

# 2015年江苏省高考数学试卷

## 一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共计70分）

1. (5分) (2015·江苏) 已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{2, 4, 5\}$ , 则集合 $A \cup B$ 中元素的个数为\_\_\_\_\_.

2. (5分) (2015·江苏) 已知一组数据4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为\_\_\_\_\_.

3. (5分) (2015·江苏) 设复数 $z$ 满足 $z^2=3+4i$  ( $i$ 是虚数单位), 则 $z$ 的模为\_\_\_\_\_.

4. (5分) (2015·江苏) 根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 $S$ 为\_\_\_\_\_.

```
S←1  
I←1  
While I<8  
    S←S+2  
    I←I+3  
End While  
Print S
```

5. (5分) (2015·江苏) 袋中有形状、大小都相同的4只球, 其中1只白球、1只红球、2只黄球, 从中一次随机摸出2只球, 则这2只球颜色不同的概率为\_\_\_\_\_.

6. (5分) (2015·江苏) 已知向量 $\vec{a}=(2, 1)$ ,  $\vec{b}=(1, -2)$ , 若 $m\vec{a}+n\vec{b}=(9, -8)$

( $m, n \in \mathbb{R}$ ), 则 $m-n$ 的值为\_\_\_\_\_.

7. (5分) (2015·江苏) 不等式 $2x^2-x < 4$ 的解集为\_\_\_\_\_.

8. (5分) (2015·江苏) 已知 $\tan\alpha=-2$ ,  $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{7}$ , 则 $\tan\beta$ 的值为\_\_\_\_\_.

9. (5分) (2015·江苏) 现有橡皮泥制作的底面半径为5, 高为4的圆锥和底面半径为2, 高为8的圆柱各一个, 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个, 则新的底面半径为\_\_\_\_\_.

10. (5分) (2015·江苏) 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 以点(1, 0)为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0$  ( $m \in \mathbb{R}$ )相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为\_\_\_\_\_.

11. (5分) (2015·江苏) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ , 且 $a_{n+1} - a_n = n+1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前10项的和为\_\_\_\_\_.

12. (5分) (2015·江苏) 在平面直角坐标系xOy中, P为双曲线 $x^2 - y^2=1$ 右支上的一个动点, 若点P到直线 $x - y+1=0$ 的距离大于c恒成立, 则实数c的最大值为\_\_\_\_\_.

13. (5分) (2015·江苏) 已知函数 $f(x) = |\ln x|$ ,  $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$ , 则方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为\_\_\_\_\_.

14. (5分) (2015·江苏) 设向量 $\overrightarrow{a_k} = (\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6})$  ( $k=0, 1, 2, \dots, 12$ ), 则 $\sum_{k=0}^{11} (a_k \cdot a_{k+1})$  的值为\_\_\_\_\_.

**二、解答题 (本大题共6小题, 共计90分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

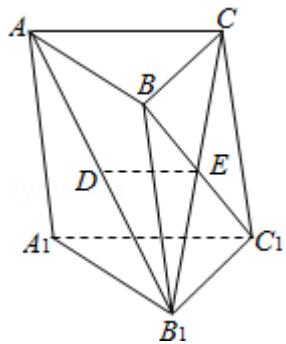
15. (14分) (2015·江苏) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$ ,  $AC=3$ ,  $A=60^\circ$ .

- (1) 求 $BC$ 的长;
- (2) 求 $\sin 2C$ 的值.

16. (14分) (2015·江苏) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AC \perp BC$ ,  $BC=CC_1$ , 设 $AB_1$ 的中点为D,  $B_1C \cap BC_1=E$ .

求证:

- (1)  $DE \parallel$  平面 $AA_1C_1C$ ;
- (2)  $BC_1 \perp AB_1$ .



17. (14分) (2015·江苏) 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路, 记两条相互垂直的公路为 $l_1$ ,  $l_2$ , 山区边界曲线为C, 计划修建的公路为l, 如图所示, M, N为C的两个端点, 测得点M到 $l_1$ ,  $l_2$ 的距离分别为5千米和40千米, 点N到 $l_1$ ,  $l_2$ 的距离分别为20千米和2.5千米,

以 $l_2$ ,  $l_1$ 在的直线分别为x, y轴, 建立平面直角坐标系xOy, 假设曲线C符合函数 $y=\frac{a}{x^2+b}$  (

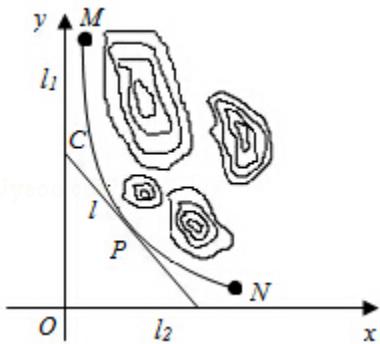
其中a, b为常数) 模型.

(1) 求a, b的值;

(2) 设公路l与曲线C相切于P点, P的横坐标为t.

①请写出公路l长度的函数解析式 $f(t)$ , 并写出其定义域;

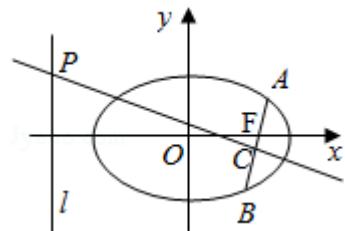
②当t为何值时, 公路l的长度最短? 求出最短长度.



18. (16分) (2015·江苏) 如图, 在平面直角坐标系xOy中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且右焦点F到左准线l的距离为3.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过F的直线与椭圆交于A, B两点, 线段AB的垂直平分线分别交直线l和AB于点P, C, 若 $PC=2AB$ , 求直线AB的方程.



19. (16分) (2015·江苏) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $b=c-a$  (实数c是与a无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ , 求c的值.

20. (16分) (2015·江苏) 设 $a_1, a_2, a_3, a_4$ 是各项为正数且公差为d ( $d \neq 0$ ) 的等差数列

.

(1) 证明:  $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$  依次构成等比数列;

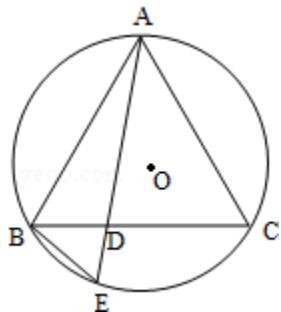
(2) 是否存在 $a_1, d$ , 使得 $a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4$  依次构成等比数列? 并说明理由;

(3) 是否存在  $a_1, d$  及正整数  $n, k$ ，使得  $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$  依次构成等比数列？并说明理由。

**三、附加题（本大题包括选做题和必做题两部分）【选做题】**本题包括21-24题，请选定其中两小题作答，若多做，则按作答的前两小题评分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤**【选修4-1：几何证明选讲】**

21. (10分) (2015·江苏) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的弦AE交B于点D.

求证： $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ .



**【选修4-2：矩阵与变换】**

22. (10分) (2015·江苏) 已知 $x, y \in \mathbb{R}$ ，向量  $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  是矩阵  $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}$  的属于特征值  $-2$  的一个特征向量，求矩阵A以及它的另一个特征值.

**【选修4-4：坐标系与参数方程】**

23. (2015·江苏) 已知圆C的极坐标方程为  $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$ ，求圆C的半径.

**【选修4-5：不等式选讲】**

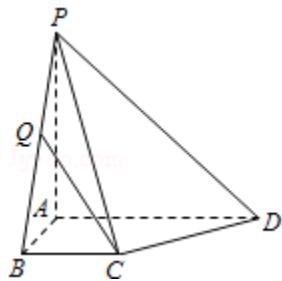
24. (2015·江苏) 解不等式  $x + |2x + 3| \geq 2$ .

**【必做题】每题10分，共计20分，解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤**

25. (10分) (2015·江苏) 如图，在四棱锥P-ABCD中，已知PA⊥平面ABCD，且四边形ABCD为直角梯形， $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ， $PA = AD = 2$ ， $AB = BC = 1$ .

(1) 求平面PAB与平面PCD所成二面角的余弦值；

(2) 点Q是线段BP上的动点，当直线CQ与DP所成的角最小时，求线段BQ的长.



26. (10分) (2015·江苏) 已知集合 $X=\{1, 2, 3\}$ ,  $Y_n=\{1, 2, 3, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 设 $S_n=\{(a, b) | a \text{整除} b \text{或整除} a, a \in X, b \in Y_n\}$ , 令 $f(n)$ 表示集合 $S_n$ 所含元素的个数.

- (1) 写出 $f(6)$ 的值;
- (2) 当 $n \geq 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.

## 2015年江苏省高考数学试卷

参考答案与试题解析

### 一、填空题 (本大题共14小题, 每小题5分, 共计70分)

1. (5分)

**考点** 并集及其运算.

:

**专题** 集合.

:

**分析** 求出 $A \cup B$ , 再明确元素个数

:

**解答** 解: 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{2, 4, 5\}$ , 则 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;

: 所以 $A \cup B$ 中元素的个数为5;

故答案为: 5

**点评** 题考查了集合的并集的运算, 根据定义解答, 注意元素不重复即可, 属于基础题

:

2. (5分)

**考点** 众数、中位数、平均数.

:

**专题** 概率与统计.

:

**分析** 直接求解数据的平均数即可.

:

**解答** 解: 数据4, 6, 5, 8, 7, 6,

:

那么这组数据的平均数为:  $\frac{4+6+5+8+7+6}{6}=6$ .

故答案为: 6.

**点评** 本题考查数据的均值的求法, 基本知识的考查.

:

3. (5分)

**考点** 复数求模.

:

**专题** 数系的扩充和复数.

:

**分析** 直接利用复数的模的求解法则, 化简求解即可.

:

**解答** 解: 复数 $z$ 满足 $z^2=3+4i$ ,

: 可得 $|z||z|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ,

$$\therefore |z|=\sqrt{5}$$

故答案为:  $\sqrt{5}$ .

**点评** 本题考查复数的模的求法, 注意复数的模的运算法则的应用, 考查计算能力.

:

4. (5分)

**考点** 伪代码.

:

**专题** 图表型; 算法和程序框图.

:

**分析** 模拟执行程序框图, 依次写出每次循环得到的 $I$ ,  $S$ 的值, 当 $I=10$ 时不满足条件 $I<8$ ,

: 退出循环, 输出 $S$ 的值为7.

**解答** 解: 模拟执行程序, 可得

:  $S=1$ ,  $I=1$

满足条件 $I<8$ ,  $S=3$ ,  $I=4$

满足条件 $I<8$ ,  $S=5$ ,  $I=7$

满足条件 $I<8$ ,  $S=7$ ,  $I=10$

不满足条件 $I<8$ , 退出循环, 输出 $S$ 的值为7.

故答案为: 7.

**点评** 本题主要考查了循环结构的程序, 正确判断退出循环的条件是解题的关键, 属于基

: 础题.

5. (5分)

**考点** 古典概型及其概率计算公式.

:

**专题** 概率与统计.

:

**分析** 根据题意, 把4个小球分别编号, 用列举法求出基本事件数, 计算对应的概率即可.

:

**解答** 解: 根据题意, 记白球为A, 红球为B, 黄球为C<sub>1</sub>、C<sub>2</sub>, 则

: 一次取出2只球, 基本事件为AB、AC<sub>1</sub>、AC<sub>2</sub>、BC<sub>1</sub>、BC<sub>2</sub>、C<sub>1</sub>C<sub>2</sub>共6种,

其中2只球的颜色不同的是AB、AC<sub>1</sub>、AC<sub>2</sub>、BC<sub>1</sub>、BC<sub>2</sub>共5种；

所以所求的概率是P=  $\frac{5}{6}$ .

故答案为：  $\frac{5}{6}$ .

**点评** 本题考查了用列举法求古典概型的概率的应用问题，是基础题目.

：

6. (5分)

**考点** 平面向量的基本定理及其意义.

：

**专题** 平面向量及应用.

：

**分析** 直接利用向量的坐标运算，求解即可.

：

**解答** 解：向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ，  $\vec{b} = (1, -2)$ ， 若  $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)$

：

可得  $\begin{cases} 2m+n=9 \\ m-2n=-8 \end{cases}$ ，解得  $m=2$ ，  $n=5$ ，

$\therefore m-n=-3$ .

故答案为： -3.

**点评** 本题考查向量的坐标运算，向量相等条件的应用，考查计算能力.

：

7. (5分)

**考点** 指、对数不等式的解法.

：

**专题** 函数的性质及应用；不等式的解法及应用.

：

**分析** 利用指数函数的单调性转化为  $x^2 - x < 2$ ，求解即可.

：

**解答** 解： $\because 2^{x^2-x} < 4$ ，

：

$\therefore x^2 - x < 2$ ，

即  $x^2 - x - 2 < 0$ ，

解得：  $-1 < x < 2$

故答案为： (-1, 2)

**点评** 本题考查了指数函数的性质，二次不等式的求解，属于简单的综合题目，难度不大

：

8. (5分)

**考点** 两角和与差的正切函数.

：

**专题** 三角函数的求值.

：

**分析** 直接利用两角和的正切函数，求解即可.

：

**解答** 解:  $\tan\alpha = -2$ ,  $\tan(\alpha+\beta) = \frac{1}{7}$ ,

可知  $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{1}{7}$ ,

即  $\frac{-2 + \tan\beta}{1 + 2\tan\beta} = \frac{1}{7}$ ,

解得  $\tan\beta = 3$ .

故答案为: 3.

**点评** 本题考查两角和的正切函数, 基本知识的考查.

9. (5分)

**考点** 棱柱、棱锥、棱台的体积.

**专题** 计算题; 空间位置关系与距离.

**分析** 由题意求出原来圆柱和圆锥的体积, 设出新的圆柱和圆锥的底面半径r, 求出体积,

由前后体积相等列式求得r.

**解答** 解: 由题意可知, 原来圆锥和圆柱的体积和为:  $\frac{1}{3} \times 25\pi \times 4 + 4\pi \times 8 = \frac{196\pi}{3}$ .

设新圆锥和圆柱的底面半径为r,

则新圆锥和圆柱的体积和为:  $\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 + 8\pi r^2 = \frac{28\pi r^2}{3}$ .

$\therefore \frac{28\pi r^2}{3} = \frac{196\pi}{3}$ , 解得:  $r = \sqrt{7}$ .

故答案为:  $\sqrt{7}$ .

**点评** 本题考查了圆柱与圆锥的体积公式, 是基础的计算题.

10. (5分)

**考点** 圆的标准方程; 圆的切线方程.

**专题** 计算题; 直线与圆.

**分析** 求出圆心到直线的距离d的最大值, 即可求出所求圆的标准方程.

**解答** 解: 圆心到直线的距离  $d = \frac{|-m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{m^2+1}} \leq \sqrt{2}$ ,

$\therefore m=1$ 时, 圆的半径最大为  $\sqrt{2}$ ,

∴ 所求圆的标准方程为  $(x-1)^2+y^2=2$ .

故答案为:  $(x-1)^2+y^2=2$ .

**点评** 本题考查所圆的标准方程, 考查点到直线的距离公式, 考查学生的计算能力, 比较基础.

11. (5分)

**考点** 数列的求和; 数列递推式.

:

**专题** 等差数列与等比数列.

:

**分析** 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ , 且 $a_{n+1} - a_n = n+1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 利用“累加求和”可得 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

再利用“裂项求和”即可得出.

**解答** 解: ∵数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ , 且 $a_{n+1} - a_n = n+1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ),

∴当 $n \geq 2$ 时,  $a_n = (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 = n+ \dots + 2+1 = \frac{n(n+1)}{2}$ .

当 $n=1$ 时, 上式也成立,

$$\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$\therefore \text{数列}\{\frac{1}{a_n}\} \text{的前}n\text{项的和} S_n = 2 \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$= 2 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{2n}{n+1}.$$

$$\therefore \text{数列}\{\frac{1}{a_n}\} \text{的前10项的和为} \frac{20}{11}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{20}{11}.$$

**点评** 本题考查了数列的“累加求和”方法、“裂项求和”方法、等差数列的前 $n$ 项和公式, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

12. (5分)

**考点** 双曲线的简单性质.

:

**专题** 计算题; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

:

**分析** 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $x \pm y = 0$ ,  $c$ 的最大值为直线 $x - y + 1 = 0$ 与直线 $x - y = 0$ 的距离.

**解答** 解: 由题意, 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $x \pm y = 0$ , 因为点P到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离大于 $c$ 恒成立,

所以 $c$ 的最大值为直线 $x - y + 1 = 0$ 与直线 $x - y = 0$ 的距离, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**点评** 本题考查双曲线的性质, 考查学生的计算能力, 比较基础.

:

13. (5分)

**考点** 根的存在性及根的个数判断.

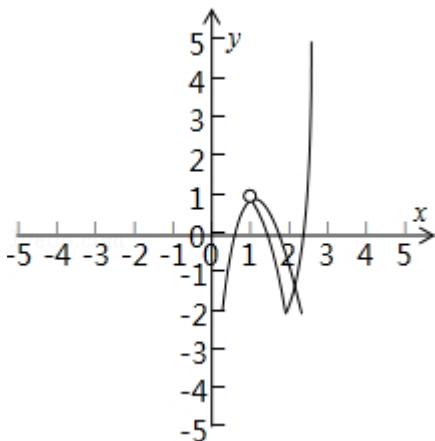
专题 综合题；函数的性质及应用.

:

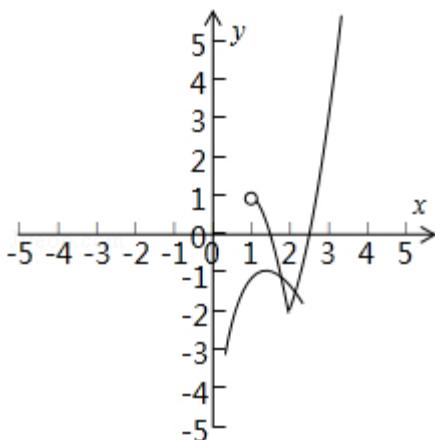
分析：由 $|f(x) + g(x)| = 1$ 可得 $g(x) = -f(x) \pm 1$ ，分别作出函数的图象，即可得出结论。

解答：解：由 $|f(x) + g(x)| = 1$ 可得 $g(x) = -f(x) \pm 1$ .

： $g(x)$ 与 $h(x) = -f(x) + 1$ 的图象如图所示，图象有两个交点；



$g(x)$ 与 $\varphi(x) = -f(x) - 1$ 的图象如图所示，图象有两个交点；



所以方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为4.

故答案为：4.

点评 本题考查求方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数，考查数形结合的数学思想，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题。

14. (5分)

考点：数列的求和。

专题：等差数列与等比数列；平面向量及应用。

分析：利用向量数量积运算性质、两角和差的正弦公式、积化和差公式、三角函数的周期性即可得出。

解答：解： $\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}} = \cos \frac{k\pi}{6} \cdot \cos \frac{(k+1)\pi}{6} +$   
 $(\sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6})(\sin \frac{(k+1)\pi}{6} + \cos \frac{(k+1)\pi}{6})$   
 $= \cos \frac{k\pi}{6} \cdot \cos \frac{(k+1)\pi}{6} + \sin \frac{k\pi}{6} \sin \frac{(k+1)\pi}{6} + \sin \frac{k\pi}{6} \cos \frac{(k+1)\pi}{6} +$

$$\begin{aligned}
& \cos \frac{k\pi}{6} \sin \frac{(k+1)\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6} \cos \frac{(k+1)\pi}{6} \\
&= \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2k+1}{6}\pi + \frac{1}{2} (\cos \frac{2k+1}{2}\pi + \cos \frac{\pi}{6}) \\
&= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{2k+1}{6}\pi + \frac{1}{2} \cos \frac{2k+1}{6}\pi, \\
\therefore \sum_{k=0}^{11} (a_k \cdot a_{k+1}) &= 12 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} + (\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{9\pi}{6} + \\
&\quad \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{13\pi}{6} + \dots + \sin \frac{23\pi}{6}) + \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{3\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{6} + \\
&\quad \cos \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{9\pi}{6} + \cos \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{13\pi}{6} + \dots + \cos \frac{23\pi}{6}) \\
&= 9\sqrt{3} + 0 + 0 \\
&= 9\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

故答案为:  $9\sqrt{3}$ .

**点评:** 本题考查了向量数量积运算性质、两角和差的正弦公式、积化和差公式、三角函数的周期性, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

**二、解答题 (本大题共6小题, 共计90分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

15. (14分)

**考点** 余弦定理的应用; 二倍角的正弦.

:

**专题** 解三角形.

:

**分析** (1) 直接利用余弦定理求解即可.

(2) 利用正弦定理求出C的正弦函数值, 然后利用二倍角公式求解即可.

**解答** 解: (1) 由余弦定理可得:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 4 + 8 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7$ ,

所以  $BC = \sqrt{7}$ .

(2) 由正弦定理可得:  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ , 则  $\sin C = \frac{AB}{BC} \cdot \sin A = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ,

$\because AB < BC$ ,  $\therefore C$  为锐角,

则  $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ .

因此  $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{7} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ .

**点评** 本题考查余弦定理的应用, 正弦定理的应用, 二倍角的三角函数, 注意角的范围的解题的关键.

16. (14分)

**考点** 直线与平面平行的判定; 直线与平面垂直的性质.

：

**专题** 证明题；空间位置关系与距离.

：

**分析** （1）根据中位线定理得 $DE \parallel AC$ , 即证 $DE \parallel$ 平面 $AA_1C_1C$ ；  
**：**（2）先由直三棱柱得出 $CC_1 \perp$ 平面 $ABC$ , 即证 $AC \perp CC_1$ ; 再证明 $AC \perp$ 平面 $BCC_1B_1$ , 即证 $BC_1 \perp AC$ ; 最后证明 $BC_1 \perp$ 平面 $B_1AC$ , 即可证出 $BC_1 \perp AB_1$ .

**解答** 证明：（1）根据题意，得；  
**：**  $E$ 为 $B_1C$ 的中点， $D$ 为 $AB_1$ 的中点，所以 $DE \parallel AC$ ；  
 又因为 $DE \not\subset$ 平面 $AA_1C_1C$ ,  $AC \subset$ 平面 $AA_1C_1C$ ,  
 所以 $DE \parallel$ 平面 $AA_1C_1C$ ；  
 （2）因为棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，  
 所以 $CC_1 \perp$ 平面 $ABC$ ，  
 因为 $AC \subset$ 平面 $ABC$ ，  
 所以 $AC \perp CC_1$ ；  
 又因为 $AC \perp BC$ ，  
 $CC_1 \subset$ 平面 $BCC_1B_1$ ，  
 $BC \subset$ 平面 $BCC_1B_1$ ，  
 $BC \cap CC_1 = C$ ，  
 所以 $AC \perp$ 平面 $BCC_1B_1$ ；  
 又因为 $BC_1 \subset$ 平面 $BCC_1B_1$ ，  
 所以 $BC_1 \perp AC$ ；  
 因为 $BC = CC_1$ , 所以矩形 $BCC_1B_1$ 是正方形，  
 所以 $BC_1 \perp$ 平面 $B_1AC$ ；  
 又因为 $AB_1 \subset$ 平面 $B_1AC$ ，  
 所以 $BC_1 \perp AB_1$ .

**点评** 本题考查了直线与直线，直线与平面以及平面与平面的位置关系，也考查了空间想象能力和平理论证能力的应用问题，是基础题目.

17. (14分)

**考点** 函数与方程的综合运用.

：

**专题** 综合题；导数的综合应用.

：

**分析** （1）由题意知，点 $M$ ,  $N$ 的坐标分别为 $(5, 40)$ ,  $(20, 2.5)$ , 将其分别代入 $y = \frac{a}{x^2 + b}$ , 建立方程组，即可求 $a$ ,  $b$ 的值；  
**：**（2）①求出切线 $l$ 的方程，可得 $A$ ,  $B$ 的坐标，即可写出公路 $l$ 长度的函数解析式 $f(t)$ ，并写出其定义域；

②设 $g(t) = t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4}$ , 利用导数，确定单调性，即可求出当 $t$ 为何值时，公路 $l$

的长度最短，并求出最短长度.

**解答** 解：（1）由题意知，点 $M$ ,  $N$ 的坐标分别为 $(5, 40)$ ,  $(20, 2.5)$ ,

：

将其分别代入  $y = \frac{a}{x^2 + b}$ , 得  $\begin{cases} \frac{a}{25+b}=40 \\ \frac{a}{400+b}=2.5 \end{cases}$ ,

解得  $\begin{cases} a=1000 \\ b=0 \end{cases}$ ,

(2) ①由 (1)  $y = \frac{1000}{x^2}$  ( $5 \leq x \leq 20$ ),  $P(t, \frac{1000}{t^2})$ ,

$\therefore y' = -\frac{2000}{t^3}$ ,

$\therefore$  切线l的方程为  $y - \frac{1000}{t^2} = -\frac{2000}{t^3}(x - t)$

设在点P处的切线l交x, y轴分别于A, B点, 则  $A(\frac{3t}{2}, 0)$ ,  $B(0, \frac{3000}{t^2})$ ,

$\therefore f(t) = \sqrt{(\frac{3t}{2})^2 + (\frac{3000}{t^2})^2} = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4}}$ ,  $t \in [5, 20]$ ;

②设  $g(t) = t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4}$ , 则  $g'(t) = 2t - \frac{16 \times 10^6}{t^5} = 0$ , 解得  $t = 10\sqrt[4]{2}$ ,

$t \in (5, 10\sqrt[4]{2})$  时,  $g'(t) < 0$ ,  $g(t)$  是减函数;  $t \in (10\sqrt[4]{2}, 20)$  时,  $g'(t) > 0$ ,  $g(t)$  是增函数,

从而  $t = 10\sqrt[4]{2}$  时, 函数  $g(t)$  有极小值也是最小值,

$\therefore g(t)_{\min} = 300$ ,

$\therefore f(t)_{\min} = 15\sqrt{3}$ ,

答:  $t = 10\sqrt[4]{2}$  时, 公路l的长度最短, 最短长度为  $15\sqrt{3}$  千米.

**点评** 本题考查利用数学知识解决实际问题, 考查导数知识的综合运用, 确定函数关系,

: 正确求导是关键.

18. (16分)

**考点** 直线与圆锥曲线的综合问题; 椭圆的标准方程.

:

**专题** 直线与圆; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

:

**分析** (1) 运用离心率公式和准线方程, 可得a, c的方程, 解得a, c, 再由a, b, c的关系 : , 可得b, 进而得到椭圆方程;

(2) 讨论直线AB的斜率不存在和存在, 设出直线方程, 代入椭圆方程, 运用韦达定理和弦长公式, 以及两直线垂直的条件和中点坐标公式, 即可得到所求直线的方程.

**解答** 解: (1) 由题意可得,  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

且  $c + \frac{a^2}{c} = 3$ , 解得  $c = 1$ ,  $a = \sqrt{2}$ ,

则  $b = 1$ , 即有椭圆方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ;

(2) 当 $AB \perp x$ 轴,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $CP = 3$ , 不合题意;

当 $AB$ 与 $x$ 轴不垂直, 设直线 $AB$ :  $y = k(x - 1)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 将 $AB$ 方程代入椭圆方程可得  $(1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2(k^2 - 1) = 0$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{2(k^2 - 1)}{1+2k^2},$$

$$\text{则 } C\left(\frac{2k^2}{1+2k^2}, \frac{-k}{1+2k^2}\right), \text{ 且 } |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} =$$

$$\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2},$$

若 $k=0$ , 则 $AB$ 的垂直平分线为 $y$ 轴, 与左准线平行, 不合题意;

$$\text{则 } k \neq 0, \text{ 故 } PC: y + \frac{k}{1+2k^2} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{2k^2}{1+2k^2}\right), P\left(-2, \frac{2+5k^2}{k(1+2k^2)}\right),$$

$$\text{从而 } |PC| = \frac{2(3k^2+1)\sqrt{1+k^2}}{|k|(1+2k^2)},$$

$$\text{由 } |PC|=2|AB|, \text{ 可得 } \frac{2(3k^2+1)\sqrt{1+k^2}}{|k|(1+2k^2)} = \frac{4\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2}, \text{ 解得 } k=\pm 1,$$

此时 $AB$ 的方程为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$ .

**点评** 本题考查椭圆的方程和性质, 主要考查椭圆的离心率和方程的运用, 联立直线方程, 运用韦达定理和弦长公式, 同时考查两直线垂直和中点坐标公式的运用, 属于中档题.

19. (16分)

**考点** 利用导数研究函数的单调性; 函数零点的判定定理.

:

**专题** 综合题; 导数的综合应用.

:

**分析** (1) 求导数, 分类讨论, 利用导数的正负, 即可得出 $f(x)$ 的单调性;

: (2) 由(1)知, 函数 $f(x)$ 的两个极值为 $f(0)=b$ ,  $f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3+b$ , 则函

数 $f(x)$ 有三个不同的零点等价于 $f(0)f\left(-\frac{2a}{3}\right)=b\left(\frac{4}{27}a^3+b\right)<0$ , 进一步转

化为 $a>0$ 时,  $\frac{4}{27}a^3-a+c>0$ 或 $a<0$ 时,  $\frac{4}{27}a^3-a+c<0$ . 设 $g(a)=\frac{4}{27}a^3-a+c$ ,

利用条件即可求 $c$ 的值.

解答 解: (1)  $\because f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ,

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 可得  $x=0$  或  $-\frac{2a}{3}$ .

$a=0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $\therefore f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增;

$a>0$  时,  $x \in (-\infty, -\frac{2a}{3}) \cup (0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (-\frac{2a}{3}, 0)$  时,  $f'(x) < 0$ ,

$\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -\frac{2a}{3})$ ,  $(0, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-\frac{2a}{3}, 0)$  上单调递减;

$a<0$  时,  $x \in (-\infty, 0) \cup (-\frac{2a}{3}, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (0, -\frac{2a}{3})$  时,  $f'(x) < 0$ ,

$\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$ ,  $(-\frac{2a}{3}, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, -\frac{2a}{3})$  上单调递减;

(2) 由(1)知, 函数  $f(x)$  的两个极值为  $f(0) = b$ ,  $f(-\frac{2a}{3}) = \frac{4}{27}a^3 + b$ , 则函

数  $f(x)$  有三个不同的零点等价于  $f(0) f(-\frac{2a}{3}) = b (\frac{4}{27}a^3 + b) < 0$ ,

$\because b=c-a$ ,

$\therefore a>0$  时,  $\frac{4}{27}a^3 - a + c > 0$  或  $a<0$  时,  $\frac{4}{27}a^3 - a + c < 0$ .

设  $g(a) = \frac{4}{27}a^3 - a + c$ ,

$\because$  函数  $f(x)$  有三个不同的零点时,  $a$  的取值范围恰好是  $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ ,

$\therefore$  在  $(-\infty, -3)$  上,  $g(a) < 0$  且在  $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$  上  $g(a) > 0$  均恒成立

,

$\therefore g(-3) = c-1 \leq 0$ , 且  $g(\frac{3}{2}) = c-1 \geq 0$ ,

$\therefore c=1$ ,

此时  $f(x) = x^3 + ax^2 + 1 - a = (x+1)[x^2 + (a-1)x + 1 - a]$ ,

$\therefore$  函数有三个零点,

$\therefore x^2 + (a-1)x + 1 - a = 0$  有两个异于  $-1$  的不等实根,

$\therefore \Delta = (a-1)^2 - 4(1-a) > 0$ , 且  $(-1)^2 - (a-1) + 1 - a \neq 0$ ,

解得  $a \in (-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ ,

综上  $c=1$ .

点评 本题考查导数知识的综合运用, 考查函数的单调性, 考查函数的零点, 考查分类讨

论的数学思想，难度大.

20. (16分)

**考点** 等比关系的确定；等比数列的性质.

:

**专题** 等差数列与等比数列.

:

**分析** (1) 根据等比数列和等差数列的定义即可证明；

: (2) 利用反证法，假设存在 $a_1, d$ 使得 $a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4$ 依次构成等比数列，推出矛盾，否定假设，得到结论；

(3) 利用反证法，假设存在 $a_1, d$ 及正整数 $n, k$ ，使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列，得到 $a_1^n (a_1+2d)^{n+2k} = (a_1+2d)^{2(n+k)}$ ，且 $(a_1+d)^{n+k} (a_1+3d)^{n+3k} = (a_1+2d)^{2(n+2k)}$ ，利用等式以及对数的性质化简整理得到 $\ln(1+3t) \ln(1+2t) + 3\ln(1+2t) \ln(1+t) = 4\ln(1+3t) \ln(1+t)$ ，(\*\*)，多次构造函数，多次求导，利用零点存在定理，推出假设不成立.

**解答**

: 解：(1) 证明： $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1} - a_n} = 2^d$ ，( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 是同一个常数，

$\therefore 2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$ 依次构成等比数列；

(2) 令 $a_1+d=a$ ，则 $a_1, a_2, a_3, a_4$ 分别为 $a-d, a, a+d, a+2d$  ( $a>d, a>-2d, d\neq 0$ )

假设存在 $a_1, d$ 使得 $a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4$ 依次构成等比数列，则 $a^4 = (a-d)(a+d)^3$ ，且 $(a+d)^6 = a^2(a+2d)^4$ ，

令 $t = \frac{d}{a}$ ，则 $1 = (1-t)(1+t)^3$ ，且 $(1+t)^6 = (1+2t)^4$ ，( $-\frac{1}{2} < t < 1, t \neq 0$ )，

化简得 $t^3 + 2t^2 - 2 = 0$  (\*)，且 $t^2 = t+1$ ，将 $t^2 = t+1$ 代入(\*)式，

$t(t+1) + 2(t+1) - 2 = t^2 + 3t = t+1 + 3t = 4t+1 = 0$ ，则 $t = -\frac{1}{4}$ ，

显然 $t = -\frac{1}{4}$ 不是上面方程的解，矛盾，所以假设不成立，

因此不存在 $a_1, d$ ，使得 $a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4$ 依次构成等比数列.

(3) 假设存在 $a_1, d$ 及正整数 $n, k$ ，使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列，

则 $a_1^n (a_1+2d)^{n+2k} = (a_1+2d)^{2(n+k)}$ ，且 $(a_1+d)^{n+k} (a_1+3d)^{n+3k} = (a_1+2d)^{2(n+2k)}$ ，

分别在两个等式的两边同除以 $=a_1^{2(n+k)}, a_1^{2(n+2k)}$ ，并令 $t = \frac{d}{a_1}$ ，( $t > -\frac{1}{3}, t \neq 0$ )

，

则 $(1+2t)^{n+2k} = (1+t)^{2(n+k)}$ ，且 $(1+t)^{n+k} (1+3t)^{n+3k} = (1+2t)^{2(n+2k)}$ ，

将上述两个等式取对数，得 $(n+2k) \ln(1+2t) = 2(n+k) \ln(1+t)$ ，

且 $(n+k) \ln(1+t) + (n+3k) \ln(1+3t) = 2(n+2k) \ln(1+2t)$ ，

化简得， $2k[\ln(1+2t) - \ln(1+t)] = n[2\ln(1+t) - \ln(1+2t)]$ ，

且 $3k[\ln(1+3t) - \ln(1+t)] = n[3\ln(1+t) - \ln(1+3t)]$ ,

再将这两式相除, 化简得,

$$\ln(1+3t)\ln(1+2t) + 3\ln(1+2t)\ln(1+t) = 4\ln(1+3t)\ln(1+t), \quad (**)$$

$$\text{令 } g(t) = 4\ln(1+3t)\ln(1+t) - \ln(1+3t)\ln(1+2t) - 3\ln(1+2t)\ln(1+t),$$

$$\text{则 } g'(t) = \frac{2}{(1+t)(1+2t)(1+3t)}[(1+3t)^2\ln(1+3t) - 3(1+2t)^2\ln(1+2t) - 3(1+t)^2\ln(1+t)],$$

$$\text{令 } \varphi(t) = (1+3t)^2\ln(1+3t) - 3(1+2t)^2\ln(1+2t) + 3(1+t)^2\ln(1+t),$$

$$\text{则 } \varphi'(t) = 6[(1+3t)\ln(1+3t) - 2(1+2t)\ln(1+2t) + 3(1+t)\ln(1+t)],$$

$$\text{令 } \varphi_1(t) = \varphi'(t), \text{ 则 } \varphi_1'(t) = 6[3\ln(1+3t) - 4\ln(1+2t) + \ln(1+t)],$$

$$\text{令 } \varphi_2(t) = \varphi_1'(t), \text{ 则 } \varphi_2'(t) = \frac{12}{(1+t)(1+2t)(1+3t)} > 0,$$

$$\text{由 } g(0) = \varphi(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(t) > 0,$$

$$\text{知 } g(t), \varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t) \text{ 在 } (-\frac{1}{3}, 0) \text{ 和 } (0, +\infty) \text{ 上均单调,}$$

故  $g(t)$  只有唯一的零点  $t=0$ , 即方程  $(**)$  只有唯一解  $t=0$ , 故假设不成立,

所以不存在  $a_1, d$  及正整数  $n, k$ , 使得  $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$  依次构成等比数列.

**点评** 本题主要考查等差数列、等比数列的定义和性质, 函数与方程等基础知识, 考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力, 属于难题.

**三、附加题 (本大题包括选做题和必做题两部分) 【选做题】**本题包括21-24题, 请选定其中两小题作答, 若多做, 则按作答的前两小题评分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤【选修4-1: 几何证明选讲】

21. (10分)

**考点** 相似三角形的判定.

:

**专题** 推理和证明.

:

**分析** 直接利用已知条件, 推出两个三角形的三个角对应相等, 即可证明三角形相似.

:

**解答** 证明:  $\because AB=AC$ ,  $\therefore \angle ABD=\angle C$ , 又 $\because \angle C=\angle E$ ,  $\therefore \angle ABD=\angle E$ , 又 $\angle BAE$ 是公共角,

: 可知:  $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ .

**点评** 本题考查圆的基本性质与相似三角形等基础知识, 考查逻辑推理能力.

:

**【选修4-2: 矩阵与变换】**

22. (10分)

**考点** 特征值与特征向量的计算.

:

**专题** 矩阵和变换.

:

**分析** 利用  $A\vec{\alpha} = -2\vec{\alpha}$ , 可得  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ , 通过令矩阵A的特征多项式为0即得结论.

解答

解：由已知，可得  $A \vec{\alpha} = -2 \vec{\alpha}$ ，即  $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，

$$\text{则} \begin{cases} x-1=-2 \\ y=2 \end{cases}, \text{ 即} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{矩阵 } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

从而矩阵A的特征多项式  $f(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)$ ，

$\therefore$  矩阵A的另一个特征值为1.

点评 本题考查求矩阵及其特征值，注意解题方法的积累，属于中档题.

：

#### 【选修4-4：坐标系与参数方程】

23. (2015·江苏)

考点 简单曲线的极坐标方程.

：

专题 计算题；坐标系和参数方程.

：

分析 先根据  $x=\rho\cos\theta$ ,  $y=\rho\sin\theta$ , 求出圆的直角坐标方程，求出半径.

：

解答 解：圆的极坐标方程为  $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$ ，可得  $\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta - 4 = 0$

，

化为直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4 = 0$ ，

化为标准方程为  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 6$ ，

圆的半径  $r = \sqrt{6}$ .

点评 本题主要考查把极坐标方程化为直角坐标方程的方法，以及求点的极坐标的方法，

关键是利用公式  $x=\rho\cos\theta$ ,  $y=\rho\sin\theta$ , 比较基础，

#### 【选修4-5：不等式选讲】

24. (2015·江苏)

考点 绝对值不等式的解法.

：

专题 不等式.

：

分析 思路1(公式法)：利用  $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ , 或  $f(x) \leq -g(x)$ ；

思路2(零点分段法)：对x的值分“ $x \geq -\frac{3}{2}$ ”“ $x < -\frac{3}{2}$ ”进行讨论求解.

解答 解法1： $x+|2x+3| \geq 2$  变形为  $|2x+3| \geq 2-x$ ,

得  $2x+3 \geq 2-x$ , 或  $2x+3 \geq -(2-x)$ ,

$$\text{即 } x \geq -\frac{1}{3}, \text{ 或 } x \leq -5,$$

即原不等式的解集为 $\{x|x \geq -\frac{1}{3}, \text{ 或 } x \leq -5\}$ .

解法2：令 $|2x+3|=0$ , 得 $x = -\frac{3}{2}$ .

①当 $x \geq -\frac{3}{2}$ 时, 原不等式化为 $x + (2x+3) \geq 2$ , 即 $x \geq -\frac{1}{3}$ ,

所以 $x \geq -\frac{1}{3}$ ;

② $x < -\frac{3}{2}$ 时, 原不等式化为 $x - (2x+3) \geq 2$ , 即 $x \leq -5$ ,

所以 $x \leq -5$ .

综上, 原不等式的解集为 $\{x|x \geq -\frac{1}{3}, \text{ 或 } x \leq -5\}$ .

**点评** 本题考查了含绝对值不等式的解法. 本解答给出的两种方法是常见的方法, 不管用哪种方法, 其目的是去绝对值符号. 若含有一个绝对值符号, 利用公式法要快捷一些, 其套路为:  $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ , 或 $f(x) \leq -g(x)$ ;  $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ . 可简记为: 大于号取两边, 小于号取中间. 使用零点分段法时, 应注意: 同一类中取交集, 类与类之间取并集.

### 【必做题】每题10分, 共计20分, 解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤

25. (10分) (

**考点** 二面角的平面角及求法; 点、线、面间的距离计算.

:

**专题** 空间位置关系与距离; 空间角.

:

**分析** 以A为坐标原点, 以AB、AD、AP所在直线分别为x、y、z轴建系A-xyz.

: (1) 所求值即为平面PAB的一个法向量与平面PCD的法向量的夹角的余弦值的绝对值, 计算即可;

(2) 利用换元法可得 $\cos^2 \angle \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{DP} = \frac{9}{10}$ , 结合函数 $y=\cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的单调

性, 计算即得结论.

**解答** 解: 以A为坐标原点, 以AB、AD、AP所在直线分别为x、y、z轴建系A-xyz如图,

: 由题可知B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 2).

(1)  $\because AD \perp$ 平面PAB,  $\therefore \overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$ , 是平面PAB的一个法向量,

$\therefore \overrightarrow{PC} = (1, 1, -2)$ ,  $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$ ,

设平面PCD的法向量为 $\overrightarrow{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \end{cases}, \text{ 得} \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases},$$

取y=1, 得 $\overrightarrow{n} = (1, 1, 1)$ ,

$$\therefore \cos <\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{m}> = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$  平面PAB与平面PCD所成二面角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

(2)  $\because \overrightarrow{BP} = (-1, 0, 2)$ , 设  $\overrightarrow{BQ} = \lambda \overrightarrow{BP} = (-\lambda, 0, 2\lambda)$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ),

又  $\overrightarrow{CB} = (0, -1, 0)$ , 则  $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ} = (-\lambda, -1, 2\lambda)$ ,

$$\text{又 } \overrightarrow{DP} = (0, -2, 2), \text{ 从而 } \cos <\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{DP}> = \frac{\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{CQ}| |\overrightarrow{DP}|} = \frac{1+2\lambda}{\sqrt{2+10\lambda^2}},$$

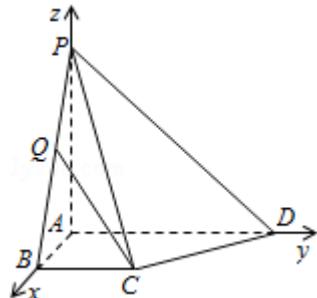
设  $1+2\lambda=t$ ,  $t \in [1, 3]$ ,

$$\text{则 } \cos^2 <\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{DP}> = \frac{2t^2}{5t^2 - 10t + 9} = \frac{2}{9(\frac{1}{t} - \frac{5}{9})^2 + \frac{20}{9}} \leq \frac{9}{10},$$

当且仅当  $t = \frac{9}{5}$ , 即  $\lambda = \frac{2}{5}$  时,  $|\cos <\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{DP}>|$  的最大值为  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,

因为  $y=\cos x$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上是减函数, 此时直线CQ与DP所成角取得最小值.

$$\text{又 } \because BP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \therefore BQ = \frac{2}{5}BP = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



**点评** 本题考查求二面角的三角函数值, 考查用空间向量解决问题的能力, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

26. (10分)

**考点** 数学归纳法.

:

**专题** 综合题; 点列、递归数列与数学归纳法.

:

**分析** (1)  $f(6) = 6 + 2 + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} = 13$ ;

:

(2) 根据数学归纳法的证明步骤, 分类讨论, 即可证明结论.

**解答** 解: (1)  $f(6) = 6 + 2 + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} = 13$ ;

$$(2) \text{ 当 } n \geq 6 \text{ 时, } f(n) = \begin{cases} n+2 + \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{3}\right), & n=6t \\ n+2 + \left(\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{3}\right), & n=6t+1 \\ n+2 + \left(\frac{n}{2} + \frac{n-2}{3}\right), & n=6t+2 \\ n+2 + \left(\frac{n-1}{2} + \frac{n}{3}\right), & n=6t+3 \\ n+2 + \left(\frac{n}{2} + \frac{n-1}{3}\right), & n=6t+4 \\ n+2 + \left(\frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3}\right), & n=6t+5 \end{cases}.$$

下面用数学归纳法证明:

$$\textcircled{1} n=6 \text{ 时, } f(6) = 6+2 + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} = 13, \text{ 结论成立;}$$

\textcircled{2} 假设  $n=k$  ( $k \geq 6$ ) 时, 结论成立, 那么  $n=k+1$  时,  $S_{k+1}$  在  $S_k$  的基础上新增加的元素在  $(1, k+1)$ ,  $(2, k+1)$ ,  $(3, k+1)$  中产生, 分以下情形讨论:

$$1) \text{ 若 } k+1=6t, \text{ 则 } k=6(t-1)+5, \text{ 此时有 } f(k+1)=f(k)+3=(k+1)+2+\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{3}$$

, 结论成立;

$$2) \text{ 若 } k+1=6t+1, \text{ 则 } k=6t+1, \text{ 此时有 } f(k+1)=f(k)+1=k+2+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}=(k+1)+2+\frac{(k+1)-1}{2}+\frac{(k+1)-1}{3}, \text{ 结论成立;}$$

$$3) \text{ 若 } k+1=6t+2, \text{ 则 } k=6t+1, \text{ 此时有 } f(k+1)=f(k)+2=k+2+\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{3}+2=(k+1)+2+\frac{k+1}{2}+\frac{(k+1)-2}{3}, \text{ 结论成立;}$$

$$4) \text{ 若 } k+1=6t+3, \text{ 则 } k=6t+2, \text{ 此时有 } f(k+1)=f(k)+2=k+2+\frac{k}{2}+\frac{k-2}{3}+2=(k+1)+2+\frac{(k+1)-1}{2}+\frac{k+1}{3}, \text{ 结论成立;}$$

$$5) \text{ 若 } k+1=6t+4, \text{ 则 } k=6t+3, \text{ 此时有 } f(k+1)=f(k)+2=k+2+\frac{k-1}{2}+\frac{k}{3}+2=(k+1)+2+\frac{k+1}{2}+\frac{(k+1)-1}{3}, \text{ 结论成立;}$$

$$6) \text{ 若 } k+1=6t+5, \text{ 则 } k=6t+4, \text{ 此时有 } f(k+1)=f(k)+2=k+2+\frac{k}{2}+\frac{k-1}{3}+2=(k+1)+2+\frac{(k+1)-1}{2}+\frac{(k+1)-2}{3}, \text{ 结论成立.}$$

综上所述, 结论对满足  $n \geq 6$  的自然数  $n$  均成立.

**点评** 本题考查数学归纳法, 考查学生分析解决问题的能力, 正确归纳是关键.

:

