2010年四川省高考数学试卷（文科）

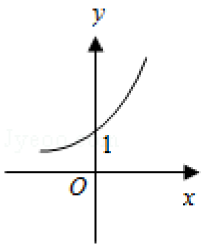
参考答案与试题解析

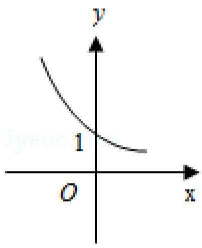
一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

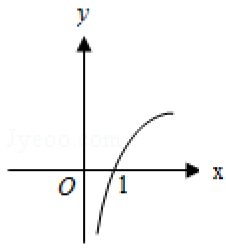
1.（5分）（2010•四川）设集合A={3，5，6，8}，集合B={4，5，7，8}，则A∩B等于（　　）

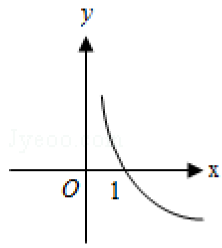
A．{3，4，5，6，7，8}　B．{3，6}　C．{4，7}　D．{5，8}

2.（5分）（2010•四川）函数$y=\log_2x$的图象大致是（　　）

A．

B．

C．

D．

3.（5分）（2010•四川）抛物线$y^2=8x$的焦点到准线的距离是（　　）

A．1　B．2　C．4　D．8

4.（5分）（2010•四川）一个单位有职工800人，期中具有高级职称的160人，具有中级职称的320人，具有初级职称的200人，其余人员120人．为了解职工收入情况，决定采用分层抽样的方法，从中抽取容量为40的样本．则从上述各层中依次抽取的人数分别是（　　）

A．12，24，15，9　B．9，12，12，7 C．8，15，12，5 D．8，16，10，6

5.（5分）（2010•四川）函数$f(x)=x^2+mx+1$的图象关于直线x=1对称的充要条件是（　　）

A．m=﹣2　B．m=2 C．m=﹣1　D．m=1

6.（5分）（2010•四川）设点M是线段BC的中点，点A在直线BC外，$\overrightarrow{BC}^2=16$，

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则$|\overrightarrow{AM}|=$（　　）

A．8　B．4　C．2　D．1

7.（5分）（2010•四川）将函数y=sinx的图象上所有的点向右平行移动$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象的函数解析式是（　　）

A．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{10})$　B．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{5})$　C．$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10})$　D．$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{20})$

8.（5分）（2010•四川）某加工厂用某原料由甲车间加工出A产品，由乙车间加工出B产品．甲车间加工一箱原料需耗费工时10小时可加工出7千克A产品，每千克A产品获利40元．乙车间加工一箱原料需耗费工时6小时可加工出4千克B产品，每千克B产品获利50元．甲、乙两车间每天共能完成至多70多箱原料的加工，每天甲、乙车间耗费工时总和不得超过480小时，甲、乙两车间每天获利最大的生产计划为（　　）

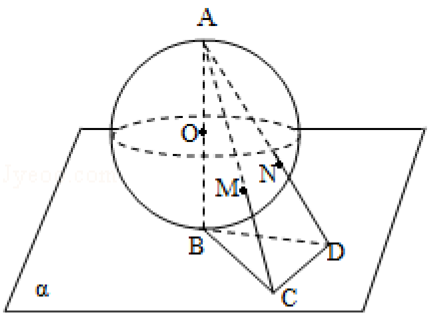
A．甲车间加工原料 10 箱，乙车间加工原料 60 箱
B．甲车间加工原料 15 箱，乙车间加工原料 55 箱
C．甲车间加工原料 18 箱，乙车间加工原料 50 箱
D．甲车间加工原料 40 箱，乙车间加工原料 30 箱

9．（5 分）（2010•四川）由 1、2、3、4、5 组成没有重复数字且 1、2 都不与 5 相邻的五位数的个数是（　　）
A．36　B．32　C．28　D．24

10．（5 分）（2010•四川）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点为 F，其右准线与 x 轴的交点为 A．在椭圆上存在点 P 满足线段 AP 的垂直平分线过点 F，则椭圆离心率的取值范围是（　　）
A．$(0，\frac{\sqrt{2}}{2}]$　B．$(0，\frac{1}{2}]$　C．$[\sqrt{2}-1，1)$　D．$[\frac{1}{2}，1)$

11．（5 分）（2010•四川）设 $a>b>0$，则 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$的最小值是（　　）
A．1　B．2　C．3　D．4

12．（5 分）（2010•四川）半径为 R 的球 O 的直径 AB 垂直于平面 α，垂足为 B，△BCD 是平面 α 内边长为 R 的正三角形，线段 AC、AD 分别与球面交于点 M、N，那么 M、N 两点间的球面距离是（　　）



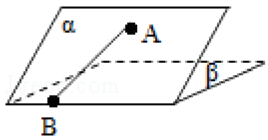
A．$R\arccos\frac{17}{25}$　B．$R\arccos\frac{18}{25}$　C．$\frac{1}{3}\pi R$　D．$\frac{4}{15}\pi R$

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）（2010•四川）$(x-\frac{2}{x})^4$的展开式中的常数项为_____（用数字作答）

14．（4 分）（2010•四川）直线 $x-2y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 相交于 A、B 两点，则|AB|=____．

15．（4 分）（2010•四川）如图，二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小是 60°，线段 AB⊂α．B∈l，AB 与 l 所成的角为 30°．则 AB 与平面 β 所成的角的正弦值是__ __．



16．（4 分）（2010•四川）设 S 为复数集 C 的非空子集．若对任意 x，y∈S，都有 x+y，x﹣y，xy∈S，则称 S 为封闭集．下列命题：

①集合 S={a+bi|（a，b 为整数，i 为虚数单位）}为封闭集；

②若 S 为封闭集，则一定有 0∈S；

③封闭集一定是无限集；

④若 S 为封闭集，则满足 S⊆T⊆C 的任意集合 T 也是封闭集．

其中真命题是_____．（写出所有真命题的序号）

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）（2010•四川）某种有奖销售的饮料，瓶盖内印有“奖励一瓶”或“谢谢购买”字样，购买一瓶若其瓶盖内印有“奖励一瓶”字样即为中奖，中奖概率为$\frac{1}{6}$．甲、乙、丙三位同学每人购买了一瓶该饮料．

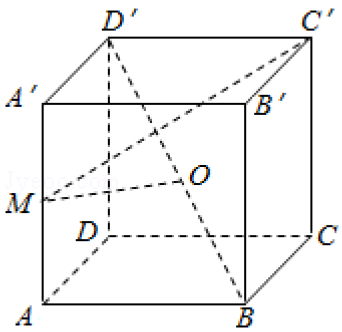
（Ⅰ）求三位同学都没有中奖的概率；

（Ⅱ）求三位同学中至少有两位没有中奖的概率．

18．（12 分）（2010•四川）在正方体 ABCD﹣A′B′C′D′中，点 M 是棱 AA′的中点，点 O 是对角线 BD′的中点．

（Ⅰ）求证：OM 为异面直线 AA′和 BD′的公垂线；

（Ⅱ）求二面角 M﹣BC′﹣B′的大小．



19．（12 分）（2010•四川）（Ⅰ）①证明两角和的余弦公式 $C_{\alpha+\beta}$：cos（α+β）=cosαcosβ﹣sinαsinβ；

②由 $C_{\alpha+\beta}$ 推导两角和的正弦公式 $S_{\alpha+\beta}$：sin（α+β）=sinαcosβ+cosαsinβ．

（Ⅱ）已知

$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\alpha\in(\pi,\ \frac{3}{2}\pi)$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$，$\beta\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，$\cos(\alpha+\beta)$

，求 cos（α+β）.

20．（12 分）（2010•四川）已知等差数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 6，前 8 项和为﹣4．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=(4-a_n)q^{n-1}$（$q\neq0$，$n\in N^*$），求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n．

21．（12 分）（2010•四川）已知定点 A（﹣1，0），F（2，0），定直线 l：$x=\frac{1}{2}$，不在 x 轴上的动点 P 与点 F 的距离是它到直线 l 的距离的 2 倍．设点 P 的轨迹为 E，过点 F 的直线交 E 于 B、C 两点，直线 AB、AC 分别交 l 于点 M、N．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）试判断以线段 MN 为直径的圆是否过点 F，并说明理由．

22．（14 分）（2010•四川）设$f(x)=\frac{1+a^x}{1-a^x}$（a＞0 且 a≠1），g（x）是 f（x）的反函数．

（1）求 g（x）；

（2）当 x∈[2，6]时，恒有$g(x)>\log_a\frac{t}{(x^2-1)(7-x)}$成立，求 t 的取值范围；

（3）当$0<a\leq\frac{1}{2}$时，试比较 f（1）+f（2）+…+f（n）与 n+4 的大小，并说明理由．

2010 年四川省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1.（5 分）（2010•四川）设集合 A={3，5，6，8}，集合 B={4，5，7，8}，则 A∩B 等于（　　）

A．{3，4，5，6，7，8}　B．{3，6}　C．{4，7}　D．{5，8}

【考点】交集及其运算．

【分析】根据交集的定义和运算法则进行计算．

【解答】解：∵集合 A={3，5，6，8}，集合 B={4，5，7，8}，

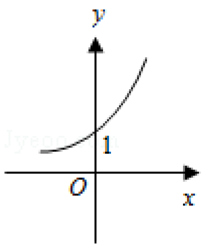
又∵集合 A 与集合 B 中的公共元素为 5，8，

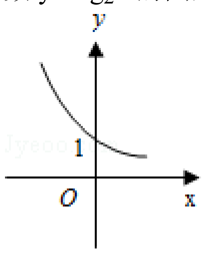
∴A∩B={5，8}，

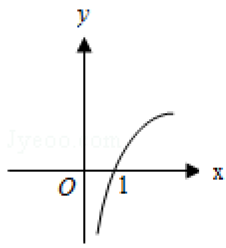
故选 D．

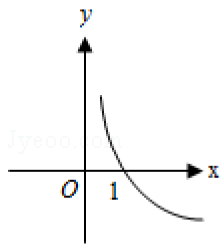
【点评】此题考查简单的集合的运算，集合在高考的考查是以基础题为主，题目比较容易，学习过程中我们应从基础出发．

2.（5 分）（2010•四川）函数 $y=\log_2x$ 的图象大致是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【考点】对数函数的图像与性质．

【分析】函数 $y=\log_2x$ 为对数函数，又底数大于 1，可选答案．

【解答】解：函数 $y=\log_2x$ 为对数函数，且 2＞1

故选 C．

【点评】本题考查对数函数的图象问题，属基本题．

3.（5 分）（2010•四川）抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到准线的距离是（　　）

A．1　B．2　C．4　D．8

【考点】抛物线的简单性质．

【专题】计算题．

【分析】先根据抛物线的方程求出 p 的值，即可得到答案．

【解答】解：由 $y^2=2px=8x$，知 p=4，又焦点到准线的距离就是 p．

故选 C．

【点评】本题主要考查抛物线的基本性质．属基础题．

4．（5分）（2010•四川）一个单位有职工800人，期中具有高级职称的160人，具有中级职称的320人，具有初级职称的200人，其余人员120人．为了解职工收入情况，决定采用分层抽样的方法，从中抽取容量为40的样本．则从上述各层中依次抽取的人数分别是（　　）

A．12，24，15，9　　B．9，12，12，7 C．8，15，12，5 D．8，16，10，6

【考点】分层抽样方法．

【分析】先求得比例，然后各层的总人数乘上这个比例，即得到样本中各层的人数．

【解答】解：因为$\frac{40}{800}=\frac{1}{20}$，故各层中依次抽取的人数分别是$\frac{160}{20}=8$，$\frac{320}{20}=16$，$\frac{200}{20}=10$，$\frac{120}{20}=6$，

故选D．

【点评】本题主要考查分层抽样方法．

5．（5分）（2010•四川）函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是（　　）

A．$m=-2$　　B．$m=2$ C．$m=-1$　　D．$m=1$

【考点】函数的图象．

【专题】计算题．

【分析】根据二次函数对称轴定义和互为充要条件的条件去判断即可．

【解答】解：函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 的对称轴为 $x=-\frac{m}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{m}{2}=1\Rightarrow m=-2$．

答案：A．

【点评】本题考查了互为充要条件的关系和二次函数的对称轴问题．

6．（5分）（2010•四川）设点M是线段BC的中点，点A在直线BC外，$\overrightarrow{BC}^2=16$，

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则$|\overrightarrow{AM}|=$（　　）

A．8　　B．4　　C．2　　D．1

【考点】向量的线性运算性质及几何意义．

【分析】先求出$|\overrightarrow{BC}|=4$，又因为$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{AM}|=4$，可得答案．

【解答】解：由$\overrightarrow{BC}^2=16$，得$|\overrightarrow{BC}|=4$，

$\because |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=4$，

而$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|$

$\therefore |\overrightarrow{AM}|=2$

故选C．

【点评】本题主要考查平面向量的线性运算，属基础题．

7．（5 分）（2010•四川）将函数 y=sinx 的图象上所有的点向右平行移动$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图象的函数解析式是（　　）

A．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{10})$　B．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{5})$　C．$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10})$　D．$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{20})$

【考点】函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】分析法．

【分析】先根据左加右减进行左右平移，然后根据横坐标伸长到原来的 2 倍时 w 变为原来的$\frac{1}{2}$倍进行横向变换．

【解答】解：将函数 y=sinx 的图象上所有的点向右平行移动$\frac{\pi}{10}$个单位长度，所得函数图象的解析式为 $y=\sin(x-\frac{\pi}{10})$

再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图象的函数解析式是 $y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10})$．

故选 C．

【点评】本题主要考查三角函数的平移变换．平移的原则是左加右减、上加下减．

8．（5 分）（2010•四川）某加工厂用某原料由甲车间加工出 A 产品，由乙车间加工出 B 产品．甲车间加工一箱原料需耗费工时 10 小时可加工出 7 千克 A 产品，每千克 A 产品获利 40 元．乙车间加工一箱原料需耗费工时 6 小时可加工出 4 千克 B 产品，每千克 B 产品获利 50 元．甲、乙两车间每天共能完成至多 70 多箱原料的加工，每天甲、乙车间耗费工时总和不得超过 480 小时，甲、乙两车间每天获利最大的生产计划为（　　）

A．甲车间加工原料 10 箱，乙车间加工原料 60 箱

B．甲车间加工原料 15 箱，乙车间加工原料 55 箱

C．甲车间加工原料 18 箱，乙车间加工原料 50 箱

D．甲车间加工原料 40 箱，乙车间加工原料 30 箱

【考点】简单线性规划的应用．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】本题考查的知识点是简单线性规划的应用，根据题意列出不等式组，找出目标函数

【解答】解：设甲车间加工原料 x 箱，

乙车间加工原料 y 箱，

则$\begin{cases}x+y\leqslant 70\\10x+6y\leqslant 480\\x,\ y\in N\end{cases}$

目标函数 z=280x+200y

结合图象可得：当 x=15，y=55 时 z 最大．

故选 B．

【点评】在解决线性规划问题是，我们常寻找边界点，代入验证确定最值

9.（5 分）（2010•四川）由 1、2、3、4、5 组成没有重复数字且 1、2 都不与 5 相邻的五位数的个数是（　　）

A．36　B．32　C．28　D．24

【考点】排列、组合的实际应用．

【专题】计算题．

【分析】依题意，分①5 在两端与②5 不在两端两种情况，进而分析 1、2 两个数的情况数目，由分类计数的加法原理计算可得答案．

【解答】解：如果 5 在两端，则 1、2 有三个位置可选，

排法为 $2\times A_3^2A_2^2=24$ 种，

如果 5 不在两端，则 1、2 只有两个位置可选，首先排 5，有 $C_3^1=3$ 种，然后排 1 和 2，有

$A_2^2A_2^2=12$ 种，

$3\times A_2^2A_2^2=12$ 种，

共计 12+24=36 种；

故选 A．

【点评】本题考查排列、组合的应用，注意优先分析受限制的特殊元素与分类讨论的方法的使用．

10.（5 分）（2010•四川）椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的右焦点为 F，其右准线与 x 轴的交点为 A．在椭圆上存在点 P 满足线段 AP 的垂直平分线过点 F，则椭圆离心率的取值范围是（　　）

A．（0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$] B．（0，$\frac{1}{2}$]　C．[$\sqrt{2}-1$，1）D．[$\frac{1}{2}$，1）

【考点】椭圆的简单性质．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】由题意，椭圆上存在点 P，使得线段 AP 的垂直平分线过点 F，即 F 点到 P 点与 A 点的距离相等，根据|PF|的范围求得|FA|的范围，进而求得 $\frac{c}{a}$ 的范围即离心率 e 的范围．

【解答】解：由题意，椭圆上存在点 P，使得线段 AP 的垂直平分线过点 F，即 F 点到 P 点与 A 点的距离相等

而 $|FA|=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}$

$|PF|\in[a-c,a+c]$

于是 $\frac{b^2}{c}\in[a-c,a+c]$

即 $ac-c^2\le b^2\le ac+c^2$

$$\therefore\begin{cases}ac-c^2\leqslant a^2-c^2\\ a^2-c^2\leqslant ac+c^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{c}{a}\leqslant 1\\ \frac{c}{a}\leqslant -1\text{或}\frac{c}{a}\geqslant \frac{1}{2}\end{cases}$$

又 e∈（0，1）

故 e∈ $[\frac{1}{2}, 1)$．

【点评】本题主要考查椭圆的基本性质．属基础题．

11．（5 分）（2010•四川）设 a＞b＞0，则 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【考点】基本不等式在最值问题中的应用．

【专题】计算题；压轴题；转化思想．

【分析】将 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 变形为 $ab+\frac{1}{ab}+a(a-b)+\frac{1}{a(a-b)}$，然后前两项和后两项分别用均值不等式，即可求得最小值．

【解答】解：$a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}=ab+\frac{1}{ab}+a(a-b)+\frac{1}{a(a-b)}\geq 4$

当且仅当 $\begin{cases}ab=\frac{1}{ab}\\ a(a-b)=\frac{1}{a(a-b)}\end{cases}$ 取等号

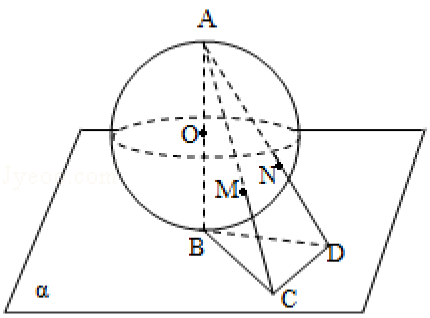
即 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 取等号．

$\therefore a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值为 4

故选：D

【点评】本题考查凑成几个数的乘积为定值，利用基本不等式求出最值．

12．（5 分）（2010•四川）半径为 R 的球 O 的直径 AB 垂直于平面 α，垂足为 B，△BCD 是平面 α 内边长为 R 的正三角形，线段 AC、AD 分别与球面交于点 M、N，那么 M、N 两点间的球面距离是（　　）



A．$R\arccos\frac{17}{25}$　B．$R\arccos\frac{18}{25}$　C．$\frac{1}{3}\pi R$　　D．$\frac{4}{15}\pi R$

【考点】球面距离及相关计算.
【专题】计算题；压轴题.
【分析】求解本题需要根据题意求解出题目中的角 MON 的余弦，再代入求解，即可求出 MN 的两点距离.
【解答】解：由已知，AB=2R，BC=R，

故 $\tan\angle BAC=\frac{1}{2}$

$\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

连接 OM，则△OAM 为等腰三角形

$AM=2AO\cos\angle BAC=\frac{4\sqrt{5}}{5}R$,

同理 $AN=\frac{4\sqrt{5}}{5}R$，且 MN∥CD

而 $AC=\sqrt{5}R$，CD=R

故 MN：CD=AM：AC

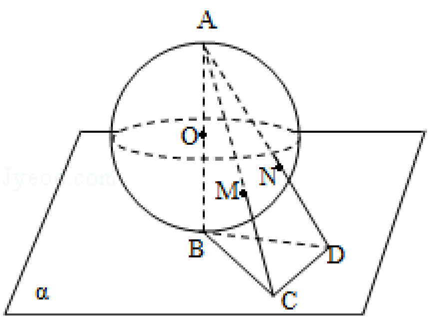
$MN=\frac{4}{5}R$,

连接 OM、ON，有 OM=ON=R

于是 $\cos\angle MON=\frac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM\cdot ON}=\frac{17}{25}$

所以 M、N 两点间的球面距离是 $R\arccos\frac{17}{25}$.

故选 A.



【点评】本题考查学生的空间想象能力，以及学生对球面上的点的距离求解，是中档题.

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）（2010•四川）$(x-\frac{2}{x})^4$ 的展开式中的常数项为__24__（用数字作答）

【考点】二项式系数的性质.
【分析】利用二项展开式的通项公式求出二项展开式的第 r+1 项，令 x 的指数为 0 得常数项.
【解答】解：展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_4^r x^{4-r}(-\frac{2}{x})^r=(-2)^r C_4^r x^{4-2r}$

令 4﹣2r=0 得 r=2
得常数项为 $C_4^2(-2)^2=24$.

故答案为 24．

【点评】二项展开式的通项公式是解决二项展开式的特定项问题的工具．

14．（4 分）（2010•四川）直线 $x-2y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 相交于 A、B 两点，则$|AB|=$__$2\sqrt{3}$__．

【考点】直线与圆的位置关系．

【分析】可以直接求出 A、B 然后求值；也可以用圆心到直线的距离来求解．

【解答】解：圆心为（0，0），半径为 $2\sqrt{2}$，

圆心到直线 $x-2y+5=0$ 的距离为 $d=\frac{|0+0+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$，

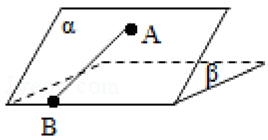
故 $\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2+(\sqrt{5})^2=(2\sqrt{2})^2$，

得$|AB|=2\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{3}$．

【点评】本题考查直线与圆的位置关系，考查学生的理解能力，是基础题．

15．（4 分）（2010•四川）如图，二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小是 60°，线段 $AB\subset\alpha$．$B\in l$，AB 与 l 所成的角为 30°．则 AB 与平面 β 所成的角的正弦值是__$\frac{\sqrt{3}}{4}$__．



【考点】平面与平面之间的位置关系；与二面角有关的立体几何综合题．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】过点 A 作平面 β 的垂线，垂足为 C，在 β 内过 C 作 l 的垂线．垂足为 D，连接 AD，从而∠ADC 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，连接 CB，则∠ABC 为 AB 与平面 β 所成的角，在直角三角形 ABC 中求出此角即可．

【解答】解：过点 A 作平面 β 的垂线，垂足为 C，

在 β 内过 C 作 l 的垂线．垂足为 D

连接 AD，有三垂线定理可知 $AD\perp l$，

故∠ADC 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，为 60°

又由已知，∠ABD=30°

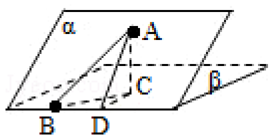
连接 CB，则∠ABC 为 AB 与平面 β 所成的角

设 AD=2，则 $AC=\sqrt{3}$，CD=1

$AB=\frac{AD}{\sin 30^0}=4$

$\therefore \sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{4}$；

故答案为$\frac{\sqrt{3}}{4}$．



【点评】本题主要考查了平面与平面之间的位置关系，以及直线与平面所成角，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题.

16．（4 分）（2010•四川）设 S 为复数集 C 的非空子集．若对任意 x，y∈S，都有 x+y，x﹣y，xy∈S，则称 S 为封闭集．下列命题：
①集合 S={a+bi|（a，b 为整数，i 为虚数单位）}为封闭集；
②若 S 为封闭集，则一定有 0∈S；
③封闭集一定是无限集；
④若 S 为封闭集，则满足 S⊆T⊆C 的任意集合 T 也是封闭集．
其中真命题是 ①② ．（写出所有真命题的序号）
【考点】集合的包含关系判断及应用；子集与真子集；复数的基本概念．
【专题】计算题；综合题；压轴题；新定义．
【分析】由题意直接验证①即可判断正误；令 x=y 可推出②是正确的；找出反例集合 S={0}，即可判断③的错误．S={0}，T={0，1}，推出﹣1 不属于 T，判断④是错误的．
【解答】解：两个复数的和是复数，两个复数的差也是复数，所以集合 S={a+bi|（a，b 为整数，i 为虚数单位）}为封闭集，①正确．
当 S 为封闭集时，因为 x﹣y∈S，取 x=y，得 0∈S，②正确
对于集合 S={0}，显然满足所有条件，但 S 是有限集，③错误
取 S={0}，T={0，1}，满足 S⊆T⊆C，但由于 0﹣1=﹣1 不属于 T，故 T 不是封闭集，④错误．
【点评】本题考查复数的基本概念，集合的子集，集合的包含关系判断及应用，是中档题．

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）
17．（12 分）（2010•四川）某种有奖销售的饮料，瓶盖内印有“奖励一瓶”或“谢谢购买”字样，购买一瓶若其瓶盖内印有“奖励一瓶”字样即为中奖，中奖概率为$\frac{1}{6}$．甲、乙、丙三位同学每人购买了一瓶该饮料．
（Ⅰ）求三位同学都没有中奖的概率；
（Ⅱ）求三位同学中至少有两位没有中奖的概率．
【考点】互斥事件的概率加法公式；相互独立事件的概率乘法公式．
【专题】概率与统计．
【分析】（Ⅰ）先求出甲、乙、丙没中奖的概率，因此事件为相互独立事件，代入公式求解；（Ⅱ）先求出此事件的对立事件，再由对立事件的公式进行求解．
【解答】解：设甲、乙、丙中奖的事件分别为 A、B、C，则 P（A）=P（B）=P（C）=$\frac{1}{6}$，
甲、乙、丙没中奖的事件分别为$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$，则 P（$\overline{A}$）P=（$\overline{B}$）=P（$\overline{C}$）=$\frac{5}{6}$，
（Ⅰ）由于“三位同学都没有中奖”是三个相互独立事件，
∴P（$\overline{A}$•$\overline{B}$•$\overline{C}$）=P（$\overline{A}$）P（$\overline{B}$）P（$\overline{C}$）=$(\frac{5}{6})^3=\frac{125}{216}$
答：三位同学都没有中奖的概率为$\frac{125}{216}$；
（Ⅱ）“三位同学中至少有两位没有中奖”的对立事件为“至少有两位中奖”
∴1﹣P（$\overline{A}$•B•C+A•$\overline{B}$•C+A•B•$\overline{C}$+A•B•C）

$=1-3\times\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^{3}=\frac{25}{27}$

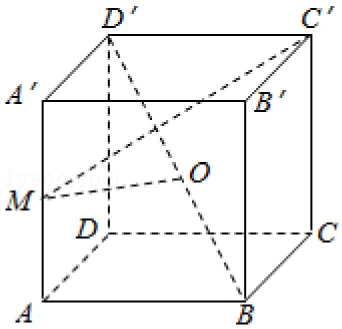
答：三位同学至少两位没有中奖的概率为$\frac{25}{27}$.

【点评】本小题主要考查相互独立事件、互斥事件的概率计算，考查运用所学知识与方法解决实际问题的能力.

18.（12 分）（2010•四川）在正方体 ABCD﹣A′B′C′D′中，点 M 是棱 AA′的中点，点 O 是对角线 BD′的中点.

（Ⅰ）求证：OM 为异面直线 AA′和 BD′的公垂线；

（Ⅱ）求二面角 M﹣BC′﹣B′的大小.



【考点】与二面角有关的立体几何综合题；空间中直线与直线之间的位置关系.

【分析】解法一：（1）由题意及图形，利用正方体的特点及异面直线间的公垂线的定义可以求证；

（2）由题意及图形，利用三垂线定理，求出所求的二面角的平面角，然后再在三角形中求出角的大小.

解法二：（1）由题意及正方体的特点可以建立如图示的空间直角坐标系，利用向量的知识证明两条直线垂直；

（2）由题意及空间向量的知识，抓好两平面的法向量与二面角之间的关系进而可以求出二面角的大小

【解答】解：法一（1）连接 AC，取 AC 中点 K，

则 K 为 BD 的中点，连接 OK

因为 M 是棱 AA′的中点，点 O 是 BD′的中点

所以 AM $\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}$DD′ $\underline{\underline{/\!/}}$ OK

所以 MO $\underline{\underline{/\!/}}$ AK

由 AA′⊥AK，得 MO⊥AA′

因为 AK⊥BD，AK⊥BB′，所以 AK⊥平面 BDD′B′

所以 AK⊥BD′

所以 MO⊥BD′

又因为 OM 是异面直线 AA′和 BD′都相交

故 OM 为异面直线 AA'和 BD'的公垂线；

（2）取 BB′中点 N，连接 MN，

则 MN⊥平面 BCC′B′

过点 N 作 NH⊥BC′于 H，连接 MH

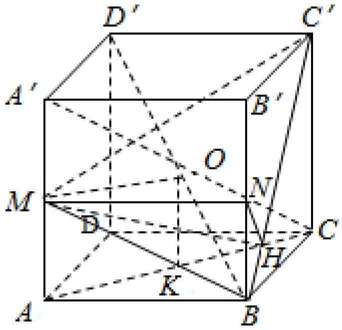
则由三垂线定理得 BC′⊥MH

从而，∠MHN 为二面角 M﹣BC′﹣B′的平面角

MN=1，NH=Bnsin45°=$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

在 Rt△MNH 中，tan∠MHN=$\frac{MN}{NH}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{2}$

故二面角 M﹣BC′﹣B′的大小为 arctan$2\sqrt{2}$.



法二：

以点 D 为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系 D﹣xyz

则 A（1，0，0），B（1，1，0），C（0，1，0），

A′（1，0，1），C′（0，1，1），D′（0，0，1）

（1）因为点 M 是棱 AA′的中点，点 O 是 BD′的中点

所以 M（1，0，$\frac{1}{2}$），O（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）$\overrightarrow{OM}=(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0)$，

$\overrightarrow{AA'}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{BD'}=(-1,\ -1,\ 1)$ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BD'}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$

所以 OM⊥AA′，OM⊥BD′

又因为 OM 与异面直线 AA′和 BD′都相交

故 OM 为异面直线 AA′和 BD′的公垂线；

（2）设平面 BMC'的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{BM}=(0,\ -1,\ \frac{1}{2})$，$\overrightarrow{BC'}=(-1,\ 0,\ 1)$

$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BC'}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y+\frac{1}{2}z=0\\ -x+z=0\end{cases}$

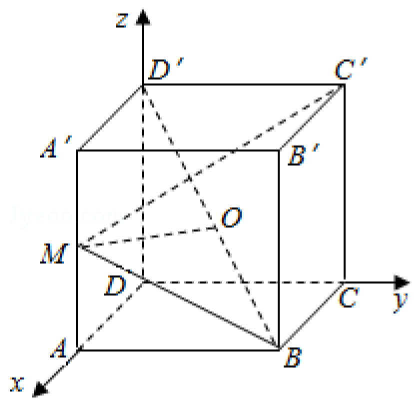
取 z=2，则 x=2，y=1，从而$\overrightarrow{n_1}=(2,\ 1,\ 2)$

取平面 BC′B′的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 0)$

$\cos<\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{9\cdot 1}}=\frac{1}{3}$

由图可知，二面角 M﹣BC′﹣B′的平面角为锐角

故二面角 M﹣BC′﹣B′的大小为 arccos$\frac{1}{3}$.



【点评】本小题主要考查异面直线、直线与平面垂直、二面角、正方体等基础知识，并考查空间想象能力和逻辑推理能力，考查应用向量知识解决数学问题的能力．

19．（12 分）（2010•四川）（Ⅰ）①证明两角和的余弦公式 $C_{\alpha+\beta}$：cos（α+β）=cosαcosβ﹣sinαsinβ；

②由 $C_{\alpha+\beta}$ 推导两角和的正弦公式 $S_{\alpha+\beta}$：sin（α+β）=sinαcosβ+cosαsinβ．

（Ⅱ）已知

$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\alpha\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$，$\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\cos(\alpha+\beta)$

，求 cos（α+β）．

【考点】两角和与差的正弦函数；同角三角函数基本关系的运用；两角和与差的余弦函数．

【专题】计算题．

【分析】（Ⅰ）①建立单位圆，在单位圆中作出角，找出相应的单位圆上的点的坐标，由两点间距离公式建立方程化简整理既得；②由诱导公式 $\cos[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$ 变形整理可得．

（Ⅱ）$S=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，求出角 A 的正弦，再由 $\cos B=\frac{3}{5}$，用 cosC=﹣cos（A+B）求解即可．

【解答】解：（Ⅰ）①如图，在直角坐标系 xOy 内做单位圆 O，

并作出角 α、β 与﹣β，使角 α 的始边为 Ox，

交⊙O 于点 P_1，终边交⊙O 于 P_2；角 β 的始边为 OP_2，

终边交⊙O 于 P_3；角﹣β 的始边为 OP_1，终边交⊙O 于 P_4．

则 P_1（1，0），P_2（cosα，sinα）

P_3（cos（α+β），sin（α+β）），

P_4（cos（﹣β），sin（﹣β））

由 $P_1P_3=P_2P_4$ 及两点间的距离公式，得

$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)=[\cos(-\beta)-\cos\alpha]^2+[\sin(-\beta)-\sin\alpha]^2$

展开并整理得：2﹣2cos（α+β）=2﹣2（cosαcosβ﹣sinαsinβ）

∴cos（α+β）=cosαcosβ﹣sinαsinβ；（4 分）

②由①易得 $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$，$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)=\cos[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]=\cos[(\frac{\pi}{2}-\alpha)+(-\beta)]$

$=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(-\beta)-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；（6 分）

（Ⅱ）$\because\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$\therefore\sin\alpha=-\frac{3}{5}$

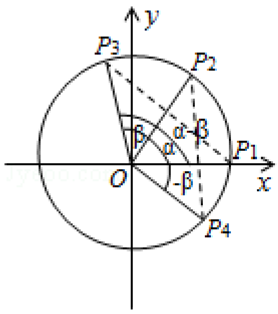
$\because\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$

$\therefore\cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=(-\frac{4}{5})\times(-\frac{3\sqrt{10}}{10})-(-\frac{3}{5})\times\frac{\sqrt{10}}{10}$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.



【点评】本小题主要考查两角和的正、余弦公式、诱导公式、同角三角函数间的关系等基础知识及运算能力.

20.（12 分）（2010•四川）已知等差数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 6，前 8 项和为－4.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=(4-a_n)q^{n-1}$（$q\neq0$，$n\in N^*$），求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

【考点】等差数列的通项公式；数列的求和.

【专题】计算题.

【分析】（1）设$\{a_n\}$的公差为 d，根据等差数列的求和公式表示出前 3 项和前 8 项的和，求的 a_1 和 d，进而根据等差数列的通项公式求得 a_n.

（2）根据（1）中的 a_n，求得 b_n，进而根据错位相减法求得数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

【解答】解：（1）设$\{a_n\}$的公差为 d，

由已知得$\begin{cases}3a_1+3d=6\\8a_1+28d=-4\end{cases}$

解得 $a_1=3$，$d=-1$

故 $a_n=3+(n-1)(-1)=4-n$；

（2）由（1）的解答得，$b_n=n\bullet q^{n-1}$，于是

$S_n=1\cdot q^0+2\cdot q^1+3\cdot q^2+\ldots+n\cdot q^{n-1}$.

若 $q\neq1$，将上式两边同乘以 q，得

$qS_n=1\cdot q^1+2\cdot q^2+3\cdot q^3+\ldots+n\cdot q^n$.

将上面两式相减得到

$(q-1)S_n=nq^n-(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$

$=nq^n-\frac{q^n-1}{q-1}$

于是 $S_n=\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(q-1)^2}$

若 q=1，则 $S_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

所以，$S_n=\begin{cases}\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(q-1)^2} & (q\neq1)\\ \frac{n(n+1)}{2} & (q=1)\end{cases}$.

【点评】本小题主要考查数列的基础知识和划归、分类整合等数学思想，以及推理论证、分析与解决问题的能力．

21．（12 分）（2010•四川）已知定点 A（﹣1，0），F（2，0），定直线 l：$x=\frac{1}{2}$，不在 x 轴上的动点 P 与点 F 的距离是它到直线 l 的距离的 2 倍．设点 P 的轨迹为 E，过点 F 的直线交 E 于 B、C 两点，直线 AB、AC 分别交 l 于点 M、N．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）试判断以线段 MN 为直径的圆是否过点 F，并说明理由．

【考点】圆与圆锥曲线的综合．

【专题】计算题；证明题；压轴题．

【分析】（Ⅰ）设 P（x，y），欲求点 P 的轨迹方程，只须求出 x，y 之间的关系式即可，结合题中条件：“动点 P 与点 F 的距离是它到直线 l 的距离的 2 倍”利用距离公式即得；

（Ⅱ）先分类讨论：①当直线 BC 与 x 轴不垂直时；②当直线 BC 与 x 轴垂直时，对于第①种情形，设 BC 的方程为 y=k（x﹣2），将直线的方程代入双曲线的方程，消去 y 得到关于 x 的一元二次方程，再结合向量垂直的关系利用向量的坐标运算即可求得结论，从而解决问题．对于第②种情形，由于直线方程较简单，直接代入计算即可验证．

【解答】解：（Ⅰ）设 P（x，y），则$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2|x-\frac{1}{2}|$

化简得 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$（$y\neq0$）；

（Ⅱ）①当直线 BC 与 x 轴不垂直时，设 BC 的方程为 y=k（x﹣2）（$k\neq0$）

与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 联立消去 y 得 $(3-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+3)=0$

由题意知 $3-k^2\neq 0$ 且 $\triangle>0$

设 B（x_1，y_1），C（x_2，y_2），则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3} \\ x_1x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3} \end{cases}$

$y_1y_2=k^2(x_1-2)(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=k^2\left(\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}-\dfrac{8k^2}{k^2-3}+4\right)=\dfrac{-9k^2}{k^2-3}$

因为 x_1、$x_2\neq -1$，所以直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$

因此 M 点的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3y_1}{2(x_1+1)}\right)$ $\overrightarrow{FM}=\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3y_1}{2(x_1+1)}\right)$，

同理可得 $\overrightarrow{FN}=\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3y_2}{2(x_2+1)}\right)$

因此 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9y_1y_2}{4(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{4}{9}+\dfrac{\dfrac{-81k^2}{k^2-3}}{4\left(\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}+\dfrac{4k^2}{k^2-3}+1\right)}=0$

②当直线 BC 与 x 轴垂直时，直线方程为 $x=2$，则 B（2，3），C（2，﹣3）

AB 的方程为 $y=x+1$，因此 M 点的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{FM}=\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

同理可得 $\overrightarrow{FN}=\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

因此 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$

综上 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，即 $FM\perp FN$

故以线段 MN 为直径的圆经过点 F．

【点评】本小题主要考查直线、轨迹方程、双曲线等基础知识，考查平面解析几何的思想方法及推理运算能力．

22．（14 分）（2010•四川）设 $f(x)=\dfrac{1+a^x}{1-a^x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数．

（1）求 $g(x)$；

（2）当 $x\in[2,6]$ 时，恒有 $g(x)>\log_a\dfrac{t}{(x^2-1)(7-x)}$ 成立，求 t 的取值范围；

（3）当 $0<a\le\frac{1}{2}$时，试比较 f（1）+f（2）+…+f（n）与 n+4 的大小，并说明理由.

【考点】利用导数研究函数的极值；反函数；不等式的证明.

【专题】计算题；压轴题.

【分析】(1）欲求原函数的反函数，即从原函数式中反解出 x，后再进行 x，y 互换，即得反函数的解析式.

（2）先分离参数 t，$t<(x-1)^2(7-x)$ 转化为求右边函数式的最小值即可，对于高次函数的最值问题，可利用导数研究解决；

（3）欲比较 f（1）+f（2）+…+f（n）与 n+4 的大小，分而解决之，先比较 f（k）与某一式子的大小关系，利用二项式定理可得：$f(k)\le1+\frac{2}{C_k^1+C_k^2}=1+\frac{4}{k(k+1)}=1+\frac{4}{k}-\frac{4}{k+1}$，从而问题解决.

【解答】解：(1）由题意得：$a^x=\frac{y-1}{y+1}>0$

故 $g(x)=\log_a\frac{x-1}{x+1}$，$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；（3 分）

（2）由 $\log_a\frac{x-1}{x+1}>\log_a\frac{t}{(x^2-1)(7-x)}$得

①当 a＞1 时，$\frac{x-1}{x+1}>\frac{t}{(x^2-1)(7-x)}>0$

又因为 $x\in[2,6]$，所以 $0<t<(x-1)^2(7-x)$

令 $h(x)=(x-1)^2(7-x)=-x^3+9x^2-15x+7$，$x\in[2,6]$

则 $h'(x)=-3x^2+18x-15=-3(x-1)(x-5)$

列表如下：

x	2	（2，5）	5	（5，6）	6
h'（x）		+	0	-	
h（x）	5	递增	极大值 32	递减	25

所以 $h(x)_{最小值}=5$，

所以 0＜t＜5

②当 0＜a＜1 时，$0<\frac{x-1}{x+1}<\frac{t}{(x^2-1)(7-x)}$

又因为 $x\in[2,6]$，所以 $t>(x-1)^2(7-x)>0$

令 $h(x)=(x-1)^2(7-x)=-x^3+9x^2-15x+7$，$x\in[2,6]$

由①知 $h(x)_{最大值}=32$，$x\in[2,6]$

所以 t＞32

综上，当 a＞1 时，0＜t＜5；当 0＜a＜1 时，t＞32；（9 分）

（3）设 $a=\frac{1}{1+p}$，则 $p\ge1$

当 n=1 时，$f(1)=1+\frac{2}{p}\le3<5$

当 $n\geq2$ 时

设 $k\geq2$，$k\in N^*$时

则 $f(k)=\dfrac{1+a^k}{1-a^k}=1+\dfrac{2}{(1+p)^k-1}=1+\dfrac{2}{C_k^1p+C_k^2p^2+\cdots+C_k^kp^k}$

所以 $f(k)\leq1+\dfrac{2}{C_k^1+C_k^2}=1+\dfrac{4}{k(k+1)}=1+\dfrac{4}{k}-\dfrac{4}{k+1}$

从而 $f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\leq n-1+\dfrac{4}{2}-\dfrac{4}{n+1}<n+1$

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<f(1)+n+1\leq n+4$

综上，总有 $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<n+4$．（14 分）

【点评】本小题考查函数、反函数、不等式、导数及其应用等基础知识，考查划归，分类整合等数学思想方法，以及推理论证、分析与解决问题的能力．