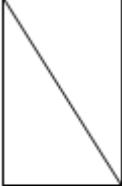
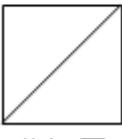
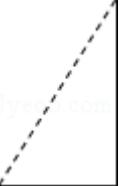


2016年天津市高考数学试卷（文科）

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

1. (5分) (2016•天津) 已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{y|y=2x-1, x \in A\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
A. {1, 3} B. {1, 2} C. {2, 3} D. {1, 2, 3}
2. (5分) (2016•天津) 甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$, 甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$, 则甲不输的概率为()
A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$
3. (5分) (2016•天津) 将一个长方体沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥，得到的几何体的正视图与俯视图如图所示，则该几何体的侧（左）视图为()
- 正视图
- 
- 俯视图
- 
- A.  B.  C.  D. 
4. (5分) (2016•天津) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且双曲线的一条渐近线与直线 $2x+y=0$ 垂直, 则双曲线的方程为()
A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
C. $\frac{3x^2}{20} - \frac{3y^2}{5} = 1$ D. $\frac{3x^2}{5} - \frac{3y^2}{20} = 1$
5. (5分) (2016•天津) 设 $x > 0, y \in \mathbb{R}$, 则“ $x > y$ ”是“ $x > |y|$ ”的()
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

6. (5分) (2016•天津) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

7. (5分) (2016•天津) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形, 点D、E分别是边AB、BC的中点, 连接DE并延长到点F, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{11}{8}$

8. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbb{R}$, 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ()

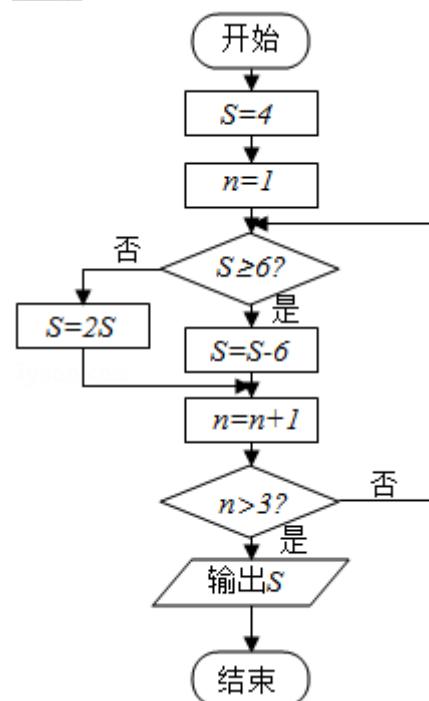
- A. $(0, \frac{1}{8}]$ B. $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$ C. $(0, \frac{5}{8}]$ D. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

二、填空题本大题6小题, 每题5分, 共30分

9. (5分) (2016•天津) i 是虚数单位, 复数 z 满足 $(1+i)z=2$, 则 z 的实部为_____.

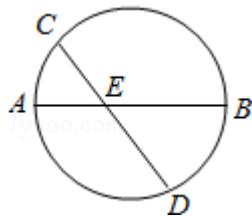
10. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = (2x+1)e^x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(0)$ 的值为_____.

11. (5分) (2016•天津) 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为_____.



12. (5分) (2016•天津) 已知圆C的圆心在x轴正半轴上, 点 $(0, \sqrt{5})$ 在圆C上, 且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 则圆C的方程为_____.

13. (5分) (2016•天津) 如图, AB是圆的直径, 弦CD与AB相交于点E, $BE=2AE=2$, B
 $D=ED$, 则线段CE的长为_____.



14. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)

在 \mathbb{R} 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共6小题, 80分

15. (13分) (2016•天津) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 已知 $a \sin 2B = \sqrt{3} b \sin A$.

(1) 求 B ;

(2) 已知 $\cos A = \frac{1}{3}$, 求 $\sin C$ 的值.

16. (13分) (2016•天津) 某化工厂生产甲、乙两种混合肥料, 需要A, B, C三种主要原料, 生产1车皮甲种肥料和生产1车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如表所示:

原料 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有A种原料200吨, B种原料360吨, C种原料300吨, 在此基础上生产甲、乙两种肥料.

已知生产1车皮甲种肥料, 产生的利润为2万元; 生产1车品乙种肥料, 产生的利润为3万元. 分别用 x , y 表示计划生产甲、乙两种肥料的车皮数.

(1) 用 x , y 列出满足生产条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

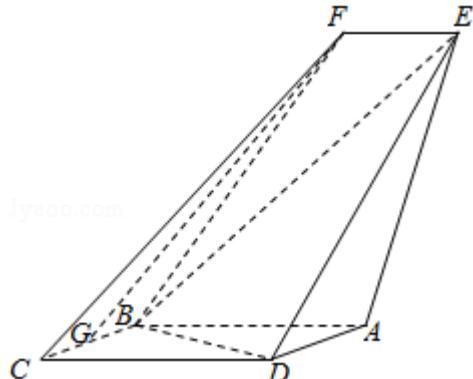
(2) 问分别生产甲、乙两种肥料, 求出此最大利润.

17. (13分) (2016•天津) 如图, 四边形ABCD是平行四边形, 平面AED \perp 平面ABCD, $E \parallel AB$, $AB=2$, $DE=3$, $BC=EF=1$, $AE=\sqrt{6}$, $\angle BAD=60^\circ$, G 为 BC 的中点.

(1) 求证: $FG \parallel$ 平面BED;

(2) 求证: 平面BED \perp 平面AED;

(3) 求直线EF与平面BED所成角的正弦值.



18. (13分) (2016•天津) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前n项和为 S_n ($n \in N^*$), 且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$, $S_6=63$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的 $n \in N^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

19. (14分) (2016•天津) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为F, 右顶点为A, 已知

$$\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}, \text{ 其中O为原点, } e \text{ 为椭圆的离心率.}$$

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点A的直线l与椭圆交于B (B不在x轴上), 垂直于l的直线与l交于点M, 与y轴交于点H, 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA = \angle MAO$, 求直线l的斜率.

20. (14分) (2016•天津) 设函数 $f(x) = x^3 - ax - b$, $x \in R$, 其中 $a, b \in R$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 0$;

(3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

2016年天津市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

1. (5分) (2016•天津) 已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{y|y=2x-1, x\in A\}$, 则 $A\cap B=()$

- A. {1, 3} B. {1, 2} C. {2, 3} D. {1, 2, 3}

【分析】根据题意，将集合B用列举法表示出来，可得 $B=\{1, 3, 5\}$ ，由交集的定义计算可得答案.

【解答】解：根据题意，集合 $A=\{1, 2, 3\}$, 而 $B=\{y|y=2x-1, x\in A\}$ ，
则 $B=\{1, 3, 5\}$ ，
则 $A\cap B=\{1, 3\}$ ，
故选：A.

【点评】本题考查集合的运算，注意集合B的表示方法.

2. (5分) (2016•天津) 甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$ ，甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$
，则甲不输的概率为()

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

【分析】利用互斥事件的概率加法公式即可得出.

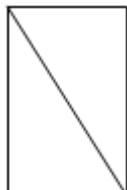
【解答】解： \because 甲不输与甲、乙两人下成和棋是互斥事件.

\therefore 根据互斥事件的概率计算公式可知：甲不输的概率 $P=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

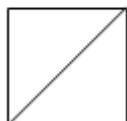
故选：A.

【点评】本题考查互斥事件与对立事件的概率公式，关键是判断出事件的关系，然后选择合适的概率公式，属于基础题.

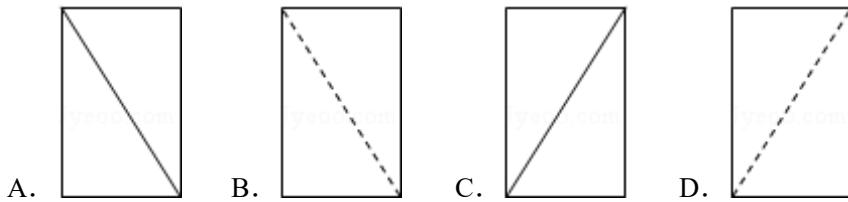
3. (5分) (2016•天津) 将一个长方体沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥，得到的几何体的正视图与俯视图如图所示，则该几何体的侧（左）视图为()



正视图

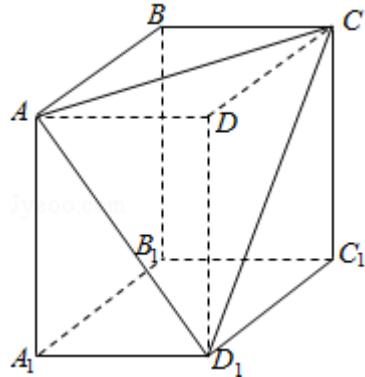


俯视图



【分析】根据主视图和俯视图作出几何体的直观图，找出所切棱锥的位置，得出答案.

【解答】解：由主视图和俯视图可知切去的棱锥为D-AD₁C，



棱CD₁在左侧面的投影为BA₁，
故选B.

【点评】本题考查了棱锥，棱柱的结构特征，三视图，考查空间想象能力，属于基础题.

4. (5分) (2016•天津) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$ ，且双曲

线的一条渐近线与直线 $2x+y=0$ 垂直，则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
 C. $\frac{3x^2}{20} - \frac{3y^2}{5} = 1$ D. $\frac{3x^2}{5} - \frac{3y^2}{20} = 1$

【分析】利用双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$ ，且双曲线的一条渐近线与

直线 $2x+y=0$ 垂直，求出几何量 a, b, c ，即可求出双曲线的方程.

【解答】解： \because 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$ ，

$$\therefore c = \sqrt{5}，$$

\because 双曲线的一条渐近线与直线 $2x+y=0$ 垂直，

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1}{2}，$$

$$\therefore a = 2b，$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2，$$

$\therefore a=2, b=1$,

\therefore 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

故选: A.

【点评】本题考查双曲线的方程与性质, 考查待定系数法的运用, 确定双曲线的几何量是关键.

5. (5分) (2016·天津) 设 $x > 0, y \in \mathbb{R}$, 则 “ $x > y$ ” 是 “ $x > |y|$ ” 的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【分析】直接根据必要性和充分判断即可.

【解答】解: 设 $x > 0, y \in \mathbb{R}$, 当 $x=0, y=-1$ 时, 满足 $x > y$ 但不满足 $x > |y|$, 故由 $x > 0, y \in \mathbb{R}$, 则 “ $x > y$ ” 推不出 “ $x > |y|$ ”,

而 “ $x > |y| \Rightarrow x > y$ ”,

故 “ $x > y$ ” 是 “ $x > |y|$ ” 的必要不充分条件,

故选: C.

【点评】本题考查了不等式的性质、充要条件的判定, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

6. (5分) (2016·天津) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

【分析】根据函数的对称性可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减, 故只需令 $2^{|a-1|} < \sqrt{2}$ 即可.

【解答】解: $\because f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\because 2^{|a-1|} > 0, f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$,

$$\therefore 2^{|a-1|} < \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore |a-1| < \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}.$$

故选: C.

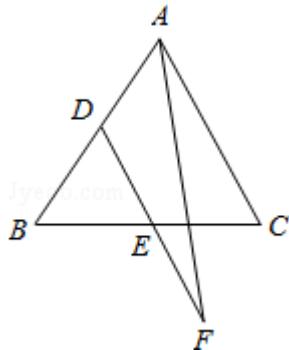
【点评】本题考查了函数的单调性, 奇偶性的性质, 属于中档题.

7. (5分) (2016·天津) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D、E 分别是边 AB、BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F, 使得 $DE = 2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{11}{8}$

【分析】由题意画出图形, 把 \overrightarrow{AF} 、 \overrightarrow{BC} 都用 \overrightarrow{BA} 、 \overrightarrow{BC} 表示, 然后代入数量积公式得答案.

【解答】解: 如图,



∴D、E分别是边AB、BC的中点，且DE=2EF，

$$\begin{aligned}
 \therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}\right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
 &= \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
 &= \left(-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2 = -\frac{5}{4}|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos 60^\circ + \frac{3}{4} \times 1^2 \\
 &= -\frac{5}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

故选：B.

【点评】本题考查平面向量的数量积运算，考查向量加减法的三角形法则，是中档题.

8. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$)， $x \in \mathbb{R}$ ，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{1}{8})$ B. $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$ C. $(0, \frac{5}{8})$ D. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

【分析】 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$ ，由 $f(x) = 0$ ，可得 $\sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) = 0$ ，解得 $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega} \notin (\pi, 2\pi)$ ，因此 $\omega \notin (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{8}, \frac{5}{4}) \cup (\frac{9}{8}, \frac{9}{4}) \cup \dots = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{8}, +\infty)$ ，即可得出.

【解答】 解：函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos \omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$ ，

由 $f(x) = 0$ ，可得 $\sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) = 0$ ，

解得 $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega} \notin (\pi, 2\pi)$ ，

$\therefore \omega \notin (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{8}, \frac{5}{4}) \cup (\frac{9}{8}, \frac{9}{4}) \cup \dots = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{8}, +\infty)$ ，

$\because f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，

$$\therefore \omega \in (0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}].$$

故选：D.

【点评】本题考查了三角函数的图象与性质、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题。

二、填空题本大题6小题，每题5分，共30分

9. (5分) (2016•天津) i 是虚数单位，复数 z 满足 $(1+i)z=2$ ，则 z 的实部为 1.

【分析】 把已知等式变形，然后利用复数代数形式的乘除运算化简得答案。

【解答】 解：由 $(1+i)z=2$ ，

$$\text{得 } z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i,$$

$\therefore z$ 的实部为 1.

故答案为：1.

【点评】 本题考查复数代数形式的乘除运算，考查了复数的基本概念，是基础题。

10. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = (2x+1)e^x$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则 $f'(0)$ 的值为 3.

【分析】 先求导，再带值计算。

【解答】 解： $\because f(x) = (2x+1)e^x$ ，

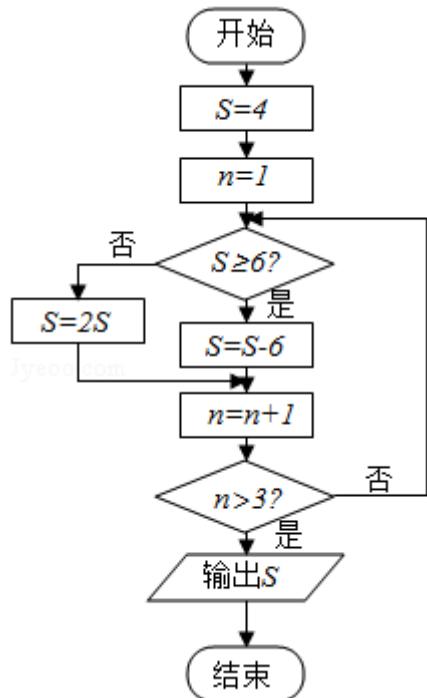
$$\therefore f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x$$

$$\therefore f'(0) = 2e^0 + (2 \times 0 + 1)e^0 = 2 + 1 = 3.$$

故答案为：3.

【点评】 本题考查了导数的运算法则，属于基础题。

11. (5分) (2016•天津) 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出 S 的值为 4.



【分析】根据循环结构，结合循环的条件，求出最后输出S的值.

【解答】解：第一次循环： $S=8$, $n=2$;

第二次循环： $S=2$, $n=3$;

第三次循环： $S=4$, $n=4$,

结束循环，输出 $S=4$,

故答案为：4.

【点评】本题主要考查程序框图，循环结构，注意循环的条件，属于基础题.

12. (5分) (2016•天津) 已知圆C的圆心在x轴正半轴上，点 $(0, \sqrt{5})$ 在圆C上，且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，则圆C的方程为 $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

【分析】由题意设出圆的方程，把点M的坐标代入圆的方程，结合圆心到直线的距离列式求解.

【解答】解：由题意设圆的方程为 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ ($a > 0$)，

由点 $M(0, \sqrt{5})$ 在圆上，且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，

$$\begin{cases} a^2 + 5 = r^2 \\ \frac{|2a|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

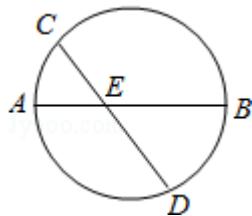
得 $\begin{cases} a^2 + 5 = r^2 \\ |2a| = 4 \end{cases}$ ，解得 $a=2$, $r=3$.

∴圆C的方程为： $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

故答案为： $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

【点评】本题考查圆的标准方程，训练了点到直线的距离公式的应用，是中档题.

13. (5分) (2016•天津) 如图，AB是圆的直径，弦CD与AB相交于点E， $BE=2AE=2$ ， B
 $D=ED$ ，则线段CE的长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



【分析】由 $BD=ED$, 可得 $\triangle BDE$ 为等腰三角形, 过D作 $DH \perp AB$ 于H, 由相交弦定理求得 DH , 在 $Rt\triangle DHE$ 中求出 DE , 再由相交弦定理求得 CE .

【解答】解: 如图,

过D作 $DH \perp AB$ 于H,

$$\because BE=2AE=2, \quad BD=ED,$$

$$\therefore BH=HE=1, \text{ 则 } AH=2, \quad BH=1,$$

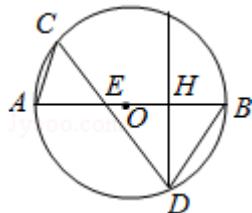
$$\therefore DH^2=AH \cdot BH=2, \text{ 则 } DH=\sqrt{2},$$

$$\text{在 } Rt\triangle DHE \text{ 中, 则 } DE=\sqrt{DH^2+HE^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3},$$

由相交弦定理可得: $CE \cdot DE=AE \cdot EB$,

$$\therefore CE=\frac{AE \cdot EB}{DE}=\frac{1 \times 2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



【点评】本题考查与圆有关的比例线段, 考查相交弦定理的应用, 是中档题.

$$14. \quad (5 \text{分}) \quad (2016 \cdot \text{天津}) \quad \text{已知函数 } f(x)=\begin{cases} x^2+(4a-3)x+3a, & x<0 \\ \log_a(x+1)+1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (a>0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

在 R 上单调递减, 且关于x的方程 $|f(x)|=2-\frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则a的取值范围

$$\text{是 } [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$$

【分析】由减函数可知 $f(x)$ 在两段上均为减函数, 且在第一段的最小值大于或等于第二段上的最大值, 作出 $|f(x)|$ 和 $y=2-\frac{x}{3}$ 的图象, 根据交点个数判断 $3a$ 与2的大小关系, 列出不等式组解出.

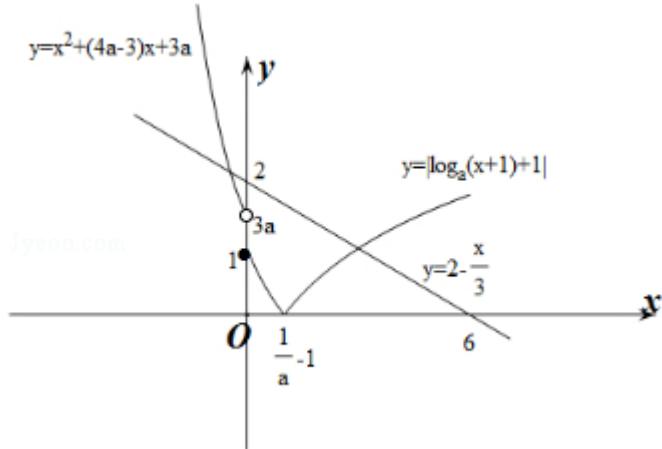
【解答】解: $\because f(x)$ 是 R 上的单调递减函数,

$\therefore y=x^2+(4a-3)x+3a$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $y=\log_a(x+1)+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的最小值大于或等于 $f(0)$.

$$\therefore \begin{cases} \frac{3-4a}{2} \geq 0 \\ 0 < a < 1 \\ 3a \geq 1 \end{cases}, \text{解得 } \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{4}.$$

作出 $y=|f(x)|$ 和 $y=2 - \frac{x}{3}$ 的函数草图如图所示：



$\because |f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解，

$$\therefore 3a < 2, \text{ 即 } a < \frac{2}{3}.$$

$$\text{综上, } \frac{1}{3} \leq a < \frac{2}{3}.$$

$$\text{故答案为} [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$$

【点评】本题考查了分段函数的单调性，函数零点的个数判断，结合函数函数图象判断端点值的大小是关键，属于中档题。

三、解答题：本大题共6小题，80分

15. (13分) (2016•天津) 在 $\triangle ABC$ 中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知 $a\sin 2B = \sqrt{3}b\sin A$.

(1) 求B；

(2) 已知 $\cos A = \frac{1}{3}$ ，求 $\sin C$ 的值.

【分析】 (1) 利用正弦定理将边化角即可得出 $\cos B$ ；

(2) 求出 $\sin A$ ，利用两角和的正弦函数公式计算.

【解答】 解：(1) $\because a\sin 2B = \sqrt{3}b\sin A$ ，

$$\therefore 2\sin A\sin B\cos B = \sqrt{3}\sin B\sin A$$

$$\therefore \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore B = \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \because \cos A = \frac{1}{3}, \therefore \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{6}+1}{6}.$$

【点评】本题考查了正弦定理理解三角形，两角和的正弦函数，属于基础题。

16. (13分) (2016·天津) 某化工厂生产甲、乙两种混合肥料，需要A，B，C三种主要原料，生产1批皮甲种肥料和生产1车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如表所示：

原料 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有A种原料200吨，B种原料360吨，C种原料300吨，在此基础上生产甲、乙两种肥料。

已知生产1车皮甲种肥料，产生的利润为2万元；生产1车品乙种肥料，产生的利润为3万元。分别用x，y表示计划生产甲、乙两种肥料的车皮数。

(1) 用x，y列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域；

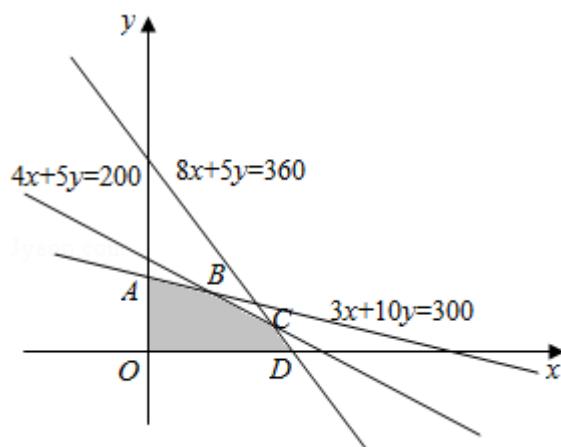
(2) 问分别生产甲、乙两种肥料，求出此最大利润。

【分析】 (1) 根据原料的吨数列出不等式组，作出平面区域；

(2) 令利润 $z=2x+3y$ ，则 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ ，结合可行域找出最优解的位置，列方程组解出最优解。

【解答】 解：(1) x，y满足的条件关系式为： $\begin{cases} 4x+5y \leq 200 \\ 8x+5y \leq 360 \\ 3x+10y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

作出平面区域如图所示：



(2) 设利润为z万元，则 $z=2x+3y$ 。

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}.$$

\therefore 当直线 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}$ 经过点B时，截距 $\frac{z}{3}$ 最大，即z最大。

$$\text{解方程组} \begin{cases} 4x+5y=200 \\ 3x+10y=300 \end{cases} \text{得} B(20, 24).$$

$\therefore z$ 的最大值为 $2 \times 20 + 3 \times 24 = 112$.

答：当生产甲种肥料20吨，乙种肥料24吨时，利润最大，最大利润为112万元.

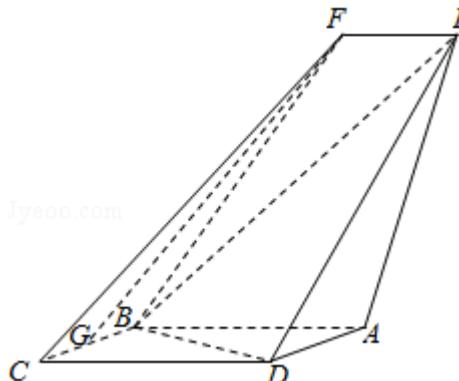
【点评】本题考查了简单的线性规划的应用，抽象概括能力和计算求解能力，属于中档题

17. (13分) (2016·天津) 如图，四边形ABCD是平行四边形，平面AED \perp 平面ABCD， $E \parallel AB$ ， $AB=2$ ， $DE=3$ ， $BC=EF=1$ ， $AE=\sqrt{6}$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ，G为BC的中点.

(1) 求证： $FG \parallel$ 平面BED；

(2) 求证：平面BED \perp 平面AED；

(3) 求直线EF与平面BED所成角的正弦值.



【分析】(1) 利用中位线定理，和平行公理得到四边形OGEF是平行四边形，再根据线面平行的判定定理即可证明；

(2) 根据余弦定理求出 $BD=\sqrt{3}$ ，继而得到 $BD \perp AD$ ，再根据面面垂直的判定定理即可证明；

(3) 先判断出直线EF与平面BED所成的角即为直线AB与平面BED所形成的角，再根据余弦定理和解直角三角形即可求出答案.

【解答】证明：(1) BD的中点为O，连接OE，OG，在 $\triangle BCD$ 中，

$\because G$ 是BC的中点，

$$\therefore OG \parallel DC, \text{ 且 } OG = \frac{1}{2}DC = 1,$$

又 $\because EF \parallel AB$ ， $AB \parallel DC$ ，

$$\therefore EF \parallel OG, \text{ 且 } EF = OG,$$

即四边形OGEF是平行四边形，

$$\therefore FG \parallel OE,$$

$\because FG \not\subset$ 平面BED， $OE \subset$ 平面BED，

$$\therefore FG \parallel$$
平面BED；

(2) 证明：在 $\triangle ABD$ 中， $AD=1$ ， $AB=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ，

由余弦定理可得 $BD=\sqrt{3}$ ，而 $\angle ADB=90^\circ$ ，

即 $BD \perp AD$ ，

又 \because 平面AED \perp 平面ABCD，

$BD \subset$ 平面ABCD，平面AED \cap 平面ABCD=AD，

$$\therefore BD \perp$$
平面AED，

$\therefore BD \subset$ 平面BED，

$$\therefore$$
平面BED \perp 平面AED.

(III) $\because EF \parallel AB$,

\therefore 直线EF与平面BED所成的角即为直线AB与平面BED所形成的角,

过点A作AH \perp DE于点H, 连接BH,

又平面BED \cap 平面AED=ED,

由(2)知AH \perp 平面BED,

\therefore 直线AB与平面BED所成的角为 $\angle ABH$,

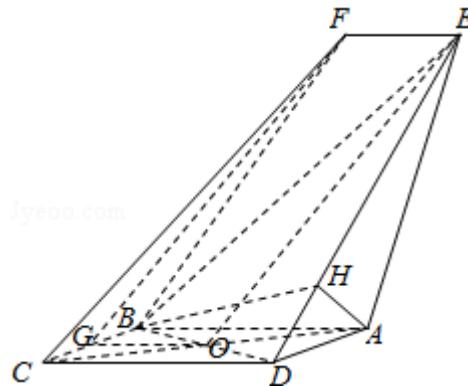
在 $\triangle ADE$, $AD=1$, $DE=3$, $AE=\sqrt{6}$, 由余弦定理得 $\cos\angle ADE=\frac{2}{3}$,

$$\therefore \sin\angle ADE=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore AH=AD \cdot \frac{\sqrt{5}}{3},$$

在Rt $\triangle AHB$ 中, $\sin\angle ABH=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{6}$,

\therefore 直线EF与平面BED所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{5}}{6}$



【点评】本题考查了直线与平面的平行和垂直, 平面与平面的垂直, 直线与平面所成的角, 考查了空间想象能力, 运算能力和推理论证能力, 属于中档题.

18. (13分) (2016•天津) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前n项和为 S_n ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$, $S_6=63$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

【分析】 (1) 根据等比数列的通项公式列方程解出公比q, 利用求和公式解出 a_1 , 得出通项公式;

(2) 利用对数的运算性质求出 b_n , 使用分项求和法和平方差公式计算.

【解答】 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为q, 则 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 q} = \frac{2}{a_1 q^2}$, 即 $1 - \frac{1}{q} = \frac{2}{q^2}$,

解得 $q=2$ 或 $q=-1$.

若 $q = -1$, 则 $S_6 = 0$, 与 $S_6 = 63$ 矛盾, 不符合题意. $\therefore q = 2$,

$$\therefore S_6 = \frac{a_1(1 - 2^6)}{1 - 2} = 63, \therefore a_1 = 1.$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1}.$$

(2) $\because b_n$ 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项,

$$\therefore b_n = \frac{1}{2} (\log_2 a_n + \log_2 a_{n+1}) = \frac{1}{2} (\log_2 2^{n-1} + \log_2 2^n) = n - \frac{1}{2}.$$

$$\therefore b_{n+1} - b_n = 1.$$

$\therefore \{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, 以1为公差的等差数列.

设 $\{-1)^n b_n^2\}$ 的前n项和为 T_n , 则

$$T_n = (-b_1^2 + b_2^2) + (-b_3^2 + b_4^2) + \dots + (-b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2)$$

$$= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{2n-1} + b_{2n}$$

$$= \frac{b_1 + b_{2n}}{2} \cdot 2n = \frac{\frac{1}{2} + 2n - \frac{1}{2}}{2} \cdot 2n$$

$$= 2n^2.$$

【点评】本题考查了等差数列, 等比数列的性质, 分项求和的应用, 属于中档题.

19. (14分) (2016•天津) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为F, 右顶点为A, 已知

$$\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}, \text{ 其中O为原点, } e \text{ 为椭圆的离心率.}$$

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点A的直线l与椭圆交于B (B不在x轴上), 垂直于l的直线与l交于点M, 与y轴交于点H, 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA = \angle MAO$, 求直线l的斜率.

【分析】 (1) 由题意画出图形, 把 $|OF|$ 、 $|OA|$ 、 $|FA|$ 代入 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 转化为

关于a的方程, 解方程求得a值, 则椭圆方程可求;

(2) 由已知设直线l的方程为 $y = k(x - 2)$, ($k \neq 0$), 联立直线方程和椭圆方程, 化为关于x的一元二次方程, 利用根与系数的关系求得B的坐标, 再写出MH所在直线方程, 求出H的坐标, 由 $BF \perp HF$, 得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HF} = (1 - x_1, -y_1) \cdot (1, -y_H) = 0$, 整理得到M的坐标与k的关系, 由 $\angle MOA = \angle MAO$, 得到 $x_0 = 1$, 转化为关于k的等式求得k的值.

【解答】 解: (1) 由 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$,

$$\text{得} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 3}} + \frac{1}{a} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{a^2 - 3}}{a}}{a - \sqrt{a^2 - 3}},$$

$$\text{即} \frac{a+\sqrt{a^2-3}}{a-\sqrt{a^2-3}} = \frac{3\sqrt{a^2-3}}{a(a-\sqrt{a^2-3})},$$

$$\therefore a[a^2 - (a^2 - 3)] = 3a(a^2 - 3), \text{解得 } a=2.$$

$$\therefore \text{椭圆方程为} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

(2) 由已知设直线l的方程为 $y=k(x-2)$, ($k \neq 0$),

设B(x_1, y_1), M($x_0, k(x_0-2)$),

$\because \angle MOA = \angle MAO$,

$\therefore x_0=1$,

再设H(0, y_H),

$$\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{得 } (3+4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0.$$

$$\Delta = (-16k^2)^2 - 4(3+4k^2)(16k^2 - 12) = 144 > 0.$$

$$\text{由根与系数的关系得 } x_1 = \frac{16k^2 - 12}{3+4k^2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{8k^2 - 6}{3+4k^2}, \quad y_1 = k(x_1 - 2) = \frac{-12k}{3+4k^2},$$

$$MH \text{所在直线方程为 } y - k(x_0 - 2) = -\frac{1}{k}(x - x_0),$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 得 } y_H = (k + \frac{1}{k})x_0 - 2k,$$

$\because BF \perp HF$,

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HF} = (1 - x_1, -y_1) \cdot (1, -y_H) = 0,$$

$$\text{即 } 1 - x_1 + y_1 y_H = 1 - \frac{8k^2 - 6}{3+4k^2} - \frac{12k}{3+4k^2} [(k + \frac{1}{k})x_0 - 2k] = 0,$$

$$\text{整理得: } x_0 = \frac{9+20k^2}{12(k^2+1)} = 1, \text{ 即 } 8k^2 = 3.$$

$$\therefore k = -\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 或 } k = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

【点评】本题考查椭圆方程的求法, 考查直线与椭圆位置关系的应用, 体现了“整体运算”思想方法和“设而不求”的解题思想方法, 考查运算能力, 是难题.

20. (14分) (2016•天津) 设函数 $f(x) = x^3 - ax - b$, $x \in \mathbb{R}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 0$;

(3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$

- 【分析】** (1) 求出 $f(x)$ 的导数, 讨论 $a \leq 0$ 时 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上递增; 当 $a > 0$ 时, 由导数大于 0, 可得增区间; 导数小于 0, 可得减区间;
(2) 由条件判断出 $a > 0$, 且 $x_0 \neq 0$, 由 $f'(x_0) = 0$ 求出 x_0 , 分别代入解析式化简 $f(x_0)$, $f(-2x_0)$, 化简整理后可得证;
(3) 设 $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为 M , 根据极值点与区间的关系对 a 分三种情况讨论, 运用 $f(x)$ 单调性和前两问的结论, 求出 $g(x)$ 在区间上的取值范围, 利用 a 的范围化简整理后求出 M , 再利用不等式的性质证明结论成立.

【解答】 解: (1) 若 $f(x) = x^3 - ax - b$, 则 $f'(x) = 3x^2 - a$,

分两种情况讨论:

①、当 $a \leq 0$ 时, 有 $f'(x) = 3x^2 - a \geq 0$ 恒成立,

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$,

②、当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 3x^2 - a = 0$, 解得 $x = -\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 或 $x = \frac{\sqrt{3a}}{3}$,

当 $x > \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 或 $x < -\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $f'(x) = 3x^2 - a > 0$, $f(x)$ 为增函数,

当 $-\frac{\sqrt{3a}}{3} < x < \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $f'(x) = 3x^2 - a < 0$, $f(x)$ 为减函数,

故 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty)$, 减区间为 $(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3})$;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 则必有 $a > 0$, 且 $x_0 \neq 0$,

由题意可得, $f'(x) = 3x^2 - a$, 则 $x_0^2 = \frac{a}{3}$,

进而 $f(x_0) = x_0^3 - ax_0 - b = -\frac{2a}{3}x_0 - b$,

又 $f(-2x_0) = -8x_0^3 + 2ax_0 - b = -\frac{8}{3}x_0 + 2ax_0 - b = f(x_0)$,

由题意及(I) 可得: 存在唯一的实数 x_1 , 满足 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$,
则有 $x_1 = -2x_0$, 故有 $x_1 + 2x_0 = 0$;

(III) 设 $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为 M , $\max\{x, y\}$ 表示 x, y 两个数的最大值,
下面分三种情况讨论:

① 当 $a \geq 3$ 时, $-\frac{\sqrt{3a}}{3} \leq -1 < 1 \leq \frac{\sqrt{3a}}{3}$,

由(I) 知 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的取值范围是 $[f(1), f(-1)]$,

因此 $M = \max\{|f(1)|, |f(-1)|\} = \max\{|1-a-b|, |-1+a-b|\}$

$$= \max\{|a-1+b|, |a-1-b|\} = \begin{cases} a-1+b, & b \geq 0 \\ a-1-b, & b < 0 \end{cases}$$

所以 $M = a-1+|b| \geq 2$

② 当 $\frac{3}{4} \leq a < 3$ 时, $-\frac{2\sqrt{3a}}{3} \leq -1 < -\frac{\sqrt{3a}}{3} < \frac{\sqrt{3a}}{3} < 1 \leq \frac{2\sqrt{3a}}{3}$,

由(I)、(II)知, $f(-1) \geq f\left(-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$, $f(1) \leq f\left(\frac{2\sqrt{3a}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的取值范围是 $[f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right), f\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)]$,

$$\begin{aligned} \text{因此 } M &= \max\{|f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)|, |f\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)|\} = \max\{\left|\frac{2a}{9}\sqrt{3a} - b\right|, \left|\frac{2a}{9}\sqrt{3a} + b\right|\} \\ &= \max\{\left|\frac{2a}{9}\sqrt{3a} + b\right|, \left|\frac{2a}{9}\sqrt{3a} - b\right|\} = \frac{2a}{9}\sqrt{3a} + |b| \geq \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{3 \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

③当 $0 < a < \frac{3}{4}$ 时, $-1 < -\frac{2\sqrt{3a}}{3} < \frac{2\sqrt{3a}}{3} < 1$,

由(I)、(II)知, $f(-1) < f\left(-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$, $f(1) > f\left(\frac{2\sqrt{3a}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的取值范围是 $[f(-1), f(1)]$,

$$\begin{aligned} \text{因此 } M &= \max\{|f(-1)|, |f(1)|\} = \max\{|-1+a-b|, |1-a-b|\} \\ &= \max\{|1-a+b|, |1-a-b|\} = 1-a+|b| > \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

综上所述, 当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【点评】本题考查导数的运用: 求单调区间和最值, 不等式的证明, 注意运用分类讨论的思想方法和转化思想, 考查分析法在证明中的应用, 以及化简整理、运算能力, 属于难题

