

2015年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）文

一、选择题（本大题共8个小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. i 为虚数单位， $i^{607} = (\quad)$

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

2. 我国古代数学名著《九章算术》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米1534石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得254粒内夹谷28粒，则这批米内夹谷约为（　）

- A. 134石 B. 169石 C. 338石 D. 1365石

3. 命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, $\ln x_0 = x_0 - 1$ ”的否定是（　）

- A. $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, $\ln x_0 \neq x_0 - 1$
B. $\exists x_0 \notin (0, +\infty)$, $\ln x_0 = x_0 - 1$
C. $\forall x \in (0, +\infty)$, $\ln x \neq x - 1$
D. $\forall x \notin (0, +\infty)$, $\ln x = x - 1$

4. 已知变量 x 和 y 满足关系 $y = -0.1x + 1$, 变量 y 与 z 正相关。下列结论中正确的是（　）

- A. x 与 y 负相关, x 与 z 负相关
B. x 与 y 正相关, x 与 z 正相关
C. x 与 y 正相关, x 与 z 负相关
D. x 与 y 负相关, x 与 z 正相关

5. l_1, l_2 表示空间中的两条直线, 若 p : l_1, l_2 是异面直线; q : l_1, l_2 不相交, 则（　）

- A. p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件
B. p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件
C. p 是 q 的充分必要条件
D. p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

6. 函数 $f(x) = \sqrt{4 - |x|} + \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ 的定义域为（　）

- A. $(2, 3)$
B. $(2, 4]$
C. $(2, 3) \cup (3, 4]$
D. $(-1, 3) \cup (3, 6]$

7. 设 $x \in \mathbf{R}$, 定义符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 则（　）

- A. $|x| = x |\operatorname{sgn} x|$
B. $|x| = x \operatorname{sgn} |x|$
C. $|x| = |x| \operatorname{sgn} x$
D. $|x| = x \operatorname{sgn} x$

8. 在区间 $[0, 1]$ 上随机取两个数 x, y , 记 p_1 为事件“ $x + y \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, p_2 为事件“ $xy \leq \frac{1}{2}$ ”

的概率, 则（　）

A. $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$

B. $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$

C. $p_2 < \frac{1}{2} < p_1$

D. $\frac{1}{2} < p_2 < p_1$

9. 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b ($a \neq b$) 同时增加 m ($m > 0$) 个单位

长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2 , 则 ()

A. 对任意的 a, b , $e_1 > e_2$

B. 当 $a > b$ 时, $e_1 > e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 < e_2$

C. 对任意的 a, b , $e_1 < e_2$

D. 当 $a > b$ 时, $e_1 < e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 > e_2$

10. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合

$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ()

A. 77

B. 49

C. 45

D. 30

第II卷 (共110分) (非选择题共110分)

二、填空题 (每题7分, 满分36分, 将答案填在答题纸上)

11. 已知向量 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{OA}| = 3$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$.

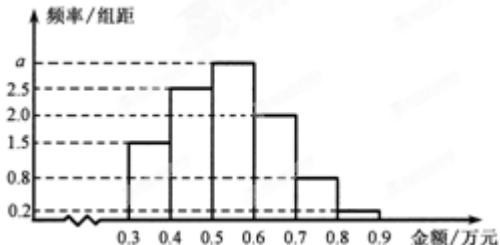
12. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 4, \\ x-y \leq 2, \\ 3x-y \geq 0, \end{cases}$ 则 $3x+y$ 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 函数 $f(x) = 2 \sin x \sin(x + \frac{\pi}{2}) - x^2$ 的零点个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 某电子商务公司对 10000 名网络购物者 2014 年度的消费情况进行统计, 发现消费金额 (单位: 万元) 都在区间 $[0.3, 0.9]$ 内, 其频率分布直方图如图所示.

(I) 直方图中的 $a = \underline{\hspace{2cm}}$;

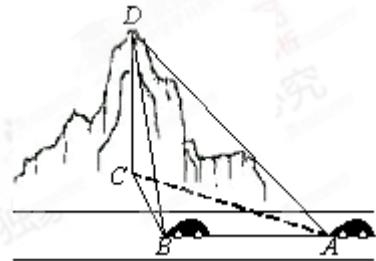
(II) 在这些购物者中, 消费金额在区间 $[0.5, 0.9]$ 内的购物者的人数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



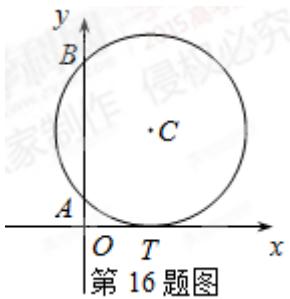
15. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30°

的方向上，行驶 600m 后到达 B 处，测得此山顶在西偏北 75° 的方向上，仰角为 30° ，则此山的高度

$$CD = \underline{\hspace{2cm}} \text{m.}$$



16. 如图，已知圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$ ，与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方)，且 $|AB|=2$.



(I) 圆 C 的标准方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(II) 圆 C 在点 B 处的切线在 x 轴上的截距为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. a 为实数，函数 $f(x)=|x^2-ax|$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值记为 $g(a)$. 当 $a=\underline{\hspace{2cm}}$ 时， $g(a)$ 的值最小.

三、解答题 (本大题共 5 小题，共 65 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

18. (本小题满分 12 分)

某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象

时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

(I) 请将上表数据补充完整，填写在答题卡上相应位置，并直接写出函数 $f(x)$ 的解

析式；

- (II) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y = g(x)$ 图象，求 $y = g(x)$ 的图象离原点 O 最近的对称中心。

19. (本小题满分 12 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q 。已知 $b_1 = a_1$ ， $b_2 = 2$ ， $q = d$ ， $S_{10} = 100$ 。

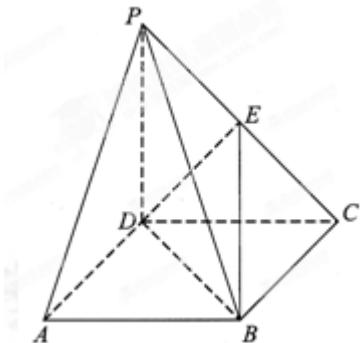
(I) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 当 $d > 1$ 时，记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

20. (本小题满分 13 分)

《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑。

在如图所示的阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PD = CD$ ，点 E 是 PC 的中点，连接 DE , BD , BE 。



(I) 证明： $DE \perp$ 平面 PBC 。试判断四面体 $EBCD$ 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，请说明理由；

(II) 记阳马 $P-ABCD$ 的体积为 V_1 ，四面体 $EBCD$ 的体积为 V_2 ，求 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值。

21. (本小题满分 14 分)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} ，且 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，

$f(x) + g(x) = e^x$ ，其中 e 为自然对数的底数。

(I) 求 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式，并证明：当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$, $g(x) > 1$ ；

(II) 设 $a \leq 0$, $b \geq 1$ ，证明：当 $x > 0$ 时， $ag(x) + (1-a) < \frac{f(x)}{x} < bg(x) + (1-b)$ 。

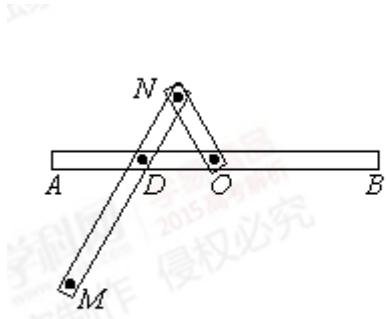
22. (本小题满分 14 分)

一种画椭圆的工具如图 1 所示。 O 是滑槽 AB 的中点，短杆 ON 可绕 O 转动，长杆 MN 通过 N 处铰链

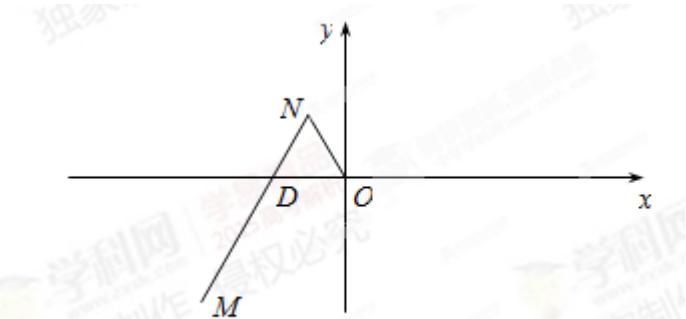
与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1$, $MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动, M 处的笔尖画出的椭圆记为 C . 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设动直线 l 与两定直线 $l_1 : x - 2y = 0$ 和 $l_2 : x + 2y = 0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与椭圆 C 有且只有一个公共点, 试探究: ΔOPQ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



第 22 题图 1



第 22 题图 2