

2013年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. （5分）设集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5\}$, $M=\{x|x=a+b, a\in A, b\in B\}$, 则M中元素的个数为（ ）
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
2. （5分） $(1+\sqrt{3}i)^3=$ （ ）
- A. -8 B. 8 C. -8i D. 8i
3. （5分）已知向量 $\vec{m}=(\lambda+1, 1)$, $\vec{n}=(\lambda+2, 2)$, 若 $(\vec{m}+\vec{n})\perp(\vec{m}-\vec{n})$, 则 $\lambda=$ （ ）
- A. -4 B. -3 C. -2 D. -1
4. （5分）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为（ ）
- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, \frac{1}{2})$ C. $(-1, 0)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$
5. （5分）函数 $f(x)=\log_2(1+\frac{1}{x})$ ($x>0$) 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （ ）
- A. $\frac{1}{2^x-1}$ ($x>0$) B. $\frac{1}{2^x-1}$ ($x\neq 0$) C. 2^x-1 ($x\in\mathbb{R}$) D. 2^x-1 ($x>0$)
6. （5分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=0$, $a_2=-\frac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前10项和等于（ ）
- A. $-6(1-3^{-10})$ B. $\frac{1}{9}(1-3^{-10})$ C. $3(1-3^{-10})$ D. $3(1+3^{-10})$
7. （5分） $(1+x)^3(1+y)^4$ 的展开式中 x^2y^2 的系数是（ ）
- A. 5 B. 8 C. 12 D. 18
8. （5分）椭圆C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1 、 A_2 , 点P在C上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2, -1]$, 那么直线 PA_1 斜率的取值范围是（ ）
- A. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ B. $[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{1}{2}, 1]$ D. $[\frac{3}{4}, 1]$

9. (5分) 若函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 是增函数, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $[-1, 0]$ B. $[-1, +\infty)$ C. $[0, 3]$ D. $[3, +\infty)$
10. (5分) 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$
11. (5分) 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 点 $M(-2, 2)$, 过点 F 且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 则 $k =$ ()
- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2
12. (5分) 已知函数 $f(x) = \cos x \sin 2x$, 下列结论中不正确的是 ()
- A. $y = f(x)$ 的图象关于 $(\pi, 0)$ 中心对称
- B. $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
- C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分.

13. (5分) 已知 α 是第三象限角, $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, 则 $\cot \alpha =$ _____.
14. (5分) 6个人排成一行, 其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有 _____ 种. (用数字作答)
15. (5分) 记不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 3y \geq 4 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases}$ 所表示的平面区域为 D . 若直线 $y = a(x+1)$ 与 D 有公共点, 则 a 的取值范围是 _____.
16. (5分) 已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆, 其公共弦长等于球 O 的半径, $OK = \frac{3}{2}$, 且圆 O 与圆 K 所在的平面所成角为 60° , 则球 O 的表面积等于 _____.

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $S_3 = a_2^2$, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数

列，求 $\{a_n\}$ 的通项式.

18. (12分) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的内角对边分别为 a, b, c , 满足 $(a+b+c)(a-b+c)=ac$.

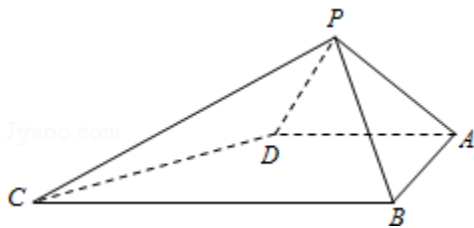
(I) 求 B .

(II) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$, 求 C .

19. (12分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BC = 2AD$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是等边三角形.

(I) 证明: $PB \perp CD$;

(II) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. (12分) 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判, 设各局中双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 各局比赛的结果都相互独立, 第1局甲当裁判.

(I) 求第4局甲当裁判的概率;

(II) X 表示前4局中乙当裁判的次数, 求 X 的数学期望.

21. (12分) 已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1

, F_2 , 离心率为3, 直线 $y=2$ 与C的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$.

(I) 求 a, b ;

(II) 设过 F_2 的直线 l 与C的左、右两支分别相交于A、B两点, 且 $|AF_1| = |BF_1|$,

证明: $|AF_2|$ 、 $|AB|$ 、 $|BF_2|$ 成等比数列.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$.

(I) 若 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 0$, 求 λ 的最小值;

(II) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明: $a_{2n} - a_n + \frac{1}{4n} > \ln 2$.