

2015年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分。

1. 若集合 $M = \{x | (x+4)(x+1) = 0\}$, $N = \{x | (x-4)(x-1) = 0\}$, 则 $M \cap N =$
A. \emptyset B. $\{-1, -4\}$ C. $\{0\}$ D. $\{1, 4\}$
2. 若复数 $z = i(3 - 2i)$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z} =$
A. $3-2i$ B. $3+2i$ C. $2+3i$ D. $2-3i$
3. 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是
A. $y = x + e^x$ B. $y = x + \frac{1}{x}$ C. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ D. $y = \sqrt{1+x^2}$
4. 袋中共有15个除了颜色外完全相同的球, 其中有10个白球, 5个红球。从袋中任取2个球, 所取的2个球中恰有1个白球, 1个红球的概率为
A. 1 B. $\frac{11}{21}$ C. $\frac{10}{21}$ D. $\frac{5}{21}$
5. 平行于直线 $2x+y+1=0$ 且与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线的方程是
A. $2x-y+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-\sqrt{5}=0$ B. $2x+y+\sqrt{5}=0$ 或 $2x+y-\sqrt{5}=0$
C. $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$ D. $2x+y+5=0$ 或 $2x+y-5=0$
6. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x+5y \geq 8 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ 则 $z = 3x+2y$ 的最小值为
A. $\frac{31}{5}$ B. 6 C. $\frac{23}{5}$ D. 4
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{5}{4}$, 且其右焦点 $F_2(5, 0)$, 则双曲线 C 的方程为
()
A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$
8. 若空间中 n 个不同的点两两距离都相等, 则正整数 n 的取值

- A. 大于5 B. 等于5 C. 至多等于4 D. 至多等于3

二、填空题:本大题共7小题,考生作答6小题,每小题5分,满分30分.

(一) 必做题(9~13题)

9. 在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中, x 的系数为_____。

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 25$, 则 $a_2 + a_8 =$ _____。

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{3}$, $\sin B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$, 则 $b =$ _____。

12. 某高三毕业班有40人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了条毕业留言。(用数字作答)

13. 某高三毕业班有40人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了_____条毕业留言。(用数字做答)

(二) 选做题(14~15题, 考生只能从中选做一题)

14. (坐标系与参数方程选做题) 已知直线l的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, 点A的极坐标为 $A(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$, 则点A到直线l的距离为_____。

15. (几何证明选讲选作题) 如图1, 已知AB是圆O的直径, $AB=4$, EC是圆O的切线, 切点为C,

$BC=1$, 过圆心O做BC的平行线, 分别交EC和AC于点D和点P, 则 $OD=$ _____。

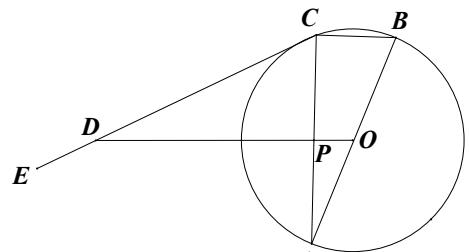


图1

三、解答题:本大题共6小题,满分80分.解答须写出文字

说明、证明过程和演算步骤.

16. (本小题满分12分)

在平面直角坐标系xOy中, 已知向量 $m = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $n = (\sin x, \cos x)$, $x \in (0,$

$$\frac{\pi}{2})$$

- (1) 若 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 求 $\tan x$ 的值 (2) 若 \mathbf{m} 与 \mathbf{n} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 x 的值。

17. (本小题满分12分)

某工厂36名工人的年龄数据如下表。

工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

(1) 用系统抽样法从36名工人中抽取容量为9的样本, 且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为44, 列出样本的年龄数据;

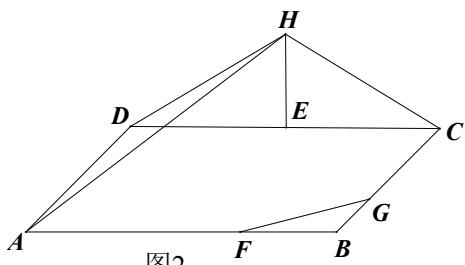
(2) 计算(1)中样本的平均值 \bar{x} 和方差 s^2 ;

(3) 36名工人中年龄在 $\bar{x} - s$ 与 $\bar{x} + s$ 之间有多少人? 所占的百分比是多少 (精确到0.01%)?

18. (本小题满分14分)

如图2, 三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直, $PD = PC = 4$, $AB = 6$, $BC = 3$. 点 E 是 CD 边的中点, 点 F , G 分别在线段 AB , BC 上, 且 $AF = 2FB$, $CG = 2GB$.

- (1) 证明: $PE \perp FG$;
 (2) 求二面角 $P - AD - C$ 的正切值;
 (3) 求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.



第3页 | 共5页

图2

19. (本小题满分14分)

设 $a > 1$, 函数 $f(x) = (1 + x^2)e^x - a$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个零点;

(3)

若曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线与 x 轴平行, 且在点 $M(m, n)$ 处的切线与直线 OP 平行 (O 是坐标原点), 证明: $m \leq \sqrt[3]{a - \frac{2}{e}} - 1$

20. (本小题满分14分)

已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相交于不同的两点 A, B .

(1) 求圆 C_1 的圆心坐标;

(2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;

(3) 是否存在实数 k , 使得直线 $L: y = k(x - 4)$ 与曲线 C 只有一个交点: 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分14分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$, $n \in N^*$.

(1) 求 a_3 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 T_n ;

(3) 令 $b_1 = a_1$, $b_n = \frac{T_{n-1}}{n} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) a_n$ ($n \geq 2$), 证明: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n$$

满足 $S_n < 2 + 2 \ln n$