# 2015年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)(理科)

**一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1.已知$\frac{(1-i)^2}{z}=1+i$（$i$为虚数单位），则复数$z=$（　　）

A.$1+i$　　B.$1-i$　　C.$-1+i$　　D.$-1-i$

【答案】D.

【解析】学科网

试题分析：由题意得，$z=\frac{(1-i)^2}{1+i}=\frac{-2i}{1+i}=-1-i$，故选D.

【考点定位】复数的计算.

【名师点睛】本题主要考查了复数的概念与基本运算，属于容易题，意在考查学生对复数代数形式四则运算的掌握情况，基本思路就是复数的除法运算按“分母实数化”原则，结合复数的乘法进行计算，而复数的乘法则是按多项式的乘法法则进行处理.

2.设$A$，$B$是两个集合，则“$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】C.

【解析】

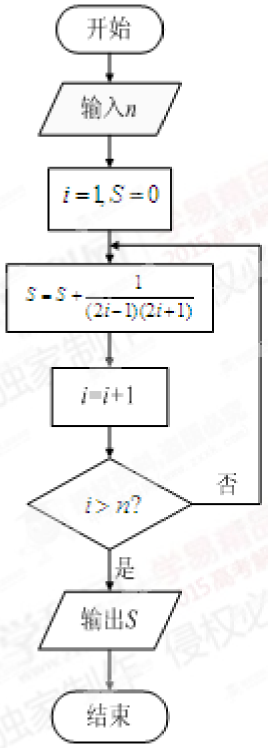
试题分析：由题意得，$A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$，反之，$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$，故为充要条件，选C.

【考点定位】1.集合的关系；2.充分必要条件.

【名师点睛】本题主要考查了集合的关系与充分必要条件，属于容易题，高考强调集合作为工具与其他知识点的结合，解题的关键是利用韦恩图或者数轴求解，充分，必要条件的判断性问题首要分清条件和结论，然后找出条件和结论之间的推出或包含关系.

3.执行如图所示的程序框图，如果输入$n=3$，则输出的$S=$(　　)

A.$\frac{6}{7}$　　B.$\frac{3}{7}$　　C.$\frac{8}{9}$　　D.$\frac{4}{9}$




【答案】B.

【解析】学科网

试题分析：由题意得，输出的 $S$ 为数列 $\{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\}$ 的前三项和，而

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，$\therefore S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}\Rightarrow S_3=\frac{3}{7}$，故选 B.

【考点定位】1 程序框图；2.裂项相消法求数列的和.

【名师点睛】本题主要考查了数列求和背景下的程序框图问题，属于容易题，解题过程中首先要弄清程序框图所表达的含义，解决循环结构的程序框图问题关键是列出每次循环后的变量取值情况，循环次数较多时，需总结规律，若循环次数较少可以全部列出.

4.若变量 $x$，$y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq -1 \\ 2x-y\leq 1 \\ y\leq 1 \end{cases}$，则 $z=3x-y$ 的最小值为（　　）.

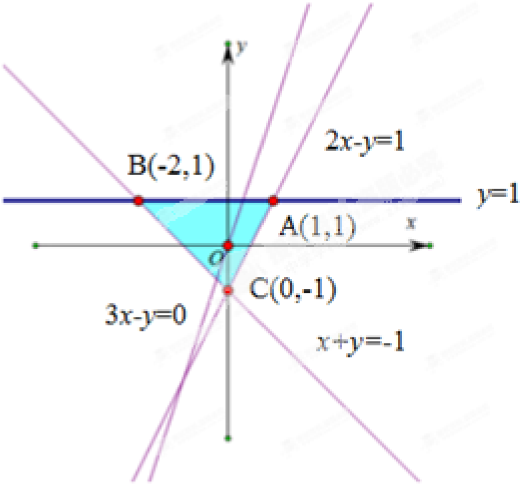
A.-7　　B.-1　　C.1　　D.2

【答案】A.

【解析】

试题分析：如下图所示，画出线性约束条件所表示的区域，即可行域，作直线 $l$：$3x-y=0$，平移 $l$，从

而可知当 $x=-2$， $y=1$ 时， $z_{\min}=3\times(-2)-1=-7$ 的最小值是 $-7$，故选 A.




【考点定位】线性规划.

【名师点睛】本题主要考查了利用线性规划求线性目标函数的最值，属于容易题，在画可行域时，首先必须找准可行域的范围，其次要注意目标函数对应的直线斜率的大小，从而确定目标函数取到最优解时所经过的点，切忌随手一画导致错解.

5.设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，则 $f(x)$ 是（　　）

A.奇函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数　B. 奇函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

C. 偶函数，且在 $(0,1)$ 上是增函数　D. 偶函数，且在 $(0,1)$ 上是减函数

【答案】A.

【解析】学科网

试题分析：显然，$f(x)$ 定义域为 $(-1,1)$，关于原点对称，又∵ $f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-f(x)$，∴ $f(x)$ 为奇函数，显然，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故选 A.

【考点定位】函数的性质.

【名师点睛】本题主要考查了以对数函数为背景的单调性与奇偶性，属于中档题，首先根据函数奇偶性的判定可知其为奇函数，判定时需首先考虑定义域关于原点对称是函数为奇函数的必要条件，再结合复合函数单调性的判断，即可求解.

6.已知 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30，则 $a=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C.6　　D-6

【答案】D.

【解析】学科网

试题分析：$T_{r+1}=C_5^r(-1)^r a^r x^{\frac{5}{2}-r}$，令 $r=1$，可得 $-5a=30\Rightarrow a=-6$，故选 D.

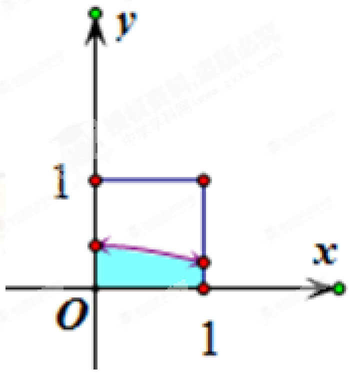
【考点定位】二项式定理.

【名师点睛】本题主要考查了二项式定理的运用，属于容易题，只要掌握 $(a+b)^n$ 的二项展开式的通项第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$，即可建立关于 $a$ 的方程，从而求解.

7.在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点，则落入阴影部分（曲线 C 为正态分布 N(0,1)的密度曲线）的点的个数的估计值为（　　）

A.2386　　B.2718　　C.3413　　D.4772

附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9544$




【答案】C.

【解析】

试题分析：根据正态分布的性质，$P(0<x<1)=\frac{1}{2}P(-1<x<1)\approx0.34$，故选 C.

【考点定位】1.正态分布；2.几何概型.

【名师点睛】本题主要考查正态分布与几何概型等知识点，属于容易题，结合参考材料中给出的数据，结合正态分布曲线的对称性，再利用几何概型即可求解，在复习过程中，亦应关注正态分布等相对冷门的知识点的基本概念.

8.已知点 $A$，$B$，$C$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，且 $AB\perp BC$，若点 $P$ 的坐标为 $(2,0)$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ 的最大值为（　　）

A.6 B.7 C.8 D.9

【答案】B.

【解析】学科网

试题分析：由题意得，$AC$为圆的直径，故可设$A(m,n)$，$C(-m,-n)$，$B(x,y)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(x-6,y)$，$\therefore \left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$的最大值为圆$x^2+y^2=1$上的动点到点$(6,0)$距离的最大值，从而易得当$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$时$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$的最大值为7，故选B.

【考点定位】1.圆的性质；2.平面向量的坐标运算及其几何意义.

【名师点睛】本题主要考查向量的坐标运算，向量的几何意义以及点到圆上点的距离的最值问题，属于中档题，结合转化思想和数形结合思想求解最值，关键是把向量的模的最值问题转化为点与圆上点的距离的最值问题，即圆$x^2+y^2=1$上的动点到点$(6,0)$距离的最大值.

9.将函数$f(x)=\sin 2x$的图像向右平移$\varphi(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$个单位后得到函数$g(x)$的图像，若对满足$\left|f(x_1)-g(x_2)\right|=2$的$x_1$，$x_2$，有$\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\dfrac{\pi}{3}$，则$\varphi=$（　　）

A.$\dfrac{5\pi}{12}$ B.$\dfrac{\pi}{3}$ C.$\dfrac{\pi}{4}$ D.$\dfrac{\pi}{6}$

【答案】D.

【解析】

试题分析：向右平移$\varphi$个单位后，得到$g(x)=\sin(2x-2\varphi)$，又$\because |f(x_1)-g(x_2)|=2$，$\therefore$不妨$2x_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$2x_2-2\varphi=-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi$，$\therefore x_1-x_2=\dfrac{\pi}{2}-\varphi+(k-m)\pi$，又$\because \left|x_1-x_2\right|_{\min}=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \dfrac{\pi}{2}-\varphi=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，故选D.

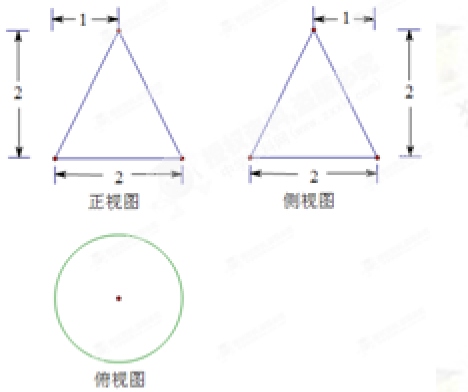
【考点定位】三角函数的图象和性质.

【名师点睛】本题主要考查了三角函数的图象和性质，属于中档题，高考题对于三角函数的考查，多以$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$为背景来考查其性质，解决此类问题的关键：一是会化简，熟悉三角恒等变形，对三角函数进行化简；二是会用性质，熟悉正弦函数的单调性，周期性，对称性，奇偶性等.

10.某工件的三视图如图3所示，现将该工件通过切割，加工成一个体积尽可能大的长方体新工件，并使新

工件的一个面落在原工件的一个面内，则原工件材料的利用率为（材料利用率=$\dfrac{新工件的体积}{原工件的体积}$）（　　）

A. $\dfrac{8}{9\pi}$　　B. $\dfrac{16}{9\pi}$　　C. $\dfrac{4(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$　　D. $\dfrac{12(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$

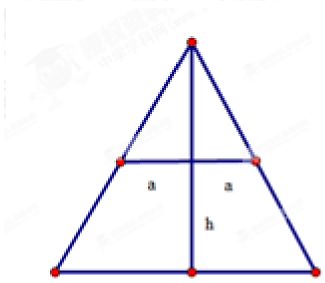



【答案】A.

【解析】学科网

试题分析：分析题意可知，问题等价于圆锥的内接长方体的体积的最大值，设长方体体的长，宽，高分别为$x$，$y$，$h$，长方体上底面截圆锥的截面半径为$a$，则$x^2+y^2=(2a)^2=4a^2$，如下图所示，圆锥的轴截面如图所示，则可知$\dfrac{a}{1}=\dfrac{2-h}{2}\Rightarrow h=2-2a$，而长方体的体积$V=xyh\le\dfrac{x^2+y^2}{2}h=2a^2h=2a^2(2-2a)$ $\le 2\times(\dfrac{a+a+2-2a}{3})^3=\dfrac{16}{27}$，当且仅当$x=y$，$a=2-2a\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$时，等号成立，此时利用率为

$\dfrac{\dfrac{16}{27}}{\dfrac{1}{3}\pi\times 1^2\times 2}=\dfrac{8}{9\pi}$，故选A.




【考点定位】1.圆锥的内接长方体；2.基本不等式求最值.

【名师点睛】本题主要考查立体几何中的最值问题，与实际应用相结合，立意新颖，属于较难题，需要考生从实际应用问题中提取出相应的几何元素，再利用基本不等式求解，解决此类问题的两大核心思路：一

是化立体问题为平面问题，结合平面几何的相关知识求解；二是建立目标函数的数学思想，选择合理的变量，或利用导数或利用基本不等式，求其最值.

## 二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $\int_0^2 (x-1)dx=$________.

【答案】$0$.

【解析】学科网

试题分析：$\int_0^2 (x-1)dx=(\frac{1}{2}x^2-x)|_0^2=0$.

【考点定位】定积分的计算.

【名师点睛】本题主要考查定积分的计算，意在考查学生的运算求解能力，属于容易题，定积分的计算通常有两类基本方法：一是利用牛顿-莱布尼茨定理；二是利用定积分的几何意义求解.

12.在一次马拉松比赛中，35 名运动员的成绩（单位：分钟）的茎叶图如图所示，若将运动员按成绩由好到差编为$1\sim35$号，再用系统抽样方法从中抽取 7 人，则其中成绩在区间$[139,151]$上的运动员人数是 ______.

| | |
|---|---|
| 13 | 0 0 3 4 5 6 6 8 8 8 9 |
| 14 | 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 5 5 6 6 7 8 |
| 15 | 0 1 2 2 3 3 3 |

【答案】$4$.

【解析】

试题分析：由茎叶图可知，在区间$[139,151]$的人数为$20$，再由系统抽样的性质可知人数为$20\times\frac{7}{35}=4$人.

【考点定位】1.系统抽样；2.茎叶图.

【名师点睛】本题主要考查了系统抽样与茎叶图的概念，属于容易题，高考对统计相关知识的考查，重点在于其相关的基本概念，如中位数，方差，极差，茎叶图，回归直线等，要求考生在复习时注意对这些方面的理解与记忆.

13.设$F$是双曲线$C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一个焦点，若$C$上存在点$P$，使线段$PF$ 的中点恰为其虚轴的一个端点，则$C$的离心率为________.

【答案】$\sqrt{5}$.

【解析】学科网

试题分析：根据对称性，不妨设$F(c,0)$，短轴端点为$(0,b)$，从而可知点$(-c,2b)$在双曲线上，

$\therefore \frac{c^2}{a^2}-\frac{4b^2}{b^2}=1\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

【考点定位】双曲线的标准方程及其性质.

【名师点睛】本题主要考查了双曲线的标准方程及其性质，属于容易题，根据对称性将条件中的信息进行等价的转化是解题的关键，在求解双曲线的方程时，主要利用$c^2=a^2+b^2$，焦点坐标，渐近线方程等性质，也会与三角形的中位线，相似三角形，勾股定理等平面几何知识联系起来.

14.设$S_n$为等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和，若$a_1=1$，且$3S_1$，$2S_2$，$S_3$成等差数列，则$a_n=$______.

【答案】$3^{n-1}$.

【解析】

试题分析：$\because 3S_1$，$2S_2$，$S_3$成等差数列，$\therefore 2\times 2(a_1+a_2)=3a_1+a_1+a_2+a_3\Rightarrow a_3=3a_2\Rightarrow q=3$，

又$\because$等比数列$\{a_n\}$，$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

【考点定位】等差数列与等比数列的性质.

【名师点睛】本题主要考查等差与等比数列的性质，属于容易题，在解题过程中，需要建立关于等比数列基本量$q$的方程即可求解，考查学生等价转化的思想与方程思想.

15.已知$f(x)=\begin{cases}x^3,x\le a\\ x^2,x>a\end{cases}$，若存在实数$b$，使函数$g(x)=f(x)-b$有两个零点，则$a$的取值范围是__________.

【答案】$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

【解析】

试题分析：分析题意可知，问题等价于方程$x^3=b(x\le a)$与方程$x^2=b(x>a)$的根的个数和为2，

若两个方程各有一个根：则可知关于$b$的不等式组$\begin{cases} b^{\frac{1}{3}} \le a \\ \sqrt{b} > a \\ -\sqrt{b} \le a \end{cases}$ 有解，$\therefore a^2 < b < a^3$，从而$a > 1$；

若方程$x^3 = b(x \le a)$无解，方程$x^2 = b(x > a)$有2个根：则可知关于$b$的不等式组$\begin{cases} b^{\frac{1}{3}} > a \\ -\sqrt{b} > a \end{cases}$ 有解，从而

$a < 0$，综上，实数$a$的取值范围是$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

【考点定位】1.函数与方程；2.分类讨论的数学思想.

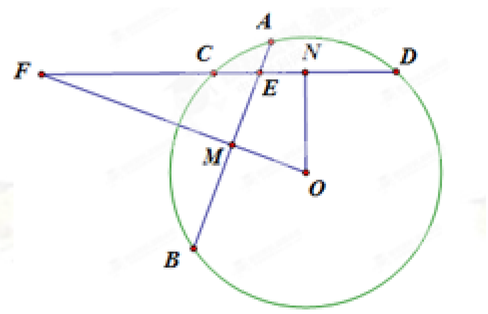
【名师点睛】本题主要考查了函数的零点，函数与方程等知识点，属于较难题，表面上是函数的零点问题，实际上是将问题等价转化为不等式组有解的问题，结合函数与方程思想和转化思想求解函数综合问题，将函数的零点问题巧妙的转化为不等式组有解的参数，从而得到关于参数$a$的不等式，此题是创新题，区别于其他函数与方程问题数形结合转化为函数图象交点的解法，从另一个层面将问题进行转化，综合考查学生的逻辑推理能力.

**三．解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

16.（1）如图，在圆$O$中，相交于点$E$的两弦$AB$，$CD$的中点分别是$M$，$N$，直线$MO$与直线$CD$相交于点$F$，证明：

（1）$\angle MEN + \angle NOM = 180^\circ$；

（2）$FE \cdot FN = FM \cdot FO$




【答案】（1）详见解析；（2）详见解析.

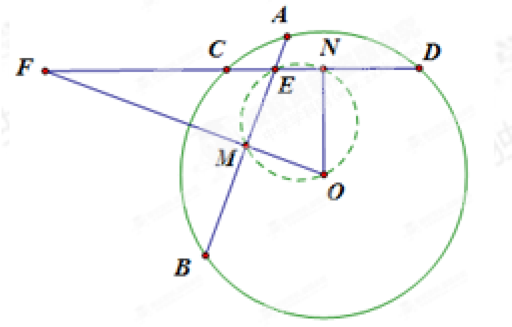
【解析】学科网

试题分析：（1）首先根据垂径定理可得$\angle OME = 90^\circ$，$\angle ENO = 90^\circ$，再由四边形的内角和即可得证；（2）由（1）中的结论可得$O$，$M$，$E$，$N$四点共圆，再由割线定理即得$FE \cdot FN = FM \cdot FO$

试题解析：(1) 如图 $a$ 所示，$\because M$，$N$ 分别是弦 $AB$，$CD$ 的中点，$\therefore OM\perp AB$，$ON\perp CD$，

即 $\angle OME=90^\circ$，$\angle ENO=90^\circ$，$\angle OME+\angle ENO=180^\circ$，又四边形的内角和等于 $360^\circ$，故

$\angle MEN+\angle NOM=180^\circ$；(2) 由 (1) 知，$O$，$M$，$E$，$N$ 四点共圆，故由割线定理即得 $FE\cdot FN=FM\cdot FO$



图a

【考点定位】1.垂径定理；2.四点共圆；3.割线定理.

【名师点睛】本题主要考查了圆的基本性质等知识点，属于容易题，平面几何中圆的有关问题是高考考查的热点，解题时要充分利用圆的性质和切割线定理，相似三角形，勾股定理等其他平面几何知识点的交汇.

（Ⅱ）已知直线 $l:\begin{cases}x=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

（1） 将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2） 设点 $M$ 的直角坐标为 $(5,\sqrt{3})$，直线 $l$ 与曲线 C 的交点为 $A$，$B$，求 $|MA|\cdot|MB|$ 的值.

【答案】(1) $x^2+y^2-2x=0$；(2) $18$.

【解析】学科网

试题分析：(1) 利用 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$ 即可将已知条件中的极坐标方程转化直角坐标方程；(2) 联立直线的参数方程与圆的直角方程，利用参数的几何意义结合韦达定理即可求解.

试题解析：(1) $\rho=2\cos\theta$ 等价于 $\rho^2=2\rho\cos\theta$ ①，将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$ 代入①，记得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$ ②；(2) 将 $\begin{cases}x=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$ 代入②，得 $t^2+5\sqrt{3}t+18=0$，设这个方程

的两个实数根分别为$t_1$，$t_2$，则由参数$t$的几何意义即知，$|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=18$.

【考点定位】1.极坐标方程与直角坐标方程的互相转化；2.直线与圆的位置关系.

【名师点睛】本题主要考查了极坐标方程与直角坐标方程的互相转化以及直线与圆的位置关系，属于容易题，在方程的转化时，只要利用$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$进行等价变形即可，考查极坐标方程与参数方程，实为考查直线与圆的相交问题，实际上为解析几何问题，解析几何中常用的思想，如联立方程组等，在极坐标与参数方程中同样适用.

（III）设$a>0,b>0$，且$a+b=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

（1）$a+b\geq 2$；

（2）$a^2+a<2$与$b^2+b<2$不可能同时成立.

【答案】（1）详见解析；（2）详见解析.

【解析】学科网

试题分析：（1）将已知条件中的式子可等价变形为$ab=1$，再由基本不等式即可得证；（2）利用反证法，假设假设$a^2+a<2$与$b^2+b<2$同时成立，可求得$0<a<1$，$0<b<1$，从而与$ab=1$矛盾，即可得证

试题解析：由$a+b=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}$，$a>0$，$b>0$，得$ab=1$，（1）由基本不等式及$ab=1$，有$a+b\geq 2\sqrt{ab}=2$，即$a+b\geq 2$；（2）假设$a^2+a<2$与$b^2+b<2$同时成立，则由$a^2+a<2$及$a>0$得$0<a<1$，同理$0<b<1$，从而$ab<1$，这与$ab=1$矛盾，故$a^2+a<2$与$b^2+b<2$不可能成立.

【考点定位】1.基本不等式；2.一元二次不等式；3.反证法.

【名师点睛】本题主要考查了不等式的证明与反证法等知识点，属于中档题，第一小问需将条件中的式子作等价变形，再利用基本不等式即可求解，第二小问从问题不可能同时成立，可以考虑采用反证法证明，否定结论，从而推出矛盾，反证法作为一个相对冷门的数学方法，在后续复习时亦应予以关注.

17.设$\Delta ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，$a=b\tan A$，且$B$为钝角.

（1）证明：$B-A=\dfrac{\pi}{2}$；

（2）求$\sin A+\sin C$的取值范围.

【答案】（1）详见解析；（2）$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{9}{8}]$.

【解析】

试题分析：（1）利用正弦定理，将条件中的式子等价变形为 $\sin B=\sin(\frac{\pi}{2}+A)$，再结合条件从而得证；（2）利用（1）中的结论，以及三角恒等变形，将 $\sin A+\sin C$ 转化为只与 $A$ 有关的表达式，再利用三角函数的性质即可求解.

试题解析：（1）由 $a=b\tan A$ 及正弦定理，得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\cos A$，即 $\sin B=\sin(\frac{\pi}{2}+A)$，又 $B$ 为钝角，因此 $\frac{\pi}{2}+A\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，故 $B=\frac{\pi}{2}+A$，即 $B-A=\frac{\pi}{2}$；（2）由（1）知，$C=\pi-(A+B)$

$\pi-(2A+\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-2A>0$，$\therefore A\in(0,\frac{\pi}{4})$，于是 $\sin A+\sin C=\sin A+\sin(\frac{\pi}{2}-2A)$

$=\sin A+\cos 2A=-2\sin^2 A+\sin A+1=-2(\sin A-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}$，$\because 0<A<\frac{\pi}{4}$，$\therefore 0<\sin A<\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此

$\frac{\sqrt{2}}{2}<-2(\sin A-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}\le\frac{9}{8}$，由此可知 $\sin A+\sin C$ 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{9}{8}]$.学科网

【考点定位】1.正弦定理；2.三角恒等变形；3.三角函数的性质.

【名师点睛】本题主要考查了利用正弦定理解三角形以及三角恒等变形等知识点，属于中档题，高考解答题对三角三角函数的考查主要以三角恒等变形，三角函数的图象和性质，利用正余弦定理解三角形为主，难度中等，因此只要掌握基本的解题方法与技巧即可，在三角函数求值问题中，一般运用恒等变换，将未知角变换为已知角求解，在研究三角函数的图象和性质问题时，一般先运用三角恒等变形，将表达式转化为一个角的三角函数的形式求解，对于三角函数与解三角形相结合的题目，要注意通过正余弦定理以及面积公式实现边角互化，求出相关的边和角的大小.

18.某商场举行有奖促销活动，顾客购买一定金额商品后即可抽奖，每次抽奖都从装有 4 个红球、6 个白球的甲箱和装有 5 个红球、5 个白球的乙箱中，各随机摸出 1 个球，在摸出的 2 个球中，若都是红球，则获一等奖；若只有 1 个红球，则获二等奖；若没有红球，则不获奖.

（1）求顾客抽奖 1 次能获奖的概率；

（2）若某顾客有 3 次抽奖机会，记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 $X$，求 $X$ 的分布列和数学期望.

【答案】（1）$\frac{7}{10}$；（2）详见解析.

【解析】

试题分析：（1）记事件 $A_1=$｛从甲箱中摸出的 1 个球是红球｝，$A_2=$｛从乙箱中摸出的 1 个球是红球｝

$B_1=$｛顾客抽奖 1 次获一等奖｝，$B_2=$｛顾客抽奖 1 次获二等奖｝，$C=$｛顾客抽奖 1 次能获奖｝，则可知 $A_1$

与 $A_2$ 相互独立，$A_1\overline{A_2}$ 与 $\overline{A_1}A_2$ 互斥，$B_1$ 与 $B_2$ 互斥，且 $B_1=A_1A_2$，$B_2=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$，$C=B_1+B_2$，再

利用概率的加法公式即可求解；（2）分析题意可知 $X\sim B(3,\frac{1}{5})$，分别求得 $P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{5})^0(\frac{4}{5})^3=\frac{64}{125}$，$P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2=\frac{48}{125}$，$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^1=\frac{12}{125}$，$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{5})^3(\frac{4}{5})^0=\frac{1}{125}$，即可知 $X$ 的概率分布及其期望.

试题解析：（1）记事件 $A_1=$｛从甲箱中摸出的 1 个球是红球｝，$A_2=$｛从乙箱中摸出的 1 个球是红球｝

$B_1=$｛顾客抽奖 1 次获一等奖｝，$B_2=$｛顾客抽奖 1 次获二等奖｝，$C=$｛顾客抽奖 1 次能获奖｝，由题意，

$A_1$ 与 $A_2$ 相互独立，$A_1\overline{A_2}$ 与 $\overline{A_1}A_2$ 互斥，$B_1$ 与 $B_2$ 互斥，且 $B_1=A_1A_2$，$B_2=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$，$C=B_1+B_2$，

$\because P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，$P(A_2)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，$\therefore P(B_1)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$，

$P(B_2)=P(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=P(A_1)(1-P(A_2))+(1-P(A_1))P(A_2)$

$=\frac{2}{5}\times(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{2}{5})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故所求概率为 $P(C)=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$；（2）顾客抽奖 3 次独立重复试验，由（1）知，顾客抽奖 1 次获一等奖的概率为 $\frac{1}{5}$，$\therefore X\sim B(3,\frac{1}{5})$，

于是 $P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{5})^0(\frac{4}{5})^3=\frac{64}{125}$，$P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2=\frac{48}{125}$，$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^1=\frac{12}{125}$，

$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{5})^3(\frac{4}{5})^0=\frac{1}{125}$，故 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{64}{125}$ | $\frac{48}{125}$ | $\frac{12}{125}$ | $\frac{1}{125}$ |

$X$ 的数学期望为 $E(X)=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

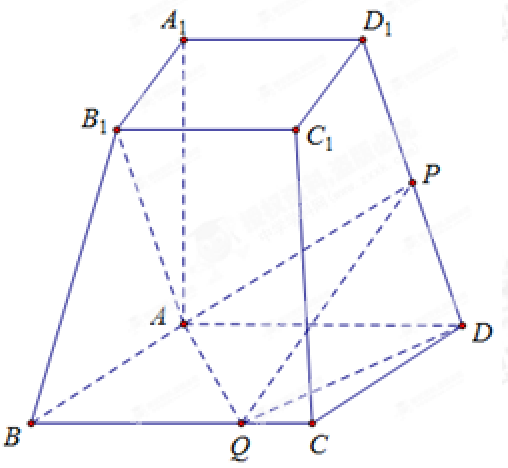
【考点定位】1.概率的加法公式；2.离散型随机变量的概率分布与期望.

【名师点睛】本题主要考查了离散型随机变量的概率分布与期望以及概率统计在生活中的实际应用，这一直都是高考命题的热点，试题的背景由传统的摸球，骰子问题向现实生活中的热点问题转化，并且与统计的联系越来越密切，与统计中的抽样，频率分布直方图等基础知识综合的试题逐渐增多，在复习时应予以关注.

.19.如图，已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上、下底面分别是边长为 3 和 6 的正方形，$AA_1=6$，且 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，点 $P$，$Q$ 分别在棱 $DD_1$，BC 上.

（1）若 P 是 $DD_1$ 的中点，证明：$AB_1\perp PQ$；

（2）若 $PQ//$ 平面 $ABB_1A_1$，二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{3}{7}$，求四面体 $ADPQ$ 的体积.




【答案】（1）详见解析；（2）24 .

【解析】学科网

试题分析：（1）建立空间直角坐标系，求得相关点的坐标可知问题等价于证明 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$；（2）根据条件二面角 $P$-$QD$-$A$ 的余弦值为 $\frac{3}{7}$，利用空间向量可将四面体 $ADPQ$ 视为以 $\Delta ADQ$ 为底面的三棱锥 $P-ADQ$，其高 $h=4$，从而求解

试题解析：解法一　由题设知，$AA_1$，$AB$，$AD$ 两两垂直，以 $A$ 为坐标原点，$AB$，$AD$，$AA_1$ 所在直线分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴，建立如图 b 所示的空间直角坐标系，则相关各点的坐标为 $A(0,0,0)$，$B_1(3,0,6)$，$D(0,6,0)$，$D_1(0,3,6)$，$Q(6,m,0)$，其中 $m=BQ$，$0\le m\le 6$，

（1）若 $P$ 是 $DD_1$ 的中点，则 $P(0,\frac{9}{2},3)$，$\overrightarrow{AB_1}=(3,0,6)$，于是 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=18-18=0$，∴ $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{PQ}$，即 $AB_1\perp PQ$；（2）由题设知，$\overrightarrow{DQ}=(6,m-6,0)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$ 是平面 $PQD$ 内的两个不共线向量.

设 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$ 是平面 $PQD$ 的一个法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DQ}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DD_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}6x+(m-6)y=0\\ -3y+6z=0\end{cases}$，

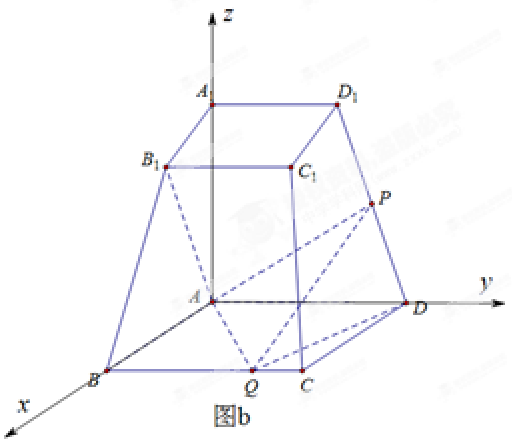
取 $y=6$，得 $\overrightarrow{n_1}=(6-m,6,3)$，又平面 $AQD$ 的一个法向量是 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，

$\therefore \cos < \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} > = \dfrac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \dfrac{3}{\sqrt{(6-m)^2+6^2+3^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}$，而二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{3}{7}$，因此 $\dfrac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}} = \dfrac{3}{7}$，解得 $m=4$，或者 $m=8$（舍去），此时 $Q(6,4,0)$，

设 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DD_1} (0 < \lambda \le 1)$，而 $\overrightarrow{DD_1} = (0,-3,6)$，由此得点 $P(0,6-3\lambda,6\lambda)$，

$\overrightarrow{PQ} = (6,3\lambda-2,-6\lambda)$，$\because PQ //$ 平面 $ABB_1A_1$，且平面 $ABB_1A_1$ 的一个法向量是 $\overrightarrow{n_3} = (0,1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n_3} = 0$，即 $3\lambda - 2 = 0$，亦即 $\lambda = \dfrac{2}{3}$，从而 $P(0,4,4)$，于是，将四面体 $ADPQ$ 视为以 $\Delta ADQ$ 为底面的三棱锥 $P-ADQ$，则其高 $h=4$，故四面体 $ADPQ$ 的体积 $V = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ADQ} \cdot h = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 4 = 24$．

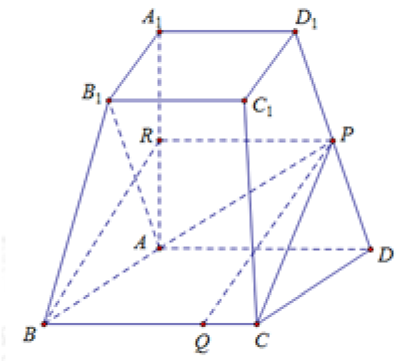


图b

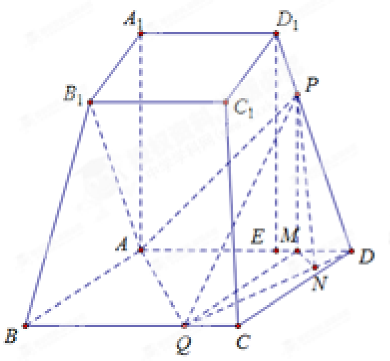
解法二 （1）如图 c，取 $A_1A$ 的中点 $R$，连结 $PR$，$BR$，$\because A_1A$，$D_1D$ 是梯形 $A_1ADD_1$ 的两腰，$P$ 是 $D_1D$ 的中点，$\therefore PR // AD$，于是由 $AD // BC$ 知，$PR // BC$，$\therefore P$，$R$，$B$，$C$ 四点共面，

由题设知，$BC \perp AB$，$BC \perp A_1A$，$\therefore BC \perp$ 平面 $ABB_1A_1$，因此 $BC \perp AB_1$ ①，

$\because \tan \angle ABR = \dfrac{AR}{AB} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{AB_1}{A_1A} = \tan \angle A_1AB_1$，$\therefore \tan \angle ABR = \tan \angle A_1AB_1$，因此 $\angle ABR + \angle BAB_1 = \angle A_1AB_1 + \angle BAB_1 = 90^\circ$，于是 $AB_1 \perp BR$，再由①即知 $AB_1 \perp$ 平面 $PRBC$，又 $PQ \subset$ 平面 $PRBC$，故 $AB_1 \perp PQ$；




图c




图d

（2）如图 d，过点 $P$ 作 $PM//A_1A$ 交 $AD$ 于点 $M$，则 $PM//$ 平面 $ABB_1A_1$，

$\because A_1A\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore OM\perp$ 平面 $ABCD$，过点 $M$ 作 $MN\perp QD$ 于点 $N$，连结 $PN$，则 $PN\perp QD$，

$\angle PNM$ 为二面角 $P-QD-A$ 的平面角，$\therefore \cos\angle PNM=\frac{3}{7}$，即 $\frac{MN}{PN}=\frac{3}{7}$，从而 $\frac{PM}{MN}=\frac{\sqrt{40}}{3}$ ③

连结 $MQ$，由 $PQ//$ 平面 $ABB_1A_1$，$\therefore MQ//AB$，又 $ABCD$ 是正方形，所以 $ABQM$ 为矩形，故

$MQ=AB=6$，设 $MD=t$，则 $MN=\frac{MQ\cdot MD}{\sqrt{MQ^2+MD^2}}=\frac{6t}{\sqrt{36+t^2}}$ ④，过点 $D_1$ 作 $D_1E//A_1A$ 交 $AD$ 于点

$E$，则 $AA_1D_1E$ 为矩形，$\therefore D_1E=A_1A=6$，$AE=A_1D_1=3$，因此 $ED=AD-AE=3$，于是

$\frac{PM}{MD}=\frac{D_1E}{ED}=\frac{6}{3}=2$，$\therefore PM=2MD=2t$，再由③④得 $\frac{\sqrt{36+t^2}}{3}=\frac{\sqrt{40}}{3}$，解得 $t=2$，因此 $PM=4$，

故四面体 $ADPQ$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ADQ}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times4=24$.

【考点定位】1.空间向量的运用；2.线面垂直的性质；3.空间几何体体积计算.

【名师点睛】本题主要考查了线面垂直的性质以及空间几何体体积计算，属于中档题，由于空间向量工具的引入，使得立体几何问题除了常规的几何法之外，还可以考虑利用向量工具来解决，因此有关立体几何的问题，可以建立空间直角坐标系，借助于向量知识来解决，在立体几何的线面关系中，中点是经常使用的一个特殊点，无论是试题本身的已知条件，还是在具体的解题中，通过找“中点”，连“中点”，即可出现平行线而线线平行是平行关系的根本，在垂直关系的证明中线线垂直是核心，也可以根据已知的平面图形通过计算的方式证明线线垂直，也可以根据已知的垂直关系证明线线垂直.

20.已知抛物线 $C_1:x^2=4y$ 的焦点 $F$ 也是椭圆 $C_2:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点，$C_1$ 与 $C_2$ 的公共弦的

长为$2\sqrt{6}$.

（1）求$C_2$的方程；

（2）过点$F$的直线$l$与$C_1$相交于$A$，$B$两点，与$C_2$相交于$C$，$D$两点，且$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$同向

（ⅰ）若$|AC|=|BD|$，求直线$l$的斜率

（ⅱ）设$C_1$在点$A$处的切线与$x$轴的交点为$M$，证明：直线$l$绕点$F$旋转时，$\Delta MFD$总是钝角三角形

**【答案】**（1）$\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{8}=1$；（2）（i）$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，（ii）详见解析.

**【解析】**

试题分析：（1）根据已知条件可求得$C_2$的焦点坐标为$(0,1)$，再利用公共弦长为$2\sqrt{6}$即可求解；（2）（i）设直线$l$的斜率为$k$，则$l$的方程为$y=kx+1$，由$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$得$x^2+16kx-64=0$，根据条件可知$\overline{AC}=\overline{BD}$，从而可以建立关于$k$的方程，即可求解；（ii）根据条件可说明$\overline{FA}\cdot\overline{FM}=\dfrac{x_1^2}{2}-y_1+1=\dfrac{x_1^2}{4}+1>0$，因此$\angle AFM$是锐角，从而$\angle MFD=180^\circ-\angle AFM$是钝角，即可得证

试题解析：（1）由$C_1$：$x^2=4y$知其焦点$F$的坐标为$(0,1)$，$\because F$也是椭圆$C_2$的一焦点，

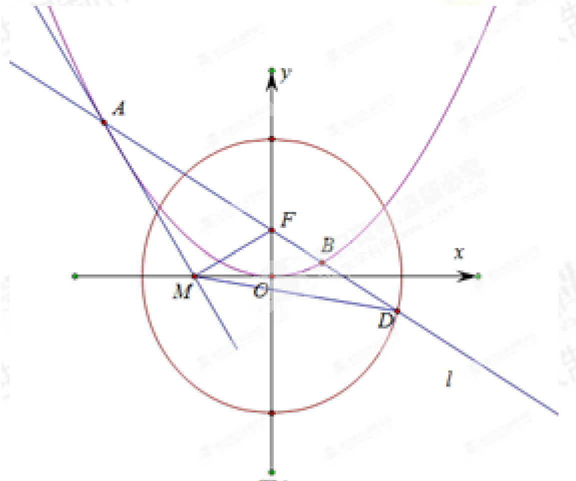
$\therefore$ $a^2-b^2=1$①，又$C_1$与$C_2$的公共弦的长为$2\sqrt{6}$，$C_1$与$C_2$都关于$y$轴对称，且$C_1$的方程为$x^2=4y$，由此易知$C_1$与$C_2$的公共点的坐标为$(\pm\sqrt{6},\dfrac{3}{2})$，$\therefore\dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1$②，联立①，②，得$a^2=9$，$b^2=8$，故$C_2$的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$；（2）如图$f$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

（i）$\because\overline{AC}$与$\overline{BD}$同向，且$|AC|=|BD|$，$\therefore\overline{AC}=\overline{BD}$，从而$x_3-x_1=x_4-x_2$，即$x_1-x_2=x_3-x_4$，于是$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(x_3+x_4)^2-4x_3x_4$③，设直线$l$的斜率为$k$，则$l$的方程为$y=kx+1$，由$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$得$x^2+16kx-64=0$，而$x_1$，$x_2$是这个方程的两根，$\therefore x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$④，由$\begin{cases}y=kx+1\\\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$得

$(9+8k^2)x^2+16kx-64=0$，而 $x_3$， $x_4$是这个方程的两根，$\therefore x_3+x_4=-\dfrac{16k}{9+8k^2}$， $x_3x_4=-\dfrac{64}{9+8k^2}$ ⑤，

将④⑤带入③，得 $16(k^2+1)=\dfrac{16^2k^2}{(9+8k^2)^2}+\dfrac{4\times64}{9+8k^2}$，即 $16(k^2+1)=\dfrac{16^2\times9(k^2+1)}{\left(9+8k^2\right)^2}$，

$\therefore \left(9+8k^2\right)^2=16\times9$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，即直线 $l$ 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



图f

（ii）由 $x^2=4y$ 得 $y'=\dfrac{x}{2}$，$\therefore C_1$ 在点 $A$ 处的切线方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，即

$y=x_1x-\dfrac{x_1^2}{4}$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{x_1}{2}$，即 $M(\dfrac{x_1}{2},0)$，$\therefore \overrightarrow{FM}=(\dfrac{x_1}{2},-1)$，而 $\overrightarrow{FA}=(x_1,y_1-1)$，于是

$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FM}=\dfrac{x_1^2}{2}-y_1+1=\dfrac{x_1^2}{4}+1>0$，因此 $\angle AFM$ 是锐角，从而 $\angle MFD=180^\circ-\angle AFM$ 是钝角.，故直线 $l$ 绕点 $F$ 旋转时，$\Delta MFD$ 总是钝角三角形.

【考点定位】1.椭圆的标准方程及其性质；2.直线与椭圆位置关系.

【名师点睛】本题主要考查了椭圆的标准方程及其性质以及直线与椭圆的位置关系，属于较难题，解决此类问题的关键：（1）结合椭圆的几何性质，如焦点坐标，对称轴，$a^2=b^2+c^2$ 等；（2）当看到题目中出现

直线与圆锥曲线时，不需要特殊技巧，只要联立直线与圆锥曲线的方程，借助根与系数关系，找准题设条件中突显的或隐含的等量关系，把这种关系“翻译”出来，有时不一定要把结果及时求出来，可能需要整体代换到后面的计算中去，从而减少计算量.

21.已知 $a>0$，函数 $f(x)=e^{ax}\sin x(x\in[0,+\infty))$，记 $x_n$ 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $n$ $(n\in N^*)$ 个极值点，证

明：

（1）数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列

（2）若 $a \geq \dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}$，则对一切 $n \in N^*$， $x_n < |f(x_n)|$ 恒成立.

【答案】（1）详见解析；（2）详见解析.

【解析】

试题分析：（1）求导，可知 $f'(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)=\sqrt{a^2+1}e^{ax}\sin(x+\rho)$，利用三角函数的知识可求得 $f(x)$ 的极值点为 $x_n= n\pi-\rho(n\in N^*)$，即可得证；（2）分析题意可知，问题等价于 $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}<\dfrac{e^{a(n\pi-\rho)}}{a(n\pi-\rho)}$ 恒成立，构造函数 $g(t)=\dfrac{e^t}{t}$，利用导数判断其单调性即可得证.

试题解析：（1） $f'(x)=ae^{ax}\sin x+e^{ax}\cos x=e^{ax}(a\sin x+\cos x)=\sqrt{a^2+1}e^{ax}\sin(x+\rho)$

其中 $\tan\rho=\dfrac{1}{a}$， $0<\rho<\dfrac{\pi}{2}$，令 $f'(x)=0$，由 $x\geq 0$ 得 $x+\rho=m\pi$，即 $x=m\pi-\rho$， $m\in N^*$，

对 $k\in N$，若 $2k\pi<x+\rho<(2k+1)\pi$，即 $2k\pi-\rho<x<(2k+1)\pi-\rho$，则 $f'(x)>0$，

若 $(2k+1)\pi<x+\rho<(2k+2)\pi$，即 $(2k+1)\pi-\rho<x<(2k+2)\pi-\rho$，则 $f'(x)<0$，

因此，在区间 $((m-1)\pi,m\pi-\rho)$ 与 $(m\pi-\rho,m\pi)$ 上， $f'(x)$ 的符号总相反，于是

当 $x=m\pi-\rho(m\in N^*)$ 时， $f(x)$ 取得极值，$\therefore x_n= n\pi-\rho(n\in N^*)$，

此时，$f(x_n)=e^{a(n\pi-\rho)}\sin(n\pi-\rho)=(-1)^{n+1}e^{a(n\pi-\rho)}\sin\rho$，易知 $f(x_n)\neq 0$，而

$\dfrac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=\dfrac{(-1)^{n+2}e^{a[(n+1)\pi-\rho]}\sin\rho}{(-1)^{n+1}e^{a(n\pi-\rho)}\sin\rho}=-e^{a\pi}$ 是非零常数，故数列 $\{f(x_n)\}$ 是首项为 $f(x_1)=e^{a(\pi-\rho)}\sin\rho$，公比为 $-e^{a\pi}$ 的等比数列；（2）由（1）知，$\sin\rho=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$，于是对一切 $n\in N^*$，$x_n<|f(x_n)|$ 恒成立，

即 $n\pi-\rho<\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}e^{a(n\pi-\rho)}$ 恒成立，等价于 $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}<\dfrac{e^{a(n\pi-\rho)}}{a(n\pi-\rho)}$（•）恒成立（∵ $a>0$），

设 $g(t)=\dfrac{e^t}{t}(t>0)$，则 $g'(t)=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$，令 $g'(t)=0$，得 $t=1$，

当 $0<t<1$ 时，$g'(t)<0$，∴ $g(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $t>1$ 时，$g'(t)>0$，∴ $g(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，

从而当 $t=1$ 时，函数 $g(t)$ 取得最小值 $g(1)=e$，因此，要是（•）式恒成立，只需 $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}<g(1)=e$，即只需 $a>\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}$，而当 $a=\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}$ 时，$\tan\rho=\dfrac{1}{a}=\sqrt{e^2-1}>\sqrt{3}$，且 $0<\rho<\dfrac{\pi}{2}$，于是 $\pi-\rho<\dfrac{2\pi}{3}<\sqrt{e^2-1}$，且当 $n\geq 2$ 时，$n\pi-\rho\geq 2\pi-\rho\geq\dfrac{3\pi}{2}>\sqrt{e^2-1}$，因此对一切 $n\in N^*$，$ax_n=\dfrac{n\pi-\rho}{\sqrt{e^2-1}}\neq 1$，∴ $g(ax_n)>g(1)=e=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$，故（•）式亦恒成立.

综上所述，若 $a\geq\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}$，则对一切 $n\in N^*$，$x_n<|f(x_n)|$ 恒成立.

【考点定位】1.三角函数的性质；2.导数的运用；3.恒成立问题.

【名师点睛】本题是以导数的运用为背景的函数综合题，主要考查了函数思想，化归思想，抽象概括能力，综合分析问题和解决问题的能力，属于较难题，近来高考在逐年加大对导数问题的考查力度，不仅题型在变化，而且问题的难度、深度与广度也在不断加大，本部分的要求一定有三个层次：第一层次主要考查求导公式，求导法则与导数的几何意义；第二层次是导数的简单应用，包括求函数的单调区间、极值、最值等；第三层次是综合考查，包括解决应用问题，将导数内容和传统内容中有关不等式甚至数列及函数单调性有机结合，设计综合题.