

2012 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（理工农医类）

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 6 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

试卷总评：总体来说 2012 湖南理科数学试题相对于 2010, 2011 年有着很大的变化：试题难度变大，体现于解答题的难度相对于前两年有显著提高。着重体现在 19 题的内容更换为数列的充分必要性的证明，考数列解答题可能很多人都有预测到，但是靠充分必要性的证明可能预测到的少，另外函数应用问题较去年也有提高，着重了函数、不等式应用思想的考查应用。而相对而言今年的选择题、填空题的布局与前两年吻合，注重对考生基础知识，基本技能的考查。内容变换，将原有的三角解答题去掉，对立体集合问题不直接考查角度的计算，而考查几何体体积的计算。突出了重点内容的考查，如函数与导数，圆锥曲线等。

一选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{x | x^2 \leq x\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

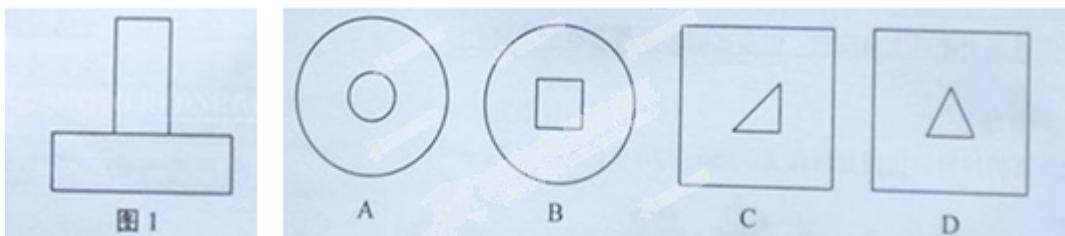
- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 命题“若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha = 1$ ”的逆否命题是 ()

- A. 若 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha \neq 1$ B. 若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha \neq 1$

- C. 若 $\tan \alpha \neq 1$, 则 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ D. 若 $\tan \alpha \neq 1$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{4}$

3. 某几何体的正视图和侧视图均如图 1 所示，则该几何体的俯视图不可能是 ()



4. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据

一组样本数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$, 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y} = 0.85x - 85.71$, 则下列结论不正确的是 ()

- A. y 与 x 具有正的线性相关关系
B. 回归直线过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y})
C. 若该大学某女生身高增加 $1 cm$, 则其体重约增加 $0.85 kg$
D. 若该大学某女生身高为 $170 cm$, 则可断定其体重必为 $58.79 kg$

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 10, 点 $P(2,1)$ 在 C 的渐近线上, 则 C 的方程为

()

A. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ C. $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$ D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$

6. 函数 $f(x) = \sin x - \cos(x + \frac{\pi}{6})$ 的值域为 ()

A. $[-2, 2]$ B. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ C. $[-1, 1]$ D. $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 3, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$, 则 $BC =$ ()

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{7}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{23}$

8. 已知两条直线 $l_1: y = m$ 和 $l_2: y = \frac{8}{2m+1} (m > 0)$, l_1 与函数 $y = |\log_2 x|$ 的图象从左至右

相交于点 A, B , l_2 与函数 $y = |\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 C, D , 记线段 AC 和 BD 在

x 轴上的投影长度分别为 a, b . 当 m 变化时, $\frac{b}{a}$ 的最小值为 ()

A. $16\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $8\sqrt[3]{4}$ D. $4\sqrt[3]{4}$

二填空题: 本大题共 8 小题, 考生作答 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分, 把答案填在答题卡中对应题号的横线上。

一、选做题 (请考生在第 9、10、11 三题中任选两题作答, 如果全做, 则按前两题记分)

9. 在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 $C_1: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1-2t \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 $C_2: \begin{cases} x = a \sin \theta \\ y = 3 \cos \theta \end{cases}$ (θ

为参数, $a > 0$) 有一个公共点在 x 轴上, 则 $a =$ _____。

10. 不等式 $|2x+1|-2|x-1|>0$ 的解集为 _____

11. 如图 2, 过点 P 的直线与 $\square O$ 相交于 A, B 两点. 若 $PA=1, AB=2, PO=3$, 则 $\square O$ 的半径等于 _____.



二、必做题(12~16题)

12. 已知复数 $z=(3+i)^2$ (i 为虚数单位), 则 $|z|=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(用数字作答)

14. 如果执行如图3所示的程序框图, 输入 $x=-1, n=3$, 则输出的数 $S=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

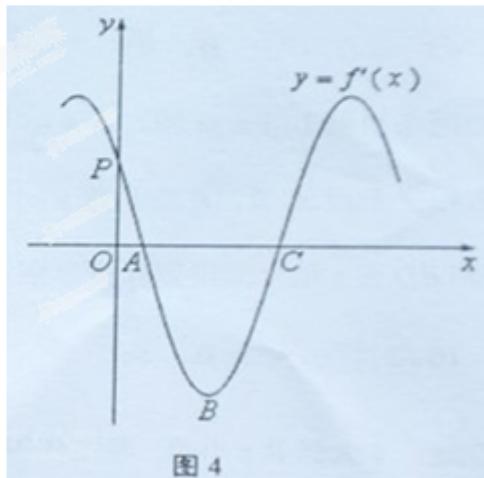
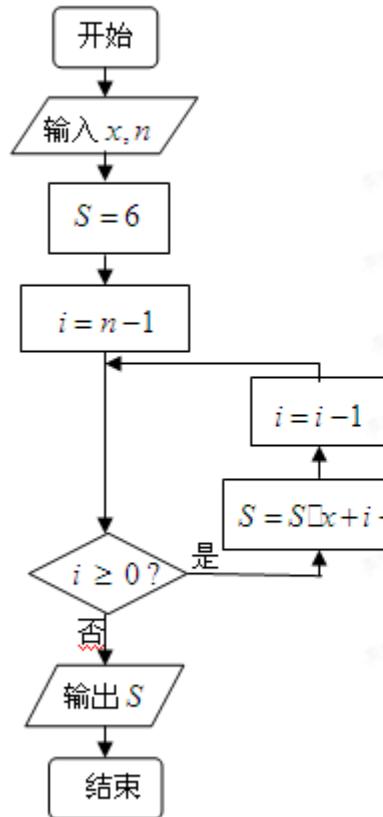


图 3

15. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的部分图象如图4所示, 其中, P 为图象与 y 轴的交点, A , C 为图象与 x 轴的两个交点, B 为图象的最低点。

(1) 若 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\omega = \underline{\quad}$;

(2) 若在曲线段 \widehat{ABC} 与 x 轴所围成的区域内随机取一点, 则该点在 ΔABC 内的概率为 $\underline{\quad}$
 $\underline{\quad}$ 。

16. 设 $N = 2^n$ ($n \in N^*, n \geq 2$), 将 N 个数 x_1, x_2, \dots, x_N 依次放入编号为 $1, 2, \dots, N$ 的 N 个位置, 得到排列 $P_0 = x_1 x_2 \cdots x_N$ 。将该排列中分别位于奇数与偶数位置的数取出, 并按原顺序依次放入对应的前 $\frac{N}{2}$ 和后 $\frac{N}{2}$ 个位置, 得到排列 $P_1 = x_1 x_3 \cdots x_{N-1} x_2 x_4 \cdots x_N$ 。将此操作称为 C 变换。将 P_1 分成两段, 每段 $\frac{N}{2}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_2 ; 当 $2 \leq i \leq n-2$ 时, 将 P_i 分成 2^i 段, 每段 $\frac{N}{2^i}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_{i+1} , 例如, 当 $N = 8$ 时,
 $P_2 = x_1 x_5 x_3 x_7 x_2 x_6 x_4 x_8$, 此时 x_7 位于 P_2 中的第 4 个位置。

(1) 当 $N = 16$ 时, x_7 位于 P_2 中的第 $\underline{\quad}$ 个位置;

(2) 当 $N = 2^n$ ($n \geq 8$) 时, x_{17} 位于 P_4 中的第 $\underline{\quad}$ 个位置。

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分) 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	x	30	25	y	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

(1) 确定 x, y 的值, 并求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列与数学期望;

(2) 若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算, 且各顾客的结算相互独立, 求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率。

(注: 将频率视为概率)

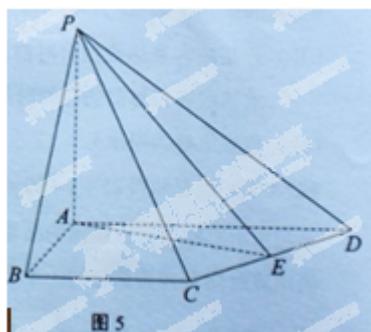
18. (本小题满分 12 分)

如图 5, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=3, BC=4, AD=5$,

$\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, E 是 CD 的中点。

(I) 证明: $CD \perp$ 平面 PAE

(II) 若直线 PB 与平面 PAE 所成的角和 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角相等, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。



19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 $A(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $B(n) = a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}$

$C(n) = a_3 + a_4 + \dots + a_{n+2}$, $n = 1, 2, \dots$

(I) 若 $a_1 = 1, a_2 = 5$, 且对任意 $n \in N^*$, 三个数 $A(n), B(n), C(n)$ 组成等差数列,

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列的充分必要条件是: 对任意 $n \in N^*$, 三个数

$A(n), B(n), C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列.

20. (本小题满分 13 分)

某企业接到生产 3000 台某产品的 A, B, C 三种部件的订单, 每台产品需要这三种部件的数量分别为 2, 2, 1 (单位: 件). 已知每个工人每天可生产 A 部件 6 件, 或 B 部件 3 件, 或 C 部件 2 件. 该企业计划安排 200 名工人分成三组分别生产这三种部件, 生产 B 部件的人数与生产 A 部件的人数成正比, 比例系数为 k (k 为正整数).

(I) 设生产 A 部件的人数为 x , 分别写出完成 A, B, C 三种部件生产需要的时间;

(II) 假设这三种部件的生产同时开工, 试确定正整数 k 的值, 使完成订单任务的时间最短, 并给出时间最短时具体的人数分组方案。

21. (本小题满分 13 分)

在直角坐标系 xoy 中, 曲线 C_1 上的点均在圆 $C_2 : (x - 5)^2 + y^2 = 9$ 外, 且对 C_1 上任意一点

M, M 到直线 $x = -2$ 的距离等于该点与 C_2 上点的距离的最小值。

(I) 求曲线 C_1 的方程;

(II) 设 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 \neq \pm 3$) 为 C_2 外一点, 过 P 作圆 C_2 的两条切线, 分别与曲线 C_1 相交于点 A, B 和 C, D , 证明: 当 P 在直线 $x = -4$ 上运动时, 四点 A, B, C, D 的纵坐标之积为定值。

22. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^{\alpha x} - x$, 其中 $\alpha \neq 0$.

(I) 若对一切 $x \in R$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 α 的取值集合;

(II) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ ($x_1 < x_2$), 记直线 AB 的斜率为 k . 问: 是否存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(x_0) > k$ 成立? 若存在, 求 x_0 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.