2023 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\},A=\{1,3\},B=\{1,2,4\}$，则 $\complement_U B\cup A=$（　　）

A. $\{1,3,5\}$　　　　B. $\{1,3\}$　　　　C. $\{1,2,4\}$　　　　D. $\{1,2,4,5\}$

【答案】A

【解析】

【分析】对集合 B 求补集，应用集合的并运算求结果；

【详解】由 $\complement_U B=\{3,5\}$，而 $A=\{1,3\}$，

所以 $\complement_U B\cup A=\{1,3,5\}$.

故选：A

2. “$a^2=b^2$”是“$a^2+b^2=2ab$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据充分、必要性定义判断条件的推出关系，即可得答案.

【详解】由 $a^2=b^2$，则 $a=\pm b$，当 $a=-b\neq 0$ 时 $a^2+b^2=2ab$ 不成立，充分性不成立；

由 $a^2+b^2=2ab$，则 $(a-b)^2=0$，即 $a=b$，显然 $a^2=b^2$ 成立，必要性成立；

所以 $a^2=b^2$ 是 $a^2+b^2=2ab$ 的必要不充分条件.

故选：B

3. 若 $a=1.01^{0.5},b=1.01^{0.6},c=0.6^{0.5}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $c>a>b$　　　　B. $c>b>a$

C. $a>b>c$　　　　D. $b>a>c$

【答案】D

【解析】

【分析】根据对应幂、指数函数的单调性判断大小关系即可.

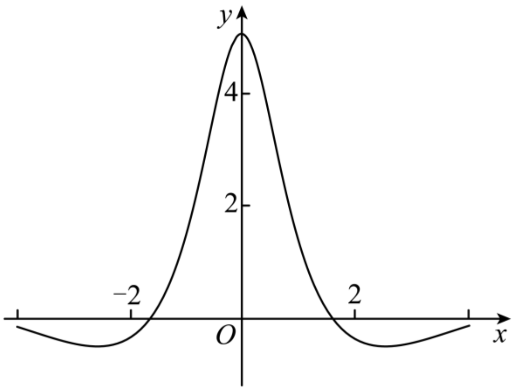
【详解】由 $y=1.01^x$ 在 R 上递增，则 $a=1.01^{0.5}<b=1.01^{0.6}$，

由 $y=x^{0.5}$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，则 $a=1.01^{0.5}>c=0.6^{0.5}$.

所以 $b>a>c$.

故选：D

4. 函数 $f\left(x\right)$ 的图象如下图所示，则 $f\left(x\right)$ 的解析式可能为（　　）



A. $\dfrac{5\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)}{x^2+2}$　　B. $\dfrac{5\sin x}{x^2+1}$

C. $\dfrac{5\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)}{x^2+2}$　　D. $\dfrac{5\cos x}{x^2+1}$

【答案】D

【解析】

【分析】由图知函数为偶函数，应用排除，先判断 B 中函数的奇偶性，再判断 A、C 中函数在 $(0,+\infty)$ 上的函数符号排除选项，即得答案.

【详解】由图知：函数图象关于 y 轴对称，其为偶函数，且 $f(-2)=f(2)<0$，

由 $\dfrac{5\sin(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{5\sin x}{x^2+1}$ 且定义域为 R，即 B 中函数为奇函数，排除；

当 $x>0$ 时 $\dfrac{5(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{x^2+2}>0$、$\dfrac{5(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{x^2+2}>0$，即 A、C 中 $(0,+\infty)$ 上函数值为正，排除；

故选：D

5. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的一条对称轴为直线 $x=2$，一个周期为 4，则 $f\left(x\right)$ 的解析式可能为（　　）

A. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$　　B. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

C. $\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ D. $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意分别考查函数的最小正周期和函数在 $x=2$ 处的函数值，排除不合题意的选项即可确定满足题意的函数解析式.

【详解】由函数的解析式考查函数的最小周期性：

A 选项中 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，B 选项中 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，

C 选项中 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$，D 选项中 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$，

排除选项 CD，

对于 A 选项，当 $x=2$ 时，函数值 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=0$，故 $(2,0)$ 是函数的一个对称中心，排除选项 A，

对于 B 选项，当 $x=2$ 时，函数值 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=-1$，故 $x=2$ 是函数的一条对称轴，

故选：B.

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_{n+1}=2S_n+2$，则 a_4 的值为（　　）

A. 3 B. 18 C. 54 D. 152

【答案】C

【解析】

【分析】由题意对所给的递推关系式进行赋值，得到关于首项、公比的方程组，求解方程组确定首项和公比的值，然后结合等比数列通项公式即可求得 a_4 的值.

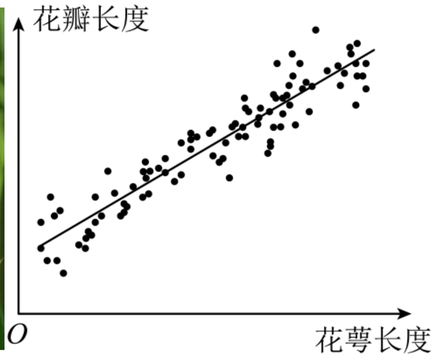
【详解】由题意可得：当 $n=1$ 时，$a_2=2a_1+2$，即 $a_1q=2a_1+2$， ①

当 $n=2$ 时，$a_3=2(a_1+a_2)+2$，即 $a_1q^2=2(a_1+a_1q)+2$， ②

联立①②可得 $a_1=2,q=3$，则 $a_4=a_1q^3=54$.

故选：C.

7. 调查某种群花萼长度和花瓣长度，所得数据如图所示，其中相关系数 $r=0.8245$，下列说法正确的是(　　)

A. 花瓣长度和花萼长度没有相关性

B. 花瓣长度和花萼长度呈现负相关

C. 花瓣长度和花萼长度呈现正相关

D. 若从样本中抽取一部分，则这部分的相关系数一定是0.8245

【答案】C

【解析】

【分析】根据散点图的特点可分析出相关性的问题，从而判断 ABC 选项，根据相关系数的定义可以判断 D 选项.

【详解】根据散点的集中程度可知，花瓣长度和花萼长度有相关性，A 选项错误

散点的分布是从左下到右上，从而花瓣长度和花萼长度呈现正相关性，B 选项错误，C 选项正确；

由于 $r = 0.8245$ 是全部数据的相关系数，取出来一部分数据，相关性可能变强，可能变弱，即取出的数据的相关系数不一定是0.8245，D 选项错误

故选：C

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，线段 PC 上的点 M 满足 $PM=\frac{1}{3}PC$，线段 PB 上的点 N 满足 $PN=\frac{2}{3}PB$，则三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

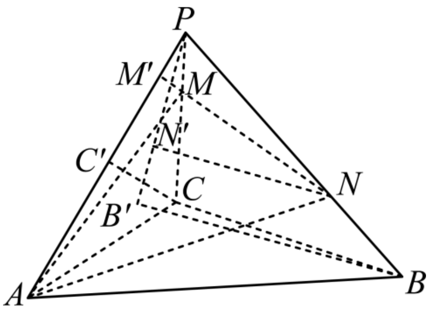
【答案】B

【解析】

【分析】分别过 M,C 作 $MM'\perp PA,CC'\perp PA$,垂足分别为 M',C'.过 B 作 $BB'\perp$ 平面 PAC，垂足为 B'，连接 PB',过 N 作 $NN'\perp PB'$,垂足为 N'.先证 $NN'\perp$ 平面 PAC，则可得到 $BB'//NN'$，再证 $MM'//CC'$.

由三角形相似得到 $\frac{MM'}{CC'}=\frac{1}{3}$，$\frac{NN'}{BB'}=\frac{2}{3}$，再由 $\frac{V_{P-AMN}}{V_{P-ABC}}=\frac{V_{N-PAM}}{V_{B-PAC}}$ 即可求出体积比.

【详解】如图，分别过M,C作$MM'\perp PA,CC'\perp PA$,垂足分别为M',C'.过B作$BB'\perp$平面PAC，垂足为B'，连接PB',过N作$NN'\perp PB'$,垂足为N'.



因为$BB'\perp$平面PAC，$BB'\subset$平面PBB'，所以平面$PBB'\perp$平面PAC.

又因为平面$PBB'\cap$平面$PAC=PB'$，$NN'\perp PB'$，$NN'\subset$平面PBB'，所以$NN'\perp$平面PAC，且$BB'//NN'$.

在$\triangle PCC'$中，因为$MM'\perp PA,CC'\perp PA$，所以$MM'//CC'$，所以$\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{MM'}{CC'}=\dfrac{1}{3}$，

在$\triangle PBB'$中，因为$BB'//NN'$，所以$\dfrac{PN}{PB}=\dfrac{NN'}{BB'}=\dfrac{2}{3}$，

所以$\dfrac{V_{P-AMN}}{V_{P-ABC}}=\dfrac{V_{N-PAM}}{V_{B-PAC}}=\dfrac{\frac{1}{3}S_{\triangle PAM}\cdot NN'}{\frac{1}{3}S_{\triangle PAC}\cdot BB'}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}PA\cdot MM'\right)\cdot NN'}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}PA\cdot CC'\right)\cdot BB'}=\dfrac{2}{9}$.

故选：B

9. 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$．过$F_2$作其中一条渐近线的垂线，垂足为$P$．已知$PF_2=2$，直线$PF_1$的斜率为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，则双曲线的方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$

C. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$

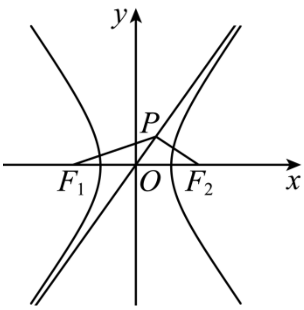
【答案】D

【解析】

【分析】先由点到直线的距离公式求出b，设$\angle POF_2=\theta$，由$\tan\theta=\dfrac{b}{|OP|}=\dfrac{b}{a}$得到$|OP|=a$，

$|OF_2|=c$.再由三角形的面积公式得到y_P，从而得到x_P，则可得到$\dfrac{a}{a^2+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，解出$a$，代入双曲线的方程即可得到答案.

【详解】如图，



因为$F_2(c,0)$，不妨设渐近线方程为$y=\dfrac{b}{a}x$，即$bx-ay=0$，

所以$|PF_2|=\dfrac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{bc}{c}=b$，

所以$b=2$.

设$\angle POF_2=\theta$,则$\tan\theta=\dfrac{|PF_2|}{|OP|}=\dfrac{b}{|OP|}=\dfrac{b}{a}$，所以$|OP|=a$，所以$|OF_2|=c$.

因为$\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}c\cdot y_P$,所以$y_P=\dfrac{ab}{c}$，所以$\tan\theta=\dfrac{y_P}{x_P}=\dfrac{\frac{ab}{c}}{x_P}=\dfrac{b}{a}$，所以$x_P=\dfrac{a^2}{c}$，

所以$P\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}\right)$，

因为$F_1(-c,0)$，

所以$k_{PF_1}=\dfrac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}+c}=\dfrac{ab}{a^2+c^2}=\dfrac{2a}{a^2+a^2+4}=\dfrac{a}{a^2+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以$\sqrt{2}\left(a^2+2\right)=4a$，解得$a=\sqrt{2}$，

所以双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$

故选：D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分．

10. 已知 i 是虚数单位，化简 $\dfrac{5+14\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ 的结果为_________．

【答案】$4+\mathrm{i}$ ##$\mathrm{i}+4$

【解析】

【分析】由题意利用复数的运算法则，分子分母同时乘以 $2-3\mathrm{i}$，然后计算其运算结果即可．

【详解】由题意可得 $\dfrac{5+14\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\dfrac{(5+14\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=\dfrac{52+13\mathrm{i}}{13}=4+\mathrm{i}$．

故答案为：$4+\mathrm{i}$．

11. 在 $\left(2x^3-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，x^2 项的系数为_________．

【答案】60

【解析】

【分析】由二项式展开式的通项公式写出其通项公式 $T_{k+1}=(-1)^k\times2^{6-k}\times C_6^k\times x^{18-4k}$，令 $18-4k=2$ 确定 k 的值，然后计算 x^2 项的系数即可．

【详解】展开式的通项公式 $T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k\left(2x^3\right)^{6-k}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\times2^{6-k}\times\mathrm{C}_6^k\times x^{18-4k}$，

令 $18-4k=2$ 可得，$k=4$，

则 x^2 项的系数为 $(-1)^4\times2^{6-4}\times\mathrm{C}_6^4=4\times15=60$．

故答案为：60.

12. 过原点的一条直线与圆 $C:(x+2)^2+y^2=3$ 相切，交曲线 $y^2=2px(p>0)$ 于点 P，若 $|OP|=8$，则 p 的值为_________．

【答案】6

【解析】

【分析】根据圆 $(x+2)^2+y^2=3$ 和曲线 $y^2=2px$ 关于 x 轴对称，不妨设切线方程为 $y=kx$，$k>0$，即可根据直线与圆的位置关系，直线与抛物线的位置关系解出．

【详解】易知圆 $(x+2)^2+y^2=3$ 和曲线 $y^2=2px$ 关于 x 轴对称，不妨设切线方程为 $y=kx$，$k>0$，

所以$\dfrac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$，解得：$k=\sqrt{3}$，由$\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\y^2=2px\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{2p}{3}\\y=\dfrac{2\sqrt{3}p}{3}\end{cases}$，

所以$|OP|=\sqrt{\left(\dfrac{2p}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}p}{3}\right)^2}=\dfrac{4p}{3}=8$，解得：$p=6$.

当$k=-\sqrt{3}$时，同理可得.

故答案为：6.

13. 甲乙丙三个盒子中装有一定数量的黑球和白球，其总数之比为$5:4:6$．这三个盒子中黑球占总数的比例分别为$40\%,25\%,50\%$．现从三个盒子中各取一个球，取到的三个球都是黑球的概率为________；将三个盒子混合后任取一个球，是白球的概率为________.

【答案】 ①. 0.05 ②. $\dfrac{3}{5}$##0.6

【解析】

【分析】先根据题意求出各盒中白球，黑球的数量，再根据概率的乘法公式可求出第一空；

根据古典概型的概率公式可求出第二个空.

【详解】设甲、乙、丙三个盒子中的球的个数分别为$5n,4n,6n$，所以总数为$15n$，

所以甲盒中黑球个数为$40\%\times5n=2n$，白球个数为$3n$；

甲盒中黑球个数为$25\%\times4n=n$，白球个数为$3n$；

甲盒中黑球个数为$50\%\times6n=3n$，白球个数为$3n$；

记“从三个盒子中各取一个球，取到的球都是黑球”为事件A，所以，

$P(A)=0.4\times0.25\times0.5=0.05$；

记“将三个盒子混合后取出一个球，是白球”为事件B，

黑球总共有$2n+n+3n=6n$个，白球共有$9n$个，

所以，$P(B)=\dfrac{9n}{15n}=\dfrac{3}{5}$.

故答案为：0.05；$\dfrac{3}{5}$.

14. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$BC=1$，点D为AB的中点，点E为CD的中点，若设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AE}$可用$\vec{a},\vec{b}$表示为________；若$\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最大值为________.

【答案】 ①. $\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ ②. $\dfrac{13}{24}$

【解析】

【分析】空 1：根据向量的线性运算，结合 E 为 CD 的中点进行求解；空 2：用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示出 $\overrightarrow{AF}$，结合上一空答案，于是 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 可由 $\vec{a},\vec{b}$ 表示，然后根据数量积的运算和基本不等式求解.

【详解】空 1：因为 E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$，可得 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$，

两式相加，可得到 $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$，

即 $2\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；

空 2：因为 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则 $2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$，可得 $\begin{cases}\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$，

得到 $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}+2\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}\right)=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$，

即 $3\overrightarrow{AF}=2\vec{a}+\vec{b}$，即 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

于是 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{1}{12}\left(2\vec{a}^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2\right)$.

记 $AB=x,AC=y$，

则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{12}\left(2\vec{a}^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2\right)=\frac{1}{12}\left(2x^2+5xy\cos 60^\circ+2y^2\right)=\frac{1}{12}\left(2x^2+\frac{5xy}{2}+2y^2\right)$，

在 $\triangle ABC$ 中，根据余弦定理：$BC^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ=x^2+y^2-xy=1$，

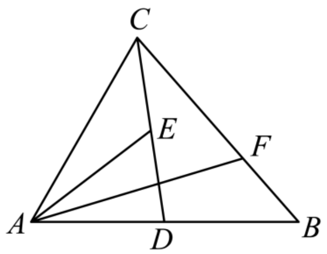
于是 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{12}\left(2xy+\frac{5xy}{2}+2\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{9xy}{2}+2\right)$，

由 $x^2+y^2-xy=1$ 和基本不等式，$x^2+y^2-xy=1\geq 2xy-xy=xy$，

故 $xy\leq 1$，当且仅当 $x=y=1$ 取得等号，

则 $x=y=1$ 时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 有最大值 $\frac{13}{24}$.

故答案为：$\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；$\frac{13}{24}$.



15. 若函数 $f\left(x\right)=ax^2-2x-\left|x^2-ax+1\right|$ 有且仅有两个零点，则 a 的取值范围为________.

【答案】$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】根据绝对值的意义，去掉绝对值，求出零点，再根据根存在的条件即可判断 a 的取值范围.

【详解】（1）当 $x^2-ax+1\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(a-1\right)x^2+\left(a-2\right)x-1=0$，

即 $\left[\left(a-1\right)x-1\right]\left(x+1\right)=0$，

若 $a=1$ 时，$x=-1$，此时 $x^2-ax+1\geq 0$ 成立；

若 $a\neq 1$ 时，$x=\dfrac{1}{a-1}$ 或 $x=-1$，

若方程有一根为 $x=-1$，则 $1+a+1\geq 0$，即 $a\geq -2$ 且 $a\neq 1$；

若方程有一根为 $x=\dfrac{1}{a-1}$，则 $\left(\dfrac{1}{a-1}\right)^2-a\times\dfrac{1}{a-1}+1\geq 0$，解得：$a\leq 2$ 且 $a\neq 1$；

若 $x=\dfrac{1}{a-1}=-1$ 时，$a=0$，此时 $1+a+1\geq 0$ 成立.

（2）当 $x^2-ax+1<0$ 时，$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(a+1\right)x^2-\left(a+2\right)x+1=0$，

即 $\left[\left(a+1\right)x-1\right]\left(x-1\right)=0$，

若 $a=-1$ 时，$x=1$，显然 $x^2-ax+1<0$ 不成立；

若 $a\neq -1$ 时，$x=1$ 或 $x=\dfrac{1}{a+1}$，

若方程有一根为 $x=1$，则 $1-a+1<0$，即 $a>2$；

若方程有一根为 $x=\dfrac{1}{a+1}$，则 $\left(\dfrac{1}{a+1}\right)^2-a\times\dfrac{1}{a+1}+1<0$，解得：$a<-2$；

若 $x=\dfrac{1}{a+1}=1$ 时，$a=0$，显然 $x^2-ax+1<0$ 不成立；

综上，

当 $a<-2$ 时，零点为 $\dfrac{1}{a+1}$，$\dfrac{1}{a-1}$；

当$-2\le a<0$时，零点为$\frac{1}{a-1}$，-1；

当$a=0$时，只有一个零点-1；

当$0<a<1$时，零点为$\frac{1}{a-1}$，-1；

当$a=1$时，只有一个零点-1；

当$1<a\le 2$时，零点为$\frac{1}{a-1}$，-1；

当$a>2$时，零点为$1,-1$.

所以，当函数有两个零点时，$a\ne 0$且$a\ne 1$.

故答案为：$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【点睛】本题的解题关键是根据定义去掉绝对值，求出方程的根，再根据根存在的条件求出对应的范围，然后根据范围讨论根（或零点）的个数，从而解出.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c. 已知$a=\sqrt{39},b=2,\angle A=120^\circ$.

（1）求$\sin B$的值；

（2）求c的值；

（3）求$\sin(B-C)$.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{13}}{13}$

（2）5

（3）$-\frac{7\sqrt{3}}{26}$

【解析】

【分析】（1）根据正弦定理即可解出；

（2）根据余弦定理即可解出；

（3）由正弦定理求出$\sin C$，再由平方关系求出$\cos B,\cos C$，即可由两角差的正弦公式求出.

【小问 1 详解】

由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{\sqrt{39}}{\sin 120^\circ}=\frac{2}{\sin B}$，解得：$\sin B=\frac{\sqrt{13}}{13}$；

【小问 2 详解】

由余弦定理可得，$a^2=b^2+c^2-2bc\sin A$，即$39=4+c^2-2\times 2\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

解得：$c=5$或$c=-7$（舍去）.

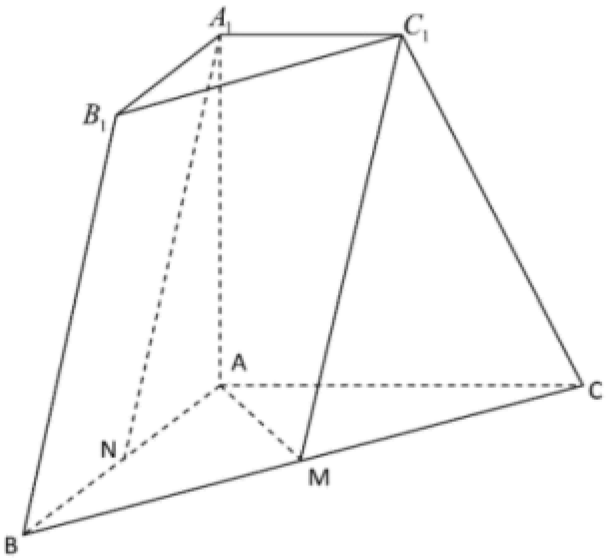
【小问 3 详解】

由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{\sqrt{39}}{\sin 120^\circ}=\frac{5}{\sin C}$，解得：$\sin C=\frac{5\sqrt{13}}{26}$，而$A=120^\circ$，

所以B,C都为锐角，因此$\cos C=\sqrt{1-\frac{25}{52}}=\frac{3\sqrt{39}}{26}$，$\cos B=\sqrt{1-\frac{1}{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，

故$\sin\left(B-C\right)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\frac{\sqrt{13}}{13}\times\frac{3\sqrt{39}}{26}-\frac{2\sqrt{39}}{13}\times\frac{5\sqrt{13}}{26}=-\frac{7\sqrt{3}}{26}$.

17. 三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，若$A_1A\perp$面$ABC, AB\perp AC, AB=AC=AA_1=2, A_1C_1=1$，$M,N$分别是$BC,BA$中点.



（1）求证：A_1N //平面C_1MA；

（2）求平面C_1MA与平面ACC_1A_1所成夹角的余弦值；

（3）求点C到平面C_1MA的距离.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{2}{3}$

（3）$\frac{4}{3}$

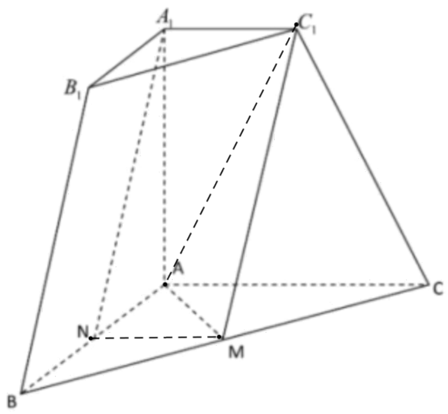
【解析】

【分析】（1）先证明四边形 MNA_1C_1 是平行四边形，然后用线面平行的判定解决；

（2）利用二面角的定义，作出二面角的平面角后进行求解；

（3）方法一是利用线面垂直的关系，找到垂线段的长，方法二无需找垂线段长，直接利用等体积法求解

【小问 1 详解】



连接 MN,C_1A .由 M,N 分别是 BC,BA 的中点，根据中位线性质，$MN // AC$，且 $MN=\dfrac{AC}{2}=1$，

由棱台性质，$A_1C_1 // AC$，于是 $MN // A_1C_1$，由 $MN=A_1C_1=1$ 可知，四边形 MNA_1C_1 是平行四边形，

则 $A_1N // MC_1$，

又 $A_1N \not\subset$ 平面 C_1MA，$MC_1 \subset$ 平面 C_1MA，于是 $A_1N //$ 平面 C_1MA .

【小问 2 详解】

过 M 作 $ME \perp AC$，垂足为 E，过 E 作 $EF \perp AC_1$，垂足为 F，连接 MF,C_1E .

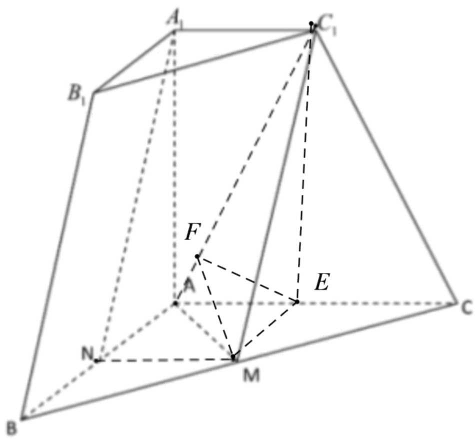
由 $ME \subset$ 面 ABC，$A_1A \perp$ 面 ABC，故 $AA_1 \perp ME$，又 $ME \perp AC$，$AC \cap AA_1 = A$，$AC,AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1，则 $ME \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

由 $AC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1，故 $ME \perp AC_1$，又 $EF \perp AC_1$，$ME \cap EF = E$，$ME,EF \subset$ 平面 MEF，于是 $AC_1 \perp$ 平面 MEF，

由 $MF \subset$ 平面 MEF，故 $AC_1 \perp MF$. 于是平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成角即 $\angle MFE$.

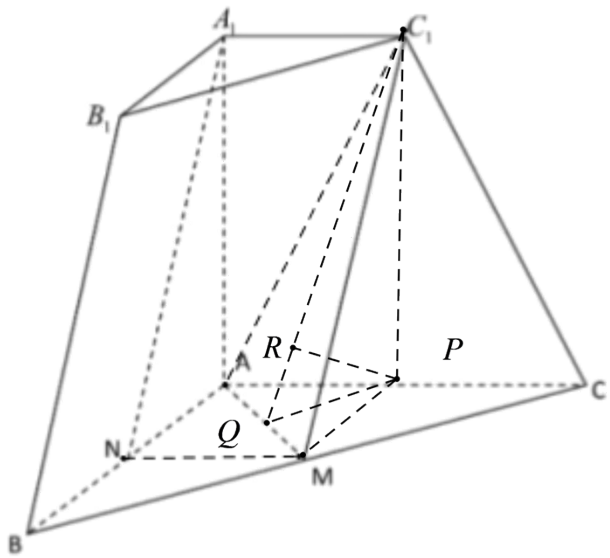
又 $ME=\dfrac{AB}{2}=1$，$\cos\angle CAC_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，则 $\sin\angle CAC_1=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，故 $EF=1\times\sin\angle CAC_1=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MEF$ 中，$\angle MEF=90^\circ$，则 $MF=\sqrt{1+\dfrac{4}{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，

于是$\cos\angle MFE=\dfrac{EF}{MF}=\dfrac{2}{3}$



【小问 3 详解】

[方法一：几何法]



过C_1作$C_1P\perp AC$，垂足为P，作$C_1Q\perp AM$，垂足为Q，连接PQ,PM，过P作$PR\perp C_1Q$，垂足为R.

由题干数据可得，$C_1A=C_1C=\sqrt{5}$，$C_1M=\sqrt{C_1P^2+PM^2}=\sqrt{5}$，根据勾股定理，

$C_1Q=\sqrt{5-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

由$C_1P\perp$平面AMC，$AM\subset$平面AMC，则$C_1P\perp AM$，又$C_1Q\perp AM$，$C_1Q\cap C_1P=C_1$，

$C_1Q, C_1P \subset$ 平面 C_1PQ，于是 $AM \perp$ 平面 C_1PQ.

又 $PR \subset$ 平面 C_1PQ，则 $PR \perp AM$，又 $PR \perp C_1Q$，$C_1Q \cap AM = Q$，$C_1Q, AM \subset$ 平面 C_1MA，故

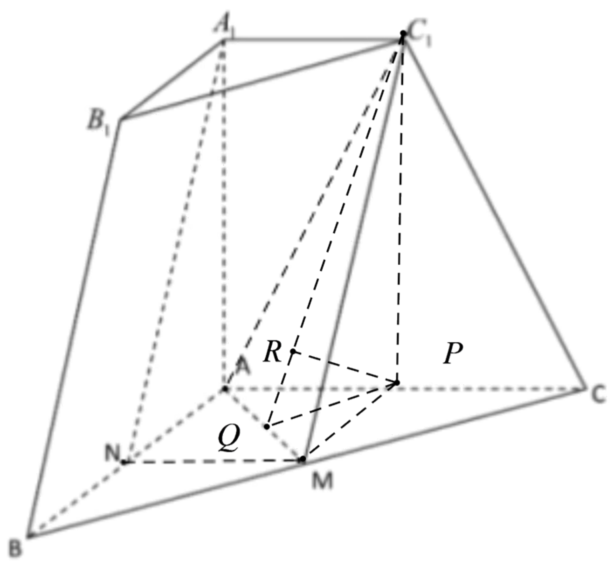
$PR \perp$ 平面 C_1MA.

在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1PQ$ 中，$PR = \dfrac{PC_1 \cdot PQ}{QC_1} = \dfrac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{3}$，

又 $CA = 2PA$，故点 C 到平面 C_1MA 的距离是 P 到平面 C_1MA 的距离的两倍，

即点 C 到平面 C_1MA 的距离是 $\dfrac{4}{3}$.

［方法二：等体积法］



辅助线同方法一.

设点 C 到平面 C_1MA 的距离为 h.

$V_{C_1-AMC} = \dfrac{1}{3} \times C_1P \times S_{\triangle AMC} = \dfrac{1}{3} \times 2 \times \dfrac{1}{2} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$，

$V_{C-C_1MA} = \dfrac{1}{3} \times h \times S_{\triangle AMC_1} = \dfrac{1}{3} \times h \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h}{2}$.

由 $V_{C_1-AMC} = V_{C-C_1MA} \Leftrightarrow \dfrac{h}{2} = \dfrac{2}{3}$，即 $h = \dfrac{4}{3}$.

18. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点分别为 A_1,A_2，右焦点为 F，已知 $|A_1F|=3,|A_2F|=1$.

（1）求椭圆方程及其离心率；

（2）已知点 P 是椭圆上一动点（不与端点重合），直线 A_2P 交 y 轴于点 Q，若三角形 A_1PQ 的面积是三角形 A_2FP 面积的二倍，求直线 A_2P 的方程.

【答案】（1）椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率为 $e=\frac{1}{2}$.

（2）$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$.

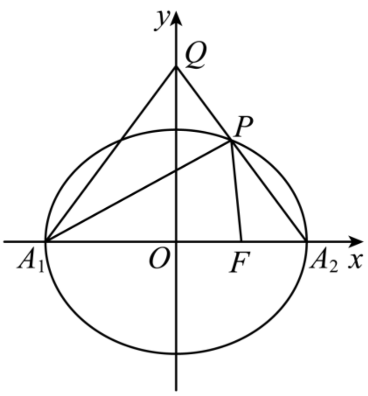
【解析】

【分析】（1）由 $\begin{cases}a+c=3\\a-c=1\end{cases}$ 解得 $a=2,c=1$，从而求出 $b=\sqrt{3}$，代入椭圆方程即可求方程，再代入离心率公式即求离心率.

（2）先设直线 A_2P 的方程，与椭圆方程联立，消去 y，再由韦达定理可得 $x_{A_2}\cdot x_P$，从而得到 P 点和 Q 点坐标.由 $S_{\triangle A_2QA_1}=S_{\triangle A_1PQ}+S_{\triangle A_1A_2P}=2S_{\triangle A_2PF}+S_{\triangle A_1A_2P}$ 得 $2|y_Q|=3|y_P|$，即可得到关于 k 的方程，解出 k，代入直线 A_2P 的方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

如图，



由题意得 $\begin{cases}a+c=3\\a-c=1\end{cases}$，解得 $a=2,c=1$，所以 $b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

由题意得，直线 A_2P 斜率存在，由椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 可得 $A_2(2,0)$，

设直线 A_2P 的方程为 $y=k(x-2)$，

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$，消去 y 整理得：$(3+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$，

由韦达定理得 $x_{A_2}\cdot x_P=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$，所以 $x_P=\frac{8k^2-6}{3+4k^2}$，

所以 $P\left(\frac{8k^2-6}{3+4k^2},-\frac{-12k}{3+4k^2}\right)$，$Q(0,-2k)$.

所以 $S_{\triangle A_2QA_1}=\frac{1}{2}\times4\times|y_Q|,S_{\triangle A_2PF}=\frac{1}{2}\times1\times|y_P|,S_{\triangle A_1A_2P}=\frac{1}{2}\times4\times|y_P|$，

所以 $S_{\triangle A_2QA_1}=S_{\triangle A_1PQ}+S_{\triangle A_1A_2P}=2S_{\triangle A_2PF}+S_{\triangle A_1A_2P}$，

所以 $2|y_Q|=3|y_P|$，即 $2|-2k|=3\left|-\frac{12k}{3+4k^2}\right|$，

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以直线 A_2P 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_2+a_5=16,a_5-a_3=4$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum\limits_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}a_i$.

（2）已知 $\{b_n\}$ 为等比数列，对于任意 $k\in\mathrm{N}^*$，若 $2^{k-1}\le n\le 2^k-1$，则 $b_k<a_n<b_{k+1}$，

（I）当 $k\ge2$ 时，求证：$2^k-1<b_k<2^k+1$；

（II）求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和.

【答案】（1）$a_n=2n+1$，$\sum\limits_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}a_i=3\times2^{2n-1}$；

（2）(I)证明见解析；(II) $b_n=2^n$，前 n 项和为 $2^{n+1}-2$.

【解析】

【分析】(1)由题意得到关于首项、公差的方程，解方程可得$a_1=3,d=2$，据此可求得数列的通项公式，然后确定所给的求和公式里面的首项和项数，结合等差数列前n项和公式计算可得$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i = 3\times 2^{2n-1}$.

(2)(Ⅰ)利用题中的结论分别考查不等式两侧的情况，当$2^{k-1}\le n\le 2^k-1$时，$b_k<a_n$，

取$n=2^{k-1}$，当$2^{k-2}\le n\le 2^{k-1}-1$时，$a_n<b_k$，取$n=2^{k-1}-1$，即可证得题中的不等式；

(Ⅱ)结合(Ⅰ)中的结论猜想$b_n=2^n$，然后分别排除$q>2$和$q<2$两种情况即可确定数列的公比，进而可得数列的通项公式，最后由等比数列前n项和公式即可计算其前n项和.

【小问1详解】

由题意可得$\begin{cases} a_2+a_5=2a_1+5d=6 \\ a_5-a_3=2d=4 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=3 \\ d=2 \end{cases}$，

则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=a_1+\left(n-1\right)d=2n+1$，

注意到$a_{2^{n-1}}=2\times 2^{n-1}+1=2^n+1$，从$a_{2^{n-1}}$到$a_{2^n-1}$共有$2^n-1-2^{n-1}+1=2^{n-1}$项，

故$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i = 2^{n-1}\times\left(2^n+1\right)+\dfrac{2^{n-1}\left(2^{n-1}-1\right)}{2}\times 2 = 2^{2n-1}+2^{n-1}+2^{2n-2}-2^{n-1}=3\times 2^{2n-1}$.

【小问2详解】

(Ⅰ)由题意可知，当$2^{k-1}\le n\le 2^k-1$时，$b_k<a_n$，

取$n=2^{k-1}$，则$b_k<a_{2^{k-1}}=2\times 2^{k-1}+1=2^k+1$，即$b_k<2^k+1$，

当$2^{k-2}\le n\le 2^{k-1}-1$时，$a_n<b_k$，

取$n=2^{k-1}-1$，此时$a_n=a_{2^{k-1}-1}=2\left(2^{k-1}-1\right)+1=2^k-1$，

据此可得$2^k-1<b_k$，

综上可得：$2^k-1<b_k<2^k+1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知：$1<b_1<3,3<b_2<5,7<b_3<9,15<b_4<17$，

据此猜测$b_n=2^n$，

否则，若数列的公比$q>2$，则$b_n=b_1q^{n-1}>b_1\times 2^{n-1}>2^{n-1}$，

注意到$2^{n-1}-\left(2^n-1\right)=1-2^{n-1}$，则$2^{n-1}-\left(2^n-1\right)>0$不恒成立，即$2^{n-1}>2^n-1$不恒成立，

此时无法保证$2^n-1<b_n$，

若数列的公比$q<2$，则$b_n=b_1q^{n-1}<b_1\times 2^{n-1}<3\times 2^{n-1}$，

注意到$3\times 2^{n-1}-\left(2^n+1\right)=2^{n-1}-1$，则$2^{n-1}-1<0$不恒成立，即$3\times 2^{n-1}<2^n+1$不恒成立，

此时无法保证$b_n<2^n+1$，

综上，数列的公比为2，则数列的通项公式为$b_n=2^n$，

其前n项和为：$S_n=\dfrac{2\times\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

【点睛】本题的核心在考查数列中基本量的计算和数列中的递推关系式，求解数列通项公式和前n项和的核心是确定数列的基本量，第二问涉及到递推关系式的灵活应用，先猜后证是数学中常用的方法之一，它对学生探索新知识很有裨益.

20. 已知函数$f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(x+1\right)$.

（1）求曲线$y=f\left(x\right)$在$x=2$处切线的斜率；

（2）当$x>0$时，证明：$f\left(x\right)>1$；

（3）证明：$\dfrac{5}{6}<\ln\left(n!\right)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n\right)+n\leq 1$.

【答案】（1）$\dfrac{1}{3}-\dfrac{\ln 3}{4}$

（2）证明见解析　　（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用导数的几何意义求斜率；

（2）问题化为$x>0$时$\ln\left(x+1\right)>\dfrac{2x}{x+2}$，构造$g(x)=\ln\left(x+1\right)-\dfrac{2x}{x+2}$，利用导数研究单调性，即可证结论；

（3）构造$h(n)=\ln\left(n!\right)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n\right)+n$，$n\in\mathrm{N}^*$，作差法研究函数单调性可得$h(n)\leq h(1)=1$，再构造$\varphi(x)=\ln x-\dfrac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$且$x>0$，应用导数研究其单调性得到$\ln x\leq\dfrac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$恒成立，对$h(n)-h(n+1)$作放缩处理，结合累加得到$h(1)-h(n)<\dfrac{3}{2}\ln 2-1+\dfrac{1}{12}<\dfrac{1}{6}$，即可证结论.

【小问1详解】

$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{\ln(x+1)}{2}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}$，

所以 $f'(2)=\frac{1}{3}-\frac{\ln 3}{4}$，故 $x=2$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{3}-\frac{\ln 3}{4}$；

【小问 2 详解】

要证 $x>0$ 时 $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+1\right)>1$，即证 $\ln\left(x+1\right)>\frac{2x}{x+2}$，

令 $g(x)=\ln\left(x+1\right)-\frac{2x}{x+2}$ 且 $x>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，则 $g(x)>g(0)=0$，即 $\ln\left(x+1\right)>\frac{2x}{x+2}$.

所以 $x>0$ 时 $f\left(x\right)>1$.

【小问 3 详解】

设 $h(n)=\ln\left(n!\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n\right)+n$，$n\in\mathrm{N}^*$，

则 $h(n+1)-h(n)=1+(n+\frac{1}{2})\ln\left(n\right)-(n+\frac{1}{2})\ln\left(n+1\right)=1-(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})$，

由（2）知：$x=\frac{1}{n}\in(0,1]$，则 $f(\frac{1}{n})=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})>1$，

所以 $h(n+1)-h(n)<0$，故 $h(n)$ 在 $n\in\mathrm{N}^*$ 上递减，故 $h(n)\le h(1)=1$；

下证 $\ln(n!)-(n+\frac{1}{2})\ln(n)+n>\frac{5}{6}$，

令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$ 且 $x>0$，则 $\varphi'(x)=\frac{(x-1)^2(1-x)}{x(2x+1)^2}$，

当 $0<x<1$ 时 $\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 递增，当 $x>1$ 时 $\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减，

所以 $\varphi(x)\le\varphi(1)=0$，故在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上 $\ln x\le\frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$ 恒成立，

则 $h(n)-h(n+1)=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1\le(n+\frac{1}{2})\cdot\frac{(6+\frac{1}{n})(\frac{1}{n})}{2(3+\frac{2}{n})}-1=\frac{1}{4n(3n+2)}<\frac{1}{12}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$，

所以 $h(2)-h(3)<\frac{1}{12}(1-\frac{1}{2})$，$h(3)-h(4)<\frac{1}{12}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$，…，$h(n-1)-h(n)<\frac{1}{12}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$，

累加得：$h(2)-h(n)<\frac{1}{12}(1-\frac{1}{n})$，而 $h(2)=2-\frac{3}{2}\ln 2$，则 $-h(n)<\frac{1}{12}(1-\frac{1}{n})-2+\frac{3}{2}\ln 2$，

所以 $h(1)-h(n)<\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{1}{12}(1-\frac{1}{n})<\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$，故 $h(n)>\frac{5}{6}$；

综上，$\frac{5}{6}<h(n)\leq 1$，即$\frac{5}{6}<\ln\left(n!\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n\right)+n\leq 1$.

【点睛】关键点点睛：第三问，作差法研究$h(n)=\ln\left(n!\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n\right)+n$单调性证右侧不等关系，再构造$\varphi(x)=\ln x-\frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$且$x>0$，导数研究其函数符号得$\ln x\leq\frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$恒成立，结合放缩、累加得到$h(1)-h(n)<\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{1}{12}(1-\frac{1}{n})$为关键.