2013年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1．（5分）已知集合$A=\{x|x^2-2x>0\}$，$B=\{x|-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$，则（　　）

A．$A\cap B=\varnothing$　　B．$A\cup B=R$　　C．$B\subseteq A$　　D．$A\subseteq B$

【考点】1D：并集及其运算；73：一元二次不等式及其应用.

【专题】59：不等式的解法及应用；5J：集合.

【分析】根据一元二次不等式的解法，求出集合A，再根据的定义求出A∩B和A∪B.

【解答】解：∵集合$A=\{x|x^2-2x>0\}=\{x|x>2或x<0\}$，

∴$A\cap B=\{x|2<x<\sqrt{5}或-\sqrt{5}<x<0\}$，$A\cup B=R$，

故选：B.

【点评】本题考查一元二次不等式的解法，以及并集的定义，属于基础题.

2．（5分）若复数z满足$(3-4i)z=|4+3i|$，则z的虚部为（　　）

A．-4　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．4　　D．$\frac{4}{5}$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】5N：数系的扩充和复数.

【分析】由题意可得

$z=\frac{|4+3i|}{3-4i}=\frac{5}{3-4i}$，再利用两个复数代数形式的乘除法法则化简为

$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$，由此可得z的虚部.

【解答】解：∵复数z满足$(3-4i)z=|4+3i|$，∴$z=\frac{|4+3i|}{3-4i}=\frac{5}{3-4i}=\frac{5(3+4i)}{25}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$，

故z的虚部等于$\frac{4}{5}$，

故选：D．

【点评】本题主要考查复数的基本概念，两个复数代数形式的乘除法法则的应用，属于基础题．

3．（5分）为了解某地区中小学生的视力情况，拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查，事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，而男女生视力情况差异不大．在下面的抽样方法中，最合理的抽样方法是（　　）

A．简单的随机抽样　　B．按性别分层抽样

C．按学段分层抽样　　D．系统抽样

【考点】B3：分层抽样方法．

【专题】21：阅读型．

【分析】若总体由差异明显的几部分组成时，经常采用分层抽样的方法进行抽样．

【解答】解：我们常用的抽样方法有：简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，

而事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，而男女生视力情况差异不大．

了解某地区中小学生的视力情况，按学段分层抽样，这种方式具有代表性，比较合理．

故选：C．

【点评】本小题考查抽样方法，主要考查抽样方法，属基本题．

4．（5分）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，则C的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\frac{1}{4}x$　　B．$y=\pm\frac{1}{3}x$　　C．$y=\pm x$　　D．$y=\pm\frac{1}{2}x$

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由离心率和abc的关系可得$b^2=4a^2$，而渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，代入可得答案．

【解答】解：由双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0），

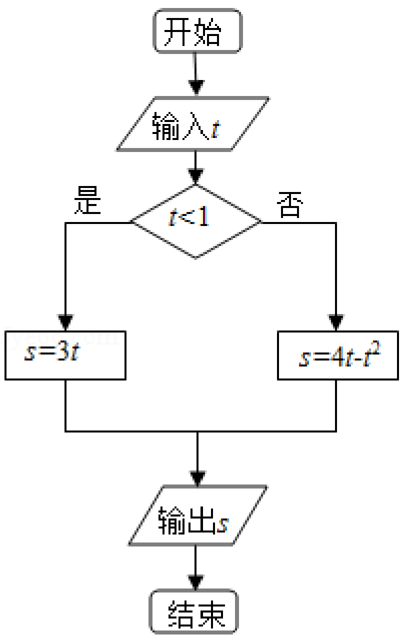
则离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即$4b^2=a^2$，

故渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$，

故选：D．

【点评】本题考查双曲线的简单性质，涉及的渐近线方程，属基础题．

5．（5分）执行程序框图，如果输入的t∈[﹣1，3]，则输出的s属于（　　）



A．[﹣3，4]　　B．[﹣5，2]　　C．[﹣4，3]　　D．[﹣2，5]

【考点】3B：分段函数的解析式求法及其图象的作法；EF：程序框图．

【专题】27：图表型；5K：算法和程序框图．

【分析】本题考查的知识点是程序框图，分析程序中各变量、各语句的作用，

再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是计算一个分段函数的函数值，由条件为t＜1我们可得，分段函数的分类标准，由分支结构中是否两条分支上对应的语句行，我们易得函数的解析式.

【解答】解：由判断框中的条件为t＜1，可得：

函数分为两段，即t＜1与t≥1，

又由满足条件时函数的解析式为：s=3t；

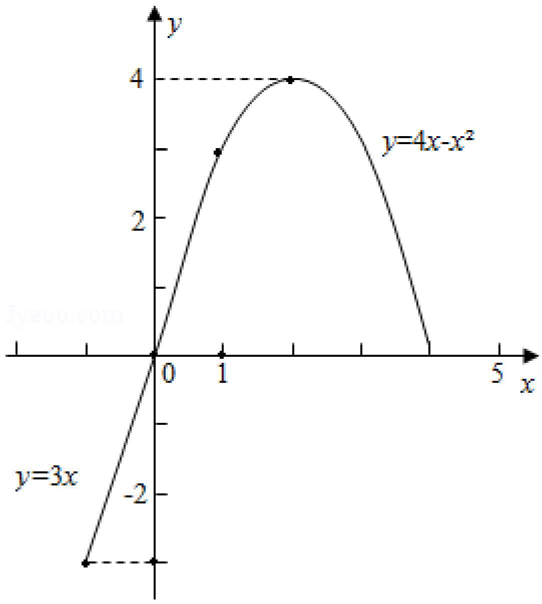
不满足条件时，即t≥1时，函数的解析式为：s=4t﹣t²

故分段函数的解析式为：$s=\begin{cases}3t, & t<1\\ 4t-t^2, & t\geq 1\end{cases}$，

如果输入的t∈[﹣1，3]，画出此分段函数在t∈[﹣1，3]时的图象，

则输出的s属于[﹣3，4].

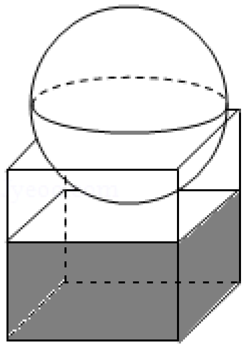
故选：A.



【点评】要求条件结构对应的函数解析式，要分如下几个步骤：①分析流程图的结构，分析条件结构是如何嵌套的，以确定函数所分的段数；②根据判断框中的条件，设置分类标准；③根据判断框的"是"与"否"分支对应的操作，分析函数各段的解析式；④对前面的分类进行总结，写出分段函数的解析式.

6．（5分）如图，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高8cm，将

一个球放在容器口，再向容器注水，当球面恰好接触水面时测得水深为6cm，如不计容器的厚度，则球的体积为（　　）



A．$\frac{500\pi}{3}cm^3$　　B．$\frac{866\pi}{3}cm^3$　　C．$\frac{1372\pi}{3}cm^3$　　D．$\frac{2048\pi}{3}cm^3$

【考点】LG：球的体积和表面积．

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离．

【分析】设正方体上底面所在平面截球得小圆M，可得圆心M为正方体上底面正方形的中心．设球的半径为R，根据题意得球心到上底面的距离等于（R﹣2）cm，而圆M的半径为4，由球的截面圆性质建立关于R的方程并解出R=5，用球的体积公式即可算出该球的体积．

【解答】解：设正方体上底面所在平面截球得小圆M，

则圆心M为正方体上底面正方形的中心．如图．

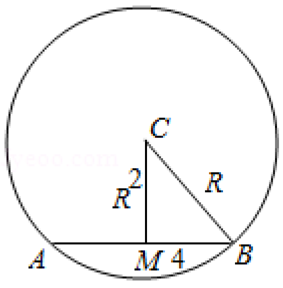
设球的半径为R，根据题意得球心到上底面的距离等于（R﹣2）cm，

而圆M的半径为4，由球的截面圆性质，得$R^2=(R-2)^2+4^2$，

解出R=5，

∴根据球的体积公式，该球的体积$V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\times5^3=\frac{500\pi}{3}cm^3$．

故选：A．



【点评】本题给出球与正方体相切的问题，求球的体积，着重考查了正方体的性质、球的截面圆性质和球的体积公式等知识，属于中档题．

7．（5分）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则m=（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【考点】83：等差数列的性质；85：等差数列的前n项和．

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列．

【分析】由a_n与S_n的关系可求得a_{m+1}与a_m，进而得到公差d，由前n项和公式及$S_m=0$可求得a_1，再由通项公式及$a_m=2$可得m值．

【解答】解：$a_m=S_m-S_{m-1}=2$，$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=3$，

所以公差$d=a_{m+1}-a_m=1$，

$S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=0$，

$m-1>0$，$m>1$，因此m不能为0，

得$a_1=-2$，

所以$a_m=-2+(m-1)\bullet 1=2$，解得m=5，

另解：等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，即有数列$\{\frac{S_n}{n}\}$成等差数列，

则$\frac{S_{m-1}}{m-1}$，$\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{m+1}}{m+1}$成等差数列，

可得$2\bullet\frac{S_m}{m}=\frac{S_{m-1}}{m-1}+\frac{S_{m+1}}{m+1}$，

即有$0=\frac{-2}{m-1}+\frac{3}{m+1}$，

解得m=5．

又一解：由等差数列的求和公式可得$\frac{1}{2}(m-1)(a_1+a_{m-1})=-2$，

$\frac{1}{2}m(a_1+a_m)=0$，$\frac{1}{2}(m+1)(a_1+a_{m+1})=3$，

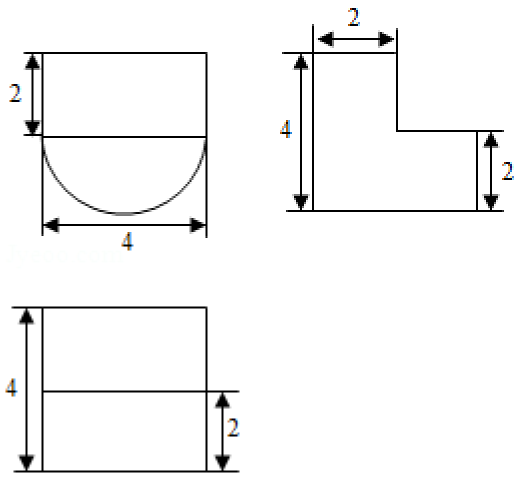
可得$a_1=-a_m$，$-2a_m+a_{m+1}+a_{m-1}=\frac{6}{m+1}+\frac{-4}{m-1}=0$，

解得m=5．

故选：C．

【点评】本题考查等差数列的通项公式、前n项和公式及通项a_n与S_n的关系，考查学生的计算能力．

8．（5分）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



A．16+8π　　B．8+8π　　C．16+16π　　D．8+16π

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】16：压轴题；27：图表型．

【分析】三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的组合体，依据三视图的数据，得出组合体长、宽、高，即可求出几何体的体积．

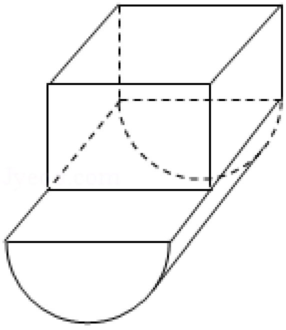
【解答】解：三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的组合体，如图，其中长方体长、宽、高分别是：4，2，2，半个圆柱的底面半径为2，母线长为4．

∴长方体的体积=4×2×2=16，

半个圆柱的体积=$\frac{1}{2}\times 2^2\times\pi\times 4=8\pi$

所以这个几何体的体积是16+8π；

故选：A．



【点评】本题考查了几何体的三视图及直观图的画法，三视图与直观图的关系，柱体体积计算公式，空间想象能力

9．（5分）设m为正整数，$(x+y)^{2m}$展开式的二项式系数的最大值为a，$(x+y)^{2m+1}$展开式的二项式系数的最大值为b，若13a=7b，则m=（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【考点】DA：二项式定理．

【专题】5P：二项式定理．

【分析】根据二项式系数的性质求得a和b，再利用组合数的计算公式，解方程13a=7b求得m的值．

【解答】解：∵m为正整数，由$(x+y)^{2m}$展开式的二项式系数的最大值为a，以及二项式系数的性质可得a=C_{2m}^{m}，

同理，由$(x+y)^{2m+1}$展开式的二项式系数的最大值为b，可得b=C_{2m+1}^{m}=C_{2m+1}^{m+1}．

再由13a=7b，可得13C_{2m}^{m}=7C_{2m+1}^{m}，即$13\times\frac{(2m)!}{m!\cdot m!}=7\times\frac{(2m+1)!}{m!\cdot(m+1)!}$，

即$13=7\times\frac{2m+1}{m+1}$，即13（m+1）=7（2m+1），解得m=6，

故选：B．

【点评】本题主要考查二项式系数的性质的应用，组合数的计算公式，属于中档题．

10．（5分）已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为F（3，0），过点F的直线交椭圆E于A、B两点．若AB的中点坐标为（1，－1），则E的方程为（

）

A. $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

C. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

【考点】K3：椭圆的标准方程．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），代入椭圆方程得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，利用“点差法”可得$\frac{x_1+x_2}{a^2}+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{b^2}=0$．利用中点坐标公式可得$x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，利用斜率计算公式可得$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-1-0}{1-3}=\frac{1}{2}$．于是得到$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2}\times\frac{-2}{b^2}=0$，化为$a^2=2b^2$，再利用$c=3=\sqrt{a^2-b^2}$，即可解得$a^2$，$b^2$．进而得到椭圆的方程．

【解答】解：设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

代入椭圆方程得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

相减得$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，

$\therefore\frac{x_1+x_2}{a^2}+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{b^2}=0$．

$\because x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-1-0}{1-3}=\frac{1}{2}$．

$\therefore \frac{2}{a^2}+\frac{1}{2}\times\frac{-2}{b^2}=0$，

化为$a^2=2b^2$，又$c=3=\sqrt{a^2-b^2}$，解得$a^2=18$，$b^2=9$．

∴椭圆E的方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$．

故选：D．

【点评】熟练掌握“点差法”和中点坐标公式、斜率的计算公式是解题的关键．

11．（5分）已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$，若$|f(x)|\geq ax$，则a的取值范围是（　　）

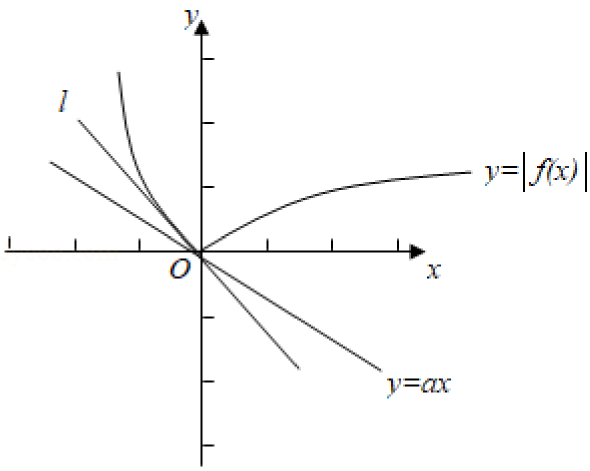
A．$(-\infty, 0]$　　B．$(-\infty, 1]$　　C．$[-2, 1]$　　D．$[-2, 0]$

【考点】7E：其他不等式的解法．

【专题】16：压轴题；59：不等式的解法及应用．

【分析】由函数图象的变换，结合基本初等函数的图象可作出函数$y=|f(x)|$的图象，和函数$y=ax$的图象，由导数求切线斜率可得l的斜率，进而数形结合可得a的范围．

【解答】解：由题意可作出函数$y=|f(x)|$的图象，和函数$y=ax$的图象，



由图象可知：函数$y=ax$的图象为过原点的直线，当直线介于l和x轴之间符合题意，直线l为曲线的切线，且此时函数$y=|f(x)|$在第二象限的部分解析式为$y=x^2-2x$，

求其导数可得$y'=2x-2$，因为$x\le 0$，故$y'\le -2$，故直线l的斜率为-2，

故只需直线$y=ax$的斜率a介于-2与0之间即可，即$a\in[-2,0]$

故选：D．

【点评】本题考查其它不等式的解法，数形结合是解决问题的关键，属中档题．

12．（5分）设$\triangle A_nB_nC_n$的三边长分别为a_n，b_n，c_n，$\triangle A_nB_nC_n$的面积为S_n，$n=1$，2，3…若$b_1>c_1$，$b_1+c_1=2a_1$，$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2}$，$c_{n+1}=\frac{b_n+a_n}{2}$，则（　　）

A．$\{S_n\}$为递减数列

B．$\{S_n\}$为递增数列

C．$\{S_{2n-1}\}$为递增数列，$\{S_{2n}\}$为递减数列

D．$\{S_{2n-1}\}$为递减数列，$\{S_{2n}\}$为递增数列

【考点】82：数列的函数特性；8H：数列递推式．

【专题】16：压轴题；54：等差数列与等比数列；55：点列、递归数列与数学归纳法．

【分析】由$a_{n+1}=a_n$可知$\triangle A_nB_nC_n$的边B_nC_n为定值a_1，由$b_{n+1}+c_{n+1}-2a_1=\frac{1}{2}(b_n+c_n-2a_1)$及$b_1+c_1=2a_1$得$b_n+c_n=2a_1$，则在$\triangle A_nB_nC_n$中边长$B_nC_n=a_1$为定值，另两边$A_nC_n$、$A_nB_n$的长度之和$b_n+c_n=2a_1$为定值，

由此可知顶点A_n在以B_n、C_n为焦点的椭圆上，根据$b_{n+1}-c_{n+1}=-\frac{1}{2}(b_n-c_n)$，得$b_n-c_n=(-\frac{1}{2})^{n-1}(b_1-c_1)$，可知$n\to+\infty$时$b_n\to c_n$，据此可判断$\triangle A_nB_nC_n$的边$B_nC_n$的高$h_n$随着n的增大而增大，再由三角形面积公式可得到答案．

【解答】解：$b_1=2a_1-c_1$且$b_1>c_1$，$\therefore 2a_1-c_1>c_1$，$\therefore a_1>c_1$，

$\therefore b_1-a_1=2a_1-c_1-a_1=a_1-c_1>0$，$\therefore b_1>a_1>c_1$，

又$b_1-c_1<a_1$，$\therefore 2a_1-c_1-c_1<a_1$，$\therefore 2c_1>a_1$，$\therefore c_1>\frac{a_1}{2}$，

由题意，$b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2}+a_n$，$\therefore b_{n+1}+c_{n+1}-2a_n=\frac{1}{2}(b_n+c_n-2a_n)$，

$\therefore b_n+c_n-2a_n=0$，$\therefore b_n+c_n=2a_n=2a_1$，$\therefore b_n+c_n=2a_1$，

由此可知顶点A_n在以B_n、C_n为焦点的椭圆上，

又由题意，$b_{n+1}-c_{n+1}=\frac{c_n-b_n}{2}$，$\therefore b_{n+1}-(2a_1-b_{n+1})=\frac{2a_1-b_n-b_n}{2}=a_1-b_n$，

$\therefore b_{n+1}-a_1=\frac{1}{2}(a_1-b_n)$，$\therefore b_n-a_1=(-\frac{1}{2})^{n-1}$，

$\therefore b_n=a_1+(b_1-a_1)(-\frac{1}{2})^{n-1}$，$c_n=2a_1-b_n=a_1-(b_1-a_1)(-\frac{1}{2})^{n-1}$，

$\therefore S_n^2=\frac{3a_1}{2}(\frac{3a_1}{2}-a_1)[\frac{3a_1}{2}-a_1-(b_1-a_1)(-\frac{1}{2})^{n-1}][\frac{3a_1}{2}-a_1+(b_1-a_1)(-\frac{1}{2})^{n-1}]$

$=\frac{3}{4}a_1^2[\frac{a_1^2}{2}-(\frac{1}{4})^{n-1}(b_1-a_1)^2]$单调递增（可证当n=1时$\frac{a_1^2}{4}-(b_1-a_1)^2>0$）

故选：B．

【点评】本题主要考查由数列递推式求数列通项、三角形面积海伦公式，综合考查学生分析解决问题的能力，有较高的思维抽象度，是本年度全国高考试题中的“亮点”之一．

二.填空题：本大题共4小题，每小题5分．

13．（5分）已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$．若$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，则t=__2__．

【考点】9H：平面向量的基本定理；9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】由于$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，对式子$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$两边与$\vec{b}$作数量积可得$\vec{c}\cdot\vec{b}=t\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)\vec{b}^2=0$，经过化简即可得出．

【解答】解：$\because\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$，$\vec{c}\cdot\vec{b}=0$，$\therefore\vec{c}\cdot\vec{b}=t\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)\vec{b}^2=0$，

$\therefore t\cos60°+1-t=0$，$\therefore 1-\frac{1}{2}t=0$，解得t=2．

故答案为2．

【点评】熟练掌握向量的数量积运算是解题的关键.

14. （5分）若数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$__$(-2)^{n-1}$__.

【考点】88：等比数列的通项公式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】把n=1代入已知式子可得数列的首项，由n≥2时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，可得数列为等比数列，且公比为﹣2，代入等比数列的通项公式分段可得答案.

【解答】解：当n=1时，$a_1=S_1=\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}$，解得$a_1=1$

当n≥2时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}a_{n-1}$，

整理可得$\frac{1}{3}a_n=-\frac{2}{3}a_{n-1}$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-2$，

故数列$\{a_n\}$从第二项开始是以﹣2为首项，﹣2为公比的等比数列，

故当n≥2时，$a_n=(-2)^{n-1}$，

经验证当n=1时，上式也适合，

故答案为：$(-2)^{n-1}$

【点评】本题考查等比数列的通项公式，涉及等比数列的判定，属基础题.

15. （5分）设当x=θ时，函数f（x）=sinx﹣2cosx取得最大值，则cosθ=__$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$__.

【考点】GP：两角和与差的三角函数；H4：正弦函数的定义域和值域.

【专题】16：压轴题；56：三角函数的求值.

【分析】f（x）解析式提取$\sqrt{5}$，利用两角和与差的正弦函数公式化为一个角的正弦函数，由x=θ时，函数f（x）取得最大值，得到$\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{5}$，与$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$联立即可求出cosθ的值.

【解答】解：$f(x)=\sin x-2\cos x=\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin x-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos x\right)=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$ （

其中$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$），

∵x=θ时，函数f（x）取得最大值，

∴sin（θ﹣α）=1，即$\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{5}$，

又$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

联立得$(2\cos\theta+\sqrt{5})^2+\cos^2\theta=1$，解得$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【点评】此题考查了两角和与差的正弦函数公式，同角三角函数间的基本关系，以及正弦函数的定义域与值域，熟练掌握公式是解本题的关键．

16．（5分）若函数f（x）=（1﹣x^2）（x^2+ax+b）的图象关于直线x=﹣2对称，则f（x）的最大值为＿16＿．

【考点】57：函数与方程的综合运用；6E：利用导数研究函数的最值．

【专题】11：计算题；16：压轴题；51：函数的性质及应用；53：导数的综合应用．

【分析】由题意得f（﹣1）=f（﹣3）=0且f（1）=f（﹣5）=0，由此求出a=8且b=15，由此可得f（x）=﹣$x^4-8x^3-14x^2+8x+15$．利用导数研究f（x）的单调性，可得f（x）在区间（﹣∞，$-2-\sqrt{5}$）、（﹣2，$-2+\sqrt{5}$）上是增函数，在区间（$-2-\sqrt{5}$，﹣2）、（$-2+\sqrt{5}$，+∞）上是减函数，结合f（$-2-\sqrt{5}$）=f（$-2+\sqrt{5}$）=16，即可得到f（x）的最大值．

【解答】解：∵函数f（x）=（1﹣x^2）（x^2+ax+b）的图象关于直线x=﹣2对称，

∴f（﹣1）=f（﹣3）=0且f（1）=f（﹣5）=0，

即$[1-(-3)^2][(-3)^2+a\bullet(-3)+b]=0$且$[1-(-5)^2][(-5)^2+a\bullet(-5)+b]=0$，

解之得$\begin{cases}a=8\\b=15\end{cases}$，

因此，f（x）=（1﹣x^2）（$x^2+8x+15$）=﹣$x^4-8x^3-14x^2+8x+15$，

求导数，得f′（x）=﹣$4x^3-24x^2-28x+8$，

令f′（x）=0，得$x_1=-2-\sqrt{5}$，$x_2=-2$，$x_3=-2+\sqrt{5}$，

当x∈（﹣∞，﹣2﹣$\sqrt{5}$）时，f′（x）＞0；当x∈（﹣2﹣$\sqrt{5}$，﹣2）时，f′（x）＜0；

当x∈（﹣2，﹣2+$\sqrt{5}$）时，f′（x）＞0； 当x∈（﹣2+$\sqrt{5}$，+∞）时，f′（x）＜0

∴f（x）在区间（﹣∞，﹣2﹣$\sqrt{5}$）、（﹣2，﹣2+$\sqrt{5}$）上是增函数，在区间（﹣2﹣$\sqrt{5}$，﹣2）、（﹣2+$\sqrt{5}$，+∞）上是减函数.

又∵f（﹣2﹣$\sqrt{5}$）=f（﹣2+$\sqrt{5}$）=16，

∴f（x）的最大值为16.

故答案为：16.

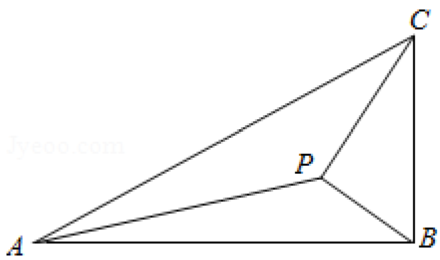
【点评】本题给出多项式函数的图象关于x=﹣2对称，求函数的最大值．着重考查了函数的奇偶性、利用导数研究函数的单调性和函数的最值求法等知识，属于中档题.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（12分）如图，在△ABC中，∠ABC=90°，AB=$\sqrt{3}$，BC=1，P为△ABC内一点，∠BPC=90°.

（1）若PB=$\frac{1}{2}$，求PA；

（2）若∠APB=150°，求tan∠PBA.



【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理.

【专题】58：解三角形.

【分析】（I）在Rt△PBC，利用边角关系即可得到∠PBC=60°，得到∠PBA=30°．在△PBA中，利用余弦定理即可求得PA.

（II）设∠PBA=α，在Rt△PBC中，可得PB=sinα．在△PBA中，由正弦定理得

$\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$，即$\frac{\sqrt{3}}{\sin150^\circ}=\frac{\sin\alpha}{\sin(30^\circ-\alpha)}$，化简即可求出.

【解答】解：（I）在Rt△PBC中，$\cos\angle PBC=\frac{PB}{BC}=\frac{1}{2}$，∴∠PBC=60°，∴∠PBA=30°．

在△PBA中，由余弦定理得$PA^2=PB^2+AB^2-2PB\bullet AB\cos30°=$

$(\frac{1}{2})^2+(\sqrt{3})^2-2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{4}$．

∴$PA=\frac{\sqrt{7}}{2}$．

（II）设∠PBA=α，在Rt△PBC中，PB=BCcos（90°﹣α）=sinα．

在△PBA中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$，即$\frac{\sqrt{3}}{\sin150^{\circ}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(30^{\circ}-\alpha)}$

，

化为$\sqrt{3}\cos\alpha=4\sin\alpha$．∴$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$．

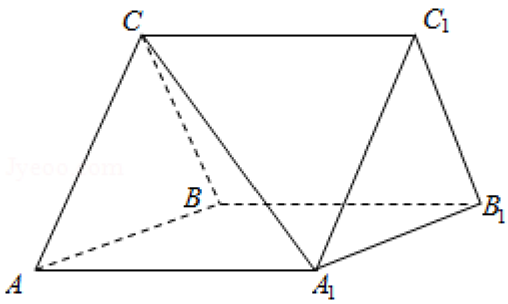
【点评】熟练掌握直角三角形的边角关系、正弦定理和余弦定理是解题的关键

．

18．（12分）如图，三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$中，CA=CB，AB=AA_1，∠BAA_1=60°．

（Ⅰ）证明AB⊥A_1C；

（Ⅱ）若平面ABC⊥平面AA_1B_1B，AB=CB=2，求直线A_1C与平面BB_1C_1C所成角的正弦值．



【考点】LW：直线与平面垂直；LY：平面与平面垂直；MI：直线与平面所成的角．

【专题】5F：空间位置关系与距离；5G：空间角．

【分析】（Ⅰ）取AB的中点O，连接OC，OA_1，A_1B，由已知可证OA_1⊥AB，AB⊥平面OA_1C，进而可得AB⊥A_1C；

（Ⅱ）易证OA，OA_1，OC两两垂直．以O为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$的方向为x轴的正向，

$|\overrightarrow{OA}|$为单位长，建立坐标系，可得$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BB_1}$，$\overrightarrow{A_1C}$的坐标，设$\vec{n}$=（x，y，z）为平面BB_1C_1C的法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，可解得$\vec{n}$=（$\sqrt{3}$，1，﹣1），可求$|\cos<\vec{n},\overrightarrow{A_1C}>|$，即为所求正弦值．

【解答】解：（Ⅰ）取AB的中点O，连接OC，OA_1，A_1B，

因为CA=CB，所以OC⊥AB，由于$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60°$，

所以$\triangle AA_1B$为等边三角形，所以$OA_1\perp AB$，

又因为$OC\cap OA_1=O$，所以AB⊥平面OA_1C，

又$A_1C\subset$平面OA_1C，故$AB\perp A_1C$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知OC⊥AB，$OA_1\perp AB$，又平面ABC⊥平面AA_1B_1B，交线为AB，

所以OC⊥平面AA_1B_1B，故OA，OA_1，OC两两垂直．

以O为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$的方向为x轴的正向，$|\overrightarrow{OA}|$为单位长，建立如图所示的坐标系，

可得A（1，0，0），A_1（0，$\sqrt{3}$，0），C（0，0，$\sqrt{3}$），B（﹣1，0，0），

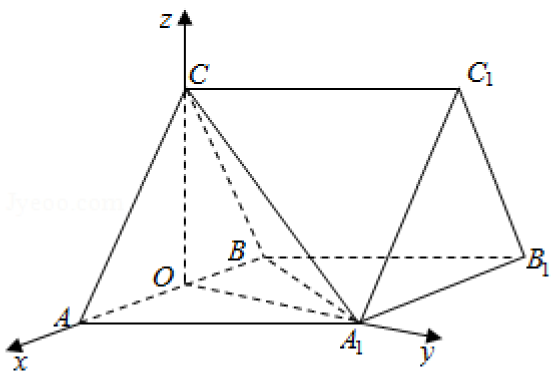
则$\overrightarrow{BC}$=（1，0，$\sqrt{3}$），$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}$=（﹣1，$\sqrt{3}$，0），$\overrightarrow{A_1C}$=（0，﹣$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$），

设$\vec{n}$=（x，y，z）为平面BB_1C_1C的法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

可取y=1，可得$\vec{n}$=（$\sqrt{3}$，1，﹣1），故$\cos<\vec{n},\overrightarrow{A_1C}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\vec{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

又因为直线与法向量的余弦值的绝对值等于直线与平面的正弦值，

故直线A_1C与平面BB_1C_1C所成角的正弦值为：$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．



【点评】本题考查直线与平面所成的角，涉及直线与平面垂直的性质和平面与

平面垂直的判定，属难题．

19．（12分）一批产品需要进行质量检验，检验方案是：先从这批产品中任取4件作检验，这4件产品中优质品的件数记为n．如果n=3，再从这批产品中任取4件作检验，若都为优质品，则这批产品通过检验；如果n=4，再从这批产品中任取1件作检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验．假设这批产品的优质品率为50%，即取出的产品是优质品的概率都为$\frac{1}{2}$，且各件产品是否为优质品相互独立．

（Ⅰ）求这批产品通过检验的概率；

（Ⅱ）已知每件产品检验费用为100元，凡抽取的每件产品都需要检验，对这批产品作质量检验所需的费用记为X（单位：元），求X的分布列及数学期望．

【考点】CG：离散型随机变量及其分布列；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】（Ⅰ）设第一次取出的4件产品中恰有3件优质品为事件A_1，第一次取出的4件产品全是优质品为事件A_2，第二次取出的4件产品全是优质品为事件B_1，第二次取出的1件产品是优质品为事件B_2，这批产品通过检验为事件A，依题意有A=（A_1B_1）∪（A_2B_2），且A_1B_1与A_2B_2互斥，由概率得加法公式和条件概率，代入数据计算可得；

（Ⅱ）X可能的取值为400，500，800，分别求其概率，可得分布列，进而可得期望值．

【解答】解：（Ⅰ）设第一次取出的4件产品中恰有3件优质品为事件A_1，第一次取出的4件产品全是优质品为事件A_2，

第二次取出的4件产品全是优质品为事件B_1，第二次取出的1件产品是优质品为事件B_2，

这批产品通过检验为事件A，依题意有A=（A_1B_1）∪（A_2B_2），且A_1B_1与A_2B_2互斥，

所以$P(A)=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)$

$=\frac{4}{16}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{64}$

（Ⅱ）X可能的取值为400，500，800，并且P（X=800）$=\frac{1}{4}$，P（X=500）$=\frac{1}{16}$，P（X=400）=1 - $\frac{1}{16}$ - $\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$，故X的分布列如下：

X	400	500	800
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

故EX=400×$\frac{11}{16}$+500×$\frac{1}{16}$+800×$\frac{1}{4}$=506.25

【点评】本题考查离散型随机变量及其分布列涉及数学期望的求解，属中档题

.

20．（12分）已知圆M：（x+1）^{2}+y^2=1，圆N：（x﹣1）^{2}+y^2=9，动圆P与圆M外切并与圆N内切，圆心P的轨迹为曲线C.

（Ⅰ）求C的方程；

（Ⅱ）l是与圆P，圆M都相切的一条直线，l与曲线C交于A，B两点，当圆P的半径最长时，求|AB|.

【考点】J3：轨迹方程；J9：直线与圆的位置关系.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】（I）设动圆的半径为R，由已知动圆P与圆M外切并与圆N内切，可得|PM|+|PN|=R+1+（3﹣R）=4，而|NM|=2，由椭圆的定义可知：动点P的轨迹是以M，N为焦点，4为长轴长的椭圆，求出即可；

（II）设曲线C上任意一点P（x，y），由于|PM|﹣|PN|=2R﹣2≤4﹣2=2，所以R≤2，当且仅当⊙P的圆心为（2，0）R=2时，其半径最大，其方程为（x﹣2）^{2}+y^2=4．分①l的倾斜角为90°，此时l与y轴重合，可得|AB|．②若l的倾斜角不为90°，由于⊙M的半径1≠R，可知l与x轴不平行，设l与x轴的交点为Q，根据$\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可得Q（﹣4，0），所以可设l：y=k（x+4），与椭圆的方程联立，得到根与系数的关系利用弦长公式即可得出.

【解答】解：（I）由圆M：（x+1）^{2}+y^2=1，可知圆心M（﹣1，0）；圆N：（x

$-1)^2+y^2=9$，圆心N（1，0），半径3.

设动圆的半径为R，

∵动圆P与圆M外切并与圆N内切，∴|PM|+|PN|=R+1+（3﹣R）=4，

而|NM|=2，由椭圆的定义可知：动点P的轨迹是以M，N为焦点，4为长轴长的椭圆，

∴a=2，c=1，$b^2=a^2-c^2=3$.

∴曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（x≠﹣2）.

（II）设曲线C上任意一点P（x，y），

由于|PM|﹣|PN|=2R﹣2≤3﹣1=2，所以R≤2，当且仅当⊙P的圆心为（2，0）R=2时，其半径最大，其方程为$(x-2)^2+y^2=4$.

①l的倾斜角为90°，则l与y轴重合，可得$|AB|=2\sqrt{3}$.

②若l的倾斜角不为90°，由于⊙M的半径1≠R，可知l与x轴不平行，

设l与x轴的交点为Q，则$\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可得Q（﹣4，0），所以可设l：y=k（x+4），

由l于M相切可得：$\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当$k=\frac{\sqrt{2}}{4}$时，联立$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得到$7x^2+8x-8=0$.

∴$x_1+x_2=-\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$.

∴$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|=\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2}\sqrt{(-\frac{8}{7})^2-4\times(-\frac{8}{7})}=\frac{18}{7}$

由于对称性可知：当$k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$时，也有$|AB|=\frac{18}{7}$.

综上可知：$|AB|=2\sqrt{3}$或$\frac{18}{7}$.

【点评】本题综合考查了两圆的相切关系、直线与圆相切问题、椭圆的定义及其性质、直线与椭圆相交问题转化为方程联立得到根与系数的关系、弦长公式等基础知识，需要较强的推理能力和计算能力及其分类讨论的思想方法.

21．（12分）已知函数f（x）$=x^2+ax+b$，g（x）$=e^x$（cx+d），若曲线y=f（x）和曲线y=g（x）都过点P（0，2），且在点P处有相同的切线y=4x+2．

（Ⅰ）求a，b，c，d的值；

（Ⅱ）若x≥－2时，f（x）≤kg（x），求k的取值范围．

【考点】3R：函数恒成立问题；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】16：压轴题；53：导数的综合应用．

【分析】（Ⅰ）对f（x），g（x）进行求导，已知在交点处有相同的切线及曲线y=f（x）和曲线y=g（x）都过点P（0，2），从而解出a，b，c，d的值；

（Ⅱ）由（I）得出f（x），g（x）的解析式，再求出F（x）及它的导函数，通过对k的讨论，判断出F（x）的最值，从而判断出f（x）≤kg（x）恒成立，从而求出k的范围．

【解答】解：（Ⅰ）由题意知f（0）=2，g（0）=2，f′（0）=4，g′（0）=4，

而f′（x）=2x+a，g′（x）$=e^x$（cx+d+c），故b=2，d=2，a=4，d+c=4，

从而a=4，b=2，c=2，d=2；

（Ⅱ）由（I）知，f（x）$=x^2+4x+2$，g（x）$=2e^x$（x+1）

设F（x）=kg（x）－f（x）$=2ke^x$（x+1）$-x^2-4x-2$，

则F′（x）$=2ke^x$（x+2）－2x－4=2（x+2）（ke^x-1），

由题设得F（0）≥0，即k≥1，

令F′（x）=0，得$x_1=-\ln k$，$x_2=-2$，

①若$1\le k<e^2$，则$-2<x_1\le 0$，从而当x∈（－2，x_1）时，F′（x）＜0，当x∈（x_1，+∞）时，F′（x）＞0，

即F（x）在（－2，x_1）上减，在（x_1，+∞）上是增，故F（x）在[－2，+∞）上的最小值为F（x_1），

而F（x_1）$=-x_1$（x_1+2）≥0，x≥－2时F（x）≥0，即f（x）≤kg（x）恒成立．

②若$k=e^2$，则F′（x）$=2e^2$（x+2）（e^x-e^{-2}），从而当x∈（－2，+∞）时，F′（x）＞0，

即F（x）在（－2，+∞）上是增，而F（－2）=0，故当x≥－2时，F（x）≥0，即f（x）≤kg（x）恒成立．

③若$k>e^2$时，$F'(x)>2e^2(x+2)(e^x-e^{-2})$，

而$F(-2)=-2ke^{-2}+2<0$，所以当$x>-2$时，$f(x)\le kg(x)$不恒成立，

综上，k的取值范围是$[1,e^2]$．

【点评】此题主要考查利用导数研究曲线上某点切线方程，函数恒成立问题，考查分类讨论思想，解题的关键是能够利用导数工具研究函数的性质，此题是一道中档题．

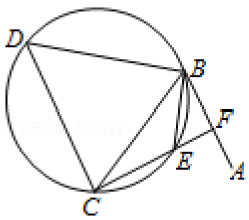
四、请考生在第22、23、24题中任选一道作答，并用2B铅笔将答题卡上所选的题目对应的题号右侧方框涂黑，按所涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂的首题进行评分，不涂，按本选考题的首题进行评分.

22．（10分）（选修4－1：几何证明选讲）

如图，直线AB为圆的切线，切点为B，点C在圆上，∠ABC的角平分线BE交圆于点E，DB垂直BE交圆于D．

（Ⅰ）证明：DB=DC；

（Ⅱ）设圆的半径为1，$BC=\sqrt{3}$，延长CE交AB于点F，求△BCF外接圆的半径．



【考点】NC：与圆有关的比例线段．

【专题】5B：直线与圆．

【分析】（I）连接DE交BC于点G，由弦切角定理可得∠ABE=∠BCE，由已知角平分线可得∠ABE=∠CBE，于是得到∠CBE=∠BCE，BE=CE．由已知DB⊥BE，可知DE为⊙O的直径，Rt△DBE≌Rt△DCE，利用三角形全等的性质即可得到DC=DB．

（II）由（I）可知：DG是BC的垂直平分线，即可得到$BG=\frac{\sqrt{3}}{2}$．设DE的中点为O，连接BO，可得∠BOG=60°．从而∠ABE=∠BCE=∠CBE=30°．得到CF⊥BF．进而得到Rt△BCF的外接圆的半径$=\frac{1}{2}BC$．

【解答】（I）证明：连接DE交BC于点G．

由弦切角定理可得∠ABE=∠BCE，而∠ABE=∠CBE，

∴∠CBE=∠BCE，BE=CE．

又∵DB⊥BE，∴DE为⊙O的直径，∠DCE=90°．

∴△DBE≌△DCE，∴DC=DB．

（II）由（I）可知：∠CDE=∠BDE，DB=DC．

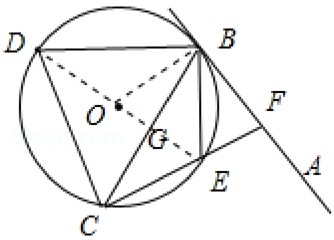
故DG是BC的垂直平分线，∴BG=$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

设DE的中点为O，连接BO，则∠BOG=60°．

从而∠ABE=∠BCE=∠CBE=30°．

∴CF⊥BF．

∴Rt△BCF的外接圆的半径=$\frac{\sqrt{3}}{2}$．



【点评】本题综合考查了圆的性质、弦切角定理、等边三角形的性质、三角形全等、三角形的外接圆的半径等知识，需要较强的推理能力、分析问题和解决问题的能力．

23．已知曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4+5\cos t\\ y=5+5\sin t\end{cases}$（t为参数），以坐标原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为ρ=2sinθ．

（1）把C_1的参数方程化为极坐标方程；

（2）求C_1与C_2交点的极坐标（ρ≥0，0≤θ＜2π）．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程；QH：参数方程化成普通方程．

【专题】11：计算题；35：转化思想；4R：转化法；5S：坐标系和参数方程．

【分析】（1）曲线C_1的参数方程消去参数t，得到普通方程，再由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，能求出$C_1$的极坐标方程．

（2）曲线C_2的极坐标方程化为直角坐标方程，与C_1的普通方程联立，求出C_1与C_2交点的直角坐标，由此能求出C_1与C_2交点的极坐标．

【解答】解：（1）将$\begin{cases}x=4+5\cos t\\y=5+5\sin t\end{cases}$，消去参数t，化为普通方程$(x-4)^2+(y-5)^2=25$，

即C_1：$x^2+y^2-8x-10y+16=0$，

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入$x^2+y^2-8x-10y+16=0$，

得$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$．

$\therefore C_1$的极坐标方程为$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$．

（2）$\because$曲线C_2的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$．

$\therefore$曲线C_2的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$，

联立$\begin{cases}x^2+y^2-8x-10y+16=0\\x^2+y^2-2y=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$，

$\therefore C_1$与C_2交点的极坐标为$(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$和$(2,\frac{\pi}{2})$．

【点评】本题考查曲线极坐标方程的求法，考查两曲线交点的极坐标的求法，考查极坐标方程、直角坐标方程、参数方程的互化等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想，是中档题．

24．已知函数$f(x)=|2x-1|+|2x+a|$，$g(x)=x+3$．

（Ⅰ）当$a=-2$时，求不等式$f(x)<g(x)$的解集；

（Ⅱ）设$a>-1$，且当$x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$时，$f(x)\le g(x)$，求a的取值范围．

【考点】R5：绝对值不等式的解法．

【分析】（Ⅰ）当$a=-2$时，求不等式$f(x)<g(x)$化为$|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$．设$y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，画出函数y的图象，数形结合可得结论．

（Ⅱ）不等式化即

$1+a \le x+3$，故$x \ge a-2$对$x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$都成立，分析可得$-\frac{a}{2} \ge a-2$，由此解得a的取值范围．

【解答】解：（Ⅰ）当$a=-2$时，求不等式$f(x) < g(x)$化为$|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$．

设$y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，则$y=\begin{cases}-5x, & x<\frac{1}{2}\\ -x-2, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\\ 3x-6, & x>1\end{cases}$，它的图象如图所示：

结合图象可得，$y<0$的解集为$(0, 2)$，故原不等式的解集为$(0, 2)$．

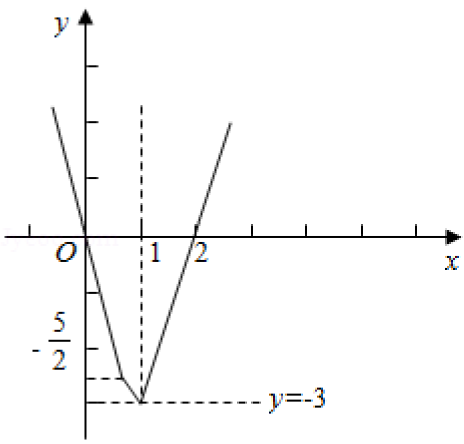
（Ⅱ）设$a>-1$，且当$x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$时，$f(x)=1+a$，不等式化为$1+a \le x+3$，

故$x \ge a-2$对$x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$都成立．

故$-\frac{a}{2} \ge a-2$，

解得$a \le \frac{4}{3}$，

故a的取值范围为$(-1, \frac{4}{3}]$．



【点评】本题考查绝对值不等式的解法与绝对值不等式的性质，关键是利用零点分段讨论法分析函数的解析式．