[总评]本套试题考查的比较到位，覆盖面广泛，试题从易到难梯度变化明显，在考查基础知识、基本方法、基本思想的同时又考查考生分析问题、解决问题的能力，考查推理论证能力、逻辑思维能力、空间想象能力、必然与或然的能力、运算能力，能够体现高考的特质；试题有既保留了以往传统的模式，又有创新变化的部分，创新部分题目综合性强、跨度大、对能力的要求较高.其中选择填空题注重基础知识、基本技能的考查，同时不失灵活性；解答题部分加大了对数学思想、数学方法和技能技巧的考查力度.比如第 16 题在求数列通项时化简转化的技巧、第 18 题是平面向量与概率的综合问题，在随机事件的列举方面体现了考查将两大知识体系相互融合的能力.后两道压轴题在综合能力考查方面又有所提升.

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学真题解析

陕西省宝鸡市金台高中 晁群彦

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分， 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1．若数 $z=i(-2-i)$ （i 为虚数单位）在复平面内所对应的点在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

[答案]D

[解析]$\because z=-2i-i^2=1-2i,\therefore$ 点Z的坐标为$(1,-2)$，因此选D.

[学科网考点定位]本题考查复数的概念、运算、复数与复平面内点的对应关系等基础知识，考查分析判断能力.

2．若集合 $A=\{x\in R|ax^2+ax+1\}$ 中只有一个元素，则 $a=$（　）

A．4　　B． 2　　C．0　　D．0 或 4

[答案]A

[解析]$\because$集合A中只有一个元素，$\therefore \Delta=a^2-4a=0,\therefore a=0$或$4$.又当$a=0$时集合$A$中无元素，故选$A$.

[学科网考点定位]该题主要考查集合的概念、集合的表示以及集合与一元二次方程的联系.

3. 若 $\sin\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos a=$（　　）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

[答案]C

[解析] $\because \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{1}{3}.\therefore$ 选 C.

[学科网考点定位]此题主要考查三角恒等变换里面的二倍角余弦公式、三角函数求值问题.

4. 若集合 $A=\{2,3\}$，$B=\{1,2,3\}$，从 A，B 中各任意取一个数，则这两数之和等于 4 的概率是

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

[答案]C

[解析] $\because$ 从集合 A,B 中各任取一数所有结果为（2,1），(2,2)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3)共6种，其中两数和为4的有2种，因此所求概率为 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 选 C.

[学科网考点定位]本题主要考查古典概型的概率的概念和运算，考查分析问题、解答问题的能力和运算能力.

5. 总体由编号 01，，02，…，19，20 的 20 个个体组成。利用下面的随机数表选取 5 个个体，选取方法是随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字，则选出来的第 5 个个体的编号为

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

A. 08　　B. 07　　C. 02　　D. 01

[答案]D

[解析]从第一行的第 5 列和第 6 列起由左向右读数划去大于 20 的数分别为：08,02,14,07,01，所以第 5 个个体是 01，选 D.

[学科网考点定位]此题主要考查抽样方法的概念、抽样方法中随机数表法，考查学习能力和运用能力.

6．下列选项中，使 $x<\dfrac{1}{x}<x^2$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

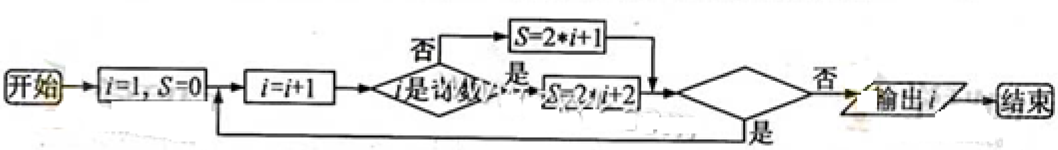
A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-1,0)$　　C．　$(0,1)$　　D．$(1,+\infty)$

[答案]A

[解析]$\because$ 原不等式可化为 $\begin{cases} x<\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{x}<x^2 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x}<0 \\ \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}>0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x<-1,\text{或}0<x<1 \\ x>1,\text{或}x<0 \end{cases}$，$\therefore x<-1$. 故选 A.

[学科网考点定位]该题主要考查不等式的解法，不等式的性质以及计算能力.

7．阅读如下程序框图，如果输出 $i=4$，那么空白的判断框中应填入的条件是



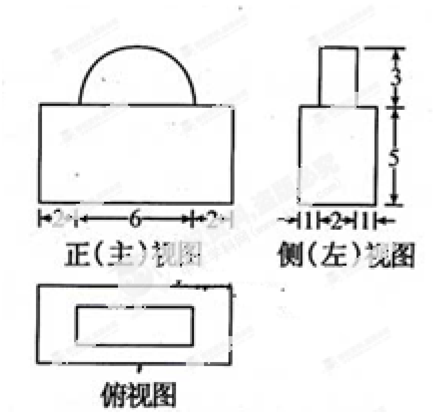
A．$S<8$　　　B．$S<9$　　　C．　$S<10$　　　D．$S<11$

[答案]B

[解析]由程序框图知前 3 次运算结果：$1.i=2,s=5;2.i=3,s=8;3.i=4,s=9$.因此终止条件为 $s<9$，故选 B.

[学科网考点定位]本题主要考查算法的基本思想、算法的结构和功能，考查抽象思维能力和逻辑推理能力.

8．　一几何体的三视图如右图所示，则该几何体的体积为（　　）



A． $200+9\pi$　　B． $200+18\pi$　　C．　$140+9\pi$　　D． $140+18\pi$

[答案]A

[解析]由三视图知该几何体的体积为$V=\frac{1}{2}\times\pi\cdot 3^2\times 2+10\times 4\times 5=200+9\pi$.故选 A.

[学科网考点定位]本题主要考查空间几何体的三视图、直观图、体积的计算.

9．已知点 A$(2,0)$，抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点 F。射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M，与其准线相交于点 N，则$|FM|:|MN|=$（　　　）

A． $2:\sqrt{5}$　　B． $1:2$　　C．　$1:\sqrt{5}$　　D． $1:3$

9．已知点 A$(2,0)$，抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点 F。射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M，与其准线相交于点 N，则$|FM|:|MN|=$（　　　）

A． $2:\sqrt{5}$　　B． $1:2$　　C．　$1:\sqrt{5}$　　D． $1:3$

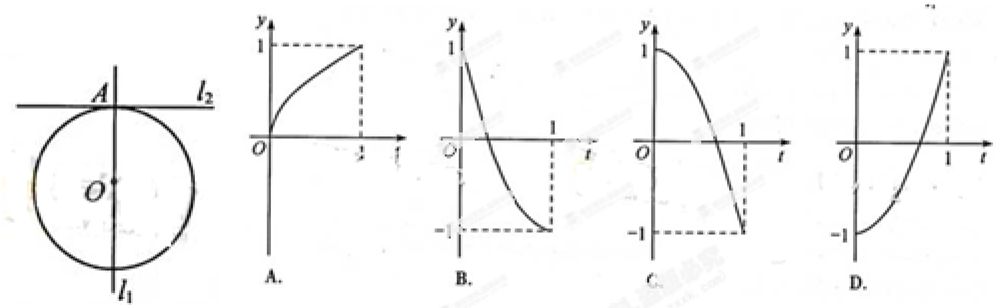
[答案]C

[解析] $\because |FA|=|AN|=\sqrt{5}$，则$\frac{MN}{FN}=\frac{FM}{2}$，$\therefore MN=2\sqrt{5}-FM, FN=2\sqrt{5}, \therefore FM=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$，$MN=\frac{5\sqrt{5}-5}{2}, \therefore |FM|:|MN|=\frac{5-\sqrt{5}}{2}:\frac{5\sqrt{5}-5}{2}=1:\sqrt{5}$.故选$C$.

[学科网考点定位]本题主要考查抛物线的概念、标准方程、直线与抛物线相交的基础知识，考查几何能力.

10．如图，已知$l_1\perp l_2$，圆心在l_1上，半径为 1cm 的圆O在$t=0$时与l_2相切于点 A，圆O沿l_1以$1m/s$的速读匀速向上移动，圆被直线l_2所截上方圆弧长记为x，令$y=\cos x$，则

y 与时间 $t(0<t<1,$ 单位：s) 的函数 $y=f(t)$ 的图像大致为（　　）



[答案]B

[解析]因为 t 时刻时圆心角 $\alpha=x$，所以在弦心距、半径和弦长一半围成的直角三角形中 $\cos\frac{x}{2}=\frac{t}{1},\therefore y=2\cos^2\frac{x}{2}-1=2t^2-1,\because 0\le t\le 1,\therefore$ 选项 B 正确.

[学科网考点定位]本题综合考查函数、三角函数的实际应用，考查数学能力和素养.

二．填空题

11. 若曲线 $y=x^\alpha(\alpha\in R)$ 在点（1，2）处的切线经过坐标原点，则 $\alpha=$

[答案] $\alpha=2$

[解析] $\because y=x^\alpha(\alpha\in R),\therefore y'=\alpha x^{\alpha-1},\therefore k=y'|_{x=1}=\alpha,\because$ 切线 $y-2=\alpha(x-1)$ 过原点，$\therefore \alpha=2$.

【学科网考点定位】此题考查导数的几何意义，函数与导数，导数的应用，考查运算能力.

12. 某住宅小区计划植树不少于 100 棵，若第一天植 2 棵，以后每天植树的棵树是前一天的 2 倍，则需要的最少天数 $n(n\in N_+)$ 等于______________.

[答案]6

[解析]

依题意该小区每天所植树棵树成等比数列，$\therefore \frac{2\times(1-2^n)}{1-2}\ge 100,\therefore 2^n\ge 51,\therefore n>5,n$ 最小=6.

【学科网考点定位】本题主要考查等比数列的概念、前 n 项和及其应用.

13. 设 f（x）=$\sqrt{3}$ sin3x+cos3x，若对任意实数 x 都有|f（x）|≤a，则实数 a 的取值范围是________________________.

[答案] $a \geq 2$

[解析] $\because f(x)=2\sin(3x+\frac{\pi}{6}),\therefore |f(x)|=2\left|\sin(3x+\frac{\pi}{6})\right|,\therefore \forall x\in R,|f(x)|\leq 2,\therefore a\geq 2.$

【学科网考点定位】此题主要考查三角函数的最值、最值问题的应用（恒成立问题），考查分析问题和解决问题的能力.

14. 若圆 C 经过坐标原点和点（4，0），且与直线 y=1 相切，则圆 C 的方程是

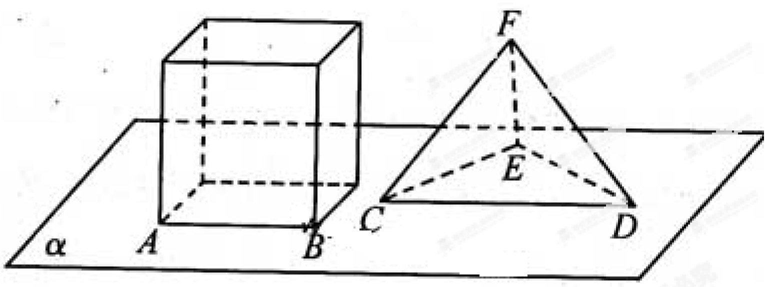
[答案] $(x-2)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}.$

[解析] 由题意得圆心坐标为(2, y)，半径 r=1-y, 则有 $(1-y)^2=2^2+y^2,\therefore y=-\frac{3}{2},\therefore r=\frac{5}{2},$

则圆 C 的方程是 $(x-2)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$

【学科网考点定位】该题主要考查圆和圆的方程、直线和圆的位置关系以及应用.

15. 如图，正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上，且 AB//CD, 则直线 EF 与正方体的六个面所在的平面相交的平面个数为_____________.



[答案] 4

[解析] 因为过 EF 做垂直于 CD（AB）的平面 α 垂直平分 CD，所以该平面与过 AB 中点并与 AB 垂直的平面 β 平行，平面 β 和正方体的 4 个侧面相交，由于 EF 和正方体的侧棱不平行，所以它与正方体的六个面所在的平面相交的平面个数为 4.

【学科网考点定位】该题主要考查空间点、线、面的位置关系，考查空间直线与平面的平行与相交，考查空间想象能力和逻辑思维能力.

三. 解答题

16. 正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2-(2n-1)a_n-2n=0.$

(1) 求数列$\{a_n\}$通项公式a_n.

(2) 令$b_n=\dfrac{1}{(n+1)a_n}$,求数列$\{b_n\}$前n项的和T_n.

【答案】(1) $a_n=2n$ (2) $T_n=\dfrac{n}{2(n+1)}$

【解析】(1) $\because a_n^2-(2n-1)a_n-2n=0,\therefore(a_n-2n)(a_n+1)=0,\because a_n>0,\therefore a_n=2n.$

(2)将(1)代入得:

$$b_n=\frac{1}{(n+1)\cdot 2n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}),\therefore T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{n}{2(n+1)}.$$

【学科网考点定位】本题主要考查数列的概念、通项公式、前 n 项和,考查逻辑思维能力.

17. 在ΔABC中,角A,B,C的对边分别是a,b,c,已知$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\cos 2B=1$.

(1) 求证:a,b,c成等差数列;

(2) 若$C=\dfrac{2}{3}\pi$,求$\dfrac{a}{b}$的值.

【答案】(1) 等差;(2) $\dfrac{3}{5}$

【解析】由正弦定理化角为边,化简后确定 a, b, c 的大小关系.

$\because \sin B(\sin A+\sin C)+1-2\sin^2 B=1,\therefore \sin B(\sin A+\sin C-2\sin B)=0,\therefore \sin A+\sin C-2\sin B,$

由正弦定理得:$a+c-2b=0$,即$a+c=2b,\therefore a,b,c$成等差数列.

(2) 在三角形 ABC 中由余弦定理得:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{2\pi}{3},\therefore(2b-a)^2=a^2+b^2+ab.$

展开化简得:$3b^2=5ab,\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{5}$.通过余弦定理确定了边长的大小关系,化简后求值.

【学科网考点定位】本题主要考查三角函数的化简、求值,解三角形,考查推理论证能力、计算能力等.

18. (本小题满分 12 分)

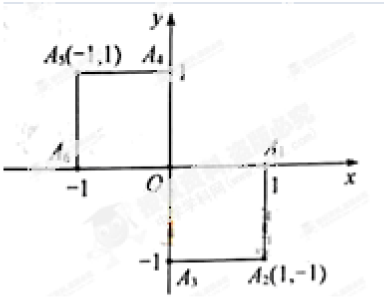
小波以游戏方式决定是去打球、唱歌还是去下棋。游戏规则为:以 0 为起点,再从

A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 (如图)这六个点中任取两点分别为终点得到两个向量,记这两个向

量的数量积为X，若$X>0$就去打球，若$X=0$就去唱歌，若$X<0$就去下棋。

（1） 写出数量积X的所有可能值；

（2） 分别求小波去下棋的概率和不去唱歌的概率。



[答案]（1）-2，-1, 0, 1；(2) $\frac{7}{15},\frac{11}{15}$

[解析]（1）依题意有

$\overline{OA_1}=(1,0),\overline{OA_2}=(1,\ -1),\overline{OA_3}=(0,-1),\overline{OA_4}=(0,\ 1),\overline{OA_5}=(-1,1),\overline{OA_6}=(-1,0).$

$\therefore \overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}=\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_3}=\overline{OA_4}\cdot\overline{OA_5}=\overline{OA_5}\cdot\overline{OA_6}=1(4个),\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_5}=\cdots=\overline{OA_3}\cdot\overline{OA_6}=-1(6个)$，

$\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}=\cdots=0(4个)$，$\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_5}=-2(1个)$，$\therefore X=-2,-1,0,1.$

(2)由（1)知基本事件有15种，小波下棋有7种，所以其的概率为$\frac{7}{15}$.不唱歌的概率为

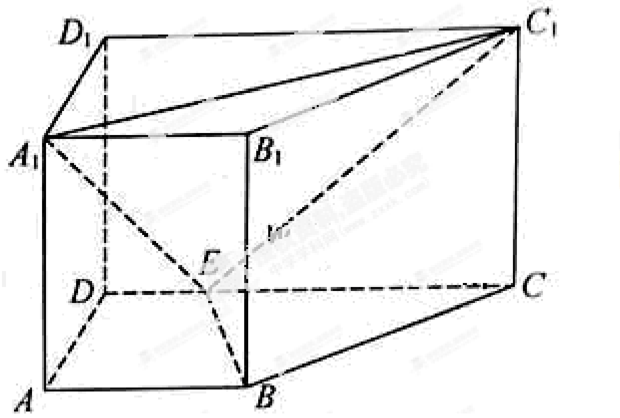
$P=1-P(X=0)=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$.把平面向量和概率综合在一起增加了解题的难度，所以通过计算向量的数量积，列举随机变量X的取值不能够轻视，同时计算相应取值的概率也是值得细心去做的.

[学科网考点定位]本题主要考查互斥事件、互斥事件的概率、对立事件的概率，考查平面向量的概念和运算等基础知识和方法；考查综合分析、综合运用能力和计算能力.

19. （本小题满分12分）

如图，直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB//CD$，$AD\perp AB$，$AB=2$，$AD=\sqrt{2}$，

$AA_1=3$，E为CD上一点，$DE=1$，$EC=3$



（1） 证明：BE⊥平面 BB_1C_1C；

（2） 求点 B_1 到平面 EA_1C_1 的距离。

【答案】（2） $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】（1）在直角梯形 ABCD 中，先用勾股定理的逆定理计算并证明边的垂直关系，再用线面垂直的判定证明结果成立.

$\because BE^2=1^2+(\sqrt{2})^2=3$，$BC^2=(\sqrt{2})^2+(3-1)^2=6$，$\because EC=3 \therefore EC^2=BE^2+BC^2$，
$\therefore BE\perp BC$，又$\because BE\perp BB_1$，$BB_1\cap BC=B$，$\therefore BE\perp$平面BB_1C_1C.

（2）分别在直角三角形 AA_1E，ECC_1，$A_1D_1C_1$ 中得

$A_1E=2\sqrt{3}$，$EC_1=A_1C_1=3\sqrt{2}$，$\therefore S_{\Delta A_1EC_1}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{15}=\sqrt{45}$，$S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

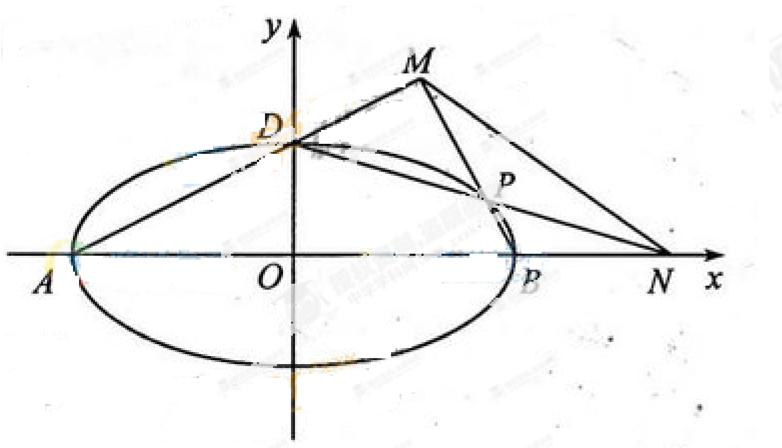
$\because V_{B_1-A_1EC_1}=V_{E-A_1B_1C_1}$，$\therefore\sqrt{45}h=\sqrt{2}\times3$，$\therefore h=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 即所求距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

点到平面的距离在不能直接作出垂线的情况下，一般都是由等体积转化的方法解决的，本题也不例外.其中要注意已知条件下底面积和高的计算.

【学科网考点定位】该题主要考查空间平行关系和垂直关系的概念、定理、点到平面的距离等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、逻辑思维能力和计算能力.

20.（本小题满分 13 分）

椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a+b=3$.



（1）求椭圆 C 的方程;

（2）如图，A,B,D 是椭圆 C 的顶点，P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点，直线 DP 交 x 轴于点 N，直线 AD 交 BP 于点 M。设 BP 的斜率为 k，MN 的斜率为 m. 证明：$2m-k$ 为定值。

【答案】$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

【解析】(1) $\because e=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},\therefore a^2=4b^2,a=2b,\quad \because a+b=3,\therefore b=1,a=2,\therefore \frac{x^2}{4}+y^2=1.$

(2) 由 (1)知 A(-2，0),B(2，0),D(0，1),则直线 AD 方程为：$x-2y+2=0$；直线 BP 方程：$y=k(x-2)$，联立得 $\begin{cases}x-2y+2=0\\y=k(x-2)\end{cases}\therefore\begin{cases}x=\frac{4k+2}{2k-1}\\y=\frac{4k}{2k-1}\end{cases},\therefore M(\frac{4k+2}{2k-1},\frac{4k}{2k-1})$. 直线 BP $y=k(x-2)$ 和椭圆联立方程组解得 P 点坐标为 $P(\frac{8k^2-2}{4k^2+1},-\frac{4k}{4k^2+1})$，因为 D,N(x,0),P 三点共线,所以有：

$$\frac{-\frac{4k}{4k^2+1}-1}{\frac{8k^2-2}{4k^2+1}}=\frac{0-1}{x-0},\therefore MN\text{的斜率}m=\frac{\frac{4k}{2k-1}-0}{\frac{4k+2}{2k-1}-\frac{4k-2}{2k+1}}=\frac{4k(2k+1)}{2(2k+1)^2-2(2k-1)^2}=\frac{2k+1}{4}.$$

$$\therefore 2m-k=\frac{2k+1}{2}-k=\frac{1}{2}(\text{定值}).$$

先通过联立方程组求点的坐标，再计算斜率，化简后得到定值，其中三点共线是关键.本解法适用于一般的直线和圆锥曲线的关系问题.

【学科网考点定位】本题考查椭圆的标准方程、简单的几何性质，考查直线和椭圆相交问题，定值问题，考查综合解答问题的能力.

21.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}x, & 0\le x\le a.\\ \frac{1}{1-a}(1-x), & a<x\le 1.\end{cases}$. a 为常数且 $a\in(0,1)$

（1）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求 $f(f(\frac{1}{3}))$；

（2）若 x_0 满足 $f(f(x_0))=x_0$，但 $f(x)\neq 0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶周期点. 证明函数 $f(x)$ 有且仅有两个二阶周期点，并求二阶周期点 x_1,x_2；

（3）对于（2）中的 x_1,x_2，设 $A(x_1,f(f(x_1))),B(x_2,f(f(x_2))),C(a^2,0)$，记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S(a)$，求 $S(a)$ 在区间 $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ 上的最大值和最小值。

【答案】（1）$\frac{2}{3}$ （3）

【解析】（1）$\because$ 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(\frac{1}{3})=\frac{2}{3},\therefore f(f(\frac{1}{3}))=f(\frac{2}{3})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times(1-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}.$

（2）$f(f(x))=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}x, & 0\le x\le a^2\\ \dfrac{1}{a(1-a)}(a-x), & a^2<x\le a.\\ \dfrac{1}{(1-a)^2}(x-a), & a<x<a^2-a+1.\\ \dfrac{1}{a(1-a)}(1-x), & a^2-a+1\le x\le 1.\end{cases}$

当$0\le x\le a^2$时，由$\dfrac{1}{a^2}x=x$得$x=0$. $\because f(0)=0$, $\therefore x=0$不是$f(x)$的二阶周期点.

当$a^2<x\le a$时，由$\dfrac{1}{a(1-a)}(a-x)=x$, $\therefore x=\dfrac{a}{-a^2+a+1}\in(a^2,a)$,

$\therefore f(\dfrac{a}{-a^2+a+1})=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{-a^2+a+1}=\dfrac{1}{-a^2+a+1}\ne\dfrac{a}{-a^2+a+1}$.

$\therefore x=\dfrac{a}{-a^2+a+1}$为$f(x)$的二阶周期点.

当$a<x<a^2-a+1$时，由$\dfrac{1}{(1-a)^2}(x-a)=x$得$x=\dfrac{1}{2-a}\in(a,a^2-a+1)$,

$\because f(\dfrac{1}{2-a})=\dfrac{1}{1-a}(1-\dfrac{1}{2-a})=\dfrac{1}{2-a}$, $\therefore x=\dfrac{1}{2-a}$不是二阶周期点.

当$a^2-a+1\le x\le 1$时，由$\dfrac{1}{a(1-a)}(1-x)=x$得$x=\dfrac{1}{-a^2+a+1}$, $f(\dfrac{1}{-a^2+a+1})=\dfrac{a}{-a^2+a+1}\ne\dfrac{1}{-a^2+a+1}$,

$\therefore x=\dfrac{1}{-a^2+a+1}$是$f(x)$的二阶周期点.

因此$f(x)$的二阶周期点有两个：$x=\dfrac{a}{-a^2+a+1}$, $x=\dfrac{1}{-a^2+a+1}$.

（3）由（2）得$A(\dfrac{a}{-a^2+a+1},\dfrac{a}{-a^2+a+1})$, $B(\dfrac{1}{-a^2+a+1},\dfrac{1}{-a^2+a+1})$,

则$S(a)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2(1-a)}{-a^2+a+1}$, $S'(a)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a(a^3-2a^2-2a+2)}{(-a^2+a+1)^2}$,

$\because a\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$, $\therefore a^2+a<1$, $\therefore S'(a)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a(a^3-2a^2-2a+2)}{(-a^2+a+1)^2}=$

$S'(a)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\left[(a+1)(a-1)^2+(1-a^2-a)\right]}{(-a^2+a+1)^2}>0$.

【学科网考点定位】此题考查分段函数的概念、求值，考查理解能力和运用能力、考查运用能力以及函数与导数等数学能力.