

2015年江苏省高考数学试卷

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共计70分）

1. （5分）（2015•江苏）已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 5\}$, 则集合 $A \cup B$ 中元素的个数为_____.

2. （5分）（2015•江苏）已知一组数据4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为_____.

3. （5分）（2015•江苏）设复数 z 满足 $z^2=3+4i$ (i 是虚数单位), 则 z 的模为_____.

4. （5分）（2015•江苏）根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 S 为_____.

```
S ← 1
I ← 1
While I < 8
    S ← S + 2
    I ← I + 3
End While
Print S
```

5. （5分）（2015•江苏）袋中有形状、大小都相同的4只球, 其中1只白球、1只红球、2只黄球, 从中一次随机摸出2只球, 则这2只球颜色不同的概率为_____.

6. （5分）（2015•江苏）已知向量 $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(1, -2)$, 若 $m\vec{a}+n\vec{b}=(9, -8)$ ($m, n \in \mathbb{R}$), 则 $m - n$ 的值为_____.

7. （5分）（2015•江苏）不等式 $2^{x^2-x} < 4$ 的解集为_____.

8. （5分）（2015•江苏）已知 $\tan \alpha = -2$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{7}$, 则 $\tan \beta$ 的值为_____.

9. （5分）（2015•江苏）现有橡皮泥制作的底面半径为5, 高为4的圆锥和底面半径为2, 高为8的圆柱各一个, 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个, 则新的底面半径为_____.

10. （5分）（2015•江苏）在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 $(1, 0)$ 为圆心且与直线 $mx - y - 2m - 1 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) 相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为_____.

11. (5分) (2015•江苏) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且 $a_{n+1} - a_n = n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前10项的和为_____.

12. (5分) (2015•江苏) 在平面直角坐标系 xOy 中, P 为双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 右支上的一个动点, 若点 P 到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离大于 c 恒成立, 则实数 c 的最大值为_____.

13. (5分) (2015•江苏) 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$, 则方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为_____.

14. (5分) (2015•江苏) 设向量 $\vec{a}_k = (\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6})$ ($k=0, 1, 2, \dots, 12$), 则 $\sum_{k=0}^{11} (a_k \cdot a_{k+1})$ 的值为_____.

二、解答题 (本大题共6小题, 共计90分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

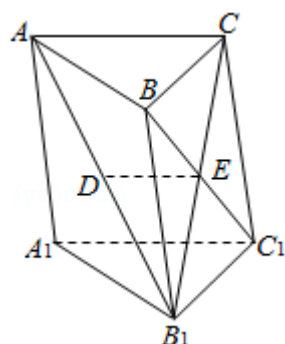
15. (14分) (2015•江苏) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$, $AC=3$, $A=60^\circ$.

- (1) 求 BC 的长;
- (2) 求 $\sin 2C$ 的值.

16. (14分) (2015•江苏) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AC \perp BC$, $BC = CC_1$, 设 AB_1 的中点为 D , $B_1C \cap BC_1 = E$.

求证:

- (1) $DE \parallel$ 平面 AA_1C_1C ;
- (2) $BC_1 \perp AB_1$.



17. (14分) (2015•江苏) 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路, 记两条相互垂直的公路为 l_1 , l_2 , 山区边界曲线为 C , 计划修建的公路为 l , 如图所示, M , N 为 C 的两个端点, 测得点 M 到 l_1 , l_2 的距离分别为5千米和40千米, 点 N 到 l_1 , l_2 的距离分别为20千米和2.5千米,

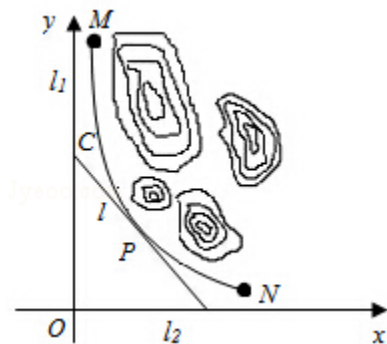
以 l_2 , l_1 在的直线分别为 x , y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy , 假设曲线 C 符合函数 $y = \frac{a}{x^2 + b}$ (其中 a , b 为常数) 模型.

(1) 求 a , b 的值;

(2) 设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t .

①请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域;

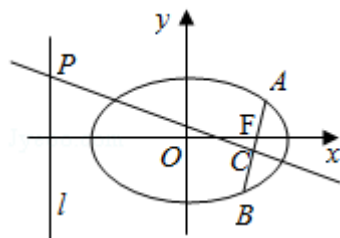
②当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度.



18. (16分) (2015•江苏) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且右焦点 F 到左准线 l 的距离为3.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过 F 的直线与椭圆交于 A , B 两点, 线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P , C , 若 $PC = 2AB$, 求直线 AB 的方程.



19. (16分) (2015•江苏) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $b = c - a$ (实数 c 是与 a 无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$, 求 c 的值.

20. (16分) (2015•江苏) 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是各项为正数且公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列.

(1) 证明: $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$ 依次构成等比数列;

(2) 是否存在 a_1, d , 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列? 并说明理由;

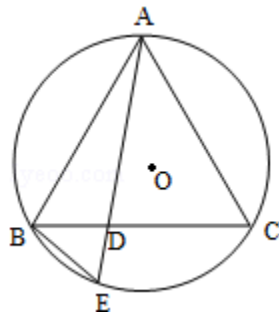
(3) 是否存在 a_1, d 及正整数 n, k , 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列? 并说明理由。

三、附加题(本大题包括选做题和必做题两部分)【选做题】本题包括21-

24题, 请选定其中两小题作答, 若多做, 则按作答的前两小题评分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤【选修4-1: 几何证明选讲】

21. (10分) (2015•江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的弦 AE 交 BC 于点 D .

求证: $\triangle ABD \sim \triangle AEC$.



【选修4-2: 矩阵与变换】

22. (10分) (2015•江苏) 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 向量 $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ 的属于特征值 -2 的一个特征向量, 求矩阵 A 以及它的另一个特征值.

【选修4-4: 坐标系与参数方程】

23. (2015•江苏) 已知圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$, 求圆 C 的半径.

[选修4-5: 不等式选讲]

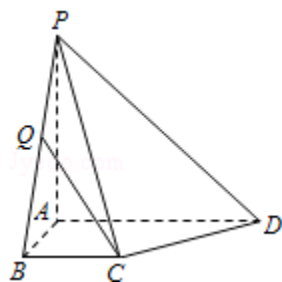
24. (2015•江苏) 解不等式 $|x+2x+3| \geq 2$.

【必做题】每题10分, 共计20分, 解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤

25. (10分) (2015•江苏) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $PA = AD = 2$, $AB = BC = 1$.

(1) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值;

(2) 点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成的角最小时, 求线段 BQ 的长.



26. (10分) (2015•江苏) 已知集合 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y_n=\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 设 $S_n=\{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b \text{ 或 } b \text{ 整除 } a, a \in X, b \in Y_n\}$, 令 $f(n)$ 表示集合 S_n 所含元素的个数.

(1) 写出 $f(6)$ 的值;

(2) 当 $n \geq 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.