2013年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题共12小题．每小题5分，共60分．在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的一项．

1．（5分）已知集合A={1，2，3，4}，B={x|x=n²，n∈A}，则A∩B=（　　）

A．{1，4}　　B．{2，3}　　C．{9，16}　　D．{1，2}

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】由集合A中的元素分别平方求出x的值，确定出集合B，找出两集合的公共元素，即可求出交集．

【解答】解：根据题意得：x=1，4，9，16，即B={1，4，9，16}，

∵A={1，2，3，4}，

∴A∩B={1，4}．

故选：A．

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．（5分）$\frac{1+2i}{(1-i)^2}$=（　　）

A．$-1-\frac{1}{2}i$　　B．$-1+\frac{1}{2}i$　　C．$1+\frac{1}{2}i$　　D．$1-\frac{1}{2}i$

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题．

【分析】利用分式的分母平方，复数分母实数化，运算求得结果．

【解答】解：$\frac{1+2i}{(1-i)^2}=\frac{1+2i}{-2i}=\frac{(1+2i)i}{-2i\cdot i}=\frac{-2+i}{2}=-1+\frac{1}{2}i$．

故选：B．

【点评】本题考查复数代数形式的混合运算，复数的乘方运算，考查计算能力．

3．（5分）从1，2，3，4中任取2个不同的数，则取出的2个数之差的绝对值为2的概率是（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{6}$

【考点】CC：列举法计算基本事件数及事件发生的概率．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】本题是一个等可能事件的概率，试验发生包含的事件是从4个不同的数中随机的抽2个，共有C_4^2种结果，满足条件的事件是取出的数之差的绝对值等于2的有两种，得到概率．

【解答】解：由题意知本题是一个等可能事件的概率，

试验发生包含的事件是从4个不同的数中随机的抽2个，共有$C_4^2=6$种结果，

满足条件的事件是取出的数之差的绝对值等于2，有2种结果，分别是（1，3），（2，4），

∴要求的概率是$\frac{2}{C_4^2}=\frac{1}{3}$．

故选：B．

【点评】本题考查等可能事件的概率，是一个基础题，本题解题的关键是事件数是一个组合数，若都按照排列数来理解也可以做出正确的结果．

4．（5分）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，则C的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\frac{1}{4}x$　　B．$y=\pm\frac{1}{3}x$　　C．$y=\pm x$　　D．$y=\pm\frac{1}{2}x$

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由离心率和abc的关系可得$b^2=4a^2$，而渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，代入可得

答案．

【解答】解：由双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0），

则离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即$4b^2=a^2$，

故渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$，

故选：D．

【点评】本题考查双曲线的简单性质，涉及的渐近线方程，属基础题．

5．（5分）已知命题p：$\forall x\in R$，$2^x<3^x$；命题q：$\exists x\in R$，$x^3=1-x^2$，则下列命题中为真命题的是（　　）

A．$p\land q$　　B．$\neg p\land q$　　C．$p\land\neg q$　　D．$\neg p\land\neg q$

【考点】2E：复合命题及其真假．

【专题】21：阅读型；5L：简易逻辑．

【分析】举反例说明命题p为假命题，则$\neg p$为真命题．引入辅助函数$f(x)=x^3+x^2-1$，由函数零点的存在性定理得到该函数有零点，从而得到命题q为真命题，由复合命题的真假得到答案．

【解答】解：因为$x=-1$时，$2^{-1}>3^{-1}$，所以命题p：$\forall x\in R$，$2^x<3^x$为假命题，则$\neg p$为真命题．

令$f(x)=x^3+x^2-1$，因为$f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$．所以函数$f(x)=x^3+x^2-1$在（0，1）上存在零点，

即命题q：$\exists x\in R$，$x^3=1-x^2$为真命题．

则$\neg p\land q$为真命题．

故选：B．

【点评】本题考查了复合命题的真假，考查了指数函数的性质及函数零点的判断方法，解答的关键是熟记复合命题的真值表，是基础题．

6．（5分）设首项为1，公比为$\frac{2}{3}$的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则（　　）

A．$S_n=2a_n-1$　　B．$S_n=3a_n-2$　　C．$S_n=4-3a_n$　　D．$S_n=3-2a_n$

【考点】89：等比数列的前n项和．

【专题】54：等差数列与等比数列．

【分析】由题意可得数列的通项公式，进而可得其求和公式，化简可得要求的关系式．

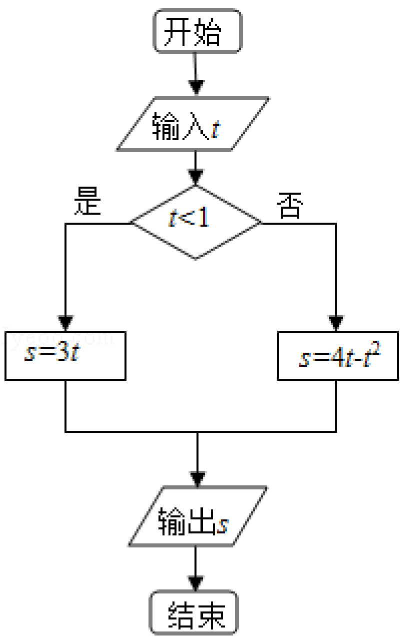
【解答】解：由题意可得$a_n=1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，

$$\therefore S_n=\frac{1\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{3}}=3-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=3-2a_n，$$

故选：D．

【点评】本题考查等比数列的求和公式和通项公式，涉及指数的运算，属中档题．

7．（5分）执行程序框图，如果输入的t∈[﹣1，3]，则输出的s属于（　　）



A．[﹣3，4]　　B．[﹣5，2]　　C．[﹣4，3]　　D．[﹣2，5]

【考点】3B：分段函数的解析式求法及其图象的作法；EF：程序框图．

【专题】27：图表型；5K：算法和程序框图．

【分析】本题考查的知识点是程序框图，分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是计算一个分段函数的函数值，由条件为t＜1我们可得，分段函数的分类标准，由分支结构中是否两条分支上对应的语句行，我们易得函数的解析式．

【解答】解：由判断框中的条件为t＜1，可得：

函数分为两段，即t＜1与t≥1，

又由满足条件时函数的解析式为：s=3t；

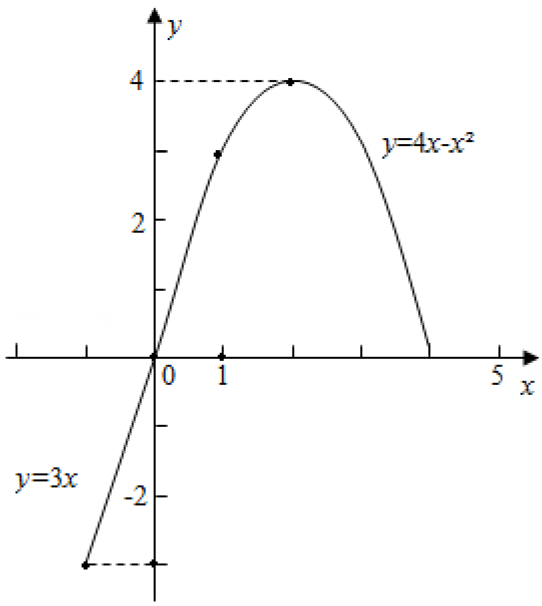
不满足条件时，即t≥1时，函数的解析式为：$s=4t-t^2$

故分段函数的解析式为：$s=\begin{cases}3t, & t<1\\ 4t-t^2, & t\geqslant 1\end{cases}$，

如果输入的t∈[－1，3]，画出此分段函数在t∈[－1，3]时的图象，

则输出的s属于[－3，4]．

故选：A．



【点评】要求条件结构对应的函数解析式，要分如下几个步骤：①分析流程图的结构，分析条件结构是如何嵌套的，以确定函数所分的段数；②根据判断框中的条件，设置分类标准；③根据判断框的“是”与“否”分支对应的操作，分析函数各段的解析式；④对前面的分类进行总结，写出分段函数的解析式．

8．（5分）O为坐标原点，F为抛物线C：$y^2=4\sqrt{2}x$的焦点，P为C上一点，若$|PF|=4\sqrt{2}$，则△POF的面积为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】根据抛物线方程，算出焦点F坐标为（$\sqrt{2}$，0）．设P（m，n），由抛物线的定义结合$|PF|=4\sqrt{2}$，算出$m=3\sqrt{2}$，从而得到$n=\pm2\sqrt{6}$，得到△POF的边OF上的高等于$2\sqrt{6}$，最后根据三角形面积公式即可算出△POF的面积．

【解答】解：∵抛物线C的方程为$y^2=4\sqrt{2}x$

∴$2p=4\sqrt{2}$，可得$\frac{p}{2}=\sqrt{2}$，得焦点F（$\sqrt{2}$，0）

设P（m，n）

根据抛物线的定义，得$|PF|=m+\frac{p}{2}=4\sqrt{2}$，

即$m+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，解得$m=3\sqrt{2}$

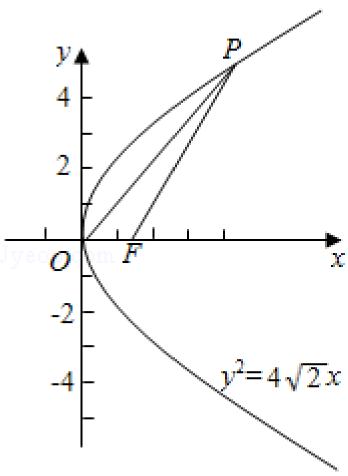
∵点P在抛物线C上，得$n^2=4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=24$

∴$n=\pm\sqrt{24}=\pm2\sqrt{6}$

∵$|OF|=\sqrt{2}$

∴△POF的面积为$S=\frac{1}{2}|OF|\times|n|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=2\sqrt{3}$

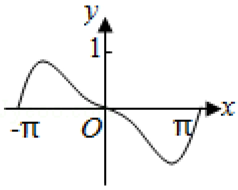
故选：C．

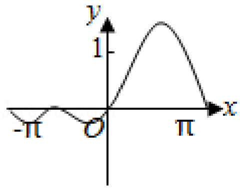


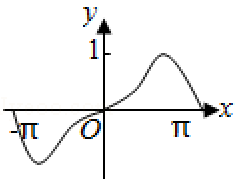
【点评】本题给出抛物线C：$y^2=4\sqrt{2}x$上与焦点F的距离为$4\sqrt{2}$的点P，求△POF的

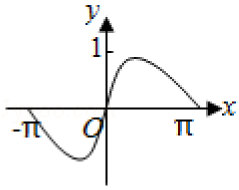
面积．着重考查了三角形的面积公式、抛物线的标准方程和简单几何性质等知识，属于基础题．

9．（5分）函数f（x）=（1﹣cosx）sinx在[﹣π，π]的图象大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

【考点】3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】由函数的奇偶性可排除B，再由x∈（0，π）时，f（x）＞0，可排除A，求导数可得f′（0）=0，可排除D，进而可得答案．

【解答】解：由题意可知：f（﹣x）=（1﹣cosx）sin（﹣x）=﹣f（x），

故函数f（x）为奇函数，故可排除B，

又因为当x∈（0，π）时，1﹣cosx＞0，sinx＞0，

故f（x）＞0，可排除A，

又f′（x）=（1﹣cosx）′sinx+（1﹣cosx）（sinx）′

$=\sin^2x+\cos x-\cos^2x=\cos x-\cos 2x$，

故可得f′（0）=0，可排除D，

故选：C．

【点评】本题考查三角函数的图象，涉及函数的奇偶性和某点的导数值，属基础题．

10．（5分）已知锐角△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$23\cos^2A+\cos 2A=0$，a=7，c=6，则b=（　　）

A．10　　B．9　　C．8　　D．5

【考点】HR：余弦定理．

【专题】58：解三角形．

【分析】利用二倍角的余弦函数公式化简已知的等式，求出cosA的值，再由a与c的值，利用余弦定理即可求出b的值．

【解答】解：$\because 23\cos^2A+\cos2A=23\cos^2A+2\cos^2A-1=0$，即$\cos^2A=\frac{1}{25}$，A为锐角，

$\therefore \cos A=\frac{1}{5}$，

又a=7，c=6，

根据余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\bullet\cos A$，即$49=b^2+36-\frac{12}{5}b$，

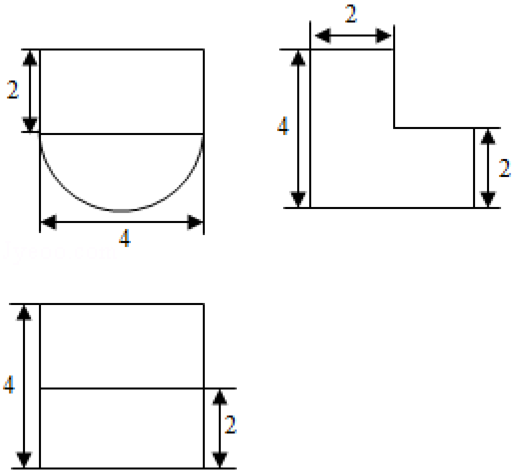
解得：b=5或$b=-\frac{13}{5}$（舍去），

则b=5．

故选：D．

【点评】此题考查了余弦定理，二倍角的余弦函数公式，熟练掌握余弦定理是解本题的关键．

11．（5分）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



A．16+8π　　B．8+8π　　C．16+16π　　D．8+16π

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】16：压轴题；27：图表型．

【分析】三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的组合体，依据三视图的数据，得出组合体长、宽、高，即可求出几何体的体积．

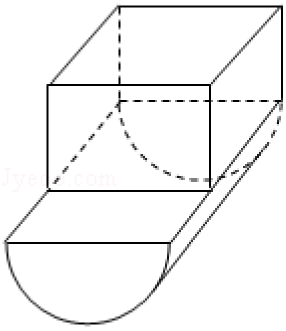
【解答】解：三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的组合体，如图，其中长方体长、宽、高分别是：4，2，2，半个圆柱的底面半径为2，母线长为4．

∴长方体的体积=4×2×2=16，

半个圆柱的体积=$\frac{1}{2}\times2^2\times\pi\times4=8\pi$

所以这个几何体的体积是16+8π；

故选：A．



【点评】本题考查了几何体的三视图及直观图的画法，三视图与直观图的关系，柱体体积计算公式，空间想象能力

12．（5分）已知函数f（x）=$\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$，若|f（x）|≥ax，则a的取值范围是（　　）

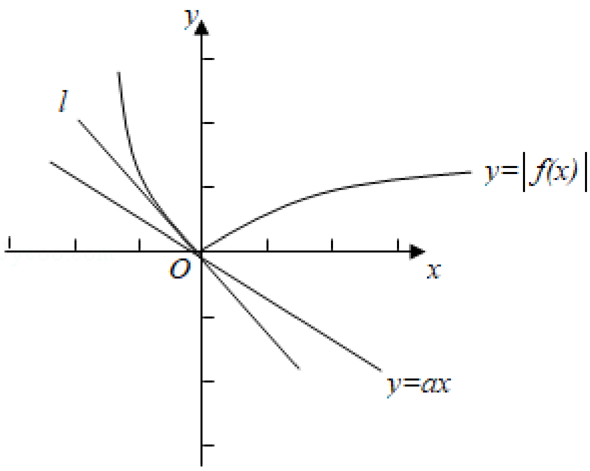
A．（﹣∞，0]　　B．（﹣∞，1]　　C．[﹣2，1]　　D．[﹣2，0]

【考点】7E：其他不等式的解法．

【专题】16：压轴题；59：不等式的解法及应用．

【分析】由函数图象的变换，结合基本初等函数的图象可作出函数y=|f（x）|的图象，和函数y=ax的图象，由导数求切线斜率可得l的斜率，进而数形结合可得a的范围．

【解答】解：由题意可作出函数y=|f（x）|的图象，和函数y=ax的图象，



由图象可知：函数y=ax的图象为过原点的直线，当直线介于l和x轴之间符合题意，直线l为曲线的切线，且此时函数y=|f（x）|在第二象限的部分解析式为$y=x^2-2x$，

求其导数可得y′=2x﹣2，因为x≤0，故y′≤﹣2，故直线l的斜率为﹣2，

故只需直线y=ax的斜率a介于﹣2与0之间即可，即a∈[﹣2，0]

故选：D．

【点评】本题考查其它不等式的解法，数形结合是解决问题的关键，属中档题．

二．填空题：本大题共四小题，每小题5分．

13．（5分）已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$．若$\vec{b}\bullet\vec{c}=0$，则t=__2__．

【考点】9H：平面向量的基本定理；9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】由于$\vec{b}\bullet\vec{c}=0$，对式子$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$两边与$\vec{b}$作数量积可得$\vec{c}\cdot\vec{b}=t\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)\vec{b}^2=0$，经过化简即可得出．

【解答】解：$\because\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$，$\vec{c}\cdot\vec{b}=0$，$\therefore\vec{c}\cdot\vec{b}=t\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)\vec{b}^2=0$，

$\therefore t\cos60°+1-t=0$，$\therefore 1-\frac{1}{2}t=0$，解得t=2．

故答案为2．

【点评】熟练掌握向量的数量积运算是解题的关键.

14．（5分）设x，y满足约束条件$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\-1\leqslant x-y\leqslant 0\end{cases}$，则z=2x﹣y的最大值为__3__.

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】59：不等式的解法及应用.

【分析】先根据约束条件画出可行域，再利用几何意义求最值，z=2x﹣y表示直线在y轴上的截距，只需求出可行域直线在y轴上的截距最大值即可.

【解答】解：不等式组表示的平面区域如图所示，

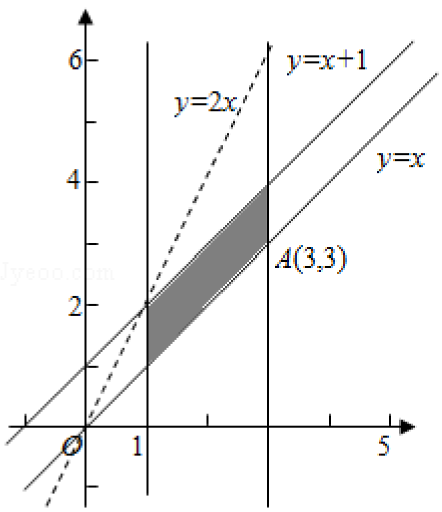
由$\begin{cases}x=3\\y=x\end{cases}$得A（3，3），

z=2x﹣y可转换成y=2x﹣z，z最大时，y值最小，

即：当直线z=2x﹣y过点A（3，3）时，

在y轴上截距最小，此时z取得最大值3.

故答案为：3.



【点评】本题主要考查了简单的线性规划，以及利用几何意义求最值，属于基础题.

15．（5分）已知H是球O的直径AB上一点，AH：HB=1：2，AB⊥平面α，H为垂足，α截球O所得截面的面积为π，则球O的表面积为__$\frac{9\pi}{2}$__.

【考点】LG：球的体积和表面积.

【专题】16：压轴题；5F：空间位置关系与距离.

【分析】本题考查的知识点是球的表面积公式，设球的半径为R，根据题意知由与球心距离为$\frac{1}{3}$R的平面截球所得的截面圆的面积是π，我们易求出截面圆的半径为1，根据球心距、截面圆半径、球半径构成直角三角形，满足勾股定理，我们易求出该球的半径，进而求出球的表面积.

【解答】解：设球的半径为R，∵AH：HB=1：2，∴平面α与球心的距离为$\frac{1}{3}$R，

∵α截球O所得截面的面积为π，

∴d=$\frac{1}{3}$R时，r=1，

故由$R^2=r^2+d^2$得$R^2=1^2+(\frac{1}{3}R)^2$，∴$R^2=\frac{9}{8}$

∴球的表面积$S=4\pi R^2=\frac{9\pi}{2}$.

故答案为：$\frac{9\pi}{2}$.

【点评】若球的截面圆半径为r，球心距为d，球半径为R，则球心距、截面圆半径、球半径构成直角三角形，满足勾股定理，即$R^2=r^2+d^2$

16．（5分）设当x=θ时，函数f（x）=sinx－2cosx取得最大值，则cosθ=___$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$___.

【考点】GP：两角和与差的三角函数；H4：正弦函数的定义域和值域.

【专题】16：压轴题；56：三角函数的求值.

【分析】f（x）解析式提取$\sqrt{5}$，利用两角和与差的正弦函数公式化为一个角的正弦函数，由x=θ时，函数f（x）取得最大值，得到sinθ－2cosθ=$\sqrt{5}$，与$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$联立即可求出cosθ的值.

【解答】解：f（x）=sinx－2cosx=$\sqrt{5}$（$\frac{\sqrt{5}}{5}$sinx－$\frac{2\sqrt{5}}{5}$cosx）=$\sqrt{5}$sin（x－α）（其中cosα=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，sinα=$\frac{2\sqrt{5}}{5}$），

∵x=θ时，函数f（x）取得最大值，

$\therefore\sin(\theta-\alpha)=1$，即$\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{5}$，

又$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

联立得$(2\cos\theta+\sqrt{5})^2+\cos^2\theta=1$，解得$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【点评】此题考查了两角和与差的正弦函数公式，同角三角函数间的基本关系，以及正弦函数的定义域与值域，熟练掌握公式是解本题的关键.

三.解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （12分）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_3=0$，$S_5=-5$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\}$的前n项和.

【考点】84：等差数列的通项公式；8E：数列的求和.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】（Ⅰ）设出等差数列$\{a_n\}$的首项和公差，直接由$S_3=0$，$S_5=-5$列方程组求出，然后代入等差数列的通项公式整理；

（Ⅱ）把（Ⅰ）中求出的通项公式，代入数列$\{\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\}$的通项中进行列项整理，则利用裂项相消可求数列$\{\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\}$的前n项和.

【解答】解：（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$.

由已知可得$\begin{cases}3a_1+3d=0\\5a_1+\frac{5(5-1)}{2}d=-5\end{cases}$，即$\begin{cases}a_1+d=0\\a_1+2d=-1\end{cases}$，解得$a_1=1$，$d=-1$，

故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\bullet(-1)=2-n$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}=\frac{1}{(3-2n)(1-2n)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1})$.

从而数列$\{\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\}$的前n项和

$S_n=\frac{1}{2}[(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1})+(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1})]$

$=\frac{1}{2}(-1-\frac{1}{2n-1})=\frac{n}{1-2n}$.

【点评】本题考查了等差数列的通项公式，考查了裂项相消法求数列的和，是中档题.

18．（12分）为了比较两种治疗失眠症的药（分别成为A药，B药）的疗效，随机地选取20位患者服用A药，20位患者服用B药，这40位患者服用一段时间后，记录他们日平均增加的睡眠时间（单位：h）实验的观测结果如下：

服用A药的20位患者日平均增加的睡眠时间：

0.6　1.2　2.7　1.5　2.8　1.8　2.2　2.3　3.2　3.5

2.5　2.6　1.2　2.7　1.5　2.9　3.0　3.1　2.3　2.4

服用B药的20位患者日平均增加的睡眠时间：

3.2　1.7　1.9　0.8　0.9　2.4　1.2　2.6　1.3　1.4

1.6　0.5　1.8　0.6　2.1　1.1　2.5　1.2　2.7　0.5

（Ⅰ）分别计算两种药的平均数，从计算结果看，哪种药的疗效更好？

（Ⅱ）根据两组数据完成下面茎叶图，从茎叶图看，哪种药的疗效更好？

A药		B药
	0.	
	1.	
	2.	
	3.	

【考点】BA：茎叶图；BB：众数、中位数、平均数.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】（Ⅰ）利用平均数的计算公式即可得出，据此即可判断出结论；

（Ⅱ）利用已知数据和茎叶图的结构即可完成.

【解答】解：（Ⅰ）设A药观测数据的平均数据的平均数为$\overline{x}$，设B药观测数据的平均数据的平均数为$\overline{y}$，

则$\overline{x}=\frac{1}{20}\times$（0.6+1.2+2.7+1.5+2.8+1.8+2.2+2.3+3.2+3.5+2.5+2.6+1.2+2.7+1.5+2.9+3.0+3.1+2.3+2.4）=2.3.

$\overline{y}=\frac{1}{20}\times$（3.2+1.7+1.9+0.8+0.9+2.4+1.2+2.6+1.3+1.4+1.6+0.5+1.8+0.6+2.1+1.1+2.5+1.2+2.7+0.5）=1.6．

由以上计算结果可知：$\overline{x}>\overline{y}$．由此可看出A药的效果更好．

（Ⅱ）根据两组数据得到下面茎叶图：

A药		B药
6	0.	5 5 6 8 9
8 5 5 2 2	1.	1 2 2 3 4 6 7 8 9
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	2.	1 4 5 6 7
5 2 1 0	3.	2

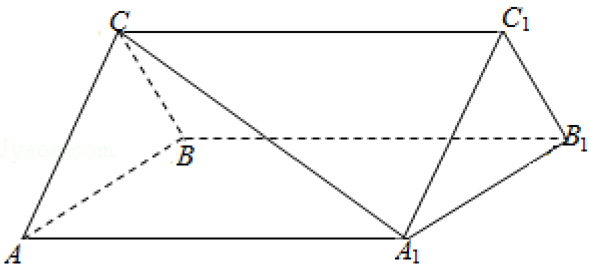
从以上茎叶图可以看出，A药疗效的试验结果有$\frac{7}{10}$的叶集中在2，3上．而B药疗效的试验结果由$\frac{7}{10}$的叶集中在0，1上．由此可看出A药的疗效更好．

【点评】熟练掌握平均数的计算公式和茎叶图的结果及其功能是解题的关键．

19．（12分）如图，三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$中，CA=CB，AB=AA_1，∠BAA_1=60°

（Ⅰ）证明：AB⊥A_1C；

（Ⅱ）若AB=CB=2，$A_1C=\sqrt{6}$，求三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$的体积．



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LW：直线与平面垂直．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】（Ⅰ）由题目给出的边的关系，可想到去AB中点O，连结OC，OA_1，可通过证明AB⊥平面OA_1C得要证的结论；

（Ⅱ）在三角形OCA_1中，由勾股定理得到OA_1⊥OC，再根据OA_1⊥AB，得到OA_1为三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$的高，利用已知给出的边的长度，直接利用棱柱体积公

式求体积．

【解答】（Ⅰ）证明：如图，

取AB的中点O，连结OC，OA_1，A_1B．

因为CA=CB，所以OC⊥AB．

由于$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^{\circ}$，故$\triangle AA_1B$为等边三角形，

所以$OA_1\perp AB$．

因为$OC\cap OA_1=O$，所以AB⊥平面OA_1C．

又$A_1C\subset$平面OA_1C，故$AB\perp A_1C$；

（Ⅱ）解：由题设知△ABC与$\triangle AA_1B$都是边长为2的等边三角形，

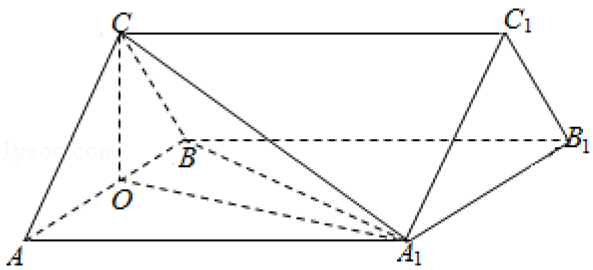
所以$OC=OA_1=\sqrt{3}$．

又$A_1C=\sqrt{6}$，则$A_1C^2=OC^2+OA_1^2$，故$OA_1\perp OC$．

因为OC∩AB=O，所以$OA_1\perp$平面ABC，OA_1为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高．

又△ABC的面积$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，故三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积

$V=S_{\triangle ABC}\times OA_1=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$．



【点评】题主要考查了直线与平面垂直的性质，考查了棱柱的体积，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于中档题．

20．（12分）已知函数$f(x)=e^x(ax+b)-x^2-4x$，曲线$y=f(x)$在点（0，f（0））处切线方程为$y=4x+4$．

（Ⅰ）求a，b的值；

（Ⅱ）讨论f（x）的单调性，并求f（x）的极大值．

【考点】6D：利用导数研究函数的极值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方

程.

【专题】16：压轴题；53：导数的综合应用.

【分析】（Ⅰ）求导函数，利用导数的几何意义及曲线y=f（x）在点（0，f（0））处切线方程为y=4x+4，建立方程，即可求得a，b的值；

（Ⅱ）利用导数的正负，可得f（x）的单调性，从而可求f（x）的极大值.

【解答】解：（Ⅰ）∵$f(x)=e^x(ax+b)-x^2-4x$，

∴$f'(x)=e^x(ax+a+b)-2x-4$，

∵曲线y=f（x）在点（0，f（0））处切线方程为y=4x+4

∴f（0）=4，f′（0）=4

∴b=4，a+b=8

∴a=4，b=4；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=4e^x(x+1)-x^2-4x$，$f'(x)=4e^x(x+2)-2x-4=4(x+2)(e^x-\frac{1}{2})$，

令f′（x）=0，得x=﹣ln2或x=﹣2

∴x∈（﹣∞，﹣2）或（﹣ln2，+∞）时，f′（x）>0；x∈（﹣2，﹣ln2）时，f′（x）<0

∴f（x）的单调增区间是（﹣∞，﹣2），（﹣ln2，+∞），单调减区间是（﹣2，﹣ln2）

当x=﹣2时，函数f（x）取得极大值，极大值为$f(-2)=4(1-e^{-2})$.

【点评】本题考查导数的几何意义，考查函数的单调性与极值，考查学生的计算能力，确定函数的解析式是关键.

21.（12分）已知圆M：$(x+1)^2+y^2=1$，圆N：$(x-1)^2+y^2=9$，动圆P与圆M外切并与圆N内切，圆心P的轨迹为曲线C.

（Ⅰ）求C的方程；

（Ⅱ）l是与圆P，圆M都相切的一条直线，l与曲线C交于A，B两点，当圆P的半径最长时，求|AB|.

【考点】J3：轨迹方程；J9：直线与圆的位置关系．

【专题】5B：直线与圆．

【分析】（I）设动圆的半径为R，由已知动圆P与圆M外切并与圆N内切，可得$|PM|+|PN|=R+1+(3-R)=4$，而$|NM|=2$，由椭圆的定义可知：动点P的轨迹是以M，N为焦点，4为长轴长的椭圆，求出即可；

（II）设曲线C上任意一点P（x，y），由于$|PM|-|PN|=2R-2\le 4-2=2$，所以$R\le 2$，当且仅当⊙P的圆心为（2，0）R=2时，其半径最大，其方程为$(x-2)^2+y^2=4$．分①l的倾斜角为90°，此时l与y轴重合，可得|AB|．②若l的倾斜角不为90°，由于⊙M的半径1≠R，可知l与x轴不平行，设l与x轴的交点为Q，根据$\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可得Q（﹣4，0），所以可设l：y=k（x+4），与椭圆的方程联立，得到根与系数的关系利用弦长公式即可得出．

【解答】解：（I）由圆M：$(x+1)^2+y^2=1$，可知圆心M（﹣1，0）；圆N：$(x-1)^2+y^2=9$，圆心N（1，0），半径3．

设动圆的半径为R，

∵动圆P与圆M外切并与圆N内切，∴$|PM|+|PN|=R+1+(3-R)=4$，

而$|NM|=2$，由椭圆的定义可知：动点P的轨迹是以M，N为焦点，4为长轴长的椭圆，

∴a=2，c=1，$b^2=a^2-c^2=3$．

∴曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（x≠﹣2）．

（II）设曲线C上任意一点P（x，y），

由于$|PM|-|PN|=2R-2\le 3-1=2$，所以$R\le 2$，当且仅当⊙P的圆心为（2，0）R=2时，其半径最大，其方程为$(x-2)^2+y^2=4$．

①l的倾斜角为90°，则l与y轴重合，可得$|AB|=2\sqrt{3}$．

②若l的倾斜角不为90°，由于⊙M的半径1≠R，可知l与x轴不平行，

设l与x轴的交点为Q，则$\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可得Q（﹣4，0），所以可设l：y=k（x+4），

由l于M相切可得：$\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$．

当$k=\frac{\sqrt{2}}{4}$时，联立$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得到$7x^2+8x-8=0$.

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|=\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2}\sqrt{(-\frac{8}{7})^2-4\times(-\frac{8}{7})}=\frac{18}{7}$

由于对称性可知：当$k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$时，也有$|AB|=\frac{18}{7}$.

综上可知：$|AB|=2\sqrt{3}$或$\frac{18}{7}$.

【点评】本题综合考查了两圆的相切关系、直线与圆相切问题、椭圆的定义及其性质、直线与椭圆相交问题转化为方程联立得到根与系数的关系、弦长公式等基础知识，需要较强的推理能力和计算能力及其分类讨论的思想方法.

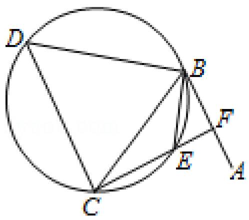
请考生在第22、23、24三题中任选一题作答。注意：只能做所选定的题目。如果多做，则按所做的第一个题目计分，作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑。

22．（10分）（选修4﹣1：几何证明选讲）

如图，直线AB为圆的切线，切点为B，点C在圆上，∠ABC的角平分线BE交圆于点E，DB垂直BE交圆于D.

（Ⅰ）证明：DB=DC；

（Ⅱ）设圆的半径为1，BC=$\sqrt{3}$，延长CE交AB于点F，求△BCF外接圆的半径.



【考点】NC：与圆有关的比例线段.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】（I）连接DE交BC于点G，由弦切角定理可得∠ABE=∠BCE，由已知角平分线可得∠ABE=∠CBE，于是得到∠CBE=∠BCE，BE=CE．由已知DB⊥BE，可知D

E为⊙O的直径，Rt△DBE≌Rt△DCE，利用三角形全等的性质即可得到DC=DB
.

（II）由（I）可知：DG是BC的垂直平分线，即可得到BG=$\frac{\sqrt{3}}{2}$．设DE的中点为O，连接BO，可得∠BOG=60°．从而∠ABE=∠BCE=∠CBE=30°．得到CF⊥BF．进而得到Rt△BCF的外接圆的半径=$\frac{1}{2}BC$.

【解答】（I）证明：连接DE交BC于点G．

由弦切角定理可得∠ABE=∠BCE，而∠ABE=∠CBE，

∴∠CBE=∠BCE，BE=CE．

又∵DB⊥BE，∴DE为⊙O的直径，∠DCE=90°．

∴△DBE≌△DCE，∴DC=DB．

（II）由（I）可知：∠CDE=∠BDE，DB=DC．

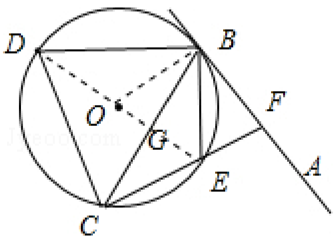
故DG是BC的垂直平分线，∴BG=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

设DE的中点为O，连接BO，则∠BOG=60°．

从而∠ABE=∠BCE=∠CBE=30°．

∴CF⊥BF．

∴Rt△BCF的外接圆的半径=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.



【点评】本题综合考查了圆的性质、弦切角定理、等边三角形的性质、三角形全等、三角形的外接圆的半径等知识，需要较强的推理能力、分析问题和解决问题的能力．

23．已知曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4+5\cos t\\y=5+5\sin t\end{cases}$（t为参数），以坐标原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为ρ=2sinθ．

（1）把C_1的参数方程化为极坐标方程；

（2）求C_1与C_2交点的极坐标（ρ≥0，0≤θ＜2π）．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程；QH：参数方程化成普通方程.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；5S：坐标系和参数方程.

【分析】（1）曲线C_1的参数方程消去参数t，得到普通方程，再由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，能求出$C_1$的极坐标方程.

（2）曲线C_2的极坐标方程化为直角坐标方程，与C_1的普通方程联立，求出C_1与C_2交点的直角坐标，由此能求出C_1与C_2交点的极坐标.

【解答】解：（1）将$\begin{cases}x=4+5\cos t\\y=5+5\sin t\end{cases}$，消去参数t，化为普通方程$(x-4)^2+(y-5)^2=25$，

即C_1：$x^2+y^2-8x-10y+16=0$，

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入$x^2+y^2-8x-10y+16=0$，

得$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

∴C_1的极坐标方程为$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

（2）∵曲线C_2的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$.

∴曲线C_2的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$，

联立$\begin{cases}x^2+y^2-8x-10y+16=0\\x^2+y^2-2y=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$，

∴C_1与C_2交点的极坐标为$(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$和$(2,\frac{\pi}{2})$.

【点评】本题考查曲线极坐标方程的求法，考查两曲线交点的极坐标的求法，考查极坐标方程、直角坐标方程、参数方程的互化等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想，是中档题.

24．已知函数$f(x)=|2x-1|+|2x+a|$，$g(x)=x+3$.

（Ⅰ）当$a=-2$时，求不等式$f(x)<g(x)$的解集；

（Ⅱ）设$a>-1$，且当$x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$时，$f(x)\leq g(x)$，求a的取值范围.

【考点】R5：绝对值不等式的解法．

【分析】（Ⅰ）当$a=-2$时，求不等式$f(x)<g(x)$化为$|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$．设$y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，画出函数y的图象，数形结合可得结论．

（Ⅱ）不等式化即$1+a\le x+3$，故$x\ge a-2$对$x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$都成立，分析可得$-\frac{a}{2}\ge a-2$，由此解得$a$的取值范围．

【解答】解：（Ⅰ）当$a=-2$时，求不等式$f(x)<g(x)$化为$|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$．

设$y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，则$y=\begin{cases}-5x, & x<\frac{1}{2}\\ -x-2, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\\ 3x-6, & x>1\end{cases}$，它的图象如图所示：

结合图象可得，$y<0$的解集为$(0,2)$，故原不等式的解集为$(0,2)$．

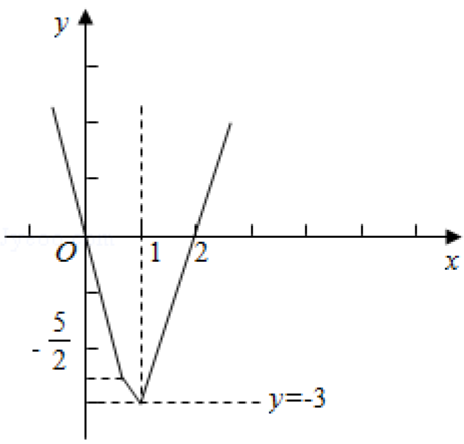
（Ⅱ）设$a>-1$，且当$x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$时，$f(x)=1+a$，不等式化为$1+a\le x+3$，

故$x\ge a-2$对$x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$都成立．

故$-\frac{a}{2}\ge a-2$，

解得$a\le\frac{4}{3}$，

故a的取值范围为$(-1,\frac{4}{3}]$．



【点评】本题考查绝对值不等式的解法与绝对值不等式的性质，关键是利用零点分段讨论法分析函数的解析式．