

2011 年高考理科数学试题（天津卷）

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2. 本卷共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

棱柱的体积公式 $V = Sh$.

其中 S 表示棱柱的底面面积

h 表示棱柱的高

圆锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$.

其中 S 表示圆锥的底面面积

h 表示圆锥的高

一、选择题：在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

1. i 是虚数单位，复数 $\frac{1-3i}{1-i} =$

A. $2+i$

B. $2-i$

C. $-1+2i$

D. $-1-2i$

2. 设 $x, y \in R$, 则 “ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \geq 4$ ” 的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 即不充分也不必要条件

3. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，则输出 i 的值为

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，其公差为 -2，且 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项， S_n 为

$\{a_n\}$ 的前 n 项和， $n \in N^*$ ，则 S_{10} 的值为

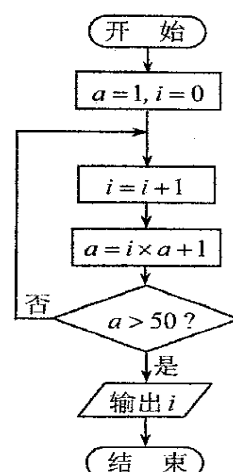
A. -110

B. -90

C. 90

D. 110

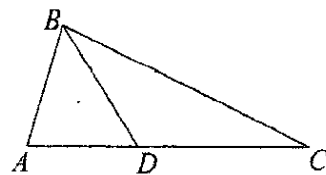
5. 在 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中， x^2 的系数为



- A. $-\frac{15}{4}$ B. $\frac{15}{4}$ C. $-\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{8}$

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, 且 $AB = CD, 2AB = \sqrt{3}BD, BC = 2BD$, 则 $\sin C$ 的值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$



7. 已知 $a = 5^{\log_2 3.4}, b = 5^{\log_4 3.6}, c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$, 则

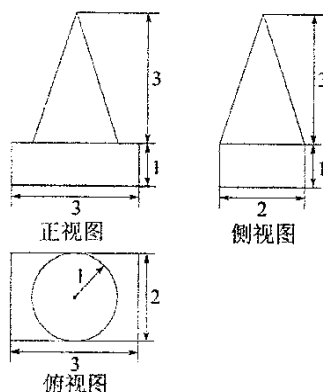
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

8. 对实数 a 和 b , 定义运算 “ \otimes ”: $a \otimes b = \begin{cases} a, & a - b \leq 1, \\ b, & a - b > 1. \end{cases}$ 设函数

$f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2), x \in R$. 若函数 $y = f(x) - c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ B. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$
C. $\left(-1, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

第 II 卷



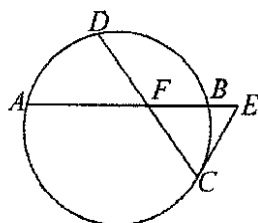
二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 一支田径队有男运动员 48 人, 女运动员 36 人, 若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本, 则抽取男运动员的

数为_____

10. 一个几何体的三视图如右图所示（单位： m ），则该几何体的体积为_____ m^3

11. 已知抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=8t^2, \\ y=8t. \end{cases}$ (t 为参数) 若斜率为 1 的



直线经过抛物线 C 的焦点，且与圆 $(x-4)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相切，

则 $r =$ _____.

12. 如图，已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F ， E 是 AB 延长线上一点，且 $DF = CF = \sqrt{2}$, $AF : FB : BE = 4 : 2 : 1$. 若 CE 与圆相切，则线段 CE 的长为_____.

13. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| + |x-4| \leq 9\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 4t + \frac{1}{t} - 6, t \in (0, +\infty)\right\}$, 则集合 $A \cap B =$ _____.

14. 已知直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2, BC = 1$, P 是腰 DC 上的动点，则 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$,

(I) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

(II) 设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 若 $f(\frac{\alpha}{2}) = 2 \cos 2\alpha$, 求 α 的大小.

16. (本小题满分 13 分)

学校游园活动有这样一个游戏项目：甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球，乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球，这些球除颜色外完全相同，每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球，若摸出的白球不少于 2 个，则获奖。（每次游戏结束后将球放回原箱）

(I) 求在 1 次游戏中，

(i) 摸出 3 个白球的概率；

(ii) 获奖的概率；

(II) 求在 2 次游戏中获奖次数 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

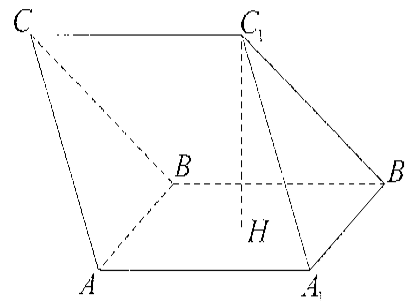
17. (本小题满分 13 分) 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，

H 是正方形 AA_1B_1B 的中心， $AA_1 = 2\sqrt{2}$ ， $C_1H \perp$ 平面 AA_1B_1B ， 且 $C_1H = \sqrt{5}$.

(I) 求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值；

(II) 求二面角 $A - A_1C_1 - B_1$ 的正弦值；

(III) 设 N 为棱 B_1C_1 的中点，点 M 在平面 AA_1B_1B 内，且 $MN \perp$ 平面 A_1B_1C ，求线段 BM 的长.



18. (本小题满分 13 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(a,b)$ ($a > b > 0$) 为动点， F_1, F_2

分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点. 已知 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形.

(I) 求椭圆的离心率 e ;

(II) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, M 是直线 PF_2 上的点, 满足 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$, 求点 M 的轨迹方程.

19. (本小题满分 14 分)

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - ax^2, x > 0$. ($f(x)$ 的图像连续不断)

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a = \frac{1}{8}$ 时, 证明: 存在 $x_0 \in (2, +\infty)$, 使 $f(x_0) = f(\frac{3}{2})$;

(III) 若存在均属于区间 $[1, 3]$ 的 α, β , 且 $\beta - \alpha \geq 1$, 使 $f(\alpha) = f(\beta)$, 证明

$$\frac{\ln 3 - \ln 2}{5} \leq a \leq \frac{\ln 2}{3}.$$

20. (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足: $b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0, b_n = \frac{3 + (-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}^*$, 且

$$a_1 = 2, a_2 = 4.$$

(I) 求 a_3, a_4, a_5 的值;

(II) 设 $c_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}, n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\{c_n\}$ 是等比数列;

(III) 设 $S_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, k \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} < \frac{7}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$.

2011 参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 40 分.

BABDCDCB

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 30 分.

9. 12 10. $6+\pi$ 11. $\sqrt{2}$ 12. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 13. $\{x|-2\leq x\leq 5\}$ 14. 5

三、解答题

15. 本小题主要考查两角和的正弦、余弦、正切公式，同角三角函数的基本关系，二倍角的正弦、余弦公式，正切函数的性质等基础知识，考查基本运算能力. 满分 13 分.

(I) 解：由 $2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

得 $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

(II) 解：由 $f(\frac{a}{2}) = 2\cos 2a$,

得 $\tan(a + \frac{\pi}{4}) = 2\cos 2a$,

$$\frac{\sin(a + \frac{\pi}{4})}{\cos(a + \frac{\pi}{4})} = 2(\cos^2 a - \sin^2 a),$$

整理得 $\frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a} = 2(\cos a + \sin a)(\cos a - \sin a)$.

因为 $a \in (0, \frac{\pi}{4})$, 所以 $\sin a + \cos a \neq 0$.

因此 $(\cos a - \sin a)^2 = \frac{1}{2}$, 即 $\sin 2a = \frac{1}{2}$.

由 $a \in (0, \frac{\pi}{4})$, 得 $2a \in (0, \frac{\pi}{2})$.

所以 $2a = \frac{\pi}{6}$, 即 $a = \frac{\pi}{12}$.

16. 本小题主要考查古典概型及其概率计算公式、离散型随机变量的分布列、互斥事件和相互独立事件等基础知识，考查运用概率知识解决简单的实际问题的能力. 满分 13 分.

(I) (i) 解：设“在 1 次游戏中摸出 i 个白球”为事件 $A_i = (i = 0, 1, 2, 3)$, 则

$$P(A_3) = \frac{C_3^2}{C_5^2} \cdot \frac{C_2^1}{C_3^2} = \frac{1}{5}.$$

(ii) 解：设“在 1 次游戏中获奖”为事件 B，则 $B = A_2 \cup A_3$ ，又

$$P(A_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_3^2} + \frac{C_2^1 C_2^1}{C_5^2} \cdot \frac{C_2^1}{C_3^2} = \frac{1}{2},$$

且 A_2, A_3 互斥，所以 $P(B) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$.

(II) 解：由题意可知 X 的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{7}{10}\right)^2 = \frac{9}{100},$$

$$P(X=1) = C_2^1 \frac{7}{10} \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{21}{50},$$

$$P(X=2) = \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}.$$

所以 X 的分布列是

X	0	1	2
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{49}{100}$

$$X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{9}{100} + 1 \times \frac{21}{50} + 2 \times \frac{49}{100} = \frac{7}{5}.$$

17. 本小题主要考查异面直线所成的角、直线与平面垂直、二面角等基础知识，考查用空间向量解决立体几何问题的方法，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力. 满分 13 分.

方法一：如图所示，建立空间直角坐标系，点 B 为坐标原点.

依题意得 $A(2\sqrt{2}, 0, 0), B(0, 0, 0), C(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5})$

$A_1(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), B_1(0, 2\sqrt{2}, 0), C_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5})$

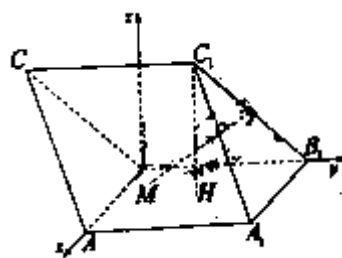
(I) 解：易得 $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}), \overrightarrow{A_1B_1} = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$,

$$\text{于是 } \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1B_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1B_1}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{A_1B_1}|} = \frac{4}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(II) 解：易知 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{A_1C_1} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

设平面 AA_1C_1 的法向量 $m = (x, y, z)$,



$$\text{则} \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{A_1 C_1} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{A A_1} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{5}z = 0, \\ 2\sqrt{2}y = 0. \end{cases}$$

不妨令 $x = \sqrt{5}$, 可得 $m = (\sqrt{5}, 0, \sqrt{2})$,

同样地, 设平面 $A_1 B_1 C_1$ 的法向量 $n = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{A_1 C_1} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{A_1 B_1} = 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{5}z = 0, \\ -2\sqrt{2}x = 0. \end{cases} \text{不妨令 } y = \sqrt{5},$$

可得 $n = (0, \sqrt{5}, \sqrt{2})$.

$$\text{于是 } \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|} = \frac{2}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{7},$$

$$\text{从而 } \sin \langle m, n \rangle = \frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

所以二面角 $A-A_1 C_1-B$ 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

(III) 解: 由 N 为棱 $B_1 C_1$ 的中点,

得 $N(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$. 设 $M(a, b, 0)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{MN} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - a, \frac{3\sqrt{2}}{2} - b, \frac{\sqrt{5}}{2})$$

$$\text{由 } MN \perp \text{平面 } A_1 B_1 C_1, \text{ 得 } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_1 B_1} = 0, \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1} = 0. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} (\frac{\sqrt{2}}{2} - a) \cdot (-2\sqrt{2}) = 0, \\ (\frac{\sqrt{2}}{2} - a) \cdot (-\sqrt{2}) + (\frac{3\sqrt{2}}{2} - b) \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ b = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \text{故 } M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0).$$

因此 $\overrightarrow{BM} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$, 所以线段 BM 的长为 $|\overrightarrow{BM}| = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

方法二：

(I) 解：由于 $AC \parallel A_1C_1$ ，故 $\angle C_1A_1B_1$ 是异面直线 AC 与 A_1B_1 所成的角。

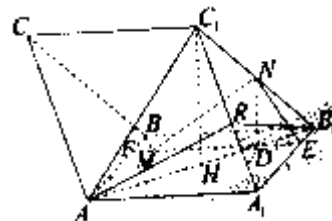
因为 $C_1H \perp$ 平面 AA_1B_1B ，又 H 为正方形 AA_1B_1B 的中心，

$$AA_1 = 2\sqrt{2}, C_1H = \sqrt{5},$$

可得 $A_1C_1 = B_1C_1 = 3$ 。

$$\text{因此 } \cos \angle C_1A_1B_1 = \frac{A_1C_1^2 + A_1B_1^2 - B_1C_1^2}{2A_1C_1 \cdot A_1B_1} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

所以异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 。



(II) 解：连接 AC_1 ，易知 $AC_1 = B_1C_1$ ，

又由于 $AA_1 = B_1A_1$ ， $A_1C_1 = A_1B_1$ ，

所以 $\triangle AC_1A_1 \cong \triangle B_1C_1A_1$ ，过点 A 作 $AR \perp A_1C_1$ 于点 R ，

连接 B_1R ，于是 $B_1R \perp A_1C_1$ ，故 $\angle ARB_1$ 为二面角 $A-A_1C_1-B_1$ 的平面角。

$$\text{在 } Rt\triangle A_1RB_1 \text{ 中, } B_1R = A_1B_1 \cdot \sin \angle RA_1B_1 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{14}}{3}.$$

连接 AB_1 ，在 $\triangle ARB_1$ 中，

$$AB_1 = 4, AR = B_1R, \cos \angle ARB_1 = \frac{AR^2 + B_1R^2 - AB_1^2}{2AR \cdot B_1R} = -\frac{2}{7},$$

$$\text{从而 } \sin \angle ARB_1 = \frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

所以二面角 $A-A_1C_1-B_1$ 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ 。

(III) 解：因为 $MN \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，所以 $MN \perp A_1B_1$ 。

取 HB_1 中点 D ，连接 ND ，由于 N 是棱 B_1C_1 中点，

$$\text{所以 } ND \parallel C_1H \text{ 且 } ND = \frac{1}{2}C_1H = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

又 $C_1H \perp$ 平面 AA_1B_1B ，

所以 $ND \perp$ 平面 AA_1B_1B ，故 $ND \perp A_1B_1$ 。

又 $MN \cap ND = N$,

所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 MND , 连接 MD 并延长交 A_1B_1 于点 E ,

则 $ME \perp A_1B_1$, 故 $ME \parallel AA_1$.

$$\text{由 } \frac{DE}{AA_1} = \frac{B_1E}{B_1A_1} = \frac{B_1D}{B_1A} = \frac{1}{4},$$

$$\text{得 } DE = B_1E = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 延长 } EM \text{ 交 } AB \text{ 于点 } F,$$

$$\text{可得 } BF = B_1E = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 连接 } NE.$$

在 $Rt\triangle ENM$ 中,

$$ND \perp ME, \text{ 故 } ND^2 = DE \cdot DM.$$

$$\text{所以 } DM = \frac{ND^2}{DE} = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{可得 } FM = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

连接 BM , 在 $Rt\triangle BFM$ 中,

$$BM = \sqrt{FM^2 + BF^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

18. 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、平面向量等基础知识, 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质及数形结合的数学思想, 考查解决问题能力与运算能力. 满分 13 分.

(I) 解: 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$

由题意, 可得 $|PF_2| = |F_1F_2|$,

$$\text{即 } \sqrt{(a-c)^2 + b^2} = 2c.$$

整理得 $2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$, 得 $\frac{c}{a} = -1$ (舍),

或 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$. 所以 $e = \frac{1}{2}$.

(II) 解: 由 (I) 知 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$,

可得椭圆方程为 $3x^2 + 4y^2 = 12c^2$,

直线 PF_2 方程为 $y = \sqrt{3}(x - c)$.

$$A, B \text{ 两点的坐标满足方程组 } \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12c^2, \\ y = \sqrt{3}(x - c). \end{cases}$$

消去 y 并整理, 得 $5x^2 - 8cx = 0$.

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{5}c.$$

$$\text{得方程组的解 } \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -\sqrt{3}c, \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{8}{5}c, \\ y_2 = \frac{3\sqrt{3}}{5}c. \end{cases}$$

$$\text{不妨设 } A(\frac{8}{5}c, \frac{3\sqrt{3}}{5}c), B(0, -\sqrt{3}c)$$

$$\text{设点 } M \text{ 的坐标为 } (x, y), \text{ 则 } \overrightarrow{AM} = (x - \frac{8}{5}c, y - \frac{3\sqrt{3}}{5}c), \overrightarrow{BM} = (x, y + \sqrt{3}c),$$

$$\text{由 } y = \sqrt{3}(x - c), \text{ 得 } c = x - \frac{\sqrt{3}}{3}y.$$

$$\text{于是 } \overrightarrow{AM} = (\frac{8\sqrt{3}}{15}y - \frac{3}{5}x, \frac{8}{5}y - \frac{3\sqrt{3}}{5}x),$$

$$\overrightarrow{BM} = (x, \sqrt{3}x). \text{ 由 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -2,$$

$$\text{即 } (\frac{8\sqrt{3}}{15}y - \frac{3}{5}x) \cdot x + (\frac{8}{5}y - \frac{3\sqrt{3}}{5}x) \cdot \sqrt{3}x = -2,$$

$$\text{化简得 } 18x^2 - 16\sqrt{3}xy - 15 = 0.$$

$$\text{将 } y = \frac{18x^2 - 15}{16\sqrt{3}x} \text{ 代入 } c = x - \frac{\sqrt{3}}{3}y, \text{ 得 } c = \frac{10x^2 + 5}{16x} > 0.$$

所以 $x > 0$.

$$\text{因此, 点 } M \text{ 的轨迹方程是 } 18x^2 - 16\sqrt{3}xy - 15 = 0 (x > 0).$$

19. 本小题主要考查导数的运算、利用导数研究函数的单调性、解不等式、函数的零点等基础知识, 考查运算能力和运用函数思想分析解决问题的能力及分类讨论的思想方法. 满分 14 分.

$$(I) \text{ 解: } f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{2}, x \in (0, +\infty),$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{2a}}{2a}$.

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$	$\frac{\sqrt{2a}}{2a}$	$(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> ↗ 极大值 ↘ </div>		

所以, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$.

(II) 证明: 当 $a = \frac{1}{8}$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{1}{8}x^2$.

由 (I) 知 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递增,

在 $(2, +\infty)$ 内单调递减.

令 $g(x) = f(x) - f(\frac{3}{2})$.

由于 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递增,

故 $f(2) > f(\frac{3}{2})$, 即 $g(2) > 0$.

取 $x' = \frac{3}{2}e > 2$, 则 $g(x') = \frac{41-9e^2}{32} < 0$.

所以存在 $x_0 \in (2, x')$, 使 $g(x_0) = 0$,

即存在 $x_0 \in (2, +\infty)$, 使 $f(x_0) = f(\frac{3}{2})$.

(说明: x' 的取法不唯一, 只要满足 $x' > 2$, 且 $g(x') < 0$ 即可)

(III) 证明: 由 $f(\alpha) = f(\beta)$ 及 (I) 的结论知 $\alpha < \frac{\sqrt{2a}}{2a} < \beta$,

从而 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的最小值为 $f(a)$.

又由 $\beta - \alpha \geq 1$, $\alpha, \beta \in [1, 3]$, 知 $1 \leq \alpha \leq 2 \leq \beta \leq 3$.

$$\text{故} \begin{cases} f(2) \geq f(\alpha) \geq f(1), \\ f(2) \geq f(\beta) \geq f(3). \end{cases} \text{即} \begin{cases} \ln 2 - 4a \geq -a, \\ \ln 2 - 4a \geq \ln 3 - 9a. \end{cases}$$

$$\text{从而} \frac{\ln 3 - \ln 2}{5} \leq a \leq \frac{\ln 2}{3}.$$

20. 本小题主要考查等比数列的定义、数列求和等基础知识, 考查运算能力、推理论证能力、综合分析和解决问题的能力及分类讨论的思想方法. 满分 14 分.

$$(I) \text{ 解: 由 } b_n = \frac{3 + (-1)^n}{2}, n \in N^*,$$

$$\text{可得 } b_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ 2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$\text{又 } b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0,$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 + a_2 + 2a_3 = 0, \text{ 由 } a_1 = 2, a_2 = 4, \text{ 可得 } a_3 = -3;$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } 2a_2 + a_3 + a_4 = 0, \text{ 可得 } a_4 = -5;$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } a_3 + a_4 + 2a_5 = 0, \text{ 可得 } a_5 = 4.$$

(II) 证明: 对任意 $n \in N^*$,

$$a_{2n-1} + a_{2n} + 2a_{2n+1} = 0, \quad \textcircled{1}$$

$$2a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = 0, \quad \textcircled{2}$$

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} + 2a_{2n+3} = 0, \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3}, \text{ 得 } a_{2n} = a_{2n+3}. \quad \textcircled{4}$$

$$\text{将 } \textcircled{4} \text{ 代入 } \textcircled{1}, \text{ 可得 } a_{2n+1} + a_{2n+3} = -(a_{2n-1} + a_{2n+1})$$

$$\text{即 } c_{n+1} = -c_n (n \in N^*)$$

$$\text{又 } c_1 = a_1 + a_3 = -1, \text{ 故 } c_n \neq 0,$$

$$\text{因此 } \frac{c_{n+1}}{c_n} = -1, \text{ 所以 } \{c_n\} \text{ 是等比数列.}$$

$$(III) \text{ 证明: 由 (II) 可得 } a_{2k-1} + a_{2k+1} = (-1)^k,$$

于是, 对任意 $k \in N^*$ 且 $k \geq 2$, 有

$$\begin{aligned}
a_1 + a_3 &= -1, \\
-(a_3 + a_5) &= -1, \\
a_5 + a_7 &= -1, \\
&\vdots \\
(-1)^k (a_{2k-3} + a_{2k-1}) &= -1.
\end{aligned}$$

将以上各式相加, 得 $a_1 + (-1)^k a_{2k-1} = -(k-1)$,

$$\text{即 } a_{2k-1} = (-1)^{k+1} (k+1),$$

此式当 $k=1$ 时也成立. 由④式得 $a_{2k} = (-1)^{k+1} (k+3)$.

$$\text{从而 } S_{2k} = (a_2 + a_4) + (a_6 + a_8) + \cdots + (a_{4k-2} + a_{4k}) = -k,$$

$$S_{2k-1} = S_{2k} - a_{4k} = k+3.$$

所以, 对任意 $n \in N^*, n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} &= \sum_{m=1}^n \left(\frac{S_{4m-3}}{a_{4m-3}} + \frac{S_{4m-2}}{a_{4m-2}} + \frac{S_{4m-1}}{a_{4m-1}} + \frac{S_{4m}}{a_{4m}} \right) \\
&= \sum_{m=1}^n \left(\frac{2m+2}{2m} - \frac{2m-1}{2m+2} - \frac{2m+3}{2m+1} + \frac{2m}{2m+3} \right) \\
&= \sum_{m=1}^n \left(\frac{2}{2m(2m+1)} + \frac{3}{(2m+2)(2m+3)} \right) \\
&= \frac{2}{2 \times 3} + \sum_{m=2}^n \frac{5}{2m(2m+1)} + \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} \\
&< \frac{1}{3} + \sum_{m=2}^n \frac{5}{(2m-1)(2m+1)} + \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{5}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] + \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} + \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} \\
&< \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

对于 $n=1$, 不等式显然成立.

所以, 对任意 $n \in N^*$,

$$\begin{aligned}
& \frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} + \cdots + \frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{a_{2n}} \\
&= \left(\frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} \right) + \left(\frac{S_3}{a_3} + \frac{S_4}{a_4} \right) + \cdots + \left(\frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{a_{2n}} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) + \left(1 - \frac{1}{4^2} - \frac{2}{4^2 - (4^2 - 1)} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{4^n} - \frac{n}{4^n - (4^n - 1)} \right) \\
&= n - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2(4^2 - 1)} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{4^n} + \frac{n}{4^n(4^n - 1)} \right) \\
&\leq n - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = n - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

选择填空解析

2011 年天津市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1. （5 分）（2011•天津）i 是虚数单位，复数 $\frac{1-3i}{1-i}$ = （ ）

A. 2+i B. 2-i C. -1+2i D. -1-2i

【考点】复数代数形式的乘除运算.

【专题】数系的扩充和复数.

【分析】要求两个复数的除法运算，分子和分母同乘以分母的共轭复数，分子和分母上进行复数的乘法运算，最后结果要化简成最简形式.

【解答】解：复数 $\frac{1-3i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$

故选 B.

【点评】本题考查复数的代数形式的乘除运算，是一个基础题，这种题目运算量不大，解题应用的原理也比较简单，是一个送分题目.

2. （5 分）（2011•天津）设 x, y ∈ R, 则“x ≥ 2 且 y ≥ 2”是“x² + y² ≥ 4”的 （ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断.

【专题】简易逻辑.

【分析】由“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”推出“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”可证明充分性；由满足“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”可举出反例推翻“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”，则证明不必要性，综合可得答案.

【解答】解：若 $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ，则 $x^2 \geq 4$ ， $y^2 \geq 4$ ，所以 $x^2 + y^2 \geq 8$ ，即 $x^2 + y^2 \geq 4$ ；

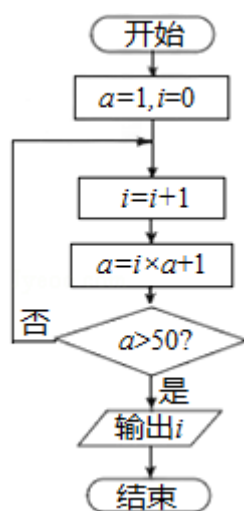
若 $x^2 + y^2 \geq 4$ ，则如 $(-2, -2)$ 满足条件，但不满足 $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$.

所以“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”是“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”的充分而不必要条件.

故选 A.

【点评】本题主要考查充分条件与必要条件的含义.

3. (5 分) (2011•天津) 阅读程序框图，运行相应的程序，则输出 i 的值为 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【考点】程序框图.

【专题】算法和程序框图.

【分析】通过程序框图的要求，写出前四次循环的结果得到输出的值.

【解答】解：该程序框图是循环结构

经第一次循环得到 $i=1$ ， $a=2$ ；

经第二次循环得到 $i=2$ ， $a=5$ ；

经第三次循环得到 $i=3$ ， $a=16$ ；

经第四次循环得到 $i=4$ ， $a=65$ 满足判断框的条件，执行是，输出 4

故选 B

【点评】本题考查解决程序框图中的循环结构时，常采用写出前几次循环结果，找规律.

4. (5 分) (2011•天津) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，其公差为 -2，且 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $n \in \mathbb{N}^*$ ，则 S_{10} 的值为 ()

- A. -110 B. -90 C. 90 D. 110

【考点】等差数列的前 n 项和；等比数列的性质.

【专题】等差数列与等比数列.

【分析】通过 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项，公差为 -2，求出

【解答】解： a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项，公差为 -2 ，所以 $a_7^2 = a_3 \cdot a_9$ ，

$\therefore \{a_n\}$ 公差为 -2 ，

$\therefore a_3 = a_7 - 4d = a_7 + 8$ ， $a_9 = a_7 + 2d = a_7 - 4$ ，

所以 $a_7^2 = (a_7 + 8)(a_7 - 4)$ ，所以 $a_7 = 8$ ，所以 $a_1 = 20$ ，

所以 $S_{10} = 10 \times 20 + \frac{10 \times 9}{2} \times (-2) = 110$

故选 D

【点评】本题是基础题，考查等差数列的前 n 项和，等比数列的应用，考查计算能力，常考题型.

5. (5 分) (2011•天津) 在 $(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}})^6$ 的二项展开式中， x^2 的系数为 ()

A. $-\frac{15}{4}$ B. $\frac{15}{4}$ C. $-\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{8}$

【考点】二项式定理.

【专题】二项式定理.

【分析】利用二项展开式的通项公式求出展开式的通项，令 x 的指数为 2，求出展开式中， x^2 的系数，即得答案.

【解答】解：展开式的通项为 $T_{r+1} = (-1)^r 2^{2r-6} C_6^r x^{3-r}$

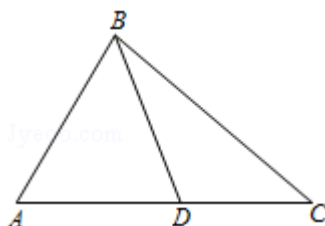
令 $3-r=2$ 得 $r=1$

所以项展开式中， x^2 的系数为 $-2^{-4} C_6^1 = -\frac{3}{8}$

故选 C

【点评】本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题.

6. (5 分) (2011•天津) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 AC 上的点，且 $AB=AD$ ， $2AB=\sqrt{3}$



BD， $BC=2BD$ ，则 $\sin C$ 的值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

【考点】三角形中的几何计算.

【专题】解三角形.

【分析】根据题中条件，在 $\triangle ABD$ 中先由余弦定理求出 $\cos A$ ，利用同角关系可求 $\sin A$ ，利用正弦定理可求 $\sin \angle BDC$ ，然后在 $\triangle BDC$ 中利用正弦定理求解 $\sin C$ 即可

【解答】解：设 $AB=x$ ，由题意可得 $AD=x$ ， $BD=\frac{2}{\sqrt{3}}x$ ， $BC=\frac{4}{\sqrt{3}}x$

$\triangle ABD$ 中，由余弦定理可得 $\cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{2x^2 - \frac{4x^2}{3}}{2x^2} = \frac{1}{3}$

$$\therefore \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理可得 } \frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin A} \Rightarrow \sin \angle ADB = \frac{AB}{BD} \sin \angle A = \frac{x}{\frac{2x}{\sqrt{3}}} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore \sin \angle BDC = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\triangle BDC \text{ 中, 由正弦定理可得 } \frac{BD}{\sin C} = \frac{BC}{\sin \angle BDC} \Rightarrow \sin C = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}x \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}x}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

故选：D.

【点评】 本题主要考查了在三角形中，综合运用正弦定理、余弦定理、同角基本关系式等知识解三角形的问题，反复运用正弦定理、余弦定理，要求考生熟练掌握基本知识，并能灵活选择基本工具解决问题.

7. (5分) (2011•天津) 已知 $a = 5^{\log_2 3.4}$, $b = 5^{\log_4 3.6}$, $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$, 则 ()

A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

【考点】 指数函数的单调性与特殊点.

【专题】 函数的性质及应用.

【分析】 比较大小的方法：找 1 或者 0 做中介判断大小， $\log_4 3.6 < 1$, $\log_2 3.4 > 1$, 利用分数

指数幂的运算法则和对数的运算法则对 c 进行化简，得到 $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3} = 5^{\log_3 \frac{10}{3}} = 5^{\log_3 \frac{10}{3}} > 1 > b$,

再借助于中间值 $\log_2 \frac{10}{3}$ 进行比较大小，从而得到结果.

【解答】 解： $\because \log_2 3.4 > 1$, $\log_4 3.6 < 1$,

又 $y = 5^x$ 是增函数，

$\therefore a > b$,

$$c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3} = 5^{\log_3 \frac{10}{3}} > 5^{\log_3 3} = 5^1 = 5^{\log_4 4} > 5^{\log_4 3.6} = b$$

而 $\log_2 3.4 > \log_2 \frac{10}{3} > \log_3 \frac{10}{3}$,

$\therefore a > c$

故 $a > c > b$.

故选 C.

【点评】 此题是个中档题. 本题考查对数函数单调性、指数函数的单调性及比较大小，以及中介值法，考查学生灵活应用知识分析解决问题的能力.

8. (5分) (2011•天津) 对实数 a 与 b , 定义新运算“ \otimes ”: $a \otimes b = \begin{cases} a, & a-b \leq 1 \\ b, & a-b > 1 \end{cases}$. 设函数 f

$(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. 若函数 $y = f(x) - c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2] \cup (-1, \frac{3}{2})$ B. $(-\infty, -2] \cup (-1, -\frac{3}{4})$
C. $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $(-1, -\frac{3}{4}) \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$

【考点】函数与方程的综合运用.

【专题】函数的性质及应用.

【分析】根据定义的运算法则化简函数 $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2)$ 的解析式, 并求出 $f(x)$ 的取值范围, 函数 $y = f(x) - c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点转化为 $y = f(x)$, $y = c$ 图象的交点问题, 结合图象求得实数 c 的取值范围.

【解答】解: $\because a \otimes b = \begin{cases} a, & a-b \leq 1 \\ b, & a-b > 1 \end{cases}$,

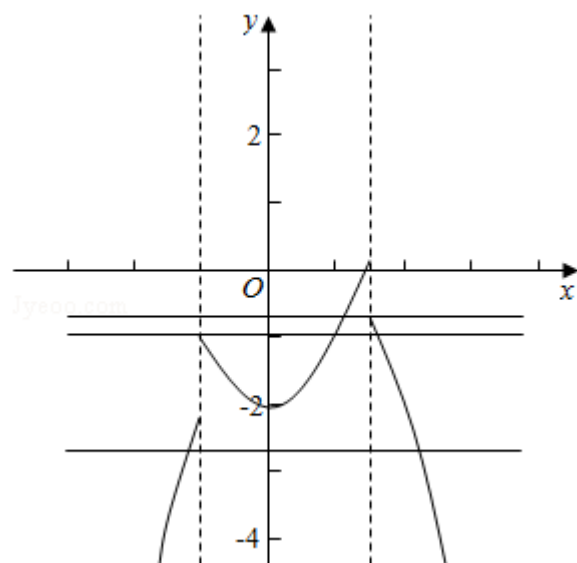
$$\therefore \text{函数 } f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2) = \begin{cases} x^2 - 2, & -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x - x^2, & x < -1 \text{ 或 } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

由图可知, 当 $c \in (-\infty, -2] \cup (-1, -\frac{3}{4})$

函数 $f(x)$ 与 $y = c$ 的图象有两个公共点,

$\therefore c$ 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup (-1, -\frac{3}{4})$,

故选 B.



【点评】本题考查二次函数的图象特征、函数与方程的综合运用, 及数形结合的思想. 属于基础题.

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9.（5 分）（2011•天津）一支田径队有男运动员 48 人，女运动员 36 人，若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本，则抽取男运动员的人数为 12 .

【考点】分层抽样方法.

【专题】概率与统计.

【分析】根据田径队的男女运动员数目和用分层抽样要抽取的数目，得到每个个体被抽到的概率，利用每个个体被抽到的概率乘以男运动员的数目，得到结果.

【解答】解：∵田径队有男运动员 48 人，女运动员 36 人，

∴这支田径队共有 $48+36=84$ 人，

用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本，

∴每个个体被抽到的概率是 $\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$,

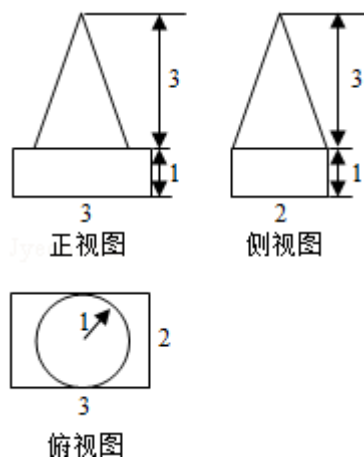
∴田径队有男运动员 48 人，

∴男运动员要抽取 $48 \times \frac{1}{4} = 12$ 人，

故答案为：12.

【点评】本题考查分层抽样，在抽样过程中每个个体被抽到的概率相等，这是解决这种问题的依据，本题是一个基础题.

10.（5 分）（2011•天津）一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则这个几何体的体积为 $6+\pi$ m^3 .



【考点】由三视图求面积、体积.

【专题】立体几何.

【分析】由已知中的三视图，我们易判断已知中几何体的形状，然后根据已知的三视图分析出几何体的相关几何量，代入体积公式，即可求出该几何体的体积.

【解答】解：由已知可得已知的几何体是一个圆锥和长方体的组合体

其中上部的圆锥的底面直径为 2，高为 3，

下部的长方体长、宽高分别为：2，3，1

$$\text{则 } V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3 = \pi$$

$$V_{\text{长方体}} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$\text{则 } V = 6 + \pi$$

故答案为： $6+\pi$

【点评】本题考查的知识是由三视图求体积，其中根据已知中的三视图分析几何体的形状是解答本题的关键.

11. (5分) (2011•天津) 已知抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=8t^2 \\ y=8t \end{cases}$ (t 为参数), 若斜率为 1 的

直线经过抛物线 C 的焦点, 且与圆 $(x-4)^2+y^2=r^2$ ($r>0$) 相切, 则 $r=\sqrt{2}$.

【考点】直线与圆的位置关系; 抛物线的简单性质; 直线的参数方程.

【专题】圆锥曲线的定义、性质与方程; 坐标系和参数方程.

【分析】由抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=8t^2 \\ y=8t \end{cases}$ 我们易求出抛物线的标准方程, 进而根据斜率

为 1 的直线经过抛物线 C 的焦点, 且与圆 $(x-4)^2+y^2=r^2$ ($r>0$) 相切, 我们根据直线与圆相切, 则圆心到直线的距离等于半径, 求出直线方程后, 代入点到直线距离公式, 构造关于 r 的方程, 解方程即可得到答案.

【解答】解: \because 抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=8t^2 \\ y=8t \end{cases}$

则抛物线的标准方程为: $y^2=8x$

则抛物线 C 的焦点的坐标为 (2, 0)

又 \because 斜率为 1 的直线经过抛物线 C 的焦点

则直线的方程为 $y=x-2$, 即 $x-y-2=0$

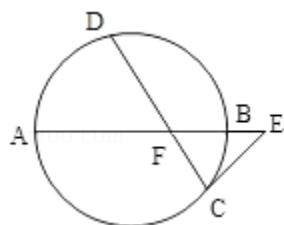
由直线与圆 $(x-4)^2+y^2=r^2$, 则

$$r=\frac{4-2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

故答案为: $\sqrt{2}$

【点评】本题考查的知识点是直线与圆的圆位置关系, 抛物线的简单性质及抛物线的参数方程, 其中根据直线与圆相切, 则圆心到直线的距离等于半径, 求出直线方程后, 代入点到直线距离公式, 构造关于 r 的方程, 是解答本题的关键.

12. (5分) (2011•天津) 如图, 已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F, E 是 AB 延长线上一点, 且 $DF=CF=\sqrt{2}$, $AF:FB:BE=4:2:1$. 若 CE 与圆相切, 则 CE 的长为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$.



【考点】圆的切线方程.

【专题】直线与圆.

【分析】设出 $AF=4k$, $BF=2k$, $BE=k$, 由 $DF \cdot FC=AF \cdot BF$ 求出 k 的值, 利用切割定理求出 CE.

【解答】解：设 $AF=4k$, $BF=2k$, $BE=k$, 由 $DF \cdot FC = AF \cdot BF$, 得 $2=8k^2$, 即 $k=\frac{1}{2}$,

$$\therefore AF=2, BF=1, BE=\frac{1}{2}, AE=\frac{7}{2},$$

$$\text{由切割定理得 } CE^2 = BE \cdot EA = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4},$$

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

【点评】本题是基础题，考查直线与圆的位置关系，考查计算能力，基本知识掌握的情况，常考题型.

13. (5分) (2011•天津) 已知集合 $A=\{x \in \mathbb{R} \mid |x+3|+|x-4| \leq 9\}$, $B=$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x=4t+\frac{1}{t}-6, t \in (0, +\infty)\}, \text{ 则集合 } A \cap B = \underline{\{x \mid -2 \leq x \leq 5\}}.$$

【考点】交集及其运算.

【专题】集合.

【分析】求出集合 A , 求出集合 B , 然后利用集合的运算法则求出 $A \cap B$.

【解答】解：集合 $A=\{x \in \mathbb{R} \mid |x+3|+|x-4| \leq 9\}$, 所以 $A=\{x \mid -4 \leq x \leq 5\}$;

$$\text{集合 } B = \{x \in \mathbb{R} \mid x=4t+\frac{1}{t}-6, t \in (0, +\infty)\},$$

$$4t+\frac{1}{t}-6 \geq 2\sqrt{4t \cdot \frac{1}{t}}-6=-2, t \in (0, +\infty),$$

$$\text{当且仅当 } t=\frac{1}{2} \text{ 时取等号, 所以 } B=\{x \mid x \geq -2\},$$

$$\text{所以 } A \cap B = \{x \mid -4 \leq x \leq 5\} \cap \{x \mid x \geq -2\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\},$$

故答案为: $\{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$.

【点评】本题是基础题，考查集合的基本运算，注意求出绝对值不等式的解集，基本不等式求出函数的值域，是本题解题是关键，考查计算能力.

14. (5分) (2011•天津) 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $AD=2$, $BC=1$, P

是腰 DC 上的动点, 则 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为 5.

【考点】向量的模.

【专题】平面向量及应用.

【分析】根据题意, 利用解析法求解, 以直线 DA , DC 分别为 x , y 轴建立平面直角坐标系,

则 $A(2, 0)$, $B(1, a)$, $C(0, a)$, $D(0, 0)$, 设 $P(0, b)$ ($0 \leq b \leq a$), 求出 $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}$, 根

据向量模的计算公式, 即可求得 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$, 利用完全平方非负, 即可求得其最小值.

【解答】解：如图, 以直线 DA , DC 分别为 x , y 轴建立平面直角坐标系,

则 $A(2, 0)$, $B(1, a)$, $C(0, a)$, $D(0, 0)$

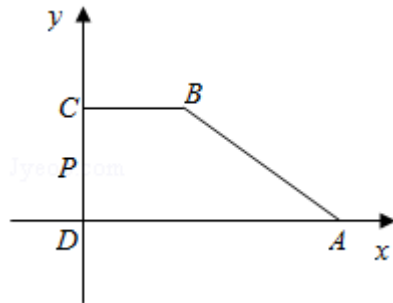
设 $P(0, b)$ ($0 \leq b \leq a$)

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} = (2, -b), \overrightarrow{PB} = (1, a-b),$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (5, 3a - 4b)$$

$$\therefore |\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}| = \sqrt{25 + (3a - 4b)^2} \geq 5.$$

故答案为 5.



【点评】此题是个基础题．考查向量在几何中的应用，以及向量模的求法，同时考查学生灵活应用知识分析解决问题的能力．