2014年福建高考数学试题（理）

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z=(3-2i)i$ 的共轭复数 $\overline{z}$ 等于（　　）

$A.-2-3i$　　$B.-2+3i$　　$C.2-3i$　　$D.2+3i$

【答案】C

【解析】

试题分析：依题意可得 $z=3i+2,\therefore\overline{z}=2-3i$. 故选C.

考点：复数的运算. 学科网

2. 某空间几何体的正视图是三角形，则该几何体不可能是（　　）

$A.$ 圆柱　　$B.$ 圆锥　　$C.$ 四面体　　$D.$ 三棱柱

【答案】A

【解析】

试题分析：由于圆柱的三视图不可能是三角形所以选A.

考点：三视图.

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，若 $a_1=2,S_3=12$，则 $a_6=$（　　）

$A.8$　　$B.10$　　$C.12$　　$D.14$

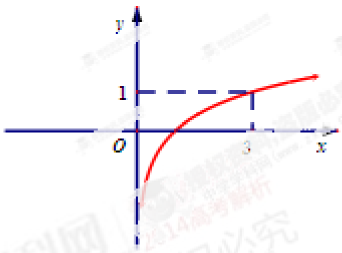
【答案】C

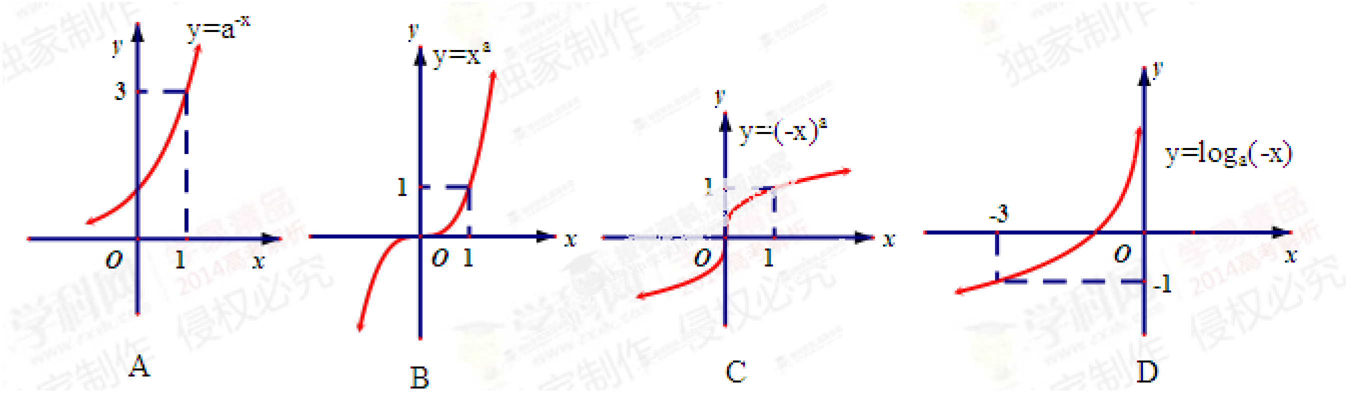
【解析】

试题分析：假设公差为 d，依题意可得 $3\times2+\frac{1}{2}\times3\times2d=12,\therefore d=2$. 所以 $a_6=2+(6-1)\times2=12$. 故选C.

考点：等差数列的性质.

4. 若函数 $y=\log_a x(a>0,且a\neq1)$ 的图像如右图所示，则下列函数图像正确的是（　　）





【答案】B

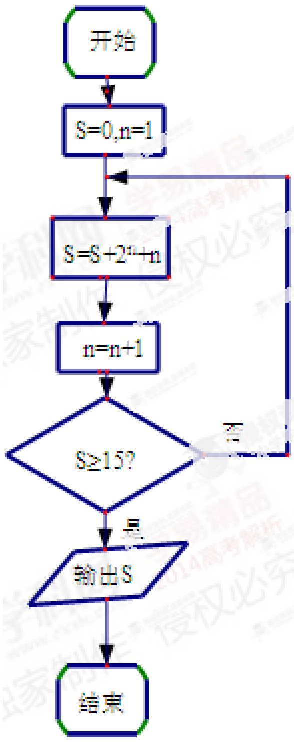
【解析】

试题分析：由题意可得$\log_a 3=1$，$\therefore a=3$．所以函数$y=3^{-x}$是递减的即A选项不正确.B正确. $y=(-x)^3$是递减,所以C不正确. $y=\log_3(-x)$图象与$y=\log_3 x$关于y轴对称，所以D不正确.故选B.

考点：函数的图象.

5. 阅读右图所示的程序框图，运行相应的程序，输出的S得值等于（　　）

$A.18$　　$B.20$　　$C.21$　　$D.40$



【答案】B

【解析】

试题分析：依题意可得当 $n=1, s=3$，当 $n=2, s=9$，当 $n=3, s=20$．故选 B．

考点：程序框图．

6. 直线 $l: y=kx+1$ 与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相交于 A,B 两点，则"$k=1$"是"ΔOAB 的面积为 $\frac{1}{2}$"的（　　）

$A.$ 充分而不必要条件　　$B.$ 必要而不充分条件

$C.$ 充分必要条件　　$D.$ 既不充分又不必要条件

【答案】A

【解析】

试题分析：由 $k=1$ 时，圆心到直线 $l: y=x+1$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$．所以弦长为 $\sqrt{2}$．所以 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$．所以充分性成立，由图形的对成性当 $k=-1$ 时，ΔOAB 的面积为 $\frac{1}{2}$．所以不要性不成立．故选 A．

考点：1．直线与圆的位置关系．2．充要条件．

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0 \\ \cos x, & x\le 0 \end{cases}$ 则下列结论正确的是（　　）

A. $f(x)$是偶函数　B. $f(x)$是增函数　C. $f(x)$是周期函数　D. $f(x)$的值域为$[-1,+\infty)$

【答案】D

【解析】

试题分析：由于分段函数的左右两边的函数图象不关于 y 轴对称，所以 A 不正确. 由于图象左边不单调,所以 B 不正确. 由于图象 x>0 部分的图象不是没有周期性，所以 C 不正确. 故选 D.

考点：1. 分段函数. 2. 函数的性质.

8. 在下列向量组中，可以把向量$\vec{a}=(3,2)$表示出来的是（　　）

A. $\vec{e_1}=(0,0),\vec{e_2}=(1,2)$　B．$\vec{e_1}=(-1,2),\vec{e_2}=(5,-2)$

C. $\vec{e_1}=(3,5),\vec{e_2}=(6,10)$　D. $\vec{e_1}=(2,-3),\vec{e_2}=(-2,3)$

【答案】B

【解析】

试题分析: 由于平面向量的基本定理可得. 不共线的向量都可与作为基底. 只有 $\vec{e_1}=(-1,2),\vec{e_2}=(5,-2)$ 成立. 故选 B.

考点：平面向量的基本定理.

9. 设 P,Q 分别为 $x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 上的点，则 P,Q 两点间的最大距离是（　　）

A. $5\sqrt{2}$　B. $\sqrt{46}+\sqrt{2}$　C. $7+\sqrt{2}$　D. $6\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

试题分析：依题意 P,Q 两点间的最大距离可以转化为圆心到椭圆上的点的最大距离再加上圆的半径 $\sqrt{2}$.

设 $Q(x,y)$. 圆心到椭圆的最大距离 $d=\sqrt{x^2+(y-6)^2}=\sqrt{-9y^2-12y+46}=\sqrt{-9(x+\frac{2}{3})^2+50}\le 5\sqrt{2}$.

所以 P,Q 两点间的最大距离是 $6\sqrt{2}$. 故选 D.

考点：1. 直线与圆的位置关系. 2. 数形结合的思想.

10. 用 a 代表红球，b 代表蓝球，c 代表黑球，由加法原理及乘法原理，从 1 个红球和 1 个篮球中取出若干个球的所有取法可由 $(1+a)(1+b)$ 的展开式 $1+a+b+ab$ 表示出来，如：“1”表示一个球都不取、“a”表示取出一个红球，面“ab”用表示把红球和篮球都取出来. 以此类推，下列各式中，其展开式可用来表示从 5 个无区别的红球、5 个无区别的蓝球、5 个有区别的黑球中取出若干个球，且所有的篮球都取出或都不取出的所有取法的是

A. $(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)(1+b^5)(1+c)^5$　　B. $(1+a^5)(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c)^5$

C. $(1+a)^5(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c^5)$　　D. $(1+a^5)(1+b)^5(1+c+c^2+c^3+c^4+c^5)$

【答案】A

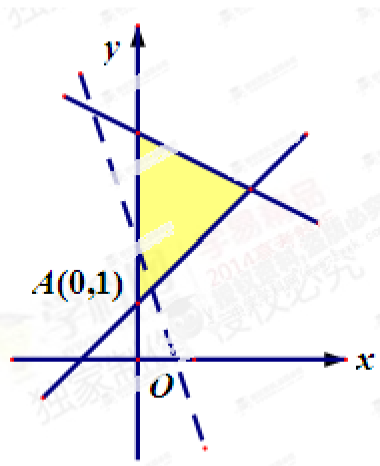
【解析】

试题分析：依题意所有的篮球都取出或都不取出.所以要有 b^5 或不含 b 的式子.所以 $(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)(1+b^5)(1+c)^5$ 符合.故选 A.

考点：1.新定义.2.二项式展开式.

二. 填空题

11. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\le 0 \\ x+2y-8\le 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最小值为________.



【答案】1

【解析】

试题分析：依题意如图可得目标函数过点 A 时截距最大.即 $z_{\min}=1$.

考点：线性规划.

12. 在 ΔABC 中， $A=60°, AC=4, BC=2\sqrt{3}$, 则 ΔABC 的面积等于_________.

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

试题分析：由正弦定理可得 $\sin B=1, \therefore B=90°$. 学科网所以 ΔABC 的面积等于 $2\sqrt{3}$.

考点：1.正弦定理. 2.三角形的面积.

13. 要制作一个容器为 $4\,m^3$，高为 $1m$ 的无盖长方形容器，已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是_______（单位：元）

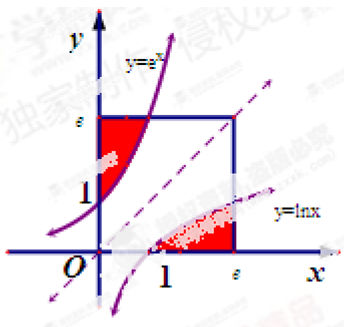
【答案】88

【解析】

试题分析：假设底面长方形的长宽分别为 x，$\frac{4}{x}$. 则该容器的最低总造价是 $y=80+20x+\frac{80}{x}\geq 160$. 当且仅当 $x=2$ 的时区到最小值.

考点：函数的最值.

14. 如图，在边长为 e（e 为自然对数的底数）的正方形中随机撒一粒黄豆，则他落到阴影部分的概率为______.



【答案】$\frac{2}{e^2}$

【解析】

试题分析：由对数函数与指数函数的对称性，可得两块阴影部分的面积相同.

$S=2\int_0^1(e-e^x)dx=2(ex-e^x)\Big|_0^1=2$. 所以落到阴影部分的概率为 $P=\frac{2}{e^2}$.

考点：1.几何概型. 2.定积分.

15. 若集合 $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$, 且下列四个关系：

①$a=1$；②$b\neq 1$；③$c=2$；④$d\neq 4$ 有且只有一个是正确的，则符合条件的有序数组 (a,b,c,d) 的个数是_________.

【答案】6

【解析】

试题分析：由于题意是只有一个是正确的所以①不成立，否则②成立.即可得 $a \neq 1$.由 $b \neq 1$ 即 $b = 2, 3, 4$.可得 $b = 2, c = 1, d = 4, a = 3; b = 3, c = 1, d = 4, a = 2$.两种情况.由 $c = 2, d = 4, a = 3, b = 1$.所以有一种情况.由 $d \neq 4$ 即 $d = 1, 2, 3$.可得 $d = 2, a = 3, b = 1, c = 4; d = 2, a = 4, b = 1, c = 3, d = 3, a = 2, b = 1, c = 4$.共三种情况.综上共6种.

考点：1.集合的概念.2.递推的数学思想.3.分类的数学思想.

三.解答题：本大题共6小题，共80分.

16.（本小题满分13分）

已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x) - \dfrac{1}{2}$.

（1）若 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 $f(\alpha)$ 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

【答案】(1) $\dfrac{1}{2}$；(2) π，$[k\pi - \dfrac{3\pi}{8}, k\pi + \dfrac{\pi}{8}], k \in Z$

【解析】

试题分析：(1)由 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求出角 α 的余弦值，再根据函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x) - \dfrac{1}{2}$，即可求得结论.

(2) 已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x) - \dfrac{1}{2}$，由正弦与余弦的二倍角公式，以及三角函数的化一公式，将函数 $f(x)$ 化简.根据三角函数周期的公式即可的结论.根据函数的单调递增区间，通过解不等式即可得到所求的结论.

试题解析：（1）因为 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 所以 $f(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

(2)因为

$f(x)=\sin x\cos x+\cos^2 x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$,所以

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$,得$k\pi-\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{8},k\in Z$.所以$f(x)$的单调递增区间为$[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}],k\in Z$.

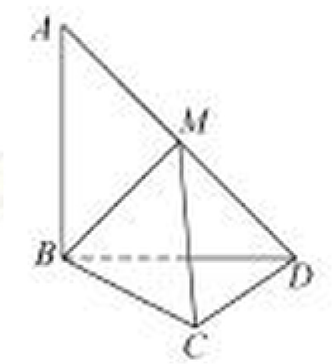
考点:1.三角函数的性质.2.三角的恒等变形.

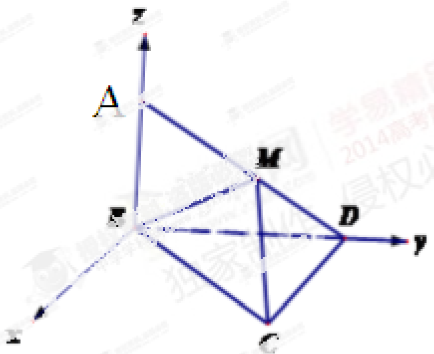
17.(本小题满分12分)

在平行四边形$ABCD$中,$AB=BD=CD=1$,$AB\perp BD,CD\perp BD$.将ΔABD沿BD折起,使得平面$ABD\perp$平面BCD,如图.

(1)求证: $AB\perp CD$;

(2)若M为AD中点,求直线AD与平面MBC所成角的正弦值.





【答案】(1)参考解析;(2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

试题分析:(1)由$AB\perp BD$,将ΔABD沿BD折起,使得平面$ABD\perp$平面BCD,即可得AB垂直于平面BCD.从而得到结论.

(2)依题意,可得$\angle DBC=45^0$,又由$AB\perp$平面BCD.如图建立直角坐标系.求直线AD与平面MBC所成角的正弦值.等价于求出直线AD与平面MBC的法向量所成的角的余弦值.写出相应的点的坐标以及相应的向量,求出法向量即可得到结论.

试题解析:(1)因为$ABD\perp$平面BCD,平面$ABD\cap$平面$BCD=BD,AB\subset$平面$ABD,AB\perp BD$,所以

$AB \perp$平面BCD.又$CD \subset$平面BCD,所以$AB \perp CD$.

(2)过点B在平面BCD内作$BE \perp BD$,如图.由(1)知$AB \perp$平面BCD,$BE \subset$平面BCD,$BD \subset$平面BCD,所以$AB \perp BE$,$AB \perp BD$.以B为坐标原点,分别以$\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}$的方向为$x$轴,$y$轴,$z$轴的正方向建立空间直角坐标系.依题意,得$B(0,0,0)$,$C(1,1,0)$,$D(0,1,0)$,$A(0,0,1)$,$M(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.则$\overrightarrow{BC}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{BM}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,$\overrightarrow{AD}=(0,1,-1)$.设平面$MBC$的法向量$\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$.则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$即$\begin{cases}x_0+y_0=0\\ \frac{1}{2}y_0+z_0=0\end{cases}$.取$z_0=1$,得平面学科网$MBC$的一个法向量$\vec{n}=(1,-1,1)$.设直线$AD$与平面$MBC$所成角为$\theta$,则$\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AD}>\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,即直线$AD$与平面$MBC$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

考点：1.线面的位置关系.2.空间直角坐标系.3.空间想象力.

18.（本小题满分 13 分）

为回馈顾客，某商场拟通过摸球兑奖的方式对 1000 位顾客进行奖励，规定：每位顾客从一个装有 4 个标有面值的球的袋中一次性随机摸出 2 个球，球上所标的面值之和为该顾客所获的奖励额.

（1）若袋中所装的 4 个球中有 1 个所标的面值为 50 元，其余 3 个均为 10 元，求

①顾客所获的奖励额为 60 元的概率

②顾客所获的奖励额的分布列及数学期望；

（2）商场对奖励总额的预算是 60000 元，并规定袋中的 4 个球只能由标有面值 10 元和 50 元的两种球组成，或标有面值 20 元和 40 元的两种球组成.为了使顾客得到的奖励总额尽可能符合商场的预算且每位顾客所获的奖励额相对均衡，请对袋中的 4 个球的面值给出一个合适的设计，并说明理由.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$,参考解析;(2)参考解析

【解析】

试题分析：(1)由袋中所装的 4 个球中有 1 个所标的面值为 50 元，其余 3 个均为 10 元,又规定每位顾客从一个装有4个标有面值的球的袋中一次性随机摸出2个球,球上所标的面值之和为该顾客所获的奖励额..由获得 60 元的事件数$C_1^1C_3^1$除以总的事件数C_4^2即可. 顾客获得奖励有两种情况 20 元,60 元.分别计算出他

们的概率，再利用数学期望的公式即可得结论.

(2) 根据商场的预算，每个顾客的平均奖励为 60 元. 根据题意有两种获奖励的情况，确定符合题意的方案，分别仅有一种. 再分别计算出两种方案相应的概率以及求出数学期望和方差. 即可得到结论.

试题解析：(1)设顾客所获的奖励为 X. ①依题意，得 $P(X=60)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$. 即顾客所获得的奖励额为 60 元的概率为 $\frac{1}{2}$.

②依题意，得 X 的所有可能取值为 20, 60. $P(X=60)=\frac{1}{2}$, $P(X=20)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$. 即 X 的分布列为

X	20	60
P	0.5	0.5

所以顾客所获得的奖励额的期望为 $E(X)=20\times0.5+60\times0.5=40$（元）.

(2)根据商场的预算，每个顾客的平均奖励为 60 元. 所以先寻找期望为 60 元的可能方案. 对于面值由 10 元和 50 元组成的情况，如果选择(10, 10, 10, 50)的方案，因为 60 元是面值之和的最大值，所以期望不可能为 60 元；如果选择(50, 50, 50, 10)的方案，因为 60 元是面值之和的最小值，所以数学期望也不可能为 60 元，因此可能的方案是(10, 10, 50, 50)，记为方案 1. 对于面值由 20 元和 40 元组成的情况，同理可排除(20, 20, 20, 40)和(40, 40, 40, 20)的方案，所以可能的方案是(20, 20, 40, 40)，记为方案 2. 以下是对两个方案的分析：对于方案 1，即方案(10, 10, 50, 50)，设顾客所获的奖励为 X_1，则 X_1 的分布列为

X_1	20	60	100
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

X_1 的期望为 $E(X_1)=20\times\frac{1}{6}+60\times\frac{2}{3}+100\times\frac{1}{6}=60$，$X_1$ 的方差为

$D(X_1)=(20-60)^2\times\frac{1}{6}+(60-60)^2\times\frac{2}{3}+(100-60)^2\times\frac{1}{6}=\frac{1600}{3}$.

对于方案 2，即方案(20, 20, 40, 40)，设顾客所获的奖励为 X_2，则 X_2 的分布列为

X_2	40	60	80
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

X_2 的期望为 $E(X_2)=40\times\frac{1}{6}+60\times\frac{2}{3}+80\times\frac{1}{6}=60$，$X_2$ 的方差为

$D(X_2)=(40-60)^2\times\frac{1}{6}+(60-60)^2\times\frac{2}{3}+(80-60)^2\times\frac{1}{6}=\frac{400}{3}$. 由于两种方案的奖励额都符合要求,但方案2奖励的方差比方案1的小,所以应该选择方案2.

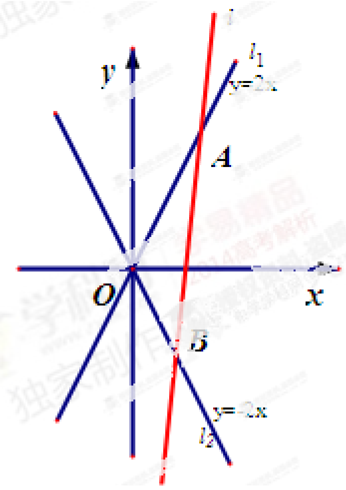
考点：1. 概率. 2. 统计. 3. 数学期望,方差.

19.（本小题满分13分）已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别为

$l_1:y=2x,l_2:y=-2x$.

（1）求双曲线 E 的离心率；

（2）如图，O 为坐标原点，动直线 l 分别交直线 l_1,l_2 于 A,B 两点（A,B 分别在第一，四象限），且 ΔOAB 的面积恒为8，试探究：是否存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线 E？若存在，求出双曲线 E 的方程；若不存在，说明理由.



【答案】(1) $\sqrt{5}$; (2)存在

【解析】

试题分析：(1) 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1:y=2x,l_2:y=-2x$, 所以根据 $\frac{b}{a}=2$ 即可求得结论.

(2)首先分类讨论直线 l 的位置. 由直线 l 垂直于 x 轴可得到一个结论. 再讨论直线 l 不垂直于 x 轴, 由 ΔOAB 的面积恒为 8, 则转化为 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OC||y_1-y_2|$. 由直线与双曲线方程联立以及韦达定理, 即可得到直线 l 有且只有一个公共点. 学科网

试题解析：(1)因为双曲线 E 的渐近线分别为和 $y=2x, y=-2x$. 所以 $\frac{b}{a}=2, \therefore \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=2, \therefore c=\sqrt{5}a$,

从而双曲线 E 的离心率 $e=\sqrt{5}$.

(2)由(1)知,双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$. 设直线 l 与 x 轴相交于点 C.

当 $l\perp x$ 轴时,若直线 l 与双曲线 E 有且只有一个公共点,则 $|OC|=a, |AB|=4a$,又因为 ΔOAB 的面积为 8,

所以 $\frac{1}{2}|OC||AB|=8, \therefore \frac{1}{2}a\cdot 4a=8, \therefore a=2$. 此时双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

若存在满足条件的双曲线 E,则 E 的方程只能为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. 以下证明:当直线 l 不与 x 轴垂直时，双曲线 E: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 也满足条件.

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$, 依题意,得 k>2 或 k<-2. 则 $C(-\frac{m}{k},0)$, 记 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$. 由 $\begin{cases} y=2x \\ y=kx+m \end{cases}$,

得 $y_1=\frac{2m}{2-k}$, 同理得 $y_2=\frac{2m}{2+k}$. 由 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OC||y_1-y_2|$ 得, $\frac{1}{2}\left|-\frac{m}{k}\right|\cdot\left|\frac{2m}{2-k}-\frac{2m}{2+k}\right|=8$ 即 $m^2=4|4-k^2|=4(k^2-4)$.

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1 \end{cases}$ 得, $(4-k^2)x^2-2kmx-m^2-16=0$. 因为 $4-k^2<0$, 所以

$\Delta=4k^2m^2+4(4-k^2)(m^2+16)=-16(4k^2-m^2-16)$, 又因为 $m^2=4(k^2-4)$. 所以 $\Delta=0$, 即 l 与双曲线 E 有且只有一个公共点.

因此,存在总与 l 有且只有一个公共点的双曲线 E,且 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

考点：1.双曲线的性质. 2.直线与双曲线的位置关系. 3. 三角形的面积的表示.

20. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$（a 为常数）的图象与 y 轴交于点 A，曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为-1.

（I）求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值；

（II）证明：当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$；

（III）证明：对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $x^2<ce^x$.

【答案】（I）$a=2$，极值参考解析；（II）参考解析；（III）参考解析

【解析】

试题分析：（I）由函数 $f(x)=e^x-ax$（a 为常数）的图象与 y 轴交于点 A，曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为-1. 所以求函数 $f(x)$ 的导数，即可求出 a 的值. 再根据函数 $f(x)$ 的导数地正负，即可得函数 $f(x)$ 的极值.

（II）当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$ 恒成立，等价转换为函数的最值问题. 令 $g(x)=e^x-x^2$，通过求函数 $g(x)$ 的导数求出最值即可得到结论.

（III）对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $x^2<ce^x$. 由（II）得到函数的单调性当 $c\geq1$ 时，即可找到 $x_0=0$ 符合题意. 当 $0<c<1$ 时. 通过等价转化，等价于不等式恒成立问题，再对通过估算得到 x_0 的值. 即可得到结论.

试题解析：（I）由 $f(x)=e^x-ax$，得 $f'(x)=e^x-a$. 又 $f'(0)=1-a=-1$，得 $a=2$. 所以

$f(x)=e^x-2x$，$f'(x)=e^x-2$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$. 当 $x<\ln 2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\ln 2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. 所以当 $x=\ln 2$ 时，$f(x)$ 取得极小值，且极小值为

$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-\ln 4$，$f(x)$ 学科网无极大值.

（II）令 $g(x)=e^x-x^2$，则 $g'(x)=e^x-2x$. 由（I）得 $g'(x)=f(x)\geq f(\ln 2)>0$，故 $g(x)$ 在 R 上单调递增，又 $g(0)=1>0$，因此，当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)>0$，即 $x^2<e^x$.

（III）①若 $c\geq1$，则 $e^x\leq ce^x$. 又由（II）知，当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$. 所以当 $x>0$ 时，$x^2<ce^x$. 取 $x_0=0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<cx^2$.

②若 $0<c<1$，令 $k=\dfrac{1}{c}>1$，要使不等式 $x^2<ce^x$ 成立，只要 $e^x>kx^2$ 成立. 而要使 $e^x>kx^2$ 成立，则只要

$x>\ln(kx^2)$，只要 $x>2\ln x+\ln k$ 成立．令 $h(x)=x-2\ln x-\ln k$，则 $h'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$．所以当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 内单调递增．取 $x_0=16k>16$，所以 $h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增．又 $h(x_0)=16k-2\ln(16k)-\ln k=8(k-\ln 2)+3(k-\ln k)+5k$．易知 $k>\ln k, k>\ln 2, 5k>0$．所以 $h(x_0)>0$．即存在 $x_0=\frac{16}{c}$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x$．

综上，对任意给定的正数 c，总存在 x_0，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x$．

考点：1.函数的极值．2.构建新函数证明不等式．3.开放性题．4.导数的综合应用．5.运算能力．6.分类讨论的数学思想．有不同的方式，只要正确，均相应给分．

注:对 c 的分类不同

本题设有（1），（2），（3）三个选考题，每题 7 分，请考生任选 2 题作答，满分 14 分．

如果多做，则按所做的前两题计分．作答时，先用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号右边的方框涂黑，并将所选题号填入括号中．

（1）（本小题满分 7 分）选修 4—2：矩阵与变换

已知矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$．

（I）求矩阵 A；

（II）求矩阵 A^{-1} 的特征值以及属于每个特征值的一个特征向量．

【答案】（I）参考解析；（II）参考解析

【解析】

试题分析：（I）由于 $|A^{-1}|=2\times2-1\times1=3\neq0$，所以矩阵 A^{-1} 的逆矩阵及矩阵 A，可根据逆矩阵的公式求得矩阵 A．

（II）求矩阵 A^{-1} 的特征值以及属于每个特征值的一个特征向量，由矩阵 A^{-1} 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$．即可得到两个特征值，再根据特征值与特征向量间的关系即可得到结论．

试题解析：（I）因为矩阵 A 是矩阵 A^{-1} 的逆矩阵，且 $\left|A^{-1}\right|=2\times2-1\times1=3\neq0$，所以

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

（II）矩阵 A^{-1} 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$，令 $f(\lambda)=0$，得矩阵

A^{-1} 的特征值为 $\lambda_1=1$ 或 $\lambda_2=3$，所以 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ 是学科网矩阵 A^{-1} 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量.

$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A^{-1} 的属于特征值 $\lambda_2=3$ 的一个特征向量.

考点：1.逆矩阵.2.特征至于特征向量.

（2）（本小题满分 7 分）选修 4—4：极坐标与参数方程

已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a-2t\\ y=-4t\end{cases}$，（$t$ 为参数），圆 C 的参数方程为

$\begin{cases}x=4\cos\theta\\ y=4\sin\theta\end{cases}$，（$\theta$ 为常数）.

（I）求直线 l 和圆 C 的普通方程；

（II）若直线 l 与圆 C 有公共点，求实数 a 的取值范围.

【答案】（I）$2x-y-2a=0$，$x^2+y^2=16$；（II）$-2\sqrt{5}\leq a\leq2\sqrt{5}$

【解析】

试题分析：（I）由已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a-2t\\ y=-4t\end{cases}$，（$t$ 为参数），消去参数 t 即可得直线的普通方程.

由圆 C 的参数方程 为 $\begin{cases}x=4\cos\theta\\ y=4\sin\theta\end{cases}$，（$\theta$ 为常数）消去参数 θ，即可得圆的普通方程.

（II）由直线 l 与圆 C 有公共点，等价于圆心到直线的距离小于或等于圆的半径 4，由点到直线的距离公式即可得到结论.

试题解析：（I）直线 l 的普通方程为 $2x-y-2a=0$. 圆 C 的普通方程为 $x^2+y^2=16$.

（II）因为直线l与圆有公共点,故圆 C 的圆心到直线l的距离$d=\frac{|-2a|}{\sqrt{5}}\leq 4$,解得$-2\sqrt{5}\leq a\leq 2\sqrt{5}$.

考点：.1. 参数方程. 2. 直线与圆的位置关系.

（3）（本小题满分 7 分）选修 4—5：不等式选将

已知定义在 R 上的函数$f(x)=|x+1|+|x-2|$的最小值为a.

（I）求a的值；

（II）若p，q，r为正实数，且$p+q+r=a$，求证：$p^2+q^2+r^2\geq 3$.

【答案】（I）$a=3$；（II）参考解析

【解析】

试题分析：（I）已知定义在 R 上的函数$f(x)=|x+1|+|x-2|$的最小值,由绝对值的性质可得函数的最小值.即可得到结论.

（II）由（I）可得$a=3$,学科网再根据柯西不等式即可得到结论.

试题解析：（I）因为$|x+1|+|x-2|\geq|(x+1)-(x-2)|=3$,当且仅当$-1\leq x\leq 2$时,等号成立,所以$f(x)$的最小值等于 3,即$a=3$.

（II）由（I）知$p+q+r=3$,又因为p,q,r是正数,所以

$(p^2+q^2+r^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(p\times 1+q\times 1+r\times 1)^2=(p+q+r)^2=9$,即$p^2+q^2+r^2\geq 3$.

考点：1.绝对值不等式. 2.柯西不等式.