2013年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷文科）

[学科网试卷总评]

2013年安徽文科卷相对于2012年安徽文科卷的难度来说有所加大。

从试卷命题特点方面：（1）对主干知识（函数、数列、圆锥曲线、立体几何、三角函数、概率统计）的重点考查，尤其是函数，考了四道小题，一道大题，而且函数小题两道是以压轴题的形式出现；（2）注重能力的考查：一方面在知识的交汇处命题，如第19题；另一方面重视对数学能力和思想方法的考查，如计算能力考查（第9,13,17,21题），转化思想的考查（第8,10,20题），数形结合的考查（第6，8，10题）等等；（3）注重理论联系实际，如第17题概率统计；（4）注重对创新意识的考查，如第21题。

从试卷难度方面：选择填空跟以往的试卷一样从易到难，但在做的过程中不是那么顺畅。第1题考查复数，难度不大；第2题考查集合的交与补以及不等式求法；第3题程序框图，简单；第4题充分必要条件，容易题；第5题古典概型，只要考生能够理解题意，基本没问题；第6题直线与圆的方程，考查圆中弦长的求法，第7题等差数列基本量的求解，简单；第11题考查函数定义域的求法，简单；第12题常规的线性规划题，难度不大；第14题，抽象函数解析式的求解，难度中等。选择题第8,9,10题，填空题第13,15题难度加大。第8题考查函数转化思想以及数形结合，难度很大，考生不一定能想到方法；第9题三角函数，对正弦余弦定理的考查，计算量大；第10题函数零点的考查，难度很大，不容易做好；第13题平面向量，数量积的运算，需要细心；第15题立体几何的截面问题，是考生平时学习中最不容易弄明白的地方。大题第16题三角函数：容易，主要考查恒等变形，三角函数图像变换，考生需注意图像变换时语言的描叙；大题第17题概率统计：难度不大，对计算的要求很高，在那种高压环境下必须有个良好的心态才能做好；大题第18题立体几何：难度中等，常规性的考查了三棱锥体积的求法，在选择顶点的过程中，需要考生注意看清垂直关系；大题第19题数列：综合性强，将函数求导利用到数列求通项中，只要学生能够细心，拿下这道题还是没有问题的；大题第20题函数：题型新颖，考查考生对新问题冷静处理的能力，对区间长度的准确理解；大题第21题：难度较大，计算量大，点比较多，也容易把考生绕进去，要将这题做好，需要一定的计算基本功。

一．选择题选择题：本大题共10小题。每小题5分，共50分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）设i是虚数单位，若复数$a-\dfrac{10}{3-i}(a\in R)$是纯虚数，则$a$的值为　　　　（　）

（A）-3　　　　（B）-1　　　　（C）1　　　　（D）3

【答案】 D

【解析】 $a-\dfrac{10}{3-i}=a-\dfrac{10(3+i)}{(3-i)(3+i)}=a-\dfrac{10(3+i)}{9-i^2}=a-\dfrac{10(3+i)}{10}=a-(3+i)=(a-3)-i$，所以

a=3，

故选择 D

【学科网考点定位】 考查纯虚数的概念，及复数的运算，属于简单题.

（2）已知$A=\{x\,|\,x+1>0\},B=\{-2,-1,0,1\}$，则$(C_RA)\cap B=$　　　　（　　）

（A）$\{-2,-1\}$　　　　（B）$\{-2\}$

（C）$\{-1,0,1\}$　　　　（D）$\{0,1\}$

【答案】 A

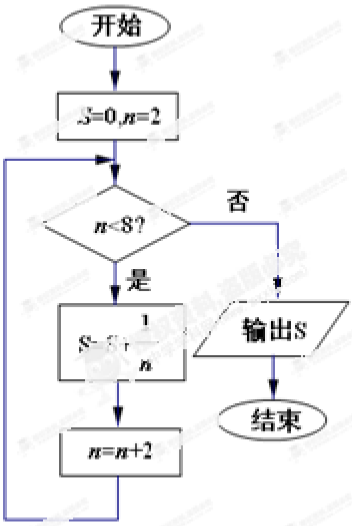
【解析】 A：$x>-1$，$C_RA=\{x\,|\,x\le -1\}$，$(C_RA)\cap B=\{-1,-2\}$，所以答案选 A

【学科网考点定位】 考查集合的交集和补集，属于简单题.

（3）如图所示，程序据图（算法流程图）的输出结果为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　　　　（B）$\dfrac{1}{6}$

（C）$\dfrac{11}{12}$　　　　（D）$\dfrac{25}{24}$



第（3）题图

【答案】C

【解析】$n=2,s=0,s=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$;

$n=4,s=\frac{1}{2},s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$;

$n=6,s=\frac{3}{4},s=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$

$n=8,s=\frac{11}{12}$，输出

所以答案选择 C

【学科网考点定位】本题考查算法框图的识别，逻辑思维，属于中等难题.

（4）“$(2x-1)x=0$”是“$x=0$”的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】$(2x-1)x=0, x=0$或$\frac{1}{2}$，所以答案选择 B

【学科网考点定位】考查充分条件和必要条件，属于简单题.

（5）若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人，这五人被录用的机会均等，则甲或乙被

录用的概率为（　　）

（A）$\frac{2}{3}$　　(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\dfrac{3}{5}$　　　　（D）$\dfrac{9}{10}$

【答案】D

【解析】总的可能性有 10 种，甲被录用乙没被录用的可能性 3 种，乙被录用甲没被录用的可能性 3 种，甲乙都被录用的可能性 3 种，所以最后的概率 $p=\dfrac{3+3+3}{10}=1$

【学科网考点定位】考查古典概型的概念，以及对一些常见问题的分析，简单题.

（6）直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 被圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦长为（　　）

（A）1　　　　（B）2

（C）4　　　　（D）$4\sqrt{6}$

【答案】C

【解析】圆心 $(1,2)$，圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|1+4-5+\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}=1$，半径 $r=\sqrt{5}$，所以最后弦长为 $2\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=4$.

【学科网考点定位】考查解析几何初步知识，直线与圆的位置关系，点到直线的距离，简单题.

（7）设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_8=4a_3, a_7=-2$，则 $a_9=$（　　）

（A）-6　　　　（B）-4

（C）-2　　　　（D）2

【答案】A

【解析】

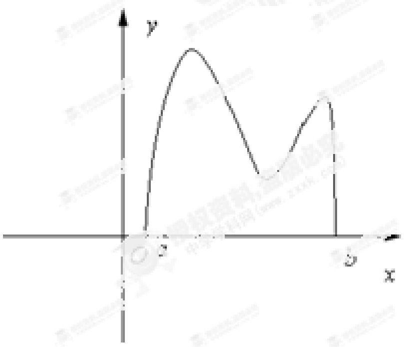
$$S_8=4a_3\Rightarrow\frac{8(a_1+a_8)}{2}=4a_3\Rightarrow a_3+a_6=a_3$$
$$\therefore a_6=0$$
$$d=-2$$
$$a_9=a_7+2d=-6$$

【学科网考点定位】考查等差数列通项公式和前 n 项公式的应用，以及数列基本量的求解.

(8) 函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示，在区间 $[a,b]$ 上可找到 $n(n\geq 2)$ 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$，则 n 的取值范围为（　　）

(A) $\{2,3\}$　　(B) $\{2,3,4\}$

(C) $\{3,4\}$　　(D) $\{3,4,5\}$



【答案】B

【解析】

$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_1)-0}{x_1-0}$表示$(x_1,f(x_1))$到原点的斜率；

$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}$表示$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),\cdots,(x_n,f(x_n))$与原点连线的斜率，而$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),\cdots,(x_n,f(x_n))$在曲线图像上，故只需考虑经过原点的直线与曲线的交点有几个，很明显有3个，故选B.

【学科网考点定位】考查数学中的转化思想，对函数的图像认识.

(9) 设ΔABC的内角A,B,C所对边的长分别为a,b,c，若$b+c=2a,3\sin A=5\sin B$，则角$C=$（　　）

(A) $\frac{\pi}{3}$　　(B) $\frac{2\pi}{3}$

(C) $\frac{3\pi}{4}$　　(D) $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】$\because 3\sin A=5\sin B$由正弦定理，所以$3a=5b$,即$a=\frac{5}{3}b$；

因为$b+c=2a$，所以$c=\frac{7}{3}a$，

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，所以$C=\frac{2\pi}{3}$，答案选择 B

【学科网考点定位】考查正弦定理和余弦定理，属于中等难度.

（10）.已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$有两个极值点x_1,x_2，若$f(x_1)=x_1<x_2$，则关于x的方程（　　）

$3(f(x))^2+2af(x)+b=0$的不同实根个数为

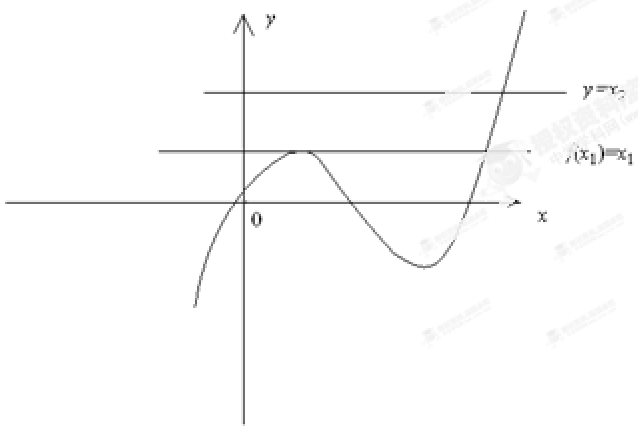
（A）3　　　　(B) 4

(C) 5　　　　(D) 6

【答案】A

【解析】$f'(x)=3x^2+2ax+b$，x_1,x_2是方程$3x^2+2ax+b=0$的两根，

由$3(f(x))^2+2af(x)+b=0$，则又两个$f(x)$使得等式成立，$x_1=f(x_1)$，$x_2>x_1=f(x_1)$，其函数图象如下：



如图则有 3 个交点，故选 A.

【学科网考点定位】考查函数零点的概念，以及对嵌套型函数的理解.

（本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！）

二．填空题

（11） 函数 $y=\ln(1+\frac{1}{x})+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为____________.

【答案】$(0,1]$

【解析】$\begin{cases}1+\frac{1}{x}>0\Rightarrow x>0\text{或}x<-1\\ 1-x^2\ge 0\Rightarrow -1\le x\le 1\end{cases}$，求交集之后得 x 的取值范围 $(0,1]$

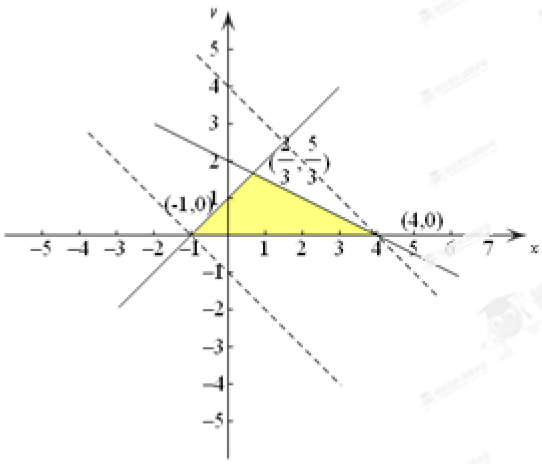
【学科网考点定位】考查函数定义域的求解．对数真数位置大于 0，分母不为 0，偶次根式底下大于等于 0.

（12）若非负数变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\ge -1\\ x+2y\le 4\end{cases}$，则 $x+y$ 的最大值为_________.

【答案】4

【解析】

由题意约束条件的图像如下：



当直线经过 $(4,0)$ 时，$z=x+y=4+0=4$，取得最大值.

【学科网考点定位】考查线性规划求最值的问题，要熟练掌握约束条件的图像画法，以及判断何时 z 取最大.

（13）若非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=3|\vec{b}|=|\vec{a}+2\vec{b}|$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角的余弦值为______.

【答案】 $-\dfrac{1}{3}$

【解析】等式平方得：$|\vec{a}|^2=9|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

则 $|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，即 $0=4|\vec{b}|^2+4\cdot 3|\vec{b}|^2\cos\theta$

得 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

【学科网考点定位】考查向量模长，向量数量积的运算，向量最基本的化简.

（14）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$.若当 $0\le x\le 1$ 时。$f(x)=x(1-x)$，

则当 $-1\le x\le 0$ 时，$f(x)=$______________.

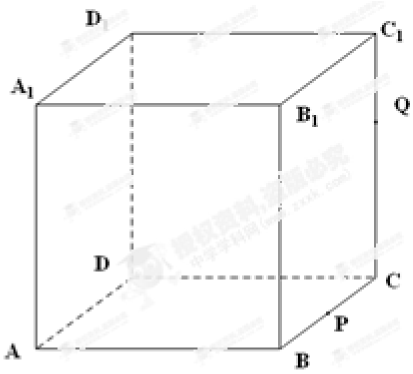
【答案】 $f(x)=-\dfrac{x(x+1)}{2}$

【解析】当 $-1\le x\le 0$，则 $0\le x+1\le 1$，故 $f(x+1)=(x+1)(1-x-1)=-x(x+1)$

又 $f(x+1)=2f(x)$，所以 $f(x)=-\dfrac{x(x+1)}{2}$

【学科网考点定位】考查抽象函数解析式的求解.

（15）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为 BC 的中点，Q 为线段 CC_1 上的动点，过点 A,P,Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S，则下列命题正确的是__________（写出所有正确命题的编号）。



①当 $0<CQ<\dfrac{1}{2}$ 时，S 为四边形

②当 $CQ=\dfrac{1}{2}$ 时，S 为等腰梯形

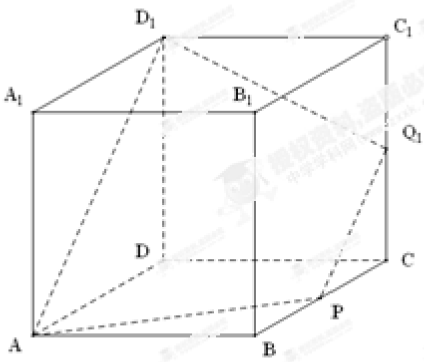
③当 $CQ=\frac{3}{4}$ 时，S 与 C_1D_1 的交点 R 满足 $C_1R=\frac{1}{3}$

④当 $\frac{3}{4}<CQ<1$ 时，S 为六边形

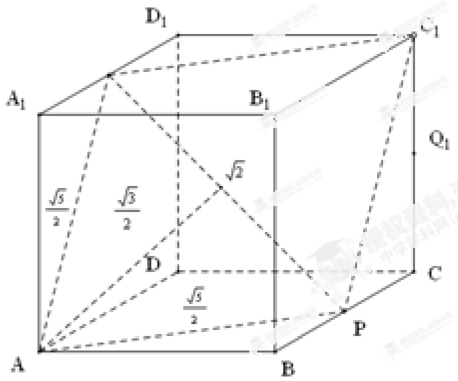
⑤当 $CQ=1$ 时，S 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】①②③⑤

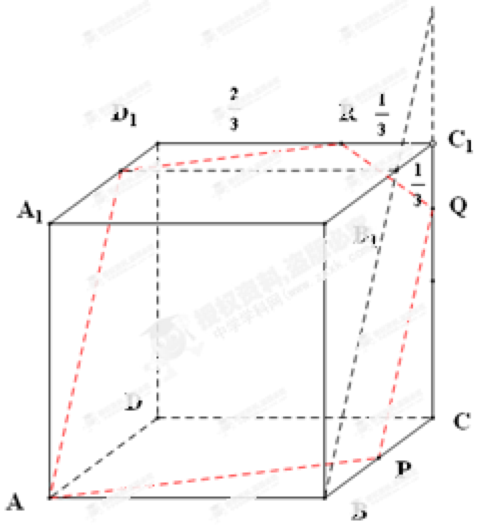
【解析】（1）$CQ=\frac{1}{2}$，S 等腰梯形，②正确，图如下：



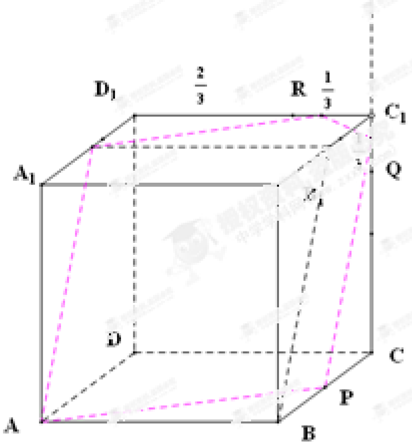
（2）$CQ=1$，S 是菱形，面积为 $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，⑤正确，图如下：



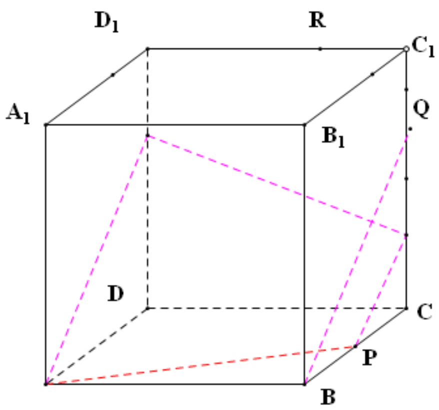
（3）$CQ=\frac{3}{4}$，画图如下：$C_1R=\frac{1}{3}$，③正确



（4）$\frac{3}{4}<CQ<1$，如图是五边形，④不正确；



（5）$0<CQ<\frac{1}{2}$，如下图，是四边形，故①正确



【学科网考点定位】考查立体几何中关于切割的问题，以及如何确定平面。

（本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！）

三．解答题

（16）（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\sin x+\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值，并求使 $f(x)$ 取得最小值的 x 的集合；

（Ⅱ）不画图，说明函数 $y=f(x)$ 的图像可由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变化得到.

【答案】（1） $f(x)=\sin x+\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$=\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\sin(x+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})$$

当 $\sin(x+\dfrac{\pi}{6})=-1$ 时， $f(x)_{\min}=-\sqrt{3}$，此时 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\therefore x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi,(k\in Z)$

所以， $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$，此时 x 的集合 $\{x\mid x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in Z\}$.

(2) $y=\sin x$ 横坐标不变，纵坐标变为原来的 $\sqrt{3}$ 倍，得 $y=\sqrt{3}\sin x$；

然后 $y=\sqrt{3}\sin x$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，得 $f(x)=\sqrt{3}\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$

【解析】（1）利用两角的和差公式，辅助角公式将三角函数化成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，若 $A>0$ 时，当 $\omega x+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时取最小值；（2）要熟练平移变换，伸缩变换.

【学科网考点定位】本题主要考查三角恒等变形、三角函数的图像及性质与三角函数图像的变换.考查逻辑推理和运算求解能力，中等难度.

（17）（本小题满分 12 分）

为调查甲、乙两校高三年级学生某次联考数学成绩情况，用简单随机抽样，从这两校中各抽取 30 名高三年级学生，以他们的数学成绩（百分制）作为样本，样本数据的茎叶图如下：

甲		乙
7	4	5
5 3 3 2	5	3 3 8
5 5 4 3 3 3 1 0 0	6	0 6 9 1 1 2 2 3 3 5
8 6 6 2 2 1 1 0 0	7	0 0 2 2 2 3 3 6 6 9
7 5 4 4 2	8	1 1 5 5 8
2 0	9	0

（Ⅰ）若甲校高三年级每位学生被抽取的概率为 0.05，求甲校高三年级学生总人数，并估计甲校高三年级这次联考数学成绩的及格率（60 分及 60 分以上为及格）；

（Ⅱ）设甲、乙两校高三年级学生这次联考数学平均成绩分别为 $\overline{x_1},\overline{x_2}$，估计 $\overline{x_1}-\overline{x_2}$ 的值.

【答案】（1）$\dfrac{30}{n}=0.05\Rightarrow n=\dfrac{30}{0.05}=600$

$$p=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

（2）$x_1=\dfrac{7+40+13+50\times4+24+60\times9+26+70\times9+22+80\times5+2+90\times2}{30}$

$$=\frac{2084}{30}$$

$$x_2=\frac{5+40+14+50\times3+17+60\times10+33+70\times10+20+80\times5+90}{30}$$

$$=\frac{2069}{30}$$

$$x_2-x_1=\frac{2084}{30}-\frac{2069}{30}=\frac{15}{30}=0.5$$

【解析】（1）要能读懂茎叶图，处在中间位置的是十位数，根据题中所给的概率，可以求出高三年级的总人数，再将 60 分及 60 分以上为及格的人数除以总人数；（2）求出甲乙的平均数即可，作差，但需要注意计算时的一些技巧，.一定要到最后一步才把分数化成小数.

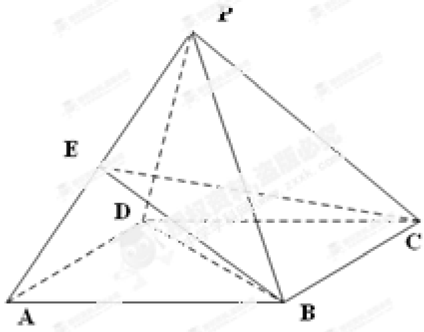
【学科网考点定位】考查随机抽样与茎叶图等统计学基本知识，考查用样本估计总体的思想性以及数据分析处理能力.

(18)（本小题满分 12 分）

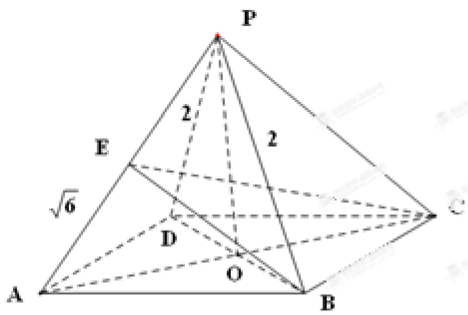
如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$. 已知 $PB=PD=2,PA=\sqrt{6}$.

（Ⅰ）证明：$PC\perp BD$

（Ⅱ）若 E 为 PA 的中点，求三菱锥 $P-BCE$ 的体积.



【答案】



（1）证明：连接 BD, AC 交于 O 点

$\because PB=PD \quad \therefore PO\perp BD$

又 $\because ABCD$ 是菱形 $\quad \therefore BD\perp AC$

而 $AC\cap PO=O \quad \therefore BD\perp$ 面 $PAC \quad \therefore BD\perp PC$

(2) 由（1）$BD\perp$ 面 PAC

$$S_{\triangle PEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times2\sqrt{3}\times\sin45^\circ=\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$$

$$V_{P-BEC}=V_{B-PEC}=\frac{1}{2}\cdot S_{\Delta PEC}\cdot BO=\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

【解析】（1）证明线线垂直，需要线面垂直证起；（2）ΔPAC 的面积是 ΔPEC 的面积的 2 倍，BD 是 B 点到面 PEC 的高，求出面积和高，即能求出最终的体积.

【学科网考点定位】考查空间直线与直线，直线与平面的位置，.三棱锥体积等基础知识和基本技能，考查空间观念，推理论证能力和运算能力.

（19）（本小题满分 13 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_2+a_4=8$,且对任意 $n\in N^*$，函数

$f(x)=(a_n-a_{n+1}+a_{n+2})x+a_{n+1}\cdot\cos x-a_{n+2}\cdot\sin x$　　满足 $f'(\frac{\pi}{2})=0$

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)若$b_n=2(a_n+\frac{1}{2^{a_n}})$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

【答案】由$a_1=2$　　$a_2+a_4=8$

$$f(x)=(a_n-a_{n+1}+a_{n+2})x+a_{n+1}\cdot\cos x-a_{n+2}\cdot\sin x$$

$$f'(x)=a_n-a_{n+1}+a_{n+2}-a_{n+1}\cdot\sin x-a_{n+2}\cdot\cos x$$

$$f'(\frac{\pi}{2})=a_n-a_{n+1}+a_{n+2}-a_{n+1}=0$$

所以，$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

$\therefore\{a_n\}$是等差数列.

而$a_1=2$　　$a_3=4$　　$d=1$

$\therefore a_n=2+(n-1)\cdot1=n+1$

(2)　$b_n=2(a_n+\frac{1}{2^{a_n}})=2(n+1+\frac{1}{2^{n+1}})=2(n+1)+\frac{1}{2^n}$

$$S_n=\frac{2(2+n+1)\ n}{2}+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}$$

$=n(n+3)+1-\frac{1}{2^n}$

$=n^2+3n+1-\frac{1}{2^n}$

【解析】第（1）题，通过求导以及$f'(\frac{\pi}{2})=0$，能够判断出$\{a_n\}$是等差数列是等差数列，由第（1）题的结论能够写出b_n的通项公式，根据b_n的特征，选择求和的方法，利用分组求和的方法即可求出.

【学科网考点定位】考查函数的求导法则和求导公式，等差、等比数列的性质和数列基本量的求解.并考查逻辑推理能力和运算能力.

（20）（本小题满分 13 分）

设函数 $f(x)=ax-(1+a^2)x^2$，其中 $a>0$，区间 $I=\{x\mid f(x)>0\}$.

（Ⅰ）求 I 的长度（注：区间 (α,β) 的长度定义为 $\beta-\alpha$；

（Ⅱ）给定常数 $k\in(0,1)$，当 $1-k\le a\le 1+k$ 时，求 I 长度的最小值.

【答案】(1) 令 $f(x)=x\left[a\text{-}(1+a^2)\ x\right]=0$

解得 $x_1=0$ $\quad x_2=\dfrac{a}{1+a^2}$

$\therefore I=\left\{x\mid 0<x<\dfrac{a}{1+a^2}\right\}$

$\therefore I$ 的长度 $x_2\text{-}x_1=\dfrac{a}{1+a^2}$

(2) $k\in(0,1)$ 则 $0<1-k\le a\le 1+k<2$

由 (1) $I=\dfrac{a}{1+a^2}$

$I'=\dfrac{1-a^2}{(1+a^2)^2}>0$，令 $I'=0$，得 $a=1$．由于 $0<k<1$

故 I 关于 a 在 $[1-k,1)$ 上单调递增，在 $(1,1+k]$ 上单调递减，I 必定在 $a=1-k$ 或 $a=1+k$ 处取得

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{\dfrac{1-k}{1+(1-k)^2}}{\dfrac{1+k}{1+(1+k)^2}}=\frac{2-k^2-k^3}{2-k^2+k^3}<1$$

$I_1<I_2$

$\therefore I_{min}=\dfrac{1-k}{2-2k+k^2}$

因此当 $a=1-k$ 时，I 在区间 $[1-k,1+k]$ 上取得最小值 $\dfrac{1-k}{2-2k+k^2}$.

【解析】 第（1）题求解一元二次不等式确定区间 I 的取值范围，根据题意能够求出 I 的长度，简单题；第（2）题要能理解其实就是求 I 关于 a 在给定区间内的最小值，通过求导就能确定最小值是当 a 取何值，但此题易错点在于需要比较 a 在 $1-k$ 与 $1+k$ 处 I 的大小，利用作差或作商都可以解决，出题思路比较新颖，容易迷惑，但只要能够理解题意，基本能够求解出来.

【学科网考点定位】 考查二次不等式的求解，以及导数的计算和应用，并考查分类讨论思想和综合运用数学知识解决问题的能力.

（21）（本小题满分13分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 4，且过点 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

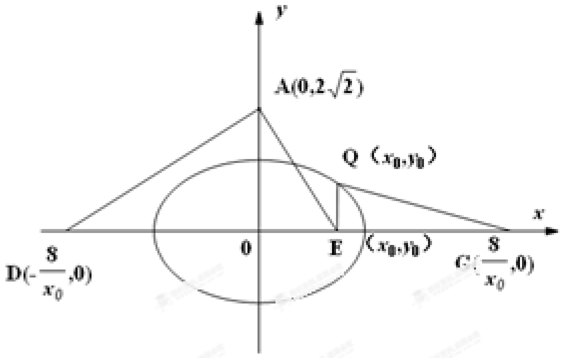
（Ⅱ）设 $Q(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 为椭圆 C 上一点，过点 Q 作 x 轴的垂线，垂足为 E。取点 $A(0,2\sqrt{2})$，连接 AE，过点 A 作 AE 的垂线交 x 轴于点 D。点 G 是点 D 关于 y 轴的对称点，作直线 QG，问这样作出的直线 QG 是否与椭圆 C 一定有唯一的公共点？并说明理由.

【答案】（1）因为椭圆过点 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$

$$\therefore \frac{2}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1 \quad 且\ a^2=b^2+c^2$$

$\therefore\ a^2=8\quad b^2=4\quad c^2=4$ 椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

（2）



由题意，各点的坐标如上图所示，

则QG的直线方程：$\dfrac{y-0}{y_0}=\dfrac{x-\dfrac{8}{x_0}}{x_0-\dfrac{8}{x_0}}$

化简得$x_0y_0x-(x_0^2-8)y-8y_0=0$

又$x_0^2+2y_0^2=8$，

所以$x_0x+2y_0y-8=0$带入$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

求得最后$\Delta=0$

所以直线QG与椭圆只有一个公共点.

【解析】第（1）题根据题意确定c的大小，再将$P(\sqrt{2},\sqrt{3})$带入方程，确定椭圆的方程；第（2）题是存在性问题，根据题意，设出$Q(x_0,y_0)$，根据条件写出QG的直线方程，并进行化简，然而Q点坐标又在椭圆上，带入方程，求出$\Delta=0$，即可判断直线QG是否与椭圆C一定有唯一的公共点.

【学科网考点定位】考查椭圆的标准方程及其几何性质，直线和椭圆的位置关系，并考查数形结合思想，逻辑推理能力及运算能力.