2017年普通高等学校招生全国统一考试天津数学（理工类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1.每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2.本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

·如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

·如果事件 A，B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)\,P(B)$.

·棱柱的体积公式 $V=Sh$. 其中 S 表示棱柱的底面面积，h 表示棱柱的高.

·球的体积公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$. 其中 R 表示球的半径.

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

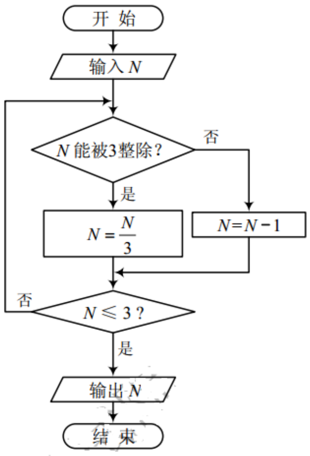
（1）设集合 $A=\{1,2,6\},B=\{2,4\},C=\{x\in\mathbf{R}\mid -1\le x\le 5\}$，则 $(A\bigcup B)\bigcap C=$

（A）$\{2\}$ （B）$\{1,2,4\}$ （C）$\{1,2,4,6\}$ （D）$\{x\in\mathbf{R}\mid -1\le x\le 5\}$

（2）设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y\ge 0,\\ x+2y-2\ge 0,\\ x\le 0,\\ y\le 3,\end{cases}$ 则目标函数 $z=x+y$ 的最大值为

（A）$\dfrac{2}{3}$ （B）1（C）$\dfrac{3}{2}$ （D）3

（3）阅读右面的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为24，则输出 N 的值为



（第3题图）

（A）0 （B）1（C）2（D）3

（4）设 $\theta\in\mathbf{R}$，则"$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12}$"是"$\sin\theta<\frac{1}{2}$"的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件（C）充要条件（D）既不充分也不必要条件

（5）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，离心率为 $\sqrt{2}$.若经过 F 和 $P(0,4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为

（A）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ （B）$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$（C）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$（D）$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

（6）已知奇函数 $f(x)$ 在**R**上是增函数，$g(x)=xf(x)$.若 $a=g(-\log_2 5.1)$，$b=g(2^{0.8})$，$c=g(3)$，则*a*，*b*，*c*的大小关系为

（A）$a<b<c$ （B）$c<b<a$ （C）$b<a<c$ （D）$b<c<a$

（7）设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\pi$.若 $f(\frac{5\pi}{8})=2$，$f(\frac{11\pi}{8})=0$，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则

（A）$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{12}$ （B）$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{12}$ （C）$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{24}$ （D）$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=\frac{7\pi}{24}$

（8）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, x\leq 1,\\ x+\frac{2}{x}, x>1.\end{cases}$ 设 $a\in\mathbf{R}$，若关于*x*的不等式 $f(x)\geq|\frac{x}{2}+a|$ 在**R**上恒成

立，则a的取值范围是

（A）$[-\frac{47}{16},2]$　　（B）$[-\frac{47}{16},\frac{39}{16}]$　　（C）$[-2\sqrt{3},2]$　　（D）$[-2\sqrt{3},\frac{39}{16}]$

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共12小题，共110分。

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

（9）已知$a\in\mathbf{R}$，i为虚数单位，若$\frac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$为实数，则$a$的值为____.

（10）已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若这个正方体的表面积为18，则这个球的体积为____.

（11）在极坐标系中，直线$4\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{6})+1=0$与圆$\rho=2\sin\theta$的公共点的个数为___________.

（12）若$a,b\in\mathbf{R}$，$ab>0$，则$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}$的最小值为__________.

（13）在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$AB=3$，$AC=2$.若$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$，且$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$，则$\lambda$的值为__________.

（14）用数字1，2，3，4，5，6，7，8，9组成没有重复数字，且至多有一个数字是偶数的四位数，这样的四位数一共有__________个.（用数字作答）

三. 解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.已知$a>b$，$a=5,c=6$，$\sin B=\frac{3}{5}$.

（I）求b和$\sin A$的值；

（II）求$\sin(2A+\frac{\pi}{4})$的值.

16.（本小题满分13分）

从甲地到乙地要经过3个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的

概率分别为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$.

（I）设X表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数，求随机变量X的分布列和数学期望

；

（II）若有2辆车独立地从甲地到乙地，求这2辆车共遇到1个红灯的概率.

（17）（本小题满分13分）

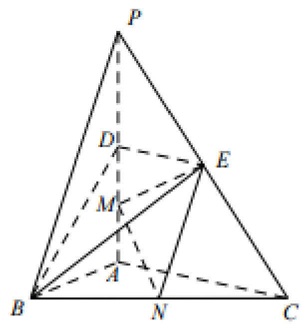
如图，在三棱锥*P*-

*ABC*中，*PA*⊥底面*ABC*，$\angle BAC=90°$.点*D*，*E*，*N*分别为棱*PA*，PC，*BC*的中点，*M*是线段*AD*的中点，*PA*=*AC*=4，*AB*=2.

（Ⅰ）求证：*MN*∥平面*BDE*；

（Ⅱ）求二面角*C*-*EM*-*N*的正弦值；

（Ⅲ）已知点*H*在棱*PA*上，且直线*NH*与直线*BE*所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{21}$，求线段*AH*的长.



18.（本小题满分13分）

已知$\{a_n\}$为等差数列，前*n*项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是首项为2的等比数列，且公比大于0

，$b_2+b_3=12, b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$.

（I）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）求数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前*n*项和$(n\in\mathbf{N}^*)$.

（19）（本小题满分14分）

设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，右顶点为$A$，离心率为$\frac{1}{2}$.已知$A$是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，$F$到抛物线的准线$l$的距离为$\frac{1}{2}$.

(I）求椭圆的方程和抛物线的方程；

(II）设l上两点P，Q关于x轴对称，直线AP与椭圆相交于点B（B异于点A），直线BQ与x轴相交于点D.若$\triangle APD$的面积为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，求直线AP的方程.

（20）（本小题满分14分）

设$a\in \mathbf{Z}$，已知定义在**R**上的函数$f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$在区间$(1,2)$内有一个零点x_0，$g(x)$为$f(x)$的导函数.

（Ⅰ）求$g(x)$的单调区间；

（II）设$m\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，函数$h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，求证：$h(m)h(x_0)<0$；

（III）求证：存在大于0的常数A，使得对于任意的正整数p,q，且$\frac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$,满足$|\frac{p}{q}-x_0|\geq\frac{1}{Aq^4}$.

天津理数答案

1-4BDCA 5-8BCAA

9.-2；

10. $\frac{9\pi}{2}$；

11.2；

12.4；

13. $\frac{3}{11}$；

14.1080

15.（Ⅰ）解：在$\triangle ABC$中，因为$a>b$，故由$\sin B=\frac{3}{5}$，可得$\cos B=\frac{4}{5}$.由已知及余弦定理，有$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=13$，所以$b=\sqrt{13}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

所以，b的值为$\sqrt{13}$，$\sin A$的值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）及$a<c$，得$\cos A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，所以$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{12}{13}$，

$\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\frac{5}{13}$.故$\sin(2A+\frac{\pi}{4})=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

16.（Ⅰ）解：随机变量X的所有可能取值为0,1,2,3.

$P(X=0)=(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$，

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$，

$P(X=2)=(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$，

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$.

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{11}{24}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{24}=\frac{13}{12}$.

（Ⅱ）解：设 Y 表示第一辆车遇到红灯的个数， Z 表示第二辆车遇到红灯的个数，则所求事件的概率为

$$P(Y+Z=1)=P(Y=0,Z=1)+P(Y=1,Z=0)=P(Y=0)P(Z=1)+P(Y=1)P(Z=0)$$

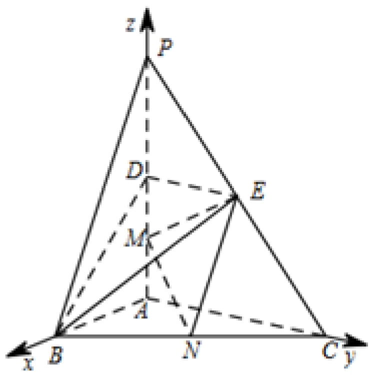
$$=\frac{1}{4}\times\frac{11}{24}+\frac{11}{24}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{48}.$$

所以，这2辆车共遇到1个红灯的概率为 $\frac{11}{48}$.

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、异面直线所成的角等基础知识.考查用空间向量解决立体几何问题的方法.考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力.满分13分.

如图，以A为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AP}$ 方向为x轴、y轴、z轴正方向建立空间直角坐标系.依题意可得

A（0，0，0），B（2，0，0），C（0，4，0），P（0，0，4），D（0，0，2），E（0，2，2），M（0，0，1），N（1，2，0）.



（Ⅰ）证明：$\overrightarrow{DE}$ =（0，2，0），$\overrightarrow{DB}$ =（2，0，-2）.设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，为平面BDE的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2y=0\\ 2x-2z=0\end{cases}$.不妨设$z=1$，可得$\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.又$\overrightarrow{MN}$=（1，2，$-1$），可得$\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

因为$MN\not\subset$平面*BDE*，所以*MN*//平面*BDE*.

（Ⅱ）解：易知$\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$为平面*CEM*的一个法向量.设$\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$为平面*EMN*的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EM}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$，因为$\overrightarrow{EM}=(0,-2,-1)$，$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，所以$\begin{cases}-2y-z=0\\ x+2y-z=0\end{cases}$.不妨设$y=1$，

可得$\boldsymbol{n}_2=(-4,1,-2)$.

因此有$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{4}{\sqrt{21}}$，于是$\sin<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\sqrt{105}}{21}$.

所以，二面角*C*—*EM*—*N*的正弦值为$\dfrac{\sqrt{105}}{21}$.

（Ⅲ）解：依题意，设*AH=h*（$0\le h\le 4$），则*H*（0，0，*h*），进而可得$\overrightarrow{NH}=(-1,-2,h)$，

$\overrightarrow{BE}=(-2,2,2)$.由已知，得$|\cos<\overrightarrow{NH},\overrightarrow{BE}>|=\dfrac{|\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{NH}||\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{|2h-2|}{\sqrt{h^2+5}\times 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{21}$，整理得

$10h^2-21h+8=0$，解得$h=\dfrac{8}{5}$，或$h=\dfrac{1}{2}$.

所以，线段*AH*的长为$\dfrac{8}{5}$或$\dfrac{1}{2}$.

18.【解析】（I）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

由已知$b_2+b_3=12$，得$b_1(q+q^2)=12$，而$b_1=2$，所以$q^2+q-6=0$.

又因为$q>0$，解得$q=2$.所以，$b_n=2^n$.

由$b_3=a_4-2a_1$，可得$3d-a_1=8$ ①.

由$S_{11}=11b_4$，可得$a_1+5d=16$ ②，

联立①②，解得$a_1=1$，$d=3$，由此可得$a_n=3n-2$.

所以，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-2$，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^n$.

（II）解：设数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前n项和为T_n，

由$a_{2n}=6n-2$，$b_{2n-1}=2\times 4^{n-1}$，有$a_{2n}b_{2n-1}=(3n-1)\times 4^{n}$，

故$T_n=2\times 4+5\times 4^2+8\times 4^3+\cdots+(3n-1)\times 4^n$，

$4T_n=2\times 4^2+5\times 4^3+8\times 4^4+\cdots+(3n-4)\times 4^n+(3n-1)\times 4^{n+1}$，

上述两式相减，得$-3T_n=2\times 4+3\times 4^2+3\times 4^3+\cdots+3\times 4^n-(3n-1)\times 4^{n+1}$

$=\dfrac{12\times(1-4^n)}{1-4}-4-(3n-1)\times 4^{n+1}$

$=-(3n-2)\times 4^{n+1}-8.$

得$T_n=\dfrac{3n-2}{3}\times 4^{n+1}+\dfrac{8}{3}.$

所以，数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前n项和为$\dfrac{3n-2}{3}\times 4^{n+1}+\dfrac{8}{3}$.

19.（Ⅰ）解：设F的坐标为$(-c,0)$.依题意，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{p}{2}=a$，$a-c=\dfrac{1}{2}$，解得$a=1$，$c=\dfrac{1}{2}$，$p=2$，于是$b^2=a^2-c^2=\dfrac{3}{4}$.

所以，椭圆的方程为$x^2+\dfrac{4y^2}{3}=1$，抛物线的方程为$y^2=4x$.

（Ⅱ）解：设直线AP的方程为$x=my+1(m\neq 0)$，与直线l的方程$x=-1$联立，可得点$P(-1,-\dfrac{2}{m})$，故$Q(-1,\dfrac{2}{m})$.将$x=my+1$与$x^2+\dfrac{4y^2}{3}=1$联立，消去x，整理得$(3m^2+4)y^2+6my=0$，解得$y=0$，或$y=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$.由点B异于点A，可得点$B(\dfrac{-3m^2+4}{3m^2+4},\dfrac{-6m}{3m^2+4})$.由$Q(-1,\dfrac{2}{m})$，可学*科.网得直线$BQ$的方程为

$(\dfrac{-6m}{3m^2+4}-\dfrac{2}{m})(x+1)-(\dfrac{-3m^2+4}{3m^2+4}+1)(y-\dfrac{2}{m})=0$，令$y=0$，解得$x=\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2}$，故$D(\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2},0)$.所以$|AD|=1-\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2}=\dfrac{6m^2}{3m^2+2}$.又因为$\triangle APD$的面积为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6m^2}{3m^2+2}\times\dfrac{2}{|m|}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，整理得$3m^2-2\sqrt{6}|m|+2=0$，解得$|m|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以$m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以，直线AP的方程为$3x+\sqrt{6}y-3=0$，或$3x-\sqrt{6}y-3=0$.

20.（Ⅰ）解：由 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$，可得

$g(x)=f'(x)=8x^3+9x^2-6x-6$，

进而可得 $g'(x)=24x^2+18x-6$.令 $g'(x)=0$，解得 $x=-1$，或 $x=\frac{1}{4}$.

当x变化时，$g'(x),g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4},+\infty)$
$g'(x)$	+	-	+
$g(x)$	↗	↘	↗

所以，$g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$(\frac{1}{4},+\infty)$，单调递减区间是 $(-1,\frac{1}{4})$.

（Ⅱ）证明：由 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，得 $h(m)=g(m)(m-x_0)-f(m)$，

$h(x_0)=g(x_0)(m-x_0)-f(m)$.

令函数 $H_1(x)=g(x)(x-x_0)-f(x)$，则 $H_1'(x)=g'(x)(x-x_0)$.由（Ⅰ）知，当 $x\in[1,2]$ 时，$g'(x)>0$，故当 $x\in[1,x_0)$ 时，$H_1'(x)<0$，$H_1(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,2]$ 时，$H_1'(x)>0$，$H_1(x)$ 单调递增.因此，当 $x\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$ 时，$H_1(x)>H_1(x_0)=-f(x_0)=0$，可得 $H_1(m)>0$,即 $h(m)>0$.

令函数 $H_2(x)=g(x_0)(x-x_0)-f(x)$，则 $H_2'(x)=g(x_0)-g(x)$.由（Ⅰ）知，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故当 $x\in[1,x_0)$ 时，$H_2'(x)>0$，$H_2(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,2]$ 时，$H_2'(x)<0$，$H_2(x)$ 单调递减.因此，当 $x\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$ 时，$H_2(x)<H_2(x_0)=0$，可得 $H_2(m)<0$,即 $h(x_0)<0$.

所以，$h(m)h(x_0)<0$.

（Ⅲ）证明：对于任意的正整数 p，q，且 $\frac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，

令 $m=\frac{p}{q}$，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$.

由（II）知，当 $m\in[1,x_0)$ 时，$h(x)$ 在区间 (m,x_0) 内有零点；

当 $m\in(x_0,2]$ 时，$h(x)$ 在区间 (x_0,m) 内有零点.

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个零点，不妨设为 x_1，则

$$h(x_1)=g(x_1)(\frac{p}{q}-x_0)-f(\frac{p}{q})=0.$$

由（I）知 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故 $0<g(1)<g(x_1)<g(2)$，

于是 $|\frac{p}{q}-x_0|=|\frac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)}|\geq\frac{|f(\frac{p}{q})|}{g(2)}=\frac{|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|}{g(2)q^4}$.

因为当 $x\in[1,2]$ 时，$g(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上除 x_0 外没有其他的零点，而 $\frac{p}{q}\neq x_0$，故 $f(\frac{p}{q})\neq 0$.

又因为 p，q，a 均为整数，所以 $|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|$ 是正整数，

从而 $|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|\geq 1$.

所以 $|\frac{p}{q}-x_0|\geq\frac{1}{g(2)q^4}$.所以，只要取 $A=g(2)$，就有 $|\frac{p}{q}-x_0|\geq\frac{1}{Aq^4}$.

选择填空解析

第Ⅰ卷（共40分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）【2017年天津，理1，5分】设集合 $A=\{1,2,6\},B=\{2,4\},C=\{x\in\mathbf{R}\,|-1\leq x\leq 5\}$，则 $(A\cup B)\cap C=$（　）

（A）$\{2\}$　　（B）$\{1,2,4\}$　　（C）$\{1,2,4,6\}$　　（D）$\{x\in\mathbf{R}\,|-1\leq x\leq 5\}$

【答案】B

【解析】$(A\cup B)\cap C=\{1,2,4,6\}\cap[-1,5]=\{1,2,4\}$，故选B.

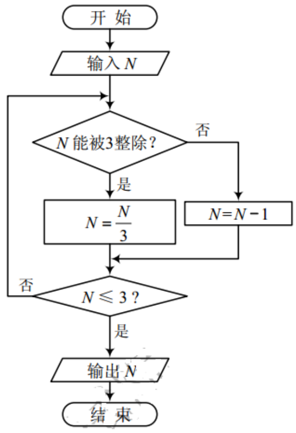
（2）【2017年天津，理2，5分】设变量x,y满足约束条件$\begin{cases}2x+y\geq 0,\\ x+2y-2\geq 0,\\ x\leq 0,\\ y\leq 3,\end{cases}$则目标函数$z=x+y$的最大值为（ ）

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）1　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）3

【答案】D

【解析】目标函数为四边形$ABCD$及其内部，其中$A(0,1),B(0,3),C(-\frac{3}{2},3),D(-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，所以直线$z=x+y$过点B时取最大值3，故选D.

（3）【2017年天津，理3，5分】阅读右面的程序框图，运行相应的程序，若输入N的值为24，则输出N的值为（ ）



（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】C

【解析】依次为$N=8$，$N=7,N=6,N=2$，输出$N=2$，故选C.

（4）【2017年天津，理4，5分】设$\theta\in\mathbf{R}$，则“$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\frac{1}{2}$”的（ ）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】$\left|\theta-\frac{\pi}{12}\right|<\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{6}\Rightarrow\sin\theta<\frac{1}{2}$，$\theta=0$，$\sin\theta<\frac{1}{2}$，不满足$\left|\theta-\frac{\pi}{12}\right|<\frac{\pi}{12}$，所以是充分不必要条件，故选A.

（5）【2017年天津，理5，5分】已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为$F$，离心率为$\sqrt{2}$．若经过$F$和$P(0,4)$两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为（ ）

（A）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$　　（B）$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$　　（C）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$　　（D）$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

【答案】B

【解析】由题意得$a=b,\frac{4}{-c}=-1\Rightarrow c=4,a=b=2\sqrt{2}\Rightarrow\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$，故选**B**.

（6）【2017年天津，理6，5分】已知奇函数$f(x)$在**R**上是增函数，$g(x)=xf(x)$．若$a=g(-\log_2 5.1)$，$b=g(2^{0.8})$，$c=g(3)$，则a，b，c的大小关系为（ ）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<b<a$　　（C）$b<a<c$　　（D）$b<c<a$

【答案】C

【解析】因为$f(x)$是奇函数且在$\mathbf{R}$上是增函数，所以在$x>0$时，$f(x)>0$，从而$g(x)=xf(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数，且在$[0,+\infty)$上是增函数，$a=g(-\log_2^{5.1})=g(\log_2^{5.1})$，$2^{0.8}<2$，又$4<5.1<8$，$2<\log_2^{5.1}<3$，所以即$0<2^{0.8}<\log_2^{5.1}<3$，$g(2^{0.8})<g(\log_2^{5.1})<g(3)$，所以$b<a<c$，故选C.

（7）【2017年天津，理7，5分】设函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$，其中$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$

．若 $f(\frac{5\pi}{8})=2$，$f(\frac{11\pi}{8})=0$，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则（ ）

（A）$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{12}$ （B）$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{12}$ （C）$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{24}$ （D）$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=\frac{7\pi}{24}$

【答案】A

【解析】由题意 $\begin{cases}\frac{5\omega\pi}{8}+\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}\\ \frac{11\omega\pi}{8}+\varphi=k_2\pi\end{cases}$，其中 $k_1,k_2\in Z$，所以 $\omega=\frac{4}{3}(k_2-2k_1)-\frac{2}{3}$，又 $T=\frac{2\pi}{\omega}>2\pi$，所以 $0<\omega<1$，所以 $\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=2k_1\pi+\frac{1}{12}\pi$，由 $|\varphi|<\pi$ 得 $\varphi=\frac{\pi}{12}$，故选A．

（8）【2017年天津，理8，5分】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3,x\le 1,\\ x+\frac{2}{x},x>1.\end{cases}$ 设 $a\in\mathbf{R}$，若关于x的不等式 $f(x)\ge|\frac{x}{2}+a|$ 在$\mathbf{R}$上恒成立，则a的取值范围是（ ）

（A）$[-\frac{47}{16},2]$ （B）$[-\frac{47}{16},\frac{39}{16}]$ （C）$[-2\sqrt{3},2]$ （D）$[-2\sqrt{3},\frac{39}{16}]$

【答案】A

【解析】不等式 $f\left(x\right)\ge\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 为 $-f\left(x\right)\le\frac{x}{2}+a\le f\left(x\right)(*)$，当 $x\le 1$ 时，$(*)$ 式即为 $-x^2+x-3\le\frac{x}{2}+a\le x^2-x+3$，

$-x^2+\frac{x}{2}-3\le a\le x^2-\frac{3}{2}x+3$，又 $-x^2+\frac{x}{2}-3=-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{47}{16}$（$x=\frac{1}{4}$ 时取等号），

$x^2-\frac{3}{2}x+3=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\ge\frac{39}{16}$（$x=\frac{3}{4}$ 时取等号），所以 $-\frac{47}{16}\le a\le\frac{39}{16}$，当 $x>1$，$(*)$ 式为

$-x-\frac{2}{x}\le\frac{x}{2}+a\le x+\frac{2}{x}$，$-\frac{3}{2}x-\frac{2}{x}\le\frac{x}{2}+a\le\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$，又 $-\frac{3}{2}x-\frac{2}{x}=-\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{x}\right)\le-2\sqrt{3}$（当 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取等号），$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\ge 2\sqrt{\frac{x}{2}\times\frac{2}{x}}=2$（当 $x=2$ 时取等号），所以 $-2\sqrt{3}\le a\le 2$，综上 $-\frac{47}{16}\le a\le 2$，故选A．

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

（9）【2017年天津，理9，5分】已知 $a\in\mathbf{R}$，i为虚数单位，若 $\frac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数，则a的值为___．

【答案】-2

【解析】$\frac{a-i}{2+i}=\frac{(a-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{(2a-1)-(a+2)i}{5}=\frac{2a-1}{5}-\frac{a+2}{5}i$ 为实数，则 $\frac{a+2}{5}=0,a=-2$

.

（10）【2017年天津，理10，5分】已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若这个正方体的表面积为18，则这个球的体积为___.

【答案】$\dfrac{9\pi}{2}$

【解析】设正方体边长为a，则$6a^2=18\Rightarrow a^2=3$，外接球直径为$2R=\sqrt{3}a=3,V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{27}{8}=\dfrac{9}{2}\pi$.

（11）【2017年天津，理11，5分】在极坐标系中，直线$4\rho\cos(\theta-\dfrac{\pi}{6})+1=0$与圆$\rho=2\sin\theta$的公共点的个数为___.

【答案】2

【解析】直线为$2\sqrt{3}x+2y+1=0$，圆为$x^2+(y-1)^2=1$，因为$d=\dfrac{3}{4}<1$，所以有两个交点.

（12）【2017年天津，理12，5分】若$a,b\in\mathbf{R}$，$ab>0$，则$\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$的最小值为___.

【答案】4

【解析】$\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}\geq\dfrac{4a^2b^2+1}{ab}\geq 4$，当且仅当$a=2,b=1$时取等号.

（13）【2017年天津，理13，5分】在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$AB=3$，$AC=2$．若$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$，且$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$，则$\lambda$的值为____.

【答案】$\dfrac{3}{11}$

【解析】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times2\times\cos60^\circ=3$，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，则

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{\lambda}{3}\times3+\frac{2\lambda}{3}\times4-\frac{1}{3}\times9-\frac{2}{3}\times3=-4\Rightarrow\lambda=\frac{3}{11}.$$

（14）【2017年天津，理14，5分】用数字1，2，3，4，5，6，7，8，9组成没有重复数字，且至多有一个数字是偶数的四位数，这样的四位数一共有____个．（用数字作答）

【答案】1080

【解析】$A_5^4+C_4^1C_5^3A_4^4=1080$.