2025年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共12页，150分.考试时长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 集合$M=\{x\mid 2x-1>5\},N=\{1,2,3\}$，则$M\cap N=$（　）

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\varnothing$

2. 已知复数z满足$\mathrm{i}\cdot z+2=2\mathrm{i}$，则$|z|=$（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. 8

3. 双曲线$x^2-4y^2=4$的离心率为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\dfrac{5}{4}$　　D. $\sqrt{5}$

4. 为得到函数$y=9^x$的图象，只需把函数$y=3^x$的图象上的所有点（　）

A. 横坐标变成原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变　　B. 横坐标变成原来的2倍，纵坐标不变

C. 纵坐标变成原来的$\dfrac{1}{3}$倍，横坐标不变　　D. 纵坐标变成原来的3倍，横坐标不变

5. 已知$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$a_1=-2$，若a_3,a_4,a_6成等比数列，则$a_{10}=$（　）

A. -20　　B. -18　　C. 16　　D. 18

6. 已知$a>0,b>0$，则（　）

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$　　D. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则"函数 $f(x)$ 的值域为 R"是"对任意 $M\in\mathrm{R}$，存在 $x_0\in D$，使得 $\left|f\left(x_0\right)\right|>M$"的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x)+\cos(\omega x)(\omega>0)$，若 $f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立，且 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点，则 ω 的最小值为（　）

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 3

9. 在一定条件下，某人工智能大语言模型训练 N 个单位的数据量所需要时间 $T=k\log_2 N$（单位：小时），其中 k 为常数. 在此条件下，已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时，训练时间增加 20 小时；当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时，训练时间增加（单位：小时）（　）

A. 2　　B. 4　　C. 20　　D. 40

10. 已知平面直角坐标系 xOy 中，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=2$，设 $C(3,4)$，则 $|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围是（　）

A. $[6,14]$　　B. $[6,12]$　　C. $[8,14]$　　D. $[8,12]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

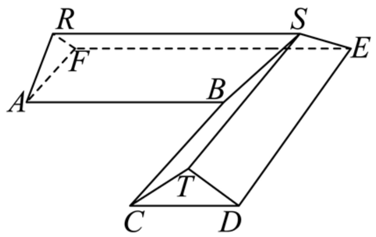
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的顶点到焦点的距离为 3，则 $p=$________.

12. 已知 $(1-2x)^4=a_0-2a_1x+4a_2x^2-8a_3x^3+16a_4x^4$，则 $a_0=$________；$a_1+a_2+a_3+a_4=$________.

13. 已知 $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos(\alpha-\beta)$，写出满足条件的一组 $\alpha=$________，$\beta=$________.

14. 某科技兴趣小组通过 3D 打印机的一个零件可以抽象为如图所示的多面体，其中 $ABCDEF$ 是一个平行多边形，平面 $ARF\perp$ 平面 ABC，平面 $TCD\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$AB\parallel RS\parallel EF\parallel CD$，$AF\parallel ST\parallel BC\parallel ED$，若 $AB=BC=8, AF=CD=4, AR=RF=TC=TD=\frac{5}{2}$，则该多面体的体积为________.



15. 关于定义域为R的函数 $f(x)$，以下说法正确的有________.

①存在在 R 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立;

②存在在 R 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立;

③使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个;

④使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

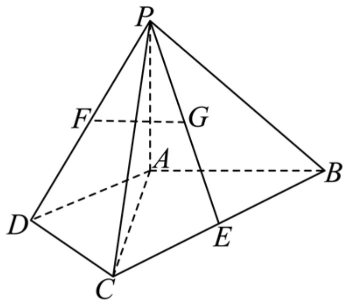
16. 在$\vee ABC$中，$\cos A=-\frac{1}{3}, a\sin C=4\sqrt{2}$.

（1）求 c;

（2）在以下三个条件中选择一个作为已知，使得$\vee ABC$存在，求 BC 的高.

① $a=6$；② $b\sin C=\frac{10\sqrt{2}}{3}$；③$\vee ABC$ 面积为$10\sqrt{2}$.

17. 四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle ACD$ 与$\vee ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle ADC=90°$，$\angle BAC=90°$，E 为 BC 的中点.



（1）F 为 PD 的中点，G 为 PE 的中点，证明：$FG//$面 PAB;

（2）若 $PA\perp$面 $ABCD$，$PA=AC$，求 AB 与面 PCD 所成角的正弦值.

18. 有一道选择题考查了一个知识点，甲、乙两校各随机抽取 100 人，甲校有 80 人答对，乙校有 75 人答对，用频率估计概率.

（1）从甲校随机抽取 1 人，求这个人做对该题目的概率.

（2）从甲、乙两校各随机抽取 1 人，设 X 为做对的人数，求恰有 1 人做对的概率以及 X 的数学期望.

（3）若甲校同学掌握这个知识点则有100%的概率做对该题目，乙校同学掌握这个知识点则有85%的概率做对该题目，未掌握该知识点的同学都是从四个选项里面随机选择一个，设甲校学生掌握该知识点的概率为p_1，乙校学生掌握该知识点的概率为p_2，试比较p_1与p_2的大小（结论不要求证明）

19. 已知$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆上的点到两焦点距离之和为4，

（1）求椭圆方程；

（2）设O为原点，$M\left(x_0,y_0\right)\left(x_0\neq 0\right)$为椭圆上一点，直线$x_0x+2y_0y-4=0$与直线$y=2$，$y=-2$交于$A$，$B$．$\triangle OAM$与$\triangle OBM$的面积为$S_1,S_2$，比较$\dfrac{S_1}{S_2}$与$\dfrac{|OA|}{|OB|}$的大小.

20. 函数$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty), f(0)=0, f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$，$l_1$为$A(a,f(a))(a\neq 0)$处的切线.

（1）$f'(x)$的最大值；

（2）$-1<a<0$，除点A外，曲线$y=f(x)$均在l_1上方；

（3）若$a>0$时，直线l_2过A且与l_1垂直，l_1，l_2分别于x轴的交点为x_1与x_2，求$\dfrac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}$的取值范围.

21. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, M=\left\{\left(x_i,y_i\right)\mid x_i\in A, y_i\in A\right\}$，从$M$中选出$n$个有序数对构成一列：$\left(x_1,y_1\right),\ldots,\left(x_n,y_n\right)$．相邻两项$\left(x_i,y_i\right),\left(x_{i+1},y_{i+1}\right)$满足：$\begin{matrix}\left|x_{i+1}-x_i\right|=3\\ \left|y_{i+1}-y_i\right|=4\end{matrix}$或$\begin{matrix}\left|x_{i+1}-x_i\right|=4\\ \left|y_{i+1}-y_i\right|=3\end{matrix}$，称为$k$列.

（1）若k列的第一项为$(3,3)$，求第二项.

（2）若τ为k列，且满足i为奇数时，$x_i\in\{1,2,7,8\}$；i为偶数时，$x_i\in\{3,4,5,6\}$；判断：$(3,2)$与$(4,4)$能否同时在τ中，并说明；

（3）证明：M中所有元素都不构成k列.