2023 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^5}$，则 $\bar{z}=$（　　）

A. $1-2\mathrm{i}$　　　　B. $1+2\mathrm{i}$　　　　C. $2-\mathrm{i}$　　　　D. $2+\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意首先计算复数 z 的值，然后利用共轭复数的定义确定其共轭复数即可.

【详解】由题意可得 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^5}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-1+\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}^2}=\dfrac{2\mathrm{i}-1}{-1}=1-2\mathrm{i}$，

则 $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$.

故选：B.

2. 设集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|x<1\}$，$N=\{x|-1<x<2\}$，则 $\{x|x\geq 2\}=$（　　）

A. $\complement_U(M\cup N)$　　　　B. $N\cup\complement_U M$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　　　D. $M\cup\complement_U N$

【答案】A

【解析】

【分析】由题意逐一考查所给的选项运算结果是否为 $\{x\,|\,x\geq 2\}$ 即可.

【详解】由题意可得 $M\cup N=\{x\,|\,x<2\}$，则 $\complement_U(M\cup N)=\{x\,|\,x\geq 2\}$，选项 A 正确；

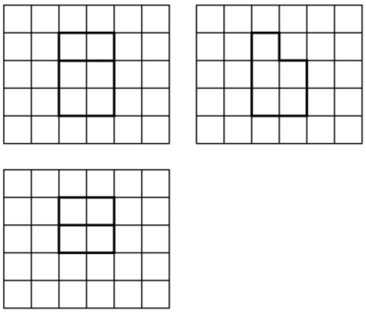
$\complement_U M=\{x\,|\,x\geq 1\}$，则 $N\cup\complement_U M=\{x\,|\,x>-1\}$，选项 B 错误；

$M\cap N=\{x\,|-1<x<1\}$，则 $\complement_U(M\cap N)=\{x\,|\,x\leq -1$ 或 $x\geq 1\}$，选项 C 错误；

$\complement_U N=\{x\,|\,x\leq -1$ 或 $x\geq 2\}$，则 $M\cup\complement_U N=\{x\,|\,x<1$ 或 $x\geq 2\}$，选项 D 错误；

故选：A.

3. 如图，网格纸上绘制的一个零件的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该零件的表面积为（　　）



A. 24　　B. 26　　C. 28　　D. 30

【答案】D

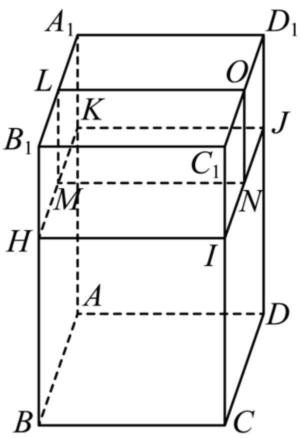
【解析】

【分析】由题意首先由三视图还原空间几何体，然后由所得的空间几何体的结构特征求解其表面积即可.

【详解】如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，$AA_1=3$，

点 H,I,J,K 为所在棱上靠近点 B_1,C_1,D_1,A_1 的三等分点，O,L,M,N 为所在棱的中点，

则三视图所对应的几何体为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 去掉长方体 $ONIC_1-LMHB_1$ 之后所得的几何体，



该几何体的表面积和原来的长方体的表面积相比少 2 个边长为 1 的正方形，

其表面积为：$2\times(2\times2)+4\times(2\times3)-2\times(1\times1)=30$.

故选：D.

4. 已知 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据偶函数的定义运算求解.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\dfrac{xe^{x}}{e^{ax}-1}$ 为偶函数，则 $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=\dfrac{xe^{x}}{e^{ax}-1}-\dfrac{\left(-x\right)e^{-x}}{e^{-ax}-1}=\dfrac{x\left[e^{x}-e^{(a-1)x}\right]}{e^{ax}-1}=0$，

又因为 x 不恒为 0，可得 $e^{x}-e^{(a-1)x}=0$，即 $e^{x}=e^{(a-1)x}$，

则 $x=\left(a-1\right)x$，即 $1=a-1$，解得 $a=2$.

故选：D.

5. 设 O 为平面坐标系的坐标原点，在区域 $\left\{\left(x,y\right)\middle|1\le x^{2}+y^{2}\le 4\right\}$ 内随机取一点，记该点为 A，则直线 OA 的倾斜角不大于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为（　　）

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

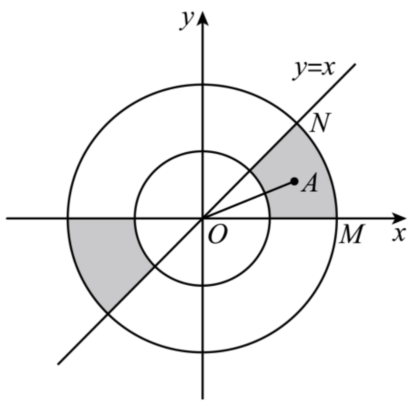
【分析】根据题意分析区域的几何意义，结合几何概型运算求解.

【详解】因为区域 $\left\{\left(x,y\right)|1\le x^{2}+y^{2}\le 4\right\}$ 表示以 $O\left(0,0\right)$ 圆心，外圆半径 $R=2$，内圆半径 $r=1$ 的圆环，

则直线 OA 的倾斜角不大于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的部分如阴影所示，在第一象限部分对应的圆心角 $\angle MON=\dfrac{\pi}{4}$，

结合对称性可得所求概率 $P=\dfrac{2\times\frac{\pi}{4}}{2\pi}=\dfrac{1}{4}$.

故选：C.



6. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增，直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像的两条对称轴，则 $f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=$（　　）

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意分别求出其周期，再根据其最小值求出初相，代入$x=-\frac{5\pi}{12}$即可得到答案.

【详解】因为$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$在区间$\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$单调递增，

所以$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，且$\omega>0$，则$T=\pi$，$w=\frac{2\pi}{T}=2$，

当$x=\frac{\pi}{6}$时，$f\left(x\right)$取得最小值，则$2\cdot\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

则$\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$，$k\in Z$，不妨取$k=0$，则$f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$，

则$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故选：D.

7. 甲乙两位同学从 6 种课外读物中各自选读 2 种，则这两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有（　　）

A. 30 种　　B. 60 种　　C. 120 种　　D. 240 种

【答案】C

【解析】

【分析】相同读物有 6 种情况，剩余两种读物的选择再进行排列，最后根据分步乘法公式即可得到答案.

【详解】首先确定相同得读物，共有C_6^1种情况，

然后两人各自的另外一种读物相当于在剩余的 5 种读物里，选出两种进行排列，共有A_5^2种，

根据分步乘法公式则共有$C_6^1\cdot A_5^2=120$种，

故选：C.

8. 已知圆锥PO的底面半径为$\sqrt{3}$，O为底面圆心，PA，PB为圆锥的母线，$\angle AOB=120°$，若$\triangle PAB$的面积等于$\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为（　　）

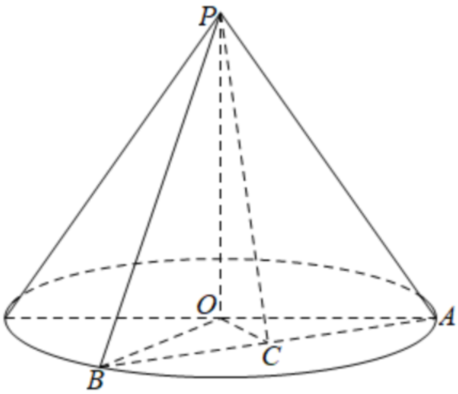
A. π　　B. $\sqrt{6}\pi$　　C. 3π　　D. $3\sqrt{6}\pi$

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用三角形面积公式求出圆锥的母线长，进而求出圆锥的高，求出体积作答.

【详解】在 $\triangle AOB$ 中，$\angle AOB=120^\circ$，而 $OA=OB=\sqrt{3}$，取 AC 中点 C，连接 OC,PC，有 $OC\perp AB,PC\perp AB$，如图，



$\angle ABO=30^\circ$，$OC=\dfrac{\sqrt{3}}{2},AB=2BC=3$，由 $\triangle PAB$ 的面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，得 $\dfrac{1}{2}\times 3\times PC=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，

解得 $PC=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，于是 $PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\sqrt{(\dfrac{3\sqrt{3}}{2})^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{6}$，

所以圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times OA^2\times PO=\dfrac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{6}=\sqrt{6}\pi$.

故选：B

9. 已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，AB 为斜边，$\triangle ABD$ 为等边三角形，若二面角 $C-AB-D$ 为 150°，则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

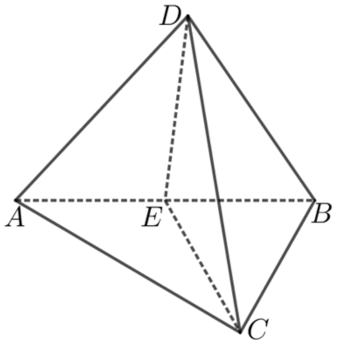
【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，推导确定线面角，再利用余弦定理、正弦定理求解作答.

【详解】取 AB 的中点 E，连接 CE,DE，因为 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，且 AB 为斜边，则有 $CE\perp AB$，

又 $\triangle ABD$ 是等边三角形，则 $DE\perp AB$，从而 $\angle CED$ 为二面角 $C-AB-D$ 的平面角，即 $\angle CED=150^\circ$，



显然$CE\cap DE=E,CE,DE\subset$平面CDE，于是$AB\perp$平面CDE，又$AB\subset$平面ABC，

因此平面$CDE\perp$平面ABC，显然平面$CDE\cap$平面$ABC=CE$，

直线$CD\subset$平面CDE，则直线CD在平面ABC内的射影为直线CE，

从而$\angle DCE$为直线CD与平面ABC所成的角，令$AB=2$，则$CE=1,DE=\sqrt{3}$，在$\triangle CDE$中，由余弦定理得：

$CD=\sqrt{CE^2+DE^2-2CE\cdot DE\cos\angle CED}=\sqrt{1+3-2\times1\times\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\sqrt{7}$，

由正弦定理得$\frac{DE}{\sin\angle DCE}=\frac{CD}{\sin\angle CED}$，即$\sin\angle DCE=\frac{\sqrt{3}\sin150^\circ}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，

显然$\angle DCE$是锐角，$\cos\angle DCE=\sqrt{1-\sin^2\angle DCE}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}})^2}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$，

所以直线CD与平面ABC所成的角的正切为$\frac{\sqrt{3}}{5}$.

故选：C

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$\frac{2\pi}{3}$，集合$S=\left\{\cos a_n \middle| n\in\mathrm{N}^*\right\}$，若$S=\{a,b\}$，则$ab=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定的等差数列，写出通项公式，再结合余弦型函数的周期及集合只有两个元素分析、推理作答.

【详解】依题意，等差数列$\{a_n\}$中，$a_n=a_1+(n-1)\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}n+(a_1-\frac{2\pi}{3})$，

显然函数$y=\cos[\frac{2\pi}{3}n+(a_1-\frac{2\pi}{3})]$的周期为3，而$n\in\mathrm{N}^*$，即$\cos a_n$最多3个不同取值，又

$\{\cos a_n \mid n \in \mathrm{N}^*\} = \{a, b\}$，

则在 $\cos a_1, \cos a_2, \cos a_3$ 中， $\cos a_1 = \cos a_2 \neq \cos a_3$ 或 $\cos a_1 \neq \cos a_2 = \cos a_3$，

于是有 $\cos\theta = \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})$，即有 $\theta + (\theta + \frac{2\pi}{3}) = 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$，解得 $\theta = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathrm{Z}$，

所以 $k \in \mathrm{Z}$， $ab = \cos(k\pi - \frac{\pi}{3})\cos[(k\pi - \frac{\pi}{3}) + \frac{4\pi}{3}] = -\cos(k\pi - \frac{\pi}{3})\cos k\pi = -\cos^2 k\pi \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

故选：B

11. 设 A，B 为双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ 上两点，下列四个点中，可为线段 AB 中点的是（　　）

A. $(1,1)$　　　　B. $(-1,2)$　　　　C. $(1,3)$　　　　D. $(-1,-4)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据点差法分析可得 $k_{AB} \cdot k = 9$，对于 A、B、D：通过联立方程判断交点个数，逐项分析判断；

对于 C：结合双曲线的渐近线分析判断.

【详解】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，则 AB 的中点 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$，

可得 $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, k = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$，

因为 A, B 在双曲线上，则 $\begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{9} = 1 \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{9} = 1 \end{cases}$，两式相减得 $(x_1^2 - x_2^2) - \frac{y_1^2 - y_2^2}{9} = 0$，

所以 $k_{AB} \cdot k = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = 9$.

对于选项 A： 可得 $k = 1, k_{AB} = 9$，则 $AB: y = 9x - 8$，

联立方程 $\begin{cases} y = 9x - 8 \\ x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$，消去 y 得 $72x^2 - 2 \times 72x + 73 = 0$，

此时 $\Delta = (-2 \times 72)^2 - 4 \times 72 \times 73 = -288 < 0$，

所以直线 AB 与双曲线没有交点，故 A 错误；

对于选项 B：可得 $k=-2,k_{AB}=-\frac{9}{2}$，则 $AB:y=-\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$，

联立方程 $\begin{cases}y=-\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}\\x^2-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$，消去 y 得 $45x^2+2\times45x+61=0$，

此时 $\Delta=(2\times45)^2-4\times45\times61=-4\times45\times16<0$，

所以直线 AB 与双曲线没有交点，故 B 错误；

对于选项 C：可得 $k=3,k_{AB}=3$，则 $AB:y=3x$

由双曲线方程可得 $a=1,b=3$，则 $AB:y=3x$ 为双曲线的渐近线，

所以直线 AB 与双曲线没有交点，故 C 错误；

对于选项 D：$k=4,k_{AB}=\frac{9}{4}$，则 $AB:y=\frac{9}{4}x-\frac{7}{4}$，

联立方程 $\begin{cases}y=\frac{9}{4}x-\frac{7}{4}\\x^2-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$，消去 y 得 $63x^2+126x-193=0$，

此时 $\Delta=126^2+4\times63\times193>0$，故直线 AB 与双曲线有交两个交点，故 D 正确；

故选：D.

12. 已知 $\odot O$ 的半径为 1，直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A，直线 PB 与 $\odot O$ 交于 B，C 两点，D 为 BC 的中点，若 $|PO|=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　　　B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

C. $1+\sqrt{2}$　　　　D. $2+\sqrt{2}$

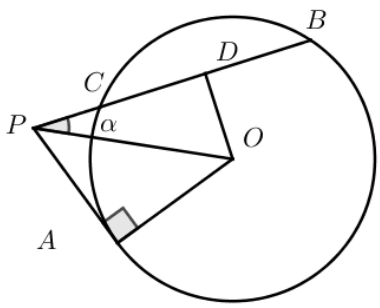
【答案】A

【解析】

【分析】由题意作出示意图，然后分类讨论，利用平面向量的数量积定义可得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，或 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 然后结合三角函数的性质即可确定 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值.

【详解】如图所示，$|OA|=1,|OP|=\sqrt{2}$，则由题意可知: $\angle APO=45^\circ$，

由勾股定理可得 $PA=\sqrt{OP^{2}-OA^{2}}=1$



当点 A,D 位于直线 PO 异侧时，设 $\angle OPC=\alpha,0\le\alpha\le\frac{\pi}{4}$，

则：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PD}|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$=1\times\sqrt{2}\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$

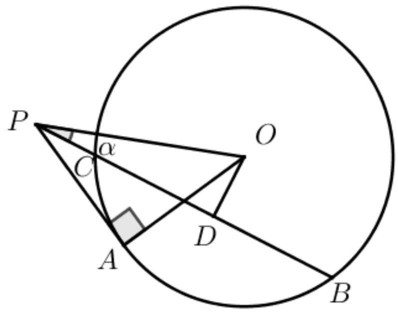
$=\cos^{2}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$

$=\frac{1+\cos2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin2\alpha$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$0\le\alpha\le\frac{\pi}{4}$，则 $-\frac{\pi}{4}\le2\alpha-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ 当 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 有最大值 1.



当点 A,D 位于直线 PO 同侧时，设 $\angle OPC=\alpha,0\le\alpha\le\frac{\pi}{4}$，

则：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PD}|\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=1\times\sqrt{2}\cos\alpha\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\cos\alpha\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$

$=\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$

$=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{4}$，则$\dfrac{\pi}{4}\le 2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$当$2\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$有最大值$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

综上可得，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$的最大值为$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

故选：A.

【点睛】本题的核心在于能够正确作出示意图，然后将数量积的问题转化为三角函数求最值的问题，考查了学生对于知识的综合掌握程度和灵活处理问题的能力.

二、填空题

13. 已知点$A\left(1,\sqrt{5}\right)$在抛物线C：$y^2=2px$上，则A到C的准线的距离为______.

【答案】$\dfrac{9}{4}$

【解析】

【分析】由题意首先求得抛物线的标准方程，然后由抛物线方程可得抛物线的准线方程为$x=-\dfrac{5}{4}$，最后利用点的坐标和准线方程计算点A到C的准线的距离即可.

【详解】由题意可得：$\left(\sqrt{5}\right)^2=2p\times1$，则$2p=5$，抛物线的方程为$y^2=5x$，

准线方程为$x=-\dfrac{5}{4}$，点A到C的准线的距离为$1-\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{9}{4}$.

故答案为：$\dfrac{9}{4}$.

14. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-3y\le -1 \\ x+2y\le 9 \\ 3x+y\ge 7 \end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最大值为______.

【答案】8

【解析】

【分析】作出可行域，转化为截距最值讨论即可.

【详解】作出可行域如下图所示：

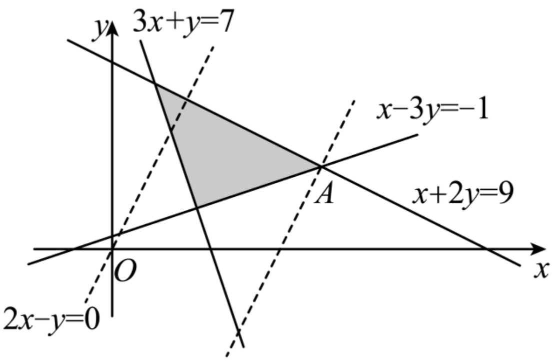
$z=2x-y$，移项得 $y=2x-z$，

联立有 $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x+2y=9 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$，

设 $A(5,2)$，显然平移直线 $y=2x$ 使其经过点 A，此时截距 $-z$ 最小，则 z 最大，

代入得 $z=8$，

故答案为：8.



15. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2a_4a_5=a_3a_6$，$a_9a_{10}=-8$，则 $a_7=$______.

【答案】-2

【解析】

【分析】根据等比数列公式对 $a_2a_4a_5=a_3a_6$ 化简得 $a_1q=1$，联立 $a_9a_{10}=-8$ 求出 $q^3=-2$，最后得 $a_7=a_1q\cdot q^5=q^5=-2$.

【详解】设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\ne 0)$，则 $a_2a_4a_5=a_3a_6=a_2q\cdot a_5q$，显然 $a_n\ne 0$，

则 $a_4=q^2$，即 $a_1q^3=q^2$，则 $a_1q=1$，因为 $a_9a_{10}=-8$，则 $a_1q^8\cdot a_1q^9=-8$，

则 $q^{15}=\left(q^5\right)^3=-8=(-2)^3$，则 $q^3=-2$，则 $a_7=a_1q\cdot q^5=q^5=-2$，

故答案为：-2.

16. 设 $a\in(0,1)$，若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是______.

【答案】$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$

【解析】

【分析】原问题等价于 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq 0$ 恒成立，据此将所得的不等式进行恒等变形，可得 $\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geq -\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$，由右侧函数的单调性可得实数 a 的二次不等式，求解二次不等式后可确定实数 a 的取值范围.

【详解】由函数的解析式可得 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

则 $(1+a)^x\ln(1+a)\geq -a^x\ln a$，即 $\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geq -\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

故 $\left(\frac{1+a}{a}\right)^0=1\geq -\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$，而 $a+1\in(1,2)$，故 $\ln(1+a)>0$，

故 $\begin{cases}\ln(a+1)\geq -\ln a\\ 0<a<1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a(a+1)\geq 1\\ 0<a<1\end{cases}$，故 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq a<1$，

结合题意可得实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

故答案为：$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

三、解答题

17. 某厂为比较甲乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，进行 10 次配对试验，每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品，随机地选其中一个用甲工艺处理，另一个用乙工艺处理，测量处理后的橡胶产品的伸缩率，甲、乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别记为 x_i，y_i（$i=1,2,\cdots 10$），试验结果如下

试验序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
伸缩率 x_i	545	533	551	522	575	544	541	568	596	548
伸缩率 y_i	536	527	543	530	560	533	522	550	576	536

记 $z_i=x_i-y_i(i=1,2,\cdots,10)$，记 z_1，z_2，…，z_{10} 的样本平均数为 $\bar{z}$，样本方差为 s^2，

（1）求$\overline{z}$，s^2；

（2）判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高（如果$\overline{z} \geq 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$，则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高，否则不认为有显著提高）．

【答案】（1）$\overline{z}=11$，$s^2=61$；

（2）认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高.

【解析】

【分析】（1）直接利用平均数公式即可计算出$\overline{x},\overline{y}$，再得到所有的$z_i$值，最后计算出方差即可；

（2）根据公式计算出$2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$的值，和$\overline{z}$比较大小即可.

【小问1详解】

$$\overline{x}=\frac{545+533+551+522+575+544+541+568+596+548}{10}=552.3,$$

$$\overline{y}=\frac{536+527+543+530+560+533+522+550+576+536}{10}=541.3,$$

$$\overline{z}=\overline{x}-\overline{y}=552.3-541.3=11,$$

$z_{\rm i}=x_{\rm i}-y_{\rm i}$ 的值分别为: $9,6,8,-8,15,11,19,18,20,12$,

故$s^2=\frac{(9-11)^2+(6-11)^2+(8-11)^2+(-8-11)^2+(15-11)^2+0+(19-11)^2+(18-11)^2+(20-11)^2+(12-11)^2}{10}=61$

【小问2详解】

由（1）知:$\overline{z}=11$，$2\sqrt{\frac{s^2}{10}}=2\sqrt{6.1}=\sqrt{24.4}$，故有$\overline{z}\geq 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$,

所以认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高.

18. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$.

（1）求$\sin\angle ABC$；

（2）若D为BC上一点，且$\angle BAD=90°$，求$\triangle ADC$的面积.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{21}}{14}$；

（2）$\frac{\sqrt{3}}{10}$.

【解析】

【分析】(1)首先由余弦定理求得边长BC的值为$BC=\sqrt{7}$，然后由余弦定理可得$\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，最后由同角三角函数基本关系可得$\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}$；

(2)由题意可得$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=4$，则$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}$，据此即可求得$\triangle ADC$的面积.

【小问 1 详解】

由余弦定理可得：

$BC^2=a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=4+1-2\times 2\times 1\times\cos 120^\circ=7$，

则$BC=\sqrt{7}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7+4-1}{2\times 2\times\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，

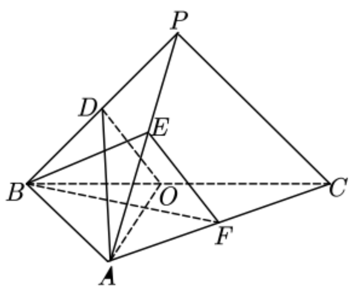
$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{25}{28}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

【小问 2 详解】

由三角形面积公式可得$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\times AB\times AD\times\sin 90^\circ}{\frac{1}{2}\times AC\times AD\times\sin 30^\circ}=4$，

则$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin 120^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{10}$.

19. 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC的中点分别为D，E，O，$AD=\sqrt{5}DO$，点F在AC上，$BF\perp AO$.



（1）证明：$EF//$平面ADO；

（2）证明：平面 $ADO \perp$ 平面 BEF；

（3）求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值.

【答案】（1）证明见解析；

（2）证明见解析；　　（3）$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】

【分析】（1）根据给定条件，证明四边形 $ODEF$ 为平行四边形，再利用线面平行的判定推理作答.

（2）由（1）的信息，结合勾股定理的逆定理及线面垂直、面面垂直的判定推理作答.

（3）由（2）的信息作出并证明二面角的平面角，再结合三角形重心及余弦定理求解作答.

【小问 1 详解】

连接 DE,OF，设 $AF=tAC$，则 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$BF \perp AO$，

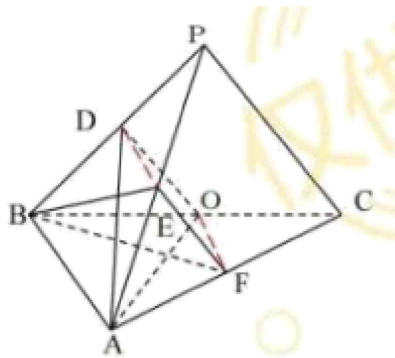
则 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AO}=[(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}]\cdot(-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})=(t-1)\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{2}t\overrightarrow{BC^2}=4(t-1)+4t=0$，

解得 $t=\frac{1}{2}$，则 F 为 AC 的中点，由 D,E,O,F 分别为 PB,PA,BC,AC 的中点，

于是 $DE//AB,DE=\frac{1}{2}AB,OF//AB,OF\ =\frac{1}{2}AB$，即 $DE//OF,DE=OF$，则四边形 $ODEF$ 为平行四边形，

$EF//DO,EF\ =DO$，又 $EF\not\subset$ 平面 $ADO,DO\subset$ 平面 ADO，

所以 $EF//$ 平面 ADO.



【小问 2 详解】

由（1）可知 $EF//OD$，则 $AO=\sqrt{6},DO=\frac{\sqrt{6}}{2}$，得 $AD=\sqrt{5}DO=\frac{\sqrt{30}}{2}$，

因此 $OD^2+AO^2=AD^2=\frac{15}{2}$，则 $OD\perp AO$，有 $EF\perp AO$，

又 $AO\perp BF,BF\cap EF=F$，$BF,EF\subset$ 平面 BEF，

则有 $AO\perp$ 平面 BEF，又 $AO\subset$ 平面 ADO，所以平面 $ADO\perp$ 平面 $\mathrm{B}EF$.

【小问 3 详解】

过点 O 作 $OH//BF$ 交 AC 于点 H，设 $AD\cap BE=G$，

由 $AO\perp BF$，得 $HO\perp AO$，且 $FH=\frac{1}{3}AH$，

又由（2）知，$OD\perp AO$，则 $\angle DOH$ 为二面角 $D-AO-C$ 的平面角，

因为 D,E 分别为 PB,PA 的中点，因此 G 为 $\triangle PAB$ 的重心，

即有 $DG=\frac{1}{3}AD,GE=\frac{1}{3}BE$，又 $FH=\frac{1}{3}AH$，即有 $DH=\frac{3}{2}GF$，

$\cos\angle ABD=\dfrac{4+\frac{3}{2}-\frac{15}{2}}{2\times2\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{4+6-PA^2}{2\times2\times\sqrt{6}}$，解得 $PA=\sqrt{14}$，同理得 $BE=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

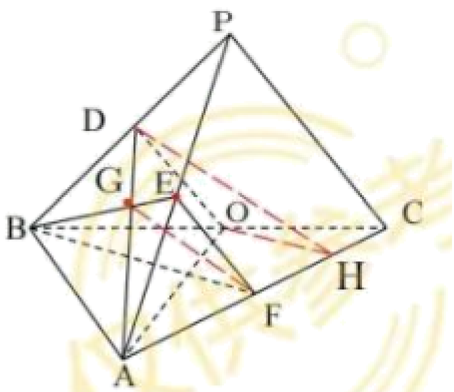
于是 $BE^2+EF^2=BF^2=3$，即有 $BE\perp EF$，则 $GF^2=\left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{5}{3}$，

从而 $GF=\frac{\sqrt{15}}{3}$，$DH=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

在 $\triangle DOH$ 中，$OH=\frac{1}{2}BF=\frac{\sqrt{3}}{2},OD=\frac{\sqrt{6}}{2},DH=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

于是 $\cos\angle DOH=\dfrac{\frac{6}{4}+\frac{3}{4}-\frac{15}{4}}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\angle DOH=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以二面角 $D-AO-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



20. 已知椭圆 C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，点 $A\left(-2,0\right)$ 在 C 上.

（1）求 C 的方程;

（2）过点$\left(-2,3\right)$的直线交 C 于点 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与 y 轴的交点分别为 M，N，证明：线段 MN 的中点为定点.

【答案】（1）$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$

（2）证明见详解

【解析】

【分析】（1）根据题意列式求解a,b,c，进而可得结果；

（2）设直线PQ的方程，进而可求点M,N的坐标，结合韦达定理验证$\frac{y_M+y_N}{2}$为定值即可.

【小问 1 详解】

由题意可得$\begin{cases} b=2 \\ a^2=b^2+c^2 \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}$，

所以椭圆方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$.

【小问 2 详解】

由题意可知：直线PQ的斜率存在，设$PQ:y=k\left(x+2\right)+3,P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，

联立方程$\begin{cases} y=k\left(x+2\right)+3 \\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1 \end{cases}$，消去 y 得：$\left(4k^2+9\right)x^2+8k\left(2k+3\right)x+16\left(k^2+3k\right)=0$，

则$\Delta=64k^2\left(2k+3\right)^2-64\left(4k^2+9\right)\left(k^2+3k\right)=-1728k>0$，解得$k<0$，

可得$x_1+x_2=-\frac{8k\left(2k+3\right)}{4k^2+9},x_1x_2=\frac{16\left(k^2+3k\right)}{4k^2+9}$，

因为$A\left(-2,0\right)$，则直线$AP:y=\frac{y_1}{x_1+2}\left(x+2\right)$，

令$x=0$，解得$y=\frac{2y_1}{x_1+2}$，即$M\left(0,\frac{2y_1}{x_1+2}\right)$，

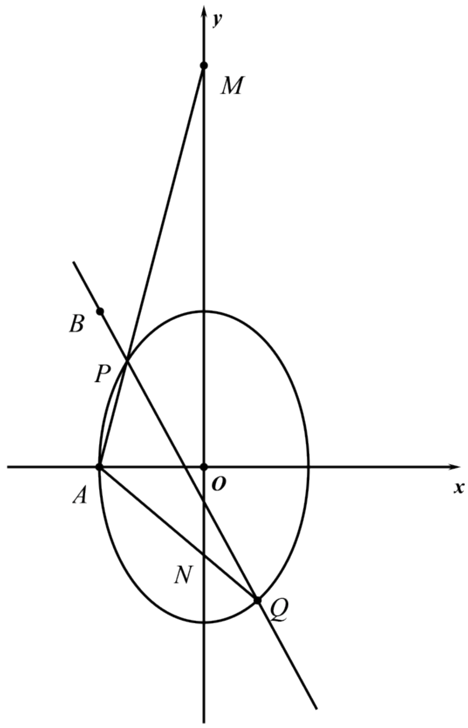
同理可得$N\left(0,\frac{2y_2}{x_2+2}\right)$，

则 $\dfrac{\dfrac{2y_1}{x_1+2}+\dfrac{2y_2}{x_2+2}}{2}=\dfrac{\left[k\left(x_1+2\right)+3\right]}{x_1+2}+\dfrac{\left[k\left(x_2+2\right)+3\right]}{x_2+2}$

$=\dfrac{\left[kx_1+\left(2k+3\right)\right]\left(x_2+2\right)+\left[kx_2+\left(2k+3\right)\right]\left(x_1+2\right)}{\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)}=\dfrac{2kx_1x_2+\left(4k+3\right)\left(x_1+x_2\right)+4\left(2k+3\right)}{x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4}$

$=\dfrac{\dfrac{32k\left(k^2+3k\right)}{4k^2+9}-\dfrac{8k\left(4k+3\right)\left(2k+3\right)}{4k^2+9}+4\left(2k+3\right)}{\dfrac{16\left(k^2+3k\right)}{4k^2+9}-\dfrac{16k\left(2k+3\right)}{4k^2+9}+4}=\dfrac{108}{36}=3$，

所以线段 PQ 的中点是定点 $\left(0,3\right)$.



【点睛】方法点睛：求解定值问题的三个步骤

（1）由特例得出一个值，此值一般就是定值；

（2）证明定值，有时可直接证明定值，有时将问题转化为代数式，可证明该代数式与参数(某些变量)无关；也可令系数等于零，得出定值；

（3）得出结论.

21. 已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$.

（1）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）是否存在 a，b，使得曲线 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 关于直线 $\mathrm{x}=\mathrm{b}$ 对称，若存在，求 a，b 的值，若不存在，说明

理由.

（3）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 存在极值，求 a 的取值范围.

【答案】（1） $\left(\ln 2\right)x+y-\ln 2=0$；

（2）存在 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$ 满足题意，理由见解析.

（3） $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

【解析】

【分析】(1)由题意首先求得导函数的解析式，然后由导数的几何意义确定切线的斜率和切点坐标，最后求解切线方程即可；

(2)首先求得函数的定义域，由函数的定义域可确定实数 b 的值，进一步结合函数的对称性利用特殊值法可得关于实数 a 的方程，解方程可得实数 a 的值，最后检验所得的 a,b 是否正确即可；

(3)原问题等价于导函数有变号的零点，据此构造新函数 $g\left(x\right)=ax^2+x-\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)$，然后对函数求导，利用切线放缩研究导函数的性质，分类讨论 $a\le 0$，$a\ge\frac{1}{2}$ 和 $0<a<\frac{1}{2}$ 三中情况即可求得实数 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

当 $a=-1$ 时，$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln\left(x+1\right)$，

则 $f'\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}\times\ln\left(x+1\right)+\left(\frac{1}{x}-1\right)\times\frac{1}{x+1}$，

据此可得 $f\left(1\right)=0,f'\left(1\right)=-\ln 2$，

函数在 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-0=-\ln 2\left(x-1\right)$，

即 $\left(\ln 2\right)x+y-\ln 2=0$.

【小问 2 详解】

由函数的解析式可得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(x+a\right)\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$，

函数的定义域满足 $\frac{1}{x}+1=\frac{x+1}{x}>0$，即函数的定义域为 $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，

定义域关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，由题意可得 $b=-\frac{1}{2}$，

由对称性可知 $f\left(-\frac{1}{2}+m\right)=f\left(-\frac{1}{2}-m\right)\left(m>\frac{1}{2}\right)$，

取 $m=\frac{3}{2}$ 可得 $f(1)=f(-2)$，

即 $(a+1)\ln 2=(a-2)\ln\frac{1}{2}$，则 $a+1=2-a$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

经检验 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$ 满足题意，故 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$.

即存在 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$ 满足题意.

【小问3详解】

由函数的解析式可得 $f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\frac{1}{x+1}$，

由 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在极值点，则 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点;

令 $\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\frac{1}{x+1}=0$，

则 $-(x+1)\ln(x+1)+\left(x+ax^2\right)=0$，

令 $g(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)$，

$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在极值点，等价于 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点，

$g'(x)=2ax-\ln(x+1),g''(x)=2a-\frac{1}{x+1}$

当 $a\le 0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

此时 $g(x)<g(0)=0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点，不合题意;

当 $a\ge\frac{1}{2}$，$2a\ge 1$ 时，由于 $\frac{1}{x+1}<1$，所以 $g''(x)>0,g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x)>g'(0)=0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点，不符合题意;

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $g''(x)=2a-\frac{1}{x+1}=0$ 可得 $x=\frac{1}{2a}-1$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2a}-1\right)$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{1}{2a}-1,+\infty\right)$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，

故 $g'(x)$ 的最小值为 $g'\left(\frac{1}{2a}-1\right)=1-2a+\ln 2a$，

令 $m(x)=1-x+\ln x(0<x<1)$，则 $m'(x)=\frac{-x+1}{x}>0$，

函数 $m(x)$ 在定义域内单调递增，$m(x)<m(1)=0$，

据此可得 $1-x+\ln x<0$ 恒成立，

则 $g'\left(\frac{1}{2a}-1\right)=1-2a+\ln 2a<0$，

令 $h(x)=\ln x-x^2+x(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{-2x^2+x+1}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，

故 $h(x)\le h(1)=0$，即 $\ln x\le x^2-x$ (取等条件为 $x=1$)，

所以 $g'(x)=2ax-\ln(x+1)>2ax-\left[(x+1)^2-(x+1)\right]=2ax-(x^2+x)$，

$g'(2a-1)>2a(2a-1)-\left[(2a-1)^2+(2a-1)\right]=0$，且注意到 $g'(0)=0$，

根据零点存在性定理可知: $g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x_0)<g(0)=0$.

令 $n(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，则 $n'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}\le 0$，

则 $n(x)$ 单调递减，注意到 $n(1)=0$，

故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$，从而有 $\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，

所以 $g(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)$

$>ax^2+x-(x+1)\times\frac{1}{2}\left[(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]$

$=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{1}{2}$，

令$\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{1}{2}=0$得$x_2=\sqrt{\frac{1}{1-2a}}$，所以$g\left(\sqrt{\frac{1}{1-2a}}\right)>0$，

所以函数$g\left(x\right)$在区间$\left(0,+\infty\right)$上存在变号零点，符合题意.

综合上面可知:实数a得取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

【点睛】(1)求切线方程的核心是利用导函数求切线的斜率，求函数的导数要准确地把函数拆分成基本初等函数的和、差、积、商，再利用运算法则求导，合函数求导，应由外到内逐层求导，必要时要进行换元.

(2)根据函数的极值(点)求参数的两个要领：①列式:根据极值点处导数为0和极值这两个条件列方程组，利用待定系数法求解;②验证:求解后验证根的合理性.本题中第二问利用对称性求参数值之后也需要进行验证.

四、选做题

【选修 4-4】（10 分）

22. 在直角坐标系xOy中，以坐标原点O为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_1的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$，曲线$C_2$：$\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$）.

（1）写出C_1的直角坐标方程；

（2）若直线$y=x+m$既与C_1没有公共点，也与C_2没有公共点，求m的取值范围.

【答案】（1）$x^2+\left(y-1\right)^2=1,x\in\left[0,1\right],y\in\left[1,2\right]$

（2）$\left(-\infty,0\right)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）根据极坐标与直角坐标之间的转化运算求解，注意x,y的取值范围；

（2）根据曲线C_1,C_2的方程，结合图形通过平移直线$y=x+m$分析相应的临界位置，结合点到直线的距离公式运算求解即可.

【小问 1 详解】

因为$\rho=2\sin\theta$，即$\rho^2=2\rho\sin\theta$，可得$x^2+y^2=2y$，

整理得$x^2+\left(y-1\right)^2=1$，表示以$\left(0,1\right)$为圆心，半径为1的圆，

又因为 $x=\rho\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta, y=\rho\sin\theta=2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta$，

且 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}\le 2\theta\le\pi$，则 $x=\sin 2\theta\in[0,1], y=1-\cos 2\theta\in[1,2]$，

故 $C_1: x^2+(y-1)^2=1, x\in[0,1], y\in[1,2]$.

【小问 2 详解】

因为 $C_2:\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$），

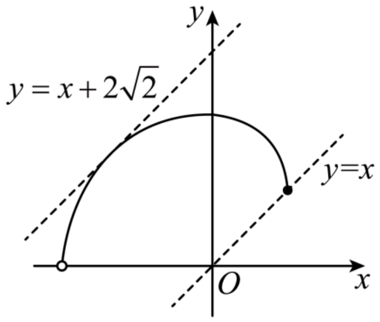
整理得 $x^2+y^2=4$，表示圆心为 $O(0,0)$，半径为 2，且位于第二象限的圆弧，

如图所示，若直线 $y=x+m$ 过 $(1,1)$，则 $1=1+m$，解得 $m=0$；

若直线 $y=x+m$，即 $x-y+m=0$ 与 C_2 相切，则 $\begin{cases}\frac{|m|}{\sqrt{2}}=2\\m>0\end{cases}$，解得 $m=2\sqrt{2}$，

若直线 $y=x+m$ 与 C_1, C_2 均没有公共点，则 $m>2\sqrt{2}$ 或 $m<0$，

即实数 m 的取值范围 $(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$.



【选修 4-5】（10 分）

23. 已知 $f(x)=2|x|+|x-2|$.

（1）求不等式 $f(x)\le 6-x$ 的解集；

（2）在直角坐标系 xOy 中，求不等式组 $\begin{cases}f(x)\le y\\x+y-6\le 0\end{cases}$ 所确定的平面区域的面积.

【答案】（1）$[-2,2]$；

（2）6.

【解析】

【分析】（1）分段去绝对值符号求解不等式作答.

（2）作出不等式组表示的平面区域，再求出面积作答.

【小问 1 详解】

依题意，$f(x)=\begin{cases}3x-2,x>2\\x+2,0\le x\le 2\\-3x+2,x<0\end{cases}$，

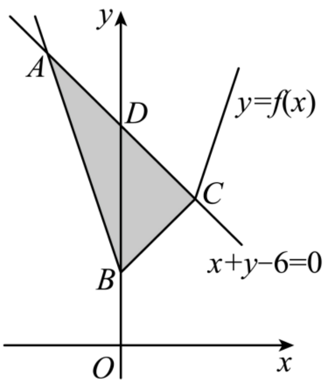
不等式 $f(x)\le 6-x$ 化为：$\begin{cases}x>2\\3x-2\le 6-x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0\le x\le 2\\x+2\le 6-x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\-3x+2\le 6-x\end{cases}$，

解 $\begin{cases}x>2\\3x-2\le 6-x\end{cases}$，得无解；解 $\begin{cases}0\le x\le 2\\x+2\le 6-x\end{cases}$，得 $0\le x\le 2$，解 $\begin{cases}x<0\\-3x+2\le 6-x\end{cases}$，得 $-2\le x<0$，因此 $-2\le x\le 2$，

所以原不等式的解集为：$[-2,2]$

【小问 2 详解】

作出不等式组 $\begin{cases}f(x)\le y\\x+y-6\le 0\end{cases}$ 表示的平面区域，如图中阴影 $\triangle ABC$，



由 $\begin{cases}y=-3x+2\\x+y=6\end{cases}$，解得 $A(-2,8)$，由 $\begin{cases}y=x+2\\x+y=6\end{cases}$，解得 $C(2,4)$，又 $B(0,2),D(0,6)$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|BD|\times|x_C-x_A|=\frac{1}{2}|6-2|\times|2-(-2)|=8$.