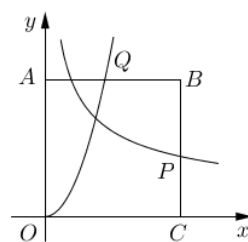


2019 年上海市春季高考数学试卷

2019.01

一. 填空题 (本大题共 12 题, 满分 54 分, 第 1~6 题每题 4 分, 第 7~12 题每题 5 分)

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 6\}$, 则 $A \cap B =$ _____
2. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 - 4n + 1} =$ _____
3. 不等式 $|x + 1| < 5$ 的解集为 _____
4. 函数 $f(x) = x^2 (x > 0)$ 的反函数为 _____
5. 设 i 为虚数单位, $3\bar{z} - i = 6 + 5i$, 则 $|z|$ 的值为 _____
6. 已知二元线性方程组 $\begin{cases} 2x + 2y = -1 \\ 4x + a^2y = a \end{cases}$ 有无穷多解, 则实数 $a =$ _____
7. 在 $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的二项展开式中, 常数项的值为 _____
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $3\sin A = 2\sin B$, 且 $\cos C = \frac{1}{4}$, 则 $AB =$ _____
9. 首届中国国际进口博览会在上海举行, 某高校拟派 4 人参与连续 5 天的志愿者活动, 其中甲连续参加 2 天, 其余每人各参加 1 天, 问有多少种不同的安排种数 _____
(结果用数值表示)
10. 如图, 正方形 $OABC$ 的边长为 $a (a > 1)$, 函数 $y = 3x^2$ 交 AB 于点 Q , 函数 $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 与 BC 交于点 P , 当 $|AQ| + |CP|$ 最小时, a 的值为 _____
11. 已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上任意一点, Q 与 P 关于 x 轴对称, F_1 、 F_2 为椭圆的左右焦点, 若有 $\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{F_2P} \leq 1$, 则向量 $\overrightarrow{F_1P}$ 与 $\overrightarrow{F_2Q}$ 的夹角范围为 _____
12. 已知 $t \in \mathbf{R}$, 集合 $A = [t, t+1] \cup [t+4, t+9]$, $0 \notin A$, 若存在正数 λ , 对任意 $a \in A$, 都有 $\frac{\lambda}{a} \in A$, 则 t 的值为 _____



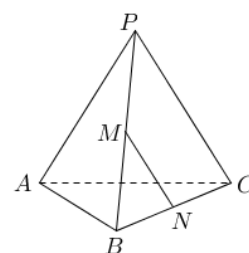
二. 选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 下列函数中, 值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()
 A. $y = 2^x$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = \tan x$ D. $y = \cos x$

14. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a^2 > b^2$ ” 是 “ $|a| > |b|$ ” 的 ()
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
15. 已知平面 α, β, γ 两两垂直, 直线 a, b, c 满足: $a \subseteq \alpha, b \subseteq \beta, c \subseteq \gamma$, 则直线 a, b, c 不可能是 ()
- A. 两两垂直 B. 两两平行 C. 两两相交 D. 两两异面
16. 平面直角坐标系中, 两动圆 O_1, O_2 的圆心分别为 $(a_1, 0), (a_2, 0)$, 且两圆均过定点 $(1, 0)$,
两圆与 y 轴正半轴分别交于点 $(0, y_1), (0, y_2)$, 若 $\ln y_1 + \ln y_2 = 0$, 点 $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2})$ 的轨迹为 Γ ,
则 Γ 所在的曲线可能是 ()
- A. 直线 B. 圆 C. 椭圆 D. 双曲线

三. 解答题 (本大题共 5 题, 共 14+14+14+16+18=76 分)

17. 如图, 正三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧棱长为 2, 底面边长为 $\sqrt{3}$, M, N 分别是 PB 和 BC 的中点.



- (1) 求异面直线 MN 与 AC 所成角的大小;
(2) 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 前 n 项和为 S_n .

- (1) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_4 = 15$, 求 S_n ;
(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 12$, 求公比 q 的取值范围.

19. 改革开放 40 年，我国卫生事业取得巨大成就，卫生总费用增长了数十倍. 卫生总费用包
括个人现在支出、社会支出、政府支出，下表为 2012 年~2015 年我国卫生费用中个人现金
支出、社会支出和政府支出的费用（单位：亿元）和在卫生总费用中的占比.

年份	卫生总费用 (亿元)	个人现金卫生支出		社会卫生支出		政府卫生支出	
		绝对数 (亿元)	占卫生总费用比重 (%)	绝对数 (亿元)	占卫生总费用比重 (%)	绝对数 (亿元)	占卫生总费用比重 (%)
2012	28119.00	9656.32	A	10030.70	35.67	8431.98	29.99
2013	31668.95	10729.34	33.88	11393.79	35.98	9545.81	30.14
2014	35312.40	B	31.99	13437.75	38.05	10579.23	29.96
2015	40974.64	11992.65	29.27	16506.71	40.29	12475.28	30.45

（数据来源于国家统计年鉴）

（1）计算 A 、 B 的数据，并指出 2012 年到 2015 年之间我国卫生总费用中个人现金支出占
比和社会支出占比的变化趋势；

（2）设 $t=1$ 表示 1978 年，第 n 年卫生总费用与年份 t 之间拟合函数

$$f(t)=\frac{357876.6053}{1+e^{6.4420-0.1136t}},$$

研究函数 $f(t)$ 的单调性，并预测我国卫生总费用首次超过 12 万亿的年份.

20. 已知抛物线 $y^2=4x$ ， F 为焦点， P 为准线 l 上一动点，线段 PF 与抛物线交于点 Q ，
定义 $d(P)=\frac{|FP|}{|FQ|}$.

（1）若点 P 坐标为 $(-1,-\frac{8}{3})$ ，求 $d(P)$ ；

（2）求证：存在常数 a ，使得 $2d(P)=|FP|+a$ 恒成立；

（3）设 P_1 、 P_2 、 P_3 为准线 l 上的三点，且 $|P_1P_2|=|P_2P_3|$ ，试比较 $d(P_1)+d(P_3)$ 与
 $2d(P_2)$ 的大小.

21. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 $d \in (0, \pi]$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = \sin(a_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$,

记 $S = \{x \mid x = b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$.

(1) 设 $a_1 = 0$, $d = \frac{2}{3}\pi$, 求集合 S ;

(2) 设 $a_1 = \frac{\pi}{2}$, 试求 d 的值, 使得集合 S 恰有两个元素;

(3) 若集合 S 恰有三个元素, 且 $b_{n+T} = b_n$, 其中 T 为不超过 7 的正整数, 求 T 所有可能值.