

2008年广东省高考数学试卷（文科）

一、选择题（共10小题，每小题5分，满分50分）

1. （5分）（2008•广东）第二十九届夏季奥林匹克运动会将于2008年8月8日在北京举行，若集合 $A=\{\text{参加北京奥运会比赛的运动员}\}$ ，集合 $B=\{\text{参加北京奥运会比赛的男运动员}\}$ ，集合 $C=\{\text{参加北京奥运会比赛的女运动员}\}$ ，则下列关系正确的是（ ）

A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq C$ C. $A \cap B = C$ D. $B \cup C = A$

2. （5分）（2008•广东）已知 $0 < a < 2$ ，复数 z 的实部为 a ，虚部为1，则 $|z|$ 的取值范围是（ ）

A. $(1, 5)$ B. $(1, 3)$ C. $(1, \sqrt{5})$ D. $(1, \sqrt{3})$

3. （5分）（2008•广东）已知平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (-2, m)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $2\vec{a} + 3\vec{b}$ = （ ）

A. $(-5, -10)$ B. $(-4, -8)$ C. $(-3, -6)$ D. $(-2, -4)$

4. （5分）（2008•广东）记等差数列的前 n 项和为 S_n ，若 $S_2=4$ ， $S_4=20$ ，则该数列的公差 d = （ ）

A. 2 B. 3 C. 6 D. 7

5. （5分）（2008•广东）已知函数 $f(x) = (1 + \cos 2x) \sin^2 x$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，则 $f(x)$ 是（ ）

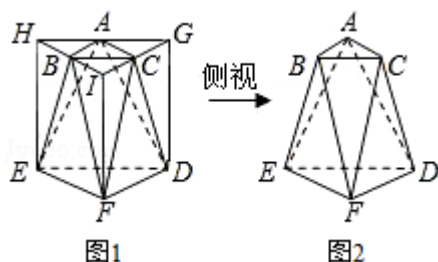
A. 最小正周期为 π 的奇函数 B. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

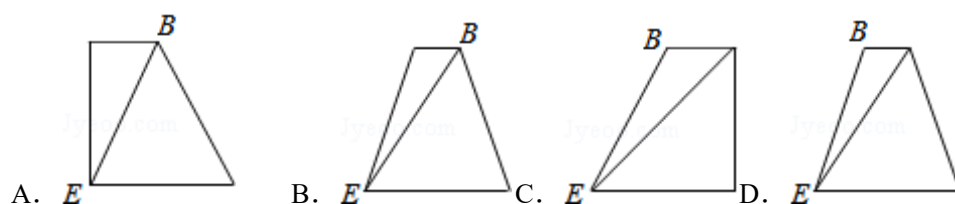
C. 最小正周期为 π 的偶函数 D. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

6. （5分）（2008•广东）经过圆 $x^2 + 2x + y^2 = 0$ 的圆心 C ，且与直线 $x + y = 0$ 垂直的直线方程是（ ）

A. $x + y + 1 = 0$ B. $x + y - 1 = 0$ C. $x - y + 1 = 0$ D. $x - y - 1 = 0$

7. （5分）（2008•广东）将正三棱柱截去三个角（如图1所示 A ， B ， C 分别是 $\triangle GHI$ 三边的中点）得到几何体如图2，则该几何体按图2所示方向的侧视图（或称左视图）为（ ）





8. (5分) (2008•广东) 命题“若函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在其定义域内是减函数, 则 $\log_a 2 < 0$ ”的逆否命题是 ()

- A. 若 $\log_a 2 \geq 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在其定义域内不是减函数
- B. 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在其定义域内不是减函数
- C. 若 $\log_a 2 \geq 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在其定义域内是减函数
- D. 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在其定义域内是减函数

9. (5分) (2008•广东) 设 $a \in \mathbb{R}$, 若函数 $y = e^x + ax$, $x \in \mathbb{R}$, 有大于零的极值点, 则 ()

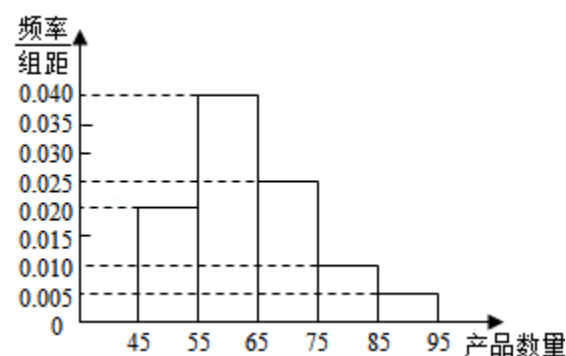
- A. $a < -1$
- B. $a > -1$
- C. $a < -\frac{1}{e}$
- D. $a > -\frac{1}{e}$

10. (5分) (2008•广东) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 若 $a - |b| > 0$, 则下列不等式中正确的是 ()

- A. $b - a > 0$
- B. $a^3 + b^3 < 0$
- C. $a^2 - b^2 < 0$
- D. $b + a > 0$

二、填空题 (共5小题, 11--13为必做题, 14--15题选做1题, 每小题5分, 满分20分)

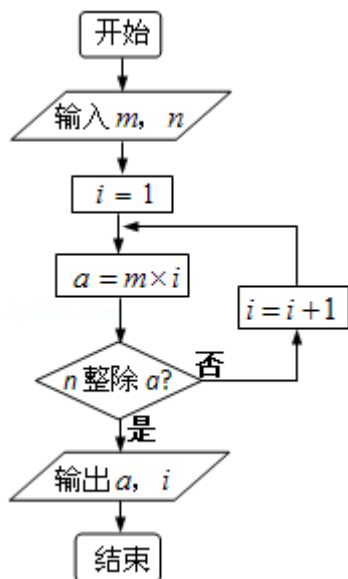
11. (5分) (2008•广东) 为了调查某厂工人生产某种产品的能力, 随机抽查了20位工人某天生产该产品的数量. 产品数量的分组区间为 $[45, 55)$, $[55, 65)$, $[65, 75)$, $[75, 85)$, $[85, 95)$ 由此得到频率分布直方图如图, 则这20名工人中一天生产该产品数量在 $[55, 75)$ 的人数是_____.



12. (5分) (2008•广东) 若变量 x, y 满足
$$\begin{cases} 2x + y \leq 40 \\ x + 2y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是_____.

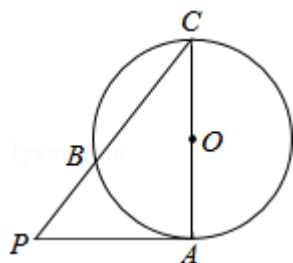
13. (5分) (2008•广东) 阅读程序框图, 若输入 $m=4$, $n=3$, 则输出 $a=$ _____, $i=$ _____.

(注: 框图中的赋值符号“=”, 也可以写成“ \leftarrow ”或“ $:=$ ”)



14. (5分) (2008•广东) 已知曲线 C_1 , C_2 的极坐标方程分别为 $\rho \cos \theta = 3$, $\rho = 4 \cos \theta$ ($\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$), 则曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为_____.

15. (2008•广东) 已知 PA 是圆 O 的切线, 切点为 A , $PA=2$. AC 是圆 O 的直径, PC 与圆 O 交于点 B , $PB=1$, 则圆 O 的半径 $R=$ _____.



三、解答题 (共6小题, 满分80分)

16. (13分) (2008•广东) 已知函数 $f(x) = A \sin(x + \varphi)$ ($A > 0$, $0 < \varphi < \pi$), $x \in \mathbb{R}$ 的最大值是1, 其图象经过点 $M(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $f(\alpha) = \frac{3}{5}$, $f(\beta) = \frac{12}{13}$, 求 $f(\alpha - \beta)$ 的值.

17. (12分) (2008•广东) 某单位用2160万元购得一块空地, 计划在该地块上建造一栋至少10层、每层2000平方米的楼房. 经测算, 如果将楼房建为 x ($x \geq 10$) 层, 则每平方米的平

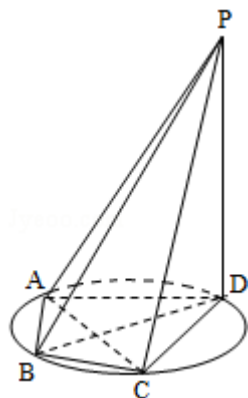
均建筑费用为 $560+48x$ （单位：元）．为了使楼房每平方米的平均综合费用最少，该楼房应建为多少层？

（注：平均综合费用=平均建筑费用+平均购地费用，平均购地费用= $\frac{\text{购地总费用}}{\text{建筑总面积}}$ ）

18. （14分）（2008•广东）如图所示，四棱锥P - ABCD的底面ABCD是半径为R的圆的内接四边形，其中BD是圆的直径， $\angle ABD=60^\circ$ ， $\angle BDC=45^\circ$ ， $\triangle ADP \sim \triangle BAD$.

（1）求线段PD的长；

（2）若 $PC=\sqrt{11}R$ ，求三棱锥P - ABC的体积.



19. （13分）（2008•广东）某中学共有学生2000人，各年级男，女生人数如下表：

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

已知在全校学生中随机抽取1名，抽到高二年级女生的概率是0.19.

（1）现用分层抽样的方法在全校抽取48名学生，问应在高三年级抽取多少名？

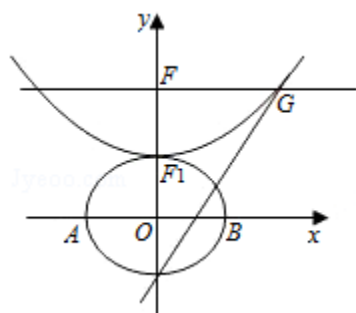
（2）已知 $y \geq 245$ ， $z \geq 245$ ，求高三年级中女生比男生多的概率.

20. （14分）（2008•广东）设 $b > 0$ ，椭圆方程为 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，抛物线方程为 $x^2 = 8(y - b)$

）。如图所示，过点F（0，b+2）作x轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为G，已知抛物线在点G的切线经过椭圆的右焦点 F_1 。

（1）求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

（2）设A，B分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点P，使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）。



21. (14分) (2008•广东) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}+2a_{n-2})$ ($n=3, 4, \dots$). 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, b_n ($n=2, 3, \dots$) 是非零整数, 且对任意的正整数 m 和自然数 k , 都有 $-1 \leq b_m + b_{m+1} + \dots + b_{m+k} \leq 1$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $c_n = na_nb_n$ ($n=1, 2, \dots$), 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

1. 已知 $0 < a < 2$, 复数 z 的实部为 a , 虚部为1, 则 $|z|$ 的取值范围是 (C)

A. (1,5) B. (1,3) C. (1, $\sqrt{5}$) D. (1, $\sqrt{3}$)

【解析】 $|z| = \sqrt{a^2 + 1}$, 而 $0 < a < 2$, 即 $1 < a^2 + 1 < 5$, $\therefore 1 < |z| < \sqrt{5}$

2. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, $S_4 = 20$, 则 $S_6 =$ (D)

A. 16 B. 24 C. 36 D. 48

【解析】 $S_4 = 2 + 6d = 20$, $\therefore d = 3$, 故 $S_6 = 3 + 15d = 48$

3. 某校共有学生2000名, 各年级男、女生人数如表1. 已知在全校学生中随机抽取1名, 抽到二年级女生的概率是0.19. 现用分层抽样的方法在全校抽取64名学生, 则应在三年级抽取的学生人数为 (C)

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

A. 24 B. 18 C. 16 D. 12 表1

【解析】依题意我们知道二年级的女生有380人, 那么三年级的学生的人数应该是500, 即总体中各个年级的人数比例为3:3:2, 故在分层抽样中应在三年级抽取的学生人数为

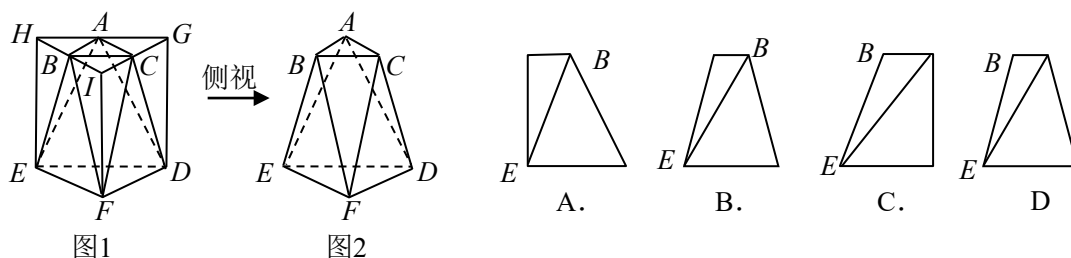
$$64 \times \frac{2}{8} = 16$$

4. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \leq 40, \\ x + 2y \leq 50, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是 (C)

A. 90 B. 80 C. 70 D. 40

【解析】画出可行域, 利用角点法易得答案C.

5. 将正三棱柱截去三个角 (如图1所示 A, B, C 分别是 $\triangle GHI$ 三边的中点) 得到几何体如图2, 则该几何体按图2所示方向的侧视图 (或称左视图) 为 (A)



【解析】解题时在图2的右边放扇墙(心中有墙),可得答案A.

6. 已知命题 p : 所有有理数都是实数, 命题 q : 正数的对数都是负数, 则下列命题中为真命题的是 (D)

- A. $(\neg p) \vee q$ B. $p \wedge q$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee (\neg q)$

【解析】不难判断命题 p 为真命题, 命题 q 为假命题, 从而上述叙述中只有 $(\neg p) \vee (\neg q)$ 为真命题

7. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = e^{ax} + 3x$, $x \in \mathbf{R}$ 有大于零的极值点, 则 (B)

- A. $a > -3$ B. $a < -3$ C. $a > -\frac{1}{3}$ D. $a < -\frac{1}{3}$

【解析】 $f'(x) = 3 + ae^{ax}$, 若函数在 $x \in \mathbf{R}$ 上有大于零的极值点, 即 $f'(x) = 3 + ae^{ax} = 0$

有正根. 当有 $f'(x) = 3 + ae^{ax} = 0$ 成立时, 显然有 $a < 0$, 此时 $x = \frac{1}{a} \ln(-\frac{3}{a})$, 由 $x > 0$ 我

们马上就能得到参数 a 的范围为 $a < -3$.

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 交于点 F . 若 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AF} =$ (B)

- A. $\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ B. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ C. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$ D. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$

【解析】此题属于中档题. 解题关键是利用平面几何知识得出 $DF:FC = 1:2$, 然后利用向量的加减法则易得答案B.

二、填空题: 本大题共7小题, 考生作答6小题, 每小题5分, 满分30分.

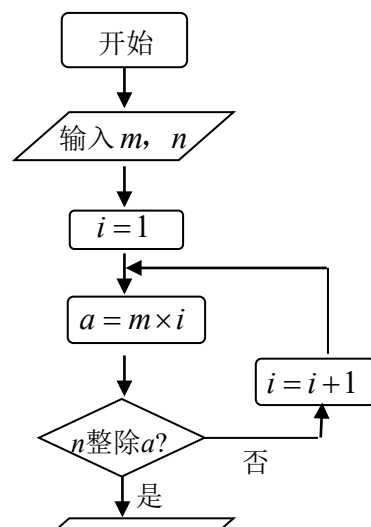
(一) 必做题 (9~12题)

9. 阅读图3的程序框图, 若输入 $m = 4$, $n = 6$, 则输出 $a = \underline{\quad}$, $i = \underline{\quad}$

(注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“ \leftarrow ”或“ $:=$ ”)

【解析】要结束程序的运算, 就必须通过 n 整除 a 的条件运算, 而同时 m 也整除 a , 那么 a 的最小值应为 m 和 n 的最小公倍数12, 即此时有 $i = 3$ 。

10. 已知 $(1+kx^2)^6$ (k 是正整数) 的展开式中, x^8 的系数小于120, 则 $k = \underline{\quad}$.



【解析】 $(1+kx^2)^6$ 按二项式定理展开的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(kx^2)^r=C_6^rk^rx^{2r}$,

我们知道 x^8 的系数为 $C_6^4k^4=15k^4$, 即 $15k^4<120$, 也即 $k^4<8$,

而 k 是正整数, 故 k 只能取1。

11. 经过圆 $x^2+2x+y^2=0$ 的圆心 C , 且与直线 $x+y=0$ 垂直的直线方程是_____。

【解析】易知点 C 为 $(-1,0)$, 而直线与 $x+y=0$ 垂直, 我们设待求的

直线的方程为 $y=x+b$, 将点 C 的坐标代入马上就能求出参数 b 的

值为 $b=1$, 故待求的直线的方程为 $x-y+1=0$ 。

12. 已知函数 $f(x)=(\sin x-\cos x)\sin x$, $x\in\mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是_____。

【解析】 $f(x)=\sin^2x-\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x$, 此时可得函数的最小正周期

$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi。$$

二、选做题(13—15题, 考生只能从中选做两题)

13. (坐标系与参数方程选做题) 已知曲线 C_1 , C_2 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\theta=3$,

$$\rho=4\cos\theta\left(\rho\geq 0, 0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right), \text{ 则曲线 } C_1 \text{ 与 } C_2 \text{ 交点的极坐标为_____。}$$

【解析】我们通过联立解方程组 $\begin{cases} \rho\cos\theta=3 \\ \rho=4\cos\theta \end{cases} (\rho\geq 0, 0\leq\theta<\frac{\pi}{2})$ 解得 $\begin{cases} \rho=2\sqrt{3} \\ \theta=\frac{\pi}{6} \end{cases}$, 即两曲线的交

点为 $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ 。

14. (不等式选讲选做题) 已知 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的方程 $x^2+x+\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根,

则 a 的取值范围是_____。

【解析】方程即 $\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|=-x^2-x\in[0, \frac{1}{4}]$, 利用绝对值的几何意义(或零点分段法进行

求解)可得实数 a 的取值范围为 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

15. (几何证明选讲选做题) 已知 PA 是圆 O 的切线, 切点为 A , $PA=2$. AC 是圆 O 的直径, PC 与圆 O 交于点 B , $PB=1$, 则圆 O 的半径 R =_____。

【解析】依题意，我们知道 $\triangle PBA \sim \triangle PAC$ ，由相似三角形的性质我们有 $\frac{PA}{2R} = \frac{PB}{AB}$ ，即

$$R = \frac{PA \cdot AB}{2PB} = \frac{2 \times \sqrt{2^2 - 1^2}}{2 \times 1} = \sqrt{3}。$$

三、解答题：本大题共6小题，满分80分。解答须写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. （本小题满分13分）

已知函数 $f(x) = A \sin(x + \varphi)$ ($A > 0, 0 < \varphi < \pi$)， $x \in \mathbf{R}$ 的最大值是1，其图像经过点

$$M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)。$$

(1) 求 $f(x)$ 的解析式； (2) 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，且 $f(\alpha) = \frac{3}{5}$ ， $f(\beta) = \frac{12}{13}$ ，求

$f(\alpha - \beta)$ 的值。

【解析】(1) 依题意有 $A = 1$ ，则 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ，将点 $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 代入得

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}，而 0 < \varphi < \pi，\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{5}{6}\pi，\therefore \varphi = \frac{\pi}{2}，故$$

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x；$$

(2) 依题意有 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ，而 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}，\sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}，$$

$$f(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{65}。$$

17. （本小题满分13分）

随机抽取某厂的某种产品200件，经质检，其中有一等品126件、二等品50件、三等品20件、次品4件。已知生产1件一、二、三等品获得的利润分别为6万元、2万元、1万元，而1件次品亏损2万元。设1件产品的利润（单位：万元）为 ξ 。

(1) 求 ξ 的分布列； (2) 求1件产品的平均利润（即 ξ 的数学期望）；

(3) 经技术革新后，仍有四个等级的产品，但次品率降为1%，一等品率提高为70%。如果此时要求1件产品的平均利润不小于4.73万元，则三等品率最多是多少？

【解析】 ξ 的所有可能取值有6，2，1，-2； $P(\xi = 6) = \frac{126}{200} = 0.63$ ，

$$P(\xi = 2) = \frac{50}{200} = 0.25$$

$$P(\xi=1)=\frac{20}{200}=0.1, \quad P(\xi=-2)=\frac{4}{200}=0.02$$

故 ξ 的分布列为：

ξ	6	2	1	-2
P	0.63	0.25	0.1	0.02

$$(2) E\xi = 6 \times 0.63 + 2 \times 0.25 + 1 \times 0.1 + (-2) \times 0.02 = 4.34$$

(3) 设技术革新后的三等品率为 x ，则此时1件产品的平均利润为

$$E(x) = 6 \times 0.7 + 2 \times (1 - 0.7 - 0.01 - x) + (-2) \times 0.01 = 4.76 - x \quad (0 \leq x \leq 0.29)$$

依题意， $E(x) \geq 4.73$ ，即 $4.76 - x \geq 4.73$ ，解得 $x \leq 0.03$ 所以三等品率最多为3%

18. (本小题满分14分)

设 $b > 0$ ，椭圆方程为 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，抛物线方程为 $x^2 = 8(y-b)$ 。如图4所示，过点

$F(0, b+2)$ 作 x 轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为 G ，已知抛物线在点 G 的切

线经过椭圆的右焦点 F_1 。

(1) 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

(2) 设 A, B 分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点 P ，使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）。

【解析】(1) 由 $x^2 = 8(y-b)$ 得 $y = \frac{1}{8}x^2 + b$ ，

当 $y = b+2$ 得 $x = \pm 4$ ， $\therefore G$ 点的坐标为 $(4, b+2)$ ， $y' = \frac{1}{4}x$ ， $y'|_{x=4} = 1$ ，

过点 G 的切线方程为 $y - (b+2) = x - 4$ 即 $y = x + b - 2$ ，

令 $y = 0$ 得 $x = 2 - b$ ， $\therefore F_1$ 点的坐标为 $(2-b, 0)$ ，由椭圆方程得 F_1 点的坐标为 $(b, 0)$ ，

$\therefore 2-b=b$ 即 $b=1$ ，即椭圆和抛物线的方程分别为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 和 $x^2 = 8(y-1)$ ；

(2) \because 过 A 作 x 轴的垂线与抛物线只有一个交点 P ， \therefore 以 $\angle PAB$ 为直角的 $Rt\triangle ABP$ 只有一个，

同理 \therefore 以 $\angle PBA$ 为直角的 $Rt\triangle ABP$ 只有一个。

若以 $\angle APB$ 为直角，设 P 点坐标为 $(x, \frac{1}{8}x^2 + 1)$ ， A, B 两点的坐标分别为 $(-\sqrt{2}, 0)$

和 $(\sqrt{2}, 0)$ ，

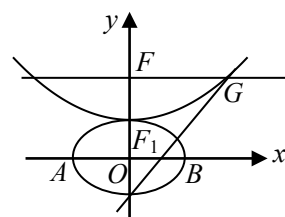


图4

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 - 2 + \left(\frac{1}{8}x^2 + 1\right)^2 = \frac{1}{64}x^4 + \frac{5}{4}x^2 - 1 = 0。$$

关于 x^2 的二次方程有一大于零的解, $\therefore x$ 有两解, 即以 $\angle APB$ 为直角的 $Rt\triangle ABP$ 有两个,

因此抛物线上存在四个点使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形。

19. (本小题满分14分)

$$\text{设 } k \in \mathbf{R}, \text{ 函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 1 \\ -\sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}, \quad F(x) = f(x) - kx, \quad x \in \mathbf{R}, \text{ 试讨论函数}$$

$F(x)$ 的单调性.

$$\text{【解析】 } F(x) = f(x) - kx = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - kx, & x < 1, \\ -\sqrt{x-1} - kx, & x \geq 1, \end{cases} \quad F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} - k, & x < 1, \\ -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - k, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$\text{对于 } F(x) = \frac{1}{1-x} - kx (x < 1),$$

当 $k \leq 0$ 时, 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是增函数;

当 $k > 0$ 时, 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{k}})$ 上是减函数, 在 $(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}, 1)$ 上是增函数;

$$\text{对于 } F(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - k (x \geq 1),$$

当 $k \geq 0$ 时, 函数 $F(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数;

当 $k < 0$ 时, 函数 $F(x)$ 在 $\left[1, 1 + \frac{1}{4k^2}\right)$ 上是减函数, 在 $\left[1 + \frac{1}{4k^2}, +\infty\right)$ 上是增函数。

20. (本小题满分14分)

如图5所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是半径为 R 的圆的内接四边形, 其中 BD 是圆的直径, $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$, PD 垂直底面 $ABCD$, $PD = 2\sqrt{2}R$, E, F 分别是 PB, CD 上的点, 且 $\frac{PE}{EB} = \frac{DF}{FC}$, 过点 E 作 BC 的平行线交 PC 于 G .

(1) 求 BD 与平面 ABP 所成角 θ 的正弦值; (2) 证明: $\triangle EFG$ 是直角三角形;

(3) 当 $\frac{PE}{EB} = \frac{1}{2}$ 时, 求 $\triangle EFG$ 的面积.

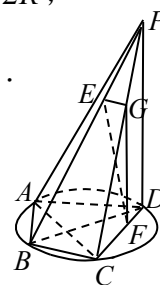


图5

【解析】(1) 在 $Rt\triangle BAD$ 中, $\because \angle ABD = 60^\circ$, $\therefore AB = R, AD = \sqrt{3}R$

而PD垂直底面ABCD, $PA = \sqrt{PD^2 + AD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}R)^2 + (\sqrt{3}R)^2} = \sqrt{11}R$

$$PB = \sqrt{PD^2 + BD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}R)^2 + (2R)^2} = 2\sqrt{3}R,$$

在 $\triangle PAB$ 中, $PA^2 + AB^2 = PB^2$, 即 $\triangle PAB$ 为以 $\angle PAB$ 为直角的直角三角形。

设点D到面PAB的距离为H, 由 $V_{P-ABD} = V_{D-PAB}$ 有 $PA \cdot AB \cdot H = AB \cdot AD \cdot PD$, 即

$$H = \frac{AD \cdot PD}{PA} = \frac{\sqrt{3}R \cdot 2\sqrt{2}R}{\sqrt{11}R} = \frac{2\sqrt{66}}{11}R \quad \sin \theta = \frac{H}{BD} = \frac{\sqrt{66}}{11};$$

$$(2) EG \parallel BC, \therefore \frac{PE}{EB} = \frac{PG}{GC}, \text{ 而 } \frac{PE}{EB} = \frac{DF}{FC}, \text{ 即 } \frac{PG}{GC} = \frac{DF}{DC}, \therefore GF \parallel PD, \therefore GF \perp BC$$

,

$\therefore GF \perp EG$, $\therefore \triangle EFG$ 是直角三角形;

$$(3) \frac{PE}{EB} = \frac{1}{2} \text{ 时 } \frac{EG}{BC} = \frac{PE}{PB} = \frac{1}{3}, \frac{GF}{PD} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } EG = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \times 2R \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{3}R, GF = \frac{2}{3}PD = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2}R = \frac{4\sqrt{2}}{3}R,$$

$$\therefore \triangle EFG \text{ 的面积 } S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}EG \cdot GF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}R \times \frac{4\sqrt{2}}{3}R = \frac{4}{9}R^2$$

21. (本小题满分12分)

设 p, q 为实数, α, β 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两个实根, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = p$,

$$x_2 = p^2 - q, \quad x_n = px_{n-1} - qx_{n-2} \quad (n=3, 4, \dots). \quad (1) \text{ 证明: } \alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = q; \quad (2$$

) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(3) 若 $p=1, q=\frac{1}{4}$, 求 $\{x_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【解析】(1) 由求根公式, 不妨设 $\alpha < \beta$, 得 $\alpha = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \beta = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = p,$$

$$\alpha\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \times \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = q$$

(2) 设 $x_n - sx_{n-1} = t(x_{n-1} - sx_{n-2})$, 则 $x_n = (s+t)x_{n-1} - stx_{n-2}$, 由 $x_n = px_{n-1} - qx_{n-2}$ 得

$$\begin{cases} s+t=p \\ st=q \end{cases},$$

消去 t ，得 $s^2 - ps + q = 0$ ， $\therefore s$ 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的根，由题意可知，

$$s_1 = \alpha, s_2 = \beta$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \alpha \neq \beta \text{ 时，此时方程组 } \begin{cases} s+t=p \\ st=q \end{cases} \text{ 的解记为 } \begin{cases} s_1 = \alpha \\ t_1 = \beta \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} s_2 = \alpha \\ t_2 = \beta \end{cases}$$

$$\therefore x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}), x_n - \beta x_{n-1} = \alpha(x_{n-1} - \beta x_{n-2}),$$

即 $\{x_n - t_1 x_{n-1}\}$ 、 $\{x_n - t_2 x_{n-1}\}$ 分别是公比为 $s_1 = \alpha$ 、 $s_2 = \beta$ 的等比数列，

由等比数列性质可得 $x_n - \alpha x_{n-1} = (x_2 - \alpha x_1) \beta^{n-2}$ ， $x_n - \beta x_{n-1} = (x_2 - \beta x_1) \alpha^{n-2}$ ，

$$\text{两式相减，得 } (\beta - \alpha)x_{n-1} = (x_2 - \alpha x_1) \beta^{n-2} - (x_2 - \beta x_1) \alpha^{n-2}$$

$$\because x_2 = p^2 - q, x_1 = p, \therefore x_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta, x_1 = \alpha + \beta$$

$$\therefore (x_2 - \alpha x_1) \beta^{n-2} = \beta^2 \cdot \beta^{n-2} = \beta^n, (x_2 - \beta x_1) \alpha^{n-2} = \alpha^2 \cdot \alpha^{n-2} = \alpha^n$$

$$\therefore (\beta - \alpha)x_{n-1} = \beta^n - \alpha^n, \text{ 即 } \therefore x_{n-1} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}, \therefore x_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \alpha = \beta \text{ 时，即方程 } x^2 - px + q = 0 \text{ 有重根，} \therefore p^2 - 4q = 0,$$

即 $(s+t)^2 - 4st = 0$ ，得 $(s-t)^2 = 0$ ， $\therefore s = t$ ，不妨设 $s = t = \alpha$ ，由 $\textcircled{1}$ 可知

$$x_n - \alpha x_{n-1} = (x_2 - \alpha x_1) \beta^{n-2}, \because \alpha = \beta, \therefore x_n - \alpha x_{n-1} = (x_2 - \alpha x_1) \alpha^{n-2} = \alpha^n$$

即 $\therefore x_n = \alpha x_{n-1} + \alpha^n$ ，等式两边同时除以 α^n ，得 $\frac{x_n}{\alpha^n} = \frac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + 1$ ，即 $\frac{x_n}{\alpha^n} - \frac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}} = 1$

\therefore 数列 $\{\frac{x_n}{\alpha^n}\}$ 是以 1 为公差的等差数列， $\therefore \frac{x_n}{\alpha^n} = \frac{x_1}{\alpha} + (n-1) \times 1 = \frac{2\alpha}{\alpha} + n - 1 = n + 1$ ，

$$\therefore x_n = n\alpha^n + \alpha^n$$

$$\text{综上所述，} x_n = \begin{cases} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, (\alpha \neq \beta) \\ n\alpha^n + \alpha^n, (\alpha = \beta) \end{cases}$$

$$(3) \text{ 把 } p=1, q=\frac{1}{4} \text{ 代入 } x^2 - px + q = 0, \text{ 得 } x^2 - x + \frac{1}{4} = 0, \text{ 解得 } \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x_n = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + \left(\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 - (n+3) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$