

绝密★启用前

2022 年普通高等学校招生全国统一考试  
数学（理科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合  $M$  满足  $\complement_U M = \{1, 3\}$ ，则（ ）

- A.  $2 \in M$                       B.  $3 \in M$                       C.  $4 \notin M$                       D.  $5 \notin M$

2. 已知  $z = 1 - 2i$ ，且  $z + a\bar{z} + b = 0$ ，其中  $a, b$  为实数，则（ ）

- A.  $a = 1, b = -2$               B.  $a = -1, b = 2$               C.  $a = 1, b = 2$               D.  $a = -1, b = -2$

3. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 3$ ，则  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ （ ）

- A.  $-2$                       B.  $-1$                       C.  $1$                       D.  $2$

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星，为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列  $\{b_n\}$ ：

$$b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad b_3 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}, \dots, \text{依此类推, 其中}$$

$\alpha_k \in \mathbf{N}^* (k = 1, 2, \dots)$ . 则（ ）

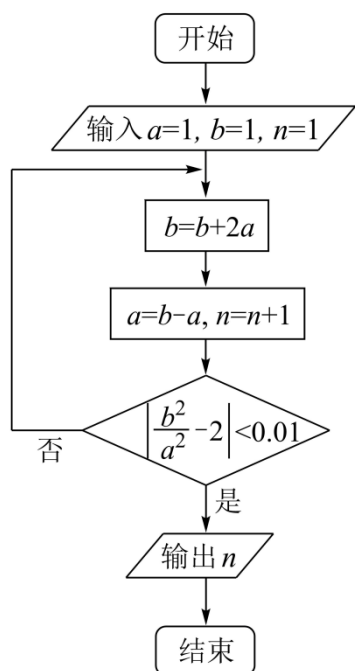
- A.  $b_1 < b_5$                       B.  $b_3 < b_8$                       C.  $b_6 < b_2$                       D.  $b_4 < b_7$

5. 设  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点，点  $A$  在  $C$  上，点  $B(3, 0)$ ，若  $|AF| = |BF|$ ，则

$|AB| =$ （ ）

- A.  $2$                       B.  $2\sqrt{2}$                       C.  $3$                       D.  $3\sqrt{2}$

6. 执行下边的程序框图，输出的  $n =$ （ ）



- A. 3                                      B. 4                                      C. 5                                      D. 6

7. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为  $AB, BC$  的中点, 则 ( )

- A. 平面  $B_1EF \perp$  平面  $BDD_1$                                       B. 平面  $B_1EF \perp$  平面  $A_1BD$   
C. 平面  $B_1EF \parallel$  平面  $A_1AC$                                       D. 平面  $B_1EF \parallel$  平面  $A_1C_1D$

8. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前 3 项和为 168,  $a_2 - a_5 = 42$ , 则  $a_6 =$  ( )

- A. 14                                      B. 12                                      C. 6                                      D. 3

9. 已知球  $O$  的半径为 1, 四棱锥的顶点为  $O$ , 底面的四个顶点均在球  $O$  的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$                                       B.  $\frac{1}{2}$                                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘, 各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为  $p_1, p_2, p_3$ , 且  $p_3 > p_2 > p_1 > 0$ . 记该棋手连胜两盘的概率为  $p$ , 则 ( )

- A.  $p$  与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关                                      B. 该棋手在第二盘与甲比赛,  $p$  最大  
C. 该棋手在第二盘与乙比赛,  $p$  最大                                      D. 该棋手在第二盘与丙比赛,  $p$  最大

11. 双曲线  $C$  的两个焦点为  $F_1, F_2$ , 以  $C$  的实轴为直径的圆记为  $D$ , 过  $F_1$  作  $D$  的切线与  $C$  的两支交于  $M, N$  两点, 且  $\cos \angle F_1NF_2 = \frac{3}{5}$ , 则  $C$  的离心率为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$                                       B.  $\frac{3}{2}$                                       C.  $\frac{\sqrt{13}}{2}$                                       D.  $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. 已知函数  $f(x), g(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ , 且

$f(x) + g(2-x) = 5, g(x) - f(x-4) = 7$ . 若  $y = g(x)$  的图像关于直线  $x = 2$  对称,

$g(2) = 4$ , 则  $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$

A. -21

B. -22

C. -23

D. -24

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为 \_\_\_\_\_.

14. 过四点  $(0,0), (4,0), (-1,1), (4,2)$  中的三点的一个圆的方程为 \_\_\_\_\_.

15. 记函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$  的最小正周期为  $T$ , 若  $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$x = \frac{\pi}{9}$  为  $f(x)$  的零点, 则  $\omega$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

16. 已知  $x = x_1$  和  $x = x_2$  分别是函数  $f(x) = 2a^x - ex^2$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的极小值点和极大值点. 若  $x_1 < x_2$ , 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 0 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

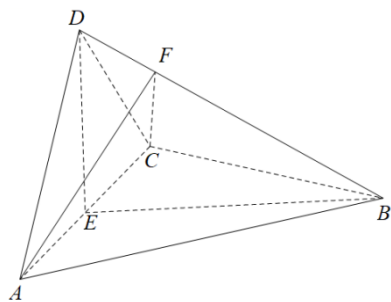
17. 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知

$$\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A).$$

(1) 证明:  $2a^2 = b^2 + c^2$ ;

(2) 若  $a = 5, \cos A = \frac{25}{31}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

18. 如图, 四面体  $ABCD$  中,  $AD \perp CD, AD = CD, \angle ADB = \angle BDC$ ,  $E$  为  $AC$  的中点.



(1) 证明: 平面  $BED \perp$  平面  $ACD$ ;

(2) 设  $AB = BD = 2, \angle ACB = 60^\circ$ , 点  $F$  在  $BD$  上, 当  $\triangle AFC$  的面积最小时, 求  $CF$

与平面  $ABD$  所成的角的正弦值.

19. 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积 (单位:  $\text{m}^2$ ) 和材积量 (单位:  $\text{m}^3$ ), 得到如下数据:

样本号 $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 $x_i$	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 $y_i$	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得  $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$ ,  $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$ ,  $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$ .

- (1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;
- (2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数 (精确到 0.01);
- (3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为  $186\text{m}^2$ . 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附: 相关系数  $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \sqrt{1.896} \approx 1.377$ .

20. 已知椭圆  $E$  的中心为坐标原点, 对称轴为  $x$  轴、 $y$  轴, 且过  $A(0, -2)$ ,  $B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$  两点.

- (1) 求  $E$  的方程;
- (2) 设过点  $P(1, -2)$  的直线交  $E$  于  $M$ ,  $N$  两点, 过  $M$  且平行于  $x$  轴的直线与线段  $AB$  交于点  $T$ , 点  $H$  满足  $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$ . 证明: 直线  $HN$  过定点.

21. 已知函数  $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$

- (1) 当  $a=1$  时, 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
- (2) 若  $f(x)$  在区间  $(-1, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  各恰有一个零点, 求  $a$  的取值范围.

(二) 选考题, 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

**[选修 4-4：坐标系与参数方程]**

22. 在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos 2t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ ，( $t$  为参数)，以坐标原点

为极点， $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线  $l$  的极坐标方程为

$$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + m = 0.$$

(1) 写出  $l$  的直角坐标方程；

(2) 若  $l$  与  $C$  有公共点，求  $m$  的取值范围.

**[选修 4-5：不等式选讲]**

23. 已知  $a, b, c$  都是正数，且  $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$ ，证明：

(1)  $abc \leq \frac{1}{9}$ ;

(2)  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$ ;