

## 2012上海高考数学试题（文科）答案与解析

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）

1. 计算： $\frac{3-i}{1+i} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $i$ 为虚数单位).

【答案】 $1-2i$

【解析】 $\frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-2i$

【点评】本题着重考查复数的除法运算，首先将分子、分母同乘以分母的共轭复数，化简分母实数化即可。

2. 若集合  $A = \{x | 2x - 1 > 0\}$ ,  $B = \{x | |x| < 1\}$ , 则  $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 $\left\{x | \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

【解析】由集合A可得： $x > \frac{1}{2}$ , 由集合B可得： $-1 < x < 1$ , 所以,  $A \cap B =$

$\left\{x | \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

【点评】本题考查集合的概念和性质的运用，同时考查了一元一次不等式和绝对值不等式的解法，解决此类问题，首先分清集合的元素的构成，然后，借助于数轴可得。

3. 函数  $f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & 2 \\ -1 & \cos x \end{vmatrix}$  的最小正周期是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 $\pi$

【解析】根据题得： $f(x) = \sin x \cos x + 2 = \frac{1}{2} \sin 2x + 2$

【点评】本题主要考查行列式的基本运算、三角函数的周期性、二倍角公式.考纲中明确规定要求掌握二阶行列式的运算性质，属于容易题，难度较小.

4. 若  $\vec{d} = (2, 1)$  是直线  $l$  的一个方向向量，则  $l$  的倾斜角的大小为  $\underline{\hspace{2cm}}$   
(结果用反三角函数值表示).

【答案】 $\arctan \frac{1}{2}$

【解析】设直线的倾斜角为  $\alpha$ , 则  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$ .

**【点评】**本题主要考查直线的方向向量、直线的倾斜角与斜率的关系、反三角函数的表示.直线的倾斜角的取值情况一定要注意，属于低档题，难度较小.

5.一个高为2的圆柱，底面周长为 $2\pi$ ，该圆柱的表面积为\_\_\_\_\_.

**【答案】** $6\pi$

**【解析】**根据该圆柱的底面周长得底面圆的半径为 $r=1$ ，所以该圆柱的表面积为：

$$S_{\text{圆柱表}} = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 4\pi + 2\pi = 6\pi.$$

**【点评】**本题主要考查空间几何体的表面积公式.审清题意，所求的为圆柱的表面积，不是侧面积，也不是体积，其次，对空间几何体的表面积公式要记准记牢，属于中低档题.

6.方程 $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ 的解是\_\_\_\_\_.

**【答案】** $\log_2 3$

**【解析】**根据方程 $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ ，化简得 $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$ ，令

$$2^x = t (t > 0),$$

则原方程可化为 $t^2 - 2t - 3 = 0$ ，解得 $t = 3$ 或 $t = -1$ (舍)，即

$2^x = 3$ ,  $x = \log_2 3$ . 所以原方程的解为 $\log_2 3$ .

**【点评】**本题主要考查指指数型方程、指数的运算、指数与对数形式的互化、换元法在求解数学问题中的运用.本题容易产生增根，要注意取舍，切勿随意处理，导致不必要的错误.本题属于中低档题目，难度适中.

7.有一列正方体，棱长组成以1为首项、 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，体积分别记为

$V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

**【答案】** $\frac{8}{7}$

**【解析】**由正方体的棱长组成以1为首项， $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，可知它们的体积则组成了一个以1为首项， $\frac{1}{8}$ 为公比的等比数列，因此，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \cdots + V_n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}.$$

**【点评】**本题主要考查无穷递缩等比数列的极限、等比数列的通项公式、等比数列的定义，考查知识较综合。

8. 在  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$  的二项式展开式中，常数项等于\_\_\_\_\_。

**【答案】** -20

**【解析】** 根据所给二项式的构成，构成的常数项只有一项，就是

$$T_4 = C_6^3 x^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 = -20.$$

**【点评】**本题主要考查二项式定理。对于二项式的展开式要清楚，特别注意常数项的构成，属于中档题。

9. 已知  $y = f(x)$  是奇函数，若  $g(x) = f(x) + 2$  且  $g(1) = 1$ ，则  $g(-1) =$  \_\_\_\_\_。

**【答案】** 3

**【解析】** 因为函数  $y = f(x)$  为奇函数，所以有  $f(-x) = -f(x)$ ，即

$g(1) = f(1) + 2$ , 又  $g(1) = 1$ , 所以,  $f(1) = -1$ ,

$f(-1) = -f(1) = 1$ ,  $g(-1) = f(-1) + 2 = 1 + 2 = 3$ .

**【点评】**本题主要考查函数的奇偶性，在运用此性质解题时要注意：函数  $y = f(x)$  为奇函数，所以有  $f(-x) = -f(x)$  这个条件的运用，平时要加强这方面的训练，本题属于中档题，难度适中。

10. 满足约束条件  $|x| + 2|y| \leq 2$  的目标函数  $z = y - x$  的最小值是\_\_\_\_\_。

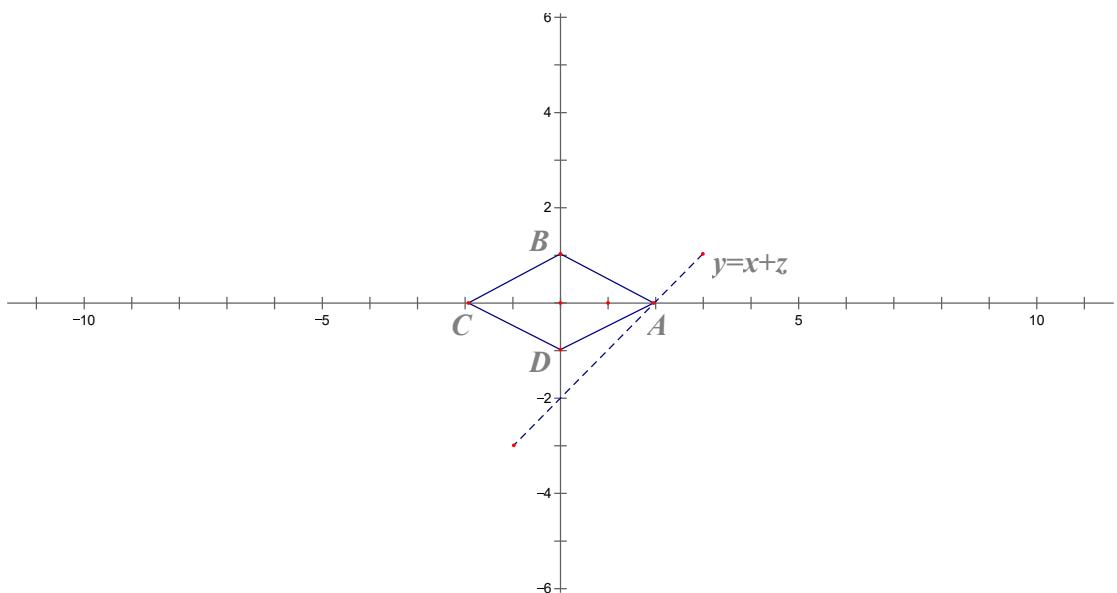
**【答案】** -2

**【解析】** 根据题意得到  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + 2y \leq 2; \end{cases}$  或  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \\ x - 2y \leq 2; \end{cases}$  或  $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ -x + 2y \leq 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ x + 2y \geq -2. \end{cases}$$

其可行域为平行四边形  $ABCD$  区域，（包括边界）目标函数可以化成  $y = x + z$ ，

$Z$  的最小值就是该直线在  $y$  轴上截距的最小值，当该直线过点  $A(2,0)$  时， $Z$  有最小值，此时  $Z_{\min} = -2$ 。



**【点评】**本题主要考查线性规划问题，准确画出可行域，找到最优解，分析清楚当该

直线过点  $A(2,0)$  时， $Z$  有最小值，此时  $Z_{\min} = -2$

，这是解题的关键，本题属于中档题，难度适中。

11.三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人只选择一个项目，则有且仅有两位同学选择的项目相同的概率是\_\_\_\_（结果用最简分数表示）。

**【答案】** $\frac{2}{3}$

**【解析】**一共有27种取法，其中有且只有两个人选择相同的项目的取法共有18种，所以根据古典概型得到此种情况下的概率为  $\frac{2}{3}$ 。

**【点评】**本题主要考查排列组合概率问题、古典概型。要分清基本事件数和基本事件总

数.本题属于中档题.

12.在矩形 $ABCD$ 中, 边 $AB$ 、 $AD$ 的长分别为2、1, 若 $M$ 、 $N$ 分别是边 $BC$ 、

$CD$ 上的点, 且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$ , 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围是\_\_\_\_\_

【答案】[1,4]

【解析】以向量 $AB$ 所在直线为 $x$ 轴, 以向量 $AD$ 所在直线为 $y$ 轴建立平面直角坐标系

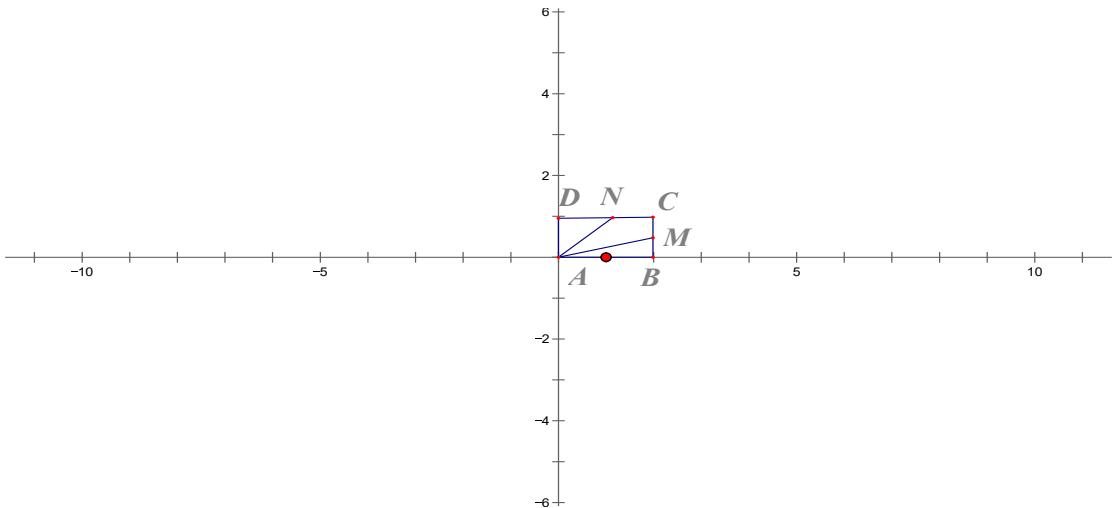
, 如图所示, 因为 $AB = 2, AD = 1$ , 所以 $A(0,0), B(2,0), C(2,1)D(0,1)$ . 设

$M(2,b), N(x,1), (0 \leq x \leq 2)$ , 根据题意,  $b = \frac{2-x}{2}$ , 所以

$$\vec{AN} = (x, 1), \vec{AM} = \left(2, \frac{2-x}{2}\right).$$

所以 $\vec{AM} \bullet \vec{AN} = \frac{3}{2}x + 1 (0 \leq x \leq 2)$ , 所以 $1 \leq \frac{3}{2}x + 1 \leq 4$ , 即

$$1 \leq \vec{AM} \bullet \vec{AN} \leq 4.$$



【点评】本题主要考查平面向量的基本运算、概念、平面向量的数量积的运算律.做题时, 要切实注意条件的运用.本题属于中档题, 难度适中.

13.已知函数 $y = f(x)$ 的图像是折线段 $ABC$ , 其中 $A(0,0)、B(\frac{1}{2},1)、C(1,0)$

, 函数 $y = xf(x) (0 \leq x \leq 1)$ 的图像与 $x$ 轴围成的图形的面积为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{1}{4}$

**【解析】** 根据题意，得到  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

从而得到  $y = xf(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$  所以围成的面积为

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-2x^2 + 2x) dx = \frac{1}{4}, \text{ 所以围成的图形的面积为 } \frac{1}{4}.$$

**【点评】** 本题主要考查函数的图象与性质，函数的解析式的求解方法、定积分在求解平面图形中的运用.突出体现数形结合思想，本题综合性较强，需要较强的分析问题和解决问题的能力，在以后的练习中加强这方面的训练，本题属于中高档试题，难度较大。

14. 已知  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ，各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ， $a_{n+2} = f(a_n)$ ，

若  $a_{2010} = a_{2012}$ ，则  $a_{20} + a_{11}$  的值是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{3+13\sqrt{5}}{26}$

**【解析】** 据题  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ，并且  $a_{n+2} = f(a_n)$ ，得到  $a_{n+2} = \frac{1}{1+a_n}$ ，

$a_1 = 1$ ， $a_3 = \frac{1}{2}$ ， $a_{2010} = a_{2012}$ ，得到  $\frac{1}{1+a_{2010}} = a_{2010}$ ，解得

$a_{2010} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (负值舍去).依次往前推得到

$a_{20} + a_{11} = \frac{3+13\sqrt{5}}{26}$ .

**【点评】** 本题主要考查数列的概念、组成和性质、同时考查函数的概念.理解条件

$a_{n+2} = f(a_n)$  是解决问题的关键，本题综合性强，运算量较大，属于中高档试题。

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）

15. 若  $1 + \sqrt{2}i$  是关于  $x$  的实系数方程  $x^2 + bx + c = 0$  的一个复数根，则（ ）

- A.  $b = 2, c = 3$     B.  $b = 2, c = -1$     C.  $b = -2, c = -1$     D.  $b = -2, c = 3$

**【答案】D**

**【解析】** 根据实系数方程的根的特点知  $1 - \sqrt{2}i$  也是该方程的另一个根，所以

$$1 + \sqrt{2}i + 1 - \sqrt{2}i = 2 = -b, \text{ 即 } b = -2, (1 - \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{2}i) = 3 = c, \text{ 故答}$$

案选择D。

**【点评】** 本题主要考查实系数方程的根的问题及其性质、复数的代数形式的四则运算。

属于中档题，注重对基本知识和基本技巧的考查，复习时要特别注意。

16. 对于常数  $m$ 、 $n$ ，“ $mn > 0$ ”是“方程  $mx^2 + ny^2 = 1$  的曲线是椭圆”的（ ）

- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件    D. 既不充分也不必要条件

**【答案】B**

**【解析】** 方程  $mx^2 + ny^2 = 1$  的曲线表示椭圆，常数常数  $m, n$  的取值为  $\begin{cases} m > 0, \\ n > 0, \\ m \neq n, \end{cases}$  所

以，由  $mn > 0$  得不到程  $mx^2 + ny^2 = 1$  的曲线表示椭圆，因而不充分；反过来，根据该曲线表示椭圆，能推出  $mn > 0$ ，因而必要。所以答案选择B。

**【点评】** 本题主要考查充分条件和必要条件、充要条件、椭圆的标准方程的理解。根据方程的组成特征，可以知道常数  $m, n$  的取值情况。属于中档题。

17. 在  $\triangle ABC$  中，若  $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$ ，则  $\triangle ABC$  的形状是（ ）

- A. 钝角三角形    B. 直角三角形    C. 锐角三角形    D. 不能确定

**【答案】A**

**【解析】** 由正弦定理，得  $\frac{a}{2R} = \sin A, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2R} = \sin C$ ，代入得到

$$a^2 + b^2 < c^2,$$

由余弦定理的推得  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$ , 所以C为钝角, 所以该三角形为钝角三角形. 故选择A.

**【点评】**本题主要考查正弦定理及其推理、余弦定理的运用. 主要抓住所给式子的结构来选择定理, 如果出现了角度的正弦值就选择正弦定理, 如果出现角度的余弦值就选择余弦定理. 本题属于中档题.

18. 若  $S_n = \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \dots + \sin \frac{n\pi}{7}$  ( $n \in N^*$ ), 则在  $S_1, S_2, \dots, S_{100}$  中,

正数的个数是 ( )

- A. 16      B. 72      C. 86      D. 100

**【答案】C**

**【解析】**依据正弦函数的周期性, 可以找其中等于零或者小于零的项.

**【点评】**本题主要考查正弦函数的图象和性质和间接法解题. 解决此类问题需要找到规律, 从题目出发可以看出来相邻的14项的和为0, 这就是规律, 考查综合分析问题和解决问题的能力.

三、解答题 (本大题共有5题, 满分74分)

19. 如图, 在三棱锥P-ABC中,  $PA \perp$  底面ABC, D是

$PC$ 的中点. 已知  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ ,  $AB=2$ ,  $AC=2\sqrt{3}$ ,

$PA=2$ . 求:

- (1) 三棱锥P-ABC的体积; (6分)
- (2) 异面直线BC与AD所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示). (6分)

[解] (1)  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ , 2分

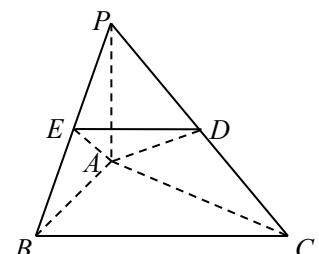
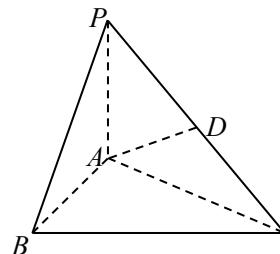
三棱锥P-ABC的体积为

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \times PA = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \quad 6分$$

(2) 取PB的中点E, 连接DE、AE, 则

$ED \parallel BC$ , 所以  $\angle ADE$  (或其补角) 是异面直线BC与AD所成的角. 8分

在三角形ADE中,  $DE=2$ ,  $AE=\sqrt{2}$ ,  $AD=2$ ,



$$\cos \angle ADE = \frac{2^2 + 2^2 - 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } \angle ADE = \arccos \frac{3}{4}.$$

因此，异面直线BC与AD所成的角的大小是  $\arccos \frac{3}{4}$ .

12分

**【点评】**本题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力。综合考查空间中两条异面直线所成的角的求解，同时考查空间几何体的体积公式的运用。本题源于《必修2》立体几何章节复习题，复习时应注重课本，容易出现找错角的情况，要考虑全面，考查空间想象能力，属于中档题。

20. 已知函数  $f(x) = \lg(x+1)$ .

(1) 若  $0 < f(1-2x) - f(x) < 1$ ，求  $x$  的取值范围；(6分)

(2) 若  $g(x)$  是以2为周期的偶函数，且当  $0 \leq x \leq 1$  时，有  $g(x) = f(x)$ ，求函数

$y = g(x)$  ( $x \in [1, 2]$ ) 的反函数。(8分)

[解] (1) 由  $\begin{cases} 2-2x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ ，得  $-1 < x < 1$ .

由  $0 < \lg(2-2x) - \lg(x+1) = \lg \frac{2-2x}{x+1} < 1$  得  $1 < \frac{2-2x}{x+1} < 10$ .  
.....3分

因为  $x+1 > 0$ ，所以  $x+1 < 2-2x < 10x+10$ ， $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$ .

由  $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3} \end{cases}$  得  $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$ .  
.....6分

(2) 当  $x \in [1, 2]$  时， $2-x \in [0, 1]$ ，因此

$$y = g(x) = g(x-2) = g(2-x) = f(2-x) = \lg(3-x).$$

.....10分

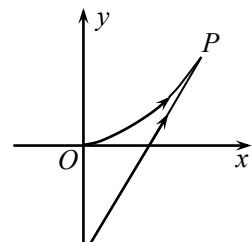
由单调性可得  $y \in [0, \lg 2]$ .

因为  $x = 3 - 10^y$ ，所以所求反函数是  $y = 3 - 10^x$ ， $x \in [0, \lg 2]$ .  
.....14分

**【点评】**本题主要考查函数的概念、性质等基础知识以及数形结合思想，熟练掌握指数函数、对数函数、幂函数的图象与性质是关键，属于中档题。

21. 海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为  $y$  轴

正方向建立平面直角坐标系（以1海里为单位长度），则救援船恰在失事船的正南方向  
12海



里A处, 如图. 现假设: ①失事船的移动路径可视为抛物线

$$y = \frac{12}{49}x^2; \quad ②\text{定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援; } ③\text{救}$$

援船出发  $t$  小时后, 失事船所在位置的横坐标为  $7t$ .

(1) 当  $t = 0.5$  时, 写出失事船所在位置P的纵坐标. 若此时两船恰好会合, 求救援船速度的大小和方向; (6分)

(2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船? (8分)

[解] (1)  $t = 0.5$  时, P的横坐标  $x_P = 7t = \frac{7}{2}$ , 代入抛物线方程  $y = \frac{12}{49}x^2$  中, 得P的纵坐标  $y_P = 3$ . .....2分

由  $|AP| = \sqrt{\frac{949}{4}}$ , 得救援船速度的大小为  $\sqrt{949}$  海里/时. .....4分

由  $\tan \angle OAP = \frac{\frac{7}{2}}{3+12} = \frac{7}{30}$ , 得  $\angle OAP = \arctan \frac{7}{30}$ , 故救援船速度的方向为北偏东  $\arctan \frac{7}{30}$  弧度. .....6分

(2) 设救援船的时速为  $v$  海里, 经过  $t$  小时追上失事船, 此时位置为  $(7t, 12t^2)$ .

由  $vt = \sqrt{(7t)^2 + (12t^2 + 12)^2}$ , 整理得  $v^2 = 144(t^2 + \frac{1}{t^2}) + 337$ . .....10分

因为  $t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 2$ , 当且仅当  $t=1$  时等号成立,

所以  $v^2 \geq 144 \times 2 + 337 = 25^2$ , 即  $v \geq 25$ .

因此, 救援船的时速至少是25海里才能追上失事船. .....14分

**【点评】**本题主要考查函数的概念、性质及导数等基础知识. 选择恰当的函数模型是解决此类问题的关键, 属于中档题. 考查灵活运算数形结合、分类讨论的思想方法进行探究、分析与解决问题的能力. 属于中档偏上题目, 也是近几年高考的热点问题.

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知双曲线  $C: 2x^2 - y^2 = 1$ .

(1) 设F是C的左焦点, M是C右支上一点.

若  $|MF|=2\sqrt{2}$ , 求过M点的坐标; (5分) (2) 过C的左顶点作C的两条渐近线的平行线, 求这两组平行线围成的平行四边形的

面积; (5分)

(3) 设斜率为  $k$  ( $|k| < \sqrt{2}$ ) 的直线  $l_2$  交C于P、Q两点, 若  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切,

求证:  $OP \perp OQ$ ; (6分)

[解] (1) 双曲线  $C: \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - y^2 = 1$ , 左焦点  $F(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ .

设  $M(x, y)$ , 则  $|MF|^2 = (x + \frac{\sqrt{6}}{2})^2 + y^2 = (\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2$ ,

.....2分

由M是右支上一点, 知  $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $|MF| = \sqrt{3x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$ , 得

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以  $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \pm\sqrt{2}\right)$ .

.....5分

(2) 左顶点  $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ , 渐近线方程:  $y = \pm\sqrt{2}x$ .

过  $A$  与渐近线  $y = \sqrt{2}x$  平行的直线方程为:  $y = \sqrt{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 即

$$y = \sqrt{2}x + 1.$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ y = \sqrt{2}x + 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

.....8分

所求平行四边形的面积为  $S = |OA||y| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . .....10分

(3) 设直线  $PQ$  的方程是  $y = kx + b$ . 因直线与已知圆相切, 故  $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ ,

$$\text{即 } b^2 = k^2 + 1 \quad (*).$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + b \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (2 - k^2)x^2 - 2kbx - b^2 - 1 = 0.$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2kb}{2-k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{-1-b^2}{2-k^2} \end{cases}.$$

$$y_1 y_2 = (kx_1 + b)(kx_2 + b), \text{ 所以}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (1 + k^2)x_1 x_2 + kb(x_1 + x_2) + b^2$$

$$\frac{(1+k^2)(-1-b^2)}{2-k^2} + \frac{2k^2 b^2}{2-k^2} = \frac{-1+b^2-k^2}{2-k^2}.$$

$$\text{由 (*) 知 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0, \text{ 所以 } OP \perp OQ. \quad \dots\dots 16\text{分}$$

**【点评】**本题主要考查双曲线的概念、标准方程、几何性质及其直线与双曲线的关系

. 特别要注意直线与双曲线的关系问题, 在双曲线当中, 最特殊的为等轴双曲线, 它

的离心率为  $\sqrt{2}$ , 它的渐近线为  $y = \pm x$ , 并且相互垂直, 这些性质的运用可以大大

节省解题时间, 本题属于中档题.

23. 对于项数为  $m$  的有穷数列数集  $\{a_n\}$ , 记  $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), 即  $b_k$

为  $a_1, a_2, \dots, a_k$  中的最大值, 并称数列  $\{b_n\}$  是  $\{a_n\}$  的控制数列. 如  $1, 3, 2, 5, 5$  的控制数列是

1, 3, 3, 5, 5.

(1) 若各项均为正整数的数列  $\{a_n\}$  的控制数列为 2, 3, 4, 5, 5, 写出所有的  $\{a_n\}$ ; (4 分)

(2) 设  $\{b_n\}$  是  $\{a_n\}$  的控制数列, 满足  $a_k + b_{m-k+1} = C$  ( $C$  为常数,  $k=1, 2, \dots, m$ )

求证:  $b_k = a_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ); (6分)

(3) 设  $m=100$ , 常数  $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ . 若  $a_n = an^2 - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n$ ,  $\{b_n\}$  是  $\{a_n\}$  的控制数列,

$$\text{求 } (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{100} - a_{100}).$$

[解] (1) 数列  $\{a_n\}$  为: 2, 3, 4, 5, 1; 2, 3, 4, 5, 2; 2, 3, 4, 5, 3;

2, 3, 4, 5, 4; 2, 3, 4, 5, 5. ....4分

(2) 因为  $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $b_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ ,

所以  $b_{k+1} \geq b_k$ . ....6分

因为  $a_k + b_{m-k+1} = C$ ,  $a_{k+1} + b_{m-k} = C$ ,

所以  $a_{k+1} - a_k = b_{m-k+1} - b_{m-k} \geq 0$ , 即  $a_{k+1} \geq a_k$ .

.....8分

因此,  $b_k = a_k$ . ....10分

(3) 对  $k=1, 2, \dots, 25$ ,  $a_{4k-3} = a(4k-3)^2 + (4k-3)$ ;

$a_{4k-2} = a(4k-2)^2 + (4k-2)$ ;

$a_{4k-1} = a(4k-1)^2 - (4k-1)$ ;  $a_{4k} = a(4k)^2 - (4k)$ .

比较大小, 可得  $a_{4k-2} > a_{4k-3}$ . ....12分

因为  $\frac{1}{2} < a < 1$ , 所以  $a_{4k-1} - a_{4k-2} = (a-1)(8k-3) < 0$ , 即

$$a_{4k-2} > a_{4k-1};$$

$$a_{4k} - a_{4k-2} = 2(2a-1)(4k-1) > 0, \text{ 即}$$

$$a_{4k} > a_{4k-2}.$$

$$\forall a_{4k+1} > a_{4k},$$

$$\text{从而 } b_{4k-3} = a_{4k-3}, \quad b_{4k-2} = a_{4k-2}, \quad b_{4k-1} = a_{4k-2}, \quad b_{4k} = a_{4k}.$$

.....15分

$$\text{因此 } (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{100} - a_{100})$$

=

$$(b_3 - a_3) + (b_7 - a_7) + (b_{10} - a_{10}) + \cdots + (b_{4k-1} - a_{4k-1}) + \cdots + (b_{99} - a_{99})$$

=

$$(a_2 - a_3) + (a_6 - a_7) + (a_9 - a_{10}) + \cdots + (a_{4k-2} - a_{4k-1}) + \cdots + (a_{98} - a_{99})$$

$$= \sum_{k=1}^{25} (a_{4k-2} - a_{4k-1}) = (1-a) \sum_{k=1}^{25} (8k-3) = 2525(1-a).$$

.....18分

**【点评】**本题主要考查数列的通项公式、等差、等比数列的基本性质等基础知识，本题属于信息给予题，通过定义“控制”数列，考查考生分析探究及推理论证的能力。综合考查数列的基本运算，数列问题一直是近几年的命题重点内容，应引起足够的重视。