

2015年浙江省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分 2015年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）数学（理科）

1. (5分) (2015·浙江) 已知集合 $P=\{x|x^2-2x\geq 0\}$, $Q=\{x|1 < x \leq 2\}$, 则 $(C_R P) \cap Q = (\quad)$

- A [0, 1] B (0, 2] C (1, 2) D [1, 2]

考点：交、并、补集的混合运算.

专题：集合.

分析：求出P中不等式的解集确定出P，求出P补集与Q的交集即可.

解答：解：由P中不等式变形得： $x(x-2)\geq 0$,

解得： $x\leq 0$ 或 $x\geq 2$, 即 $P=(-\infty, 0]\cup[2, +\infty)$,

$$\therefore C_R P=(0, 2),$$

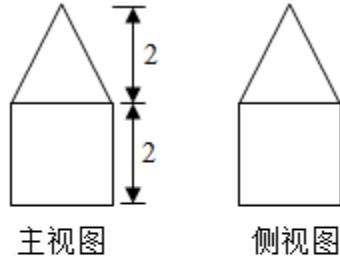
$$\because Q=(1, 2],$$

$$\therefore (C_R P) \cap Q=(1, 2),$$

故选：C.

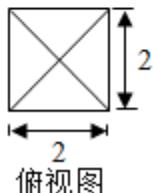
点评：此题考查了交、并、补集的混合运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

2. (5分) (2015·浙江) 某几何体的三视图如图所示(单位: cm), 则该几何体的体积是()



主视图

侧视图



俯视图

A 8cm^3

B 12cm^3

C $\frac{32}{3}\text{cm}^3$

D $\frac{40}{3}\text{cm}^3$

考点：由三视图求面积、体积.

点：

专题：空间位置关系与距离.

题：

分析：判断几何体的形状，利用三视图的数据，求几何体的体积即可.

析：

解: 解: 由三视图可知几何体是下部为棱长为 2 的正方体, 上部是底面为边长 2 的正方形奥为 2 的正四棱锥,

所求几何体的体积为: $2^3 + \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$.

故选: C.

点评: 本题考查三视图与直观图的关系的判断, 几何体的体积的求法, 考查计算能力.

3. (5 分) (2015•浙江) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 d 不为零, 前 n 项和是 S_n , 若 a_3, a_4, a_8 成等比数列, 则 ()

- A. $a_1d > 0, dS_4 > 0$ B. $a_1d < 0, dS_4 < 0$ C. $a_1d > 0, dS_4 < 0$ D. $a_1d < 0, dS_4 > 0$

考点: 等差数列与等比数列的综合.

点:

专题: 等差数列与等比数列.

题:

分析: 由 a_3, a_4, a_8 成等比数列, 得到首项和公差的关系, 即可判断 a_1d 和 dS_4 的符号.

解析:

解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 则 $a_3=a_1+2d, a_4=a_1+3d, a_8=a_1+7d$,

答: 由 a_3, a_4, a_8 成等比数列, 得 $(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+7d)$, 整理得: $3a_1d=-5d^2$.

$$\because d \neq 0, \therefore d = -\frac{3}{5}a_1,$$

$$\therefore a_1d = -\frac{3}{5}a_1^2 < 0,$$

$$dS_4 = -\frac{3}{5}a_1 \left(4a_1 + \frac{4 \times 3 \left(-\frac{3}{5}a_1 \right)}{2} \right) = -\frac{3}{5}a_1 \left(4a_1 - \frac{18}{5}a_1 \right) = -\frac{6a_1^2}{25} < 0.$$

故选: B.

点评: 本题考查了等差数列和等比数列的性质, 考查了等差数列的前 n 项和, 是基础题.

4. (5 分) (2015•浙江) 命题“ $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \in \mathbb{N}^*$ 且 $f(n) \leq n$ ”的否定形式是 ()

- A. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \notin \mathbb{N}^* \text{ 且 } f(n) > n$ B. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \notin \mathbb{N}^* \text{ 或 } f(n) > n$
C. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, f(n_0) \notin \mathbb{N}^* \text{ 且 } f(n_0) > n_0$ D. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, f(n_0) \notin \mathbb{N}^* \text{ 或 } f(n_0) > n_0$

考点: 命题的否定.

点:

专题: 简易逻辑.

题:

分析: 根据全称命题的否定是特称命题即可得到结论.

析：

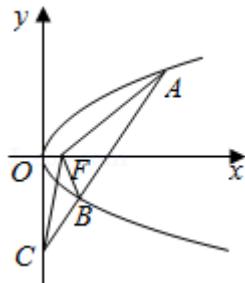
解：命题为全称命题，

答：则命题的否定为： $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $f(n_0) \notin \mathbb{N}^*$ 或 $f(n_0) > n_0$ ，
故选：D.

点 本题主要考查含有量词的命题的否定，比较基础。

评：

5. (5分) (2015·浙江) 如图，设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，不经过焦点的直线上有三个不同的点 A, B, C，其中点 A, B 在抛物线上，点 C 在 y 轴上，则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比是（ ）



- A. $\frac{|BF| - 1}{|AF| - 1}$ B. $\frac{|BF|^2 - 1}{|AF|^2 - 1}$ C. $\frac{|BF| + 1}{|AF| + 1}$ D. $\frac{|BF|^2 + 1}{|AF|^2 + 1}$

考 直线与圆锥曲线的关系。

点：

专 圆锥曲线的定义、性质与方程。

题：

分析：根据抛物线的定义，将三角形的面积关系转化为 $\frac{|BC|}{|AC|}$ 的关系进行求解即可。

解：如图所示，抛物线的准线 DE 的方程为 $x = -1$ ，

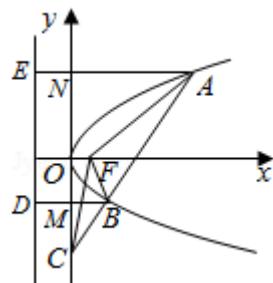
答：过 A, B 分别作 $AE \perp DE$ 于 E, 交 y 轴于 N, $BD \perp DE$ 于 E, 交 y 轴于 M，
由抛物线的定义知 $BF = BD$, $AF = AE$,

则 $|BM| = |BD| - 1 = |BF| - 1$,

$|AN| = |AE| - 1 = |AF| - 1$,

$$\text{则 } \frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|AN|} = \frac{|BF| - 1}{|AF| - 1},$$

故选：A



点评：本题主要考查三角形的面积关系，利用抛物线的定义进行转化是解决本题的关键.

6. (5分) (2015·浙江) 设 A, B 是有限集, 定义: $d(A, B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$, 其中 $\text{card}(A)$ 表示有限集 A 中的元素个数 ()

命题①: 对任意有限集 A, B , “ $A \neq B$ ”是“ $d(A, B) > 0$ ”的充分必要条件;

命题②: 对任意有限集 A, B, C , $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$

- A. 命题①和命题②都成立
- B. 命题①和命题②都不成立
- C. 命题①成立, 命题②不成立
- D. 命题①不成立, 命题②成立

考点: 复合命题的真假.

点:

专题: 集合; 简易逻辑.

题:

分析: 命题①根据充要条件分充分性和必要性判断即可,

③借助新定义, 根据集合的运算, 判断即可.

解: 命题①: 对任意有限集 A, B , 若“ $A \neq B$ ”, 则 $A \cup B \neq A \cap B$, 则 $\text{card}(A \cup B) > \text{card}(A \cap B)$, 故“ $d(A, B) > 0$ ”成立,

若 $d(A, B) > 0$, 则 $\text{card}(A \cup B) > \text{card}(A \cap B)$, 则 $A \cup B \neq A \cap B$, 故 $A \neq B$ 成立, 故命题①成立,

命题②, $d(A, B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$, $d(B, C) = \text{card}(B \cup C) - \text{card}(B \cap C)$,

$\therefore d(A, B) + d(B, C) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \cup C) - \text{card}(B \cap C) = [\text{card}(A \cup B) + \text{card}(B \cup C)] - [\text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \cap C)]$

$\geq \text{card}(A \cup C) - \text{card}(A \cap C) = d(A, C)$, 故命题②成立,

故选: A

点评: 本题考查了, 元素和集合的关系, 以及逻辑关系, 分清集合之间的关系与各集合元素个数之间的关系, 注意本题对充要条件的考查. 集合的元素个数, 体现两个集合的关系, 但仅凭借元素个数不能判断集合间的关系, 属于基础题.

7. (5分) (2015·浙江) 存在函数 $f(x)$ 满足, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 ()

- A. $f(\sin 2x) = \sin x$
- B. $f(\sin 2x) = x^2 + x$
- C. $f(x^2 + 1) = |x + 1|$
- D. $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$

考点: 函数解析式的求解及常用方法.

点:

专题: 函数的性质及应用.

题:

分析: 利用 x 取特殊值, 通过函数的定义判断正误即可.

解:

A. 取 $x=0$, 则 $\sin 2x=0$, $\therefore f(0)=0$;

B. 取 $x=\frac{\pi}{2}$, 则 $\sin 2x=0$, $\therefore f(0)=1$;

$\therefore f(0)=0$, 和 1, 不符合函数的定义;

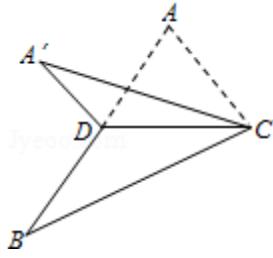
C. 不存在函数 $f(x)$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(\sin 2x) = \sin x$;

- B. 取 $x=0$, 则 $f(0)=0$;
 取 $x=\pi$, 则 $f(0)=\pi^2+\pi$;
 $\therefore f(0)$ 有两个值, 不符合函数的定义;
 \therefore 该选项错误;
- C. 取 $x=1$, 则 $f(2)=2$, 取 $x=-1$, 则 $f(2)=0$;
 这样 $f(2)$ 有两个值, 不符合函数的定义;
 \therefore 该选项错误;
- D. 令 $|x+1|=t$, $t \geq 0$, 则 $f(t^2-1)=t$;
 令 $t^2-1=x$, 则 $t=\sqrt{|x+1|}$;
 $\therefore f(x)=\sqrt{|x+1|}$;
 即存在函数 $f(x)=\sqrt{|x+1|}$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x^2+2x)=|x+1|$;
 \therefore 该选项正确.

故选: D.

点评: 本题考查函数的应用, 基本知识的考查, 但是思考问题解决问题的方法比较难.

8. (5分) (2015·浙江) 如图, 已知 $\triangle ABC$, D 是 AB 的中点, 沿直线 CD 将 $\triangle ACD$ 折成 $\triangle A'CD$, 所成二面角 $A'-CD-B$ 的平面角为 α , 则 ()



- A. $\angle A'DB \leq \alpha$ B. $\angle A'DB \geq \alpha$ C. $\angle A'CB \leq \alpha$ D. $\angle A'CB \geq \alpha$

考点: 二面角的平面角及求法.

点:

专题: 创新题型; 空间角.

题:

分析: 解: 画出图形, 分 $AC=BC$, $AC \neq BC$ 两种情况讨论即可.

解析:

解: ①当 $AC=BC$ 时, $\angle A'DB=\alpha$;

答: ②当 $AC \neq BC$ 时, 如图, 点 A' 投影在 AE 上,

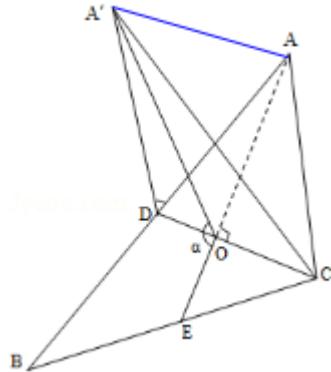
$\alpha=\angle A'OE$, 连结 AA' ,

易得 $\angle ADA' < \angle AOA'$,

$\therefore \angle A'DB > \angle A'OE$, 即 $\angle A'DB > \alpha$

综上所述, $\angle A'DB \geq \alpha$,

故选: B.



点评: 本题考查空间角的大小比较, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分.

9. (6分) (2015·浙江) 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的焦距是_____，渐近线方程是_____.

考 双曲线的简单性质.

点:

专 计算题; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

题:

分 确定双曲线中的几何量, 即可求出焦距、渐近线方程.

析:

解 答: 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 中, $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$,

\therefore 焦距是 $2c = 2\sqrt{3}$, 渐近线方程是 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

故答案为: $2\sqrt{3}$; $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

点 本题考查双曲线的方程与性质, 考查学生的计算能力, 比较基础.

评:

10. (6分)(2015·浙江) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3, & x \geq 1 \\ \lg(x^2 + 1), & x < 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-3)) =$ _____,

$f(x)$ 的最小值是_____.

考 函数的值.

点:

专 计算题; 函数的性质及应用.

题:

分 根据已知函数可先求 $f(-3) = 1$, 然后代入可求 $f(f(-3))$; 由于 $x \geq 1$ 时, $f(x)$

析: $= x + \frac{2}{x} - 3$, 当 $x < 1$ 时, $f(x) = \lg(x^2 + 1)$, 分别求出每段函数的取值范围, 即可求解

解

答: 解: $\because f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3, & x \geq 1 \\ \lg(x^2 + 1), & x < 1 \end{cases}$,

$\therefore f(-3) = \lg 10 = 1$,

则 $f(f(-3)) = f(1) = 0$,

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x + \frac{2}{x} - 3 \geq 2\sqrt{2} - 3$, 即最小值 $2\sqrt{2} - 3$,

当 $x < 1$ 时, $x^2 + 1 \geq 1$, $f(x) = \lg(x^2 + 1) \geq 0$ 最小值 0,

故 $f(x)$ 的最小值是 $2\sqrt{2} - 3$.

故答案为: 0; $2\sqrt{2} - 3$.

点 本题主要考查了分段函数的函数值的求解, 属于基础试题.

评:

11. (6 分) (2015•浙江) 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$ 的最小正周期是_____, 单调递减区间是_____.

考 两角和与差的正弦函数; 三角函数的周期性及其求法; 正弦函数的单调性.

点:

专 三角函数的求值.

题:

分 由三角函数公式化简可得 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2}$, 易得最小正周期, 解不等

析: 式 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 可得函数的单调递减区间.

解: 化简可得 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$

答: $= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2}$,

\therefore 原函数的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 可得 $k\pi + \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{8}$,

\therefore 函数的单调递减区间为 $[k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{7\pi}{8}]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

故答案为: π ; $[k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{7\pi}{8}]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

点 本题考查三角函数的化简, 涉及三角函数的周期性和单调性, 属基础题.

评:

12. (4 分) (2015•浙江) 若 $a = \log_4 3$, 则 $2^a + 2^{-a} = _____$.

考 对数的运算性质.

点:

专 函数的性质及应用.

题:

分 直接把 a 代入 2^a+2^{-a} , 然后利用对数的运算性质得答案.

析:

解: $\because a=\log_4 3$, 可知 $4^a=3$,

答: 即 $2^a=\sqrt{3}$,

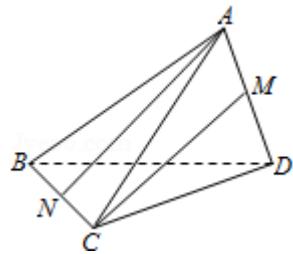
$$\text{所以 } 2^a+2^{-a}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

点 本题考查对数的运算性质, 是基础的计算题.

评:

13. (4分) (2015•浙江) 如图, 三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB=AC=BD=CD=3$, $AD=BC=2$, 点 M , N 分别是 AD , BC 的中点, 则异面直线 AN , CM 所成的角的余弦值是_____.



考 异面直线及其所成的角.

点:

专 空间角.

题:

分 连结 ND , 取 ND 的中点为: E , 连结 ME 说明异面直线 AN , CM 所成的角就是 $\angle EMC$ 通

析: 过解三角形, 求解即可.

解: 连结 ND , 取 ND 的中点为: E , 连结 ME , 则 $ME \parallel AN$, 异面直线 AN , CM 所成的角就是 $\angle EMC$,

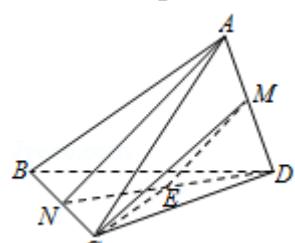
$$\therefore AN=2\sqrt{2},$$

$$\therefore ME=\sqrt{2}=EN, MC=2\sqrt{2},$$

$$\text{又} \because EN \perp NC, \therefore EC=\sqrt{EN^2+NC^2}=\sqrt{3},$$

$$\therefore \cos \angle EMC = \frac{EM^2+MC^2-EC^2}{2EM \cdot MC} = \frac{2+8-3}{2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{7}{8}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{8}.$$



点 本题考查异面直线所成角的求法, 考查空间想象能力以及计算能力.

评:

14. (4分) (2015·浙江) 若实数 x, y 满足 $x^2+y^2\leq 1$, 则 $|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 的最小值是_____.

考 函数的最值及其几何意义.

点:

专 不等式的解法及应用; 直线与圆.

题:

分 根据所给 x, y 的范围, 可得 $|6-x-3y|=6-x-3y$, 再讨论直线 $2x+y-2=0$ 将圆 $x^2+y^2=1$ 分析: 成两部分, 分别去绝对值, 运用线性规划的知识, 平移即可得到最小值.

解 解: 由 $x^2+y^2\leq 1$, 可得 $6-x-3y>0$, 即 $|6-x-3y|=6-x-3y$,

答: 如图直线 $2x+y-2=0$ 将圆 $x^2+y^2=1$ 分成两部分,

在直线的上方(含直线), 即有 $2x+y-2\geq 0$, 即 $|2x+y-2|=2x+y-2$,

此时 $|2x+y-2|+|6-x-3y|=(2x+y-2)+(6-x-3y)=x-2y+4$,

利用线性规划可得在 $A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 处取得最小值 3;

在直线的下方(含直线), 即有 $2x+y-2\leq 0$,

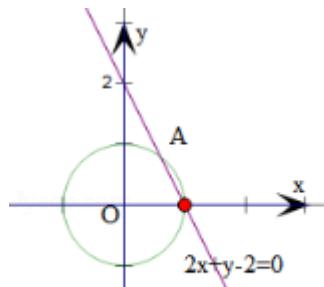
即 $|2x+y-2|=- (2x+y-2)$,

此时 $|2x+y-2|+|6-x-3y|=- (2x+y-2)+(6-x-3y)=8-3x-4y$,

利用线性规划可得在 $A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 处取得最小值 3.

综上可得, 当 $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{4}{5}$ 时, $|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 的最小值为 3.

故答案为: 3.



点评: 本题考查直线和圆的位置关系, 主要考查二元函数在可行域内取得最值的方法, 属于中档题.

15. (6分) (2015·浙江) 已知 \vec{e}_1, \vec{e}_2 是空间单位向量, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$, 若空间向量 \vec{b} 满足

$\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{e}_2 = \frac{5}{2}$, 且对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$,

$|\vec{b} - (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)| \geq |\vec{b} - (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2)| = 1$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$), 则

$$x_0 = \underline{\hspace{2cm}}, y_0 = \underline{\hspace{2cm}}, |\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

考 空间向量的数量积运算; 平面向量数量积的运算.

点:

专 创新题型; 空间向量及应用.

题：

由题意和数量积的运算可得 $\langle \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \rangle = \frac{\pi}{3}$, 不妨设 $\overrightarrow{e_1} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 0, 0)$,
 由已知可解 $\overrightarrow{b} = (\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, t)$, 可得 $|\overrightarrow{b}| - |\overrightarrow{x e_1 + y e_2}|^2 = (x + \frac{y-4}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 + t^2$, 由题意
 可得当 $x=x_0=1$, $y=y_0=2$ 时, $(x + \frac{y-4}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 + t^2$ 取最小值 1, 由模长公式可得 $|\overrightarrow{b}|$.

解答:

$$\text{解: } \because \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = |\overrightarrow{e_1}| |\overrightarrow{e_2}| \cos \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle = \cos \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle = \frac{1}{2},$$

$\therefore \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \frac{\pi}{3}$, 不妨设 $\overrightarrow{e_1} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{b} = (m, n, t)$,

则由题意可知 $\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}n = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{e}_2 = m - \frac{5}{2}$, 解得 $m = \frac{5}{2}$, $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \vec{b} = (\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, t)$,

$$\therefore \vec{b} - (\vec{x}\vec{e}_1 + \vec{y}\vec{e}_2) = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - y, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x, t\right)$$

$$\therefore |\vec{b} - (\vec{x e_1} + \vec{y e_2})|^2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + t^2$$

$$=x^2+xy+y^2 - 4x - 5y+t^2+7 = \left(x+\frac{y-4}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 + t^2,$$

由题意当 $x=x_0=1$, $y=y_0=2$ 时, $(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{2}(y-2)^2$

$$\text{此时 } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

故管窗头 $-1 - 2 - 2\sqrt{2}$

故答案为：1；2； $2\sqrt{2}$

点评:

答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (14分) (2015·浙江) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角A, B, C所对的边分别为a, b, c, 已

$$\text{知 } A = \frac{\pi}{4}, b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2.$$

(1) 求 $\tan C$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 求 b 的值.

考 余弦定理.

点：

专题解三角形.

题：

(1) 由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{4}$, 已知 $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$. 可得 $b = \frac{3\sqrt{2}c}{4}$,

$a = \frac{\sqrt{10}}{4}c$. 利用余弦定理可得 $\cos C$. 可得 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$, 即可得出 $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C}$.

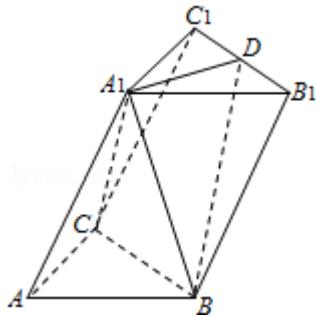
(2) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4}c \times \frac{3\sqrt{2}}{4}c \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 3$, 可得 c, 即可得出 b.

解答: 解: (1) $\because A = \frac{\pi}{4}$, \therefore 由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{4}$, $\therefore b^2 - a^2 = \sqrt{2}bc - c^2$,
 又 $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$. $\therefore \sqrt{2}bc - c^2 = \frac{1}{2}c^2$. $\therefore \sqrt{2}b = \frac{3}{2}c$. 可得 $b = \frac{3\sqrt{2}}{4}c$,
 $\therefore a^2 = b^2 - \frac{1}{2}c^2 = \frac{5}{8}c^2$, 即 $a = \frac{\sqrt{10}}{4}c$.
 $\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\frac{5}{8}c^2 + \frac{9}{8}c^2 - c^2}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{4}c \times \frac{3\sqrt{2}}{4}c} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
 $\because C \in (0, \pi)$,
 $\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
 $\therefore \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = 2$.
(2) $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4}c \times \frac{3\sqrt{2}}{4}c \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 3$,
 解得 $c = 2\sqrt{2}$.
 $\therefore b = \frac{3\sqrt{2}c}{4} = 3$.

点评: 本题考查了正弦定理、余弦定理、同角三角形基本关系式、三角形面积计算公式, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

17. (15分) (2015·浙江) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, $A_1A = 4$, A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点, D 是 B_1C_1 的中点.

- (1) 证明: $A_1D \perp$ 平面 A_1BC ;
- (2) 求二面角 $A_1 - BD - B_1$ 的平面角的余弦值.



考点: 二面角的平面角及求法; 直线与平面垂直的判定.

点:

专题: 空间位置关系与距离; 空间角.

题:

- 分析:** (1) 以 BC 中点 O 为坐标原点, 以 OB 、 OA 、 OA_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建系, 通过 $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 及线面垂直的判定定理即得结论;

(2) 所求值即为平面 A_1BD 的法向量与平面 B_1BD 的法向量的夹角的余弦值的绝对值的相反数, 计算即可.

解: (1) 证明: 如图, 以 BC 中点 O 为坐标原点, 以 OB 、 OA 、 OA_1 所在直线分别为

答： x、y、z 轴建系。

$$\text{则 } BC = \sqrt{2}AC = 2\sqrt{2}, A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{14},$$

易知 $A_1(0, 0, \sqrt{14})$, $B(\sqrt{2}, 0, 0)$, $C(-\sqrt{2}, 0, 0)$,
 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, $D(0, -\sqrt{2}, \sqrt{14})$, $B_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{14})$,

$$\overrightarrow{A_1D} = (0, -\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{14}),$$

$$\overrightarrow{B_1D} = (-\sqrt{2}, 0, 0), \overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{2}, 0, 0), \overrightarrow{OA_1} = (0, 0, \sqrt{14}),$$

$$\because \overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{OA_1} = 0, \therefore A_1D \perp OA_1,$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \therefore A_1D \perp BC,$$

又 $\because OA_1 \cap BC = O$, $\therefore A_1D \perp \text{平面 } A_1BC$;

(2) 解：设平面 A_1BD 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} -\sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{14}z = 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } z=1, \text{ 得 } \vec{m} = (\sqrt{7}, 0, 1),$$

设平面 B_1BD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

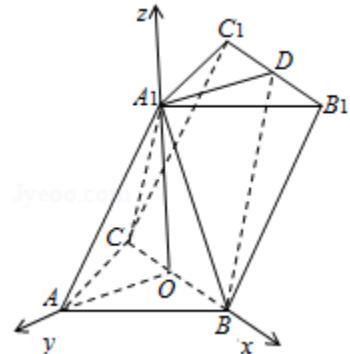
$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{14}z = 0 \\ -\sqrt{2}x = 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } z=1, \text{ 得 } \vec{n} = (0, \sqrt{7}, 1),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{8},$$

又 \because 该二面角为钝角,

\therefore 二面角 $A_1 - BD - B_1$ 的平面角的余弦值为 $-\frac{1}{8}$.



点 本题考查空间中线面垂直的判定定理，考查求二面角的三角函数值，注意解题方法

评： 的积累，属于中档题.

18. (15分) (2015•浙江) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，记 $M(a, b)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值.

(1) 证明：当 $|a| \geq 2$ 时， $M(a, b) \geq 2$ ；

(2) 当 a, b 满足 $M(a, b) \leq 2$ 时，求 $|a| + |b|$ 的最大值.

考点：

二次函数在闭区间上的最值.

专题：

函数的性质及应用.

分析：

(1) 明确二次函数的对称轴，区间的端点值，由 a 的范围明确函数的单调性，结合已知以及三角不等式变形所求得到证明；

(2) 讨论 $a=b=0$ 以及分析 $M(a, b) \leq 2$ 得到 $-3 \leq a+b \leq 1$ 且 $-3 \leq b-a \leq 1$ ，进一步求出 $|a|+|b|$ 的求值.

解答：

解：(1) 由已知可得 $f(1) = 1+a+b$, $f(-1)$

$$= 1-a+b, \text{ 对称轴为 } x = -\frac{a}{2},$$

$$\text{因为 } |a| \geq 2, \text{ 所以 } -\frac{a}{2} \leq -1 \text{ 或 } -\frac{a}{2} \geq 1,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调，

$$\text{所以 } M(a, b) = \max\{|f(1)|, |f(-1)|\} = \max\{|1+a+b|, |1-a+b|\},$$

$$\text{所以 } M(a, b) \geq \frac{1}{2}(|1+a+b| + |1-a+b|) \geq \frac{1}{2}|(1+a+b) - (1-a+b)| \geq \frac{1}{2}|2a| \geq 2;$$

(2) 当 $a=b=0$ 时， $|a|+|b|=0$ 又 $|a|+|b| \geq 0$ ，所以 0 为最小值，符合题意；

又对任意 $x \in [-1, 1]$. 有 $-2 \leq x^2 + ax + b \leq 2$ 得到 $-3 \leq a+b \leq 1$ 且 $-3 \leq b-a \leq 1$ ，易知

$|a|+|b|=\max\{|a-b|, |a+b|\}=3$ ，在 $b=-1, a=2$ 时符合题意，

所以 $|a|+|b|$ 的最大值为 3.

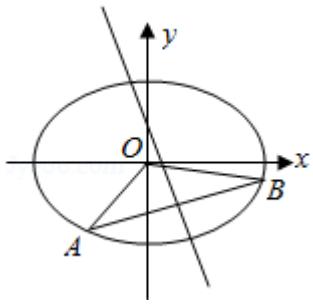
点评：

本题考查了二次函数闭区间上的最值求法；解答本题的关键是正确理解 $M(a, b)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值，以及利用三角不等式变形.

19. (15分) (2015•浙江) 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上两个不同的点 A, B 关于直线 $y=mx+\frac{1}{2}$ 对称.

(1) 求实数 m 的取值范围；

(2) 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值 (O 为坐标原点).



考 直线与圆锥曲线的关系.

点:

专 创新题型; 圆锥曲线中的最值与范围问题.

题:

分 (1) 由题意, 可设直线 AB 的方程为 $x = -my + n$, 代入椭圆方程可得 (m^2+2)

析: $y^2 - 2mny + n^2 - 2 = 0$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 可得 $\Delta > 0$, 设线段 AB 的中点 $P(x_0, y_0)$, 利用中点坐标公式及其根与系数的可得 P , 代入直线 $y = mx + \frac{1}{2}$, 可得 $n = -\frac{m^2+2}{2m}$, 代入 $\Delta > 0$, 即可解出.

(2) 直线 AB 与 x 轴交点横坐标为 n, 可得 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|n| |y_1 - y_2|$, 再利用均值不等式即可得出.

解
答:

解: (1) 由题意, 可设直线 AB 的方程为 $x = -my + n$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 可得

$$(m^2+2)y^2 - 2mny + n^2 - 2 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 由题意, $\Delta = 4m^2n^2 - 4(m^2+2)(n^2 - 2) = 8(m^2 - n^2 + 2) > 0$,

$$\text{设线段 AB 的中点 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{mn}{m^2+2}, x_0 = -mx - \frac{mn}{m^2+2} + n = \frac{2n}{m^2+2},$$

$$\text{由于点 } P \text{ 在直线 } y = mx + \frac{1}{2} \text{ 上, } \therefore \frac{mn}{m^2+2} = \frac{2n}{m^2+2} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore n = -\frac{m^2+2}{2m}, \text{ 代入 } \Delta > 0, \text{ 可得 } 3m^4 + 4m^2 - 4 > 0,$$

$$\text{解得 } m^2 > \frac{2}{3}, \therefore m < -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 或 } m > \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) 直线 AB 与 x 轴交点纵坐标为 n,

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|n| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2}|n| \cdot \frac{\sqrt{8(m^2 - n^2 + 2)}}{m^2 + 2} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{n^2(m^2 - n^2 + 2)}{(m^2 + 2)^2}},$$

$$\text{由均值不等式可得: } n^2(m^2 - n^2 + 2) \leq \left(\frac{n^2 + m^2 - n^2 + 2}{2}\right)^2 = \frac{(m^2 + 2)^2}{4},$$

$\therefore S_{\triangle AOB} \leq \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{4}}$, 当且仅当 $n^2 = m^2 - n^2 + 2$, 即 $2n^2 = m^2 + 2$, 又 $\because n = -\frac{m^2+2}{2m}$, 解得 $m = \pm\sqrt{2}$,

当且仅当 $m = \pm\sqrt{2}$ 时, $S_{\triangle AOB}$ 取得最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

点评: 本题考查了椭圆的定义标准方程及其性质、直线与椭圆相交问题转化为方程联立可得根与系数的关系、中点坐标公式、线段垂直平分线的性质、三角形面积计算公式、弦长公式、均值不等式的性质, 考查了推理能力与计算能力, 属于难题.

20. (15 分) 20. (15 分) (2015•浙江) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

(1) 证明: $1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$);

(2) 设数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明 $\frac{1}{2(n+2)} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2(n+1)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

考点: 数列的求和; 数列与不等式的综合.

点:

专题: 创新题型; 点列、递归数列与数学归纳法.

题:

分析:

(1) 通过题意易得 $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 利用 $a_n - a_{n+1} = a_n^2$ 可得 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$, 利用

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n^2 - a_n} = \frac{1}{1 - a_n} \leq 2, \text{ 即得结论;}$$

(2) 通过 $a_n^2 = a_n - a_{n+1}$ 累加得 $S_n = \frac{1}{2} - a_{n+1}$, 利用数学归纳法可证明 $\frac{1}{1+n} \geq a_n \geq \frac{1}{2n}$ ($n \geq 2$), 从

$$\text{而 } \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} - a_{n+1}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}}{n}, \text{ 化简即得结论.}$$

解答: 证明: (1) 由题意可知: $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

$$\text{又} \because a_2 = a_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2,$$

$$\text{又} \because a_n - a_{n+1} = a_n^2, \therefore a_n > a_{n+1}, \therefore \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1,$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n+1} - a_n^2} = \frac{1}{1 - a_n} \leq 2,$$

$$\therefore 1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2 \quad (n \in N^*);$$

$$(2) \text{ 由已知, } a_n^2 = a_n - a_{n+1}, \quad a_{n-1}^2 = a_{n-1} - a_n, \quad \dots, \quad a_1^2 = a_1 - a_2,$$

$$\text{累加, 得 } S_n = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_1^2 = a_1 - a_{n+1} = \frac{1}{2} - a_{n+1},$$

易知当 $n=1$ 时, 要证式子显然成立;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{S_n}{n} = \frac{\frac{1}{2} - a_{n+1}}{n}.$$

$$\text{下面证明: } \frac{1}{1+n} \geq a_n \geq \frac{1}{2n} \quad (n \geq 2).$$

$$\text{易知当 } n=2 \text{ 时成立, 假设当 } n=k \text{ 时也成立, 则 } a_{k+1} = -\left(a_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

$$\text{由二次函数单调性知: } a_{n+1} \geq -\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{2k-1}{4k^2} \geq \frac{1}{2(k+1)},$$

$$a_{n+1} \leq -\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{k}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k+2},$$

$$\therefore \frac{1}{2(k+1)} \leq \frac{1}{a_{k+1}} \leq \frac{1}{k+2}, \text{ 即当 } n=k+1 \text{ 时仍然成立,}$$

$$\text{故对 } n \geq 2, \text{ 均有 } \frac{1}{1+n} \geq a_n \geq \frac{1}{2n},$$

$$\therefore \frac{1}{2(n+1)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} - a_{n+1}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}}{n} = \frac{1}{2(n+2)},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2(n+2)} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2(n+1)} \quad (n \in N^*).$$

点评: 本题是一道数列与不等式的综合题, 考查数学归纳法, 对表达式的灵活变形是解决本题的关键, 注意解题方法的积累, 属于难题.