

# 2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

## 数学（文科）

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 已知集合  $A = \{1, 3, m\}$ ， $B = \{3, 4\}$ ， $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$  则  $m = \underline{2}$ 。

解析：考查并集的概念，显然  $m=2$

2. 不等式  $\frac{2-x}{x+4} > 0$  的解集是  $\underline{\{x \mid -4 < x < 2\}}$ 。

解析：考查分式不等式的解法  $\frac{2-x}{x+4} > 0$  等价于  $(x-2)(x+4) < 0$ , 所以  $-4 < x < 2$

3. 行列式  $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$  的值是  $\underline{0.5}$ 。

解析：考查行列式运算法则  $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix} = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

4. 若复数  $z = 1 - 2i$  ( $i$  为虚数单位)，则  $z \cdot \bar{z} + z = \underline{6 - 2i}$ 。

解析：考查复数基本运算  $z \cdot \bar{z} + z = (1 - 2i)(1 + 2i) + 1 - 2i = 6 - 2i$

5. 将一个总数为  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三层，其个体数之比为5:3:2。若用分层抽样方法抽取容量为100的样本，则应从  $C$  中抽取  $\underline{20}$  个个体。

解析：考查分层抽样应从  $C$  中抽取  $100 \times \frac{2}{10} = 20$

6. 已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面是边长为6的正方形，侧棱  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ，且  $PA = 8$ ，则该四棱锥的体积是  $\underline{96}$ 。

解析：考查棱锥体积公式  $V = \frac{1}{3} \times 36 \times 8 = 96$

7. 圆  $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  的圆心到直线  $3x + 4y + 4 = 0$  的距离  $d = \underline{3}$ 。

解析：考查点到直线距离公式

圆心  $(1, 2)$  到直线  $3x + 4y + 4 = 0$  距离为  $\frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 + 4|}{5} = 3$

8. 动点  $P$  到点  $F(2,0)$  的距离与它到直线  $x+2=0$  的距离相等, 则  $P$  的轨迹方程为  $y^2=8x$ 。

解析: 考查抛物线定义及标准方程

定义知  $P$  的轨迹是以  $F(2,0)$  为焦点的抛物线,  $p=2$  所以其方程为  $y^2=8x$

9. 函数  $f(x) = \log_3(x+3)$  的反函数的图像与  $y$  轴的交点坐标是  $(0,-2)$ 。

解析: 考查反函数相关概念、性质

法一: 函数  $f(x) = \log_3(x+3)$  的反函数为  $y = 3^x - 3$ , 另  $x=0$ , 有  $y=-2$

法二: 函数  $f(x) = \log_3(x+3)$  图像与  $x$  轴交点为  $(-3,0)$ , 利用对称性可知, 函数  $f(x) = \log_3(x+3)$  的反函数的图像与  $y$

轴的交点为  $(0,-2)$

10.

从一副混合后的扑克牌 (52 张) 中随机抽取 2 张, 则“抽出的 2 张均为红桃”的概率为  $\frac{3}{51}$  (结果用最简分数表示)。

解析: 考查等可能事件概率

“抽出的 2 张均为红桃”的概率为  $\frac{C_{13}^2}{C_{52}^2} = \frac{3}{51}$

11.

2010 年上海世博会园区每天 9:00 开园, 20:00 停止入园。在右边的框图中,  $S$  表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数,  $a$  表示整点报道前 1 个小时内入园人数, 则空白的执行框内应填入  $S \leftarrow S+a$ 。

解析: 考查算法

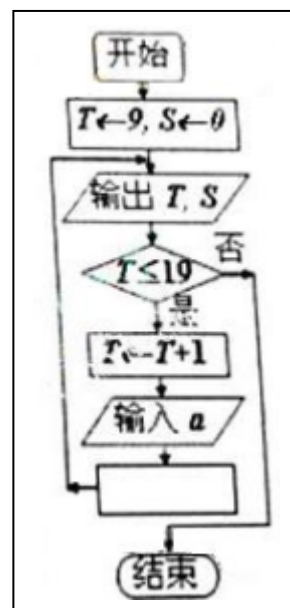
12. 在  $n$  行  $m$  列矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$  中,

记位于第  $i$  行第  $j$  列的数为  $a_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 。当  $n=9$  时,  $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{99} = 45$ 。

解析:  $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{99} = 1+3+5+7+9+2+4+6+8=45$

13. 在平面直角坐标系中, 双曲线  $\Gamma$  的中心在原点, 它的一个焦点坐标为  $(\sqrt{5}, 0)$ ,

$\vec{e}_1 = (2, 1)$ 、 $\vec{e}_2 = (2, -1)$  分别是两条渐近线的方向向量。任取双曲线  $\Gamma$  上的点  $P$ , 若



$\overrightarrow{OP} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$  ( $a, b \in R$ ), 则  $a, b$  满足的一个等式是  $4ab=1$ \_\_\_\_\_。

解析: 因为  $\vec{e}_1 = (2, 1)$ 、 $\vec{e}_2 = (2, -1)$  是渐近线方向向量, 所以双曲线渐近线方程为

$$y = \pm \frac{1}{2}x, \text{ 又 } c = \sqrt{5}, \therefore a = 2, b = 1$$

$$\text{双曲线方程为 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1, \overrightarrow{OP} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = (2a + 2b, a - b),$$

$$\therefore \frac{(2a + 2b)^2}{4} - (a - b)^2 = 1, \text{ 化简得 } 4ab = 1$$

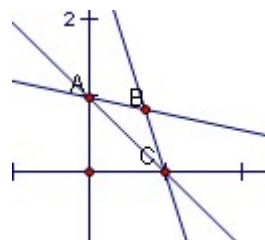
14. 将直线  $l_1: x + y - 1 = 0$ 、 $l_2: nx + y - n = 0$ 、 $l_3: x + ny - n = 0$  ( $n \in N^*$ ,  $n \geq 2$ ) 围

成的三角形面积记为  $S_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$ \_\_\_\_\_。

解析:  $B(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1})$  所以  $BO \perp AC$ ,

$$S_n = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (\frac{n}{n+1} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{n-1}{2(n+1)}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

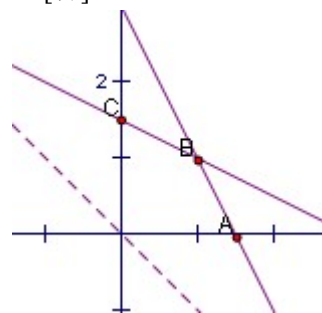


二. 选择题 (本大题满分20分) 本大题共有4题, 每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得5分, 否则一律得零分。

15. 满足线性约束条件  $\begin{cases} 2x + y \leq 3, \\ x + 2y \leq 3, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$  的目标函数  $z = x + y$  的最大值是 [答] ( )

- (A) 1. (B)  $\frac{3}{2}$ . (C) 2. (D) 3.

解析: 当直线  $z = x + y$  过点  $B(1, 1)$  时,  $z$  最大值为2



16. “ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  ( $k \in Z$ )”是“ $\tan x = 1$ ”成立的 [答] ( )

- (A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.  
(C) 充分条件. (D) 既不充分也不必要条件.

解析:  $\tan(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ , 所以充分; 但反之不成立, 如  $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$

17. 若  $x_0$  是方程式  $\lg x + x = 2$  的解, 则  $x_0$  属于区间 [答] ( )

- (A) (0, 1). (B) (1, 1.25). (C) (1.25, 1.75) (D) (1.75, 2)

解析：构造函数 $f(x) = \lg x + x - 2$ ，由 $f(1.75) = f(\frac{7}{4}) = \lg \frac{7}{4} - \frac{1}{4} < 0$

$f(2) = \lg 2 > 0$  知  $x_0$  属于区间  $(1.75, 2)$

18. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 11 : 13$ ，则 $\triangle ABC$

(A) 一定是锐角三角形.

(B) 一定是直角三角形.

(C) 一定是钝角三角形.

(D) 可能是锐角三角形，也可能是钝角三角形.

解析：由 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 11 : 13$  及正弦定理得 $a : b : c = 5 : 11 : 13$

由余弦定理得 $\cos C = \frac{5^2 + 11^2 - 13^2}{2 \times 5 \times 11} < 0$ ，所以角 $C$ 为钝角

三、解答题（本大题满分74分）本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19.（本题满分12分）

已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，化简：

$$\lg(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) + \lg[\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{2})] - \lg(1 + \sin 2x).$$

解析：原式 $= \lg(\sin x + \cos x) + \lg(\cos x + \sin x) - \lg(\sin x + \cos x)^2 = 0$ .

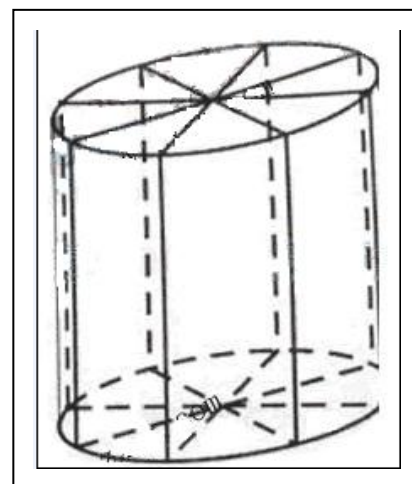
20.（本大题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分.

如图所示，为了制作一个圆柱形灯笼，先要制作4个全等的矩形骨架，总计耗用9.6米铁丝，再用 $S$ 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面（不安装上底面）.

(1) 当圆柱底面半径 $r$ 取何值时， $S$ 取得最大值？并求出该最大值（结果精确到0.01平方米）；

(2) 若要制作一个如图放置的，底面半径为0.3米的灯笼，请作出

用于灯笼的三视图（作图时，不需考虑骨架等因素）.



解析：(1)

设圆柱形灯笼的母线长为 $l$ ，则 $l = 1.2 - 2r$  ( $0 < r < 0.6$ )， $S = -3\pi(r - 0.4)^2 + 0.48\pi$ ,

所以当 $r = 0.4$ 时， $S$ 取得最大值约为1.51平方米；

(2) 当 $r = 0.3$ 时， $l = 0.6$ ，作三视图略.

21.（本题满分14分）本题共有2个小题，第一个小题满分6分，第2个小题满分8分。

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，且 $S_n = n - 5a_n - 85$ ， $n \in \mathbb{N}^*$

(1) 证明： $\{a_n - 1\}$ 是等比数列；

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式，并求出使得 $S_{n+1} > S_n$ 成立的最小正整数 $n$ .

解析: (1) 当 $n=1$ 时,  $a_1=-14$ ; 当 $n\geq 2$ 时,  $a_n=S_n-S_{n-1}=-5a_n+5a_{n-1}+1$ , 所以  $a_n-1=\frac{5}{6}(a_{n-1}-1)$ ,

又 $a_1-1=-15\neq 0$ , 所以数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列;

(2)

由(1)知:  $a_n-1=-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ , 得  $a_n=1-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ , 从而  $S_n=75\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+n-90$  ( $n\in\mathbf{N}^*$ );

由 $S_{n+1}>S_n$ , 得  $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}<\frac{2}{5}$ ,  $n>\log_{\frac{5}{6}}\frac{2}{25}+1\approx 14.9$ , 最小正整数 $n=15$ .

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分8分.

若实数 $x$ 、 $y$ 、 $m$ 满足 $|x-m|<|y-m|$ , 则称 $x$ 比 $y$ 接近 $m$ .

(1) 若 $x^2-1$ 比3接近0, 求 $x$ 的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数 $a$ 、 $b$ , 证明:  $a^2b+ab^2$ 比 $a^3+b^3$ 接近 $2ab\sqrt{ab}$ ;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D=\{x|x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}, x\in\mathbf{R}\}$ . 任取 $x\in D$ ,  $f(x)$ 等于

$1+\sin x$ 和 $1-\sin x$ 中接近0的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并指出它的奇偶性、最小正周期、最小值和单调性(结论不要求证明).

解析: (1)  $x\in(-2,2)$ ;

(2) 对任意两个不相等的正数 $a$ 、 $b$ , 有  $a^2b+ab^2>2ab\sqrt{ab}$ ,  $a^3+b^3>2ab\sqrt{ab}$ ,

因为 $|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|-|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|=-(a+b)(a-b)^2<0$ ,

所以 $|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|<|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|$ , 即 $a^2b+ab^2$ 比 $a^3+b^3$ 接近 $2ab\sqrt{ab}$ ;

(3)  $f(x)=\begin{cases} 1+\sin x, & x\in(2k\pi-\pi, 2k\pi) \\ 1-\sin x, & x\in(2k\pi, 2k\pi+\pi) \end{cases}=1-|\sin x|, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z},$

$f(x)$ 是偶函数,  $f(x)$ 是周期函数, 最小正周期 $T=\pi$ , 函数 $f(x)$ 的最小值为0,

函数 $f(x)$ 在区间 $[k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi)$ 单调递增, 在区间 $(k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}]$ 单调递减,  $k\in\mathbf{Z}$ .

23 (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

已知椭圆 $\Gamma$ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ ,  $A(0,b)$ 、 $B(0,-b)$ 和 $Q(a,0)$ 为 $\Gamma$ 的三个顶

点.

(1) 若点  $M$  满足  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB})$ , 求点  $M$  的坐标;

(2) 设直线  $l_1: y = k_1x + p$  交椭圆  $\Gamma$  于  $C$ 、 $D$  两点, 交直线  $l_2: y = k_2x$  于点  $E$ . 若

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ 证明: } E \text{ 为 } CD \text{ 的中点};$$

(3) 设点  $P$  在椭圆  $\Gamma$  内且不在  $x$  轴上, 如何构造过  $PQ$  中点  $F$  的直线  $l$ , 使得  $l$  与椭圆  $\Gamma$  的两个交点  $P_1$ 、 $P_2$  满足  $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$   $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$ ? 令  $a = 10$ ,  $b = 5$ , 点  $P$  的坐标是  $(-8, -1)$ , 若椭圆  $\Gamma$  上的点  $P_1$ 、 $P_2$  满足  $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$ , 求点  $P_1$ 、 $P_2$  的坐标.

解析: (1)  $M(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ;

$$(2) \text{ 由方程组 } \begin{cases} y = k_1x + p \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 得方程 } (a^2k_1^2 + b^2)x^2 + 2a^2k_1px + a^2(p^2 - b^2) = 0,$$

因为直线  $l_1: y = k_1x + p$  交椭圆  $\Gamma$  于  $C$ 、 $D$  两点,

所以  $\Delta > 0$ , 即  $a^2k_1^2 + b^2 - p^2 > 0$ ,

设  $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$ ,  $CD$  中点坐标为  $(x_0, y_0)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2k_1p}{a^2k_1^2 + b^2} \\ y_0 = k_1x_0 + p = \frac{b^2p}{a^2k_1^2 + b^2} \end{cases},$$

$$\text{由方程组 } \begin{cases} y = k_1x + p \\ y = k_2x \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 得方程 } (k_2 - k_1)x = p,$$

$$\text{又因为 } k_2 = -\frac{b^2}{a^2k_1}, \text{ 所以 } \begin{cases} x = \frac{p}{k_2 - k_1} = -\frac{a^2k_1p}{a^2k_1^2 + b^2} = x_0 \\ y = k_2x = \frac{b^2p}{a^2k_1^2 + b^2} = y_0 \end{cases},$$

故  $E$  为  $CD$  的中点;

(3) 因为点  $P$  在椭圆  $\Gamma$  内且不在  $x$  轴上, 所以点  $F$  在椭圆  $\Gamma$  内, 可以求得直线  $OF$  的斜率  $k_2$ , 由  $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$  知  $F$  为  $P_1P_2$  的中点, 根据 (2) 可得直线  $l$  的斜率  $k_1 = -\frac{b^2}{a^2k_2}$ , 从而得直线  $l$  的方程.

$$F(1, -\frac{1}{2}), \text{ 直线 } OF \text{ 的斜率 } k_2 = -\frac{1}{2}, \text{ 直线 } l \text{ 的斜率 } k_1 = -\frac{b^2}{a^2 k_2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \end{cases}, \text{ 消 } y: x^2 - 2x - 48 = 0, \text{ 解得 } P_1(-6, -4), P_2(8, 3).$$