2008年四川省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）（2008•四川）已知全集U={1，2，3，4，5}，集合A={1，3}，B={3，4，5}，则集合C_U（A∩B）=（　　）

A．{3}　B．{4，5}　C．{3，4，5}　D．{1，2，4，5}

【考点】交、并、补集的混合运算．

【分析】根据交集的含义求A∩B、再根据补集的含义求解．

【解答】解：A={1，3}，B={3，4，5}⇒A∩B={3}；

所以C_U（A∩B）={1，2，4，5}，

故选D

【点评】本题考查集合的基本运算，较简单．

2．（5分）（2008•四川）复数$2i(1+i)^2$=（　　）

A．﹣4　B．4　C．﹣4i　D．4i

【考点】复数代数形式的混合运算．

【分析】先算$(1+i)^2$，再算乘2i，化简即可．

【解答】解：∵$2i(1+i)^2=2i(1+2i-1)=2i\times 2i=4i^2=-4$

故选A；

【点评】此题考查复数的运算，乘法公式，以及注意$i^2=-1$；是基础题．

3．（5分）（2008•四川）$(\tan x+\cot x)\cos^2x$=（　　）

A．tanx　B．sinx　C．cosx　D．cotx

【考点】同角三角函数基本关系的运用．

【分析】此题重点考查各三角函数的关系，切化弦，约分整理，凑出同一角的正弦和余弦的平方和，再约分化简．

【解答】解：

$$\because (\tan x+\cot x)\cos^2x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cos^2x=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}\cdot\cos^2x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

故选D；

【点评】将不同的角化为同角；将不同名的函数化为同名函数，以减少函数的种类；当式中有正切、余切、正割、余割时，通常把式子化成含有正弦与余弦的式子，即所谓“切割化弦”．

4．（5分）（2008•四川）直线y=3x绕原点逆时针旋转90°，再向右平移1个单位，所得到的直线为（　　）

A．$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$　B．$y=-\frac{1}{3}x+1$　C．$y=3x-3$　D．$y=\frac{1}{3}x+1$

【考点】两条直线垂直与倾斜角、斜率的关系．

【分析】先利用两直线垂直写出第一次方程，再由平移写出第二次方程．

【解答】解：∵直线 y=3x 绕原点逆时针旋转 90°

∴两直线互相垂直

则该直线为 $y=-\frac{1}{3}x$，

那么将 $y=-\frac{1}{3}x$ 向右平移 1 个单位得 $y=-\frac{1}{3}(x-1)$，即 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

故选 A．

【点评】本题主要考查互相垂直的直线关系，同时考查直线平移问题．

5．（5 分）（2008•四川）若 0≤α≤2π，sinα＞$\sqrt{3}$cosα，则 α 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$　B．$(\frac{\pi}{3},\pi)$　C．$(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$　D．$(\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2})$

【考点】正切函数的单调性；三角函数线．

【专题】计算题．

【分析】通过对 sinα＞$\sqrt{3}$cosα 等价变形，利用辅助角公式化为正弦，利用正弦函数的性质即可得到答案．

【解答】解：∵0≤α≤2π，sinα＞$\sqrt{3}$cosα，

∴sinα－$\sqrt{3}$cosα=2sin$(\alpha-\frac{\pi}{3})$＞0，

∵0≤α≤2π，

∴$-\frac{\pi}{3}\le\alpha-\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{3}$，

∵2sin$(\alpha-\frac{\pi}{3})$＞0，

∴$0<\alpha-\frac{\pi}{3}<\pi$，

∴$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{4\pi}{3}$．

故选 C．

【点评】本题考查辅助角公式的应用，考查正弦函数的性质，将 sinα＞$\sqrt{3}$cosα 等价变形是难点，也是易错点，属于中档题．

6．（5 分）（2008•四川）从甲、乙等 10 个同学中挑选 4 名参加某项公益活动，要求甲、乙中至少有 1 人参加，则不同的挑选方法共有（　　）

A．70 种B．112 种　C．140 种　D．168 种

【考点】组合及组合数公式．

【专题】计算题．

【分析】根据题意，分析可得，甲、乙中至少有 1 人参加的情况数目等于从 10 个同学中挑选 4 名参加公益活动挑选方法数减去从甲、乙之外的 8 个同学中挑选 4 名参加公益活动的挑选方法数，分别求出其情况数目，计算可得答案．

【解答】解：∵从 10 个同学中挑选 4 名参加某项公益活动有 C_{10}^4 种不同挑选方法；

从甲、乙之外的 8 个同学中挑选 4 名参加某项公益活动有 C_8^4 种不同挑选方法；

∴甲、乙中至少有 1 人参加，则不同的挑选方法共有 $C_{10}^4-C_8^4=210-70=140$ 种不同挑选方法，

故选 C.

【点评】此题重点考查组合的意义和组合数公式，本题中，要注意找准切入点，从反面下手，方法较简单.

7.（5 分）（2008•四川）已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，则其前 3 项的和 S_3 的取值范围是（　　）

A.（﹣∞，﹣1]　B.（﹣∞，0）∪（1，+∞）　C. [3，+∞） D.（﹣∞，﹣1]∪[3，+∞）

【考点】等比数列的前 n 项和.

【分析】首先由等比数列的通项入手表示出 S_3（即 q 的代数式），然后根据 q 的正负性进行分类，最后利用均值不等式求出 S_3 的范围.

【解答】解：∵等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$

$$\therefore S_3=a_1+a_2+a_3=a_2\left(1+q+\frac{1}{q}\right)=1+q+\frac{1}{q}$$

∴当公比 q>0 时，$S_3=1+q+\frac{1}{q}\geqslant 1+2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}=3$；

当公比 q<0 时，$S_3=1-\left(-q-\frac{1}{q}\right)\leqslant 1-2\sqrt{-q\cdot\left(-\frac{1}{q}\right)}=-1$.

∴S_3∈（﹣∞，﹣1]∪[3，+∞）.

故选 D.

【点评】本题考查等比数列前 n 项和的意义、等比数列的通项公式及均值不等式的应用.

8.（5 分）（2008•四川）设 M，N 是球心 O 的半径 OP 上的两点，且 NP=MN=OM，分别过 N，M，O 作垂线于 OP 的面截球得三个圆，则这三个圆的面积之比为：（　　）

A. 3，5，6　B. 3，6，8　C. 5，7，9　D. 5，8，9

【考点】球面距离及相关计算.

【专题】计算题.

【分析】先求截面圆的半径，然后求出三个圆的面积的比.

【解答】解：设分别过 N，M，O 作垂线于 OP 的面截球得三个圆的半径为 r_1，r_2，r_3，球半径为 R，则：

$$r_1^2=R^2-\left(\frac{2}{3}R\right)^2=\frac{5}{9}R^2,\quad r_2^2=R^2-\left(\frac{1}{3}R\right)^2=\frac{8}{9}R^2,\quad r_3^2=R^2-\left(\frac{2}{3}R\right)^2=R^2$$

∴r_1^2：r_2^2：r_3^2=5：8：9∴这三个圆的面积之比为：5，8，9

故选 D

【点评】此题重点考查球中截面圆半径，球半径之间的关系；考查空间想象能力，利用勾股定理的计算能力.

9.（5 分）（2008•四川）设直线 l⊂平面 α，过平面 α 外一点 A 与 l，α 都成 30°角的直线有且只有（　　）

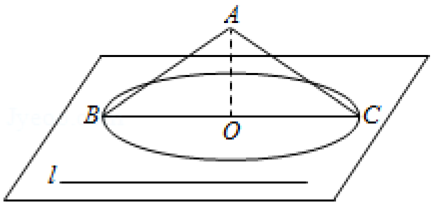
A. 1 条　B. 2 条　C. 3 条　D. 4 条

【考点】空间中直线与平面之间的位置关系.

【分析】利用圆锥的母线与底面所成的交角不变画图，即可得到结果.

【解答】解：如图，和 α 成 30^0 角的直线一定是以 A 为顶点的圆锥的母线所在直线，当∠ABC=∠ACB=30°，直线 AC，AB 都满足条件

故选 B.



【点评】此题重点考查线线角，线面角的关系，以及空间想象能力，图形的对称性；数形结合，重视空间想象能力和图形的对称性；

10．（5 分）（2008•四川）设 f（x）=sin（ωx+φ），其中 ω＞0，则 f（x）是偶函数的充要条件是（　　）

A．f（0）=1 B．f（0）=0 C．f′（0）=1 D．f′（0）=0

【考点】函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】计算题．

【分析】当 f（x）=sin（ωx+φ）是偶函数时，f（0）一定是函数的最值，从而得到 x=0 必是 f（x）的极值点，即 f′（0）=0，因而得到答案．

【解答】解：∵f（x）=sin（ωx+φ）是偶函数

∴由函数 f（x）=sin（ωx+φ）图象特征可知 x=0 必是 f（x）的极值点，

∴f′（0）=0

故选 D

【点评】此题重点考查正弦型函数的图象特征，函数的奇偶性，函数的极值点与函数导数的关系．

11．（5 分）（2008•四川）设定义在 R 上的函数 f（x）满足 f（x）•f（x+2）=13，若 f（1）=2，则 f（99）=（　　）

A．13　B．2　C．$\frac{13}{2}$　D．$\frac{2}{13}$

【考点】函数的值．

【专题】压轴题．

【分析】根据 f（1）=2，f（x）•f（x+2）=13 先求出 f（3）=$\frac{13}{2}$，再由 f（3）求出 f（5），依次求出 f（7）、f（9）观察规律可求出 f（x）的解析式，最终得到答案．

【解答】解：∵f（x）•f（x+2）=13 且 f（1）=2

$\therefore f(3)=\frac{13}{f(1)}=\frac{13}{2}$，$f(5)=\frac{13}{f(3)}=2$，$f(7)=\frac{13}{f(5)}=\frac{13}{2}$，

$f(9)=\frac{13}{f(7)}=2$，

$\therefore f(2n-1)=\begin{cases}2 & n\text{为奇数}\\ \frac{13}{2} & n\text{为偶数}\end{cases}$，

$\therefore f(99)=f(2\times 100-1)=\frac{13}{2}$

故选 C．

【点评】此题重点考查递推关系下的函数求值；此类题的解决方法一般是求出函数解析式后代值，或者得到函数的周期性求解．

12．（5 分）（2008•四川）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线与 x 轴的交点为 K，点 A 在 C 上且 $|AK|=\sqrt{2}|AF|$，则△AFK 的面积为（　　）

A．4　B．8　C．16　D．32

【考点】抛物线的简单性质．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】根据抛物线的方程可知焦点坐标和准线方程，进而可求得 K 的坐标，设 A（x_0，y_0），过 A 点向准线作垂线 AB，则 B（﹣2，y_0），根据 $|AK|=\sqrt{2}|AF|$ 及 $AF=AB=x_0-(-2)=x_0+2$，进而可求得 A 点坐标，进而求得△AFK 的面积．

【解答】解：∵抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F（2，0），准线为 $x=-2$

∴K（﹣2，0）

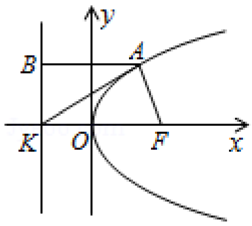
设 A（x_0，y_0），过 A 点向准线作垂线 AB，则 B（﹣2，y_0）

∵$|AK|=\sqrt{2}|AF|$，又 $AF=AB=x_0-(-2)=x_0+2$

∴由 $BK^2=AK^2-AB^2$ 得 $y_0^2=(x_0+2)^2$，即 $8x_0=(x_0+2)^2$，解得 A（2，±4）

∴△AFK 的面积为$\frac{1}{2}|KF|\cdot|y_0|=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

故选 B．



【点评】本题抛物线的性质，由题意准确画出图象，利用离心率转化位置，在△ABK 中集中条件求出 x_0 是关键；

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）（2008•四川）$(1+2x)^3(1-x)^4$ 展开式中 x^2 的系数为__﹣6__．

【考点】二项式定理．

【专题】计算题．

【分析】利用乘法原理找展开式中的含 x^2 项的系数，注意两个展开式的结合分析，即分别为第一个展开式的常数项和第二个展开式的 x^2 的乘积、第一个展开式的含 x 项和第二个展开式的 x 项的乘积、第一个展开式的 x^2 的项和第二个展开式的常数项的乘积之和从而求出答案．

【解答】解：∵$(1+2x)^3(1-x)^4$ 展开式中 x^2 项为

$C_3^01^3(2x)^0\bullet C_4^21^2(-x)^2+C_3^11^2(2x)^1\bullet C_4^11^3(-x)^1+C_3^21^2(2x)^2\bullet C_4^01^4(-x)^0$

∴所求系数为 $C_3^0\bullet C_4^2+C_3^1\bullet2\bullet C_4^1(-1)+C_3^2\bullet2^2\bullet C_4^01^4=6-24+12=-6$．

故答案为：﹣6．

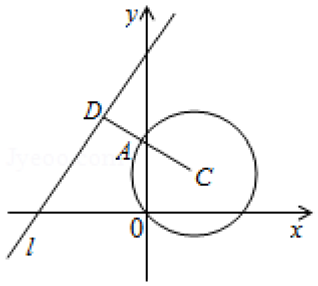
【点评】此题重点考查二项展开式中指定项的系数，以及组合思想，重在找寻这些项的来源．

14．（4 分）（2008•四川）已知直线 l：$x-y+4=0$ 与圆 C：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，则 C 上各点到 l 的距离的最小值为__$\sqrt{2}$__．

【考点】直线与圆的位置关系；点到直线的距离公式．

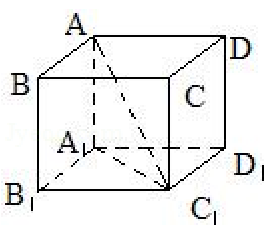
【专题】数形结合．

【分析】如图过点 C 作出 CD 与直线 l 垂直，垂足为 D，与圆 C 交于点 A，则 AD 为所求；求 AD 的方法是：由圆的方程找出圆心坐标与圆的半径，然后利用点到直线的距离公式求出圆心到直线 l 的距离 d，利用 d 减去圆的半径 r 即为圆上的点到直线 l 的距离的最小值．
【解答】解：如图可知：过圆心作直线 l：$x-y+4=0$ 的垂线，则 AD 长即为所求；
∵圆 C：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 的圆心为 C（1，1），半径为$\sqrt{2}$，
点 C 到直线 l：$x-y+4=0$ 的距离为 $d=\frac{|1-1+4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，
∴$AD=CD-AC=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，
故 C 上各点到 l 的距离的最小值为$\sqrt{2}$．
故答案为：$\sqrt{2}$



【点评】此题重点考查圆的标准方程和点到直线的距离．本题的突破点是数形结合，使用点 C 到直线 l 的距离距离公式．

15．（4 分）（2008•四川）已知正四棱柱的对角线的长为$\sqrt{6}$，且对角线与底面所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，则该正四棱柱的体积等于__2__．
【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积．
【专题】计算题；作图题；压轴题．
【分析】由题意画出图形，求出高，底面边长，然后求出该正四棱柱的体积．
【解答】解：：如图可知：∵$AC_1=\sqrt{6}$，$\cos\angle AC_1A_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$



∴$A_1C_1=\sqrt{2}$，$AA_1=2$∴正四棱柱的体积等于$A_1B_1{}^2\cdot AA_1=2$
故答案为：2
【点评】此题重点考查线面角，解直角三角形，以及求正四面题的体积；考查数形结合，重视在立体几何中解直角三角形，熟记有关公式．

16．（4 分）（2008•四川）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_4\geq10$，$S_5\leq15$，则 a_4 的最大值为__4__．
【考点】等差数列的前 n 项和；等差数列．
【专题】压轴题．

【分析】利用等差数列的前 n 项和公式变形为不等式，再利用消元思想确定 d 或 a_1 的范围，a_4 用 d 或 a_1 表示，再用不等式的性质求得其范围.

【解答】解：∵等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_4\geq 10$，$S_5\leq 15$，

$$\therefore \begin{cases} S_4=4a_1+\frac{4\times 3}{2}d\geqslant 10 \\ S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}d\leqslant 15 \end{cases},$$

$$即\begin{cases} 2a_1+3d\geqslant 5 \\ a_1+2d\leqslant 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_4=a_1+3d\geqslant \frac{5-3d}{2}+3d=\frac{5+3d}{2} \\ a_4=a_1+3d=(a_1+2d)+d\leqslant 3+d \end{cases}$$

$\therefore \frac{5+3d}{2}\leqslant a_4\leqslant 3+d$，$5+3d\leq 6+2d$，$d\leq 1$

$\therefore a_4\leq 3+d\leq 3+1=4$ 故 a_4 的最大值为 4，

故答案为：4.

【点评】此题重点考查等差数列的通项公式，前 n 项和公式，以及不等式的变形求范围；

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）（2008•四川）求函数 $y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2x-4\cos^4x$ 的最大值与最小值.

【考点】三角函数的最值.

【专题】计算题.

【分析】利用二倍角的正弦函数公式及同角三角函数间的基本关系化简 y 的解析式后，再利用配方法把 y 变为完全平方式即 $y=(1-\sin 2x)^2+6$，可设 $z=(u-1)^2+6$，$u=\sin 2x$，因为 $\sin 2x$ 的范围为$[-1，1]$，根据 u 属于$[-1，1]$时，二次函数为递减函数，利用二次函数求最值的方法求出 z 的最值即可得到 y 的最大和最小值.

【解答】解：$y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2x-4\cos^4x=7-2\sin 2x+4\cos^2x(1-\cos^2x)$

$=7-2\sin 2x+4\cos^2x\sin^2x=7-2\sin 2x+\sin^2 2x=(1-\sin 2x)^2+6$

由于函数 $z=(u-1)^2+6$ 在$[-1，1]$中的最大值为 $z_{max}=(-1-1)^2+6=10$

最小值为 $z_{min}=(1-1)^2+6=6$

故当 $\sin 2x=-1$ 时 y 取得最大值 10，当 $\sin 2x=1$ 时 y 取得最小值 6

【点评】此题重点考查三角函数基本公式的变形，配方法，符合函数的值域及最值；本题的突破点是利用倍角公式降幂，利用配方变为复合函数，重视复合函数中间变量的范围是关键.

18．（12 分）（2008•四川）设进入某商场的每一位顾客购买甲种商品的概率为 0.5，购买乙种商品的概率为 0.6，且购买甲种商品与购买乙种商品相互独立，各顾客之间购买商品也是相互独立的.

（Ⅰ）求进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种的概率；

（Ⅱ）求进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种的概率；

（Ⅲ）记 ξ 表示进入商场的 3 位顾客中至少购买甲、乙两种商品中的一种的人数，求 ξ 的分布列及期望.

【考点】相互独立事件的概率乘法公式；离散型随机变量及其分布列；离散型随机变量的期望与方差.

【专题】计算题.

【分析】（1）进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种，包括两种情况：即进入商场的 1 位顾客购买甲种商品不购买乙种商品，进入商场的 1 位顾客购买乙种商品不购买甲种商品，分析后代入相互独立事件的概率乘法公式即可得到结论.

（2）进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种的对立事件为，该顾客即不习甲商品也不购买乙商品，我们可以利用对立事件概率减法公式求解.

（3）由（1）、（2）的结论，我们列出 ξ 的分布列，计算后代入期望公式即可得到数学期望.

【解答】解：记 A 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买甲种商品，

记 B 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买乙种商品，

记 C 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种，

记 D 表示事件：进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种，

（Ⅰ）$C=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$

$P(C)=P(A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B)$

$=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)$

$=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(A)\cdot P(\overline{B})$

$=0.5\times0.4+0.5\times0.6=0.5$

（Ⅱ）$\overline{D}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

$P(\overline{D})=P(\overline{A}\cdot\overline{B})$

$=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$

$=0.5\times0.4$

$=0.2$

$\therefore P(D)=1-P(\overline{D})=0.8$

（Ⅲ）$\xi\sim B(3,\ 0.8)$，

故 ξ 的分布列 $P(\xi=0)=0.2^3=0.008$

$P(\xi=1)=C_3^1\times0.8\times0.2^2=0.096$

$P(\xi=2)=C_3^2\times0.8^2\times0.2=0.384$

$P(\xi=3)=0.8^3=0.512$

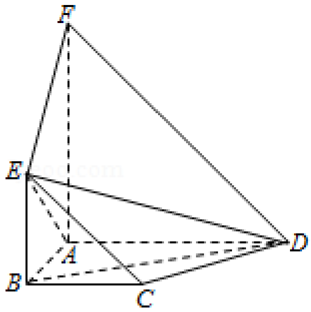
所以 $E\xi=3\times0.8=2.4$

【点评】此题重点考查相互独立事件的概率计算，以及求随机变量的概率分布列和数学期望；突破口：分清相互独立事件的概率求法，对于“至少”常从反面入手常可起到简化的作用；

19.（12 分）（2008•四川）如，平面 ABEF⊥平面 ABCD，四边形 ABEF 与 ABCD 都是直角梯形，∠BAD=∠FAB=90°，$BC\overset{\parallel}{=}\frac{1}{2}AD$，$BE\overset{\parallel}{=}\frac{1}{2}AF$

（Ⅰ）证明：C，D，F，E 四点共面；

（Ⅱ）设 AB=BC=BE，求二面角 A﹣ED﹣B 的大小.



【考点】与二面角有关的立体几何综合题；棱锥的结构特征．

【专题】计算题；证明题．

【分析】（Ⅰ）延长 DC 交 AB 的延长线于点 G，延长 FE 交 AB 的延长线于 G′，根据比例关系可证得 G 与 G′重合，准确推理，得到直线 CD、EF 相交于点 G，即 C，D，F，E 四点共面．

（Ⅱ）取 AE 中点 M，作 MN⊥DE，垂足为 N，连接 BN，由三垂线定理知 BN⊥ED，根据二面角平面角的定义可知∠BMN 为二面角 A﹣ED﹣B 的平面角，在三角形 BMN 中求出此角即可．

【解答】解：（Ⅰ）延长 DC 交 AB 的延长线于点 G，由 $BC\underline{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AD$得$\frac{GB}{GA}=\frac{GC}{GD}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$

延长 FE 交 AB 的延长线于 G′

同理可得$\frac{G'E}{G'F}=\frac{G'B}{G'A}=\frac{BE}{AF}=\frac{1}{2}$

故$\frac{G'B}{G'A}=\frac{GB}{GA}$，即 G 与 G′重合

因此直线 CD、EF 相交于点 G，即 C，D，F，E 四点共面．

（Ⅱ）设 AB=1，则 BC=BE=1，AD=2

取 AE 中点 M，则 BM⊥AE，又由已知得，AD⊥平面 ABEF

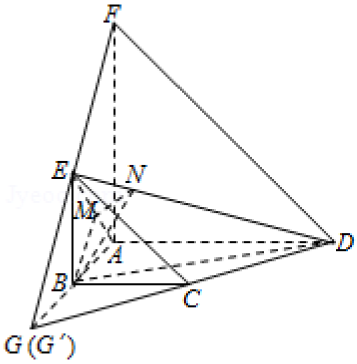
故 AD⊥BM，BM 与平面 ADE 内两相交直线 AD、AE 都垂直．

所以 BM⊥平面 ADE，作 MN⊥DE，垂足为 N，连接 BN

由三垂线定理知 BN⊥ED，∠BMN 为二面角 A﹣ED﹣B 的平面角．$BM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{AD\times AE}{DE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

故$\tan\angle BMN=\frac{BM}{MN}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

所以二面角 A﹣ED﹣B 的大小$\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}$



【点评】此题重点考查立体几何中四点共面问题和求二面角的问题，考查空间想象能力，几何逻辑推理能力，以及计算能力；突破：熟悉几何公理化体系，准确推理，注意书写格式是顺利进行求解的关键．

20．（12 分）（2008•四川）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $ba_n-2^n=(b-1)S_n$

（Ⅰ）证明：当 b=2 时，$\{a_n-n\bullet 2^{n-1}\}$是等比数列；

（Ⅱ）求$\{a_n\}$的通项公式．

【考点】数列的应用．

【专题】计算题；证明题．

【分析】（Ⅰ）当 b=2 时，由题设条件知 $a_{n+1}=2a_n+2^n$. 由此可知 $a_{n+1}-(n+1)\bullet 2^n=2a_n+2^n-(n+1)\bullet 2^n=2(a_n-n\bullet 2^{n-1})$，所以$\{a_n-n\bullet 2^{n-1}\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列．

（Ⅱ）当 b=2 时，由题设条件知 $a_n=(n+1)2^{n-1}$；当 b≠2 时，由题意得 $a_{n+1}-\frac{1}{2-b}\bullet 2^{n+1}=ba_n+2^n-\frac{1}{2-b}\bullet 2^{n+1}=b(a_n-\frac{1}{2-b}\bullet 2^n)$，由此能够导出$\{a_n\}$的通项公式．

【解答】解：（Ⅰ）当 b=2 时，由题意知 $2a_1-2=a_1$，解得 $a_1=2$，

且 $ba_n-2^n=(b-1)S_n$

$ba_{n+1}-2^{n+1}=(b-1)S_{n+1}$

两式相减得 $b(a_{n+1}-a_n)-2^n=(b-1)a_{n+1}$

即 $a_{n+1}=ba_n+2^n$①

当 b=2 时，由①知 $a_{n+1}=2a_n+2^n$

于是 $a_{n+1}-(n+1)\bullet 2^n=2a_n+2^n-(n+1)\bullet 2^n=2(a_n-n\bullet 2^{n-1})$

又 $a_1-1\bullet 2^0=1\neq 0$，所以$\{a_n-n\bullet 2^{n-1}\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列．

（Ⅱ）当 b=2 时，由（Ⅰ）知 $a_n-n\bullet 2^{n-1}=2^{n-1}$，

即 $a_n=(n+1)2^{n-1}$

当 b≠2 时，由①得 $a_{n+1}-\frac{1}{2-b}\bullet 2^{n+1}=ba_n+2^n-\frac{1}{2-b}\bullet 2^{n+1}$

$=ba_n-\frac{b}{2-b}\bullet 2^n=b(a_n-\frac{1}{2-b}\bullet 2^n)$

因此 $a_{n+1}-\frac{1}{2-b}\bullet 2^{n+1}=b(a_n-\frac{1}{2-b}\bullet 2^n)=\frac{2(1-b)}{2-b}\bullet b^n$

即 $a_{n+1}=\frac{1}{2-b}\bullet 2^{n+1}+\frac{2(1-b)}{2-b}\bullet b^n$

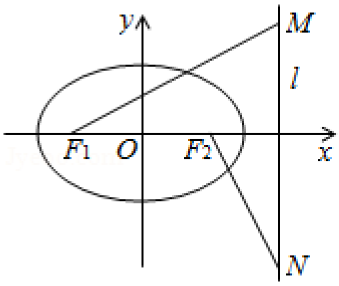
所以 $a_n=\frac{1}{2-b}\bullet 2^n+\frac{2(1-b)}{2-b}\bullet b^{n-1}$.

【点评】此题重点考查数列的递推公式，利用递推公式求数列的通项公式，同时考查分类讨论思想；推移脚标两式相减是解决含有 S_n 的递推公式的重要手段，使其转化为不含 S_n 的递推公式，从而针对性的解决；在由递推公式求通项公式是重视首项是否可以吸收是易错点，同时重视分类讨论，做到条理清晰是关键．

21．（12 分）（2008•四川）设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，（{a＞b＞0}）的左右焦点分别为 F_1，F_2，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线为 l，M，N 是 l 上的两个动点，$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$

（Ⅰ）若 $|\overrightarrow{F_1M}|=|\overrightarrow{F_2N}|=2\sqrt{5}$，求 a，b 的值；

（Ⅱ）证明：当|MN|取最小值时，$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$与$\overrightarrow{F_1F_2}$共线．



【考点】椭圆的应用．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】（Ⅰ）设 $M(\sqrt{2}a,\ y_1)$，$N(\sqrt{2}a,\ y_2)$，根据题意由$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$得 $y_1y_2=-\frac{3}{2}a^2<0$，由 $|\overrightarrow{F_1M}|=|\overrightarrow{F_2N}|=2\sqrt{5}$，得$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2+y_1^2}=2\sqrt{5}$，$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+y_2^2}=2\sqrt{5}$，由此可以求出 a，b 的值．

（Ⅱ）$|MN|^2=(y_1-y_2)^2=y_1^2+y_2^2-2y_1y_2\geq-2y_1y_2-2y_1y_2=-4y_1y_2=6a^2$．当且仅当 $y_1=-y_2=\frac{\sqrt{6}}{2}a$或$y_2=-y_1=\frac{\sqrt{6}}{2}a$时，|MN|取最小值$\frac{\sqrt{6}}{2}a$，由能够推导出$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$与$\overrightarrow{F_1F_2}$共线．

【解答】解：由 $a^2-b^2=c^2$ 与 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $a^2=2b^2$，

$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0\right)$，l 的方程为 $x=\sqrt{2}a$

设 $M(\sqrt{2}a,\ y_1)$，$N(\sqrt{2}a,\ y_2)$

则$\overrightarrow{F_1M}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a,\ y_1\right)$，$\overrightarrow{F_2N}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ y_2\right)$

由$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$得$y_1y_2=-\frac{3}{2}a^2<0$①

（Ⅰ）由$|\overrightarrow{F_1M}|=|\overrightarrow{F_2N}|=2\sqrt{5}$，得

$\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2}a)^2+y_1^2}=2\sqrt{5}$②$\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+y_2^2}=2\sqrt{5}$③

由①、②、③三式，消去y_1，y_2，并求得$a^2=4$

故$a=2$，$b=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

（Ⅱ）证明：$|MN|^2=(y_1-y_2)^2=y_1^2+y_2^2-2y_1y_2\geq-2y_1y_2-2y_1y_2=-4y_1y_2=6a^2$

当且仅当$y_1=-y_2=\frac{\sqrt{6}}{2}a$或$y_2=-y_1=\frac{\sqrt{6}}{2}a$时，$|MN|$取最小值$\frac{\sqrt{6}}{2}a$

此时，

$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}=(\frac{3\sqrt{2}}{2}a,\ y_1)+(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ y_2)=(2\sqrt{2}a,\ y_1+y_2)=(2\sqrt{2}a,\ 0)=2\overrightarrow{F_1F_2}$

故$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$与$\overrightarrow{F_1F_2}$共线.

【点评】此题重点考查椭圆中的基本量的关系，进而求椭圆待定常数，考查向量的综合应用；熟悉椭圆各基本量间的关系，数形结合，熟练地进行向量的坐标运算，设而不求消元的思想在圆锥曲线问题中的灵活应用.

22.（14分）（2008•四川）已知$x=3$是函数$f(x)=a\ln(1+x)+x^2-10x$的一个极值点.

（Ⅰ）求a；

（Ⅱ）求函数f（x）的单调区间；

（Ⅲ）若直线y=b与函数y=f（x）的图象有3个交点，求b的取值范围.

【考点】函数在某点取得极值的条件；利用导数研究函数的单调性.

【专题】计算题；压轴题；数形结合法.

【分析】（Ⅰ）先求导$f'(x)=\frac{a}{1+x}+2x-10$，再由$x=3$是函数$f(x)=a\ln(1+x)+x^2-10x$的一个极值点即$f'(3)=\frac{a}{4}+6-10=0$求解.

（Ⅱ）由（Ⅰ）确定$f(x)=16\ln(1+x)+x^2-10x$，$x\in(-1,+\infty)$再由$f'(x)>0$和$f'(x)<0$求得单调区间.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，f（x）在（﹣1，1）内单调增加，在（1，3）内单调减少，在（3，+∞）上单调增加，且当x=1或x=3时，f′（x）=0，可得f（x）的极大值为f（1），极小值为f（3）一，再由直线y=b与函数y=f（x）的图象有3个交点则须有f（3）<b<f（1）求解，因此，b的取值范围为$(32\ln2-21,\ 16\ln2-9)$.

【解答】解：（Ⅰ）因为$f'(x)=\frac{a}{1+x}+2x-10$

所以$f'(3)=\frac{a}{4}+6-10=0$

因此a=16

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=16\ln(1+x)+x^2-10x$，$x\in(-1,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-4x+3)}{1+x}$$

当 $x\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$

当 $x\in(1,3)$ 时，$f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-1,1)$，$(3,+\infty)$ $f(x)$ 的单调减区间是 $(1,3)$

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调增加，

在 $(1,3)$ 内单调减少，在 $(3,+\infty)$ 上单调增加，且当 $x=1$ 或 $x=3$ 时，$f'(x)=0$

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=16\ln2-9$，极小值为 $f(3)=32\ln2-21$

因此 $f(16)>16^2-10\times16>16\ln2-9=f(1)$ $f(e^{-2}-1)<-32+11=-21<f(3)$

所以在 $f(x)$ 的三个单调区间 $(-1,1)$，$(1,3)$，$(3,+\infty)$ 直线 $y=b$ 有 $y=f(x)$ 的图象各有一个交点，当且仅当 $f(3)<b<f(1)$

因此，b 的取值范围为 $(32\ln2-21，16\ln2-9)$.

【点评】此题重点考查利用求导研究函数的单调性，最值问题，函数根的问题;，熟悉函数的求导公式，理解求导在函数最值中的研究方法是解题的关键，数形结合理解函数的取值范围.