

2023年上海高考数学真题

考生注意：

1. 本试卷共5页, 21道试题, 满分150分. 考试时间120分钟.
2. 本考试分设试卷和答题纸. 试卷包括试题与答题要求. 作答必须涂(选择题)或写(非选择题)在答题纸上, 在试卷上作答一律不得分.
3. 答卷前, 务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号, 并将核对后的条形码贴在指定位置上, 在答题纸反面清楚地填写姓名.

一、填空题(本大题共有12题, 满分54分, 第^{1~6}题每题4分, 第^{7~12}题每题5分)考生应在答题纸的相应位置填写结果.

1. 不等式 $|x - 2| < 1$ 的解集为 _____ ;
2. 已知 $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ ;
3. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = 3, q = 2$, 求 $s_6 =$ _____ ;
4. 已知 $\tan \alpha = 3$, 求 $\tan 2\alpha =$ _____ ;
5. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的值域是 _____ ;
6. 已知当 $z = 1 + i$, 则 $|1 - i \cdot z| =$ _____ ;
7. 已知 $x^2 + y^2 - 4y - m = 0$ 的面积为 $\frac{\pi}{2}$, 求 $m =$ _____ ;
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 求 $\sin A =$ _____ ;
9. 国内生产总值(GDP)是衡量地区经济状况的最佳指标, 根据统计数据显示, 某市在2020年间经济高质量增长, GDP稳步增长, 第一季度和第四季度的GDP分别为231和242, 且四个季度GDP的中位数与平均数相等, 则2020年GDP总额为 _____ ;

10. 已知 $(1 + 2023x)^{100} + (2023 - x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, 其中

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{100} \in \mathbb{R}$, 若 $0 \leq k \leq 100$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 当 $a_k < 0$ 时, a_k 的最大值是_____;

11. 公园修建斜坡, 假设斜坡起点在水平面上, 斜坡与水平面的夹角为 θ , 斜坡终点距离水平面的垂直高度为4米, 游客每走一米消耗的体能为 $(1.025 - \cos\theta)$, 要使游客从斜坡底走到斜坡顶端所消耗的总体能最少, 则 $\theta =$ _____;

12. 空间内存在三点 A, B, C , 满足 $AB = AC = BC = 1$, 在空间内取不同两点 (不计顺序), 使得这两点与 A, B, C 可以组成正四棱锥, 求方案数为_____;

二、选择题 (本题共有4题, 满分18分, ^{13、14} 每题4分, ^{15、16} 题每题5分) 每题有且只有一个正确选项, 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

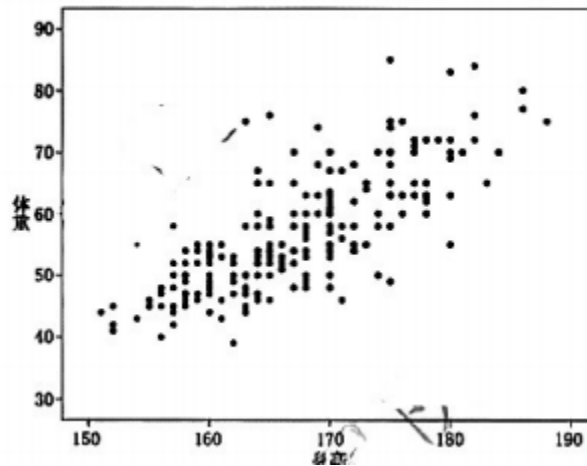
13. 已知 $P = \{1, 2\}, Q = \{2, 3\}$, 若 $M = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$, 则 $M = (\quad)$.

- A. $\{1\}$
- B. $\{2\}$
- C. $\{1, 2\}$
- D. $\{1, 2, 3\}$

14. 根据身高和体重散点图, 下列说法正确的是().

- A. 身高越高, 体重越重
- B. 身高越高, 体重越轻

C. 身高与体重成正相关



D. 身高与体重成负相关

15. 设 $a > 0$, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最小值为 s_a , 在 $[2a, 3a]$ 上的最小值为 t_a , 当 a 变化时, 以下不可能的情形是().

- A. $s_a > 0$ 且 $t_a > 0$
- B. $s_a < 0$ 且 $t_a < 0$
- C. $s_a > 0$ 且 $t_a < 0$
- D. $s_a < 0$ 且 $t_a > 0$

16. 在平面上, 若曲线 Γ 具有如下性质: 存在点 M , 使得对于任意点 $P \in \Gamma$, $Q \in \Gamma$ 使得

$|PM| \cdot |QM| = 1$. 则称这条曲线为“自相关曲线”. 判断下列两个命题的真假().

- (1) 所有椭圆都是“自相关曲线”.
- (2) 存在是“自相关曲线”的双曲线.
- A. (1) 假命题; (2) 真命题
- B. (1) 真命题; (2) 假命题
- C. (1) 真命题; (2) 真命题
- D. (1) 假命题; (2) 假命题

三、解答题(本大题共有5题, 满分78分) 解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小邀满分6分, 第2小题满分8分.

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB \parallel DC$, $AB \perp AD$, $AB = 2$, $AD = 3$, $DC = 4$.

(1) 求证: $A_1B \perp$ 面 DCC_1D

(2) 若四棱柱体积为36, 求二面角 $A_1 - BD - A$ 的大小

18. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

函数 $f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a}$ ($a, c \in R$)

(1) 当 $a = 0$ 是, 是否存在实数 c , 使得 $f(x)$ 为奇函数

(2) 函数 $f(x)$ 的图像过点 $(1,3)$, 且 $f(x)$ 的图像 x 轴负半轴有两个交点求实数 a 的取值范围

19. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分2分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

21世纪汽车博览会在上海2023年6月7日在上海举行, 下表为某汽车模型公司共有25个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1) 若小明从这些模型中随机拿一个模型, 记事件 A 为小明取到的模型为红色外观, 事件B取到模型有棕色内饰

求 $P(B)$ 、 $P(B/A)$, 并据此判断事件A和事件B是否独立

(2) 该公司举行了一个抽奖活动, 规定在一次抽奖中, 每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型, 给出以下假设: 1、拿到的两个模型会出现三种结果, 即外观和内饰均为同色、外观内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色; 2、按结果的可能性大小, 概率越小奖项越高; (3) 奖金额为一

等奖600元,二等奖300元,三等奖150元,请你分析奖项对应的结果,设 X 为奖金额,写出 X 的分布列并求出 X 的数学期望

20. (本题满分16分) 本题共有3个小题,第1小题满分4分,第2小题满分6分,第3小题满分6分.

曲线 $\Gamma: y^2 = 4x$, 第一象限内点 A 在 Γ 上, 的纵坐标是 a .

(1) 若 A 到准线距离为3, 求 a ;

(2) 若 $a = 4$, B 在 x 轴上, AB 中点在 Γ 上, 求点 B 坐标和坐标原点 O 到 AB 距离;

(3) 直线 $l: x = -3$, 令 P 是第一象限 Γ 上异于 A 的一点, 直线 PA 交 l 于 Q , H 是 P 在 l 上的投影, 若点 A 满足 “对于任意 P 都有 $|HQ| > 4$ ” 求 a 的取值范围.

21. (本题满分18分) 本题共有3个小题,第1小题满分4分,第2小题满分6分,第3小题满分8分.

令 $f(x) = \ln x$, 取点 $(a_1, f(a_1))$ 过其曲线 $y = f(x)$ 做切线交 y 轴于 $(0, a_2)$, 取点 $(a_2, f(a_2))$ 过其做切线交 y 轴于 $(0, a_3)$, 若 $a_3 < 0$ 则停止, 以此类推, 得到数列 $\{a_n\}$.

(1) 若正整数 $m \geq 2$, 证明 $a_m = \ln a_{m-1} - 1$;

(2) 若正整数 $m \geq 2$, 试比较 a_m 与 $a_{m-1} - 2$ 大小;

(3) 若正整数 $k \geq 3$, 是否存在 k 使得 a_1, a_2, \dots, a_k 依次成等差数列? 若存在, 求出 k 的所有取值, 若不存在, 试说明理由.

