

绝密★启用前

# 2014年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

## 数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题(本大题满分56分)本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 函数  $y = 1 - 2\cos^2(2x)$  的最小正周期是\_\_\_\_\_.

2. 若复数  $z = 1 + 2i$ ，其中  $i$  是虚数单位，则  $(z + \frac{1}{z}) \cdot \bar{z} =$ \_\_\_\_\_.

3.

若抛物线  $y^2 = 2px$  的焦点与椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  的右焦点重合，则该抛物线的准线方程为\_\_\_\_\_.

4. 设  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, a), \\ x^2, & x \in [a, +\infty), \end{cases}$  若  $f(2) = 4$ ，则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

5. 若实数  $x, y$  满足  $xy = 1$ ，则  $x^2 + 2y^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.

6. 若圆锥的侧面积是底面积的3倍，则其母线与底面角的大小为\_\_\_\_\_（结果用反三角函数值表示）.

7. 已知曲线  $C$  的极坐标方程为  $p(3\cos\theta - 4\sin\theta) = 1$ ，则  $C$  与极轴的交点到极点的距离是\_\_\_\_\_.

8. 设无穷等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ，若  $a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_3 + a_4 + \cdots)$ ，则  $q =$ \_\_\_\_\_.

9. 若  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}$ , 则满足  $f(x) < 0$  的  $x$  取值范围是\_\_\_\_\_.

10.

为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续10天中随机选择3天进行紧急疏散演练, 则选择的3天恰好为连续3天的概率是\_\_\_\_\_ (结构用最简分数表示).

11. 已知互异的复数  $a, b$  满足  $ab \neq 0$ , 集合  $\{a, b\} = \{a^2, b^2\}$ , 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.

12. 设常数  $a$  使方程  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = a$  在闭区间  $[0, 2\pi]$  上恰有三个解  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3 =$ \_\_\_\_\_.

13.

某游戏的得分为1,2,3,4,5, 随机变量  $\xi$  表示小白玩游戏的得分. 若  $E(\xi) = 4.2$ , 则小白得5分的概率至少为\_\_\_\_\_.

14.

已知曲线  $C: x = -\sqrt{4 - y^2}$ , 直线  $l: x = 6$ . 若对于点  $A(m, 0)$ , 存在  $C$  上的点  $P$  和  $l$  上的点  $Q$  使得  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$ , 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

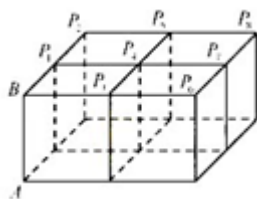
**二、选择题: 本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.**

15. 设  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则“ $a + b > 4$ ”是“ $a > 2$ , 且  $b > 2$ ”的 ( )

- (A) 充分条件 (B) 必要条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

16.

如图, 四个棱长为1的正方体排成一个正四棱柱,  $AB$  是一条侧棱,  $P_i (i = 1, 2, \dots)$  是上底面上其余的八个点, 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i} (i = 1, 2, \dots)$  的不同值的个数为 ( )



(A) 1 (B)2 (C)4 (D)8

17.

已知  $P_1(a_1, b_1)$  与  $P_2(a_2, b_2)$  是直线  $y=kx+1$  ( $k$  为常数) 上两个不同的点, 则关于  $x$  和  $y$  的方程

组  $\begin{cases} a_1x + b_1y = 1 \\ a_2x + b_2y = 1 \end{cases}$  的解的情况是 ( )

- (A) 无论  $k, P_1, P_2$  如何, 总是无解 (B) 无论  $k, P_1, P_2$  如何, 总有唯一解  
(C) 存在  $k, P_1, P_2$ , 使之恰有两解 (D) 存在  $k, P_1, P_2$ , 使之有无穷多解

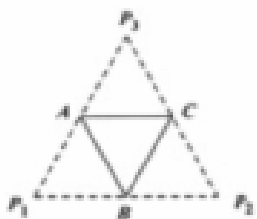
18.  $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0, \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0, \end{cases}$  若  $f(0)$  是  $f(x)$  的最小值, 则  $a$  的取值范围为 ( ).

(A)  $[-1, 2]$  (B)  $[-1, 0]$  (C)  $[1, 2]$  (D)  $[0, 2]$

三. 解答题 (本大题共5题, 满分74分)

19. (本题满分12分)

底面边长为2的正三棱锥  $P-ABC$ , 其表面展开图是三角形  $p_1p_2p_3$ , 如图, 求  $\triangle p_1p_2p_3$  的各边长及此三棱锥的体积  $V$ .



zxxk

20. (本题满分14分) 本题有2个小题, 第一小题满分6分, 第二小题满分1分。

设常数  $a \geq 0$ , 函数  $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$

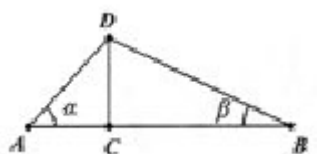
- (1) 若  $a=4$ , 求函数  $y=f(x)$  的反函数  $y=f^{-1}(x)$ ;  
(2) 根据  $a$  的不同取值, 讨论函数  $y=f(x)$  的奇偶性, 并说明理由.

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

如图，某公司要在  $A$ 、 $B$  两地连线上的定点  $C$  处建造广告牌  $CD$ ，其中  $D$  为顶端， $AC$  长35米， $CB$  长80米，设  $A$ 、 $B$  在同一水平面上，从  $A$  和  $B$  看  $D$  的仰角分别为  $\alpha$  和  $\beta$ 。

(1) 设计中  $CD$  是铅垂方向，若要求  $\alpha \geq 2\beta$ ，问  $CD$  的长至多为多少（结果精确到0.01米）？

(2) 施工完成后  $CD$  与铅垂方向有偏差，现在学科网实测得  $\alpha = 38.12^\circ$ ， $\beta = 18.45^\circ$ ，求  $CD$  的长（结果精确到0.01米）？



22（本题满分16分）本题共3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分。

在平面直角坐标系  $xOy$  中，对于直线  $l: ax + by + c = 0$  和点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ，记  $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$ 。若  $\eta < 0$ ，则称点  $P_1, P_2$  被直线  $l$  分隔。若曲线  $C$  与直线  $l$  没有公共点，且曲线  $C$  上存在点  $P_1, P_2$  被直线  $l$  分隔，则称直线  $l$  为曲线  $C$  的一条分隔线。

(1) 求证：点  $A(1, 2)$ ， $B(-1, 0)$  被直线  $x + y - 1 = 0$  分隔；

(2) 若直线  $y = kx$  是曲线  $x^2 - 4y^2 = 1$  的分隔线，求实数  $k$  的取值范围；

(3) 动点  $M$  到点  $Q(0, 2)$  的距离与到  $y$  轴的距离之积为1，设点  $M$  的轨迹为  $E$ ，求证：通过原点的直线中，有且仅有一条直线是  $E$  的分割线。

23.（本题满分18分）本题共3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分。

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{3}a_n \leq a_{n+1} \leq 3a_n, n \in N^*, a_1 = 1$ 。

(1) 若  $a_2 = 2, a_3 = x, a_4 = 9$ ，求  $x$  的取值范围；

(2) 若  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  等比数列， $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，

$\frac{1}{3}S_n \leq S_{n+1} \leq 3S_n, n \in N^*$ ，求  $q$  的取值范围；

(3) 若  $a_1, a_2, \cdots, a_k$  成等差数列，且  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1000$ ，学科网求正整数  $k$  的最大值，以及  $k$  取最大值时相应数列  $a_1, a_2, \cdots, a_k$  的公差。



