

## 2015年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

### 数学（理科）

一、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

1、设全集  $U = \mathbb{R}$ . 若集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$ , 则  $A \cap \complement_U B =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\{1, 4\}$

【解析】 因为  $\complement_U B = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < 2\}$ , 所以  $A \cap \complement_U B = \{1, 4\}$

【考点定位】 集合运算

2、若复数  $z$  满足  $3z + \bar{z} = 1 + i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$

【解析】 设  $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ , 则  $3(a + bi) + a - bi = 1 + i \Rightarrow 4a = 1 \text{ 且 } 2b = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$

【考点定位】 复数相等, 共轭复数

3、若线性方程组的增广矩阵为  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$ , 解为  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ , 则  $c_1 - c_2 =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 16

【解析】 由题意得:  $c_1 = 2x + 3y = 2 \times 3 + 3 \times 5 = 21, c_2 = 0 \cdot x + y = 5, c_1 - c_2 = 21 - 5 = 16$ .

【考点定位】 线性方程组的增广矩阵

4、若正三棱柱的所有棱长均为  $a$ , 且其体积为  $16\sqrt{3}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 4

【解析】  $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 16\sqrt{3} \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$

【考点定位】 正三棱柱的体积

5、抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上的动点  $Q$  到焦点的距离的最小值为1, 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 2

【解析】 因为抛物线上动点到焦点的距离为动点到准线的距离, 因此抛物线上动点到焦点的最短距离为顶点到准线的距离, 即  $\frac{p}{2} = 1, p = 2$ . 学科网

【考点定位】抛物线定义

6、若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为  $2\pi$ ，则其母线与轴的夹角的大小为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{\pi}{3}$

【解析】由题意得： $\pi rl : (\frac{1}{2}h \cdot 2r) = 2\pi \Rightarrow l = 2h \Rightarrow$  母线与轴的夹角为  $\frac{\pi}{3}$

【考点定位】圆锥轴截面

7、方程  $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$  的解为\_\_\_\_\_.

【答案】 2

【解析】设  $3^{x-1} = t, (t > 0)$ ，则  $\log_2(t^2 - 5) = \log_2(t - 2) + 2 \Rightarrow t^2 - 5 = 4(t - 2) > 0$

$\Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0, t > \sqrt{5} \Rightarrow t = 3 \Rightarrow 3^{x-1} = 3 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$  学科网

【考点定位】解指数不等式

8、在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中，选取 5 人参加义务献血，要求男、女教师都有，则不同的选取方式的种数为\_\_\_\_\_（结果用数值表示）.

【答案】 120

【解析】由题意得，去掉选 5 名女教师情况即可： $C_9^5 - C_6^5 = 126 - 6 = 120$ .

【考点定位】排列组合

9、已知点 P 和 Q 的横坐标相同，P 的纵坐标是 Q 的纵坐标的 2 倍，P 和 Q 的轨迹分别为

双曲线  $C_1$  和  $C_2$ . 若  $C_1$  的渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{3}x$ ，则  $C_2$  的渐近线方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

【解析】由题意得： $C_1: 3x^2 - y^2 = \lambda, (\lambda \neq 0)$ ，设  $Q(x, y)$ ，则  $P(x, 2y)$ ，所以  $3x^2 - 4y^2 = \lambda$ ，即  $C_2$  的渐

近线方程为  $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

【考点定位】双曲线渐近线

10、设  $f^{-1}(x)$  为  $f(x) = 2^{x-2} + \frac{x}{2}$ ， $x \in [0, 2]$  的反函数，则  $y = f(x) + f^{-1}(x)$  的最大值为\_\_\_\_\_.

【答案】4

【解析】由题意得： $f(x) = 2^{x-2} + \frac{x}{2}$  在  $[0, 2]$  上单调递增，值域为  $[\frac{1}{4}, 2]$ ，所以  $f^{-1}(x)$  在  $[\frac{1}{4}, 2]$  上单调递增，因此  $y = f(x) + f^{-1}(x)$  在  $[\frac{1}{4}, 2]$  上单调递增，其最大值为  $f(2) + f^{-1}(2) = 2 + 2 = 4$ .

【考点定位】反函数性质

11、在  $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$  的展开式中， $x^2$  项的系数为\_\_\_\_\_（结果用数值表示）.

【答案】45

【解析】因为  $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10} = \left((1+x) + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10} = (1+x)^{10} + C_{10}^1(1+x)^9 \frac{1}{x^{2015}} + \dots$ ，所以  $x^2$  项只能在  $(1+x)^{10}$  展开式中，即为  $C_{10}^8 x^2$ ，系数为  $C_{10}^8 = 45$ .

【考点定位】二项展开式

12、赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是：赌客先在标记有1，2，3，4，5的卡片中随机摸取一张，将卡片上的数字作为其赌金（单位：元）；随后放回该卡片，再随机摸取两张，将这两张卡片上数字之差的绝对值的1.4倍作为其奖金（单位：元）. 若随机变量  $\xi_1$  和  $\xi_2$  分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金，则  $E\xi_1 - E\xi_2 =$  \_\_\_\_\_（元）.

【答案】0.2

【解析】赌金的分布列为

$\xi_1$	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以  $E\xi_1 = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$

奖金的分布列为

$\xi_2$	1.4	2.8	4.2	5.6
P	$\frac{4}{C_5^2} = \frac{2}{5}$	$\frac{3}{C_5^2} = \frac{3}{10}$	$\frac{2}{C_5^2} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

所以  $E\xi_2 = 1.4 \times (\frac{2}{5} \times 1 + \frac{3}{10} \times 2 + \frac{1}{5} \times 3 + \frac{1}{10} \times 4) = 2.8$

$E\xi_1 - E\xi_2 = 0.2$

13、已知函数  $f(x) = \sin x$ . 若存在  $x_1, x_2, \dots, x_m$  满足  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$ ,

且

$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| = 12$  ( $m \geq 2, m \in \mathbb{N}^*$ ), 则

$m$  的最小值

为\_\_\_\_\_.

【答案】8

【解析】因为  $f(x) = \sin x$ , 所以  $|f(x_m) - f(x_n)| \leq f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = 2$ , 因此要使得满足条件

$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| = 12$  的  $m$  最小, 须取

$x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{3\pi}{2}, x_4 = \frac{5\pi}{2}, x_5 = \frac{7\pi}{2}, x_6 = \frac{9\pi}{2}, x_7 = \frac{11\pi}{2}, x_8 = 6\pi$ , 即  $m = 8$ .

【考点定位】三角函数性质

14、在锐角三角形 ABC 中,  $\tan A = \frac{1}{2}$ , D 为边 BC 上的点,  $\triangle ABD$  与  $\triangle ACD$  的面积

分别为 2 和 4. 过 D 作  $DE \perp AB$  于 E,  $DF \perp AC$  于 F, 则  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 $-\frac{16}{15}$

$$\overline{DE} \cdot \overline{DF} = DE \cdot DF \cdot \cos(\pi - A) = \frac{32}{12\sqrt{5}} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{16}{15}$$

二、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

D. 既非充分又非必要条件

**【考点定位】**复数概念，充要关系

D.  $\frac{13}{2}$

$$\frac{13}{2}$$

，其中  $a_1, a_2, a_3$  是正实数. 当  $a_1, a_2, a_3$  成等比数列时，下列选项中，能推出方程

③无实根的是 ( )

- A. 方程①有实根, 且②有实根  
B. 方程①有实根, 且②无实根  
C. 方程①无实根, 且②有实根  
D. 方程①无实根, 且②无实根

【答案】B

【解析】当方程①有实根, 且②无实根时,  $a_1^2 \geq 4, a_2^2 < 8$ , 从而  $a_3^2 = \frac{a_2^4}{a_1^2} < \frac{8^2}{4} = 16$ , 即方程

③:  $x^2 + a_3x + 4 = 0$  无实根, 选B. 而A,D由于不等式方向不一致, 不可推; C推出③有实根

【考点定位】不等式性质

18、设  $P_n(x_n, y_n)$  是直线  $2x - y = \frac{n}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 与圆  $x^2 + y^2 = 2$  在第一象限的交点,

则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = ( )$

- A. -1  
B.  $-\frac{1}{2}$   
C. 1  
D. 2

【答案】A

【解析】学科网由题意得: 因为  $2x - y = 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 2$  在第一象限的交点为(1,1), 所以

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y'_n}{x'_n}$ , 又由  $x_n^2 + y_n^2 = 2$  得

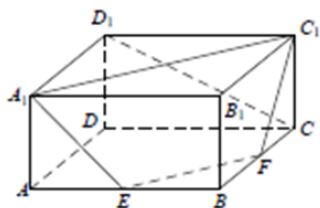
$2x_n x'_n + 2y_n y'_n = 0 \Rightarrow \frac{y'_n}{x'_n} = -\frac{x_n}{y_n} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y'_n}{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{x_n}{y_n}\right) = -\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = -1$ . 选 A.

【考点定位】极限

三、解答题: 本大题共6小题, 共75分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

19、(本题满分12分) 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 1$ ,  $AB = AD = 2$

, E、F 分别是 AB、BC 的中点. 证明  $A_1$ 、 $C_1$ 、F、E 四点共面, 并求直线  $CD_1$  与平面  $A_1C_1FE$  所成的角的大小.



【答案】 $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{15}$

【解析】解：如图，以  $D$  为原点建立空间直角坐标系，可得有关点的坐标为  $A_1(2,0,1)$ 、 $C_1(0,2,1)$ 、 $E(2,1,0)$ 、 $F(1,2,0)$ 、 $C(0,2,0)$ 、 $D_1(0,0,1)$ 。

因为  $\overrightarrow{A_1C_1} = (-2, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0)$ ，

所以  $\overrightarrow{A_1C_1} // \overrightarrow{EF}$ ，因此直线  $A_1C_1$  与  $EF$  共面，

即  $A_1$ 、 $C_1$ 、 $F$ 、 $E$  共面。

设平面  $A_1C_1EF$  的法向量为  $\vec{n} = (u, y, w)$ ，则  $\vec{n} \perp \overrightarrow{EF}$ ， $\vec{n} \perp \overrightarrow{FC_1}$ ，

又  $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{FC_1} = (-1, 0, 1)$ ，

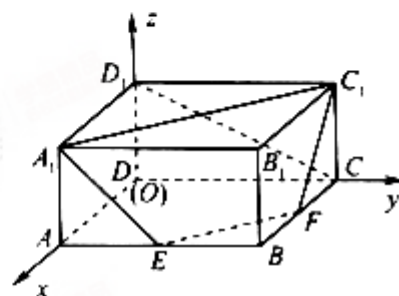
故  $\begin{cases} -u + v = 0 \\ -u + w = 0 \end{cases}$ ，解得  $u = v = w$ 。

取  $u = 1$ ，得平面  $A_1C_1FE$  的一个法向量  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ 。又  $\overrightarrow{CD_1} = (0, -2, 1)$ ，

故  $\frac{\overrightarrow{CD_1} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CD_1}| |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ 。

因此直线  $CD_1$  与平面  $A_1C_1FE$  所成的角的大小为  $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{15}$ 。

【考点定位】空间向量求线面角



20、（本题满分14分）本题共有2小题，第小题满分6分，第小题满分8分

如图， $A$ ， $B$ ， $C$  三地有直道相通， $AB = 5$  千米， $AC = 3$  千米， $BC = 4$  千米。现甲、

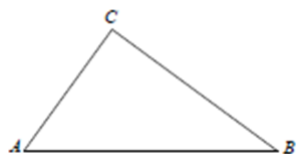
乙两警员同时从  $A$  地出发匀速前往  $B$  地，经过  $t$  小时，他们之间的距离为  $f(t)$ （单位：

千米）。甲的路线是  $AB$ ，速度为 5 千米/小时，乙的路线是  $ACB$ ，速度为 8 千米/小时。乙

到达  $B$  地后原地等待。设  $t = t_1$  时乙到达  $C$  地。

(1) 求  $t_1$  与  $f(t_1)$  的值;

(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是3千米. 当  $t_1 \leq t \leq 1$  时, 求  $f(t)$  的表达式, 并判断  $f(t)$  在  $[t_1, 1]$  上得最大值是否超过3? 说明理由.



【答案】 (1)  $t_1 = \frac{3}{8}$ ,  $f(t_1) = \frac{3}{8}\sqrt{41}$  (2)  $f(t) = \begin{cases} \sqrt{25t^2 - 42t + 18}, & \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8} \\ 5 - 5t, & \frac{7}{8} < t \leq 1 \end{cases}$  , 不超过

3.

【解析】解: (1)  $t_1 = \frac{3}{8}$ .

记乙到C时甲所在地为D, 则  $AD = \frac{15}{8}$  千米.

在  $\triangle ACD$  中,  $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos A$ ,

所以  $f(t_1) = CD = \frac{3}{8}\sqrt{41}$  (千米).

(2) 甲到达B用时1小时; 乙到达C用时  $\frac{3}{8}$  小时, 从A到B总用时  $\frac{7}{8}$  小时.

当  $t_1 = \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8}$  时,

$$f(t) = \sqrt{(7-8t)^2 + (5-5t)^2 - 2(7-8t)(5-5t) \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{25t^2 - 42t + 18};$$

当  $\frac{7}{8} \leq t \leq 1$  时,  $f(t) = 5 - 5t$ .

$$\text{所以 } f(t) = \begin{cases} \sqrt{25t^2 - 42t + 18}, & \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8} \\ 5 - 5t, & \frac{7}{8} < t \leq 1 \end{cases}.$$

因为  $f(t)$  在  $\left[\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right]$  上的最大值是  $f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3\sqrt{41}}{8}$ ,  $f(t)$  在  $\left[\frac{7}{8}, 1\right]$  上的最大值是



$f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{5}{8}$ , 所以  $f(t)$  在  $\left[\frac{3}{8}, 1\right]$  上的最大值是  $\frac{3\sqrt{41}}{8}$ , 不超过 3.

【考点定位】余弦定理

21、(本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题6分, 第2小题8分.

已知椭圆  $x^2 + 2y^2 = 1$ , 过原点的两条直线  $l_1$  和  $l_2$  分别于椭圆交于 A、B 和 C、D, 记得到的平行四边形 ABCD 的面积为  $S$ .

(1) 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$ , 用 A、C 的坐标表示点 C 到直线  $l_1$  的距离, 并证明

$$S = 2|x_1y_1 - x_2y_1|;$$

(2) 设  $l_1$  与  $l_2$  的斜率之积为  $-\frac{1}{2}$ , 求面积  $S$  的值.

【答案】(1) 详见解析 (2)  $S = \sqrt{2}$

【解析】证明: (1) 直线  $l_1: y_1x - x_1y = 0$ , 点 C 到  $l_1$  的距离  $d = \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ .

$$|AB| = 2|OA| = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

$$\text{所以 } S = 2S_{\triangle ABC} = 2 \times \frac{1}{2} |AB| \cdot d = 2|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

解: (2) 设  $l_1: y = kx$ , 则  $l_2: y = -\frac{1}{2k}x$ . 设

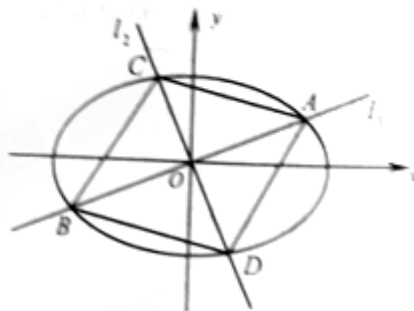
$A(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } x_1^2 = \frac{1}{1+2k^2}.$$

$$\text{同理 } x_2^2 = \frac{1}{1+2\left(-\frac{1}{2k}\right)^2} = \frac{2k^2}{2k^2+1}.$$

$$\text{由 (1), } S = 2|x_1y_2 - x_2y_1| = 2\left|\frac{x_1 \cdot x_2}{2k} + x_2 \cdot kx_1\right| = \frac{2k^2+1}{|k|} \cdot |x_1x_2| = \frac{(2k^2+1)\sqrt{2}|k|}{|k|\sqrt{1+2k^2} \cdot \sqrt{2k^2+1}},$$

整理得  $S = \sqrt{2}$ .



22、(本题满分16分) 本题共有3个小题. 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) 若 $b_n=3n+5$ , 且 $a_1=1$ , 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 $n_0$ 项是最大项, 即 $a_{n_0} > a_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的第 $n_0$ 项是最大项;

(3) 设 $a_1=\lambda < 0$ ,  $b_n=\lambda^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 求 $\lambda$ 的取值范围, 使得 $\{a_n\}$ 有最大值 $M$ 与最小值 $m$ , 且 $\frac{M}{m} \in (-2, 2)$ .

【答案】 (1)  $a_n=6n-5$  (2) 详见解析 (3)  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

【解析】解: (1) 由 $b_{n+1}-b_n=3$ , 得 $a_{n+1}-a_n=6$ ,

所以 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公差为6的等差数列,

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=6n-5$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

证明: (2) 由 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$ , 得 $a_{n+1}-2b_{n+1}=a_n-2b_n$ .

所以 $\{a_n-2b_n\}$ 为常数列,  $a_n-2b_n=a_1-2b_1$ , 即 $a_n=2b_n+a_1-2b_1$ .

因为 $a_{n_0} \geq a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 所以 $2b_{n_0}+a_1-2b_1 \geq 2b_n+a_1-2b_1$ , 即 $b_{n_0} \geq b_n$ .

故 $\{b_n\}$ 的第 $n_0$ 项是最大项. 学科网

解: (3) 因为 $b_n=\lambda^n$ , 所以 $a_{n+1}-a_n=2(\lambda^{n+1}-\lambda^n)$ ,

当 $n \geq 2$ 时,  $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$$=2(\lambda^n-\lambda^{n-1})+2(\lambda^{n-1}-\lambda^{n-2})+\cdots+2(\lambda^2-\lambda)+\lambda$$

$$=2\lambda^n-\lambda.$$

当 $n=1$ 时,  $a_1=\lambda$ , 符合上式.

所以 $a_n=2\lambda^n-\lambda$ .

因为 $\lambda > 0$ , 所以 $a_{2n}=2|\lambda|^{2n}-\lambda > -\lambda$ ,  $a_{2n-1}=2|\lambda|^{2n-1}-\lambda < -\lambda$ .

①当 $\lambda < -1$ 时, 由指数函数的单调性知,  $\{a_n\}$ 不存在最大、最小值;

②当  $\lambda = -1$  时,  $\{a_n\}$  的最大值为 3, 最小值为  $-1$ , 而  $\frac{3}{-1} \notin (-2, 2)$ ;

③当  $-1 < \lambda < 0$  时, 由指数函数的单调性知,  $\{a_n\}$  的最大值  $M = a_2 = 2\lambda^2 - \lambda$ , 最小值

$m = a_1 = \lambda$ , 由  $-2 < \frac{2\lambda^2 - \lambda}{\lambda} < 2$  及  $-1 < \lambda < 0$ , 得  $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$ .

综上,  $\lambda$  的取值范围是  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

【考点定位】等差数列, 数列单调性

23、(本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

对于定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $g(x)$ , 若存在正常数  $T$ , 使得  $\cos g(x)$  是以  $T$  为周期的函数, 则称  $g(x)$  为余弦周期函数, 且称  $T$  为其余弦周期. 已知  $f(x)$  是以  $T$  为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为  $\mathbf{R}$ . 设  $f(x)$  单调递增,  $f(0) = 0$ ,  $f(T) = 4\pi$ .

(1) 验证  $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$  是以  $6\pi$  为周期的余弦周期函数;

(2) 设  $a < b$ . 证明对任意  $c \in [f(a), f(b)]$ , 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = c$ ;

(3) 证明: “ $u_0$  为方程  $\cos f(x) = 1$  在  $[0, T]$  上得解”的充要条件是“ $u_0 + T$  为方程  $\cos f(x) = 1$  在  $[T, 2T]$  上有解”, 并证明对任意  $x \in [0, T]$  都有  $f(x+T) = f(x) + f(T)$ .

【答案】(1) 详见解析 (2) 详见解析 (3) 详见解析

【解析】证明：(1) 易见  $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$  的定义域为  $\mathbb{R}$ ，

对任意  $x \in \mathbb{R}$ ， $h(x+6\pi) = x+6\pi + \sin \frac{x+6\pi}{3} = h(x) + 6\pi$ ，

所以  $\cos h(x+6\pi) = \cos(h(x) + 6\pi) = \cos h(x)$ ，

即  $h(x)$  是以  $6\pi$  为余弦周期的余弦周期函数. 学科网

(2) 由于  $f(x)$  的值域为  $\mathbb{R}$ ，所以对任意  $c \in [f(a), f(b)]$ ， $c$  都是一个函数值，即有  $x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得

$f(x_0) = c$ 。

若  $x_0 < a$ ，则由  $f(x)$  单调递增得到  $c = f(x_0) < f(a)$ ，与  $c \in [f(a), f(b)]$  矛盾，所以  $x_0 \geq a$ 。同理可证  $x_0 \leq b$ 。故存在  $x_0 \in [a, b]$  使得  $f(x_0) = c$ 。

(3) 若  $u_0$  为  $\cos f(x) = 1$  在  $[0, T]$  上的解，则  $\cos f(u_0) = 1$ ，且  $u_0 + T \in [T, 2T]$ ，

$\cos f(u_0 + T) = \cos f(u_0) = 1$ ，即  $u_0 + T$  为方程  $\cos f(x) = 1$  在  $[T, 2T]$  上的解

同理，若  $u_0 + T$  为方程  $\cos f(x) = 1$  在  $[T, 2T]$  上的解，则  $u_0$  为该方程在  $[0, T]$  上的解。

以下证明最后一部分结论. 学科网

由 (2) 所证知存在  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = T$ ，使得  $f(x_i) = i\pi$ ， $i = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

而  $[x_i, x_{i+1}]$  是函数  $\cos f(x)$  的单调区间， $i = 0, 1, 2, 3$ 。

与之前类似地可以证明： $u_0$  是  $\cos f(x) = -1$  在  $[0, T]$  上的解当且仅当  $u_0 + T$  是  $\cos f(x) = -1$  在  $[T, 2T]$  上的解。从而  $\cos f(x) = \pm 1$  在  $[0, T]$  与  $[T, 2T]$  上的解的个数相同。

故  $f(x_i + T) = f(x_i) + 4\pi$ ， $i = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

对于  $x \in [0, x_1]$ ， $f(x) \in [0, \pi]$ ， $f(x+T) \in [4\pi, 5\pi]$ ，

而  $\cos f(x+T) = \cos f(x)$ ，故  $f(x+T) = f(x) + 4\pi = f(x) + f(T)$ 。

类似地，当  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ， $i = 1, 2, 3$  时，有  $f(x+T) = f(x) + f(T)$ 。

结论成立。

【考点定位】新定义问题

