

绝密★启用前

# 2013年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

## 数学试卷(文史类)

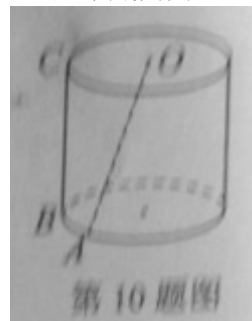
(满分150分, 考试时间120分钟)

考生注意

1. 本场考试时间120分钟, 试卷共4页, 满分150分, 答题纸共2页.
2. 作答前, 在答题纸正面填写姓名、准考证号, 反面填写姓名, 将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域, 不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题, 用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题(本大题共有14题, 满分56分) 考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果, 每个空格填对得4分, 否则一律得零分.

1. 不等式  $\frac{x}{2x-1} < 0$  的解为\_\_\_\_\_.
2. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 30$ , 则  $a_2 + a_3 =$ \_\_\_\_\_.
3. 设  $m \in \mathbf{R}$ ,  $m^2 + m - 2 + (m^2 - 1)i$  是纯虚数, 其中  $i$  是虚数单位, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.
4. 若  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ,  $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ , 则  $y =$ \_\_\_\_\_.
5. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别是  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . 若  $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0$ , 则角  $C$  的大小是\_\_\_\_\_.
6. 某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%. 在一次考试中, 男、女生平均分数分别为75、80, 则这次考试该年级学生平均分数为\_\_\_\_\_.
7. 设常数  $a \in \mathbf{R}$ . 若  $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$  的二项展开式中  $x^7$  项的系数为-10, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
8. 方程  $\frac{9}{3^x - 1} + 1 = 3^x$  的实数解为\_\_\_\_\_.
9. 若  $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{3}$ , 则  $\cos(2x - 2y) =$ \_\_\_\_\_.
10. 已知圆柱  $\Omega$  的母线长为  $l$ , 底面半径为  $r$ ,  $O$  是上地面圆心,  $A$ 、 $B$  是下底面圆心上两个不同的点,  $BC$  是母线, 如图. 若直线  $OA$  与  $BC$  所成角的大小为  $\frac{\pi}{6}$ , 则  $\frac{1}{r} =$ \_\_\_\_\_.
11. 盒子中装有编号为1,2,3,4,5,6,7的七个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是\_\_\_\_\_  
(结果用最简分数表示).
12. 设  $AB$  是椭圆  $\Gamma$  的长轴, 点  $C$  在  $\Gamma$  上, 且  $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$ . 若  $AB = 4$ ,  $BC = \sqrt{2}$ , 则  $\Gamma$  的两个焦点之间的距离为\_\_\_\_\_.
13. 设常数  $a > 0$ , 若  $9x + \frac{a^2}{x} \geq a + 1$  对一切正实数  $x$  成立, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
14. 已知正方形  $ABCD$  的边长为1. 记以  $A$  为起点, 其余顶点为终点的向量分别为  $\vec{a}_1$ 、



$\vec{a}_2$ 、 $\vec{a}_3$ ；以  $C$  为起点，其余顶点为终点的向量分别为  $\vec{c}_1$ 、 $\vec{c}_2$ 、 $\vec{c}_3$ ．若  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$  且  $i \neq j, k \neq l$ ，则  $(\vec{a}_i + \vec{a}_j) \cdot (\vec{c}_k + \vec{c}_l)$  的最小值是\_\_\_\_\_．

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分．

15. 函数  $f(x) = x^2 - 1 (x \geq 1)$  的反函数为  $f^{-1}(x)$ ，则  $f^{-1}(2)$  的值是（ ）

- (A)  $\sqrt{3}$  (B)  $-\sqrt{3}$  (C)  $1 + \sqrt{2}$  (D)  $1 - \sqrt{2}$

16. 设常数  $a \in \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{x | (x-1)(x-a) \geq 0\}$ ， $B = \{x | x \geq a-1\}$ ．若  $A \cup B = \mathbf{R}$ ，则  $a$  的取值范围为（ ）

- (A)  $(-\infty, 2)$  (B)  $(-\infty, 2]$  (C)  $(2, +\infty)$  (D)  $[2, +\infty)$

17. 钱大姐常说“好货不便宜”，她这句话的意思是：“好货”是“不便宜”的（ ）

- (A) 充分条件 (B) 必要条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

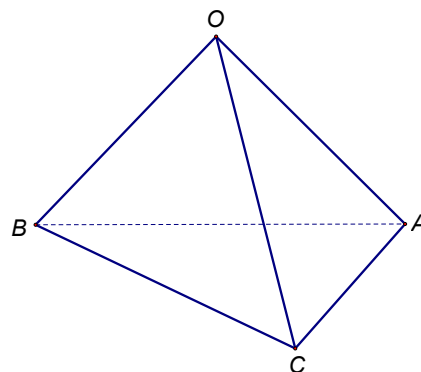
18. 记椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{ny^2}{4n+1} = 1$  围成的区域（含边界）为  $\Omega_n (n=1, 2, \dots)$ ，当点  $(x, y)$  分别在  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  上时， $x+y$  的最大值分别是  $M_1, M_2, \dots$ ，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n =$ （ ）

- (A) 0 (B)  $\frac{1}{4}$  (C) 2 (D)  $2\sqrt{2}$

三．解答题（本大题共有5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域写出必要的步骤．

19. （本题满分12分）

如图，正三棱锥  $O-ABC$  底面边长为2，高为1，求该三棱锥的体积及表面积．



第19题图

20. （本题满分14分）本题共有2个小题．第1小题满分5分，第2小题满分9分．

甲厂以  $x$  千米/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求  $1 \leq x \leq 10$ ），每小时可获得的利润是  $100(5x+1-\frac{3}{x})$  元．

(1) 求证：生产  $a$  千克该产品所获得的利润为  $100a(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})$ ；

(2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大，问：甲厂应该如何选取何种生产速度？并求此最大利润．

21. （本题满分14分）本题共有2个小题．第1小题满分6分，第2小题满分8分．

已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x)$ ，其中常数  $\omega > 0$ 。

(1) 令  $\omega = 1$ ，判断函数  $F(x) = f(x) + f(x + \frac{\pi}{2})$  的奇偶性并说明理由；

(2) 令  $\omega = 2$ ，将函数  $y = f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，再往上平移 1 个单位，得到函数  $y = g(x)$  的图像。对任意的  $a \in \mathbb{R}$ ，求  $y = g(x)$  在区间  $[a, a + 10\pi]$  上零点个数的所有可能值。

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题。第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分。

已知函数  $f(x) = 2 - |x|$ 。无穷数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = f(a_n), n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 若  $a_1 = 0$ ，求  $a_2, a_3, a_4$ ；

(2) 若  $a_1 > 0$ ，且  $a_1, a_2, a_3$  成等比数列，求  $a_1$  的值；

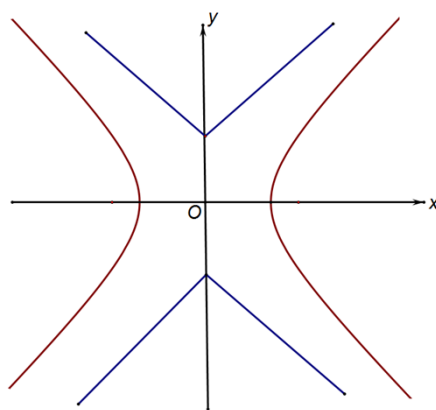
(3) 是否存在  $a_1$ ，使得  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$  成等差数列？若存在，求出所有这样的  $a_1$ ；若不存在，说明理由。

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题。第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分。

如图，已知双曲线  $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ ，曲线

$C_2: |y| = |x| + 1$ 。P 是平面内一点，若存在过点 P 的直线与  $C_1, C_2$  都有公共点，则称 P 为“ $C_1 - C_2$  型点”。

(1) 在正确证明  $C_1$  的左焦点是“ $C_1 - C_2$  型点”时，要使用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；



- (2) 设直线  $y = kx$  与  $C_2$  有公共点, 求证  $|k| > 1$ , 进而证明原点不是“ $C_1 - C_2$  型点”;
- (3) 求证: 圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内的点都不是“ $C_1 - C_2$  型点”.

