

2022 年普通高等学校招生全国统一考试数学（天津卷）2022. 06.

一、选择题：本题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 2\}$ ，则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 1, 2\}$ D. $\{0, -1, 1, 2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求出 $\complement_U B$ ，再根据交集的定义可求 $A \cap (\complement_U B)$ ．

【详解】 $\complement_U B = \{-2, 0, 1\}$ ，故 $A \cap (\complement_U B) = \{0, 1\}$ ，

故选：A.

2. “ x 为整数”是“ $2x+1$ 为整数”的 (\quad)

- A. 充分不必要 B. 必要不充分
C. 充分必要 D. 既不充分也不必要

【答案】A

【解析】

【分析】依据充分不必要条件的定义去判定“ x 为整数”与“ $2x+1$ 为整数”的逻辑关系即可．

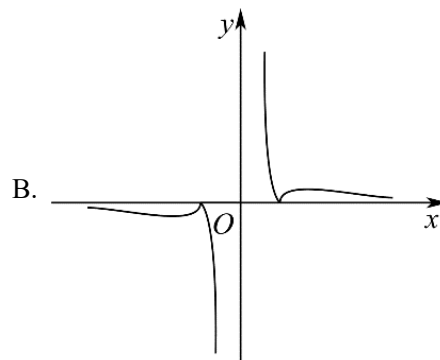
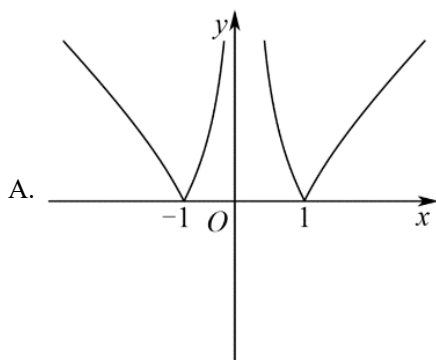
【详解】由题意，若 x 为整数，则 $2x+1$ 为整数，故充分性成立；

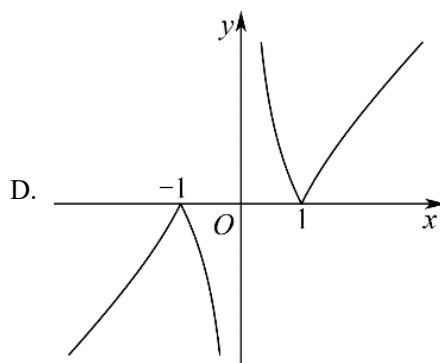
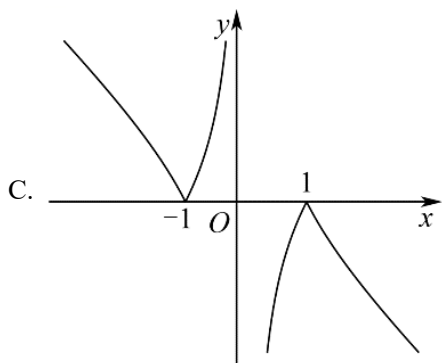
当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $2x+1$ 为整数，但 x 不为整数，故必要性不成立；

所以“ x 为整数”是“ $2x+1$ 为整数”的充分不必要条件．

故选：A.

3. 函数 $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}$ 的图像为 (\quad)





【答案】D

【解析】

【分析】分析函数 $f(x)$ 的定义域、奇偶性、单调性及其在 $(-\infty, 0)$ 上的函数值符号，结合排除法可得出合适的选项.

【详解】函数 $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$,

$$\text{且 } f(-x) = \frac{|(-x)^2 - 1|}{-x} = -\frac{|x^2 - 1|}{x} = -f(x),$$

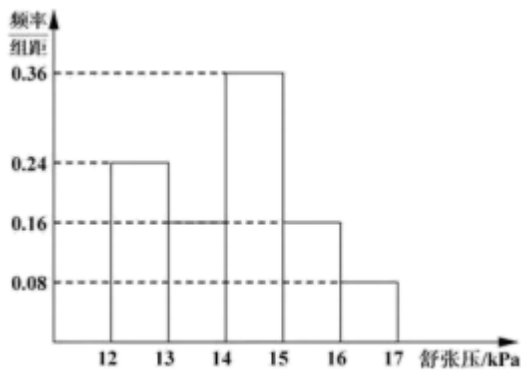
函数 $f(x)$ 为奇函数，A 选项错误；

又当 $x < 0$ 时， $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x} \leq 0$ ，C 选项错误；

当 $x > 1$ 时， $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$ 函数单调递增，故 B 选项错误；

故选：D

4. 为研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为 $[12, 13)$, $[13, 14)$, $[14, 15)$, $[15, 16)$, $[16, 17]$ ，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，...，第五组，右图是根据试验数据制成的频率分布直方图．已知第一组与第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为（ ）



- A. 8 B. 12 C. 16 D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】结合已知条件和频率分布直方图求出志愿者的总人数，进而求出第三组的总人数，从而可以求得结果.

【详解】志愿者的总人数为 $\frac{20}{(0.24+0.16) \times 1} = 50$,

所以第三组人数为 $50 \times 0.36 = 18$,

有疗效的人数为 $18 - 6 = 12$.

故选：B.

5. 已知 $a = 2^{0.7}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.7}$, $c = \log_2 \frac{1}{3}$, 则 ()

- A. $a > c > b$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $c > a > b$

【答案】C

【解析】

【分析】利用幂函数、对数函数的单调性结合中间值法可得出 a 、 b 、 c 的大小关系.

【详解】因为 $2^{0.7} > \left(\frac{1}{3}\right)^{0.7} > 0 = \log_2 1 > \log_2 \frac{1}{3}$, 故 $a > b > c$.

故答案为：C.

6. 化简 $(2\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$ 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据对数的性质可求代数式的值.

故选：B

A. $\frac{x^2}{10} - y^2 = 1$

B. $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$

C. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

D. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

【答案】C

【解析】

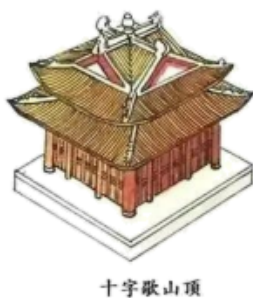
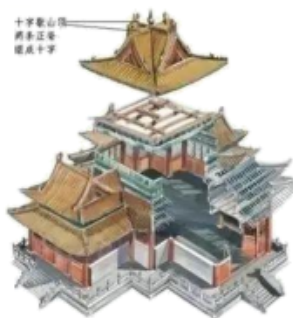
【详解】抛物线 $y^2 = 4\sqrt{5}x$ 的准线方程为 $x = -\sqrt{5}$ ，则 $c = \sqrt{5}$ ，则 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{5}, 0)$ ，

因为 $AF_1 \perp F_1F_2$ 且 $\angle F_1F_2A = \frac{\pi}{4}$, 则 $\triangle F_1F_2A$ 为等腰直角三角形,

所以, $\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ c = \sqrt{5} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{5} \end{cases}$, 因此, 双曲线的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

故选: C.

第4 页 | 共21 页



A. 23

B. 24

C. 26

D. 27

【答案】D

【解析】

【分析】作出几何体直观图，由题意结合几何体体积公式即可得组合体的体积.

【详解】该几何体由直三棱柱 $AFD-BHC$ 及直三棱柱 $DGC-AEB$ 组成，作 $HM \perp CB$ 于 M ，如图，

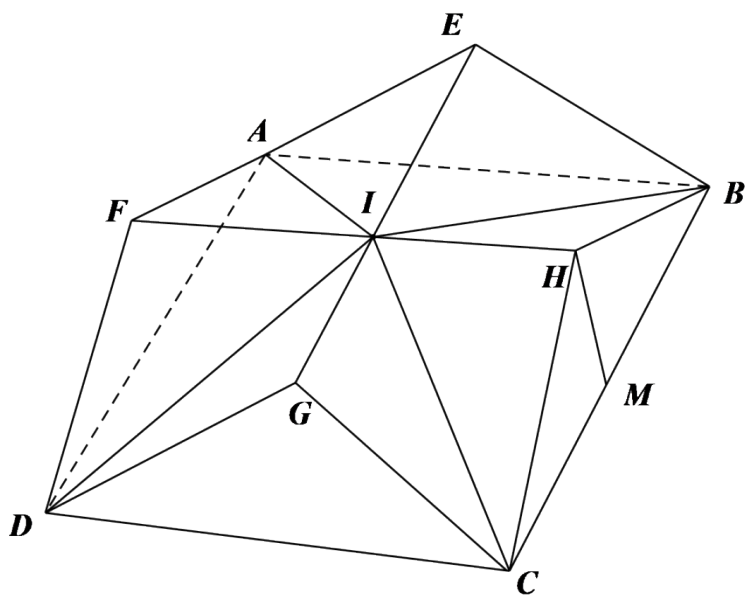
因为 $CH = BH = 3, \angle CHB = 120^\circ$ ，所以 $CM = BM = \frac{3\sqrt{3}}{2}, HM = \frac{3}{2}$ ，

因为重叠后的底面为正方形，所以 $AB = BC = 3\sqrt{3}$ ，

在直棱柱 $AFD-BHC$ 中， $AB \perp$ 平面 BHC ，则 $AB \perp HM$ ，

由 $AB \cap BC = B$ 可得 $HM \perp$ 平面 $ADCB$ ，

设重叠后的 EG 与 FH 交点为 I ，



则 $V_{I-BCDA} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$ ， $V_{AFD-BHC} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{3}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{81}{4}$

则该几何体的体积为 $V = 2V_{AFD-BHC} - V_{I-BCDA} = 2 \times \frac{81}{4} - \frac{27}{2} = 27$ 。

故选：D.

9. 已知 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ，关于该函数有下列四个说法：

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ；

② $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增；

③ 当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 时， $f(x)$ 的取值范围为 $[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$ ；

④ $f(x)$ 的图象可由 $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到。

以上四个说法中，正确的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角函数的图象与性质，以及变换法则即可判断各说法的真假。

【详解】因为 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，①不正确；

令 $t = 2x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，而 $y = \frac{1}{2} \sin t$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上递增，所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，②正确；因为

$t = 2x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ， $\sin t \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ ，所以 $f(x) \in [-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}]$ ，③不正确；

由于 $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin[2(x + \frac{\pi}{8})]$ ，所以 $f(x)$ 的图象可由 $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到，④不正确。

故选：A.

第 II 卷

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分。

10. 已知 i 是虚数单位，化简 $\frac{11-3i}{1+2i}$ 的结果为_____.

【答案】 $1-5i$

【解析】

【分析】 根据复数代数形式的运算法则即可解出.

【详解】 $\frac{11-3i}{1+2i} = \frac{(11-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{11-6-25i}{5} = 1-5i$.

故答案为: $1-5i$.

11. $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式中的常数项为_____.

【答案】 15

【解析】

【分析】 由题意结合二项式定理可得 $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot 3^r \cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$, 令 $\frac{5-5r}{2} = 0$, 代入即可得解.

【详解】 由题意 $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot (\sqrt{x})^{5-r} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^r = C_5^r \cdot 3^r \cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$,
令 $\frac{5-5r}{2} = 0$ 即 $r=1$, 则 $C_5^r \cdot 3^r = C_5^1 \cdot 3 = 15$,

所以 $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式中的常数项为 15.

故答案为: 15.

【点睛】 本题考查了二项式定理的应用, 考查了运算求解能力, 属于基础题.

12. 若直线 $x-y+m=0 (m>0)$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 相交所得的弦长为 m , 则 $m =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 计算出圆心到直线的距离, 利用勾股定理可得出关于 m 的等式, 即可解得 m 的值.

【详解】 圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 的圆心坐标为 $(1,1)$, 半径为 $\sqrt{3}$,

圆心到直线 $x-y+m=0 (m>0)$ 的距离为 $\frac{|1-1+m|}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$,

由勾股定理可得 $\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = 3$ ，因为 $m > 0$ ，解得 $m = 2$ 。

故答案为：2。

13. 52 张扑克牌，没有大小王，无放回地抽取两次，则两次都抽到 A 的概率为_____；已知第一次抽到的是 A ，则第二次抽取 A 的概率为_____

【答案】 ①. $\frac{1}{221}$ ②. $\frac{1}{17}$

【解析】

【分析】由题意结合概率的乘法公式可得两次都抽到 A 的概率，再由条件概率的公式即可求得在第一次抽到 A 的条件下，第二次抽到 A 的概率。

【详解】由题意，设第一次抽到 A 的事件为 B ，第二次抽到 A 的事件为 C ，

$$\text{则 } P(BC) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}, P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{17}.$$

故答案为： $\frac{1}{221}$ ； $\frac{1}{17}$ 。

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ， D 是 AC 中点， $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BE}$ ，试用 \vec{a}, \vec{b} 表示 \overrightarrow{DE} 为_____，若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DE}$ ，则 $\angle ACB$ 的最大值为_____

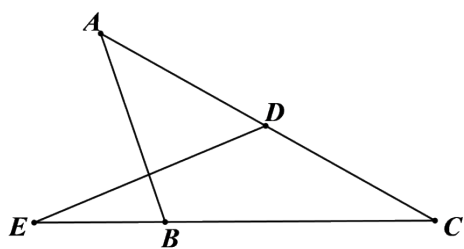
【答案】 ①. $\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ ②. $\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】法一：根据向量的减法以及向量的数乘即可表示出 \overrightarrow{DE} ，以 $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ 为基底，表示出 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}$ ，由 $AB \perp DE$ 可得 $3\vec{b}^2 + \vec{a}^2 = 4\vec{b} \cdot \vec{a}$ ，再根据向量夹角公式以及基本不等式即可求出。

法二：以点 E 为原点建立平面直角坐标系，设 $E(0,0), B(1,0), C(3,0), A(x,y)$ ，由 $AB \perp DE$ 可得点 A 的轨迹为以 $M(-1,0)$ 为圆心，以 $r=2$ 为半径的圆，方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ ，即可根据几何性质可知，当且仅当 CA 与 $\odot M$ 相切时， $\angle C$ 最大，即求出。

【详解】方法一：



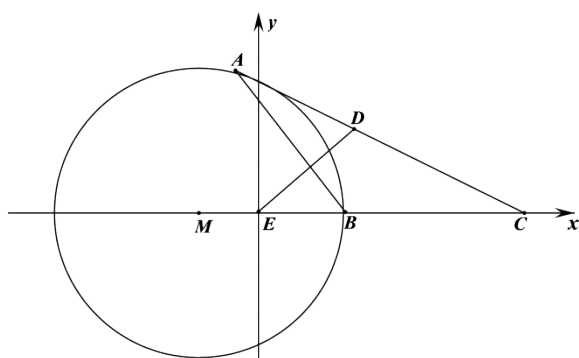
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DE} \Rightarrow (3\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0,$$

$$3\vec{b}^2 + \vec{a}^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \cos \angle ACB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3\vec{b}^2 + \vec{a}^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|} \geq \frac{2\sqrt{3}|\vec{a}||\vec{b}|}{4|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 当且仅当 } |\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}| \text{ 时取等号, 而}$$

$$0 < \angle ACB < \pi, \text{ 所以 } \angle ACB \in (0, \frac{\pi}{6}].$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}; \frac{\pi}{6}.$$

方法二：如图所示，建立坐标系：



$$E(0,0), B(1,0), C(3,0), A(x,y), \quad \overrightarrow{DE} = (-\frac{x+3}{2}, -\frac{y}{2}), \quad \overrightarrow{AB} = (1-x, -y),$$

$$\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow (\frac{x+3}{2})(x-1) + \frac{y^2}{2} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4, \text{ 所以点 A 的轨迹是以 } M(-1,0) \text{ 为圆心, 以}$$

$$r=2 \text{ 为半径的圆, 当且仅当 } CA \text{ 与 } \odot M \text{ 相切时, } \angle C \text{ 最大, 此时 } \sin C = \frac{r}{CM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \angle C = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}; \frac{\pi}{6}.$$

15. 设 $a \in \mathbf{R}$ ，对任意实数 x ，记 $f(x) = \min\{|x| - 2, x^2 - ax + 3a - 5\}$ ．若 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为_____．

【答案】 $a \geq 10$

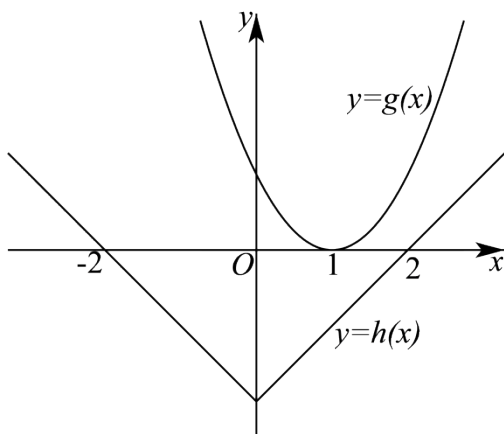
【解析】

【分析】 设 $g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$, $h(x) = |x| - 2$, 分析可知函数 $g(x)$ 至少有一个零点, 可得出 $\Delta \geq 0$, 求出 a 的取值范围, 然后对实数 a 的取值范围进行分类讨论, 根据题意可得出关于实数 a 的不等式, 综合可求得实数 a 的取值范围.

【详解】 设 $g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$, $h(x) = |x| - 2$, 由 $|x| - 2 = 0$ 可得 $x = \pm 2$.

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则函数 $g(x)$ 至少有一个零点, 则 $\Delta = a^2 - 12a + 20 \geq 0$, 解得 $a \leq 2$ 或 $a \geq 10$.

①当 $a = 2$ 时, $g(x) = x^2 - 2x + 1$, 作出函数 $g(x)$ 、 $h(x)$ 的图象如下图所示:



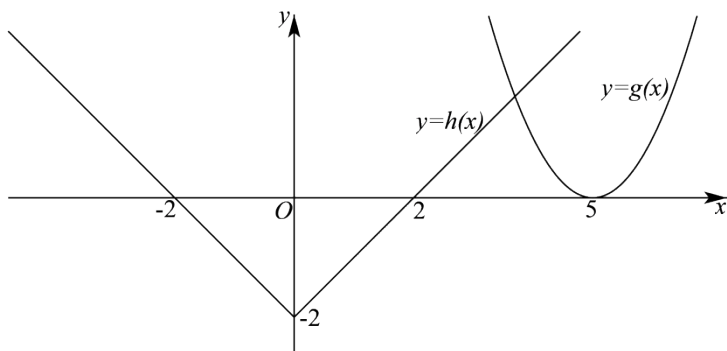
此时函数 $f(x)$ 只有两个零点, 不合乎题意;

②当 $a < 2$ 时, 设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_1 、 x_2 ($x_1 < x_2$),

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则 $x_2 \leq -2$,

所以,
$$\begin{cases} \frac{a}{2} < -2 \\ g(-2) = 4 + 5a - 5 \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } a \in \emptyset;$$

③当 $a = 10$ 时, $g(x) = x^2 - 10x + 25$, 作出函数 $g(x)$ 、 $h(x)$ 的图象如下图所示:



由图可知，函数 $f(x)$ 的零点个数为 3，合乎题意；

④当 $a > 10$ 时，设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_3 、 x_4 ($x_3 < x_4$)，

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则 $x_3 \geq 2$ ，

$$\text{可得} \begin{cases} \frac{a}{2} > 2 \\ g(2) = 4 + a - 5 \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } a > 4, \text{此时 } a > 10.$$

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[10, +\infty)$ 。

故答案为： $[10, +\infty)$ 。

【点睛】方法点睛：已知函数有零点（方程有根）求参数值（取值范围）常用的方法：

- （1）直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围；
- （2）分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决；
- （3）数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，利用数形结合的方法求解。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c 。已知 $a = \sqrt{6}$ ， $b = 2c$ ， $\cos A = -\frac{1}{4}$ 。

- （1）求 c 的值；
- （2）求 $\sin B$ 的值；
- （3）求 $\sin(2A - B)$ 的值。

【答案】（1） $c = 1$

$$\text{（2） } \sin B = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$(3) \sin(2A-B) = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

【解析】

【分析】(1) 根据余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 以及 $b = 2c$ 解方程组即可求出；

(2) 由 (1) 可求出 $b = 2$ ，再根据正弦定理即可解出；

(3) 先根据二倍角公式求出 $\sin 2A, \cos 2A$ ，再根据两角差的正弦公式即可求出。

【小问 1 详解】

因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，即 $6 = b^2 + c^2 + \frac{1}{2}bc$ ，而 $b = 2c$ ，代入得 $6 = 4c^2 + c^2 + c^2$ ，解得：

$$c = 1.$$

【小问 2 详解】

由 (1) 可求出 $b = 2$ ，而 $0 < A < \pi$ ，所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，又 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，所以

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

【小问 3 详解】

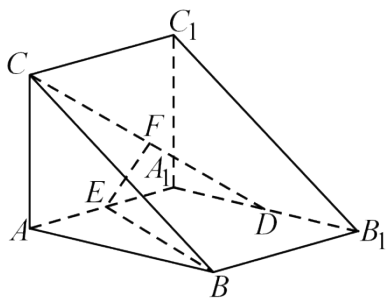
因为 $\cos A = -\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ ，故 $0 < B < \frac{\pi}{2}$ ，又 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，所以

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{8}, \quad \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}, \quad \text{而}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \text{所以 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{故 } \sin(2A-B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right) \times \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{7}{8} \times \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{8}.$$

17. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 = AB = AC = 2, AA_1 \perp AB, AC \perp AB$ ， D 为 A_1B_1 的中点， E 为 AA_1 的中点， F 为 CD 的中点。



- (1) 求证： $EF \parallel$ 平面 ABC ；
- (2) 求直线 BE 与平面 CC_1D 所成角的正弦值；
- (3) 求平面 A_1CD 与平面 CC_1D 所成二面角的余弦值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{4}{5}$

(3) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

【分析】(1) 以点 A_1 为坐标原点， A_1A 、 A_1B_1 、 A_1C_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可证得结论成立；

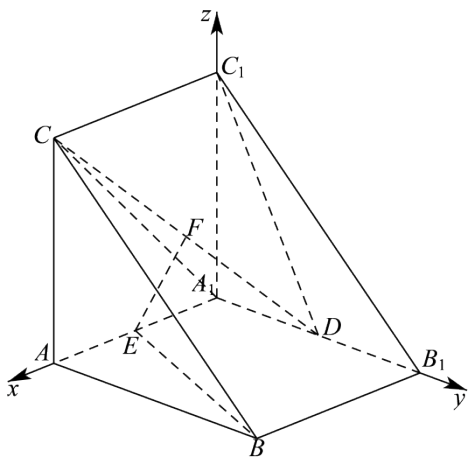
(2) 利用空间向量法可求得直线 BE 与平面 CC_1D 夹角的正弦值；

(3) 利用空间向量法可求得平面 A_1CD 与平面 CC_1D 夹角的余弦值.

【小问 1 详解】

证明：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，且 $AC \perp AB$ ，则 $A_1C_1 \perp A_1B_1$

以点 A_1 为坐标原点， A_1A 、 A_1B_1 、 A_1C_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0)$ 、 $B(2,2,0)$ 、 $C(2,0,2)$ 、 $A_1(0,0,0)$ 、 $B_1(0,0,2)$ 、 $C_1(0,0,2)$ 、 $D(0,1,0)$ 、

$E(1,0,0)$ 、 $F\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ ，则 $\overrightarrow{EF} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ ，

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$ ，则 $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{m} = 0$ ，故 $\overrightarrow{EF} \perp \vec{m}$ ，

$\therefore EF \not\subset$ 平面 ABC ，故 $EF \parallel$ 平面 ABC 。

【小问 2 详解】

解： $\overrightarrow{C_1C} = (2, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{C_1D} = (0, 1, -2)$ ， $\overrightarrow{EB} = (1, 2, 0)$ ，

设平面 CC_1D 的法向量为 $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ，则 $\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 2x_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{C_1D} = y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}$ ，

取 $y_1 = 2$ ，可得 $\vec{u} = (0, 2, 1)$ ， $\cos \langle \overrightarrow{EB}, \vec{u} \rangle = \frac{\overrightarrow{EB} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{EB}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{4}{5}$ 。

因此，直线 BE 与平面 CC_1D 夹角的正弦值为 $\frac{4}{5}$ 。

【小问 3 详解】

解： $\overrightarrow{A_1C} = (2, 0, 2)$ ， $\overrightarrow{A_1D} = (0, 1, 0)$ ，

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则 $\begin{cases} \vec{v} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 2x_2 + 2z_2 = 0 \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{A_1D} = y_2 = 0 \end{cases}$ ，

取 $x_2 = 1$ ，可得 $\vec{v} = (1, 0, -1)$ ，则 $\cos \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = -\frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

因此，平面 A_1CD 与平面 CC_1D 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1 = b_1 = a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = 1$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $(S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1}b_{n+1} - S_nb_n$;

(3) 求 $\sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] b_k$.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}$

(2) 证明见解析 (3) $\frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9}$

【解析】

【分析】(1) 利用等差等比数列的通项公式进行基本量运算即可得解;

(2) 由等比数列的性质及通项与前 n 项和的关系结合分析法即可得证;

(3) 先求得 $[a_{2k} - (-1)^{2k-1} a_{2k-1}] b_{2k-1} + [a_{2k+1} - (-1)^{2k} a_{2k}] b_{2k}$, 进而由并项求和可得 $T_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k+1}$,

再结合错位相减法可得解.

【小问 1 详解】

设 $\{a_n\}$ 公差为 d , $\{b_n\}$ 公比为 q , 则 $a_n = 1 + (n-1)d, b_n = q^{n-1}$,

由 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = 1$ 可得 $\begin{cases} 1+d-q=1 \\ 1+2d-q^2=1 \end{cases} \Rightarrow d=q=2$ ($d=q=0$ 舍去),

所以 $a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}$;

【小问 2 详解】

证明: 因为 $b_{n+1} = 2b_n \neq 0$, 所以要证 $(S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1}b_{n+1} - S_nb_n$,

即证 $(S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1} \cdot 2b_n - S_nb_n$, 即证 $S_{n+1} + a_{n+1} = 2S_{n+1} - S_n$,

即证 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$,

而 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 显然成立, 所以 $(S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1} \cdot b_{n+1} - S_n \cdot b_n$;

【小问 3 详解】

因为 $[a_{2k} - (-1)^{2k-1} a_{2k-1}] b_{2k-1} + [a_{2k+1} - (-1)^{2k} a_{2k}] b_{2k}$

$= (4k-1+4k-3) \times 2^{2k-1} + [4k+1-(4k-1)] \times 2^{2k} = k \times 4^{k+1}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] b_k &= \sum_{k=1}^n [(a_{2k} - (-1)^{2k-1} a_{2k-1}) b_{2k-1} + (a_{2k+1} - (-1)^{2k} a_{2k}) b_{2k}] \\ &= \sum_{k=1}^n k \times 4^{k+1}, \end{aligned}$$

$$\text{设 } T_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k+1}$$

$$\text{所以 } T_n = 1 \times 4^2 + 2 \times 4^3 + 3 \times 4^4 + \cdots + n \times 4^{n+1},$$

$$\text{则 } 4T_n = 1 \times 4^3 + 2 \times 4^4 + 3 \times 4^5 + \cdots + n \times 4^{n+2},$$

$$\begin{aligned} \text{作差得 } -3T_n &= 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots + 4^{n+1} - n \times 4^{n+2} = \frac{4^2(1-4^n)}{1-4} - n \times 4^{n+2} \\ &= \frac{(1-3n)4^{n+2} - 16}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] b_k = \frac{(3n-1)4^{n+2} + 16}{9}.$$

19. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F 、右顶点为 A ，上顶点为 B ，且满足 $\frac{|BF|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆的离心率 e ；

(2) 直线 l 与椭圆有唯一公共点 M ，与 y 轴相交于 N (N 异于 M)。记 O 为坐标原点，若 $|OM| = |ON|$ ，

且 $\triangle OMN$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，求椭圆的标准方程。

【答案】 (1) $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

【解析】

【分析】 (1) 根据已知条件可得出关于 a 、 b 的等量关系，由此可求得该椭圆的离心率的值；

(2) 由 (1) 可知椭圆的方程为 $x^2 + 3y^2 = a^2$ ，设直线 l 的方程为 $y = kx + m$ ，将直线 l 的方程与椭圆方程联立，由 $\Delta = 0$ 可得出 $3m^2 = a^2(1 + 3k^2)$ ，求出点 M 的坐标，利用三角形的面积公式以及已知条件可求

得 a^2 的值, 即可得出椭圆的方程.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{|BF|}{|AB|} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4a^2 = 3(b^2 + a^2) \Rightarrow a^2 = 3b^2,$$

$$\text{离心率为 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可知椭圆的方程为 $x^2 + 3y^2 = a^2$,

易知直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 3y^2 = a^2 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + (3m^2 - a^2) = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 36k^2m^2 - 4(1 + 3k^2)(3m^2 - a^2) = 0 \Rightarrow 3m^2 = a^2(1 + 3k^2), \quad ①$$

$$x_M = -\frac{3km}{3k^2 + 1}, \quad y_M = kx_M + m = \frac{m}{1 + 3k^2},$$

$$\text{由 } |OM| = |ON| \text{ 可得 } m^2 = \frac{m^2(9k^2 + 1)}{(3k^2 + 1)^2}, \quad ②$$

$$\text{由 } S_{\triangle OMN} = \sqrt{3} \text{ 可得 } \frac{1}{2}|m| \cdot \frac{|3km|}{1 + 3k^2} = \sqrt{3}, \quad ③$$

$$\text{联立 } ①②③ \text{ 可得 } k^2 = \frac{1}{3}, \quad m^2 = 4, \quad a^2 = 6, \text{ 故椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

20. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = e^x - a \sin x, g(x) = b\sqrt{x}$

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有公共点,

(i) 当 $a = 0$ 时, 求 b 的取值范围;

(ii) 求证: $a^2 + b^2 > e$.

【答案】(1) $y = (1 - a)x + 1$

(2) (i) $b \in [\sqrt{2e}, +\infty)$; (ii) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 求出 $f'(0)$ 可求切线方程;

(2) (i) 当 $a=0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点即为 $s(t)=e^{t^2}-bt, t \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上有零点, 求导后分类讨论结合零点存在定理可求 $b \in [\sqrt{2e}, +\infty)$.

(ii) 曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点即 $a \sin x_0 + b\sqrt{x_0} - e^{x_0} = 0$, 利用点到直线的距离得到

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0 + x_0}}, \text{ 利用导数可证 } \frac{e^{2x}}{\sin^2 x + x} > e, \text{ 从而可得不等式成立.}$$

【小问 1 详解】

$$f'(x) = e^x - a \cos x, \text{ 故 } f'(0) = 1 - a, \text{ 而 } f(0) = 1,$$

曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = (1-a)(x-0) + 1$ 即 $y = (1-a)x + 1$.

【小问 2 详解】

(i) 当 $a=0$ 时,

因为曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点, 故 $e^x = b\sqrt{x}$ 有解,

设 $t = \sqrt{x}$, 故 $x = t^2$, 故 $e^{t^2} = bt$ 在 $[0, +\infty)$ 上有解,

设 $s(t) = e^{t^2} - bt, t \geq 0$, 故 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有零点,

而 $s'(t) = 2te^{t^2} - b, t > 0$,

若 $b=0$, 则 $s(t) = e^{t^2} > 0$ 恒成立, 此时 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无零点,

若 $b < 0$, 则 $s'(t) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数,

而 $s(0) = 1 > 0$, $s(t) \geq s(0) = 1$, 故 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无零点,

故 $b > 0$,

设 $u(t) = 2te^{t^2} - b, t > 0$, 则 $u'(t) = (2 + 4t^2)e^{t^2} > 0$,

故 $u(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

而 $u(0) = -b < 0$, $u(b) = b(2e^{b^2} - 1) > 0$,

故 $u(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 t_0 ,

且 $0 < t < t_0$ 时, $u(t) < 0$; $t > t_0$ 时, $u(t) > 0$;

故 $0 < t < t_0$ 时, $s'(t) < 0$; $t > t_0$ 时, $s'(t) > 0$;

所以 $s(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上为减函数, 在 $(t_0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{故 } s(t)_{\min} = s(t_0),$$

因为 $s(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有零点, 故 $s(t_0) \leq 0$, 故 $e^{t_0^2} - bt_0 \leq 0$,

$$\text{而 } 2t_0e^{t_0^2} - b = 0, \text{ 故 } e^{t_0^2} - 2t_0^2e^{t_0^2} \leq 0 \text{ 即 } t_0 \geq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{设 } v(t) = 2te^{t^2}, t > 0, \text{ 则 } v'(t) = (2 + 4t^2)e^{t^2} > 0,$$

故 $v(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{而 } b = 2t_0e^{t_0^2}, \text{ 故 } b \geq \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}e.$$

(ii) 因为曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有公共点,

$$\text{所以 } e^x - a \sin x = b\sqrt{x} \text{ 有解 } x_0, \text{ 其中 } x_0 \geq 0,$$

若 $x_0 = 0$, 则 $1 - a \times 0 = b \times 0$, 该式不成立, 故 $x_0 > 0$.

$$\text{故 } a \sin x_0 + b\sqrt{x_0} - e^{x_0} = 0, \text{ 考虑直线 } a \sin x_0 + b\sqrt{x_0} - e^{x_0} = 0,$$

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 表示原点与直线 $a \sin x_0 + b\sqrt{x_0} - e^{x_0} = 0$ 上的动点 (a, b) 之间的距离,

$$\text{故 } \sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0 + x_0}}, \text{ 所以 } a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2x_0}}{\sin^2 x_0 + x_0},$$

下证: 对任意 $x > 0$, 总有 $|\sin x| < x$,

证明: 当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$, 故 $|\sin x| < x$ 成立.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 即证 $\sin x < x$,

$$\text{设 } p(x) = \sin x - x, \text{ 则 } p'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \text{ (不恒为零)},$$

故 $p(x) = \sin x - x$ 在 $[0, +\infty)$ 上为减函数, 故 $p(x) < p(0) = 0$ 即 $\sin < x$ 成立.

综上, $|\sin x| < x$ 成立.

下证: 当 $x > 0$ 时, $e^x > x + 1$ 恒成立,

$$q(x) = e^x - 1 - x, x > 0, \text{ 则 } q'(x) = e^x - 1 > 0,$$

故 $q(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故 $q(x) > q(0) = 0$ 即 $e^x > x + 1$ 恒成立.

下证: $\frac{e^{2x}}{\sin^2 x + x} > e$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即证: $e^{2x-1} > \sin^2 x + x$,

即证: $2x - 1 + 1 \geq \sin^2 x + x$, 即证: $x \geq \sin^2 x$,

而 $x > |\sin x| \geq \sin^2 x$, 故 $x \geq \sin^2 x$ 成立.

故 $\frac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0 + x_0}} > e$, 即 $a^2 + b^2 > e$ 成立.

【点睛】 思路点睛: 导数背景下零点问题, 注意利用函数的单调性结合零点存在定理来处理, 而多变量的不等式的成立问题, 注意从几何意义取构建不等式关系, 再利用分析法来证明目标不等式.

