

2015 年浙江省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (5 分) (2015•浙江) 已知集合 $P=\{x|x^2-2x\geq 3\}$, $Q=\{x|2<x<4\}$, 则 $P\cap Q=$ ()

- A $[3, 4)$ B $(2, 3]$ C $(-1, 2)$ D $(-1, 3]$

考点：交集及其运算.

专题：集合.

分析：求出集合 P，然后求解交集即可.

解答：解：集合 $P=\{x|x^2-2x\geq 3\}=\{x|x\leq -1 \text{ 或 } x\geq 3\}$,

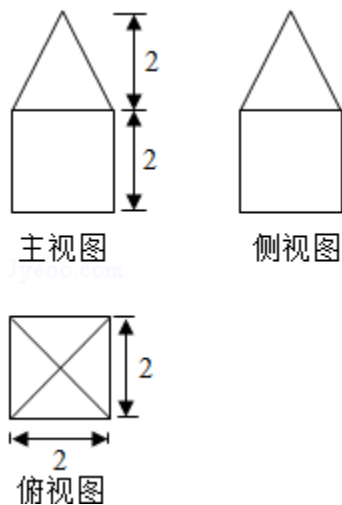
$Q=\{x|2<x<4\}$,

则 $P\cap Q=\{x|3\leq x<4\}=[3, 4)$.

故选：A.

点评：本题考查二次不等式的解法，集合的交集的求法，考查计算能力.

2. (5 分) (2015•浙江) 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是 ()



- A 8cm^3 B 12cm^3 C $\frac{32}{3}\text{cm}^3$ D $\frac{40}{3}\text{cm}^3$

考点：由三视图求面积、体积.

专题：空间位置关系与距离.

分析：判断几何体的形状，利用三视图的数据，求几何体的体积即可.

解答：解：由三视图可知几何体是下部为棱长为 2 的正方体，上部是底面为边长 2 的正方形高为 2 的正四棱锥，

所求几何体的体积为： $2^3+\frac{1}{3}\times 2\times 2\times 2=\frac{32}{3}\text{cm}^3$.

故选：C.

点评: 本题考查三视图与直观图的关系的判断, 几何体的体积的求法, 考查计算能力.

3. (5 分) (2015•浙江) 设 a, b 是实数, 则“ $a+b>0$ ”是“ $ab>0$ ”的 ()

- A 充分不必要条件
B 必要不充分条件
C 充分必要条件
D 既不充分也不必要条件

考点: 必要条件、充分条件与充要条件的判断.

专题: 简易逻辑.

分析: 利用特例集合充要条件的判断方法, 判断正确选项即可.

解答: 解: a, b 是实数, 如果 $a=-1, b=2$ 则“ $a+b>0$ ”, 则“ $ab>0$ ”不成立.
如果 $a=-1, b=-2$, $ab>0$, 但是 $a+b>0$ 不成立,
所以设 a, b 是实数, 则“ $a+b>0$ ”是“ $ab>0$ ”的既不充分也不必要条件.
故选: D.

点评: 本题考查充要条件的判断与应用, 基本知识的考查.

4. (5 分) (2015•浙江) 设 α, β 是两个不同的平面, l, m 是两条不同的直线, 且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$, ()

- A 若 $l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
B 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp m$
C 若 $l \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
D 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $l \parallel m$

考点: 空间中直线与平面之间的位置关系.

专题: 综合题; 空间位置关系与距离.

分析: A 根据线面垂直的判定定理得出 A 正确;

B 根据面面垂直的性质判断 B 错误;

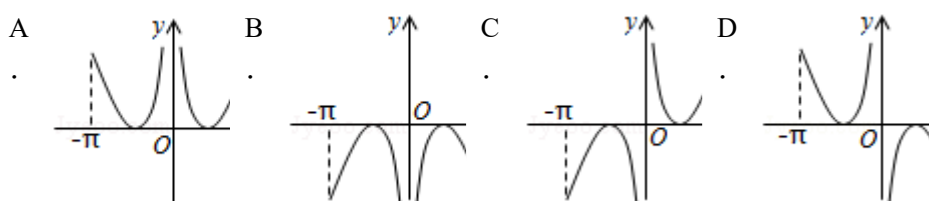
C 根据面面平行的判断定理得出 C 错误;

D 根据面面平行的性质判断 D 错误.

解答: 解: 对于 A, $\because l \perp \beta$, 且 $l \subset \alpha$, 根据线面垂直的判定定理, 得 $\alpha \perp \beta$, \therefore A 正确;
对于 B, 当 $\alpha \perp \beta$, $l \subset \alpha, m \subset \beta$ 时, l 与 m 可能平行, 也可能垂直, \therefore B 错误;
对于 C, 当 $l \parallel \beta$, 且 $l \subset \alpha$ 时, α 与 β 可能平行, 也可能相交, \therefore C 错误;
对于 D, 当 $\alpha \parallel \beta$, 且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$ 时, l 与 m 可能平行, 也可能异面, \therefore D 错误.
故选: A.

点评: 本题考查了空间中的平行与垂直关系的应用问题, 也考查了数学符号语言的应用问题, 是基础题目.

5. (5 分) (2015•浙江) 函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图象可能为 ()



考点：函数的图象.

专题：函数的性质及应用.

分析：由条件可得函数 $f(x)$ 为奇函数，故它的图象关于原点对称；再根据在 $(0, 1)$ 上， $f(x) < 0$ ，结合所给的选项，得出结论.

解答：解：对于函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$)，由于它的定义域关于原点对称，

且满足 $f(-x) = (\frac{1}{x} - x) \cos x = -f(x)$ ，故函数 $f(x)$ 为奇函数，故它的图象关于原点对称.

故排除 A、B.

再根据在 $(0, 1)$ 上， $\frac{1}{x} > x$ ， $\cos x > 0$ ， $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \cos x < 0$ ，故排除 C，

故选：D.

点评：本题主要考查函数的奇偶性的判断，奇函数的图象特征，函数的定义域和值域，属于中档题.

6. (5 分) (2015•浙江) 有三个房间需要粉刷，粉刷方案要求：每个房间只用一种颜色，且三个房间颜色各不相同. 已知三个房间的粉刷面积 (单位： m^2) 分别为 x, y, z ，且 $x < y < z$ ，三种颜色涂料的粉刷费用 (单位：元/ m^2) 分别为 a, b, c ，且 $a < b < c$. 在不同的方案中，最低的总费用 (单位：元) 是 ()

- A $ax+by+cz$ B $az+by+cx$ C $ay+bz+cx$ D $ay+bx+cz$

考点：函数的最值及其几何意义.

专题：函数的性质及应用.

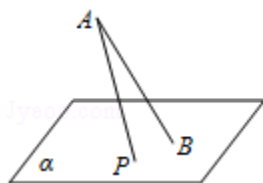
分析：作差法逐个选项比较大小可得.

解答：解： $\because x < y < z$ 且 $a < b < c$ ，

$$\begin{aligned} & \therefore ax+by+cz - (az+by+cx) \\ &= a(x-z) + c(z-x) \\ &= (x-z)(a-c) > 0, \\ & \therefore ax+by+cz > az+by+cx; \\ & \text{同理 } ay+bz+cx - (ay+bx+cz) \\ &= b(z-x) + c(x-z) \\ &= (z-x)(b-c) > 0, \\ & \therefore ay+bz+cx > ay+bx+cz; \\ & \text{同理 } az+by+cx - (ay+bz+cx) \\ &= a(z-y) + b(y-z) \\ &= (z-y)(a-b) < 0, \\ & \therefore az+by+cx < ay+bz+cx, \\ & \therefore \text{最低费用为 } az+by+cx \\ & \text{故选：B} \end{aligned}$$

点评： 本题考查函数的最值，涉及作差法比较不等式的大小，属中档题.

7. (5分) (2015•浙江) 如图，斜线段 AB 与平面 α 所成的角为 60° ， B 为斜足，平面 α 上的动点 P 满足 $\angle PAB=30^\circ$ ，则点 P 的轨迹是 ()



A 直线

B 抛物线

C 椭圆

D 双曲线的一

支

考点： 圆锥曲线的轨迹问题.

专题： 圆锥曲线的定义、性质与方程.

分析： 根据题意， $\angle PAB=30^\circ$ 为定值，可得点 P 的轨迹为一以 AB 为轴线的圆锥侧面与平面 α 的交线，则答案可求.

解答： 解：用垂直于圆锥轴的平面去截圆锥，得到的是圆；把平面渐渐倾斜，得到椭圆；当平面和圆锥的一条母线平行时，得到抛物线.

此题中平面 α 上的动点 P 满足 $\angle PAB=30^\circ$ ，可理解为 P 在以 AB 为轴的圆锥的侧面上，

再由斜线段 AB 与平面 α 所成的角为 60° ，可知 P 的轨迹符合圆锥曲线中椭圆定义.

故可知动点 P 的轨迹是椭圆.

故选：C.

点评： 本题考查椭圆的定义，考查学生分析解决问题的能力，比较基础.

8. (5分) (2015•浙江) 设实数 a ， b ， t 满足 $|a+1|=|\sin b|=t$. ()

A 若 t 确定，则 b^2 唯一确定

B 若 t 确定，则 a^2+2a 唯一确定

C 若 t 确定，则 $\sin \frac{b}{2}$ 唯一确定

D 若 t 确定，则 a^2+a 唯一确定

定

考点： 四种命题.

专题： 简易逻辑.

分析： 根据代数式得出 $a^2+2a=t^2-1$ ， $\sin^2 b=t^2$ ，运用条件，结合三角函数可判断答案.

解答： 解： \because 实数 a ， b ， t 满足 $|a+1|=t$ ，

$$\therefore (a+1)^2=t^2,$$

$$a^2+2a=t^2-1,$$

t 确定，则 t^2-1 为定值.

$$\sin^2 b=t^2,$$

A, C 不正确,
 \therefore 若 t 确定, 则 a^2+2a 唯一确定,
 故选: B

点评: 本题考查了命题的判断真假, 属于容易题, 关键是得出 $a^2+2a=t^2-1$, 即可判断.

二、填空题 (本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分)

9. (6 分) (2015•浙江) 计算: $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$, $2^{\log_2 3 + \log_4 3} = \underline{3\sqrt{3}}$.

考点: 对数的运算性质.

专题: 函数的性质及应用.

分析: 直接利用对数运算法则化简求值即可.

解答:

$$\begin{aligned} \text{解: } \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} &= \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}; \\ 2^{\log_2 3 + \log_4 3} &= 2^{\log_2 3 + \frac{1}{2} \log_2 3} \\ &= 2^{\log_2 (3 \cdot 3^{\frac{1}{2}})} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

故答案为: $-\frac{1}{2}; 3\sqrt{3}$.

点评: 本题考查导数的运算法则的应用, 基本知识的考查.

10. (6分) (2015•浙江) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 d 不为零, 若 a_2, a_3, a_7 成等比数列, 且 $2a_1+a_2=1$, 则 $a_1=-\frac{2}{3}$, $d=-1$.

考点: 等比数列的性质.

专题: 等差数列与等比数列.

分析: 运用等比数列的性质, 结合等差数列的通项公式, 计算可得 $d=-\frac{3}{2}a_1$, 再由

条件 $2a_1+a_2=1$, 运用等差数列的通项公式计算即可得到首项和公差.

解答: 解: 由 a_2, a_3, a_7 成等比数列,

则 $a_3^2=a_2a_7$,

即有 $(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+6d)$,

即 $2d^2+3a_1d=0$,

由公差 d 不为零,

则 $d=-\frac{3}{2}a_1$,

又 $2a_1+a_2=1$,

即有 $2a_1+a_1+d=1$,

即 $3a_1-\frac{3}{2}a_1=1$,

解得 $a_1=-\frac{2}{3}$, $d=-1$.

故答案为: $-\frac{2}{3}, -1$.

点评: 本题考查等差数列首项和公差的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意等差数列和等比数列的性质的合理运用.

11. (6分) (2015•浙江) 函数 $f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$ 的最小正周期是 π , 最小值是 $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

考点: 二倍角的余弦; 三角函数的最值.

专题: 三角函数的图像与性质.

分析: 由三角函数恒等变换化简解析式可得 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}$, 由正弦函数的图象和性质即可求得最小正周期, 最小值.

解答: 解: $\because f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$

$=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+1$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}$

\therefore 最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$, 最小值为: $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

故答案为: $\pi, \frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

点评: 本题主要考查了三角函数恒等变换的应用, 考查了正弦函数的图象和性质, 属于基本知识的考查.

12. (6分) (2015•浙江) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-2)) = -\frac{1}{2}$,

$f(x)$ 的最小值是 $2\sqrt{6} - 6$.

考点: 函数的最值及其几何意义.

专题: 函数的性质及应用.

分析: 由分段函数的特点易得 $f(f(-2)) =$ 的值; 分别由二次函数和基本不等式可得各段的最小值, 比较可得.

解答: 解: 由题意可得 $f(-2) = (-2)^2 = 4$,

$$\therefore f(f(-2)) = f(4) = 4 + \frac{6}{4} - 6 = -\frac{1}{2};$$

$$\because \text{当 } x \leq 1 \text{ 时, } f(x) = x^2,$$

由二次函数可知当 $x=0$ 时, 函数取最小值 0;

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) = x + \frac{6}{x} - 6,$$

$$\text{由基本不等式可得 } f(x) = x + \frac{6}{x} - 6 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} - 6 = 2\sqrt{6} - 6,$$

当且仅当 $x = \frac{6}{x}$ 即 $x = \sqrt{6}$ 时取到等号, 即此时函数取最小值 $2\sqrt{6} - 6$;

$$\because 2\sqrt{6} - 6 < 0, \therefore f(x) \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{6} - 6$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{2}; 2\sqrt{6} - 6$$

点评: 本题考查函数的最值, 涉及二次函数的性质和基本不等式, 属中档题.

13. (4分) (2015•浙江) 已知 \vec{e}_1, \vec{e}_2 是平面向量, 且 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$, 若平衡向量 \vec{b} 满足

$$\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = \vec{b} \cdot \vec{e}_2 = 1, \text{ 则 } |\vec{b}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

考点: 平面向量数量积的性质及其运算律.

专题: 平面向量及应用.

分析: 根据数量积得出 \vec{e}_1, \vec{e}_2 夹角为 60° , $\langle \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{b}, \vec{e}_2 \rangle = 30^\circ$, 运用数量积的定义判断求解即可.

解答: 解: $\because \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面单位向量, 且 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$,

$\therefore \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 夹角为 60° ,

\therefore 平衡向量 \vec{b} 满足 $\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = \vec{b} \cdot \vec{e}_2 = 1$

$\therefore \vec{b}$ 与 \vec{e}_1, \vec{e}_2 夹角相等, 且为锐角,

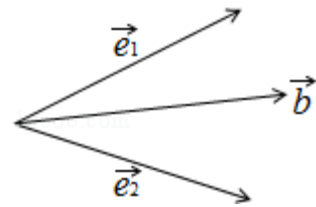
$\therefore \vec{b}$ 应该在 \vec{e}_1, \vec{e}_2 夹角的平分线上,

即 $\langle \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{b}, \vec{e}_2 \rangle = 30^\circ$,

$|\vec{b}| \times 1 \times \cos 30^\circ = 1$,

$\therefore |\vec{b}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



点评:

本题简单的考查了平面向量的运算, 数量积的定义, 几何图形的运用, 属于容易题, 关键是判断夹角即可.

14. (4 分) (2015•浙江) 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $|2x + y - 4| + |6 - x - 3y|$ 的最大值是 15.

考点:

简单线性规划.

专题:

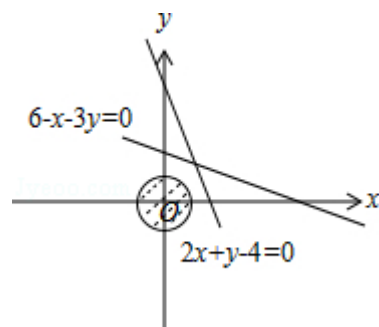
不等式的解法及应用.

分析:

由题意可得 $2x + y - 4 < 0$, $6 - x - 3y > 0$, 去绝对值后得到目标函数 $z = -3x - 4y + 10$, 然后结合圆心到直线的距离求得 $|2x + y - 4| + |6 - x - 3y|$ 的最大值.

解答:

解: 如图,



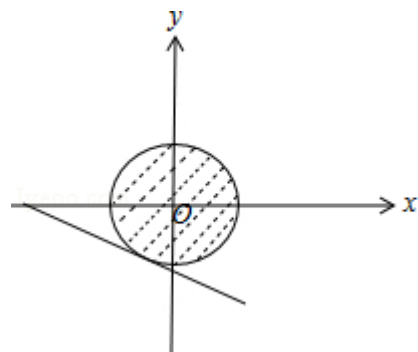
由 $x^2 + y^2 \leq 1$,

可得 $2x + y - 4 < 0$, $6 - x - 3y > 0$,

则 $|2x + y - 4| + |6 - x - 3y| = -2x - y + 4 + 6 - x - 3y = -3x - 4y + 10$,

令 $z = -3x - 4y + 10$, 得 $y = -\frac{3}{4}x - \frac{z}{4} + \frac{5}{2}$,

如图,



要使 $z = -3x - 4y + 10$ 最大, 则直线 $y = -\frac{3}{4}x - \frac{z}{4} + \frac{5}{2}$ 在 y 轴上的截距最小,

由 $z = -3x - 4y + 10$, 得 $3x + 4y + z - 10 = 0$.

则 $\frac{|z - 10|}{5} = 1$, 即 $z = 15$ 或 $z = 5$.

由题意可得 z 的最大值为 15.

故答案为: 15.

点评:

本题考查了简单的线性规划, 考查了数形结合的解题思想方法, 考查了数学转化思想方法, 是中档题.

15. (4分) (2015•浙江) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点 $F(c, 0)$ 关于直线 $y = \frac{b}{c}x$ 的

对称点 Q 在椭圆上, 则椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

考点:

椭圆的简单性质.

专题:

圆锥曲线的定义、性质与方程.

分析:

设出 Q 的坐标, 利用对称知识, 结合椭圆方程推出椭圆几何量之间的关系, 然后求解离心率即可.

解答:

解: 不妨令 $c=1$, 设 $Q(m, n)$, 由题意可得
$$\begin{cases} \frac{n}{m-c} = -\frac{c}{b} \dots ① \\ \frac{n}{2} = \frac{b}{c} \cdot \frac{m+c}{2} \dots ② \\ \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 1 \dots ③ \end{cases}$$
, 即:

$$\begin{cases} \frac{n}{m-1} = -\frac{1}{b} \cdots ① \\ \frac{n}{2} = b \cdot \frac{m+1}{2} \cdots ② \\ \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 1 \cdots ③ \end{cases},$$

由①②可得: $m = \frac{c^3 - cb^2}{a^2}$, $n = \frac{2bc^2}{a^2}$, 代入③可得:

$$\frac{\left(\frac{c^3 - cb^2}{a^2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{2bc^2}{a^2}\right)^2}{b^2} = 1,$$

解得 $e^2(4e^4 - 4e^2 + 1) + 4e^2 = 1$,

可得, $4e^6 + e^2 - 1 = 0$.

即 $4e^6 - 2e^4 + 2e^4 - e^2 + 2e^2 - 1 = 0$,

可得 $(2e^2 - 1)(2e^4 + e^2 + 1) = 0$

解得 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

点评:

本题考查椭圆的方程简单性质的应用, 考查对称知识以及计算能力.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (14 分) (2015•浙江) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 已知 \tan

$$\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = 2.$$

(I) 求 $\frac{\sin 2A}{\sin 2A + \cos^2 A}$ 的值;

(II) 若 $B = \frac{\pi}{4}$, $a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

考点:

二倍角的余弦; 两角和与差的正切函数.

专题:

解三角形.

分析:

(I) 由两角和与差的正切函数公式及已知可得 $\tan A$, 由倍角公式及同角三角函数关系式即可得解.

(II) 由 $\tan A = \frac{1}{3}$, $A \in (0, \pi)$, 可得 $\sin A$, $\cos A$. 又由正弦定理可得 b,

由 $\sin C = \sin(A+B) = \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$, 可得 $\sin C$, 利用三角形面积公式即可得解.

解答:

解: (I) 由 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = 2$. 可得 $\tan A = \frac{1}{3}$,

$$\text{所以 } \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \cos^2 A} = \frac{2 \tan A}{2 \tan A + 1} = \frac{2}{5}.$$

$$(\text{II}) \text{ 由 } \tan A = \frac{1}{3}, A \in (0, \pi), \text{ 可得 } \sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos A = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{又由 } a=3, B=\frac{\pi}{4} \text{ 及正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 可得 } b=3\sqrt{5}.$$

$$\text{由 } \sin C = \sin(A+B) = \sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right), \text{ 可得 } \sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{设 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } S, \text{ 则 } S = \frac{1}{2}ab\sin C = 9.$$

点评: 本题主要考查了三角函数及其变换、正弦定理和余弦定理等基本知识的应用, 同时考查了运算求解能力, 属于中档题.

17. (15 分) (2015•浙江) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2, b_1=1, a_{n+1}=2a_n (n \in \mathbb{N}^*), b_1+\frac{1}{2}b_2+$

$$\frac{1}{3}b_3+\dots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1 (n \in \mathbb{N}^*)$$

(I) 求 a_n 与 b_n ;

(II) 记数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

考点: 数列的求和.

专题: 等差数列与等比数列.

分析: (I) 直接由 $a_1=2, a_{n+1}=2a_n$, 可得数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 由等比数列的通项公式求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

$$\text{再由 } b_1=1, b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\dots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1, \text{ 取 } n=1 \text{ 求得 } b_2=2, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时,}$$

$$\text{得另一递推式, 作差得到 } \frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n, \text{ 整理得数列 } \left\{\frac{b_n}{n}\right\} \text{ 为常数列,}$$

由此可得 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 求出 $a_nb_n=n \cdot 2^n$, 然后利用错位相减法求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

解答: 解: (I) 由 $a_1=2, a_{n+1}=2a_n$, 得 $a_n=2^n (n \in \mathbb{N}^*)$.

由题意知, 当 $n=1$ 时, $b_1=b_2-1$, 故 $b_2=2$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\dots+\frac{1}{n-1}b_{n-1}=b_n-1, \text{ 和原递推式作差得,}$$

$$\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n, \text{ 整理得: } \frac{b_{n+1}}{n+1}=\frac{b_n}{n},$$

$$\therefore b_n=n (n \in \mathbb{N}^*);$$

$$(\text{II}) \text{ 由 (I) 知, } a_nb_n=n \cdot 2^n,$$

$$\text{因此 } T_n = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$$

$$2T_n = 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{两式作差得: } -T_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1},$$

$$T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

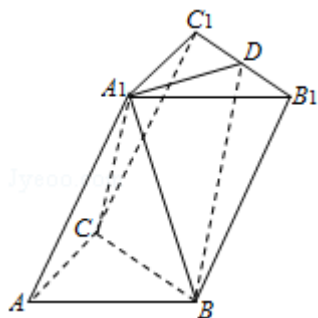
点评:

本题主要考查等差数列的通项公式、等差数列和等比数列等基础知识,同时考查数列求和等基本思想方法,以及推理论证能力,是中档题.

18. (15 分) (2015•浙江) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, $A_1A = 4$, A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点, D 是 B_1C_1 的中点.

(I) 证明: $A_1D \perp$ 平面 A_1BC ;

(II) 求直线 A_1B 和平面 BB_1C_1C 所成的角的正弦值.



考点:

直线与平面所成的角; 直线与平面垂直的判定.

专题:

空间位置关系与距离; 空间角.

分析:

(I) 连接 AO , A_1D , 根据几何体的性质得出 $A_1O \perp A_1D$, $A_1D \perp BC$, 利用直线平面的垂直定理判断.

(II) 利用空间向量的垂直得出平面 BB_1C_1C 的法向量 $\vec{n} = (\sqrt{7}, 0, 1)$, |

根据与 $\overrightarrow{BA_1}$ 数量积求解余弦值, 即可得出直线 A_1B 和平面 BB_1C_1C 所成的角的正弦值.

解答:

证明: (I) $\because AB = AC = 2$, D 是 B_1C_1 的中点.

$$\therefore A_1D \perp B_1C_1,$$

$$\because BC \parallel B_1C_1,$$

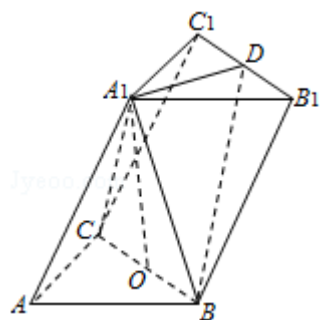
$$\therefore A_1D \perp BC,$$

$$\because A_1O \perp \text{面 } ABC, A_1D \parallel AO,$$

$$\therefore A_1O \perp AO, A_1O \perp BC$$

$$\because BC \cap AO = O, A_1O \perp A_1D, A_1D \perp BC$$

$$\therefore A_1D \perp \text{平面 } A_1BC$$



解：(II)

建立坐标系如图

∵在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2$ ， $A_1A = 4$

∴ $O(0, 0, 0)$ ， $B(0, \sqrt{2}, 0)$ ， $B_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{14})$ ， $A_1(0, 0, \sqrt{14})$

即 $\overrightarrow{A_1B} = (0, \sqrt{2}, \sqrt{14})$ ， $\overrightarrow{OB} = (0, \sqrt{2}, 0)$ ， $\overrightarrow{BB_1} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{14})$ ，

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

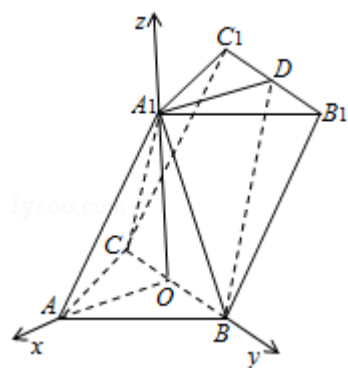
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \end{cases} \text{ 即得出 } \begin{cases} y = 0 \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{14}z = 0 \end{cases}$$

得出 $\vec{n} = (\sqrt{7}, 0, 1)$ ， $|\overrightarrow{BA_1}| = 4$ ， $|\vec{n}| = 2\sqrt{2}$

∴ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = \sqrt{14}$ ，

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{BA_1} \rangle = \frac{\sqrt{14}}{4 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

可得出直线 A_1B 和平面 BB_1C_1C 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{8}$



点评：

本题考查了空间几何体的性质，直线平面的垂直问题，空间向量的运用，空间想象能力，计算能力，属于中档题。

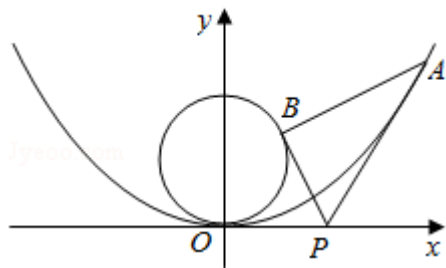
19. (15 分) (2015•浙江) 如图，已知抛物线 $C_1: y = \frac{1}{4}x^2$ ，圆 $C_2: x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ，过点 P

$(t, 0)$ ($t > 0$) 作不过原点 O 的直线 PA，PB 分别与抛物线 C_1 和圆 C_2 相切，A，B 为切点。

(I) 求点 A，B 的坐标；

(II) 求 $\triangle PAB$ 的面积.

注: 直线与抛物线有且只有一个公共点, 且与抛物线的对称轴不平行, 则称该直线与抛物线相切, 称该公共点为切点.



考点:

直线与圆锥曲线的综合问题.

专题:

圆锥曲线中的最值与范围问题.

分析:

(I) 由直线 PA 的斜率存在, 设切线 PA 的方程为: $y=k(x-t)$ ($k \neq 0$), 与抛物线方程联立化为 $x^2 - 4kx + 4kt = 0$, 利用 $\Delta = 0$, 解得 $k=t$, 可得 A 坐标. 圆 C_2 的圆心 D (0, 1), 设 B (x_0 , y_0), 由题意可知: 点 B 与 O 关于直线 PD

得出, 可得
$$\begin{cases} \frac{y_0}{2} = -\frac{x_0}{2t} + 1 \\ x_0 t - y_0 = 0 \end{cases}$$
, 解得 B 坐标.

(II) 由 (I) 可得: $(t^2 - 1)x - 2ty + 2t = 0$, 可得点 P 到直线 AB 的距离 d,

又 $|AB| = \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2} - 2t\right)^2 + \left(\frac{2t^2}{1+t^2} - t^2\right)^2}$. 即可得出 $S_{\triangle PAB} =$

$\frac{1}{2} |AB| \cdot d$.

解答:

解: (I) 由直线 PA 的斜率存在, 设切线 PA 的方程为: $y=k(x-t)$ ($k \neq 0$),

联立
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = k(x-t) \end{cases}$$
,

化为 $x^2 - 4kx + 4kt = 0$,

$\therefore \Delta = 16k^2 - 16kt = 0$, 解得 $k=t$,

$\therefore x = 2t$, $\therefore A(2t, t^2)$.

圆 C_2 的圆心 D (0, 1), 设 B (x_0 , y_0), 由题意可知: 点 B 与 O 关于直线 PD 得出,

$$\therefore \begin{cases} \frac{y_0}{2} = -\frac{x_0}{2t} + 1 \\ x_0 t - y_0 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = \frac{2t}{1+t^2} \\ y_0 = \frac{2t^2}{1+t^2} \end{cases}.$$

$\therefore B\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^2}\right)$.

$$(II) \text{ 由 (I) 可得: } k_{AB} = \frac{\frac{2t^2}{1+t^2} - t^2}{\frac{2t}{1+t^2} - 2t} = \frac{t^2 - 1}{2t}, \text{ 直线 AB 的方程为: } y - t^2 =$$

$$\frac{t^2 - 1}{2t} (x - 2t), \text{ 化为 } (t^2 - 1)x - 2ty + 2t = 0,$$

$$\therefore \text{点 P 到直线 AB 的距离 } d = \frac{|(t^2 - 1)t + 2t|}{\sqrt{(t^2 - 1)^2 + (-2t)^2}} = \frac{t^3 + t}{t^2 + 1} = t,$$

$$\text{又 } |AB| = \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2} - 2t\right)^2 + \left(\frac{2t^2}{1+t^2} - t^2\right)^2} = t^2.$$

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} t^3.$$

点评:

本小题主要考查抛物线、直线与抛物线及其圆的位置关系及其性质、垂直平分线的性质、点到直线的距离公式等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想, 属于难题.

20. (15 分) (2015•浙江) 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

(I) 当 $b = \frac{a^2}{4} + 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值 $g(a)$ 的表达式.

(II) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上存在零点, $0 \leq b - 2a \leq 1$, 求 b 的取值范围.

考点:

二次函数的性质; 函数零点的判定定理.

专题:

分类讨论; 函数的性质及应用; 不等式的解法及应用.

分析:

(I) 求出二次函数的对称轴方程, 讨论对称轴和区间 $[-1, 1]$ 的关系, 运用函数的单调性即可得到最小值;

(II) 设 s, t 是方程 $f(x) = 0$ 的解, 且 $-1 \leq t \leq 1$, 运用韦达定理和已知条件, 得到 s 的不等式, 讨论 t 的范围, 得到 st 的范围, 由分式函数的值域, 即可得到所求 b 的范围.

解答:

解: (I) 当 $b = \frac{a^2}{4} + 1$ 时, $f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1$, 对称轴为 $x = -\frac{a}{2}$,

当 $a \leq -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上递减, 则 $g(a) = f(1) = \frac{a^2}{4} + a + 2$;

当 $-2 < a \leq 2$ 时, 即有 $-1 \leq -\frac{a}{2} < 1$, 则 $g(a) = f\left(-\frac{a}{2}\right) = 1$;

当 $a > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上递增, 则 $g(a) = f(-1) = \frac{a^2}{4} - a + 2$.

$$\text{综上可得, } g(a) = \begin{cases} \frac{a^2}{4} + a + 2, & a \leq -2 \\ 1, & -2 < a \leq 2 \\ \frac{a^2}{4} - a + 2, & a > 2 \end{cases};$$

(II) 设 s, t 是方程 $f(x) = 0$ 的解, 且 $-1 \leq t \leq 1$,

$$\text{则} \begin{cases} s+t = -a \\ st = b \end{cases},$$

由于 $0 \leq b - 2a \leq 1$,

$$\text{由此} \frac{-2t}{2+t} \leq s \leq \frac{1-2t}{2+t} \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

$$\text{当 } 0 \leq t \leq 1 \text{ 时, } \frac{-2t^2}{t+2} \leq st \leq \frac{t-2t^2}{t+2},$$

$$\text{由 } -\frac{2}{3} \leq \frac{2t}{t+2} \leq 0, \text{ 得 } -\frac{1}{3} \leq \frac{t-2t^2}{t+2} \leq 9-4\sqrt{5},$$

$$\text{所以 } -\frac{2}{3} \leq b \leq 9-4\sqrt{5};$$

$$\text{当 } -1 \leq t < 0 \text{ 时, } \frac{t-2t^2}{t+2} \leq st \leq \frac{-2t^2}{t+2},$$

$$\text{由于 } -2 \leq \frac{-2t^2}{t+2} < 0 \text{ 和 } -3 \leq \frac{t-2t^2}{t+2} < 0, \text{ 所以 } -3 \leq b < 0,$$

故 b 的取值范围是 $[-3, 9-4\sqrt{5}]$.

点评:

本题考查二次函数在闭区间上的最值的求法, 同时考查二次方程和函数的零点的关系, 以及韦达定理的运用, 考查不等式的性质和分式函数的最值的求法, 属于中档题.