

2021年普通高等学校招生全国统一考试（全国乙卷）

数学（理）

一、选择题

1. 设 $2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4+6i$, 则 $z = (\quad)$

- A. $1-2i$
- B. $1+2i$
- C. $1+i$
- D. $1-i$

答案:

C

解析:

设 $z = a + bi$, 则 $\bar{z} = a - bi$, $2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4a+6bi=4+6i$, 所以 $a=1$, $b=1$, 所以 $z=1+i$.

2. 已知集合 $S = \{s | s = 2n + 1, n \in Z\}$, $T = \{t | t = 4n + 1, n \in Z\}$, 则 $S \cap T = (\quad)$

- A. \emptyset
- B. S
- C. T
- D. Z

答案:

C

解析:

$s = 2n + 1$, $n \in Z$;

当 $n = 2k$, $k \in Z$ 时, $S = \{s | s = 4k + 1, k \in Z\}$; 当 $n = 2k + 1$, $k \in Z$ 时,

$S = \{s | s = 4k + 3, k \in Z\}$. 所以 $T \cup S$, $S \cap T = T$. 故选C.

3. 已知命题 $p: \exists x \in R, \sin x < 1$; 命题 $q: \forall x \in R, e^{|x|} \geq 1$, 则下列命题中为真命题的是()

- A. $p \wedge q$
- B. $\neg p \wedge q$
- C. $p \wedge \neg q$
- D. $\neg(p \vee q)$

答案：

A

解析：

根据正弦函数的值域 $\sin x \in [-1, 1]$, 故 $\exists x \in R, \sin x < 1$, p 为真命题, 而函数

$y = e^{|x|}$ 为偶函数, 且 $x \geq 0$ 时, $y = e^{|x|} \geq 1$, 故 $\forall x \in R, y = e^{|x|} \geq 1$ 恒成立., 则 q 也

为真命题, 所以 $p \wedge q$ 为真, 选A.

4. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ()

- A. $f(x-1)-1$
- B. $f(x-1)+1$
- C. $f(x+1)-1$
- D. $f(x+1)+1$

答案：

B

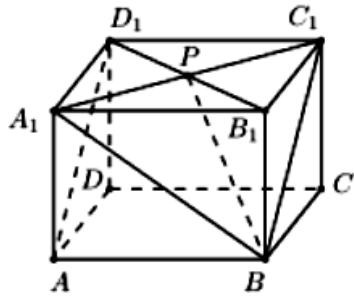
解析：

$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$, $f(x)$ 向右平移一个单位, 向上平移一个单位得到 $g(x) = \frac{2}{x}$ 为奇函数.

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$
- B. $\frac{\pi}{3}$
- C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$



答案:

D

解析:

如图, $\angle PBC_1$ 为直线 PB 与 AD_1 所成角的平面角.

易知 $\triangle A_1BC_1$ 为正三角形, 又 P 为 A_1C_1 中点, 所以 $\angle PBC_1 = \frac{\pi}{6}$.

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()

- A. 60 种
- B. 120 种
- C. 240 种
- D. 480 种

答案:

C

解析:

所求分配方案数为 $C_5^2 A_4^4 = 240$.

7. 把函数 $y = f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图像, 则 $f(x) =$ ()

- A. $\sin(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12})$
- B. $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$

C. $\sin(2x - \frac{7\pi}{12})$

D. $\sin(2x + \frac{\pi}{12})$

答案:

B

解析:

$$\text{逆向: } y = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{左移} \frac{\pi}{3}} y = \sin(x + \frac{\pi}{12}) \xrightarrow{\text{横坐标变为原来的2倍}} y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12}).$$

故选B.

8. 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取1个数，则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为（ ）

A. $\frac{7}{9}$

B. $\frac{23}{32}$

C. $\frac{9}{32}$

D. $\frac{2}{9}$

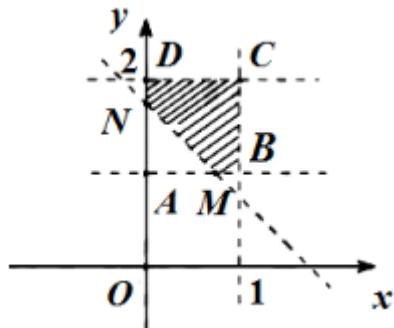
答案:

B

解析:

由题意记 $x \in (0,1)$, $y \in (1,2)$, 题目即求 $x + y > \frac{7}{4}$ 的概率, 绘图如下所示.

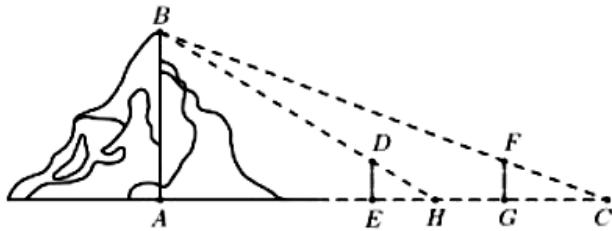
$$\text{故 } P = \frac{S_{\text{阴}}}{S_{\text{正}ABCD}} = \frac{1 \times 1 - \frac{1}{2}AM \cdot AN}{1 \times 1} = \frac{1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{1} = \frac{23}{32}.$$



9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作. 其中第一题是测量海岛的高度.

如图，点 E, H, G 在水平线 AC 上， DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”， EG 称为“表距”， GC 和 EH 都称为“表目距”。 GC 与 EH 的差称为“表目距的差”，则海岛的高 $AB = ()$

- A. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$
- B. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
- C. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$
- D. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$



答案：

A

解析：

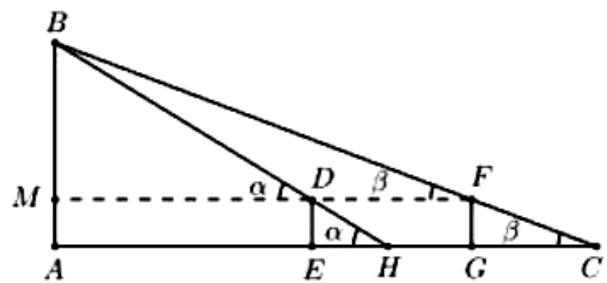
连接 DF 交 AB 于 M ，则 $AB = AM + BM$ 。

记 $\angle BDM = \alpha$ ， $\angle BFM = \beta$ ，则 $\frac{MB}{\tan \beta} - \frac{MB}{\tan \alpha} = MF - MD = DF$ 。

而 $\tan \beta = \frac{FG}{GC}$ ， $\tan \alpha = \frac{ED}{EH}$ 。所以

$$\frac{MB}{\tan \beta} - \frac{MB}{\tan \alpha} = MB \left(\frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right) = MB \cdot \left(\frac{GC}{FG} - \frac{EH}{ED} \right) = MB \cdot \frac{GC - EH}{ED}.$$

故 $MB = \frac{ED \cdot DF}{GC - EH} = \frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}}$ ，所以高 $AB = \frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ 。



10. 设 $a \neq 0$, 若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则

- A. $a < b$
- B. $a > b$
- C. $ab < a^2$
- D. $ab > a^2$

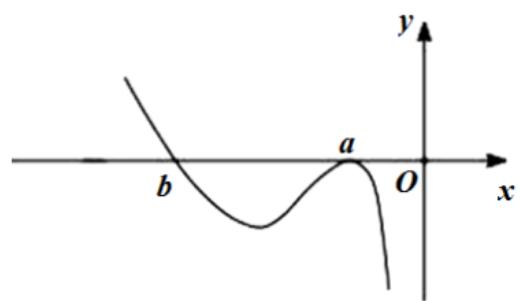
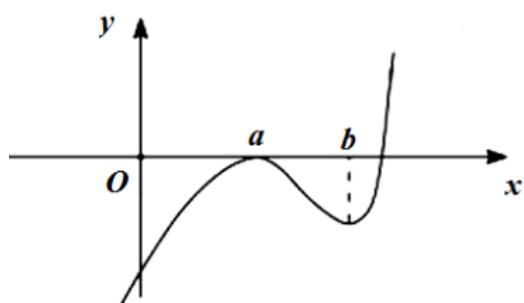
答案:

D

解析:

若 $a > 0$, 其图像如图(1), 此时, $0 < a < b$; 若 $a < 0$, 时图像如图(2), 此时, $b < a < 0$.

综上, $ab < a^2$.



11. 设 B 是椭圆 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足,

$|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 ()

A. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

B. $[\frac{1}{2}, 1)$

C. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

D. $(0, \frac{1}{2}]$

答案:

C

解析:

由题意, 点 $B(0, b)$, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_0^2 = a^2(1 - \frac{y_0^2}{b^2})$, 故

$$|PB|^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2 = a^2(1 - \frac{y_0^2}{b^2}) + y_0^2 - 2by_0 + b^2 = -\frac{c^2}{b^2}y_0^2 - 2by_0 + a^2 + b^2,$$

$$y_0 \in [-b, b].$$

由题意, 当 $y_0 = -b$ 时, $|PB|^2$ 最大, 则 $-\frac{b^3}{c^2} \leq -b$, $b^2 \geq c^2$, $a^2 - c^2 \geq c^2$,

$$c = \frac{c}{a} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}].$$

12. 设 $a = 2 \ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 ()

A. $a < b < c$

B. $b < c < a$

C. $b < a < c$

D. $c < a < b$

答案:

B

解析：

设 $f(x) = \ln(1+x) - \sqrt{1+2x} + 1$, 则 $b - c = f(0.02)$, 易得

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{(1+x)\sqrt{1+2x}}.$$

当 $x \geq 0$ 时, $1+x = \sqrt{(1+x)^2} \geq \sqrt{1+2x}$, 故 $f'(x) \leq 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(0.02) < f(0) = 0$, 故 $b < c$.

再设 $g(x) = 2\ln(1+x) - \sqrt{1+4x} + 1$, 则 $a - c = g(0.01)$, 易得

$$g'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{4}{2\sqrt{1+4x}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+4x} - (1-x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}.$$

当 $0 \leq x < 2$ 时, $\sqrt{1+4x} \geq \sqrt{1+2x+x^2} = 1+x$, 所以 $g'(x)$ 在 $[0, 2)$ 上 ≥ 0 .

故 $g(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递增, 所以 $g(0.01) > g(0) = 0$, 故 $a > c$.

综上, $a > c > b$.

二、填空题

13. 已知双曲线 $C : \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则 C 的焦距为____

.

答案:

4

解析:

易知双曲线渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由题意得 $a^2 = m$, $b^2 = 1$, 且一条渐近线方程为

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{m}x, \text{ 则有 } m = 0 \text{ (舍去)}, m = 3, \text{ 故焦距为 } 2c = 4.$$

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (3, 4)$, 若 $(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案:

$\frac{3}{5}$

解析:

由题意得 $(\vec{a} - \lambda \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, 即 $15 - 25\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{3}{5}$.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$,

$a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案:

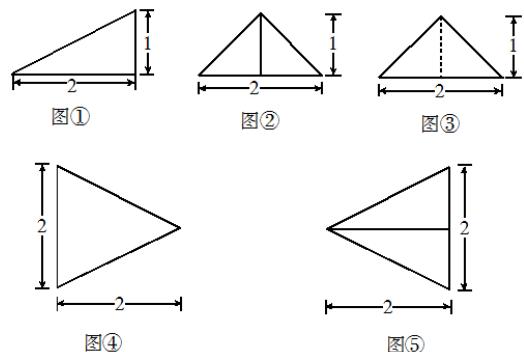
$2\sqrt{2}$

解析:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \sqrt{3}, \text{ 所以 } ac = 4,$$

由余弦定理, $b^2 = a^2 + c^2 - ac = 3ac - ac = 2ac = 8$, 所以 $b = 2\sqrt{2}$.

16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为 (写出符合要求的一组答案即可).



答案:

②⑤或③④

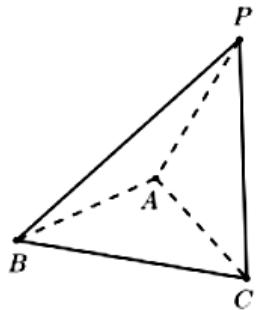
解析:

由高度可知, 侧视图只能为②或③.

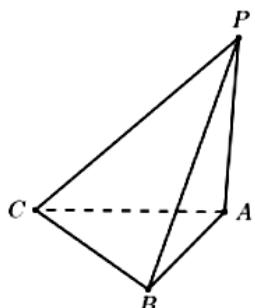
侧视图为②, 如图(1), 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $PA = PC = \sqrt{2}$, $BA = BC = \sqrt{5}$,

$AC = 2$, 俯视图为⑤.

侧视图为③, 如图(2), $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 1$, $AC = AB = \sqrt{5}$, $BC = 2$, 俯视图为④.



(1)



(2)

三、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品，得到产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} ，样本方差分别

已为 s_1^2 和 s_2^2 .

(1) 求 \bar{x} , \bar{y} , s_1^2 , s_2^2 :

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果

$\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$ ，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否

则不认为有显著提高)。

答案:

见解析

解析:

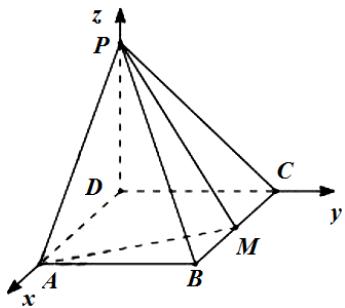
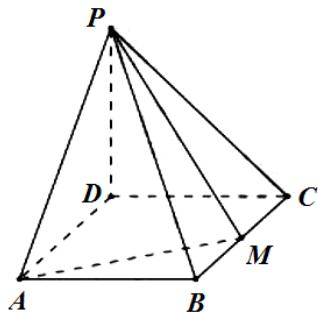
(1) 各项所求值如下所示.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{10}(9.8 + 10.3 + 10.0 + 10.2 + 9.9 + 9.8 + 10.0 + 10.1 + 10.2 + 9.7) = 10.0, \\ \bar{y} &= \frac{1}{10}(10.1 + 10.4 + 10.1 + 10.0 + 10.1 + 10.3 + 10.6 + 10.5 + 10.4 + 10.5) = 10.3, \\ s_1^2 &= \frac{1}{10} \times [(9.7 - 10.0)^2 + 2 \times (9.8 - 10.0)^2 + (9.9 - 10.0)^2 + 2 \times (10.0 - 10.0)^2 + (10.1 - 10.0)^2 \\ &\quad + 2 \times (10.2 - 10.0)^2 + (10.3 - 10.0)^2] = 0.036, \\ s_2^2 &= \frac{1}{10} \times [(10.0 - 10.3)^2 + 3 \times (10.1 - 10.3)^2 + (10.3 - 10.3)^2 + 2 \times (10.4 - 10.3)^2 + \\ &\quad 2 \times (10.5 - 10.3)^2 + (10.6 - 10.3)^2] = 0.04.\end{aligned}$$

(2) 由(1)中数据得 $\bar{y} - \bar{x} = 0.3, 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}} \approx 0.34$. 显然 $\bar{y} - \bar{x} < 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$. 所以不认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高。

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = DC = 1$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.

- (1) 求 BC ;
- (2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.



答案:

见解析

解析：

(1) 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 且矩形 $ABCD$ 中, $AD \perp DC$. 所以以 \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{DP} 分别为 x , y , z 轴正方向, D 为原点建立空间直角坐标系 $D - xyz$. 设 $BC = t$,

$A(t, 0, 0)$, $B(t, 1, 0)$, $M\left(\frac{t}{2}, 1, 0\right)$, $P(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{PB} = (t, 1, -1)$, $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{t}{2}, 1, 0\right)$

因为 $PB \perp AM$, 所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{t^2}{2} + 1 = 0$ 所以 $t = \sqrt{2}$, 所以 $BC = \sqrt{2}$.

(2) 设平面 APM 的一个法向量为 $m = (x, y, z)$, 由于 $\overrightarrow{AP} = (-\sqrt{2}, 0, 1)$, 则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AP} = -\sqrt{2}x + z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + y = 0 \end{cases} \text{. 令 } x = \sqrt{2}, \text{ 的 } m = (\sqrt{2}, 1, 2). \text{ 设平面 } PMB \text{ 的一个法向量为}$$

$$\vec{n} = (x', y', z'), \text{ 则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{2}x' = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = \sqrt{2}x' + y' - z' = 0 \end{cases} \text{. 令 } y' = 1, \text{ 的 } \vec{n} = (0, 1, 1). \text{ 所以}$$

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{7} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}, \text{ 所以二面角 } A-PMN-B \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{70}}{14}.$$

19. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案:

见解析

解析:

(1) 由已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$, 则 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = S_n (n \geq 2)$,

$$\Rightarrow \frac{2b_{n-1}}{b_n} + \frac{1}{b_n} = 2 \Rightarrow 2b_{n-1} + 2 = 2b_n \Rightarrow b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2} (n \geq 2), \quad b_1 = \frac{3}{2},$$

故 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首相, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{3}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n+2}{2}$, 则 $\frac{2}{S_n} + \frac{2}{n+2} = 2 \Rightarrow S_n = \frac{n+2}{n+1}$,

$n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$, $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$,

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n=1 \\ -\frac{1}{n(n+1)}, & n \geq 2 \end{cases}.$$

20. 设函数 $f(x) = \ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x) < 1$.

答案:

见解析

解析:

(1) 令 $h(x) = xf(x) = x \ln(a-x)$

则 $h'(x) = \ln(a-x) - \frac{x}{a-x}$.

$\because x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

$\therefore h'(0) = 0$.

解得: $a=1$;

(2) 由 (1) 可知: $f(x) = \ln(1-x)$

$$g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{x},$$

要证 $g(x) < 1$, 即证 $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1-x}{x} < 0$ ($x < 1$ 且 $x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x\ln(1-x)} < 0.$$

\because 当 $x < 0$ 时, $x \cdot \ln(1-x) < 0$.

当 $0 < x < 1$ 时， $x \cdot \ln(1-x) < 0$.

\therefore 只需证明 $x + (1-x)\ln(1-x) > 0$

令 $H(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$ ，且易知 $H(0) = 0$.

$$\text{则 } H'(x) = 1 - \ln(1-x) + \frac{-1}{1-x}(1-x) = -\ln(1-x)$$

(i) 当 $x < 0$ 时，易得 $H'(x) < 0$ ，则 $H(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

$\because H(0) = 0$ ， $\therefore H(x) > H(0) = 0$ ，得证.

(ii) 当 $0 < x < 1$ 时，易得 $H'(x) > 0$ ，则 $H(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

$\because H(0) = 0$ ， $\therefore H(x) > H(0) = 0$ ，得证.

综上证得 $g(x) < 1$.

21. 已知抛物线 C ： $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，且 F 与圆 M ： $x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p ；

(2) 若点 P 在 M 上， PA ， PB 是 C 的两条切线， A ， B 是切点，求 ΔPAB 面积的最大值.

答案：

见解析

解析：

(1) 焦点 $F(0, \frac{p}{2})$ 到 $x^2 + (y+4)^2 = 1$ 的最短距离为 $\frac{p}{2} + 3 = 4$ ，所以 $p = 2$.

(2) 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $P(x_0, y_0)$ ，得

$$l_{PA} : y = \frac{1}{2}x_1(x - x_1) + y_1 = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1x - y_1,$$

$$l_{PB} : y = \frac{1}{2}x_2x - y_2, \text{ 且 } x_0^2 = -y_0^2 - 8y_0 - 15,$$

$$l_{PA}, l_{PB} \text{ 都过点 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } \begin{cases} y_0 = \frac{1}{2}x_1x_0 - y_1 \\ y_0 = \frac{1}{2}x_2x_0 - y_2 \end{cases},$$

故 l_{AB} : $y_0 = \frac{1}{2}x_0x - y$, 即 $y = \frac{1}{2}x_0x - y_0$,

联立 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - y_0, \\ x^2 = 4y \end{cases}$, 得 $x^2 - 2x_0x + 4y_0 = 0$, $\Delta = 4x_0^2 - 16y_0$,

所以 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{x_0^2}{4}} \cdot \sqrt{4x_0^2 - 16y_0} = \sqrt{4 + x_0^2} \cdot \sqrt{x_0^2 - 4y_0}$,

$$\begin{aligned} d_{P \rightarrow AB} &= \frac{|x_0^2 - 4y_0|}{\sqrt{x_0^2 + 4}}, \text{ 所以 } S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d_{P \rightarrow AB} = \frac{1}{2}|x_0^2 - 4y_0| \cdot \sqrt{x_0^2 - 4y_0} \\ &= \frac{1}{2}(x_0^2 - 4y_0)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(-y_0^2 - 12y_0 - 15)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

而 $y_0 \in [-5, -3]$, 故当 $y_0 = -5$ 时, $S_{\Delta PAB}$ 达到最大, 最大值为 $20\sqrt{5}$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

(2) 过点 $F(4, 1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立坐标系,

求这两条切线的极坐标方程.

答案:

见解析

解析:

(1) $\odot C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)

(2) $\odot C$ 的方程为 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

① 当直线斜率不存在时, 直线方程为 $x = 4$, 此时圆心到直线距离为 $2 > r$, 舍去;

② 当直线斜率存在时, 设直线方程为 $y - 1 = k(x - 4)$, 化简为 $kx - y - 4k + 1 = 0$,

此时圆心 $C(2, 1)$ 到直线的距离为 $d = \frac{|2k - 1 - 4k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r = 1$,

化简得 $2|k| = \sqrt{k^2 + 1}$,

两边平方有 $4k^2 = k^2 + 1$, 所以 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

代入直线方程并化简得 $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} - 4 = 0$ 或 $x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} - 4 = 0$ 化为极坐标方程为

$$\rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta = 4 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \rho \sin(\theta + \frac{5\pi}{6}) = 4 - \sqrt{3}$$

$$\text{或 } \rho \cos \theta + \sqrt{3} \rho \sin \theta = 4 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 4 + \sqrt{3}.$$

23. 已知函数 $f(x) = |x - a| + |x + 3|$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x) > -a$, 求 a 的取值范围.

答案:

见解析

解析:

当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq 6 \Leftrightarrow |x - 1| + |x + 3| \geq 6$,

当 $x \leq -3$ 时, 不等式 $\Leftrightarrow 1 - x - x - 3 \geq 6$, 解得 $x \leq -4$;

当 $-3 < x < 1$ 时, 不等式 $\Leftrightarrow 1 - x + x + 3 \geq 6$, 解得 $x \in \emptyset$;

当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $\Leftrightarrow x - 1 + x + 3 \geq 6$, 解得 $x \geq 2$.

综上, 原不等式的解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.

(2) 若 $f(x) > -a$, 即 $f(x)_{\min} > -a$,

因为 $f(x) = |x - a| + |x + 3| \geq |(x - a) - (x + 3)| = |a + 3|$ (当且仅当 $(x - a)(x + 3) \leq 0$ 时,

等号成立), 所以 $f(x)_{\min} = |a + 3|$, 所以 $|a + 3| > -a$, 即 $a + 3 < a$ 或 $a + 3 > -a$, 解得

$$a \in (-\frac{3}{2}, +\infty).$$