

绝密★启用前

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数 学（理工类）

本试题卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页，共 4 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上大题无效。满分 150 分。考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡上一并交回。

第 I 卷 （选择题 共 50 分）

注意事项：

必须使用 2B 铅笔在答题卡上将所选答案对应的标号涂黑。

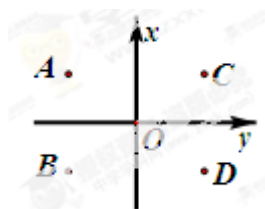
一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x + 2 = 0\}$ ，集合 $B = \{x | x^2 - 4 = 0\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

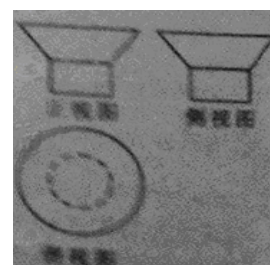
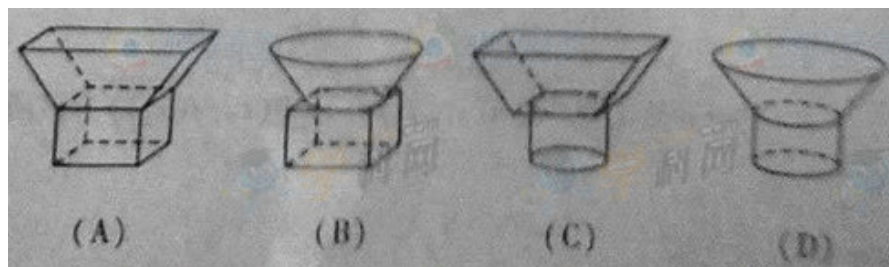
- (A) $\{-2\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{-2, 2\}$ (D) \emptyset

2. 如图，在复平面内，点 A 表示复数 z ，则图中表示 z 的共轭复数的点是 ()

- (A) A (B) B (C) C (D) D



3. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的直观图可以是 ()



4. 设 $x \in \mathbb{Z}$ ，集合 A 是奇数集，集合 B 是偶数集。若命题 $p: \forall x \in A, 2x \in B$ ，则 ()

- (A) $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$ (B) $\neg p: \forall x \notin A, 2x \notin B$

(C) $\neg p: \exists x \notin A, 2x \in B$

(D) $\neg p: \exists x \in A,$

$2x \notin B$

5. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示

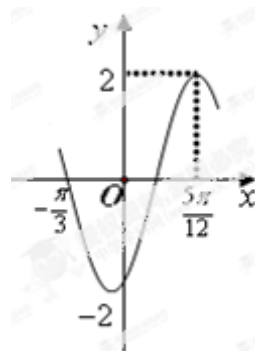
示, 则 ω, φ 的值分别是 ()

(A) $2, -\frac{\pi}{3}$

(B) $2, -\frac{\pi}{6}$

(C) $4, -\frac{\pi}{6}$

(D) $4, \frac{\pi}{3}$



6. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线的距离是 ()

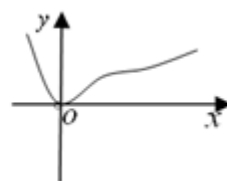
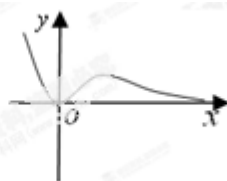
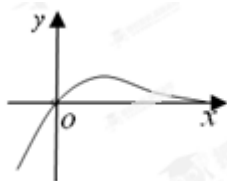
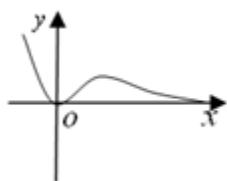
(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) 1

(D) $\sqrt{3}$

7. 函数 $y = \frac{x^3}{3^x - 1}$ 的图象大致是 ()



8. 从 1, 3, 5, 7, 9 这五个数中, 每次取出两个不同的数分别为 a, b , 共可得到 $\lg a - \lg b$ 的不同值的个数是 ()

(A) 9

(B) 10

(C) 18

(D) 20

9. 节日前夕, 小李在家门前的树上挂了两串彩灯, 这两串彩灯的第一次闪亮相互独立, 且都在通电后的 4 秒内任一时刻等可能发生, 然后每串彩灯以 4 秒为间隔闪亮, 那么这两串彩灯同时通电后, 它们第一次闪亮的时刻相差不超过 2 秒的概率是 ()

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{7}{8}$

10. 设函数 $f(x) = \sqrt{e^x + x - a}$ ($a \in \mathbb{R}, e$ 为自然对数的底数). 若曲线 $y = \sin x$ 上存在 (x_0, y_0) 使得 $f(f(y_0)) = y_0$, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $[1, e]$

(B) $[e^{-1}, 1]$

(C) $[1, 1+e]$

(D) $[e^{-1}, e+1]$

第二部分 (非选择题 共 100 分)

注意事项：

必须使用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答．作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚．答在试题卷上无效．

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 二项式 $(x+y)^5$ 的展开式中，含 x^2y^3 的项的系数是_____．（用数字作答）

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O ， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AO}$ ，则 $\lambda =$ _____．



13. 设 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$ ， $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____．

14. 已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 4x$ ，那么，不等式 $f(x+2) < 5$ 的解集是_____．

15. 设 P_1, P_2, \dots, P_n 为平面 α 内的 n 个点，在平面 α 内的所有点中，若点 P 到 P_1, P_2, \dots, P_n 点的距离之和最小，则称点 P 为 P_1, P_2, \dots, P_n 点的一个“中位点”．例如，线段 AB 上的任意点都是端点 A, B 的中位点．则有下列命题：

- ①若 A, B, C 三个点共线， C 在线段上，则 C 是 A, B, C 的中位点；
- ②直角三角形斜边的点是该直角三角形三个顶点的中位点；
- ③若四个点 A, B, C, D 共线，则它们的中位点存在且唯一；
- ④梯形对角线的交点是该梯形四个顶点的唯一中位点．

其中的真命题是_____．（写出所有真命题的序号）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16. (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 + a_3 = 8$ ，且 a_4 为 a_2 和 a_9 的等比中项，求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公差及前 n 项和．

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $2\cos^2 \frac{A+B}{2} \cos B - \sin(A-B)\sin B + \cos(A+C) = -\frac{3}{5}$ ．

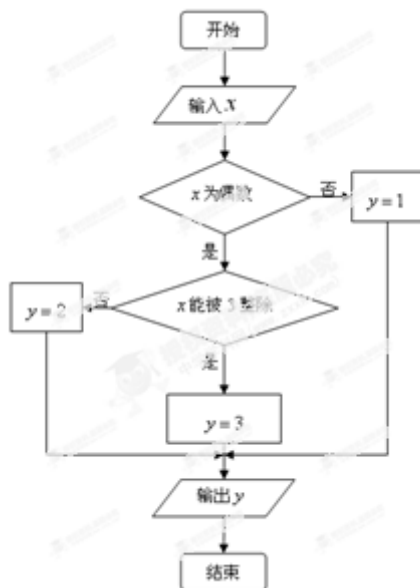
(I) 求 $\cos A$ 的值;

(II) 若 $a = 4\sqrt{2}$, $b = 5$, 求向量 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 方向上的投影.

18. (本小题满分 12 分)

某算法的程序框图如图所示, 其中输入的变量 x 在 $1, 2, 3, \dots, 24$ 这 24 个整数中等可能随机产生.

(I) 分别求出按程序框图正确编程运行时输出 y 的值为 i 的概率 P_i ($i = 1, 2, 3$);



(II) 甲、乙两同学依据自己对程序框图的理解, 各自编写程序重复运行 n 次后, 统计记录了输出 y 的值为 i ($i = 1, 2, 3$) 的频数. 以下是甲、乙所作频数统计表的部分数据.

甲的频数统计表 (部分)

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	14	6	10
...
2100	1027	376	697

乙的频数统计表 (部分)

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	12	11	7
...
2100	1051	696	353

当 $n = 2100$ 时, 根据表中的数据, 分别写出甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 i ($i = 1, 2, 3$) 的频率 (用分数表示), 并判断两位同学中哪一位所编写程序符合算法要求的可能性较大;

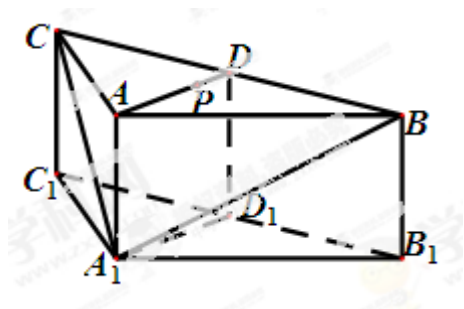
(III) 按程序框图正确编写的程序运行 3 次, 求输出 y 的值为 2 的次数 ξ 的分布列及数学期望.

19. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ， $AB = AC = 2AA_1$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， D, D_1 分别是线段 BC, B_1C_1 的中点， P 是线段 AD 的中点。

(I) 在平面 ABC 内，试作出过点 P 与平面 A_1BC 平行的直线 l ，说明理由，并证明直线 $l \perp$ 平面 ADD_1A_1 ；

(II) 设 (I) 中的直线 l 交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，求二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值。



20. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点分别为 $F_1(-1, 0)$ ， $F_2(1, 0)$ ，且椭圆 C 经过点 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 。

(I) 求椭圆 C 的离心率；

(II) 设过点 $A(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点，点 Q 是线段 MN 上的点，且

$$\frac{2}{|AQ|^2} = \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2},$$

求点 Q 的轨迹方程。

21. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ ，其中 a 是实数。设 $A(x_1, f(x_1))$ ， $B(x_2, f(x_2))$ 为该函数

数图象上的两点，且 $x_1 < x_2$ 。

(I) 指出函数 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线互相垂直，且 $x_2 < 0$ ，求 $x_2 - x_1$ 的最小值；

(III) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线重合，求 a 的取值范围。

