

2015年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. (5分) 设复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z}=i$, 则 $|z|=(\quad)$
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
2. (5分) $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ = (\quad)$
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
3. (5分) 设命题 p : $\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为(\quad)
A. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq 2^n$
C. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq 2^n$ D. $\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 = 2^n$
4. (5分) 投篮测试中, 每人投3次, 至少投中2次才能通过测试. 已知某同学每次投篮投中的概率为0.6, 且各次投篮是否投中相互独立, 则该同学通过测试的概率为(\quad)
A. 0.648 B. 0.432 C. 0.36 D. 0.312
5. (5分) 已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是 C 的左、右两个焦点, 若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$, 则 y_0 的取值范围是(\quad)
A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ B. $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6})$
C. $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ D. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$
6. (5分) 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?”其意思为: “在屋内墙角处堆放米(如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为8尺, 米堆的高为5尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少?”已知1斛米的体积约为1.62立方尺, 圆周率约为3, 估算出堆放的米约有(\quad)



A. 14斛

B. 22斛

C. 36斛

D. 66斛

7. (5分) 设D为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$, 则()

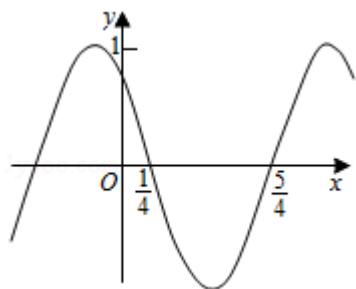
A. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

8. (5分) 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\phi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为()



A. $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

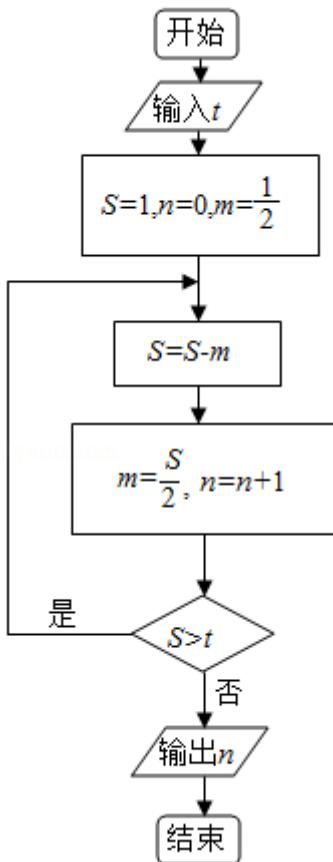
B. $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

C. $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

D. $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

9. (5分) 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$, 则输出的 $n=()$

)



A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

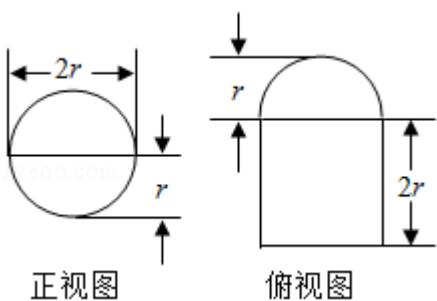
10. (5分) $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中, x^5y^2 的系数为()

A. 10

B. 20

C. 30

D. 60

11. (5分) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为r)组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16\pi + 20\pi r$, 则 $r =$ ()

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

12. (5分) 设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax+a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是()A. $[\frac{-3}{2e}, 1)$ B. $[\frac{-3}{2e}, \frac{3}{4})$ C. $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ D. $[\frac{3}{2e}, 1)$

二、填空题（本大题共有4小题，每小题5分）

13. (5分) 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a=$ _____.

14. (5分) 一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点，且圆心在x轴的正半轴上。

则该圆标准方程为 _____.

15. (5分) 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \end{cases}$ 。则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 _____.

16. (5分) 在平面四边形ABCD中， $\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$. $BC=2$ ，则AB的取值范围是 _____.

三、解答题：

17. (12分) S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

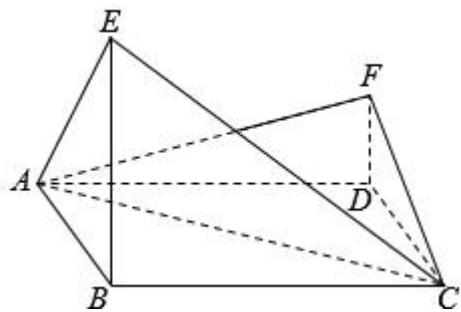
(II) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

18. (12分) 如图，四边形ABCD为菱形， $\angle ABC=120^\circ$, E, F是平面ABCD同一侧

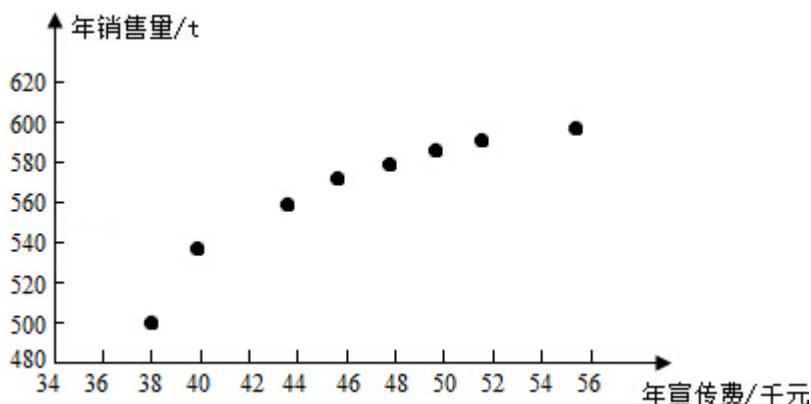
的两点， $BE \perp$ 平面ABCD， $DF \perp$ 平面ABCD， $BE=2DF$, $AE \perp EC$.

(I) 证明：平面AEC \perp 平面AFC

(II) 求直线AE与直线CF所成角的余弦值。



19. (12分) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响, 对近8年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i=1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



\bar{x}	\bar{y}	\bar{w}	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

(I) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(III) 已知这种产品的年利润 z 与 x 、 y 的关系为 $z=0.2y - x$. 根据 (II) 的结果回答下列问题:

(i) 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为: $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}$.

20. (12分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y = kx + a$ ($a > 0$) 交于 M, N 两点.

(I) 当 $k=0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程.

(II) y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? (说明理由)

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$

(i) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线;

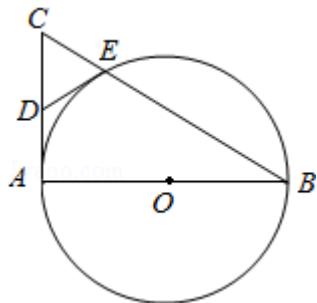
(ii) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

$(x > 0)$ ，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

选修4—1: 几何证明选讲

22. (10分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E .

- (I) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;
(II) 若 $OA = \sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



选修4—4: 坐标系与参数方程

23. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x = -2$, 圆 $C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

- (I) 求 C_1 , C_2 的极坐标方程;
(II) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho \in \mathbb{R}$), 设 C_2 与 C_3 的交点为 M , N , 求 $\triangle C_2 MN$ 的面积.

选修4—5：不等式选讲

24. (10分) 已知函数 $f(x) = |x+1| - 2|x-a|$, $a > 0$.

- (I) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;
- (II) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.