

2016 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数学（文史类）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1. 设 i 为虚数单位，则复数 $(1+i)^2 =$

- (A) 0 (B) 2 (C) $2i$ (D) $2+2i$

【答案】C

【解析】

试题分析：由题意， $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ ，故选 C.

考点：复数的运算.

【名师点睛】本题考查复数的运算. 数的概念及运算也是高考的热点，几乎是每年必考内容，属于容易题. 一般来说，掌握复数的基本概念及四则运算即可.

2. 设集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$ ， Z 为整数集，则集合 $A \cap Z$ 中元素的个数是

- (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

【答案】B

【解析】

试题分析：由题意， $A \cap Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，故其中的元素个数为 5，选 B.

考点：集合中交集的运算.

【名师点睛】集合的概念及运算一直是高考的热点，几乎是每年必考内容，属于容易题. 一般是结合不等式，函数的定义域值域考查，解题的关键是结合韦恩图或数轴解答.

3. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标是

- (A) (0, 2) (B) (0, 1) (C) (2, 0) (D) (1, 0)

【答案】D

【解析】

试题分析：由题意， $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 (1, 0)，故选 D.

考点：抛物线的定义.

【名师点睛】本题考查抛物线的定义. 解析几何是中学数学的一个重要分支，圆锥曲线是解析几何的重要

内容，它们的定义、标准方程、简单的性质是我们重点要掌握的内容，一定要熟记掌握。

4. 为了得到函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有的点

- (A) 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 (B) 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
(C) 向上平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 (D) 向下平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

【答案】A

【解析】

试题分析：由题意，为得到函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ ，只需把函数 $y = \sin x$ 的图像上所有点向左移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，故选 A.

考点：三角函数图像的平移.

【名师点睛】本题考查三角函数的图象平移，函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 a 个单位得 $y = f(x - a)$ 的图象，而函数 $y = f(x)$ 的图象向上平移 a 个单位得 $y = f(x) + a$ 的图象. 左右平移涉及的是 x 的变化，上下平移涉及的是函数值 $f(x)$ 加减平移的单位.

5. 设 p : 实数 x, y 满足 $x > 1$ 且 $y > 1$, q : 实数 x, y 满足 $x + y > 2$, 则 p 是 q 的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

试题分析：由题意， $x > 1$ 且 $y > 1$ ，则 $x + y > 2$ ，而当 $x + y > 2$ 时不能得出， $x > 1$ 且 $y > 1$. 故 p 是 q 的充分不必要条件，选 A.

考点：充分必要条件.

【名师点睛】本题考查充分性与必要性的判断问题，首先是分清条件和结论，然后考察条件推结论，结论推条件是否成立. 这类问题往往与函数、三角、不等式等数学知识结合起来考. 有许多情况下可利用充分性、必要性和集合的包含关系得出结论.

6. 已知 a 函数 $f(x) = x^3 - 12x$ 的极小值点，则 $a =$

- (A) -4 (B) -2 (C) 4 (D) 2

【答案】D

【解析】

试题分析： $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$ ，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -2$ 或 $x = 2$ ，易得 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递减，在 $(2, +\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 极小值为 $f(2)$ ，由已知得 $a = 2$ ，故选 D.

考点：函数导数与极值.

【名师点睛】本题考查函数的极值. 在可导函数中函数的极值点 x_0 是方程 $f'(x) = 0$ 的解，但 x_0 是极大值点还是极小值点，需要通过这点两边的导数的正负性来判断，在 x_0 附近，如果 $x < x_0$ 时， $f'(x) < 0$ ， $x > x_0$ 时 $f'(x) > 0$ ，则 x_0 是极小值点，如果 $x < x_0$ 时， $f'(x) > 0$ ， $x > x_0$ 时， $f'(x) < 0$ ，则 x_0 是极大值点，

7. 某公司为激励创新，计划逐年加大研发奖金投入. 若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元，在此基础上，每年投入的研发资金比上一年增长 12%，则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是 (参考数据： $\lg 1.12 = 0.05$ ， $\lg 1.3 = 0.11$ ， $\lg 2 = 0.30$) 学科网

(A) 2018 年 (B) 2019 年 (C) 2020 年 (D) 2021 年

【答案】B

【解析】

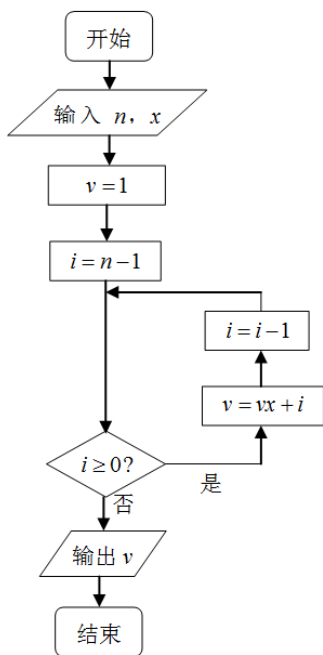
试题分析：设从 2015 年后第 n 年该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元，由已知得 $130 \times (1+12\%)^n > 200$ ， $\therefore 1.12^n > \frac{200}{130}$ ，两边取常用对数得

$$n \lg 1.12 > \lg \frac{200}{130}, \therefore n > \frac{\lg 2 - \lg 1.3}{\lg 1.12} = \frac{0.3 - 0.11}{0.05} = 3.8, \therefore n \geq 4, \text{ 故选 B.}$$

考点：1.增长率问题；2.常用对数的应用.

【名师点睛】本题考查等比数列的实际应用. 在实际问题中平均增长率问题可以看作是等比数列的应用，解题时要注意把哪个作为数列的首项，然后根据等比数列的通项公式写出通项，列出不等式或方程就可得出结论.

8. 秦九韶是我国南宋时期的数学家，普州(现四川省安岳县)人，他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求多项式值的一个实例，若输入 n ， x 的值分别为 3，2，则输出 v 的值为



- (A) 35 (B) 20 (C) 18 (D) 9

【答案】C

【解析】

试题分析：程序运行如下 $n=3, x=2 \rightarrow v=1, i=2 \geq 0 \rightarrow v=1 \times 2 + 2 = 4, i=1 \geq 0$

$\rightarrow v=4 \times 2 + 1 = 9, i=0 \geq 0 \rightarrow v=9 \times 2 + 0 = 18, i=-1 < 0$, 结束循环，输出 $v=18$ ，故选 C.

考点：1.程序与框图；2.秦九韶算法；3.中国古代数学史.

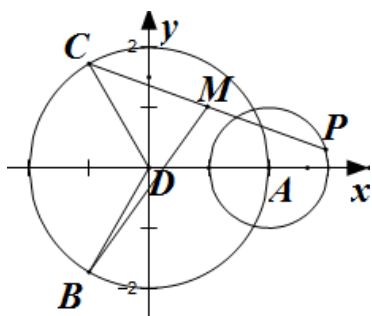
【名师点睛】程序框图是高考的热点之一，几乎是每年必考内容，多半是考循环结构，基本方法是将每次循环的结果一一列举出来，与判断条件比较即可.

9. 已知正三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$ ，平面 ABC 内的动点 P, M 满足 $|\vec{AP}|=1$, $\vec{PM} = \vec{MC}$ ，则 $|\vec{BM}|^2$ 的最大值是

- (A) $\frac{43}{4}$ (B) $\frac{49}{4}$ (C) $\frac{37+6\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$

【答案】B

【解析】



试题分析：由已知易得 $\angle ADC = \angle ADB = \angle BDC = 120^\circ$, $|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}| = 2$. 以 D 为原点，直线 DA

为 x 轴建立平面直角坐标系，则 $A(2, 0)$, $B(-1, -\sqrt{3})$, $C(-1, \sqrt{3})$. 设 $P(x, y)$, 由已知 $|\overrightarrow{AP}| = 1$, 得

$$(x-2)^2 + y^2 = 1, \text{ 又 } \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}, \therefore M\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+\sqrt{3}}{2}\right), \therefore \overrightarrow{BM} = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{BM}^2 = \frac{(x-1)^2 + (y+3\sqrt{3})^2}{4}, \text{ 它表示圆 } (x-2)^2 + y^2 = 1 \text{ 上点 } (x, y) \text{ 与点 } (-1, -3\sqrt{3}) \text{ 距离平方的 } \frac{1}{4},$$

$$\therefore (\overrightarrow{BM}^2)_{\max} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} + 1 \right)^2 = \frac{49}{4}, \text{ 故选 B.}$$

考点：1.向量的数量积运算；2.向量的夹角；3.解析几何中与圆有关的最值问题.

【名师点睛】本题考查平面向量的数量积与向量的模，由于结论是要求向量模的平方的最大值，因此我们要把它用一个参数表示出来，解题时首先对条件进行化简变形，本题中得出 $\angle ADC = \angle ADB = \angle BDC = 120^\circ$ ，且 $|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}| = 2$ ，因此我们采用解析法，即建立直角坐标系，

写出 A, B, C, D 坐标，同时动点 P 的轨迹是圆， $|\overrightarrow{BM}|^2 = \frac{(x+1)^2 + (y+3\sqrt{3})^2}{4}$ ，因此可用圆的性质得出最

值. 因此本题又考查了数形结合的数学思想.

10. 设直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线， l_1 与 l_2 垂直相交于点 P ,

且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B ，则 $\triangle PAB$ 的面积取值范围是

- (A) $(0, 1)$ (B) $(0, 2)$ (C) $(0, +\infty)$ (D) $(1, +\infty)$

【答案】A

【解析】

试题分析：设 $P_1(x_1, \ln x_1), P_2(x_2, -\ln x_2)$ (不妨设 $x_1 > 1, 0 < x_2 < 1$)，则由导数的几何意义易得切线 l_1, l_2

的斜率分别为 $k_1 = \frac{1}{x_1}$, $k_2 = -\frac{1}{x_2}$. 由已知得 $k_1 k_2 = -1$, $\therefore x_1 x_2 = 1$, $\therefore x_2 = \frac{1}{x_1}$. \therefore 切线 l_1 的方程分别为

$y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$, 切线 l_2 的方程为 $y + \ln x_2 = -\frac{1}{x_2}(x - x_2)$, 即 $y - \ln x_1 = -x_1\left(x - \frac{1}{x_1}\right)$. 分别令

$x = 0$ 得 $A(0, -1 + \ln x_1)$, $B(0, 1 + \ln x_1)$. 又 l_1 与 l_2 的交点为

$P\left(\frac{2x_1}{1+x_1^2}, \ln x_1 + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2}\right)$. $\therefore x_1 > 1$, $\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|y_A - y_B| \cdot |x_P| = \frac{2x_1}{1+x_1^2} < \frac{1+x_1^2}{1+x_1^2} = 1$, $\therefore 0 < S_{\triangle PAB} < 1$, 故选 A.

考点: 1. 导数的几何意义; 2. 两直线垂直关系; 3. 直线方程的应用; 4. 三角形面积取值范围.

【名师点睛】本题首先考查导数的几何意义, 其次考查最值问题, 解题时可设出切点坐标, 利用切线垂直求出这两点的关系, 同时得出切线方程, 从而得点 A, B 坐标, 由两直线相交得出 P 点坐标, 从而求得面积, 题中把面积用 x_1 表示后, 可得它的取值范围. 解决本题可以根据题意按部就班一步一步解得结论. 这也是我们解决问题的一种基本方法, 朴实而基础, 简单而实用.

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. $\sin 750^\circ =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

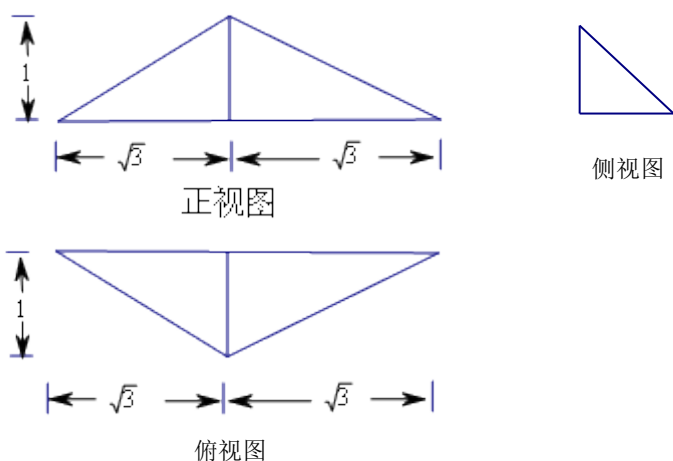
【解析】

试题分析: 由三角函数诱导公式 $\sin 750^\circ = \sin(720^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

考点: 三角函数诱导公式

【名师点睛】本题也可以看作是一个来自于课本的题, 直接利用课本公式解题, 这告诉我们一定要立足于课本. 有许多三角函数的求值问题一般都是通过三角函数的公式把函数化为特殊角的三角函数值而求解.

12. 已知某三菱锥的三视图如图所示, 则该三菱锥的体积_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

试题分析：由三视图可知该几何体是一个三棱锥，且底面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$ ，高为 1，所以该几何

体的体积为 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

考点：1.三视图；2.几何体的体积。

【名师点睛】本题考查三视图，考查几何体体积，考查学生的识图能力。解题时要求我们根据三视图想象出几何体的形状，由三视图得出几何体的尺寸，为此我们必须掌握基本几何体（柱、锥、台、球）的三视图以及各种组合体的三视图。

13. 从 2、3、8、9 任取两个不同的数值，分别记为 a 、 b ，则 $\log_a b$ 为整数的概率= _____。

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

试题分析：从 2，3，8，9 中任取两个数记为 a, b ，作为作为对数的底数与真数，共有 $A_4^2 = 12$ 个不同的基

本事件，其中为整数的只有 $\log_2 8, \log_3 9$ 两个基本事件，所以其概率 $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

考点：古典概型。

【名师点睛】本题考查古典概型，解题关键是求出基本事件的总数，本题中所给数都可以作为对数的底面，因此所有对数的个数就相当于 4 个数中任取两个的全排列，个数为 A_4^2 ，而满足题意的只有 2 个，由概率公

式可得概率. 在求事件个数时, 涉及到排列组合的应用, 涉及到两个有理的应用, 解题时要善于分析.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = 4^x$, 则 $f(-\frac{5}{2}) + f(1) =$ _____.

【答案】-2

【解析】

试题分析: 因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上周期为 2 的奇函数, 所以

$f(-1) = -f(1) = 0, f(-1) = f(-1+2) = f(1) = 0$, 所以 $-f(1) = f(1)$, 即 $f(1) = 0$,

$f(-\frac{5}{2}) = f(-\frac{1}{2}-2) = f(-\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2}) = -4^{\frac{1}{2}} = -2$, 所以 $f(-\frac{5}{2}) + f(1) = -2$.

考点: 1.函数的奇偶性; 2.函数的周期性.

【名师点睛】本题考查函数的奇偶性与周期性. 属于基础题, 在涉及函数求值问题中, 可利用周期性 $f(x) = f(x+T)$, 化函数值的自变量到已知区间或相邻区间, 如果是相邻区间再利用奇偶性转化到已知区间上, 再由函数式求值即可.

15. 在平面直角坐标系中, 当 $P(x, y)$ 不是原点时, 定义 P 的“伴随点”为 $P'(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$; 当 P 是

原点时, 定义 P 的“伴随点”为它自身, 现有下列命题:

①若点 A 的“伴随点”是点 A' , 则点 A' 的“伴随点”是点 A .

②单位圆上的“伴随点”还在单位圆上. 学. 科网

③若两点关于 x 轴对称, 则他们的“伴随点”关于 y 轴对称

④若三点在同一条直线上, 则他们的“伴随点”一定共线.

其中的真命题是 _____.

【答案】②③

【解析】

试题分析:

对于①, 若令 $P(1,1)$, 则其伴随点为 $P'(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, 而 $P'(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 的伴随点为 $(-1, -1)$, 而不是 P , 故①错误;

对于②, 设曲线 $f(x, y) = 0$ 关于 x 轴对称, 则 $f(x, -y) = 0$ 对曲线 $f(x, y) = 0$ 表示同一曲线, 其伴随曲线

分别为 $f(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})=0$ 与 $f(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})=0$ 也表示同一曲线，又因为其伴随曲线分别为

$f(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})=0$ 与 $f(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})=0$ 的图象关于 y 轴对称，所以②正确；③令单位圆上点的

坐标为 $P(\cos x, \sin x)$ 其伴随点为 $P'(\sin x, -\cos x)$ 仍在单位圆上，故③正确；对于④，直线 $y=kx+b$ 上

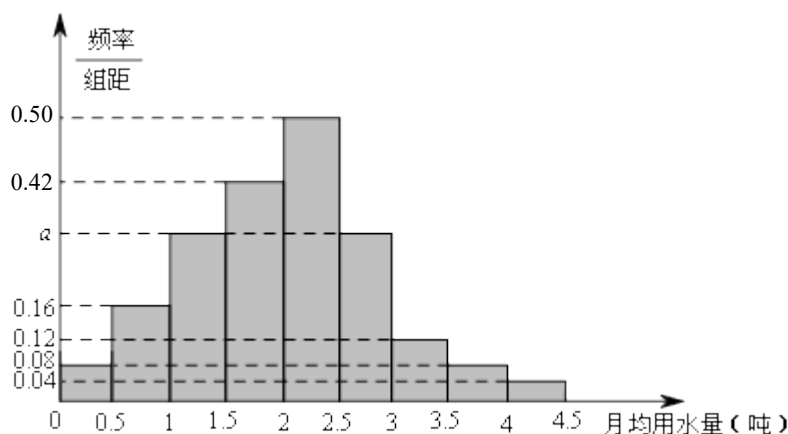
取点后得其伴随点 $(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$ 消参后轨迹是圆，故④错误. 所以正确的为序号为②③.

考点：1.新定义问题；2.曲线与方程.

【名师点睛】本题考查新定义问题，属于创新题，符合新高考的走向. 它考查学生的阅读理解能力，接受新思维的能力，考查学生分析问题与解决问题的能力，新定义的概念实质上只是一个载体，解决新问题时，只要通过这个载体把问题转化为我们已经熟悉的知识即可. 本题新概念“伴随”实质是一个变换，一个坐标变换，只要根据这个变换得出新的点的坐标，然后判断，问题就得以解决.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16、(12 分) 我国是世界上严重缺水的国家，某市为了制定合理的节水方案，对居民用水情况进行了调查，通过抽样，获得了某年 100 位居民每人的月均用水量（单位：吨），将数据按照 $[0, 0.5)$ ， $[0.5, 1)$ ，…… $[4, 4.5]$ 分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图.



(I) 求直方图中的 a 值；

(II) 设该市有 30 万居民，估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数. 说明理由；

(III) 估计居民月均用水量的中位数.

【答案】(I) $a = 0.30$ ；(II) 36000；(III) 2.04.

【解析】

试题分析：（I）由高 \times 组距=频率，计算每组中的频率，因为所有频率之和为1，计算出 a 的值；（II）利用高 \times 组距=频率，先计算出每人月均用水量不低于3吨的频率，再利用频率 \times 样本总数=频数，计算所求人数；（III）将前5组的频率之和与前4组的频率之和进行比较，得出 $2 \leq x < 2.5$ ，再进行计算.

试题解析：（I）由频率分布直方图，可知：月用水量在 $[0,0.5]$ 的频率为 $0.08 \times 0.5 = 0.04$.

同理，在 $[0.5,1)$ ， $(1.5,2]$ ， $[2,2.5)$ ， $[3,3.5)$ ， $[3.5,4)$ ， $[4,4.5)$ 等组的频率分别为0.08，0.21，0.25,0.06，0.04，0.02.

由 $1 - (0.04 + 0.08 + 0.21 + 0.025 + 0.06 + 0.04 + 0.02) = 0.5 \times a + 0.5 \times a$,

解得 $a = 0.30$.

（II）由（I），100位居民月均水量不低于3吨的频率为 $0.06 + 0.04 + 0.02 = 0.12$.

由以上样本的频率分布，可以估计30万居民中月均用水量不低于3吨的人数为 $300000 \times 0.12 = 36000$.

（III）设中位数为 x 吨.

因为前5组的频率之和为 $0.04 + 0.08 + 0.15 + 0.21 + 0.25 = 0.73 > 0.5$,

而前4组的频率之和为 $0.04 + 0.08 + 0.15 + 0.21 = 0.48 < 0.5$

所以 $2 \leq x < 2.5$.

由 $0.50 \times (x - 2) = 0.5 - 0.48$ ，解得 $x = 2.04$.

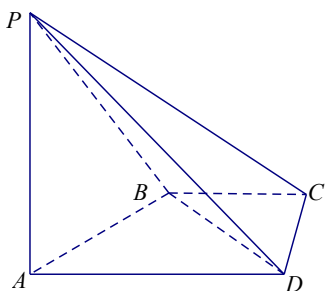
故可估计居民月均用水量的中位数为2.04吨.

考点：频率分布直方图、频率、频数的计算公式

【名师点睛】本题主要考查频率分布直方图、频率、频数的计算公式等基础知识，考查学生的分析问题解决问题的能力.在频率分布直方图中，第*i*个小矩形面积就是相应的频率或概率，所有小矩形面积之和为1，这是解题的关键，也是识图的基础.

17、（12分）

如图，在四棱锥P-ABCD中， $PA \perp CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$ ， $BC = CD = \frac{1}{2}AD$.



(I) 在平面 PAD 内找一点 M, 使得直线 $CM \parallel$ 平面 PAB, 并说明理由;

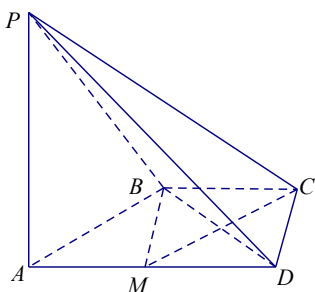
(II) 证明: 平面 PAB \perp 平面 PBD.

【答案】(I) 取棱 AD 的中点 M, 证明详见解析; (II) 证明详见解析.

【解析】

试题分析: (I) 探索线面平行, 根据是线面平行的判定定理, 先证明线线平行, 再得线面平行, 只要在平面 ABCD 上作 $CM \parallel AB$ 交 AD 于 M 即得; (II) 要证面面垂直, 先证线面垂直, 也就要证线线垂直, 本题中有 $PA \perp BD$ (由线面垂直的性质或定义得), 另外可以由平面几何知识证明 $BD \perp AB$, 从而有线面垂直, 再有面面垂直.

试题解析:



(I) 取棱 AD 的中点 M ($M \in$ 平面 PAD), 点 M 即为所求的一个点. 理由如下:

因为 $AD \parallel BC, BC = \frac{1}{2}AD$, 所以 $BC \parallel AM$, 且 $BC = AM$.

所以四边形 AMCB 是平行四边形, 从而 $CM \parallel AB$.

又 $AB \subset$ 平面 PAB, $CM \not\subset$ 平面 PAB,

所以 $CM \parallel$ 平面 PAB.

(说明: 取棱 PD 的中点 N, 则所找的点可以是直线 MN 上任意一点)

(II) 由已知, $PA \perp AB, PA \perp CD$,

因为 $AD \parallel BC, BC = \frac{1}{2}AD$, 所以直线 AB 与 CD 相交,

所以 $PA \perp$ 平面 ABCD.

从而 $PA \perp BD$.

因为 $AD \parallel BC, BC = \frac{1}{2}AD$,

所以 $BC \parallel MD$, 且 $BC = MD$.

所以四边形 BCDM 是平行四边形.

所以 $BM=CD=\frac{1}{2}AD$, 所以 $BD\perp AB$.

又 $AB\cap AP=A$, 所以 $BD\perp$ 平面 PAB .

又 $BD\subset$ 平面 PBD ,

所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBD .

考点: 线面平行、线线平行、线线垂直、线面垂直.

【名师点睛】本题考查线面平行、面面垂直的判断, 考查空间想象能力、分析问题的能力、计算能力. 证明线面平行时, 可根据判定定理的条件在平面内找一条平行线, 而这条平行线一般是由过面外的直线的一个平面与此平面相交而得, 证明时注意定理的另外两个条件(线在面内, 线在面外)要写全, 否则会被扣分, 求线面角(以及其他角), 证明面面垂直时, 要证线面垂直, 要善于从图形中观察有哪些线线垂直, 从而可能有哪个线面垂直, 确定要证哪个线线垂直, 切忌不加思考, 随便写. 学科&网

18、(本题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

(I) 证明: $\sin A \sin B = \sin C$;

(II) 若 $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{6}{5}bc$, 求 $\tan B$.

【答案】(I) 证明详见解析; (II) 4.

【解析】

试题分析: (I) 已知条件式中有边有角, 利用正弦定理, 将边角进行转化(本小题是将边转化为角), 结合诱导公式进行证明; (II) 从已知式可以看出首先利用余弦定理解出 $\cos A = \frac{3}{5}$, 再根据平方关系解出 $\sin A$, 代入(I)中等式 $\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, 解出 $\tan B$ 的值.

试题解析: (I) 根据正弦定理, 可设 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k (k > 0)$.

则 $a = k \sin A$, $b = k \sin B$, $c = k \sin C$.

代入 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ 中, 有

$\frac{\cos A}{k \sin A} + \frac{\cos B}{k \sin B} = \frac{\sin C}{k \sin C}$, 变形可得

$\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin(A+B)$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $A+B+C=\pi$, 有 $\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$,

所以 $\sin A \sin B = \sin C$.

(II) 由已知, $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{6}{5}bc$, 根据余弦定理, 有

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5}.$$

由 (I), $\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$,

$$\text{所以 } \frac{4}{5} \sin B = \frac{4}{5} \cos B + \frac{3}{5} \sin B,$$

$$\text{故 } \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = 4.$$

考点: 正弦定理、余弦定理、商数关系、平方关系.

【名师点睛】本题考查正弦定理、余弦定理、商数关系等基础知识, 考查学生的分析问题的能力和计算能力. 在解三角形的应用中, 凡是遇到等式中有边又有角时, 可用正弦定理进行边角互化, 一种是化为三角函数问题, 一般是化为代数式变形问题. 在角的变化过程中注意三角形的内角和为 180° 这个结论, 否则难以得出结论.

19、(本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{n+1} = qS_n + 1$, 其中 $q > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(I) 若 $a_2, a_3, a_2 + a_3$ 成等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{a_n^2} = 1$ 的离心率为 e_n , 且 $e_2 = 2$, 求 $e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$.

【答案】(I) $a_n = q^{n-1}$; (II) $n + \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

【解析】

试题分析: (I) 已知 S_n 的递推式 $S_{n+1} = qS_n + 1$, 一般是写出当 $n \geq 2$ 时, $S_n = qS_{n-1} + 1$, 两式相减, 利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 得出数列 $\{a_n\}$ 的递推式, 从而证明 $\{a_n\}$ 为等比数列, 利用等比数列的通项公式得到结论;

(II) 先利用双曲线的离心率定义得到 e_n 的表达式, 再由 $e_2 = 2$ 解出 q 的值, 最后利用等比数列的求和公式求解计算.

试题解析: (I) 由已知, $S_{n+1} = qS_n + 1, S_{n+2} = qS_{n+1} + 1$, 两式相减得到 $a_{n+2} = qa_{n+1}, n \geq 1$.

又由 $S_2 = qS_1 + 1$ 得到 $a_2 = qa_1$ ，故 $a_{n+1} = qa_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立.

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 q 的等比数列.

从而 $a_n = q^{n-1}$.

由 $a_2, a_3, a_2 + a_3$ 成等差数列，可得 $2a_3 = a_2 + a_2 + a_3$ ，所以 $a_3 = 2a_2$ ，故 $q = 2$.

所以 $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(II) 由 (I) 可知， $a_n = 2^{n-1}$.

所以双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{a_n^2} = 1$ 的离心率 $e_n = \sqrt{1 + a_n^2} = \sqrt{1 + 2^{2(n-1)}}$.

由 $e_2 = \sqrt{1 + q^2} = 2$ 解得 $q = \sqrt{3}$. 所以，

$$\begin{aligned} e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 &= (1+1) + (1+q^2) + \cdots + [1 + q^{2(n-1)}] \\ &= n + [1 + q^2 + \cdots + q^{2(n-1)}] = n + \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}, \\ &= n + \frac{1}{2}(3^n - 1). \end{aligned}$$

考点：数列的通项公式、双曲线的离心率、等比数列的求和公式

【名师点睛】本题考查数列的通项公式、双曲线的离心率、等比数列的求和公式等基础知识，考查学生的分析问题解决问题的能力、计算能力. 在第 (I) 问中，已知的是 S_n 的递推式，在与 S_n 的关系式中，经常用 $n-1$ 代换 n ($n \geq 2$)，然后两式相减，可得 a_n 的递推式，利用这种方法解题时要注意 a_1 ；在第 (II) 问中，按题意步步为营，认真计算，不需要多少解题技巧，符合文科生的特点.

20、(本小题满分 13 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点，点 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆 E 上.

(I) 求椭圆 E 的方程；

(II) 设不过原点 O 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B ，线段 AB 的中点为 M ，直线 OM 与椭圆 E 交于 C, D ，证明： $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ；(2) 证明见解析.

【解析】

试题分析：(I) 由椭圆两个焦点与短轴的一个端点是正三角形的三个顶点可得 $a=2b$ ，椭圆的标准方程中可减少一个参数，再利用 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆上，可解出 b 的值，从而得到椭圆的标准方程；(II) 首先设出直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$ ，同时设交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，把 l 方程与椭圆方程联立后消去 y 得 x 的二次方程，利用根与系数关系，得 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ ，由 $|MA| \cdot |MB| = \frac{1}{4} |AB|^2$ 求得 $|MA| \cdot |MB|$ (用 m 表示)，由 OM 方程 $y = -\frac{1}{2}x$ 具体地得出 C, D 坐标，也可计算出 $|MC| \cdot |MD|$ ，从而证得相等。

试题解析：(I) 由已知， $a=2b$ 。

又椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ ，故 $\frac{3}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ ，解得 $b^2 = 1$ 。

所以椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(II) 设直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + m (m \neq 0)$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = \frac{1}{2}x + m, \end{cases}$ 得 $x^2 + 2mx + 2m^2 - 2 = 0$ ，①

方程①的判别式为 $\Delta = 4(2 - m^2)$ ，由 $\Delta > 0$ ，即 $2 - m^2 > 0$ ，解得 $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ 。

由①得 $x_1 + x_2 = -2m, x_1 x_2 = 2m^2 - 2$ 。

所以 M 点坐标为 $(-m, \frac{m}{2})$ ，直线 OM 方程为 $y = -\frac{1}{2}x$ ，

由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = -\frac{1}{2}x, \end{cases}$ 得 $C(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), D(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 。

所以 $|MC| \cdot |MD| = \frac{\sqrt{5}}{2}(-m + \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{2} + m) = \frac{5}{4}(2 - m^2)$ 。

又 $|MA| \cdot |MB| = \frac{1}{4} |AB|^2 = \frac{1}{4} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] = \frac{5}{16} [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]$

$$= \frac{5}{16}[4m^2 - 4(2m^2 - 2)] = \frac{5}{4}(2 - m^2).$$

$$\text{所以 } |MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|.$$

考点：椭圆的标准方程及其几何性质.

【名师点睛】本题考查椭圆的标准方程及其几何性质，考查学生的分析问题解决问题的能力，考查数形结合的思想.在涉及到直线与椭圆（圆锥曲线）的交点问题时，一般都设交点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，同时把直线方程与椭圆方程联立，消元后，可得 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ ，再把 $|MA| \cdot |MB|$ 用 x_1, x_2 表示出来，并代入刚才的 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ ，这种方法是解析几何中的“设而不求”法，可减少计算量，简化解题过程.

21、（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x) = ax^2 - a - \ln x$ ， $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{e^x}$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ ， $e = 2.718\cdots$ 为自然对数的底数.

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）证明：当 $x > 1$ 时， $g(x) > 0$ ；

（III）确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x) > g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立.

【答案】（1）当 $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2a}})$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；当 $x \in (\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；（2）证明详见解析；（3） $a \in [\frac{1}{2}, +\infty)$.

【解析】

试题分析：（I）对 $f(x)$ 求导，对 a 进行讨论，研究 $f'(x)$ 的正负，可判断函数的单调性；（II）要证明 $g(x) > 0$ ，只要证 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的最小值大于 0，因此可利用导数求得 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的最小值，就可完成证明；（III）要证明不等式 $f(x) > \frac{1}{x} - \frac{e^{1-x}}{e^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立，基本方法是设 $h(x) = f(x) - (\frac{1}{x} - \frac{e^{1-x}}{e^x}) (x \geq 1)$ ，当 $x > 1$ 时， $h'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x}$ ， $h'(x) = 0$ 的解不易确定，因此结合

（I）的结论，缩小 a 的范围，设 $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x-1}} \frac{e^{x-1} - x}{xe^{x-1}}$ ，并设 $s(x) = e^{x-1} - x$ ，通过研究 $s(x)$ 的单调性得 $x > 1$ 时， $g(x) > 0$ ，从而 $f(x) > 0$ ，这样得出 $a \leq 0$ 不合题意，又 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的极小值点 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}} > 1$ ，且 $f(\frac{1}{\sqrt{2a}}) < f(1) = 0$ ，也不合题意，从而 $a \geq \frac{1}{2}$ ，此时考虑 $h(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x}$ 得

$h'(x) > x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} > 0$, 得此时 $h(x)$ 单调递增, 从而有 $h(x) > h(1) = 0$, 得出结论.

试题解析: (I) $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x} (x > 0)$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 有 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

当 $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2a}})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

(II) 令 $s(x) = e^{x-1} - x$, 则 $s'(x) = e^{x-1} - 1$.

当 $x > 1$ 时, $s'(x) > 0$, 所以 $e^{x-1} > x$, 从而 $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x-1}} > 0$.

(iii) 由 (II), 当 $x > 1$ 时, $g(x) > 0$.

当 $a \leq 0$, $x > 1$ 时, $f(x) = a(x^2 - 1) - \ln x < 0$.

故当 $f(x) > g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立时, 必有 $a > 0$.

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{\sqrt{2a}} > 1$.

由 (I) 有 $f(\frac{1}{\sqrt{2a}}) < f(1) = 0$, 从而 $g(\frac{1}{\sqrt{2a}}) > 0$,

所以此时 $f(x) > g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内不恒成立.

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 令 $h(x) = f(x) - g(x) (x \geq 1)$.

当 $x > 1$ 时, $h'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x} > x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} > \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} > 0$.

因此 $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增.

又因为 $h(1) = 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, 即 $f(x) > g(x)$ 恒成立.

综上， $a \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ 。

考点：导数的计算、利用导数求函数的单调性，最值、解决恒成立问题。

【名师点睛】本题考查导数的计算、利用导数求函数的单调性，最值、解决恒成立问题，考查学生的分析问题解决问题的能力。求函数的单调性，基本方法是求 $f'(x)$ ，解方程 $f'(x) = 0$ ，再通过 $f'(x)$ 的正负确定 $f(x)$ 的单调性；要证明函数不等式 $f(x) > g(x)$ ，一般证明 $f(x) - g(x)$ 的最小值大于 0，为此要研究函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的单调性。本题中注意由于函数 $h(x)$ 有极小值没法确定，因此要利用已经求得的结论缩小参数取值范围。比较新颖，学生不易想到。有一定的难度。