

2009 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数学（文史类）

一，选择题：

(1) 设集合 $S = \{x | |x| < 5\}$, $T = \{x | (x+7)(x-3) < 0\}$, 则 $S \cap T =$

- (A) $\{x | -7 < x < -5\}$ (B) $\{x | 3 < x < 5\}$
(C) $\{x | -5 < x < 3\}$ (D) $\{x | -7 < x < 5\}$

(2) 函数 $y = 2^{x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的反函数是

- (A) $y = 1 + \log_2 x$ ($x > 0$) (B) $\log_2(x-1)$ ($x > 1$)
(C) $y = -1 + \log_2 x$ ($x > 0$) (D) $\log_2(x+1)$ ($x > -1$)

(3) 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, 首项 $a_1 = 1$, a_2 是 a_1 和 a_5 等比中项, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项之和是

- (A) 90 (B) 100 (C) 145 (D) 190

(4) 已知函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ ($x \in \mathbb{R}$), 下面结论错误的是

- (A) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
(B) 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数
(C) 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 0$ 对称
(D) 函数 $f(x)$ 是奇函数

(5) 设矩形的长为 a , 宽为 b , 其比满足 $b:a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 这种矩形给人美感, 称

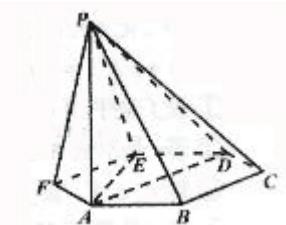
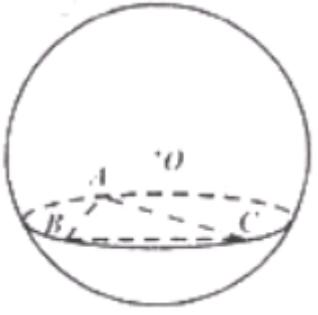
为黄金矩形。黄金矩形常应用于工艺品设计中。下面是某工艺品厂随机抽取两个批次的初加工矩形宽度与长度的比值样本:

甲批次: 0.598 0.625 0.628 0.595 0.639

乙批次: 0.618 0.613 0.592 0.622 0.620

根据上述两个样本来估计两个批次的总体平均数, 与标准值 0.618 比较, 正确结论是

- (A) 甲批次的总体平均数与标准值更接近。

- (B) 乙批次的总体平均数与标准值更接近
 (C) 两个批次总体平均数与标准值接近程度相同
 (D) 两个批次总体平均数与标准值接近程度不能确定
- (6) 如图, 已知六棱锥 P-ABCDEF 的底面是正六边形, $PA \perp$ 平面 ABC, $PA=2AB$, 则下列结论正确的是
- (A) $PB \perp AD$
 (B) 平面 PAB \perp 平面 PBC
 (C) 直线 BC // 平面 PAE
 (D) 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 45°
- 
- (7) 已知 a, b, c, d 为实数, 且 $c > d$, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a - c > b - d$ ” 的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- (8) 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其一条渐近线方程为 $y = x$, 点 $p(\sqrt{3}, y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} =$
- A -12 B -2 C 0 D 4
- (9) 如图, 在半径为 3 的球面上有 A.B.C 三点, $\angle ABC = 90^\circ$, $BA=BC$, 球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 B.C 两点的球面距离是
- 
- A $\frac{\pi}{3}$ B π C $\frac{4}{3}\pi$ D 2π
- (10) 某企业生产甲、乙两种产品。已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨; 生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨。销售每吨甲产品可获得利润 5 万元、每吨乙产品可获得利润 3 万元。该企业在一生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨, B 原料不超过 18 吨, 那么该企业可获得最大利润是。
- A 12 万 B 20 万 C 25 万 D 27 万
- (11) 2 位男生和 3 位女生共 5 位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3 位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是

A 60 B 48 C 42 D 36

(12) 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 \mathbb{R} 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有

$$xf(x+1)=(1+x)f(x), \text{ 则 } f\left(\frac{5}{2}\right) \text{ 的值是}$$

A 0 B $\frac{1}{2}$ C 1 D $\frac{5}{2}$

第 II 卷

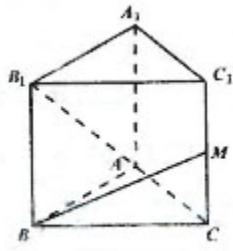
本卷共 10 小题，共 90 分。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线上。

(13) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到准线的距离是_____。

(14) $(2x - \frac{1}{2x})^6$ 的展开式的常数项是_____。(用数字作答)

(15) 如图，已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等， M



是侧棱 CC_1 的中点，侧异面直线 AB_1 和 BM 所成的角的大小是_____。

(16) 设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合，对于映射 $f: V \rightarrow V$, $a \in V$, 记 a 的象为 $f(a)$.

若映射 $f: V \rightarrow V$ 满足：对所有 $a, b \in V$ 及任意实数 λ, μ 都有

$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$, 则 f 称为平面 M 上的线性变换，现有下列命题：

- ① 设 f 是平面 M 上的线性变换， $a, b \in V$, 则 $f(a+b) = f(a)+f(b)$;
- ② 若 e 是平面 M 上的单位向量，对 $a \in V$, 设 $f(a) = a + e$, 则 f 是平面 M 上的线性变换；
- ③ 对 $a \in V$, 设 $f(a) = -a$, 则 f 是平面 M 上的线性变换；
- ④ 设 f 是平面 M 上的线性变换， $a \in V$, 则对任意实数 k 均有 $f(ka) = kf(a)$.

其中的真命题是_____。(写出所有真命题的编号)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中， A 、 B 为锐角，角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，且

$$\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

(I) 求 $A+B$ 的值;

(II) 若 $a-b=\sqrt{2}-1$, 求 a 、 b 、 c 得值.

(18) (本小题满分 12 分)

为振兴旅游业, 四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡, 向省外人士发行的是熊猫金卡(简称金卡), 向省内人士发行的是熊猫银卡(简称银卡), 某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游, 其中 $\frac{3}{4}$ 是省外游客, 其余是省内游客, 在省外游客中有 $\frac{1}{3}$ 持金卡, 在省内游客中有 $\frac{2}{3}$ 持银卡.

(I) 在该团中随即采访 2 名游客, 求恰有 1 人持银卡的概率;

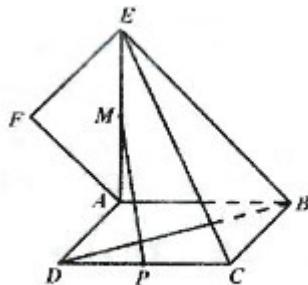
(II) 在该团中随机采访 2 名游客, 求其中持金卡与持银卡人数相当的概率.

(19) (本小题满分 12 分) 如图, 正方形 ABCD 所在平面与平面四边形 ABEF 所在平面互相垂直, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AB=AE$, $FA=FE$, $\angle AEF=45^\circ$.

(I) 求证: $EF \perp$ 平面 BCE;

(II) 设线段 CD、AE 的中点分别为 P、M, 求证: $PM \parallel$ 平面 BCE;

(III) 求二面角 F-BD-A 的大小.



(20) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^3+2bx^2+cx-2$ 的图象在与 x 轴交点处的切线方程是 $y=5x-10$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 设函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}mx$, 若 $g(x)$ 的极值存在, 求实数 m 的取值范围以及函数

$g(x)$ 取得极值时对应的自变量 x 的值.

(21) (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线

方程为 $x=2$.

(I) 求椭圆的标准方程;

(II) 过点 F_1 的直线 l 与该椭圆相交于 M, N 两点, 且 $|\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}| = \frac{2\sqrt{26}}{3}$, 求直线

l 的方程式.

(22) (本小题满分 14 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 s_n , 对任意的正整数 n , 都有 $a_n = 5s_n + 1$ 成立, 记

$$b_n = \frac{4+a_n}{1-a_n} (n \in N^+).$$

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n , 是否存在正整数 k , 使得 $R_k \geq 4k$ 成立? 若存在,

找出一个正整数 k ; 若不存在, 请说明理由;

(III) 记 $c_n = b_{2n} - b_{2n-1} (n \in N^+)$, 设数列 $|c_n|$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: 对任意正整数 n , 都有 $T_n < \frac{3}{2}$.

数学（文史类）参考答案

一. 选择题: 本题考查基本概念和基本运算。每小题 5 分, 满分 60 分.

- (1)C (2)C (3)B (4)D (5)A (6)D
(7) B (8)C (9)B (10)D (11)B (12)A

二. 填空题: 本题考查基本概念和基本运算。每小题 5 分, 满分 60 分.

- (13) 2 (14) -20 (15) 90 (16) 134

三. 解答题

(17)本小题主要考查同角三角函数间的系统、两角和差的三角函数公式、正弦定理等基础知识及基本运算能力.

解(I) ∵A、B为锐角, $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5} * \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore 0 < A < B < \pi,$$

$$\therefore A+B = \frac{\pi}{4}.$$

.....6分

(II) 由(I)知 $C = \frac{3\pi}{4}$, $\therefore \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得

$$\sqrt{5}a = \sqrt{10}b = \sqrt{2}c, \text{ 即 } a = \sqrt{2}b, c = \sqrt{5}b$$

$$\therefore a-b = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore \sqrt{2}b - b = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore b=1$$

(18)本小题主要考查相互独立事件、互斥事件等概率计算，考查运用概率知识解决实际问题的能力。

解 (I) 由题意得, 省外游客有 27 人, 其中 9 人持金卡; 省内游客有 9 人, 其中 6 人持银卡。

设事件 A 为“采访该团 2 人，恰有 1 人持银卡。”

$$P(A) = \frac{C_6^1 C_{30}^1}{C_{36}^2} = \frac{2}{7}$$

所以采访该团 2 人，恰有 1 人持银行卡的概率是 $\frac{2}{7}$

(II) 设事件 B 为“采访该团 2 人中，持金卡人数与持银卡人数相等”，

事件 A_1 为“采访该团 2 人中，0 人持金卡，0 人持银卡”，

事件 A_2 为“采访该团 2 人中，1 人持金卡，1 人持银卡”，

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{C_{21}^2}{C_{36}^2} + \frac{C_9^1 C_6^1}{C_{36}^2} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{3}{35} \\
 &= \frac{44}{105}
 \end{aligned}$$

所以采访该团 2 人中，持金卡人数与持银卡人数相等的概率是 $\frac{44}{105}$ 12

分

(19题) 本小题主要考查平面与平面垂直、直线与平面垂直、直线与平面平行、二面角等基础知识，考查空间想象能力、逻辑推理能力，考查应用向量知识解决数学问题的能力。

解法一：

(I) 因为平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, $BC \perp AB$,

平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD = AB$

所以 $BC \perp$ 平面 $ABEF$

因为 ΔABE 为等腰直角三角形， $AB = AE$ ，

所以 $\angle FEB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

即 $EF \perp BE$

因为 $BC \subset \text{平面 } BCE$, $BE \subset \text{平面 } BCE$

$BC \perp BE = B$,

所以 $EF \perp \text{平面 } BCE$

(II) 取 BE 的中点 N , 连结 CN, MN , 则 $MN \parallel \frac{1}{2} AB \parallel PC$,

所以 $PMNC$ 为平行四边形, 所以 $PM \parallel CN$

因为 CN 在平面 BCE 内, PM 不在平面 BCE 内,

所以 $PM \parallel \text{平面 } BCE$

(III) 由 $EA \perp AB$, 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$, 易知 $EA \perp$ 平面 $ABCD$.

作 $FG \perp AB$ 交 BA 的延长线与 G 则, $FG \parallel EA$, 从而, $FG \perp$ 平面 $ABCD$.

作 $GH \perp BD$ 于 H , 连结 FH , 则由三垂线定理知, $BD \perp FH$ 。

因此 $\angle FHG$ 为二面角 $F-BD-A$ 的平面角

因此 $FA = FE$, $\angle AEF = 45^\circ$,

所以 $\angle AFE = 90^\circ$, $\angle FAG = 45^\circ$,

设 $AB = 1$, 则 $AE = 1$, $AF = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$FG = AF \cdot \sin FAG = \frac{1}{2}$

在 $\text{Rt}\triangle BGH$ 中 $\angle GBH = 45^\circ$, $BG = AB + AG = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。

$GH = BG \cdot \sin GBH = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

在 $\text{Rt}\triangle FGH$ 中, $\tan FHG = \frac{FG}{GH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

故二面角 $F-BD-A$ 的大小为 $\arctan \frac{\sqrt{2}}{3}$ 12 分

解法二：

(I) 因为 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形, $AB=AE$,

所以 $AE \perp AB$,

又因为平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$, $AE \subset$ 平面 $ABEF$

平面 $ABEF \cap$ 平面 $ABCD = AB$

所以 $AE \perp$ 平面 $ABCD$

所以 $AE \perp AD$

因此, AD , AB , AE 两两垂直, 建立如图所示的直角坐

标系 $A-xyz$.

设 $AB=1$, 则 $AE=1$, $B(0, 1, 0)$, $D(1, 0, 0)$,

$E(0, 0, 1)$, $C(1, 1, 0)$

因为 $FA=FE$, $\angle AEF=45^\circ$,

所以 $\angle AEF=90^\circ$.

从而, $F\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{EF} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BE} = (0, -1, 1), \overrightarrow{BC} = (1, 0, 0).$$

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

所以 $EF \perp BE$, $EF \perp BC$.

因为 $BE \subset$ 平面 BCE , $BC \subset$ 平面 BCE , $BC \cap BE=B$,

所以 $EF \perp$ 平面 BCE 4 分

(II) $M(0, 0, \frac{1}{2})$. $P(1, \frac{1}{2}, 0)$.

从而 $\overrightarrow{PM} = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

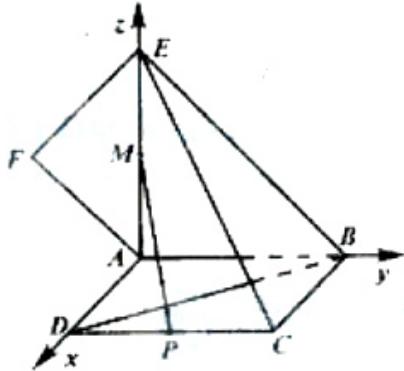
$$\text{于是 } \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{EF} = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \cdot (0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 0$$

所以 $PM \perp FE$, 又 $EF \perp$ 平面 BCE , 直线 PM 不在平面 BCE 内,

故 $PM \parallel$ 平面 BCE 8 分

(III) 设平面 BDF 的一个法向量为 \vec{n}_1 , 并设 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$

$$\overrightarrow{BD} = (1, -1, 0), \overrightarrow{BF} = (0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$



$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

去 $y=1$, 则 $x=1$, $z=3$, 从 $\vec{n}_1 = (0, 0, 3)$

取平面 ABD 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{11} \cdot 1} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

故二面角 F-BD-A 的大小为 $\arccos \frac{3\sqrt{11}}{11}$ 12 分

(20) 本小题考查函数、函数极值的概念, 考查应用导数研究函数性质的方法及推理和运算能力。

解: (I) 由已知, 切点为 $(2, 0)$ 故有 $f(2)=0$, 即 $4b+c+3=0$ ①

$f'(2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, 由已知 $f'(2) = 12 + 8b + c = 5$.

得 $8b + c + 7 = 0$ ② 联立①、②, 解得 $c=1$, $b=-1$

于是函数解析式为 $f'(2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ 4 分

$$(II) g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 + \frac{1}{3}mx$$

$$g'(x) = 3x^2 - 4x + 1 + \frac{m}{3}, \text{ 令 } g'(x) = 0$$

当函数有极值时, $\Delta \geq 0$, 方程 $3x^2 - 4x + 1 + \frac{m}{3} = 0$ 有实根,

由 $\Delta = 4(1-m) \geq 0$, 得 $m \leq 1$

① 当 $m=1$ 时, $g'(x)=0$ 有实根 $x=\frac{2}{3}$, 在 $x=\frac{2}{3}$ 左右两侧均有 $g'(x) > 0$, 故

函数 $g(x)=0$ 无极值。

② $m < 1$ 时, $g'(x)=0$ 有两个实根, $x_1 = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{1-m})$, $x_2 = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{1-m})$,

当 x 变化时, $g'(x)$ 、 $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

故在 $m \in (-\infty, 1)$ 时，函数 $g(x)$ 有极值：

当 $x = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{1-m})$ 时 $g(x)$ 有极大值；

当 $x = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{1-m})$ 时 $g(x)$ 有极小值。……………12 分

(21) 本小题主要考查直线、椭圆、平面向量等基础知识，以及综合运用数学知识解决问题及推理运算能力。

解：(I) 由条件有 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a^2}{c} = 2 \end{cases}$ 解得 $a = \sqrt{2}, c = 1$

$$\therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$$

所以，所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ……4 分

(II) 由 (I) 知 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$

若直线 L 的斜率不存在，则直线 L 的方程为 $x = -1$ ，

将 $x = -1$ 代入椭圆方程的 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

不妨设 $M(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}), N(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\therefore \overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N} = (-2, \frac{\sqrt{2}}{2}) + (-2, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = (-4, 0)$$

$$\therefore |\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}| = 4, \text{与题设矛盾。}$$

∴ 直线 l 的斜率存在

设直线 l 的斜率为 k ，则直线 l 的方程为 $y = k(x+1)$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x+1) \end{cases}$ ，消 y 得 $(1+2k^2)x^2 + 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$

由根与系数的关系知 $x_1 + x_2 = \frac{-4k^2}{1+2k^2}$, 从而 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 + 2) = \frac{2k}{1+2k^2}$

$$\text{又} \because \overrightarrow{F_2M} = (x_1 - 1, y_1), \overrightarrow{F_2N} = (x_2 - 1, y_2),$$

$$\therefore \overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N} = (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}|^2 &= (x_1 + x_2 - 2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\ &= \left(\frac{8k^2 + 2}{1+2k^2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{1+2k^2}\right)^2 \\ &= \frac{4(16k^4 + 9k^2 + 1)}{4k^4 + 4k^2 + 1}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{4(16k^4 + 9k^2 + 1)}{4k^4 + 4k^2 + 1} = \left(\frac{2\sqrt{26}}{3}\right)^2$$

$$\text{化简得 } 40k^4 - 23k^2 - 17 = 0$$

$$\text{解得 } k^2 = 1 \text{ 或 } k^2 = -\frac{17}{40} \text{ (舍)}$$

$$\therefore k = \pm 1$$

$$\therefore \text{所求直线 } l \text{ 的方程为 } y = x + 1 \text{ 或 } y = -x - 1$$

(22) 本小题主要考查数列、不等式等基础知识，化归思想等数学思想方法，以及推理论证、分析与解决问题的能力。

$$\text{解: (I) 当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = 5a_1 + 1, \therefore a_1 = -\frac{1}{4}$$

$$\text{又} \because a_n = 5S_n + 1, a_{n+1} = 5S_{n+1} + 1$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 5a_{n+1}, \text{ 即 } a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 成等比数列, 其首项 } a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{4 + (-\frac{1}{4})^n}{1 - (-\frac{1}{4})^n}$$

(II) 不存在正整数 k , 使得 $R_k \geq 4k$ 成立

下证: 对任意的正整数 n , 都有 $R_k < 4n$ 成立

$$\text{由 (I) 知 } b_n = 4 + \frac{5}{(-4)^n - 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore b_{2k-1} + b_{2k} &= 8 + \frac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{2k-1} - 1} + \frac{5}{(-4)^{2k} - 1} \\ &= 8 + \frac{5}{16^k - 1} - \frac{20}{16^k + 4} \\ &= 8 - \frac{15 \times 16^k - 40}{(16^k - 1)(16^k + 4)} < 8 \end{aligned}$$