2013年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数学试题（理工农医类）

【学科网试卷总评】

优点1．立足基础，适度创新

作为中学数学主体内容中的函数与导数、数列、统计与概率、三角函数、解析几何、立体几何等六大主干知识，在文、理科试卷中不但占分比例大，而且在各类题型中都作了较为深入的考查。

适度创新如理9以等比数列的片断和、积为背景，考查考生从特殊到一般地解决数学问题的能力；理10、文16、理15依托新情境材料，考查考生阅读理解、提取相关信息的能力，考查考生的学习潜能；文11、理18、理19都要求考生运用直观感知、操作确认等数学实验方法予以解决，其中，理19第（III）问要求考生能将空间几何体的拼接转化为平面图形的拼接，需要较高的空间想象能力；理20以三角函数为载体，将数列、函数与导数合理交汇，考查考生对问题的理解及综合地应用知识分析问题、解决问题所需要的抽象概括能力和推理论证能力。

优点2．区分度明显

既有容易题，也有中等题、难题，使得不同层次的考生的水平都得到合理的评价。

各种题型的试题梯度明显，例如选择题和填空题的起点低，再逐步增加难度，而最后两题有较大的思维量。解答题在整体难度递进的同时，每一小题也均从易到难。例如理19、20、文21、22的第（Ⅰ）问入题较易，而第（Ⅱ）或第（III）问则将检测考生是否具备在自然语言、图形语言和符号语言之间进行熟练的转化和思考的能力作为重要的考查目标。

这些试题的解法多样，不同的解法体现了考生思维层次的差异。试题既体现对考生的人文关怀，又真正体现了“多思少算”的命题理念，使大部分考生都能得到一定的基本分，同时又有助于思维层次较高的考生充分发挥，彰显了选拔功能。

优点3．注重探究，突出能力

例如理10、文16考生需先理解“保序同构”的概念，并搜索已有的知识进而运用最本源的函数知识予以解决，考查考生解决新情境问题的能力；理9在探究两个新数列生成的过程中，考生需将问题回归到等差、等比数列的定义，并予以解决，考查了考生抽象概括能力；理15的解决需考生阅读理解相关的知识材料，提练解决问题的思想方法（类比）并加以应用，考查了考生学习新知识、解决新问题的能力；理18证明9个点都在同一条抛物线上，考生可从特殊入手，通过合情推

理得出结论并加以验证，也可通过演绎推理直接证明，考查考生推理论证的能力；理 19 的拼接过程需要考生严谨、简捷和深刻的思维，考查考生的空间想象能力；理 20 第（Ⅱ）问在探究三个数成等差数列的过程中，需要考生对三个数的大小进行辨析，从而优化解题过程，考查考生思维的简捷性，较好地考查了考生的运算求解能力。理 20 第（III）问要求考生化整体到局部，先研究函数在一个周期内图象的性态，再从特殊到一般地解决问题，综合地考查了考生的抽象概括能力、推理论证能力和运算求解能力；文 22 也需要考生对问题进行不断地转化，考查了考生的推理论证能力和运算求解能力。

优点 4．关注过程

试题规避模式化的解题和公式的直接套用，考查学生探究和解决问题的思维方法。如理 8、文 12 以函数图象的变换为载体考查考生对极值定义本质的理解；理 9 则回避了对等差、等比数列公式的直接套用，着重考查考生对等差、等比数列定义本质的理解；理 10、文 16 则考查了考生对函数的定义本质的理解；文 11 对线性回归的考查不再是以往的套用公式，而是考查考生对线性回归知识发生、发展的过程性理解；理 15 体现了对新材料的学习、理解和运用的过程。

综上：本套试题作为高考的选拔性考试非常有优势，就是题题的设问方式都规避了模式化的单刀直入法，可谓题题都有新鲜感，不过不足之处也恰恰在于此，对于那些理解能力、化归转化能力、阅读能力偏弱的同学来说就是一大灾难。

第Ⅰ卷(选择题 共 50 分)

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求的.

1.已知复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=1+2i$（i 为虚数单位），则 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A.第一象限　B.第二象限　　C.第三象限　D.第四象限

[答案]D

[解析] 由$\overline{z}=1+2i$知$z=1-2i$，所对应的点为（1，-2）位于第四象限。

[学科网考点定位]本题只考查了共扼复数及复平面的概念，属于简单题。

2.已知集合 $A=\{1,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的（　　）

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件　　C.充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

[答案]A

[解析]当 $a=3$ 时 $A=\{1,3\}$ 显然是 B 的子集，但 A $\subseteq$ B时， $a=3$ 或者 $a=2$ 故为充分不必要条件，此题也属于简单题。

[学科网考点定位]本题将集合与条件的判断有机的结合，属于小点小考的命题方法。

3.双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的顶点到渐进线的距离等于（　　）

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

[答案]C

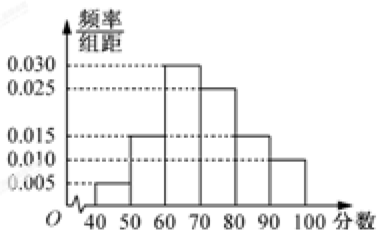
[解析]由于对称性，我们不妨取顶点 $A(2,0)$，取渐近线为 $x-2y=0$，所以由点到直线的距离公式可得 $d=\frac{2}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

[学科网考点定位]本题考查了双曲线的渐近线及点到直线的距离公式，属于简单题。

4.某校从高一年级学生中随机抽取部分学生，将他们的模块测试成绩分成 6 组：[40,50), [50,60), [60,70), [70,80), [80,90), [90,100]加以统计，得到如图所示的频率分布直方图。已知高一年级共有学生 600 名，据此估计，该模块测试成绩不少于 60 分的学生人数为（　　）

A.588　　B.480　　C.450　　D.120

[答案]B



[解析]由直方图可知少于 60 分的频率为（0.005+0.010）*10=0.2，所以不少于 60 的频率为 1-0.2=0.8，故不少于 60 分的人数=600*0.8=480

[学科网考点定位]本题考查了统计的直方图，在此图中切记其纵坐标为频率/组距，属于简单题。

5.满足 $a,b\in\{-1,0,1,2\}$，且关于 x 的方程 $ax^2+2x+b=0$ 有实数解的有序数对的个数为（　　）

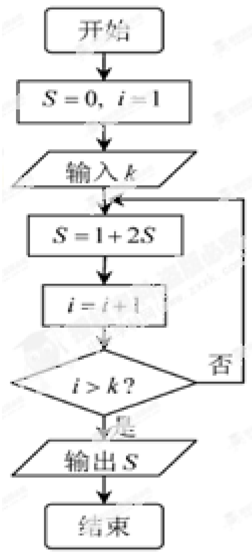
A. 14　　B. 13　　C. 12　　D. 10

[答案]B

[解析]此方程有根 $\Delta=4-4ab\geq 0$ 即 $ab\leq 1$，有序数对 (a,b) 所有取法为 $C_4^1*C_4^1=16$ 种，其中不满足 $ab\leq 1$ 的只有 $(1,2),(2,1),(2,2)$ 三种，所以满足题意的为 16-3=13 种.

[学科网考点定位]本题结合了二次方程根的判断与简单的排列组合，但要注意为有序数对，本解法采用了间接法，此题也可用直接法一一列出。属于简单题。

6.阅读如图所示的程序框图，若编入的 $k=10$，则该算法的功能是（　　）



A. 计算数列 $\{2^{n-1}\}$ 的前 10 项和　　B.计算数列 $\{2^{n-1}\}$ 的前 9 项和

C. 计算数列 $\{2^n-1\}$ 的前 10 项和　　D. 计算数列 $\{2^n-1\}$ 的前 9 项和

[答案]A

[解析]由核心得法 $S_{n+1}=1+2S_n$ 可得 $S_n=2^n-1$，所以 $a_n=2^{n-1}$，再由循环次数可知为 10 次，所以答案为 A。

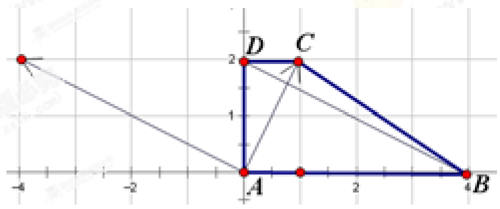
[学科网考点定位]此题属于用框图考查数列的简单应用。此题还可通过验证得到正确答案。

7. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$,则该四边形的面积为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C.5　　D.10

[答案]C

[解析]注意到两向量的纵坐标都为 2，所以借助坐标系如图，$S=\frac{1}{2}(1+4)*2=5$。或者注意到 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ 分为四个小直角三角形算面积。



[学科网考点定位]本题的处理方法主要是向量的平移，所以向量只要能合理的转化还是属于容易题。

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$x_0(x_0\neq 0)$ 是 $f(x)$ 的极大值点，以下结论一定正确的是（　）

A． $\forall x\in R, f(x)\le f(x_0)$　　　　B. $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点

C. $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点　　　　D. $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

[答案]D

[解析]对于 A 选项函数的极大值不一定是函数的最大值，所以错；对于 B 中的 $f(-x)$ 是将 $f(x)$ 的图像关于 Y 轴对称，所以 $-x_0$ 是其极大值点；对于 C 中的 $-f(x)$ 是将 $f(x)$ 的图像关 X 轴对称，所以 x_0 才是其极小值点；而对于 D 中的 $-f(-x)$ 是将 $f(x)$ 的图像关原点对称，故 $-x_0$ 是其极小值点，故正确。

[学科网考点定位]本题主要考查学生对于函数极值与最值关系及函数图像的变换，牢记几种常见变换。属于中等偏上难度。

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，记 $b_n=a_{m(n-1)+1}+a_{m(n-1)+2}+\cdots+a_{m(n-1)+m}$，$b_n=a_{m(n-1)+1}*a_{m(n-1)+2}*\cdots*a_{m(n-1)+m}$，$(m,n\in N*)$，则以下结论一定正确的是（　　）

A. 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，公差为 q^m　　　　B. 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，公比为 q^{2m}

C. 数列 $\{c_n\}$ 为等比数列，公比为 q^{m^2}　　　　D. 数列 $\{c_n\}$ 为等比数列，公比为 q^{m^m}

[答案]C

[解析]由 $b_n=a_{m(n-1)+1}+a_{m(n-1)+2}+\cdots a_{m(n-1)+m}$，

$b_{n+1}=a_{mn+1}+a_{mn+2}+\cdots a_{mn+m}=q^m(a_{m(n-1)+1}+a_{m(n-1)+2}+\cdots a_{m(n-1)+m})$ 故 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q^m$，所以 $\{b_n\}$ 为等比数列，公比为 q^m，所以 AB 错；$c_n=a_{m(n-1)+1}\bullet a_{m(n-1)+2}\bullet\cdots\bullet a_{m(n-1)+m}$，$c_{n+1}=a_{mn+1}\bullet a_{mn+2}\bullet\cdots\bullet a_{mn+m}$

故

$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{mn+1}\bullet a_{mn+2}\bullet\cdots\bullet a_{mn+m}}{a_{m(n-1)+1}\bullet a_{m(n-1)+2}\bullet\cdots\bullet a_{m(n-1)+m}}=\left(q^m\right)^m=q^{m^2}$，所以等比，且以 q^{m^2} q^{m^2} 为公比。

[学科网考点定位]对等比，等差数列的判断，对于学生来说计算有一定的难度。不过可以尝试用特例。如给 m 取值。

10. 设 S,T 是 R 的两个非空子集，如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足：

(i) $T=\{f(x)|x\in S\}$；(ii) 对任意 $x_1,x_2\in S$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称这两个集合“保序同构”，以下集合对不是“保序同构”的是（　　）

A. $A=N^*,B=N$　　　　B. $A=\{x|-1\le x\le 3\},B=\{x|x=-8或0<x\le 10\}$

C. $A=\{x|0<x<1\},B=R$　　　　D. $A=Z,B=Q$

[答案]D

[解析]条件（i）说明 S 到 T 是一个一一映射，条件（ii）说明函数单调增。对于 A 可拟合函数 $y=x-1(x\in N^*)$满足上述两个条件，故是保序同构；对于 B 可拟合函数 $y=\begin{cases}-8,(x=-1)\\ \frac{5}{2}(x-1),(-1<x\le 3)\end{cases}$ 满足上述两个条件，故是保序同构；对于 C 可考虑经过平移压缩的正切函数也满足上述两个条件，故是保序同构；故应该选 D。

[学科网考点定位]本题考查学生对新概念的理解，转化和应用，属于难题。

!

第II卷（非选择题　共 100 分）

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．把答案填写在答题卡的相应位置.

11. 利用计算机产生 $0\sim 1$ 之间的均匀随机数 a，则事件‘$3a-1<0$’的概率为________

[答案] $\frac{2}{3}$

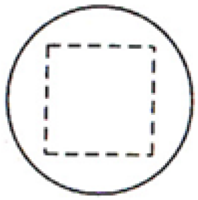
[解析] 由$3a-1>0$ 知 $a>\frac{1}{3}$，由几何概型知 $p=\frac{\frac{2}{3}}{1}=\frac{2}{3}$

[学科网考点定位]简单的几何概型的考查。

12. 已知某一多面体内接于球构成一个简单组合体，如果该组合体的正视图、俯视图、均如图所示，且图中的四边形是边长为 2 的正方形，则该球的表面积是_____

[答案] 12π

[解析]由三视图可知几何体为球内接一个正方体，所以正方体的体对角线为球的直径 $2r=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$， $S_{球}=4\pi r^2=12\pi$。



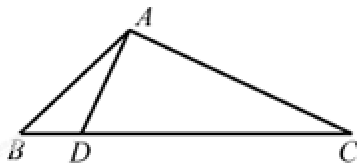
[学科网考点定位]对于三视图的考查主要考查学生的空间思维能力，要有较好的空间感。属于中等难度。

13. 如图，在 ΔABC 中，已知点 D 在 BC 边上， $AD\perp AC$, $\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB=3\sqrt{2}$， $AD=3$, 则 BD 的长为_____

[答案] $\sqrt{3}$

[解析]设 $\angle BAD=\theta$,则

$\because \sin\angle BAC=\sin(\theta+90^0)=\cos\theta$， $\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，在 $\triangle ABD$ 中应用余弦定理得：



$\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2+3^2-\mathrm{BD}^2}{2*3\sqrt{2}*3}$，故 $BD=\sqrt{3}$

[学科网考点定位] 余弦定理及诱导公式的应用，属于解斜三角形中容易题。

14. 椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2 ,焦距为 $2c$，若直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$ 与椭圆的一个交点满足 $\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$,则该椭圆的离心率等于_____

[答案] $\sqrt{3}-1$

[解析]注意到直线过点 $(-c,0)$ 即为左焦点 F_1，又斜率为 $\sqrt{3}$，所以倾斜角为 60^0，即 $\angle MF_1F_2=60^0$。

又 $\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$ 故 $\angle MF_2F_1=30^0$，那么 $\angle F_2MF_1=90^0$。

$MF_1=F_1F_2\bullet\cos 60^0=2c\bullet\frac{1}{2}=c$， $MF_2=F_1F_2\bullet\sin 60^0=2c\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}c$,

$e=\frac{2c}{2a}=\frac{2c}{MF_1+MF_2}=\frac{2c}{\sqrt{3}c+c}=\sqrt{3}-1$。

[学科网考点定位]考查离心率的算法，要求学生要有敏锐的观察力，比如直线的特征。属于难题。

15. 当$x\in R,|x|<1$时，有如下表达式：

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

两边同时积分得：$\int_0^{\frac{1}{2}}1dx+\int_0^{\frac{1}{2}}xdx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx+\cdots\int_0^{\frac{1}{2}}x^ndx+\cdots=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx$

从而得到如下等式：

$$1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+\frac{1}{n+1}\times(\frac{1}{2})^{n+1}+\cdots=\ln 2.$$

请根据以上材料所蕴含的数学思想方法，计算：

$$C_n^0\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}C_n^1\times(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3}C_n^2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n\times(\frac{1}{2})^{n+1}=$$

[答案] $\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]$

[解析]法一：注意到信息中的积分算法，所以逆写可得

$$C_n^0\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}C_n^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}C_n^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}C_n^0x^0dx+\int_0^{\frac{1}{2}}C_n^1x^1dx+\int_0^{\frac{1}{2}}C_n^2x^2dx+\cdots+\int_0^{\frac{1}{2}}C_n^nx^ndx(*)$$

$$\because C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n$$

$$\therefore (*) = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)^n dx = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

法二：考虑组合恒等式 $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ 故直接可得

$$C_n^0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_n^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}C_n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[C_{n+1}^1 \frac{1}{2} + C_{n+1}^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_{n+1}^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + C_{n+1}^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

[学科网考点定位]此题的立意在类比应用，巧妙的逆向构造考查了学生应用信息的能力。难度比较大。不过如果参加竞赛或者熟悉 $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ 恒等式也就比较容易了。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（本小题满分 13 分）

某联欢晚会举行抽奖活动，举办方设置了甲、乙两种抽奖方案，方案甲的中奖率为 $\frac{2}{3}$，中奖可以获得 2 分；方案乙的中奖率为 $\frac{2}{5}$，中奖可以获得 3 分；未中奖则不得分。每人有且只有一次抽奖机会，每次抽奖中奖与否互不影响，晚会结束后凭分数兑换奖品。

（1）若小明选择方案甲抽奖，小红选择方案乙抽奖，记他们的累计得分为 X ,求 $X \le 3$ 的概率；

（2）若小明、小红两人都选择方案甲或都选择方案乙进行抽奖，问：他们选择何种方案抽奖，累计得分的数学期望较大？

[答案]（I）由已知得：小明中奖的概率为 $\frac{2}{3}$，小红中奖的概率为 $\frac{2}{5}$，两人中奖与否互不影响，记“这 2 人的累计得分 $X \le 3$”的事件为 A，则 A 事件的对立事件为“$X = 5$”，

$\because P(X=5) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$， $\therefore P(A) = 1 - P(X=5) = \frac{11}{15}$

$\therefore$这两人的累计得分 $X \le 3$ 的概率为 $\frac{11}{15}$.

(Ⅱ)设小明.小红都选择方案甲抽奖中奖的次数为 X_1，都选择方案乙抽奖中奖的次数为 X_2，则这两人选择方案甲抽奖累计得分的数学期望为 $E(2X_1)$，选择方案乙抽奖累计得分的数学期望为 $E(3X_2)$

由已知：$X_1 \sim B(2,\frac{2}{3})$，$X_2 \sim B(2,\frac{2}{5})$

$\therefore E(X_1)=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，$E(X_2)=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore E(2X_1)=2E(X_1)=\frac{8}{3}$，$E(3X_2)=3E(X_2)=\frac{12}{5}$

$\because E(2X_1)>E(3X_2)$

$\therefore$他们都在选择方案甲进行抽奖时，累计得分的数学期望最大.

[解析]对于概率应用的考查就注重理解题意，方法选择要恰当，比如用对立事件的方向就可以大大减少计算量。再有，注意甄别事件是否为二项分布或超几何分布也会给计算带来方便。

[学科网考点定位]本题主要考查古典概型、离散型随机变更的分布列、数学期望等基础知识。属容易题。

17.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x-a\ln x(a\in R)$

（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线方程;

（2）求函数 $f(x)$ 的极值

[答案] 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{a}{x}$.

（I）当 $a=2$ 时，$f(x)=x-2\ln x$，$f'(x)=1-\frac{2}{x}(x>0)$，$\therefore f(1)=1, f'(1)=-1$，

$\therefore y=f(x)$在点$A(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=-(x-1)$，即$x+y-2=0$.

（Ⅱ）由 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x},x>0$可知：

①当$a\le 0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$为$(0,+\infty)$上的增函数，函数$f(x)$无极值；

②当$a>0$时，由$f'(x)=0$，解得$x=a$；

$\because x\in(0,a)$时，$f'(x)<0$，$x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$在$x=a$处取得极小值，且极小值为$f(a)=a-a\ln a$，无极大值.

综上：当$a\le 0$时，函数$f(x)$无极值

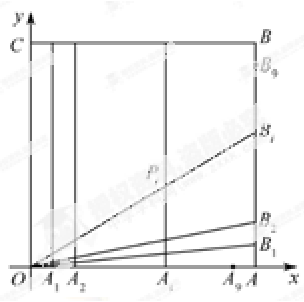
当$a>0$时，函数$f(x)$在$x=a$处取得极小值$a-a\ln a$，无极大值.

[解析]此题考查的是最基本的函数切线问题及对极值含参情况的讨论，所以导数公式必需牢记，对于参数的讨论找到一个合理的分类标准做到不重不漏即可，可这往往又是学生最容易出现问题的地方。

［学科网考点定位］本题主要考查函数与导数、不等式的基础。注意对参数的分类讨论，属于函数中的简单题。

18.（本小题满分 13 分）

如图，在正方形$OABC$中，O为坐标原点，点A的坐标为$(10,0)$，点C的坐标为$(0,10)$，分别将线段OA和AB十等分，分点分别记为$A_1,A_2,\cdots,A_9$和$B_1,B_2,\cdots,B_9$，连接OB_i，过A_i作x轴的垂线与OB_i交于点P_i $(i\in N^*,1\le i\le 9)$。



（1）求证：点P_i $(i\in N^*,1\le i\le 9)$都在同一条抛物线上，并求抛物线E的方程；

（2）过点C作直线l与抛物线 E 交于不同的两点M,N，若ΔOCM与ΔOCN的面积之比为 4:1，求直线l的方程。

[答案] （Ⅰ）依题意，过 $A_i(i\in N^*,1\le i\le 9)$ 且与 x 轴垂直的直线方程为 $x=i$

$\because B_i(10,i)$，$\therefore$ 直线 OB_i 的方程为 $y=\dfrac{i}{10}x$

设 P_i 坐标为 (x,y)，由 $\begin{cases}x=i\\ y=\dfrac{i}{10}x\end{cases}$ 得：$y=\dfrac{1}{10}x^2$，即 $x^2=10y$，

$\therefore P_i(i\in N^*,1\le i\le 9)$ 都在同一条抛物线上，且抛物线 E 方程为 $x^2=10y$

（Ⅱ）依题意：直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+10$

由 $\begin{cases}y=kx+10\\ x^2=10y\end{cases}$ 得 $x^2-10kx-100=0$

此时 $\Delta=100k^2+400>0$，直线 l 与抛物线 E 恒有两个不同的交点 M,N

设：$M(x_1,y_1)N(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=10k\\ x_1\cdot x_2=-100\end{cases}$

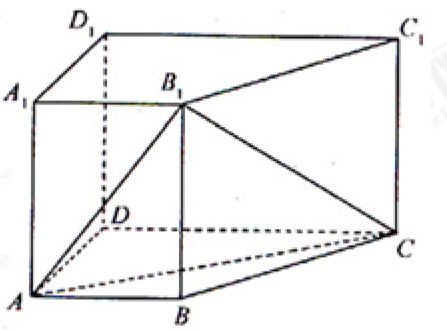
$\because S_{\Delta OCM}=4S_{\Delta OCN}$ $\therefore |x_1|=4|x_2|$

又 $\because x_1\cdot x_2<0$，$\therefore x_1=-4x_2$

分别带入 $\begin{cases}y=kx+10\\ x^2=10y\end{cases}$，解得 $k=\pm\dfrac{3}{2}$

直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{3}{2}x+10$，即 $3x-2y+20=0$ 或

$3x+2y-20=0$



[解析]此题在问法上给学生设了一个卡，如果第一问直接问 P_i 的轨迹方程，估计学生更容易入手一些，不过对于知识要活学活用（证明它求出不就说明问题了）。那么第二问有关解析几何的计算就要善于转化，且计算要过关。

[学科网考点定位] 本题考查抛物线的性质、直线与抛物线的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，化归与转化及数形结合思想、函数与方程思想。属于中等难度。

19.（本小题满分 13 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，

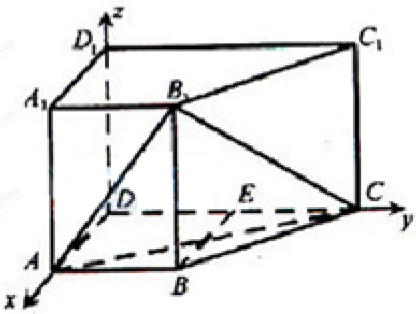
$AB//DC, AA_1=1, AB=3k, AD=4k, BC=5k, DC=6k,(k>0)$

（1）求证：$CD\perp$ 平面 ADD_1A_1

（2）若直线 AA_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值为 $\frac{6}{7}$，求 k 的值

（3）现将与四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 形状和大小完全相同的两个四棱柱拼成一个新的四棱柱，规定：若拼成的新四棱柱形状和大小完全相同，则视为同一种拼接方案，问共有几种不同的拼接方案？在这些拼接成的新四棱柱中，记其中最小的表面积为 $f(k)$，写出 $f(k)$ 的解析式。（直接写出答案，不必说明理由）

[答案] I ）取 CD 中点 E，连接 BE



$\because AB//DE$， $AB=DE=3k$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形

$\therefore BE//AD$ 且 $BE=AD=4k$

在 $\triangle BCE$ 中，$\because BE=4k, CE=3k, BC=5k$

$\therefore BE^2+CE^2=BC^2$

$\therefore \angle BEC=90^\circ$，即 $BE\perp CD$，又 $\because BE//AD$，所以 $CD\perp AD$

$\because AA_1\perp$ 平面 $ABCD$， $CD\subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore AA_1\perp CD$，又 $AA_1\cap AD=A$，

$\therefore CD\perp$ 平面 ADD_1A_1

（II）以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系

$A(4k,0,0)$， $C(0,6k,0)$， $B_1(4k,3k,1)$， $A_1(4k,0,1)$

所以 $\overrightarrow{AC}=(-4k,6k,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,3k,1)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$

设平面 AB_1C 的法向量 $n=(x,y,z)$，则由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot n=0\\ \overrightarrow{AB_1}\cdot n=0\end{cases}$

得 $\begin{cases}-4kx+6ky=0\\ 3ky+z=0\end{cases}$ 取 $y=2$，得 $n=(3,2,-6k)$

设 AA_1 与平面 AB_1C 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AA_1},n\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AA_1},n}{|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|n|}\right|$

$=\dfrac{6k}{\sqrt{36k^2+13}}=\dfrac{6}{7}$，解得 $k=1$．故所求 k 的值为 1

（III）共有 4 种不同的方案

$$f(k)=\begin{cases}72k^2+26k,0<k\le\dfrac{5}{18}\\ 36k^2+36k,k>\dfrac{5}{18}\end{cases}$$

[解析]立体几何第一问对于关系的决断往往基于对公理定理推论掌握的比较熟练，又要善于做出一线辅助线加以证明，那么第二问就可以在其基础上采用坐标法处理角度或者距离问题，坐标法所用的公式就必需熟练掌握，第三问主要考查了学生的空间思维能力，要在平时多加练习。此题坐标法也很考验学生的计算功底。

[学科网考点定位] 本题主要考查立体几何中线线关系线面关系的判断以及线面角的算法，并且通过第三问的设问又把几何体的表面积与函数巧妙的结合起来，计算和空间思维要求比较高。属于难题。

20.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin(wx+\varphi)(w>0,0<\varphi<\pi)$ 的周期为 π，图象的一个对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向右平移个 $\dfrac{\pi}{2}$ 单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象。

（1）求函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式

（2）是否存在 $x_0 \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$，使得 $f(x_0), g(x_0), f(x_0)g(x_0)$ 按照某种顺序成等差数列？若存在，请确定 x_0 的个数，若不存在，说明理由；

（3）求实数 a 与正整数 n，使得 $F(x) = f(x) + ag(x)$ 在 $(0, n\pi)$ 内恰有 2013 个零点

[答案]（Ⅰ）由函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的周期为 π， $\omega > 0$，得 $\omega = 2$

又曲线 $y = f(x)$ 的一个对称中心为 $(\dfrac{\pi}{4}, 0)$， $\varphi \in (0, \pi)$

故 $f(\dfrac{\pi}{4}) = \sin(2 \times \dfrac{\pi}{4} + \varphi) = 0$，得 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$，所以 $f(x) = \cos 2x$

将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变）后可得 $y = \cos x$ 的图象，再将 $y = \cos x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x) = \sin x$

（Ⅱ）当 $x \in (\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4})$ 时， $\dfrac{1}{2} < \sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $0 < \cos 2x < \dfrac{1}{2}$

所以 $\sin x > \cos 2x > \sin x \cos 2x$

问题转化为方程 $2\cos 2x = \sin x + \sin x \cos 2x$ 在 $(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4})$ 内是否有解

设 $G(x) = \sin x + \sin x \cos 2x - 2\cos 2x$， $x \in (\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4})$

则 $G'(x) = \cos x + \cos x \cos 2x + 2\sin 2x(2 - \sin x)$

因为 $x \in (\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4})$，所以 $G'(x) > 0$， $G(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4})$ 内单调递增

又 $G(\dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{1}{4} < 0$， $G(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$

且函数 $G(x)$ 的图象连续不断，故可知函数 $G(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4})$ 内存在唯一零点 x_0，

即存在唯一的 $x_0 \in (\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4})$ 满足题意

（Ⅲ）依题意， $F(x) = a\sin x + \cos 2x$，令 $F(x) = a\sin x + \cos 2x = 0$

当 $\sin x=0$，即 $x=k\pi(k\in Z)$ 时，$\cos 2x=1$，从而 $x=k\pi(k\in Z)$ 不是方程 $F(x)=0$ 的解，所以

方程 $F(x)=0$ 等价于关于 x 的方程 $a=-\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$，$x\neq k\pi(k\in Z)$

现研究 $x\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 时方程解的情况

令 $h(x)=-\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$，$x\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$

则问题转化为研究直线 $y=a$ 与曲线 $y=h(x)$ 在 $x\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 的交点情况

$h'(x)=\dfrac{\cos x(2\sin^2 x+1)}{\sin^2 x}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $x=\dfrac{3\pi}{2}$

当 x 变化时，$h(x)$ 和 $h'(x)$ 变化情况如下表

x	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	$(\pi,\frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$
$h'(x)$	+	0	−	−	0	+
$h(x)$	↗	1	↘	↘	−1	↗

当 $x>0$ 且 x 趋近于 0 时，$h(x)$ 趋向于 $-\infty$

当 $x<\pi$ 且 x 趋近于 π 时，$h(x)$ 趋向于 $-\infty$

当 $x>\pi$ 且 x 趋近于 π 时，$h(x)$ 趋向于 $+\infty$

当 $x<2\pi$ 且 x 趋近于 2π 时，$h(x)$ 趋向于 $+\infty$

故当 $a>1$ 时，直线 $y=a$ 与曲线 $y=h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有无交点，在 $(\pi,2\pi)$ 内有 2 个交点；

当 $a<-1$ 时，直线 $y=a$ 与曲线 $y=h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有 2 个交点，在 $(\pi,2\pi)$ 内无交点；

当 $-1<a<1$ 时，直线 $y=a$ 与曲线 $y=h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有 2 个交点，在 $(\pi,2\pi)$ 内有 2 个交点

由函数 $h(x)$ 的周期性，可知当 $a\neq\pm1$ 时，直线 $y=a$ 与曲线 $y=h(x)$ 在 $(0,n\pi)$ 内总有偶数个交点，

从而不存在正整数 n，使得直线 $y=a$ 与曲线 $y=h(x)$ 在 $(0,n\pi)$ 内恰有 2013 个交点；当 $a=\pm1$ 时，

直线 $y=a$ 与曲线 $y=h(x)$ 在 $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 内有 3 个交点，由周期性，$2013=3\times671$，所以

$n = 671 \times 2 = 1342$

综上，当 $a = \pm 1$，$n = 1342$ 时，函数 $F(x) = f(x) + ag(x)$ 在 $(0, n\pi)$ 内恰有 2013 个零点

[解析]三角函数解析式的确定相对而言应该比较容易，也就是说即使是 20 题的第一问往往难度也不会太大，而我们同学可能因为时间的关系而丢掉了捡分的机会，所以建议大家可以先试看看此问是否熟悉，再做整体规划。三角函数的图像变换要千万注意左右平移只对 x 而言。而第二问对于是否等比的转化是处理的关键，所以函数思想无处不在，要善于运用。第三问从特殊到一般的思想是此问的灵魂，而此法的选择也因为参数分离后三角函数的周期性，所以万物皆有联系，只是平时要练就一双慧眼就不简单了。

[学科网考点定位] 本题考查了三角函数的性质、恒等变换、图像以及函数的零点。将函数的所有性质依托于三角函数展示，并且对多方面能力的综合考查。属于难题，但第一问是送给学生的。

本小题设有(1)、(2)、(3)三个选考题，每题 7 分，请考生任选 2 题作答，满分 14 分.如果多做，则按所做的前两题计分.

(1). (本小题满分 7 分) 选修 4-2：矩阵与变换

已知直线 $l: ax + y = 1$ 在矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 对应的变换作用下变为直线 $l': x + by = 1$

（I）求实数 a, b 的值

（II）若点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 l 上，且 $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，求点 P 的坐标

[答案] 解：（ I ）设直线 $l: ax + y = 1$ 上任意一点 $M(x, y)$ 在矩阵 A 对应的变换作用下的像是 $M'(x', y')$

由 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix}$，得 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y \end{cases}$

又点 $M'(x', y')$ 在 l' 上，所以 $x' + by' = 1$，即 $x + (b + 2)y = 1$

依题意 $\begin{cases} a = 1 \\ b + 2 = 1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

（Ⅱ）由 $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，得 $\begin{cases}x_0=x_0+2y_0\\y_0=y_0\end{cases}$ 解得 $y_0=0$

又点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 l 上，所以 $x_0=1$

故点 P 的坐标为 $(1,0)$

[解析] 矩阵与变换所涉及的内容并不多，在平时只要注意归纳，并且计算过关此题可以轻松拿下。

[学科网考点定位]考查矩阵的基本运算以及基本变换，属于容易题。

(2).(本小题满分 7 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.已知点 A 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=a$，且点 A 在直线 l 上。

（Ⅰ）求 a 的值及直线 l 的直角坐标方程；

（Ⅱ）圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos a,\\y=\sin a\end{cases}(a\text{为参数})$，试判断直线 l 与圆 C 的位置关系.

[答案]（Ⅰ）由点 $A(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ 在直线 $\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=a$ 上，可得 $a=\sqrt{2}$

所以直线 l 的方程可化为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$

从而直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$

（Ⅱ）由已知得圆 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$

所以圆心为 $(1,0)$，半径 $r=1$

以为圆心到直线的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，所以直线与圆相交

[[解析] 坐标系与参数方程无非就是坐标系之间的互化，之后就变为简单的解析几何问题也属于必得分题目。

学科网考点定位]本题主要考查坐标间的互化以及圆的参数方程的基本内容，属于简单题。

(3).(本小题满分 7 分) 选修 4-5：不等式选讲

设不等式 $|x-2|<a(a\in N^*)$ 的解集为 A,且 $\frac{3}{2}\in A,\frac{1}{2}\notin A$

（Ⅰ）求 a 的值

（Ⅱ）求函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$ 的最小值

[答案]（Ⅰ）因为 $\frac{3}{2}\in A$，且 $\frac{1}{2}\notin A$，所以 $\left|\frac{3}{2}-2\right|<a$，且 $\left|\frac{1}{2}-2\right|\geq a$

解得 $\frac{1}{2}<a\leq\frac{3}{2}$，又因为 $a\in N^*$，所以 $a=1$

（Ⅱ）因为 $|x+1|+|x-2|\geq|(x+1)-(x-2)|=3$

当且仅当 $(x+1)(x-2)\leq0$，即 $-1\leq x\leq2$ 时取得等号，所以 $f(x)$ 的最小值为3

[解析] 不等式选讲如果如此题只考查绝对值不等式就算比较容易的题目，注意绝对值的三角不等式即可，当然也可通过讨论去掉绝对值号，当然还要注意均值和柯西不等式的应用。

[学科网考点定位]本题考查绝对值不等式的基本内容，属于简单题。