2025年全国统一高考数学试卷

（新高考II卷）

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在试卷上无效.

3.考试结束后，本试卷和答题卡一并交回.

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 样本数据2，8，14，16，20的平均数为（　）

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

【答案】C

【解析】

【分析】由平均数的计算公式即可求解.

【详解】样本数据$2,8,14,16,20$的平均数为$\dfrac{2+8+14+16+20}{5}=\dfrac{60}{5}=12$.

故选：C.

2. 已知$z=1+\mathrm{i}$，则$\dfrac{1}{z-1}=$（　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. -1　　D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】由复数除法即可求解.

【详解】因为$z=1+\mathrm{i}$，所以$\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}-1}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$.

故选：A.

3. 已知集合$A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\left\{x\left|\ x^3=x\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$

C. $\{2,8\}$　　　　D. $\{0,1\}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合 B 后结合交集的定义可求 $A\cap B$.

【详解】$B=\left\{x\mid x^3=x\right\}=\{0,-1,1\}$，故 $A\bigcap B=\{0,1\}$,

故选：D.

4. 不等式 $\frac{x-4}{x-1}\geq 2$ 的解集是（　）

A. $\{x|-2\leq x\leq 1\}$　　　　B. $\{x|\ x\leq -2\}$

C. $\{x|-2\leq x<1\}$　　　　D. $\{x|\ x>1\}$

【答案】C

【解析】

【分析】移项后转化为求一元二次不等式的解即可.

【详解】$\frac{x-4}{x-1}\geq 2$ 即为 $\frac{x+2}{x-1}\leq 0$ 即 $\begin{cases}(x+2)(x-1)\leq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，故 $-2\leq x<1$，

故解集为 $[-2,1)$，

故选：C.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$（　）

A. $45°$　　　　B. $60°$　　　　C. $120°$　　　　D. $135°$

【答案】A

【解析】

【分析】由余弦定理 $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\bullet AC}$ 直接计算求解即可.

【详解】由题意得 $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\bullet AC}=\frac{(\sqrt{6})^2+(1+\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{6}\times(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $0^\circ<A<180^\circ$，所以 $A=45°$.

故选：A

6. 设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A 在 C 上，过 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B，若直线

BF 的方程为 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$（　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】先由直线 l_{BF} 求出焦点 F 和 p 即抛物线 C 的方程，进而依次得抛物线的准线方程和点 B，从而可依次求出 y_A 和 x_A，再由焦半径公式即可得解.

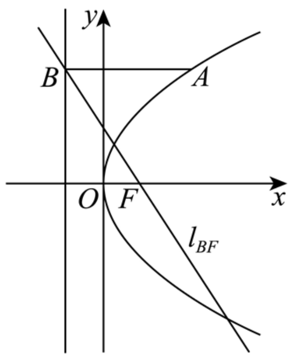
【详解】对 $l_{BF}: y=-2x+2$，令 $y=0$，则 $x=1$，

所以 $F(1,0)$，$p=2$ 即抛物线 $C: y^2=4x$，故抛物线的准线方程为 $x=-1$，

故 $B(-1,4)$，则 $y_A=4$，代入抛物线 $C: y^2=4x$ 得 $x_A=4$.

所以 $|AF|=|AB|=x_A+\frac{p}{2}=4+1=5$.

故选：C



7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_3=6, S_5=-5$, 则 $S_6=$（　）

A. -20　　B. -15　　C. -10　　D. -5

【答案】B

【解析】

【分析】由等差数列前 n 项和公式结合题意列出关于首项 a_1 和公差 d 的方程求出首项 a_1 和公差 d，再由等差数列前 n 项和公式即可计算求解.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由题可得 $\begin{cases}3a_1+3d=6\\5a_1+10d=-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=-3\\a_1=5\end{cases}$，

所以 $S_6=6a_1+15d=6\times5+15\times(-3)=-15$.

故选：B.

8. 已知$0<\alpha<\pi$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用二倍角余弦公式得$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，最后再根据两角差的正弦公式即可得到答案.

【详解】$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$,

因为$0<\alpha<\pi$，则$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，则$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$,

则$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

故选：D.

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，q为$\{a_n\}$的公比，$q>0$,若$S_3=7,a_3=1$，则（　）

A. $q=\frac{1}{2}$　　B. $a_5=\frac{1}{9}$

C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

【答案】AD

【解析】

【分析】对 A，根据等比数列通项公式和前n项和公式得到方程组，解出a_1,q，再利用其通项公式和前n项和公式一一计算分析即可.

【详解】对 A，由题意得$\begin{cases}a_1q^2=1\\a_1+a_1q+a_1q^2=7\end{cases}$，结合$q>0$，解得$\begin{cases}a_1=4\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=9\\q=-\frac{1}{3}\end{cases}$（舍去），故 A 正确；

对 B，则$a_5=a_1q^4=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$，故 B 错误；

对 C，$S_5=\dfrac{a_1\left(1-q^5\right)}{1-q}=\dfrac{4\times\left(1-\dfrac{1}{32}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{31}{4}$，故 C 错误；

对 D，$a_n=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{3-n}$，$S_n=\dfrac{4\times\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=8-2^{-n+3}$，

则 $a_n+S_n=2^{3-n}+8-2^{3-n}=8$，故 D 正确；

故选：AD.

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\left(x^2-3\right)\mathrm{e}^x+2$，则（ ）

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-\left(x^2-3\right)\mathrm{e}^{-x}-2$

C. $f(x)\geq 2$ 当且仅当 $x\geq\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

【答案】ABD

【解析】

【分析】对 A，根据奇函数特点即可判断；对 B，利用 $f(x)=-f(-x)$ 代入求解即可；对 C，举反例 $f(-1)>2$ 即可；对 D，直接求导，根据极大值点判定方法即可判断.

【详解】对 A，因为 $f(x)$ 定义在 R 上奇函数，则 $f(0)=0$，故 A 正确；

对 B，当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(x)=-f(-x)=-\left[\left((-x)^2-3\right)\mathrm{e}^{-x}+2\right]=-\left(x^2-3\right)\mathrm{e}^{-x}-2$，故 B 正确；

对 C，$f(-1)=-(1-3)\mathrm{e}-2=2(\mathrm{e}-1)>2$，故 C 错误；

对 D，当 $x<0$ 时，$f(x)=\left(3-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}-2$，则 $f'(x)=-\left(3-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}=\left(x^2-2x-3\right)\mathrm{e}^{-x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$ 或 3（舍去），

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减，

则 $x=-1$ 是 $f(x)$ 极大值点，故 D 正确；

故选：ABD.

11. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2，左、右顶点分别为 A_1，A_2，以

F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M、N 两点，且 $\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，则（　）

A. $\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$

B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. C 的离心率为 $\sqrt{13}$

D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由平行四边形的性质判断 A；由 $F_1M\perp F_2M$ 且 $|MO|=c$ 结合 M 在渐近线上可求 M 的坐标，从而可判断 B 的正误，或者利用三角函数定义和余弦定理也可判断；由中线向量结合 B 的结果可得 $c^2=13a^2$，计算后可判断 C 的正误，或者利用 $\dfrac{|MA_2|}{|A_1A_2|}=\dfrac{b}{2a}=\sqrt{3}$ 并结合离心率变形公式即可判断；结合 BC 的结果求出面积后可判断 D 的正误.

【详解】不妨设渐近线为 $y=\dfrac{b}{a}x$，M 在第一象限，N 在第三象限，

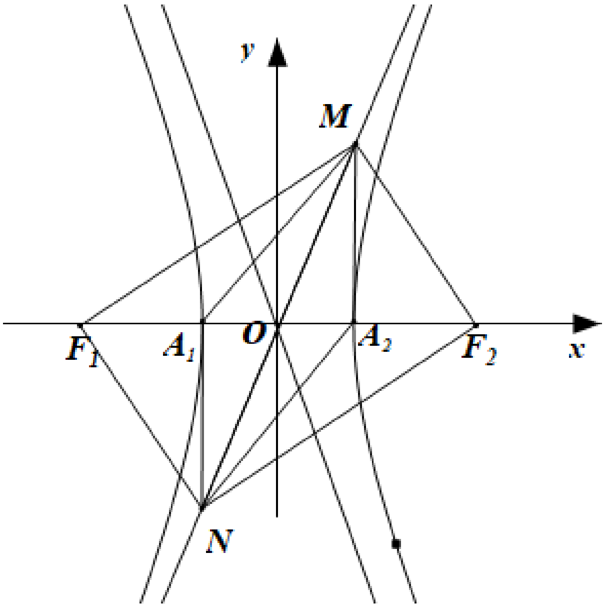
对于 A，由双曲线的对称性可得 A_1MA_2N 为平行四边形，故 $\angle A_1MA_2=\pi-\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，

故 A 正确；

对于 B，方法一：因为 M 在以 F_1F_2 为直径的圆上，故 $F_1M\perp F_2M$ 且 $|MO|=c$，

设 $M(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}x_0^2+y_0^2=c^2\\ \dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{b}{a}\end{cases}$，故 $\begin{cases}x_0=a\\ y_0=b\end{cases}$，故 $MA_2\perp A_1A_2$，

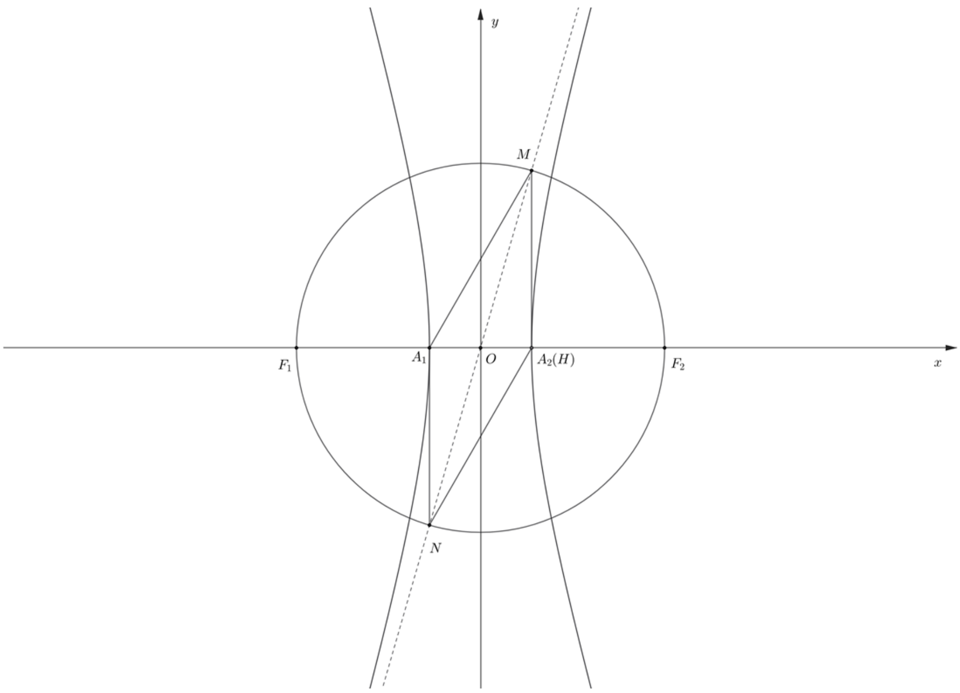
由 A 得 $\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$，故 $|MA_2|=|MA_1|\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 即 $|MA_1|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}|MA_2|$，故 B 错误；



方法二：因为 $\tan\angle MOA_2=\dfrac{b}{a}$，因为双曲线中，$c^2=a^2+b^2$，

则 $\cos\angle MOA_2=\dfrac{a}{c}$，又因为以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M 、 N ，则 $OM=c$ ，

则若过点 M 往 x 轴作垂线，垂足为 H ，则 $\left|OH\right|=c\cdot\dfrac{a}{c}=a=\left|OA_2\right|$，则点 H 与 $A_2\left(H\right)$ 重合，则 $MA_2\perp x$ 轴，则 $\left|MA_2\right|=\sqrt{c^2-a^2}=b$，



方法三：在 $\triangle OMA_2$ 利用余弦定理知，$\left|MA_2\right|^2=\left|OM\right|^2+\left|OA_2\right|^2-2\left|OM\right|\left|OA_2\right|\cos\angle MOA_2$，

即 $\left|MA_2\right|^2=c^2+a^2-2ac\cdot\dfrac{a}{c}=b^2$，则 $\left|MA_2\right|=b$，

则$\triangle A_1A_2M$为直角三角形，且$\angle A_1MA_2=\frac{\pi}{6}$，则$2\left|MA_2\right|=\sqrt{3}\left|MA_1\right|$，故B错误；

对于C，方法一：因为$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)$，故$4\overrightarrow{MO}^2=\overrightarrow{MA_1}^2+2\overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_2}^2$，

由B可知$\left|MA_2\right|=b,\left|MA_1\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$，

故$4c^2=b^2+\frac{4}{3}b^2+2\times b\times\frac{2\sqrt{3}}{3}b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{13}{3}b^2=\frac{13}{3}\left(c^2-a^2\right)$即$c^2=13a^2$，

故离心率$e=\sqrt{13}$，故C正确；

方法二：因为$\frac{\left|MA_2\right|}{\left|A_1A_2\right|}=\frac{b}{2a}=\sqrt{3}$，则$\frac{b}{a}=2\sqrt{3}$，则$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$，故C正确；

对于D，当$a=\sqrt{2}$时，由C可知$e=\sqrt{13}$，故$c=\sqrt{26}$，

故$b=2\sqrt{6}$，故四边形NA_1MA_2为$2S_{\triangle MA_1A_2}=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}=8\sqrt{3}$，

故D正确，

故选：ACD.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知平面向量$\vec{a}=(x,1),\vec{b}=(x-1,2x)$，若$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$|\vec{a}|=$__________

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据向量坐标化运算得$\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$，再利用向量垂直的坐标表示得到方程，解出即可.

【详解】$\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$，因为$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，

则$x+1-2x=0$，解得$x=1$.

则$\vec{a}=(1,1)$，则$|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

13. 若$x=2$是函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$的极值点，则$f(0)=$__________

【答案】-4

【解析】

【分析】由题意得$f'\left(2\right)=0$即可求解a，再代入即可求解.

【详解】由题意有 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$，

所以 $f'(x)=(x-a)(x-1)+(x-1)(x-2)+(x-a)(x-2)$，

因为2是函数 $f(x)$ 极值点，所以 $f'(2)=2-a=0$，得 $a=2$，

当 $a=2$ 时，$f'(x)=2(x-2)(x-1)+(x-2)^2=(x-2)(3x-4)$，

当$x\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right),f'(x)>0,f(x)$单调递增，当 $x\in\left(\dfrac{4}{3},2\right),f'(x)<0,f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(2,+\infty),f'(x)>0,f(x)$ 单调递增，

所以 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极小值点，符合题意；

所以 $f(0)=-1\times(-2)\times(-a)=-2a=-4$.

故答案为：-4.

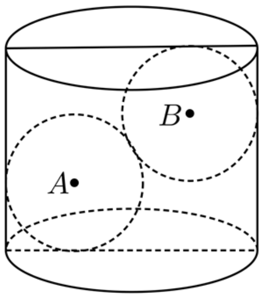
14. 一个底面半径为4cm，高为9cm的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为__________cm.

【答案】$\dfrac{5}{2}$

【解析】

【分析】根据圆柱与球的性质以及球的体积公式可求出球的半径；

【详解】



圆柱的底面半径为4cm，设铁球的半径为 r，且 $r<4$，

由圆柱与球的性质知 $AB^2=(2r)^2=(8-2r)^2+(9-2r)^2$，

即 $4r^2-68r+145=(2r-5)(2r-29)=0$，$\because r<4$，

$\therefore r=\dfrac{5}{2}$.

故答案为：$\dfrac{5}{2}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\varphi\right)(0\le\varphi<\pi), f\left(0\right)=\frac{1}{2}$.

（1）求φ；

（2）设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

【答案】（1）$\varphi=\frac{\pi}{3}$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）直接由题意得 $\cos\varphi=\frac{1}{2},\left(0\le\varphi<\pi\right)$，结合余弦函数的单调性即可得解；

（2）由三角恒等变换得 $g\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，由此可得值域，进一步由整体代入法可得函数 $g\left(x\right)$ 的单调区间.

【小问 1 详解】

由题意 $f\left(0\right)=\cos\varphi=\frac{1}{2},\left(0\le\varphi<\pi\right)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

由（1）可知 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos 2x=\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以函数 $g\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$，

令 $2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\pi+2k\pi,k\in Z$，解得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

令 $\pi+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2\pi+2k\pi,k\in Z$，解得 $\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{11\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以函数 $g\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$，

函数 $g\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $(0,-2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，O 为坐标原点，若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$，求 $|AB|$.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

（2）$\sqrt{5}$

【解析】

【分析】（1）根据长轴长和离心率求出基本量后可得椭圆方程；

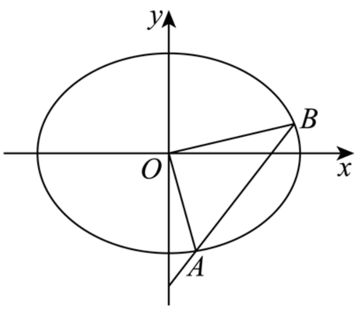
（2）设出直线方程并联立椭圆方程后结合韦达定理用参数 t 表示面积后可求 t 的值，从而可求弦长.

【小问 1 详解】

因为长轴长为 4，故 $a=2$，而离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $c=\sqrt{2}$，

故 $b=\sqrt{2}$，故椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

【小问 2 详解】



由题设直线 AB 的斜率不为 0，故设直线 $l:x=t\left(y+2\right)$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

由 $\begin{cases}x=t\left(y+2\right)\\x^2+2y^2=4\end{cases}$ 可得 $\left(t^2+2\right)y^2+4t^2y+4t^2-4=0$，

故 $\Delta=16t^4-4(t^2+2)(4t^2-4)=4(8-4t^2)>0$ 即 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$，

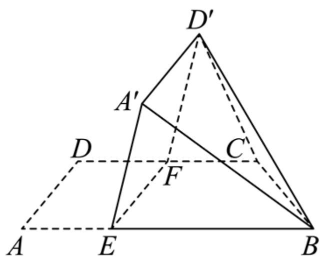
且 $y_1+y_2=-\frac{4t^2}{t^2+2},y_1y_2=\frac{4t^2-4}{t^2+2}$，

故 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times|2t|\times|y_1-y_2|=|t|\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\frac{|t|\sqrt{32-16t^2}}{t^2+2}=\sqrt{2}$，

解得 $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故 $|AB|=\sqrt{1+t^2}\left|y_1-y_2\right|=\sqrt{1+\frac{2}{3}}\times\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{5}{3}}\times\frac{\sqrt{32-16\times\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}+2}=\sqrt{5}$.

17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB//CD,\angle DAB=90°$，F 为 CD 的中点，点 E 在 AB 上， $EF//AD$，$AB=3AD,CD=2AD$，将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 $60°$.



（1）证明: $A'B//$ 平面 $CD'F$；

（2）求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{42}}{7}$

【解析】

【分析】（1）先应用线面平行判定定理得出 $A'E//$ 平面 $CD'F$ 及 $EB//$ 平面 $CD'F$，

再应用面面平行判定定理得出平面 $A'EB//$ 平面 $CD'F$，进而得出线面平行；

（2）建立空间直角坐标系，利用已知条件将点 B,C,D',E,F 的坐标表示出来，然后将平面 BCD' 及平面 $EFD'A'$ 的法向量求出来，利用两个法向量的数量积公式可将两平面的夹角余弦值求出来，进而可求得其正弦值.

【小问 1 详解】

设 $AD=1$，所以 $AB=3,CD=2$，因为 F 为 CD 中点，所以 $DF=1$，因为 $EF//AD$， $AB//CD$，所以 $AEFD$ 是平行四边形， 所以 $AE//DF$，所以 $A'E//D'F$，

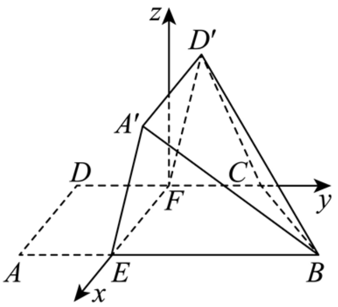
因为 $D'F\subset$ 平面 $CD'F,A'E\not\subset$ 平面 $CD'F$，所以 $A'E//$ 平面 $CD'F$，

因为 $FC//EB,FC\subset$ 平面 $CD'F,EB\not\subset$ 平面 $CD'F$，所以 $EB//$ 平面 $CD'F$，

又 $EB\bigcap A'E=E$， $EB,A'E\subset$ 平面 $A'EB$，所以平面 $A'EB//$ 平面 $CD'F$，

又 $A'B\subset$ 平面 $A'EB$，所以 $A'B//$ 平面 $CD'F$.

【小问 2 详解】



因为 $\angle DAB=90^\circ$，所以 $AD\perp AB$，又因为 $AB//FC,EF//AD$，所以 $EF\perp FC$，

以 F 为原点， FE,FC 以及垂直于平面 $BECF$ 的直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系.

因为 $D'F\perp EF,CF\perp EF$，平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成二面角为 60° ，

所以 $\angle D'FC=60^\circ$.

则 $B\left(1,2,0\right)$， $C\left(0,1,0\right)$， $D'\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $E\left(1,0,0\right)$， $F\left(0,0,0\right)$，.

所以 $\overrightarrow{BC}=\left(-1,-1,0\right),\overrightarrow{CD'}=\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{FE}=\left(1,0,0\right),\overrightarrow{FD'}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 BCD' 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CD'}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ -x-y=0\end{cases}$，令 $y=\sqrt{3}$，则 $z=1,x=-\sqrt{3}$，则 $\vec{n}=\left(-\sqrt{3},\sqrt{3},1\right)$.

设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{FE}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{FD'}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ x=0\end{cases}$，

令 $y=\sqrt{3}$，则 $z=-1,x=0$，所以 $\vec{m}=\left(0,\sqrt{3},-1\right)$.

所以 $\cos\vec{m},\vec{n}=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{0+3-1}{\sqrt{3+3+1}\times\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

所以平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 夹角的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

18. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中 $0<k<\frac{1}{3}$.

（1）证明：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点；

（2）设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的极值点和零点.

（i）设函数 $g(t)=f\left(x_1+t\right)-f\left(x_1-t\right)$·证明：$g(t)$ 在区间 $\left(0,x_1\right)$ 单调递减；

（ii）比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明你的结论.

【答案】（1）证明见解析；

（2）（i）证明见解析；（ii）$2x_1>x_2$，证明见解析.

【解析】

【分析】（1）先由题意求得 $f'(x)=x^2\left(\frac{1}{1+x}-3k\right)$，接着构造函数 $g(x)=\frac{1}{1+x}-3k,x>0$，利用导数工具研究函数 $g(x)$ 的单调性和函数值情况，从而得到函数的单调性，进而得证函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一极值点；再结合 $f(0)=0$ 和 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 的正负情况即可得证 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点；

（2）（i）由（1）$x_1+1=\frac{1}{3k}$ 和 $g'(t)=f'\left(x_1+t\right)-f'\left(x_1-t\right)$ 结合（1）中所得导函数 $f'\left(x_1\right)$ 计算得到 $g'(t)=-t\left[\frac{\left(x_1+t\right)^2}{\left(x_1+t+1\right)\left(x_1+1\right)}+\frac{\left(x_1-t\right)^2}{\left(x_1-t+1\right)\left(x_1+1\right)}\right]$，再结合 $t\in\left(0,x_1\right)$ 得 $g'(t)<0$ 即可得证；

（ii）由函数 $g(t)$ 在区间 $\left(0,x_1\right)$ 上单调递减得到 $0>f\left(2x_1\right)$，再结合 $f\left(x_2\right)=0$，和函数 $f(x)$ 的单调性以及函数值的情况即可得证.

【小问 1 详解】

由题得 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-3kx^2=\frac{x^2}{1+x}-3kx^2=x^2\left(\frac{1}{1+x}-3k\right)$，

因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $x^2>0$，设 $g(x)=\frac{1}{1+x}-3k,x>0$，

则 $g'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$g(0)=1-3k>0$，令 $g(x_1)=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3k}-1$，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一极值点，

对函数 $y=\ln(1+x)-x$ 有 $y'=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $y=\ln(1+x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $y=\ln(1+x)-x<y|_{x=0}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

又因为 $f(0)=0$，$x\to+\infty$ 时 $\frac{1}{2}x^2-kx^3=\frac{1}{2}x^2(1-2kx)<0$，

所以 $x\to+\infty$ 时 $f(x)<0$，

所以存在唯一 $x_2\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x_2)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点.

【小问 2 详解】

（i）由（1）知 $x_1=\frac{1}{3k}-1$，则 $x_1+1=\frac{1}{3k}$，$f'(x)=x^2\left(\frac{1}{1+x}-3k\right)$，

则 $g'(t)=f'(x_1+t)-f'(x_1-t)=(x_1+t)^2\left(\frac{1}{x_1+t+1}-3k\right)-(x_1-t)^2\left(\frac{1}{x_1-t+1}-3k\right)$

$=(x_1+t)^2\left(\frac{1}{x_1+t+1}-\frac{1}{x_1+1}\right)-(x_1-t)^2\left(\frac{1}{x_1-t+1}-\frac{1}{x_1+1}\right)$

$=\frac{-t(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}-\frac{t(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}=-t\left[\frac{(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+\frac{(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}\right]$

$=-t\left[\frac{(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+\frac{(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}\right]$，

因为 $t\in(0,x_1)$，所以 $x_1-t+1>0$，所以 $\frac{(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+\frac{(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}>0$，

所以 $g'(t)<0$，所以函数 $g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递减；

（ii）$2x_1 > x_2$，证明如下：

由（i）知：函数$g\left(t\right)$在区间$\left(0,x_1\right)$上单调递减，

所以$g\left(0\right) > g\left(x_1\right)$即$0 > f\left(2x_1\right)$，又$f\left(x_2\right)=0$，

由（1）可知$f\left(x\right)$在$\left(x_0,+\infty\right)$上单调递减，$x_2\in\left(x_0,+\infty\right)$，且对任意$x\in\left(0,x_2\right)$ $f\left(x\right)>0$，

所以$2x_1 > x_2$.

19. 甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分．设每个球甲胜的概率为$P\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$，乙胜的概率为$q$，$p+q=1$，且各球的胜负相互独立，对正整数$k\geq 2$，记$p_k$为打完$k$个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，$q_k$为打完$k$个球后乙比甲至少多得 2 分的概率．

（1）求p_3,p_4（用p表示）．

（2）若$\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求$p$．

（3）证明：对任意正整数m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$．

【答案】（1）$p_3=p^3$，$p_4=p^3\left(4-3p\right)$

（2）$p=\frac{2}{3}$

（3）证明过程见解析

【解析】

【分析】（1）直接由二项分布概率计算公式即可求解；

（2）由题意$q_3=q^3,q_4=q^3\left(4-3q\right)$，联立$\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，$p+q=1$即可求解；

（3）首先$p_{2m}-p_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}q^m$，$p_{2m+2}-p_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^m$，同理有$q_{2m}-q_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}q^{m+1}p^m$，

$q_{2m+2}-q_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m+1}^{m}q^{m+2}p^m$，作差有$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}$，另一方面

$p_{2m+2}-p_{2m}=\frac{\left(2m+1\right)!}{m!\left(m+1\right)!}p^mq^m\cdot p\left(p-\frac{m}{2m+1}\right)$，且同理有$q_{2m+2}-q_{2m}=\frac{\left(2m+1\right)!}{m!\left(m+1\right)!}p^mq^m\cdot q\left(q-\frac{m}{2m+1}\right)$，

作差能得到$p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$，由此即可得证．

【小问 1 详解】

p_3为打完 3 个球后甲比乙至少多得两分的概率，故只能甲胜三场，

故所求为 $p_3 = \mathrm{C}_3^3 \left(1-p\right)^0 p^3 = p^3$，

p_4为打完 4 个球后甲比乙至少多得两分的概率，故甲胜三场或四场，

故所求为 $p_4 = \mathrm{C}_4^3 \left(1-p\right)^1 p^3 + \mathrm{C}_4^4 \left(1-p\right)^0 p^4 = 4p^3\left(1-p\right) + p^4 = p^3\left(4-3p\right)$；

【小问 2 详解】

由（1）得 $p_3 = p^3$， $p_4 = p^3\left(4-3p\right)$，同理 $q_3 = q^3, q_4 = q^3\left(4-3q\right)$，

若 $\dfrac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$， $p+q=1$，

则 $\dfrac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \dfrac{p^3\left(4-3p\right)-p^3}{q^3\left(4-3q\right)-q^3} = \dfrac{3p^3\left(1-p\right)}{3q^3\left(1-q\right)} = \dfrac{p^3 q}{q^3 p} = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 4$，

由于 $0 < p, q < 1$，所以 $p = 2q = 2\left(1-p\right) > 0$，解得 $p = \dfrac{2}{3}$；

【小问 3 详解】

我们有

$$p_{2m} - p_{2m+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^k p^{2m+1-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k$$

$$= \left(1-p\right)\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-2} \mathrm{C}_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} = \mathrm{C}_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m.$$

以及

$$p_{2m+2} - p_{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{2m+2}^k p^{2m+2-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + \sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{2m+1}^k p^{2m+2-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + \mathrm{C}_{2m+1}^m p^{m+2} q^m + \left(p-1\right)\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + \mathrm{C}_{2m+1}^m p^{m+2} q^m - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1} + \mathrm{C}_{2m+1}^m p^{m+2} q^m - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1} = \mathrm{C}_{2m+1}^m p^{m+2} q^m.$$

至此我们得到 $p_{2m} - p_{2m+1} = \mathrm{C}_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m$， $p_{2m+2} - p_{2m+1} = \mathrm{C}_{2m+1}^m p^{m+2} q^m$，同理有 $q_{2m} - q_{2m+1} = \mathrm{C}_{2m}^{m-1} q^{m+1} p^m$，

$q_{2m+2}-q_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m+1}^{m}q^{m+2}p^{m}$.

故 $p_{2m}-p_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}q^{m}=p\cdot\left(\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m}q^{m}\right)>q\cdot\left(\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m}q^{m}\right)=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}q^{m+1}p^{m}=q_{2m}-q_{2m+1}$，即

$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}$.

另一方面，由于

$p_{2m+2}-p_{2m}=\left(p_{2m+2}-p_{2m+1}\right)-\left(p_{2m}-p_{2m+1}\right)=\mathrm{C}_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^{m}-\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}q^{m}=p^{m}q^{m}\cdot p\left(p\cdot\mathrm{C}_{2m+1}^{m}-\mathrm{C}_{2m}^{m-1}\right)$

$=p^{m}q^{m}\cdot p\left(p\cdot\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}-\frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!}\right)=\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}p^{m}q^{m}\cdot p\left(p-\frac{m}{2m+1}\right)$

且同理有 $q_{2m+2}-q_{2m}=\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}p^{m}q^{m}\cdot q\left(q-\frac{m}{2m+1}\right)$.

故结合 $p\left(p-\frac{m}{2m+1}\right)-q\left(q-\frac{m}{2m+1}\right)=(p-q)(p+q)-\frac{m}{2m+1}(p-q)=(p-q)-\frac{m}{2m+1}(p-q)=\frac{m+1}{2m+1}(p-q)>0$，

就能得到 $p_{2m+2}-p_{2m}>q_{2m+2}-q_{2m}$，即 $p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$，证毕.