

2016年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

数学（文科）

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共4页。满分150分。考试用时120分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1.答卷前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号、县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上。

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答案写在试卷上无效。

3.

第Ⅱ卷必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

4.填空题直接填写答案，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

参考公式：

如果事件A,B互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 。

第Ⅰ卷（共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$

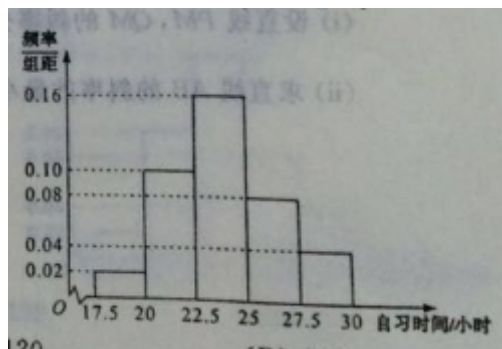
- (A) {2,6} (B) {3,6} (C) {1,3,4,5} (D) {1,2,4,6}

(2) 若复数 $z = \frac{2}{1-i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\bar{z} =$

- (A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$

(3) 某高校调查了200名学生每周的自习时间(单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$, 样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30)$. 根据直方图, 这200名学生中每周的自习时间不少于22.5小时的人数是

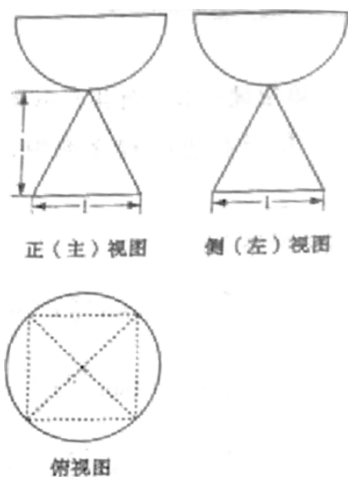
- (A) 56 (B) 60 (C) 120 (D) 140



(4) 若变量 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \leq 2, \\ 2x-3y \leq 9, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最大值是

- (A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 12

(5) 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为



- (A) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi$ (B) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

(C) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$ (D) $1 + \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

(6) 已知直线 a , b 分别在两个不同的平面 α , β 内, 则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面 α 和平面 β 相交”的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2ay = 0 (a > 0)$ 截直线 $x + y = 0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$, 则圆 M 与圆 $N:$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的位置关系是

(A) 内切 (B) 相交 (C) 外切 (D) 相离

(8) $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $b = c, a^2 = 2b^2(1 - \sin A)$, 则 $A =$

(A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

(9) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} . 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$; 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x + \frac{1}{2}) = f(x - \frac{1}{2})$. 则 $f(6) =$

(A) -2 (B) -1

(C) 0 (D) 2

(10) 若函数 $y = f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y = f(x)$ 具有 T 性质. 下列函数中具有 T 性质的是学科网

(A) $y = \sin x$

(B) $y = \ln x$

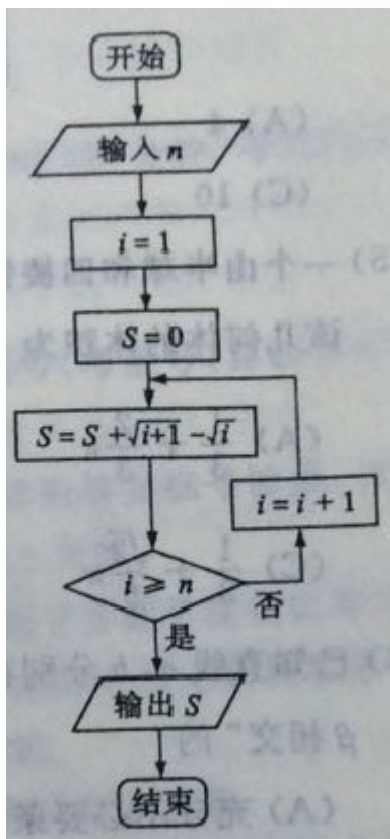
(C) $y = e^x$

(D) $y = x^3$

第II卷 (共100分)

二、填空题: 本大题共5小题, 每小题5分, 共25分。

(11) 执行右边的程序框图, 若输入 n 的值为3, 则输出的 S 的值为_____.



(12) 观察下列等式:

$$\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 1 \times 2;$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{4\pi}{5}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 2 \times 3;$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{7}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{7}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{7}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{6\pi}{7}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 3 \times 4;$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{9}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{9}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{9}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{8\pi}{9}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 4 \times 5;$$

.....

照此规律, $\left(\sin \frac{\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{2n\pi}{2n+1}\right)^{-2} =$ _____.

(13) 已知向量 $a=(1,-1)$, $b=(6,-4)$. 若 $a \perp (ta+b)$, 则实数 t 的值为 _____.

(14) 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} -$

$\frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$). 矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上, AB , CD 的中点为 E 的两个焦点, 且 $2|AB| = 3|BC|$, 则 E

的离心率是 _____.

(15) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m, \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m, \end{cases}$ 其中 $m > 0$. 若存在实数 b , 使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的

的根, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共6小题，共75分

(16) (本小题满分12分)

某儿童乐园在“六一”儿童节退出了一项趣味活动. 参加活动的儿童需转动如图所示的转盘两次, 每次转动后, 待转盘停止转动时, 记录指针所指区域中的数. 设两次记录的数分别为 x, y . 奖励规则如下:

①若 $xy \leq 3$, 则奖励玩具一个; 学科&网

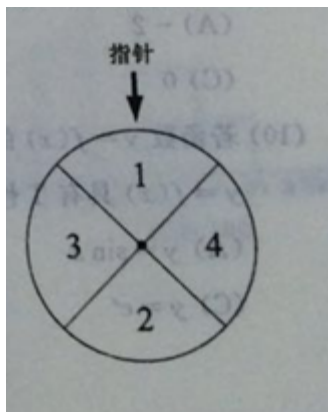
②若 $xy \geq 8$, 则奖励水杯一个;

③其余情况奖励饮料一瓶.

假设转盘质地均匀, 四个区域划分均匀. 小亮准备参加此项活动.

(I) 求小亮获得玩具的概率;

(II) 请比较小亮获得水杯与获得饮料的概率的大小, 并说明理由.



(17) (本小题满分12分)

设 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin(\pi - x) \sin x - (\sin x - \cos x)^2$.

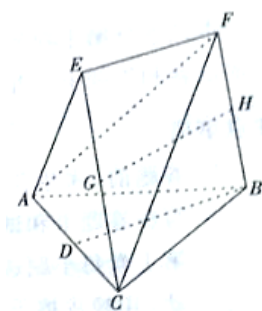
(I) 求 $f(x)$ 得单调递增区间;

(II) 把 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 再把得到的图象向左平移

$\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到函数 $y = g(x)$ 的图象，求 $g(\frac{\pi}{6})$ 的值.

(18) (本小题满分12分)

在如图所示的几何体中， D 是 AC 的中点， $EF \parallel DB$.



(I) 已知 $AB=BC$, $AE=EC$. 求证: $AC \perp FB$;

(II) 已知 G, H 分别是 EC 和 FB 的中点. 求证: $GH \parallel$ 平面 ABC .

(19) (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式; 学科&网

(II) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(20)(本小题满分13分)

设 $f(x)=x\ln x-ax^2+(2a-1)x$, $a\in R$.

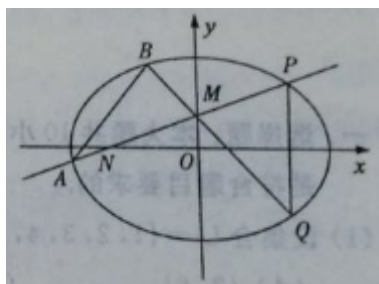
(I)令 $g(x)=f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;

(II)已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值.求实数 a 的取值范围.

(21)(本小题满分14分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的长轴长为4, 焦距为 $2\sqrt{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;



(II)过动点 $M(0, m)(m>0)$ 的直线交 x 轴与点 N , 交 C 于点 A , P (P 在第一象限), 且 M 是线段 PN 的中点.过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q , 延长线 QM 交 C 于点 B .

(i)设直线 PM 、 QM 的斜率分别为 k 、 k' , 证明 $\frac{k'}{k}$ 为定值.

(ii)求直线 AB 的斜率的最小值.

2016年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

数学（文科）

第I卷（共50分）

一、选择题

- (1) 【答案】A
- (2) 【答案】B
- (3) 【答案】D
- (4) 【答案】C
- (5) 【答案】C
- (6) 【答案】A
- (7) 【答案】B
- (8) 【答案】C
- (9) 【答案】D
- (10) 【答案】A

第II卷（共100分）

二、填空题

- (11) 【答案】1
- (12) 【答案】 $\frac{4}{3} \times n \times (n+1)$
- (13) 【答案】-5
- (14) 【答案】2
- (15) 【答案】 $(3, +\infty)$

三、解答题：本大题共6小题，共75分

- (16)

【答案】(I) $\frac{5}{16}$. (II) 小亮获得水杯的概率大于获得饮料的概率.

【解析】

试题分析：用数对 (x, y) 表示儿童参加活动先后记录的数，写出基本事件空间 Ω 与点集

$S = \{(x, y) | x \in N, y \in N, 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 4\}$ 一一对应. 得到基本事件总数为 $n = 16$.

(I) 事件 A 包含的基本事件共有5个，即 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)$ ，计算即得.

(II) 记“ $xy \geq 8$ ”为事件 B ，“ $3 < xy < 8$ ”为事件 C .

知事件 B 包含的基本事件共有6个，得到 $P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

事件 C 包含的基本事件共有5个，得到 $P(C) = \frac{5}{16}$.

比较即知.

试题解析：用数对 (x, y) 表示儿童参加活动先后记录的数，则基本事件空间 Ω 与点集

$S = \{(x, y) | x \in N, y \in N, 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 4\}$ 一一对应. 因为 S 中元素个数是 $4 \times 4 = 16$ ，所以基本事件总数为 $n = 16$.

(I) 记“ $xy \leq 3$ ”为事件 A .

则事件 A 包含的基本事件共有5个，即 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)$,

所以， $P(A) = \frac{5}{16}$ ，即小亮获得玩具的概率为 $\frac{5}{16}$.

(II) 记“ $xy \geq 8$ ”为事件 B ，“ $3 < xy < 8$ ”为事件 C .

则事件 B 包含的基本事件共有6个，即 $(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$,

所以， $P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

则事件 C 包含的基本事件共有5个，即 $(1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$,

所以， $P(C) = \frac{5}{16}$.

因为 $\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$,

所以，小亮获得水杯的概率大于获得饮料的概率.

考点：古典概型

(17)

【答案】 (I) $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in Z)$, (或 $(k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}) (k \in Z)$)

(II) $\sqrt{3}$.

【解析】

试题分析: (I) 化简 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin x - (\sin x - \cos x)^2$ 得

$$f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} - 1,$$

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$, 即得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12} (k \in Z)$,

写出 $f(x)$ 的单调递增区间

(II) 由 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} - 1$, 平移后得 $g(x) = 2\sin x + \sqrt{3} - 1$. 进一步可得 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

试题解析: (I) 由 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin x - (\sin x - \cos x)^2$

$$= 2\sqrt{3}\sin^2 x - (1 - 2\sin x \cos x)$$

$$= \sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 1$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3} - 1$$

$$= 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} - 1,$$

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$, 得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12} (k \in Z)$,

所以, $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in Z)$,

(或 $(k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}) (k \in Z)$)

(II) 由 (I) 知 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} - 1$,

把 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），

得到 $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} - 1$ 的图象，

再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到 $y = 2 \sin x + \sqrt{3} - 1$ 的图象，

即 $g(x) = 2 \sin x + \sqrt{3} - 1$.

所以 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$.

考点：1. 和差倍半的三角函数；2. 三角函数的图象和性质；3. 三角函数的图象和性质.

（18）【答案】（I）证明：见解析；（II）见解析.

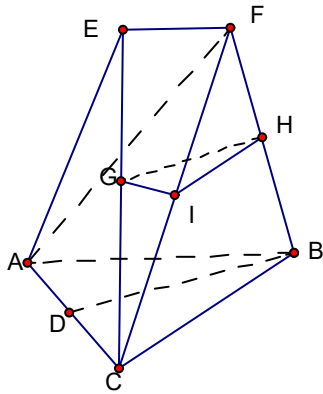
【解析】

试题分析：（I）根据 $EF \parallel BD$ ，知 EF 与 BD 确定一个平面，连接 DE ，得到 $DE \perp AC$ ，
 $BD \perp AC$ ，从而 $AC \perp$ 平面 $BDEF$ ，证得 $AC \perp FB$.

（II）设 FC 的中点为 I ，连 GI, HI ，在 $\triangle CEF$ ， $\triangle CFB$ 中，由三角形中位线定理可得线线平行，证得
平面 $GHI \parallel$ 平面 ABC ，进一步得到 $GH \parallel$ 平面 ABC .

试题解析：（I）证明：因 $EF \parallel BD$ ，所以 EF 与 BD 确定一个平面，连接 DE ，因为 $AE = EC$, E 为
 AC 的中点，所以 $DE \perp AC$ ；同理可得 $BD \perp AC$ ，又因为 $BD \cap DE = D$ ，所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$ ，
因为 $FB \subset$ 平面 $BDEF$ ， $AC \perp FB$ 。

（II）设 FC 的中点为 I ，连 GI, HI ，在 $\triangle CEF$ 中， G 是 CE 的中点，所以 $GI \parallel EF$ ，又 $EF \parallel DB$ ，所
以 $GI \parallel DB$ ；在 $\triangle CFB$ 中， H 是 FB 的中点，所以 $HI \parallel BC$ ，又 $GI \cap HI = I$ ，所以平面 $GHI \parallel$ 平面
 ABC ，因为 $GH \subset$ 平面 GHI ，所以 $GH \parallel$ 平面 ABC 。



考点：1. 平行关系；2. 垂直关系.

(19)

【答案】 (I) $b_n = 3n + 1$; (II) $T_n = 3n \cdot 2^{n+2}$

【解析】

试题分析： (I) 由题意得 $\begin{cases} a_1 = b_1 + b_2 \\ a_2 = b_2 + b_3 \end{cases}$ ，解得 $b_1 = 4, d = 3$ ，得到 $b_n = 3n + 1$ 。

(II) 由 (I) 知 $c_n = \frac{(6n+6)^{n-1}}{(3n+3)^n} = 3(n+1) \cdot 2^{n-1}$ ，从而

$$T_n = 3[2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \cdots + (n+1)2^{n+1}]$$

利用“错位相减法”即得 $T_n = 3n \cdot 2^{n+2}$

试题解析： (I) 由题意当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 6n + 5$ ，当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 11$ ；所以

$a_n = 6n + 5$ ；设数列的公差为 d ，由 $\begin{cases} a_1 = b_1 + b_2 \\ a_2 = b_2 + b_3 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 11 = 2b_1 + d \\ 17 = 2b_1 + 3d \end{cases}$ ，解之得 $b_1 = 4, d = 3$ ，所以

$$b_n = 3n + 1。$$

(II) 由 (I) 知 $c_n = \frac{(6n+6)^{n-1}}{(3n+3)^n} = 3(n+1) \cdot 2^{n-1}$ ，又 $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ ，即

$$T_n = 3[2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \cdots + (n+1)2^{n+1}]$$

，所以 $2T_n = 3[2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + 4 \times 2^5 + \cdots + (n+1)2^{n+2}]$ ，以上两式两边相减得

$$-T_n = 3[2 \times 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1} - (n+1)2^{n+2}] = 3[4 + \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} - (n+1)2^{n+2}] = -3n \cdot 2^{n+2}.$$

$$\text{所以 } T_n = 3n \cdot 2^{n+2}$$

考点：1. 等差数列的通项公式；2. 等比数列的求和；3. “错位相减法”.

(20)

【答案】(I) 当 $a \leq 0$ 时，函数 $g(x)$ 单调递增区间为 $(0, +\infty)$ ；

当 $a > 0$ 时，函数 $g(x)$ 单调递增区间为 $(0, \frac{1}{2a})$ ，单调递减区间为 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$.

$$(II) \quad a > \frac{1}{2}.$$

【解析】

试题分析：(I) 求导数 $f'(x) = \ln x - 2ax + 2a$,

可得 $g(x) = \ln x - 2ax + 2a, x \in (0, +\infty)$,

$$\text{从而 } g'(x) = \frac{1}{x} - 2a = \frac{1 - 2ax}{x},$$

讨论当 $a \leq 0$ 时，当 $a > 0$ 时的两种情况即得.

(II) 由 (I) 知， $f'(1) = 0$. 分以下情况讨论：①当 $a \leq 0$ 时，②当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时，③当 $a = \frac{1}{2}$ 时，④当 $a > \frac{1}{2}$ 时，综合即得.

试题解析：(I) 由 $f'(x) = \ln x - 2ax + 2a$,

可得 $g(x) = \ln x - 2ax + 2a, x \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{x} - 2a = \frac{1 - 2ax}{x},$$

当 $a \leq 0$ 时，

$x \in (0, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x)$ 单调递增；

当 $a > 0$ 时，

$x \in (0, \frac{1}{2a})$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x)$ 单调递增，

$x \in \left(\frac{1}{2a}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减.

所以当 $a \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 单调递增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时, 函数 $g(x)$ 单调递增区间为 $\left(0, \frac{1}{2a}\right)$, 单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2a}, +\infty\right)$.

(II) 由 (I) 知, $f'(1) = 0$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 不合题意.

② 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{2a} > 1$, 由 (I) 知 $f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2a}\right)$ 内单调递增,

可得当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in \left(1, \frac{1}{2a}\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 在 $\left(1, \frac{1}{2a}\right)$ 内单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 不合题意.

③ 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 即 $\frac{1}{2a} = 1$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减,

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 单调递减, 不合题意.

④ 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 即 $0 < \frac{1}{2a} < 1$, 当 $x \in \left(\frac{1}{2a}, 1\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $a > \frac{1}{2}$.

考点: 1. 应用导数研究函数的单调性、极值; 2. 分类讨论思想.

(21)

【答案】(I) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. (II) (i) 见解析; (ii) 直线AB 的斜率的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【解析】

试题分析: (I) 分别计算a, b即得.

(II) (i) 设 $P(x_0, y_0) (x_0 > 0, y_0 > 0)$,

由 $M(0, m)$, 可得 $P(x_0, 2m), Q(x_0, -2m)$.

得到直线PM的斜率 $k = \frac{2m - m}{x_0} = \frac{m}{x_0}$, 直线QM的斜率 $k' = \frac{-2m - m}{x_0} = -\frac{3m}{x_0}$. 证得.

(ii) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

直线PA的方程为 $y = kx + m$,

直线QB的方程为 $y = -3kx + m$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases},$$

整理得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4mkx + 2m^2 - 4 = 0$.

应用一元二次方程根与系数的关系得到 $x_2 - x_1 = \frac{2(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)x_0} - \frac{2(m^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} = \frac{-32k^2(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)(2k^2 + 1)x_0}$,

$$y_2 - y_1 = \frac{-6k(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)x_0} + m - \frac{2(m^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} - m = \frac{-8k(6k^2 + 1)(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)(2k^2 + 1)x_0},$$

$$\text{得到 } k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6k^2 + 1}{4k} = \frac{1}{4} \left(6k + \frac{1}{k} \right).$$

应用基本不等式即得.

试题解析: (I) 设椭圆的半焦距为c,

由题意知 $2a = 4, 2c = 2\sqrt{2}$,

所以 $a = 2, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2}$,

所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(II) (i) 设 $P(x_0, y_0)(x_0 > 0, y_0 > 0)$,

由 $M(0, m)$, 可得 $P(x_0, 2m), Q(x_0, -2m)$.

所以 直线PM的斜率 $k = \frac{2m - m}{x_0} = \frac{m}{x_0}$,

直线QM的斜率 $k' = \frac{-2m - m}{x_0} = -\frac{3m}{x_0}$.

此时 $\frac{k'}{k} = -3$,

所以 $\frac{k'}{k}$ 为定值-3.

(ii) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

直线PA的方程为 $y = kx + m$,

直线QB的方程为 $y = -3kx + m$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases},$$

整理得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4mkx + 2m^2 - 4 = 0$.

由 $x_0 x_1 = \frac{2m^2 - 4}{2k^2 + 1}$ 可得 $x_1 = \frac{2(m^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0}$,

所以 $y_1 = kx_1 + m = \frac{2k(m^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} + m$,

同理 $x_2 = \frac{2(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)x_0}, y_2 = \frac{-6k(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)x_0} + m$.

所以 $x_2 - x_1 = \frac{2(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)x_0} - \frac{2(m^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} = \frac{-32k^2(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)(2k^2 + 1)x_0}$,

$y_2 - y_1 = \frac{-6k(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)x_0} + m - \frac{2k(m^2 - 2)}{(2k^2 + 1)x_0} - m = \frac{-8k(6k^2 + 1)(m^2 - 2)}{(18k^2 + 1)(2k^2 + 1)x_0}$,

所以 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6k^2 + 1}{4k} = \frac{1}{4} \left(6k + \frac{1}{k} \right)$.

由 $m > 0, x_0 > 0$, 可知 $k > 0$,

所以 $6k + \frac{1}{k} \geq 2\sqrt{6}$, 等号当且仅当 $k = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 时取得.

此时 $\frac{m}{\sqrt{4-8m^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 即 $m = \frac{\sqrt{14}}{7}$, 符号题意.

所以直线AB 的斜率的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

考点：1. 椭圆的标准方程及其几何性质；2. 直线与椭圆的位置关系；3. 基本不等式.