2013年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

理 科 数 学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷(非选择题)两部分, 共150分. 考试用时120分钟. 第Ⅰ卷1至2页, 第Ⅱ卷3至5页.

答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,
并在规定位置粘贴考试用条形码. 答卷时, 考生务必将答案涂写在答题卡上,
答在试卷上的无效. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

祝各位考生考试顺利!

第Ⅰ卷

注意事项:

1. 每小题选出答案后, 用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号.
2. 本卷共8小题, 每小题5分, 共40分.

参考公式:

·如果事件A, B互斥, 那么
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
·棱柱的体积公式$V=Sh$，
其中S表示棱柱的底面面积,
h表示棱柱的高.
·如果事件A, B相互独立, 那么
$P(AB)=P(A)P(B)$
·球的体积公式$V=\frac{4}{3}\pi R^3$.
其中R表示球的半径.

一．选择题: 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1) 已知集合$A=\{x\in\boldsymbol{R}|\ |x|\le 2\}$, $A=\{x\in\boldsymbol{R}|\ x\le 1\}$, 则 $A\cap B=$

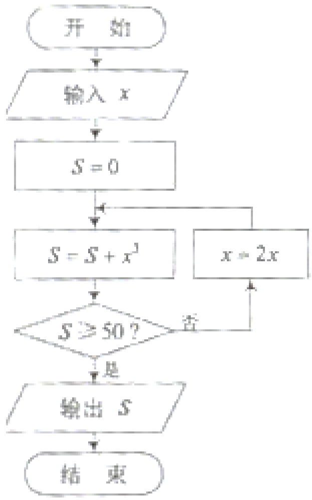
(A) $(-\infty,2]$　　(B) $[1,2]$　　(C) $[-2,2]$　　(D) $[-2,1]$

(2) 设变量x, y满足约束条件$\begin{cases}3x+y-6\ge 0,\\ x-y-2\le 0,\\ y-3\le 0,\end{cases}$ 则目标函数$z=y-2x$的最小值为

(A) -7　　(B) -4

(C) 1　　(D) 2

(3) 阅读右边的程序框图, 运行相应的程序, 若输入x的值为1, 则输出S的值为



(A) 64　　(B) 73

(C) 512　　(D) 585

(4) 已知下列三个命题:

①若一个球的半径缩小到原来的$\frac{1}{2}$, 则其体积缩小到原来的$\frac{1}{8}$;

②若两组数据的平均数相等, 则它们的标准差也相等;

③直线$x+y+1=0$与圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$相切.

其中真命题的序号是:

(A) ①②③　　(B) ①②

(C) ①③　　(D) ②③

(5)

已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线与抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线分别交于$A$, B两点, O为坐标原点. 若双曲线的离心率为2, $\triangle AOB$的面积为$\sqrt{3}$, 则$p=$

(A) 1　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 3

(6) 在$\triangle ABC$中, $\angle ABC=\frac{\pi}{4}, AB=\sqrt{2}, BC=3$, 则$\sin\angle BAC=$

(A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　(C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　(D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(7) 函数$f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$的零点个数为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(8) 已知函数$f(x)=x(1+a|x|)$. 设关于x的不等式$f(x+a)<f(x)$ 的解集为A, 若$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq A$, 则实数$a$的取值范围是

(A) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$　　(B) $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)$

(C) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$　　(D) $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

2013年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

理 科 数 学

第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.
2. 本卷共12小题, 共110分.

二．填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分.

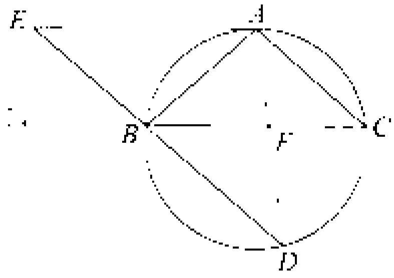
(9) 已知a, $b\in \boldsymbol{R}$, i是虚数单位. 若$(a+i)(1+i)=bi$, 则$a+bi=$ ___.

(10) $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为___.

(11) 已知圆的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$, 圆心为C, 点P的极坐标为$\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$, 则$|CP|=$ ___.

(12) 在平行四边形$ABCD$中, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$, E为CD的中点. 若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$, 则$AB$的长为___.

(13) 如图, $\triangle ABC$为圆的内接三角形, BD为圆的弦, 且$BD//AC$. 过点A做圆的切线与DB的延长线交于点E, AD与BC交于点F. 若$AB=AC$, $AE=6$, $BD=5$, 则线段CF的长为___.



(14) 设$a+b=2$, $b>0$, 则当$a=$ ___时, $\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$取得最小值.

三．解答题: 本大题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分13分)

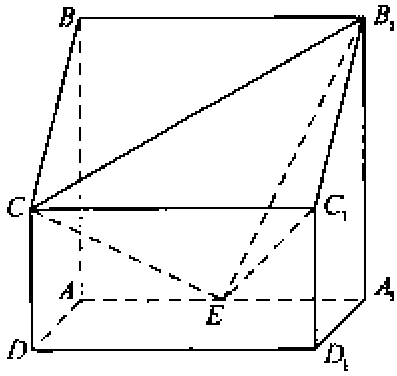
已知函数 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+6\sin x\cos x-2\cos^2 x+1, x\in \boldsymbol{R}$.

(I) 求$f(x)$的最小正周期;

(II) 求$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

(16) (本小题满分13分)
一个盒子里装有7张卡片, 其中有红色卡片4张, 编号分别为1, 2, 3, 4; 白色卡片3张, 编号分别为2, 3, 4. 从盒子中任取4张卡片 (假设取到任何一张卡片的可能性相同).
(I) 求取出的4张卡片中, 含有编号为3的卡片的概率.
(II) 再取出的4张卡片中, 红色卡片编号的最大值设为X, 求随机变量X的分布列和数学期望.

(17) (本小题满分13分)
如图, 四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中, 侧棱A_1A⊥底面$ABCD$, $AB//DC$, $AB⊥AD$, $AD = CD = 1$, $AA_1 = AB = 2$, E为棱AA_1的中点.



(I) 证明$B_1C_1⊥CE$;
(II) 求二面角B_1-CE-C_1的正弦值.
(III) 设点M在线段C_1E上, 且直线AM与平面ADD_1A_1所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段AM的长.

(18) (本小题满分13分)
设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$, 离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点$F$且与$x$轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
(I) 求椭圆的方程;
(II) 设A, B分别为椭圆的左右顶点, 过点F且斜率为k的直线与椭圆交于C, D两点. 若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$, 求$k$的值.

(19) (本小题满分14分)
已知首项为$\frac{3}{2}$的等比数列$\{a_n\}$不是递减数列, 其前n项和为$S_n(n\in \boldsymbol{N}^*)$, 且$S_3 + a_3$, $S_5 + a_5$, $S_4 + a_4$成等差数列.
(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;
(II) 设$T_n=S_n-\frac{1}{S_n}(n\in \boldsymbol{N}^*)$, 求数列$\{T_n\}$的最大项的值与最小项的值.

(20) (本小题满分14分)
已知函数$f(x)=x^2\ln x$.
(I) 求函数$f(x)$的单调区间;
(II) 证明: 对任意的$t>0$, 存在唯一的s, 使$t=f(s)$.
(III) 设(II)中所确定的s关于t的函数为$s=g(t)$, 证明: 当$t>e^2$时, 有

$$\frac{2}{5}<\frac{\ln g(t)}{\ln t}<\frac{1}{2}.$$