2014年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（文科）

第I卷（选择题 共50分）

一、填空题（本大题共14小题，共56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4
分，否则一律得零分.

（1）【2014年上海，文1，5分】函数 $y=1-2\cos^2(2x)$ 的最小正周期是____.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】$y=1-2\cos^2(2x)=-(2\cos^2(2x)-1)=-\cos 4x$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

（2）【2014年上海，文2，5分】若复数 $z=1+2\mathrm{i}$，其中i是虚数单位，则 $\left(z+\dfrac{1}{\bar{z}}\right)\cdot\bar{z}=$____
.

【答案】6

【解析】$\left(z+\dfrac{1}{\bar{z}}\right)\cdot\bar{z}=z\cdot\bar{z}+1=(1+2\mathrm{i})(1\text{-}2\mathrm{i})+1=1\text{-}4\mathrm{i}^2+1=6$.

（3）【2014年上海，文3，5分】设常数 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=|x-1|+|x^2-a|$，若 $f(2)=1$，则 $f(1)=$____.

【答案】3

【解析】$f(2)=1+|4-a|=1$，所以 $a=4$，所以 $f(x)=|x-1|+|x^2-4|$，故 $f(1)=3$.

（4）【2014年上海，文4，5分】若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点重合，则该抛物线的准线方程为____.

【答案】$x=-2$

【解析】椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点右焦点为(2,0)，故 $\dfrac{p}{2}=2$，故该抛物线的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}=-2$.

（5）【2014年上海，文5，5分】某校高一、高二、高三分别有学生1600名、1200名、800名．为了解该校高中学生的牙齿健康状况，按各年级的学生数进行分层抽样．若高三抽取20名学生，则高一、高二共需抽取的学生数为____.

【答案】70

【解析】由分层抽样知高一、高二、高三抽取的学生数比为4:3:2，高三抽取的学生数为20，故高一、高二共需抽取的学生数为 $20\Big/\left(\dfrac{2}{4+3+2}\times\dfrac{4+3}{4+3+2}\right)=70$.

（6）【2014年上海，文6，5分】若实数 x,y 满足 $xy=1$，则 x^2+2y^2 的最小值为____.

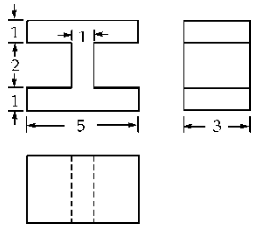
【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】由基本不等式可得 $x^2+2y^2 \geqslant 2\sqrt{2}xy=2\sqrt{2}$，故 x^2+2y^2 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

（7）【2014年上海，文7，5分】若圆锥的侧面积是底面积的三倍，则其母线与轴所成的角大小为____.（结果用反三角函数值表示）

【答案】$\arcsin\dfrac{1}{3}$

【解析】由题意可得，$\pi rl = 3\pi r^2$，解得 $l = 3r$，记母线与轴所成的角为 θ，则 $\sin\theta = \dfrac{r}{l} = \dfrac{1}{3}$，即 $\theta = \arcsin\dfrac{1}{3}$．



（8）【2014年上海，文8，5分】在长方体中割去两个小长方体后的几何体的三视图如图，则切割掉的两个小长方体的体积之和等于____.

【答案】24

【解析】由三视图可知，被割去的两个小长方体长为2，宽为3，高为2，故切割掉的两个小长
方体的体积之和为2×3×2×2=24.

（9）【2014年上海，文9，5分】设 $f(x)=\begin{cases}-x+a, x\le 0\\ x+\dfrac{1}{x}, x>0\end{cases}$，若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围为____.

【答案】$(-\infty,2]$

【解析】$f(0)=a$，当 $x>0$ 时，$f(x)\ge 2$，因为 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，故 $a\le 2$．

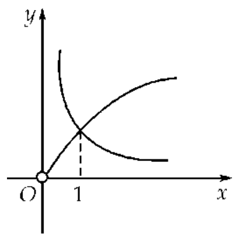
（10）【2014年上海，文10，5分】设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，若 $a_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_3+a_4+\cdots+a_n)$, $q=$_____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】因为无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的极限存在，所以 $|q|<1$，又因为 $a_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_3+a_4+\cdots+a_n)$，

即 $a_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1q^2(1-q^{n-2})}{1-q}$，解得 $q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．

（11）【2014年上海，文11，5分】若 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}$，则满足 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是_____.



【答案】$(0,1)$

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)<0$ 即 $x^{\frac{2}{3}}<x^{-\frac{1}{2}}$，在同一坐标系中作出 $x^{\frac{2}{3}}$、$x^{-\frac{1}{2}}$（$x>0$）

的图象（如图），由图象可知，当 $x\in(0,1)$ 时，$x^{\frac{2}{3}}<x^{-\frac{1}{2}}$.故满足 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 $(0,1)$．

（12）【2014年上海，文12，5分】方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的所有解的和等于____.

【答案】$\dfrac{7\pi}{3}$

【解析】因为 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$，所以 $2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})=1,\sin(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$，因为 $x\in[0,2\pi]$，所以

$x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}]$，所以由 $\sin(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$ 可得 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}$ 或 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{13\pi}{6}$，解得

$x_1=\dfrac{\pi}{2},x_2=\dfrac{11\pi}{6}$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{11\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{3}$．

（13）【2014年上海，文13，5分】为强化安全意识，某商场拟在未来的连续10天中随机选择3天进行紧急疏散演练，则选择的3天恰好为连续3天的概率是____（结果用最简分数表示）.

【答案】$\dfrac{1}{15}$

【解析】记“选择的3天恰好为连续3天”的概率为P，从10天中选择3天共有C_{10}^{3}种方法，从1

0天中选择连续的3天有8种选择方法，故$P=\dfrac{8}{\mathrm{C}_{10}^{3}}=\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$. .

（14）【2014年上海，文14，5分】已知曲线$C:x=-\sqrt{4-y^2}$，直线$l:x=6$．若对于点$A(m,0)$，存在C上的点P和l上的点Q使得$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$，则$m$的取值范围为____.

【答案】$[2,3]$

【解析】由题意可设$P(-\sqrt{4-{y_p}^2},y_p),Q(6,y_Q)$（$-2\leqslant y_P\leqslant 2$），又因为$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$，所以点$P$、$A$、$Q$在一条直线上，且$A$点为线段$PQ$的中点．所以，$2m=-\sqrt{4-{y_P}^2}+6$，又$-2\leqslant y_P\leqslant 2$，所以$m\in[2,3]$．

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）考生应在答题纸相应编号位置填涂，每题只有一个正确选项，选对得5分，否则一律得零分．

（15）【2014年上海，文15，5分】设$a,b\in\mathbf{R}$，则“$a+b>4$”是“$a>2$且$b>2$”的（　）

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件　　（C）充要条件　　（D）既非充分也非必要条件

【答案】B

【解析】由$a+b>4$不能推出$a>2$且$b>2$，如$a=1,b=6$满足$a+b>4$，但不能满足$a>2$且$b>2$；如果$a>2$且$b>2$，由不等式的性质可得$a+b>4$；故“$a+b>4$”是“$a>2$且$b>2$”的必要非充分条件，故选B.

（16）【2014年上海，文16，5分】已知互异的复数a,b满足$ab\neq 0$，集合$\{a,b\}=\{a^2,b^2\}$，则$a+b=$（　）

（A）2　　（B）1　　（C）0　　（D）-1

【答案】D

【解析】（1）当$a=a^2,b=b^2$时，a,b可看作是$x=x^2$的根，此时$ab=0$与$ab\neq 0$矛盾，故舍去；

（2）当$a=b^2,b=a^2$时，可得$a+b=b^2+a^2$，（*）因为$a=b^2$，所以$a^2=b^4$，所以（*）即为$b^2+b=b^2+b^4$，即$b(b^3-1)=0$，所以$b=0$或$b^3=1$，此时

$b=0$,或$b=1$,或$b=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；

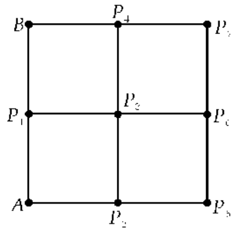
①当$b=0$时，$a=0$，$ab=0$与$ab\neq 0$矛盾且不满足集合的互异性，故舍去；

②当$b=1$时，$a=1,ab\neq 0$，但此时不能满足集合的互异性，故舍去；

③当$b=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$时，$a=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$ab\neq 0$且满足集合的互异性，符合题意，此时$a+b=-1$；

④当$b=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$时，$a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$ab\neq 0$且满足集合的互异性，符合题意，此时$a+b=-1$；

综上所述，$a+b=-1$.，故选D.

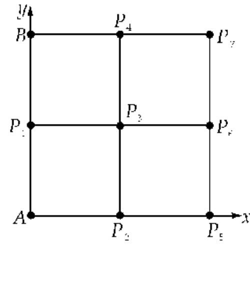


（17）【2014年上海，文17，5分】如图，四个边长为1的小正方形排成一个大正方形，AB是大正方形的一条边，$P_i(i=1,2,3,\cdots,7)$是小正方形的其余顶点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots,7)$的不同值的个数为（　）

（A）7　　（B）5　　（C）3　　（D）1

【答案】C

【解析】如图，以点A为原点，建立坐标系，则



$A(0,0),B(0,2),P_1(0,1),P_2(1,0),P_3(1,1),P_4(1,2),P_5(2,0),$

$P_6(2,1),P_7(2,2)$，故

$\overrightarrow{AB}=(0,2),\overrightarrow{AP_1}=(0,1),\overrightarrow{AP_2}=(1,0),\overrightarrow{AP_3}=(1,1),\overrightarrow{AP_4}=(1,2),\overrightarrow{AP_5}=(2,0),$

$\overrightarrow{AP_7}=(2,2)$，通过计算可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots,7)$ 的值有0,2,4,共3个，故选C．

（18）【2014年上海，文18，5分】已知 $P_1(a_1,b_1)$ 与 $P_2(a_2,b_2)$ 是直线 $y=kx+1$（k 为常数）上两个不同的点，则关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\a_2x+b_2y=1\end{cases}$ 的解的情况是（　）

（A）无论 k、P_1、P_2 如何，总是有解　　（B）无论 k、P_1、P_2 如何，总有唯一解

（C）存在 k、P_1、P_2，使之恰有两解　　（D）存在 k、P_1、P_2，使之有无穷多解

【答案】B

【解析】解法一：

由已知得 $\begin{cases}ka_1+1=b_1\\ka_2+1=b_2\end{cases}$，代入 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\a_2x+b_2y=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1x+(ka_1+1)y=1\\a_2x+(ka_2+1)y=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-k\\y=1\end{cases}$，即直线 $a_1x+b_1y=1$ 与 $a_2x+b_2y=1$ 恒交于点 $(-k,1)$（k 为常数），故选B．

解法二：

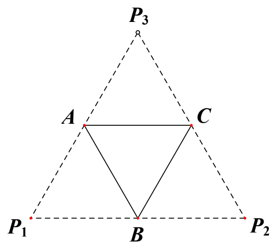
由已知条件 $b_1=ka_1+1$，$b_2=ka_2+1$，$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$

$=a_1(ka_2+1)-a_2(ka_1+1)=a_1-a_2\neq 0$，

$\therefore$有唯一解，故选B．

三、解答题（本题共5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤．

（19）【2014年上海，文19，12分】底面边长为2的正三棱锥 $P-ABC$，其表面展开图是三角形 $P_1P_2P_3$，如图．求 $\Delta P_1P_2P_3$ 的各边长及此三棱锥的体积 V．



解：根据题意可得 P_1,B,P_2 共线，$\because \angle ABP_1=\angle BAP_1=\angle CBP_2$，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore \angle ABP_1=\angle BAP_1=\angle CBP_2=60^\circ$，$\therefore \angle P_1=60^\circ$，同理 $\angle P_2=\angle P_3=60^\circ$，$\therefore \Delta P_1P_2P_3$ 是等边三角形，$P-ABC$ 是正四面体，所以 $\Delta P_1P_2P_3$ 边长为4；$\therefore V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times AB^3=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

（20）【2014年上海，文20，14分】设常数 $a\geq 0$，函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$．

（1）若 $a=4$，求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$；

（2）根据 a 的不同取值，讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性，并说明理由．

解：（1）$\because a=4$，$\therefore f(x)=\dfrac{2^x+4}{2^x-4}=y$，$\therefore 2^x=\dfrac{4y+4}{y-1}$，$\therefore x=\log_2\dfrac{4y+4}{y-1}$，

$\therefore y=f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{4x+4}{x-1}$，$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$．　　……6分

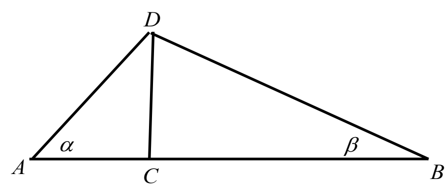
（2）当 $a=0$ 时，$f(x)=1$，定义域为 $\mathbf{R}$，故函数 $y=f(x)$ 是偶函数；当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$ 定义域为

$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}=-\dfrac{2^x+1}{2^x-1}=-f(x)$，故函数 $y=f(x)$ 是奇函数；

当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，

$(-\infty,\log_2 a)\cup(\log_2 a,+\infty)$ 关于原点不对称，故函数 $y=f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数．……14分

（21）【2014年上海，文21，14分】如图，某公司要在 A、B 两地连线



上的定点C处建造广告牌CD，其中D为顶端，AC长35米，CB长80米． 设点A、B在同一水平面上，从A和B看D的仰角分别为α和β．

（1）设计中CD是铅垂方向．若要求$\alpha \geq 2\beta$，问CD的长至多为多少（结果精确到0.01米）？

（2）施工完成后，CD与铅垂方向有偏差．现在实测得$\alpha = 38.12°$，$\beta = 18.45°$，求CD的长（结果精确到0.01米）．

解：（1）设CD的长为x米，则$\tan\alpha = \dfrac{x}{35}, \tan\beta = \dfrac{x}{80}$，$\because \dfrac{\pi}{2} > \alpha \geq 2\beta > 0$，

$\therefore \tan\alpha \geq \tan 2\beta$，$\therefore \tan\alpha \geq \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$，

$\therefore \dfrac{x}{35} \geq \dfrac{2\dfrac{x}{80}}{1-\dfrac{x^2}{6400}} = \dfrac{160x}{6400-x^2}$，解得$0 < x \leq 20\sqrt{2} \approx 28.28$，$\therefore CD$的长至多为28.28米． ……6分

（2）设$DB = a, DA = b, DC = m$，$\angle ADB = 180° - \alpha - \beta = 123.43°$，则$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，

解得$a = \dfrac{115\sin 38.12°}{\sin 123.43°} \approx 85.06 \therefore m = \sqrt{80^2 + a^2 - 160a\cos 18.45°} \approx 26.93 \therefore CD$的长为26.93米．……14分

（22）【2014年上海，文22，16分】在平面直角坐标系xOy中，对于直线$l: ax+by+c=0$和点$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$，记$\eta = (ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)$． 若$\eta < 0$，则称点$P_1, P_2$被直线$l$分隔． 若曲线$C$与直线$l$没有公共点，且曲线$C$上存在点$P_1, P_2$被直线$l$分隔，则称直线$l$为曲线$C$的一条分隔线．

（1）求证：点$A(1, 2), B(-1, 0)$被直线$x+y-1=0$分隔；

（2）若直线$y = kx$是曲线$x^2 - 4y^2 = 1$的分隔线，求实数k的取值范围；

（3）动点M到点$Q(0, 2)$的距离与到y轴的距离之积为1，设点M的轨迹为曲线E，求E的方程，并证明y轴为曲线E的分隔线．

解：（1）将$A(1,2), B(-1,0)$分别代入$x+y-1$，得$(1+2-1)\times(-1-1) = -4 < 0$，

$\therefore$点$A(1,2), B(-1,0)$被直线$x+y-1=0$分隔． ……3分

（2）直线$y = kx$与曲线$x^2-4y^2=1$有公共点的充要条件是方程组$\begin{cases} y = kx \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}$有解，即$|k| < \dfrac{1}{2}$．

因为直线$y = kx$是曲线$x^2-4y^2=1$的分隔线，故它们没有公共点，即$|k| \geq \dfrac{1}{2}$．

当$|k| \geq \dfrac{1}{2}$时，对于直线$y = kx$，曲线$x^2-4y^2=1$上的点$(-1,0)$和$(1,0)$满足$\eta = -k^2 < 0$，即点$(-1,0)$和$(1,0)$被$y = kx$分隔．故实数k的取值范围是$(-\infty, -\dfrac{1}{2}] \cup [\dfrac{1}{2}, +\infty)$．

……9分

（3）设M的坐标为(x, y)，则曲线E的方程为$\sqrt{x^2+(y-2)^2}\cdot|x| = 1$，即$[x^2+(y-2)^2]\cdot x^2 = 1$．

对任意的y_0，$(0, y_0)$不是上述方程的解，即y轴与曲线E没有公共点．又曲线E上的

点 $(-1,2)$和$(1,2)$ 对于

y 轴满足 $\eta<0$，即点 $(-1,2)$和$(1,2)$ 被y轴分隔．所以y轴为曲线E的分割线．

……16分

（23）【2014年上海，文23，18分】已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{1}{3}a_n \le a_{n+1} \le 3a_n$， $n\in \mathbf{N}^*$， $a_1=1$．

（1）若 $a_2=2$，$a_3=x$，$a_4=9$，求 x 的取值范围；

（2）若$\{a_n\}$是等比数列，且 $a_m=\frac{1}{1000}$，求正整数 m 的最小值，以及 m 取最小值时相应$\{a_n\}$的公比；

（3）若 $a_1,a_2,\cdots a_{100}$ 成等差数列，求数列 $a_1,a_2,\cdots a_{100}$ 的公差的取值范围．

解：（1）依题意，$\frac{1}{3}a_2 \le a_3 \le 3a_2$，$\therefore \frac{2}{3}\le x\le 6$，又$\frac{1}{3}a_3 \le a_4 \le 3a_3$，$\therefore 3\le x\le 27$，综上可得 $3\le x\le 6$．……3分

（2）设$\{a_n\}$的公比为q．由$\frac{1}{3}a_n \leqslant 3a_n$，且 $a_n=a_1q^{n-1}\ne 0$，得 $a_n>0$．因为

$\frac{1}{3}a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 3a_n$，所以$\frac{1}{3}\leqslant q\leqslant 3$．

从而$\frac{1}{1000}=a_1q^{m-1}=q^{m-1}\geqslant(\frac{1}{3})^{m-1}$，$3^{m-1}\geqslant 1000$，解得$m\geqslant 8$． $m=8$时，

$q=\sqrt[7]{\frac{1}{1000}}\in[\frac{1}{3},3]$．

所以，m 的最小值为8， $m=8$时，$\{a_n\}$的公比为$\frac{\sqrt[7]{10^4}}{10}$．

……9分

（3）设数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 的公差为d．则$\frac{1}{3}a_n \leqslant a_n+d \leqslant 3a_n$，$-\frac{2}{3}a_n \leqslant d \leqslant 2a_n$，$n=1,2,\cdots,99$，

①当 $d>0$ 时， $a_{99}>a_{98}>\cdots>a_2>a_1$，所以 $0<d\leqslant 2a_1$，即 $0<d\leqslant 2$．

②当 $d=0$ 时， $a_{99}=a_{98}=\cdots=a_2=a_1$，符合条件．

③当 $d<0$ 时， $a_{99}<a_{98}<\cdots<a_2<a_1$，所以$-\frac{2}{3}a_{99}\leqslant d\leqslant 2a_{99}$，

$-\frac{2}{3}(1+98d)\leqslant d\leqslant 2(1+98d)$，又 $d<0$，

所以$-\frac{2}{199}\leqslant d<0$．

综上，$a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 的公差的取值范围为$[-\frac{2}{199},2]$．……18分