角差的余弦公式, 以及同角的三角函数的关系, 需要分类讨论, 属于基础题

13. (5 分) 能够说明“设  $a, b, c$  是任意实数. 若  $a>b>c$ , 则  $a+b>c$ ”是假命题的一组整数  $a, b, c$  的值依次为 -1, -2, -3.

【考点】FC：反证法.

【专题】11：计算题；35：转化思想；40：定义法；5L：简易逻辑.

【分析】设  $a, b, c$  是任意实数. 若  $a > b > c$ , 则  $a+b > c$  是假命题, 则若  $a > b > c$ , 则  $a+b \leq c$  是真命题, 举例即可, 本题答案不唯一

【解答】解: 设  $a, b, c$  是任意实数. 若  $a > b > c$ , 则  $a+b > c$  是假命题, 则若  $a > b > c$ , 则  $a+b \leq c$  是真命题,

可设  $a, b, c$  的值依次  $-1, -2, -3$ , (答案不唯一),

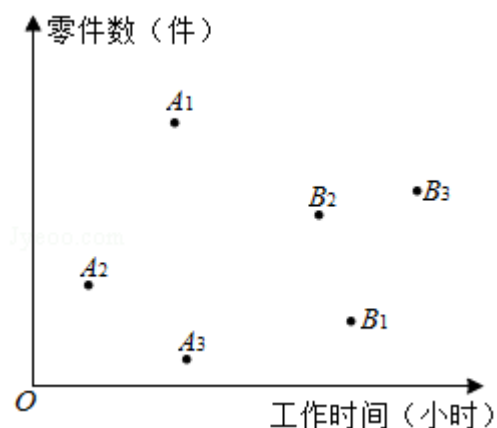
故答案为:  $-1, -2, -3$

【点评】本题考查了命题的真假, 举例说明即可, 属于基础题.

14. (5 分) 三名工人加工同一种零件, 他们在一天中的工作情况如图所示, 其中  $A_i$  的横、纵坐标分别为第  $i$  名工人上午的工作时间和加工的零件数, 点  $B_i$  的横、纵坐标分别为第  $i$  名工人下午的工作时间和加工的零件数,  $i=1, 2, 3$ .

(1) 记  $Q_i$  为第  $i$  名工人在这一天中加工的零件总数, 则  $Q_1, Q_2, Q_3$  中最大的是  $Q_1$ .

(2) 记  $p_i$  为第  $i$  名工人在这一天中平均每小时加工的零件数, 则  $p_1, p_2, p_3$  中最大的是  $p_2$ .



【考点】3A：函数的图象与图象的变换.

【专题】11：计算题；27：图表型；35：转化思想；51：函数的性质及应用.

【分析】(1) 若  $Q_i$  为第  $i$  名工人在这一天中加工的零件总数, 则  $Q_i = A_i$  的纵坐标

$+B_i$  的纵坐标；进而得到答案.

(2) 若  $p_i$  为第  $i$  名工人在这一天中平均每小时加工的零件数，则  $p_i$  为  $A_iB_i$  中点与原点连线的斜率；进而得到答案.

**【解答】**解：(1) 若  $Q_i$  为第  $i$  名工人在这一天中加工的零件总数，

$Q_1=A_1$  的纵坐标 $+B_1$  的纵坐标；

$Q_2=A_2$  的纵坐标 $+B_2$  的纵坐标，

$Q_3=A_3$  的纵坐标 $+B_3$  的纵坐标，

由已知中图象可得： $Q_1, Q_2, Q_3$  中最大的是  $Q_1$ ，

(2) 若  $p_i$  为第  $i$  名工人在这一天中平均每小时加工的零件数，

则  $p_i$  为  $A_iB_i$  中点与原点连线的斜率，

故  $p_1, p_2, p_3$  中最大的是  $p_2$

故答案为： $Q_1, p_2$

**【点评】** 本题考查的知识点是函数的图象，分析出  $Q_i$  和  $p_i$  的几何意义，是解答的关键.

### 三、解答题

15. (13 分) 在  $\triangle ABC$  中， $\angle A=60^\circ$ ， $c=\frac{3}{7}a$ .

(1) 求  $\sin C$  的值；

(2) 若  $a=7$ ，求  $\triangle ABC$  的面积.

**【考点】** HP：正弦定理.

**【专题】** 11：计算题；35：转化思想；40：定义法；58：解三角形.

**【分析】** (1) 根据正弦定理即可求出答案，

(2) 根据同角的三角函数的关系求出  $\cos C$ ，再根据两角和正弦公式求出  $\sin B$ ，根据面积公式计算即可.

**【解答】**解：(1)  $\angle A=60^\circ$ ， $c=\frac{3}{7}a$ ，

由正弦定理可得  $\sin C=\frac{3}{7}\sin A=\frac{3}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ ，

(2)  $a=7$ ，则  $c=3$ ，

$$\therefore C < A,$$

$$\because \sin^2 C + \cos^2 C = 1, \text{ 又由 (1) 可得 } \cos C = \frac{13}{14},$$

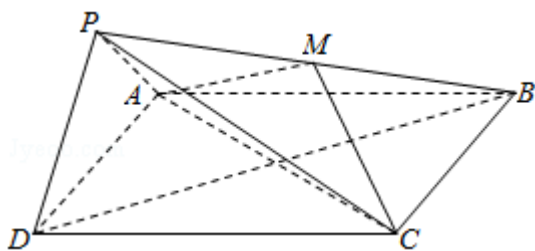
$$\therefore \sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{13}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 6\sqrt{3}.$$

【点评】本题考查了正弦定理和两角和正弦公式和三角形的面积公式，属于基础题

16. (14 分) 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为正方形，平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ，点  $M$  在线段  $PB$  上， $PD \parallel$  平面  $MAC$ ， $PA=PD=\sqrt{6}$ ， $AB=4$ .

- (1) 求证： $M$  为  $PB$  的中点；
- (2) 求二面角  $B-PD-A$  的大小；
- (3) 求直线  $MC$  与平面  $BDP$  所成角的正弦值.



【考点】MI：直线与平面所成的角；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】15：综合题；31：数形结合；41：向量法；5G：空间角.

【分析】(1) 设  $AC \cap BD = O$ ，则  $O$  为  $BD$  的中点，连接  $OM$ ，利用线面平行的性质证明  $OM \parallel PD$ ，再由平行线截线段成比例可得  $M$  为  $PB$  的中点；

(2) 取  $AD$  中点  $G$ ，可得  $PG \perp AD$ ，再由面面垂直的性质可得  $PG \perp$  平面  $ABCD$ ，则  $PG \perp AD$ ，连接  $OG$ ，则  $PG \perp OG$ ，再证明  $OG \perp AD$ . 以  $G$  为坐标原点，分别以  $GD$ 、 $GO$ 、 $GP$  所在直线为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴建立空间直角坐标系，求出平面  $PBD$  与平面  $PAD$  的一个法向量，由两法向量所成角的大小可得二面角  $B-PD-A$  的大小；

(3) 求出  $\overrightarrow{CM}$  的坐标，由  $\overrightarrow{CM}$  与平面  $PBD$  的法向量所成角的余弦值的绝对值可得直线  $MC$  与平面  $BDP$  所成角的正弦值.

【解答】(1) 证明：如图，设  $AC \cap BD = O$ ，

$\because ABCD$  为正方形， $\therefore O$  为  $BD$  的中点，连接  $OM$ ，

$\because PD \parallel$  平面  $MAC$ ， $PD \subset$  平面  $PBD$ ，平面  $PBD \cap$  平面  $AMC = OM$ ，

$\therefore PD \parallel OM$ ，则  $\frac{BO}{BD} = \frac{BM}{BP}$ ，即  $M$  为  $PB$  的中点；

(2) 解：取  $AD$  中点  $G$ ，

$\because PA = PD$ ， $\therefore PG \perp AD$ ，

$\because$  平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ，且平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$ ，

$\therefore PG \perp$  平面  $ABCD$ ，则  $PG \perp AD$ ，连接  $OG$ ，则  $PG \perp OG$ ，

由  $G$  是  $AD$  的中点， $O$  是  $AC$  的中点，可得  $OG \parallel DC$ ，则  $OG \perp AD$ 。

以  $G$  为坐标原点，分别以  $GD$ 、 $GO$ 、 $GP$  所在直线为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴建立空间直角坐标系，

由  $PA = PD = \sqrt{6}$ ， $AB = 4$ ，得  $D(2, 0, 0)$ ， $A(-2, 0, 0)$ ， $P(0, 0, \sqrt{2})$ ， $C(2, 4, 0)$ ， $B(-2, 4, 0)$ ， $M(-1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，

$\overrightarrow{DP} = (-2, 0, \sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{DB} = (-4, 4, 0)$ 。

设平面  $PBD$  的一个法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ ，

则由  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$ ，得  $\begin{cases} -2x + \sqrt{2}z = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases}$ ，取  $z = \sqrt{2}$ ，得  $\vec{m} = (1, 1, \sqrt{2})$ 。

取平面  $PAD$  的一个法向量为  $\vec{n} = (0, 1, 0)$ 。

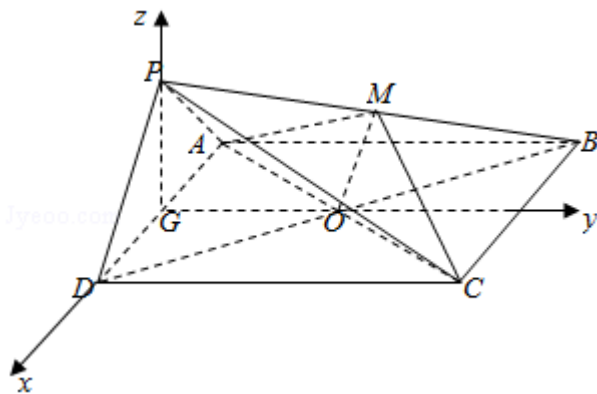
$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$  二面角  $B - PD - A$  的大小为  $60^\circ$ ；

(3) 解： $\overrightarrow{CM} = (-3, -2, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，平面  $BDP$  的一个法向量为  $\vec{m} = (1, 1, \sqrt{2})$ 。

$\therefore$  直线  $MC$  与平面  $BDP$  所成角的正弦值为  $|\cos \langle \overrightarrow{CM}, \vec{m} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{CM} \cdot \vec{m}}{|\overrightarrow{CM}| |\vec{m}|} \right| =$

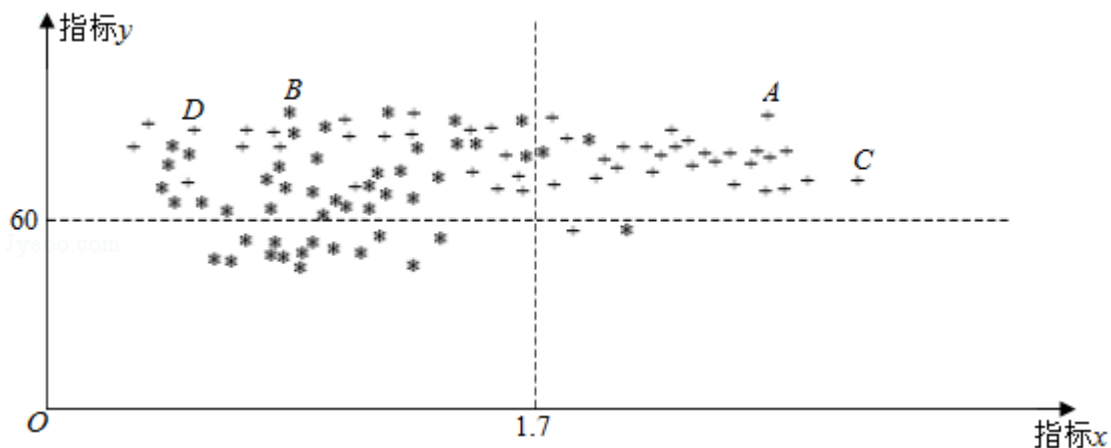
$$\left| \frac{-2}{\sqrt{9+4+\frac{1}{2}} \times 1} \right| = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$



【点评】本题考查线面角与面面角的求法，训练了利用空间向量求空间角，属中档题.

17. (13 分) 为了研究一种新药的疗效，选 100 名患者随机分成两组，每组各 50 名，一组服药，另一组不服药. 一段时间后，记录了两组患者的生理指标  $x$  和  $y$  的数据，并制成如图，其中“\*”表示服药者，“+”表示未服药者.

- (1) 从服药的 50 名患者中随机选出一人，求此人指标  $y$  的值小于 60 的概率；
- (2) 从图中 A, B, C, D 四人中随机选出两人，记  $\xi$  为选出的两人中指标  $x$  的值大于 1.7 的人数，求  $\xi$  的分布列和数学期望  $E(\xi)$ ；
- (3) 试判断这 100 名患者中服药者指标  $y$  数据的方差与未服药者指标  $y$  数据的方差的大小. (只需写出结论)



【考点】CG：离散型随机变量及其分布列；CH：离散型随机变量的期望与方差.

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；51：概率与统计.

- 【分析】**（1）由图求出在 50 名服药患者中，有 15 名患者指标  $y$  的值小于 60，由此能求出从服药的 50 名患者中随机选出一人，此人指标小于 60 的概率.
- （2）由图知：A、C 两人指标  $x$  的值大于 1.7，而 B、D 两人则小于 1.7，可知在四人中随机选项出的 2 人中指标  $x$  的值大于 1.7 的人数  $\xi$  的可能取值为 0，1，2，分别求出相应的概率，由此能求出  $\xi$  的分布列和  $E(\xi)$ .
- （3）由图知 100 名患者中服药者指标  $y$  数据的方差比未服药者指标  $y$  数据的方差大.

**【解答】**解：（1）由图知：在 50 名服药患者中，有 15 名患者指标  $y$  的值小于 60，

答：从服药的 50 名患者中随机选出一人，此人指标小于 60 的概率为：

$$p = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}.$$

（2）由图知：A、C 两人指标  $x$  的值大于 1.7，而 B、D 两人则小于 1.7，可知在四人中随机选项出的 2 人中指标  $x$  的值大于 1.7 的人数  $\xi$  的可能取值为 0，1，2，

$$P(\xi=0) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6},$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3},$$

$$P(\xi=2) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6},$$

$\therefore \xi$  的分布列如下：

$\xi$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{答：} E(\xi) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 1.$$

（3）答：由图知 100 名患者中服药者指标  $y$  数据的方差比未服药者指标  $y$  数据的方差大.

**【点评】** 本题考查概率的求法，考查离散型随机变量的分布列、数学期望、方差等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形

结合思想、化归与转化思想，是中档题.

18. (14 分) 已知抛物线  $C: y^2=2px$  过点  $P(1, 1)$ . 过点  $(0, \frac{1}{2})$  作直线  $l$  与抛物线  $C$  交于不同的两点  $M, N$ , 过点  $M$  作  $x$  轴的垂线分别与直线  $OP$ 、 $ON$  交于点  $A, B$ , 其中  $O$  为原点.

(1) 求抛物线  $C$  的方程, 并求其焦点坐标和准线方程;

(2) 求证:  $A$  为线段  $BM$  的中点.

【考点】K8: 抛物线的性质; KN: 直线与抛物线的综合.

【专题】11: 计算题; 34: 方程思想; 44: 数形结合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】(1) 根据抛物线过点  $P(1, 1)$ . 代值求出  $p$ , 即可求出抛物线  $C$  的方程, 焦点坐标和准线方程;

(2) 设过点  $(0, \frac{1}{2})$  的直线方程为  $y=kx+\frac{1}{2}$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ , 根据韦达定理得到  $x_1+x_2=\frac{1-k}{k^2}$ ,  $x_1x_2=-\frac{1}{4k^2}$ , 根据中点的定义即可证明.

【解答】解: (1)  $\because y^2=2px$  过点  $P(1, 1)$ ,

$$\therefore 1=2p,$$

$$\text{解得 } p=\frac{1}{2},$$

$$\therefore y^2=x,$$

$$\therefore \text{焦点坐标为 } (\frac{1}{4}, 0), \text{ 准线为 } x=-\frac{1}{4},$$

(2) 证明: 设过点  $(0, \frac{1}{2})$  的直线方程为

$$y=kx+\frac{1}{2}, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\therefore \text{直线 } OP \text{ 为 } y=x, \text{ 直线 } ON \text{ 为: } y=\frac{y_2}{x_2}x,$$

$$\text{由题意知 } A(x_1, x_1), B(x_1, \frac{x_1 y_2}{x_2}),$$



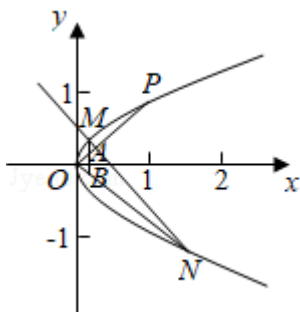
$$\text{由} \begin{cases} y=kx+\frac{1}{2}, \\ y^2=x \end{cases} \text{, 可得 } k^2x^2+(k-1)x+\frac{1}{4}=0,$$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{1-k}{k^2}, \quad x_1x_2=\frac{1}{4k^2}$$

$$\therefore y_1+\frac{x_1y_2}{x_2}=kx_1+\frac{1}{2}+\frac{x_1(kx_2+\frac{1}{2})}{x_2}=2kx_1+\frac{x_1+x_2}{2x_2}=2kx_1+\frac{\frac{1-k}{k^2}}{2 \times \frac{1}{4k^2x_1}}=2kx_1+(1-k)$$

$$\bullet 2x_1=2x_1,$$

$\therefore A$  为线段  $BM$  的中点.



**【点评】** 本题考查了抛物线的简单性质，以及直线和抛物线的关系，灵活利用韦达定理和中点的定义，属于中档题.

19. (13 分) 已知函数  $f(x) = e^x \cos x - x$ .

(1) 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(2) 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的最大值和最小值.

**【考点】** 6E: 利用导数研究函数的最值; 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

**【专题】** 34: 方程思想; 48: 分析法; 53: 导数的综合应用.

**【分析】** (1) 求出  $f(x)$  的导数, 可得切线的斜率和切点, 由点斜式方程即可得到所求方程;

(2) 求出  $f(x)$  的导数, 再令  $g(x) = f'(x)$ , 求出  $g(x)$  的导数, 可得  $g(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  的单调性, 即可得到  $f(x)$  的单调性, 进而得到  $f(x)$  的最

值.

**【解答】**解：(1) 函数  $f(x) = e^x \cos x - x$  的导数为  $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$ ，  
可得曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线斜率为  $k=e^0 (\cos 0 - \sin 0) - 1=0$ ，  
切点为  $(0, e^0 \cos 0 - 0)$ ，即为  $(0, 1)$ ，

曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y=1$ ；

(2) 函数  $f(x) = e^x \cos x - x$  的导数为  $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$ ，

令  $g(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$ ，

则  $g(x)$  的导数为  $g'(x) = e^x (\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$ ，

当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，可得  $g'(x) = -2e^x \sin x \leq 0$ ，

即有  $g(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  递减，可得  $g(x) \leq g(0) = 0$ ，

则  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  递减，

即有函数  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的最大值为  $f(0) = e^0 \cos 0 - 0 = 1$ ；

最小值为  $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ 。

**【点评】** 本题考查导数的运用：求切线的方程和单调区间、最值，考查化简整理的运算能力，正确求导和运用二次求导是解题的关键，属于中档题。

20. (13 分) 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  是两个等差数列，记  $c_n = \max\{b_1 - a_1 n, b_2 - a_2 n, \dots, b_n - a_n n\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )，其中  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  表示  $x_1, x_2, \dots, x_s$  这  $s$  个数中最大的数。

(1) 若  $a_n = n$ ,  $b_n = 2n - 1$ ，求  $c_1, c_2, c_3$  的值，并证明  $\{c_n\}$  是等差数列；

(2) 证明：或者对任意正数  $M$ ，存在正整数  $m$ ，当  $n \geq m$  时， $\frac{c_n}{n} > M$ ；或者存在正整数  $m$ ，使得  $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$  是等差数列。

**【考点】** 83：等差数列的性质；8B：数列的应用。

**【专题】** 32：分类讨论；4R：转化法；54：等差数列与等比数列。

**【分析】** (1) 分别求得  $a_1=1, a_2=2, a_3=3, b_1=1, b_2=3, b_3=5$ ，代入即可求得  $c_1, c_2, c_3$ ；由  $(b_k - na_k) - (b_1 - na_1) \leq 0$ ，则  $b_1 - na_1 \geq b_k - na_k$ ，则

$c_n = b_1 - na_1 = 1 - n$ ,  $c_{n+1} - c_n = -1$  对  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  均成立;

(2) 由  $b_i - a_in = [b_1 + (i-1)d_1] - [a_1 + (i-1)d_2] \times n = (b_1 - a_1n) + (i-1)(d_2 - d_1 \times n)$ , 分类讨论  $d_1=0$ ,  $d_1>0$ ,  $d_1<0$  三种情况进行讨论根据等差数列的性质, 即可求得使得  $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$  是等差数列; 设  $\frac{c_n}{n} = An + B + \frac{C}{n}$  对任意正整数  $M$ , 存在正整数  $m$ , 使得  $n \geq m$ ,  $\frac{c_n}{n} > M$ , 分类讨论, 采用放缩法即可求得因此对任意正数  $M$ , 存在正整数  $m$ , 使得当  $n \geq m$  时,  $\frac{c_n}{n} > M$ .

【解答】解: (1)  $a_1=1, a_2=2, a_3=3, b_1=1, b_2=3, b_3=5$ ,

当  $n=1$  时,  $c_1 = \max\{b_1 - a_1\} = \max\{0\} = 0$ ,

当  $n=2$  时,  $c_2 = \max\{b_1 - 2a_1, b_2 - 2a_2\} = \max\{-1, -1\} = -1$ ,

当  $n=3$  时,  $c_3 = \max\{b_1 - 3a_1, b_2 - 3a_2, b_3 - 3a_3\} = \max\{-2, -3, -4\} = -2$ ,

下面证明: 对  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , 且  $n \geq 2$ , 都有  $c_n = b_1 - na_1$ ,

当  $n \in \mathbb{N}^*$ , 且  $2 \leq k \leq n$  时,

则  $(b_k - na_k) - (b_1 - na_1)$ ,

$= [(2k-1) - nk] - 1 + n$ ,

$= (2k-2) - n(k-1)$ ,

$= (k-1)(2-n)$ , 由  $k-1 > 0$ , 且  $2-n \leq 0$ ,

则  $(b_k - na_k) - (b_1 - na_1) \leq 0$ , 则  $b_1 - na_1 \geq b_k - na_k$ ,

因此, 对  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , 且  $n \geq 2$ ,  $c_n = b_1 - na_1 = 1 - n$ ,

$c_{n+1} - c_n = -1$ ,

$\therefore c_2 - c_1 = -1$ ,

$\therefore c_{n+1} - c_n = -1$  对  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  均成立,

$\therefore$  数列  $\{c_n\}$  是等差数列;

(2) 证明: 设数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的公差分别为  $d_1, d_2$ , 下面考虑的  $c_n$  取值,

由  $b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn$ ,

考虑其中任意  $b_i - a_in$ , ( $i \in \mathbb{N}^*$ , 且  $1 \leq i \leq n$ ),

则  $b_i - a_in = [b_1 + (i-1)d_1] - [a_1 + (i-1)d_2] \times n$ ,

$= (b_1 - a_1n) + (i-1)(d_2 - d_1 \times n)$ ,

下面分  $d_1=0, d_1>0, d_1<0$  三种情况进行讨论,

①若  $d_1=0$ , 则  $b_i - a_i n = (b_1 - a_1 n) + (i - 1) d_2$ ,

当若  $d_2 \leq 0$ , 则  $(b_i - a_i n) - (b_1 - a_1 n) = (i - 1) d_2 \leq 0$ ,

则对于给定的正整数  $n$  而言,  $c_n = b_1 - a_1 n$ , 此时  $c_{n+1} - c_n = -a_1$ ,

$\therefore$  数列  $\{c_n\}$  是等差数列;

当  $d_2 > 0$ ,  $(b_i - a_i n) - (b_n - a_n n) = (i - n) d_2 > 0$ ,

则对于给定的正整数  $n$  而言,  $c_n = b_n - a_n n = b_1 - a_1 n$ ,

此时  $c_{n+1} - c_n = d_2 - a_1$ ,

$\therefore$  数列  $\{c_n\}$  是等差数列;

此时取  $m=1$ , 则  $c_1, c_2, \dots$  是等差数列, 命题成立;

②若  $d_1 > 0$ , 则此时  $-d_1 n + d_2$  为一个关于  $n$  的一次项系数为负数的一次函数,

故必存在  $m \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $n \geq m$  时,  $-d_1 n + d_2 < 0$ ,

则当  $n \geq m$  时,  $(b_i - a_i n) - (b_1 - a_1 n) = (i - 1)(-d_1 n + d_2) \leq 0$ , ( $i \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n$ ),

因此当  $n \geq m$  时,  $c_n = b_1 - a_1 n$ ,

此时  $c_{n+1} - c_n = -a_1$ , 故数列  $\{c_n\}$  从第  $m$  项开始为等差数列, 命题成立;

③若  $d_1 < 0$ , 此时  $-d_1 n + d_2$  为一个关于  $n$  的一次项系数为正数的一次函数,

故必存在  $s \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $n \geq s$  时,  $-d_1 n + d_2 > 0$ ,

则当  $n \geq s$  时,  $(b_i - a_i n) - (b_n - a_n n) = (i - 1)(-d_1 n + d_2) \leq 0$ , ( $i \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n$ ),

因此, 当  $n \geq s$  时,  $c_n = b_n - a_n n$ ,

$$\begin{aligned} \text{此时} &= \frac{b_n - a_n n}{n} = -a_n + \frac{b_n}{n}, \\ &= -d_2 n + (d_1 - a_1 + d_2) + \frac{b_1 - d_2}{n}, \end{aligned}$$

令  $-d_1 = A > 0$ ,  $d_1 - a_1 + d_2 = B$ ,  $b_1 - d_2 = C$ ,

下面证明:  $\frac{c_n}{n} = An + B + \frac{C}{n}$  对任意正整数  $M$ , 存在正整数  $m$ , 使得  $n \geq m$ ,  $\frac{c_n}{n} > M$ ,

若  $C \geq 0$ , 取  $m = \left[ \frac{|M-B|}{A} + 1 \right]$ ,  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数,

当  $n \geq m$  时,  $\frac{c_n}{n} \geq An + B \geq Am + B = A \left[ \frac{|M-B|}{A} + 1 \right] + B > A \cdot \frac{M-B}{A} + B = M$ ,

此时命题成立;

若  $C < 0$ , 取  $m = \left[ \frac{|M-C-B|}{A} \right] + 1$ ,

当  $n \geq m$  时,

$$\frac{c_n}{n} \geq An + B + \frac{C}{n} \geq Am + B + C > A \cdot \frac{|M-C-B|}{A} + B + C \geq M - C - B + B + C = M,$$

此时命题成立,

因此对任意正数  $M$ , 存在正整数  $m$ , 使得当  $n \geq m$  时,  $\frac{c_n}{n} > M$ ;

综合以上三种情况, 命题得证.

**【点评】** 本题考查数列的综合应用, 等差数列的性质, 考查与不等式的综合应用, 考查“放缩法”的应用, 考查学生分析问题及解决问题的能力, 考查分类讨论及转化思想, 考查计算能力, 属于难题.