

# 2008 年普通高等学校招生全国统一考试浙江卷

## 数学 (理科)

本试题卷分第 I 卷和第 II 卷两部分。全卷共 4 页，第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页。满分 150 分，考试时间 120 分钟。

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

### 第 I 卷 (共 50 分)

注意事项：

- 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸上。
- 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

$$\text{求的体积公式 } V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- (1) 已知  $a$  是实数， $\frac{a-i}{1+i}$  是虚数，则  $a=$
- (A) 1                    (B) -1                    (C)  $\sqrt{2}$                     (D)  $-\sqrt{2}$

【答案】A

- (2) 已知  $U=R$ ， $A=\{x | x > 0\}$ ,  $B=\{x | x \leq -1\}$ , 则  $(A \cap C_u B) \cup (B \cap C_u A)=$
- (A)  $\emptyset$                     (B)  $\{x | x \leq 0\}$   
(C)  $\{x | x > -1\}$                     (D)  $\{x | x > 0 \text{ 或 } x \leq -1\}$

【答案】D

- (3) 已知  $a$ ,  $b$  都是实数，那么 “ $a^2 > b^2$ ” 是 “ $a > b$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件      (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件      (D) 既不充分也不必要条件

【答案】D

(4) 在  $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$  的展开式中, 含  $x^4$  的项的系数是

- (A) -15      (B) 85      (C) -120      (D) 274

【答案】A

(5) 在同一平面直角坐标系中, 函数  $y = \cos(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2})$  ( $x \in [0, 2\pi]$ ) 的图象和直线  $y = \frac{1}{2}$  的交点个数是

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 4

【答案】C

(6) 已知  $\{a_n\}$  是等比数列,  $a_2 = 2$ ,  $a_5 = \frac{1}{4}$ , 则  $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_{n+1} =$

- (A)  $16(1 - 4^{-n})$       (B)  $16(1 - 2^{-n})$   
(C)  $\frac{32}{3}(1 - 4^{-n})$       (D)  $\frac{32}{3}(1 - 2^{-n})$

【答案】C

(7) 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的两个焦点到一条准线的距离之比为 3: 2, 则双曲线的离心率是

- (A) 3      (B) 5      (C)  $\sqrt{3}$       (D)  $\sqrt{5}$

【答案】D

(8) 若  $\cos a + 2 \sin a = -\sqrt{5}$ , 则  $\tan a =$

- (A)  $\frac{1}{2}$       (B) 2      (C)  $-\frac{1}{2}$       (D) -2

【答案】B

(9) 已知  $a, b$  是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量  $c$  满足  $(a - c) \cdot (b - c) = 0$ , 则  $|c|$

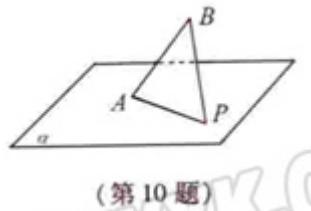
的最大值是

- (A) 1      (B) 2      (C)  $\sqrt{2}$       (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

(10) 如图, AB 是平面  $\alpha$  的斜线段, A 为斜足, 若点 P 在平面  $\alpha$  内运动, 使得  $\triangle ABP$  的面积为定值, 则动点 P 的轨迹是

- (A) 圆      (B) 椭圆  
(C) 一条直线      (D) 两条平行直线



【答案】B

## 2008 年普通高等学校招生全国统一考试浙江卷 数学 (理科)

### 第 II 卷 (共 100 分)

注意事项:

- 黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸上, 不能答在试题卷上。
- 在答题纸上作图, 可先使用 2B 铅笔, 确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描黑。

二. 填空题: 本大题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分。

(11) 已知  $a > 0$ , 若平面内三点  $A(1, -a)$ ,  $B(2, a^2)$ ,  $C(3, a^3)$  共线, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $1 + \sqrt{2}$

(12) 已知  $F_1$ 、 $F_2$  为椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  的两个焦点, 过  $F_1$  的直线交椭圆于 A、B 两点

若  $|F_2 A| + |F_2 B| = 12$ , 则  $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】8

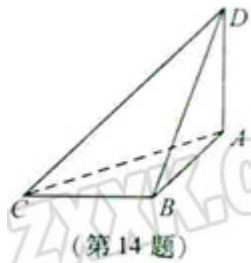
(13) 在  $\triangle ABC$  中, 角 A、B、C 所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 若

$$(\sqrt{3}b - c)\cos A = a \cos C, \text{ 则 } \cos A = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**【答案】**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(14) 如图, 已知球 O 点面上四点 A、B、C、D, DA \perp 平

面 ABC, AB \perp BC, DA=AB=BC=\sqrt{3}, 则球 O 点体  
积等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



(第 14 题)

**【答案】**  $\frac{9\pi}{2}$

(15) 已知 t 为常数, 函数  $y=|x^2-2x-t|$  在区间 [0, 3] 上的最大值为 2, 则  
 $t=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

**【答案】** 1

(16) 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成六位数 (没有重复数字), 要求任何相邻两个数字的奇偶性  
不同, 且 1 和 2 相邻, 这样的六位数的个数是  $\underline{\hspace{2cm}}$  (用数字作答)。

**【答案】** 40

(17) 若  $a \geq 0, b \geq 0$ , 且当  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1 \end{cases}$  时, 恒有  $ax + by \leq 1$ , 则以  $a, b$  为坐标点 P ( $a$ ,

b) 所形成的平面区域的面积等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

**【答案】** 1

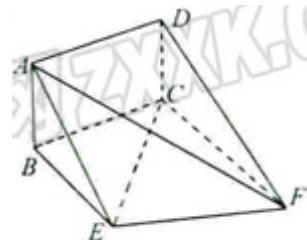
三. 解答题: 本大题共 5 小题, 共 72 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(18) (本题 14 分) 如图, 矩形 ABCD 和梯形 BEFC 所在平面互

相垂直,  $BE \parallel CF$ ,  $\angle BCF = \angle CEF = 90^\circ$ ,  $AD = \sqrt{3}$ ,  $EF = 2$ .

(I) 求证:  $AE \parallel$  平面  $DCF$ ;

(II) 当  $AB$  的长为何值时, 二面角  $A-EF-C$  的大小为  $60^\circ$ ?



(第 18 题)

【答案】本题主要考查空间线面关系、空间向量的概念与运算等基础知识，同时考查空间想象能力和推理运算能力。满分 14 分。

方法一：

(I) 证明：过点  $E$  作  $EG \perp CF$  交  $CF$  于  $G$ ，连结  $DG$ ，  
可得四边形  $BCGE$  为矩形，  
又  $ABCD$  为矩形，

所以  $AD \perp EG$ ，从而四边形  $ADGE$  为平行四边形，  
故  $AE \parallel DG$ 。

因为  $AE \not\subset$  平面  $DCF$ ， $DG \subset$  平面  $DCF$ ，  
所以  $AE \parallel$  平面  $DCF$ 。

(II) 解：过点  $B$  作  $BH \perp EF$  交  $FE$  的延长线于  $H$ ，连结  $AH$ 。  
由平面  $ABCD \perp$  平面  $BEFC$ ， $AB \perp BC$ ，得  
 $AB \perp$  平面  $BEFC$ ，  
从而  $AH \perp EF$ 。  
所以  $\angle AHB$  为二面角  $A-EF-C$  的平面角。

在  $Rt\triangle EFG$  中，因为  $EG = AD = \sqrt{3}$ ， $EF = 2$ ，所以  $\angle CFE = 60^\circ$ ， $FG = 1$ 。

又因为  $CE \perp EF$ ，所以  $CF = 4$ ，  
从而  $BE = CG = 3$ 。

于是  $BH = BE \cdot \sin \angle BEH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

因为  $AB = BH \cdot \tan \angle AHB$ ，

所以当  $AB$  为  $\frac{9}{2}$  时，二面角  $A-EF-C$  的大小为  $60^\circ$ 。

方法二：如图，以点  $C$  为坐标原点，以  $CB$ ， $CF$  和  $CD$  分别作为  $x$  轴， $y$  轴和  $z$  轴，建立空间直角坐标系  $C-xyz$ 。

设  $AB = a$ ， $BE = b$ ， $CF = c$ ，

则  $C(0,0,0)$ ， $A(\sqrt{3}, 0, a)$ ， $B(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $E(\sqrt{3}, b, 0)$ ， $F(0, c, 0)$ 。

(I) 证明： $\overrightarrow{AE} = (0, b, -a)$ ， $\overrightarrow{CB} = (\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{BE} = (0, b, 0)$ ，

所以  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ ， $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ ，从而  $CB \perp AE$ ， $CB \perp BE$ ，

所以  $CB \perp$  平面  $ABE$ 。

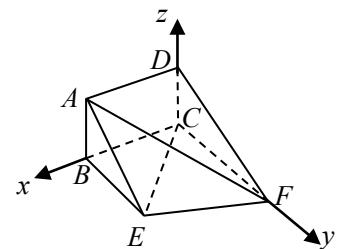
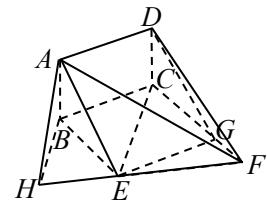
因为  $CB \perp$  平面  $DCF$ ，

所以平面  $ABE \parallel$  平面  $DCF$ 。

故  $AE \parallel$  平面  $DCF$ 。

(II) 解：因为  $\overrightarrow{EF} = (-\sqrt{3}, c-b, 0)$ ， $\overrightarrow{CE} = (\sqrt{3}, b, 0)$ ，

所以  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ ， $|\overrightarrow{EF}| = 2$ ，从而



$$\begin{cases} -3 + b(c-b) = 0, \\ \sqrt{3+(c-b)^2} = 2, \end{cases}$$

解得  $b=3, c=4$ .

所以  $E(\sqrt{3}, 3, 0), F(0, 4, 0)$ .

设  $n=(1, y, z)$  与平面  $AEF$  垂直,

则  $n \cdot \overrightarrow{AE} = 0, n \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ ,

$$\text{解得 } n=(1, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{a}).$$

又因为  $BA \perp$  平面  $BEFC$ ,  $\overrightarrow{BA}=(0, 0, a)$ ,

$$\text{所以 } |\cos <n, \overrightarrow{BA}>| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot n|}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |n|} = \frac{3\sqrt{3}a}{a\sqrt{4a^2+27}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{得到 } a = \frac{9}{2}.$$

所以当  $AB$  为  $\frac{9}{2}$  时, 二面角  $A-EF-C$  的大小为  $60^\circ$ .

(19) (本题 14 分) 一个袋中有若干个大小相同的黑球、白球和红球。已知从袋中任意摸出

1 个球, 得到黑球的概率是  $\frac{2}{5}$ ; 从袋中任意摸出 2 个球, 至少得到 1 个白球的概率是

$$\frac{7}{9}.$$

(I) 若袋中共有 10 个球,

(i) 求白球的个数;

(ii) 从袋中任意摸出 3 个球, 记得到白球的个数为  $\xi$ , 求随机变量  $\xi$  的数学期望

$$E\xi.$$

(II) 求证: 从袋中任意摸出 2 个球, 至少得到 1 个黑球的概率不大于  $\frac{7}{10}$ 。并指出袋中哪种颜色的球个数最少。

**【答案】**本题主要考查排列组合、对立事件、相互独立事件的概率和随机变量分布列和数学期望等概念, 同时考查学生的逻辑思维能力和分析问题以及解决问题的能力. 满分 14 分.

(I) 解: (i) 记“从袋中任意摸出两个球, 至少得到一个白球”为事件  $A$ , 设袋中白球的

个数为  $x$ , 则  $P(A) = 1 - \frac{C_{10-x}^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{9}$ ,

得到  $x = 5$ .

故白球有 5 个.

(ii) 随机变量  $\xi$  的取值为 0, 1, 2, 3, 分布列是

$\xi$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$\xi$  的数学期望

$$E\xi = \frac{1}{12} \times 0 + \frac{5}{12} \times 1 + \frac{5}{12} \times 2 + \frac{1}{12} \times 3 = \frac{3}{2}.$$

(II) 证明: 设袋中有  $n$  个球, 其中  $y$  个黑球, 由题意得  $y = \frac{2}{5}n$ ,

所以  $2y < n$ ,  $2y \leq n-1$ , 故  $\frac{y}{n-1} \leq \frac{1}{2}$ .

记“从袋中任意摸出两个球, 至少有 1 个黑球”为事件  $B$ , 则

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{y}{n-1} \\ &\leq \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

所以白球的个数比黑球多, 白球个数多于  $\frac{2}{5}n$ , 红球的个数少于  $\frac{n}{5}$ .

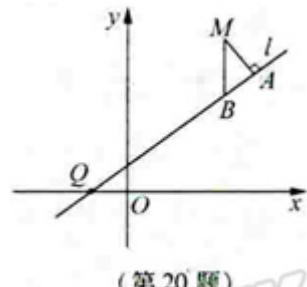
故袋中红球个数最少.

(20) (本题 15 分) 已知曲线  $C$  是到点  $P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{8})$  和到

直线  $y = -\frac{5}{8}$  距离相等的点的轨迹。 $\ell$  是过点  $Q(-1, 0)$  的直线,  $M$  是  $C$  上 (不在  $\ell$  上) 的动点;  $A, B$  在  $\ell$  上,  $MA \perp \ell, MB \perp x$  轴 (如图)。

(I) 求曲线  $C$  的方程;

(II) 求出直线  $\ell$  的方程, 使得  $\frac{|QB|^2}{|QA|}$  为常数。



(第 20 题)

【答案】本题主要考查求曲线的轨迹方程、两条直线的位置关系等基础知识, 考查解析几何的基本思想方法和综合解题能力. 满分 15 分.

( I ) 解: 设  $N(x, y)$  为  $C$  上的点, 则

$$|NP| = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2},$$

$N$  到直线  $y = -\frac{5}{8}$  的距离为  $\left|y + \frac{5}{8}\right|$ .

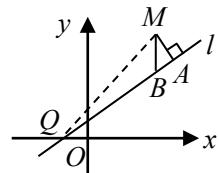
$$\text{由题设得 } \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2} = \left|y + \frac{5}{8}\right|.$$

化简, 得曲线  $C$  的方程为  $y = \frac{1}{2}(x^2 + x)$ .

( II ) 解法一:

设  $M\left(x, \frac{x^2+x}{2}\right)$ , 直线  $l: y = kx + k$ , 则

$B(x, kx + k)$ , 从而  $|QB| = \sqrt{1+k^2} |x+1|$ .



在  $\text{Rt}\triangle QMA$  中, 因为

$$|QM|^2 = (x+1)^2 \left(1 + \frac{x^2}{4}\right),$$

$$|MA|^2 = \frac{(x+1)^2 \left(k - \frac{x}{2}\right)^2}{1+k^2}.$$

$$\text{所以 } |QA|^2 = |QM|^2 - |MA|^2 = \frac{(x+1)^2}{4(1+k^2)} (kx+2)^2.$$

$$|QA| = \frac{|x+1| \cdot |kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}},$$

$$\frac{|QB|^2}{|QA|} = \frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{|k|} \cdot \frac{|x+1|}{\left|x + \frac{2}{k}\right|}.$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时, } \frac{|QB|^2}{|QA|} = 5\sqrt{5},$$

从而所求直线  $l$  方程为  $2x - y + 2 = 0$ .

解法二：设  $M\left(x, \frac{x^2+x}{2}\right)$ , 直线  $l: y = kx + k$ , 则  $B(x, kx+k)$ , 从而

$$|QB| = \sqrt{1+k^2} |x+1|.$$

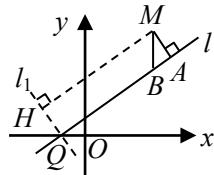
过  $Q(-1,0)$  垂直于  $l$  的直线  $l_1: y = -\frac{1}{k}(x+1)$ .

因为  $|QA|=|MH|$ , 所以  $|QA|=\frac{|x+1|\cdot|kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}}$ ,

$$\frac{|QB|^2}{|QA|} = \frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{|k|} \cdot \left| \frac{x+1}{x+\frac{2}{k}} \right|.$$

当  $k=2$  时,  $\frac{|QB|^2}{|QA|} = 5\sqrt{5}$ ,

从而所求直线  $l$  方程为  $2x-y+2=0$ .



(21) (本题 15 分) 已知  $a$  是实数, 函数  $f(x)=\sqrt{x}(x-a)$ 。

(I) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(II) 设  $g(a)$  为  $f(x)$  在区间  $[0,2]$  上的最小值。

(i) 写出  $g(a)$  的表达式;

(ii) 求  $a$  的取值范围, 使得  $-6 \leq g(a) \leq -2$ 。

**【答案】**本题主要考查函数的性质、求导、导数的应用等基础知识, 同时考查分类讨论思想以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力. 满分 15 分.

(I) 解: 函数的定义域为  $[0, +\infty)$ ,

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-a}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-a}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

若  $a \leq 0$ , 则  $f'(x) > 0$ ,

$f(x)$  有单调递增区间  $[0, +\infty)$ .

若  $a > 0$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{a}{3}$ ,

当  $0 < x < \frac{a}{3}$  时,  $f'(x) < 0$ ,

当  $x > \frac{a}{3}$  时,  $f'(x) > 0$ .

$f(x)$  有单调递减区间  $\left[0, \frac{a}{3}\right]$ , 单调递增区间  $\left(\frac{a}{3}, +\infty\right)$ .

(II) 解: (i) 若  $a \leq 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上单调递增,

所以  $g(a) = f(0) = 0$ .

若  $0 < a < 6$ ,  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{a}{3}\right]$  上单调递减, 在  $\left(\frac{a}{3}, 2\right]$  上单调递增,

所以  $g(a) = f\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}$ .

若  $a \geq 6$ ,  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上单调递减,

所以  $g(a) = f(2) = \sqrt{2}(2-a)$ .

综上所述,  $g(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ -\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}, & 0 < a < 6, \\ \sqrt{2}(2-a), & a \geq 6. \end{cases}$

(ii) 令  $-6 \leq g(a) \leq -2$ .

若  $a \leq 0$ , 无解.

若  $0 < a < 6$ , 解得  $3 \leq a < 6$ .

若  $a \geq 6$ , 解得  $6 \leq a \leq 2 + 3\sqrt{2}$ .

故  $a$  的取值范围为  $3 \leq a \leq 2 + 3\sqrt{2}$ .

(22) (本题 14 分) 已知数列  $\{a_n\}$ ,  $a_n \geq 0$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 = a_n^2$  ( $n \in N^*$ ). 记

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \quad T_n = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

求证：当  $n \in N^*$  时，

$$(I) \quad a_n < a_{n+1};$$

$$(II) \quad S_n > n - 2;$$

$$(III) \quad T_n < 3.$$

**【答案】**本题主要考查数列的递推关系，数学归纳法、不等式证明等基础知识和基本技能，同时考查逻辑推理能力。满分 14 分。

(I) 证明：用数学归纳法证明。

①当  $n=1$  时，因为  $a_2$  是方程  $x^2 + x - 1 = 0$  的正根，所以  $a_1 < a_2$ 。

②假设当  $n=k$  ( $k \in N^*$ ) 时， $a_k < a_{k+1}$ ，

$$\text{因为 } a_{k+1}^2 - a_k^2 = (a_{k+2}^2 + a_{k+2} - 1) - (a_{k+1}^2 + a_{k+1} - 1)$$

$$= (a_{k+2} - a_{k+1})(a_{k+2} + a_{k+1} + 1),$$

所以  $a_{k+1} < a_{k+2}$ 。

即当  $n=k+1$  时， $a_n < a_{n+1}$  也成立。

根据①和②，可知  $a_n < a_{n+1}$  对任何  $n \in N^*$  都成立。

(II) 证明：由  $a_{k+1}^2 + a_{k+1} - 1 = a_k^2$ ， $k=1, 2, \dots, n-1$  ( $n \geq 2$ )，

$$\text{得 } a_n^2 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - (n-1) = a_1^2.$$

因为  $a_1 = 0$ ，所以  $S_n = n - 1 - a_n^2$ 。

由  $a_n < a_{n+1}$  及  $a_{n+1} = 1 + a_n^2 - 2a_{n+1}^2 < 1$  得  $a_n < 1$ ，

所以  $S_n > n - 2$ 。

(III) 证明：由  $a_{k+1}^2 + a_{k+1} = 1 + a_k^2 \geq 2a_k$ ，得

$$\frac{1}{1+a_{k+1}} \leq \frac{a_{k+1}}{2a_k} (k=2, 3, \dots, n-1, n \geq 3)$$

所以  $\frac{1}{(1+a_3)(1+a_4)\cdots(1+a_n)} \leq \frac{a_n}{2^{n-2}a_2}$  ( $a \geq 3$ ) ,

于是  $\frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)} \leq \frac{a_n}{2^{n-2}(a_2^2 + a_2)} = \frac{a_n}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}$  ( $n \geq 3$ ) ,

故当  $n \geq 3$  时,  $T_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} < 3$ ,

又因为  $T_1 < T_2 < T_3$ ,

所以  $T_n < 3$ .