2013 年浙江省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5 分）（2013•浙江）已知 i 是虚数单位，则（﹣1+i）（2﹣i）=（　　）

A．﹣3+i　　B．﹣1+3i　　C．﹣3+3i　　D．﹣1+i

考点：　复数代数形式的乘除运算．

专题：　计算题．

分析：　直接利用两个复数代数形式的乘法法则，以及虚数单位 i 的幂运算性质，运算求得结果．

解答：　解：（﹣1+i）（2﹣i）=﹣2+i+2i+1=﹣1+3i，

故选 B．

点评：　本题主要考查两个复数代数形式的乘法，虚数单位 i 的幂运算性质，属于基础题．

2．（5 分）（2013•浙江）设集合 S={x|x＞﹣2}，T={x|x^2+3x﹣4≤0}，则（$\complement_R S$）∪T=（　　）

A．（﹣2，1]　　B．（﹣∞，﹣4]　　C．（﹣∞，1]　　D．[1，+∞）

考点：　交、并、补集的混合运算．

分析：　先根据一元二次不等式求出集合 T，然后求得$\complement_R S$，再利用并集的定义求出结果．

解答：　解：∵集合 S={x|x＞﹣2}，

∴$\complement_R S$={x|x≤﹣2}

由 x^2+3x﹣4≤0 得：T={x|﹣4≤x≤1}，

故（$\complement_R S$）∪T={x|x≤1}

故选 C．

点评：　此题属于以一元二次不等式的解法为平台，考查了补集及并集的运算，是高考中常考的题型．在求补集时注意全集的范围．

3．（5 分）（2013•浙江）已知 x，y 为正实数，则（　　）

A．$2^{\lg x+\lg y}=2^{\lg x}+2^{\lg y}$　　B．$2^{\lg(x+y)}=2^{\lg x}\bullet 2^{\lg y}$

C．$2^{\lg x\bullet \lg y}=2^{\lg x}+2^{\lg y}$　　D．$2^{\lg(xy)}=2^{\lg x}\bullet 2^{\lg y}$

考点：　有理数指数幂的化简求值；对数的运算性质．

专题：　计算题．

分析：　直接利用指数与对数的运算性质，判断选项即可．

解答：　解：因为 $a^{s+t}=a^s\bullet a^t$，lg（xy）=lgx+lgy（x，y 为正实数），

所以 $2^{\lg(xy)}=2^{\lg x+\lg y}=2^{\lg x}\bullet 2^{\lg y}$，满足上述两个公式，

故选 D．

点评：　本题考查指数与对数的运算性质，基本知识的考查．

4．（5 分）（2013•浙江）已知函数 f（x）=Acos（ωx+ϕ）（A＞0，ω＞0，ϕ∈R），则"f（x）是奇函数"是"$\phi=\frac{\pi}{2}$"的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

考点：　必要条件、充分条件与充要条件的判断．

专题：　三角函数的图像与性质．

分析：　$\phi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=A\cos(\omega x+\frac{\pi}{2})\Rightarrow f(x)=A\sin(\omega x)(A>0,\omega>0,x\in R)$是奇函数．f（x）为奇函数⇒$f(0)=0\Rightarrow\phi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，k∈Z．所以“f（x）是奇函数”是“$\phi=\frac{\pi}{2}$”必要不充分条件．

解答：　解：若 $\phi=\frac{\pi}{2}$，

则 $f(x)=A\cos(\omega x+\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f(x)=A\sin(\omega x)(A>0,\omega>0,x\in R)$是奇函数；

若 f（x）是奇函数，

$\Rightarrow f(0)=0$，

$\therefore f(0)=A\cos(\omega\times 0+\phi)=A\cos\phi=0$．

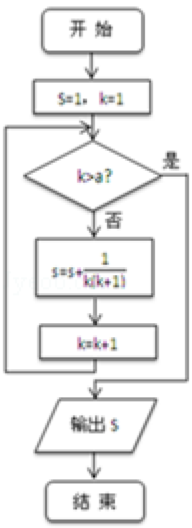
$\therefore\phi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，k∈Z，不一定有 $\phi=\frac{\pi}{2}$

“f（x）是奇函数”是“$\phi=\frac{\pi}{2}$”必要不充分条件．

故选 B．

点评：　本题考查充分条件、必要条件和充要条件的判断，解题时要认真审题，仔细解答，注意三角函数性质的灵活运用．

5．（5 分）（2013•浙江）某程序框图如图所示，若该程序运行后输出的值是$\frac{9}{5}$，则（　　）



A．a=4　　　　B．a=5　　　　C．a=6　　　　D．a=7

考点：　程序框图．

专题：　图表型．

分析：　根据已知流程图可得程序的功能是计算 $S=1+\frac{1}{1\times 2}+\ldots+\frac{1}{a(a+1)}$的值，利用裂项相消法易得答案．

解答：　解：由已知可得该程序的功能是

计算并输出 $S=1+\frac{1}{1\times 2}+\ldots+\frac{1}{a(a+1)}=1+1-\frac{1}{a+1}=2-\frac{1}{a+1}$．

若该程序运行后输出的值是$\frac{9}{5}$，则 $2-\frac{1}{a+1}=\frac{9}{5}$．

$\therefore a=4$，

故选 A．

点评： 本题考查的知识点是程序框图，其中分析出程序的功能是解答的关键．

6．（5 分）（2013•浙江）已知 $\alpha\in R$，$\sin\alpha+2\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}$，则 tan2α=（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$-\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{4}{3}$

考点： 二倍角的正切；同角三角函数间的基本关系．

专题： 三角函数的求值．

分析： 由题意结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可解得 sinα，和 cosα，进而可得 tanα，再代入二倍角的正切公式可得答案．

解答： 解：$\because\sin\alpha+2\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

联立解得 $\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}\\ \cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{cases}$，或 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}\\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}\end{cases}$

故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{3}$，或 tanα=3，

代入可得 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{3}{4}$，

或 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times3}{1-3^2}=-\frac{3}{4}$

故选 C

点评： 本题考查二倍角的正切公式，涉及同角三角函数的基本关系，属中档题．

7．（5 分）（2013•浙江）设△ABC，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 则（　　）

A．∠ABC=90°　　B．∠BAC=90°　　C．AB=AC　　D．AC=BC

考点： 平面向量数量积的运算．

专题： 计算题；平面向量及应用．

分析： 以 AB 所在的直线为 x 轴，以 AB 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系，设 AB=4，C（a，b），P（x，0），然后由题意可写出 $\overrightarrow{P_0B}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{P_0C}$，然后由 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 结合向量的数量积的 坐标表示可得关于 x 的二次不等式，结合二次不等式的知识可求 a，进而可判断

解答： 解：以 AB 所在的直线为 x 轴，以 AB 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系，设 AB=4，C（a，b），P（x，0）

则 $BP_0=1$，A（﹣2，0），B（2，0），P_0（1，0）

$\therefore\overrightarrow{P_0B}=$（1，0），$\overrightarrow{PB}=$（2﹣x，0），$\overrightarrow{PC}=$（a﹣x，b），$\overrightarrow{P_0C}=$（a﹣1，b）

$\because$恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$

∴（2﹣x）（a﹣x）≥a﹣1 恒成立

整理可得 $x^2-(a+2)x+a+1\geq0$ 恒成立

$\therefore\triangle=(a+2)^2-4(a+1)\leq0$

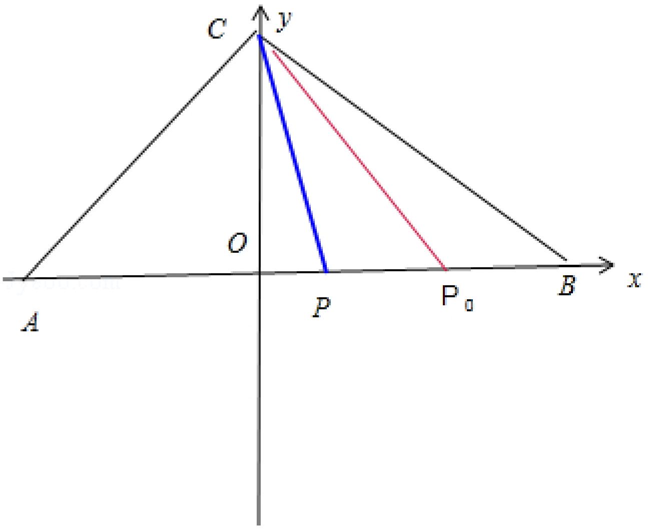
即$\triangle=a^2\leq 0$

∴a=0，即 C 在 AB 的垂直平分线上

∴AC=BC

故△ABC 为等腰三角形

故选 D



点评：本题主要考查了平面向量的运算，向量的模及向量的数量积的概念，向量运算的几何意义的应用，还考查了利用向量解决简单的几何问题的能力

8．（5 分）（2013•浙江）已知 e 为自然对数的底数，设函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^k$（k=1，2），则（　　）

A．当 k=1 时，f（x）在 x=1 处取得极小值　　B．当 k=1 时，f（x）在 x=1 处取得极大值

C．当 k=2 时，f（x）在 x=1 处取得极小值　　D．当 k=2 时，f（x）在 x=1 处取得极大值

考点：函数在某点取得极值的条件．

专题：导数的综合应用．

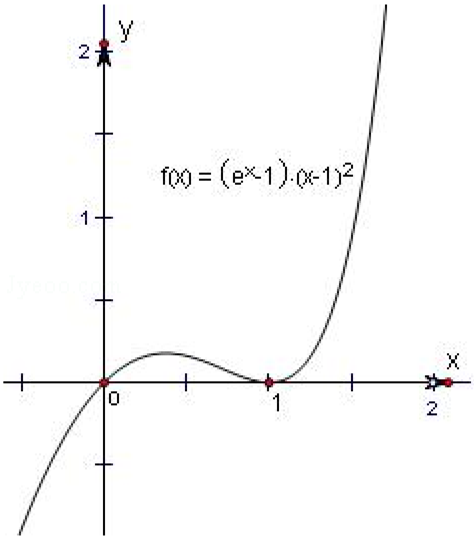
分析：通过对函数 f（x）求导，根据选项知函数在 x=1 处有极值，验证 f'（1）=0，再验证 f（x）在 x=1 处取得极小值还是极大值即可得结论．

解答：解：当 k=2 时，函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^2$．

求导函数可得 $f'(x)=e^x(x-1)^2+2(e^x-1)(x-1)=(x-1)(xe^x+e^x-2)$，∴当 x=1，f'（x）=0，且当 x >1 时，f'（x）>0，当$\frac{1}{2}<x<1$时，f'（x）<0，故函数 f（x）在（1，+∞）上是增函数；

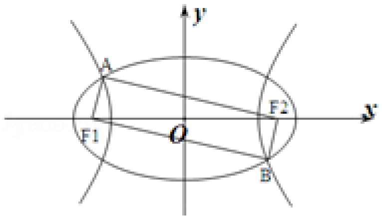
在（$\frac{1}{2}$，1）上是减函数，从而函数 f（x）在 x=1 取得极小值．对照选项．

故选 C．



点评：本题考查了函数的极值问题，考查学生的计算能力，正确理解极值是关键．

9．（5分）（2013•浙江）如图 F_1、F_2 是椭圆 C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C2 的公共焦点 A、B 分别是 C_1、C_2 在第二、四象限的公共点，若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率是（　　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

考点：椭圆的简单性质．

专题：计算题；压轴题；圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析：

不妨设$|AF_1|=x$，$|AF_2|=y$，依题意$\begin{cases}x+y=4\\x^2+y^2=12\end{cases}$，解此方程组可求得 x，y 的值，利用双曲线的定义及性质即可求得 C_2 的离心率．

解答：

解：设$|AF_1|=x$，$|AF_2|=y$，∵点 A 为椭圆 C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的点，

∴$2a=4$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$；

∴$|AF_1|+|AF_2|=2a=4$，即 $x+y=4$；①

又四边形 AF_1BF_2 为矩形，

∴$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即 $x^2+y^2=(2c)^2=(2\sqrt{3})^2=12$，②

由①②得：$\begin{cases}x+y=4\\x^2+y^2=12\end{cases}$，解得 $x=2-\sqrt{2}$，$y=2+\sqrt{2}$，设双曲线 C_2 的实轴长为 2a，焦距为 2c，

则 $2a=$，$|AF_2|-|AF_1|=y-x=2\sqrt{2}$，$2c=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$，

∴双曲线 C_2 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$．

故选 D．

点评：本题考查椭圆与双曲线的简单性质，求得$|AF_1|$与$|AF_2|$是关键，考查分析与运算能力，属于中档题．

10．（5分）（2013•浙江）在空间中，过点 A 作平面 π 的垂线，垂足为 B，记 $B=f_\pi(A)$．设 α，β 是两个不同的平面，对空间任意一点 P，$Q_1=f_\beta[f_\alpha(P)]$，$Q_2=f_\alpha[f_\beta(P)]$，恒有 $PQ_1=PQ_2$，则（　　）

A．平面 α 与平面 β 垂直

B．平面 α 与平面 β 所成的（锐）二面角为 45°

C．平面 α 与平面 β 平行

D．平面 α 与平面 β 所成的（锐）二面角为 60°

考点：空间中直线与平面之间的位置关系；平面与平面之间的位置关系；二面角的平面角及求法．

专题：证明题；压轴题；空间位置关系与距离．

分析：设 P_1 是点 P 在 α 内的射影，点 P_2 是点 P 在 β 内的射影．根据题意点 P_1 在 β 内的射影与 P_2 在 α 内的射影重合于一点，由此可得四边形 $PP_1Q_1P_2$ 为矩形，且$\angle P_1Q_1P_2$ 是二面角 α－l－β 的平面角，根据面面垂直的定义可得平面 α 与平面 β 垂直，得到本题答案．

解答：　解：设 $P_1=f_\alpha$（P），则根据题意，得点 P_1 是过点 P 作平面 α 垂线的垂足

∵$Q_1=f_\beta[f_\alpha$（P）$]=f_\beta$（P_1），

∴点 Q_1 是过点 P_1 作平面 β 垂线的垂足

同理，若 $P_2=f_\beta$（P），得点 P_2 是过点 P 作平面 β 垂线的垂足

因此 $Q_2=f_\alpha[f_\beta$（P）$]$表示点 Q_2 是过点 P_2 作平面 α 垂线的垂足

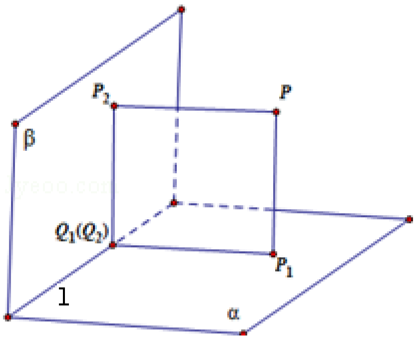
∵对任意的点 P，恒有 $PQ_1=PQ_2$，

∴点 Q_1 与 Q_2 重合于同一点

由此可得，四边形 $PP_1Q_1P_2$ 为矩形，且$\angle P_1Q_1P_2$ 是二面角 α－l－β 的平面角

∵$\angle P_1Q_1P_2$ 是直角，∴平面 α 与平面 β 垂直

故选：A



点评：　本题给出新定义，要求我们判定平面 α 与平面 β 所成角大小，着重考查了线面垂直性质、二面角的平面角和面面垂直的定义等知识，属于中档题.

二、填空题：本大题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分.

11.（4 分）（2013•浙江）设二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$的展开式中常数项为 A，则 A=＿－10＿.

考点：　二项式系数的性质.

专题：　计算题.

分析：　先求出二项式展开式的通项公式，再令 x 的系数等于 0，求得 r 的值，即可求得展开式中的常数项的值.

解答：

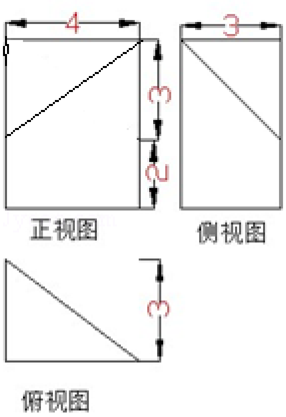
解：二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot x^{\frac{5-r}{2}}\cdot(-1)^r\cdot x^{\frac{-r}{3}}=(-1)^r\cdot C_5^r\cdot x^{\frac{15-5r}{6}}$.

令$\frac{15-5r}{6}=0$，解得 r=3，故展开式的常数项为 $-C_5^3=-10$，

故答案为－10.

点评：　本题主要考查二项式定理的应用，二项式展开式的通项公式，求展开式中某项的系数，属于中档题.

12.（4 分）（2013•浙江）若某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则此几何体的体积等于＿24＿ cm^3.



考点： 由三视图求面积、体积．

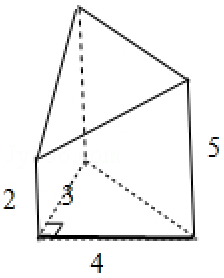
专题： 计算题．

分析： 先根据三视图判断几何体的形状，再利用体积公式计算即可．

解答： 解：几何体为三棱柱去掉一个三棱锥后的几何体，底面是直角三角形，直角边分别为 3，4，棱柱的高为 5，被截取的棱锥的高为 3．如图：

$V=V_{棱柱}-V_{三棱锥}=\frac{1}{2}\times3\times4\times5-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times3=24$（$cm^3$）

故答案为：24



点评： 本题考查几何体的三视图及几何体的体积计算．$V_{椎体}=\frac{1}{3}Sh$，$V_{柱体}=Sh$．考查空间想象能力．

13．（4 分）（2013•浙江）设 z=kx+y，其中实数 x，y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant0\\x-2y+4\geqslant0\\2x-y-4\leqslant0\end{cases}$，若 z 的最大值为 12，则实数 k=__2__．

考点： 简单线性规划．

专题： 不等式的解法及应用．

分析： 先画出可行域，得到角点坐标．再对 k 进行分类讨论，通过平移直线 z=kx+y 得到最大值点 A，即可得到答案．

解答： 解：可行域如图：

由 $\begin{cases}x-2y+4=0\\2x-y-4=0\end{cases}$ 得：A（4，4），

同样地，得 B（0，2），

①当 $k>-\frac{1}{2}$时，目标函数 z=kx+y 在 x=4，y=4 时取最大值，即直线 z=kx+y 在 y 轴上的截距 z 最大，

此时，12=4k+4，

故 k=2．

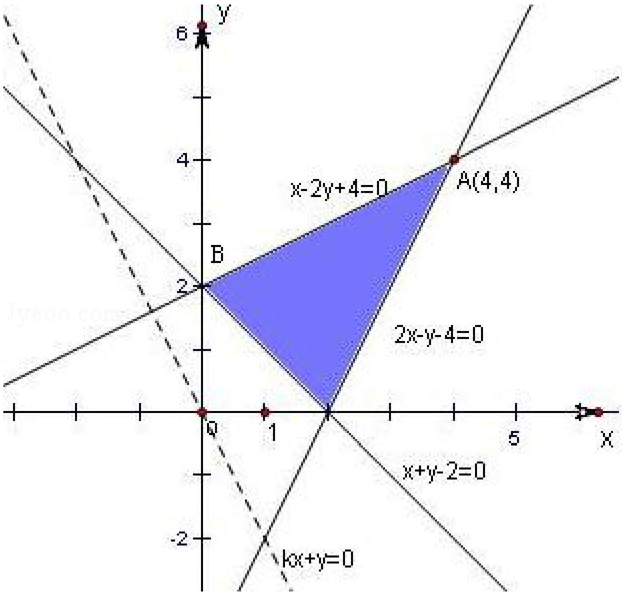
②当 $k\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，目标函数 z=kx+y 在 x=0，y=2 时取最大值，即直线 z=kx+y 在 y 轴上的截距 z 最大，

此时，12=0×k+2，

故 k 不存在.

综上，k=2.

故答案为：2.



点评： 本题主要考查简单线性规划．解决此类问题的关键是正确画出不等式组表示的可行域，将目标函数赋予几何意义．

14.（4 分）（2013•浙江）将 A，B，C，D，E，F 六个字母排成一排，且 A，B 均在 C 的同侧，则不同的排法共有 ___480___ 种（用数字作答）

考点： 排列、组合及简单计数问题．

专题： 概率与统计．

分析： 按 C 的位置分类，在左 1，左 2，左 3，或者在右 1，右 2，右 3，因为左右是对称的，所以只看左的情况最后乘以 2 即可．

解答： 解：按 C 的位置分类，在左 1，左 2，左 3，或者在右 1，右 2，右 3，

因为左右是对称的，所以只看左的情况最后乘以 2 即可．

当 C 在左边第 1 个位置时，有 A_5^5，

当 C 在左边第 2 个位置时 $A_4^2A_3^3$，

当 C 在左边第 3 个位置时，有 $A_3^2A_3^3+A_2^2A_3^3$，

共为 240 种，乘以 2，得 480．则不同的排法共有 480 种．

故答案为：480．

点评： 本题考查排列、组合的应用，关键在于明确事件之间的关系，同时要掌握分类讨论的处理方法．

15.（4 分）（2013•浙江）设 F 为抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过点 P（﹣1，0）的直线 l 交抛物线 C 于两点 A，B，点 Q 为线段 AB 的中点，若|FQ|=2，则直线 l 的斜率等于___不存在___．

考点： 直线与圆锥曲线的关系；直线的斜率．

专题： 圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析：由题意设直线 l 的方程为 $my=x+1$，联立$\begin{cases}my=x+1\\y^2=4x\end{cases}$得到 $y^2-4my+4=0$，$\triangle=16m^2-16=16(m^2-1)>0$．设 A（$x_1$，$y_1$），B（$x_2$，$y_2$），Q（$x_0$，$y_0$）．利用根与系数的关系可得 $y_1+y_2=4m$，利用中点坐标公式可得 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$，$x_0=my_0-1=2m^2-1$．Q（$2m^2-1$，$2m$），由抛物线 C：$y^2=4x$ 得焦点 F（1，0）．再利用两点间的距离公式即可得出 m 及 k，再代入△判断是否成立即可．

解答：解：由题意设直线 l 的方程为 $my=x+1$，联立$\begin{cases}my=x+1\\y^2=4x\end{cases}$得到 $y^2-4my+4=0$，$\triangle=16m^2-16=16(m^2-1)>0$．

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），Q（x_0，y_0）．

$\therefore y_1+y_2=4m$，$\therefore y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$，$\therefore x_0=my_0-1=2m^2-1$．

$\therefore$Q（$2m^2-1$，$2m$），

由抛物线 C：$y^2=4x$ 得焦点 F（1，0）．

$\because |QF|=2$，$\therefore \sqrt{(2m^2-2)^2+(2m)^2}=2$，化为 $m^2=1$，解得 $m=\pm1$，不满足$\triangle>0$．

故满足条件的直线 l 不存在．

故答案为不存在．

点评：本题综合考查了直线与抛物线的位置关系与△的关系、根与系数的关系、中点坐标关系、两点间的距离公式等基础知识，考查了推理能力和计算能力．

16．（4 分）（2013•浙江）△ABC 中，∠C=90°，M 是 BC 的中点，若 $\sin\angle BAM=\frac{1}{3}$，则 sin∠BAC=__$\frac{\sqrt{6}}{3}$__．

考点：正弦定理．

专题：压轴题；解三角形．

分析：作出图象，设出未知量，在△ABM 中，由正弦定理可得 $\sin\angle AMB=\frac{2c}{3a}$，进而可得 $\cos\beta=\frac{2c}{3a}$，在 RT△ACM 中，还可得 $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2+b^2}}$，建立等式后可得 $a=\sqrt{2}b$，再由勾股定理可得 $c=\sqrt{3}b$，而 $\sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}$，代入化简可得答案．

解答：解：如图

设 AC=b，AB=c，$CM=MB=\frac{a}{2}$，∠MAC=β，

在△ABM 中，由正弦定理可得$\frac{\frac{a}{2}}{\sin\angle BAM}=\frac{c}{\sin\angle AMB}$，

代入数据可得$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{c}{\sin\angle AMB}$，解得 $\sin\angle AMB=\frac{2c}{3a}$，

故 $\cos\beta=\cos(\frac{\pi}{2}-\angle AMC)=\sin\angle AMC=\sin(\pi-\angle AMB)=\sin\angle AMB=\frac{2c}{3a}$，

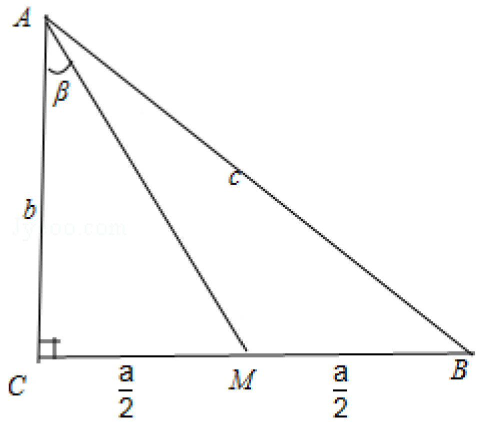
而在 RT△ACM 中，$\cos\beta=\frac{AC}{AM}=\frac{b}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2+b^2}}$，

故可得$\frac{b}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2+b^2}}=\frac{2c}{3a}$，化简可得 $a^4-4a^2b^2+4b^4=(a^2-2b^2)=0$，

解之可得 $a=\sqrt{2}b$，再由勾股定理可得 $a^2+b^2=c^2$，联立可得 $c=\sqrt{3}b$，

故在 RT△ABC 中，$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}b}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$



点评： 本题考查正弦定理的应用，涉及三角函数的诱导公式以及勾股定理的应用，属中档题．

17．（4 分）（2013•浙江）设$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$为单位向量，非零向量$\overrightarrow{b}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，x、y∈R．若$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$的夹角为 30°，则$\frac{|x|}{|\overrightarrow{b}|}$的最大值等于__2__．

考点： 数量积表示两个向量的夹角．

专题： 压轴题；平面向量及应用．

分析：

由题意求得 $\overrightarrow{e_1}\bullet\overrightarrow{e_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{\overrightarrow{b}^2}=\sqrt{x^2+\sqrt{3}xy+y^2}$，从而可得 $\frac{|x|}{|\overrightarrow{b}|}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+\sqrt{3}xy+y^2}}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+\sqrt{3}xy+y^2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}}}$，再利用二次函数的性质求得$\frac{|x|}{|\overrightarrow{b}|}$的最大值．

解答：

解：∵$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ 为单位向量，$\overrightarrow{e_1}$和$\overrightarrow{e_2}$的夹角等于 30°，∴$\overrightarrow{e_1}\bullet\overrightarrow{e_2}=1\times1\times\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

∵非零向量$\overrightarrow{b}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，∴$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{\overrightarrow{b}^2}=\sqrt{x^2+2xy\overrightarrow{e_1}\bullet\overrightarrow{e_2}+y^2}=\sqrt{x^2+\sqrt{3}xy+y^2}$，

∴$\frac{|x|}{|\overrightarrow{b}|}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+\sqrt{3}xy+y^2}}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+\sqrt{3}xy+y^2}}=\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{3}\bullet\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2}}=\sqrt{\frac{1}{(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}}}$，

故当$\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\frac{|x|}{|\overrightarrow{b}|}$取得最大值为 2，

故答案为 2．

点评： 本题主要考查两个向量的数量积的运算，求向量的模，利用二次函数的性质求函数的最大值，属于中档题．

三、解答题：本大题共 5 小题，共 72 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

18．（14 分）（2013•浙江）在公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=10$，且 a_1，$2a_2+2$，$5a_3$ 成等比数列．

（Ⅰ）求 d，a_n；

（Ⅱ） 若 d＜0，求$|a_1|+|a_2|+|a_3|+…+|a_n|$．

考点： 数列的求和；等差数列的通项公式；等比数列的性质．

专题： 等差数列与等比数列．

分析： （Ⅰ）直接由已知条件 $a_1=10$，且 a_1，$2a_2+2$，$5a_3$ 成等比数列列式求出公差，则通项公式 a_n 可求；

（Ⅱ）利用（Ⅰ）中的结论，得到等差数列$\{a_n\}$的前 11 项大于等于 0，后面的项小于 0，所以分类讨论求 d＜0 时$|a_1|+|a_2|+|a_3|+…+|a_n|$的和．

解答： 解：（Ⅰ）由题意得$5a_3\bullet a_1=(2a_2+2)^2$，即$5(a_1+2d)\bullet a_1=(2a_1+2d+2)^2$，整理得

$d^2-3d-4=0$．解得 $d=-1$ 或 $d=4$．

当 $d=-1$ 时，$a_n=a_1+(n-1)d=10-(n-1)=-n+11$．

当 $d=4$ 时，$a_n=a_1+(n-1)d=10+4(n-1)=4n+6$．

所以 $a_n=-n+11$ 或 $a_n=4n+6$；

（Ⅱ）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，因为 d＜0，由（Ⅰ）得 $d=-1$，$a_n=-n+11$．

则当 n≤11 时，$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=S_n=-\frac{1}{2}n^2+\frac{21}{2}n$．

当 n≥12 时，$|a_1|+|a_2|+|a_3|+…+|a_n|=-S_n+2S_{11}=\frac{1}{2}n^2-\frac{21n}{2}+110$．

综上所述，

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+…+|a_n|=\begin{cases}-\frac{1}{2}n^2+\frac{21}{2}n, & n\leqslant 11\\ \frac{1}{2}n^2-\frac{21}{2}n+110, & n\geqslant 12\end{cases}.$$

点评： 本题考查了等差数列、等比数列的基本概念，考查了等差数列的通项公式，求和公式，考查了分类讨论的数学思想方法和学生的运算能力，是中档题．

19．（14 分）（2013•浙江）设袋子中装有 a 个红球，b 个黄球，c 个蓝球，且规定：取出一个红球得 1 分，取出一个黄球 2 分，取出蓝球得 3 分．

（1）当 a=3，b=2，c=1 时，从该袋子中任取（有放回，且每球取到的机会均等）2 个球，记随机变量 ξ 为取出此 2 球所得分数之和．，求 ξ 分布列；

（2）从该袋子中任取（且每球取到的机会均等）1 个球，记随机变量 η 为取出此球所得分数．若$E\eta=\frac{5}{3}$，$D\eta=\frac{5}{9}$，求 a：b：c．

考点： 离散型随机变量及其分布列；离散型随机变量的期望与方差．

专题： 概率与统计．

分析： （1）ξ 的可能取值有：2，3，4，5，6，求出相应的概率可得所求 ξ 的分布列；

（2）先列出 η 的分布列，再利用 η 的数学期望和方差公式，即可得到结论．

解答： 解：（1）由题意得 ξ=2，3，4，5，6，

$P(\xi=2)=\frac{3\times 3}{6\times 6}=\frac{1}{4}$；$P(\xi=3)=\frac{2\times 3\times 2}{6\times 6}=\frac{1}{3}$；$P(\xi=4)=\frac{2\times 3\times 1+2\times 2}{6\times 6}=\frac{5}{18}$；

$P(\xi=5)=\frac{2\times 2\times 1}{6\times 6}=\frac{1}{9}$；$P(\xi=6)=\frac{1\times 1}{6\times 6}=\frac{1}{36}$．

故所求 ξ 的分布列为

ξ	2	3	4	5	6

P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

（2）由题意知 η 的分布列为

η	1	2	3
P	$\frac{a}{a+b+c}$	$\frac{b}{a+b+c}$	$\frac{c}{a+b+c}$

$E\eta=\frac{a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{3c}{a+b+c}=\frac{5}{3}$

$D\eta=(1-\frac{5}{3})^2\frac{a}{a+b+c}+(2-\frac{5}{3})^2\frac{b}{a+b+c}+(3-\frac{5}{3})^2\frac{c}{a+b+c}=\frac{5}{9}$.

得$\begin{cases}2a-b-4c=0\\a+4b-11c=0\end{cases}$，

解得 a=3c，b=2c，

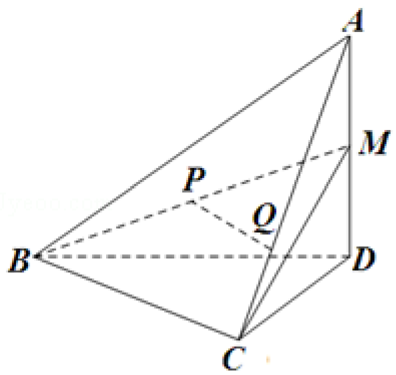
故 a：b：c=3：2：1．

点评：本题主要考查随机事件的概率和随机变量的分布列、数学期望等概念，同时考查抽象概括、运算能力，属于中档题．

20．（15 分）（2013•浙江）如图，在四面体 A﹣BCD 中，AD⊥平面 BCD，$BC\perp CD$，$AD=2$，$BD=2\sqrt{2}$．M 是 AD 的中点，P 是 BM 的中点，点 Q 在线段 AC 上，且 AQ=3QC．

（1）证明：PQ∥平面 BCD；

（2）若二面角 C﹣BM﹣D 的大小为 60°，求∠BDC 的大小．



考点：二面角的平面角及求法；直线与平面平行的判定．

专题：计算题；空间位置关系与距离；空间角．

分析：（1）取 BD 的中点 O，在线段 CD 上取点 F，使得 DF=3CF，连接 OP、OF、FQ．根据平行线分线段成比例定理结合三角形的中位线定理证出四边形 OPQF 是平行四边形，从而 PQ∥OF，再由线面平行判定定理，证出 PQ∥平面 BCD；

（2）过点 C 作 CG⊥BD，垂足为 G，过 G 作 GH⊥BM 于 H，连接 CH．根据线面垂直的判定与性质证出 BM⊥CH，因此∠CHG 是二面角 C﹣BM﹣D 的平面角，可得∠CHG=60°．设∠BDC=θ，用解直角三角形的方法算出 HG 和 CG 关于 θ 的表达式，最后在 Rt△CHG 中，根据正切的定义得出 $\tan\angle CHG=\frac{CG}{GH}=\sqrt{3}$，从而得到 $\tan\theta=\sqrt{3}$，由此可得∠BDC．

解答：（1）取 BD 的中点 O，在线段 CD 上取点 F，使得 DF=3CF，连接 OP、OF、FQ

∵△ACD 中，AQ=3QC 且 DF=3CF，∴QF∥AD 且 $QF=\frac{1}{4}AD$

∵△BDM 中，O、P 分别为 BD、BM 的中点

∴OP∥DM，且 $OP=\frac{1}{2}DM$，结合 M 为 AD 中点得：OP∥AD 且 $OP=\frac{1}{4}AD$

∴OP∥QF 且 OP=QF，可得四边形 OPQF 是平行四边形

∴PQ∥OF

∵PQ⊄平面 BCD 且 OF⊂平面 BCD，∴PQ∥平面 BCD；

（2）过点 C 作 CG⊥BD，垂足为 G，过 G 作 GH⊥BM 于 H，连接 CH

∵AD⊥平面 BCD，CG⊂平面 BCD，∴AD⊥CG

又∵CG⊥BD，AD、BD 是平面 ABD 内的相交直线

∴CG⊥平面 ABD，结合 BM⊂平面 ABD，得 CG⊥BM

∵GH⊥BM，CG、GH 是平面 CGH 内的相交直线

∴BM⊥平面 CGH，可得 BM⊥CH

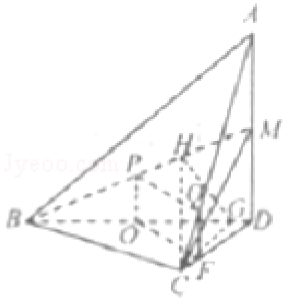
因此，∠CHG 是二面角 C﹣BM﹣D 的平面角，可得∠CHG=60°

设∠BDC=θ，可得

Rt△BCD 中，$CD=BD\cos\theta=2\sqrt{2}\cos\theta$，$CG=CD\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$，$BG=BC\sin\theta=2\sqrt{2}\sin^2\theta$

Rt△BMD 中，$HG=\frac{BG\cdot DM}{BM}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin^2\theta$；Rt△CHG 中，$\tan\angle CHG=\frac{CG}{GH}=\frac{3\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{3}$

∴$\tan\theta=\sqrt{3}$，可得 θ=60°，即∠BDC=60°

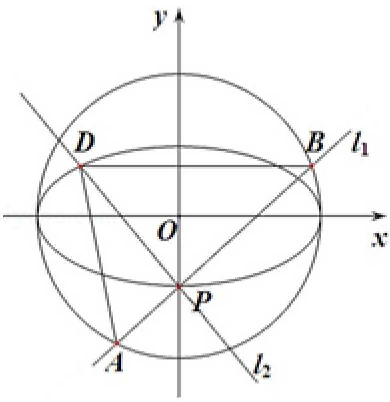


点评： 本题在底面为直角三角形且过锐角顶点的侧棱与底面垂直的三棱锥中求证线面平行，并且在已知二面角大小的情况下求线线角．着重考查了线面平行、线面垂直的判定与性质，解直角三角形和平面与平面所成角求法等知识，属于中档题．

21．（15 分）（2013•浙江）如图，点 P（0，﹣1）是椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的一个顶点，$C_1$ 的长轴是圆 C_2：$x^2+y^2=4$的直径．l_1，l_2 是过点 P 且互相垂直的两条直线，其中 l_1 交圆 C_2 于两点，l_2 交椭圆 C_1 于另一点 D

（1）求椭圆 C_1 的方程；

（2）求△ABD 面积取最大值时直线 l_1 的方程．



考点： 直线与圆锥曲线的关系；椭圆的标准方程．

专题： 综合题；压轴题；圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析： （1）由题意可得 b=1，2a=4，即可得到椭圆的方程；

（2）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），D（x_0，y_0）．由题意可知：直线 l_1 的斜率存在，设为 k，则直线 l_1 的方

程为 $y=kx-1$．利用点到直线的距离公式和弦长公式即可得出圆心 O 到直线 l_1 的距离和弦长|AB|，又 $l_2\perp l_1$，可得直线 l_2 的方程为 $x+kx+k=0$，与椭圆的方程联立即可得到点 D 的横坐标，即可得出|PD|，即可得到三角形 ABD 的面积，利用基本不等式的性质即可得出其最大值，即得到 k 的值．

解答： 解：（1）由题意可得 $b=1$，$2a=4$，即 $a=2$．

∴椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），D（x_0，y_0）．

由题意可知：直线 l_1 的斜率存在，设为 k，则直线 l_1 的方程为 $y=kx-1$．

又圆 C_2：$x^2+y^2=4$ 的圆心 O（0，0）到直线 l_1 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$．

∴$|AB|=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$．

又 $l_2\perp l_1$，故直线 l_2 的方程为 $x+ky+k=0$，联立 $\begin{cases}x+ky+k=0\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，消去 y 得到 $(4+k^2)x^2+8kx=0$，解得

$x_0=-\frac{8k}{4+k^2}$，

∴ $|PD|=\frac{8\sqrt{k^2+1}}{4+k^2}$．

∴三角形 ABD 的面积 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PD|=\frac{8\sqrt{4k^2+3}}{4+k^2}$．

∴ $S=\frac{32}{\sqrt{4k^2+3}+\frac{13}{\sqrt{4k^2+3}}}\leqslant\frac{32}{2\sqrt{\sqrt{4k^2+3}\cdot\frac{13}{\sqrt{4k^2+3}}}}=\frac{16\sqrt{13}}{13}$，当且仅当 $k=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ 时取等号，

故所求直线 l_1 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}x-1$．

点评： 本题主要考查了椭圆的几何性质、直线与圆及椭圆的位置关系等基础知识，同时考查了推理能力和计算能力及分析问题和解决问题的能力．

22．（14 分）（2013•浙江）已知 $a\in R$，函数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点（1，f（1））处的切线方程；

（2）当 $x\in[0,2]$ 时，求|f（x）|的最大值．

考点： 利用导数研究曲线上某点切线方程；利用导数求闭区间上函数的最值．

专题： 压轴题；导数的综合应用．

分析： （1）求出原函数的导函数，求出函数取 $x=1$ 时的导数值及 f（1），由直线方程的点斜式写出切线方程；
（2）求出原函数的导函数，分 $a\leq 0$，$0<a<1$，$a\geq 1$ 三种情况求|f（x）|的最大值．特别当 $0<a<1$ 时，仍需要利用导数求函数在区间（0，2）上的极值，然后在根据 a 的范围分析区间端点值与极值绝对值的大小．

解答： 解：（1）因为 $f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$，所以 $f'(x)=3x^2-6x+3a$，

故 $f'(1)=3a-3$，又 $f(1)=1$，所以所求的切线方程为 $y=(3a-3)x-3a+4$；

（2）由于 $f'(x)=3(x-1)^2+3(a-1)$，$0\leq x\leq 2$．

故当 $a\leq 0$ 时，有 $f'(x)\leq 0$，此时 f（x）在[0，2]上单调递减，故

$|f(x)|_{max}=max\{|f(0)|,|f(2)|\}=3-3a$．

当 $a\geq 1$ 时，有 $f'(x)\geq 0$，此时 f（x）在[0，2]上单调递增，故

$|f(x)|_{max}=max\{|f(0)|,|f(2)|\}=3a-1$.

当 $0<a<1$ 时，由 $3(x-1)^2+3(a-1)=0$，得 $x_1=1-\sqrt{1-a}$，$x_2=1+\sqrt{1-a}$.

所以，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_2,2)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

所以函数 $f(x)$ 的极大值 $f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$，极小值 $f(x_2)=1-2(1-a)\sqrt{1-a}$.

故 $f(x_1)+f(x_2)=2>0$，$f(x_1)-f(x_2)=4(1-a)\sqrt{1-a}>0$.

从而 $f(x_1)>|f(x_2)|$.

所以 $|f(x)|_{max}=max\{f(0),|f(2)|,f(x_1)\}$.

当 $0<a<\frac{2}{3}$ 时，$f(0)>|f(2)|$.

又 $f(x_1)-f(0)=2(1-a)\sqrt{1-a}-(2-3a)=\frac{a^2(3-4a)}{2(1-a)\sqrt{1-a}+2-3a}>0$

故 $|f(x)|_{max}=f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$.

当 $\frac{2}{3}\leqslant a<1$ 时，$|f(2)|=f(2)$，且 $f(2)\geq f(0)$.

又 $f(x_1)-|f(2)|=2(1-a)\sqrt{1-a}-(3a-2)=\frac{a^2(3-4a)}{2(1-a)\sqrt{1-a}+3a}$.

所以当 $\frac{2}{3}\leqslant a<\frac{3}{4}$ 时，$f(x_1)>|f(2)|$.

故 $f(x)_{max}=f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$.

当 $\frac{3}{4}\leqslant a<1$ 时，$f(x_1)\leq|f(2)|$.

故 $f(x)_{max}=|f(2)|=3a-1$.

综上所述 $|f(x)|_{max}=\begin{cases}3-3a, & a\leqslant 0\\ 1+2(1-a)\sqrt{1-a}, & 0<a<\frac{3}{4}.\\ 3a-1, & a\geqslant\frac{3}{4}\end{cases}$

点评：本题考查了利用导数研究曲线上某点处的切线方程，考查了利用导数求闭区间上的最值，考查了分类讨论的数学思想方法，正确的分类是解答（2）的关键，此题属于难题.