

# 2021年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

## 数 学

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共4页，选择题部分1至2页；非选择题部分3至4页。满分150分。考试用时120分钟。

考生注意：

1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的位置上。
2. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

参考公式：

如果事件A, B互斥，那么  $P(A+B) = P(A) + P(B)$

柱体的体积公式  $V = Sh$

如果事件A, B相互独立，那么  $P(AB) = P(A)P(B)$

其中  $S$  表示柱体的底面积

如果事件A在一次试验中发生的概率是p，那么n次独立重复试验中事件A恰好

，  $h$  表示柱体的高

发生k次的概率  $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ )

锥体的体积公式  $V = \frac{1}{3}Sh$

台体的体积公式  $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$

其中  $S$  表示锥体的底面积

其中  $S_1, S_2$  分别表示台体的上、下底面积， $h$  表示台体的高

，  $h$  表示锥体的高

球的表面积公式

$S = 4\pi R^2$

球的体积公式

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

其中  $R$  表示球的半径

### 一、选择题

1. 设集合  $A = \{x | x \geq 1\}$ ,  $B = \{x | -1 < x < 2\}$ , 则  $A \cap B = (\quad)$

- A.  $\{x | x > -1\}$       B.  $\{x | x \geq 1\}$       C.  $\{x | -1 < x < 1\}$       D.  $\{x | 1 \leq x < 2\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意结合交集的定义可得结果.

【详解】由交集的定义结合题意可得：  $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 2\}$ .

故选：D.

2. 已知  $a \in R$ ,  $(1+ai)i = 3+i$ , ( $i$ 为虚数单位), 则  $a =$  ( )

- A. -1      B. 1      C. -3      D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】首先计算左侧的结果, 然后结合复数相等的充分必要条件即可求得实数  $a$  的值.

【详解】 $(1+ai)i = i + ai^2 = i - a = -a + i = 3 + i$ ,

利用复数相等的充分必要条件可得:  $-a = 3, \therefore a = -3$ .

故选：C.

3. 已知非零向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , 则“ $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ”是“ $\vec{a} = \vec{b}$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】考虑两者之间的推出关系后可得两者之间的条件关系.

【详解】如图所示,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ , 当  $AB \perp OC$  时,  $\vec{a} - \vec{b}$  与  $\vec{c}$  垂直,

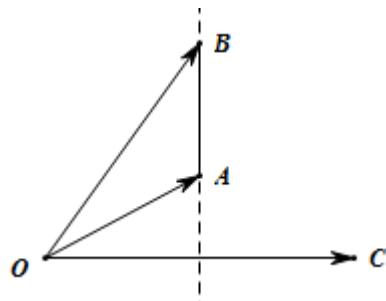
$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ , 所以  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$  成立, 此时  $\vec{a} \neq \vec{b}$ ,

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$  不是  $\vec{a} = \vec{b}$  的充分条件,

当  $\vec{a} = \vec{b}$  时,  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ ,  $\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{0} \cdot \vec{c} = 0$ ,  $\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$  成立,

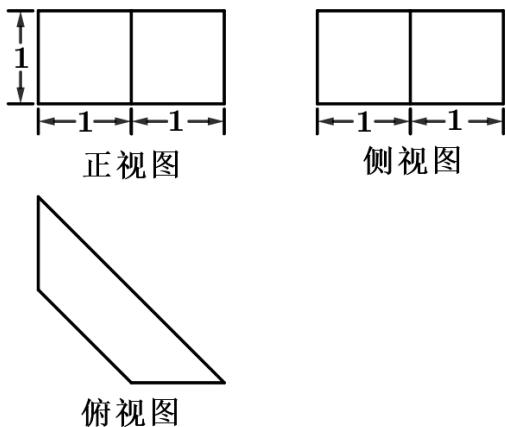
$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$  是  $\vec{a} = \vec{b}$  的必要条件,

综上, “ $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ”是“ $\vec{a} = \vec{b}$ ”的必要不充分条件



故选：B.

4. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（ ）



- A.  $\frac{3}{2}$       B. 3      C.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       D.  $3\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

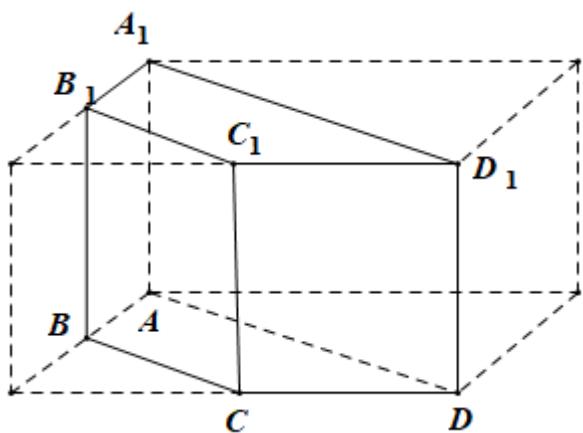
【分析】根据三视图可得如图所示的几何体，根据棱柱的体积公式可求其体积.

【详解】几何体为如图所示的四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，其高为1，底面为等腰梯形  $ABCD$ ，

该等腰梯形的上底为  $\sqrt{2}$ ，下底为  $2\sqrt{2}$ ，腰长为1，故梯形的高为  $\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$$\text{故 } V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{3}{2},$$

故选：A.



5. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \\ 2x+3y-1 \leq 0 \end{cases}$ ，则  $z = x - \frac{1}{2}y$  的最小值是（ ）

A. -2

B.  $-\frac{3}{2}$

C.  $-\frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{10}$

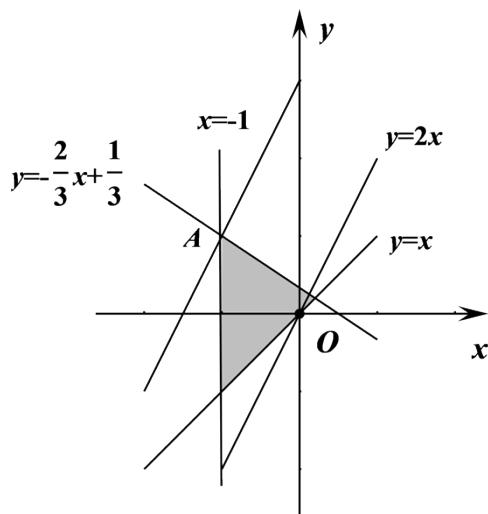
【答案】B

【解析】

【分析】画出满足条件的可行域，目标函数化为  $y = 2x - 2z$ ，求出过可行域点，且斜率为2的直线在y轴上截距的最大值即可。

【详解】画出满足约束条件  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \\ 2x+3y-1 \leq 0 \end{cases}$  的可行域，

如下图所示：



目标函数  $z = x - \frac{1}{2}y$  化为  $y = 2x - 2z$ ，

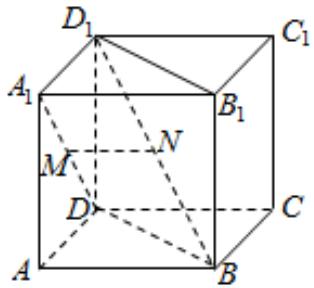
由  $\begin{cases} x = -1 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ ，设  $A(-1,1)$ ，

当直线  $y = 2x - 2z$  过 A 点时，

$z = x - \frac{1}{2}y$  取得最小值为  $-\frac{3}{2}$ 。

故选：B

6. 如图已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ， $M, N$  分别是  $A_1D, D_1B$  的中点，则（ ）

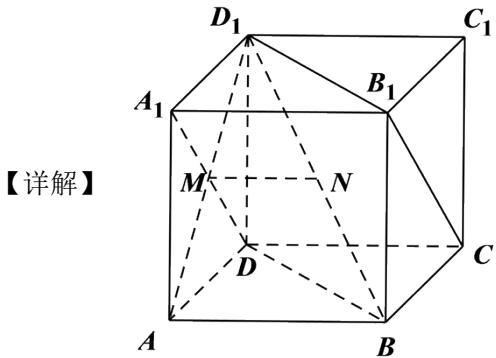


- A. 直线  $A_1D$  与直线  $D_1B$  垂直, 直线  $MN // \text{平面 } ABCD$
- B. 直线  $A_1D$  与直线  $D_1B$  平行, 直线  $MN \perp \text{平面 } BDD_1B_1$
- C. 直线  $A_1D$  与直线  $D_1B$  相交, 直线  $MN // \text{平面 } ABCD$
- D. 直线  $A_1D$  与直线  $D_1B$  异面, 直线  $MN \perp \text{平面 } BDD_1B_1$

**【答案】**A

**【解析】**

**【分析】**由正方体间的垂直、平行关系, 可证  $MN // AB, A_1D \perp \text{平面 } ABD_1$ , 即可得出结论.



连  $AD_1$ , 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,

$M$  是  $A_1D$  的中点, 所以  $M$  为  $AD_1$  中点,

又  $N$  是  $D_1B$  的中点, 所以  $MN // AB$ ,

$MN \not\subset \text{平面 } ABCD, AB \subset \text{平面 } ABCD$ ,

所以  $MN // \text{平面 } ABCD$ .

因为  $AB$  不垂直  $BD$ , 所以  $MN$  不垂直  $BD$

则  $MN$  不垂直平面  $BDD_1B_1$ , 所以选项B,D不正确;

在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AD_1 \perp A_1D$ ,

$AB \perp$  平面  $AA_1D_1D$ ，所以  $AB \perp A_1D$ ，

$AD_1 \cap AB = A$ ，所以  $A_1D \perp$  平面  $ABD_1$ ，

$D_1B \subset$  平面  $ABD_1$ ，所以  $A_1D \perp D_1B$ ，

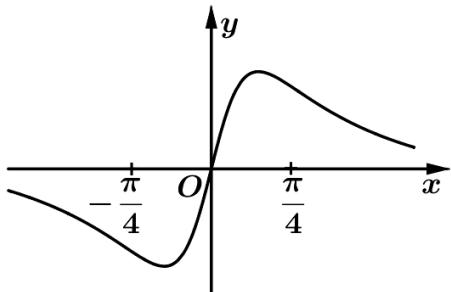
且直线  $A_1D, D_1B$  是异面直线，

所以选项C错误，选项A正确.

故选：A.

**【点睛】**关键点点睛：熟练掌握正方体中的垂直、平行关系是解题的关键，如两条棱平行或垂直，同一个面对角线互相垂直，正方体的对角线与面的对角线是相交但不垂直或异面垂直关系。

7. 已知函数  $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ ,  $g(x) = \sin x$ ，则图象为如图的函数可能是（ ）



- A.  $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$       B.  $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4}$   
C.  $y = f(x)g(x)$       D.  $y = \frac{g(x)}{f(x)}$

**【答案】**D

**【解析】**

**【分析】**由函数的奇偶性可排除A、B，结合导数判断函数的单调性可判断C，即可得解。

**【详解】**对于A， $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4} = x^2 + \sin x$ ，该函数为非奇非偶函数，与函数图象不符，排除A；

对于B， $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4} = x^2 - \sin x$ ，该函数为非奇非偶函数，与函数图象不符，排除B；

对于C， $y = f(x)g(x) = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\sin x$ ，则  $y' = 2x\sin x + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\cos x$ ，

当  $x = \frac{\pi}{4}$  时， $y' = \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ ，与图象不符，排除C。

故选：D.

8.

已知  $\alpha, \beta, \gamma$  是互不相同的锐角, 则在  $\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma \cos \alpha$  三个值中, 大于  $\frac{1}{2}$  的个数的最大值是 ( )

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】利用基本不等式或排序不等式得  $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \leq \frac{3}{2}$ , 从而可判断三个代数式不可能均大于  $\frac{1}{2}$ , 再结合特例可得三式中大于  $\frac{1}{2}$  的个数的最大值.

【详解】法1: 由基本不等式有  $\sin \alpha \cos \beta \leq \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta}{2}$ ,

同理  $\sin \beta \cos \gamma \leq \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \gamma}{2}$ ,  $\sin \gamma \cos \alpha \leq \frac{\sin^2 \gamma + \cos^2 \alpha}{2}$ ,

故  $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \leq \frac{3}{2}$ ,

故  $\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma \cos \alpha$  不可能均大于  $\frac{1}{2}$ .

取  $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{4}$ ,

则  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \sin \beta \cos \gamma = \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}, \sin \gamma \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}$ ,

故三式中大于  $\frac{1}{2}$  的个数的最大值为2,

故选: C.

法2: 不妨设  $\alpha < \beta < \gamma$ , 则  $\cos \alpha > \cos \beta > \cos \gamma, \sin \alpha < \sin \beta < \sin \gamma$ ,

由排列不等式可得:

$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \leq \sin \alpha \cos \gamma + \sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \alpha$ ,

而  $\sin \alpha \cos \gamma + \sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \alpha = \sin(\gamma + \alpha) + \frac{1}{2} \sin 2\beta \leq \frac{3}{2}$ ,

故  $\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma \cos \alpha$  不可能均大于  $\frac{1}{2}$ .

取  $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{4}$ ,

则  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \sin \beta \cos \gamma = \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}, \sin \gamma \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}$ ,

故三式中大于  $\frac{1}{2}$  的个数的最大值为2,

故选: C.

【点睛】思路分析: 代数式的大小问题, 可根据代数式的积的特征选择用基本不等式或拍雪进行放缩, 注意根据三角变换的公式特征选择放缩的方向.

9.

已知  $a, b \in \mathbb{R}, ab > 0$ , 函数  $f(x) = ax^2 + b (x \in \mathbb{R})$ . 若  $f(s-t), f(s), f(s+t)$  成等比数列, 则平面上点

$(s, t)$  的轨迹是 ( )

- A. 直线和圆      B. 直线和椭圆      C. 直线和双曲线      D. 直线和抛物线

【答案】C

【解析】

【分析】首先利用等比数列得到等式, 然后对所得的等式进行恒等变形即可确定其轨迹方程.

【详解】由题意得  $f(s-t)f(s+t) = [f(s)]^2$ , 即  $[a(s-t)^2 + b][a(s+t)^2 + b] = (as^2 + b)^2$ ,

对其进行整理变形:

$$(as^2 + at^2 - 2ast + b)(as^2 + at^2 + 2ast + b) = (as^2 + b)^2,$$

$$(as^2 + at^2 + b)^2 - (2ast)^2 - (as^2 + b)^2 = 0,$$

$$(2as^2 + at^2 + 2b)at^2 - 4a^2s^2t^2 = 0,$$

$$-2a^2s^2t^2 + a^2t^4 + 2abt^2 = 0,$$

$$\text{所以 } -2as^2 + at^2 + 2b = 0 \text{ 或 } t = 0,$$

其中  $\frac{s^2}{a} - \frac{t^2}{2b} = 1$  为双曲线,  $t = 0$  为直线.

故选: C.

【点睛】关键点点睛: 本题考查轨迹方程, 关键之处在于由题意对所得的等式进行恒等变形, 提现了核心素养中的逻辑推理素养和数学运算素养, 属于中等题.

10. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}} (n \in \mathbb{N}^*)$ . 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则 ( )

- A.  $\frac{1}{2} < S_{100} < 3$       B.  $3 < S_{100} < 4$       C.  $4 < S_{100} < \frac{9}{2}$       D.  $\frac{9}{2} < S_{100} < 5$

【答案】A

【解析】

【分析】显然可知,  $S_{100} > \frac{1}{2}$ , 利用倒数法得到  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} = \left( \frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$ , 再放缩可得

$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2}$ , 由累加法可得  $a_n \geq \frac{4}{(n+1)^2}$ , 进而由  $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$  局部放缩可得  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+1}{n+3}$ , 然后

利用累乘法求得  $a_n \leq \frac{6}{(n+1)(n+2)}$ , 最后根据裂项相消法即可得到  $S_{100} < 3$ , 从而得解.

【详解】因为  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}} (n \in \mathbb{N}^*)$ , 所以  $a_n > 0, S_{100} > \frac{1}{2}$ .

由  $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} = \left( \frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} < \left( \frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2}$ , 即  $\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}} < \frac{1}{2}$

根据累加法可得,  $\frac{1}{\sqrt{a_n}} \leq 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$ , 当且仅当  $n=1$  时取等号,

$\therefore a_n \geq \frac{4}{(n+1)^2} \quad \therefore a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}} \leq \frac{a_n}{1+\frac{2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+3} a_n$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+1}{n+3}$ ,

由累乘法可得  $a_n \leq \frac{6}{(n+1)(n+2)}$ , 当且仅当  $n=1$  时取等号,

由裂项求和法得:

所以  $S_{100} \leq 6 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} \right) = 6 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{102} \right) < 3$ , 即  $\frac{1}{2} < S_{100} < 3$ .

故选: A.

【点睛】本题解题关键是通过倒数法先找到  $\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}$  的不等关系, 再由累加法可求得  $a_n \geq \frac{4}{(n+1)^2}$ , 由

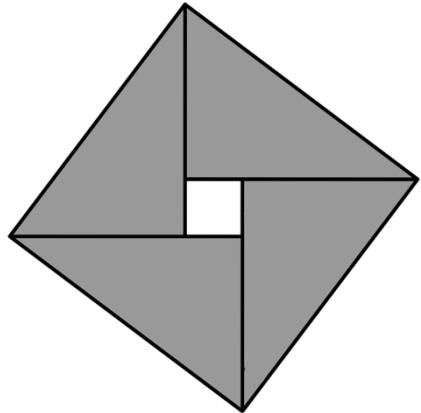
题目条件可知要证  $S_{100}$  小于某数, 从而通过局部放缩得到  $a_n, a_{n+1}$  的不等关系, 改变不等式的方向得到

$$a_n \leq \frac{6}{(n+1)(n+2)}, \text{ 最后由裂项相消法求得 } S_{100} < 3.$$

## 二、填空题

11.

我国古代数学家赵爽用弦图给出了勾股定理的证明.弦图是由四个全等的直角三角形和中间的一个小正方形拼成的一个大正方形(如图所示).若直角三角形直角边的长分别是3, 4, 记大正方形的面积为 $S_1$ , 小正方形的面积为 $S_2$ , 则 $\frac{S_1}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .



**【答案】** 25

**【解析】**

**【分析】** 分别求得大正方形的面积和小正方形的面积, 然后计算其比值即可.

**【详解】** 由题意可得, 大正方形的边长为:  $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ,

则其面积为:  $S_1 = 5^2 = 25$ ,

小正方形的面积:  $S_2 = 25 - 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) = 1$ ,

从而  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{25}{1} = 25$ .

故答案为: 25.

12. 已知 $a \in \mathbb{R}$ , 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x > 2 \\ |x - 3| + a, & x \leq 2, \end{cases}$ , 若 $f[f(\sqrt{6})] = 3$ , 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【答案】** 2

**【解析】**

【分析】由题意结合函数的解析式得到关于  $a$  的方程，解方程可得  $a$  的值.

【详解】 $f[f(\sqrt{6})] = f(6-4) = f(2) = |2-3| + a = 3$ , 故  $a = 2$ ,

故答案为：2.

13.

已知多项式  $(x-1)^3 + (x+1)^4 = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ , 则  $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $a_2 + a_3 + a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】(1). 5; (2). 10.

【解析】

【分析】根据二项展开式定理，分别求出  $(x-1)^3, (x+1)^4$  的展开式，即可得出结论.

【详解】 $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ,

$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ ,

所以  $a_1 = 1 + 4 = 5, a_2 = -3 + 6 = 3$ ,

$a_3 = 3 + 4 = 7, a_4 = -1 + 1 = 0$ ,

所以  $a_2 + a_3 + a_4 = 10$ .

故答案为：5,10.

14. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 60^\circ, AB = 2, M$  是  $BC$  的中点， $AM = 2\sqrt{3}$ ，则  $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ ,

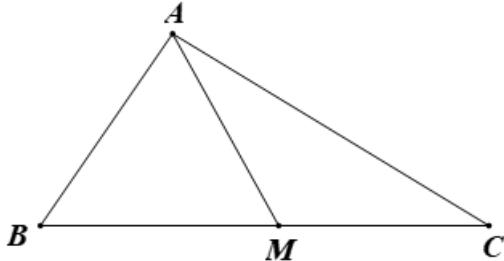
$\cos \angle MAC = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】(1).  $2\sqrt{13}$  (2).  $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

【解析】

【分析】由题意结合余弦定理可得  $BC=8$ ，进而可得  $AC$ ，再由余弦定理可得  $\cos \angle MAC$ .

【详解】由题意作出图形，如图，



在  $\triangle ABM$  中，由余弦定理得  $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2BM \cdot BA \cdot \cos B$ ，

$$\text{即 } 12 = 4 + BM^2 - 2BM \times 2 \times \frac{1}{2}，\text{ 解得 } BM = 4 \text{ (负值舍去)，}$$

所以  $BC = 2BM = 2CM = 8$ ，

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中，由余弦定理得 } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 4 + 64 - 2 \times 2 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52，$$

所以  $AC = 2\sqrt{13}$ ；

$$\text{在 } \triangle AMC \text{ 中，由余弦定理得 } \cos \angle MAC = \frac{AC^2 + AM^2 - MC^2}{2AM \cdot AC} = \frac{52 + 12 - 16}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{13}; \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

15.

袋中有4个红球  $m$  个黄球， $n$  个绿球。现从中任取两个球，记取出的红球数为  $\xi$ ，若取出的两个球都是红球的

概率为  $\frac{1}{6}$ ，一红一黄的概率为  $\frac{1}{3}$ ，则  $m-n=$  \_\_\_\_\_， $E(\xi)=$  \_\_\_\_\_。

**【答案】** (1). 1 (2).  $\frac{8}{9}$

**【解析】**

**【分析】** 根据古典概型的概率公式即可列式求得  $m, n$  的值，再根据随机变量  $\xi$  的分布列即可求出  $E(\xi)$ 。

$$\text{【详解】 } P(\xi=2) = \frac{C_4^2}{C_{m+n+4}^2} = \frac{6}{C_{m+n+4}^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow C_{m+n+4}^2 = 36，\text{ 所以 } m+n+4=9，$$

$$P(\text{一红一黄}) = \frac{C_4^1 \cdot C_m^1}{C_{m+n+4}^2} = \frac{4m}{36} = \frac{m}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow m=3，\text{ 所以 } n=2，\text{ 则 } m-n=1.$$

$$\text{由于 } P(\xi=2) = \frac{1}{6}, P(\xi=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = \frac{4 \times 5}{36} = \frac{5}{9}, P(\xi=0) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$\therefore E(\xi) = \frac{1}{6} \times 2 + \frac{5}{9} \times 1 + \frac{5}{18} \times 0 = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{故答案为: } 1; \frac{8}{9}.$$

16. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，焦点  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$  ( $c > 0$ )，若过  $F_1$  的直线和圆

$$\left(x - \frac{1}{2}c\right)^2 + y^2 = c^2 \text{ 相切，与椭圆在第一象限交于点 } P，\text{ 且 } PF_2 \perp x \text{ 轴，则该直线的斜率是 } _____$$

, 椭圆的离心率是\_\_\_\_\_.

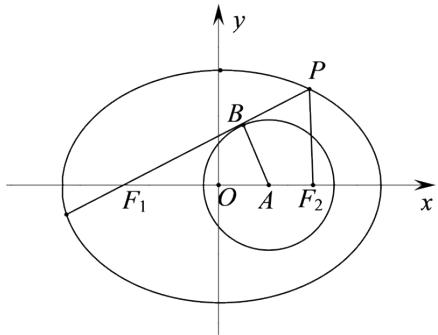
【答案】 (1).  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (2).  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】不妨假设  $c = 2$ , 根据图形可知,  $\sin \angle PF_1F_2 = \frac{2}{3}$ , 再根据同角三角函数基本关系即可求出

$k = \tan \angle PF_1F_2 = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ ; 再根据椭圆的定义求出  $a$ , 即可求得离心率.

【详解】



如图所示: 不妨假设  $c = 2$ , 设切点为  $B$ ,

$$\sin \angle PF_1F_2 = \sin \angle BF_1A = \frac{|AB|}{|F_1A|} = \frac{2}{3}, \quad \tan \angle PF_1F_2 = \frac{2}{\sqrt{3^2 - 2^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\text{所以 } k = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 由 } k = \frac{|PF_2|}{|F_1F_2|}, |F_1F_2| = 2c = 4, \text{ 所以 } |PF_2| = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \quad |PF_1| = |PF_2| \times \frac{1}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{于是 } 2a = |PF_1| + |PF_2| = 4\sqrt{5}, \text{ 即 } a = 2\sqrt{5}, \text{ 所以 } e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

17.

已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, (\vec{c} \neq \vec{0})$  满足  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ . 记向量  $\vec{d}$  在  $\vec{a}, \vec{b}$  方向上的投影分别

为  $x, y, \vec{d} - \vec{a}$  在  $\vec{c}$  方向上的投影为  $z$ , 则  $x^2 + y^2 + z^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】设  $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = (0, 2), \vec{c} = (m, n)$ , 由平面向量的知识可得  $2x + y - \sqrt{5}z = 2$ , 再结合柯西不等式即可得解.

【详解】由题意，设  $\vec{a} = (1, 0)$ ,  $\vec{b} = (0, 2)$ ,  $\vec{c} = (m, n)$ ,

则  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = m - 2n = 0$ , 即  $m = 2n$ ,

又向量  $\vec{d}$  在  $\vec{a}, \vec{b}$  方向上的投影分别为  $x, y$ , 所以  $\vec{d} = (x, y)$ ,

所以  $\vec{d} - \vec{a}$  在  $\vec{c}$  方向上的投影  $z = \frac{(\vec{d} - \vec{a}) \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{m(x-1) + ny}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{2x - 2 + y}{\pm\sqrt{5}}$ ,

即  $2x + y \mp \sqrt{5}z = 2$ ,

所以  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{10} \left[ 2^2 + 1^2 + (\pm\sqrt{5})^2 \right] (x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{1}{10} (2x + y \mp \sqrt{5}z)^2 = \frac{2}{5}$ ,

当且仅当  $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\mp\sqrt{5}} \\ 2x + y \mp \sqrt{5}z = 2 \end{cases}$  即  $\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \\ z = \mp\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$  时, 等号成立,

所以  $x^2 + y^2 + z^2$  的最小值为  $\frac{2}{5}$ .

故答案为:  $\frac{2}{5}$ .

【点睛】关键点点睛:

解决本题的关键是由平面向量的知识转化出  $x, y, z$  之间的等量关系, 再结合柯西不等式变形即可求得最小值.

### 三、解答题

18. 设函数  $f(x) = \sin x + \cos x (x \in \mathbb{R})$ .

(1) 求函数  $y = \left[ f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]^2$  的最小正周期;

(2) 求函数  $y = f(x)f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值.

【答案】(1)  $\pi$ ; (2)  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

#### 【解析】

【分析】(1) 由题意结合三角恒等变换可得  $y = 1 - \sin 2x$ , 再由三角函数最小正周期公式即可得解;

(2) 由三角恒等变换可得  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 再由三角函数的图象与性质即可得解.

**【详解】** (1) 由辅助角公式得  $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,

$$\text{则 } y = \left[f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \left[\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right]^2 = 2 \sin^2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - \sin 2x,$$

所以该函数的最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ;

$$(2) \text{ 由题意, } y = f(x)f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2} \sin x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin x$$

$$= 2 \sin x \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right) = \sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x \cos x$$

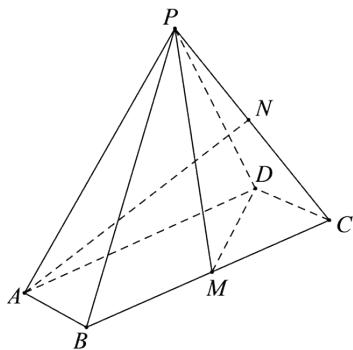
$$= \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  可得  $2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ,

所以当  $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  即  $x = \frac{3\pi}{8}$  时, 函数取最大值  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

19. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是平行四边形,

$\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = 4$ ,  $PA = \sqrt{15}$ ,  $M$ ,  $N$  分别为  $BC$ ,  $PC$  的中点,  $PD \perp DC$ ,  $PM \perp MD$ .



(1) 证明:  $AB \perp PM$ ;

(2) 求直线  $AN$  与平面  $PDM$  所成角的正弦值.

**【答案】** (1) 证明见解析; (2)  $\frac{\sqrt{15}}{6}$ .

### 【解析】

【分析】(1) 要证  $AB \perp PM$ , 可证  $DC \perp PM$ , 由题意可得,  $PD \perp DC$ , 易证  $DM \perp DC$ , 从而  $DC \perp \text{平面 } PDM$ , 即有  $DC \perp PM$ , 从而得证;

(2) 取  $AD$  中点  $E$ , 根据题意可知,  $ME, DM, PM$  两两垂直, 所以以点  $M$  为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 再分别求出向量  $\overrightarrow{AN}$  和平面  $PDM$  的一个法向量, 即可根据线面角的向量公式求出.

【详解】(1) 在  $\triangle DCM$  中,  $DC = 1$ ,  $CM = 2$ ,  $\angle DCM = 60^\circ$ , 由余弦定理可得  $DM = \sqrt{3}$ ,

所以  $DM^2 + DC^2 = CM^2$ ,  $\therefore DM \perp DC$ . 由题意  $DC \perp PD$  且  $PD \cap DM = D$ ,  $\therefore DC \perp \text{平面 } PDM$ , 而  $PM \subset \text{平面 } PDM$ , 所以  $DC \perp PM$ , 又  $AB // DC$ , 所以  $AB \perp PM$ .

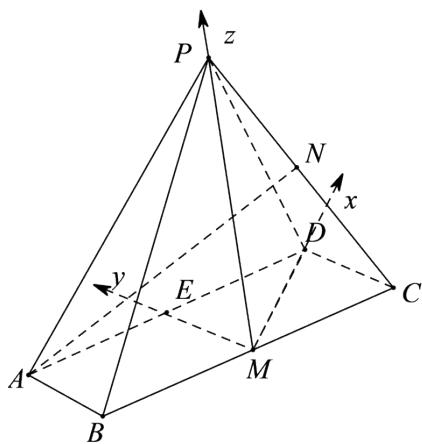
(2) 由  $PM \perp MD$ ,  $AB \perp PM$ , 而  $AB$  与  $DM$  相交, 所以  $PM \perp \text{平面 } ABCD$ , 因为  $AM = \sqrt{7}$ , 所以  $PM = 2\sqrt{2}$ , 取  $AD$  中点  $E$ , 连接  $ME$ , 则  $ME, DM, PM$  两两垂直, 以点  $M$  为坐标原点, 如图所示, 建立空间直角坐标系,

则  $A(-\sqrt{3}, 2, 0), P(0, 0, 2\sqrt{2}), D(\sqrt{3}, 0, 0), M(0, 0, 0), C(\sqrt{3}, -1, 0)$

又  $N$  为  $PC$  中点, 所以  $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}, \sqrt{2}\right)$ .

由(1)得  $CD \perp \text{平面 } PDM$ , 所以平面  $PDM$  的一个法向量  $\vec{n} = (0, 1, 0)$

从而直线  $AN$  与平面  $PDM$  所成角的正弦值为  $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AN}| |\vec{n}|} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4} + \frac{25}{4} + 2}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$ .



【点睛】本题第一问主要考查线面垂直的相互转化, 要证明  $AB \perp PM$ , 可以考虑  $DC \perp PM$ , 题中与  $DC$  有垂直关系的直线较多, 易证  $DC \perp \text{平面 } PDM$ , 从而使问题得以解决; 第二问思路直接, 由

第一问的垂直关系可以建立空间直角坐标系，根据线面角的向量公式即可计算得出.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ,  $a_1 = -\frac{9}{4}$ , 且 $4S_{n+1} = 3S_n - 9$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $3b_n + (n-4)a_n = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$ , 记 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ , 若 $T_n \leq \lambda b_n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求实数 $\lambda$ 的取值范围.

**【答案】** (1)  $a_n = -3 \cdot (\frac{3}{4})^n$ ; (2)  $-3 \leq \lambda \leq 1$ .

### 【解析】

**【分析】** (1) 由 $4S_{n+1} = 3S_n - 9$ , 结合 $S_n$ 与 $a_n$ 的关系, 分 $n=1, n \geq 2$ 讨论, 得到数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 即可得出结论;

(2) 由 $3b_n + (n-4)a_n = 0$ 结合(1)的结论, 利用错位相减法求出 $T_n$ ,  $T_n \leq \lambda b_n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 分类讨论分离参数 $\lambda$ , 转化为 $\lambda$ 与关于 $n$ 的函数的范围关系, 即可求解.

**【详解】** (1) 当 $n=1$ 时,  $4(a_1 + a_2) = 3a_1 - 9$ ,

$$4a_2 = \frac{9}{4} - 9 = -\frac{27}{4}, \therefore a_2 = -\frac{27}{16},$$

当 $n \geq 2$ 时, 由 $4S_{n+1} = 3S_n - 9$ ①,

得 $4S_n = 3S_{n-1} - 9$ ②, ①-②得 $4a_{n+1} = 3a_n$

$$a_2 = -\frac{27}{16} \neq 0, \therefore a_n \neq 0, \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4},$$

又 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4}$ ,  $\therefore \{a_n\}$ 是首项为 $-\frac{9}{4}$ , 公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列,

$$\therefore a_n = -\frac{9}{4} \cdot (\frac{3}{4})^{n-1} = -3 \cdot (\frac{3}{4})^n;$$

$$(2) \text{ 由 } 3b_n + (n-4)a_n = 0, \text{ 得 } b_n = -\frac{n-4}{3}a_n = (n-4)(\frac{3}{4})^n,$$

$$\text{所以 } T_n = -3 \times \frac{3}{4} - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots + (n-4) \times \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

$$\frac{3}{4}T_n = -3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots + (n-5) \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + (n-4) \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{3}{4}T_n = -3 \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n - (n-4) \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{9}{4} + \frac{\frac{9}{16} \left[ 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{3}{4}} - (n-4) \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} \\
&= -\frac{9}{4} + \frac{9}{4} - 4 \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} - (n-4) \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} = -n \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1},
\end{aligned}$$

所以  $T_n = -4n \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1}$ ,

由  $T_n \leq \lambda b_n$  得  $-4n \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} \leq \lambda(n-4) \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^n$  恒成立,

即  $\lambda(n-4) + 3n \geq 0$  恒成立,

$n=4$  时不等式恒成立;

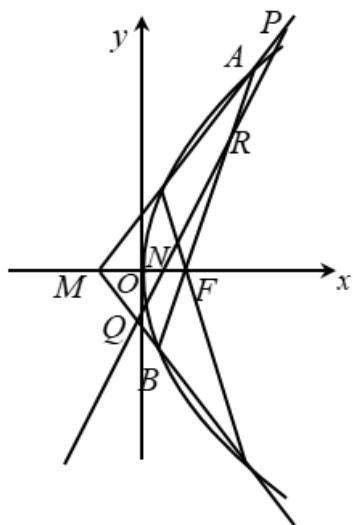
$$n < 4 \text{ 时, } \lambda \leq -\frac{3n}{n-4} = -3 - \frac{12}{n-4}, \text{ 得 } \lambda \leq 1;$$

$$n > 4 \text{ 时, } \lambda \geq -\frac{3n}{n-4} = -3 - \frac{12}{n-4}, \text{ 得 } \lambda \geq -3;$$

所以  $-3 \leq \lambda \leq 1$ .

【点睛】易错点点睛：（1）已知  $S_n$  求  $a_n$  不要忽略  $n=1$  情况；（2）恒成立分离参数时，要注意变量的正负零讨论，如（2）中  $\lambda(n-4) + 3n \geq 0$  恒成立，要对  $n-4=0, n-4>0, n-4<0$  讨论，还要注意  $n-4<0$  时，分离参数不等式要变号。

21. 如图，已知  $F$  是抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点， $M$  是抛物线的准线与  $x$  轴的交点，且  $|MF| = 2$ ，



(1) 求抛物线的方程；

(2) 设过点  $F$  的直线交抛物线于  $A, B$  两点，斜率为 2 的直线  $l$  与直线  $MA, MB, AB$ ,  $x$  轴依次交于点  $P, Q, R$

, N, 且  $|RN|^2 = |PN| \cdot |QN|$ , 求直线 l 在 x 轴上截距的范围.

**【答案】** (1)  $y^2 = 4x$ ; (2)  $(-\infty, -7 - 4\sqrt{3}] \cup [-7 + 4\sqrt{3}, 1) \cup (1, +\infty)$ .

**【解析】**

**【分析】** (1) 求出 P 的值后可求抛物线的方程.

(2) 设  $AB: x = ty + 1$ ,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,  $N(n, 0)$ , 联立直线 AB 的方程和抛物线的方程后可得

$y_1 y_2 = -4$ ,  $y_1 + y_2 = 4t$ , 求出直线 MA, MB 的方程, 联立各直线方程可求出  $y_P, y_Q, y_R$ , 根据题设条件可

得  $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 = \frac{3+4t^2}{(2t-1)^2}$ , 从而可求 n 的范围.

**【详解】** (1) 因为  $|MF| = 2$ , 故  $p = 2$ , 故抛物线的方程为:  $y^2 = 4x$ .

(2) 设  $AB: x = ty + 1$ ,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,  $N(n, 0)$ ,

所以直线  $l: x = \frac{y}{2} + n$ , 由题设可得  $n \neq 1$  且  $t \neq \frac{1}{2}$ .

由  $\begin{cases} x = ty + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$  可得  $y^2 - 4ty - 4 = 0$ , 故  $y_1 y_2 = -4$ ,  $y_1 + y_2 = 4t$ ,

因为  $|RN|^2 = |PN| \cdot |QN|$ , 故  $\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_R|\right)^2 = \sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_P| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_Q|$ , 故  $y_R^2 = |y_P| \cdot |y_Q|$ .

又  $MA: y = \frac{y_1}{x_1 + 1}(x + 1)$ , 由  $\begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 1}(x + 1) \\ x = \frac{y}{2} + n \end{cases}$  可得  $y_P = \frac{2(n+1)y_1}{2x_1 + 2 - y_1}$ ,

同理  $y_Q = \frac{2(n+1)y_2}{2x_2 + 2 - y_2}$ ,

由  $\begin{cases} x = ty + 1 \\ x = \frac{y}{2} + n \end{cases}$  可得  $y_R = \frac{2(n-1)}{2t-1}$ ,

所以  $\left[\frac{2(n-1)}{2t-1}\right]^2 = \left|\frac{2(n+1)y_2}{2x_2 + 2 - y_2} \times \frac{2(n+1)y_1}{2x_1 + 2 - y_1}\right|$ ,

整理得到  $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = (2t-1)^2 \left| \frac{y_1 y_2}{(2x_2 + 2 - y_2)(2x_1 + 2 - y_1)} \right|$ ,

$$\begin{aligned}
&= \frac{4(2t-1)^2}{\left[ \left( \frac{y_2^2}{2} + 2 - y_2 \right) \left( \frac{y_1^2}{2} + 2 - y_1 \right) \right]} \\
&= \frac{4(2t-1)^2}{\left| \frac{y_2^2 y_1^2}{4} + (y_2 + y_1)^2 - y_2 y_1 - \frac{y_2 + y_1}{2} \times y_1 y_2 - 2(y_2 + y_1) + 4 \right|} = \frac{(2t-1)^2}{3+4t^2} \\
\text{故 } &\left( \frac{n+1}{n-1} \right)^2 = \frac{3+4t^2}{(2t-1)^2},
\end{aligned}$$

令  $s = 2t-1$ , 则  $t = \frac{s+1}{2}$  且  $s \neq 0$ ,

$$\text{故 } \frac{3+4t^2}{(2t-1)^2} = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^2} = 1 + \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} = 4 \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4},$$

$$\text{故 } \begin{cases} \left( \frac{n+1}{n-1} \right)^2 \geq \frac{3}{4} \\ n \neq 1 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} n^2 + 14n + 1 \geq 0 \\ n \neq 1 \end{cases},$$

解得  $n \leq -7 - 4\sqrt{3}$  或  $-7 + 4\sqrt{3} \leq n < 1$  或  $n > 1$ .

故直线  $l$  在  $x$  轴上的截距的范围为  $n \leq -7 - 4\sqrt{3}$  或  $-7 + 4\sqrt{3} \leq n < 1$  或  $n > 1$ .

**【点睛】**方法点睛：直线与抛物线中的位置关系中的最值问题，往往需要根据问题的特征合理假设直线方程的形式，从而便于代数量的计算，对于构建出的函数关系式，注意利用换元法等把复杂函数的范围问题转化为常见函数的范围问题.

22. 设  $a, b$  为实数，且  $a > 1$ ，函数  $f(x) = a^x - bx + e^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

- (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间；
- (2) 若对任意  $b > 2e^2$ ，函数  $f(x)$  有两个不同的零点，求  $a$  的取值范围；

- (3) 当  $a = e$  时，证明：对任意  $b > e^4$ ，函数  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ ，满足  $x_2 > \frac{b \ln b}{2e^2} x_1 + \frac{e^2}{b}$ .

(注：  $e = 2.71828 \dots$  是自然对数的底数)

**【答案】** (1)  $b \leq 0$  时， $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增； $b > 0$  时，函数的单调减区间为  $\left( -\infty, \log_a \frac{b}{\ln a} \right)$ ，单调增区间为  $\left( \log_a \frac{b}{\ln a}, +\infty \right)$ ；

(2)  $(1, e^2]$ ;

(3) 证明见解析.

### 【解析】

【分析】(1)首先求得导函数的解析式，然后分类讨论即可确定函数的单调性；

(2)将原问题进行等价转化，然后构造新函数，利用导函数研究函数的性质并进行放缩即可确定实数a的取值范围；

(3)结合(2)的结论将原问题进行等价变形，然后利用分析法即可证得题中的结论成立.

【详解】(1)  $f(x) = a^x - bx + e^2$ ,  $f'(x) = a^x \ln a - b$ ,

①若  $b \leq 0$ ，则  $f'(x) = a^x \ln a - b \geq 0$ ，所以  $f(x)$  在  $R$  上单调递增；

②若  $b > 0$ ，

当  $x \in \left(-\infty, \log_a \frac{b}{\ln a}\right)$  时， $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减，

当  $x \in \left(\log_a \frac{b}{\ln a}, +\infty\right)$  时， $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

综上可得， $b \leq 0$  时， $f(x)$  在  $R$  上单调递增；

$b > 0$  时，函数的单调减区间为  $\left(-\infty, \log_a \frac{b}{\ln a}\right)$ ，单调增区间为  $\left(\log_a \frac{b}{\ln a}, +\infty\right)$ .

(2)  $f(x)$  有2个不同零点  $\Leftrightarrow a^x - bx + e^2 = 0$  有2个不同解  $\Leftrightarrow e^{x \ln a} - bx + e^2 = 0$  有2个不同的解，

令  $t = x \ln a$ ，则  $e^t - \frac{bt}{\ln a} + e^2 = 0 \Rightarrow \frac{b}{\ln a} = \frac{e^t + e^2}{t}$ ,  $t > 0$ ，

记  $g(t) = \frac{e^t + e^2}{t}$ ,  $g'(t) = \frac{e^t \cdot t - (e^t + e^2)}{t^2} = \frac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$ ，

记  $h(t) = e^t(t-1)-e^2$ ,  $h'(t) = e^t(t-1)+e^t \cdot 1 = e^t \cdot t > 0$ ，

又  $h(2) = 0$ ，所以  $t \in (0, 2)$  时， $h(t) < 0$ ,  $t \in (2, +\infty)$  时， $h(t) > 0$ ，

则  $g(t)$  在  $(0, 2)$  单调递减， $(2, +\infty)$  单调递增， $\therefore \frac{b}{\ln a} > g(2) = e^2$ ,  $\therefore \ln a < \frac{b}{e^2}$ ，

$\therefore b > 2e^2$ ,  $\therefore \frac{b}{e^2} > 2$ ,  $\therefore \ln a \leq 2 \Rightarrow 1 < a \leq e^2$ .

即实数  $a$  的取值范围是  $(1, e^2]$ .

(3)  $a = e$ ,  $f(x) = e^x - bx + e^2$  有2个不同零点, 则  $e^x + e^2 = bx$ , 故函数的零点一定为正数.

由(2)可知有2个不同零点, 记较大者为  $x_2$ , 较小者为  $x_1$ ,

$$b = \frac{e^{x_1} + e^2}{x_1} = \frac{e^{x_2} + e^2}{x_2} > e^4,$$

注意到函数  $y = \frac{e^x + e^2}{x}$  在区间  $(0, 2)$  上单调递减, 在区间  $(2, +\infty)$  上单调递增,

故  $x_1 < 2 < x_2$ , 又由  $\frac{e^5 + e^2}{5} < e^4$  知  $x_2 > 5$ ,

$$b = \frac{e^{x_1} + e^2}{x_1} < \frac{2e^2}{x_1} \Rightarrow x_1 < \frac{2e^2}{b},$$

要证  $x_2 > \frac{b \ln b}{2e^2} x_1 + \frac{e^2}{b}$ , 只需  $x_2 > \ln b + \frac{e^2}{b}$ ,

$b = \frac{e^{x_2} + e^2}{x_2} < \frac{2e^{x_2}}{x_2}$  且关于  $b$  的函数  $g(b) = \ln b + \frac{e^2}{b}$  在  $b > e^4$  上单调递增,

所以只需证  $x_2 > \ln \frac{2e^{x_2}}{x_2} + \frac{e^2 x_2}{2e^{x_2}} (x_2 > 5)$ ,

只需证  $\ln e^{x_2} - \ln \frac{2e^{x_2}}{x_2} - \frac{e^2 x_2}{2e^{x_2}} > 0$ ,

只需证  $\ln x - \frac{e^2 x}{2e^x} - \ln 2 > 0$ ,

$\because \frac{e^2}{2} < 4$ , 只需证  $h(x) = \ln x - \frac{4x}{e^x} - \ln 2$  在  $x > 5$  时为正,

由于  $h'(x) = \frac{1}{x} + 4xe^{-x} - 4e^{-x} = \frac{1}{x} + 4e^{-x}(x-1) > 0$ , 故函数  $h(x)$  单调递增,

又  $h(5) = \ln 5 - \frac{20}{e^5} - \ln 2 = \ln \frac{5}{2} - \frac{20}{e^4} > 0$ , 故  $h(x) = \ln x - \frac{4x}{e^x} - \ln 2$  在  $x > 5$  时为正,

从而题中的不等式得证.

**【点睛】** 导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具, 而函数是高中数学中重要的知识点, 所以在历届高考中, 对导数的应用的考查都非常突出, 从高考来看, 对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行: (1)考查导数的几何意义, 往往与解析几何、微积分相联系. (2)利用导数求函数的单调区间, 判断单调性; 已知单调性, 求参数. (3)利用导数求函数的最值(极值), 解决生活中的优化问题. (4)考查数形结合

思想的应用.