绝密★启封并使用完毕前

# 2010年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

## 数学（文史类）

## 一、选择题：本小题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的.

1. 复数$\dfrac{2}{1-i}$等于

A. 1+I　　B. 1-i　　C. -1+i　　D. -1-i

2. 下列命题中的假命题是

A. $\exists x\in R,\lg x=0$　　　B. $\exists x\in R,\tan x=1$

C. $\forall x\in R,x^3>0$　　　D. $\forall x\in R,2^x>0$

3. 某商品销售量y（件）与销售价格x（元/件）负相关，则其回归方程可能是

A. $\hat{y}=-10x+200$　　　B. $\hat{y}=10x+200$

C. $\hat{y}=-10x-200$　　　D. $\hat{y}=10x-200$

4. 极坐标 $p=\cos\theta$ 和参数方程$\begin{cases}x=-1-t\\ y=2+t\end{cases}$（t为参数）所表示的图形分别是

A. 直线、直线 B. 直线、圆 C. 圆、圆 D. 圆、直线

5. 设抛物线 $y^2=8x$ 上一点P到y轴的距离是4，则点P到该抛物线焦点的距离是

A. 4　B. 6　C. 8　D. 12

6. 若非零向量a，b满足$|a|=|b|,(2a+b)\cdot b=0$，则a与b的夹角为

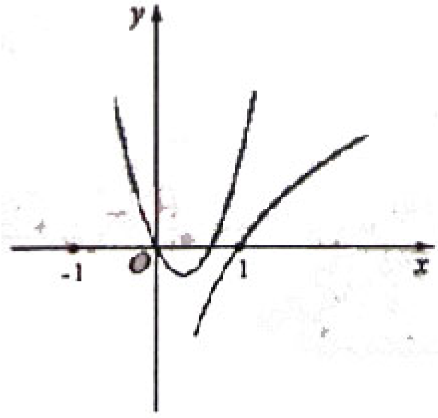
A. $30^0$　B. $60^0$　C. $120^0$　D. $150^0$

7.在△ABC中，角A，B，C所对的边长分别为a，b，c，若∠C=120°，c=$\sqrt{2}$a，则

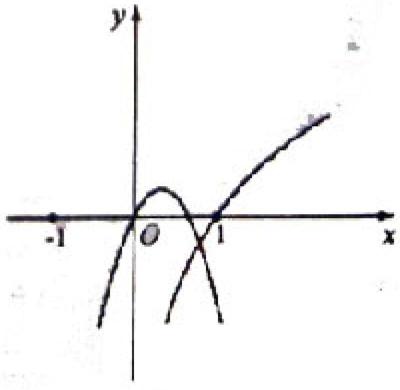
A.a＞b　　B.a＜b

C. a＝b　　D.a与b的大小关系不能确定

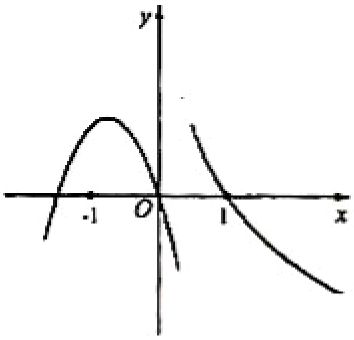
8.函数$y=ax^2+bx$与$y=\log_{|\frac{b}{a}|}x$ ($ab\neq0$，$|a|\neq|b|$)在同一直角坐标系中的图像可能是



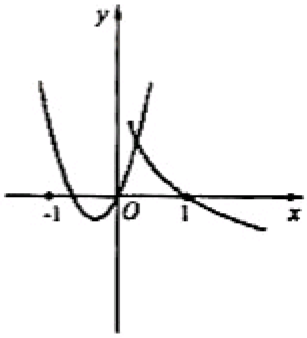
A



B



C



D

二、填空题：本大题共7小题，每小题5分，共35分，把答案填在答题卡中对应的题号后的横线上。

9.已知集合A={1,2,3，}，B={2，m，4}，A∩B={2,3}，则m=______

10.已知一种材料的最佳加入量在100g到200g之间，若用0.618法安排试验，则第一次试点的加入量可以是_______g

11.在区间[-1,2]上随即取一个数x，则x∈[0, 1]的概率为_______________。

12. 图1是求实数x的绝对值的算法程序框图，则判断框①中可填____________

13.图2中的三个直角三角形是一个体积为20cm²的几何体的三视图，则h=____cm

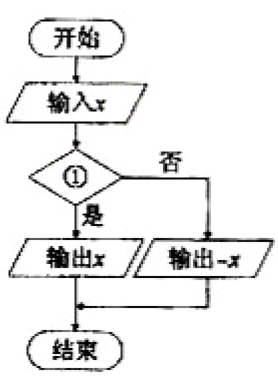



图1

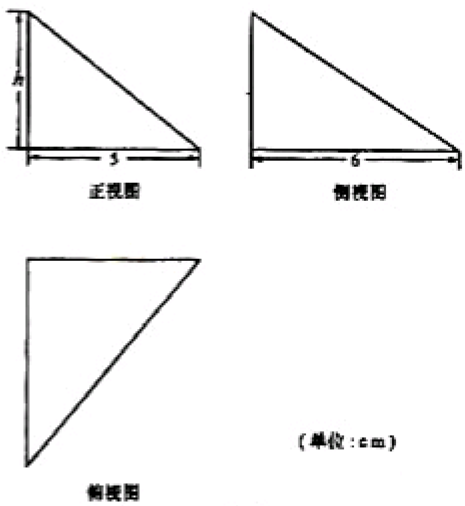



图2

14.若不同两点P,Q的坐标分别为（a，b），（3-b，3-a），则线段PQ的垂直平分线l的斜率为______,圆（x-2）²+（y-3）²=1关于直线对称的圆的方程为________。

15.若规定E=$\left\{a_{1,}a_2\ldots a_{10}\right\}$的子集$\left\{a_{k_1}a_{k_2}\ldots,a_{k_n}\right\}$为E的第k个子集，其中k=

$2^{k_1}+2^{k_2-1}+\cdots+2^{k_n-1}$，则

（1）$\left\{a_{1,},a_3\right\}$是E的第____个子集；

（2）E的第211个子集是_______

三、解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、说明过程或演算步骤。

16.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\sin 2x-2\sin^2 x$

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期。

(II) 求函数 $f(x)$ 的最大值及 $f(x)$ 取最大值时x的集合。

17.（本小题满分12分）

为了对某课题进行研究，用分层抽样方法从三所高校A,B,C的相关人员中，抽取若干人组成研究小组、有关数据见下表（单位：人）

| 高 校 | 相关人数 | 抽取人数 |
|---|---|---|
| A | 18 | $x$ |
| B | 36 | 2 |
| C | 54 | $y$ |

（I）　求x,y；

（II）　若从高校B、C抽取的人中选2人作专题发言，求这二人都来自高校C的概率。

18.（本小题满分12分）

如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=AD=1，$AA_1$=2，M是棱$CC_1$的中点

（Ⅰ）求异面直线$A_1M$和$C_1D_1$所成的角的正切值；

（Ⅱ）证明：平面ABM⊥平面$A_1B_1M_1$

19.（本小题满分13分）

为了考察冰川的融化状况，一支科考队在某冰川山上相距8Km的A、B两点各建一个考察基地，视冰川面为平面形，以过A、B两点的直线为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系（图4）。考察范围到A、B两点的距离之和不超过10Km的区域。

（I） 求考察区域边界曲线的方程：

（II） 如图4所示，设线段 $P_1P_2$

是冰川的部分边界线（不考虑其他边界），当冰川融化时，边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动，第一年移动0.2km，以后每年移动的距离为前一年的2倍。问：经过多长时间，点A恰好在冰川边界线上？

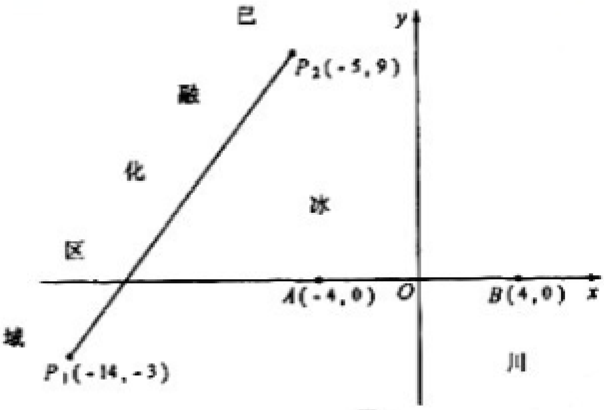



图4

20.（本小题满分13分）

给出下面的数表序列：

| 表1 | 表2 | 表3 | … |
|---|---|---|---|
| 1 | 1　3 | 1　3　5 | |
| | 4 | 4　8 | |
| | | 12 | |

其中表n（n=1,2,3　　　　　　　　　　　　　　　　…）有n行，第1行的n个数是1,3,5，…2n-1，从第2行起，每行中的每个数都等于它肩上的两数之和。

（I）写出表4，验证表4各行中数的平均数按从上到下的顺序构成等比数列，并将结论推广到表n（n≥3）（不要求证明）；

（II）每个数列中最后一行都只有一个数，它们构成数列1,4,12…，记此数列为

$\{b_n\}$ 求和：$\frac{b_3}{b_1b_2}+\frac{b_4}{b_2b_3}+\cdots\frac{b_{n+2}}{b_nb_{n+1}}$ （$n\in \mathbf{N}^*$）.

21．（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}+x+(a-1)\ln x+15a,$ 其中a<0,且a≠-1.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=\begin{cases}(-2x^3+3ax^3+6ax-4a^2-6a)e^x, & x\le 1\\ e\cdot f(x), & x>1\end{cases}$ （e是自然数的底数）。

是否存在a，使 $g(x)$ 在[a,-a]上为减函数？若存在，求a的取值范围；若不存在，请说明理由。

# 2010年湖南省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1．（5分）（2010•湖南）复数$\frac{2}{1-i}$的值为（　　）

A．1﹣i B．1+i C．﹣1﹣i D．﹣1+i

【考点】复数代数形式的乘除运算．

【专题】计算题．

【分析】复数的分子、分母同乘分母的共轭复数，化为a+bi（a、b∈R），可得选项．

【解答】解：$\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{1-i^2}=1+i$．

故选B．

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，高考常考题，是基础题．

2．（5分）（2010•湖南）下列命题中的假命题是（　　）

A．∃x∈R，lgx=0 B．∃x∈R，tanx=1 C．∀x∈R，$x^3>0$ D．∀x∈R，$2^x>0$

【考点】命题的真假判断与应用．

【分析】A、B、C可通过取特殊值法来判断；D、由指数函数的值域来判断．

【解答】解：A、x=1成立；B、$x=\frac{\pi}{4}$成立；D、由指数函数的值域来判断．对于C选项x=﹣1时，（﹣1）$^3$=﹣1＜0，不正确．
故选C
【点评】本题考查逻辑语言与指数数、二次函数、对数函数、正切函数的值域，属容易题．

3．（5分）（2010•湖南）某商品销售量y（件）与销售价格x（元/件）负相关，则其回归方程可能是（　　）
A．$\hat{y}$=﹣10x+200 B．$\hat{y}$=10x+200　 C．$\hat{y}$=﹣10x﹣200D．$\hat{y}$=10x﹣200
【考点】回归分析．
【专题】阅读型．
【分析】本题考查的知识点是回归分析的基本概念，根据某商品销售量y（件）与销售价格x（元/件）负相关，故回归系数应为负，再结合实际进行分析，即可得到答案．
【解答】解：由x与y负相关，
可排除B、D两项，
而C项中的$\hat{y}$=﹣10x﹣200＜0不符合题意．
故选A
【点评】两个相关变量之间的关系为正相关关系，则他们的回归直线方程中回归系数为正；
两个相关变量之间的关系为负相关关系，则他们的回归直线方程中回归系数为负．

4．（5分）（2010•湖南）极坐标p=cosθ和参数方程$\begin{cases}x=-1-t\\y=2+t\end{cases}$（t为参数）所表示的图形分别是（　　）
A．直线、直线　 B．直线、圆 C．圆、圆　 D．圆、直线
【考点】参数方程化成普通方程．
【专题】计算题．
【分析】将极坐标方程和参数方程化为一般方程，然后进行选择．
【解答】解：∵极坐标p=cosθ，x=pcosθ，y=psinθ，消去θ和p，
∴$x^2+y^2=x$，
$x^2+y^2=x$为圆的方程；
参数方程$\begin{cases}x=-1-t\\y=2+t\end{cases}$（t为参数）消去t得，x+y﹣1=0，为直线的方程，
故选D．
【点评】此题考查参数方程、极坐标方程与普通方程的区别和联系，两者要会互相转化，根据实际情况选择不同的方程进行求解，这也是每年高考必考的热点问题．

5．（5分）（2010•湖南）设抛物线$y^2=8x$上一点P到y轴的距离是4，则点P到该抛物线焦点的距离是（　　）

A．4　　B．6　　C．8　　D．12

【考点】抛物线的定义．

【专题】计算题．

【分析】先根据抛物线的方程求得抛物线的准线方程，根据点P到y轴的距离求得点到准线的距离进而利用抛物线的定义可知点到准线的距离与点到焦点的距离相等，进而求得答案
．

【解答】解：抛物线$y^2=8x$的准线为$x=-2$，

∵点P到y轴的距离是4，

∴到准线的距离是4+2=6，

根据抛物线的定义可知点P到该抛物线焦点的距离是6

故选B

【点评】本题主要考查了抛物线的定义．充分利用了抛物线上的点到准线的距离与点到焦点的距离相等这一特性．

6．（5分）（2010•湖南）若非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．30°　B．60　C．120°　D．150°

【考点】数量积表示两个向量的夹角．

【专题】计算题．

【分析】由（$2\vec{a}+\vec{b}$）•$\vec{b}=0$，化简得到$|\vec{b}|^2=-2\vec{a}\cdot\vec{b}$，结合条件$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，将化简式变为$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=-2\vec{a}\cdot\vec{b}$，再结合$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$，易求出$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ．

【解答】解：∵（$2\vec{a}+\vec{b}$）•$\vec{b}=0$

∴（$2\vec{a}+\vec{b}$）•$\vec{b}=\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

即$|\vec{b}|^2=-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

又∵$|\vec{a}|=|\vec{b}|$

∴$|\vec{b}|^2=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

又由$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

易得：$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

则θ=120°

故选：C

【点评】若θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，则$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$，这是利用向量求角的唯一方法，要求大家熟练掌握.

7．（5分）（2010•湖南）在△ABC中，角A，B，C所对的边长分别为a，b，c，若∠C=120°，$c=\sqrt{2}a$，则（　　）

A．a＞b B．a＜b

C．a=b　D．a与b的大小关系不能确定

【考点】余弦定理；不等式的基本性质.

【专题】计算题；压轴题.

【分析】由余弦定理可知$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，进而求得$a-b=\frac{ab}{a+b}$，根据$\frac{ab}{a+b}>0$判断出a＞b.

【解答】解：∵∠C=120°，$c=\sqrt{2}a$，

∴由余弦定理可知$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

∴$a^2-b^2=ab$，$a-b=\frac{ab}{a+b}$，

∵a＞0，b＞0，

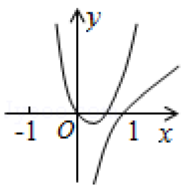
∴$a-b=\frac{ab}{a+b}$，

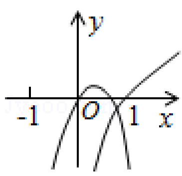
∴a＞b

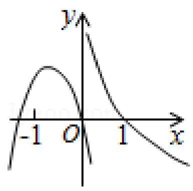
故选A

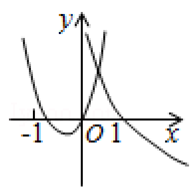
【点评】本题考查余弦定理，特殊角的三角函数值，不等式的性质，比较法，属中档题.

8．（5分）（2010•湖南）函数$y=ax^2+bx$与$y=\log_{|\frac{b}{a}|}x$（ab≠0，|a|≠|b|）在同一直角坐标系中的图象可能是（　　）

A．

B．

C．

D．


【考点】二次函数的图象；对数函数的图像与性质.

【专题】压轴题；数形结合.

【分析】可采用反证法做题，假设A和B的对数函数图象正确，由二次函数的图象推出矛盾，所以得到A和B错误；同理假设C和D的对数函数图象正确，根据二次函数图象推出矛盾，得到C错误，D正确.

【解答】解：对于A、B两图，$|\frac{b}{a}|>1$而$ax^2+bx=0$的两根为0和$-\frac{b}{a}$，且两根之和为$-\frac{b}{a}$，由图知$0<-\frac{b}{a}<1$得$-1<\frac{b}{a}<0$，矛盾，

对于C、D两图，$0<|\frac{b}{a}|<1$，在C图中两根之和$-\frac{b}{a}<-1$，即$\frac{b}{a}>1$矛盾，C错，D正确.

故选：D．
【点评】考查学生会利用反证法的思想解决实际问题，要求学生掌握二次函数和对数函数的图象和性质．

## 二、填空题（共7小题，每小题5分，满分35分）

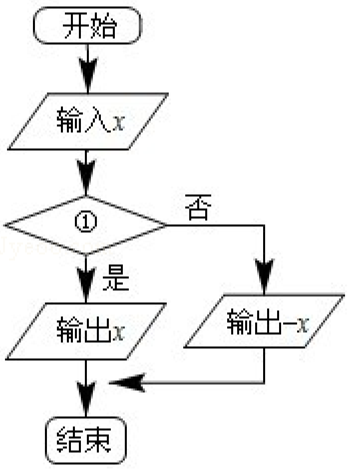
9．（5分）（2010•湖南）已知集合A={1，2，3}，B={2，m，4}，A∩B={2，3}，则m=__3__．
【考点】交集及其运算．
【分析】由交集的定义，2，3既在集合A中，也在集合B中，易知m为3．
【解答】解：由A∩B={2，3}知：3∈A且3∈B
∴m=3
故答案是3
【点评】本题考查交集的应用．

10．（5分）（2010•湖南）已知一种材料的最佳加入量在110g到210g之间，若用0.618法安排试验，则第一次试点的加入量可以是__171.8或148.2__g．
【考点】黄金分割法—0.618法．
【专题】阅读型．
【分析】由题知试验范围为[100，200]，区间长度为100，故可利用0.618法：110+（210﹣110）×0.618或210﹣（210﹣110）×0.618选取试点进行计算．
【解答】解：根据0.618法，第一次试点加入量为
110+（210﹣110）×0.618=171.8
或210﹣（210﹣110）×0.618=148.2
故答案为：171.8或148.2．
【点评】本题考查优先法的0.618法，属容易题，解答的关键是对黄金分割法﹣0.618法的了解．

11．（5分）（2010•湖南）在区间[﹣1，2]上随即取一个数x，则x∈[0，1]的概率为__$\frac{1}{3}$__．
【考点】几何概型．
【专题】计算题．
【分析】本题考查的知识点是几何概型的意义，关键是要找出数轴上表示区间[0，1]的线段的长度及表示区间[﹣1，2]的线段长度，并代入几何概型估算公式进行求解．
【解答】解：在数轴上表示区间[0，1]的线段的长度为1；
示区间[﹣1，2]的线段长度为3
故在区间[﹣1，2]上随即取一个数x，则x∈[0，1]的概率P=$\frac{1}{3}$
故答案为：$\frac{1}{3}$
【点评】几何概型的概率估算公式中的“几何度量”，可以为线段长度、面积、体积等，而且这个“几何度量”只与“大小”有关，而与形状和位置无关．解决的步骤均为：求出满足条

件A的基本事件对应的“几何度量”N（A），再求出总的基本事件对应的“几何度量”N，最后根据$P=\frac{N(A)}{N}$求解．

12．（5分）（2010•湖南）如图是求实数x的绝对值的算法程序框图，则判断框①中可填_x＞0或x≥0_．




【考点】程序框图．

【专题】图表型．

【分析】由于该程序的作用是求实数x的绝对值，根据判断框的“是”“否”指向，满足条件时，输出是x值本身，由绝对值的定义，不难确定答案．

【解答】解：由于该程序的作用是求实数x的绝对值，

根据判断框的“是”“否”指向，满足条件时，

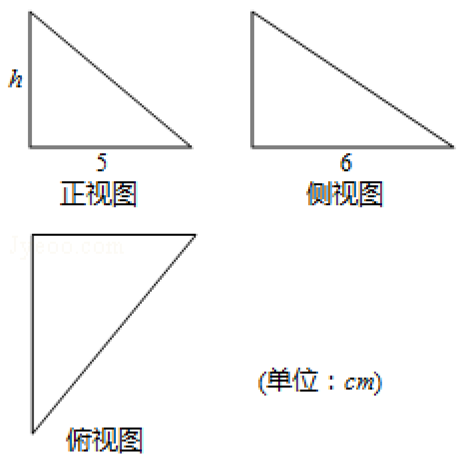
输出是x值本身，由绝对值的定义，

判断的条件应为：x＞0或x≥0

故答案为：x＞0或x≥0

【点评】算法是新课程中的新增加的内容，也必然是新高考中的一个热点，应高度重视．程序填空也是重要的考试题型，这种题考试的重点有：①分支的条件②循环的条件③变量的赋值④变量的输出．其中前两点考试的概率更大．此种题型的易忽略点是：不能准确理解流程图的含义而导致错误．

13．（5分）（2010•湖南）图中的三个直角三角形是一个体积为$20cm^3$的几何体的三视图，则h=_4_cm．




【考点】由三视图求面积、体积.

【专题】计算题.

【分析】由三视图可知，几何体的底面为直角三角形，且一边垂直于底面，再根据公式求解即可.

【解答】解：根据三视图可知，几何体的体积为：$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times5\times6\times h=5h$

又因为V=20，所以h=4

故答案为：4

【点评】本题考查学生的空间想象能力，以及公式的利用，是基础题.

14．（5分）（2010•湖南）若不同两点P，Q的坐标分别为（a，b），（3﹣b，3﹣a），则线段PQ的垂直平分线l的斜率为__﹣1__，圆（x﹣2）$^2$+（y﹣3）$^2$=1关于直线对称的圆的方程为__$x^2$+（y﹣1）$^2$=1__.

【考点】关于点、直线对称的圆的方程.

【专题】直线与圆.

【分析】先求出段PQ的垂直平分线l的方程，再求出圆心关于直线l的对称点（即对称圆的圆心），半径仍是原来的圆的半径，从而得到对称圆的标准方程.

【解答】解：线段PQ的垂直平分线l的斜率为：$\frac{-1}{K_{PQ}}=\frac{-1}{\frac{3-a-b}{3-b-a}}=-1$，

线段PQ的中点（$\frac{a+3-b}{2}$，$\frac{b+3-a}{2}$），线段PQ的垂直平分线l的方程为：$y-\frac{b+3-a}{2}=-1$（$x-\frac{a+3-b}{2}$），

即直线l方程：x+y﹣3=0，

圆心（2，3）关于直线l的对称点（0，1），即对称圆的圆心，半径不变，仍是1，

∴圆（x﹣2）$^2$+（y﹣3）$^2$=1关于直线对称的圆的方程为$x^2$+（y﹣1）$^2$=1.

故答案为﹣1；$x^2$+（y﹣1）$^2$=1.

【点评】本题考查直线方程的求法，求点关于直线的对称点，求圆的标准方程的方法.

15．（5分）（2010•湖南）若规定E={$a_1$，$a_2$…$a_{10}$}的子集$\{a_{k_1}，a_{k_2}\cdots，a_{k_n}\}$为E的第k个子集，其中$k=2^{k1-1}+2^{k2-1}+2^{k3-1}+\ldots+2^{kn-1}$．则

（1）$\{a_1，a_3\}$是E的第__5__个子集；
（2）E的第211个子集是__$\{a_1，a_2，a_5，a_7，a_8\}$__．
【考点】子集与真子集．
【专题】集合．
【分析】（1）由$k=2^{k1-1}+2^{k2-1}+2^{k3-1}+…+2^{kn-1}$受到启发，根据集合元素的特征，将其用二进制表示出来，0为不出现，1为出现，进而可得答案；
（2）十进制211等于二进制11010011，将其对应的集合写出即可．
【解答】解：（1）$\{a_1，a_3\}=\{a_3，a_1\}$化成二进制101（0为不出现，1为出现），
这里$a_3$出现，$a_2$不出现，$a_1$出现，所以是101；
二进制的101等于十进制5，故第一个空填5；
故答案为：5．
（2）十进制211等于二进制11010011，
即对应集合$\{a_8，a_7，a_5，a_2，a_1\}$，
又由$\{a_8，a_7，a_5，a_2，a_1\}=\{a_1，a_2，a_5，a_7，a_8\}$
故第二空填$\{a_1，a_2，a_5，a_7，a_8\}$．
故答案为：$\{a_1，a_2，a_5，a_7，a_8\}$．
【点评】本题是转化思想的典型题目，注意从题目的条件中寻找突破点，进而结合题意解题，解题中，特别注意与原题的验证．

**三、解答题（共6小题，满分75分）**

16．（12分）（2010•湖南）已知函数$f(x)=\sin 2x-2\sin^2x$
（Ⅰ）求函数f（x）的最小正周期．
（Ⅱ）求函数f（x）的最大值及f（x）取最大值时x的集合．
【考点】三角函数的周期性及其求法．
【分析】（1）先将函数f（x）化简为$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})-1$，根据$T=\frac{2\pi}{2}$可得答案．
（2）令$2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，可直接得到答案．
【解答】解：（1）因为$f(x)=\sin 2x-(1-\cos 2x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})-1$
所以函数f（x）的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$
（2）由（1）知，当$2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$x=k\pi+\frac{\pi}{8}$（k∈Z）时，f（x）取最大值$\sqrt{2}-1$
因此函数f（x）取最大值时x的集合为：$\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{8}，k\in Z\}$
【点评】本题主要考查三角函数最小正周期合最值的求法．属基础题．

17．（12分）（2010•湖南）为了对某课题进行研究，用分层抽样方法从三所高校A，B，C的相关人员中，抽取若干人组成研究小组、有关数据见下表（单位：人）

| 高校 | 相关人数 | 抽取人数 |
|---|---|---|
| A | 18 | x |
| B | 36 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| C | 54 | y |

（1）求x，y；

（2）若从高校B、C抽取的人中选2人作专题发言，求这二人都来自高校C的概率．

【考点】分层抽样方法；等可能事件的概率．

【专题】计算题．

【分析】（Ⅰ）根据分层抽样的方法，有$\frac{x}{18}=\frac{2}{36}=\frac{y}{54}$，解可得答案；

（Ⅱ）根据题意，可得从5人中抽取两人的情况数目与二人都来自高校C的情况数目，根据等可能事件的概率公式，计算可得答案．

【解答】解：（Ⅰ）根据分层抽样的方法，有$\frac{x}{18}=\frac{2}{36}=\frac{y}{54}$，解可得x=1，y=3；

（Ⅱ）根据题意，从高校B、C抽取的人共有5人，从中抽取两人共$C_5^2$=10种，

而二人都来自高校C的情况有$C_3^2$=3种；

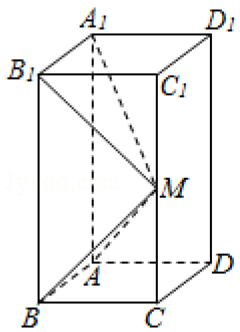
则这二人都来自高校C的概率为$\frac{3}{10}$．

【点评】本题考查分层抽样的方法与等可能事件概率的计算，难度不大，注意组合数公式的运用．

18．（12分）（2010•湖南）如图所示，在长方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$中，AB=AD=1，$AA_1$=2，M是棱$CC_1$的中点．

（Ⅰ）求异面直线$A_1M$和$C_1D_1$所成的角的正切值；

（Ⅱ）证明：平面ABM⊥平面$A_1B_1M$．




【考点】异面直线及其所成的角；平面与平面垂直的判定．

【专题】计算题；证明题．

【分析】（1）由于$C_1D_1$∥$B_1A_1$故根据异面直线所成角的定义可知$\angle MA_1B_1$为异面直线$A_1M$和$C_1D_1$所成的角然后在解三角形$MA_1B_1$求出$\angle MA_1B_1$的正切值即可．

（Ⅱ）可根据题中条件计算得出$A_1B_1\perp BM$，$BM\perp B_1M$然后再根据面面垂直的判定定理即可得证．

【解答】解：（1）如图，因为$C_1D_1$∥$B_1A_1$，所以$\angle MA_1B_1$为异面直线$A_1M$和$C_1D_1$所成的角，

∵$A_1B_1\perp$面$BCC_1B_1$

∴$\angle A_1B_1M=90°$

∵$A_1B_1=1$，$B_1M=\sqrt{2}$

$\therefore \tan\angle MA_1B_1=\sqrt{2}$

即异面直线$A_1M$和$C_1D_1$所成的角的正切值为$\sqrt{2}$.

（Ⅱ）$\because A_1B_1\perp$面$BCC_1B_1$，$BM\subset$面$BCC_1B_1$

$\therefore A_1B_1\perp BM$①

由（1）知$B_1M=\sqrt{2}$，$BM=\sqrt{2}$，$B_1B=2$

$\therefore BM\perp B_1M$②

$\because A_1B_1\cap B_1M=B_1$

$\therefore$由①②可知$BM\perp$面$A_1B_1M$

$\because BM\subset$面$ABM$

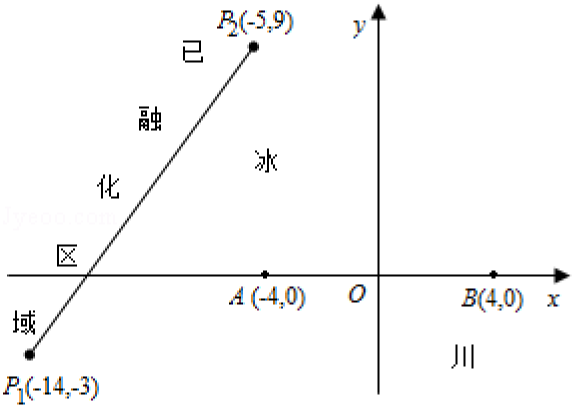
$\therefore$平面$ABM\perp$平面$A_1B_1M$.

【点评】本题主要考查异面直线所成角的定义以及面面垂直的证明，属常考题型，较难．解题的关键是要掌握异面直线所成角的定义（即将异面直线转化为相交直线所成的角）和面面垂直的判定定理．

19．（13分）（2010•湖南）为了考察冰川的融化状况，一支科考队在某冰川山上相距8Km的A、B两点各建一个考察基地，视冰川面为平面形，以过A、B两点的直线为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系（如图）．考察范围到A、B两点的距离之和不超过10Km的区域．

（1）求考察区域边界曲线的方程：

（2）如图所示，设线段$P_1P_2$是冰川的部分边界线（不考虑其他边界），当冰川融化时，边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动，第一年移动0.2km，以后每年移动的距离为前一年的2倍．问：经过多长时间，点A恰好在冰川边界线上？




【考点】椭圆的标准方程；等比数列的性质；点到直线的距离公式．

【专题】应用题；压轴题．

【分析】（1）设边界曲线上点P的坐标为（x，y），由|PA|+|PB|=10知，点P在以A、B为焦点、长轴长为2a=10的椭圆上．由此可知考察区域边界曲线的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$．

（2）由题意知过点$P_1$，$P_2$的直线方程为$4x-3y+47=0$．因此点A到直线$P_1P_2$的距离为$d=\frac{|-16+47|}{\sqrt{16+9}}=\frac{31}{5}$，设经过n年，点A恰好在冰川边界上，则利用等比数列求和公式可得$\frac{0.2(2^n-1)}{2-1}=\frac{31}{5}$，由此可知经过5年，点A恰好在冰川边界上．

【解答】解：（1）设边界曲线上点P的坐标为（x，y），
由|PA|+|PB|=10知，点P在以A、B为焦点、长轴长为2a=10的椭圆上．

此时 $b=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴考察区域边界曲线的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$．

（2）由题意知过点$P_1$，$P_2$的直线方程为4x﹣3y+47=0．
因此点A到直线$P_1P_2$的距离为 $d=\frac{|-16+47|}{\sqrt{16+9}}=\frac{31}{5}$，
设经过n年，点A恰好在冰川边界上，

则利用等比数列求和公式可得$\frac{0.2(2^n-1)}{2-1}=\frac{31}{5}$，

解得n=5，
即经过5年，点A恰好在冰川边界上．
【点评】本题考查椭圆的性质和等比数列的知识，解题时要注意公式的灵活运用．

20．（13分）（2010•湖南）给出下面的数表序列：

| 表1 | 表2 | 表3 | … |
|---|---|---|---|
| 1 | 1　3 | 1　3　5 | |
| | 4 | 4　8 | |
| | | 12 | |

其中表n（n=1，2，3
…）有n行，第1行的n个数是1，3，5，…2n﹣1，从第2行起，每行中的每个数都等于它肩上的两数之和．
（I）写出表4，验证表4各行中数的平均数按从上到下的顺序构成等比数列，并将结论推广到表n（n≥3）（不要求证明）；
（II）每个数列中最后一行都只有一个数，它们构成数列1，4，12…，记此数列为$\{b_n\}$求和

：$\frac{b_3}{b_1b_2}+\frac{b_4}{b_2b_3}+\cdots\frac{b_{n+2}}{b_nb_{n+1}}$（$n\in N^+$）

【考点】数列的求和；等比数列的性质．
【专题】综合题；压轴题．
【分析】（1）根据表1，表2，表3的规律可写出表4，然后求出各行的平均数，可确定等比数列的首项和公比，进而推广到n．
（2）先求出表n的首项的平均数，进而可确定它的各行中的数的平均数按从上到下的顺序构成首项为n，公比为2的等比数列，进而得到表中最后一行的数$b_n=n\bullet 2^{n-1}$，再化简通项

$\frac{b_{k+2}}{b_kb_{k+1}}$，最后根据裂项法求和．

【解答】解：（I）表4为
1　3　5　7
4　8　12
12　20

32

它的第1，2，3，4行中的数的平均数分别是4，8，16，32，它们构成首项为4，公比为2的等比数列

将这一结论推广到表n（n≥3），即

表n（n≥3）各行中的数的平均数按从上到下的顺序构成首项为n，公比为2的等比数列．

（II）表n的第1行是1，3，5，…，2n﹣1，其平均数是$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n}=n$

由（I）知，它的各行中的数的平均数按从上到下的顺序构成首项为n，公比为2的等比数列（从而它的第k行中数的平均数是

$n\bullet 2^{k-1}$），于是，表中最后一行的唯一一个数为$b_n=n\bullet 2^{n-1}$．

因此

$$\frac{b_{k+2}}{b_kb_{k+1}}=\frac{(k+2)\ 2^{k+1}}{k\bullet 2^{k-1}\bullet (k+1)\bullet 2^k}=\frac{k+2}{k(k+1)\bullet 2^{k-2}}=\frac{2(k+1)-k}{k(k+1)\bullet 2^{k-2}}=$$

$$\frac{1}{k\bullet 2^{k-3}}-\frac{1}{(k+1)\bullet 2^{k-2}}\ (k=1,2,\ldots,n)$$

故

$$\frac{b_3}{b_1b_2}+\frac{b_4}{b_2b_3}+\ldots+\frac{b_{n+2}}{b_nb_{n+1}}=\left(\frac{1}{1\times 2^{-2}}-\frac{1}{2\times 2^{-1}}\right)+\left(\frac{1}{2\times 2^{-1}}-\frac{1}{3\times 2^{0}}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{n\times 2^{n-3}}-\frac{1}{(n+1)\times 2^{n-2}}\right]$$

$$=\frac{1}{1\times 2^{-2}}-\frac{1}{(n+1)\times 2^{n-2}}=4-\frac{1}{(n+1)\times 2^{n-2}}.$$

【点评】本题主要考查数列求和和等比数列的性质．数列求和是高考的必考点，一般有公式法、裂项法、错位相减法等，都要熟练掌握．

21．（13分）（2010•湖南）已知函数$f(x)=\frac{a}{x}+x+(a-1)\ln x+15a$，其中a＜0，且a≠﹣1

（Ⅰ）讨论函数f（x）的单调性；

（Ⅱ）设函数$g(x)=\begin{cases}(-2x^3+3ax^2+6ax-4a^2-6a)\ e^x & (x\leqslant 1)\\ e\bullet f(x) & (x>1)\end{cases}$

（e是自然对数的底数），是否存在a，使g（x）在[a，﹣a]上是减函数？若存在，求a的取值范围；若不存在，请说明理由．

【考点】利用导数研究函数的单调性．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】（Ⅰ）先求出函数的定义域，然后求出f'（x）=0得到函数的稳定点，讨论a的大小得到导函数的大小即可得到函数的单调区间；

（Ⅱ）存在a，令h（x））=（$-2x^3+3ax^2+6ax-4a^2-6a$）$e^x$（x∈R），求出导函数，然后再令m（x）=$-2x^3+3(a-2)x^2+12ax-4a^2$（x∈R），讨论g（x）在[a，﹣a]上为减函数，

当且仅当f（x）在[1，－a]上为减函数，h（x）在[a，1]上为减函数，且h（1）≥e•f（1）得到三个关于a范围的式子，求出解集即可得到a的范围．

【解答】解：（Ⅰ）f（x）的定义域为（0，+∞）．$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+1+\frac{a-1}{x}=\frac{(x+a)(x-1)}{x^2}$，

①若－1＜a＜0，则当0＜x＜－a时，f′（x）＞0；当－a＜x＜1时，f′（x）＜0；当x＞1时，f′（x）＞0．故f（x）分别在（0，－a），（1，+∞）上单调递增，在（－a，1）上单调递减．

②若a＜－1，仿①可得f（x）分别在（0，1），（－a，+∞）上单调递增，在（1，－a）上单调递减；

（Ⅱ）存在a，使g（x）在[a，－a]上为减函数．

事实上，设$h(x)=(-2x^3+3ax^2+6ax-4a^2-6a)e^x$（x∈R），

则$h'(x)=[-2x^3+3(a-2)x^2+12ax-4a^2]e^x$

再设$m(x)=-2x^3+3(a-2)x^2+12ax-4a^2$（x∈R），

则g（x）在[a，－a]上单调递减时，h（x）必在[a，0]上单调递减所以h′（a）≤0，由于$e^x>0$，

因此g（x）在[a，－a]上为减函数，

当且仅当f（x）在[1，－a]上为减函数，h（x）在[a，1]上为减函数，且h（1）≥e•f（1）．

由（1）知，当a≤－2①时，f（x）在[1，－a]上为减函数．又h（1）≥e•f（1）⇔$4a^2+13a+3\le 0\Leftrightarrow -3\le a\le -\frac{1}{4}$②

不难知道，∀x∈[a，1]，h′（x）≤0⇔∀x∈[a，1]，m（x）≤0，因$m'(x)=-6x^2+6(a-2)x+12a=-6(x+2)(x-a)$，令m′（x）=0，则x=a，或x=－2．而a≤－2，于是

（p）当a＜－2时，若a＜x＜－2，则m′（x）＞0；若－2＜x＜1，则m′（x）＜0．因而m（x）在（a，－2）上单调递增，在（－2，1）上单调递减．

（q）当a=－2时，m′（x）≤0，m（x）在（－2，1）上单调递减．

综合（p）（q）知，当a≤－2时，m（x）在[a，1]上的最大值为$m(-2)=-4a^2-12a-8$．

所以∀x∈[a，1]，m（x）≤0

⇔m（－2）≤0⇔$-4a^2-12a-8\le 0$⇔a≤－2③，

又对x∈[a，1]，m（x）=0只有当a=－2时在x=－2取得，亦即h′（x）=0只有当a=－2时在x=－2取得．因此，当a≤－2时，h（x）在[a，1]上为减函数．

从而有①，②，③知，－3≤a≤－2

综上所述，存在a，使g（x）在[a，－a]上为减函数，且a的取值范围为[－3，－2]．

【点评】考查学生利用导数研究函数单调性的能力，运用分类讨论的数学思想解决数学问题的能力．