

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数 学（理工类）

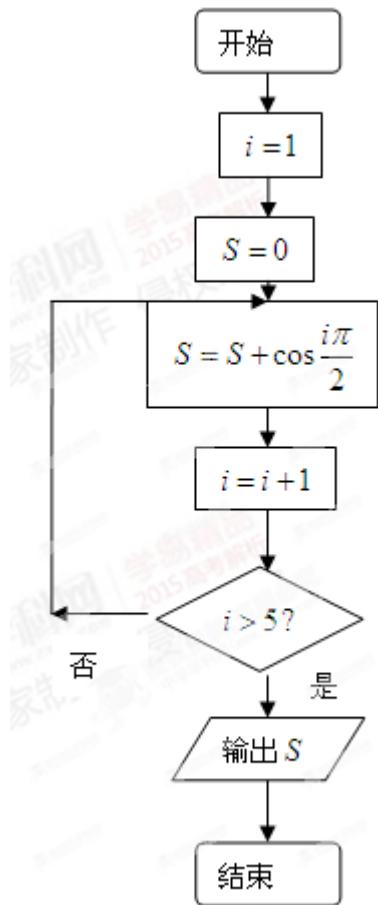
第 I 卷（选择题共 50 分）

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \{i, i^2, i^3, i^4\}$ (i 是虚数单位)， $B = \{1, -1\}$ ，则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{-1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{1, -1\}$ D. \emptyset
2. 下列函数为奇函数的是()
A. $y = \sqrt{x}$ B. $y = |\sin x|$ C. $y = \cos x$ D. $y = e^x - e^{-x}$
3. 若双曲线 $E: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 在双曲线 E 上，且 $|PF_1| = 3$ ，则 $|PF_2|$ 等于 ()
A. 11 B. 9 C. 5 D. 3
4. 为了解某社区居民的家庭年收入所年支出的关系，随机调查了该社区 5 户家庭，得到如下统计数据表：

收入 x (万元)	8.2	8.6	10.0	11.3	11.9
支出 y (万元)	6.2	7.5	8.0	8.5	9.8

根据上表可得回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，其中 $\hat{b} = 0.76, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ ，据此估计，该社区一户收入为 15 万元家庭年支出为()
A. 11.4 万元 B. 11.8 万元 C. 12.0 万元 D. 12.2 万元
5. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 0, \\ x-y \leq 0, \\ x-2y+2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x-y$ 的最小值等于 ()
A. $-\frac{5}{2}$ B. -2 C. $-\frac{3}{2}$ D. 2
6. 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出的结果为()



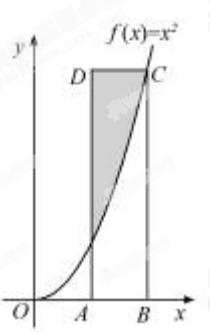
- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

7. 若 l, m 是两条不同的直线, m 垂直于平面 α , 则 “ $l \perp m$ ” 是 “ $l \parallel \alpha$ ” 的 ()
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
8. 若 a, b 是函数 $f(x) = x^2 - px + q (p > 0, q > 0)$ 的两个不同的零点, 且 $a, b, -2$ 这三个数可适当排序后成等差数列, 也可适当排序后成等比数列, 则 $p + q$ 的值等于 ()
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
9. 已知 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{t}$, $|\overrightarrow{AC}| = t$, 若 P 点是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值等于 ()
- A. 13 B. 15 C. 19 D. 21
10. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = -1$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) > k > 1$, 则下列结论中一定错误的是 ()

- A. $f\left(\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$ B. $f\left(\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k-1}$ C. $f\left(\frac{1}{k-1}\right) < \frac{1}{k-1}$ D. $f\left(\frac{1}{k-1}\right) > \frac{k}{k-1}$

第 II 卷 (非选择题共 100 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

11. $(x+2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于 _____. (用数字作答)
12. 若锐角 ΔABC 的面积为 $10\sqrt{3}$, 且 $AB = 5, AC = 8$, 则 BC 等于 _____.
 13. 如图, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 点 C 的坐标为 $(2, 4)$, 函数 $f(x) = x^2$, 若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率等于 _____.


14. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x + 6, & x \leq 2, \\ 3 + \log_a x, & x > 2, \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域是 $[4, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.
 是 _____.
 15. 一个二元码是由 0 和 1 组成的数字串 $x_1 x_2 \cdots x_n$ ($n \in N^*$), 其中 x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 称为第 k 位码元, 二元码是通信中常用的码, 但在通信过程中有时会发生码元错误 (即码元由 0 变为 1, 或者由 1 变为 0)

已知某种二元码 $x_1 x_2 \cdots x_7$ 的码元满足如下校验方程组:
$$\begin{cases} x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0, \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0, \\ x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0, \end{cases}$$

其中运算 \oplus 定义为: $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$.

现已知一个这种二元码在通信过程中仅在第 k 位发生码元错误后变成了 1101101, 那么利用上述校验方程组可判定 k 等于 _____.
三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. 某银行规定, 一张银行卡若在一天内出现 3 次密码尝试错误, 该银行卡将被锁定, 小王到银行取钱时, 发现自己忘记了银行卡的密码, 但是可以确定该银行卡的正确密码是他常用的 6 个密码之一, 小王决定从

中不重复地随机选择 1 个进行尝试.若密码正确, 则结束尝试; 否则继续尝试, 直至该银行卡被锁定.

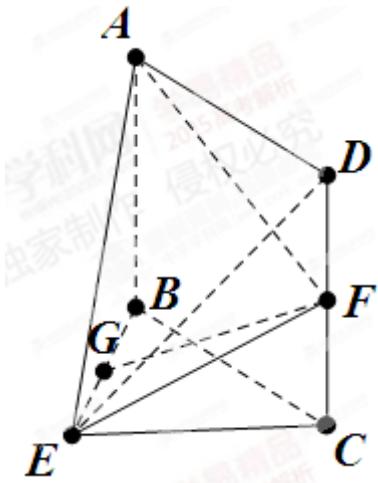
(I)求当天小王的该银行卡被锁定的概率;

(II)设当天小王用该银行卡尝试密码次数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

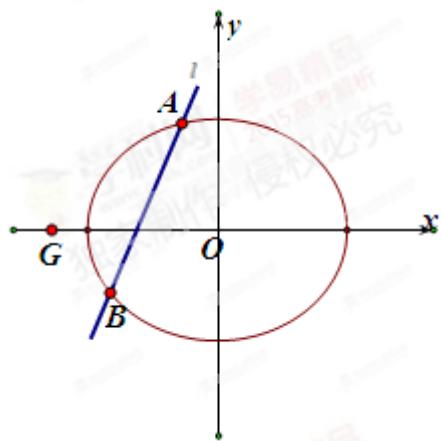
17. 如图, 在几何体 ABCDE 中, 四边形 ABCD 是矩形, $AB \perp$ 平面 BEC, $BE \perp EC$, $AB=BE=EC=2$, G, F 分别是线段 BE, DC 的中点.

(I)求证: $GF \parallel$ 平面 ADE ;

(II)求平面 AEF 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值.



18.. 已知椭圆 E : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(0, \sqrt{2})$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(I)求椭圆 E 的方程;

(II)设直线 $x = my - 1$, ($m \in R$) 交椭圆 E 于 A, B 两点,

判断点 $G(-\frac{9}{4}, 0)$ 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系, 并说明理由.

19. 已知函数 $f(x)$ 的图像是由函数 $g(x) = \cos x$ 的图像经如下变换得到: 先将 $g(x)$ 图像上所有点的纵坐标

伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 再将所得到的图像向右平移 $\frac{p}{2}$ 个单位长度.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并求其图像的对称轴方程;

(II) 已知关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = m$ 在 $[0, 2p]$ 内有两个不同的解 a, b .

(1) 求实数 m 的取值范围;

$$(2) \text{ 证明: } \cos(a - b) = \frac{2m^2}{5} - 1.$$

20. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = kx$, ($k \in R$),

(I) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < x$;

(II) 证明: 当 $k < 1$ 时, 存在 $x_0 > 0$, 使得对任意 $x \in (0, x_0)$, 恒有 $f(x) > g(x)$;

(III) 确定 k 的所有可能取值, 使得存在 $t > 0$, 对任意的 $x \in (0, t)$, 恒有 $|f(x) - g(x)| < x^2$.

21. 本题设有三个选考题, 请考生任选 2 题作答.

选修 4-2: 矩阵与变换

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(I) 求 A 的逆矩阵 A^{-1} ;

(II) 求矩阵 C , 使得 $AC=B$.

选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xoy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 3 \cos t \\ y = -2 + 3 \sin t \end{cases}$ (t 为参数). 在极坐标系 (与平面直角坐标系 xoy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴非负半轴为极轴) 中, 直线 l 的方程为

$$\sqrt{2}r \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = m, (m \in R).$$

(I) 求圆 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程;

(II) 设圆心 C 到直线 l 的距离等于 2, 求 m 的值.

选修 4-5: 不等式选讲

已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 函数 $f(x) = |x+a| + |x-b| + c$ 的最小值为 4.

(I) 求 $a+b+c$ 的值;

(II) 求 $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 + c^2$ 的最小值.