

2022 年普通高等学校招生全国统一考试数学（天津卷）2022. 06.

一、选择题：本题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 2\}$ ，则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 1, 2\}$ D. $\{0, -1, 1, 2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求出 $\complement_U B$ ，再根据交集的定义可求 $A \cap (\complement_U B)$ 。

【详解】 $\complement_U B = \{-2, 0, 1\}$ ，故 $A \cap (\complement_U B) = \{0, 1\}$ ，

故选：A。

2. “ x 为整数”是“ $2x+1$ 为整数”的（ ）

- | | |
|----------|-------------|
| A. 充分不必要 | B. 必要不充分 |
| C. 充分必要 | D. 既不充分也不必要 |

【答案】A

【解析】

【分析】依据充分不必要条件的定义去判定“ x 为整数”与“ $2x+1$ 为整数”的逻辑关系即可。

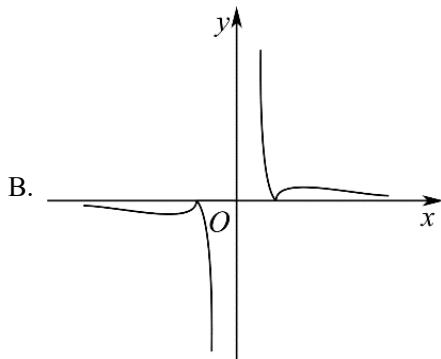
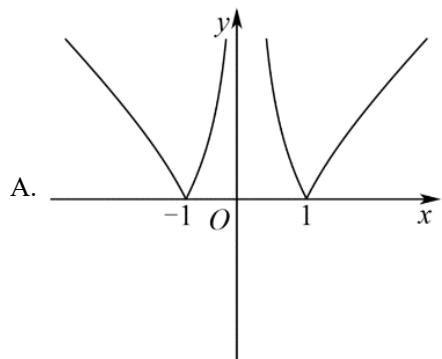
【详解】由题意，若 x 为整数，则 $2x+1$ 为整数，故充分性成立；

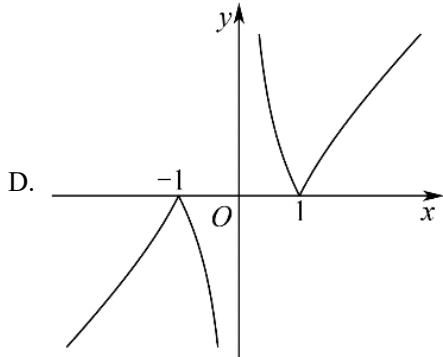
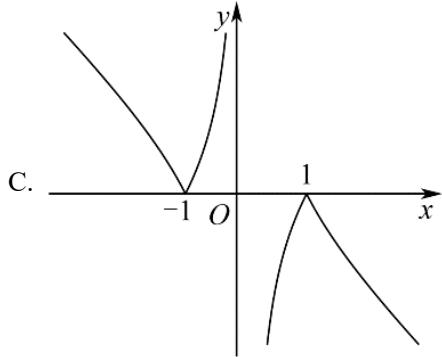
当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $2x+1$ 为整数，但 x 不为整数，故必要性不成立；

所以“ x 为整数”是“ $2x+1$ 为整数”的充分不必要条件。

故选：A。

3. 函数 $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}$ 的图像为（ ）





【答案】D

【解析】

【分析】分析函数 $f(x)$ 的定义域、奇偶性、单调性及其在 $(-\infty, 0)$ 上的函数值符号，结合排除法可得出合适的选项。

【详解】函数 $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，

$$\text{且 } f(-x) = \frac{|(-x)^2 - 1|}{-x} = -\frac{|x^2 - 1|}{x} = -f(x),$$

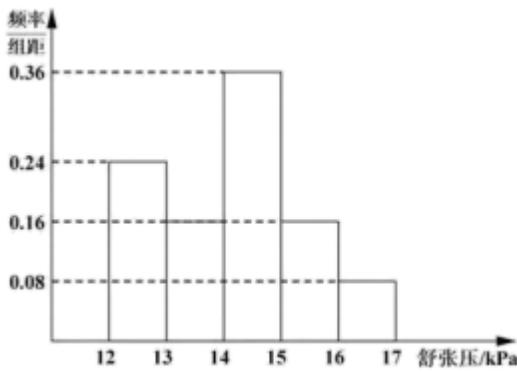
函数 $f(x)$ 为奇函数，A 选项错误；

又当 $x < 0$ 时， $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x} \leq 0$ ，C 选项错误；

当 $x > 1$ 时， $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$ 函数单调递增，故 B 选项错误；

故选：D

4. 为研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为 $[12, 13), [13, 14), [14, 15), [15, 16), [16, 17]$ ，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，…，第五组，右图是根据试验数据制成的频率分布直方图。已知第一组与第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为（ ）



- A. 8 B. 12 C. 16 D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】结合已知条件和频率分布直方图求出志愿者的总人数，进而求出第三组的总人数，从而可以求得结果.

【详解】志愿者的总人数为 $\frac{20}{(0.24+0.16)\times 1}=50$,

所以第三组人数为 $50\times 0.36=18$,

有疗效的人数为 $18-6=12$.

故选：B.

5. 已知 $a=2^{0.7}$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.7}$, $c=\log_2 \frac{1}{3}$, 则 ()

- A. $a > c > b$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $c > a > b$

【答案】C

【解析】

【分析】利用幂函数、对数函数的单调性结合中间值法可得出 a 、 b 、 c 的大小关系.

【详解】因为 $2^{0.7} > \left(\frac{1}{3}\right)^{0.7} > 0 = \log_2 1 > \log_2 \frac{1}{3}$, 故 $a > b > c$.

故答案为：C.

6. 化简 $(2\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$ 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据对数的性质可求代数式的值.

【详解】原式 $=\left(2\times\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)$
 $=\frac{4}{3}\log_2 3\times\frac{3}{2}\log_3 2=2,$

故选：B

7. 已知抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x$, F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点，抛物线的准线过双曲线的左焦点 F_1 ，与双曲线的渐近线交于点 A，若 $\angle F_1 F_2 A=\frac{\pi}{4}$ ，则双曲线的标准方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{10}-y^2=1$ B. $x^2-\frac{y^2}{16}=1$
 C. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ D. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

【答案】C

【解析】

【分析】由已知可得出 c 的值，求出点 A 的坐标，分析可得 $|AF_1|=|F_1F_2|$ ，由此可得出关于 a 、 b 、 c 的方程组，解出这三个量的值，即可得出双曲线的标准方程。

【详解】抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x$ 的准线方程为 $x=-\sqrt{5}$ ，则 $c=\sqrt{5}$ ，则 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{5}, 0)$ ，

不妨设点 A 为第二象限内的点，联立 $\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x \\ x=-c \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} x=-c \\ y=\frac{bc}{a} \end{cases}$ ，即点 A $\left(-c, \frac{bc}{a}\right)$ ，

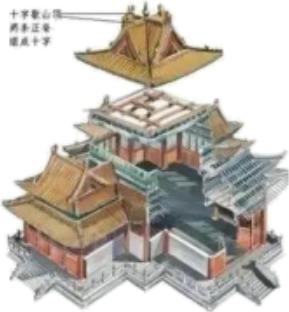
因为 $AF_1 \perp F_1F_2$ 且 $\angle F_1F_2A=\frac{\pi}{4}$ ，则 $\triangle F_1F_2A$ 为等腰直角三角形，

且 $|AF_1|=|F_1F_2|$ ，即 $\frac{bc}{a}=2c$ ，可得 $\frac{b}{a}=2$ ，

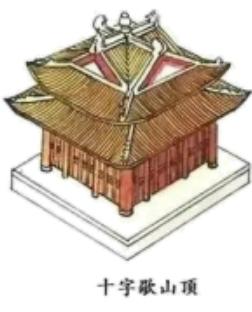
所以， $\begin{cases} \frac{b}{a}=2 \\ c=\sqrt{5} \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}$ ，因此，双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 。

故选：C.

8. 如图，“十字歇山”是由两个直三棱柱重叠后的景象，重叠后的底面为正方形，直三棱柱的底面是顶角为 120° ，腰为 3 的等腰三角形，则该几何体的体积为（ ）



A. 23



B. 24

C. 26

D. 27

【答案】D

【解析】

【分析】作出几何体直观图，由题意结合几何体体积公式即可得组合体的体积.

【详解】该几何体由直三棱柱 $AFD-BHC$ 及直三棱柱 $DGC-AEB$ 组成，作 $HM \perp CB$ 于 M ，如图，

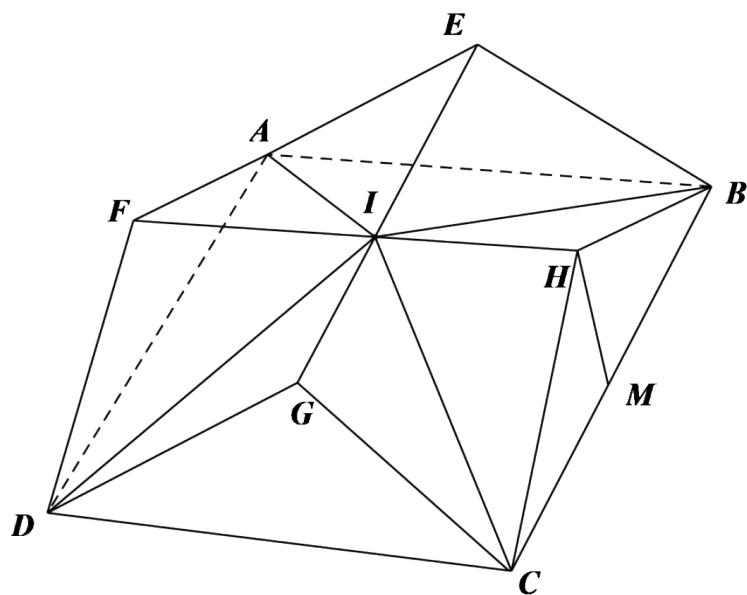
因为 $CH = BH = 3, \angle CHB = 120^\circ$ ，所以 $CM = BM = \frac{3\sqrt{3}}{2}, HM = \frac{3}{2}$ ，

因为重叠后的底面为正方形，所以 $AB = BC = 3\sqrt{3}$ ，

在直棱柱 $AFD-BHC$ 中， $AB \perp$ 平面 BHC ，则 $AB \perp HM$ ，

由 $AB \cap BC = B$ 可得 $HM \perp$ 平面 $ADCB$ ，

设重叠后的 EG 与 FH 交点为 I ，



$$\text{则 } V_{I-BCDA} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}, V_{AFD-BHC} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{3}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{81}{4}$$

$$\text{则该几何体的体积为 } V = 2V_{AFD-BHC} - V_{I-BCDA} = 2 \times \frac{81}{4} - \frac{27}{2} = 27.$$

故选：D.

9. 已知 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, 关于该函数有下列四个说法:

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ;

② $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增;

③ 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$;

④ $f(x)$ 的图象可由 $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到.

以上四个说法中, 正确的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角函数的图象与性质, 以及变换法则即可判断各说法的真假.

【详解】因为 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, ①不正确;

令 $t = 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 而 $y = \frac{1}{2} \sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上递增, 所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, ②正确; 因为

$t = 2x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, $\sin t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, 所以 $f(x) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right]$, ③不正确;

由于 $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin \left[2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right]$, 所以 $f(x)$ 的图象可由 $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平

移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到, ④不正确.

故选: A.

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 试题中包含两个空的, 答对 1 个的给 3 分, 全部答对的给 5 分.

10. 已知 i 是虚数单位, 化简 $\frac{11-3i}{1+2i}$ 的结果为_____.

【答案】 $1-5i$

【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则即可解出.

【详解】 $\frac{11-3i}{1+2i} = \frac{(11-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{11-6-25i}{5} = 1-5i$.

故答案为: $1-5i$.

11. $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式中的常数项为_____.

【答案】15

【解析】

【分析】由题意结合二项式定理可得 $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot 3^r \cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$, 令 $\frac{5-5r}{2} = 0$, 代入即可得解.

【详解】由题意 $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot (\sqrt{x})^{5-r} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^r = C_5^r \cdot 3^r \cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$,

令 $\frac{5-5r}{2} = 0$ 即 $r=1$, 则 $C_5^r \cdot 3^r = C_5^1 \cdot 3 = 15$,

所以 $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式中的常数项为 15.

故答案为: 15.

【点睛】本题考查了二项式定理的应用, 考查了运算求解能力, 属于基础题.

12. 若直线 $x-y+m=0$ ($m>0$) 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 相交所得的弦长为 m , 则 $m=$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】计算出圆心到直线的距离, 利用勾股定理可得出关于 m 的等式, 即可解得 m 的值.

【详解】圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 的圆心坐标为 $(1,1)$, 半径为 $\sqrt{3}$,

圆心到直线 $x-y+m=0$ ($m>0$) 的距离为 $\frac{|1-1+m|}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$,

由勾股定理可得 $\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = 3$, 因为 $m > 0$, 解得 $m = 2$.

故答案为: 2.

13. 52 张扑克牌, 没有大小王, 无放回地抽取两次, 则两次都抽到 A 的概率为_____; 已知第一次抽到的是 A, 则第二次抽取 A 的概率为_____

- 【答案】①. $\frac{1}{221}$ ②. $\frac{1}{17}$

【解析】

【分析】由题意结合概率的乘法公式可得两次都抽到 A 的概率, 再由条件概率的公式即可求得在第一次抽到 A 的条件下, 第二次抽到 A 的概率.

【详解】由题意, 设第一次抽到 A 的事件为 B, 第二次抽到 A 的事件为 C,

$$\text{则 } P(BC) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}, P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{17}.$$

故答案为: $\frac{1}{221}$; $\frac{1}{17}$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$, D 是 AC 中点, $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BE}$, 试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \overrightarrow{DE} 为_____, 若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DE}$, 则 $\angle ACB$ 的最大值为_____

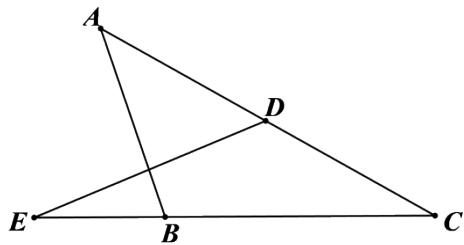
- 【答案】①. $\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ ②. $\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】法一: 根据向量的减法以及向量的数乘即可表示出 \overrightarrow{DE} , 以 $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ 为基底, 表示出 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}$, 由 $AB \perp DE$ 可得 $3\vec{b}^2 + \vec{a}^2 = 4\vec{b} \cdot \vec{a}$, 再根据向量夹角公式以及基本不等式即可求出.

法二: 以点 E 为原点建立平面直角坐标系, 设 $E(0,0), B(1,0), C(3,0), A(x,y)$, 由 $AB \perp DE$ 可得点 A 的轨迹为以 $M(-1,0)$ 为圆心, 以 $r=2$ 为半径的圆, 方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4$, 即可根据几何性质可知, 当且仅当 CA 与 $\odot M$ 相切时, $\angle C$ 最大, 即求出.

【详解】方法一:



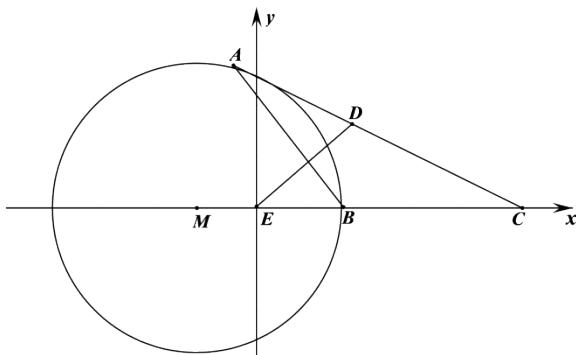
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DE} \Rightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0,$$

$$3\vec{b}^2 + \vec{a}^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \cos \angle ACB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3\vec{b}^2 + \vec{a}^2}{4|\vec{a}| |\vec{b}|} \geq \frac{2\sqrt{3}|\vec{a}||\vec{b}|}{4|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 当且仅当 } |\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}| \text{ 时取等号, 而}$$

$$0 < \angle ACB < \pi, \text{ 所以 } \angle ACB \in (0, \frac{\pi}{6}).$$

故答案为: $\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}; \frac{\pi}{6}$.

方法二: 如图所示, 建立坐标系:



$$E(0,0), B(1,0), C(3,0), A(x,y), \quad \overrightarrow{DE} = \left(-\frac{x+3}{2}, -\frac{y}{2}\right), \quad \overrightarrow{AB} = (1-x, -y),$$

$$\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\frac{x+3}{2}\right)(x-1) + \frac{y^2}{2} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4, \text{ 所以点 } A \text{ 的轨迹是以 } M(-1,0) \text{ 为圆心, 以}$$

$$r=2 \text{ 为半径的圆, 当且仅当 } CA \text{ 与 } \odot M \text{ 相切时, } \angle C \text{ 最大, 此时 } \sin C = \frac{r}{CM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \angle C = \frac{\pi}{6}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}; \frac{\pi}{6}$.

15. 设 $a \in \mathbf{R}$, 对任意实数 x , 记 $f(x) = \min \{|x| - 2, x^2 - ax + 3a - 5\}$. 若 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a \geq 10$

【解析】

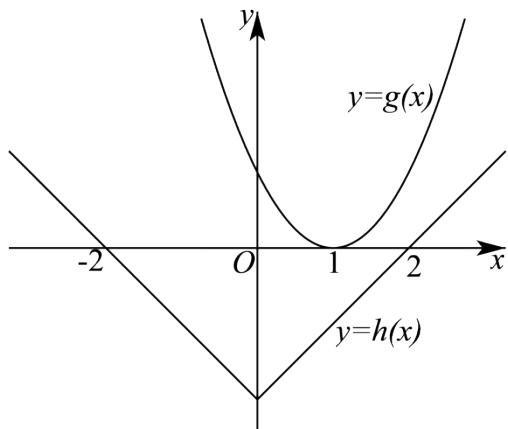
【分析】设 $g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$, $h(x) = |x| - 2$, 分析可知函数 $g(x)$ 至少有一个零点, 可得出 $\Delta \geq 0$, 求出 a 的取值范围, 然后对实数 a 的取值范围进行分类讨论, 根据题意可得出关于实数 a 的不等式, 综合可求得实数 a 的取值范围.

【详解】设 $g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$, $h(x) = |x| - 2$, 由 $|x| - 2 = 0$ 可得 $x = \pm 2$.

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则函数 $g(x)$ 至少有一个零点, 则 $\Delta = a^2 - 12a + 20 \geq 0$,

解得 $a \leq 2$ 或 $a \geq 10$.

①当 $a = 2$ 时, $g(x) = x^2 - 2x + 1$, 作出函数 $g(x)$ 、 $h(x)$ 的图象如下图所示:



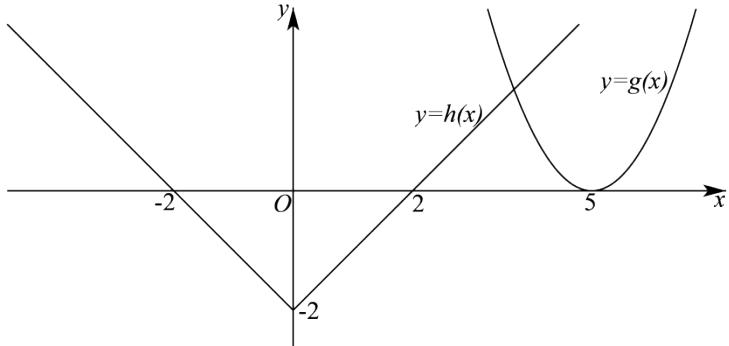
此时函数 $f(x)$ 只有两个零点, 不合乎题意;

②当 $a < 2$ 时, 设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_1 、 x_2 ($x_1 < x_2$),

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则 $x_2 \leq -2$,

所以, $\begin{cases} \frac{a}{2} < -2 \\ g(-2) = 4 + 5a - 5 \geq 0 \end{cases}$, 解得 $a \in \emptyset$;

③当 $a = 10$ 时, $g(x) = x^2 - 10x + 25$, 作出函数 $g(x)$ 、 $h(x)$ 的图象如下图所示:



由图可知，函数 $f(x)$ 的零点个数为 3，合乎题意；

④当 $a > 10$ 时，设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_3 、 x_4 ($x_3 < x_4$)，

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则 $x_3 \geq 2$ ，

$$\text{可得} \begin{cases} \frac{a}{2} > 2 \\ g(2) = 4 + a - 5 \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } a > 4, \text{此时 } a > 10.$$

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[10, +\infty)$.

故答案为： $[10, +\infty)$.

【点睛】方法点睛：已知函数有零点（方程有根）求参数值（取值范围）常用的方法：

- (1) 直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围；
- (2) 分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决；
- (3) 数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，利用数形结合的方法求解。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c . 已知 $a = \sqrt{6}$, $b = 2c$, $\cos A = -\frac{1}{4}$.

(1) 求 c 的值；

(2) 求 $\sin B$ 的值；

(3) 求 $\sin(2A - B)$ 的值.

【答案】(1) $c = 1$

$$(2) \sin B = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$(3) \sin(2A-B)=\frac{\sqrt{10}}{8}$$

【解析】

【分析】(1) 根据余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 以及 $b = 2c$ 解方程组即可求出;

(2) 由 (1) 可求出 $b = 2$, 再根据正弦定理即可解出;

(3) 先根据二倍角公式求出 $\sin 2A, \cos 2A$, 再根据两角差的正弦公式即可求出.

【小问 1 详解】

因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $6 = b^2 + c^2 + \frac{1}{2}bc$, 而 $b = 2c$, 代入得 $6 = 4c^2 + c^2 + c^2$, 解得:

$$c = 1.$$

【小问 2 详解】

由 (1) 可求出 $b = 2$, 而 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 又 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

【小问 3 详解】

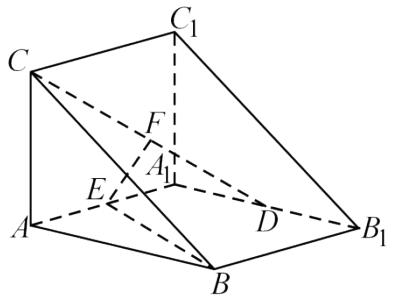
因为 $\cos A = -\frac{1}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, 故 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, 又 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 所以

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{8}, \quad \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}, \quad \text{而}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \text{所以} \quad \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{故} \sin(2A-B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right) \times \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{7}{8} \times \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{8}.$$

17. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AB = AC = 2$, $AA_1 \perp AB$, $AC \perp AB$, D 为 A_1B_1 的中点, E 为 AA_1 的中点, F 为 CD 的中点.



- (1) 求证: $EF \parallel$ 平面 ABC ;
- (2) 求直线 BE 与平面 CC_1D 所成角的正弦值;
- (3) 求平面 A_1CD 与平面 CC_1D 所成二面角的余弦值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{4}{5}$

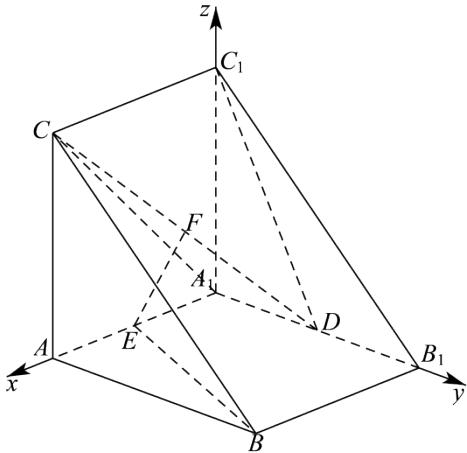
(3) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

- 【分析】**(1) 以点 A_1 为坐标原点, A_1A 、 A_1B_1 、 A_1C_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系, 利用空间向量法可证得结论成立;
- (2) 利用空间向量法可求得直线 BE 与平面 CC_1D 夹角的正弦值;
 - (3) 利用空间向量法可求得平面 A_1CD 与平面 CC_1D 夹角的余弦值.

【小问 1 详解】

证明: 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 且 $AC \perp AB$, 则 $A_1C_1 \perp A_1B_1$ 以点 A_1 为坐标原点, A_1A 、 A_1B_1 、 A_1C_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系,



则 $A(2,0,0)$ 、 $B(2,2,0)$ 、 $C(2,0,2)$ 、 $A_1(0,0,0)$ 、 $B_1(0,0,2)$ 、 $C_1(0,0,2)$ 、 $D(0,1,0)$ 、

$$E(1,0,0)、F\left(1,\frac{1}{2},1\right), \text{ 则 } \overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{2},1\right),$$

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$ ，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\vec{m}=0$ ，故 $\overrightarrow{EF}\perp\vec{m}$ ，

$\therefore EF \not\subset$ 平面 ABC ，故 $EF//$ 平面 ABC .

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \overrightarrow{CC_1}=(2,0,0), \quad \overrightarrow{C_1D}=(0,1,-2), \quad \overrightarrow{EB}=(1,2,0),$$

$$\text{设平面 } CC_1D \text{ 的法向量为 } \vec{u}=(x_1,y_1,z_1), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{u}\cdot\overrightarrow{CC_1}=2x_1=0 \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{C_1D}=y_1-2z_1=0 \end{cases},$$

$$\text{取 } y_1=2, \text{ 可得 } \vec{u}=(0,2,1), \quad \cos<\overrightarrow{EB},\vec{u}>=\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{EB}|\cdot|\vec{u}|}=\frac{4}{5}.$$

因此，直线 BE 与平面 CC_1D 夹角的正弦值为 $\frac{4}{5}$.

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \overrightarrow{A_1C}=(2,0,2), \quad \overrightarrow{A_1D}=(0,1,0),$$

$$\text{设平面 } A_1CD \text{ 的法向量为 } \vec{v}=(x_2,y_2,z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{v}\cdot\overrightarrow{A_1C}=2x_2+2z_2=0 \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{A_1D}=y_2=0 \end{cases},$$

$$\text{取 } x_2=1, \text{ 可得 } \vec{v}=(1,0,-1), \text{ 则 } \cos<\vec{u},\vec{v}>=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=-\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10},$$

因此，平面 A_1CD 与平面 CC_1D 夹角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $(S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1}b_{n+1} - S_n b_n$;

(3) 求 $\sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] b_k$.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}$

(2) 证明见解析 (3) $\frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9}$

【解析】

【分析】(1) 利用等差等比数列的通项公式进行基本量运算即可得解;

(2) 由等比数列的性质及通项与前 n 项和的关系结合分析法即可得证;

(3) 先求得 $[a_{2k} - (-1)^{2k-1} a_{2k-1}] b_{2k-1} + [a_{2k+1} - (-1)^{2k} a_{2k}] b_{2k}$, 进而由并项求和可得 $T_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k+1}$,

再结合错位相减法可得解.

【小问 1 详解】

设 $\{a_n\}$ 公差为 d , $\{b_n\}$ 公比为 q , 则 $a_n = 1 + (n-1)d, b_n = q^{n-1}$,

由 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = 1$ 可得 $\begin{cases} 1+d-q=1 \\ 1+2d-q^2=1 \end{cases} \Rightarrow d=q=2$ ($d=q=0$ 舍去),

所以 $a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}$;

【小问 2 详解】

证明: 因为 $b_{n+1} = 2b_n \neq 0$, 所以要证 $(S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1}b_{n+1} - S_n b_n$,

即证 $(S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1} \cdot 2b_n - S_n b_n$, 即证 $S_{n+1} + a_{n+1} = 2S_{n+1} - S_n$,

即证 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$,

而 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 显然成立, 所以 $(S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1} \cdot b_{n+1} - S_n \cdot b_n$;

【小问 3 详解】

因为 $[a_{2k} - (-1)^{2k-1} a_{2k-1}] b_{2k-1} + [a_{2k+1} - (-1)^{2k} a_{2k}] b_{2k}$
 $= (4k-1+4k-3) \times 2^{2k-1} + [4k+1-(4k-1)] \times 2^{2k} = k \times 4^{k+1}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] b_k &= \sum_{k=1}^n [(a_{2k} - (-1)^{2k-1} a_{2k-1}) b_{2k-1} + (a_{2k+1} - (-1)^{2k} a_{2k}) b_{2k}] \\ &= \sum_{k=1}^n k \times 4^{k+1}, \end{aligned}$$

$$\text{设 } T_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k+1}$$

$$\text{所以 } T_n = 1 \times 4^2 + 2 \times 4^3 + 3 \times 4^4 + \cdots + n \times 4^{n+1},$$

$$\text{则 } 4T_n = 1 \times 4^3 + 2 \times 4^4 + 3 \times 4^5 + \cdots + n \times 4^{n+2},$$

$$\text{作差得 } -3T_n = 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots + 4^{n+1} - n \times 4^{n+2} = \frac{4^2(1-4^n)}{1-4} - n \times 4^{n+2}$$

$$= \frac{(1-3n)4^{n+2} - 16}{3},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] b_k = \frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9}.$$

$$19. \text{ 椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的右焦点为 } F \text{、右顶点为 } A \text{、上顶点为 } B \text{，且满足 } \frac{|BF|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(1) 求椭圆的离心率 e ；

(2) 直线 l 与椭圆有唯一公共点 M ，与 y 轴相交于 N (N 异于 M)。记 O 为坐标原点，若 $|OM| = |ON|$ ，

且 $\triangle OMN$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，求椭圆的标准方程。

$$\text{【答案】(1) } e = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(2) \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

【解析】

【分析】(1) 根据已知条件可得出关于 a 、 b 的等量关系，由此可求得该椭圆的离心率的值；

(2) 由 (1) 可知椭圆的方程为 $x^2 + 3y^2 = a^2$ ，设直线 l 的方程为 $y = kx + m$ ，将直线 l 的方程与椭圆方程联立，由 $\Delta = 0$ 可得出 $3m^2 = a^2(1+3k^2)$ ，求出点 M 的坐标，利用三角形的面积公式以及已知条件可求

得 a^2 的值，即可得出椭圆的方程。

【小问 1 详解】

$$\text{解： } \frac{|BF|}{|AB|} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4a^2 = 3(b^2 + a^2) \Rightarrow a^2 = 3b^2,$$

$$\text{离心率为 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【小问 2 详解】

解：由（1）可知椭圆的方程为 $x^2 + 3y^2 = a^2$ ，

易知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y = kx + m$ ，

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 3y^2 = a^2 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + (3m^2 - a^2) = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 36k^2m^2 - 4(1 + 3k^2)(3m^2 - a^2) = 0 \Rightarrow 3m^2 = a^2(1 + 3k^2), \quad ①$$

$$x_M = -\frac{3km}{3k^2 + 1}, \quad y_M = kx_M + m = \frac{m}{1 + 3k^2},$$

$$\text{由 } |OM| = |ON| \text{ 可得 } m^2 = \frac{m^2(9k^2 + 1)}{(3k^2 + 1)^2}, \quad ②$$

$$\text{由 } S_{\triangle OMN} = \sqrt{3} \text{ 可得 } \frac{1}{2}|m| \cdot \frac{|3km|}{1 + 3k^2} = \sqrt{3}, \quad ③$$

$$\text{联立 } ①②③ \text{ 可得 } k^2 = \frac{1}{3}, \quad m^2 = 4, \quad a^2 = 6, \quad \text{故椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

20. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = e^x - a \sin x, g(x) = b\sqrt{x}$

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有公共点，

(i) 当 $a = 0$ 时，求 b 的取值范围；

(ii) 求证： $a^2 + b^2 > e$.

【答案】(1) $y = (1 - a)x + 1$

(2) (i) $b \in [\sqrt{2e}, +\infty)$; (ii) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 求出 $f'(0)$ 可求切线方程;

(2) (i) 当 $a=0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点即为 $s(t)=e^{t^2}-bt, t \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上有零点,

求导后分类讨论结合零点存在定理可求 $b \in [\sqrt{2e}, +\infty)$.

(ii) 曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点即 $a \sin x_0 + b \sqrt{x_0} - e^{x_0} = 0$, 利用点到直线的距离得到

$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0 + x_0}}$, 利用导数可证 $\frac{e^{2x}}{\sin^2 x + x} > e$, 从而可得不等式成立.

【小问 1 详解】

$f'(x)=e^x-a \cos x$, 故 $f'(0)=1-a$, 而 $f(0)=1$,

曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=(1-a)(x-0)+1$ 即 $y=(1-a)x+1$.

【小问 2 详解】

(i) 当 $a=0$ 时,

因为曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点, 故 $e^x=b\sqrt{x}$ 有解,

设 $t=\sqrt{x}$, 故 $x=t^2$, 故 $e^{t^2}=bt$ 在 $[0, +\infty)$ 上有解,

设 $s(t)=e^{t^2}-bt, t \geq 0$, 故 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有零点,

而 $s'(t)=2te^{t^2}-b, t>0$,

若 $b=0$, 则 $s(t)=e^{t^2}>0$ 恒成立, 此时 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无零点,

若 $b<0$, 则 $s'(t)>0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数,

而 $s(0)=1>0$, $s(t) \geq s(0)=1$, 故 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无零点,

故 $b>0$,

设 $u(t)=2te^{t^2}-b, t>0$, 则 $u'(t)=(2+4t^2)e^{t^2}>0$,

故 $u(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

而 $u(0)=-b<0$, $u(b)=b(2e^{b^2}-1)>0$,

故 $u(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 t_0 ,

且 $0 < t < t_0$ 时, $u(t) < 0$; $t > t_0$ 时, $u(t) > 0$;

故 $0 < t < t_0$ 时, $s'(t) < 0$; $t > t_0$ 时, $s'(t) > 0$;

所以 $s(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上为减函数，在 $(t_0, +\infty)$ 上为增函数，

故 $s(t)_{\min} = s(t_0)$ ，

因为 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有零点，故 $s(t_0) \leq 0$ ，故 $e^{t_0^2} - bt_0 \leq 0$ ，

而 $2t_0 e^{t_0^2} - b = 0$ ，故 $e^{t_0^2} - 2t_0^2 e^{t_0^2} \leq 0$ 即 $t_0 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

设 $v(t) = 2te^{t^2}, t > 0$ ，则 $v'(t) = (2 + 4t^2)e^{t^2} > 0$ ，

故 $v(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

而 $b = 2t_0 e^{t_0^2}$ ，故 $b \geq \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}e$ 。

(ii) 因为曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有公共点，

所以 $e^x - a \sin x = b\sqrt{x}$ 有解 x_0 ，其中 $x_0 \geq 0$ ，

若 $x_0 = 0$ ，则 $1 - a \times 0 = b \times 0$ ，该式不成立，故 $x_0 > 0$ 。

故 $a \sin x_0 + b\sqrt{x_0} - e^{x_0} = 0$ ，考虑直线 $a \sin x_0 + b\sqrt{x_0} - e^{x_0} = 0$ 上的动点 (a, b) 之间的距离，

故 $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0 + x_0}}$ ，所以 $a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2x_0}}{\sin^2 x_0 + x_0}$ ，

下证：对任意 $x > 0$ ，总有 $|\sin x| < x$ ，

证明：当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时，有 $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$ ，故 $|\sin x| < x$ 成立。

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，即证 $\sin x < x$ ，

设 $p(x) = \sin x - x$ ，则 $p'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ （不恒为零），

故 $p(x) = \sin x - x$ 在 $[0, +\infty)$ 上为减函数，故 $p(x) < p(0) = 0$ 即 $\sin x < x$ 成立。

综上， $|\sin x| < x$ 成立。

下证：当 $x > 0$ 时， $e^x > x + 1$ 恒成立，

$q(x) = e^x - 1 - x, x > 0$ ，则 $q'(x) = e^x - 1 > 0$ ，

故 $q(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，故 $q(x) > q(0) = 0$ 即 $e^x > x + 1$ 恒成立。

下证： $\frac{e^{2x}}{\sin^2 x + x} > e$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，即证： $e^{2x-1} > \sin^2 x + x$ ，

即证： $2x - 1 + 1 \geq \sin^2 x + x$ ，即证： $x \geq \sin^2 x$ ，

而 $x > |\sin x| \geq \sin^2 x$ ，故 $x \geq \sin^2 x$ 成立。

故 $\frac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0 + x_0}} > e$ ，即 $a^2 + b^2 > e$ 成立。

【点睛】思路点睛：导数背景下零点问题，注意利用函数的单调性结合零点存在定理来处理，而多变量的不等式的成立问题，注意从几何意义取构建不等式关系，再利用分析法来证明目标不等式。

