2010年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（理工农医类）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\{1,2,3\}$，$N=\{2,3,4\}$，则

A． $M\subseteq N$．　B． $N\subseteq M$　C． $M\cap N=\{2,3\}$　D． $M\cup N=\{1,4\}$

2．下列命题中的假命题是

A． $\forall x\in \mathrm{R}$，$2^{x-1}>0$　B． $\forall x\in \mathrm{N}^*$，$(x-1)^2>0$

C． $\exists x\in \mathrm{R}$，$\lg x<1$　D． $\exists x\in \mathrm{R}$，$\tan x=2$

3．极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 和参数方程 $\begin{cases}x=-1-t,\\ y=2+3t\end{cases}$（$t$为参数）所表示的图形分别是

A．圆、直线　B．直线、圆　C．圆、圆　D．直线、直线

4．在 $\mathrm{Rt}\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 等于

A． -16　B． -8　C．8　D．16

5．$\int_2^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 等于　A． $-2\ln 2$　B． $2\ln 2$　C． $-\ln 2$．　D． $\ln 2$

6．在 ΔABC 中，角A，B，C所对的边长分别为a，b，c．若 $\angle C=120^\circ$，$c=\sqrt{2}a$，则

A． $a>b$　B． $a<b$　C． $a=b$　D． a与b的大小关系不能确定

7．在某种信息传输过程中，用4个数字的一个排列（数字允许重复）表示一个信息，不同排列表示不同信息，若所用数字只有0和1，则与信息0110至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为

A.10　B.11　C.12　D.15

8．用 $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两数中的最小值．若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图像关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，则 t 的值为　A． -2　B．2　C． -1　D．1

二、填空题：本大题共7小题，每小题5分，共35分．把答案填在答题卡中对应题号后的横线上．

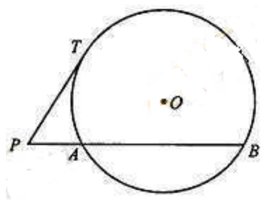


图1

9．已知一种材料的最佳加入量在110g到210g之间．若用0.618法安排实验，则

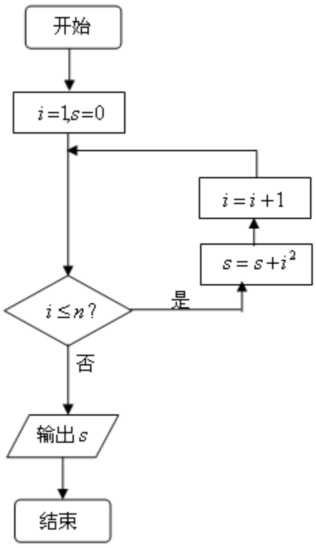
第一次试点的加入量可以是________________g.

10．如图1所示，过$\odot O$外一点P作一条直线与$\odot O$交于A,B两点．已知PA=2，点P到$\odot O$的切线长PT=4，则弦AB的长为________.

11．在区间$\left[-1,2\right]$上随机取一个数x，则$|x|\le 1$的概率为________.

12．图2是求$1^2+2^2+3^2+\dots+100^2$的值的程序框图，则正整数$n=$________.

13．图3中的三个直角三角形是一个体积为20 cm^3的几何体的三视图，则$h=$______ cm.



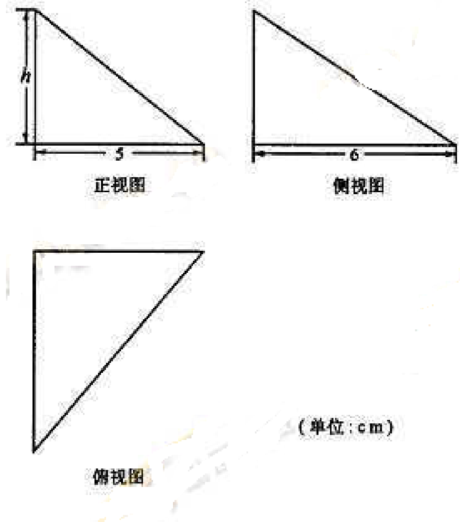


图3

14．过抛物线$x^2=2py(p>0)$的焦点作斜率为1的直线与该抛物线交于A,B两点，A,B在x轴上的正射影分别为D,C．若梯形$ABCD$的面积为$12\sqrt{2}$，则$p=$______.

15．若数列$\{a_n\}$满足：对任意的$n\in N^*$，只有有限个正整数m使得$a_m<n$成立，记这样的m的个数为$(a_n)^*$，则得到一个新数列$\{(a_n)^*\}$．例如，若数列$\{a_n\}$是$1,2,3\dots$，$n,\dots$，则数列$\{(a_n)^*\}$是$0,1,2,\dots$，$n-1,\dots$．已知对任意的$n\in \mathrm{N}^*$，$a_n=n^2$，则$(a_5)^*=$______，

$((a_n)^*)^*=$____________.

三、解答题：本大题共6小题，共75分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16．（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x$.

（I）求函数 $f(x)$ 的最大值；（II）求函数 $f(x)$ 的零点的集合.

17. （本小题满分12分）

图4是某城市通过抽样得到的居民某年的月均用水量（单位：吨）的频率分布直方图.

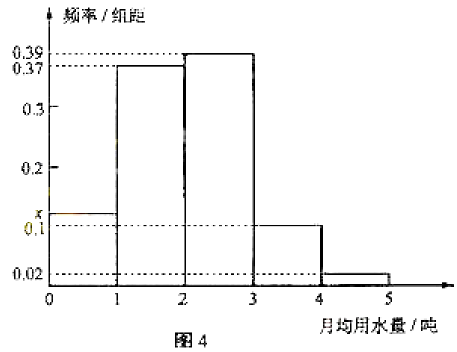


图4

（I）求直方图中 x 的值.

（II）若将频率视为概率，从这个城市随机抽取3位居民（看作有放回的抽样），求月均用水量在3至4吨的居民数X的分布列和数学期望.

18. （本小题满分12分）

如图5所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E是棱 DD_1 的中点.

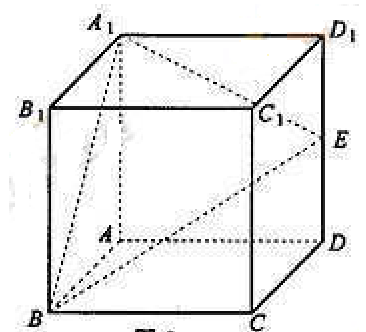


图5

（I）求直线BE的平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值；

（II）在棱 C_1D_1 上是否存在一点F，使 B_1F// 平面 A_1BE ？证明你的结论.

19. （本小题满分13分）

为了考察冰川的融化状况，一支科考队在某冰川上相距8km的A，B两点各建一个考察基地.视冰川面为平面形，以过A，B两点的直线为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系（图6）. 在直线 $x=2$ 的右侧，考察范围为到点B的距离不超过 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ km的区域；在直线 $x=2$ 的左侧，考察范围为到A，B两点的距离之和不超过 $4\sqrt{5}$ km的区域.

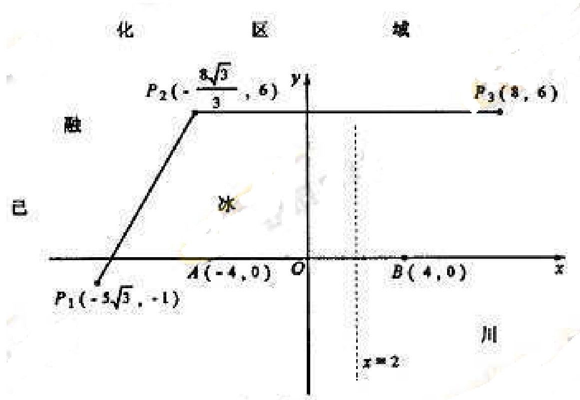


图6

（I）求考察区域边界曲线的方程；

（II）如图6所示，设线段 P_1P_2 ， P_2P_3 是冰川的部分边界线（不考虑其他边界），当冰川融化时，边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动，第一年移动0.2km，以后每年移动的距离为前一年的2倍，求冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间.

20.（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in R)$,对任意的 $x\in R$ ，恒有 $f'(x)\le f(x)$.

（I）证明：当$x\ge 0$时，$f(x)\le (x+c)^2$；

（II）若对满足题设条件的任意b，c，不等式$f(c)-f(b)\le M(c^2-b^2)$恒成立，求M的最小值.

21．（本小题满分13分）

数列$\{a_n\}(n\in N^*)$中，$a_1=a,a_{n+1}$是函数$f_n(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3a_n+n^2)x^2+3n^2a_nx$的极小值点.

（I）当$a=0$时，求通项a_n；

（II）是否存在a，使数列$\{a_n\}$是等比数列？若存在，求a的取值范围；若不存在，请说明理由.

2010年湖南省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1．（5分）（2010•湖南）已知集合M={1，2，3}，N={2，3，4}，则（　　）

A．M⊆N　B．N⊆M　C．M∩N={2，3}　D．M∪N={1，4}

【考点】交集及其运算.

【专题】计算题.

【分析】利用直接法求解，分别求出两个集合的交集与并集，观察两个集合的包含关系即可.

【解答】解：M∩N

={1，2，3}∩{2，3，4}

={2，3}

故选C.

【点评】本题主要考查了集合的交集与子集的运算，属于容易题.

2．（5分）（2010•湖南）下列命题中是假命题的是（　　）

A．∀x∈R，$2^{x-1}>0$　B．∀x∈N*，$(x-1)^2>0$　C．∃x∈R，lgx＜1　D．∃x∈R，tanx=2

【考点】四种命题的真假关系.

【专题】简易逻辑.

【分析】本题考查全称命题和特称命题真假的判断，逐一判断即可.

【解答】解：B中，x=1时不成立，故选B．
答案：B．
【点评】本题考查逻辑语言与指数函数、二次函数、对数函数、正切函数的值域，属容易题．

3．（5分）（2010•湖南）极坐标p=cosθ和参数方程$\begin{cases}x=-1-t\\y=2+t\end{cases}$（t为参数）所表示的图形分别是（　　）
A．直线、直线　B．直线、圆 C．圆、圆　D．圆、直线
【考点】参数方程化成普通方程．
【专题】计算题．
【分析】将极坐标方程和参数方程化为一般方程，然后进行选择．
【解答】解：∵极坐标p=cosθ，x=pcosθ，y=psinθ，消去θ和p，
∴$x^2+y^2=x$，
$x^2+y^2=x$为圆的方程；
参数方程$\begin{cases}x=-1-t\\y=2+t\end{cases}$（t为参数）消去t得，x+y﹣1=0，为直线的方程，
故选D．
【点评】此题考查参数方程、极坐标方程与普通方程的区别和联系，两者要会互相转化，根据实际情况选择不同的方程进行求解，这也是每年高考必考的热点问题．

4．（5分）（2010•湖南）在Rt△ABC中，∠C=90°，AC=4，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$等于（　　）
A．﹣16 B．﹣8 C．8　D．16
【考点】平面向量数量积的运算；向量的加法及其几何意义．
【专题】计算题．
【分析】本题是一个求向量的数量积的问题，解题的主要依据是直角三角形中的垂直关系和一条边的长度，解题过程中有一个技巧性很强的地方，就是把$\overrightarrow{AB}$变化为两个向量的和，再进行数量积的运算．
【解答】解：∵∠C=90°，
∴$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，
∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=4^2=16$
故选D．
【点评】启发学生在理解数量积的运算特点的基础上，逐步把握数量积的运算律，引导学生注意数量积性质的相关问题的特点，以熟练地应用数量积的性质．□

5．（5分）（2010•湖南）$\int_2^4 \frac{1}{x}dx$等于（　　）

A．$-2\ln 2$　B．$2\ln 2$　C．$-\ln 2$　D．$\ln 2$

【考点】定积分．

【专题】计算题．

【分析】根据题意，直接找出被积函数$\frac{1}{x}$的原函数，直接计算在区间（2，4）上的定积分即可．

【解答】解：∵$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

∴$\int_2^4 \frac{1}{x}=\ln x|_2^4=\ln 4-\ln 2=\ln 2$

故选D

【点评】本题考查定积分的基本运算，关键是找出被积函数的原函数，本题属于基础题．

6．（5分）（2010•湖南）在△ABC中，角A，B，C所对的边长分别为a，b，c，若∠C=120°，$c=\sqrt{2}a$，则（　　）

A．a＞b B．a＜b

C．a=b　D．a与b的大小关系不能确定

【考点】余弦定理；不等式的基本性质．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】由余弦定理可知$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，进而求得$a-b=\frac{ab}{a+b}$，根据$\frac{ab}{a+b}>0$判断出a＞b．

【解答】解：∵∠C=120°，$c=\sqrt{2}a$，

∴由余弦定理可知$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

∴$a^2-b^2=ab$，$a-b=\frac{ab}{a+b}$，

∵a＞0，b＞0，

∴$a-b=\frac{ab}{a+b}$，

∴a＞b

故选A

【点评】本题考查余弦定理，特殊角的三角函数值，不等式的性质，比较法，属中档题．

7．（5分）（2010•湖南）在某种信息传输过程中，用4个数字的一个排列（数字允许重复）表示一个信息，不同排列表示不同信息，若所用数字只有0和1，则与信息0110至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为（　　）

A．10　B．11　C．12　D．15

【考点】排列、组合及简单计数问题．

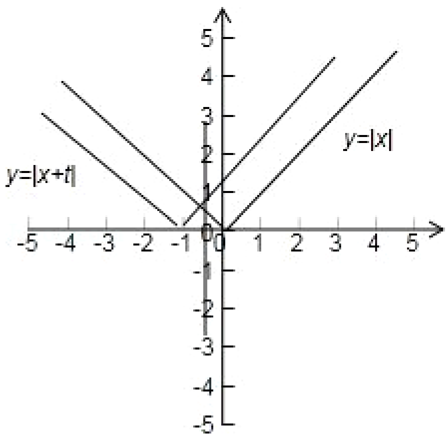
【专题】计算题；压轴题．

【分析】由题意知与信息0110至多有两个对应位置上的数字相同的信息包括三类：一是与信息0110有两个对应位置上的数字相同，二是与信息0110有一个对应位置上的数字相同，三是与信息0110没有一个对应位置上的数字相同的，分别写出结果相加．

【解答】解：由题意知与信息0110至多有两个对应位置上的数字相同的信息包括三类：
第一类：与信息0110有两个对应位置上的数字相同有$C_4^2=6$（个）
第二类：与信息0110有一个对应位置上的数字相同的有$C_4^1=4$个，
第三类：与信息0110没有一个对应位置上的数字相同的有$C_4^0=1$，
由分类计数原理知与信息0110至多有两个对应位置数字相同的共有6+4+1=11个，
故选B．
【点评】本题是一个分类计数问题，这是经常出现的一个问题，解题时一定要分清做这件事需要分为几类，每一类包含几种方法，把几个步骤中数字相加得到结果．

8．（5分）（2010•湖南）用min{a，b}表示a，b两数中的最小值．若函数f（x）=min{|x|，|x+t|}的图象关于直线$x=-\frac{1}{2}$对称，则t的值为（　　）

A．－2　B．2　　C．－1　D．1
【考点】函数的图象与图象变化．
【专题】作图题；压轴题；新定义；数形结合法．
【分析】由题设，函数是一个非常规的函数，在同一个坐标系中作出两个函数的图象，及直线$x=-\frac{1}{2}$，观察图象得出结论
【解答】解：如图，在同一个坐标系中做出两个函数y=|x|与y=|x+t|的图象，
函数f（x）=min{|x|，|x+t|}的图象为两个图象中较低的一个，
分析可得其图象关于直线$x=-\frac{t}{2}$对称，
要使函数f（x）=min{|x|，|x+t|}的图象关于直线$x=-\frac{1}{2}$对称，则t的值为t=1
故应选D．



【点评】本题的考点是函数的图象与图象的变化，通过新定义考查学生的创新能力，考查函数的图象，考查考生数形结合的能力，属中档题．

二、填空题（共7小题，每小题5分，满分35分）
9．（5分）（2010•湖南）已知一种材料的最佳加入量在110g到210g之间，若用0.618法安排试验，则第一次试点的加入量可以是__171.8或148.2__g．
【考点】黄金分割法—0.618法．
【专题】阅读型．

【分析】由题知试验范围为[100，200]，区间长度为100，故可利用0.618法：110+（210﹣110）×0.618或210﹣（210﹣110）×0.618选取试点进行计算．

【解答】解：根据0.618法，第一次试点加入量为

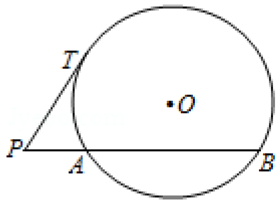
110+（210﹣110）×0.618=171.8

或210﹣（210﹣110）×0.618=148.2

故答案为：171.8或148.2．

【点评】本题考查优先法的0.618法，属容易题，解答的关键是对黄金分割法﹣0.618法的了解．

10．（5分）（2010•湖南）如图所示，过⊙O外一点P作一条直线与⊙O交于A，B两点，已知PA=2，点P到⊙O的切线长PT=4，则弦AB的长为___6___．



【考点】与圆有关的比例线段．

【专题】计算题．

【分析】首先根据题中圆的切线条件再依据切割线定理求得一个线段的等式，再根据线段的关系可求得AB的长度即可．

【解答】解：根据切割线定理

PT^2=PA•PB，PB=$\frac{PT^2}{PA}=\frac{16}{2}$=8，

∴AB=PB﹣PA=8﹣2=6．

故填：6．

【点评】本题考查与圆有关的比例线段、平面几何的切割线定理，属容易题．

11．（5分）（2010•湖南）在区间[﹣1，2]上随机取一个数x，则|x|≤1的概率为__$\frac{2}{3}$__．

【考点】几何概型．

【专题】计算题．

【分析】本题利用几何概型求概率．先解绝对值不等式，再利用解得的区间长度与区间[﹣1，2]的长度求比值即得．

【解答】解：利用几何概型，其测度为线段的长度．

∵|x|≤1得﹣1≤x≤1，

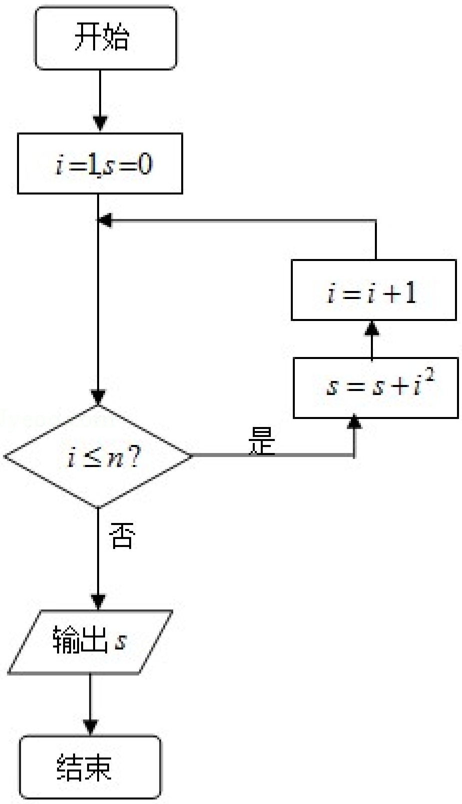
∴|x|≤1的概率为：

P（|x|≤1）=$\frac{1-(-1)}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$．

故答案为：$\frac{2}{3}$．

【点评】本题主要考查了几何概型，简单地说，如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型．

12．（5分）（2010•湖南）如图是求$1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2$的值的程序框图，则正整数n=__100__．



．

【考点】设计程序框图解决实际问题．

【专题】常规题型．

【分析】由已知可知：该程序的作用是求$1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2$的值，共需要循环100次，由于循环变量的初值已知，故不难确定循环变量的终值．

【解答】解：由已知可知：该程序的作用是求$1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2$的值，

共需要循环100次，

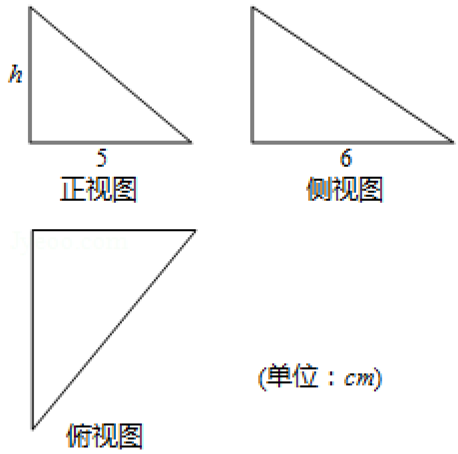
最后一次执行循环体的作用是累加100^2

故循环变量的终值应为100

故答案为：100

【点评】算法是新课程中的新增加的内容，也必然是新高考中的一个热点，应高度重视．程序填空也是重要的考试题型，这种题考试的重点有：①分支的条件②循环的条件③变量的赋值④变量的输出．其中前两点考试的概率更大．此种题型的易忽略点是：不能准确理解流程图的含义而导致错误．

13．（5分）（2010•湖南）图中的三个直角三角形是一个体积为$20cm^3$的几何体的三视图，则h=__4__cm．



【考点】由三视图求面积、体积.

【专题】计算题.

【分析】由三视图可知，几何体的底面为直角三角形，且一边垂直于底面，再根据公式求解即可.

【解答】解：根据三视图可知，几何体的体积为：$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times5\times6\times h=5h$

又因为V=20，所以h=4

故答案为：4

【点评】本题考查学生的空间想象能力，以及公式的利用，是基础题.

14．（5分）（2010•湖南）过抛物线$x^2=2py$（p＞0）的焦点作斜率为1的直线与该抛物线交于A，B两点，A，B在x轴上的正射影分别为D，C．若梯形ABCD的面积为$12\sqrt{2}$，则P=__2__.

【考点】抛物线的标准方程；直线的一般式方程；抛物线的简单性质.

【专题】圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】先根据抛物线方程得出其焦点坐标和过焦点斜率为1的直线方程，设出A，B两点的坐标，把直线与抛物线方程联立消去y，根据韦达定理表示出x_1+x_2和x_1x_2，进而用A，B坐标表示出梯形的面积建立等式求得p.

【解答】解：抛物线的焦点坐标为F（0，$\frac{p}{2}$），则过焦点斜率为1的直线方程为$y=x+\frac{p}{2}$，

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）（$x_2>x_1$），由题意可知$y_1>0$，$y_2>0$

由$\begin{cases}y=x+\frac{p}{2}\\x^2=2py\end{cases}$，消去y得$x^2-2px-p2=0$，

由韦达定理得，$x_1+x_2=2p$，$x_1x_2=-p^2$

所以梯形ABCD的面积为：$S=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)=\frac{1}{2}(x_1+x_2+p)(x_2-x_1)=\frac{1}{2}\cdot3p$

$\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3\sqrt{2}p^2$

所以$3\sqrt{2}p^2=12\sqrt{2}$，又p＞0，所以p=2

故答案为2.

【点评】本题考查抛物线的焦点坐标，直线的方程，直线与抛物线的位置关系，考查考生的运算能力，属中档题

15．（5分）（2010•湖南）若数列$\{a_n\}$满足：对任意的$n\in N^*$，只有有限个正整数m使得$a_m<n$成立，记这样的m的个数为$(a_n)^+$，则得到一个新数列$\{(a_n)^+\}$．例如，若数列$\{a_n\}$是1，2，3…，n，…，则数列$\{(a_n)^+\}$是0，1，2，…，n - 1…已知对任意的$n\in N^+$，$a_n=n^2$，则$(a_5)^+=$__2__，$((a_n)^+)^+=$__n^2__．

【考点】数列的应用．

【专题】计算题；压轴题；新定义．

【分析】根据题意，若$a_m<5$，而$a_n=n^2$，知m=1，2，∴$(a_5)^+=2$，由题设条件可知$((a_1)^+)^+=1$，$((a_2)^+)^+=4$，$((a_3)^+)^+=9$，$((a_4)^+)^+=16$，于是猜想：$((a_n)^+)^+=n^2$．

【解答】解：∵$a_m<5$，而$a_n=n^2$，∴m=1，2，∴$(a_5)^+=2$．

∵$(a_1)^+=0$，$(a_2)^+=1$，$(a_3)^+=1$，$(a_4)^+=1$，

$(a_5)^+=2$，$(a_6)^+=2$，$(a_7)^+=2$，$(a_8)^+=2$，$(a_9)^+=2$，

$(a_{10})^+=3$，$(a_{11})^+=3$，$(a_{12})^+=3$，$(a_{13})^+=3$，$(a_{14})^+=3$，$(a_{15})^+=3$，$(a_{16})^+=3$，

∴$((a_1)^+)^+=1$，$((a_2)^+)^+=4$，$((a_3)^+)^+=9$，$((a_4)^+)^+=16$，

猜想：$((a_n)^+)^+=n^2$．

答案：2，n^2．

【点评】本题考查数列的性质和应用，解题时要认真审题．仔细解答．

三、解答题（共6小题，满分75分）

16．（12分）（2010•湖南）已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x - 2\sin^2 x$．

（I）求函数f（x）的最大值；

（II）求函数f（x）的零点的集合．

【考点】三角函数的最值；集合的含义；函数的零点．

【专题】计算题．

【分析】（I）先根据二倍角公式和两角和与差的公式进行化简，再由正弦函数的最值可得到答案．

（II）令f（x）=0可得到$2\sqrt{3}\sin x\cos x=2\sin^2 x$，进而可得到$\sin x=0$或$\tan x=\sqrt{3}$，即可求出对应的x的取值集合，得到答案．

【解答】解：（I）∵$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x - 2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x - 1=2\sin(2x+\frac{\pi}{6}) - 1$

故函数f（x）的最大值等于2 - 1=1

（II）由f（x）=0得$2\sqrt{3}\sin x\cos x=2\sin^2 x$，于是$\sin x=0$，或$\sqrt{3}\cos x=\sin x$即$\tan x=\sqrt{3}$

由$\sin x=0$可知$x=k\pi$；

由$\tan x=\sqrt{3}$可知$x=k\pi+\frac{\pi}{3}$．

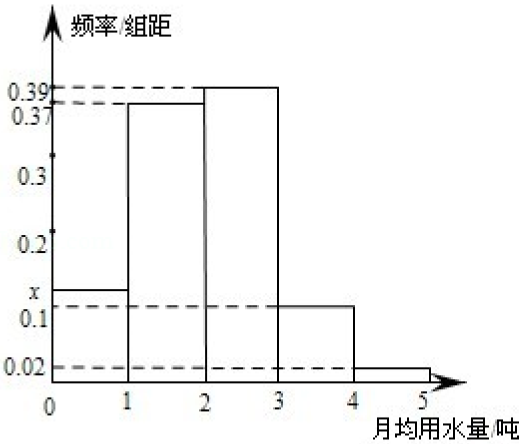
故函数f（x）的零点的集合为$\{x|x=k\pi$或$x=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z\}$

【点评】本题主要考查二倍角公式、两角和与差的正弦公式的应用和正弦函数的基本性质．三角函数是高考的重点，每年必考，要强化复习．

17．（12分）（2010•湖南）如图是某城市通过抽样得到的居民某年的月均用水量（单位：吨）的频率分布直方图．

（I）求直方图中x的值．

（II）若将频率视为概率，从这个城市随机抽取3位居民（看作有放回的抽样），求月均用水量在3至4吨的居民数X的分布列和数学期望．



【考点】频率分布直方图；离散型随机变量及其分布列；离散型随机变量的期望与方差．

【分析】本题考查的知识点是频率分布直方图、离散型随机变量及其分布列和数学期望．

（1）根据频率分布直方图中，各组的频率之和为1，我们易得到一个关于x的方程，解方程即可得到答案．

（2）由频率分布直方图中月均用水量各组的频率，我们易得X～B（3，0.1）．然后将数据代入后，可分别算出P（X=0），P（X=1），P（X=2），P（X=3）的值，代入即可得到随机变量X的分布列，然后代入数学期望公式，可进而求出数学期望．

【解答】解：（I）依题意及频率分布直方图知，0.02+0.1+x+0.37+0.39=1，解得x=0.12．

（II）由题意知，X～B（3，0.1）．

因此P（X=0）$=C_3^0\times0.9^3=0.729$，

P（X=1）$=C_3^1\times0.1\times0.9^2=0.243$，

P（X=2）$=C_3^2\times0.1^2\times0.9=0.027$，

P（X=3）$=C_3^3\times0.1^3=0.001$．

故随机变量X的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.729	0.243	0.027	0.001

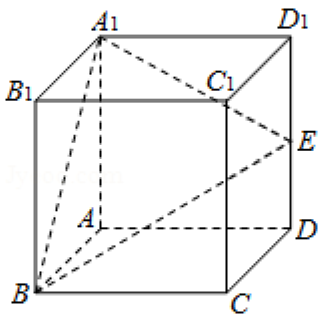
X的数学期望为EX=3×0.1=0.3．

【点评】根据新高考服务于新教材的原则，作为新教材的新增内容－－频率分布直方图是新高考的重要考点，同时（2）中概随机变量的分布列、数学期望的计算也是高考的热点．对于“频率分布直方图学习的关键是学会画图、看图和用图，对于概率要多练习使用列举法表示满足条件的基本事件个数．对于数学期望的计算则要熟练掌握运算方法和步骤．

18．（12分）（2010•湖南）如图所示，在正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$中，E是棱DD_1的中点．

（I）求直线BE与平面ABB_1A_1所成的角的正弦值；

（II）在棱C_1D_1上是否存在一点F，使B_1F∥平面A_1BE？证明你的结论．



【考点】直线与平面平行的判定；直线与平面所成的角．

【专题】计算题；证明题．

【分析】（I）先取AA_1的中点M，连接EM，BM，根据中位线定理可知EM∥AD，而AD⊥平面ABB_1A_1，则EM⊥面ABB_1A_1，从而BM为直线BE在平面ABB_1A_1上的射影，则∠EBM直线BE与平面ABB_1A_1所成的角，设正方体的棱长为2，则EM=AD=2，BE=3，于是在Rt△BEM中，求出此角的正弦值即可．

（II）在棱C_1D_1上存在点F，使B_1F平面A_1BE，分别取C_1D_1和CD的中点F，G，连接EG，BG，CD_1，FG，因A_1D_1∥B_1C_1∥BC，且A_1D_1=BC，所以四边形A_1BCD_1为平行四边形，根据中位线定理可知EG∥A_1B，从而说明A_1，B，G，E共面，则BG⊂面A_1BE，根据FG∥C_1C∥B_1G，且FG=C_1C=B_1B，从而得到四边形B_1BGF为平行四边形，则B_1F∥BG，而B_1F⊄平面A_1BE，BG⊂平面A_1BE，根据线面平行的判定定理可知B_1F∥平面A_1BE．

【解答】解：（I）如图（a），取AA_1的中点M，连接EM，BM，因为E是DD_1的中点，四边形ADD_1A_1为正方形，所以EM∥AD．

又在正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$中．AD⊥平面ABB_1A_1，所以EM⊥面ABB_1A_1，从而BM为直线BE在平面ABB_1A_1上的射影，

∠EBM直线BE与平面ABB_1A_1所成的角．

设正方体的棱长为2，则EM=AD=2，BE=$\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，

于是在Rt△BEM中，$\sin\angle EBM=\frac{EM}{BE}=\frac{2}{3}$

即直线BE与平面ABB_1A_1所成的角的正弦值为$\frac{2}{3}$．

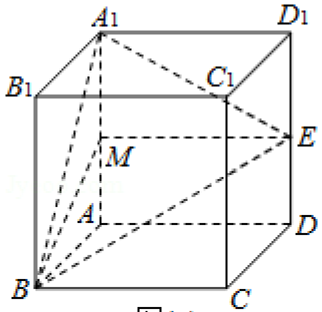
（II）在棱C_1D_1上存在点F，使B_1F平面A_1BE，

事实上，如图（b）所示，分别取C_1D_1和CD的中点F，G，连接EG，BG，CD_1，FG，

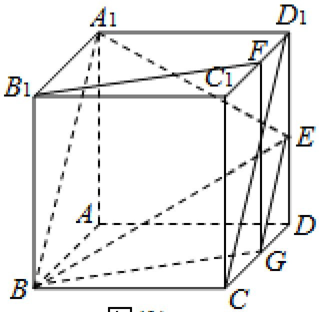
因A_1D_1∥B_1C_1∥BC，且A_1D_1=BC，所以四边形A_1BCD_1为平行四边形，

因此D_1C∥A_1B，又E，G分别为D_1D，CD的中点，所以EG∥D_1C，从而EG∥A_1B，这说明A_1，B，G，E共面，所以BG⊂平面A_1BE

因四边形C_1CDD_1与B_1BCC_1皆为正方形，F，G分别为C_1D_1和CD的中点，所以FG∥C_1C∥B_1B，且FG=C_1C=B_1B，因此四边形B_1BGF为平行四边形，所以B_1F∥BG，而B_1F⊄平面A_1BE，BG⊂平面A_1BE，故B_1F∥平面A_1BE．



图(a)



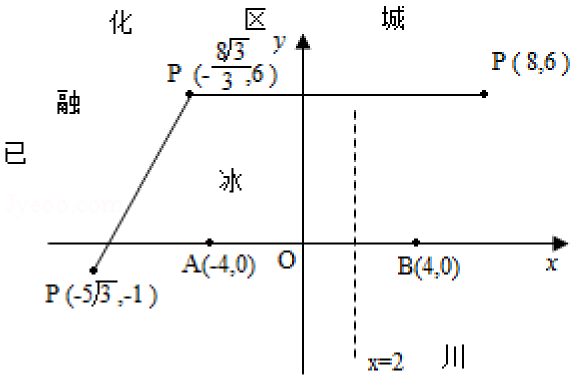
图(b)

【点评】本题考查直线与平面所成的角，直线与平面平行，考查考生探究能力、空间想象能力．

19．（13分）（2010•湖南）为了考察冰川的融化状况，一支科考队在某冰川上相距8km的A，B两点各建一个考察基地．视冰川面为平面形，以过A，B两点的直线为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系（图）．在直线x=2的右侧，考察范围为到点B的距离不超过$\frac{6\sqrt{5}}{5}$km的区域；在直线x=2的左侧，考察范围为到A，B两点的距离之和不超过$4\sqrt{5}$km的区域．

（I）求考察区域边界曲线的方程；

（II）如图所示，设线段P_1P_2，P_2P_3是冰川的部分边界线（不考虑其他边界），当冰川融化时，边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动，第一年移动0.2km，以后每年移动的距离为前一年的2倍，求冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间．



【考点】轨迹方程；两条平行直线间的距离．

【专题】综合题．

【分析】（I）设边界曲线上点P的坐标为（x，y），当x≥2时，$(x-4)^2+y^2=\frac{36}{5}$．当x＜2时，$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$．由此能得到考查区域边界曲线的方程；

（II）设过点P_1，P_2的直线为l_1，过点P_2，P_3的直线为l_2，则直线l_1，l_2的方程分别为$y=\sqrt{3}x+14$，$y=6$．

设直线l平行于直线l_1，其方程为$y=\sqrt{3}x+m$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$，消去y，得

$16x^2+10\sqrt{3}mx+5(m^2-4)=0$，然后由根的判别式和点到直线的距离公式结合题设条件进行求解．

【解答】解：（I）设边界曲线上点P的坐标为（x，y），

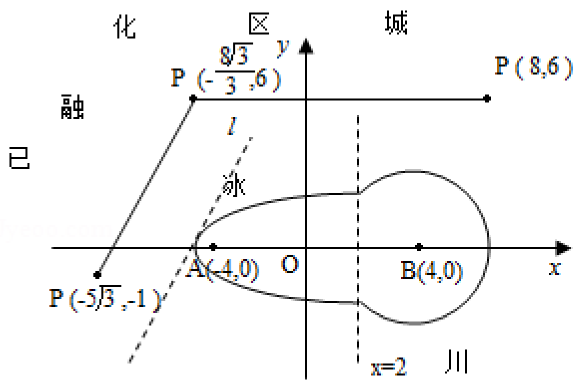
当x≥2时，由题意知$(x-4)^2+y^2=\frac{36}{5}$．

当x＜2时，由$|PA|+|PB|=4\sqrt{5}$知，点P在以A，B为焦点，长轴长为$2a=4\sqrt{5}$的椭圆上．

此时短半轴长$b=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$．因而其方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$．

故考察区域边界曲线（如图）的方程为C_1：$(x-4)^2+y^2=\frac{36}{5}$（$x\geqslant 2$）和

C_2：$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$（$x<2$）．



（II）设过点P_1，P_2的直线为l_1，过点P_2，P_3的直线为l_2，则直线l_1，l_2的方程分别为$y=\sqrt{3}x+14$，$y=6$．

设直线l平行于直线l_1，其方程为$y=\sqrt{3}x+m$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$，消去y，得

$16x^2+10\sqrt{3}mx+5(m^2-4)=0$，

由△$100\times3m^2-4\times16\times5(m^2-4)=0$，

解得m=8或m=﹣8．

从图中可以看出，当m=8时，直线l与C_2的公共点到直线l的距离最近，此时直线l的方程为$y=\sqrt{3}x+8$，l与l_1之间的距离为$d=\frac{|14-8|}{\sqrt{1+3}}=3$．

又直线l_2到C_1和C_2的最短距离$d'=6-\frac{6\sqrt{5}}{5}$，而d'＞3，所以考察区域边界到冰川边界线的最短距离为3．

设冰川边界线移动到考察区域所需的时间为n年，则由题设及等比数列求和公式，

得$\frac{0.2(2^n-1)}{2-1}\geqslant 3$，所以$n\geq 4$.

故冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间为4年.

【点评】本题考查点的轨迹方程，解题时要认真审题，注意公式的灵活运用和数形结合的合理运用.

20. （13分）（2010•湖南）已知函数$f(x)=x^2+bx+c$（b，c∈R），对任意的x∈R，恒有$f'(x)\leq f(x)$.

（I）证明：当$x\geq 0$时，$f(x)\leq (x+c)^2$；

（II）若对满足题设条件的任意b，c，不等式$f(c)-f(b)\leq M(c^2-b^2)$恒成立，求M的最小值.

【考点】函数恒成立问题；二次函数的性质.

【专题】计算题；压轴题.

【分析】（I）$f'(x)\leq f(x)$转化为$x^2+(b-2)x+c-b\geq 0$恒成立，找到b和c之间的关系，再对$f(x)$和$(x+c)^2$作差整理成关于b和c的表达式即可.

（II）对$c\geq|b|$分$c>|b|$和$c=|b|$两种情况分别求出对应的M的取值范围，再综合求M的最小值即可.

【解答】解：（I）易知$f'(x)=2x+b$. 由题设，对任意的x∈R，$2x+b\leq x^2+bx+c$，

即$x^2+(b-2)x+c-b\geq 0$恒成立，所以$(b-2)^2-4(c-b)\leq 0$，从而$c\geqslant\frac{b^2}{4}+1$.

于是$c\geq 1$，且$c\geqslant 2\sqrt{\frac{b^2}{4}\times 1}=|b|$，因此$2c-b=c+(c-b)>0$.

故当$x\geq 0$时，有$(x+c)^2-f(x)=(2c-b)x+c(c-1)\geq 0$.

即当$x\geq 0$时，$f(x)\leq (x+c)^2$.

（II）由（I）得，$c\geq|b|$

当$c>|b|$时，有$M\geq\frac{f(c)-f(b)}{c^2-b^2}=\frac{c^2-b^2+bc-b^2}{c^2-b^2}=\frac{c+2b}{b+c}$，

令$t=\frac{b}{c}$则$-1<t<1$，$\frac{c+2b}{b+c}=2-\frac{1}{t+1}$，

而函数$g(t)=2-\frac{1}{t+1}$（$-1<t<1$）的值域$(-\infty,\frac{3}{2})$

因此，当$c>|b|$时M的取值集合为$[\frac{3}{2},+\infty)$.

当$c=|b|$时，由（I）知，$b=\pm 2$，$c=2$.

此时$f(c)-f(b)=-8$或0，$c^2-b^2=0$，

从而$f(c)-f(b)\leqslant\frac{3}{2}(c^2-b^2)$恒成立.

综上所述，M的最小值为$\frac{3}{2}$

【点评】本题是对二次函数的恒成立问题和导函数的求法的综合考查．二次函数的恒成立问题一般分两类，一是大于0恒成立须满足开口向上，且判别式小于0，二是小于0恒成立须满足开口向下，且判别式小于0．

21．（13分）（2010•湖南）数列$\{a_n\}$（$n\in N^*$）中，$a_1=a$，a_{n+1}是函数 $f_n(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3a_n+n^2)x^2+3n^2a_nx$的极小值点．

（I）当a=0时，求通项a_n；

（II）是否存在a，使数列$\{a_n\}$是等比数列？若存在，求a的取值范围；若不存在，请说明理由．

【考点】数列与函数的综合．

【专题】综合题；压轴题．

【分析】（I）当a=0时，$a_1=0$，则$3a_1<1^2$．由$f'_n(x)=x^2-(3a_n+n^2)x+3n^2a_n=(x-3a_n)(x-n^2)=0$，得$x_1=3a_n$，$x_2=n^2$．由函数的单调性知$f_n(x)$在$x=n^2$取得极小值．所以$a_2=1^2=1$．因为$3a_2=3<2^2$，则，$a_3=2^2=4$，因为$3a_3=12>3^3$，则$a_4=3a_3=3\times4$，又因为$3a_4=36>4^2$，则$a_5=3a_4=3^2\times4$，由此猜测：当$n\geq3$时，$a_n=4\times3^{n-3}$．然后用数学归纳法证明：当$n\geq3$时，$3a_n>n^2$．

（II）存在a，使数列$\{a_n\}$是等比数列．事实上，若对任意的n，都有$3a_n>n^2$，则$a_{n+1}=3a_n$．要使$3a_n>n^2$，只需 $a>\frac{n^2}{3^n}$对一切$n\in N^*$都成立．当$x\geq2$时，$y'<0$，从而函数 $y=\frac{x^2}{3^x}$在这$[2,+\infty)$上单调递减，故当$n\geq2$时，数列$\{b_n\}$单调递减，即数列$\{b_n\}$中最大项为$b_2=\frac{4}{9}$．于是当$a>\frac{4}{9}$时，必有 $a>\frac{n^2}{3^n}$．由此能导出存在a，使数列$\{a_n\}$是等比数列，且a的取值范围为 $(\frac{4}{9},+\infty)$．

【解答】解：（I）当a=0时，$a_1=0$，则$3a_1<1^2$．

由题设知$f'_n(x)=x^2-(3a_n+n^2)x+3n^2a_n=(x-3a_n)(x-n^2)$．

令$f'_n(x)=0$，得$x_1=3a_n$，$x_2=n^2$．

若$3a_n<n^2$，则

当$x<3a_n$时，$f'_n(x)>0$，$f_n(x)$单调递增；

当$3a_n<x<n^2$时，$f'_n(x)<0$，$f_n(x)$单调递减；

当$x>n^2$时，$f'_n(x)>0$，$f_n(x)$单调递增．

故$f_n(x)$在$x=n^2$取得极小值．

所以$a_2=1^2=1$

因为$3a_2=3<2^2$，则，$a_3=2^2=4$

因为$3a_3=12>3^2$，则$a_4=3a_3=3\times4$，

又因为$3a_4=36>4^2$，则$a_5=3a_4=3^2\times4$，

由此猜测：当$n\geq3$时，$a_n=4\times3^{n-3}$．

下面先用数学归纳法证明：当$n\geq3$时，$3a_n>n^2$．

事实上，当n=3时，由前面的讨论知结论成立．

假设当n=k（k≥3）时，$3a_k>k^2$成立，则由（2）知，$a_{k+1}=3a_k>k^2$，

从而$3a_{k+1}-(k+1)^2>3k^2-(k+1)^2=2k(k-2)+2k-1>0$，
所以$3a_{k+1}>(k+1)^2$．
故当$n\geq3$时，$3a_n>n^2$成立．
于是，当$n\geq3$时，$a_{n+1}=3a_n$，而$a_3=4$，因此$a_n=4\times3^{n-3}$．
综上所述，当$a=0$时，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_n=4\times3^{n-3}$（$n\geq3$）．

（II）存在a，使数列$\{a_n\}$是等比数列．
事实上，若对任意的n，都有$3a_n>n^2$，则$a_{n+1}=3a_n$．即数列$\{a_n\}$是首项为a，公比为3的等比数列，且$a_n=a\bullet3^{n-3}$．

而要使$3a_n>n^2$，即$a\bullet3^n>n^2$对一切$n\in N^*$都成立，只需$a>\frac{n^2}{3^n}$对一切$n\in N^*$都成立．

记$b=\frac{n^2}{3^n}$，则$b_1=\frac{1}{3}$，$b_2=\frac{4}{9}$，$b_3=\frac{1}{3}$，．

令$y=\frac{x^2}{3^x}$，则$y'=\frac{1}{3^x}(2x-x^2\ln3)<\frac{1}{3^x}(2x-x^2)$．

因此，当$x\geq2$时，$y'<0$，从而函数$y=\frac{x^2}{3^x}$在这$[2,+\infty)$上单调递减，

故当$n\geq2$时，数列$\{b_n\}$单调递减，即数列$\{b_n\}$中最大项为$b_2=\frac{4}{9}$.

于是当$a>\frac{4}{9}$时，必有$a>\frac{n^2}{3^n}$．这说明，当$a\in(\frac{4}{9},+\infty)$时，数列$a_n$是等比数列．

当$a=\frac{4}{9}$时，可得$a_1=\frac{4}{9}$，$a_2=\frac{4}{3}$，而$3a_2=4=2^2$，由（3）知，$f_2(x)$无极值，不合题意，

当$\frac{1}{3}<a<\frac{4}{9}$时，可得$a_1=a$，$a_2=3a$，$a_3=4$，$a_4=12$，…，数列$\{a_n\}$不是等比数列．

当$a=\frac{1}{3}$时，$3a=1=1^2$，由（3）知，$f_1(x)$无极值，不合题意．

当$a<\frac{1}{3}$时，可得$a_1=a$，$a_2=1$，$a_3=4$，$a_4=12$，数列$\{a_n\}$不是等比数列．

综上所述，存在a，使数列$\{a_n\}$是等比数列，且a的取值范围为$(\frac{4}{9},+\infty)$．

【点评】本题考查数列的性质和应用，解题时要认真审题，仔细解答，注意公式的合理运用．