

## 2015 年高考山东省理科数学真题

### 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$ ,  $B = \{x | 2 < x < 4\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A. (1, 3)      B. (1, 4)      C. (2, 3)      D. (2, 4)

2. 若复数  $Z$  满足  $\frac{\bar{Z}}{1-i} = i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $Z =$  ( )

- A.  $1-i$       B.  $1+i$       C.  $-1-i$       D.  $-1+i$

3. 要得到函数  $y = \sin(4x - \frac{\pi}{3})$  的图像, 只需要将函数  $y = \sin 4x$  的图像 ( )

- A. 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位      B. 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位

- C. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位      D. 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位

4. 已知菱形  $ABCD$  的边长为  $a$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ , 则  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} =$  ( )

- A.  $-\frac{3}{2}a^2$       B.  $-\frac{3}{4}a^2$       C.  $\frac{3}{4}a^2$       D.  $\frac{3}{2}a^2$

5. 不等式  $|x-1| - |x-5| < 2$  的解集是 ( )

- A.  $(-\infty, 4)$       B.  $(-\infty, 1)$       C.  $(1, 4)$       D.  $(1, 5)$

6. 已知  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 若  $z = ax+y$  的最大值为 4, 则  $a =$  ( )

- A. 3      B. 2      C. -2      D. -3

7. 在梯形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $BC = 2AD = 2AB = 2$ . 将梯形  $ABCD$  绕  $AD$  所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为 ( )

- A.  $\frac{2\pi}{3}$       B.  $\frac{4\pi}{3}$       C.  $\frac{5\pi}{3}$       D.  $2\pi$

8. 已知某批零件的长度误差 (单位: 毫米) 服从正态分布  $N(0, 3)$ , 从中随机取一件, 其长度误差落在区间  $(3, 6)$  内的概率为 ( )

(附: 若随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,

则  $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 68.26\%$ ,  $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 95.44\%$ .)

- A. 4.56%      B. 12.59%      C. 27.18%      D. 31.74%

9. 一条光线从点  $(-2, -3)$  射出，经  $y$  轴反射后与圆  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$  相切，则反射光线所在直线的斜率为 ( )

- A.  $-\frac{5}{3}$  或  $-\frac{3}{5}$       B.  $-\frac{3}{2}$  或  $-\frac{2}{3}$       C.  $-\frac{5}{4}$  或  $-\frac{4}{5}$       D.  $-\frac{4}{3}$  或  $-\frac{3}{4}$

10. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，则满足  $f(f(a)) = 2^{f(a)}$  的  $a$  取值范围是 ( )

- A.  $[\frac{2}{3}, 1]$       B.  $[0, 1]$       C.  $[\frac{2}{3}, +\infty)$       D.  $[1, +\infty)$

## 二、填空题

11. 观察下列各式：

$$C_1^0 = 4^0$$

$$C_3^0 + C_3^1 = 4^1$$

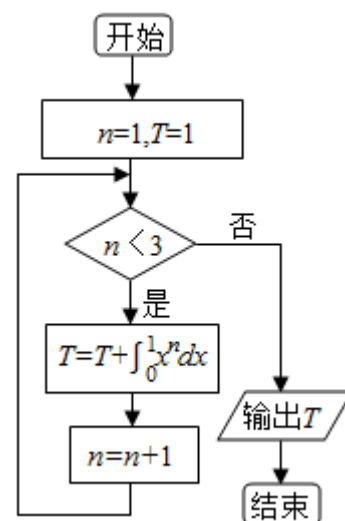
$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = 4^2$$

$$C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = 4^3$$

照此规律，当  $n \in \mathbb{N}$  时， $C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \dots + C_{2n-1}^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 若“ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}], \tan x \leq m$ ”是真命题，则实数  $m$  的最小值为           .

13. 执行下面的程序框图，输出的  $T$  的值为           .



14. 已知函数  $f(x) = a^x + b (a > 0, a \neq 1)$  的定义域和值域都是  $[-1, 0]$ ，则

$$a + b = \underline{\hspace{2cm}}$$

15. 平面直角坐标系  $xOy$  中，双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线与抛物线  $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$  交于

$O$ ，若  $\triangle ABC$  的垂心为  $C_2$  的焦点，则  $C_1$  的离心率为           .

16. 设  $f(x) = \sin x \cos x - \cos x^2 (x + \frac{\pi}{4})$ 。

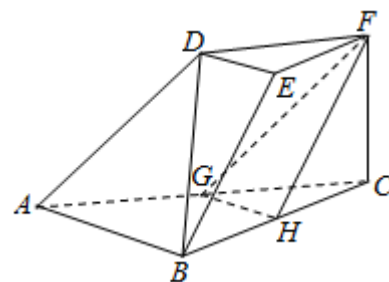
(I) 求  $f(x)$  的单调区间；

(II) 在锐角  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，若  $f(\frac{A}{2}) = 0, a = 1$ ，求面  $\triangle ABC$  积的最大值。

17. 如图，在三棱台  $DEF-ABC$  中， $AB = 2DE$ ， $G, H$  分别为  $AC, BC$  的中点。

(I) 求证： $BC \parallel$  平面  $FGH$ ；

(II) 若  $CF \perp$  平面  $ABC$ ， $AB \perp BC$ ， $CF = DE$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，求平面  $FGH$  与平面  $ACFD$  所成的角 (锐角) 的大小。



18. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ 。已知  $2S_n = 3^n + 3$ 。

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $a_n b_n = \log_3^2$ ，求  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

19. 若  $n$  是一个三位正整数，且  $n$  的个位数字大于十位数字，十位数字大于百位数字，则称  $n$  为“三位递增数”（如 137, 359, 567 等）。

在某次数学趣味活动中，每位参加者需从所有的“三位递增数”中随机抽取 1 个数，且只能抽取一次。得分规则如下：若抽取的“三位递增数”的三个数字之积不能被 5 整除，参加者得 0 分；若能被 5 整除，但不能被 10 整除，得 -1 分；若能被 10 整除，得 1 分。

(I) 写出所有个位数字是 5 的“三位递增数”；

(II) 若甲参加活动，求甲得分  $X$  的分布列和数学期望  $EX$ 。

20. 平面直角坐标系  $xOy$  中，已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，左、右焦点分别是

$F_1, F_2$ 。以  $F_1$  为圆心以 3 为半径的圆与以  $F_2$  为圆心 1 为半径的圆相交，且交点在椭圆  $C$  上。

(I) 求椭圆  $C$  的方程；

(II) 设椭圆  $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$  为椭圆  $C$  上任意一点，过点  $P$  的直线  $y = kx + m$  交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点，

射线  $PO$  交椭圆  $E$  于点  $Q$ 。

(i) 求  $\frac{|OQ|}{|OP|}$  的值；

(ii) 求  $\triangle ABQ$  面积的最大值。

将  $y = kx + m$  代入椭圆  $C$  的方程

21 设函数  $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x)$ ，其中  $a \in \mathbb{R}$ 。

(I) 讨论函数  $f(x)$  极值点的个数，并说明理由；

(II) 若  $\forall x > 0, f(x) \geq 0$  成立，求  $a$  的取值范围。