

2015年北京市高考数学试卷（理科）

一、选择题（每小题5分，共40分）

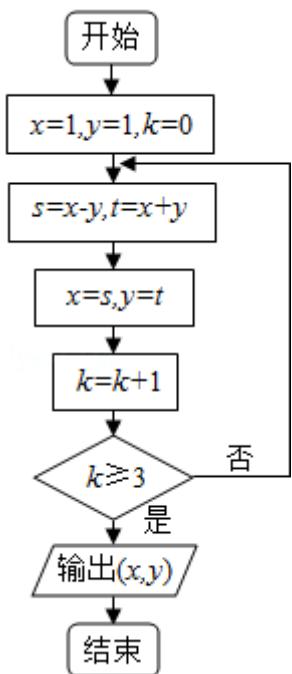
1. (5分) 复数 $i(2-i) = (\quad)$

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1+2i$ D. $-1-2i$

2. (5分) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x-y \leqslant 0 \\ x+y \leqslant 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最大值为()

- A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

3. (5分) 执行如图所示的程序框图输出的结果为()

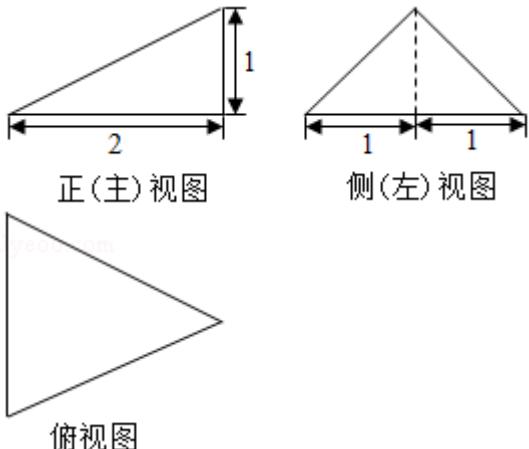


- A. (-2, 2) B. (-4, 0) C. (-4, -4) D. (0, -8)

4. (5分) 设 α, β 是两个不同的平面, m 是直线且 $m \subset \alpha$, “ $m \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. (5分) 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的表面积是()

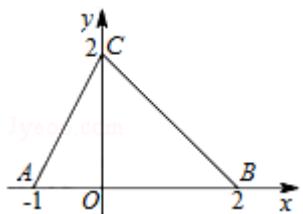


- A. $2+\sqrt{5}$ B. $4+\sqrt{5}$ C. $2+2\sqrt{5}$ D. 5

6. (5分) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中正确的是()

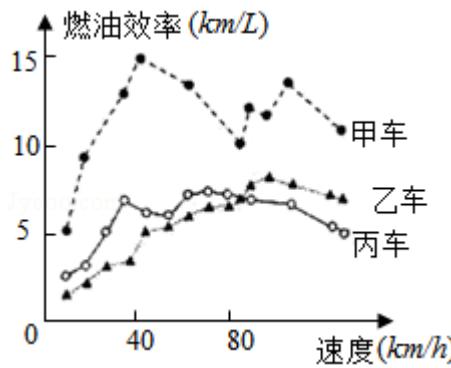
- A. 若 $a_1+a_2>0$, 则 $a_2+a_3>0$
- B. 若 $a_1+a_3<0$, 则 $a_1+a_2<0$
- C. 若 $0 < a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
- D. 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

7. (5分) 如图, 函数 $f(x)$ 的图象为折线ACB, 则不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集是()



- A. $\{x | -1 < x \leq 0\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ C. $\{x | -1 < x \leq 1\}$
D. $\{x | -1 < x \leq 2\}$

8. (5分) 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗1升汽油行驶的里程, 如图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下燃油效率情况, 下列叙述中正确的是()



- A. 消耗1升汽油，乙车最多可行驶5千米
 B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多
 C. 某城市机动车最高限速80千米/小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油
 D. 甲车以80千米/小时的速度行驶1小时，消耗10升汽油

二、填空题（每小题5分，共30分）

9. (5分) 在 $(2+x)^5$ 的展开式中， x^3 的系数为_____ (用数字作答)

10. (5分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + y = 0$ ，则 $a =$ _____

11. (5分) 在极坐标系中，点 $(2, \frac{\pi}{3})$ 到直线 $\rho(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 6$ 的距离为_____

12. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中， $a=4$, $b=5$, $c=6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____.

13. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 M , N 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$, 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

14. (5分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1, \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1, \end{cases}$

- ①若 $a=1$, 则 $f(x)$ 的最小值为 _____;
 ②若 $f(x)$ 恰有2个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题（共6小题，共80分）

15. (13分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}$.

- (I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的最小值.

16. (13分) A, B两组各有7位病人, 他们服用某种药物后的康复时间(单位

: 天)记录如下:

A组: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

B组: 12, 13, 15, 16, 17, 14, a

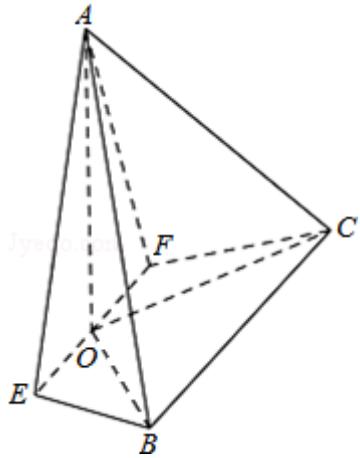
假设所有病人的康复时间相互独立, 从A, B两组随机各选1人, A组选出的人记为甲, B组选出的人记为乙.

- (I) 求甲的康复时间不少于14天的概率;
(II) 如果 $a=25$, 求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率;
(III) 当 a 为何值时, A, B两组病人康复时间的方差相等? (结论不要求证明)

17. (14分) 如图, 在四棱锥A-EFCB中, $\triangle AEF$ 为等边三角形, 平面 $AEF \perp$ 平

面EFCB, $EF \parallel BC$, $BC=4$, $EF=2a$, $\angle EBC=\angle FCB=60^\circ$, O为EF的中点.

- (I) 求证: $AO \perp BE$.
(II) 求二面角F-AE-B的余弦值;
(III) 若 $BE \perp$ 平面AOC, 求a的值.



18. (13分) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$,

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求证, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$;

(III) 设实数 k 使得 $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

19. (14分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0, 1)$

和点 $A(m, n)$ ($m \neq 0$) 都在椭圆 C 上, 直线 PA 交 x 轴于点 M .

(I) 求椭圆 C 的方程, 并求点 M 的坐标 (用 m, n 表示);

(II) 设 O 为原点, 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N , 问: y 轴上是否存在点 Q , 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 的坐标, 若不存在, 说明理由.

20. (13分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq 36$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases}$

($n=1, 2, \dots$), 记集合 $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}$.

- (I) 若 $a_1=6$, 写出集合M的所有元素;
- (II) 如集合M存在一个元素是3的倍数, 证明: M的所有元素都是3的倍数;
- (III) 求集合M的元素个数的最大值.