

2021年普通高等学校招生全国统一考试（全国乙卷）

数学（文）

一、选择题

1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合  $M = \{1, 2\}$ ， $N = \{3, 4\}$ ，则  $C_U(M \cup N) =$ （ ）
- A.  $\{5\}$                                   B.  $\{1, 2\}$
- C.  $\{3, 4\}$                                 D.  $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 设  $iz = 4 + 3i$ ，则  $z =$ （ ）
- A.  $-3 - 4i$                                 B.  $-3 + 4i$
- C.  $3 - 4i$                                   D.  $3 + 4i$
3. 已知命题  $p: \exists x \in R, \sin x < 1$ ；命题  $q: \forall x \in R, e^{|x|} \geq 1$ ，则下列命题中为真命题的是（ ）
- A.  $p \wedge q$                                   B.  $\neg p \wedge q$
- C.  $p \wedge \neg q$                                 D.  $\neg(p \vee q)$
4. 函数  $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$  的最小正周期和最大值分别是（ ）
- A.  $3\pi$  和  $\sqrt{2}$                             B.  $3\pi$  和 2
- C.  $6\pi$  和  $\sqrt{2}$                             D.  $6\pi$  和 2
5. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \geq 4, \\ x - y \leq 2, \\ y \leq 3, \end{cases}$  则  $z = 3x + y$  的最小值为（ ）
- A. 18                                        B. 10
- C. 6                                         D. 4
6.  $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} =$ （ ）
- A.  $\frac{1}{2}$                                         B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 在区间  $(0, \frac{1}{2})$  随机取 1 个数, 则取到的数小于  $\frac{1}{3}$  的概率为 ( )

A.  $\frac{3}{4}$

B.  $\frac{2}{3}$

C.  $\frac{1}{3}$

D.  $\frac{1}{6}$

8. 下列函数中最小值为 4 的是 ( )

A.  $y = x^2 + 2x + 4$

B.  $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$

C.  $y = 2^x + 2^{2-x}$

D.  $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

9. 设函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , 则下列函数中为奇函数的是 ( )

A.  $f(x-1)-1$

B.  $f(x-1)+1$

C.  $f(x+1)-1$

D.  $f(x+1)+1$

10. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  为  $B_1D_1$  的中点, 则直线  $PB$  与  $AD_1$  所成的角为

A.  $\frac{\pi}{2}$

B.  $\frac{\pi}{3}$

C.  $\frac{\pi}{4}$

D.  $\frac{\pi}{6}$

11. 设  $B$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$  的上顶点, 点  $P$  在  $C$  上, 则  $|PB|$  的最大值为

A.  $\frac{5}{2}$

B.  $\sqrt{6}$

C.  $\sqrt{5}$

D. 2

12. 设  $a \neq 0$ , 若  $x = a$  为函数  $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$  的极大值点, 则

A.  $a < b$

B.  $a > b$

C.  $ab < a^2$

D.  $ab > a^2$

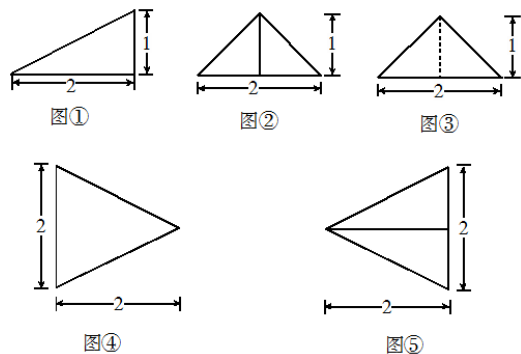
二、填空题

13. 已知向量  $\vec{a} = (2, 5)$ ,  $\vec{b} = (\lambda, 4)$ , 若  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

14. 双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  的右焦点到直线  $x + 2y - 8 = 0$  的距离为\_\_\_\_\_.

15. 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 面积为  $\sqrt{3}$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $a^2 + c^2 = 3ac$ , 则  $b =$ \_\_\_\_\_.

16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为\_\_\_\_\_ (写出符合要求的一组答案即可).



17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ , 样本方差分别记为  $s_1^2$  和  $s_2^2$ .

(1) 求  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_1^2$ ,  $s_2^2$ ;

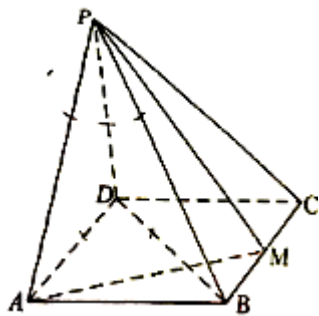
(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果

$\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$ , 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是矩形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $M$  为  $BC$  的中点, 且  $PB \perp AM$ .

(1) 证明: 平面  $PAM \perp$  平面  $PBD$ ;

(2) 若  $PD = DC = 1$ , 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积.



19. 设  $\{a_n\}$  是首项为1的等比数列, 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \frac{na_n}{3}$ . 已知  $a_1, 3a_2, 9a_3, \dots$  成等差数列.

(1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $S_n$  和  $T_n$  分别为  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和. 证明:  $T_n < \frac{S_n}{2}$ .

20. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点  $F$  到准线的距离为2.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 已知  $O$  为坐标原点, 点  $P$  在  $C$  上, 点  $Q$  满足  $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$ , 求直线  $OQ$  斜率的最大值.

21. 已知函数  $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 求曲线  $y = f(x)$  过坐标原点的切线与曲线  $y = f(x)$  的公共点的坐标.

22. 在直角坐标系  $xOy$  中,  $\odot C$  的圆心为  $C(2,1)$ , 半径为1.

(1) 写出  $\odot C$  的一个参数方程;

(2) 过点  $F(4,1)$  作  $\odot C$  的两条切线. 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

23. 已知函数  $f(x) = |x - a| + |x + 3|$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;

(2) 若  $f(x) > -a$ , 求  $a$  的取值范围.