绝密★启用前

2015年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.

4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

1、设全集$\mathrm{U}=\mathrm{R}$．若集合$\mathrm{A}=\{1,2,3,4\}$，$\mathrm{B}=\{x|2\le x\le 3\}$，则$\mathrm{A}\cap \complement_{\mathrm{U}}\mathrm{B}=$__________.

2、若复数z满足$3z+\overline{z}=1+i$，其中i为虚数单位，则$z=$__________.

3、若线性方程组的增广矩阵为$\begin{pmatrix}2 & 3 & c_1\\ 0 & 1 & c_2\end{pmatrix}$、解为$\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}$，则$c_1-c_2=$__________.

4、若正三棱柱的所有棱长均为a，且其体积为$16\sqrt{3}$，则$a=$________.

5、抛物线$y^2=2px$（$p>0$）上的动点Q到焦点的距离的最小值为1，则$p=$__________.

6、若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为2π，则其母线与轴的夹角的大小为________.

7、方程$\log_2\left(9^{x-1}-5\right)=\log_2\left(3^{x-1}-2\right)+2$的解为_________.

8、在报名的3名男教师和6名女教师中，选取5人参加义务献血，要求男、女教师都有，则不同的选取方式的种数为_________（结果用数值表示）.

9、已知点P和Q的横坐标相同，P的纵坐标是Q的纵坐标的2倍，P和Q的轨迹分别为双曲线C_1和C_2．若C_1的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，则C_2的渐近线方程为_________.

10、设 $f^{-1}\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)=2^{x-2}+\dfrac{x}{2}$，$x\in\left[0,2\right]$ 的反函数，则 $y=f\left(x\right)+f^{-1}\left(x\right)$ 的最大值为________.

11、在 $\left(1+x+\dfrac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$ 的展开式中，x^2 项的系数为________（结果用数值表示）.

12、赌博有陷阱．某种赌博每局的规则是：赌客先在标记有 1，2，3，4，5 的卡片中随机摸取一张，将卡片上的数字作为其赌金（单位：元）；随后放回该卡片，再随机摸取两张，将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金（单位：元）．若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金，则 $\mathrm{E}\xi_1-\mathrm{E}\xi_2=$________（元）.

13、已知函数 $f\left(x\right)=\sin x$．若存在 x_1，x_2，$\cdots$，x_m 满足 $0\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le 6\pi$，

且

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_3\right)\right|+\cdots+\left|f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_n\right)\right|=12$（$m\ge 2$，$m\in\mathrm{N}^*$），则

m 的最小值

为________.

14、在锐角三角形 ABC 中，$\tan A=\dfrac{1}{2}$，D 为边 BC 上的点，ΔABD 与 ΔACD 的面积分别为 2 和 4．过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=$________.

二、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

15、设 z_1，$z_2\in\mathrm{C}$，则“z_1、z_2 中至少有一个数是虚数”是“z_1-z_2 是虚数”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

16、已知点 A 的坐标为 $\left(4\sqrt{3},1\right)$，将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 至 OB，则点 B 的纵坐标为（　　）

A．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{11}{2}$

D．$\dfrac{13}{2}$

17、记方程①：$x^2+a_1x+1=0$，方程②：$x^2+a_2x+2=0$，方程③：$x^2+a_3x+4=0$，其中a_1，a_2，a_3是正实数．当a_1，a_2，a_3成等比数列时，下列选项中，能推出方程③无实根的是（　　）

A．方程①有实根，且②有实根　　　　B．方程①有实根，且②无实根

C．方程①无实根，且②有实根　　　　D．方程①无实根，且②无实根

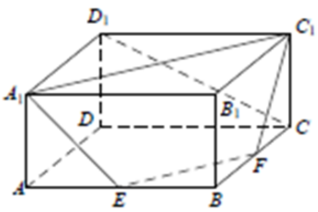
18、设$\mathrm{P}_n\left(x_n,y_n\right)$是直线$2x-y=\dfrac{n}{n+1}$（$n\in\mathrm{N}^*$）与圆$x^2+y^2=2$在第一象限的交点，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-1}{x_n-1}=$（　　）

A．-1　　　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　　　C．1

D．2

三、解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

19、（本题满分12分）如图，在长方体$\mathrm{ABCD}-\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$中，$\mathrm{AA_1}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=2$，$\mathrm{E}$、$\mathrm{F}$分别是$\mathrm{AB}$、$\mathrm{BC}$的中点．证明$\mathrm{A_1}$、$\mathrm{C_1}$、$\mathrm{F}$、$\mathrm{E}$四点共面，并求直线$\mathrm{CD_1}$与平面$\mathrm{A_1C_1FE}$所成的角的大小.

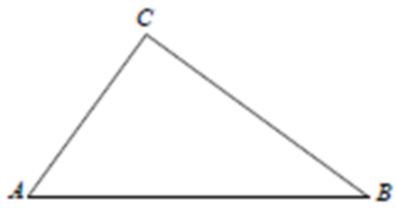


20、（本题满分14分）本题共有2小题，第小题满分6分，第小题满分8分

如图，A，B，C三地有直道相通，$\mathrm{AB}=5$千米，$\mathrm{AC}=3$千米，$\mathrm{BC}=4$千米. 现甲、乙两警员同时从A地出发匀速前往B地，经过t小时，他们之间的距离为$f\left(t\right)$（单位：千米）. 甲的路线是AB，速度为5千米/小时，乙的路线是ACB，速度为8千米/小时. 乙到达B地后原地等待. 设$t=t_1$时乙到达C地.

（1）求t_1与$f\left(t_1\right)$的值；

（2）已知警员的对讲机的有效通话距离是3千米. 当$t_1\le t\le 1$时，求$f\left(t\right)$的表达式，并判断$f\left(t\right)$在$\left[t_1,1\right]$上得最大值是否超过3？说明理由.



21、（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题6分，第2小题8分.

已知椭圆$x^2+2y^2=1$，过原点的两条直线l_1和l_2分别于椭圆交于A、B和C、D，记得到的平行四边形ABCD的面积为S.

（1）设$A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，用A、C的坐标表示点C到直线l_1的距离，并证明

$S=2|x_1y_1-x_2y_1|$；

（2）设l_1与l_2的斜率之积为$-\frac{1}{2}$，求面积S的值.

22、（本题满分16分）本题共有3个小题.第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分.

已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足$a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$，$n\in \mathrm{N}^*$.

（1）若$b_n=3n+5$，且$a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$\{a_n\}$的第n_0项是最大项，即$a_{n_0}>a_n$（$n\in \mathrm{N}^*$），求证：数列$\{b_n\}$的第n_0项是最大项；

（3）设$a_1=\lambda<0$，$b_n=\lambda^n$（$n\in \mathrm{N}^*$），求λ的取值范围，使得$\{a_n\}$有最大值M与最小值m，且$\frac{\mathrm{M}}{m}\in(-2,2)$.

23、（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分.

对于定义域为R的函数$g(x)$，若存在正常数T，使得$\cos g(x)$是以T为周期的函数，则称$g(x)$为余弦周期函数，且称T为其余弦周期.已知$f(x)$是以T为余弦周期的余弦周期函数，其值域为R.设$f(x)$单调递增，$f(0)=0$，$f(\mathrm{T})=4\pi$.

（1）验证$h(x)=x+\sin\frac{x}{3}$是以6π为周期的余弦周期函数；

（2）设$a<b$.证明对任意$c\in[f(a),f(b)]$，存在$x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)=c$；

（3）证明："u_0为方程$\cos f\left(x\right)=1$在$\left[0,\mathrm{T}\right]$上得解"的充要条件是"$u_0+\mathrm{T}$为方程$\cos f\left(x\right)=1$在$\left[\mathrm{T},2\mathrm{T}\right]$上有解"，并证明对任意$x\in\left[0,\mathrm{T}\right]$都有$f\left(x+\mathrm{T}\right)=f\left(x\right)+f\left(\mathrm{T}\right)$.