2008年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分．考试用时120分钟．第I卷1至2页，第II卷3至10页．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1．答第I卷前，考生务必将自己的姓名、准考号、科目涂写在答题卡上．并在规定位置粘贴考试用条形码．

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．答在试卷上的无效．

3．本卷共10小题，每小题5分，共50分．

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件 A，B 相互独立，那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

球的表面积公式 $S=4\pi R^2$

球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．i是虚数单位，$\frac{i^3(i+1)}{i-1}=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．$-i$　　D．i

2．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 1,\\ x+2y\geqslant 1.\end{cases}$ 则目标函数 $z=5x+y$ 的最大值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

3．设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 是（　　）

A．最小正周期为 π 的奇函数　　B．最小正周期为 π 的偶函数

C．最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数　　D．最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

4．设 a，b 是两条直线，α，β 是两个平面，则 $a\perp b$ 的一个充分条件是（　　）

A．$a\perp\alpha$，$b/\!/\beta$，$\alpha\perp\beta$　　B．$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，$\alpha/\!/\beta$

C．$a\subset\alpha$，$b\perp\beta$，$\alpha\,//\,\beta$　　　　D．$a\subset\alpha$，$b\,//\,\beta$，$\alpha\perp\beta$

5．设椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m^2-1}=1(m>1)$ 上一点 P 到其左焦点的距离为 3，到右焦点的距离为 1，则 P 到右准线的距离为（　　）

A．6　　　B．2　　　C．$\dfrac{1}{2}$　　　D．$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

6. 设集合 $S=\{x||x-2|>3\}$，$T=\{x|a<x<a+8\}$，$S\cup T=\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$-3<a<-1$　　　　B．$-3\leqslant a\leqslant -1$

C．$a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -1$　　　　D．$a<-3$ 或 $a>-1$

7．设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}(0\leqslant x<1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，则（　　）

A．$f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最大值为 1

B．$f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最小值为 0

C．$f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最大值为 1

D．$f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最小值为 0

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1，x<0,\\ x-1，x\geqslant 0,\end{cases}$ 则不等式 $x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1$ 的解集是（　　）

A．$\{x|-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$　　　B．$\{x|x\leqslant 1\}$

C．$\{x|x\leqslant\sqrt{2}-1\}$　　　D．$\{x|-\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$

9．已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数．令 $a=f\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$，$b=f\left(\cos\dfrac{5\pi}{7}\right)$，$c=f\left(\tan\dfrac{5\pi}{7}\right)$，则（　　）

A．$b<a<c$　　　B．$c<b<a$　　　C．$b<c<a$　　　D．$a<b<c$

10．有 8 张卡片分别标有数字 1，2，3，4，5，6，7，8，从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列，要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5，则不同的排法共有（　　）

A．1344 种　　　B．1248 种　　　C．1056 种　　　D．960 种

2008 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

第Ⅱ卷

注意事项：

1．答卷前将密封线内的项目填写清楚．

2．用钢笔或圆珠笔直接答在试卷上．

3．本卷共 12 小题，共 100 分．

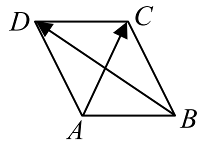
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分．把答案填在题中横线上．

11．$\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的二项展开式中 x^2 的系数是_________（用数字作答）．

12．一个正方体的各顶点均在同一球的球面上，若该球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则该正方体的表面积为___________．

13．已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 $y=x$ 对称，直线 $4x-3y-2=0$ 与圆 C 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=6$，则圆 C 的方程为__________．

14．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,2)$，



则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$________．

15．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3^{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$________．

16．设 $a>1$，若仅有一个常数 c 使得对于任意的 $x\in[a,2a]$，都有 $y\in[a,\ a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=c$，这时 a 的取值的集合为___________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 12 分）

已知 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$．

（Ⅰ）求 $\sin x$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值．

18．（本小题满分 12 分）

甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球，命中率分别为$\frac{1}{2}$与p，且乙投球 2 次均未命中的概率为$\frac{1}{16}$.

（Ⅰ）求乙投球的命中率p；

（Ⅱ）若甲投球 1 次，乙投球 2 次，两人共命中的次数记为ξ，求ξ的分布列和数学期望.

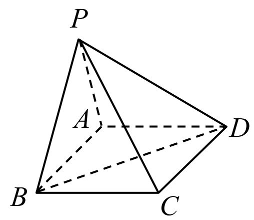
19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形．已知$AB=3$，$AD=2$，$PA=2$，$PD=2\sqrt{2}$，$\angle PAB=60^{\circ}$.

（Ⅰ）证明$AD\perp$平面PAB；

（Ⅱ）求异面直线PC与AD所成的角的大小；

（Ⅲ）求二面角$P-BD-A$的大小.



20.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+b(x\neq 0)$，其中$a$，$b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在点$P(2，f(2))$处的切线方程为$y=3x+1$，求函数$f(x)$的解析式；

（Ⅱ）讨论函数$f(x)$的单调性；

（Ⅲ）若对于任意的$a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，不等式$f(x)\leqslant 10$在$\left[\frac{1}{4},1\right]$上恒成立，求$b$的取值范围.

21.（本小题满分 14 分）

已知中心在原点的双曲线C的一个焦点是$F_1(-3,0)$，一条渐近线的方程是$\sqrt{5}x-2y=0$.

（Ⅰ）求双曲线C的方程；

（Ⅱ）若以$k(k\neq 0)$为斜率的直线l与双曲线C相交于两个不同的点$M，N$，且线段MN

的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为$\dfrac{81}{2}$，求k的取值范围.

22.（本小题满分 14 分）

在数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中，$a_1=1$，$b_1=4$，数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$，$2a_{n+1}$为b_n与b_{n+1}的等比中项，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求a_2，b_2的值；

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅲ）设$T_n=(-1)^{a_1}b_1+(-1)^{a_2}b_2+\ldots+(-1)^{a_n}b_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明$|T_n|<2n^2$，$n\geqslant 3$.

2008年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分50分．

1．A　2．D　3．B　4．C　5．B　6．A　7．D　8．C　9．A　10．B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题4分，满分24分．

11．40　12．24　13．$x^2+(y-1)^2=10$　14．3

15．$\dfrac{7}{6}$　16．$\{2\}$

三、解答题

17．本小题主要考查同角三角函数的基本关系式、特殊角三角函数值、两角和的正弦、两角差的余弦、二倍角的正弦与余弦等基础知识，考查基本运算能力．满分12分．

（Ⅰ）解法一：因为$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，所以$x-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，于是

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$\sin x=\sin\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{5}.$$

解法二：由题设得$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，即$\cos x+\sin x=\dfrac{1}{5}$．

又$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，从而$25\sin^2 x-5\sin x-12=0$，解得$\sin x=\dfrac{4}{5}$或$\sin x=-\dfrac{3}{5}$．

因为$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，所以$\sin x=\dfrac{4}{5}$．

（Ⅱ）解：因为$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，故$\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$．

$\sin 2x=2\sin x\cos x=-\dfrac{24}{25}$，$\cos 2x=2\cos^2 x-1=-\dfrac{7}{25}$．

所以，

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{24+7\sqrt{3}}{50}.$$

18．本小题主要考查随机事件、互斥事件、相互独立事件的概率，离散型随机变量的分布列和数学期望等基础知识，考查运用概率知识解决实际问题的能力．满分 12 分．

（Ⅰ）解：设“甲投球一次命中”为事件 A，“乙投球一次命中”为事件 B，

由题意得

$$(1-P(B))^2=(1-p)^2=\frac{1}{16},$$

解得 $p=\frac{3}{4}$ 或 $p=\frac{5}{4}$（舍去），所以乙投球的命中率为 $\frac{3}{4}$．

（Ⅱ）解：由题设和（Ⅰ）知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(\overline{A})=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(\overline{B})=\frac{1}{4}$．

ξ 可能的取值为 0，1，2，3，故

$$P(\xi=0)=P(\overline{A})P(\overline{B}\bullet\overline{B})=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{32},$$

$$P(\xi=1)=P(A)P(\overline{B}\bullet\overline{B})+C_2^1P(B)P(\overline{B})P(\overline{A})$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{32},$$

$$P(\xi=3)=P(A)P(B\bullet B)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{32},$$

$$P(\xi=2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=3)=\frac{15}{32}.$$

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{9}{32}$

ξ 的数学期望 $E\xi=0\times\frac{1}{32}+1\times\frac{7}{32}+2\times\frac{15}{32}+3\times\frac{9}{32}=2$．

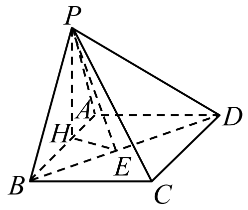
19．本小题主要考查直线和平面垂直、异面直线所成的角、二面角等基础知识，考查空间想

象能力、运算能力和推理论证能力．满分 12 分．

（Ⅰ）证明：在 $\triangle PAD$ 中，由题设 $PA=2$，$AD=2$，$PD=2\sqrt{2}$，可得 $PA^2+AD^2=PD^2$，于是 $AD\perp PA$．在矩形 $ABCD$ 中，$AD\perp AB$，又 $PA\cap AB=A$，所以 $AD\perp$ 平面 PAB．

（Ⅱ）解：由题设，$BC\parallel AD$，所以 $\angle PCB$（或其补角）是异面直线 PC 与 AD 所成的角．

在 $\triangle PAB$ 中，由余弦定理得



$$PB=\sqrt{PA^2+AB^2-2PA\bullet AB\bullet\cos PAB}=\sqrt{7}.$$

由（Ⅰ）知 $AD\perp$ 平面 PAB，$PB\subset$ 平面 PAB，

所以 $AD\perp PB$，因而 $BC\perp PB$，于是 $\triangle PBC$ 是直角三角形，

故 $\tan PCB=\dfrac{PB}{BC}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．

所以异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小为 $\arctan\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．

（Ⅲ）解：过点 P 作 $PH\perp AB$ 于 H，过点 H 作 $HE\perp BD$ 于 E，连结 PE．

因为 $AD\perp$ 平面 PAB，$PH\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp PH$．又 $AD\cap AB=A$，因而 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，故 HE 为 PE 在平面 $ABCD$ 内的射影．由三垂线定理可知，$BD\perp PE$．从而 $\angle PEH$ 是二面角 $P-BD-A$ 的平面角．

由题设可得，

$PH=PA\bullet\sin60^\circ=\sqrt{3}$，$AH=PA\bullet\cos60^\circ=1$，

$BH=AB-AH=2$，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{13}$，

$$HE=\frac{AD}{BD}\bullet BH=\frac{4}{\sqrt{13}}.$$

于是在 $\mathrm{Rt}\triangle PHE$ 中，$\tan PEH=\dfrac{PH}{HE}=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$．

所以二面角 $P-BD-A$ 的大小为 $\arctan\dfrac{\sqrt{39}}{4}$．

20．本小题主要考查导数的几何意义、利用导数研究函数的单调性、解不等式等基础知识，考查运算能力、综合分析和解决问题的能力．满分 12 分．

（Ⅰ）解：$f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}$，由导数的几何意义得 $f'(2)=3$，于是 $a=-8$．

由切点 $P(2，f(2))$ 在直线 $y=3x+1$ 上可得 $-2+b=7$，解得 $b=9$．

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x-\dfrac{8}{x}+9$.

（Ⅱ）解：$f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，显然 $f'(x)>0(x\neq 0)$ ，这时 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ ，$(0,+\infty)$ 内是增函数.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ ，解得 $x=\pm\sqrt{a}$.

当 x 变化时，$f'(x)$ ，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-\sqrt{a})$	$-\sqrt{a}$	$(-\sqrt{a},0)$	$(0,\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{a}\right]$，$\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ 内是增函数，在 $(-\sqrt{a},0)$，$(0,\sqrt{a})$ 内是减函数.

（Ⅲ）解：由（Ⅱ）知，$f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 上的最大值为 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 与 $f(1)$ 中的较大者，对于任意的 $a\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，不等式 $f(x)\leqslant 10$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 上恒成立，当且仅当

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{4}\right)\leqslant 10, \\ f(1)\leqslant 10, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} b\leqslant \dfrac{39}{4}-4a, \\ b\leqslant 9-a \end{cases}$$

对任意的 $a\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 成立.

从而得 $b\leqslant\dfrac{7}{4}$，所以满足条件的 b 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{7}{4}\right]$.

21．本小题主要考查双曲线的标准方程和几何性质、直线方程、两条直线垂直、线段的定比分点等基础知识，考查曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法，考查推理、运算能力．满分 14 分．

（Ⅰ）解：设双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ ，由题设得

$$\begin{cases} a^2+b^2=9, \\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} a^2=4, \\ b^2=5. \end{cases}$$

所以双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

（Ⅱ）解：设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$，点 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$ 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} y=kx+m, & ① \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1. & ② \end{cases}$$

将①式代入②式，得 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(kx+m)^2}{5}=1$，整理得

$(5-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-20=0$.

此方程有两个不等实根，于是 $5-4k^2\neq 0$，且

$\Delta=(-8km)^2+4(5-4k^2)(4m^2+20)>0$. 整理得

$m^2+5-4k^2>0$. ③

由根与系数的关系可知线段 MN 的中点坐标 $(x_0，y_0)$ 满足

$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4km}{5-4k^2}$，$y_0=kx_0+m=\dfrac{5m}{5-4k^2}$.

从而线段 MN 的垂直平分线的方程为

$$y-\frac{5m}{5-4k^2}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{4km}{5-4k^2}\right).$$

此直线与 x 轴，y 轴的交点坐标分别为 $\left(\dfrac{9km}{5-4k^2},0\right)$，$\left(0,\dfrac{9m}{5-4k^2}\right)$. 由题设可得

$$\frac{1}{2}\left|\frac{9km}{5-4k^2}\right|\bullet\left|\frac{9m}{5-4k^2}\right|=\frac{81}{2}.$$

整理得

$$m^2=\frac{(5-4k^2)^2}{|k|}，\ k\neq 0.$$

将上式代入③式得$\dfrac{(5-4k^2)^2}{|k|}+5-4k^2>0$，

整理得

$(4k^2-5)(4k^2-|k|-5)>0$，$k\neq 0$．

解得$0<|k|<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$或$|k|>\dfrac{5}{4}$．

所以k的取值范围是$\left(-\infty,-\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$．

22．本小题主要考查等差数列的概念、通项公式及前n项和公式、等比数列的概念、等比中项、不等式证明、数学归纳法等基础知识，考查运算能力和推理论证能力及分类讨论的思想方法．满分 14 分．

（Ⅰ）解：由题设有$a_1+a_2-4a_1=0$，$a_1=1$，解得$a_2=3$．由题设又有$4a_2^2=b_2b_1$，$b_1=4$，解得$b_2=9$．

（Ⅱ）解法一：由题设$nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$，$a_1=1$，$b_1=4$，及$a_2=3$，$b_2=9$，

进一步可得$a_3=6$，$b_3=16$，$a_4=10$，$b_4=25$，猜想

$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$b_n=(n+1)^2$，$n\in\mathbf{N}^*$．

先证$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

当$n=1$时，$a_1=\dfrac{1\times(1+1)}{2}$，等式成立．当$n\geqslant 2$时用数学归纳法证明如下：

（1）当$n=2$时，$a_2=\dfrac{2\times(2+1)}{2}$，等式成立．

（2）假设当$n=k$时等式成立，即$a_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，$k\geqslant 2$．

由题设，

$kS_{k+1}=(k+3)S_k$，　　①

$(k-1)S_k=(k+2)S_{k-1}$．　　②

①的两边分别减去②的两边，整理得$ka_{k+1}=(k+2)a_k$，从而

$$a_{k+1}=\frac{k+2}{k}a_k=\frac{k+2}{k}\bullet\frac{k(k+1)}{2}=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}.$$

这就是说，当$n=k+1$时等式也成立．根据（1）和（2）可知，等式$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$对任何的$n\geqslant 2$成立．

综上所述，等式$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$对任何的$n\in\mathbf{N}^*$都成立．

再用数学归纳法证明$b_n=(n+1)^2$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）当$n=1$时，$b_1=(1+1)^2$，等式成立．

（2）假设当$n=k$时等式成立，即$b_k=(k+1)^2$，那么

$$b_{k+1}=\frac{4a_{k+1}^2}{b_k}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{(k+1)^2}=\left[(k+1)+1\right]^2.$$

这就是说，当$n=k+1$时等式也成立．根据（1）和（2）可知，等式$b_n=(n+1)^2$对任何的$n\in\mathbf{N}^*$都成立．

解法二：由题设

$nS_{n+1}=(n+3)S_n$，　　①

$(n-1)S_n=(n+2)S_{n-1}$．　　②

①的两边分别减去②的两边，整理得$na_{n+1}=(n+2)a_n$，$n\geqslant 2$，所以

$2a_3=4a_2$，

$3a_4=5a_3$，

……

$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，$n\geqslant 3$．

将以上各式左右两端分别相乘，得

$$(n-1)!a_n=\frac{(n+1)!}{6}a_2,$$

由（Ⅰ）并化简得

$$a_n=\frac{n(n+1)}{6}a_2=\frac{n(n+1)}{2}，n\geqslant 3.$$

上式对 $n=1$ ，2 也成立.

由题设有 $b_{n+1}b_n=4a_{n+1}^2$ ，所以 $b_{n+1}b_n=(n+2)^2(n+1)^2$ ，即

$$\frac{b_n}{(n+1)^2}\bullet\frac{b_{n+1}}{(n+2)^2}=1，\ n\in\mathbf{N}^*.$$

令 $x_n=\dfrac{b_n}{(n+1)^2}$ ，则 $x_nx_{n+1}=1$ ，即 $x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n}$. 由 $x_1=1$ 得 $x_n=1$， $n\geqslant 1$. 所以

$\dfrac{b_n}{(n+1)^2}=1$. 即

$b_n=(n+1)^2$ ， $n\geqslant 1$.

解法三：由题设有 $nS_{n+1}=(n+3)S_n$， $n\in\mathbf{N}^*$ ，所以

$S_2=4S_1$,

$2S_3=5S_2$,

……

$(n-1)S_n=(n+2)S_{n-1}$， $n\geqslant 2$.

将以上各式左右两端分别相乘，得

$1\times2\times\ldots\times(n-1)S_n=4\times5\times\ldots\times(n+2)S_1$,

化简得

$$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\times3}a_1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}，\ n\geqslant 3.$$

由（Ⅰ），上式对 $n=1$ ，2 也成立. 所以

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}，\ n\geqslant 2.$$

上式对 $n=1$ 也成立.

以下同解法二，可得 $b_n=(n+1)^2$ ， $n\geqslant 1$.

（Ⅲ）证明： $T_n=(-1)^{a_1}b_1+(-1)^{a_2}b_2+\ldots+(-1)^{a_n}b_n$

$=-2^2-3^2+\ldots+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^2$.

当 $n=4k$ ， $k\in\mathbf{N}^*$ 时，

$T_n=-2^2-3^2+4^2+5^2-\ldots-(4k-2)^2-(4k-1)^2+(4k)^2+(4k+1)^2$.

注意到$-(4k-2)^2-(4k-1)^2+(4k)^2+(4k+1)^2=32k-4$，故

$$T_n=32\times(1+2+\ldots+k)-4k=32\times\frac{k(k+1)}{2}-4k$$

$$=4k(4k+4)-4k=(4k)^2+3\times4k=n^2+3n.$$

当$n=4k-1$，$k\in\mathbf{N}^*$时，

$$T_n=(4k)^2+3\times4k-(4k+1)^2=(n+1)^2+3(n+1)^2-(n+2)^2=n.$$

当$n=4k-2$，$k\in\mathbf{N}^*$时，

$$T_n=(4k)^2+3\times4k-(4k+1)^2-(4k)^2=3(n+2)-(n+3)^2=-n^2-3n-3.$$

当$n=4k-3$，$k\in\mathbf{N}^*$时，

$$T_n=3\times4k-(4k+1)^2+(4k-1)^2=3(n+3)-(n+4)^2+(n+2)^2=-n-3.$$

所以，

$$T_n=\begin{cases}-n-3, & n=4k-3,\\ -n^2-3n-3, & n=4k-2,\\ n, & n=4k-1,\\ n^2+3n, & n=4k,\end{cases}\ k\in\mathbf{N}^*$$

从而$n\geqslant3$时，有

$$\frac{|T_n|}{n^2}=\begin{cases}\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}<2, & n=5,9,13,\ldots,\\ 1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}<2, & n=6,10,14,\ldots,\\ \frac{1}{n}<2, & n=3,7,11,\ldots,\\ 1+\frac{3}{n}<2, & n=4,8,12,\ldots.\end{cases}$$

总之，当$n\geqslant3$时有$\frac{|T_n|}{n^2}<2$，即$|T_n|<2n^2$.

选择填空解析

2008年天津市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共10小题，每小题5分，满分50分）

1．（5分）（2008•天津）i是虚数单位，$\frac{i^3(i+1)}{i-1}$=（　　）

A．﹣1　B．1　　C．﹣i　D．i

【考点】复数代数形式的混合运算．

【分析】复数的分子复杂，先化简，然后再化简整个复数，可得到结果．

【解答】解：$\frac{i^3(i+1)}{i-1}=\frac{-i(i+1)}{i-1}=\frac{1-i}{i-1}=-1$，

故选A．

【点评】本题考查复数的代数形式的运算，i的幂的运算，是基础题．

2．（5分）（2008•天津）设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 1\\x+2y\geqslant 1\end{cases}$，则目标函数z=5x+y的最大值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【考点】简单线性规划的应用．

【专题】计算题．

【分析】本题主要考查线性规划的基本知识，先画出约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 1\\x+2y\geqslant 1\end{cases}$的可行域，再求出可行域中各角点的坐标，将各点坐标代入目标函数的解析式，分析后易得目标函数Z=5x+y的最小值．

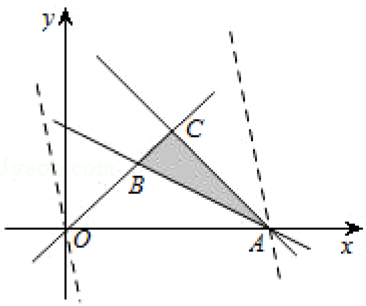
【解答】解：满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 1\\x+2y\geqslant 1\end{cases}$的可行域如图，

由图象可知：

目标函数z=5x+y过点A（1，0）时

z取得最大值，z_{max}=5，

故选D．



【点评】在解决线性规划的问题时，我们常用“角点法”，其步骤为：①由约束条件画出可行域⇒②求出可行域各个角点的坐标⇒③将坐标逐一代入目标函数⇒④验证，求出最优解．

3．（5 分）（2008•天津）设函数 $f(x)=\cos^2(x+\frac{\pi}{4})-\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$，$x\in R$，则函数 f（x）是（　　）

A．最小正周期为 π 的奇函数　B．最小正周期为 π 的偶函数

C．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数　D．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

【考点】二倍角的余弦；三角函数的周期性及其求法；余弦函数的奇偶性．

【分析】首先利用余弦的二倍角公式把原函数转化为 y=Asinωx 的形式，然后由 y=Asinωx 的性质得出相应的结论．

【解答】解：$f(x)=\cos^2(x+\frac{\pi}{4})-\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$

$=\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}-\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}$

$=-\sin 2x$

所以 T=π，且为奇函数．

故选 A．

【点评】本题考查余弦的二倍角公式及函数 y=Asinωx 的性质．

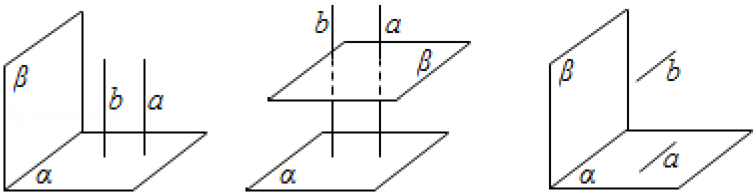
4．（5 分）（2008•天津）设 a，b 是两条直线，α，β 是两个平面，则 a⊥b 的一个充分条件是（　　）

A．a⊥α，b∥β，α⊥β　B．a⊥α，b⊥β，α∥β　C．a⊂α，b⊥β，α∥β　D．a⊂α，b∥β，α⊥β

【考点】空间中直线与直线之间的位置关系；必要条件、充分条件与充要条件的判断．

【分析】根据题意分别画出错误选项的反例图形即可．

【解答】解：A、B、D 的反例如图．



故选 C．

【点评】本题考查线面垂直、平行的性质及面面垂直、平行的性质，同时考查充分条件的含义及空间想象能力．

5.（5 分）（2008•天津）设椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2-1}=1$（$m>1$）上一点 P 到其左焦点的距离为 3，到右焦点的距离为 1，则 P 点到右准线的距离为（　　）

A．6　B．2　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【考点】椭圆的简单性质．

【专题】计算题．

【分析】根据椭圆定义，求出 m，利用第二定义求出到右准线的距离，注意右焦点右准线的对应关系．

【解答】解：由椭圆第一定义知 a=2，所以 $m^2=4$，

椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow\frac{1}{d}=e=\frac{1}{2}$

所以 d=2，故选 B

【点评】本题考查了椭圆的第一定义以及第二定义的应用

6.（5 分）（2008•天津）设集合 S={x||x﹣2|＞3}，T={x|a＜x＜a+8}，S∪T=R，则 a 的取值范围是（　　）

A．﹣3＜a＜﹣1　B．﹣3≤a≤﹣1　C．a≤﹣3 或 a≥﹣1　D．a＜﹣3 或 a＞﹣1

【考点】集合的包含关系判断及应用．

【分析】根据题意，易得 S={x|x＜﹣1 或 x＞5}，又有 S∪T=R，可得不等式组，解可得答案．

【解答】解：根据题意，S={x||x﹣2|＞3}={x|x＜﹣1 或 x＞5}，

又有 S∪T=R，

所以$\begin{cases}a<-1\\a+8>5\end{cases}\Rightarrow-3<a<-1$，

故选 A．

【点评】本题考查集合间的相互包含关系及运算，应注意不等式的正确求解，并结合数轴判断集合间的关系．

7.（5 分）（2008•天津）设函数$f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$（$0\leqslant x<1$）的反函数为 f^{-1}(x)，则（　　）

A．f^{-1}（x）在其定义域上是增函数且最大值为 1

B．f^{-1}（x）在其定义域上是减函数且最小值为 0

C．f^{-1}（x）在其定义域上是减函数且最大值为 1

D．f^{-1}（x）在其定义域上是增函数且最小值为 0

【考点】反函数．

【分析】根据本题所给出的选项，利用排除法比较方便，这样可以简化直接求解带来的繁琐．

【解答】解：$\because y=-\sqrt{x}+1$为减函数，

由复合函数单调性知 f（x）为增函数，

$\therefore f^{-1}$（x）单调递增，排除 B、C；

又 f^{-1}（x）的值域为 f（x）的定义域，

$\therefore f^{-1}$（x）最小值为 0

故选 D

【点评】本题很好的利用了排除法，显得小巧灵活，如果求出反函数再去研究，就会麻烦多了，可以比较一下感受感受，所以筛选法、排除法、验证法都是很好的解题方法，平时要用．

8．（5 分）（2008•天津）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<0\\ x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，则不等式 x+（x+1）f（x+1）≤1 的解集是（　　）

A．$\{x|-1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\}$　B．{x|x≤1}　C．$\{x|x\leqslant \sqrt{2}-1\}$　D．$\{x|-\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\}$

【考点】分段函数的解析式求法及其图象的作法．

【分析】对 f（x+1）中的 x 分两类，即当 x+1＜0，和 x+1≥0 时分别解不等式可得结果．

【解答】解：依题意得 $\begin{cases}x+1<0\\ x+(x+1)(-x)\leqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x+(x+1)x\leqslant 1\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x<-1\\ x\in R\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ -\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$ 或 $-1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\Rightarrow x\leqslant \sqrt{2}-1$

故选：C．

【点评】本题考查分断函数，不等式组的解法，分类讨论的数学思想，是基础题．

9．（5 分）（2008•天津）已知函数 f（x）是定义在 R 上的偶函数，且在区间[0，+∞）上是增函数．令 a=f（$\sin\frac{2\pi}{7}$），b=f（$\cos\frac{5\pi}{7}$），c=f（$\tan\frac{5\pi}{7}$），则（　　）

A．b＜a＜c　B．c＜b＜a　C．b＜c＜a　D．a＜b＜c

【考点】偶函数；不等式比较大小．

【专题】压轴题．

【分析】通过奇偶性将自变量调整到同一单调区间内，根据单调性比较 a、b、c 的大小．

【解答】解：$b=f\left(-\cos\frac{5\pi}{7}\right)=f\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)$，$c=f\left(-\tan\frac{5\pi}{7}\right)=f\left(\tan\frac{2\pi}{7}\right)$

因为 $\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$，又由函数在区间[0，+∞）上是增函数，

所以 $0<\cos\frac{2\pi}{7}<\sin\frac{2\pi}{7}<1<\tan\frac{2\pi}{7}$，所以 b＜a＜c，

故选 A

【点评】本题属于单调性与增减性的综合应用，解决此类题型要注意：

（1）通过周期性、对称性、奇偶性等性质将自变量调整到同一单调区间内，再比较大小．

（2）培养数形结合的思想方法．

10．（5 分）（2008•天津）有 8 张卡片分别标有数字 1，2，3，4，5，6，7，8，从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列，要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5，则不同的排法共有（　　）

A．1344 种　B．1248 种　C．1056 种　D．960 种

【考点】排列、组合的实际应用．
【专题】计算题；压轴题．
【分析】根据题意，分 2 步进行，首先确定中间行的数字只能为 1，4 或 2，3，然后确定其余 4 个数字的排法数，使用排除法，用总数减去不合题意的情况数，可得其情况数目，由乘法原理计算可得答案．
【解答】解：根据题意，要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5，则中间行的数字只能为 1，4 或 2，3，共有 $C_2^1A_2^2=4$ 种排法，
然后确定其余 4 个数字，其排法总数为 $A_6^4=360$，
其中不合题意的有：中间行数字和为 5，还有一行数字和为 5，有 4 种排法，
余下两个数字有 $A_4^2=12$ 种排法，
所以此时余下的这 4 个数字共有 $360-4\times12=312$ 种方法；
由乘法原理可知共有 $4\times312=1248$ 种不同的排法，
故选 B．
【点评】本题考查排列、组合的综合应用，注意特殊方法的使用，如排除法．

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

11．（4 分）（2008•天津）$(x-\frac{2}{\sqrt{x}})^5$的二项展开式中，x^2 的系数是__40__（用数字作答）．
【考点】二项式定理．
【专题】计算题．
【分析】利用二项展开式的通项公式求出第 r+1 项，令 x 的指数为 2 求出 x^2 的系数．
【解答】解：$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-\frac{2}{\sqrt{x}})^r=(-2)^r C_5^r x^{5-\frac{3}{2}r}$，
令 $5-\frac{3}{2}r=2$
所以 r=2，
所以 x^2 的系数为 $(-2)^2C_5^2=40$．
故答案为 40
【点评】本题考查二项展开式的通项公式是解决二项展开式的特定项问题的工具．

12．（4 分）（2008•天津）一个正方体的各顶点均在同一球的球面上，若该球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则该正方体的表面积为__24__．
【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积；球的体积和表面积．
【专题】计算题；综合题．
【分析】由题意球的直径等于正方体的体对角线的长，求出球的半径，再求正方体的棱长，然后求正方体的表面积．
【解答】解：设球的半径为 R，由$\frac{4\pi}{3}R^3=4\sqrt{3}\pi$ 得 $R=\sqrt{3}$，
所以 a=2，表面积为 $6a^2=24$．
故答案为：24
【点评】本题考查球的内接体，球的表面积，考查空间想象能力，计算能力，是基础题．

13.（4 分）（2008•天津）已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 y=x 对称．直线 4x﹣3y﹣2=0 与圆 C 相交于 A、B 两点，且|AB|=6，则圆 C 的方程为 $x^2+(y-1)^2=10$ ．

【考点】抛物线的应用；圆的标准方程；直线和圆的方程的应用．

【专题】计算题．

【分析】先根据抛物线方程求得焦点坐标，进而求得圆心，进而求得圆心到直线 4x﹣3y﹣2=0 的距离，根据勾股定理求得圆的半径．则圆的方程可得．

【解答】解：依题意可知抛物线的焦点为（1，0），

∵圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 y=x 对称．

所以圆心坐标为（0，1），

$$\therefore r^2=3^2+\frac{(0-3-2)^2}{5^2}=10,$$

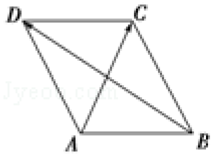
圆 C 的方程为 $x^2+(y-1)^2=10$

故答案为 $x^2+(y-1)^2=10$

【点评】本题主要考查了抛物线的应用．涉及了圆的基本性质，对称性问题，点到直线的距离，数形结合思想等问题．

14.（4 分）（2008•天津）如图，在平行四边形 ABCD 中，

$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,2)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$__3__．



【考点】平面向量数量积的运算．

【分析】选一对不共线的向量做基底，在平行四边形中一般选择以最左下角定点为起点的一对边做基底，把基底的坐标求出来，代入数量积的坐标公式进行运算，得到结果．

【解答】解：令 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，

$$\text{则}\begin{cases}a+b=(1,2)\\-a+b=(-3,2)\end{cases}\Rightarrow a=(2,0),\quad b=(-1,2)$$

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=b\cdot(a+b)=3.$

故答案为：3

【点评】用基底表示向量，然后进行运算，比较困难．要启发学生在理解数量积的运算特点的基础上，逐步把握数量积的运算律，引导学生注意数量积性质的相关问题的特点，以熟练地应用数量积的性质．

15．（4 分）（2008•天津）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3^{n+1}}$（$n\in N^*$），则

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$__$\frac{7}{6}$__．

【考点】数列的求和；极限及其运算．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】首先由$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3^{n+1}}$（$n\in N^*$）求$a_n$可以猜想到用错位相加法把中间项消去，即可得到$a_n$的表达式，再求极限即可．

【解答】解：因为

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}+a_{n-2})++(a_2-a_1)+a_1=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{3^2}+1$$

所以a_n是一个等比数列的前 n 项和，所以$a_n=\frac{1-q^n}{1-q}$，且 q=2．代入，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{6}$．

所以答案为$\frac{7}{6}$

【点评】此题主要考查数列的求和问题，用到错位相加法的思想，需要注意．

16．（4 分）（2008•天津）设 a＞1，若仅有一个常数 c 使得对于任意的 x∈[a，2a]，都有 y∈[a，a²]满足方程$\log_a x+\log_a y=c$，这时 a 的取值的集合为__{2}__．

【考点】对数的运算性质；函数单调性的性质．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】由$\log_a x+\log_a y=c$可以用 x 表达出 y，转化为函数的值域问题求解．

【解答】解：∵$\log_a x+\log_a y=c$，

∴$\log_a^{xy}=c$

∴$xy=a^c$

得$y=\frac{a^c}{x}$，单调递减，所以当 x∈[a，2a]时，$y\in[\frac{a^{c-1}}{2}，a^{c-1}]$

所以$\begin{cases}\frac{a^{c-1}}{2}\geqslant a\\ a^{c-1}\leqslant a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c\geqslant 2+\log_a 2\\ c\leqslant 3\end{cases}$，因为有且只有一个常数 c 符合题意，所以

$2+\log_a 2=3$，解得 a=2，所以 a 的取值的集合为{2}．

故答案为：{2}

【点评】本题考查函数与方程思想，需要有较强的转化问题的能力.