

2022年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$ ，集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$ ，则 $C_U A = (\quad)$

- A. $(-2, 1]$ B. $(-3, -2) \cup [1, 3)$ C. $[-2, 1)$ D. $(-3, -2] \cup (1, 3)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用补集的定义可得正确的选项。

【详解】由补集定义可知： $C_U A = \{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$ ，即 $C_U A = (-3, -2] \cup (1, 3)$

故选：D。

2. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 3 - 4i$ ，则 $|z| = (\quad)$

- A. 1 B. 5 C. 7 D. 25

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数四则运算，先求出 z ，再计算复数的模。

【详解】由题意有 $z = \frac{3-4i}{i} = \frac{(3-4i)(-i)}{i \cdot (-i)} = -4 - 3i$ ，故 $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$ 。

故选：B。

3. 若直线 $2x + y - 1 = 0$ 是圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 的一条对称轴，则 $a = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】若直线是圆的对称轴，则直线过圆心，将圆心代入直线计算求解。

【详解】由题可知圆心为 $(a, 0)$ ，因为直线是圆的对称轴，所以圆心在直线上，即

$$2a+0-1=0, \text{ 解得 } a=\frac{1}{2}.$$

故选: A.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+2^x}$, 则对任意实数 x , 有 ()

- | | |
|-------------------|-----------------------------|
| A. $f(-x)+f(x)=0$ | B. $f(-x)-f(x)=0$ |
| C. $f(-x)+f(x)=1$ | D. $f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$ |

【答案】C

【解析】

【分析】直接代入计算, 注意通分不要计算错误.

【详解】 $f(-x)+f(x)=\frac{1}{1+2^{-x}}+\frac{1}{1+2^x}=\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{1}{1+2^x}=1$, 故 A 错误, C 正确;

$$f(-x)-f(x)=\frac{1}{1+2^{-x}}-\frac{1}{1+2^x}=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{1+2^x}=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}, \text{ 不是常数, 故 BD}$$

错误;

故选: C.

5. 已知函数 $f(x)=\cos^2 x - \sin^2 x$, 则 ()

- | | |
|---|---|
| A. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减 | B. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增 |
| C. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减 | D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递增 |

【答案】C

【解析】

【分析】化简得出 $f(x)=\cos 2x$, 利用余弦型函数的单调性逐项判断可得出合适的选项.

【详解】因为 $f(x)=\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

对于 A 选项, 当 $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ 时, $-\pi < 2x < -\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递

增, A 错;

对于 B 选项, 当 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{12}$ 时, $-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上不单调, B

错;

对于 C 选项, 当 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 时, $0 < 2x < \frac{2\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减, C 对;

对于 D 选项, 当 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{12}$ 时, $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{7\pi}{6}$, 则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上不单调, D 错.

故选: C.

6. 设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列, 则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 , 当

$n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d \neq 0$, 利用等差数列的通项公式结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d \neq 0$, 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $d > 0$,

若 $a_1 \geq 0$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n > a_1 \geq 0$; 若 $a_1 < 0$, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$,

由 $a_n = a_1 + (n-1)d > 0$ 可得 $n > 1 - \frac{a_1}{d}$, 取 $N_0 = \left[1 - \frac{a_1}{d}\right] + 1$, 则当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$,

所以, “ $\{a_n\}$ 是递增数列” \Rightarrow “存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”;

若存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$, 取 $k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k > N_0$, $a_k > 0$,

假设 $d < 0$, 令 $a_n = a_k + (n-k)d < 0$ 可得 $n > k - \frac{a_k}{d}$, 且 $k - \frac{a_k}{d} > k$,

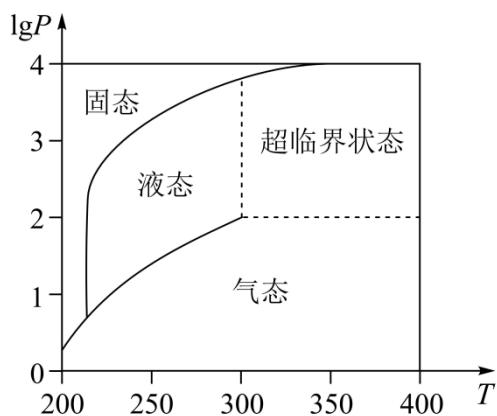
当 $n > \left[k - \frac{a_k}{d}\right] + 1$ 时, $a_n < 0$, 与题设矛盾, 假设不成立, 则 $d > 0$, 即数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

所以, “ $\{a_n\}$ 是递增数列” \Leftarrow “存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”.

所以, “ $\{a_n\}$ 是递增数列”是“存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”的充分必要条件.

故选: C.

7. 在北京冬奥会上, 国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系, 其中 T 表示温度, 单位是 K ; P 表示压强, 单位是 bar . 下列结论中正确的是 ()



- A. 当 $T = 220$, $P = 1026$ 时, 二氧化碳处于液态
 - B. 当 $T = 270$, $P = 128$ 时, 二氧化碳处于气态
 - C. 当 $T = 300$, $P = 9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态
 - D. 当 $T = 360$, $P = 729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

【答案】D

【解析】

【分析】根据 T 与 $\lg P$ 的关系图可得正确的选项.

【详解】当 $T = 220$, $P = 1026$ 时, $\lg P > 3$, 此时二氧化碳处于固态, 故A错误.

当 $T = 270$, $P = 128$ 时, $2 < \lg P < 3$, 此时二氧化碳处于液态, 故 B 错误.

当 $T = 300$, $P = 9987$ 时, $\lg P$ 与 4 非常接近, 故此时二氧化碳处于固态,

另一方面, $T = 300$ 时对应的是非超临界状态, 故 C 错误.

当 $T = 360$, $P = 729$ 时, 因 $2 < \lg P < 3$, 故此时二氧化碳处于超临界状态, 故 D 正确.

故选：D

8. 若 $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 = (\quad)$

- A. 40 B. 41 C. -40 D. -41

【答案】B

【解析】

【分析】利用赋值法可求 $a_0 + a_2 + a_4$ 的值.

【详解】令 $x=1$ ，则 $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$ ，

令 $x = -1$ ，则 $a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = (-3)^4 = 81$

$$\text{tr}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1+81}{41}$$

2

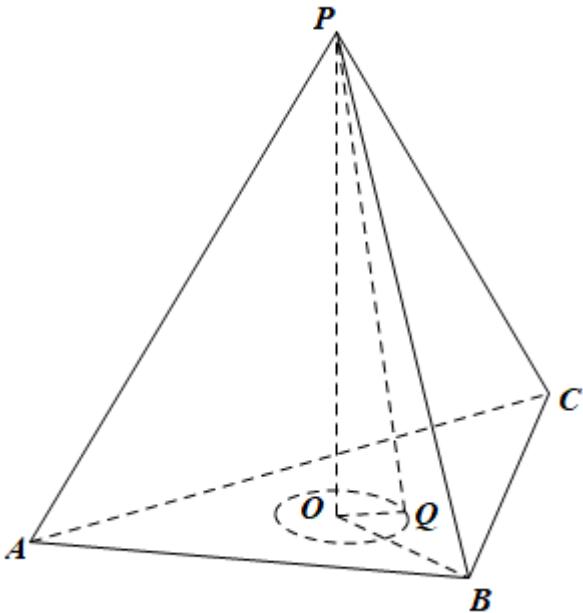
9. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6, S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合. 设集合 $T = \{Q \in S | PQ \leq 5\}$, 则 T 表示的区域的面积为 ()

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. π C. 2π D. 3π

【答案】B

【解析】

【分析】 求出以 P 为球心, 5 为半径的球与底面 ABC 的截面圆的半径后可求区域的面积.



【详解】

设顶点 P 在底面上的投影为 O , 连接 BO , 则 O 为三角形 ABC 的中心,

$$\text{且 } BO = \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ 故 } PO = \sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}.$$

因为 $PQ = 5$, 故 $OQ = 1$,

故 S 的轨迹为以 O 为圆心, 1 为半径的圆,

而三角形 ABC 内切圆的圆心为 O , 半径为 $\frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36}{3 \times 6} = \sqrt{3} > 1$,

故 S 的轨迹圆在三角形 ABC 内部, 故其面积为 π

故选: B

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3, BC = 4, \angle C = 90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且

- $PC = 1$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ()

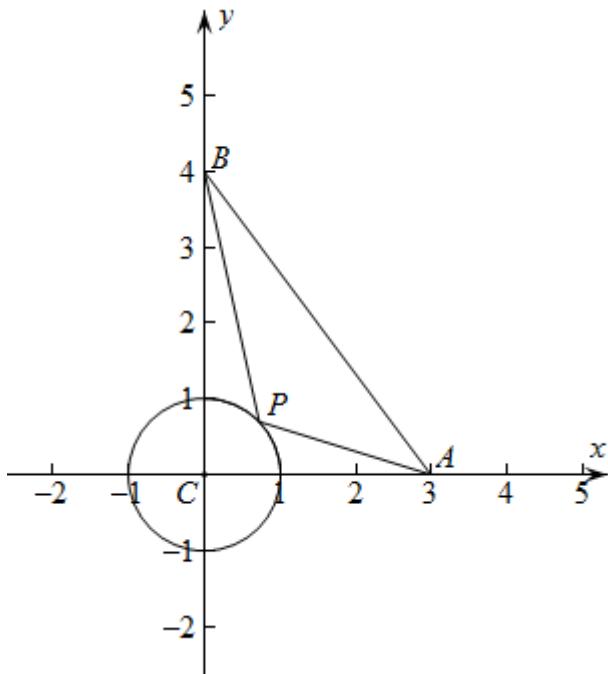
- A. $[-5, 3]$ B. $[-3, 5]$ C. $[-6, 4]$ D. $[-4, 6]$

【答案】D

【解析】

【分析】依题意建立平面直角坐标系，设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ，表示出 \overrightarrow{PA} , \overrightarrow{PB} ，根据数量积的坐标表示、辅助角公式及正弦函数的性质计算可得；

【详解】解：依题意如图建立平面直角坐标系，则 $C(0,0)$, $A(3,0)$, $B(0,4)$,



因为 $PC = 1$ ，所以 P 在以 C 为圆心，1 为半径的圆上运动，

设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} = (3 - \cos \theta, -\sin \theta), \quad \overrightarrow{PB} = (-\cos \theta, 4 - \sin \theta),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-\cos \theta) \times (3 - \cos \theta) + (4 - \sin \theta) \times (-\sin \theta)$$

$$= \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 3 \cos \theta - 4 \sin \theta$$

$$= 1 - 5 \sin(\theta + \varphi), \text{ 其中 } \sin \varphi = \frac{3}{5}, \quad \cos \varphi = \frac{4}{5},$$

因为 $-1 \leq \sin(\theta + \varphi) \leq 1$ ，所以 $-4 \leq 1 - 5 \sin(\theta + \varphi) \leq 6$ ，即 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [-4, 6]$ ；

故选：D

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

【解析】

【分析】根据偶次方根的被开方数非负、分母不为零得到方程组，解得即可；

【详解】解：因为 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ ，所以 $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \leq 1$ 且 $x \neq 0$ ，

故函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ ；

故答案为： $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

12. 已知双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -3

【解析】

【分析】首先可得 $m < 0$ ，即可得到双曲线的标准方程，从而得到 a 、 b ，再跟渐近线方程得到方程，解得即可；

【详解】解：对于双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ ，所以 $m < 0$ ，即双曲线的标准方程为

$$y^2 - \frac{x^2}{-m} = 1,$$

则 $a = 1$ ， $b = \sqrt{-m}$ ，又双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，

所以 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 $\frac{1}{\sqrt{-m}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得 $m = -3$ ；

故答案为：-3

13. 若函数 $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 ①. 1 ②. $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先代入零点，求得 A 的值，再将函数化简为 $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$ ，代入自变量

$$x = \frac{\pi}{12}，计算即可.$$

【详解】 $\because f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}A - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ， $\therefore A = 1$

$$\therefore f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

故答案为: 1, $-\sqrt{2}$

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为_____; a

的最大值为_____.

【答案】①. 0 (答案不唯一) ②. 1

【解析】

【分析】根据分段函数中的函数 $y = -ax + 1$ 的单调性进行分类讨论, 可知, $a = 0$ 符合条件, $a < 0$ 不符合条件, $a > 0$ 时函数 $y = -ax + 1$ 没有最小值, 故 $f(x)$ 的最小值只能取 $y = (x-2)^2$ 的最小值, 根据定义域讨论可知 $-a^2 + 1 \geq 0$ 或 $-a^2 + 1 \geq (a-2)^2$, 解得 $0 < a \leq 1$.

【详解】解: 若 $a = 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ (x-2)^2, & x \geq 0 \end{cases}$, $\therefore f(x)_{\min} = 0$;

若 $a < 0$ 时, 当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递增, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 故 $f(x)$ 没有最小值, 不符合题目要求;

若 $a > 0$ 时,

当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递减, $f(x) > f(a) = -a^2 + 1$,

当 $x > a$ 时, $f(x)_{\min} = \begin{cases} 0 & (0 < a < 2) \\ (a-2)^2 & (a \geq 2) \end{cases}$

$\therefore -a^2 + 1 \geq 0$ 或 $-a^2 + 1 \geq (a-2)^2$,

解得 $0 < a \leq 1$,

综上可得 $0 \leq a \leq 1$;

故答案为: 0 (答案不唯一), 1

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $a_n \cdot S_n = 9(n = 1, 2, \dots)$. 给出下列四个结论:

① $\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3; ② $\{a_n\}$ 为等比数列;

③ $\{a_n\}$ 为递减数列; ④ $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】①③④

【解析】

【分析】推导出 $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}}$, 求出 a_1 、 a_2 的值, 可判断①; 利用反证法可判断②④;

利用数列单调性的定义可判断③.

【详解】由题意可知, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0$,

当 $n=1$ 时, $a_1^2 = 9$, 可得 $a_1 = 3$;

当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_n = \frac{9}{a_n}$ 可得 $S_{n-1} = \frac{9}{a_{n-1}}$, 两式作差可得 $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}}$,

所以, $\frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9}{a_n} - a_n$, 则 $\frac{9}{a_2} - a_2 = 3$, 整理可得 $a_2^2 + 3a_2 - 9 = 0$,

因为 $a_2 > 0$, 解得 $a_2 = \frac{3\sqrt{5}-3}{2} < 3$, ①对;

假设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 设其公比为 q , 则 $a_2^2 = a_1 a_3$, 即 $\left(\frac{9}{S_2}\right)^2 = \frac{81}{S_1 S_3}$,

所以, $S_2^2 = S_1 S_3$, 可得 $a_1^2 (1+q)^2 = a_1^2 (1+q+q^2)$, 解得 $q=0$, 不合乎题意,

故数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列, ②错;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9(a_{n-1} - a_n)}{a_n a_{n-1}} > 0$, 可得 $a_n < a_{n-1}$, 所以, 数列 $\{a_n\}$ 为递减

数列, ③对;

假设对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \frac{1}{100}$, 则 $S_{100000} \geq 100000 \times \frac{1}{100} = 1000$,

所以, $a_{100000} = \frac{9}{S_{100000}} \leq \frac{9}{1000} < \frac{1}{100}$, 与假设矛盾, 假设不成立, ④对.

故答案为: ①③④.

【点睛】关键点点睛: 本题在推断②④的正误时, 利用正面推理较为复杂时, 可采用反证法来进行推导.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$.

(1) 求 $\angle C$;

(2) 若 $b=6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) $6+6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 利用二倍角的正弦公式化简可得 $\cos C$ 的值, 结合角 C 的取值范围可求得角 C 的值;

(2) 利用三角形的面积公式可求得 a 的值, 由余弦定理可求得 c 的值, 即可求得 $\triangle ABC$ 的周长.

【小问 1 详解】

解: 因为 $C \in (0, \pi)$, 则 $\sin C > 0$, 由已知可得 $\sqrt{3} \sin C = 2 \sin C \cos C$,

可得 $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因此, $C = \frac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

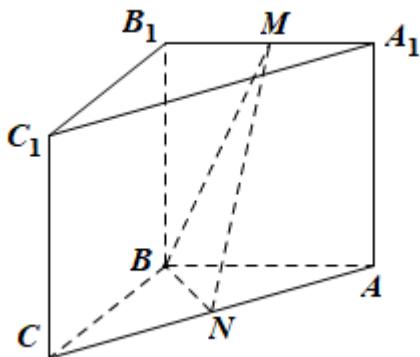
解: 由三角形的面积公式可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{3}{2}a = 6\sqrt{3}$, 解得 $a = 4\sqrt{3}$.

由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 48 + 36 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$,

$$\therefore c = 2\sqrt{3},$$

所以, $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 6\sqrt{3} + 6$.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BCC_1B_1 为正方形, 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $AB = BC = 2$, M, N 分别为 A_1B_1, AC 的中点.



(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件①: $AB \perp MN$;

条件②: $BM = MN$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 取 AB 的中点为 K , 连接 MK, NK , 可证平面 $MKN \parallel$ 平面 CBB_1C_1 , 从而可证 $MN \parallel$ 平面 CBB_1C_1 .

(2) 选①②均可证明 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 从而可建立如图所示的空间直角坐标系, 利用空间向量可求线面角的正弦值.

【小问 1 详解】

取 AB 的中点为 K , 连接 MK, NK ,

由三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 可得四边形 ABB_1A_1 为平行四边形,

而 $B_1M = MA_1, BK = KA$, 则 $MK \parallel BB_1$,

而 $MK \not\subset$ 平面 $CBB_1C_1, BB_1 \subset$ 平面 CBB_1C_1 , 故 $MK \parallel$ 平面 CBB_1C_1 ,

而 $CN = NA, BK = KA$, 则 $NK \parallel BC$, 同理可得 $NK \parallel$ 平面 CBB_1C_1 ,

而 $NK \cap MK = K, NK, MK \subset$ 平面 MKN ,

故平面 $MKN \parallel$ 平面 CBB_1C_1 , 而 $MN \subset$ 平面 MKN , 故 $MN \parallel$ 平面 CBB_1C_1 ,

【小问 2 详解】

因为侧面 CBB_1C_1 为正方形, 故 $CB \perp BB_1$,

而 $CB \subset$ 平面 CBB_1C_1 , 平面 $CBB_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

平面 $CBB_1C_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = BB_1$, 故 $CB \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

因为 $NK \parallel BC$, 故 $NK \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

因为 $AB \nmid$ 平面 ABB_1A_1 , 故 $NK \perp AB$,

若选①, 则 $AB \perp MN$, 而 $NK \perp AB, NK \cap MN = N$,

故 $AB \perp$ 平面 MNK , 而 $MK \subset$ 平面 MNK , 故 $AB \perp MK$,

所以 $AB \perp BB_1$, 而 $CB \perp BB_1, CB \cap AB = B$, 故 $BB_1 \perp$ 平面 ABC ,

故可建立如所示的空间直角坐标系, 则 $B(0,0,0), A(0,2,0), N(1,1,0), M(0,1,2)$,

故 $\overrightarrow{BA} = (0,2,0), \overrightarrow{BN} = (1,1,0), \overrightarrow{BM} = (0,1,2)$,

设平面 BNM 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}, \text{ 从而 } \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } z = -1, \text{ 则 } \vec{n} = (-2, 2, -1),$$

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AB} \rangle| = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}.$$

若选②, 因为 $NK // BC$, 故 $NK \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 而 $KM \subset$ 平面 MKN ,

故 $NK \perp KM$, 而 $B_1M = BK = 1, NK = 1$, 故 $B_1M = NK$,

而 $B_1B = MK = 2$, $MB = MN$, 故 $\triangle BB_1M \cong \triangle MKN$,

所以 $\angle BB_1M = \angle MKN = 90^\circ$, 故 $A_1B_1 \perp BB_1$,

而 $CB \perp BB_1$, $CB \cap AB = B$, 故 $BB_1 \perp$ 平面 ABC ,

故可建立如所示的空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0), A(0, 2, 0), N(1, 1, 0), M(0, 1, 2)$,

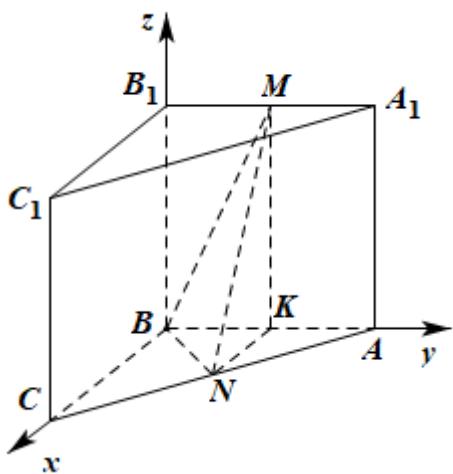
$$\text{故 } \overrightarrow{BA} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BN} = (1, 1, 0), \overrightarrow{BM} = (0, 1, 2),$$

设平面 BNM 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}, \text{ 从而 } \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } z = -1, \text{ 则 } \vec{n} = (-2, 2, -1),$$

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AB} \rangle| = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}.$$



18. 在校运动会上, 只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛, 比赛成绩达到 9.50m 以上 (含 9.50m) 的同学将获得优秀奖. 为预测获得优秀奖的人数及冠军得主, 收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩, 并整理得到如下数据 (单位: m):

甲: 9.80, 9.70, 9.55, 9.54, 9.48, 9.42, 9.40, 9.35, 9.30, 9.25;

乙: 9.78, 9.56, 9.51, 9.36, 9.32, 9.23;

丙: 9.85, 9.65, 9.20, 9.16.

假设用频率估计概率, 且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

- (1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率;
- (2) 设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数, 估计 X 的数学期望 $E(X)$;
- (3) 在校运动会铅球比赛中, 甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大? (结论不要求证明)

【答案】(1) 0.4 (2) $\frac{7}{5}$

(3) 丙

【解析】

【分析】(1) 由频率估计概率即可

(2) 求解得 X 的分布列, 即可计算出 X 的数学期望.

(3) 计算出各自获得最高成绩的概率, 再根据其各自的最高成绩可判断丙夺冠的概率估计值最大.

【小问 1 详解】

由频率估计概率可得

甲获得优秀的概率为 0.4, 乙获得优秀的概率为 0.5, 丙获得优秀的概率为 0.5,

故答案为 0.4

【小问 2 详解】

设甲获得优秀为事件 A_1 , 乙获得优秀为事件 A_2 , 丙获得优秀为事件 A_3

$$P(X=0)=P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3})=0.6\times 0.5\times 0.5=\frac{3}{20},$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) \\ &= 0.4\times 0.5\times 0.5+0.6\times 0.5\times 0.5+0.6\times 0.5\times 0.5=\frac{8}{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3) \\ &= 0.4\times 0.5\times 0.5+0.4\times 0.5\times 0.5+0.6\times 0.5\times 0.5=\frac{7}{20}, \end{aligned}$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=0.4\times 0.5\times 0.5=\frac{2}{20}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{8}{20} + 2 \times \frac{7}{20} + 3 \times \frac{2}{20} = \frac{7}{5}$$

【小问 3 详解】

丙夺冠概率估计值最大.

因为铅球比赛无论比赛几次就取最高成绩.比赛一次, 丙获得 9.85 的概率为 $\frac{1}{4}$, 甲获得

9.80 的概率为 $\frac{1}{10}$, 乙获得 9.78 的概率为 $\frac{1}{6}$.并且丙的最高成绩是所有成绩中最高的, 比赛次数越多, 对丙越有利.

19. 已知椭圆: $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 分别与 x 轴交于点 M, N , 当 $|MN| = 2$ 时, 求 k 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $k = -4$

【解析】

【分析】(1) 依题意可得 $\begin{cases} b=1 \\ 2c=2\sqrt{3} \\ c^2=a^2-b^2 \end{cases}$, 即可求出 a , 从而求出椭圆方程;

(2) 首先表示出直线方程, 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 联立直线与椭圆方程, 消元列出韦达定理, 由直线 AB 、 AC 的方程, 表示出 x_M 、 x_N , 根据 $|MN|=|x_N-x_M|$ 得到方程, 解得即可;

【小问 1 详解】

解: 依题意可得 $b=1$, $2c=2\sqrt{3}$, 又 $c^2=a^2-b^2$,

所以 $a=2$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

【小问 2 详解】

解：依题意过点 $P(-2, 1)$ 的直线为 $y - 1 = k(x + 2)$ ，设 $B(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$ ，不妨令

$$-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2,$$

$$\text{由} \begin{cases} y - 1 = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 整理得 } (1 + 4k^2)x^2 + (16k^2 + 8k)x + 16k^2 + 16k = 0,$$

$$\text{所以 } \Delta = (16k^2 + 8k)^2 - 4(1 + 4k^2)(16k^2 + 16k) > 0, \text{ 解得 } k < 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{16k^2 + 8k}{1 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{16k^2 + 16k}{1 + 4k^2},$$

$$\text{直线 } AB \text{ 的方程为 } y - 1 = \frac{y_1 - 1}{x_1}x, \text{ 令 } y = 0, \text{ 解得 } x_M = \frac{x_1}{1 - y_1},$$

$$\text{直线 } AC \text{ 的方程为 } y - 1 = \frac{y_2 - 1}{x_2}x, \text{ 令 } y = 0, \text{ 解得 } x_N = \frac{x_2}{1 - y_2},$$

$$\text{所以 } |MN| = |x_N - x_M| = \left| \frac{x_2}{1 - y_2} - \frac{x_1}{1 - y_1} \right|$$

$$= \left| \frac{x_2}{1 - [k(x_2 + 2) + 1]} - \frac{x_1}{1 - [k(x_1 + 2) + 1]} \right|$$

$$= \left| \frac{x_2}{-k(x_2 + 2)} + \frac{x_1}{k(x_1 + 2)} \right|$$

$$= \left| \frac{(x_2 + 2)x_1 - x_2(x_1 + 2)}{k(x_2 + 2)(x_1 + 2)} \right|$$

$$= \frac{2|x_1 - x_2|}{|k|(x_2 + 2)(x_1 + 2)} = 2,$$

$$\text{所以 } |x_1 - x_2| = |k|(x_2 + 2)(x_1 + 2),$$

$$\text{即 } \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = |k|[x_2 x_1 + 2(x_2 + x_1) + 4]$$

$$\text{即 } \sqrt{\left(\frac{-16k^2 - 8k}{1 + 4k^2}\right)^2 - 4 \times \frac{16k^2 + 16k}{1 + 4k^2}} = |k| \left[\frac{16k^2 + 16k}{1 + 4k^2} + 2 \left(-\frac{16k^2 + 8k}{1 + 4k^2} \right) + 4 \right]$$

即

$$\frac{8}{1 + 4k^2} \sqrt{(2k^2 + k)^2 - (1 + 4k^2)(k^2 + k)} = \frac{|k|}{1 + 4k^2} [16k^2 + 16k - 2(16k^2 + 8k) + 4(1 + 4k^2)]$$

$$\text{整理得 } 8\sqrt{-k} = 4|k|, \text{ 解得 } k = -4$$

20. 已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 设 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;
- (3) 证明: 对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.

【答案】(1) $y = x$

(2) $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 证明见解析

【解析】

- 【分析】(1) 先求出切点坐标, 在由导数求得切线斜率, 即得切线方程;
(2) 在求一次导数无法判断的情况下, 构造新的函数, 再求一次导数, 问题即得解;
(3) 令 $m(x) = f(x+t) - f(x)$, ($x, t > 0$), 即证 $m(x) > m(0)$, 由第二问结论可知 $m(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 即得证.

【小问 1 详解】

解: 因为 $f(x) = e^x \ln(1+x)$, 所以 $f(0) = 0$,

即切点坐标为 $(0, 0)$,

$$\text{又 } f'(x) = e^x \left(\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right),$$

$$\therefore \text{切线斜率 } k = f'(0) = 1$$

$$\therefore \text{切线方程为: } y = x$$

【小问 2 详解】

解: 因为 $g(x) = f'(x) = e^x \left(\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right)$,

$$\text{所以 } g'(x) = e^x \left(\ln(1+x) + \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right),$$

$$\text{令 } h(x) = \ln(1+x) + \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2},$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{x^2+1}{(1+x)^3} > 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore h(x) \geq h(0) = 1 > 0$$

$\therefore g'(x) > 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

【小问 3 详解】

解：原不等式等价于 $f(s+t) - f(s) > f(t) - f(0)$ ，

令 $m(x) = f(x+t) - f(x)$, ($x, t > 0$) ,

即证 $m(x) > m(0)$,

$$\therefore m(x) = f(x+t) - f(x) = e^{x+t} \ln(1+x+t) - e^x \ln(1+x) ,$$

$$m'(x) = e^{x+t} \ln(1+x+t) + \frac{e^{x+t}}{1+x+t} - e^x \ln(1+x) - \frac{e^x}{1+x} = g(x+t) - g(x) ,$$

由 (2) 知 $g(x) = f'(x) = e^x (\ln(1+x) + \frac{1}{1+x})$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(x+t) > g(x) ,$$

$$\therefore m'(x) > 0$$

$\therefore m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $x, t > 0$,

$\therefore m(x) > m(0)$, 所以命题得证.

21. 已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为有穷整数数列. 给定正整数 m , 若对任意的 $n \in \{1, 2, \dots, m\}$,

在 Q 中存在 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j}$ ($j \geq 0$), 使得 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$, 则称 Q 为 m -连续可表数列.

(1) 判断 $Q: 2, 1, 4$ 是否为 5 -连续可表数列? 是否为 6 -连续可表数列? 说明理由;

(2) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 8 -连续可表数列, 求证: k 的最小值为 4 ;

(3) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 20 -连续可表数列, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$, 求证: $k \geq 7$.

【答案】(1) 是 5 -连续可表数列; 不是 6 -连续可表数列.

(2) 证明见解析. (3) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 直接利用定义验证即可;

(2) 先考虑 $k \leq 3$ 不符合, 再列举一个 $k = 4$ 合题即可;

(3) $k \leq 5$ 时, 根据和的个数易得显然不行, 再讨论 $k = 6$ 时, 由 $a_1 + a_2 + \dots + a_6 < 20$ 可知里面必然有负数, 再确定负数只能是 -1 , 然后分类讨论验证不行即可.

【小问 1 详解】

$a_2 = 1$, $a_1 = 2$, $a_1 + a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_2 + a_3 = 5$, 所以 Q 是 5 -连续可表数列; 易知, 不存在 i, j 使得 $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j} = 6$, 所以 Q 不是 6 -连续可表数列.

【小问 2 详解】

若 $k \leq 3$, 设为 $Q: a, b, c$, 则至多 $a+b, b+c, a+b+c, a, b, c$, 6 个数字, 没有 8 个, 矛盾;

当 $k=4$ 时, 数列 $Q: 1, 4, 1, 2$, 满足 $a_1=1$, $a_4=2$, $a_3+a_4=3$, $a_2=4$, $a_1+a_2=5$,
 $a_1+a_2+a_3=6$, $a_2+a_3+a_4=7$, $a_1+a_2+a_3+a_4=8$, $\therefore k_{\min}=4$.

【小问 3 详解】

$Q: a_1, a_2, \dots, a_k$, 若 $i=j$ 最多有 k 种, 若 $i \neq j$, 最多有 C_k^2 种, 所以最多有

$$k + C_k^2 = \frac{k(k+1)}{2} \text{ 种},$$

若 $k \leq 5$, 则 a_1, a_2, \dots, a_k 至多可表 $\frac{5(5+1)}{2}=15$ 个数, 矛盾,

从而若 $k < 7$, 则 $k=6$, a, b, c, d, e, f 至多可表 $\frac{6(6+1)}{2}=21$ 个数,

而 $a+b+c+d+e+f < 20$, 所以其中有负的, 从而 a, b, c, d, e, f 可表 1~20 及那个负数 (恰 21 个), 这表明 $a \sim f$ 中仅一个负的, 没有 0, 且这个负的在 $a \sim f$ 中绝对值最小, 同时 $a \sim f$ 中没有两数相同, 设那个负数为 $-m (m \geq 1)$,

则所有数之和 $\geq m+1+m+2+\dots+m+5-m=4m+15$, $4m+15 \leq 19 \Rightarrow m=1$,

$\therefore \{a, b, c, d, e, f\} = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 再考虑排序, 排序中不能有和相同, 否则不足 20 个,

$\because 1=-1+2$ (仅一种方式),

$\therefore -1$ 与 2 相邻,

若 -1 不在两端, 则 "x, -1, 2, __, __, __" 形式,

若 $x=6$, 则 $5=6+(-1)$ (有 2 种结果相同, 方式矛盾),

$\therefore x \neq 6$, 同理 $x \neq 5, 4, 3$, 故 -1 在一端, 不妨为 "-1, 2, A, B, C, D" 形式,

若 $A=3$, 则 $5=2+3$ (有 2 种结果相同, 矛盾), $A=4$ 同理不行,

$A=5$, 则 $6=-1+2+5$ (有 2 种结果相同, 矛盾), 从而 $A=6$,

由于 $7=-1+2+6$, 由表法唯一知 3, 4 不相邻,

故只能 $-1, 2, 6, 3, 5, 4$, ① 或 $-1, 2, 6, 4, 5, 3$, ②

这 2 种情形,

对①: $9=6+3=5+4$, 矛盾,

对②: $8=2+6=5+3$, 也矛盾, 综上 $k \neq 6$

$\therefore k \geq 7$.

【点睛】 关键点睛, 先理解题意, 是否为 m 可表数列核心就是是否存在连续的几项 (可以是一项) 之和能表示从 1 到 m 中间的任意一个值. 本题第二问 $k \leq 3$ 时, 通过和值可能个数否定 $k \leq 3$; 第三问先通过和值的可能个数否定 $k \leq 5$, 再验证 $k=6$ 时, 数列中的几项如果符合必然是 $\{-1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个排序, 可验证这组数不合题.

