2012年高考湖北文科数学试卷解析（教师版）

【试卷总评】

试题紧扣2012年《考试大纲》，题目新颖，难度适中。本卷注重对基础知识和数学思想方法的全面考查，同时又强调考查学生的基本能力。选择题与填空题主要体现了基础知识与数学思想方法的考查；第18、19、20、21、22题分别从三角函数、立体几何、数列、解析几何、函数与导数等重点知识进行了基础知识、数学思想方法及基本能力的考查.试卷整体体现坚持注重基础知识，全面考查了理解能力、推理能力、分析解决问题的能力.

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1.已知集合A={x| x^2 -3x +2=0,x∈R}， B={x|0<x<5，x∈N}，则满足条件A ⊆C ⊆B 的集合C的个数为(　　)

A 1　　B 2　　C　3　　D 4

【答案】D

【解析】因为 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，A ⊆C ⊆B,所以 $C=\{1,2\}$、$\{1,2,3\}$、$\{1,2,4\}$、$\{1,2,3,4\}$，即集合C的个数为4.

【考点定位】本小题考查集合间的关系,属保分题,集合问题是高考的重点内容之一,年年必考,考查一个小题,仔细审题与熟练基本题型是解决好本类问题的关键.

2.　容量为20的样本数据，分组后的频数如下表

分组	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)
频数	2	3	4	5	4	2

则样本数据落在区间[10,40]的频率为(　　)

A 0.35　B　0.45　C　0.55　D　0.65

【答案】B

【解析】因为样本数据落在区间[10,40]的频数分别为2, 3, 4, 容量为20,所以样本数据落在区间[10,40]的频率分别为0.1, 0.15, 0.2,所以所求频率为0.1+0.15+0.2=0.45,故选B.

【考点定位】本小题考查频率分布表,属统计内容,是高考的重点,年年必考,主要考查抽样方法、数字特征、线性回归等内容，熟练频率=$\frac{频数}{样本容量}$等公式是解决好本类问题的关键.

3.　函数 f(x)=xcos2x 在区间[0,2π]上的零点个数为(　　　)

A 2　 B 3　 C　4　 D　5

【答案】D

【解析】令 f(x)=xcos2x=0 得：$x=0$ 或 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in z$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in z$，因为 $x\in$ [0,2π]，所以 $x=0$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{3\pi}{4}$、$\frac{5\pi}{4}$、$\frac{7\pi}{4}$，故函数 f(x)=xcos2x 在区间[0,2π]上的零点有 5 个，故选 D.

【考点定位】本小题考查函数的零点求解.函数的零点即方程 $f(x)=0$ 的根，是高考的热点问题之一，年年必考，掌握求函数零点的几种方法(解方程法、画图象法等).

4.命题“存在一个无理数，它的平方是有理数”的否定是(　　　)

A.任意一个有理数，它的平方是有理数

B.任意一个无理数，它的平方不是有理数

C.存在一个有理数，它的平方是有理数

D.存在一个无理数，它的平方不是有理数

【答案】B

【解析】命题“存在一个无理数，它的平方是有理数”的否定是“任意一个无理数，它的平方不是有理数”.

【考点定位】本小题考查存在性命题的否定是全称命题，属于常用逻辑用语内容，常用逻辑用语是高考的重点内容之一，年年必考，多以小题形式出现，考查充分必要条件、四种命题等内容.

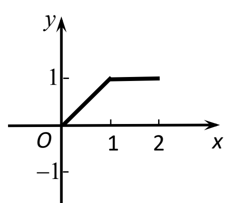
5.过点 P（1,1）的直线，将圆形区域{（x，y）|$x^2+y^2\leqslant4$}分两部分，使得这两部分的面积之差最大，则该直线的方程为（　　　）

A.x+y-2=0　　　B.y-1=0　　　C.x-y=0　　　D.x+3y-4=0

【答案】A

【解析】要使直线将圆形区域{（x，y）|$x^2+y^2\leqslant4$}分成这两部分的面积之差最大，只需过点 P（1,1）的直线与圆相交得的弦长最短即可，所以该直线的斜率为-1，又因为直线过点 P（1,1），所以所求直线的方程为 x+y-2=0.

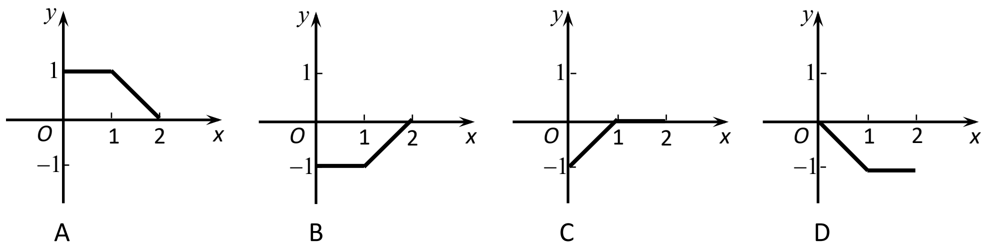
【考点定位】本题考查直线与圆的基础知识.对文科来说，直线与圆一直是高考的重点，经常以选择或填空题的形式单独考查直线与圆的知识，也可能与圆锥曲线相结合以解答题的形式



考查，难度较大.

6．已知定义在区间（0，2）上的函数 y=f(x)的图像如图所示，

则 y=-f(2-x)的图像为(　　)



【答案】B

【解析】y=-f(2-x)的图像是由原函数 y=f(x)的图像先关于原点的对称图象得到 y=-f(-x)的图像，再向右平移 2 个单位得到，故选 B.

【考点定位】本小题考查函数的图象变换(包括平移、对称变换等)．函数的图象是高考的重点和热点，年年必考，一般以选择或填空题的形式出现，有时还用排除法，熟练基本函数的图象以及函数的几种常见的图象变换是解决好本类问题的关键.

7.定义在（-∞，0）∪（0，+∞）上的函数 f（x），如果对于任意给定的等比数列$\{a_n\}$，{f（a_n）}仍是等比数列，则称 f（x）为“保等比数列函数”。现有定义在（-∞，0）∪（0，+∞）上的如下函数：①f（x）=x^2；②f（x）=2^x；③ $f(x)=\sqrt{|x|}$；④f（x）=ln|x|.

则其中是“保等比数列函数”的 f（x）的序号为(　　　)

A.①②　B.③④　C.①③　　D.②④

【答案】C

【解析】若数列$\{a_n\}$是等比数列，则数列$\left\{a_n{}^2\right\}$也是等比数列，故①是“保等比数列函数”；同理③对应的函数也是等比数列，故选 C.

【考点定位】本小题以数列为载体，给出了新定义的题目，考查了同学们利用所学问题分析问题和解决问题的能力，近几年的高考对这类问题的考查越来越重视，应引起我们的重视.

8.设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若三边的长为连续的三个正整数，且 A＞B＞C，3b=20acosA，则 sinA∶sinB∶sinC 为(　　　)

A.4∶3∶2　　B.5∶6∶7　　C.5∶4∶3　　D.6∶5∶4

【答案】D

【解析】由正弦定理得：sinA∶sinB∶sinC=a:b:c,因为△ABC 的三边的长为连续的三个正整数，且 A＞B＞C，所以设 $a=x+2, b=x+1, a=x$，x 是正整数，所以

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(x+1)^2+x^2-(x+2)^2}{2x(x+1)}=\frac{x-3}{2x}$，又因为 3b=20acosA，所以

$3(x+1)=20(x+2)\cdot\frac{x-3}{2x}$，整理得 $7x^2-13x-60=0$，解得 $x=4$，所以 a:b:c=6∶5∶4,

即 sinA∶sinB∶sinC 为 6∶5∶4,故选 D.

【考点定位】本小题考查余弦定理及解方程等基础知识.解三角形是高考的重点内容之一，年年必考,选择、填空与解答题三种题型均有可能出现，熟练正余弦定理及其变形公式是解决好本类题的关键.

9.设 a,b,c,∈ R,,则“abc=1”是“$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\le a+b+c$”的(　　　)

A.充分条件但不是必要条件，B.必要条件但不是充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要的条件

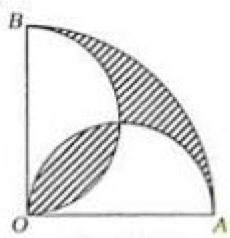
【答案】A

【解析】若 “abc=1”，则 $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\le a+b+c$，故是充分条件;

反之，不成立.

【考点定位】本小题考查不等式与充分必要条件，这是高考的重点内容之一，熟练基础知识是解答本类题目的关键.

10.如图，在圆心角为直角的扇形 OAB 中，分别以 OA，OB 为直径作两个半圆。在扇形 OAB 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是(　　　)



第 10 题图

A. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$　　B. $\frac{1}{\pi}$.　　C. $1-\frac{2}{\pi}$　　D. $\frac{2}{\pi}$

【答案】C

【解析】设以 OA，OB 为直径作两个半圆的半径为r，则扇形 OAB 的半径为$2r$，则左下方的阴影区域面积为$2(\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2)=(\frac{1}{2}\pi-1)r^2$，右上方阴影区域面积为$\frac{1}{4}\pi\cdot 4r^2-\frac{1}{2}\pi r^2-\frac{1}{4}\pi r^2-[\frac{1}{2}r^2-(\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2)]=\frac{1}{2}\pi r^2-r^2$，所以阴影部分的面积为$\pi r^2-2r^2$，又因为扇形 OAB 的面积为$\frac{1}{4}\pi\cdot 4r^2=\pi r^2$，所以阴影部分的概率为$\frac{\pi r^2-2r^2}{\pi r^2}=1-\frac{2}{\pi}$，故选 C.

【考点定位】本小题考查几何概型，对文科来说，几何概型与古典概型是概率部分的重点内容，是高考的热点内容，年年必考，熟练这两种模型是解答好本类题目的关键.

二、填空题：本大题共 7 小题，每小题 5 分，共 35 分。请将答案填在答题卡对应题号的位置上答错位置，书写不清，模棱两可均不得分。

11.一支田径运动队有男运动员 56 人，女运动员 42 人。现用分层抽样的方法抽取若干人，若抽取的男运动员有 8 人，则抽取的女运动员有______人。

【答案】6

【解析】因为这支田径运动队有男、女运动员的人数的比例为$4:3$，抽取的男运动员有 8 人，所以这支田径运动队的男、女运动员共有$8\times\frac{7}{4}=14$人，则抽取的女运动员有$14\times\frac{3}{7}=6$人.

【考点定位】本小题考查分层抽样方法，属容易题. 抽样方法是高考的重点内容之一，几乎年年必考，其中分层抽样与系统抽样是高考的热点内容，应熟练掌握.

12.若$\frac{3+bi}{1-i}=a+bi$（a，b 为实数，i 为虚数单位），则 a+b=____________.

【答案】3

【解析】由题意知：$3+bi=(a+bi)(1-i)$，所以由复数相等的定义知$a+b=3$且$b-a=b$，解得$a=0,b=3$，所以 a+b=3.

【考点定位】本小题考查复数相等的含义.复数的运算及复数相等是复数的重点内容之一，也是高考的重点内容，年年必考，以选择或填空题的形式出现.

13.已知向量$\vec{a}$=（1,0），$\vec{b}$=（1,1），则

（Ⅰ）与$2\vec{a}+\vec{b}$同向的单位向量的坐标表示为____________；

（Ⅱ）向量$\vec{b}-3\vec{a}$与向量$\vec{a}$夹角的余弦值为____________。

【答案】（Ⅰ）$(\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10})$；（Ⅱ）$\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

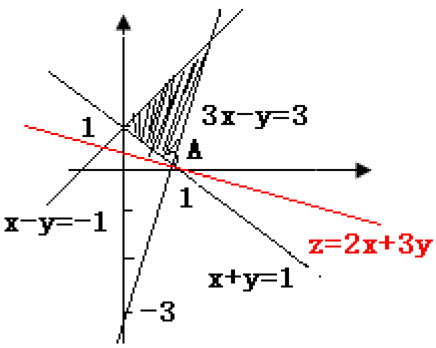
【解析】（Ⅰ）因为$2\vec{a}+\vec{b}=(3,1)$，所以其模为$\sqrt{10}$，所以与$2\vec{a}+\vec{b}$同向的单位向量的坐标为$(\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10})$；（Ⅱ）因为$\vec{b}-3\vec{a}=(-2,1)$，$\vec{a}=(1,0)$，所以$(\vec{b}-3\vec{a})\cdot\vec{a}=-2$，$|\vec{b}-3\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{a}|=1$，所以向量$\vec{b}-3\vec{a}$与向量$\vec{a}$夹角的余弦值为$\frac{-2\sqrt{5}}{5}$.

【考点定位】本小题考查平面向量的坐标运算.平面向量作为解题的工具,是高考的重点内容之一,经常以选择或填空题的形式单独考查平面向量，平面向量还经常与三角函数、不等式、解析几何等知识相结合，以解答题的形式出现，综合性较强.

14.若变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geq -1,\\ x+y\geq 1,\\ 3x-y\leq 3,\end{cases}$，则目标函数 z=2x+3y 的最小值是________.

【答案】2

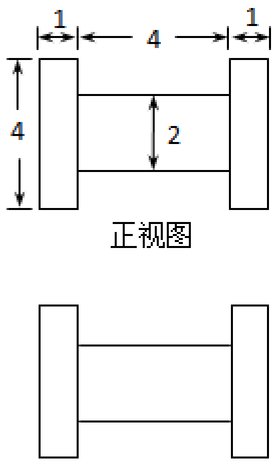
【解析】画出不等式组表示的平面区域如下图所示：



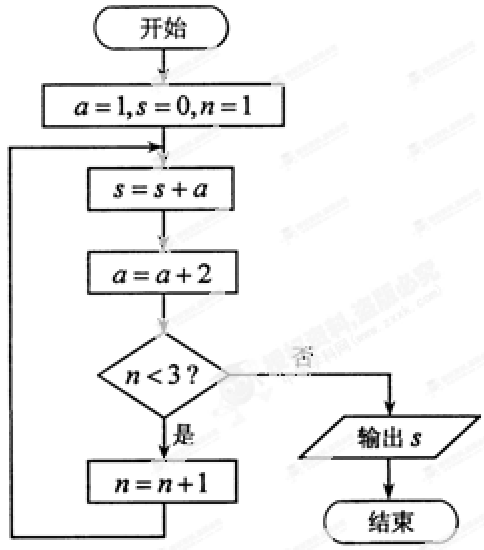
由图可知，当目标函数 z=2x+3y 表示的直线经过点 A(1, 0)时，z=2x+3y 取得最小值为 2.

【考点定位】本小题考查线性规划的基础知识，属于常见题型，不难. 线性规划是不等式的重点内容，是高考的热点内容之一，年年必考，主要考查本题类型或约束条件中含有变量，或与均值不等式等其它知识相结合，经常以选择或填空题的形式出现.

15.已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为____________.



第 15 题图



第 16 题图

【答案】12π

【解析】由三视图可知，该几何体为一个底面半径为 1 且高为 4 的倒放的圆柱的两端接上两个底面半径为 2 且高为 1 的圆柱，是一个组合体，所以其体积为 $\pi\cdot 2^2\times 1\times 2+\pi\cdot 4=12\pi$.

【考点定位】本小题考查立体几何中的三视图，考查了同学们的空间想象能力. 三视图是高考的热点，年年必考，一般以选择或填空题的形式出现.

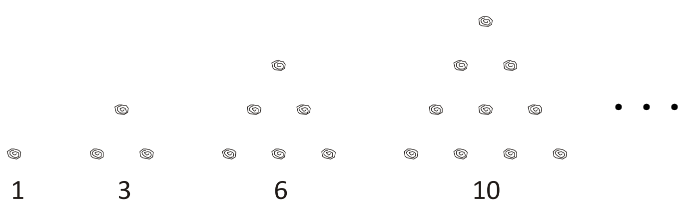
16.阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，输出的结果 s=_________。

【答案】9

【解析】当 $a=1, n=1$ 时，计算出的 $s=1$；当 $a=3, n=2$ 时，计算出的 $s=4$；当 $a=5, n=3$ 时，计算出的 $s=9$，此时输出的结果 s=9.

【考点定位】本小题考查框图的基本知识. 框图是高考的热点内容之一，年年必考，经常以选择或填空题的形式出现一个，难度不大，熟练基本算法以及算到哪一步是解决好本类问题的关键.

17.传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上面画点或用小石子表示数。他们研究过如图所示的三角形数：



将三角形数 1,3，6,10，…记为数列$\{a_n\}$，将可被 5 整除的三角形数按从小到大的顺序组成一个新数列$\{b_n\}$，可以推测：

（Ⅰ）b_{2012}是数列{an}中的第______项；

（Ⅱ）b_{2k-1}=______。（用 k 表示）

【答案】（Ⅰ）5030；（Ⅱ）$\frac{5k(5k-1)}{2}$.

【解析】（Ⅰ）因为 $a_1=1$，$a_2=1+2$，$a_3=1+2+3$，$a_4=1+2+3+4$，…… 所以 $a_2=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，因为被 5 整除的三角形数按从小到大的顺序组成一个新数列{b_n}，所以 $b_1=\frac{4\times5}{2}$，$b_2=\frac{5\times6}{2}$，$b_3=\frac{9\times10}{2}$，$b_4=\frac{10\times11}{2}$，$b_5=\frac{14\times15}{2}$，……，每四个数，其分子的两个数的个位数构成一个循环，所以 $b_{2012}=\frac{5030\times5031}{2}$，所以 b_{2012}是数列{an}中的第 5030 项；（Ⅱ）因为 $b_1=\frac{4\times5}{2}$，$b_3=\frac{9\times10}{2}$，$b_5=\frac{14\times15}{2}$，$b_7=\frac{19\times20}{2}$，$b_9=\frac{24\times25}{2}$，……，每两个数，其分子的两个数的个位数构成一个循环，所以 $b_{2k-1}=\frac{5k(5k-1)}{2}$.

【考点定位】本小题考查归纳推理，属中档题.推理归纳与类比，是近几年高考的一个热点问题之一，几乎年年必考，一般以选择或填空题的形式考查，应熟练基础知识.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 65 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\sin^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x-\cos^2\omega x+\lambda\ (x\in R)$ 的图像关于直线 x=π 对称，其中 ω，λ 为常数，且 $\omega\in(\frac{1}{2},\ 1)$.

（1） 求函数 f（x）的最小正周期；

（2） 若 y=f（x）的图像经过点 $(\frac{\pi}{4},0)$，求函数 f（x）的值域.

【解析】（1）因为 $f(x)=\sin^2\omega x-\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\lambda$

$=-\cos2\omega x+\sqrt{3}\sin2\omega x+\lambda=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})+\lambda$，所以

由直线直线 x=π 是 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，可得 $\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})=\pm1$，

所以 $2\omega x-\frac{\pi}{6})=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in z$，即 $\omega=\frac{k}{2}+\frac{1}{3},k\in z$，又因为 $\omega\in(\frac{1}{2},1),k\in z$，.

所以 $k=1$，故 $\omega=\frac{5}{6}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{6\pi}{5}$.

(2)由 $y=f(x)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{4},0)$，得 $f(\frac{\pi}{4})=0$，

即 $\lambda=-2\sin(\frac{5}{6}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=-2\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$，即 $\lambda=-\sqrt{2}$，.

故 $f(x)=2\sin(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6})-\sqrt{2}$,

所以函数 f（x）的值域为$[-2-\sqrt{2},2-\sqrt{2}]$.

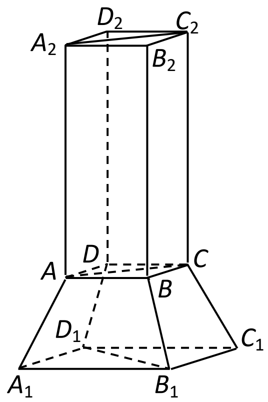
【考点定位】本题考查三角函数的化简与求值,考查三角函数的基本性质等基础知识,考查考生分析问题与解决问题的能力.

19. .（本小题满分 12 分）

某个实心零部件的形状是如图所示的几何体，其下部是底面均是正方形，侧面是全等的等腰梯形的四棱台 $A_1B_1C_1D_1$-ABCD，上不是一个底面与四棱台的上底面重合，侧面是全等的矩形的四棱柱 ABCD-$A_2B_2C_2D_2$。

（1） 证明：直线 B_1D_1⊥平面 ACC_2A_2；

（2） 现需要对该零部件表面进行防腐处理，已知 AB=10，A_1B_1=20，AA_2=30，AA_1=13（单位：厘米），每平方厘米的加工处理费为 0.20 元，需加工处理费多少元？



第 19 题图

【解析】(1) 因为四棱柱 ABCD-$A_2B_2C_2D_2$ 全等的矩形，所以

$AA_2\perp$AB, $AA_2\perp$AD,

又因为 $AB\cap AD=A$, 所以 $AA_2\perp$平面 ABCD, 连结 BD, 因为 BD⊂平面 ABCD, 所以 $AA_2\perp$BD,

因为底面 ABCD 是正方形,所以 AC⊥BD,根据棱台的定义可知,BD 与 B_1D_1 共面,

又已知平面 ABCD//平面 $A_1B_1C_1D_1$,且平面 $BB_1D_1D\cap$平面 ABCD=BD,

平面 $BB_1D_1D\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1$= B_1D_1,所以 B_1D_1 // BD,

由 $AA_2\perp$BD, AC⊥BD, B_1D_1 // BD, 可得 $AA_2\perp B_1D_1$, AC⊥ B_1D_1,

又因为 $AA_2\cap$AC=A,所以直线 B_1D_1⊥平面 ACC_2A_2.

(2)因为四棱柱 ABCD-$A_2B_2C_2D_2$ 的底面是正方形,侧面是全等的矩形,所以

$S_1=S_{直棱柱上底面}+S_{四棱柱侧面}=(A_2B_2)^2+4AB\cdot AA_2=10^2+4\times10\times30=1300(cm^2)$.

又因为四棱台 $A_1B_1C_1D_1$ –ABCD 的上、下底面均是正方形,侧面是全等的等腰梯形,所以

$S_2=S_{直棱柱下底面}+S_{四棱台侧面}=(A_1B_1)^2+4\times\frac{1}{2}(AB+A_1B_2)h_{等腰梯形的底}=$

$20^2+4\times\frac{1}{2}(10+20)\sqrt{13^2-[\frac{1}{2}(20-10)]^2}=1120(cm^2)$.

所以该实心零部件的表面积为$S=S_1+S_2=1300+1120=2420(cm^2)$，

所以所需加工处理费为$0.2S=0.2\times2420=484$（元）.

【考点定位】本小题考查空间线线与线面的位置关系，考查同学们的空间想象能力、逻辑推理能力、分析问题与解决问题的能力.

20.（本小题满分 13 分）

已知等差数列{a_n}前三项的和为-3，前三项的积为 8.

（1） 求等差数列{a_n}的通项公式；

（2）若 a_2,a_3,a_1 成等比数列，求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和。

【解析】(1)设等差数列{a_n}的公差为d，则$a_2=a_1+d$，$a_3=a_1+2d$，

由题意得$\begin{cases}3a_1+3d=-3\\a_1(a_1+d)(a_1+2d)=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\d=-3\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-4\\d=3\end{cases}$，

所以由等差数列通项公式可得：$a_n=3n+5$或$a_n=3n-7$.

(2) 当$a_n=3n+5$时，a_2,a_3,a_1分别为$-1,-4,2$，不成等比数列；

当$a_n=3n-7$时，a_2,a_3,a_1分别为$-1,2,-4$，成等比数列，满足条件，所以

$|a_n|=|3n-7|=\begin{cases}-3n+7,n=1,2\\3n-7,n\ge3\end{cases}$，设数列$\{|a_n|\}$的前 n 项的和为$S_n$，则

当$n=1$时，$S_1=|a_1|=4$；当$n=2$时，$S_1=|a_1|+|a_2|=5$；

当$n\ge3$时，$S_n=S_2+|a_3|+|a_4|+\cdots+|a_n|=5+(3\times3-7)+(3\times4-7)+\cdots+(3n-7)$

$=5+\frac{(n-2)[2+(3n-7)]}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{11}{2}n+10$，当$n=2$时，满足上式，

综上，$S_n=\begin{cases}4,n=1\\\frac{3}{2}n^2-\frac{11}{2}n+10,n\ge2\end{cases}$.

【考点定位】本小题考查等差数列的通项公式的求解，考查等比数列等基础知识，考查分类讨论的数学思想方法，考查同学们运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

21. （本小题满分 14 分）

设 A 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上任意一点，l 是过点 A 与 x 轴垂直的直线，D 是直线 l 与 x 轴的交点，点 M 在直线 l 上，且满足丨 DM 丨=m 丨 DA 丨（m>0，且 m≠1）.当点 A 在圆上运动时，记点 M 的轨迹为曲线 C。

（1）求曲线 C 的方程，判断曲线 C 为何种圆锥曲线，并求其焦点坐标。

（2）过原点且斜率为 K 的直线交曲线 C 于 P，Q 两点，其中 P 在第一象限，且它在 y 轴上的射影为点 N，直线 QN 交曲线 C 于另一点 H，是否存在 m,使得对任意的 K>0，都有 PQ⊥PH？若存在，请说明理由.

【解析】（Ⅰ）如图 1，设 $M(x,y)$，$A(x_0,y_0)$，则由 $|DM|=m|DA|(m>0, 且m\neq 1)$，

可得 $x=x_0$，$|y|=m|y_0|$，所以 $x_0=x$，$|y_0|=\frac{1}{m}|y|$． ①

因为 A 点在单位圆上运动，所以 $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=1$． ②

将①式代入②式即得所求曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{m^2}=1\ (m>0, 且m\neq 1)$．

因为 $m\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，所以

当 $0<m<1$ 时，曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，

两焦点坐标分别为 $(-\sqrt{1-m^2},0)$，$(\sqrt{1-m^2},0)$；

当 $m>1$ 时，曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆，

两焦点坐标分别为 $(0,\ -\sqrt{m^2-1})$，$(0,\ \sqrt{m^2-1})$．

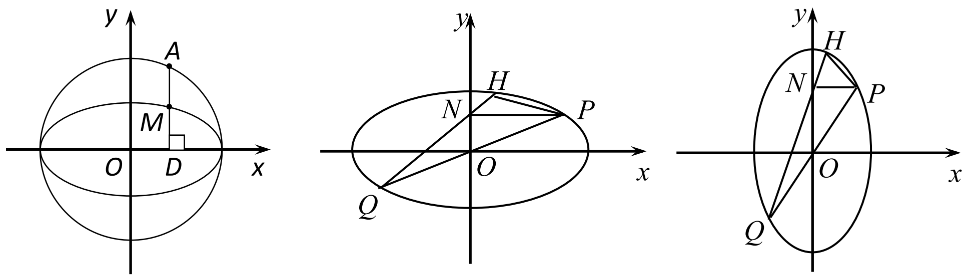


图 1　　图 2 $(0<m<1)$　　图 3 $(m>1)$

第 21 题解答图

（Ⅱ）**解法 1：**如图 2、3，$\forall k>0$，设 $P(x_1,kx_1)$，$H(x_2,y_2)$，则 $Q(-x_1,-kx_1)$，$N(0,kx_1)$，

直线 QN 的方程为 $y=2kx+kx_1$，将其代入椭圆 C 的方程并整理可得

$(m^2+4k^2)x^2+4k^2x_1x+k^2x_1^{\ 2}-m^2=0$．

依题意可知此方程的两根为 $-x_1$，x_2，于是由韦达定理可得

$-x_1+x_2=-\frac{4k^2x_1}{m^2+4k^2}$，即 $x_2=\frac{m^2x_1}{m^2+4k^2}$．

因为点 H 在直线 QN 上，所以 $y_2-kx_1=2kx_2=\dfrac{2km^2x_1}{m^2+4k^2}$.

于是 $\overrightarrow{PQ}=(-2x_1,-2kx_1)$，$\overrightarrow{PH}=(x_2-x_1,y_2-kx_1)=(-\dfrac{4k^2x_1}{m^2+4k^2},\dfrac{2km^2x_1}{m^2+4k^2})$.

而 $PQ\perp PH$ 等价于 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}=\dfrac{4(2-m^2)k^2{x_1}^2}{m^2+4k^2}=0$，

即 $2-m^2=0$，又 $m>0$，得 $m=\sqrt{2}$，

故存在 $m=\sqrt{2}$，使得在其对应的椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上，对任意的 $k>0$，都有 $PQ\perp PH$.

解法 2： 如图 2、3，$\forall x_1\in(0,1)$，设 $P(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，则 $Q(-x_1,-y_1)$，$N(0,y_1)$，

因为 P，H 两点在椭圆 C 上，所以 $\begin{cases}m^2{x_1}^2+{y_1}^2=m^2,\\ m^2{x_2}^2+{y_2}^2=m^2,\end{cases}$ 两式相减可得

$m^2({x_1}^2-{x_2}^2)+({y_1}^2-{y_2}^2)=0$.　　③

依题意，由点 P 在第一象限可知，点 H 也在第一象限，且 P，H 不重合，

故 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)\neq 0$. 于是由③式可得

$\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-m^2$.　　④

又 Q，N，H 三点共线，所以 $k_{QN}=k_{QH}$，即 $\dfrac{2y_1}{x_1}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$.

于是由④式可得 $k_{PQ}\cdot k_{PH}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\dfrac{m^2}{2}$.

而 $PQ\perp PH$ 等价于 $k_{PQ}\cdot k_{PH}=-1$，即 $-\dfrac{m^2}{2}=-1$，又 $m>0$，得 $m=\sqrt{2}$，

故存在 $m=\sqrt{2}$，使得在其对应的椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上，对任意的 $k>0$，都有 $PQ\perp PH$.

【考点定位】本小题考查直线与圆以及圆锥曲线等基础知识，考查函数与方程思想、分类讨论思想、数形结合思想等数学思想方法，考查同学们分析问题和解决问题的能力.

22.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=ax^n(1-x)+b\ (x>0)$，n 为正整数，a,b 为常数，曲线 y=f(x)在（1，f(1)）处的切线方程为 x+y=1.

（1）求 a,b 的值；

（2）求函数 f(x)的最大值

（3）证明：f(x)< $\frac{1}{ne}$.

【解析】(1)因为 $f(1)=b$，所以由点(1, b)在直线 x+y=1 上，可得 $1+b=1$，解得 $b=0$，

因为 $f'(x)=anx^{n-1}-a(n+1)x^{n}$，所以 $f'(1)=-a$，

又因为切线 x+y=1 的斜率为-1，所以 $a=1$， $b=0$.

(2)由(1)知，$f(x)=x^{n}(1-x)=x^{n}-x^{n+1}$，$f'(x)=(n+1)x^{n-1}(\frac{n}{n+1}-x)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{n}{n+1}$，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点 $x_n=\frac{n}{n+1}$，

在 $(0,\frac{n}{n+1})$ 上， $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；

在 $(\frac{n}{n+1},+\infty)$ 上， $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减，

所以函数 f(x) 的最大值为 $f(\frac{n}{n+1})=\frac{n^{n}}{(n+1)^{n+1}}$.

(3)令 $\varphi(t)=\ln t-1+\frac{1}{t}(t>0)$，则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^{2}}=\frac{t-1}{t^{2}}(t>0)$，

在 (0, 1) 上，$\varphi'(t)<0$，故 $\varphi(t)$ 单调递减；在 $(1,+\infty)$ 上， $\varphi'(t)>0$，故 $\varphi(t)$ 单调递增，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(t)>0,(t>1)$，

即 $\ln t>1-\frac{1}{t}\ (t>1)$.

令 $t=1+\frac{1}{n}$， 得 $\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}$， 即 $\ln(\frac{n+1}{n})^{n+1}>\ln e$，

所以 $(\frac{n+1}{n})^{n+1}>e$， 即 $\frac{n^{n}}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{ne}$.

由（Ⅱ）知， $f(x)\le\frac{n^{n}}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{ne}$， 故所证不等式成立.

【考点定位】本小题考查导数的几何意义，考查利用导数研究函数的单调性、最大值、证明不等式等问题，考查同学们分析问题和解决问题的能力.