

2011年上海高考数学试题（文科）答案及解析

一、填空题

- 1、 $\{x|x < 1\}$ ； 2、 -2 ； 3、 $-\frac{3}{2}$ ； 4、 $\sqrt{5}$ ； 5、 $x+2y-11=0$ ； 6、 $x < 0$ 或 $x > 1$ ； 7、 3π ；
8、 $\sqrt{6}$ ； 9、 $\frac{5}{2}$ ； 10、 2 ； 11、 6 ； 12、 $\frac{15}{2}$ ； 13、 0.985 ； 14、 $[-2, 7]$ 。

二、选择题

- 15、 A ； 16、 D ； 17、 A ； 18、 B 。

三、解答题

- 19、解： $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i \Rightarrow z_1 = 2 - i$ (4分)

设 $z_2 = a + 2i, a \in R$ ，则 $z_1 z_2 = (2 - i)(a + 2i) = (2a + 2) + (4 - a)i$ ， (12分)

$\because z_1 z_2 \in R, \therefore z_2 = 4 + 2i$ (12分)。

- 20、解： (1) 连 BD, AB_1, B_1D_1, AD_1 ， $\because BD \parallel B_1D_1, AB_1 = AD_1$ ，

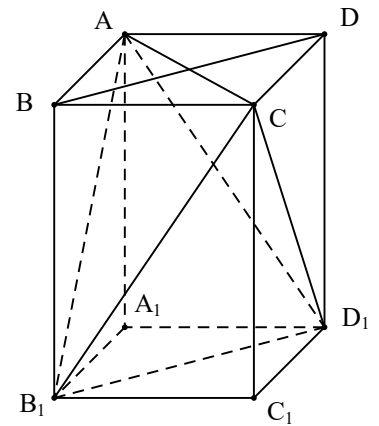
\therefore 异面直线 BD 与 AB_1 所成角为 $\angle AB_1D_1$ ，记 $\angle AB_1D_1 = \theta$ ，

$$\cos \theta = \frac{AB_1^2 + B_1D_1^2 - AD_1^2}{2AB_1 \times B_1D_1} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

\therefore 异面直线 BD 与 AB_1 所成角为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

- (2) 连 AC, CB_1, CD_1 ，则所求四面体的体积

$$V = V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - 4 \times V_{C-B_1C_1D_1} = 2 - 4 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}。$$



- 21、解： (1) 当 $a > 0, b > 0$ 时，任意 $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$ ，则

$$f(x_1) - f(x_2) = a(2^{x_1} - 2^{x_2}) + b(3^{x_1} - 3^{x_2})$$

$$\because 2^{x_1} < 2^{x_2}, a > 0 \Rightarrow a(2^{x_1} - 2^{x_2}) < 0, 3^{x_1} < 3^{x_2}, b > 0 \Rightarrow b(3^{x_1} - 3^{x_2}) < 0,$$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数。

当 $a < 0, b < 0$ 时，同理，函数 $f(x)$ 在 R 上是减函数。

$$(2) f(x+1) - f(x) = a \cdot 2^x + 2b \cdot 3^x > 0$$

当 $a < 0, b > 0$ 时, $(\frac{3}{2})^x > -\frac{a}{2b}$, 则 $x > \log_{1.5}(-\frac{a}{2b})$;

当 $a > 0, b < 0$ 时, $(\frac{3}{2})^x < -\frac{a}{2b}$, 则 $x < \log_{1.5}(-\frac{a}{2b})$ 。

$$22、解: (1) m = 2, \text{ 椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

\therefore 左、右焦点坐标为 $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ 。

$$(2) m = 3, \text{ 椭圆方程为 } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \text{ 设 } P(x, y), \text{ 则}$$

$$|PA|^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{8}{9}(x - \frac{9}{4})^2 + \frac{1}{2} \quad (-3 \leq x \leq 3)$$

$$\therefore x = \frac{9}{4} \text{ 时 } |PA|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x = -3 \text{ 时 } |PA|_{\max} = 5。$$

(3) 设动点 $P(x, y)$, 则

$$|PA|^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + 1 - \frac{x^2}{m} = \frac{m^2-1}{m^2}(x - \frac{2m^2}{m^2-1})^2 - \frac{4m^2}{m^2-1} + 5 \quad (-m \leq x \leq m)$$

$$\therefore \text{ 当 } x = m \text{ 时, } |PA| \text{ 取最小值, 且 } \frac{m^2-1}{m^2} > 0, \therefore \frac{2m^2}{m^2-1} \geq m \text{ 且 } m > 1$$

$$\text{解得 } 1 < m \leq 1 + \sqrt{2}。$$

23、解: (1) 三项分别为 9, 15, 21。

(2) $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{40}$ 分别为

9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 36, 37,

39, 41, 42, 43, 45, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 55, 57, 59, 60, 61, 63, 65, 66, 67

$$(3) b_{3k-2} = 2(3k-2) + 7 = 6k + 3 = a_{2k-1}, \quad b_{3k-1} = 6k + 5, \quad a_{2k} = 6k + 6, \quad b_{3k} = 6k + 7$$

$$\because 6k+3 < 6k+5 < 6k+6 < 6k+7$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} 6k+3 & (n=4k-3) \\ 6k+5 & (n=4k-2) \\ 6k+6 & (n=4k-1) \\ 6k+7 & (n=4k) \end{cases}, k \in N^* \circ c_{4k-3} + c_{4k-2} + c_{4k-1} + c_{4k} = 24k+21$$

$$S_{4n} = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + \cdots + (c_{4n-3} + c_{4n-2} + c_{4n-1} + c_{4n}) = 24 \times \frac{n(n+1)}{2} + 21n = 12n^2 + 33n$$

■ ◦

一、填空题 (每小题 4 分, 满分 56 分)

1、若全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | x \geq 1\}$, 则 $\complement_U A =$ _____【解析】显然为 $\{x | x < 1\}$ 2、计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{3n}{n+3}) =$ _____【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{3n}{n+3}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+3} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1+\frac{3}{n}} = -2$ 显然为 -23、若函数 $f(x) = 2x+1$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(-2) =$ _____【解析】方法一: $f(f^{-1}(-2)) = -2 = 2x+1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$, 故 $f^{-1}(-2) = -\frac{3}{2}$;方法二: $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, 故 $f^{-1}(-2) = -\frac{3}{2}$;4、函数 $y = 2\sin x - \cos x$ 的最大值为 _____【解析】 $y = \sqrt{5} \sin(x+\phi) (\tan \phi = -\frac{1}{2})$, 故最大值为 $\sqrt{5}$ 5、若直线 l 过点 $(3,4)$, 且 $(1,2)$ 是它的法向量, 则直线 l 的方程为 _____【解析】由直线的点法式可得: $(x-3)+2(y-4)=0$, 故方程为 $x+2y-11=0$ 6、不等式 $\frac{1}{x} < 1$ 的解为 _____【解析】 $\frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \frac{1-x}{x} < 0 \Rightarrow x < 0$ 或 $x > 1$, 显然为 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < 0\}$

7、若一个圆锥的主视图 (如图所示) 是边长为 3、3、2 的三角形, 则该圆锥的侧面积为 _____

【解析】根据题意得: 底面的半径为 $r=1$, 母线长度为 3, 故侧面积为 $S = \frac{1}{2} \times 3 \times (2\pi) = 3\pi$ 8、在相距 2 千米的 A, B 两点处测量目标点 C , 若 $\angle CAB = 75^\circ, \angle CBA = 60^\circ$, 则 A, C 两点之间的距离为 _____ 千米。【解析】 $\angle C = 45^\circ$, 由正弦定理: $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AC = \sqrt{6}$ 9、如变量 x, y 满足条件 $\begin{cases} 3x-x \leq 0 \\ x-3y+5 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x+y$ 的最大值为 _____【解析】绘图可知, 应该在 $\begin{cases} 3x-y=0 \\ x-3y+5=0 \end{cases}$ 时取得最大值, 解得 $\begin{cases} x=\frac{5}{8} \\ y=\frac{15}{8} \end{cases}$, 故 $z_{\max} = \frac{5}{2}$

10、课题组进行城市空气质量调查, 按地域把 24 个城市分成甲、乙、丙三组, 对应的城市数分别为 4、12、8, 若用分层抽样抽取 6 个城市, 则丙组中应该抽取的城市数为 _____

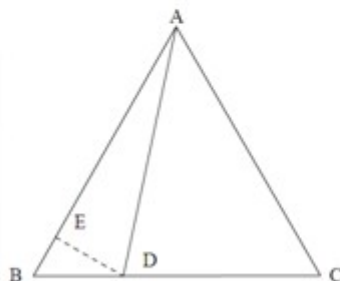
【解析】分组比为: 1:3:2, 故丙组应该抽 2 个

11、行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (a, b, c, d \in \{-1, 1, 2\})$ 所有可能的值中, 最大的是 _____【解析】 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 所以 $a=d=c=2, b=-1$, 则最大值为 6

12、在正三角形 ABC 中, D 是 BC 上的点, 若 $AB=3, BD=1$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$ _____

【解析】绘图如下: 过点 D 作 $DE \perp AB$, 则

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 3|\overrightarrow{AE}| = 3(|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{EB}|) = 3(3 - \frac{1}{2}BD) = 3 \times (3 - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$$



13、随机抽取的 9 位同学中, 至少有 2 位同学在一月份出生的概率为 _____ (默认每个月的天数相同, 结果精确到 0.001)

【解析】 $P = \frac{A_8^2}{12^2} \approx 0.985$

14、设 $g(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上, 以 1 为周期的函数, 若函数 $f(x) = x + g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的值域为 $[-2, 5]$, 则 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的值域为 _____

【解析】 $[-2, 7]$, 参考理科答案的解法。

二、选择题 (每小题 5 分, 满分 20 分)

15、下列函数中, 既是偶函数, 又是在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调减函数的函数是 ()

A. $y = x^{-2}$ B. $y = x^{-1}$ C. $y = x^2$ D. $y = x^{\frac{1}{2}}$

【解析】A, 排除法, C、D 在 $(0, +\infty)$ 上单调增, B 是奇函数;

16、若 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $ab > 0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 ()

A. $a^2 + b^2 > 2ab$ B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$ D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

【解析】D, 排除法: A: $a = b$ 时不满足;

B: $a < 0, b < 0$ 时不满足;

C: $a < 0, b < 0$ 时不满足;

D: $\frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} = 2$

17、若三角方程 $\sin x = 0$ 与 $\sin 2x = 0$ 的解集分别为 E, F , 则 ()

A. $E \subset F$ B. $E \supset F$ C. $E = F$ D. $E \cap F = \emptyset$

【解析】 $\sin x = 0$ 的解为 $\{x | x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\sin 2x = 0$ 的解集为 $\{x | x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 故选 B

18、设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是平面上给定的 5 个不同的点, 则使 $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = \vec{0}$ 成立的点的个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 5 D. 10

【解析】重心的定义为：

$$\text{若 } O \text{ 为任意一点, } M \text{ 为重心, 则: } \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}}{n},$$

只有重心满足条件, 所有不等于重心的点有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$, 故只有该点是重心时才能为零向量, 而重心只有一个, 故满足条件的点只有一个。

三、解答题 (本题满分 74 分)

19、(本题满分 12 分)

已知复数 z_1 满足 $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数, 求 z_2 。

【解析】显然 $z_1 - 2 = \frac{1-i}{1+i} = -i \Rightarrow z_1 = 2 - i$, 因为 $z_1 \cdot z_2$ 是实数所以, $z_2 = k(2 + i)$, 因为

$\text{Im}(z_2) = 2$, 所以 $k = 2$, 故 $z_2 = 4 + 2i$ 。

20、(本题满分 14 分, 第 1 小题满分 7 分, 第 2 小题满分 7 分)

已知 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱, $AA_1 = 2$,

(1) 求异面直线 BD 与 AB_1 所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示);

(2) 四面体 AB_1D_1C 的体积。

【解析】以 A 为原点, 以 AA_1, AB, AC 分别为 z, x, y 轴, 则: $B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), A(0, 0, 0), B_1(1, 0, 2)$,

(1) $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AB_1} = (1, 0, 2)$, 故 $\cos \langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, 故,

夹角为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$

(2) 显然只要长方体的体积减去顶点 A_1, B_1, D_1, C_1 上的直角三棱锥的体积就是所求的体积:

$$V = 2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 \right) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

21、(本题满分 14 分, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 3^x$, 其中常数 a, b 满足 $a \cdot b \neq 0$,

(1) 若 $a \cdot b > 0$, 判断函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a \cdot b < 0$, 求 $f(x+1) > f(x)$ 时的 x 的取值范围

【解析】(1) 显然

当 $a > 0, b > 0$ 时, $f(x)$ 单调增;

当 $a < 0, b < 0$ 时, $f(x)$ 单调减;

(2) 因为 $ab < 0$, 讨论如下:

当 $a < 0, b > 0$ 时, 则由 $f(x+1) > f(x)$ 得:

$$a \cdot 2^{-x} + b \cdot 3^{-x} > a \cdot 2^x + b \cdot 3^x, \text{ 故 } 2b \cdot 3^x > -a \cdot 2^x \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x > -\frac{a}{2b}, \text{ 故 } x > \log_{\frac{3}{2}}\left(-\frac{a}{2b}\right)$$

当 $a > 0, b < 0$ 时, 则则由 $f(x+1) > f(x)$ 得:

$$a \cdot 2^{-x} + b \cdot 3^{-x} > a \cdot 2^x + b \cdot 3^x, \text{ 故 } 2b \cdot 3^x > -a \cdot 2^x \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < -\frac{a}{2b}, \text{ 故 } x < \log_{\frac{3}{2}}\left(-\frac{a}{2b}\right)$$

22、(本题满分 16 分, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 6 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1$ (常数 $m > 1$), P 是曲线 C 上的动点, M 是曲线 C 上的右顶点, 点 A 的坐标为 $(2, 0)$,

(1) 若 M 与 A 重合, 求曲线 C 的焦点坐标;

(2) 若 $m = 3$, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值;

(3) 若 $|PA|$ 的最小值为 $|MA|$, 求实数 m 的取值范围。

【解析】(1) 将 $(2, 0)$ 代入椭圆的方程得: $m^2 = 4$, 故方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 焦半径

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}, \text{ 故焦点坐标为 } (\pm\sqrt{3}, 0)$$

(2) $m = 3$ 时, 显然 A 在焦点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 与原点之间, 设点 $P(3\cos\theta, \sin\theta)$, 则:

$$|PA|^2 = (3\cos\theta - 2)^2 + \sin^2\theta = 9\cos^2\theta - 12\cos\theta + 4 + 1 - \cos^2\theta = 8\cos^2\theta - 12\cos\theta + 5,$$

令 $t = \cos\theta (t \in [-1, 1])$, 则 $|PA|^2 = 8t^2 - 12t + 5$, 对称轴为 $t = \frac{3}{4}$, 则

当 $t = \frac{3}{4}$ 时, 取最小值为: $|PA|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 $t = -1$ 时, 取最大值为: $|PA|_{\max} = 5$

(3) 设曲线 C 上点 $P(x, y)$. \because 点 P 在椭圆 C 上, $\therefore y^2 = 1 - \frac{x^2}{m^2}$, \therefore

$$|PA| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 1 - \frac{x^2}{m^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)x^2 - 4x + 5}, \quad -m \leq x \leq m.$$

令 $f(x) = \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)x^2 - 4x + 5$, 其对称轴为 $x = \frac{2m^2}{m^2 - 1}$, $\because m > 1$, $\therefore \frac{2m^2}{m^2 - 1} > 0$,

$1 - \frac{1}{m^2} > 0$. 又 $\because |PA|$ 的最小值为 $|MA|$, \therefore 当 $x = m$ 时, 取到 $|PA|$ 的最小值, 即取到 $f(x)$

的最小值, $\therefore \frac{2m^2}{m^2 - 1} \geq m$, 解得 $1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}$. 综上, 当 $1 < m \leq \sqrt{2} + 1$ 时, $|PA|$

的最小值为 $|MA|$.

23、(本题满分 18 分, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 3n + 6$, $b_n = 2n + 7$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 将集合

$\{x|x=a_n, n \in N^*\} \cup \{x|x=b_n, n \in N^*\}$ 中的元素从小到大依次排列, 构成数列 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$

(1) 求三个最小的数, 使它们既是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 又是数列 $\{b_n\}$ 中的项;

(2) 数列 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{40}$ 中有多少项不是数列 $\{b_n\}$ 中的项? 请说明理由;

(3) 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $4n$ 项和 $S_{4n} (n \in N^*)$.

【解析】(1) 显然 a_n 表示的是从 9 开始能被 6 整除的所有的正整数, b_n 表示从 9 开始所有的奇数, 故最小的三个为 9, 15, 21。

(2) 可知 6 是数列 $\{c_n\}$ 在自然数中的截取周期, 即在从 9 开始连续的 6 项自然数中, 第一项一定是 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项, 第二项不存在于 $\{c_n\}$ 中, 第三项一定是 $\{b_n\}$ 中的项, 第四项一定是 $\{a_n\}$ 项, 第五项是 $\{b_n\}$ 中的项, 第六项不在 $\{c_n\}$ 中, 这样的话, $\{c_n\}$ 是以 4 为截取周期的, 故 $\{c_n\}$ 的通项为:

$$c_n = \begin{cases} b_{3k-2} = 6k+3, n=4k-3 \\ b_{3k-1} = 6k+5, n=4k-2 \\ a_{2k} = 6k+6, n=4k-1 \\ b_{3k} = 6k+7, n=4k \end{cases} (k \in N^*)$$

当 $n=4k, k \in N^*$ 时, $c_{4k} = 6k+7$, 则 $c_n = 6 \times \frac{n}{4} + 7 = \frac{3}{2}n + 7$;

当 $n=4k-1, k \in N^*$ 时, $c_{4k-1} = 6k+6$, 则 $c_n = 6 \times \frac{n+1}{4} + 6 = \frac{3}{2}n + \frac{15}{2}$;

当 $n=4k-2, k \in N^*$ 时, $c_{4k-2} = 6k+5 = 6 \times \frac{n+2}{4} + 5 = \frac{3}{2}n + 8$;

当 $n=4k-3, k \in N^*$ 时, $c_{4k-3} = 6k+3 = 6 \times \frac{n+3}{4} + 3 = \frac{3}{2}n + \frac{15}{2}$;

$$\text{综上, } c_n = \begin{cases} \frac{3}{2}n + 7, n=4k \\ \frac{3}{2}n + \frac{15}{2}, n=4k-1 \text{ 或 } n=4k-3, k \in N^* \\ \frac{3}{2}n + 8, n=4k-2 \end{cases}$$

故不是 $\{b_n\}$ 中的项只占了 $\frac{1}{4}$, 这样在 c_1 到 c_{40} 中只有 10 项不在 $\{b_n\}$ 中

(3) 因为 $c_{4k-3} + c_{4k-2} + c_{4k-1} + c_{4k} = b_{3k-2} + b_{3k-1} + a_{2k} + b_{3k} = 6k+3 + 6k+5 + 6k+6 + 6k+7 = 24k+21$

$$\text{故 } S_{4n} = \sum_{k=1}^{4n} 24k + 21 = 24 \times \frac{n(n+1)}{2} + 21n = 12n^2 + 33n$$