2015年高考天津市理科数学真题

一、选择题

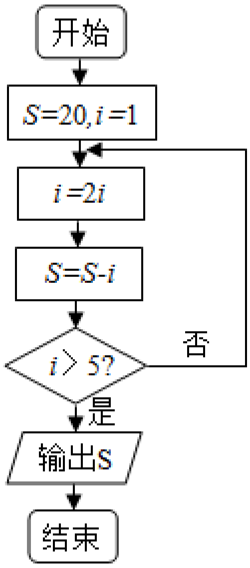
1．已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合A=$\{2,3,5,6\}$，集合B=$\{1,3,4,6,7\}$，则集合A$\cap C_U$B=（　　）

A．$\{2,5\}$　　　　B．$\{3,6\}$　　　　C．$\{2,5,6\}$　　　　D．$\{2,3,5,6,8\}$

2．设变量x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2\geq 0.\\ x-y+3\geq 0.\\ 2x+y-3\leq 0.\end{cases}$ 则目标函数$z=x+6y$的最大值为（　　）

A．3　　　　B．4　　　　C．18　　　　D．40

3．阅读下边的程序框图，运行相应的程序，则输出S的值为（　　）



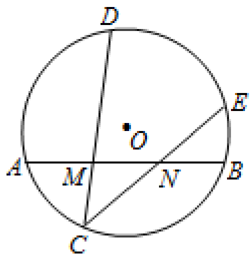
A．-10　　　　B．6　　　　C．14　　　　D．18

4．设$x\in R$，则“$|x-2|<1$”是“$x^2+x-2>0$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

5．如图，在圆O中，M，N是弦AB的三等分点，弦CD，CE分别经过点M，N，若$CM=2$，$MD=4$，$CN=3$，则线段NE的长为（　　）



A．$\dfrac{8}{3}$　　　　B．3　　　　C．$\dfrac{10}{3}$　　　　D．$\dfrac{5}{2}$

6．已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线过点（$2,\sqrt{3}$），且双曲线的一个焦点在抛物线$y^2=4\sqrt{7}x$的准线上，则双曲线的方程为（　　）

A．$\dfrac{x^2}{21}-\dfrac{y^2}{28}=1$　　　　B．$\dfrac{x^2}{28}-\dfrac{y^2}{21}=1$　　　　C．$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　　　D．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$

7．已知定义在R上的函数$f(x)=2^{|x-m|}-1$（m为实数）为偶函数，记$a=f(\log_{0.5}3)$，$b=f(\log_2 5)$，$c=f(2m)$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A．a＜b＜c　　　　B．a＜c＜b　　　　C．c＜a＜b　　　　D．c＜b＜a

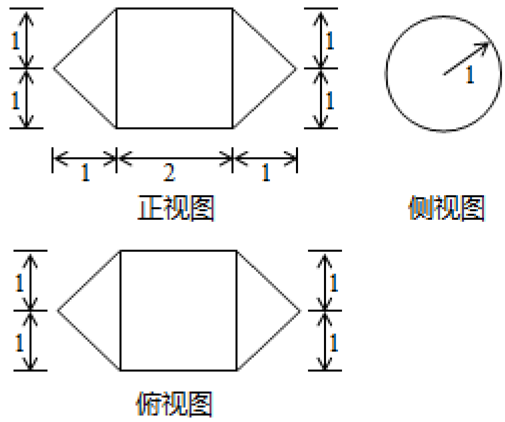
8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & x>2,\end{cases}$ 函数 $g(x)=b-f(2-x)$，其中 $b\in R$，若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点，则 b 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{7}{4},+\infty)$　　B．$(-\infty,\frac{7}{4})$　　C．$(0,\frac{7}{4})$　　D．$(\frac{7}{4},2)$

二、填空题

9．i 是虚数单位，若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数，则实数 a 的值为________.

10．一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为________m^3.



11．曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的封闭图形的面积为________.

12．在 $(x-\frac{1}{4x})^6$ 的展开式中，x^2 的系数为________.

13．在 ΔABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c．已知 ΔABC 的面积为 $3\sqrt{15}$，$b-c=2,\cos A=-\frac{1}{4}$，则 a 的值为________.

14．在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//DC,AB=2,BC=1,\angle ABC=60^\circ$。动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DF}=\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为________.

三、解答题

15．已知函数 $f(\mathrm{x})=\sin^2 x-\sin^2(x-\frac{\pi}{6})$，$x\in R$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

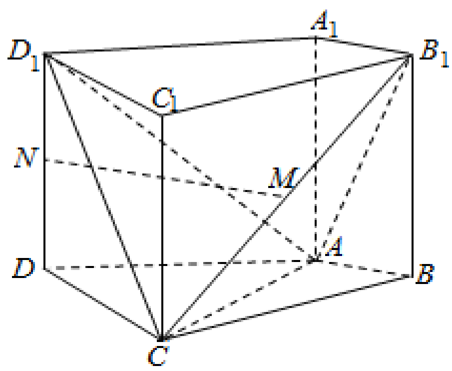
（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 内的最大值和最小值.

16．为推动乒乓球运动的发展，某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加。现有来自甲协会的运动员3名，其中种子选手2名；乙协会的运动员5名，其中种子选手3名。从这8名运动员中随机选择4人参加比赛。

（Ⅰ）设A为事件“选出的4人中恰有2名种子选手，且这2名种子选手来自同一个协会”，求事件A发生的概率；

（Ⅱ）设X为选出的4人中种子选手的人数，求随机变量X的分布列和数学期望.

17．如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AC$，$AB=1$，$AC=AA_1=2$，$AD=CD=\sqrt{5}$，且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.



（Ⅰ）求证：$MN\parallel$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求二面角 D_1-AC-B_1 的正弦值；

（Ⅲ）设 E 为棱 A_1B_1 上的点。若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$，求线段 A_1E 的长。

18．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=qa_n$（q 为实数，且 $q\neq 1$），$n\in N^*$，$a_1=1$，$a_2=2$，且 a_2+a_1，a_3+a_4，a_4+a_5 成等差数列。

（Ⅰ）求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$，$n\in N^*$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19．已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F(-c,0)$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，点$M$在椭圆上且位于第一象限，直线$FM$被圆$x^2+y^2=\dfrac{b^2}{4}$截得的线段的长为$c$，$|FM|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅰ）求直线FM的斜率；

（Ⅱ）求椭圆的方程；

（Ⅲ）设动点P在椭圆上，若直线FP的斜率大于$\sqrt{2}$，求直线OP（O为原点）的斜率的取值范围。

20．已知函数$f(x)=nx-x^n,x\in R,$其中$n\in N^*$，且$n\geq 2$.

（Ⅰ）讨论$f(x)$的单调性；

（Ⅱ）设曲线$y=f(x)$与x轴正半轴的交点为P，曲线在点P处的切线方程为$y=g(x)$，

求证：对于任意的正实数x，都有$f(x)\leq g(x)$；

（Ⅲ）若关于x的方程$f(x)=a$（a为实数）有两个正实数根x_1，x_2，求证：$\left|x_2-x_1\right|<\dfrac{a}{1-n}+2$.

2015年高考天津市理科数学真题答案

一、选择题

1．答案：A

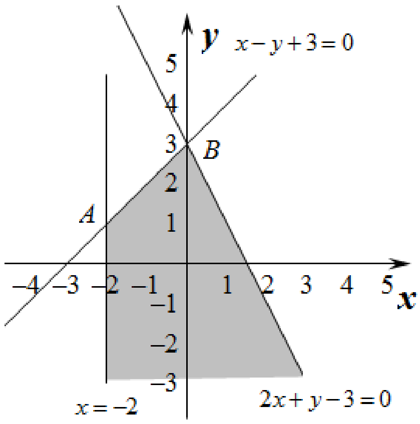
解析过程：

$\complement_U B=\{2,5,8\}$，所以 $A\cap\complement_U B=\{2,5\}$，选 A

2．答案：C

解析过程：

不等式 $\begin{cases}x+2\geq 0.\\ x-y+3\geq 0.\\ 2x+y-3\leq 0.\end{cases}$ 所表示的平面区域如下图所示，



当 $z=x+6y$ 所表示直线经过点 $B(0,3)$ 时，z 有最大值 18，选 C

3．答案：B

解析过程：

输入 $S=20,i=1$；

$i=2\times1,S=20-2=18,2>5$ 不成立；

$i=2\times2=4,S=18-4=14,4>5$ 不成立

$i=2\times4=8,S=14-8=6,8>5$ 成立

输出 6，选 B

4．答案：A

解析过程：

$|x-2|<1\Leftrightarrow -1<x-2<1\Leftrightarrow 1<x<3$，$x^2+x-2>0\Leftrightarrow x<-2$ 或 $x>1$

所以“$|x-2|<1$”是“$x^2+x-2>0$”的充分不必要条件，选 A

5．答案：A

解析过程：

由相交弦定理可知，

$AM\cdot MB=CM\cdot MD,CN\cdot NE=AN\cdot NB$，

又因为M,N是弦AB的三等分点，

所以$AM\cdot MB=AN\cdot NB\therefore CN\cdot NE=CM\cdot MD$，

所以$NE=\dfrac{CM\cdot MD}{CN}=\dfrac{2\times4}{3}=\dfrac{8}{3}$，选 A

6．答案：D

解析过程：

双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，b$>0$）的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，

由点$(2,\sqrt{3})$在渐近线上，所以$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

双曲线的一个焦点在抛物线$y^2=4\sqrt{7}x$准线方程$x=-\sqrt{7}$上，

所以$c=\sqrt{7}$，由此可解得$a=2,b=\sqrt{3}$，

所以双曲线方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$，选 D

7．答案：C

解析过程：

因为函数$f\left(x\right)=2^{|x-m|}-1$为偶函数，所以$m=0$，即$f\left(x\right)=2^{|x|}-1$，

所以$a=f(\log_{0.5}3)=f\left(\log_2\dfrac{1}{3}\right)=2^{\left|\log_2\frac{1}{3}\right|}-1=2^{\log_2 3}-1=3-1=2,$

$b=f\left(\log_2 5\right)=2^{\log_2 5}-1=4,c=f\left(2m\right)=f(0)=2^0-1=0$

所以$c<a<b$，选 C

8．答案：D

解析过程：

由 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & x>2,\end{cases}$ 得 $f(2-x)=\begin{cases}2-|2-x|, x\ge 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$，

所以 $y=f(x)+f(2-x)=\begin{cases}2-|x|+x^2, & x<0\\ 4-|x|-|2-x|, & 0\le x\le 2\\ 2-|2-x|+(x-2)^2, x>2\end{cases}$，

即 $y=f(x)+f(2-x)=\begin{cases}x^2+x+2, & x<0\\ 2, & 0\le x\le 2\\ x^2-5x+8, x>2\end{cases}$

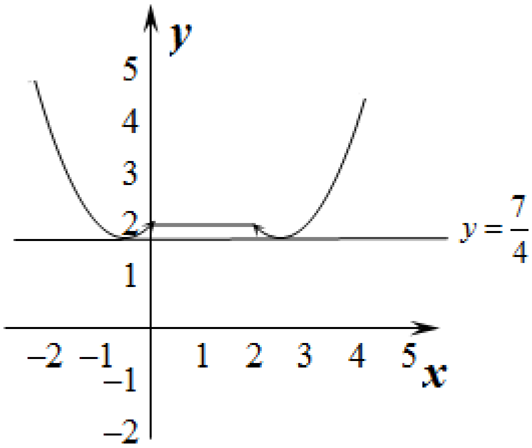
$y=f(x)-g(x)=f(x)+f(2-x)-b$，

所以 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点等价于方程

$f(x)+f(2-x)-b=0$ 有 4 个不同的解，

即函数 $y=b$ 与函数 $y=f(x)+f(2-x)$ 的图象的 4 个公共点，

由图象可知 $\frac{7}{4}<b<2$. 选 D



二、填空题

9．答案：−2

解析过程：

$(1-2i)(a+i)=a+2+(1-2a)i$ 是纯虚数，

所以 $a+2=0$，即 $a=-2$

10．答案：$\frac{8}{3}\pi$

解析过程：

由三视图可知，该几何体是中间为一个底面半径为1，

高为2的圆柱，两端是底面半径为1，高为1的圆锥，

所以该几何体的体积$V=1^2\times\pi\times2+2\times\frac{1}{3}\times1^2\times\pi\times1=\frac{8}{3}\pi$.

11. 答案：$\frac{1}{6}$

解析过程：

两曲线的交点坐标为$(0,0),(1,1)$，

所以它们所围成的封闭图形的面积

$$S=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

12. 答案：

$\frac{15}{16}$

解析过程：

$(x-\frac{1}{4x})^6$展开式的通项为

$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(-\frac{1}{4x})^r=(-\frac{1}{4})^r C_6^r x^{6-2r}$，

由$6-2r=2$得 r=2，

所以$T_3=(-\frac{1}{4})^2 C_6^2 x^2=\frac{15}{16}x^2$，所以该项系数为$\frac{15}{16}$

13. 答案：8

解析过程：

因为$0<A<\pi$，所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

又$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}bc=3\sqrt{15},\therefore bc=24$，

解方程组$\begin{cases}b-c=2\\bc=24\end{cases}$得$b=6,c=4$，由余弦定理得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6^2+4^2-2\times6\times4\times(-\frac{1}{4})=64$，

所以$a=8$.

14．答案：$\dfrac{29}{18}$

解析过程：

因为$\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}=\dfrac{1-9\lambda}{9\lambda}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1-9\lambda}{18\lambda}\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\dfrac{1-9\lambda}{18\lambda}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1+9\lambda}{18\lambda}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}\right)\cdot(\dfrac{1+9\lambda}{18\lambda}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=\dfrac{1+9\lambda}{18\lambda}\overrightarrow{AB}^2+\lambda\overrightarrow{BC}^2+(1+\lambda\dfrac{1+9\lambda}{18\lambda})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\dfrac{1+9\lambda}{18\lambda}\times 4+\lambda+\dfrac{19+9\lambda}{18\lambda}\times 2\times 1\times\cos 120^\circ$

$=\dfrac{2}{9\lambda}+\dfrac{1}{2}\lambda+\dfrac{17}{18}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{9\lambda}\cdot\dfrac{1}{2}\lambda}+\dfrac{17}{18}=\dfrac{29}{18}$

三、解答题

15．答案：（Ⅰ）π；（Ⅱ）最大值$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，最小值$-\dfrac{1}{2}$

解析过程：

（Ⅰ）解：由题意得

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos(2x-\frac{\pi}{3})}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x)-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$$

所以，$f(x)$的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

（Ⅱ）解：因为$f(x)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right]$上是减函数，

在区间$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$上是增函数，

$f(-\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{1}{4}$，$f(-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}$，$f(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以，$f(x)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，最小值为$-\dfrac{1}{2}$.

16．答案：（Ⅰ）$\dfrac{6}{35}$；（Ⅱ）见解析

解析过程：

（Ⅰ）解：由题意得$P(A)=\dfrac{C_2^2C_3^2+C_3^2C_3^2}{C_8^4}=\dfrac{6}{35}$

所以，事件A发生的概率为$\dfrac{6}{35}$.

（Ⅱ）解：随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 4.

$$P(X=k)=\frac{C_5^kC_3^{4-k}}{C_8^4}(k=1,2,3,4).$$

所以，随见变量X的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{14}$

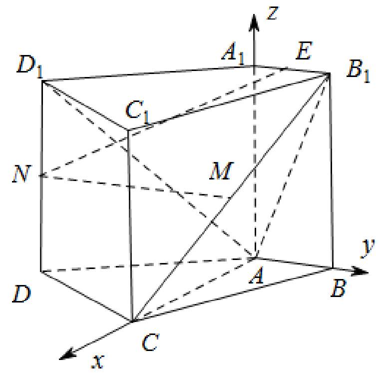
随机变量X的数学期望$E\left(X\right)=1\times\dfrac{1}{14}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{3}{7}+4\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{5}{2}$

17．答案：

见解析

解析过程：

如图，以A为原点建立空间直角坐标系，



依题意可得 $A(0,0,0)$，$B(0,1,0)$, $C(2,0,0)$，$D(1,-2,0)$，

$A_1(0,0,2)$，$B_1(0,1,2)$, $C_1(2,0,2)$, $D(1,-2,2)$.

又因为 M, N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点，得 $M(1,\frac{1}{2},1)$，$N(1,-2,1)$.

（Ⅰ）证明：依题意，可得 $\vec{n}=(0,0,1)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量.

$\overline{MN}=(0,-\frac{5}{2},0)$. 由此可得 $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0$，

又因为直线 $MN\not\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $MN//$ 平面 $ABCD$.

（Ⅱ）解：$\overline{AD_1}=(1,-2,2)$，$\overline{AC}=(2,0,0)$.

设 $\vec{n}_1=(x,y,z)$ 为平面 ACD_1 的法向量，则

$$\begin{cases}\vec{n}_1\bullet\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \vec{n}_1\bullet\overrightarrow{AC}=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}x-2y+2z=0,\\ 2x=0.\end{cases}$$

不妨设 $z=1$，可得 $\vec{n}_1=(0,1,1)$. .

设 $n_2=(x,y,z)$ 为平面 ACB_1 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}_1\bullet\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \vec{n}_1\bullet\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$

又 $\overrightarrow{AB_1}=(0,1,2)$，得 $\begin{cases}y+2z=0,\\ 2x=0.\end{cases}$

不妨设 $z=1$，可得 $\vec{n}_2=(0,-2,1)$.

因此有 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\dfrac{\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\bullet|\vec{n}_2|}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，于是 $\sin\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以，二面角 D_1-AC-B_1 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$。

（III）解：依题意，可设 $\overrightarrow{A_1E}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}$，，其中 $\lambda\in[0,1]$，

则 $E(0,\lambda,2)$，从而 $\overrightarrow{NE}=(-1,\lambda+2,1)$.

又 $n=(0,0,1)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量，

由已知，得 $\cos\langle\overrightarrow{NE},\vec{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{NE}\bullet\vec{n}}{|\overrightarrow{NE}|\bullet|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(\lambda+2)^2+1^2}}=\frac{1}{3}$,

整理得 $\lambda^2+4\lambda-3=0$，又因为 $\lambda\in[0,1]$，解得 $\lambda=\sqrt{7}-2$.

所以，线段 A_1E 的长为 $\sqrt{7}-2$.

18. 答案：

见解析

解析过程：

（Ⅰ）解：由已知，有 $(a_3+a_4)-(a_2+a_3)=(a_4+a_5)-(a_3+a_4)$,

即 $a_4-a_2=a_5-a_3$，所以 $a_2(q-1)=a_3(q-1)$.

又因为 $q\neq 1$，故 $a_3=a_2=2$，由 $a_3=a_1\bullet q$，得 $q=2$.

当 $n=2k-1(k\in N^*)$ 时，$a_n=a_{2k-1}=2^{k-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$；

当 $n=2k(k\in N^*)$ 时，$a_n=a_{2k}=2^k=2^{\frac{n}{2}}$.

所以，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}}, n\text{为奇数}，\\ 2^{\frac{n}{2}}，n\text{为偶数}.\end{cases}$

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）得 $b_n=\dfrac{log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$. 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

则 $S_n=1\times\dfrac{1}{2^0}+2\times\dfrac{1}{2^1}+3\times\dfrac{1}{2^2}+\ldots+(n-1)\times\dfrac{1}{2^{n-2}}+n\times\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ，

$\dfrac{1}{2}S_n=1\times\dfrac{1}{2^1}+2\times\dfrac{1}{2^2}+3\times\dfrac{1}{2^3}+\ldots+(n-1)\times\dfrac{1}{2^{n-1}}+n\times\dfrac{1}{2^n}$，

上述两式相减，得

$$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}$$

整理得，$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.

所以，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$， $n\in N^*$.

19．答案：

（Ⅰ）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；（Ⅱ）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$；（Ⅲ）$(-\infty,\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$

解析过程：

（Ⅰ）解：由已知有 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $a^2=3c^2,b^2=2c^2$.

设直线 FM 的斜率为 $k(k\succ 0)$，则直线 FM 的方程为 $y=k(x+c)$.

由已知，有 $(\dfrac{kc}{\sqrt{k^2+1}})^2+(\dfrac{c}{2})^2=(\dfrac{b}{2})^2$，解得 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3c^2}+\dfrac{y^2}{2c^2}=1$，

直线 FM 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，

两个方程联立，消去 y，整理得 $3x^2+2cx-5c^2=0$，

解得 $x=-\dfrac{5}{3}c$，或 $x=c$.

因为点 M 在第一象限，可得 M 的坐标为$(c,\frac{2\sqrt{3}}{3}c)$. 有$\left|FM\right|=\sqrt{(c+c)^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3}c-0)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

解得$c=1$，所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

（Ⅲ）解：设点 P 的坐标为$\left(x,y\right)$，直线 FP 的斜率为t，

得$t=\frac{y}{x+1}$，即$y=t\left(x+1\right)\left(x\neq-1\right)$，

与椭圆方程联立$\begin{cases}y=t(x+1),\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$消去$y$，

整理得$2x^2+3t^2(x+1)^2=6$.

又由已知，得$t=\sqrt{\frac{6-2x^2}{3(x+1)^2}}>\sqrt{2}$，

解得$-\frac{3}{2}<x<-1$，或$-1<x<0$.

设直线OP的斜率为m，得$m=\frac{y}{x}$，即$y=mx(x\neq0)$，

与椭圆方程联立，整理可得$m^2=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{3}$.

①当$x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right)$时，有$y=t(x+1)<0$，

因此$m>0$，于是$m=\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{2}{3}}$，得$m\in(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

②当$x\in\left(-1,0\right)$时，有$y=t(x+1)>0$，

因此$m<0$，于是$m=-\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{2}{3}}$，得$m\in(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

综上，直线OP的斜率的取值范围是$(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

20．答案：见解析

解析过程：

（Ⅰ）解：由$f(x)=nx-x^n$，

可得$f'(x)=n-nx^{n-1}=n\left(1-x^{n-1}\right)$，

其中$n\in N^*$，且$n\geq 2$.

下面分两种情况讨论：

（1）当n为奇数时.

令$f'(x)$=0，解得$x=1$，或$x=-1$.

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

所以，$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$上单调递减，在$(-1,1)$内单调递增。

（2）当n为偶数时.

当$f'(x)>0$，即$x<1$时，函数$f(x)$单调递增；

当$f'(x)<0$，即$x>1$时，函数$f(x)$单调递减.

所以，$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

（Ⅱ）证明：设点P的坐标为$(x_0,0)$，

则 $x_0=\frac{1}{n^{n-1}}$， $f'(x_0)=n-n^2$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)\left(x-x_0\right)$，

即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$，

令 $F(x)=f(x)-g\left(x\right)$，即 $F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$，

则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$.

由于 $f'(x)=-nx^{n-1}+n$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，

故 $F'(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，

又因为 $F'(x_0)=0$，

所以当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时， $F'(x)>0$，当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时， $F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 内单调递增，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递减，

所以对于任意的正实数 x，都有 $F(x)\le F(x_0)=0$，

即对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\le g\left(x\right)$.

（III）证明：不妨设 $x_1\le x_2$.

由（II）知 $g\left(x\right)=\left(n-n^2\right)\left(x-x_0\right)$，

设方程 $g\left(x\right)=a$ 的根为 $x_2{}'$，可得 $x_2{}'=\frac{a}{n-n^2}+x_0$，

当 $n\ge 2$ 时，在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递减.

又由（II）知 $g\left(x_2\right)\ge f\left(x_2\right)=a=g\left(x_2{}'\right)$，可得 $x_1\le x_2{}'$.

类似地，设曲线 $y=f\left(x\right)$ 在原点处的切线方程为 $y=h\left(x\right)$，

可得 $h\left(x\right)=nx$，

当 $x\in\left(0,+\infty\right)$， $f\left(x\right)-h\left(x\right)=-x^n<0$，

即对于任意的 $x\in\left(0,+\infty\right)$， $f\left(x\right)<h\left(x\right)$.

设方程 $h\left(x\right)=a$ 的根为 x_1'，可得 $x_1'=\dfrac{a}{n}$.

因为 $h\left(x\right)=nx$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递增，

且 $h\left(x_1'\right)=a=f\left(x_1\right)<h\left(x_1\right)$，因此 $x_1'<x_1$.

由此可得 $x_2-x_1<x_2'-x_1'=\dfrac{a}{1-n}+x_0$.

因为 $n\geq2$，所以 $2^{n-1}=\left(1+1\right)^{n-1}\geq1+C_{n-1}^1=1+n-1=n$，

故 $2\geq\dfrac{1}{n^{n-1}}=x_0$. 所以，$\left|x_2-x_1\right|<\dfrac{a}{1-n}+2$.