

2015 年浙江省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分 2015 年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）数学（理科）

1. (5 分) (2015•浙江) 已知集合 $P=\{x|x^2-2x\geq 0\}$, $Q=\{x|1<x\leq 2\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}}P)\cap Q=(\quad)$
A $[0, 1)$ B $(0, 2]$ C $(1, 2)$ D $[1, 2]$

考点： 交、并、补集的混合运算.

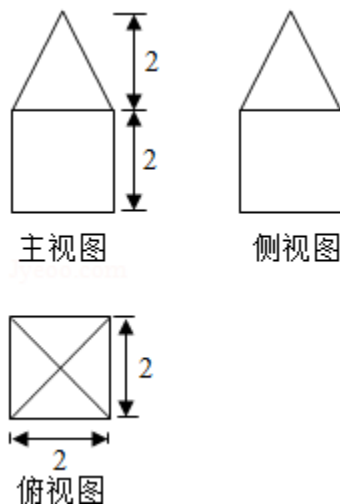
专题： 集合.

分析： 求出 P 中不等式的解集确定出 P，求出 P 补集与 Q 的交集即可.

解答： 解：由 P 中不等式变形得： $x(x-2)\geq 0$ ，
解得： $x\leq 0$ 或 $x\geq 2$ ，即 $P=(-\infty, 0]\cup[2, +\infty)$ ，
 $\therefore \complement_{\mathbb{R}}P=(0, 2)$ ，
 $\therefore Q=(1, 2]$ ，
 $\therefore (\complement_{\mathbb{R}}P)\cap Q=(1, 2)$ ，
故选：C.

点评： 此题考查了交、并、补集的混合运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

2. (5 分) (2015•浙江) 某几何体的三视图如图所示(单位：cm)，则该几何体的体积是()



- A 8cm^3 B 12cm^3 C $\frac{32}{3}\text{cm}^3$ D $\frac{40}{3}\text{cm}^3$

考点： 由三视图求面积、体积.

点：

专 空间位置关系与距离.

题：

分 判断几何体的形状，利用三视图的数据，求几何体的体积即可.

析：

解：由三视图可知几何体是下部为棱长为 2 的正方体，上部是底面为边长 2 的正方形高为 2 的正四棱锥，

$$\text{所求几何体的体积为：} 2^3 + \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3.$$

故选：C.

点评：本题考查三视图与直观图的关系的判断，几何体的体积的求法，考查计算能力.

3. (5 分) (2015•浙江) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差 d 不为零，前 n 项和是 S_n ，若 a_3, a_4, a_8 成等比数列，则 ()

- A. $a_1 d > 0, d S_4 > 0$ B. $a_1 d < 0, d S_4 < 0$ C. $a_1 d > 0, d S_4 < 0$ D. $a_1 d < 0, d S_4 > 0$

考点：等差数列与等比数列的综合.

专题：等差数列与等比数列.

分析：由 a_3, a_4, a_8 成等比数列，得到首项和公差的关系，即可判断 $a_1 d$ 和 $d S_4$ 的符号.

解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，则 $a_3 = a_1 + 2d$ ， $a_4 = a_1 + 3d$ ， $a_8 = a_1 + 7d$ ，

由 a_3, a_4, a_8 成等比数列，得 $(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 7d)$ ，整理得： $3a_1 d = -5d^2$.

$$\because d \neq 0, \therefore d = -\frac{3}{5}a_1,$$

$$\therefore a_1 d = -\frac{3}{5}a_1^2 < 0,$$

$$d S_4 = -\frac{3}{5}a_1 \left(4a_1 + \frac{4 \times 3 \left(-\frac{3}{5}a_1 \right)}{2} \right) = -\frac{3}{5}a_1 \left(4a_1 - \frac{18}{5}a_1 \right) = -\frac{6a_1^2}{25} < 0.$$

故选：B.

点评：本题考查了等差数列和等比数列的性质，考查了等差数列的前 n 项和，是基础题.

4. (5 分) (2015•浙江) 命题“ $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \in \mathbb{N}^*$ 且 $f(n) \leq n$ ”的否定形式是 ()

- A. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \notin \mathbb{N}^*$ 且 $f(n) > n$ B. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \notin \mathbb{N}^*$ 或 $f(n) > n$
C. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, f(n_0) \notin \mathbb{N}^*$ 且 $f(n_0) > n_0$ D. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, f(n_0) \notin \mathbb{N}^*$ 或 $f(n_0) > n_0$

考点：命题的否定.

专题：简易逻辑.

分析：根据全称命题的否定是特称命题即可得到结论.

析：

解：命题为全称命题，

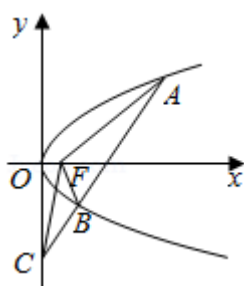
答：则命题的否定为： $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ， $f(n_0) \notin \mathbb{N}^*$ 或 $f(n_0) > n_0$ ，

故选：D.

点 本题主要考查含有量词的命题的否定，比较基础.

评：

5. (5 分) (2015•浙江) 如图，设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，不经过焦点的直线上有三个不同的点 A, B, C，其中点 A, B 在抛物线上，点 C 在 y 轴上，则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比是 ()



- A $\frac{|BF| - 1}{|AF| - 1}$ B $\frac{|BF|^2 - 1}{|AF|^2 - 1}$ C $\frac{|BF| + 1}{|AF| + 1}$ D $\frac{|BF|^2 + 1}{|AF|^2 + 1}$

考 直线与圆锥曲线的关系.

点：

专 圆锥曲线的定义、性质与方程.

题：

分

析：根据抛物线的定义，将三角形的面积关系转化为 $\frac{|BC|}{|AC|}$ 的关系进行求解即可.

解：如图所示，抛物线的准线 DE 的方程为 $x = -1$ ，

答：过 A, B 分别作 $AE \perp DE$ 于 E，交 y 轴于 N， $BD \perp DE$ 于 D，交 y 轴于 M，

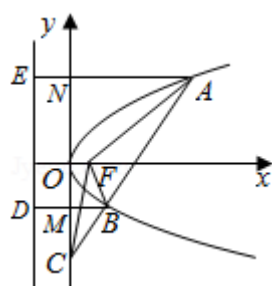
由抛物线的定义知 $BF = BD$ ， $AF = AE$ ，

则 $|BM| = |BD| - 1 = |BF| - 1$ ，

$|AN| = |AE| - 1 = |AF| - 1$ ，

$$\text{则 } \frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|AN|} = \frac{|BF| - 1}{|AF| - 1},$$

故选：A



点 本题主要考查三角形的面积关系，利用抛物线的定义进行转化是解决本题的关键。
评：

6. (5分) (2015•浙江) 设 A, B 是有限集，定义： $d(A, B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$ ，其中 $\text{card}(A)$ 表示有限集 A 中的元素个数 ()

命题①：对任意有限集 A, B ，“ $A \neq B$ ”是“ $d(A, B) > 0$ ”的充分必要条件；

命题②：对任意有限集 A, B, C ， $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$

- A. 命题①和命题②都成立 B. 命题①和命题②都不成立
C. 命题①成立，命题②不成立 D. 命题①不成立，命题②成立

考 复合命题的真假。

点：

专 集合；简易逻辑。

题：

分 命题①根据充要条件分充分性和必要性判断即可，

析：③借助新定义，根据集合的运算，判断即可。

解：命题①：对任意有限集 A, B ，若“ $A \neq B$ ”，则 $A \cup B \neq A \cap B$ ，则 $\text{card}(A \cup B) > \text{card}(A \cap B)$ ，故“ $d(A, B) > 0$ ”成立，

若 $d(A, B) > 0$ ，则 $\text{card}(A \cup B) > \text{card}(A \cap B)$ ，则 $A \cup B \neq A \cap B$ ，故 $A \neq B$ 成立，故命题①成立，

命题②， $d(A, B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$ ， $d(B, C) = \text{card}(B \cup C) - \text{card}(B \cap C)$ ，

$\therefore d(A, B) + d(B, C) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \cup C) - \text{card}(B \cap C) = [\text{card}(A \cup B) + \text{card}(B \cup C)] - [\text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \cap C)]$

$\geq \text{card}(A \cup C) - \text{card}(A \cap C) = d(A, C)$ ，故命题②成立，

故选：A

点 本题考查了，元素和集合的关系，以及逻辑关系，分清集合之间的关系与各集合元素个数之
评：间的关系，注意本题对充要条件的考查。集合的元素个数，体现两个集合的关系，但仅凭借元素个数不能判断集合间的关系，属于基础题。

7. (5分) (2015•浙江) 存在函数 $f(x)$ 满足，对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 ()

- A $f(\sin 2x) = \sin x$ B $f(\sin 2x) = x^2 + x$ C $f(x^2 + 1) = |x + 1|$ D $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$

考 函数解析式的求解及常用方法。

点：

专 函数的性质及应用。

题：

分 利用 x 取特殊值，通过函数的定义判断正误即可。

析：

解：A. 取 $x=0$ ，则 $\sin 2x=0$ ， $\therefore f(0)=0$ ；

答：取 $x=\frac{\pi}{2}$ ，则 $\sin 2x=0$ ， $\therefore f(0)=1$ ；

$\therefore f(0)=0$ ，和 1 ，不符合函数的定义；

\therefore 不存在函数 $f(x)$ ，对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(\sin 2x) = \sin x$ ；

B. 取 $x=0$, 则 $f(0)=0$;

取 $x=\pi$, 则 $f(0)=\pi^2+\pi$;

$\therefore f(0)$ 有两个值, 不符合函数的定义;

\therefore 该选项错误;

C. 取 $x=1$, 则 $f(2)=2$, 取 $x=-1$, 则 $f(2)=0$;

这样 $f(2)$ 有两个值, 不符合函数的定义;

\therefore 该选项错误;

D. 令 $|x+1|=t$, $t \geq 0$, 则 $f(t^2-1)=t$;

令 $t^2-1=x$, 则 $t=\sqrt{x+1}$;

$\therefore f(x)=\sqrt{x+1}$;

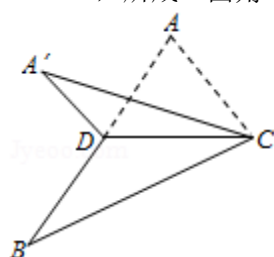
即存在函数 $f(x)=\sqrt{x+1}$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x^2+2x)=|x+1|$;

\therefore 该选项正确.

故选: D.

点 评: 本题考查函数的定义的应用, 基本知识的考查, 但是思考问题解决问题的方法比较难.

8. (5 分) (2015•浙江) 如图, 已知 $\triangle ABC$, D 是 AB 的中点, 沿直线 CD 将 $\triangle ACD$ 折成 $\triangle A'CD$, 所成二面角 $A'-CD-B$ 的平面角为 α , 则 ()



A $\angle A'DB \leq \alpha$

B $\angle A'DB \geq \alpha$

C $\angle A'CB \leq \alpha$

D $\angle A'CB \geq \alpha$

考 二面角的平面角及求法.

点:

专 创新题型; 空间角.

题:

分 解: 画出图形, 分 $AC=BC$, $AC \neq BC$ 两种情况讨论即可.

析:

解: ①当 $AC=BC$ 时, $\angle A'DB=\alpha$;

答: ②当 $AC \neq BC$ 时, 如图, 点 A' 投影在 AE 上,

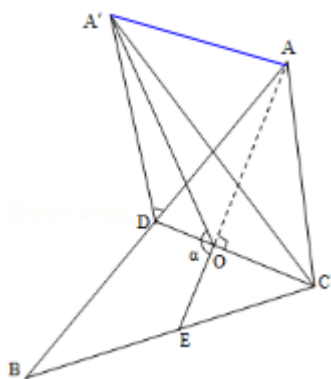
$\alpha=\angle A'OE$, 连结 AA' ,

易得 $\angle ADA' < \angle AOA'$,

$\therefore \angle A'DB > \angle A'OE$, 即 $\angle A'DB > \alpha$

综上所述, $\angle A'DB \geq \alpha$,

故选: B.



点评: 本题考查空间角的大小比较, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分.

9. (6 分) (2015•浙江) 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的焦距是_____, 渐近线方程是_____.

考点: 双曲线的简单性质.

专题: 计算题; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

分析: 确定双曲线中的几何量, 即可求出焦距、渐近线方程.

解答: 解: 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 中, $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$,

\therefore 焦距是 $2c = 2\sqrt{3}$, 渐近线方程是 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

故答案为: $2\sqrt{3}$; $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

点评: 本题考查双曲线的方程与性质, 考查学生的计算能力, 比较基础.

10. (6 分) (2015•浙江) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3, & x \geq 1 \\ \lg(x^2 + 1), & x < 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-3)) =$ _____.

$f(x)$ 的最小值是_____.

考点: 函数的值.

专题: 计算题; 函数的性质及应用.

分析: 根据已知函数可先求 $f(-3) = 1$, 然后代入可求 $f(f(-3))$; 由于 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x + \frac{2}{x} - 3$, 当 $x < 1$ 时, $f(x) = \lg(x^2 + 1)$, 分别求出每段函数的取值范围, 即可求解

解答:

$$\text{解: } \because f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3, & x \geq 1 \\ \lg(x^2 + 1), & x < 1 \end{cases},$$

$$\therefore f(-3) = \lg 10 = 1,$$

$$\text{则 } f(f(-3)) = f(1) = 0,$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } f(x) = x + \frac{2}{x} - 3 \geq 2\sqrt{2} - 3, \text{ 即最小值 } 2\sqrt{2} - 3,$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } x^2 + 1 \geq 1, f(x) = \lg(x^2 + 1) \geq 0 \text{ 最小值 } 0,$$

$$\text{故 } f(x) \text{ 的最小值是 } 2\sqrt{2} - 3.$$

$$\text{故答案为: } 0; 2\sqrt{2} - 3.$$

点评: 本题主要考查了分段函数的函数值的求解, 属于基础试题.

11. (6分) (2015•浙江) 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$ 的最小正周期是 _____, 单调递减区间是 _____.

考点: 两角和与差的正弦函数; 三角函数的周期性及其求法; 正弦函数的单调性.

点:

三角函数的求值.

题:

分

析:

$$\text{由三角函数公式化简可得 } f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}, \text{ 易得最小正周期, 解不等}$$

$$\text{式 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ 可得函数的单调递减区间.}$$

解:

答:

$$\text{解: 化简可得 } f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) + \frac{1}{2} \sin 2x + 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{原函数的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$\text{由 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ 可得 } k\pi + \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{8},$$

$$\therefore \text{函数的单调递减区间为 } \left[k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{7\pi}{8}\right] (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{故答案为: } \pi; \left[k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{7\pi}{8}\right] (k \in \mathbb{Z})$$

点

评:

本题考查三角函数的化简, 涉及三角函数的周期性和单调性, 属基础题.

12. (4分) (2015•浙江) 若 $a = \log_4 3$, 则 $2^a + 2^{-a} =$ _____.

考

对数的运算性质.

点:

专

函数的性质及应用.

题:

分析：直接把 a 代入 2^a+2^{-a} ，然后利用对数的运算性质得答案.

解：

$\because a=\log_4 3$ ，可知 $4^a=3$ ，

解：

即 $2^a=\sqrt{3}$ ，

答：

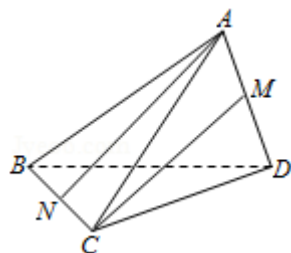
所以 $2^a+2^{-a}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

故答案为： $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

点评：本题考查对数的运算性质，是基础的计算题.

评：

13. (4分) (2015•浙江) 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB=AC=BD=CD=3$ ， $AD=BC=2$ ，点 M ， N 分别是 AD ， BC 的中点，则异面直线 AN ， CM 所成的角的余弦值是_____.



考点：异面直线及其所成的角.

点：

专：

空间角.

题：

分析：连结 ND ，取 ND 的中点为： E ，连结 ME 说明异面直线 AN ， CM 所成的角就是 $\angle EMC$ 通过解三角形，求解即可.

解：

连结 ND ，取 ND 的中点为： E ，连结 ME ，则 $ME \parallel AN$ ，异面直线 AN ， CM 所成的角就是 $\angle EMC$ ，

答：

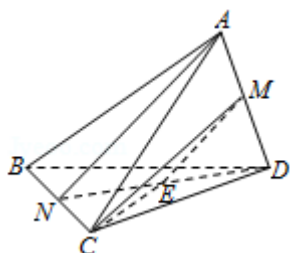
$\because AN=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore ME=\sqrt{2}=EN$ ， $MC=2\sqrt{2}$ ，

又 $\because EN \perp NC$ ， $\therefore EC=\sqrt{EN^2+NC^2}=\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \cos \angle EMC = \frac{EM^2 + MC^2 - EC^2}{2EM \cdot MC} = \frac{2+8-3}{2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{7}{8}.$$

故答案为： $\frac{7}{8}$.



点评：本题考查异面直线所成角的求法，考查空间想象能力以及计算能力.

评：

14. (4分) (2015•浙江) 若实数 x, y 满足 $x^2+y^2 \leq 1$, 则 $|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 的最小值是_____.

考 函数的最值及其几何意义.

点:

专 不等式的解法及应用; 直线与圆.

题:

分 根据所给 x, y 的范围, 可得 $|6-x-3y|=6-x-3y$, 再讨论直线 $2x+y-2=0$ 将圆 $x^2+y^2=1$ 分
析: 成两部分, 分别去绝对值, 运用线性规划的知识, 平移即可得到最小值.

解 解: 由 $x^2+y^2 \leq 1$, 可得 $6-x-3y > 0$, 即 $|6-x-3y|=6-x-3y$,

答: 如图直线 $2x+y-2=0$ 将圆 $x^2+y^2=1$ 分成两部分,

在直线的上方 (含直线), 即有 $2x+y-2 \geq 0$, 即 $|2x+y-2|=2x+y-2$,

此时 $|2x+y-2|+|6-x-3y|=(2x+y-2)+(6-x-3y)=x-2y+4$,

利用线性规划可得在 $A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 处取得最小值 3;

在直线的下方 (含直线), 即有 $2x+y-2 \leq 0$,

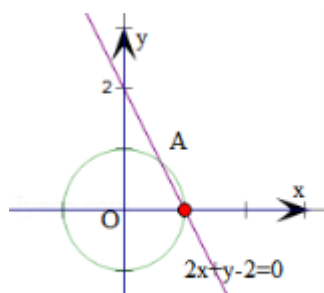
即 $|2x+y-2|=-(2x+y-2)$,

此时 $|2x+y-2|+|6-x-3y|=-(2x+y-2)+(6-x-3y)=8-3x-4y$,

利用线性规划可得在 $A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 处取得最小值 3.

综上所述, 当 $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$ 时, $|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 的最小值为 3.

故答案为: 3.



点 本题考查直线和圆的位置关系, 主要考查二元函数在可行域内取得最值的方法, 属于中档题.

评:

15. (6分) (2015•浙江) 已知 \vec{e}_1, \vec{e}_2 是空间单位向量, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$, 若空间向量 \vec{b} 满足

$\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = 2, \vec{b} \cdot \vec{e}_2 = \frac{5}{2}$, 且对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$,

$|\vec{b} - (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)| \geq |\vec{b} - (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2)| = 1 (x_0, y_0 \in \mathbb{R})$, 则

$x_0 = \underline{\hspace{2cm}}, y_0 = \underline{\hspace{2cm}}, |\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

考 空间向量的数量积运算; 平面向量数量积的运算.

点:

专 创新题型; 空间向量及应用.

题:
分
析:

由题意和数量积的运算可得 $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \frac{\pi}{3}$, 不妨设 $\vec{e}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 0)$,
由已知可解 $\vec{b} = (\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, t)$, 可得 $|\vec{b} - (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)|^2 = (x + \frac{y-4}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 + t^2$, 由题意
可得当 $x=x_0=1, y=y_0=2$ 时, $(x + \frac{y-4}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 + t^2$ 取最小值 1, 由模长公式可得 $|\vec{b}|$.

解
答:

解: $\because \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_1| |\vec{e}_2| \cos \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \cos \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \frac{1}{2}$,
 $\therefore \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \frac{\pi}{3}$, 不妨设 $\vec{e}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (m, n, t)$,
则由题意可知 $\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}n = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{e}_2 = m = \frac{5}{2}$, 解得 $m = \frac{5}{2}, n = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \vec{b} = (\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, t)$,
 $\therefore \vec{b} - (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - y, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x, t)$,
 $\therefore |\vec{b} - (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)|^2 = (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - y)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 + t^2$
 $= x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + t^2 + 7 = (x + \frac{y-4}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 + t^2$,
由题意当 $x=x_0=1, y=y_0=2$ 时, $(x + \frac{y-4}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 + t^2$ 取最小值 1,
此时 $t^2=1$, 故 $|\vec{b}| = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + t^2} = 2\sqrt{2}$
故答案为: 1; 2; $2\sqrt{2}$

点
评:

本题考查空间向量的数量积, 涉及向量的模长公式, 属中档题.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. 16. (14 分) (2015•浙江) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已

知 $A = \frac{\pi}{4}, b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$.

- (1) 求 $\tan C$ 的值;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 求 b 的值.

考 余弦定理.

点:
专

解三角形.

题:
分
析:

(1) 由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{4}$, 已知 $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$. 可得 $b = \frac{3\sqrt{2}c}{4}$,
 $a = \frac{\sqrt{10}}{4}c$. 利用余弦定理可得 $\cos C$. 可得 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$, 即可得出 $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C}$.

(2) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4}c \times \frac{3\sqrt{2}}{4}c \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 3$, 可得 c, 即可得出 b.

解答:

解: (1) $\because A = \frac{\pi}{4}$, \therefore 由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{4}$, $\therefore b^2 - a^2 = \sqrt{2}bc - c^2$,

又 $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$, $\therefore \sqrt{2}bc - c^2 = \frac{1}{2}c^2$, $\therefore \sqrt{2}b = \frac{3}{2}c$, 可得 $b = \frac{3\sqrt{2}}{4}c$,

$\therefore a^2 = b^2 - \frac{1}{2}c^2 = \frac{5}{8}c^2$, 即 $a = \frac{\sqrt{10}}{4}c$.

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\frac{5}{8}c^2 + \frac{9}{8}c^2 - c^2}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{4}c \times \frac{3\sqrt{2}}{4}c} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$\because C \in (0, \pi)$,

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = 2.$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4}c \times \frac{3\sqrt{2}}{4}c \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 3,$$

解得 $c = 2\sqrt{2}$.

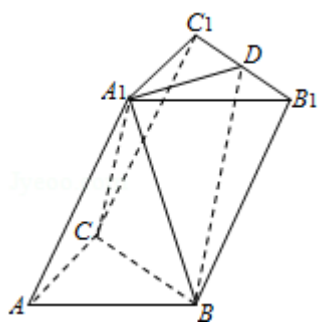
$$\therefore b = \frac{3\sqrt{2}}{4}c = 3.$$

点评: 本题考查了正弦定理余弦定理、同角三角形基本关系式、三角形面积计算公式, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

17. (15分) (2015•浙江) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, $A_1A = 4$, A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点, D 是 B_1C_1 的中点.

(1) 证明: $A_1D \perp$ 平面 A_1BC ;

(2) 求二面角 $A_1 - BD - B_1$ 的平面角的余弦值.



考点: 二面角的平面角及求法; 直线与平面垂直的判定.

点:

专题: 空间位置关系与距离; 空间角.

题:

分析: (1) 以 BC 中点 O 为坐标原点, 以 OB 、 OA 、 OA_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建系, 通过 $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 及线面垂直的判定定理即得结论;

(2) 所求值即为平面 A_1BD 的法向量与平面 B_1BD 的法向量的夹角的余弦值的绝对值的相反数, 计算即可.

解 (1) 证明: 如图, 以 BC 中点 O 为坐标原点, 以 OB 、 OA 、 OA_1 所在直线分别为

答: x、y、z 轴建系.

$$\text{则 } BC = \sqrt{2}AC = 2\sqrt{2}, \quad A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{14},$$

$$\text{易知 } A_1(0, 0, \sqrt{14}), \quad B(\sqrt{2}, 0, 0), \quad C(-\sqrt{2}, 0, 0), \\ A(0, \sqrt{2}, 0), \quad D(0, -\sqrt{2}, \sqrt{14}), \quad B_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{14}),$$

$$\overrightarrow{A_1D} = (0, -\sqrt{2}, 0), \quad \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{14}),$$

$$\overrightarrow{B_1D} = (-\sqrt{2}, 0, 0), \quad \overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{2}, 0, 0), \quad \overrightarrow{OA_1} = (0, 0, \sqrt{14}),$$

$$\because \overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{OA_1} = 0, \quad \therefore A_1D \perp OA_1,$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \therefore A_1D \perp BC,$$

$$\text{又} \because OA_1 \cap BC = O, \quad \therefore A_1D \perp \text{平面 } A_1BC;$$

$$(2) \text{解: 设平面 } A_1BD \text{ 的法向量为 } \vec{m} = (x, y, z),$$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{14}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } z=1, \text{ 得 } \vec{m} = (\sqrt{7}, 0, 1),$$

$$\text{设平面 } B_1BD \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z),$$

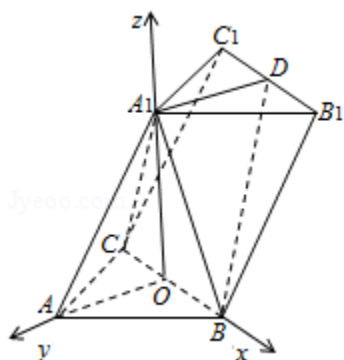
$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{14}z = 0 \\ -\sqrt{2}x = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } z=1, \text{ 得 } \vec{n} = (0, \sqrt{7}, 1),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{8},$$

又 \because 该二面角为钝角,

$$\therefore \text{二面角 } A_1 - BD - B_1 \text{ 的平面角的余弦值为 } -\frac{1}{8}.$$



点 本题考查空间中线面垂直的判定定理, 考查求二面角的三角函数值, 注意解题方法

评： 的积累，属于中档题.

18. (15 分) (2015•浙江) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 记 $M(a, b)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值.

(1) 证明: 当 $|a| \geq 2$ 时, $M(a, b) \geq 2$;

(2) 当 a, b 满足 $M(a, b) \leq 2$ 时, 求 $|a| + |b|$ 的最大值.

考点:

专题:

分析:

二次函数在闭区间上的最值.

函数的性质及应用.

(1) 明确二次函数的对称轴, 区间的端点值, 由 a 的范围明确函数的单调性, 结合已知以及三角不等式变形所求得到证明;

(2) 讨论 $a=b=0$ 以及分析 $M(a, b) \leq 2$ 得到 $-3 \leq a+b \leq 1$ 且 $-3 \leq b-a \leq 1$, 进一步求出 $|a| + |b|$ 的求值.

解答:

解: (1) 由已知可得 $f(1) = 1+a+b$, $f(-1) = 1-a+b$, 对称轴为 $x = -\frac{a}{2}$,

$$= 1 - a + b, \text{ 对称轴为 } x = -\frac{a}{2},$$

$$\text{因为 } |a| \geq 2, \text{ 所以 } -\frac{a}{2} \leq -1 \text{ 或 } -\frac{a}{2} \geq 1,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调,

所以 $M(a, b) = \max\{|f(1)|, |f(-1)|\}$

$$= \max\{|1+a+b|, |1-a+b|\},$$

$$\text{所以 } M(a, b) \geq \frac{1}{2} (|1+a+b| + |1-a+b|) \geq \frac{1}{2} (1+a+b) - (1-a+b) \geq \frac{1}{2} 2a \geq 2;$$

$$(1+a+b) - (1-a+b) \geq \frac{1}{2} 2a \geq 2;$$

(2) 当 $a=b=0$ 时, $|a| + |b| = 0$ 又 $|a| + |b| \geq 0$, 所以 0 为最小值, 符合题意;

又对任意 $x \in [-1, 1]$, 有 $-2 \leq x^2 + ax + b \leq 2$ 得到 $-3 \leq a+b \leq 1$ 且 $-3 \leq b-a \leq 1$, 易知

$|a| + |b| = \max\{|a-b|, |a+b|\} = 3$, 在 $b = -1, a = 2$ 时符合题意,

所以 $|a| + |b|$ 的最大值为 3.

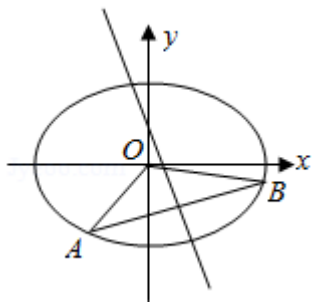
点评:

本题考查了二次函数闭区间上的最值求法; 解答本题的关键是正确理解 $M(a, b)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值, 以及利用三角不等式变形.

19. (15 分) (2015•浙江) 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上两个不同的点 A, B 关于直线 $y = mx + \frac{1}{2}$ 对称.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值 (O 为坐标原点).



考点: 直线与圆锥曲线的关系.

专题: 创新题型; 圆锥曲线中的最值与范围问题.

分析: (1) 由题意, 可设直线 AB 的方程为 $x = -my + n$, 代入椭圆方程可得 $(m^2 + 2)y^2 - 2mny + n^2 - 2 = 0$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 可得 $\Delta > 0$, 设线段 AB 的中点 $P(x_0, y_0)$, 利用中点坐标公式及其根与系数的可得 P, 代入直线 $y = mx + \frac{1}{2}$, 可得 $n = -\frac{m^2 + 2}{2m}$, 代入 $\Delta > 0$, 即可解出.

(2) 直线 AB 与 x 轴交点横坐标为 n, 可得 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |n| |y_1 - y_2|$, 再利用均值不等式即可得出.

解答: (1) 由题意, 可设直线 AB 的方程为 $x = -my + n$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 可得

$$(m^2 + 2)y^2 - 2mny + n^2 - 2 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 由题意, $\Delta = 4m^2n^2 - 4(m^2 + 2)(n^2 - 2) = 8(m^2 - n^2 + 2) > 0$,

$$\text{设线段 AB 的中点 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{mn}{m^2 + 2}, \quad x_0 = -m \times \frac{mn}{m^2 + 2} + n = \frac{2n}{m^2 + 2},$$

$$\text{由于点 P 在直线 } y = mx + \frac{1}{2} \text{ 上, } \therefore \frac{mn}{m^2 + 2} = \frac{2mn}{m^2 + 2} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore n = -\frac{m^2 + 2}{2m}, \text{ 代入 } \Delta > 0, \text{ 可得 } 3m^4 + 4m^2 - 4 > 0,$$

$$\text{解得 } m^2 > \frac{2}{3}, \therefore m < -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 或 } m > \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) 直线 AB 与 x 轴交点纵坐标为 n,

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |n| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} |n| \cdot \frac{\sqrt{8(m^2 - n^2 + 2)}}{m^2 + 2} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{n^2(m^2 - n^2 + 2)}{(m^2 + 2)^2}},$$

$$\text{由均值不等式可得: } n^2(m^2 - n^2 + 2) \leq \left(\frac{n^2 + m^2 - n^2 + 2}{2}\right)^2 = \frac{(m^2 + 2)^2}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} \leq \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ 当且仅当 } n^2 = m^2 - n^2 + 2, \text{ 即 } 2n^2 = m^2 + 2, \text{ 又 } \because n = -\frac{m^2+2}{2m}, \text{ 解得 } m = \pm\sqrt{2},$$

当且仅当 $m = \pm\sqrt{2}$ 时, $S_{\triangle AOB}$ 取得最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

点评: 本题考查了椭圆的定义标准方程及其性质、直线与椭圆相交问题转化为方程联立可得根与系数的关系、中点坐标公式、线段垂直平分线的性质、三角形面积计算公式、弦长公式、均值不等式的性质, 考查了推理能力与计算能力, 属于难题.

20. (15 分) 20. (15 分) (2015•浙江) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

(1) 证明: $1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$);

(2) 设数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明 $\frac{1}{2(n+2)} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2(n+1)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

考点: 数列的求和; 数列与不等式的综合.

专题: 创新题型; 点列、递归数列与数学归纳法.

分析:

(1) 通过题意易得 $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 利用 $a_n - a_{n+1} = a_n^2$ 可得 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$, 利用

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n - a_n^2} = \frac{1}{1 - a_n} \leq 2, \text{ 即得结论;}$$

(2) 通过 $a_n^2 = a_n - a_{n+1}$ 累加得 $S_n = \frac{1}{2} - a_{n+1}$, 利用数学归纳法可证明 $\frac{1}{1+n} \geq a_n \geq \frac{1}{2n}$ ($n \geq 2$), 从

$$\text{而 } \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+2)}}{n}, \text{ 化简即得结论.}$$

解答:

证明: (1) 由题意可知: $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

$$\text{又 } \because a_2 = a_1 - a_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2,$$

$$\text{又 } \because a_n - a_{n+1} = a_n^2, \therefore a_n > a_{n+1}, \therefore \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1,$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n - a_n^2} = \frac{1}{1 - a_n} \leq 2,$$

$$\therefore 1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$

$$(2) \text{ 由已知, } a_n^2 = a_n - a_{n+1}, \quad a_{n-1}^2 = a_{n-1} - a_n, \quad \dots, \quad a_1^2 = a_1 - a_2,$$

$$\text{累加, 得 } S_n = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_1^2 = a_1 - a_{n+1} = \frac{1}{2} - a_{n+1},$$

易知当 $n=1$ 时, 要证式子显然成立;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{S_n}{n} = \frac{\frac{1}{2} - a_{n+1}}{n}.$$

$$\text{下面证明: } \frac{1}{1+n} \geq a_n \geq \frac{1}{2n} \quad (n \geq 2).$$

$$\text{易知当 } n=2 \text{ 时成立, 假设当 } n=k \text{ 时也成立, 则 } a_{k+1} = - \left(a_k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4},$$

$$\text{由二次函数单调性知: } a_{n+1} \geq - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{2k-1}{4k^2} \geq \frac{1}{2(k+1)},$$

$$a_{n+1} \leq - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{k}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k+2},$$

$$\therefore \frac{1}{2(k+1)} \leq \frac{1}{a_{k+1}} \leq \frac{1}{k+2}, \text{ 即当 } n=k+1 \text{ 时仍然成立,}$$

$$\text{故对 } n \geq 2, \text{ 均有 } \frac{1}{1+n} \geq a_n \geq \frac{1}{2n},$$

$$\therefore \frac{1}{2(n+1)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} - a_{n+1}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}}{n} = \frac{1}{2(n+2)},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2(n+2)} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

点评: 本题是一道数列与不等式的综合题, 考查数学归纳法, 对表达式的灵活变形是解决本题的关键, 注意解题方法的积累, 属于难题.