2009年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)

理科数学

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若$\log_2 a<0$，$(\frac{1}{2})^b>1$，则【　】

A．$a>1, b>0$　　B．$a>1, b<0$

C．$0<a<1$，$b>0$　　D．$0<a<1$，$b<0$

2．对于非零向量$\vec{a},\vec{b}$,“$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的【　】

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．将函数$y=\sin x$的图象向左平移$\varphi(0\le\varphi<2\pi)$个单位后，得到函数$y=\sin(x-\frac{\pi}{6})$的图象，则$\varphi$等于【 】

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{5\pi}{6}$　　C．$\frac{7\pi}{6}$　　D．$\frac{11\pi}{6}$

4．如图1，当参数$\lambda=\lambda_1,\lambda_2$时，连续函数$y=\frac{x}{\sqrt{1+\lambda x}}(x\ge 0)$的图像分别对应曲线$C_1$和$C_2$，则【　】

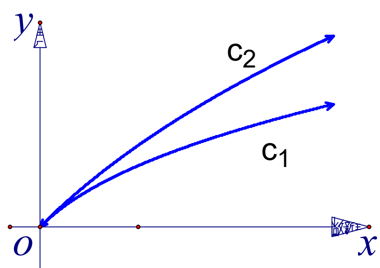


图1

A．$0<\lambda_1<\lambda_2$　　B．$0<\lambda_2<\lambda_1$

C．$\lambda_1<\lambda_2<0$　　D．$\lambda_2<\lambda_1<0$

5．从10名大学生毕业生中选3个人担任村长助理，则甲、乙至少有1人入选，而丙没有入选的不同选法的种数为【　】

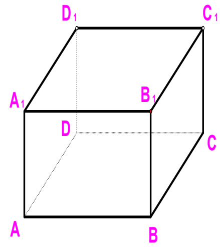
A．85　　B．56　　C．49　　D．28

6．已知D是由不等式组$\begin{cases}x-2y\ge 0,\\ x+3y\ge 0\end{cases}$所确定的平面区域，则圆$x^2+y^2=4$在区域D内的弧长为【　】

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．$\frac{3\pi}{2}$

7．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱上到异面直线AB，CC_1 的距离相等的点的个数为【　】

A．2　　　B．3　　　C．　4　　　D．5



8．设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义.对于给定的正数K，定义函数 $f_K(x)=\begin{cases} f(x), f(x)\le K, \\ K, \quad f(x)>K. \end{cases}$ 取函数 $f(x)=2-x-e^{-x}$ 。若对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f_K(x)=f(x)$，则【　】

A．K的最大值为2　　　B．K的最小值为2

C．K的最大值为1　　　D．K的最小值为1

二、填空题：本大题共7小题，每小题5分，共35分，把答案填在答题卡中对应题号后的横线上

9．某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱乒乓球运动，8人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为__________.

10．在 $(1+x)^3+(1+\sqrt{x})^3+(1+\sqrt[3]{x})^3$ 的展开式中，x 的系数为___(用数字作答).

11．若 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $2\tan x+\tan(\dfrac{\pi}{2}-x)$ 的最小值为 _________.

12．已知以双曲线C的两个焦点及虚轴的两个端点为顶点的四边形中有一个内角为 60°，则双曲线C的离心率为________

13．一个总体分为A，B两层，其个体数之比为4：1，用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为10的样本.已知B层中甲、乙都被抽到的概率为 $\dfrac{1}{28}$，则总体中的个体数为__。

14．在半径为13的球面上有A，B，C 三点，AB=6，BC=8，CA=10，则

（1）球心到平面ABC的距离为 ____；

（2）过A，B两点的大圆面与平面ABC所成二面角（锐角）的正切值为 ____.

15．将正 ΔABC 分割成 $n^2(n\ge 2,n\in N^*)$ 个全等的小正三角形（图2，图3分别给出了n=2,3的情形），在每个三角形的顶点各放置一个数，使位于⊿ABC的三边及平行于某边的任一直线上的数（当数的个数不少于3时）都分别依次成等差数列.若顶点A，B，C处的三个数互不相同且和为1,记所有顶点上的数之和为 $f(n)$，则有 $f(2)=2$，$f(3)=$ _______，…，$f(n)=$_____________.

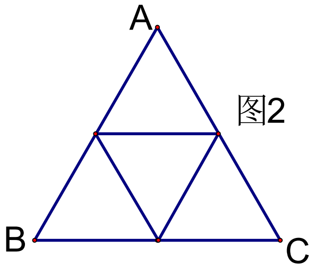


图2

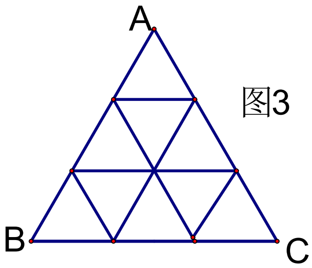


图3

三．解答题：本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16．（本小题满分12分）

在ΔABC中，已知$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=3\overrightarrow{BC}^2$，求角A，B，C的大小

17．（本小题满分12分）

为拉动经济增长，某市决定新建一批重点工程，分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$. 现在3名工人独立地从中任选一个项目参与建设。

（I）求他们选择的项目所属类别互不相同的概率；

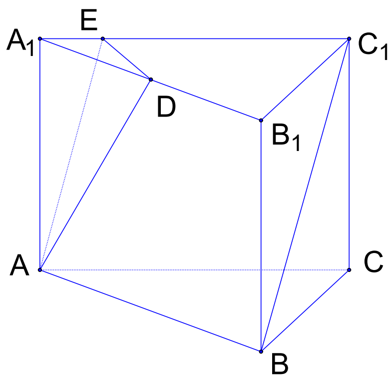
（II）记ξ为3人中选择的项目属于基础设施工程或产业建设工程的人数，求ξ的分布列及数学期望。

18．（本小题满分12分）

如图4，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=\sqrt{2}AA_1$，点D是A_1B_1的中点，点E在A_1C_1上，且$DE\perp AE$

（I）证明：平面$ADE\perp$平面ACC_1A_1；

（II）求直线AD和平面ABC所成角的正弦值。



19．（本小题满分13分）

某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两墩相距m米，余下工程只需建两端桥墩之间的桥面和桥墩. 经测算，一个桥墩的工程费用为256万元，距离为x米的相邻两墩之间的桥面工程费用为$(2+\sqrt{x})x$万元。假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其它因素. 记余下工程的费用为y万元。

（Ⅰ）试写出 y 关于 x 的函数关系式；

（Ⅱ）当 m =640米时，需新建多少个桥墩才能使 y 最小？

20．（本小题满分13分）

在平面直角坐标系xOy中，点P到点F（3，0）的距离的4倍与它到直线x=2的距离的3倍之和记为d. 当点P运动时，d恒等于点P的横坐标与18之和

（Ⅰ）求点P的轨迹C；

（Ⅱ）设过点F的直线 l 与轨迹C相交于M，N两点，求线段MN长度的最大值。

21．（本小题满分13分）

对于数列 $\{u_n\}$，若存在常数M＞0，对任意的 $n\in N^*$，恒有

$$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\le M,$$

则称数列 $\{u_n\}$ 为 $B-$数列.

（Ⅰ）首项为1，公比为 $q(|q|<1)$ 的等比数列是否为B-数列？请说明理由；

请以其中一组的一个论断条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题

判断所给命题的真假，并证明你的结论；

（Ⅱ）设 S_n 是数列 $\left\{x_n\right\}$ 的前 n 项和，给出下列两组论断；

A组：①数列 $\left\{x_n\right\}$ 是B-数列，　　②数列 $\left\{x_n\right\}$ 不是B-数列；

B组：③数列 $\left\{S_n\right\}$ 是B-数列，　　④数列 $\left\{S_n\right\}$ 不是B-数列.

请以其中一组中的一个论断为条件，另一组中的一个论断为结论

组成一个命题。判断所给命题的真假，并证明你的结论；

(III)若数列 $\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$ 都是 $B-$数列，证明：数列 $\left\{a_nb_n\right\}$ 也是 $B-$数列。

2009年高考湖南理科数学试题及全解全析

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（09湖南理）若$\log_2 a<0$，$(\frac{1}{2})^b>1$，则【 D 】

A．$a>1, b>0$　　B．$a>1, b<0$　　C. $0<a<1$, $b>0$　　D. $0<a<1$, $b<0$

解:由$\log_2 a<0 \Rightarrow 0<a<1, (\frac{1}{2})^b>1 \Rightarrow b<0$，易知D正确.

2．（09湖南理）对于非零向量$\vec{a},\vec{b}$,“$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的【 A 】

A．充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C．充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解:$\because \vec{a}+\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}=-\vec{b}$，$\therefore \vec{a}//\vec{b}$；反之不成立，故选A.

3．（09湖南理）将函数$y=\sin x$的图象向左平移$\varphi(0\le\varphi<2\pi)$个单位后，得到函数

$y=\sin(x-\frac{\pi}{6})$的图象，则φ等于【 D 】

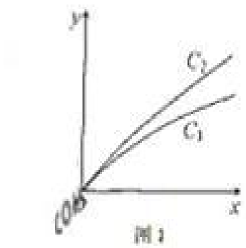
A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{5\pi}{6}$　　C．$\frac{7\pi}{6}$　　D．$\frac{11\pi}{6}$

解:依题意得$y=\sin(x-\frac{\pi}{6})=\sin(x-\frac{\pi}{6}+2\pi)=\sin(x+\frac{11\pi}{6})$，$\therefore \varphi=\frac{11\pi}{6}$，易知D正确.

4．（09湖南理）如图1，当参数$\lambda=\lambda_1,\lambda_2$时，连续函数

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+\lambda x}}(x\ge 0)$$

的图像分别对应曲线C_1和C_2，则【 B 】



A．$0<\lambda_1<\lambda_2$　　B．$0<\lambda_2<\lambda_1$

C．$\lambda_1<\lambda_2<0$　　D．$\lambda_2<\lambda_1<0$

解: 易知$\lambda>0$，故可排除C,D,再取特殊值$x=1$，结合图像可得$0<\lambda_2<\lambda_1$，故选B.

5．（09湖南理）从10名大学生毕业生中选3个人担任村长助理，则甲、乙至少有1人入选，而丙没有入选的不同选法的种数为【 C 】

A．　85　　B．　56　　C．49　　D．28

解：除开丙，由间接法得 $C_9^3-C_7^3=84-35=49$，故选C.

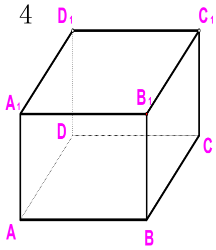
6．（09湖南理）已知D是由不等式组 $\begin{cases}x-2y\ge 0,\\ x+3y\ge 0\end{cases}$ 所确定的平面区域，则圆 $x^2+y^2=4$ 在区域D内的弧长为【 B 】　A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\dfrac{3\pi}{4}$　　D．$\dfrac{3\pi}{2}$

解:作图，由 $k_1=\dfrac{1}{2},k_2=-\dfrac{1}{3},\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}}=1\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$,

故弧长为 $l=R\theta=2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，选B.

7．（09湖南理）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱上到异面直线AB，CC_1 的距离相等的点的个数为【 C 】

A．2　　B．3　　C．4　　D．5



解:如图，用列举法知合要求的点的个数为:

BC 的点E、A_1D_1 的点F、B_1、D,

共4个，故选C.

8．（09湖南理）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义. 对于给定的正数K，定义函数

$f_K(x)=\begin{cases}f(x), f(x)\le K,\\ K, \quad f(x)>K.\end{cases}$ 取函数 $f(x)=2-x-e^{-x}$。若对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有

$f_K(x)=f(x)$，则【 D 】

A．K的最大值为2　　B．K的最小值为2

C．K的最大值为1　　D．K的最小值为1

解:

由 $K\ge f(x)$ 恒成立知 $K\ge f(x)_{\min}$，故K有最小值，可排除A, C, 又由直觉思维得在 $x=0$ 时，

$f(x)=2-x-e^{-x}=2-0-1=1$，排除B, 因此选D.

二、填空题：本大题共7小题，每小题5分，共35分，把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.

9．（09湖南理）某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱乒乓球运动，8人对这两项运

动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为 12 .

解：设所求人数为x，则只喜爱乒乓球运动的人数为$10-(15-x)=x-5$，

故$15+x-5=30-8 \Rightarrow x=12$.

注：最好作出韦恩图！　　或由$15+10-(30-8)=3 \Rightarrow 15-3=12$人.

10. （09湖南理）在$(1+x)^3+(1+\sqrt{x})^3+(1+\sqrt[3]{x})^3$的展开式中，$x$的系数为 7 (用数字作答).

解：$\Rightarrow T_{r+1}=C_3^r b^r$, 故有：$C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3-C_3^0=7$，得$x$的系数为7.

11. （09湖南理）若$x \in (0,\frac{\pi}{2})$，则$2\tan x+\tan(\frac{\pi}{2}-x)$的最小值为 $2\sqrt{2}$.

解：$\because x \in (0,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow 2\tan x+\tan(\frac{\pi}{2}-x)=2\tan x+\frac{1}{\tan x} \geq 2\sqrt{2}$，

当且仅当$2\tan x=\frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号.

12. （09湖南理）已知以双曲线C的两个焦点及虚轴的两个端点为顶点的四边形中，有一个内角为60°，则双曲线C的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

解：设双曲线C的左右焦点为F_1,F_2，虚轴的上下两个端点为B_1,B_2，由于$c>b,$

故$\angle F_1B_1F_2 \neq 60^\circ$, 则有$\angle B_1F_2B_2=60^\circ \Rightarrow \angle B_1F_2O=30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{b}{c},$

$\Rightarrow 2c^2=3a^2$，$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{2}, \Rightarrow e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

13. （09湖南理）一个总体分为A，B两层，其个体数之比为4：1，用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为10的样本.已知B层中甲、乙都被抽到的概率为$\frac{1}{28}$，则总体中的个体数为 40 。

解：设B层中的个体数为n，则$\frac{1}{28}=\frac{1}{C_n^2} \Rightarrow n=8$，则总体中的个体数为$8\times 5=40$.

14. （09湖南理）在半径为13的球面上有A ，B，C 三点，AB=6，BC=8，CA=10，则

（1）球心到平面ABC的距离为 12 ；

（2）过A，B两点的大圆面与平面ABC所成二面角（锐角）的正切值为 3 .

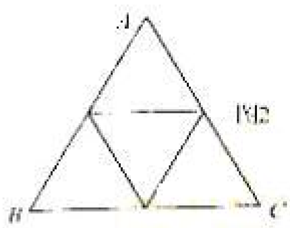
解：由AB=6，BC=8，CA=10得ΔABC是以B为直角顶点的直角三角形，

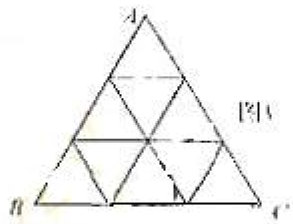
（1）设斜边AC的中点为O'，则$r=BO'=5$，故$d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$；

（2）作$O'H\perp AB$，则$O'H=4$，故$\tan\angle OHO'=\dfrac{d}{O'H}=\dfrac{12}{4}=3.$

15．（09湖南理）将正ΔABC分割成$n^2(n\geq 2,n\in N^*)$个全等的小正三角形（图2，图3分别给出了n=2,

3的情形），在每个三角形的顶点各放置一个数，使位于⊿ABC的三边及平行于某边的任一直线上的数（当数的个数不少于3时）都分别依次成等差数列.若顶点A ,B ,C处的三个数互不相同且和为1,记所有顶点上的数之和为$f(n)$，则有$f(2)=2$，$f(3)=$____$\dfrac{10}{3}$____，…，$f(n)=$______$\dfrac{1}{6}(n+1)(n+2)$________.





解：若依题意顶点A ,B ,C处的三个数互不相同且和为1，按等差数列的性质进行计算则显然运算量较大,故常规思维不可取！可偏偏特取A ,B ,C处的数均为$\dfrac{1}{3}$（极限法）来思考：

则图2中有$a_2=6$个$\dfrac{1}{3}$，得$f(2)=6\times\dfrac{1}{3}=2$；故图3中有$a_3=10$个$\dfrac{1}{3}$，得

$f(3)=10\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$；易知$n=4$时有$a_4=15$个$\dfrac{1}{3}$，…

探讨数列$a_2=6,\ a_3=10,\ a_4=15,\ \cdots\ a_n-a_{n-1}=3+(n-2)=n+1,$

（可参考2006湖南卷：逆序数）由叠加法推知：

$a_n=6+[4+5+6+\cdots+(n+1)]=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$个$\dfrac{1}{3}$，$\therefore f(n)=\dfrac{1}{6}(n+1)(n+2).$

三．解答题：本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16．（09湖南理）（本小题满分12分）

在ΔABC中，已知$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=3\overrightarrow{BC}^2$，求角A，B，C的大小.

解：设$BC=a,AC=b,AB=c$.

由 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$ 得 $2bc\cos A=\sqrt{3}bc$，所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$, 因此 $A=\dfrac{\pi}{6}$.

由 $\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=3\overrightarrow{BC}^2$ 得 $bc=\sqrt{3}a^2$，于是 $\sin C\cdot\sin B=\sqrt{3}\sin^2 A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 $\sin C\cdot\sin(\dfrac{5\pi}{6}-C)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$\sin C\cdot(\dfrac{1}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，因此

$2\sin C\cdot\cos C+2\sqrt{3}\sin^2 C=\sqrt{3},\sin 2C-\sqrt{3}\cos 2C=0$，既 $\sin(2C-\dfrac{\pi}{3})=0$.

由 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 知 $0<C<\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $-\dfrac{\pi}{3}<2C-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{4\pi}{3}$，从而

$2C-\dfrac{\pi}{3}=0,$ 或 $2C-\dfrac{\pi}{3}=\pi,$，既 $C=\dfrac{\pi}{6},$ 或 $C=\dfrac{2\pi}{3},$ 故

$A=\dfrac{\pi}{6},B=\dfrac{2\pi}{3},C=\dfrac{\pi}{6},$ 或 $A=\dfrac{\pi}{6},B=\dfrac{\pi}{6},C=\dfrac{2\pi}{3}$。

17. （09湖南理）（本小题满分12分）

为拉动经济增长，某市决定新建一批重点工程，分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{6}$. 现在3名工人独立地从中任选一个项目参与建设。

（I）求他们选择的项目所属类别互不相同的概率；

（II）记 ξ 为3人中选择的项目属于基础设施工程或产业建设工程的人数，

求 ξ 的分布列及数学期望。

解: 记第 i 名工人选择的项目属于基础设施工程、民生工程和产业建设工程分别为事件 A_i,B_i,C_i, i=1，2，3. 由题意知 A_1,A_2,A_3 相互独立，B_1,B_2,B_3 相互独立，C_1,C_2,C_3 相互独立，A_i,B_j,C_k（i，j，k=1，2，3，且i，j，k互不相同）相互独立，

且 $P(A_i)=\dfrac{1}{2},P(B_i)=\dfrac{1}{3},P(C_i)=\dfrac{1}{6}$.

（Ⅰ）他们选择的项目所属类别互不相同的概率

P=$3!P(A_1B_2C_3)=6P(A_1)P(B_2)P(C_3)=6\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$.

（Ⅱ）解法1：设3名工人中选择的项目属于民生工程的人数为η，

由已知，$\eta \sim$ B（3，$\frac{1}{3}$），且ξ=3−η。

所以P（ξ=0）=P（η=3）=$C_3^3(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$，

P（ξ=1）=P（η=2）=$C_3^2\ (\frac{1}{3})^2\ (\frac{2}{3})=\frac{2}{9}$，

P（ξ=2）=P（η=1）=$C_3^1(\frac{1}{3})\ (\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$，

P（ξ=3）=P（η=0）= $C_3^0\ (\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$.

故ξ的分布列是

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

ξ的数学期望E$\xi=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}$=2.

解法2：记第i名工人选择的项目属于基础工程或产业建设工程分别为事件D_i，

i=1,2,3．由已知，D_1,D_2,D_3相互独立，且

P（D_i）=（A_i+C_i）= P（A_i）+P（C_i）=$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，

所以$\xi \sim B(3,\frac{2}{3})$，即$P(\xi=k)=C_3^k(\frac{2}{3})^k(\frac{1}{3})^{3-k}$，$k=0,1,2,3.$

故ξ的分布列是

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

18．（09湖南理）（本小题满分12分）

如图4，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=\sqrt{2}AA_1$，

点D是A_1B_1的中点，点E在A_1C_1上，且$DE\perp AE$.

（I）证明：平面$ADE\perp$平面ACC_1A_1；

（II）求直线AD和平面ABC所成角的正弦值。

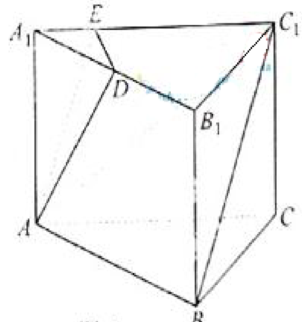


图4

解：（I） 如图所示，由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的性质知 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

又DE$\subset$平面 $A_1B_1C_1$，所以DE$\perp$ AA_1. 而DE$\perp$AE， $AA_1\cap$AE=A，

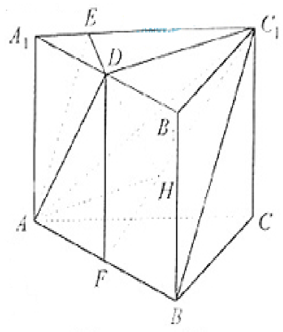
所以DE$\perp$平面 ACC_1A_1. 又DE$\subset$平面ADE，故平面 $ADE\perp$平面 ACC_1A_1.

（2）**解法1：** 如图所示，设F是AB的中点，连接DF，DC_1，C_1F.

由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的性质及D是 A_1B_1 的中点知，

$A_1B_1\perp C_1D$， $A_1B_1\perp$DF . 又$C_1D\cap$DF=D，

所以 $A_1B_1\perp$平面C_1DF. 而AB∥ A_1B_1，



所以AB$\perp$平面C_1DF. 又AB$\subset$平面ABC_1，

故平面AB $C_1\perp$平面C_1DF。

过点D做DH垂直C_1F于点H，则DH$\perp$平面AB C_1 。

连接AH，则$\angle$HAD是AD和平面ABC_1 所成的角。

由已知AB=$\sqrt{2}$ A A_1，不妨设A A_1=$\sqrt{2}$，则AB=2，DF=$\sqrt{2}$，D C_1=$\sqrt{3}$，

C_1F=$\sqrt{5}$，AD=$\sqrt{AA_1^{\ 2}+A_1D^2}=\sqrt{3}$，DH=$\dfrac{DF\cdot DC_1}{C_1F}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

所以 sin$\angle$HAD=$\dfrac{DH}{AD}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$。即直线AD和平面AB C_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

解法2： 如图所示，设O是AC的中点，以O为原点建立空间直角坐标系，

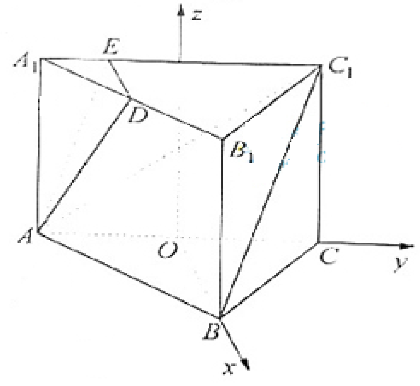
不妨设A A_1=$\sqrt{2}$，则AB=2，相关各点的坐标分别是

A(0,-1,0)， B（$\sqrt{3}$，0，0）， C_1（0，1，$\sqrt{2}$）， D（$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{2}$）。

易知$\overrightarrow{AB}$=($\sqrt{3}$，1，0)， $\overrightarrow{AC_1}$=(0，2，$\sqrt{2}$)， $\overrightarrow{AD}$=($\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{2}$）.

设平面ABC_1的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x+y=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=2y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$$



解得 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}y, z=-\sqrt{2}y.$

故可取 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{6})$.

所以， $\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AD}\right\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

由此即知，直线AD和平面AB C_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

19．（09湖南理）（本小题满分13分）

某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两墩相距m米，余下工程只需建两端桥墩之间的桥面和桥墩.经测算，一个桥墩的工程费用为256万元，距离为x米的相邻两墩之间的桥面工程费用为$(2+\sqrt{x})x$万元。假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其它因素.记余下工程的费用为y万元。

（Ⅰ）试写出y关于x的函数关系式；

（Ⅱ）当m=640米时，需新建多少个桥墩才能使y最小？

解：（Ⅰ）设需新建n个桥墩，则$(n+1)x=m$，即$n=\frac{m}{x}-1$，

$$所以\ y=f(x)=256n+(n+1)(2+\sqrt{x})x=256(\frac{m}{x}-1)+\frac{m}{x}(2+\sqrt{x})x$$

$$=\frac{256m}{x}+m\sqrt{x}+2m-256.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f'(x)=-\frac{256m}{x^2}+\frac{1}{2}mx^{-\frac{1}{2}}=\frac{m}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}}-512).$

令$f'(x)=0$，得$x^{\frac{3}{2}}=512$，所以x=64.

当0<x<64时，$f'(x)$<0，$f(x)$在区间（0，64）内为减函数；

当$64<x<640$时，$f'(x)$>0. $f(x)$在区间（64，640）内为增函数.

所以$f(x)$在x=64处取得最小值，此时$n=\frac{m}{x}-1=\frac{640}{64}-1=9.$

故需新建9个桥墩才能使y最小。

20．（09湖南理）（本小题满分13分）

在平面直角坐标系xOy中，点P到点F（3，0）的距离的4倍与它到直线x=2的距离的3倍之和记为d. 当点P运动时，d恒等于点P的横坐标与18之和 .

（Ⅰ）求点P的轨迹C；

（Ⅱ）设过点F的直线l与轨迹C相交于M，N两点，求线段MN长度的最大值。

解：（Ⅰ）设点P的坐标为（x，y），

则$d=4\sqrt{(x-3)^2-y^2}+3|x-2|$.由题设，$d=18+x$，

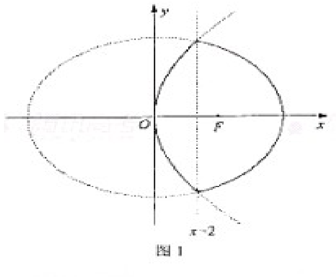


图1

即 $4\sqrt{(x-3)^2-y^2}+3|x-2|=18+x$． ……①

当x>2时，由①得 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=6-\frac{1}{2}x$， ……②

化简得 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

当 $x\leq 2$ 时，由①得 $\sqrt{(3+x)^2+y^2}=3+x$，……③

化简得 $y^2=12x$．

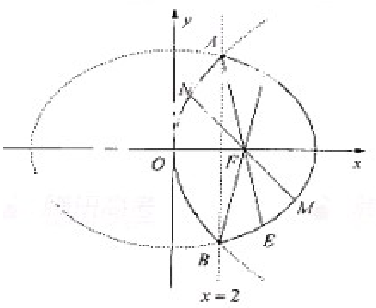


图2

故点P的轨迹C是椭圆 $C_1:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ 在直线x=2的右侧部分与抛物线 $C_2:y^2=12x$ 在直线x=2的左侧部分（包括它与直线x=2的交点）所组成的曲线，参见图1.

（Ⅱ）如图2所示，易知直线x=2

与 C_1，C_2 的交点都是A（2，$2\sqrt{6}$），B（2，$-2\sqrt{6}$），

直线AF，BF的斜率分别为 $k_{AF}=-2\sqrt{6}$，$k_{BF}=2\sqrt{6}$．

当点P在 C_1 上时，由②知 $|PF|=6-\frac{1}{2}x$． …… ④

当点P在 C_2 上时，由③知 $|PF|=3+x$． …… ⑤

若直线 l 的斜率k存在，则直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$．

（ⅰ）当k≤ k_{AF}，或k≥ k_{BF}，即k≤ $-2\sqrt{6}$ 或k≥ $2\sqrt{6}$ 时，直线 l 与轨迹C的两个交点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ 都在 C_1 上，此时由④知

$|MF|=6-\frac{1}{2}x_1,|NF|=6-\frac{1}{2}x_2$，

从而｜MN｜= ｜MF｜+ ｜NF｜= （6 $-\frac{1}{2}x_1$）+（6 $-\frac{1}{2}x_2$）=12 $-\frac{1}{2}$（x_1+x_2）.

由 $\begin{cases} y=k(x-3), \\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1 \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-24k^2x+36k^2-108=0$.

则 x_1，y_1 是这个方程的两根，所以 $x_1+x_2=\frac{24k^2}{3+4k^2}$，｜MN｜=12 $-\frac{1}{2}$（x_1+x_2）=12 −

$\dfrac{12k^2}{3+4k^2}$.

因为当$k\le -2\sqrt{6}$,或$k\ge 2\sqrt{6}$时,$k^2\ge 24$,所以

$$|MN|=12-\frac{12k^2}{3+4k^2}=12-\frac{12}{\frac{3}{k^2}+4}\le 12-\frac{12}{\frac{3}{24}+4}=\frac{100}{11}.$$

当且仅当$k=\pm 2\sqrt{6}$时，等号成立。

（ii）当$k_{AF}<k<k_{AF},-2\sqrt{6}<k<2\sqrt{6}$时，直线$l$与轨迹C的两个交点

$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$分别在C_1,C_2上，不妨设点M在C_1上，点N在C_2上，

则由④⑤知，$|MF|=6-\dfrac{1}{2}x_1,|NF|=3+x_2$.

设直线AF与椭圆C_1的另一交点为E(x_0,y_0),则$x_0<x_1,x_2<2$.

$|MF|=6-\dfrac{1}{2}x_1<6-\dfrac{1}{2}x_0=|EF|,|NF|=3+x_2<3+2=|AF|$,

所以$|MN|=|MF|+|NF|<|EF|+|AF|=|AE|$。而点A，E都在$C_1$上，

且$k_{AE}=-2\sqrt{6}$,由（i）知$|AE|=\dfrac{100}{11}$,所以$|MN|<\dfrac{100}{11}$.

若直线l的斜率不存在，则$x_1=x_2$=3，此时

$$|MN|=12-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=9<\frac{100}{11}.$$

综上所述，线段MN长度的最大值为$\dfrac{100}{11}$.

21．（09湖南理）（本小题满分13分）

对于数列$\{u_n\}$,若存在常数M＞0,对任意的$n\in N^*$，恒有

$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\le M$,则称数列$\{u_n\}$为$B-$数列.

（Ⅰ）首项为1，公比为$q(|q|<1)$的等比数列是否为B-数列？请说明理由;

请以其中一组的一个论断条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题

判断所给命题的真假，并证明你的结论;

（Ⅱ）设S_n是数列$\{x_n\}$的前n项和，给出下列两组论断;

A组：①数列$\{x_n\}$是B-数列，　　②数列$\{x_n\}$不是B-数列；

B组：③数列$\{S_n\}$是B-数列，　　④数列$\{S_n\}$不是B-数列.

请以其中一组中的一个论断为条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题。判断所给命题的真假，并证明你的结论；

(III) 若数列$\{a_n\},\{b_n\}$都是$B-$数列，证明：数列$\{a_nb_n\}$也是$B-$数列。

解：（Ⅰ）设满足题设的等比数列为$\{a_n\}$，则$a_n=q^{n-1}$，于是

$$|a_n-a_{n-1}|=|q^{n-1}-q^{n-2}|=|q|^{n-2}|q-1|,n\geq 2.$$

因此$|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\cdots+|a_2-a_1|=|q-1|(1+|q|+|q|^2+...+|q|^{n-1})$.

因为$|q|<1$，所以$1+|q|+|q|^2+\cdots+|q|^{n-1}=\dfrac{1-|q|^n}{1-|q|}<\dfrac{1}{1-|q|}$，即

$$|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\cdots+|a_2-a_1|<\frac{|q-1|}{1-|q|}.$$

故首项为1，公比为q $(|q|<1)$的等比数列是B-数列。

（Ⅱ）**命题1**：若数列$\{x_n\}$是B-数列，则数列$\{S_n\}$是B-数列.

此命题为假命题。

事实上，设$x_n=1,n\in N^{\bullet}$，易知数列$\{x_n\}$是B-数列，但$S_n=n$，

$$|S_{n+1}-S_n|+|S_n-S_{n-1}|+\cdots+|S_2-S_1|=n.$$

由n的任意性知，数列$\{S_n\}$不是B-数列。

命题2：若数列$\{S_n\}$是B-数列，则数列$\{x_n\}$是B-数列.

此命题为真命题.

事实上，因为数列$\{S_n\}$是B-数列，所以存在正数M，对任意的$n\in N^{\bullet}$，有

$$|S_{n+1}-S_n|+|S_n-S_{n-1}|+\cdots+|S_2-S_1|\leq M\quad ,$$

即$|x_{n+1}|+|x_n|+\cdots+|x_2|\leq M$。于是

$$|x_{n+1}-x_n|+|x_n-x_{n-1}|+\cdots+|x_2-x_1|$$

$$\le |x_{n+1}|+2|x_n|+2|x_{n-1}|+...+2|x_2|+|x_1|\le 2M+|x_1|,$$

所以数列$\{x_n\}$是B-数列。

（注：按题中要求组成其它命题解答时，仿上述解法）

（III）若数列$\{a_n\},\{b_n\}$是$B-$数列，则存在正数M_1,M_2，对任意的$n\in N^{\bullet}$,有

$|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\cdots+|a_2-a_1|\le M_1$；

$|b_{n+1}-b_n|+|b_n-a_{n-1}|+\cdots+|b_2-b_1|\le M_2$，

注意到$|a_n|=|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1|$

$$\le |a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_2-a_1|+|a_1|\le M_1+|a_1|.$$

同理，$|b_n|\le M_2+|b_1|$ ．记$K_1=M_1+|a_1|$，$K_2=M_2+|b_2|$，

则有$|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n|=|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_{n+1}+a_nb_{n+1}-a_nb_n|$

$$\le |b_{n+1}||a_{n+1}-a_n|+|a_n||b_{n+1}-b_n|\le K_2|a_{n+1}-a_n|+K_1|b_{n+1}-b_n|.$$

因此$|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n|+|a_nb_n-a_{n-1}b_{n-1}|+\cdots+|a_2b_2-a_1b_1|$

$$\le K_2(|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\cdots+|a_2-a_1|)$$

$$+K_1(|b_{n+1}-b_n|+|b_n-b_{n-1}|+\cdots+|b_2-b_1|)\le k_2M_1+k_1M_2.$$

故数列$\{a_nb_n\}$是$B-$数列.