2025年普通高等学校招生全国统一考试上海数学试卷

（考试时间120分钟，满分150分）

一、填空题（本大题共12题，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分，共54分.考生应在答题纸的相应位置直接填写结果）

1. 已知全集$U=\{x\mid 2\le x\le 5, x\in \mathrm{R}\}$，集合$A=\{x\mid 2\le x<4, x\in \mathbf{R}\}$，则$\overline{A}=$________.

【答案】$\{x\mid 4\le x\le 5, x\in \mathbf{R}\}$##$[4,5]$

【解析】

【分析】根据补集的含义即可得到答案.

【详解】根据补集的含义知$\overline{A}=\{x\mid 4\le x\le 5, x\in \mathbf{R}\}$.

故答案为：$\{x\mid 4\le x\le 5, x\in \mathbf{R}\}$.

2. 不等式$\frac{x-1}{x-3}<0$的解集为________.

【答案】$(1,3)$

【解析】

【分析】转化为一元二次不等式$(x-1)(x-3)<0$，解出即可.

【详解】原不等式转化为$(x-1)(x-3)<0$，解得$1<x<3$，

则其解集为$(1,3)$.

故答案为：$(1,3)$.

3. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-3$，公差$d=2$，则该数列的前6项和为________.

【答案】12

【解析】

【分析】直接根据等差数列求和公式求解.

【详解】根据等差数列的求和公式，$S_6=6a_1+\frac{6\times 5}{2}d=12$.

故答案为：12

4. 在二项式$(2x-1)^5$的展开式中，x^3的系数为________.

【答案】80

【解析】

【分析】利用通项公式求解可得.

【详解】由通项公式$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r\cdot 2^{5-r}\cdot x^{5-r}\cdot(-1)^r=\mathrm{C}_5^r\cdot(-1)^r\cdot 2^{5-r}x^{5-r}$，

令$5-r=3$，得$r=2$，

可得x^3项的系数为$\mathrm{C}_5^2\cdot(-1)^2\cdot 2^{5-2}=80$.

故答案为：80.

5. 函数$y=\cos x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$上的值域为________.

【答案】$[0,1]$

【解析】

【分析】利用余弦函数的单调性可得.

【详解】由函数$y=\cos x$在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上单调递增，在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$单调递减，

且$f(-\frac{\pi}{2})=0, f(0)=1, f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故函数$y=\cos x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$上的值域为$[0,1]$.

故答案为：$[0,1]$.

6. 已知随机变量X的分布为$\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$，则期望$E[X]=$________.

【答案】6.3

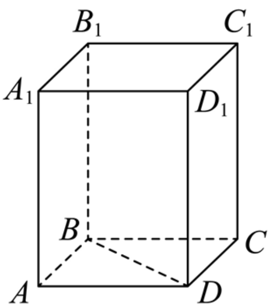
【解析】

【分析】根据分布列结合期望公式可求期望.

【详解】由题设有$E[x]=5\times0.2+6\times0.3+7\times0.5=1+1.8+3.5=6.3$.

故答案为：6.3.

7. 如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BD=4\sqrt{2}, DB_1=9$，则该正四棱柱的体积为________.



【答案】112

【解析】

【分析】求出侧棱长和底面边长后可求体积.

【详解】因为 $BD=4\sqrt{2}$ 且四边形 $ABCD$ 为正方形，故 $BA=4$，

而 $DB_1=9$，故 $BB_1^2+BD^2=81$，故 $BB_1=7$，

故所求体积为 $7\times16=112$，

故答案为：112.

8. 设 $a,b>0,a+\frac{1}{b}=1$，则 $b+\frac{1}{a}$ 的最小值为________.

【答案】4

【解析】

【分析】灵活利用“1”将 $b+\frac{1}{a}=\left(b+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right)$ 展开利用基本不等式计算即可.

【详解】易知 $b+\frac{1}{a}=\left(b+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right)=ab+\frac{1}{ab}+2\geq2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}+2=4$，

当且仅当 $ab=1$，即 $a=\frac{1}{2},b=2$ 时取得最小值.

故答案为：4

9. 4 个家长和 2 个儿童去爬山，6 个人需要排成一条队列，要求队列的头和尾均是家长，则不同的排列个数有________种.

【答案】288

【解析】

【分析】先选家长作队尾和队首，再排中间四人即可.

【详解】先选两位家长排在首尾有 $\mathrm{P}_4^2=12$ 种排法；再排对中的四人有 $\mathrm{P}_4^4=24$ 种排法，

故有 $12\times24=288$ 种排法.

故答案为：288

10. 已知复数 z 满足 $z^2=(\overline{z})^2,|z|\le 1$，则 $|z-2-3\mathrm{i}|$ 的最小值是________.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先设 $z=a+b\mathrm{i}$，利用复数的乘方运算及概念确定 $ab=0$，再根据复数的几何意义数形结合计算即可.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathrm{R}\right),\therefore\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，

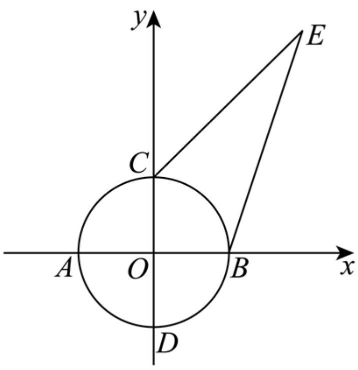
由题意可知 $z^2=a^2+2ab\mathrm{i}-b^2=\overline{z}^2=a^2-2ab\mathrm{i}-b^2$，则 $ab=0$，

又 $\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}\le 1$，由复数的几何意义知 z 在复平面内对应的点 $Z\left(a,b\right)$ 在单位圆内部（含边界）的坐标轴上运动，如图所示即线段 AB,CD 上运动，

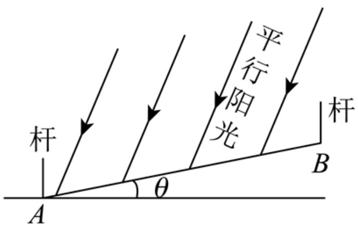
设 $E\left(2,3\right)$，则 $\left|z-2-3\mathrm{i}\right|=\left|ZE\right|$，由图象可知 $\left|BE\right|=\sqrt{10}>\left|CE\right|=2\sqrt{2}$，

所以 $\left|ZE\right|_{\min}=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$



11. 小申同学观察发现，生活中有些时候影子可以完全投射在斜面上．某斜面上有两根长为 1 米的垂直于水平面放置的杆子，与斜面的接触点分别为 A、B，它们在阳光的照射下呈现出影子，阳光可视为平行光：其中一根杆子的影子在水平面上，长度为 0.4 米；另一根杆子的影子完全在斜面上，长度为 0.45 米．则斜面的底角 $\theta=$________.（结果用角度制表示，精确到 $0.01°$）



【答案】12.58°

【解析】

【分析】先根据在A处的旗杆算出阳光和水平面的夹角，然后结合B处的旗杆算出斜面角.

【详解】如图，在A处，$\tan x=\dfrac{1}{0.4}=2.5$，在B处满足$\tan\angle CED=2.5$，

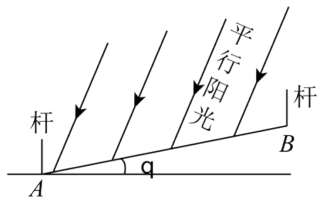
（其中$ED//$水平面，CE是射过B处杆子最高点的光线，光线交斜面于E），

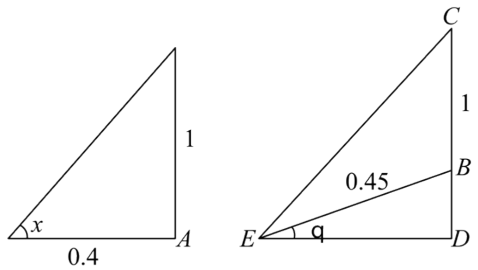
故设$BD=y$，则$ED=\dfrac{1+y}{2.5}$，

由勾股定理，$y^2+\left(\dfrac{1+y}{2.5}\right)^2=0.45^2$，解得$y\approx 0.098$，

于是$\theta=\arcsin\dfrac{0.098}{0.45}\approx 12.58^\circ$

故答案为：12.58°





12. 已知$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是平面内三个不同的单位向量. 若$f(\vec{a}\cdot\vec{b})+f(\vec{b}\cdot\vec{c})+f(\vec{c}\cdot\vec{a})=0$，

则$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$可的取值范围是_______.

【答案】$(1,\sqrt{5})$

【解析】

【分析】利用分段函数值分类讨论，可得$\left\{f\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right),f\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),f\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\right\}=\{-1,0,1\}$，再根据数量积关系设出$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$坐标，利用坐标运算，结合三角恒等变换求解模的范围可得.

【详解】若$f\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=f\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=f\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，

又三个向量均为平面内的单位向量，故向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两垂直，显然不成立；

故$\left\{f\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right),f\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),f\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\right\}=\{-1,0,1\}$.

不妨设$\begin{cases}f\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=1\\ f\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=0\\ f\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=-1\end{cases}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}>0,\vec{b}\cdot\vec{c}=0,\vec{c}\cdot\vec{a}<0$，

不妨设$\vec{b}=(1,0),\vec{c}=(0,1)$，$\vec{a}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right),\theta\in\left[0,2\pi\right)$，

则$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\theta>0\\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\sin\theta<0\end{cases}$，则$\theta\in\left(\dfrac{3}{2}\pi,2\pi\right)$，

则$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|(1+\cos\theta,1+\sin\theta)\right|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta)^2}=\sqrt{3+2\cos\theta+2\sin\theta}$

$=\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})}$，

由$\theta\in\left(\dfrac{3}{2}\pi,2\pi\right)$，$\theta+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{7}{4}\pi,\dfrac{9}{4}\pi\right)$，

则$\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$2\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\in\left(-2,2\right)$

故$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|\in(1,\sqrt{5})$.

故答案为：$(1,\sqrt{5})$.

二、选择题（本大题共4题，第13、14题每题4分，第15、16题每题5分，共18分.每题有且仅有一个正确选项，考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.）

13. 已知事件A、B相互独立，事件A发生的概率为$P(A)=\dfrac{1}{2}$，事件B发生的概率为$P(B)=\dfrac{1}{2}$，则事件$A\cap B$发生的概率$P(A\cap B)$为（　）

A. $\dfrac{1}{8}$　　　　B. $\dfrac{1}{4}$　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】根据独立事件的概率公式可求$P\left(A\cap B\right)$.

【详解】因为A,B相互独立，故$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，

故选：B.

14. 设 $a>0, s\in\mathbf{R}$. 下列各项中，能推出 $a^{s}>a$ 的一项是（　）

A. $a>1$，且 $s>0$

B. $a>1$，且 $s<0$

C. $0<a<1$，且 $s>0$

D. $0<a<1$，且 $s<0$

【答案】D

【解析】

【分析】利用指数函数的性质分类讨论 a 与 1 的关系即可判定选项.

【详解】$\because a>0, a^{s}>a$，$\therefore a^{s-1}>1=a^{0}$，

当 $a\in(0,1)$ 时，$y=a^{x}$ 定义域上严格单调递减，

此时若 $s-1<0$，则一定有 $a^{s-1}>1=a^{0}$ 成立，故 D 正确，C 错误；

当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$y=a^{x}$ 定义域上严格单调递增，要满足 $a^{s-1}>1=a^{0}$，需 $s>1$，即 A、B 错误.

故选：D

15. 已知 $A(0,1), B(1,2)$，C 在 $\Gamma: x^{2}-y^{2}=1(x\geq 1, y\geq 0)$ 上，则 $\vee ABC$ 的面积（　）

A. 有最大值，但没有最小值

B. 没有最大值，但有最小值

C. 既有最大值，也有最小值

D. 既没有最大值，也没有最小值

【答案】A

【解析】

【分析】设出曲线上一点为 (a,b)，得出 $a=\sqrt{b^{2}+1}$，将三角形的高转化成关于 b 的函数, 分析其单调性，从而求解.

【详解】设曲线上一点为 (a,b)，则 $a^{2}-b^{2}=1$，则 $a=\sqrt{b^{2}+1}$，

$k_{AB}=\dfrac{2-1}{1-0}=1$，$AB$ 方程为：$y-1=x$，即 $x-y+1=0$，

根据点到直线的距离公式，(a,b) 到 AB 的距离为：$\dfrac{|a-b+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|\sqrt{b^{2}+1}-b+1\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{b^{2}+1}-b+1}{\sqrt{2}}$，

设 $f(b)=\sqrt{b^{2}+1}-b=\dfrac{1}{\sqrt{b^{2}+1}+b}$，

由于 $b\geq 0$，显然 $f(b)$ 关于 b 单调递减，$f(b)_{\max}=f(0)$，无最小值，

即 $\vee ABC$ 中，AB 边上的高有最大值，无最小值，

又 AB 一定，故面积有最大值，无最小值.

故选：A

16. 已知数列$\left\{a_n\right\}$、$\left\{b_n\right\}$、$\left\{c_n\right\}$的通项公式分别为$a_n=10n-9$，$b_n=2^n$、，$c_n=\lambda a_n+(1-\lambda)b_n$.若对任意的$\lambda\in\left[0,1\right]$，$a_n$、$b_n$、$c_n$的值均能构成三角形，则满足条件的正整数$n$有（　）

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 1 个　　D. 无数个

【答案】B

【解析】

【分析】由$c_n=\lambda a_n+(1-\lambda)b_n$可知$c_n$范围，再由三角形三边关系可得$a_n,b_n,c_n$的不等关系，结合函数零点解不等式可得.

【详解】由题意$a_n,b_n,c_n>0$，不妨设$A(n,a_n),B(n,b_n),C(n,c_n)$，

三点均在第一象限内，由$c_n=\lambda a_n+(1-\lambda)b_n$可知，$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA},\lambda\in\left[0,1\right]$，

故点C恒在线段AB上，则有$\min\left\{a_n,b_n\right\}\le c_n\le\max\left\{a_n,b_n\right\}<a_n+b_n$.

即对任意的$\lambda\in\left[0,1\right]$，$c_n<a_n+b_n$恒成立，

令$10x-9=2^x$，构造函数$f(x)=2^x-10x+9,x>0$，

则$f'(x)=2^x\ln2-10$，由$f'(x)$单调递增，

又$f'(3)<0,f'(4)>0$，存在$x_0\in(3,4)$，使$f'(x_0)=0$，

即当$0<x<x_0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

故$f(x)$至多2个零点，

又由$f(1)>0,f(2)<0,f(5)<0,f(6)>0$，

可知$f(x)$存在2个零点，不妨设x_1,x_2 $(x_1<x_2)$，且$x_1\in(1,2),x_2\in(5,6)$.

①若$a_n\le b_n$，即$10n-9\le2^n$时，此时$n=1$或$n\ge6$.

则$a_n\le c_n\le b_n$，可知$b_n+c_n>a_n$成立，

要使a_n、b_n、c_n的值均能构成三角形，

所以$a_n+c_n>b_n$恒成立，故$b_n<2a_n$，

所以有$\begin{cases}10n-9\le 2^n\\ 2^n<2(10n-9)\end{cases}$，解得$n=6$；

②若$a_n\ge b_n$，即$10n-9\ge 2^n$时，此时$n=2,3,4,5$.

则$a_n\ge c_n\ge b_n$，可知$a_n+c_n>b_n$成立，

要使a_n、b_n、c_n的值均能构成三角形，

所以$b_n+c_n>a_n$恒成立，故$a_n<2b_n$，

所以有$\begin{cases}10n-9\ge 2^n\\ 10n-9<2^{n+1}\end{cases}$，解得$n=4$或$5$；

综上可知，正整数n的个数有3个.

故选：B.

三、解答题（本大题共 5 题，第 17-19 题每题 14 分，第 20-21 题每题 18 分，共 78 分.解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.）

17. 2024 年东京奥运会，中国获得了男子4×100米混合泳接力金牌．以下是历届奥运会男子4×100米混合泳接力项目冠军成绩记录（单位：秒），数据按照升序排列.

206.78	207.46	207.95	209.34	209.35
210.68	213.73	214.84	216.93	216 93

（1）求这组数据的极差与中位数;

（2）从这 10 个数据中任选 3 个，求恰有 2 个数据在 211 以上的概率;

（3）若比赛成绩 y 关于年份 x 的回归方程为$y=-0.311x+\hat{b}$，年份 x 的平均数为 2006，预测 2028 年冠军队的成绩（精确到 0.01 秒).

【答案】（1）10.15；210.015；

（2）$\dfrac{3}{10}$

（3）204.56

【解析】

【分析】（1）由最长与最短用时可得极差，由中间两数平均数可得中位数；

（2）由古典概型概率公式可得；

（3）先求成绩平均数 $\overline{y}$，再由 $(\overline{x},\overline{y})$ 在回归直线上，代入方程可得 $\hat{b}$，再代入年份预测可得.

【小问 1 详解】

由题意，数据的最大值为 216.93，最小值为 206.78，

则极差为 $216.93-206.78=10.15$；

数据中间两数为 209.35 与 210.78，

则中位数为 $\dfrac{209.35+210.68}{2}=210.015$.

故极差为 10.15，中位数为 210.015；

【小问 2 详解】

由题意，数据共 10 个，211 以上数据共有 4 个，

故设事件 $A=$ “恰有 2 个数据在 211 以上”，

则 $P(A)=\dfrac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，

故恰有 2 个数据在 211 以上的概率为 $\dfrac{3}{10}$；

【小问 3 详解】

由题意，成绩的平均数

$$\frac{206.78+207.46+207.95+209.34+209.35+210.68+213.73+214.84+216.93+216.93}{10}$$

$=211.399$，

由直线 $y=-0.311x+\hat{b}$ 过 $(2006,211.399)$，

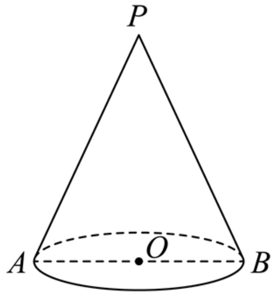
则 $\hat{b}=211.399+0.311\times2006=835.265$，

故回归直线方程为 $y=-0.311x+835.265$.

当 $x=2028$ 时, $y=-0.311\times2028+835.265=204.557\approx204.56$.

故预测 2028 年冠军队的成绩为 204.56 秒.

18. 如图，P 是圆锥的顶点，O 是底面圆心，AB 是底面直径，且 $AB=2$.



（1）若直线 PA 与圆锥底面的所成角为 $\frac{\pi}{3}$，求圆锥的侧面积；

（2）已知 Q 是母线 PA 的中点，点 C、D 在底面圆周上，且弧 AC 的长为 $\frac{\pi}{3}$，$CD \parallel AB$．设点 M 在线段 OC 上，证明：直线 $QM \parallel$ 平面 PBD.

【答案】（1）2π

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由线面角先算出母线长，然后根据侧面积公式求解.

（2）证明平面 $QOC//$ 平面 PBD，然后根据面面平行的性质可得.

【小问 1 详解】

由题知，$\angle PAB=\frac{\pi}{3}$，即轴截面 $\triangle ABP$ 是等边三角形，故 $PA=AB=2$，

底面周长为 $2\pi\times1=2\pi$，则侧面积为：$\frac{1}{2}\times2\times2\pi=2\pi$；

【小问 2 详解】

由题知 $AQ=QP,AO=OB$，则根据中位线性质，$QO \parallel PB$，

又 $QO\not\subset$ 平面 PBD，$PB\subset$ 平面 PBD，则 $QO//$ 平面 PBD

由于 $\overset{\frown}{AC}=\frac{\pi}{3}$，底面圆半径是1，则 $\angle AOC=\frac{\pi}{3}$，又 $CD \parallel AB$，则 $\angle OCD=\frac{\pi}{3}$，

又 $OC=OD$，则 $\triangle OCD$ 为等边三角形，则 $CD=1$，

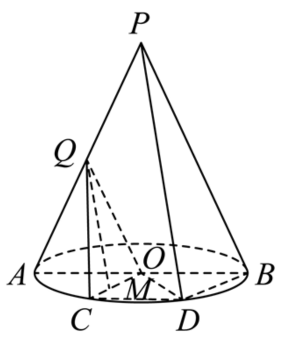
于是 $CD \parallel BO$ 且 $CD=OB$，则四边形 $OBDC$ 是平行四边形，故 $OC \parallel BD$，

又 $OC\not\subset$ 平面 PBD，$BD\subset$ 平面 PBD，故 $OC//$ 平面 PBD.

又 $OC\cap OQ=O,OC,OQ\subset$ 平面 QOC，

根据面面平行的判定，于是平面 $QOC//$ 平面 PBD，

又 $M\in OC$，则 $QM\subset$ 平面 QOC，则 $QM//$ 平面 PBD



19. 已知 $f(x)=x^2-(m+2)x+m\ln x, m\in \mathbf{R}$.

（1）若 $f(1)=0$，求不等式 $f(x)\le x^2-1$ 的解集；

（2）若函数 $y=f(x)$ 满足在 $(0,+\infty)$ 上存在极大值，求 m 的取值范围；

【答案】（1）$[1,+\infty)$

（2）$m>0$ 且 $m\ne 2$.

【解析】

【分析】（1）先求出 m，从而原不等式即为 $x+\ln x>1$，构建新函数 $s(x)=x+\ln x, x>0$，由该函数为增函数可求不等式的解；

（2）求出函数的导数，就 $m\le 0, 0<m<2, m=2, m>2$ 分类讨论后可得参数的取值范围.

【小问 1 详解】

因为 $f(1)=0$，故 $1-m-2+0=0$，故 $m=-1$，故 $f(x)=x^2-x-\ln x$，

故 $f(x)\le x^2-1$ 即为 $x+\ln x\ge 1$，

设 $s(x)=x+\ln x, x>0$，则 $s'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

而 $x+\ln x\ge 1$ 即为 $s(x)\ge s(1)$，故 $x\ge 1$，

故原不等式的解为 $[1,+\infty)$.

【小问 2 详解】

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有极大值即为有极大值点.

$$f'(x)=2x-(m+2)+\frac{m}{x}=\frac{2x^2-(m+2)x+m}{x}=\frac{(2x-m)(x-1)}{x},$$

若 $m\le 0$，则 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，无极大值点，故舍；

若 $0<\dfrac{m}{2}<1$ 即 $0<m<2$，则 $x\in\left(\dfrac{m}{2},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，

$x\in\left(0,\dfrac{m}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

故 $x=\frac{m}{2}$ 为 $f\left(x\right)$ 的极大值点，符合题设要求；

若 $m=2$，则 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)\geq 0$，$f\left(x\right)$ 无极值点，舍；

若 $\frac{m}{2}>1$ 即 $m>2$，则 $x\in\left(1,\frac{m}{2}\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，

$x\in\left(0,1\right)\cup\left(\frac{m}{2},+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，

故 $x=1$ 为 $f\left(x\right)$ 的极大值点，符合题设要求；

综上，$m>0$ 且 $m\neq 2$.

20. 已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1(a>\sqrt{5})$，$M(0,m)(m>0)$，$A$ 是 Γ 的右顶点.

（1）若 Γ 的焦点 $(2,0)$，求离心率 e；

（2）若 $a=4$，且 Γ 上存在一点 P，满足 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{MP}$，求 m；

（3）已知 AM 的中垂线 l 的斜率为 2，l 与 Γ 交于 C、D 两点，$\angle CMD$ 为钝角，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$\frac{2}{3}$

（2）$\sqrt{10}$

（3）$\left(\sqrt{5},\sqrt{11}\right)$

【解析】

【分析】（1）由方程可得 $b^2=5$，再由焦点坐标得 c，从而求出 a 得离心率；

（2）设点 P 坐标，由向量关系 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{MP}$ 坐标化可解得 P 坐标，代入椭圆方程可得 m；

（3）根据中垂线性质，由斜率与中点坐标得直线 l 方程，联立直线与椭圆方程，将钝角条件转化为向量不等式 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}<0$，再坐标化利用韦达定理代入化简不等式求解可得 a 范围.

【小问 1 详解】

由题意知，$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1\left(a>\sqrt{5}\right)$，则 $b^2=5$，

由右焦点 $(2,0)$，可知 $c=2$，则 $a=\sqrt{5+c^2}=3$，

故离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.

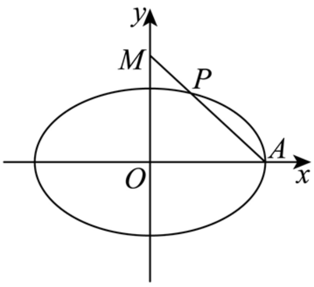
【小问 2 详解】

由题意 $A(4,0), M(0,m)(m>0)$， $P(x_P, y_P)$

由 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{MP}$ 得， $\begin{cases}4-x_P=2x_P\\ -y_P=2y_p-2m\end{cases}$，

解得 $P(\frac{4}{3},\frac{2m}{3})$，代入 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$，

得 $\frac{1}{9}+\frac{4m^2}{45}=1$，又 $m>0$，解得 $m=\sqrt{10}$.



【小问 3 详解】

由线段 AM 的中垂线 l 的斜率为 2，所以直线 AM 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，

则 $\frac{m-0}{0-a}=-\frac{1}{2}$，解得 $m=\frac{a}{2}$，

由 $A(a,0), M(0,\frac{a}{2})$ 得 AM 中点坐标为 $(\frac{a}{2},\frac{a}{4})$，

故直线 $l: y=2x-\frac{3}{4}a$，显然直线 l 过椭圆内点 $(\frac{3}{8}a,0)$，

故直线与椭圆恒有两不同交点，

设 $C(x_1,y_1), D(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=2x-\frac{3}{4}a\\ 5x^2+a^2y^2=5a^2\end{cases}$ 消 y 得 $(4a^2+5)x^2-3a^3x+\frac{9}{16}a^4-5a^2=0$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{3a^3}{4a^2+5}, x_1x_2=\frac{\frac{9}{16}a^4-5a^2}{4a^2+5}$，

因为 $\angle CMD$ 为钝角，则 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}<0$，且 $M(0,\frac{a}{2})$，

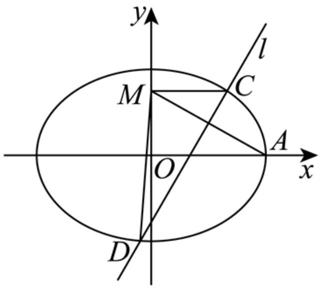
则有 $x_1x_2+(y_1-\frac{a}{2})(y_2-\frac{a}{2})<0$，

所以 $x_1x_2+\left(2x_1-\frac{5a}{4}\right)\left(2x_2-\frac{5a}{4}\right)=5x_1x_2-\frac{5}{2}a(x_1+x_2)+\frac{25}{16}a^2<0$，

即 $5\left(\frac{9}{16}a^4-5a^2\right)-\frac{5a}{2}\times 3a^3+\frac{25}{16}a^2\left(4a^2+5\right)<0$，解得 $a^2<11$，

又 $a>\sqrt{5}$，

故 $\sqrt{5}<a<\sqrt{11}$，即 a 的取值范围是 $\left(\sqrt{5},\sqrt{11}\right)$.



21. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．对于正实数 a，定义集合 $M_a=\{x\mid f(x+a)=f(x)\}$.

（1）若 $f(x)=\sin x$，判断 $\dfrac{\pi}{3}$ 是否是 M_π 中的元素，请说明理由；

（2）若 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$，$M_a\neq\varnothing$，求 a 的取值范围；

（3）若 $y=f(x)$ 是偶函数，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=1-x$，且对任意 $a\in(0,2)$，均有 $M_a\subseteq M_2$．写出 $y=f(x)$，$x\in(1,2)$ 解析式，并证明：对任意实数 c，函数 $y=f(x)-c$ 在 $[-3,3]$ 上至多有 9 个零点.

【答案】（1）不是；　　（2）$\left[\dfrac{7}{4},4\right)$；

（3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）直接代入计算 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ 和 $f\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi\right)$ 即可；

（2）法一：转化为在实数 x_0 使得 $f(x_0+a)=f(x_0)$，分析得 $x_0+2=\sqrt{x_0+a}$，再计算得 $a=\left(x_0+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$，最后根据 x_0 的范围即可得到答案；法二：画出函数图象，转化为直线 $y=t$ 与该函数有两个交点，将 a 用 t 表示，最后利用二次函数函数性质即可得到答案；

（3）利用函数奇偶性和集合新定义即可求出 $x\in(1,2)$ 时解析式，再分析出 $f(-3)\notin(0,1)$，最后对 c 的范围进行分类讨论即可.

【小问 1 详解】

（1）$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\dfrac{\pi}{3}$ 不是 M_π 中的元素.

【小问 2 详解】

法一：因为$M_a \neq \varnothing$，则存在实数x_0使得$f(x_0+a)=f(x_0)$，且$a>0$，

当$x<0$时，$f\left(x\right)=x+2$，其在$\left(-\infty,0\right)$上严格单调递增，

当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=\sqrt{x}$，其在$[0,+\infty)$上也严格单调递增，

则$x_0<0\leq x_0+a$，则$x_0+2=\sqrt{x_0+a}$，

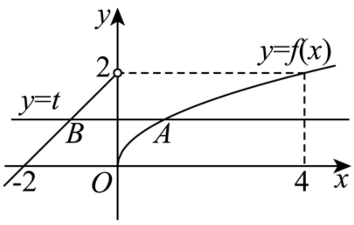
令$x+2=0$，解得$x=-2$，则$-2\leq x_0<0$，

则$a=\left(\sqrt{x_0+a}\right)^2-x_0=\left(x_0+2\right)^2-x_0=\left(x_0+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\in\left[\dfrac{7}{4},4\right)$.

法二：作出该函数图象，则由题意知直线$y=t$与该函数有两个交点，

由图知$0\leq t<2$，假设交点分别为$A\left(m,t\right)$，$B\left(n,t\right)$，

联立方程组$\begin{cases}\sqrt{m}=t\\ n+2=t\end{cases}$得$a=|AB|=m-n=t^2-(t-2)=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\in\left[\dfrac{7}{4},4\right)$



【小问 3 详解】

（3）对任意$x_0\in(1,2), x_0-2\in(-1,0)$，因为其是偶函数，

则$f\left(x_0-2\right)=f\left(2-x_0\right)$，而$2-x_0-\left(x_0-2\right)=4-2x_0\in(0,2)$，

所以$x_0-2\in M_{4-2x_0}\subseteq M_2$，

所以$f\left(x_0\right)=f\left(x_0-2\right)=f\left(2-x_0\right)$，因为$x_0\in\left(1,2\right)$，则$2-x_0\in\left(0,1\right)$，

所以$f\left(x_0\right)=f\left(2-x_0\right)=1-\left(2-x_0\right)=x_0-1$，所以$f(x)=x-1, x\in(1,2)$，

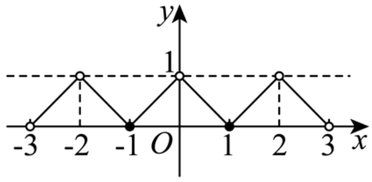
所以当$s\in(0,1)$时，$1-s\in(0,1)$，$1+s\in(1,2)$，则$f(1-s)=1-(1-s)=s$，

$f(1+s)=\left(1+s\right)-1=s$，则$f(1-s)=f(1+s)$，

而$1+s-\left(1-s\right)=2s$，$\left(3-s\right)-\left(1-s\right)=2$，

则$1-s\in M_{2s}\subseteq M_2$，则$f(1-s)=f(3-s)$，

所以当$x\in(2,3)$时，$f(x)=f(x-2)=1-(x-2)=3-x$，而$f(x)$为偶函数，画出函数图象如下：



其中$f\left(-3\right)=f\left(3\right),f\left(-2\right)=f\left(2\right),f\left(0\right)$，但其对应的$y$值均未知.

首先说明$f(-3)=n\notin(0,1)$，

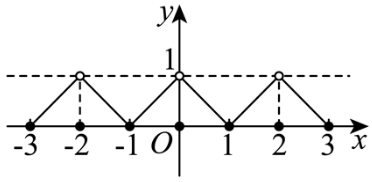
若$f(-3)=n\in(0,1)$，则$-3+n\in\left(-3,-2\right)$，易知此时$f\left(x\right)=x+3,x\in\left(-3,-2\right)$，

则$f(-3+n)=n$，所以$f(-3)\in M_n\subseteq M_2$，而$x\in\left[-1,0\right)$时，$f\left(x\right)=x+1$，

所以$f(-3)=f(-1)=0$，与$f(-3)=n$矛盾，所以$f(-3)\notin(0,1)$，即$f(-3)=f(3)\notin(0,1)$，

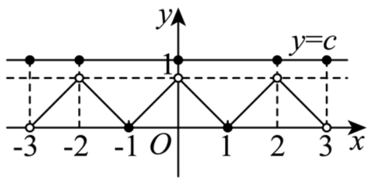
令$y=f(x)-c=0$，则$y=f(x)=c$，

当$c=0$时，即使让$f\left(-3\right)=f\left(3\right)=f\left(-2\right)=f\left(2\right)=f\left(0\right)=0$，此时最多7个零点，



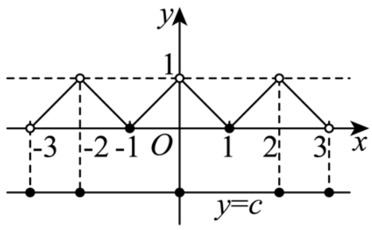
当$c\geq1$时，若$f\left(-2\right)=f\left(2\right)=f\left(0\right)=f\left(-3\right)=f\left(3\right)=c$，此时有5个零点，

故此时最多5个零点；



当$c<0$时，若$f\left(-2\right)=f\left(2\right)=f\left(0\right)=f\left(-3\right)=f\left(3\right)=c$，此时有5个零点，

故此时最多5个零点；



当$0<c<1$时，若$f\left(-2\right)=f\left(2\right)=f\left(0\right)=c$，此时有3个零点，

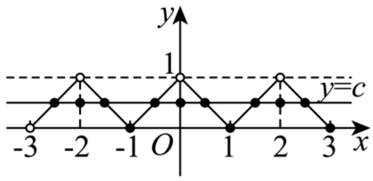
若 $f(-3)=c\in(0,1)$，则 $-3+c\in\left(-3,-2\right)$，易知此时 $f\left(x\right)=x+3$，

则 $f(-3+c)=c$，所以 $f(-3)\in M_c\subseteq M_2$，而 $x\in\left[-1,0\right)$ 时，$f\left(x\right)=x+1$，

所以 $f(-3)=f(-1)=0$，与 $f(-3)=p$ 矛盾，所以 $f(-3)\notin(0,1)$，

则最多在 $(-3,-2),(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3)$ 之间取得 6 个零点，

以及在 $x=-2,0,2$ 处成为零点，故不超过 9 个零点.



综上，零点不超过 9 个.