

2021年上海市夏季高考数学试卷

一、填空题 (本大题共12题, 满分54分, 第1~6题每题4分, 第7~12题每题5分)

1. 已知 $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+3i$ (其中 i 为虚数单位), 则 $z_1 + z_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $A = \{x | 2x \leq 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 若 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, 则圆心坐标为 $\underline{\hspace{2cm}, \underline{\hspace{2cm}}}$

4. 如图边长为3的正方形 $ABCD$, 则 $AB \cdot AC = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 已知 $f(x) = \frac{3}{x} + 2$, 则 $f^{-1}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 已知二项式 $(x+a)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 80, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 已知 $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$, 目标函数 $z = x - y$, 则 z 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

8. 已知无穷递缩等比数列 $a_1 = 3, b_n = a_{2n}$, $\{a_n\}$ 的各项和为 9, 则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为 $\underline{\hspace{2cm}}$

9. 在圆柱底面半径为 1, 高为 2, AB 为上底底面的直径, 点 C 是下底底面圆弧上的一个动点, 点 C 绕着下底底面旋转一周, 则 $\triangle ABC$ 面积的范围 $\underline{\hspace{2cm}}$

10. 甲、乙两人在花博会的 A、B、C、D 不同展馆中各选 2 个去参观, 则两人选择中恰有一个馆相同的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 若第一象限的点 A, B 在抛物线上, 抛物线焦点为 F ,

$|AF| = 2, |BF| = 4, |AB| = 3$, 则直线 AB 的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

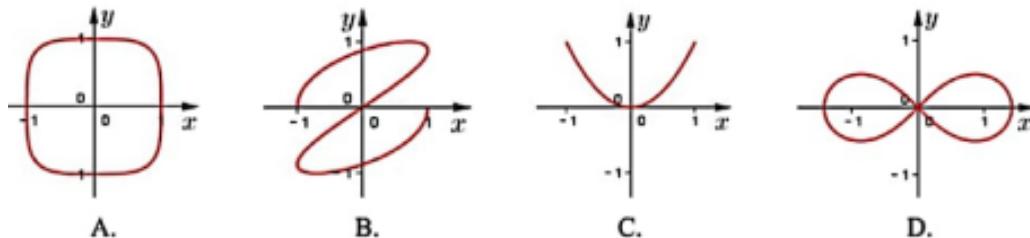
12. 已知 $a_i \in \mathbf{N}^* (i=1, 2, \dots, 9)$, 且对任意 $k \in \mathbf{N}^* (2 \leq k \leq 8)$ 都有 $a_k = a_{k-1} + 1$ 或 $a_k = a_{k+1} - 1$ 中有且仅有一个成立, $a_1 = 6, a_9 = 9$, 则 $a_1 + \dots + a_9$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题 (本大题共有4题, 每题5分, 满分20分)

13. 以下哪个函数既是奇函数, 又是减函数 ()

- A. $f(x) = -3x$ B. $f(x) = x^3$ C. $f(x) = \log_3 x$ D. $f(x) = 3^x$

14. 已知参数方程 $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t + \sqrt{1-t^2} \end{cases} (t \in [-1, 1])$, 以下哪个图像是该方程的图像 ()



15. 已知 $f(x) = 3 \sin x + 2$, 对于任意的 $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 都存在 $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使得

$f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$ 成立, 则下列选项中, θ 可能的值是 ()

- A. $\frac{3\pi}{5}$ B. $\frac{4\pi}{5}$ C. $\frac{6\pi}{5}$ D. $\frac{7\pi}{5}$

16. 已知两两不同的 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 满足 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$,

且 $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, $x_3 < y_3$, $x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2 > 0$, 则下列选项中恒成立的是 ()

- A. $2x_2 < x_1 + x_3$ B. $2x_2 > x_1 + x_3$ C. $x_2^2 < x_1x_3$ D. $x_2^2 > x_1x_3$

三、解答题 (本大题共有5题, 满分76分, 解答下列各题必须写出必要的步骤)

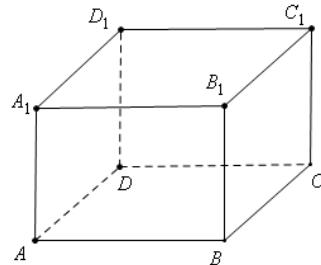
17、如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2, AA_1=3$

(1)若 P 是边 A_1D_1 的动点, 求三棱锥 $P-ADC$ 的体积;

(2)求 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角的大小.

18、在 ΔABC 中, 已知 $a=3, b=2c$

(1)若 $\angle A=\frac{2\pi}{3}$, 求 ΔABC 的面积; (2)若 $2\sin B - \sin C = 1$, 求 ΔABC 的周长.



19.已知某企业今年(2021年)第一季度的营业额为1.1亿元, 以后每个季度(一年有四个季度)营业额都比前一季度多0.05亿元, 该企业第一季度利润为0.16亿元, 以后每一季度的利润都比前一季度增长4%.

(1)求2021第一季度起20季度的营业额总和;

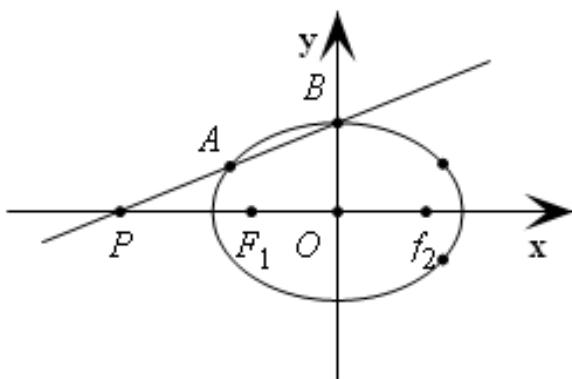
(2)问哪一年哪个季度的利润首次超过该季度营业额的18%?

20、已知 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, F_1, F_2$ 是其左右焦点, $P(m, 0)(m < -\sqrt{2})$, 直线 l 过点 P 交 Γ 于 A, B 两点, 且 A 在线段 BP 上.

(1)若 B 是上顶点, $|BF_1| = |PF_1|$, 求 m 的值;

(2)若 $F_1A \cdot F_2A = \frac{1}{3}$, 且原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$, 求直线 l 的方程;

(3)证明: 对于任意 $m < -\sqrt{2}$, 总存在唯一一条直线使得 $F_1A // F_2B$.



21、如果对任意 $x_1, x_2 \in S$ 使得 $x_1 - x_2 \in S$ 都有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$, 则称 $f(x)$ 是 S 关联的.

(1)判断并证明 $f(x) = 2x - 1$ 是否是 $[0, +\infty)$ 关联? 是否是 $[0, 1]$ 关联?

(2) $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的, 在 $[0, 3]$ 上有 $f(x) = x^2 - 2x$, 解不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$;

(3) “ $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的, 且是 $[0, +\infty)$ 关联” 当且仅当 “ $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联的” .