2015年上海市文科试题

一．填空题（本大题共14小题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律零分）

1. 函数 $f(x)=1-3\sin^2 x$ 的最小正周期为____________.

【答案】π

【解析】因为 $2\sin^2 x=1-\cos 2x$，所以 $f(x)=1-\frac{3}{2}(1-\cos 2x)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2x$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

【考点定位】函数的周期，二倍角的余弦公式.

2. 设全集 $U=\mathrm{R}$．若集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x\,|\,2\le x<3\}$，则 $A\cap(C_U B)=$ ____________

.

【答案】$\{1,4\}$

【解析】因为 $B=\{x\,|\,2\le x<3\}$，所以 $C_U B=\{x\,|\,x<2$ 或 $x\ge 3\}$，又因为 $A=\{1,2,3,4\}$，

所以 $A\cap(C_U B)=\{1,4\}$．学科网

【考点定位】集合的运算.

3. 若复数 z 满足 $3z+\bar{z}=1+i$，其中 i 是虚数单位，则 $z=$____________.

【答案】$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$

【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，因为 $3z+\bar{z}=1+i$，

所以 $3(a+bi)+a-bi=1+i$，即 $4a+2bi=1+i$，所以 $\begin{cases}4a=1\\2b=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$，

所以 $z=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$.

【考点定位】复数的概念，复数的运算.

4. 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)=\frac{x}{2x+1}$ 的反函数，则 $f^{-1}(2)=$____________.

【答案】$-\frac{2}{3}$

【解析】因为 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$ 的反函数，$\dfrac{x}{2x+1}=2$，解得 $x=-\dfrac{2}{3}$，所以 $f^{-1}(2)=-\dfrac{2}{3}$.

【考点定位】反函数，函数的值.

5. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$ 解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$，则 $c_1-c_2=$____________.

【答案】16

【解析】由题意，$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} 2x+3y=c_1 \\ y=c_2 \end{cases}$ 的解，所以 $\begin{cases} c_1=21 \\ c_2=5 \end{cases}$，所以 $c_1-c_2=21-5=16$.

【考点定位】增广矩阵，线性方程组的解法.

6. 若正三棱柱的所有棱长均为 a，且其体积为 $16\sqrt{3}$，则 $a=$____________.

【答案】4

【解析】依题意，$\dfrac{1}{2}\times a\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times a=16\sqrt{3}$，解得 $a=4$.

【考点定位】等边三角形的性质，正三棱柱的性质.

7. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为1，则 $p=$____________.

【答案】2

【解析】依题意，点 Q 为坐标原点，所以 $\dfrac{p}{2}=1$，即 $p=2$.

【考点定位】抛物线的性质，最值.

8. 方程 $\log_2(9^{x-1}-5)=\log_2(3^{x-1}-2)+2$ 的解为____________.

【答案】2

【解析】依题意 $\log_2(9^{x-1}-5)=\log_2(4\cdot 3^{x-1}-8)$，所以 $9^{x-1}-5=4\cdot 3^{x-1}-8$，

令 $3^{x-1}=t(t>0)$，所以 $t^2-4t+3=0$，解得 $t=1$ 或 $t=3$，

当 $t=1$ 时，$3^{x-1}=1$，所以 $x=1$，而 $9^{1-1}-5<0$，所以 $x=1$ 不合题意，舍去；

当 $t=3$ 时，$3^{x-1}=3$，所以 $x=2$，$9^{2-1}-5=4>0$，$3^{2-1}-2=1>0$，所以 $x=2$ 满足条件，

所以 $x=2$ 是原方程的解.

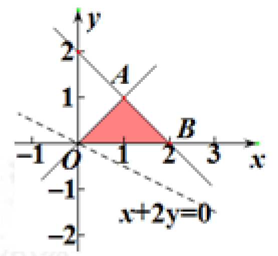
【考点定位】对数方程.

9. 若 x,y 满足 $\begin{cases}x-y\geq 0\\ x+y\leq 2\\ y\geq 0\end{cases}$，则目标函数 $z=x+2y$ 的最大值为____________.

【答案】3

【解析】不等式组表示的平面区域如图 ΔOAB（包括边界），联立方程组 $\begin{cases}y=x\\ x+y=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$，即 $A(1,1)$，

平移直线 $x+2y=0$ 当经过点 A 时，目标函数 $z=x+2y$ 的取得最大值，即 $z_{\max}=1+2=3$.



【考点定位】不等式组表示的平面区域，简单的线性规划.

10.

在报名的3名男教师和6名女教师中，选取5人参加义务献血，要求男、女教师都有，则不同的选取方式的种数为____________.（结果用数值表示）.

【答案】120

【解析】①男教师选 1 人，女教师教师选 4 人，有 $C_3^1C_6^4=45$ 中不同的选法；

②男教师选 2 人，女教师教师选 3 人，有 $C_3^2C_6^3=60$ 中不同的选法；学科网

③男教师选 3 人，女教师教师选 2 人，有 $C_3^3C_6^2=15$ 中不同的选法；

由分累计数原理得不同的选取方式的种数为 $45+60=15=120$ 种.

【考点定位】组合，分类计数原理.

11. 在 $(2x+\frac{1}{x^2})^6$ 的二项式中，常数项等于____________（结果用数值表示）.

【答案】240

【解析】由 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(2x)^{6-r}\cdot(\frac{1}{x^2})^r=C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot x^{6-3r}$，令 $6-3r=0$，所以 $r=2$，所以常数项为 $C_6^2\cdot 2^4=240$.

【考点定位】二项式定理.

12. 已知双曲线 C_1、C_2 的顶点重合，C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，若 C_2 的一条渐近线的斜率是 C_1 的一条渐近线的斜率的2倍，则 C_2 的方程为____________.

【答案】$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

【解析】因为 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，所以 C_1 的一条渐近线的斜率 $k_1=\frac{1}{2}$，所以 C_2 的一条渐近线的斜率 $k_2=1$，因为双曲线 C_1、C_2 的顶点重合，即焦点都在 x 轴上，

设 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，学科网

所以 $a=b=2$，所以 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$.

【考点定位】双曲线的性质，直线的斜率.

13. 已知平面向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\perp\vec{b}$，且 $\{|\vec{a}|,|\vec{b}|,|\vec{c}|\}=\{1,2,3\}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ 的最大值是____________.

【答案】$3+\sqrt{5}$

【解析】因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，设$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,2)$，$\vec{c}=(3\cos\theta,3\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，

所以$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(1+3\cos\theta,2+3\sin\theta)$，学科网

所以$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=(1+3\cos\theta)^2+(2+3\sin\theta)^2=14+6\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，其中$\sin\varphi=\dfrac{6}{6\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以当$\sin(\theta+\varphi)=1$时，$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$取得最大值，即$\sqrt{14+6\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}$.

【考点定位】平向量的模，向量垂直.

14. 已知函数$f(x)=\sin x$. 若存在x_1，x_2，…，x_m满足$0\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le 6\pi$，且

$|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|=12\ (m\ge 2,m\in\mathbf{N}^*)$，则$m$

的最小值为____________.

【答案】8

【解析】因为函数$f(x)=\sin x$对任意x_i，$x_j\ (i,j=1,2,3,\cdots,m)$，

$|f(x_i)-f(x_j)|\le f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=2$，

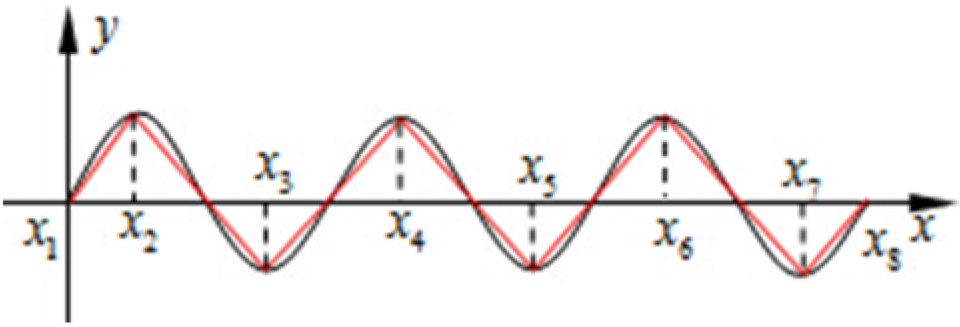
欲使m取得最小值，尽可能多的让$x_i(i=1,2,3,\cdots,m)$取得最高点，考虑

$0\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le 6\pi$，

$|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|=12\ (m\ge 2,m\in\mathbf{N}^*)$按下图

取值满足条件，

所以m的最小值为8.



【考点定位】正弦函数的性质，最值.

二．选择题（本大题共4小题，满分20分）每题有且只有一个正确答案案，考

生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律零分.

15．设 z_1、$z_2 \in \mathbf{C}$，则“z_1、z_2 均为实数”是“$z_1 - z_2$ 是实数”的（　　）.

A．充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

【答案】A

【解析】设 $z_1 = a_1 + b_1 i(a_1, b_1 \in \mathbf{R})$，$z_2 = a_2 + b_2 i(a_2, b_2 \in \mathbf{R})$，

若 z_1、z_2 均为实数，则 $b_1 = b_2 = 0$，所以 $z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i = a_1 - a_2$ 是实数；

若 $z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i$ 是实数，则 $b_1 = b_2$，学科网

所以“z_1、z_2 均为实数”是“$z_1 - z_2$ 是实数”的充分非必要条件，选 A.

【考点定位】复数的概念，充分条件、必要条件的判定.

16．下列不等式中，与不等式 $\dfrac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$ 解集相同的是（　　）.

A．$(x+8)(x^2+2x+3) < 2$　　B．$x+8 < 2(x^2+2x+3)$

C．$\dfrac{1}{x^2+2x+3} < \dfrac{2}{x+8}$　　D．$\dfrac{x^2+2x+3}{x+8} > \dfrac{1}{2}$

【答案】B

【解析】因为 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2 \ge 2 > 0$，$x+8$ 可能是正数、负数或零，所以由 $x+8 < 2(x^2+2x+3)$ 可得 $\dfrac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$，所以不等式 $\dfrac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$ 解集相同的是 $x+8 < 2(x^2+2x+3)$，选B.

【考点定位】同解不等式的判断..

17．已知点 A 的坐标为 $(4\sqrt{3},1)$，将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 至 OB，则点 B 的纵坐标为（　　）.

A．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

C. $\dfrac{11}{2}$　　　　D. $\dfrac{13}{2}$

【答案】D

【解析】设直线 OA 的倾斜角为 α，$B(m,n)(m>0,n>0)$，则直线 OB 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}+\alpha$，因为 $A(4\sqrt{3},1)$，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$，$\tan(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)=\dfrac{n}{m}$，$\dfrac{n}{m}=\dfrac{\sqrt{3}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{4\sqrt{3}}}=\dfrac{13}{3\sqrt{3}}$，即 $m^2=\dfrac{27}{169}n^2$，

因为 $m^2+n^2=(4\sqrt{3})^2+1^2=49$，所以 $n^2+\dfrac{27}{169}n^2=49$，所以 $n=\dfrac{13}{2}$ 或 $n=-\dfrac{13}{2}$（舍去），所以点 B 的纵坐标为 $\dfrac{13}{2}$.

【考点定位】三角函数的定义，和角的正切公式，两点间距离公式.

18.

设 $P_n(x_n,y_n)$ 是直线 $2x-y=\dfrac{n}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 在第一象限的交点，则极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-1}{x_n-1}=$（　　）.

A. -1　　　　B. $-\dfrac{1}{2}$

C. 1　　　　D. 2

【答案】A

【解析】因为 $P_n(x_n,y_n)$ 是直线 $2x-y=\dfrac{n}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 在第一象限的交点

，

而 $\dfrac{y_n-1}{x_n-1}$ 是经过点 $P_n(x_n,y_n)$ 与 $A(1,1)$ 的直线的斜率，由于点 $A(1,1)$ 在圆 $x^2+y^2=2$ 上.

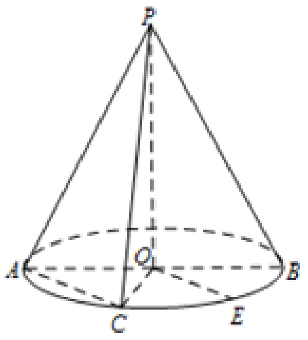
因为 $k_{OA}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-1}{x_n-1}=-\dfrac{1}{k_{OA}}=-1$.

【考点定位】圆的切线，极限.

三．解答题（本大题共5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19.（本题满分12分）如图，圆锥的顶点为 P，底面的一条直径为 AB，C 为半圆弧 AB

的中点，E 为劣弧 CB 的中点. 已知 $PO=2$，$OA=1$，求三棱锥 $P-AOC$ 的体积，并求异面直线 PA 与 OE 所成角的大小.



【答案】$\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】因为 $PO=2$，$OA=1$，

所以三棱锥 $P-AOC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta AOC}\cdot OP=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AO\times CO\times OP=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}$.

因为 $OE\parallel AC$，所以异面直线 PA 与 OE 所成的角就是 PA 与 AC 的夹角.

在 ΔACP 中，$AC=\sqrt{2}$，$AP=CP=\sqrt{5}$，

过 P 作 $PH\perp AC$，则 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

在 $Rt\Delta AHP$ 中，$\cos\angle PAH=\frac{AH}{AP}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以异面直线 PA 与 OE 所成角的大小 $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

【考点定位】圆锥的性质，异面直线的夹角.

20.（本题满分14分）本题共2小题，第1小题6分，第2小题8分.

已知函数 $f(x)=ax^2+\frac{1}{x}$，其中 a 为实数.

（1）根据 a 的不同取值，判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）若 $a\in(1,3)$，判断函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的单调性，并说明理由.

【答案】（1） $f(x)$ 是非奇非偶函数；（2）函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增.

【解析】（1）当 $a=0$ 时， $f(x)=\dfrac{1}{x}$，显然是奇函数；

当 $a\neq 0$ 时， $f(1)=a+1$， $f(-1)=a-1$， $f(1)\neq f(-1)$ 且 $f(1)+f(-1)\neq 0$，

所以此时 $f(x)$ 是非奇非偶函数.学科网

（2）设 $\forall x_2<x_2\in[1,2]$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=a(x_1-x_2)(x_1+x_2)+\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)-\dfrac{1}{x_1x_2}]$

因为 $x_1<x_2\in[1,2]$，所以 $x_1-x_2<0$， $2<x_1+x_2<4$， $1<x_1x_2<4$，

所以 $2<a(x_1+x_2)<12$， $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{x_1x_2}<1$，

所以 $a(x_1+x_2)-\dfrac{1}{x_1x_2}>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

故函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增.

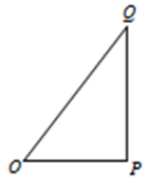
【考点定位】函数的奇偶性、单调性.

21.（本小题14分）本题共2小题，第1小题6分，第2小题8分.

如图， O,P,Q 三地有直道相通， $OQ=5$ 千米， $OP=3$ 千米， $PQ=4$ 千米. 现甲、乙两警员同时从 O 地出发匀速前往 Q 地，经过 t 小时，他们之间的距离为 $f(t)$（单位：千米）. 甲的路线是 OQ，速度为5千米/小时，乙的路线是 OPQ，速度为8千米/小时. 乙到达 Q 地后原地等待. 设 $t=t_1$ 时乙到达 P 地； $t=t_2$ 时，乙到达 Q 地.

（1）求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值；

（2）已知警员的对讲机的有效通话距离是3千米. 当 $t_1\leq t\leq t_2$ 时，求 $f(t)$ 的表达式，并判断 $f(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上得最大值是否超过3？说明理由.



【答案】（1）$\frac{3}{8}h$，$\frac{3\sqrt{41}}{8}$千米；（2）不超过了3千米.

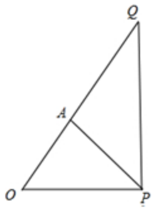
【解析】（1）根据条件知$t_1=\frac{3}{8}$，设此时甲到达A点，并连接AP，如图所示，则

$OA=5\times\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$，

所以在ΔOAP中，

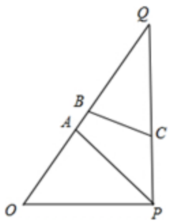
由余弦定理得

$f(t_1)=AP=\sqrt{OA^2+OP^2-2OA\cdot OP\cdot\cos\angle AOP}=\sqrt{(\frac{15}{8})^2+9-\frac{45}{4}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{3\sqrt{41}}{8}$（千米）.



（2）可求得$t_2=\frac{7}{8}$，设t小时后，且$\frac{3}{8}\le t\le\frac{7}{8}$，甲到达了B点，乙到达了C点，如图所示

，



所以$BQ=5-5t$，$CQ=7-8t$，

所以在ΔBCQ中，

由余弦定理$f(t)=BC=\sqrt{(5-5t)^2+(7-8t)^2-2(5-5t)(7-8t)\cdot\frac{4}{5}}=\sqrt{25t^2-42t+18}$，

所以 $f(t)=\sqrt{25t^2-42t+18}$，$\frac{3}{8}\le t\le\frac{7}{8}$，

设 $g(t)=25t^2-42t+18$，$\frac{3}{8}\le t\le\frac{7}{8}$，

因为函数 $g(t)$ 的对称轴为 $t=\frac{21}{25}\in[\frac{3}{8},\frac{7}{8}]$，且 $g(\frac{3}{8})=\frac{369}{64}$，$g(\frac{7}{8})=\frac{25}{64}$，

所以 $g(t)$ 得最大值为 $\frac{369}{64}$，此时 $f(t)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{41}}{8}<3$，

所以 $f(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上得最大值不超过3.

【考点定位】余弦定理的实际运用，函数的值域.

22.（本题满分14分）本题共3个小题，第1小题4分，第2小题6分，第3小题6分.

已知椭圆 $x^2+2y^2=1$，过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别于椭圆交于 A、B 和 C、D，设 ΔAOC 的面积为 S.

（1）设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，用 A、C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离，并证明 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|$；

（2）设 $l_1:y=kx$，$C(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，$S=\frac{1}{3}$，求 k 的值；

（3）设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 m，求 m 的值，使得无论 l_1 与 l_2 如何变动，面积 S 保持不变.

【答案】（1）详见解析；（2）$k=-1$ 或 $k=-\frac{1}{5}$；（3）$m=-\frac{1}{2}$.

【解析】（1）直线 l_1 的方程为 $y_1x-x_1y=0$，

由点到直线的距离公式得点 C 到 l_1 的距离为 $d=\dfrac{|y_1x_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$，

因为 $|OA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，

所以 $S=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot d=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$．

（2）由 $\begin{cases}y=kx\\x^2+2y^2=1\end{cases}$，消去 y 解得 $x_1^2=\dfrac{1}{1+2k^2}$，

由（1）得 $S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\dfrac{1}{2}|\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}kx_1|=\dfrac{\sqrt{3}|k-1|}{6\sqrt{1+2k^2}}$

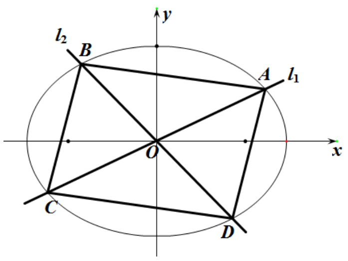
由题意知 $\dfrac{\sqrt{3}|k-1|}{6\sqrt{1+2k^2}}=\dfrac{1}{3}$，

解得 $k=-1$ 或 $k=-\dfrac{1}{5}$．

（3）设 $l_1:y=kx$，则 $l_2:y=\dfrac{m}{k}x$，设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx\\x^2+2y^2=1\end{cases}$，的 $x_1^2=\dfrac{1}{1+2k^2}$，

同理 $x_2^2=\dfrac{1}{1+2(\dfrac{m}{k})^2}=\dfrac{k^2}{k^2+2m^2}$，



由（1）知，$S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\dfrac{1}{2}|\dfrac{x_1\cdot mx_1}{k}-x_2\cdot kx_1|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|k^2-m|}{|k|}\cdot|x_1x_2|$

$$=\dfrac{|k^2-m|}{2\sqrt{1+2k^2}\cdot\sqrt{k^2+2m^2}},$$

整理得 $(8S^2-1)k^4+(4S^2+16S^2m^2+2m)k^2+(8S^2-1)m^2=0$，

由题意知 S 与 k 无关，

则 $\begin{cases}8S^2-1=0\\4S^2+16S^2m^2+2m=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}S^2=\dfrac{1}{8}\\m=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

所以 $m=-\dfrac{1}{2}$.

【考点定位】椭圆的性质，直线与椭圆的位置关系.

23.（本题满分16分）本题共3小题. 第1小题4分，第2小题6分，第3小题6分.

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$，$n\in\mathrm{N}^*$.

（1）若 $b_n=3n+5$，且 $a_1=1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项，即 $a_{n_0}\ge a_n(n\in\mathrm{N}^*)$，求证：数列 $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项；

（3）设 $a_1=3\lambda<0$，$b_n=\lambda^n\ (n\in\mathrm{N}^*)$，求 λ 的取值范围，使得对任意 m，$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\ne0$，且

$$\frac{a_m}{a_n}\in(\frac{1}{6},6).$$

【答案】（1）$a_n=6n-5$；（2）详见解析；（3）$(-\dfrac{1}{4},0)$.

【解析】（1）因为 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$，$b_n=3n+5$，

所以 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)=2(3n+8-3n-5)=6$，

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项为 $a_1=1$，公差为6，即 $a_n=6n-5$.

（2）由 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$，得 $a_{n+1}-2b_{n+1}=a_n-2b_n$，

所以 $\{a_n-2b_n\}$ 为常数列，$a_n-2b_n=a_1-2b_1$，即 $a_n=2b_n+a_1-2b_1$，

因为 $a_{n_0}\ge a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $2b_{n_0}+a_1-2b_1\ge 2b_n+a_1-2b_1$，即 $b_{n_0}\ge b_n$，

所以 $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项.

（3）因为 $b_n=\lambda^n$，所以 $a_{n+1}-a_n=2(\lambda^{n+1}-\lambda^n)$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$$=2(\lambda^n-\lambda^{n-1})+2(\lambda^{n-1}-\lambda^{n-2}+\cdots+2(\lambda^2-\lambda)+3\lambda$$

$$=2\lambda^n+\lambda,$$

当 $n=1$ 时，$a_1=3\lambda$，符合上式，

所以 $a_n=2\lambda^n+\lambda$，

因为 $a_1=3\lambda<0$，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$\dfrac{a_1}{a_n}\in(\dfrac{1}{6},6)$，

故 $a_n<0$，特别地 $a_2=2\lambda^2+\lambda<0$，于是 $\lambda\in(-\dfrac{1}{2},0)$，

此时对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\neq 0$，

当 $-\dfrac{1}{2}<\lambda<0$ 时，$a_{2n}=2|\lambda|^{2n}+\lambda>\lambda$，$a_{2n-1}=-2|\lambda|^{2n-1}+\lambda<\lambda$，

由指数函数的单调性知，$\{a_n\}$ 的最大值为 $a_2=2\lambda^2+\lambda<0$，最小值为 $a_1=3\lambda$，

由题意，$\dfrac{a_m}{a_n}$ 的最大值及最小值分别是 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{3}{2\lambda+1}$ 及 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2\lambda+1}{3}$，

由 $\dfrac{2\lambda+1}{3}>\dfrac{1}{6}$ 及 $\dfrac{3}{2\lambda+1}<6$，解得 $-\dfrac{1}{4}<\lambda<0$，

综上所述，λ 的取值范围是 $(-\dfrac{1}{4},0)$．

【考点定位】数列的递推公式，等差数列的性质，常数列，数列的最大项，指数函数的单调性.