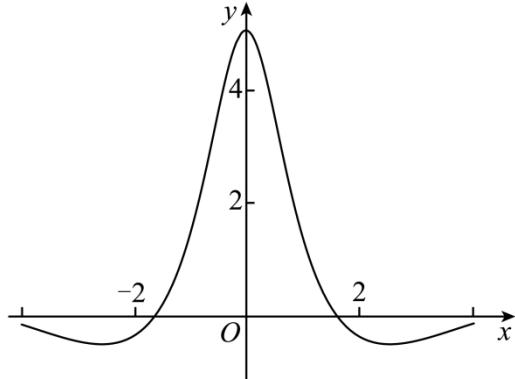


2023 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

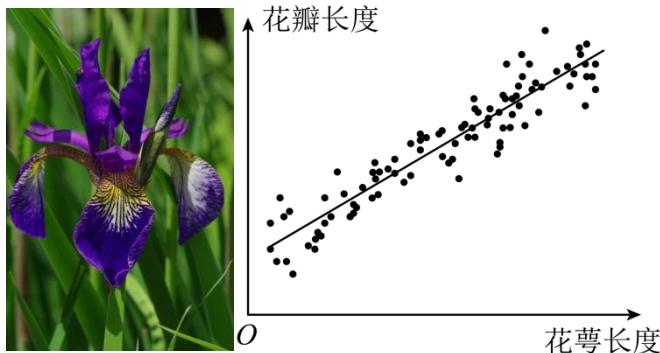
一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, 则 $\complement_U B \cup A =$ ()
- A. $\{1, 3, 5\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{1, 2, 4, 5\}$
2. “ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + b^2 = 2ab$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件
3. 若 $a = 1.01^{0.5}$, $b = 1.01^{0.6}$, $c = 0.6^{0.5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $c > a > b$ B. $c > b > a$
C. $a > b > c$ D. $b > a > c$
4. 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()



- A. $\frac{5(e^x - e^{-x})}{x^2 + 2}$ B. $\frac{5 \sin x}{x^2 + 1}$
C. $\frac{5(e^x + e^{-x})}{x^2 + 2}$ D. $\frac{5 \cos x}{x^2 + 1}$
5. 已知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x = 2$, 一个周期为 4, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()
- A. $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ B. $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
C. $\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ D. $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 则 a_4 的值为 ()
- A. 3 B. 18 C. 54 D. 152
7. 调查某种群花萼长度和花瓣长度, 所得数据如图所示, 其中相关系数 $r = 0.8245$, 下列说法正确的是()



- A. 花瓣长度和花萼长度没有相关性
 B. 花瓣长度和花萼长度呈现负相关
 C. 花瓣长度和花萼长度呈现正相关
 D. 若从样本中抽取一部分, 则这部分的相关系数一定是 0.8245

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 线段 PC 上的点 M 满足 $PM = \frac{1}{3}PC$, 线段 PB 上的点 N 满足 $PN = \frac{2}{3}PB$, 则

三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

9. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 过 F_2 作其中一条渐近线的垂线, 垂足为 P . 已知 $PF_2 = 2$, 直线 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$
 C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

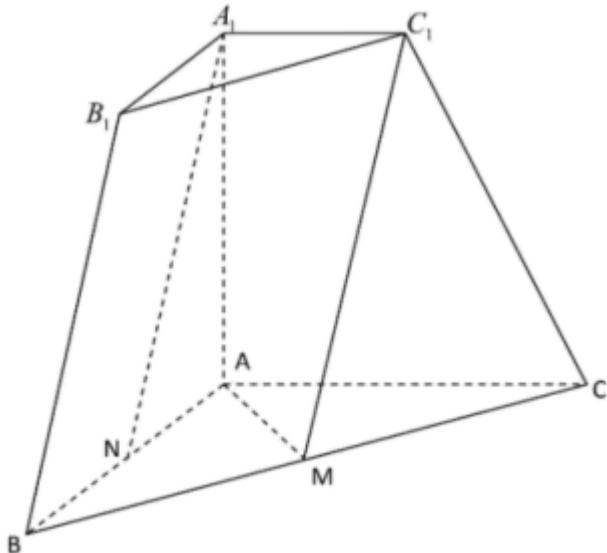
二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 试题中包含两个空的, 答对 1 个的给 3 分, 全部答对的给 5 分.

10. 已知 i 是虚数单位, 化简 $\frac{5+14i}{2+3i}$ 的结果为 _____.

11. 在 $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^2 项的系数为_____.
12. 过原点的一条直线与圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = 3$ 相切, 交曲线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 于点 P , 若 $|OP| = 8$, 则 p 的值为_____.
13. 甲乙丙三个盒子中装有一定数量的黑球和白球, 其总数之比为 $5:4:6$. 这三个盒子中黑球占总数的比例分别为 $40\%, 25\%, 50\%$. 现从三个盒子中各取一个球, 取到的三个球都是黑球的概率为_____; 将三个盒子混合后任取一个球, 是白球的概率为_____.
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $BC = 1$, 点 D 为 AB 的中点, 点 E 为 CD 的中点, 若设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 则 \overrightarrow{AE} 可用 \vec{a}, \vec{b} 表示为_____; 若 $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最大值为_____.
15. 若函数 $f(x) = ax^2 - 2x - |x^2 - ax + 1|$ 有且仅有两个零点, 则 a 的取值范围为_____.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $a = \sqrt{39}, b = 2, \angle A = 120^\circ$.
- (1) 求 $\sin B$ 的值;
 - (2) 求 c 的值;
 - (3) 求 $\sin(B-C)$.
17. 三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若 $A_1A \perp$ 面 ABC , $AB \perp AC$, $AB = AC = AA_1 = 2, A_1C_1 = 1$, M, N 分别是 BC, BA 中点.



- (1) 求证: $A_1N //$ 平面 C_1MA ;

(2) 求平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成夹角的余弦值;

(3) 求点 C 到平面 C_1MA 的距离.

18. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右顶点分别为 A_1, A_2 , 右焦点为 F , 已知 $|A_1F| = 3, |A_2F| = 1$.

(1) 求椭圆方程及其离心率;

(2) 已知点 P 是椭圆上一动点 (不与端点重合), 直线 A_2P 交 y 轴于点 Q , 若三角形 A_1PQ 的面积是三角形 A_2FP 面积的二倍, 求直线 A_2P 的方程.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 + a_5 = 16, a_5 - a_3 = 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i$.

(2) 已知 $\{b_n\}$ 为等比数列, 对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 若 $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$, 则 $b_k < a_n < b_{k+1}$,

(I) 当 $k \geq 2$ 时, 求证: $2^k - 1 < b_k < 2^k + 1$;

(II) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和.

20. 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \ln(x+1)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处切线的斜率;

(2) 当 $x > 0$ 时, 证明: $f(x) > 1$;

(3) 证明: $\frac{5}{6} < \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n) + n \leq 1$.

