2009年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学I

参考公式：

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,其中\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

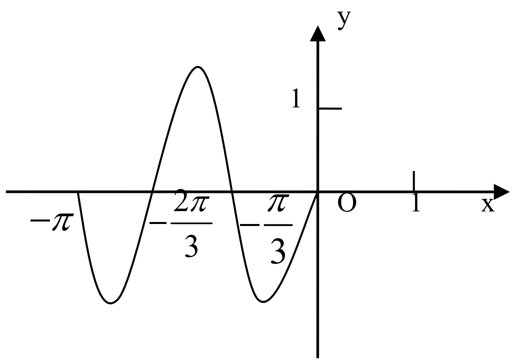
一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分。

1.若复数 $z_1=4+29i,z_2=6+9i$，其中 i 是虚数单位，则复数 $(z_1-z_2)i$ 的实部为______

2.已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 30°，$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=$_________ .

3.函数 $f(x)=x^3-15x^2-33x+6$ 的单调减区间为_____

4.函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\omega,\varphi$ 为常数，$A>0,\omega>0)$ 在闭区间 $[-\pi,0]$ 上的图象如图所示，则 $\omega=$ ______ .

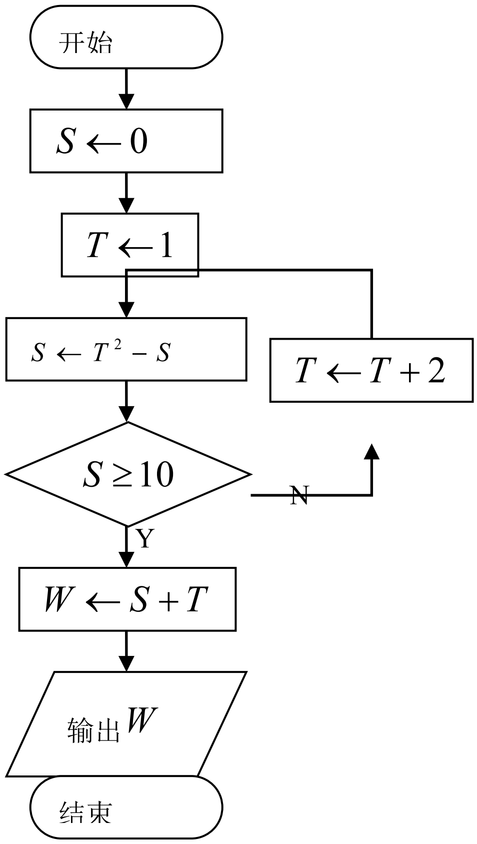


5.现有5根竹竿，它们的长度（单位：m）分别为2.5，2.6，2.7，2.8，2.9，若从中一次随机抽取2根竹竿，则它们的长度恰好相差0.3m的概率为________ .

6.某校甲、乙两个班级各有5名编号为1，2，3，4，5的学生进行投篮练习，每人投10次，投中的次数如下表：

学生	1号	2号	3号	4号	5号
甲班	6	7	7	8	7
乙班	6	7	6	7	9

则以上两组数据的方差中较小的一个为$s^2=$________ .



7.右图是一个算法的流程图，最后输出的$W=$________ .

8.在平面上，若两个正三角形的边长的比为1：2，则它们的面积比为1：4，类似地，在空间，若两个正四面体的棱长的比为1：2，则它们的体积比为________ .

9.在平面直角坐标系xoy中，点P在曲线$C:y=x^3-10x+3$上，且在第二象限内，已知曲线C在点P处的切线的斜率为2，则点P的坐标为________.

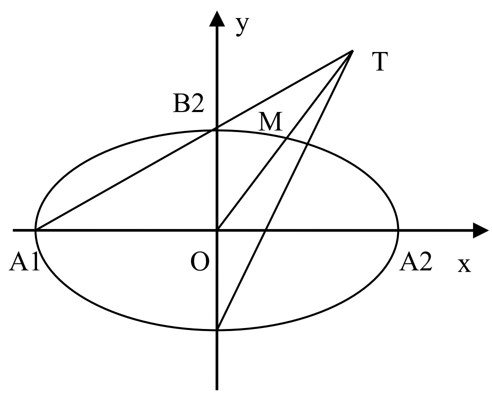
10.已知$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，函数$f(x)=a^x$，若实数m,n满足$f(m)>f(n)$，则m,n的大小关系为_______ .

11.已知集合$A=\{x\,|\log_2 x\leq 2\}$，$B=(-\infty,a)$，若$A\subseteq B$则实数a的取值范围是$(c,+\infty)$，其中$c=$________ .

12.设α和β为不重合的两个平面，给出下列命题：（1）若α内的两条相交直线分别平行于β内的两条直线，则α平行于β；（2）若α外一条直线l与α内的一条直线平行，则l和α平行；（3）设α和β相交于直线l，若α内有一条直线垂直于l，则α和β垂直；（4）直线l与α垂直的充分必要条件是l与α内的两条直线垂直.

上面命题中，真命题的序号________（写出所有真命题的序号）.

13．如图，在平面直角坐标系xoy中，A_1,A_2,B_1,B_2为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的四个顶点，$F$为其右焦点，直线$A_1B_2$与直线$B_1F$相交于点T，线段$OT$与椭圆的交点$M$恰为线段$OT$的中点，则该椭圆的离心率为________.



14．设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，$|q|>1$，令

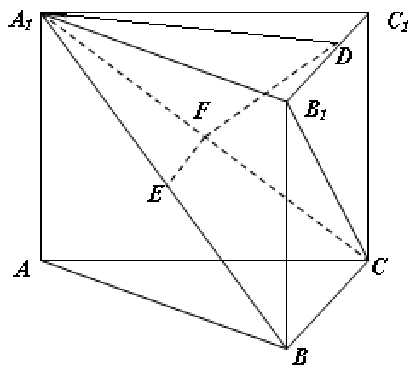
$b_n = a_n + 1(n = 1,2,\cdots)$ 若数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53,-23,19,37,82\}$ 中，则 $6q =$ ________

二、解答题：本大题共6小题，共计90分。

15．（本小题满分14分）

设向量 $\boldsymbol{a} = (4\cos\alpha, \sin\alpha), \boldsymbol{b} = (\sin\beta, 4\cos\beta), \boldsymbol{c} = (\cos\beta, -4\sin\beta)$（1）若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$ 垂直，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值；（2）求 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最大值;（3）若 $\tan\alpha\tan\beta = 16$，求证：$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

16．（本小题满分14分）



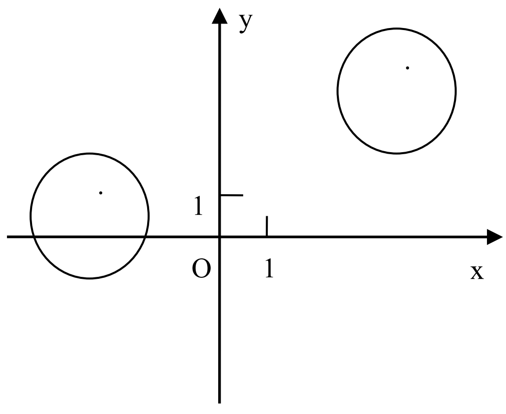
如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，E, F 分别是 A_1B, A_1C 的中点，点 D 在 B_1C_1 上，$A_1D \perp B_1C$

求证：(1) $EF \parallel$ 平面 ABC（2）平面 $A_1FD \perp$ 平面 BB_1C_1C

17．（本小题满分14分） 设 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，S_n 为其前 n 项和，满足 $a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2, S_7 = 7$（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n；（2）试求所有的正整数 m，使得 $\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项.

18．（本小题满分16分）

在平面直角坐标系 xoy 中，已知圆 $C_1:(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$ 和圆 $C_2:(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$（1）若直线 l 过点 $A(4,0)$，且被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l 的方程；（2）设P为平面上的点，满足：存在过点P的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2，它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交，且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等，试求所有满足条件的点P的坐标.



19.(本小题满分16分)

按照某学者的理论，假设一个人生产某产品单件成本为a元，如果他卖出该产品的单价为m元，则他的满意度为$\frac{m}{m+a}$；如果他买进该产品的单价为n元，则他的满意度为$\frac{n}{n+a}$.如果一个人对两种交易(卖出或买进)的满意度分别为h_1和h_2，则他对这两种交易的综合满意度为$\sqrt{h_1h_2}$.

现假设甲生产A、B两种产品的单件成本分别为12元和5元，乙生产A、B两种产品的单件成本分别为3元和20元，设产品A、B的单价分别为m_A元和m_B元，甲买进A与卖出B的综合满意度为$h_{甲}$，乙卖出A与买进B的综合满意度为$h_{乙}$

求$h_{甲}$和$h_{乙}$关于m_A、m_B的表达式；当$m_A=\frac{3}{5}m_B$时，求证：$h_{甲}=h_{乙}$；

设$m_A=\frac{3}{5}m_B$，当m_A、m_B分别为多少时，甲、乙两人的综合满意度均最大？最大的综合满意度为多少？

记(2)中最大的综合满意度为h_0，试问能否适当选取m_A、m_B的值，使得$h_{甲}\geq h_0$和$h_{乙}\geq h_0$同时成立，但等号不同时成立？试说明理由。

求$h_{甲}$和$h_{乙}$关于m_A、m_B的表达式；当$m_A=\frac{3}{5}m_B$时，求证：$h_{甲}=h_{乙}$；

设$m_A=\frac{3}{5}m_B$，当m_A、m_B分别为多少时，甲、乙两人的综合满意度均最大？最大的综合满意度为多少？

记(2)中最大的综合满意度为h_0，试问能否适当选取m_A、m_B的值，使得$h_{甲}\geq h_0$和$h_{乙}\geq h_0$同时成立，但等号不同时成立？试说明理由。

20．(本小题满分16分)设a为实数，函数$f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$.若$f(0)\geq 1$，求a的取值范围；求$f(x)$的最小值；设函数$h(x)=f(x),x\in(a,+\infty)$，直接写出(不需给出演算步骤)不等式$h(x)\geq 1$的解集.

数学II（附加题）

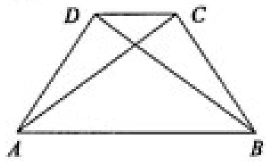
参考公式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

21.**[选做题]**在A、B、C、D四小题中**只能选做两题**，每小题10分，共计20分。请在**答题卡指定区域**内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A.选修4 - 1：几何证明选讲

如图，在四边形ABCD中，△ABC≌△BAD.

求证：AB∥CD.



（第21-A题图）

B. 选修4 - 2：矩阵与变换

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$的逆矩阵.

C. 选修4 - 4：坐标系与参数方程

已知曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\\ y=3(t+\dfrac{1}{t})\end{cases}$，（$t$为参数，$t>0$）.

求曲线C的普通方程。

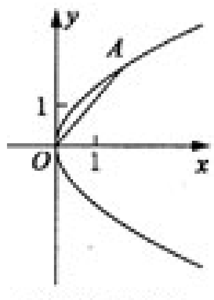
D. 选修4 - 5：不等式选讲

设$a\ge b>0$,求证：$3a^3+2b^3\ge 3a^2b+2ab^2$.

[必做题]第22题、第23题，每题10分，共计20分。请在**答题卡指定区域**内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

22.（本题满分10分）

在平面直角坐标系 xoy 中，抛物线C的顶点在原点，经过点A（2，2），其焦点F在 x 轴上。



（第22题图）

（1）求抛物线C的标准方程；

（2）求过点F，且与直线OA垂直的直线的方程；

（3）设过点 $M(m,0)(m>0)$ 的直线交抛物线C于D、E两点，ME=2DM，记D和E两点间的距离为 $f(m)$，求 $f(m)$ 关于 m 的表达式。

23.（本题满分10分）

对于正整数 $n\geq2$，用 T_n 表示关于 x 的一元二次方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根的有序数组 (a,b) 的组数，其中 $a,b\in\{1,2,\cdots,n\}$（a 和 b 可以相等）；对于随机选取的 $a,b\in\{1,2,\cdots,n\}$（a 和 b 可以相等），记 P_n 为关于 x 的一元二次方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根的概率。

（1）求 T_{n^2} 和 P_{n^2}；

（2）求证：对任意正整数 $n\geq2$，有 $P_n>1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.