2024年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟．第I卷1至3页，第II卷4至6页．

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码．答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

祝各位考生考试顺利！

第I卷（选择题）

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．

2．本卷共9小题，每小题5分，共45分．

参考公式：

·如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

·如果事件 A，B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$．

·球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 表示球的半径．

·圆锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 表示圆锥的底面面积，h 表示圆锥的高．

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

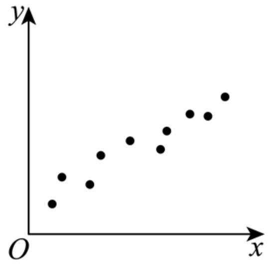
A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{2,4\}$　　D. $\{1\}$

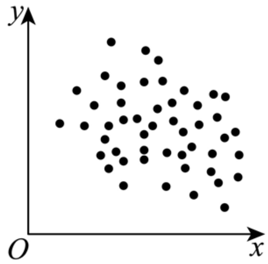
2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a^3=b^3$”是“$3^a=3^b$”的（　　）

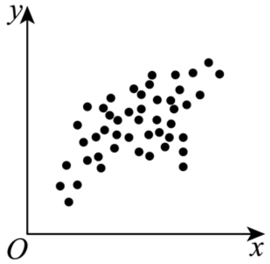
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

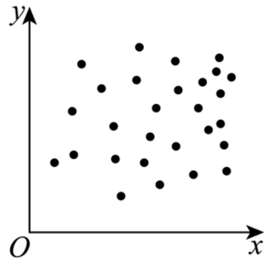
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 下列图中，相关性系数最大的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 下列函数是偶函数的是（　　）

A. $y=\dfrac{e^x-x^2}{x^2+1}$　　B. $y=\dfrac{\cos x+x^2}{x^2+1}$　　C. $y=\dfrac{e^x-x}{x+1}$　　D. $y=\dfrac{\sin x+4x}{e^{|x|}}$

5. 若 $a=4.2^{-0.3}$，$b=4.2^{0.3}$，$c=\log_{4.2}0.2$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

6. 若 m,n 为两条不同的直线，α 为一个平面，则下列结论中正确的是（　　）

A. 若 $m//\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m//n$　　B. 若 $m//\alpha,n//\alpha$，则 $m//n$

C. 若 $m//\alpha,n\perp\alpha$，则 $m\perp n$　　D. 若 $m//\alpha,n\perp\alpha$，则 m 与 n 相交

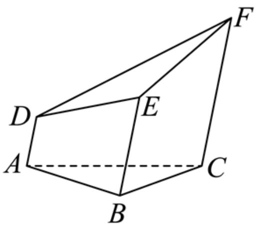
7. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin 3\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\omega>0\right)$ 的最小正周期为 π．则函数在 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 的最小值是（　　）

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. 0　　D. $\dfrac{3}{2}$

8. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2.P 是双曲线右支上一点，且直线 PF_2 的斜率为 2．$\triangle PF_1F_2$ 是面积为 8 的直角三角形，则双曲线的方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{8}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$

9. 一个五面体 $ABC-DEF$．已知 $AD//BE//CF$，且两两之间距离为 1．并已知 $AD=1，BE=2，CF=3$．则该五面体的体积为（　　）



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}$

第II卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上．

2．本卷共 11 小题，共 105 分．

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分．

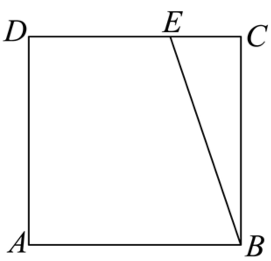
10. 已知 i 是虚数单位，复数 $\left(\sqrt{5}+\mathrm{i}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\mathrm{i}\right)=$______.

11. 在 $\left(\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{x^3}{3}\right)^6$ 的展开式中，常数项为______.

12. $(x-1)^2+y^2=25$ 的圆心与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 重合，A 为两曲线的交点，则原点到直线 AF 的距离为______.

13. A,B,C,D,E 五种活动，甲、乙都要选择三个活动参加.（1）甲选到 A 的概率为______；已知乙选了 A 活动，他再选择 B 活动的概率为______.

14. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 为线段 CD 的三等分点， $CE=\dfrac{1}{2}DE,\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda+\mu=$______；若 F 为线段 BE 上的动点，G 为 AF 中点，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的最小值为______.



15. 若函数 $f\left(x\right)=2\sqrt{x^2-ax}-\left|ax-2\right|+1$ 有唯一零点，则 a 的取值范围为______.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

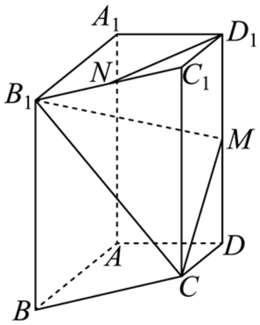
16. 在$\triangle ABC$中，$\cos B=\dfrac{9}{16}$，$b=5,\dfrac{a}{c}=\dfrac{2}{3}$.

（1）求a；

（2）求$\sin A$；

（3）求$\cos\left(B-2A\right)$.

17. 已知四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为梯形，$AB//CD$，$A_1A\perp$平面$ABCD$，$AD\perp AB$，其中$AB=AA_1=2,AD=DC=1$．N是B_1C_1的中点，M是DD_1的中点.



（1）求证D_1N//平面CB_1M；

（2）求平面CB_1M与平面BB_1CC_1的夹角余弦值；

（3）求点B到平面CB_1M的距离.

18. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$椭圆的离心率$e=\dfrac{1}{2}$. 左顶点为A，下顶点为$B$，$C$是线段$OB$的中点，其中$S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆方程.

（2）过点$\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$的动直线与椭圆有两个交点$P$，$Q$．在$y$轴上是否存在点$T$使得$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\le 0$恒成立．若存在求出这个$T$点纵坐标的取值范围，若不存在请说明理由.

19. 已知数列$\{a_n\}$是公比大于0的等比数列．其前n项和为S_n．若$a_1=1,S_2=a_3-1$.

（1）求数列$\{a_n\}$前n项和S_n；

（2）设$b_n=\begin{cases}k,n=a_k\\ b_{n-1}+2k,a_k<n<a_{k+1}\end{cases}$，$b_1=1$，其中$k$是大于1的正整数.

（i）当$n=a_{k+1}$时，求证：$b_{n-1}\ge a_k\cdot b_n$；

（ii）求 $\sum_{i=1}^{S_n} b_i$.

20. 设函数 $f\left(x\right)=x\ln x$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 图象上点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若 $f\left(x\right)\geq a\left(x-\sqrt{x}\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时恒成立，求 a 的取值范围；

（3）若 $x_1,x_2\in\left(0,1\right)$，证明 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq\left|x_1-x_2\right|^{\frac{1}{2}}$.