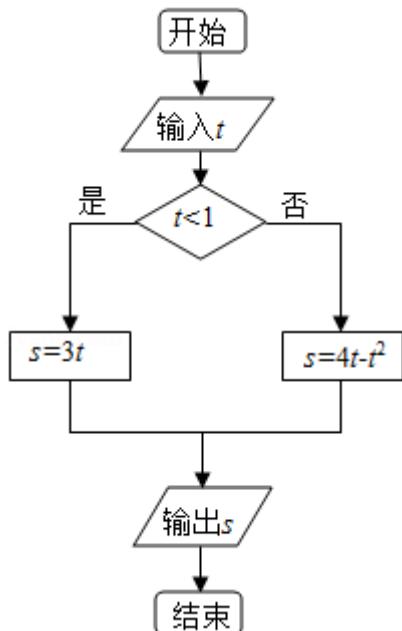


# 2013年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

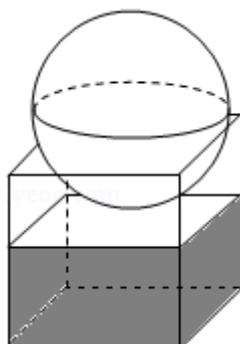
一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只  
有一个是符合题目要求的。

1. （5分）已知集合 $A=\{x|x^2-2x>0\}$ ,  $B=\{x|-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$ , 则 ( )  
A.  $A \cap B = \emptyset$       B.  $A \cup B = \mathbb{R}$       C.  $B \subseteq A$       D.  $A \subseteq B$
2. （5分）若复数 $z$ 满足 $(3-4i)z=|4+3i|$ , 则 $z$ 的虚部为 ( )  
A. -4      B.  $-\frac{4}{5}$       C. 4      D.  $\frac{4}{5}$
3. （5分）为了解某地区中小学生的视力情况，拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查，事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，而男女生视力情况差异不大。在下面的抽样方法中，最合理的抽样方法是 ( )  
A. 简单的随机抽样      B. 按性别分层抽样  
C. 按学段分层抽样      D. 系统抽样
4. （5分）已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , 则 $C$ 的渐近线方程为 ( )  
A.  $y = \pm \frac{1}{4}x$       B.  $y = \pm \frac{1}{3}x$       C.  $y = \pm x$       D.  $y = \pm \frac{1}{2}x$
5. （5分）执行程序框图，如果输入的 $t \in [-1, 3]$ , 则输出的 $s$ 属于 ( )



- A.  $[-3, 4]$       B.  $[-5, 2]$       C.  $[-4, 3]$       D.  $[-2, 5]$

6. (5分) 如图, 有一个水平放置的透明无盖的正方体容器, 容器高8cm, 将一个球放在容器口, 再向容器注水, 当球面恰好接触水面时测得水深为6cm, 如不计容器的厚度, 则球的体积为( )

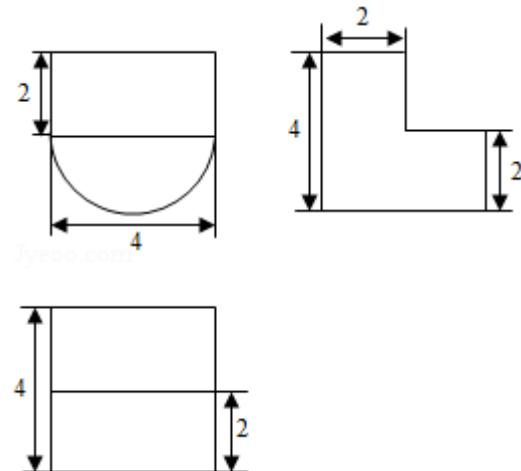


- A.  $\frac{500\pi}{3}\text{cm}^3$       B.  $\frac{866\pi}{3}\text{cm}^3$       C.  $\frac{1372\pi}{3}\text{cm}^3$       D.  $\frac{2048\pi}{3}\text{cm}^3$

7. (5分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 $S_n$ , 若 $S_{m-1}=-2$ ,  $S_m=0$ ,  $S_{m+1}=3$ , 则 $m=( )$

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

8. (5分) 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为( )



- A.  $16+8\pi$       B.  $8+8\pi$       C.  $16+16\pi$       D.  $8+16\pi$

9. (5分) 设 $m$ 为正整数,  $(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 $a$ ,  $(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 $b$ , 若 $13a=7b$ , 则 $m=( )$

- A. 5      B. 6      C. 7      D. 8

10. (5分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为 $F(3, 0)$ , 过点 $F$ 的

直线交椭圆E于A、B两点. 若AB的中点坐标为(1, -1), 则E的方程为( )

A.  $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$

B.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

C.  $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$

D.  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

11. (5分) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ , 若  $|f(x)| \geq ax$ , 则a的取值范围是( )

- A.  $(-\infty, 0]$     B.  $(-\infty, 1]$     C.  $[-2, 1]$     D.  $[-2, 0]$

12. (5分) 设 $\triangle A_n B_n C_n$ 的三边长分别为 $a_n, b_n, c_n$ ,  $\triangle A_n B_n C_n$ 的面积为 $S_n$ ,  $n=1, 2, 3\dots$ . 若 $b_1 > c_1$ ,  $b_1 + c_1 = 2a_1$ ,  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}$ ,  $c_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2}$ , 则( )

- A.  $\{S_n\}$  为递减数列  
 B.  $\{S_n\}$  为递增数列  
 C.  $\{S_{2n-1}\}$  为递增数列,  $\{S_{2n}\}$  为递减数列  
 D.  $\{S_{2n-1}\}$  为递减数列,  $\{S_{2n}\}$  为递增数列

## 二. 填空题: 本大题共4小题, 每小题5分.

13. (5分) 已知两个单位向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $60^\circ$ ,  $\vec{c} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ . 若 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ , 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. (5分) 若数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 $S_n = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}$ , 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

15. (5分) 设当 $x=0$ 时, 函数  $f(x) = \sin x - 2\cos x$  取得最大值, 则 $\cos\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ .

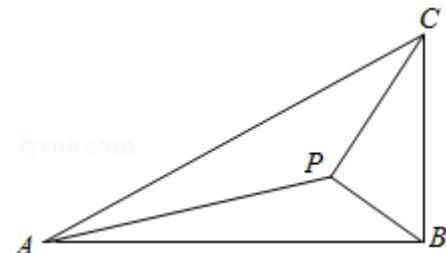
16. (5分) 若函数  $f(x) = (1-x^2)(x^2+ax+b)$  的图象关于直线  $x = -2$  对称, 则  $f(x)$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (12分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=\sqrt{3}$ ， $BC=1$ ， $P$ 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BPC=90^\circ$ .

(1) 若 $PB=\frac{1}{2}$ ，求 $PA$ ；

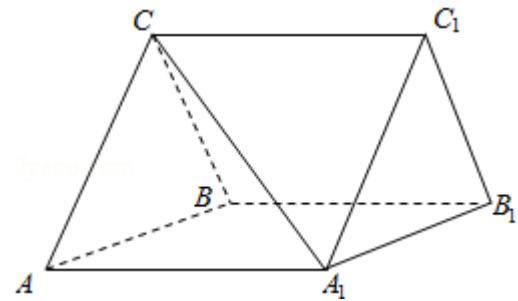
(2) 若 $\angle APB=150^\circ$ ，求 $\tan \angle PBA$ .



18. (12分) 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CA=CB$ ， $AB=AA_1$ ， $\angle BAA_1=60^\circ$ .

(I) 证明 $AB \perp A_1C$ ；

(II) 若平面 $ABC \perp$ 平面 $AA_1B_1B$ ， $AB=CB=2$ ，求直线 $A_1C$ 与平面 $BB_1C_1C$ 所成角的正弦值.



19. (12分) 一批产品需要进行质量检验, 检验方案是: 先从这批产品中任取4件作检验, 这4件产品中优质品的件数记为 $n$ . 如果 $n=3$ , 再从这批产品中任取4件作检验, 若都为优质品, 则这批产品通过检验; 如果 $n=4$ , 再从这批产品中任取1件作检验, 若为优质品, 则这批产品通过检验; 其他情况下, 这批产品都不能通过检验. 假设这批产品的优质品率为50%, 即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$ , 且各件产品是否为优质品相互独立.

- (I) 求这批产品通过检验的概率;  
(II) 已知每件产品检验费用为100元, 凡抽取的每件产品都需要检验, 对这批产品作质量检验所需的费用记为 $X$  (单位: 元), 求 $X$ 的分布列及数学期望.

20. (12分) 已知圆 $M: (x+1)^2+y^2=1$ , 圆 $N: (x-1)^2+y^2=9$ , 动圆 $P$ 与圆 $M$ 外切并与圆 $N$ 内切, 圆心 $P$ 的轨迹为曲线 $C$ .

- (I) 求 $C$ 的方程;  
(II)  $l$ 是与圆 $P$ , 圆 $M$ 都相切的一条直线,  $l$ 与曲线 $C$ 交于 $A$ ,  $B$ 两点, 当圆 $P$ 的半径最长时, 求 $|AB|$ .

21. (12分) 已知函数  $f(x) = x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = e^x(cx + d)$ , 若曲线  $y=f(x)$  和  
曲线  $y=g(x)$  都过点  $P(0, 2)$ , 且在点  $P$  处有相同的切线  $y=4x+2$ .

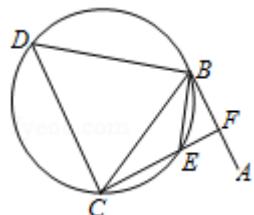
- (I) 求  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  的值;  
(II) 若  $x \geq -2$  时,  $f(x) \leq kg(x)$ , 求  $k$  的取值范围.

四、请考生在第22、23、24题中任选一道作答，并用2B铅笔将答题卡上所选的  
题目对应的题号右侧方框涂黑，按所涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂  
的首题进行评分，不涂，按本选考题的首题进行评分.

22. (10分) (选修4-1: 几何证明选讲)

如图, 直线  $AB$  为圆的切线, 切点为  $B$ , 点  $C$  在圆上,  $\angle ABC$  的角平分线  $BE$  交圆于点  
 $E$ ,  $DB \perp BE$  交圆于点  $D$ .

- (I) 证明:  $DB=DC$ ;  
(II) 设圆的半径为1,  $BC=\sqrt{3}$ , 延长  $CE$  交  $AB$  于点  $F$ , 求  $\triangle BCF$  外接圆的半径.



23. 已知曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$  (t为参数)，以坐标原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$ .

- (1) 把 $C_1$ 的参数方程化为极坐标方程；
- (2) 求 $C_1$ 与 $C_2$ 交点的极坐标 ( $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) .

24. 已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$ ,  $g(x)=x+3$ .

- (I) 当 $a=-2$ 时，求不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集；
- (II) 设 $a>-1$ ，且当 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 时， $f(x) \leq g(x)$ ，求 $a$ 的取值范围.