2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第II卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

·如果事件 A 、 B 互斥，那么 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.

·如果事件 A 、 B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$.

·圆柱的体积公式 $V=Sh$ ，其中 S 表示圆柱的底面面积， h 表示圆柱的高.

·棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积， h 表示棱锥的高.

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\},B=\{2,3,4\},C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,1\le x<3\}$ ，则 $(A\bigcap C)\bigcup B=$

A． $\{2\}$　　B． $\{2,3\}$　　C． $\{-1,2,3\}$　　D． $\{1,2,3,4\}$

2．设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\le 0,\\ x-y+2\ge 0,\\ x\ge -1,\\ y\ge -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为

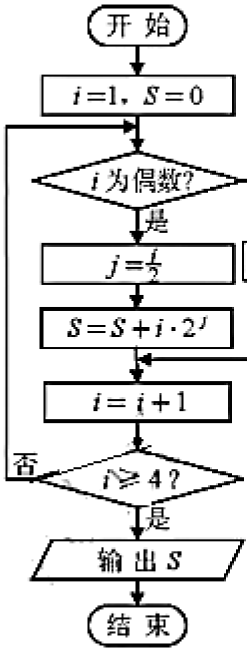
A．2　　B．3　　C．5　　D．6

3．设 $x\in\mathbf{R}$ ，则“ $x^2-5x<0$ ”是“ $|x-1|<1$ ”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

4．阅读下边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



A．5　　　　B．8　　　　C．24　　　　D．29

5．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，若 l 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$（O 为原点），则双曲线的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．2　　　　D．$\sqrt{5}$

6．已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为

A．$a<c<b$　　　　B．$a<b<c$　　　　C．$b<c<a$　　　　D．$c<a<b$

7．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 是奇函数，将 $y=f\left(x\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为 $g\left(x\right)$．若 $g\left(x\right)$ 的最小正周期为 2π，且 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=$

A．-2　　　　B．$-\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．2

8．已知 $a\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\le 1,\\ x-a\ln x, & x>1.\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\ge 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a

的取值范围为

A．$[0,1]$　　B．$[0,2]$　　C．$[0,\mathrm{e}]$　　D．$[1,\mathrm{e}]$

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

第II卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共12小题，共110分。

二．填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

9．i 是虚数单位，则 $\left|\dfrac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ 的值为____________．

10．$\left(2x-\dfrac{1}{8x^3}\right)^8$ 的展开式中的常数项为____________．

11．已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$．若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为____________．

12．设 $a\in\mathbf{R}$，直线 $ax-y+2=0$ 和圆 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）相切，则 a 的值为____________．

13．设 $x>0,\quad y>0,\quad x+2y=5$，则 $\dfrac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为____________．

14．在四边形 $ABCD$ 中，$AD\,/\!/\,BC,\quad AB=2\sqrt{3},\quad AD=5,\quad \angle A=30^\circ$，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE=BE$，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$____________．

三．解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分13分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c．已知 $b+c=2a$，$3c\sin B=4a\sin C$．

（I）求 $\cos B$ 的值；

（II）求 $\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值．

16．（本小题满分13分）

设甲、乙两位同学上学期间，每天7：30之前到校的概率均为 $\dfrac{2}{3}$ ．假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立．

（I）用 X 表示甲同学上学期间的三天中7：30之前到校的天数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（II）设 M 为事件“上学期间的三天中，甲同学在7：30之前到校的天数比乙同学在7：30之前到校的天数恰好多2”，求事件 M 发生的概率．

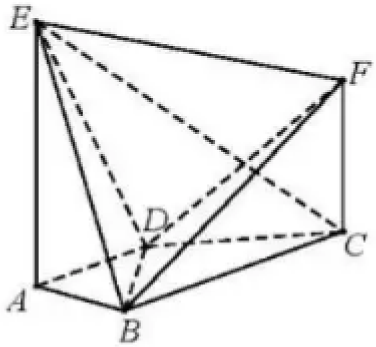
17．（本小题满分13分）

如图， $AE\perp$ 平面 $ABCD$ ， $CF\,/\!/\,AE$ ， $AD\,/\!/\,BC$ ， $AD\perp AB$ ， $AB=AD=1$ ， $AE=BC=2$ ．

（I）求证： $BF\,/\!/$ 平面 ADE ；

（II）求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（III）若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$ ，求线段 CF 的长．



18．（本小题满分13分）

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B ．已知椭圆的短轴长为4，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ．

（I）求椭圆的方程；

（II）设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上．若 $|ON|=|OF|$ （ O 为原点），且 $OP\perp MN$ ，求直线 PB 的斜率．

19．（本小题满分14分）

设$\left\{a_n\right\}$是等差数列，$\left\{b_n\right\}$是等比数列．已知$a_1=4,b_1=6$，$b_2=2a_2-2,b_3=2a_3+4$．

（I）求$\left\{a_n\right\}$和$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（II）设数列$\left\{c_n\right\}$满足$c_1=1,c_n=\begin{cases}1, & 2^k<n<2^{k+1}, \\ b_k, n=2^k, & \end{cases}$其中$k\in\mathbf{N}^*$．

（i）求数列$\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$的通项公式；

（ii）求$\sum_{i=1}^{2^n}a_ic_i\quad\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

20．（本小题满分14分）

设函数$f(x)=\mathrm{e}^x\cos x,\quad g(x)$为$f\left(x\right)$的导函数．

（I）求$f\left(x\right)$的单调区间；

（II）当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，证明$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\geq 0$；

（III）设x_n为函数$u(x)=f(x)-1$在区间$\left(2n\pi+\frac{\pi}{4},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内的零点，其中$n\in\mathbf{N}$，证明

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}.$$

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.

【答案】D

【解析】

【分析】

先求 $A\cap B$，再求 $(A\bigcap C)\bigcup B$ 。

【详解】因为 $A\bigcap C=\{1,2\}$,

所以 $(A\bigcap C)\bigcup B=\{1,2,3,4\}$.

故选D。

【点睛】集合的运算问题，一般要先研究集合中元素的构成，能化简的要先化简，同时注意数形结合，即借助数轴、坐标系、韦恩图等进行运算.

2.设

【答案】C

【解析】

【分析】

画出可行域，用截距模型求最值。

【详解】已知不等式组表示的平面区域如图中的阴影部分。

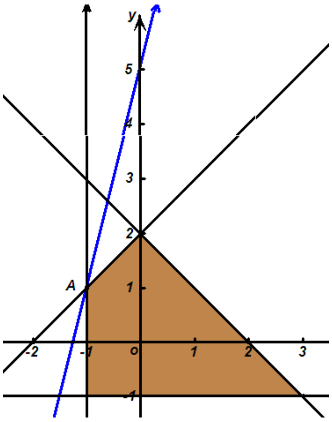
目标函数的几何意义是直线 $y=4x+z$ 在 y 轴上的截距，

故目标函数在点 A 处取得最大值。

由 $\begin{cases}x-y+2=0,\\x=-1\end{cases}$ ，得 $A(-1,1)$,

所以 $z_{\max}=-4\times(-1)+1=5$ 。

故选C。



【点睛】线性规划问题，首先明确可行域对应的是封闭区域还是开放区域，分界线是实线还是虚线，其次确定目标函数的几何意义，是求直线的截距、两点间距离的平方、直线的斜率、还是点到直线的距离等等，最后结合图形确定目标函数最值或范围．即：一画，二移，三求．

3.

【答案】B

【解析】

【分析】

分别求出两不等式的解集，根据两解集的包含关系确定．

【详解】$x^2-5x<0$，即$0<x<5$，

$|x-1|<1$等价于$0<x<2$，故$0<x<5$推不出$|x-1|<1$；

由$|x-1|<1$能推出$0<x<5$。

故“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的必要不充分条件。

故选B。

【点睛】充要条件的三种判断方法：

(1)定义法：根据$p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$进行判断；

(2)集合法：根据由p，q成立的对象构成的集合之间的包含关系进行判断；

(3)等价转化法：根据一个命题与其逆否命题的等价性，把要判断的命题转化为其逆否命题进行判断．这个方法特别适合以否定形式给出的问题．

4.

【答案】B

【解析】

【分析】

根据程序框图，逐步写出运算结果。

【详解】详解：$S=1,i=2\to$ $j=1,S=1+2\cdot2^1=5,i=3$ $S=8,i=4$，

结束循环，故输出8。

故选B。

【点睛】解决此类型问题时要注意：①要明确是当型循环结构，还是直到型循环结构，根据各自的特点执行循环体；②要明确图中的累计变量，明确每一次执行循环体前和执行循环体后，变量的值发生的变化；③要明确循环体终止的条件是什么，会判断什么时候终止循环体.

5.

【答案】D

【解析】

【分析】

只需把$|AB|=4|OF|$用a,b,c表示出来，即可根据双曲线离心率的定义求得离心率。

【详解】l的方程为$x=-1$，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，

故得$A(-1,\dfrac{b}{a}),B(-1,-\dfrac{b}{a})$，

所以$|AB|=\dfrac{2b}{a}$，$\dfrac{2b}{a}=4$，$b=2a$，

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{5}$。

故选D。

【点睛】双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$。

6

【答案】A

【解析】

【分析】

利用利用$0,\frac{1}{2},1$等中间值区分各个数值的大小。

【详解】$a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}<\frac{1}{2}$，

$b=\log_{0.5}0.2>\log_{0.5}0.25=2$，

$0.5^1<0.5^{0.2}<0.5^0$，故$\frac{1}{2}<c<1$，

所以$a<c<b$。

故选A。

【点睛】利用指数函数、对数函数的单调性时要根据底数与1的大小区别对待。

7.

【答案】A

【解析】

【分析】

只需根据函数性质逐步得出A,ω,φ值即可。

【详解】$f(x)$为奇函数，可知$f(0)=A\sin\varphi=0$，

由$|\varphi|<\pi$可得$\varphi=0$；

把其图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍，得$g(x)=A\sin\frac{1}{2}\omega x$，

由$g(x)$的最小正周期为2π可得$\omega=2$，

由$g(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，可得$A=2$，

所以$f(x)=2\sin 2x$，$f(\frac{3\pi}{8})=2\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}$。

故选C。

【点睛】在$x=0$处有定义的奇函数必有$f(0)=0$。

8.

【答案】C

【解析】

【分析】

先判断 $a\ge 0$ 时，$x^2-2ax+2a\ge 0$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立；若 $x-a\ln x\ge 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，转化为 $a\le \frac{x}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立。

【详解】首先 $f(0)\ge 0$，即 $a\ge 0$，

当 $0\le a\le 1$ 时，$f(x)=x^2-2ax+2a=(x-a)^2+2a-a^2\ge 2a-a^2=a(2-a)>0$，

当 $a<1$ 时，$f(1)=1>0$，

故当 $a\ge 0$ 时，$x^2-2ax+2a\ge 0$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立；

若 $x-a\ln x\ge 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\le \frac{x}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=\frac{x}{\ln x}$，则 $g'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，

易知 $x=e$ 为函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 唯一的极小值点、也是最小值点，

故 $g(x)_{\max}=g(e)=e$，所以 $a\le e$。

综上可知，a 的取值范围是 $[0,e]$。

故选C。

【点睛】$a\le f(x)$ 在 D 上恒成立，等价于 $a\le f(x)_{\min},x\in D$；$a\ge f(x)$ 在 D 上恒成立，等价于 $a\ge f(x)_{\max},x\in D$。

第Ⅱ卷

二. 填空题：本大题共6小题.

9. i 是虚数单位，则 $\left|\frac{5-i}{1+i}\right|$ 的值为________.

【答案】$\sqrt{13}$

【解析】

【分析】

先化简复数，再利用复数模的定义求所给复数的模。

【详解】解法一：$\left|\frac{5-i}{1+i}\right|=\left|\frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right|=|2-3i|=\sqrt{13}$ 。

解法二：$\left|\frac{5-i}{1+i}\right|=\frac{|5-i|}{|1+i|}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}}=\sqrt{13}$ 。

【点睛】所以解答与复数概念或运算有关的问题时，需把所给复数化为代数形式，即$a+bi$(a，$b\in R$)的形式，再根据题意求解．

10.$\left(2x-\frac{1}{8x^3}\right)^8$是展开式中的常数项为________.

【答案】28

【解析】

【分析】

根据二项展开式的通项公式得出通项，根据方程思想得出r的值，再求出其常数项。

【详解】$T_{r+1}=C_8^r(2x)^{8-r}(-\frac{1}{8x^3})^r=(-1)^r2^{8-4r}C_8^rx^{8-4r}$，

由$8-4r=0$，得$r=2$，

故所求的常数项为$(-1)^2C_8^2=28$.

【点睛】二项式中含有负号时，要把负号与其后面的字母看作一个整体，计算中要特别注意符号。

11.已知四棱锥的底面是边长为$\sqrt{2}$的正方形，侧棱长均为$\sqrt{5}$.若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为_______.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】

【分析】

根据棱锥的结构特点，确定所求的圆柱的高和底面半径。

【详解】四棱锥的高为$\sqrt{5-1}=2$，

故圆柱的高为1，圆柱的底面半径为$\frac{1}{2}$，

故其体积为$\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1=\frac{\pi}{4}$。

【点睛】圆柱的底面半径是棱锥底面对角线长度的一半、不是底边棱长的一半。

12.设$a\in R$，直线$ax-y+2=0$和圆$\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）相切，则$a$的值为____.

【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】

根据圆的参数方程确定圆的半径和圆心坐标，再根据直线与圆相切的条件得出a满足的方程，解之解得。

【详解】圆心坐标为$(2,1)$，圆的半径为2，

所以$\frac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=2$，

即$4a^2+4a+1=4a^2+4$，

解得$a=\frac{3}{4}$。

【点睛】直线与圆的位置关系可以使用判别式法，但一般是根据圆心到直线的距离与圆的半径的大小作出判断。

13.设$x>0,\quad y>0,\quad x+2y=5$，则$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为______.

【答案】$4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

把分子展开化为$2xy+6$，再利用基本不等式求最值。

【详解】$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}\geq\frac{2\sqrt{2xy\cdot6}}{\sqrt{xy}}=4\sqrt{3}$，

等号当且仅当 $xy=3$，即 $x=3, y=1$ 时成立。

故所求的最小值为 $4\sqrt{3}$。

【点睛】使用基本不等式求最值时一定要验证等号是否能够成立。

14.在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=5$，$\angle A=30^\circ$，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE=BE$，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$_________.

【答案】-1

【解析】

【分析】

可利用向量的线性运算，也可以建立坐标系利用向量的坐标运算求解。

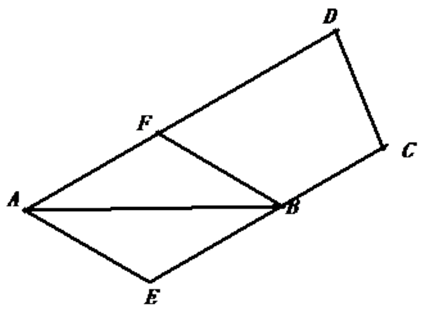
【详解】解法一：如图，过点 B 作 AE 的平行线交 AD 于 F，

因为 $AE=BE$，故四边形 $AEBF$ 为菱形。

因为 $\angle BAD=30^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$，所以 $AF=2$，即 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.

因为 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\bullet(\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD})=\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}^2=\frac{7}{5}\times2\sqrt{3}\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}-12-10=-1$



解法二：建立如图所示的直角坐标系，则 $B(2\sqrt{3},0)$，$D(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2})$。

因为 $AD \parallel BC$，$\angle BAD=30^\circ$，所以 $\angle CBE=30^\circ$，

因为 $AE=BE$，所以 $\angle BAE=30^\circ$，

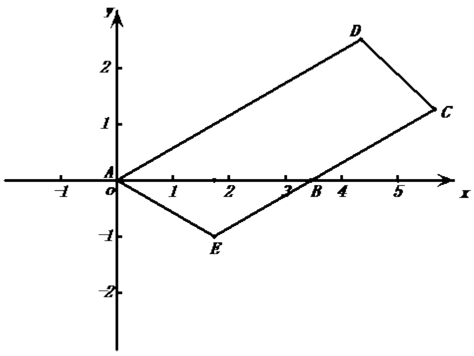
所以直线 BE 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，其方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2\sqrt{3})$，

直线 AE 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，其方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$。

由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2\sqrt{3}), \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$ 得 $x=\sqrt{3}$，$y=-1$，

所以 $E(\sqrt{3},-1)$。

所以 $\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2})\bullet(\sqrt{3},-1)=-1$。



【点睛】平面向量问题有两大类解法：基向量法和坐标法，在便于建立坐标系的问题中使用坐标方法更为方便。

三. 解答题. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $b+c=2a$，$3c\sin B=4a\sin C$.

（Ⅰ）求 $\cos B$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】（Ⅰ）$\cos B=-\frac{1}{4}$（Ⅱ）$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意结合正弦定理得到 a,b,c 的比例关系，然后利用余弦定理可得 $\cos B$ 的值

(Ⅱ)利用二倍角公式首先求得 $\sin 2B,\cos 2B$ 的值，然后利用两角和的正弦公式可得 $a=2$ 的值.

【详解】（Ⅰ）解：在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得$b\sin C=c\sin B$，又由$3c\sin B=4a\sin C$，得$3b\sin C=4a\sin C$，即$3b=4a$. 又因为$b+c=2a$，得到$b=\frac{4}{3}a$，$c=\frac{2}{3}a$. 由余弦定理可得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}=\frac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\frac{2}{3}a}=-\frac{1}{4}$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，从而$\sin 2B=2\sin B\cos B=-\frac{\sqrt{15}}{8}$，

$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=-\frac{7}{8}$，故

$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$

【点睛】本题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识. 考查计算求解能力.

16.设甲、乙两位同学上学期间，每天7：30之前到校的概率均为$\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立.

（Ⅰ）用X表示甲同学上学期间的三天中7：30之前到校的天数，求随机变量X的分布列和数学期望；

（Ⅱ）设M为事件“上学期间的三天中，甲同学在7：30之前到校的天数比乙同学在7：30之前到校的天数恰好多2”，求事件M发生的概率.

【答案】（Ⅰ）见解析；（Ⅱ）$\frac{20}{243}$

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意可知分布列为二项分布，结合二项分布的公式求得概率可得分布列，然后利用二项分布的期望公式求解数学期望即可；

(Ⅱ)由题意结合独立事件概率公式计算可得满足题意的概率值.

【详解】(Ⅰ)因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天7:30之前到校的概率均为$\frac{2}{3}$，

故$X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，从面$P\left(X=k\right)=C_3^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}\left(k=0,1,2,3\right)$.

所以，随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$		$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$.

(Ⅱ)设乙同学上学期间的三天中7:30之前到校的天数为 Y，则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$.

且 $M=\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\}$.

由题意知事件 $\{X=3,Y=1\}$ 与 $\{X=2,Y=0\}$ 互斥，

且事件 $\{X=3\}$ 与 $\{Y=1\}$，事件 $\{X=2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 均相互独立，

从而由(Ⅰ)知：

$P(M)=P\left(\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\}\right)$

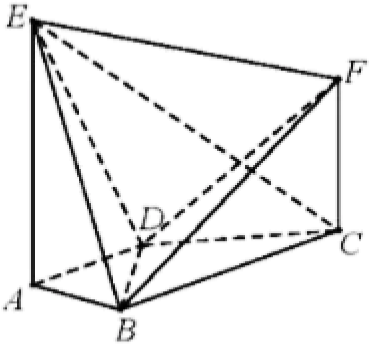
$=P\left(X=3,Y=1\right)+P\left(X=2,Y=0\right)$

$=P(X=3)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)$

$=\frac{8}{27}\times\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{27}=\frac{20}{243}$.

【点睛】本题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算公式等基础知识. 考查运用概率知识解决简单实际问题的能力.

17.如图，$AE\perp$平面 $ABCD$，$CF\,/\!/\,AE$，$AD\,/\!/\,BC$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$.



（Ⅰ）求证：$BF /\!/$ 平面 ADE；

（Ⅱ）求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，求线段 CF 的长.

【答案】（Ⅰ）见证明；（Ⅱ）$\frac{4}{9}$（Ⅲ）$\frac{8}{7}$

【解析】

【分析】

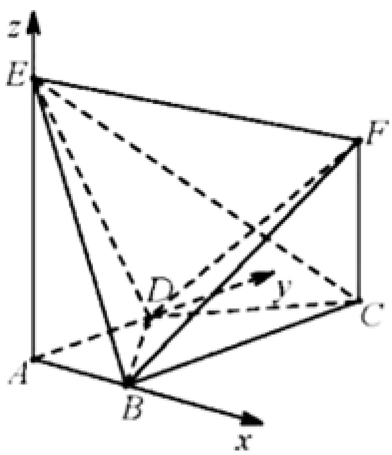
首先利用几何体的特征建立空间直角坐标系

(Ⅰ)利用直线BF的方向向量和平面ADE的法向量的关系即可证明线面平行；

(Ⅱ)分别求得直线CE的方向向量和平面BDE的法向量，然后求解线面角的正弦值即可；

(Ⅲ)首先确定两个半平面的法向量，然后利用二面角的余弦值计算公式得到关于CF长度的方程，解方程可得CF的长度.

【详解】依题意，可以建立以A为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$ 的方向为x轴，y轴，z轴正方向的空间直角坐标系(如图)，



可得 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,2,0),D(0,1,0),E(0,0,2)$.

设$CF=h\left(h>0\right)$，则$F\left(1,2,h\right)$.

（Ⅰ）依题意，$\overrightarrow{AB}=\left(1,0,0\right)$是平面ADE的法向量，

又$\overrightarrow{BF}=\left(0,2,h\right)$，可得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

又因为直线$BF\not\subset$平面ADE，所以$BF//$平面ADE.

（Ⅱ）依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0),\quad \overrightarrow{BE}=(-1,0,2),\quad \overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$，

设$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$为平面BDE的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x+y=0\\ -x+2z=0\end{cases}$，

不妨令$z=1$，可得$\vec{n}=\left(2,2,1\right)$，

因此有$\cos\langle\overrightarrow{CE},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CE}||\vec{n}|}=-\dfrac{4}{9}$.

所以，直线CE与平面BDE所成角的正弦值为$\dfrac{4}{9}$.

(Ⅲ)设$\overrightarrow{m}=\left(x,y,z\right)$为平面BDF的法向量，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x+y=0\\ 2y+hz=0\end{cases}$.

不妨令$y=1$，可得$\overrightarrow{m}=\left(1,1,-\dfrac{2}{h}\right)$.

由题意，有$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|\times\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|4-\dfrac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\dfrac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$，解得$h=\dfrac{8}{7}$.

经检验，符合题意。

所以，线段CF的长为$\dfrac{8}{7}$.

【点睛】本题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识. 考查用空间向量解决立体几何问题的方法. 考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力.

18.设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，上顶点为$B$. 已知椭圆的短轴长为4，离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上. 若 $|ON|=|OF|$（O 为原点），且 $OP\perp MN$，求直线 PB 的斜率.

【答案】（Ⅰ）（Ⅱ）$\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $-\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意得到关于 a, b, c 的方程，解方程可得椭圆方程；

(Ⅱ)联立直线方程与椭圆方程确定点 P 的值，从而可得 OP 的斜率，然后利用斜率公式可得 MN 的斜率表达式，最后利用直线垂直的充分必要条件得到关于斜率的方程，解方程可得直线的斜率.

【详解】(Ⅰ)

设椭圆的半焦距为 c，依题意，$2b=4, \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，又 $a^2=b^2+c^2$，可得 $a=\sqrt{5}$，b=2，c=1.

所以，椭圆方程为.

(Ⅱ)由题意，设 $P\left(x_P, y_P\right)\left(x_P\neq 0\right), M\left(x_M, 0\right)$. 设直线 PB 的斜率为 $k\left(k\neq 0\right)$，

又 $B\left(0, 2\right)$，则直线 PB 的方程为 $y=kx+2$，与椭圆方程联立 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，

整理得 $\left(4+5k^2\right)x^2+20kx=0$，可得 $x_P=-\frac{20k}{4+5k^2}$，

代入 $y=kx+2$ 得 $y_P=\frac{8-10k^2}{4+5k^2}$，

进而直线 OP 的斜率 $\frac{y_P}{x_P}=\frac{4-5k^2}{-10k}$，

在 $y=kx+2$ 中，令 $y=0$，得 $x_M=-\frac{2}{k}$.

由题意得 $N\left(0,-1\right)$，所以直线 MN 的斜率为 $-\frac{k}{2}$.

由 $OP\perp MN$，得 $\frac{4-5k^2}{-10k}\cdot\left(-\frac{k}{2}\right)=-1$，

化简得$k^2=\frac{24}{5}$，从而$k=\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

所以，直线PB的斜率为$\frac{2\sqrt{30}}{5}$或$-\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

【点睛】本题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力.

19.设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列. 已知$a_1=4,b_1=6$，$b_2=2a_2-2,b_3=2a_3+4$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{c_n\}$满足$c_1=1,c_n=\begin{cases}1, & 2^k<n<2^{k+1},\\ b_k, n=2^k, & \end{cases}$其中$k\in\mathbf{N}^*$.

（i）求数列$\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$的通项公式；

（ii）求$\sum_{i=1}^{2^n}a_ic_i\quad\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

【答案】（Ⅰ）$a_n=3n+1$；$b_n=3\times2^n$（Ⅱ）（i）$a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=9\times4^n-1$（ii）

$\sum_{i=1}^{2^n}a_ic_i\quad\left(n\in\mathbf{N}^*\right)=27\times2^{2n-1}+5\times2^{n-1}-n-12\quad\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意首先求得公比和公差，然后确定数列的通项公式即可；

(Ⅱ)结合(Ⅰ)中的结论可得数列$\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$的通项公式，结合所得的通项公式对所求的数列通项公式进行等价变形，结合等比数列前n项和公式可得$\sum_{i=1}^{2^n}a_ic_i$的值.

【详解】(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

依题意得$\begin{cases}6q=2(4+d)-2=6+2d\\ 6q^2=2(4+2d)+4=12+4d\end{cases}$，解得$\begin{cases}d=3\\ q=2\end{cases}$，

故$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$，$b_n=6\times2^{n-1}=3\times2^n$.

所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\times 2^n$.

(Ⅱ)(*i*) $a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=a_{2^n}\left(b_n-1\right)=\left(3\times 2^n+1\right)\left(3\times 2^n-1\right)=9\times 4^n-1$.

所以，数列$\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$的通项公式为$a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=9\times 4^n-1$.

(*ii*) $\sum_{i=1}^{2^n}a_ic_i=\sum_{i=1}^{2^n}\left[a_i+a_i\left(c_i-1\right)\right]=\sum_{i=1}^{2^n}a_i+\sum_{i=1}^{2^n}a_{2^i}\left(c_{2^i}-1\right)$

$=\left(2^n\times 4+\dfrac{2^n\left(2^n-1\right)}{2}\times 3\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(9\times 4^i-1\right)$

$=\left(3\times 2^{2n-1}+5\times 2^{n-1}\right)+9\times\dfrac{4\left(1-4^n\right)}{1-4}-n$

$=27\times 2^{2n-1}+5\times 2^{n-1}-n-12\quad\left(n\in N^*\right)$.

【点睛】本题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前n项和公式等基础知识. 考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力.

20.设函数$f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$, $g(x)$为$f\left(x\right)$的导函数.

(Ⅰ)求$f\left(x\right)$的单调区间；

(Ⅱ)当$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，证明$f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$；

(Ⅲ)设x_n为函数$u(x)=f(x)-1$在区间$\left(2m+\dfrac{\pi}{4},2m\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$内的零点，其中$n\in N$，证明

$2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n<\dfrac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$.

【答案】(Ⅰ)单调递增区间为$\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z}),f(x)$的单调递减区间为

$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$.(Ⅱ)见证明；(Ⅲ)见证明

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意求得导函数的解析式，然后由导函数的符号即可确定函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(Ⅱ)构造函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，结合(Ⅰ)的结果和导函数的符号求解函数 $h\left(x\right)$ 的最小值即可证得题中的结论；

(Ⅲ)令 $y_n=x_n-2n\pi$，结合(Ⅰ)，(Ⅱ)的结论、函数的单调性和零点的性质放缩不等式即可证得题中的结果.

【详解】(Ⅰ)由已知，有 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x\left(\cos x-\sin x\right)$.

当 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)\left(k\in Z\right)$ 时，有 $\sin x>\cos x$，得 $f'\left(x\right)<0$，则 $f\left(x\right)$ 单调递减；

当 $x\in\left(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(k\in Z\right)$ 时，有 $\sin x<\cos x$，得 $f'\left(x\right)>0$，则 $f\left(x\right)$ 单调递增.

所以，$f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(k\in Z\right)$，

$f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)\left(k\in Z\right)$.

(Ⅱ)记 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$. 依题意及(Ⅰ)有：$g\left(x\right)=e^x\left(\cos x-\sin x\right)$，

从而 $g'(x)=-2e^x\sin x$. 当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，故

$$h'(x)=f'(x)+g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)(-1)=g^{'}(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0.$$

因此，$h\left(x\right)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，进而 $h(x)\geqslant h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

所以，当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$.

(Ⅲ)依题意，$u\left(x_n\right)=f\left(x_n\right)-1=0$，即 $\mathrm{e}^{x_n}\cos x_n=1$.

记 $y_n=x_n-2n\pi$，则 $y_n\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

且 $f\left(y_{n}\right)=\mathrm{e}^{y_{n}} \cos y_{n}=\mathrm{e}^{x_{n}-2 n \pi} \cos \left(x_{n}-2 n \pi\right)=\mathrm{e}^{-2 n \pi}\left(n \in N\right)$.

由 $f\left(y_{n}\right)=\mathrm{e}^{-2 n \pi} \leqslant 1=f\left(y_{0}\right)$ 及（Ⅰ）得 $y_{n} \geqslant y_{0}$.

由（Ⅱ）知，当 $x \in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数，

因此 $g\left(y_{n}\right) \leqslant g\left(y_{0}\right)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

又由（Ⅱ）知 $f\left(y_{n}\right)+g\left(y_{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-y_{n}\right) \geqslant 0$，故：

$$\frac{\pi}{2}-y_{n} \leqslant-\frac{f\left(y_{n}\right)}{g\left(y_{n}\right)}=-\frac{\mathrm{e}^{-2 n \pi}}{g\left(y_{n}\right)} \leqslant \frac{e^{-2 n \pi}}{g\left(y_{0}\right)}=\frac{e^{-2 n \pi}}{e^{y_{0}}\left(\sin y_{0}-\cos y_{0}\right)}<\frac{e^{-2 n \pi}}{\sin x_{0}-\cos x_{0}}.$$

所以 $2 n \pi+\frac{\pi}{2}-x_{n}<\frac{\mathrm{e}^{-2 n \pi}}{\sin x_{0}-\cos x_{0}}$.

【点睛】本题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法. 考查函数思想和化归与转化思想. 考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力.