# 2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

## 数学（理科）

**一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。**

1.不等式$\frac{2-x}{x+4}>0$的解集是 （-4,2） 。

解析：考查分式不等式的解法$\frac{2-x}{x+4}>0$等价于（x-2）(x+4)<0,所以-4<x<2

2.若复数$z=1-2i$（$i$为虚数单位），则$z\cdot\overline{z}+z=$ 6-2i 。

解析：考查复数基本运算$z\cdot\overline{z}+z=(1-2i)(1+2i)+1-2i=6-2i$

3. 动点$P$到点$F(2,0)$的距离与它到直线$x+2=0$的距离相等，则$P$的轨迹方程为

$y^2=8x$。

解析：考查抛物线定义及标准方程

定义知$P$的轨迹是以$F(2,0)$为焦点的抛物线，p=2所以其方程为$y^2=8x$

4.行列式$\begin{vmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{6}\end{vmatrix}$的值是 0 。

解析：考查行列式运算法则$\begin{vmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{6}\end{vmatrix}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{2}=0$

5. 圆$C:x^2+y^2-2x-4y+4=0$的圆心到直线$1:3x+4y+4=0$的距离$d=$ 3 。

解析：考查点到直线距离公式

圆心（1,2）到直线$3x+4y+4=0$距离为$\frac{|3\times1+4\times2+4|}{5}=3$

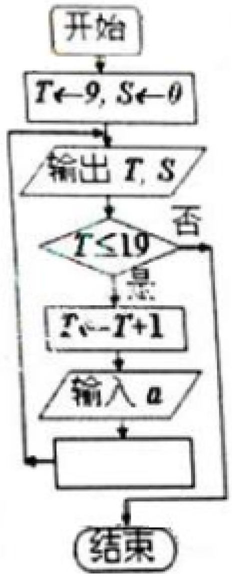
6. 随机变量ξ的概率分布率由下图给出：

| x | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| P($\xi=x$) | 0.3 | 0.35 | 0.2 | 0.15 |

则随机变量ξ的均值是 8.2 

解析：考查期望定义式Eξ=7×0.3+8×0.35+9×0.2+10×0.15=8.2

7.
2010年上海世博会园区每天9:00开园，20:00停止入园。在右边的框图中，$S$表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数，$a$表示整点报道前1个小时内入园人数，则空白的




执行框内应填入<u>　　S $\leftarrow$ S+a　　　</u>。

8.对任意不等于1的正数a，函数f(x)=$\log_a(x+3)$的反函数的图像都经过点P，则点P的坐标是<u>　（0，-2）　　　　　</u>

解析：f(x)=$\log_a(x+3)$的图像过定点（-2,0），所以其反函数的图像过定点（0，-2）

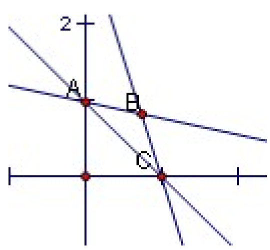
9．从一副混合后的扑克牌（52张）中随机抽取1张，事件A为"抽得红桃K"，事件B为"抽得为黑桃"，则概率P（A∪B）==$\dfrac{7}{26}$（结果用最简分数表示）

解析：考查互斥事件概率公式　P（A∪B）=$\dfrac{1}{52}+\dfrac{13}{52}=\dfrac{7}{26}$

10．在$n$行n列矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$中，

记位于第$i$行第$j$列的数为$a_{ij}(i,j=1,2\cdots,n)$。当$n=9$时，$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$<u>　45</u>。

解析：$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=1+3+5+7+9+2+4+6+8=45$



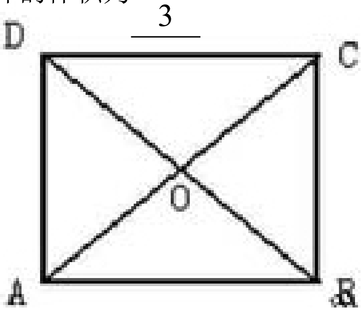

11.
将直线$l_2: nx+y-n=0$、$l_3: x+ny-n=0$（$n\in N^*$，$n\ge 2$）x轴

、y轴围成的封闭图形的面积记为$S_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$___1___。

解析：B$(\frac{n}{n+1},\frac{n}{n+1})$ 所以BO⊥AC，

$S_n=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{n}{n+1}\sqrt{2}=\frac{n}{n+1}$　所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

12．如图所示，在边长为4的正方形纸片ABCD中，AC与BD相交于O,剪去$\triangle AOB$,将剩余部分沿OC、OD折叠，使OA、OB重合，则以A、（B）、C、D、O为顶点的四面体的体积为$\frac{8\sqrt{2}}{3}$



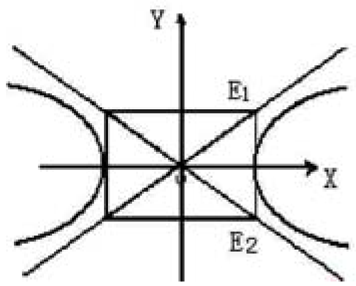

解析：翻折后的几何体为底面边长为4，侧棱长为$2\sqrt{2}$的正三棱锥，

高为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$所以该四面体的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

13。如图所示，直线x=2与双曲线$\Gamma:\frac{\lambda^2}{4}-y^2=1$的渐近线交于$E_1$，$E_2$两点，记

$\overrightarrow{OE_1}=\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{e_2}$，任取双曲线Γ上的点P，若$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ae_1},+\overrightarrow{be_2}(a、b\in R)$，则a、b满足的一个等式是___4ab=1___

解析：$E_1(2,1),E_2(2,-1)$




$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ae_1}+\overrightarrow{be_2}=(2a+2b,a-b)$，点P在双曲线上

$\therefore\frac{(2a+2b)^2}{4}-(a-b)^2=1$，化简得$4ab=1$

14. 以集合U=$\{a,\ b,\ c,\ d\}$的子集中选出2个不同的子集，需同时满足以下两个条件：

（1）a、b都要选出；

（2）对选出的任意两个子集A和B，必有$A\subseteq B$或$B\subseteq A$，那么共有__36__ 种不同的选法。

解析：列举法 共有36种

二．选择题（本大题满分20分）本大题共有4题，每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分。

15．“$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$”是“$\tan x=1$”成立的　　[答]（ A ）

（A）充分不必要条件.　　（B）必要不充分条件.

（C）充分条件.　　（D）既不充分也不必要条件.

解析：$\tan(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以充分；

但反之不成立，如$\tan\frac{5\pi}{4}=1$，所以不必要

16. 直线l的参数方程是$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \end{cases}$ $(t \in R)$，则l的方向向量是$\overline{d}$ 可以是 【答】（C）

(A)(1,2) (B)(2,1) (C)(-2,1) (D)(1,-2)

解析：直线l的一般方程是$x+2y-5=0$，$k=-\frac{1}{2}$，所以C正确

17. 若$x_0$是方程$(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{3}}$的解，则$x_0$属于区间 【答】（C）

(A)($\frac{2}{3}$,1) (B)($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$) (C)($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$) (D)(0, $\frac{1}{3}$)

解析：结合图形$\because \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，$\therefore x_0$属于区间($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$)

18. 某人要制作一个三角形，要求它的三条高的长度分别为$\frac{1}{13},\frac{1}{11},\frac{1}{5}$，则此人能

【答】（D）

（A）不能作出这样的三角形 （B）作出一个锐角三角形

（C）作出一个直角三角形 （D）作出一个钝角三角形

解析：设三边分别为a,b,c，利用面积相等可知

$$\frac{1}{13}a=\frac{1}{11}b=\frac{1}{5}c, \therefore a:b:c=13:11:5$$

由余弦定理得$\cos A=\frac{5^2+11^2-13^2}{2\times5\times11}<0$，所以角A为钝角

**三、解答题（本大题满分74分）本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。**

**19.（本题满分12分）**

**已知$0<x<\frac{\pi}{2}$，化简：**

$$\lg(\cos x\cdot\tan x+1-2\sin^2\frac{x}{2})+\lg[\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})]-\lg(1+\sin 2x).$$

=0

**20.（本题满分13分）本题共有2个小题，第一个小题满分5分，第2个小题满分8分。**

**已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$S_n=n-5a_n-85$，$n\in N^*$**

（1）证明：$\{a_n-1\}$是等比数列；

（2）求数列$\{S_n\}$的通项公式，并求出n为何值时，$S_n$取得最小值，并说明理由。

（2）$S_n=n+75(\frac{5}{6})^{n-1}-90$ n=15取得最小值

解析：(1) 当$n$=1时，$a_1$=−14；当$n$≥2时，$a_n$=$S_n$−$S_{n-1}$=−5$a_n$+5$a_{n-1}$+1，所以 $a_n-1=\frac{5}{6}(a_{n-1}-1)$，

又$a_1$−1=−15≠0，所以数列{$a_n$−1}是等比数列；

(2)

由(1)知：$a_n-1=-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$，得 $a_n=1-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$，从而 $S_n=75\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+n-90$ ($n$∈**N***)

；

解不等式$S_n$<$S_{n+1}$，得 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}<\frac{2}{5}$，$n>\log_{\frac{5}{6}}\frac{2}{25}+1\approx 14.9$，当$n$≥15时，数列{$S_n$}单调递增；

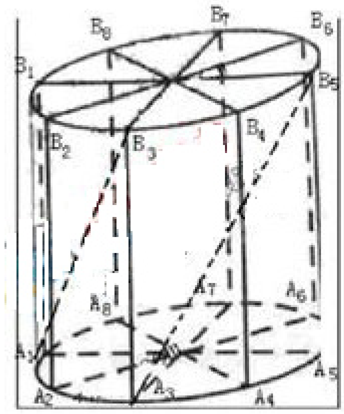
同理可得，当$n$≤15时，数列{$S_n$}单调递减；故当$n$=15时，$S_n$取得最小值．

**21、（本大题满分13分）本题共有2个小题，第1小题满分5分，第2小题满分8分.**

如图所示，为了制作一个圆柱形灯笼，先要制作4个全等的矩形骨架，总计耗用9.6米铁丝，骨架把圆柱底面8等份，再用S平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面（不安装上底面）.

(1)当圆柱底面半径 $r$ 取何值时，$S$ 取得最大值？并求出该最大值（结果精确到0.01平方米）；

（2）在灯笼内，以矩形骨架的顶点为点，安装一些霓虹灯，当灯笼的底面半径为0.3米时，求图中两根直线 $A_1B_3$ 与 $A_3B_5$ 所在异面直线所成角的大小（结果用反三角函数表示）




解析：(1)

设圆柱形灯笼的母线长为$l$，则$l$=1.2−2$r$(0<$r$<0.6)，$S$=−3$\pi$($r$−0.4)$^2$+0.48$\pi$，
所以当$r$=0.4时，$S$取得最大值约为1.51平方米；

(2) 当$r$=0.3时，$l$=0.6，建立空间直角坐标系，可得 $\overrightarrow{A_1B_3}=(-0.3,0.3,0.6)$，

$\overrightarrow{A_3B_5}=(-0.3,-0.3,0.6)$，

设向量 $\overrightarrow{A_1B_3}$ 与 $\overrightarrow{A_3B_5}$ 的夹角为$\theta$，则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{A_1B_3}\cdot\overrightarrow{A_3B_5}}{|\overrightarrow{A_1B_3}|\cdot|\overrightarrow{A_3B_5}|}=\frac{2}{3}$，

所以$A_1B_3$、$A_3B_5$所在异面直线所成角的大小为 $\arccos\frac{2}{3}$.

**22.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分10分。**

若实数 $x$ 、 $y$ 、 $m$ 满足 $|x-m|>|y-m|$，则称 $x$ 比 $y$ 远离 $m$ .

（1）若 $x^2-1$ 比1远离0，求 $x$ 的取值范围；

（2）对任意两个不相等的正数$a$、$b$，证明：$a^3+b^3$比$a^2b+ab^2$远离$2ab\sqrt{ab}$；

（3）已知函数$f(x)$的定义域D=｛x|x≠$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，k∈Z，x∈R｝.任取$x\in D$，$f(x)$等于$\sin x$和$\cos x$中远离0的那个值.写出函数$f(x)$的解析式，并指出它的基本性质（结论不要求证明）.

解析：(1) $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}.+\infty)$；

(2) 对任意两个不相等的正数$a$、$b$，有$a^3+b^3>2ab\sqrt{ab}$，$a^2b+ab^2>2ab\sqrt{ab}$，

因为$|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|-|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|=(a+b)(a-b)^2>0$，

所以$|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|>|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|$，即$a^3+b^3$比$a^2b+ab^2$远离$2ab\sqrt{ab}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & x\in(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4})\\ |\cos x|, & x\in(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4})\end{cases}$，

性质：1°$f(x)$是偶函数，图像关于$y$轴对称，2°$f(x)$是周期函数，最小正周期$T=\frac{\pi}{2}$，

3°函数$f(x)$在区间$(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}]$单调递增，在区间$[\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$单调递减，$k\in\mathbf{Z}$，

4°函数$f(x)$的值域为$(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$.

**23（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分.**

已知椭圆$\Gamma$的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点P的坐标为（-a，b）.

（1）若直角坐标平面上的点M、A(0,-b)，B(a，0)满足$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$,求点$M$的坐标；

（2）设直线$l_1:y=k_1x+p$交椭圆$\Gamma$于$C$、$D$两点，交直线$l_2:y=k_2x$于点$E$.若$k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}$，证明：$E$为$CD$的中点；

（3）对于椭圆$\Gamma$上的点Q（a cosθ，b sinθ）（0＜θ＜π），如果椭圆$\Gamma$上存在不同的两个交点$P_1$、$P_2$满足$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$,写出求作点$P_1$、$P_2$的步骤，并求出使$P_1$、$P_2$存在的θ的取值范围.

解析：(1) $M(\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$；

(2) 由方程组$\begin{cases} y=k_1x+p \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，消$y$得方程$(a^2k_1^2+b^2)x^2+2a^2k_1px+a^2(p^2-b^2)=0$，

因为直线$l_1: y=k_1x+p$交椭圆$\Gamma$于$C$、$D$两点，

所以$\Delta>0$，即$a^2k_1^2+b^2-p^2>0$，

设$C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，$CD$中点坐标为$(x_0,y_0)$，

则$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{a^2k_1p}{a^2k_1^2+b^2} \\ y_0=k_1x_0+p=\dfrac{b^2p}{a^2k_1^2+b^2} \end{cases}$，

由方程组$\begin{cases} y=k_1x+p \\ y=k_2x \end{cases}$，消$y$得方程$(k_2-k_1)x=p$，

又因为$k_2=-\dfrac{b^2}{a^2k_1}$，所以$\begin{cases} x=\dfrac{p}{k_2-k_1}=-\dfrac{a^2k_1p}{a^2k_1^2+b^2}=x_0 \\ y=k_2x=\dfrac{b^2p}{a^2k_1^2+b^2}=y_0 \end{cases}$，

故$E$为$CD$的中点；

(3) 求作点$P_1$、$P_2$的步骤：1°求出$PQ$的中点$E(-\dfrac{a(1-\cos\theta)}{2},\dfrac{b(1+\sin\theta)}{2})$，

2°求出直线$OE$的斜率$k_2=-\dfrac{b(1+\sin\theta)}{a(1-\cos\theta)}$，

3°由$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$知$E$为$CD$的中点，根据(2)可得$CD$的斜率$k_1=-\dfrac{b^2}{a^2k_2}=\dfrac{b(1-\cos\theta)}{a(1+\sin\theta)}$，

4°从而得直线$CD$的方程：$y-\dfrac{b(1+\sin\theta)}{2}=\dfrac{b(1-\cos\theta)}{a(1+\sin\theta)}(x+\dfrac{a(1-\cos\theta)}{2})$，

5°将直线$CD$与椭圆$\Gamma$的方程联立，方程组的解即为点$P_1$、$P_2$的坐标.

欲使$P_1$、$P_2$存在，必须点$E$在椭圆内，

所以$\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{4}+\dfrac{(1+\sin\theta)^2}{4}<1$，化简得$\sin\theta-\cos\theta<\dfrac{1}{2}$，$\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

又$0<\theta<\pi$，即$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$，所以$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

故$\theta$的取值范围是$(0,\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4})$.