2020年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、座位号填写在答题卡上.本试卷满分150分.

2.作答时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合U={−2，−1，0，1，2，3}，A={−1，0，1}，B={1，2}，则$\complement_U(A\cup B)=$（　）

A. {−2，3}　　B. {−2，2，3}　　C. {−2，−1，0，3}　　D. {−2，−1，0，2，3}

【答案】A

【解析】

【分析】

首先进行并集运算，然后计算补集即可.

【详解】由题意可得：$A\cup B=\{-1,0,1,2\}$，则$\complement_U(A\cup B)=\{-2,3\}$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查并集、补集的定义与应用，属于基础题.

2.若α为第四象限角，则（　）

A. $\cos2\alpha>0$　　B. $\cos2\alpha<0$　　C. $\sin2\alpha>0$　　D. $\sin2\alpha<0$

【答案】D

【解析】

【分析】

由题意结合二倍角公式确定所给的选项是否正确即可.

【详解】当$\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$时，$\cos2\alpha=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)>0$，选项B错误；

当$\alpha=-\frac{\pi}{3}$时，$\cos 2\alpha=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)<0$，选项A错误；

由α在第四象限可得：$\sin\alpha<0,\cos\alpha>0$，则$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$，选项C错误，选项D正确；

故选：D.

【点睛】本题主要考查三角函数的符号，二倍角公式，特殊角的三角函数值等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

3.在新冠肺炎疫情防控期间，某超市开通网上销售业务，每天能完成1200份订单的配货，由于订单量大幅增加，导致订单积压.为解决困难，许多志愿者踊跃报名参加配货工作.已知该超市某日积压500份订单未配货，预计第二天的新订单超过1600份的概率为0.05，志愿者每人每天能完成50份订单的配货，为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于0.95，则至少需要志愿者（　）

A. 10名　　B. 18名　　C. 24名　　D. 32名

【答案】B

【解析】

【分析】

算出第二天订单数，除以志愿者每天能完成的订单配货数即可.

【详解】由题意，第二天新增订单数为$500+1600-1200=900$，

故需要志愿者$\frac{900}{50}=18$名.

故选：B

【点睛】本题主要考查函数模型的简单应用，属于基础题.

4.北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板(称为天心石)，环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块，下一层的第一环比上一层的最后一环多9块，向外每环依次也增加9块，已知每层环数相同，且下层比中层多729块，则三层共有扇面形石板(不含天心石)（ ）

A. 3699块　　B. 3474块　　C. 3402块　　D. 3339块

【答案】C

【解析】

【分析】

第n环天石心块数为a_n，第一层共有n环，则$\{a_n\}$是以9为首项，9为公差的等差数列，

设S_n为$\{a_n\}$的前n项和，由题意可得$S_{3n}-S_{2n}=S_{2n}-S_n+729$，解方程即可得到$n$，进一步得到$S_{3n}$.

【详解】设第n环天石心块数为a_n，第一层共有n环，

则$\{a_n\}$是以9为首项，9为公差的等差数列，$a_n=9+(n-1)\times 9=9n$，

设S_n为$\{a_n\}$的前n项和，则第一层、第二层、第三层的块数分

别为$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$，因为下层比中层多729块，

所以$S_{3n}-S_{2n}=S_{2n}-S_n+729$，

即$\dfrac{3n(9+27n)}{2}-\dfrac{2n(9+18n)}{2}=\dfrac{2n(9+18n)}{2}-\dfrac{n(9+9n)}{2}+729$

即$9n^2=729$，解得$\boldsymbol{n=9}$，

所以$S_{3n}=S_{27}=\dfrac{27(9+9\times 27)}{2}=3402$.

故选：C

【点睛】本题主要考查等差数列前n项和有关的计算问题，考查学生数学运算能力，是一道容易题.

5.若过点（2，1）的圆与两坐标轴都相切，则圆心到直线$2x-y-3=0$的距离为（　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】

由题意可知圆心在第一象限，设圆心的坐标为$\left(a,a\right),a>0$，可得圆的半径为a，写出圆的标准方程，利用点$\left(2,1\right)$在圆上，求得实数a的值，利用点到直线的距离公式可求出圆心到直线$2x-y-3=0$的距离.

【详解】由于圆上的点$\left(2,1\right)$在第一象限，若圆心不在第一象限，

则圆与至少与一条坐标轴相交，不合乎题意，所以圆心必在第一象限，

设圆心的坐标为$\left(a,a\right)$，则圆的半径为a，

圆的标准方程为$\left(x-a\right)^2+\left(y-a\right)^2=a^2$.

由题意可得$\left(2-a\right)^2+\left(1-a\right)^2=a^2$，

可得$a^2-6a+5=0$，解得$a=1$或$a=5$，

所以圆心的坐标为$\left(1,1\right)$或$\left(5,5\right)$，

圆心到直线$2x-y-3=0$的距离均为$d=\frac{\left|-2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

所以，圆心到直线$2x-y-3=0$的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：B.

【点睛】本题考查圆心到直线距离的计算，求出圆的方程是解题的关键，考查计算能力，属于中等题.

6.数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_ma_n$，若$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$，则$k=$（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】

取 $m=1$，可得出数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，利用等比数列求和公式可得出关于 k 的等式，由 $k\in\mathbf{N}^*$ 可求得 k 的值.

【详解】在等式 $a_{m+n}=a_m a_n$ 中，令 $m=1$，可得 $a_{n+1}=a_n a_1=2a_n$，$\therefore\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

所以，数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，以 2 为公比的等比数列，则 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$，

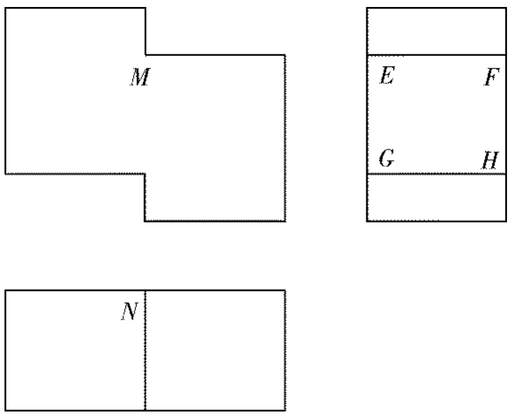
$\therefore a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=\dfrac{a_{k+1}\cdot\left(1-2^{10}\right)}{1-2}=\dfrac{2^{k+1}\cdot\left(1-2^{10}\right)}{1-2}=2^{k+1}\left(2^{10}-1\right)=2^5\left(2^{10}-1\right)$，

$\therefore 2^{k+1}=2^5$，则 $k+1=5$，解得 $k=4$.

故选：C.

【点睛】本题考查利用等比数列求和求参数的值，解答的关键就是求出数列的通项公式，考查计算能力，属于中等题.

7.如图是一个多面体的三视图，这个多面体某条棱的一个端点在正视图中对应的点为 M，在俯视图中对应的点为 N，则该端点在侧视图中对应的点为（　）



A. E　　B. F　　C. G　　D. H

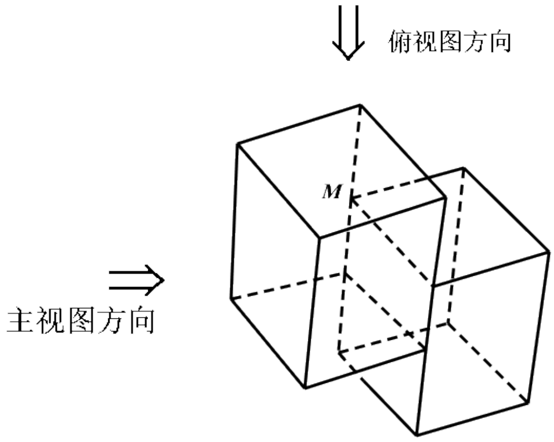
【答案】A

【解析】

【分析】

根据三视图，画出多面体立体图形，即可求得 M 点在侧视图中对应的点.

【详解】根据三视图，画出多面体立体图形，



图中标出了根据三视图 M 点所在位置，

可知在侧视图中所对应的点为 E

故选：A

【点睛】本题主要考查了根据三视图判断点的位置，解题关键是掌握三视图的基础知识和根据三视图能还原立体图形的方法，考查了分析能力和空间想象，属于基础题.

8.设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D,E 两点，若 $\triangle ODE$ 的面积为8，则 C 的焦距的最小值为（　）

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

【答案】B

【解析】

【分析】

因为 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，可得双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$，与直线 $x=a$ 联立方程求得 D，E 两点坐标，即可求得 $|ED|$，根据 $\triangle ODE$ 的面积为 8，可得 ab 值，根据 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$，结合均值不等式，即可求得答案.

【详解】$\because$ $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$

$\because$ 直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D，E 两点

不妨设 D 为在第一象限，E 在第四象限

联立$\begin{cases}x=a\\ y=\dfrac{b}{a}x\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$

故$D(a,b)$

联立$\begin{cases}x=a\\ y=-\dfrac{b}{a}x\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=a\\ y=-b\end{cases}$

故$E(a,-b)$

$\therefore |ED|=2b$

$\therefore \triangle ODE$ 面积为：$S_{\triangle ODE}=\dfrac{1}{2}a\times 2b=ab=8$

$\because$ 双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

$\therefore$ 其焦距为$2c=2\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{2ab}=2\sqrt{16}=8$

当且仅当$a=b=2\sqrt{2}$取等号

$\therefore C$ 的焦距的最小值：8

故选：B.

【点睛】本题主要考查了求双曲线焦距的最值问题，解题关键是掌握双曲线渐近线的定义和均值不等式求最值方法，在使用均值不等式求最值时，要检验等号是否成立，考查了分析能力和计算能力，属于中档题.

9.设函数$f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$，则$f(x)$（　）

A. 是偶函数，且在$(\dfrac{1}{2},+\infty)$单调递增

B. 是奇函数，且在$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$单调递减

C. 是偶函数，且在$(-\infty,-\dfrac{1}{2})$单调递增

D. 是奇函数，且在$(-\infty,-\dfrac{1}{2})$单调递减

【答案】D

【解析】

【分析】

根据奇偶性的定义可判断出$f\left(x\right)$为奇函数，排除AC；当$x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$时，利用函数单调性

的性质可判断出 $f\left(x\right)$ 单调递增，排除B；当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 时，利用复合函数单调性可判断出 $f\left(x\right)$ 单调递减，从而得到结果.

【详解】由 $f\left(x\right)=\ln\left|2x+1\right|-\ln\left|2x-1\right|$ 得 $f\left(x\right)$ 定义域为 $\left\{x\middle|x\neq\pm\dfrac{1}{2}\right\}$，关于坐标原点对称，

又 $f\left(-x\right)=\ln\left|1-2x\right|-\ln\left|-2x-1\right|=\ln\left|2x-1\right|-\ln\left|2x+1\right|=-f\left(x\right)$，

$\therefore f\left(x\right)$ 为定义域上的奇函数，可排除AC；

当 $x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$f\left(x\right)=\ln\left(2x+1\right)-\ln\left(1-2x\right)$，

$\because y=\ln\left(2x+1\right)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，$y=\ln\left(1-2x\right)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，排除B；

当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$f\left(x\right)=\ln\left(-2x-1\right)-\ln\left(1-2x\right)=\ln\dfrac{2x+1}{2x-1}=\ln\left(1+\dfrac{2}{2x-1}\right)$，

$\because \mu=1+\dfrac{2}{2x-1}$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，$f\left(\mu\right)=\ln\mu$ 在定义域内单调递增，

根据复合函数单调性可知：$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，D正确.

故选：D.

【点睛】本题考查函数奇偶性和单调性的判断；判断奇偶性的方法是在定义域关于原点对称的前提下，根据 $f\left(-x\right)$ 与 $f\left(x\right)$ 的关系得到结论；判断单调性的关键是能够根据自变量的范围化简函数，根据单调性的性质和复合函数“同增异减”性得到结论.

10.已知△ABC是面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，且其顶点都在球O的球面上.若球O的表面积为16π，则O到平面ABC的距离为（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】

根据球O的表面积和$\triangle ABC$的面积可求得球O的半径R和$\triangle ABC$外接圆半径r，由球的性质可知所求距离$d=\sqrt{R^2-r^2}$.

【详解】设球O的半径为R，则$4\pi R^2=16\pi$，解得：$R=2$.

设$\triangle ABC$外接圆半径为r，边长为a，

$\because \triangle ABC$是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，

$\therefore \frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，解得：$a=3$，$\therefore r=\frac{2}{3}\times\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{2}{3}\times\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$，

$\therefore$球心O到平面ABC的距离$d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{4-3}=1$.

故选：C.

【点睛】本题考查球的相关问题的求解，涉及到球的表面积公式和三角形面积公式的应用；解题关键是明确球的性质，即球心和三角形外接圆圆心的连线必垂直于三角形所在平面.

11.若$2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则（　）

A. $\ln(y-x+1)>0$　　B. $\ln(y-x+1)<0$　　C. $\ln|x-y|>0$　　D. $\ln|x-y|<0$

【答案】A

【解析】

【分析】

将不等式变为$2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$，根据$f(t)=2^t-3^{-t}$的单调性知$x<y$，以此去判断各个选项中真数与1的大小关系，进而得到结果.

【详解】由$2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$得：$2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$，

令$f(t)=2^t-3^{-t}$，

$\because y=2^x$为R上的增函数，$y=3^{-x}$为R上的减函数，$\therefore f(t)$为R上的增函数，

$\therefore x<y$，

$\because y-x>0$，$\therefore y-x+1>1$，$\therefore \ln\left(y-x+1\right)>0$，则A正确，B错误；

$\because \left|x-y\right|$与1的大小不确定，故CD无法确定.

故选：A.

【点睛】本题考查对数式的大小的判断问题，解题关键是能够通过构造函数的方式，利用函数的单调性得到x,y的大小关系，考查了转化与化归的数学思想.

12.0-

1周期序列在通信技术中有着重要应用.若序列$a_1a_2\cdots a_n\cdots$满足$a_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots)$，且存在正整数$m$，使得$a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$成立，则称其为0-

1周期序列，并称满足$a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$的最小正整数$m$为这个序列的周期.对于周期为$m$的0-

1序列$a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$C(k)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}(k=1,2,\cdots,m-1)$是描述其性质的重要指标，下列周期为5的0-1序列中，满足$C(k)\le\frac{1}{5}(k=1,2,3,4)$的序列是（　）

A 11010$\cdots$　　B. 11011$\cdots$　　C. 10001$\cdots$　　D. 11001$\cdots$

【答案】C

【解析】

【详解】由$a_{i+m}=a_i$知，序列a_i的周期为m，由已知，$m=5$，

$$C(k)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+k},k=1,2,3,4$$

对于选项A，

$$C(1)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\frac{1}{5}(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+a_5a_6)=\frac{1}{5}(1+0+0+0+0)=\frac{1}{5}\le\frac{1}{5}$$

$$C(2)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+2}=\frac{1}{5}(a_1a_3+a_2a_4+a_3a_5+a_4a_6+a_5a_7)=\frac{1}{5}(0+1+0+1+0)=\frac{2}{5}$$，不满足

；

对于选项B，

$$C(1)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\frac{1}{5}(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+a_5a_6)=\frac{1}{5}(1+0+0+1+1)=\frac{3}{5}$$，不满足；

对于选项D，

$C(1)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\frac{1}{5}(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+a_5a_6)=\frac{1}{5}(1+0+0+0+1)=\frac{2}{5}$，不满足

；

故选：C

【点睛】本题考查数列的新定义问题，涉及到周期数列，考查学生对新定义的理解能力以及数学运算能力，是一道中档题.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.已知单位向量a，b的夹角为45°，$ka-b$与a垂直，则k=__________.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】

首先求得向量的数量积，然后结合向量垂直的充分必要条件即可求得实数k的值.

【详解】由题意可得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由向量垂直的充分必要条件可得：$\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$，

即：$k\times\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=k-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$，解得：$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题主要考查平面向量的数量积定义与运算法则，向量垂直的充分必要条件等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

14.4名同学到3个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只去1个小区，每个小区至少安排1名同学，则不同的安排方法共有__________种.

【答案】36

【解析】

【分析】

根据题意，采用捆绑法，先取2名同学看作一组，现在可看成是3组同学分配到3个小区，即可求得答案.

【详解】∵4名同学到3个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只去1个小区，每个小区至少安排1名同学

∴先取2名同学看作一组，选法有：$C_4^2=6$

现在可看成是3组同学分配到3个小区，分法有：$A_3^3=6$

根据分步乘法原理，可得不同的安排方法$6\times6=36$种

故答案为：36.

【点睛】本题主要考查了计数原理的实际应用，解题关键是掌握分步乘法原理和捆绑法的使用，考查了分析能力和计算能力，属于中档题.

15.设复数z_1，z_2满足$|z_1|=|z_2|=2$，$z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，则$|z_1-z_2|=$__________.

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

令$z_1=2\cos\theta+2\sin\theta\cdot i$，$z_2=2\cos\alpha+2\sin\alpha\cdot i$，根据复数的相等可求得

$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，代入复数模长的公式中即可得到结果.

【详解】∵$|z_1|=|z_2|=2$，可设$z_1=2\cos\theta+2\sin\theta\cdot i$，$z_2=2\cos\alpha+2\sin\alpha\cdot i$，

$\therefore z_1+z_2=2(\cos\theta+\cos\alpha)+2(\sin\theta+\sin\alpha)\cdot i=\sqrt{3}+i$，

$\therefore\begin{cases}2(\cos\theta+\cos\alpha)=\sqrt{3}\\2(\sin\theta+\sin\alpha)=1\end{cases}$，两式平方作和得：$4(2+2\cos\theta\cos\alpha+2\sin\theta\sin\alpha)=4$，

化简得：$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore|z_1-z_2|=|2(\cos\theta-\cos\alpha)+2(\sin\theta-\sin\alpha)\cdot i|$

$=\sqrt{4(\cos\theta-\cos\alpha)^2+4(\sin\theta-\sin\alpha)^2}=\sqrt{8-8(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)}$

$=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$

故答案为：$2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查复数模长的求解，涉及到复数相等的应用；关键是能够采用假设的方式，

将问题转化为三角函数的运算问题.

16.设有下列四个命题：

p_1：两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内.

p_2：过空间中任意三点有且仅有一个平面.

p_3：若空间两条直线不相交，则这两条直线平行.

p_4：若直线$l\subset$平面α，直线$m\perp$平面α，则$m\perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是__________.

①$p_1\wedge p_4$②$p_1\wedge p_2$③$\neg p_2\vee p_3$④$\neg p_3\vee\neg p_4$

【答案】①③④

【解析】

【分析】

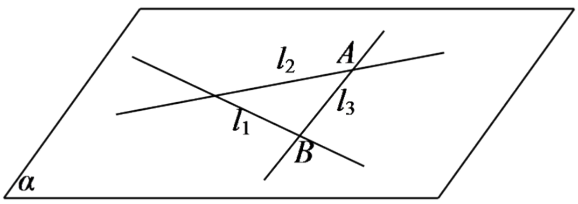
利用两交线直线确定一个平面可判断命题p_1的真假；利用三点共线可判断命题p_2的真假；

利用异面直线可判断命题p_3的真假，利用线面垂直的定义可判断命题p_4的真假.再利用复合命题的真假可得出结论.

【详解】对于命题p_1，可设l_1与l_2相交，这两条直线确定的平面为α；

若l_3与l_1相交，则交点A在平面α内，

同理，l_3与l_2的交点B也在平面α内，



所以，$AB\subset\alpha$，即$l_3\subset\alpha$，命题p_1为真命题；

对于命题p_2，若三点共线，则过这三个点的平面有无数个，

命题p_2为假命题；

对于命题p_3，空间中两条直线相交、平行或异面，

命题p_3为假命题；

对于命题 p_4，若直线 $m\perp$ 平面 α，

则 m 垂直于平面 α 内所有直线，

$\because$ 直线 $l\subset$ 平面 α，$\therefore$ 直线 $m\perp$ 直线 l，

命题 p_4 为真命题.

综上可知，$p_1\wedge p_4$ 为真命题，$p_1\wedge p_2$ 为假命题，

$\neg p_2\vee p_3$ 为真命题，$\neg p_3\vee\neg p_4$ 为真命题.

故答案为：①③④.

【点睛】本题考查复合命题的真假，同时也考查了空间中线面关系有关命题真假的判断，考查推理能力，属于中等题.

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17. $\triangle ABC$ 中，$\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$.

（1）求A；

（2）若$BC=3$，求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

【答案】（1）$\dfrac{2\pi}{3}$；（2）$3+2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】

（1）利用正弦定理角化边，配凑出 $\cos A$ 的形式，进而求得 A；

（2）利用余弦定理可得到 $\left(AC+AB\right)^2-AC\cdot AB=9$，利用基本不等式可求得 $AC+AB$ 的最大值，进而得到结果.

【详解】（1）由正弦定理可得：$BC^2-AC^2-AB^2=AC\cdot AB$，

$$\therefore\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=-\frac{1}{2},$$

$\because A\in\left(0,\pi\right)$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）由余弦定理得：$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A=AC^2+AB^2+AC\cdot AB=9$，

即$\left(AC+AB\right)^2-AC\cdot AB=9$.

$\because AC\cdot AB\le\left(\dfrac{AC+AB}{2}\right)^2$（当且仅当$AC=AB$时取等号），

$\therefore 9=\left(AC+AB\right)^2-AC\cdot AB\ge\left(AC+AB\right)^2-\left(\dfrac{AC+AB}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}\left(AC+AB\right)^2$，

解得：$AC+AB\le 2\sqrt{3}$（当且仅当$AC=AB$时取等号），

$\therefore\triangle ABC$周长$L=AC+AB+BC\le 3+2\sqrt{3}$，$\therefore\triangle ABC$周长的最大值为$3+2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查解三角形的相关知识，涉及到正弦定理角化边的应用、余弦定理的应用、三角形周长最大值的求解问题；求解周长最大值的关键是能够在余弦定理构造的等式中，结合基本不等式构造不等关系求得最值.

18.某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加.为调查该地区某种野生动物的数量，将其分成面积相近的200个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取20个作为样区，调查得到样本数据$(x_i，y_i)(i=1，2，…，20)$，其中x_i和y_i分别表示第i个样区的植物覆盖面积(单位：公顷)和这种野生动物的数量，并计算得$\sum_{i=1}^{20}x_i=60$，

$\sum_{i=1}^{20}y_i=1200$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2=80$，$\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=9000$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=800$.

（1）求该地区这种野生动物数量的估计值（这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数）；

（2）求样本$(x_i，y_i)(i=1，2，…，20)$的相关系数（精确到0.01）；

（3）根据现有统计资料，各地块间植物覆盖面积差异很大.为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法，并说明理由.

附：相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{2}=1.414$.

【答案】（1）12000；（2）0.94；（3）详见解析

【解析】

【分析】

（1）利用野生动物数量的估计值等于样区野生动物平均数乘以地块数，代入数据即可；

（2）利用公式$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}}$计算即可；

（3）各地块间植物覆盖面积差异较大，为提高样本数据的代表性，应采用分层抽样.

【详解】（1）样区野生动物平均数为$\dfrac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=\dfrac{1}{20}\times 1200=60$，

地块数为200，该地区这种野生动物的估计值为$200\times 60=12000$

（2）样本(x_i,y_i)的相关系数为

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times 9000}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0.94$$

（3）

由于各地块间植物覆盖面积差异较大，为提高样本数据的代表性，应采用分层抽样

先将植物覆盖面积按优中差分成三层，

在各层内按比例抽取样本，

在每层内用简单随机抽样法抽取样本即可.

【点睛】本题主要考查平均数的估计值、相关系数的计算以及抽样方法的选取，考查学生数学运算能力，是一道容易题.

19.已知椭圆C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$与抛物线$C_2$的焦点重合，$C_1$的中心与$C_2$的顶点重合.过$F$且与$x$轴垂直的直线交$C_1$于$A$，$B$两点，交$C_2$于$C$，$D$两点，且$|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.

（1）求C_1的离心率；

（2）设M是C_1与C_2的公共点，若$|MF|=5$，求C_1与C_2的标准方程.

【答案】（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$C_1:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$，$C_2:y^2=12x$.

【解析】

【分析】

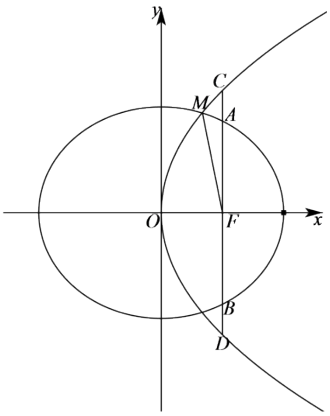
（1）求出$\left|AB\right|$、$\left|CD\right|$，利用$\left|CD\right|=\dfrac{4}{3}\left|AB\right|$可得出关于$a$、$c$的齐次等式，可解得椭圆$C_1$的离心率的值；

（2）由（1）可得出C_1的方程为$\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，联立曲线$C_1$与$C_2$的方程，求出点$M$的坐标，利用抛物线的定义结合$\left|MF\right|=5$可求得$c$的值，进而可得出$C_1$与$C_2$的标准方程.

【详解】（1）$\because F\left(c,0\right)$，$AB\perp x$轴且与椭圆$C_1$相交于$A$、$B$两点，

则直线AB的方程为$x=c$，

联立$\begin{cases}x=c\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=c\\ y=\pm\dfrac{b^2}{a}\end{cases}$，则$\left|AB\right|=\dfrac{2b^2}{a}$，



抛物线C_2的方程为$y^2=4cx$，联立$\begin{cases}x=c\\ y^2=4cx\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=c\\ y=\pm 2c\end{cases}$，$\therefore\left|CD\right|=4c$，

$\because\left|CD\right|=\dfrac{4}{3}\left|AB\right|$，即$4c=\dfrac{8b^2}{3a}$，$2b^2=3ac$，

即$2c^2+3ac-2a^2=0$，即$2e^2+3e-2=0$，

Q$0<e<1$，解得$e=\dfrac{1}{2}$，因此，椭圆C_1的离心率为$\dfrac{1}{2}$；

（2）由（1）知$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，椭圆C_1的方程为$\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，

联立$\begin{cases} y^2=4cx \\ \dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1 \end{cases}$，消去$y$并整理得$3x^2+16cx-12c^2=0$，

解得$x=\dfrac{2}{3}c$或$x=-6c$（舍去），

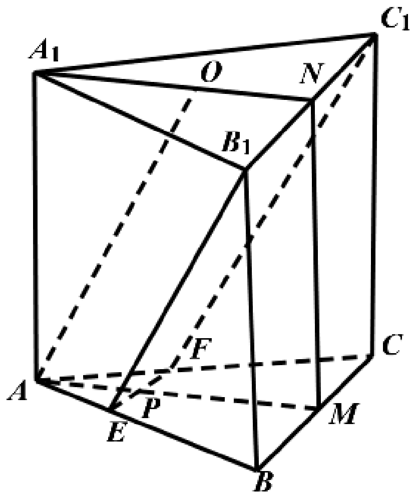
由抛物线的定义可得$|MF|=\dfrac{2}{3}c+c=\dfrac{5c}{3}=5$，解得$c=3$.

因此，曲线C_1的标准方程为$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$，

曲线C_2的标准方程为$y^2=12x$.

【点睛】本题考查椭圆离心率的求解，同时也考查了利用抛物线的定义求抛物线和椭圆的标准方程，考查计算能力，属于中等题.

20.如图，已知三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$的底面是正三角形，侧面BB_1C_1C是矩形，M，N分别为BC，B_1C_1的中点，P为AM上一点，过B_1C_1和P的平面交AB于E，交AC于F.



（1）证明：AA_1∥MN，且平面A_1AMN⊥EB_1C_1F;

（2）设O为△$A_1B_1C_1$的中心，若AO∥平面EB_1C_1F，且$AO=AB$，求直线B_1E与平面A_1AMN所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

【解析】

【分析】

（1）由M,N分别为BC，B_1C_1的中点，$MN//CC_1$，根据条件可得$AA_1//BB_1$，可证$MN//AA_1$，要证平面$EB_1C_1F\perp$平面A_1AMN，只需证明$EF\perp$平面A_1AMN即可；

（2）连接NP，先求证四边形$ONPA$是平行四边形，根据几何关系求得EP，在B_1C_1截取$B_1Q=EP$，由（1）$BC\perp$平面A_1AMN，可得$\angle QPN$为B_1E与平面A_1AMN所成角，即可求得答案.

【详解】（1）$\because M,N$分别为BC，B_1C_1的中点，

$\therefore MN//BB_1$

又$AA_1//BB_1$

$\therefore MN//AA_1$

在$\triangle ABC$中，M为BC中点，则$BC\perp AM$

又$\because$侧面BB_1C_1C为矩形，

$\therefore BC\perp BB_1$

$\because MN//BB_1$

$MN\perp BC$

由$MN\cap AM=M$，$MN,AM\subset$平面A_1AMN

$\therefore BC\perp$平面A_1AMN

又$\because B_1C_1//BC$，且$B_1C_1\not\subset$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，

$\therefore B_1C_1//$平面ABC

又$\because B_1C_1\subset$平面EB_1C_1F，且平面$EB_1C_1F\cap$平面$ABC=EF$

$\therefore B_1C_1//EF$

$\therefore EF//BC$

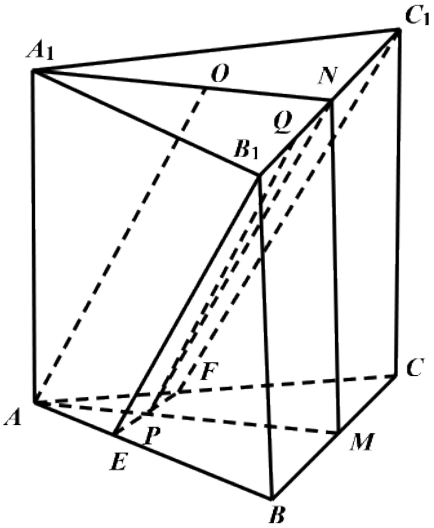
又$\because BC\perp$平面A_1AMN

$\therefore EF\perp$平面A_1AMN

$\because EF \subset$ 平面 EB_1C_1F

$\therefore$ 平面 $EB_1C_1F \perp$ 平面 A_1AMN

（2）连接 NP



$\because AO//$ 平面 EB_1C_1F，平面 $AONP \cap$ 平面 $EB_1C_1F = NP$

$\therefore AO//NP$

根据三棱柱上下底面平行，

其面 $A_1NMA \cap$ 平面 $ABC = AM$，面 $A_1NMA \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = A_1N$

$\therefore ON//AP$

故：四边形 $ONPA$ 是平行四边形

设 $\triangle ABC$ 边长是 $6m$ ($m > 0$)

可得：$ON = AP$，$NP = AO = AB = 6m$

$\because O$ 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，且 $\triangle A_1B_1C_1$ 边长为 $6m$

$\therefore ON = \dfrac{1}{3} \times 6 \times \sin 60° = \sqrt{3}m$

故：$ON = AP = \sqrt{3}m$

$\because EF//BC$

$\therefore \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{EP}{BM}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{EP}{3}$

解得：$EP=m$

在 B_1C_1 截取 $B_1Q=EP=m$，故 $QN=2m$

$\because B_1Q=EP$ 且 $B_1Q//EP$

$\therefore$ 四边形 B_1QPE 是平行四边形，

$\therefore B_1E//PQ$

由（1）$B_1C_1\perp$ 平面 A_1AMN

故 $\angle QPN$ 为 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角

在 $Rt\triangle QPN$，根据勾股定理可得：$PQ=\sqrt{QN^2+PN^2}=\sqrt{(2m)^2+(6m)^2}=2\sqrt{10}m$

$\therefore \sin\angle QPN=\dfrac{QN}{PQ}=\dfrac{2m}{2\sqrt{10}m}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore$ 直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值：$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

【点睛】本题主要考查了证明线线平行和面面垂直，及其线面角，解题关键是掌握面面垂直转为求证线面垂直的证法和线面角的定义，考查了分析能力和空间想象能力，属于难题.

21.已知函数$f(x)=\sin^2x\sin2x$.

（1）讨论$f(x)$在区间$(0，\pi)$的单调性；

（2）证明：$|f(x)|\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$；

（3）设$n\in N^*$，证明：$\sin^2x\sin^22x\sin^24x\ldots\sin^22^nx\le\dfrac{3^n}{4^n}$.

【答案】（1）当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增.（2）证明见解析；（3）证明见解析.

【解析】

【分析】

(1)首先求得导函数的解析式，然后由导函数的零点确定其在各个区间上的符号，最后确定原函数的单调性即可；

(2)首先确定函数的周期性，然后结合(1)中的结论确定函数在一个周期内的最大值和最小值即可证得题中的不等式；

(3)对所给的不等式左侧进行恒等变形可得

$f\left(x\right)=\left[\sin x\left(\sin^2 x\sin 2x\right)\left(\sin^2 2x\sin 4x\right)\cdots\left(\sin^2 2^{n-1}x\sin 2^n x\right)\sin^2 2^n x\right]^{\frac{2}{3}}$，然后结合(2)的结论和三角函数的有界性进行放缩即可证得题中的不等式.

【详解】(1)由函数的解析式可得：$f\left(x\right)=2\sin^3 x\cos x$，则：

$f'\left(x\right)=2\left(3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x\right)=2\sin^2 x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

$=2\sin^2 x\left(4\cos^2 x-1\right)=2\sin^2 x\left(2\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)$，

$f'\left(x\right)=0$ 在 $x\in\left(0,\pi\right)$ 上的根为：$x_1=\dfrac{\pi}{3},x_2=\dfrac{2\pi}{3}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$ 单调递增.

(2)注意到 $f\left(x+\pi\right)=\sin^2\left(x+\pi\right)\sin\left[2\left(x+\pi\right)\right]=\sin^2 x\sin 2x=f\left(x\right)$，

故函数 $f\left(x\right)$ 是周期为 π 的函数，

结合(1)的结论，计算可得：$f\left(0\right)=f\left(\pi\right)=0$，

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，

据此可得：$\left[f\left(x\right)\right]_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，$\left[f\left(x\right)\right]_{\min}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，

即 $\left|f\left(x\right)\right|\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

(3)结合(2)的结论有：

$$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x$$

$$=\left[\sin^3 x\sin^3 2x\sin^3 4x\cdots\sin^3 2^n x\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left[\sin x\left(\sin^2 x\sin 2x\right)\left(\sin^2 2x\sin 4x\right)\cdots\left(\sin^2 2^{n-1}x\sin 2^n x\right)\sin^2 2^n x\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$\le\left[\sin x\times\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\cdots\times\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\sin^2 2^n x\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$\le\left[\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n\right]^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：

(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系.

(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数.

(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题. (4)考查数形结合思想的应用.

（二）选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.并用2*B*铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修4—4：坐标系与参数方程]

22.已知曲线C_1，C_2的参数方程分别为C_1：$\begin{cases}x=4\cos^2\theta,\\y=4\sin^2\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），$C_2$：$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\y=t-\frac{1}{t}\end{cases}$（$t$为参数）.

（1）将C_1，C_2的参数方程化为普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系.设C_1，C_2的交点为P，求圆心在极轴上，且经过极点和P的圆的极坐标方程.

【答案】（1）$C_1:x+y=4$；$C_2:x^2-y^2=4$；（2）$\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$.

【解析】

【分析】

（1）分别消去参数θ和t即可得到所求普通方程；

（2）两方程联立求得点 P，求得所求圆的直角坐标方程后，根据直角坐标与极坐标的互化即可得到所求极坐标方程.

【详解】（1）由 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 得 C_1 的普通方程为：$x+y=4$；

由 $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}\\y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2\\y^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}-2\end{cases}$，两式作差可得 C_2 的普通方程为：$x^2-y^2=4$.

（2）由 $\begin{cases}x+y=4\\x^2-y^2=4\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，即 $P\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$；

设所求圆圆心的直角坐标为 $(a,0)$，其中 $a>0$，

则 $\left(a-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(0-\dfrac{3}{2}\right)^2=a^2$，解得：$a=\dfrac{17}{10}$，$\therefore$ 所求圆的半径 $r=\dfrac{17}{10}$，

$\therefore$ 所求圆的直角坐标方程为：$\left(x-\dfrac{17}{10}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{17}{10}\right)^2$，即 $x^2+y^2=\dfrac{17}{5}x$，

$\therefore$ 所求圆的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$.

【点睛】本题考查极坐标与参数方程的综合应用问题，涉及到参数方程化普通方程、直角坐标方程化极坐标方程等知识，属于常考题型.

[选修4—5：不等式选讲]

23.已知函数 $f(x)=\left|x-a^2\right|+|x-2a+1|$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\geq 4$ 的解集；

（2）若 $f(x)\geq 4$，求a的取值范围.

【答案】（1）$\left\{x\middle|x\leq\dfrac{3}{2}\text{ 或 }x\geq\dfrac{11}{2}\right\}$；（2）$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

【解析】

【分析】

（1）分别在 $x\leq 3$、$3<x<4$ 和 $x\geq 4$ 三种情况下解不等式求得结果；

（2）利用绝对值三角不等式可得到$f\left(x\right)\geq\left(a-1\right)^2$，由此构造不等式求得结果.

【详解】（1）当$a=2$时，$f\left(x\right)=\left|x-4\right|+\left|x-3\right|$.

当$x\leq 3$时，$f\left(x\right)=4-x+3-x=7-2x\geq 4$，解得：$x\leqslant\frac{3}{2}$；

当$3<x<4$时，$f\left(x\right)=4-x+x-3=1\geq 4$，无解；

当$x\geq 4$时，$f\left(x\right)=x-4+x-3=2x-7\geq 4$，解得：$x\geq\frac{11}{2}$；

综上所述：$f\left(x\right)\geq 4$的解集为$\left\{x\middle|x\leq\frac{3}{2}\text{或}x\geq\frac{11}{2}\right\}$.

（2）$f\left(x\right)=\left|x-a^2\right|+\left|x-2a+1\right|\geq\left|\left(x-a^2\right)-\left(x-2a+1\right)\right|=\left|-a^2+2a-1\right|=\left(a-1\right)^2$（当且仅当$2a-1\leq x\leq a^2$时取等号），

$\therefore\left(a-1\right)^2\geq 4$，解得：$a\leq -1$或$a\geq 3$，

$\therefore a$的取值范围为$\left(-\infty,-1\right]\cup\left[3,+\infty\right)$.

【点睛】本题考查绝对值不等式的求解、利用绝对值三角不等式求解最值的问题，属于常考题型.