

2013年全国普通高等学校招生统一考试
上海 数学试卷（文史类）

考生注意：

1. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名。
2. 本试卷共有23道试题，满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1. 不等式 $\frac{x}{2x-1} < 0$ 的解为 $\underline{(0, \frac{1}{2})}$.

【答案】 $(0, \frac{1}{2})$

【解析】 $x(2x-1) < 0 \Rightarrow x \in (0, \frac{1}{2})$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 30$ ，则 $a_2 + a_3 = \underline{15}$.

【答案】 15

【解析】 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2(a_2 + a_3) = 30 \Rightarrow a_2 + a_3 = 15$

3. 设 $m \in \mathbb{R}$, $m^2 + m - 2 + (m^2 - 1)i$ 是纯虚数，其中 i 是虚数单位，则 $m = \underline{-2}$.

【答案】 -2

【解析】 $m^2 + m - 2 + (m^2 - 1)i$ 是纯虚数 $\Rightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = -2$

4. 已知 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 则 $y = \underline{1}$.

【答案】 1

【解析】 已知 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, 又 $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y = 1$

联立上式，解得 $x = 2, y = 1$,

5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 若 $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0$ ，则角 C 的大小是 $\underline{\frac{2}{3}\pi}$.

【答案】 $\frac{2}{3}\pi$

【解析】 $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-1}{2} \Rightarrow C = \frac{2}{3}\pi$

6. 某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%.在一次考试中，男、女生平均分数分别是75、80，则这次考试该年级学生平均分数为 $\underline{78}$.

【答案】 78

【解析】 平均成绩 $= \frac{40}{100} \cdot 75 + \frac{60}{100} \cdot 80 = 78$

7. 设常数 $a \in \mathbb{R}$. 若 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为 -10 , 则 $a =$ -2.

【答案】 -2

【解析】 $(x^2 + \frac{a}{x})^5 \Rightarrow C_5^r (x^2)^{5-r} (\frac{a}{x})^r = -10x^7 \Rightarrow r=1, C_5^1 a = -10$
 $\Rightarrow 5a = -10, a = -2$

8. 方程 $\frac{9}{3^x - 1} + 1 = 3^x$ 的实数解为 $\log_3 4$.

【答案】 $\log_3 4$

【解析】

$$\frac{9}{3^x - 1} + 1 = 3^x \Rightarrow \frac{9}{3^x - 1} = 3^x - 1 \Rightarrow 3^x - 1 = \pm 3 \Rightarrow 3^x = \pm 3 + 1 > 0 \Rightarrow 3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4$$

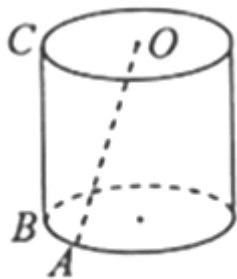
9. 若 $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(2x - 2y) =$ $-\frac{7}{9}$.

【答案】 $-\frac{7}{9}$

【解析】

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2(x - y) = 2\cos^2(x - y) - 1 = -\frac{7}{9}$$

10. 已知圆柱 Ω 的母线长为 1, 底面半径为 r , O 是上底面圆心, A 、 B 是下底面圆周上的两个不同的点, BC 是母线, 如图. 若直线 OA 与 BC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $\frac{l}{r} =$ $\sqrt{3}$.



第 10 题图

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 由题知, $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{r}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{l}{r} = \sqrt{3}$

11. 盒子中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的七个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是 $\frac{5}{7}$ (结果用最简分数表示).

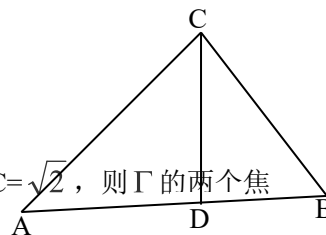
【答案】 $\frac{5}{7}$

【解析】 考查排列组合; 概率计算策略: 正难则反。

从 4 个奇数和 3 个偶数共 7 个数中任取 2 个, 共有 $C_7^2 = 21$ 个

2个数之积为奇数 \Rightarrow 2个数分别为奇数，共有 $C_4^2 = 6$ 个。

所以2个数之积为偶数的概率 $P = 1 - \frac{C_4^2}{C_7^2} = 1 - \frac{6}{21} = \frac{5}{7}$



12. 设 AB 是椭圆 Γ 的长轴，点 C 在 Γ 上，且 $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$. 若 $AB=4$, $BC=\sqrt{2}$, 则 Γ 的两个焦点之间的距离为 $\frac{4}{3}\sqrt{6}$.

【答案】 $\frac{4}{3}\sqrt{6}$

【解析】 如右图所示。

设 D 在 AB 上，且 $CD \perp AB$, $AB=4$, $BC=\sqrt{2}$, $\angle CBA=45^\circ \Rightarrow CD=1, DB=1, AD=3 \Rightarrow C(1,1) \Rightarrow 2a=4$, 把 $C(1,1)$ 代入椭圆标准方程得 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}, c^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow 2c = \frac{4}{3}\sqrt{6}$

13. 设常数 $a > 0$. 若 $9x + \frac{a^2}{x} \geq a+1$ 对一切正实数 x 成立，则 a 的取值范围为 $[\frac{1}{5}, \infty)$.

【答案】 $[\frac{1}{5}, \infty)$

【解析】 考查均值不等式的应用。

由题知，当 $x > 0$ 时， $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} \geq 2\sqrt{9x + \frac{a^2}{x}} = 6a \geq a+1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{5}$

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为1. 记以 A 为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ；以 C 为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$. 若 $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ 且 $i \neq j, k \neq l$ ，则 $(\vec{a}_i + \vec{a}_j) \cdot (\vec{c}_k + \vec{c}_l)$ 的最小值是 -5 .

【答案】 -5

【解析】 根据对称性，

当向量 $(\vec{a}_i + \vec{a}_j)$ 与 $(\vec{c}_k + \vec{c}_l)$ 互为相反向量，且它们的模最大时， $(\vec{a}_i + \vec{a}_j)(\vec{c}_k + \vec{c}_l)$ 最小。这时 $\vec{a}_i = \vec{AC}, \vec{a}_j = \vec{AD}, \vec{c}_k = \vec{CA}, \vec{c}_l = \vec{CB}$, $(\vec{a}_i + \vec{a}_j)(\vec{c}_k + \vec{c}_l) = -|\vec{a}_i + \vec{a}_j|^2 = -5$.

二、选择题（本大题共有4小题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分。

15. 函数 $f(x) = x^2 - 1$ ($x \geq 0$) 的反函数为 $f^{-1}(x)$ ，则 $f^{-1}(2)$ 的值是 (A)

(A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $1+\sqrt{2}$ (D) $1-\sqrt{2}$

【答案】 A

【解析】 由反函数的定义可知， $x \geq 0, 2 = f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

选A

16. 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | (x-1)(x-a) \geq 0\}$, $B = \{x | x \geq a-1\}$. 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则 a 的取值范围为 (B)

(A) $(-\infty, 2)$ (B) $(-\infty, 2]$ (C) $(2, +\infty)$ (D) $[2, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 方法：代值法，排除法。当 $a=1$ 时， $A=\mathbb{R}$ ，符合题意；当 $a=2$ 时，
 $\because B = [1, +\infty), A = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \therefore A \cup B = \mathbb{R}$, 符合题意。

综上，选B

标准解法如下： $\because B = [a-1, +\infty), A \cup B = \mathbb{R} \therefore A \supseteq (-\infty, a-1)$

由 $(x-1)(x-a) \geq 0 \Rightarrow$ 当 $a=1$ 时， $x \in \mathbb{R}$, 当 $a=1$ 符合题意；当 $a > 1$ 时 $x \in (-\infty, 1] \cup [a, +\infty)$,

$\Rightarrow 1 \geq a-1$ 解得 $1 < a \leq 2$; 当 $a < 1$ 时 $x \in (-\infty, a] \cup [1, +\infty) \Rightarrow a \geq a-1 \Rightarrow a < 1$.

综上， $a \leq 2$

选B

17. 钱大姐常说“好货不便宜”，她这句话的意思是：“好货”是“不便宜”的 (A)

(A) 充分条件 (B) 必要条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

【答案】 A

【解析】 便宜没好货 \Leftrightarrow 便宜则不是好货 \Leftrightarrow 好货则不便宜

所以“好货”是“不便宜”的充分条件

选A

当点 (x, y) 分别在 $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ 上时， $x+y$ 的最大值分别是 M_1, M_2, \dots ，则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n =$ (D)

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 椭圆方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{ny^2}{4n+1} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ u = x + y \end{cases} \Rightarrow x^2 + (u-x)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 2ux + u^2 - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 4u^2 - 8(u^2 - 4) \geq 0$

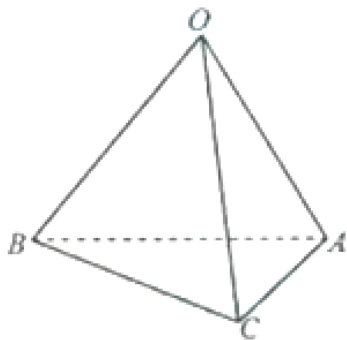
$\Rightarrow u^2 - 2(u^2 - 4) \geq 0 \Rightarrow 8 \leq u^2 \Rightarrow u \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, 所以 $x+y$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$

选D

三、解答题（本大题共有5下题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19.（本题满分12分）

如图，正三棱锥O-ABC的底面边长为2，高为1，求该三棱锥的体积及表面积。



第 19 题图

【答案】 $V_{O-ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3}; S_{O-ABC} = 3\sqrt{3}$

【解析】 三棱锥 $O-ABC$ 的体积 $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$

设 O 在面 ABC 中的射影为 Q , BC 的中点为 E , 则 $OQ = 1$, $QE = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 在 $RT\triangle OQE$ 中

$$OE^2 = OQ^2 + EQ^2 \Rightarrow 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow OE = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

三棱锥 $O-ABC$ 的表面积 $S_{O-ABC} = 3S_{\triangle OBC} + S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \frac{BC}{2} \cdot OE + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

所以, 三棱锥 $O-ABC$ 的体积 $V_{O-ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 表面积 $S_{O-ABC} = 3\sqrt{3}$

20. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分9分.

甲厂以 x 千克/小时的速度匀速生产某种产品 (生产条件要求 $1 \leq x \leq 10$), 每小时可获得的利润是 $100\left(5x + 1 - \frac{3}{x}\right)$ 元.

(1) 求证: 生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a\left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ 元;

(2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该选取何种生产速度? 并求此最大利润.

【答案】 (1) 见下

(2) 当生产速度为 6 千克/小时, 这时获得最大利润为 457500 元.

【解析】 (1) 证明: 由题知, 生产 a 千克该产品所需要的时间 $t = \frac{a}{x}$ 小时,

所获得的利润 $y = \frac{a}{x} \cdot 100\left(5x + 1 - \frac{3}{x}\right) = 100a\left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ (元), 其中 $1 \leq x \leq 10$.

所以, 生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a\left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ 元; (证毕)

(2) 由 (1) 知, 生产 900 千克该产品即 $a=900$ 千克时, 获得的利润

$$y = 100 \cdot 900\left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 90000\left[5 + \frac{1}{x}\left(1 - 3 \cdot \frac{1}{x}\right)\right]$$

由二次函数的知识可知, 当 $\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$, 即 $x=6$ 时, $y \leq 90000\left[5 + \frac{1}{6}\left(1 - 3 \cdot \frac{1}{6}\right)\right]$

$$= 450000 + 7500 = 457500(\text{元})$$

所以，当生产速度为6千克/小时，这时获得最大利润为457500元。

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x)$ ，其中常数 $\omega > 0$.

(1) 令 $\omega=1$ ，判断函数 $F(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2) 令 $\omega=2$ ，将函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像. 对任意 $a \in \mathbb{R}$ ，求 $y=g(x)$ 在区间 $[a, a+10\pi]$ 上零点个数的所有可能值.

【答案】 (1) 不是奇函数，也不是偶函数。

(2) 20, 21

【解析】 (1)

$$\omega = 1 \text{ 时, } f(x) = 2\sin x, F(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\sin x + 2\cos x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \because \text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi, y = 2\sqrt{2}\sin x \text{ 是奇函数,}$$

\therefore 图像左移 $\frac{\pi}{4}$ 后得 $f(x) = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，即不是奇函数，也不是偶函数。

(2) $\omega=2$ ，将函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位，得到函数 $y=g(x)$ ：

$$f(x) = 2\sin 2x, g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1, \text{最小正周期 } T = \pi.$$

令 $f(x) = 0 \Rightarrow \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ 在一个周期内最多有3个零点，最少2个零点。

所以 $y=g(x)$ 在区间 $[a, a+10\pi]$ 、其长度为10个周期上，零点个数可以取20, 21个

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分.

已知函数 $f(x) = 2 - |x|$ ，无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n)$ ， $n \in \mathbb{N}^*$

(1) 若 $a_1=0$ ，求 a_2, a_3, a_4 ；

(2) 若 $a_1 > 0$ ，且 a_1, a_2, a_3 成等比数列，求 a_1 的值.

(3) 是否存在 a_1 ，使得 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 成等差数列？若存在，求出所有这样的 a_1 ；若不存在，说明理由.

【答案】 (1) $a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 2$

(2) $a_1 = 1$ ，或 $a_1 = 2 + \sqrt{2}$

(3) $a_1 = 1$ ，且 $a_n = 1$

【解析】 (1) 由 $a_{n+1} = f(a_n) \Rightarrow a_{n+1} = 2 - |a_n|$. $a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 2$

(2) $\because a_1, a_2, a_3$ 成等比 $\Rightarrow a_3 = \frac{a_2^2}{a_1} = 2 - |a_2| \Rightarrow a_2^2 = a_1(2 - |a_2|)$ ，且 $a_2 = 2 - |a_1|$

$$\Rightarrow (2 - |a_1|)^2 = a_1[2 - |2 - |a_1||] \Rightarrow (2 - a_1)^2 = a_1[2 - |2 - a_1|]$$

分情况讨论如何：

当 $2 - a_1 \geq 0$ 时, $(2 - a_1)^2 = a_1[2 - (2 - a_1)] = a_1^2 \Rightarrow a_1 = 1$, 且 $a_1 \leq 2$

当 $2 - a_1 < 0$ 时, $(2 - a_1)^2 = a_1[2 - (a_1 - 2)] = a_1(4 - a_1) \Rightarrow 2a_1^2 - 8a_1 + 4 = 0 \Rightarrow a_1^2 - 4a_1 + 4 = 2$
 $\Rightarrow 2a_1^2 - 8a_1 + 4 = 0 \Rightarrow (a_1 - 2)^2 = 2 \Rightarrow a_1 = 2 + \sqrt{2}$, 且 $a_1 \geq 2$

综上, $a_1 = 1$, 或 $a_1 = 2 + \sqrt{2}$

(3) 假设存在公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足题意, 则: $\forall n \in N^*, a_{n+1} = 2 - |a_n| = a_n + d$

$\Rightarrow 2 - d = a_n + |a_n|$. 讨论如下:

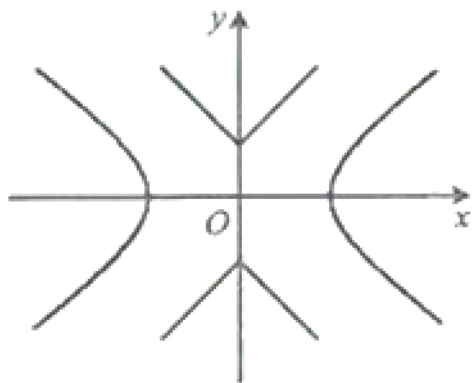
当 $a_n = m$ 即数列 $\{a_n\}$ 为常数数列时, $d = 0, 2 = 2a_n \Rightarrow a_n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

当数列 $\{a_n\}$ 不是常数数列时 $\Rightarrow a_n < 0, 2 - d = 0 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow \exists a_n > 0$, 所以不满足题意。

综上, 存在 $a_1 = 1$ 的等差数列 $\{a_n\}$, 且 $a_n = 1$ 满足题意。

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分9分.

如图, 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, 曲线 $C_2: |y| = |x| + 1$. P 是平面内一点. 若存在过点 P 的直线与 C_1 、 C_2 都有共同点, 则称 P 为“ C_1 - C_2 型点”.



第 23 题图

(1) 在正确证明 C_1 的左焦点是“ C_1 - C_2 型点”时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);

(2) 设直线 $y = kx$ 与 C_2 有公共点, 求证 $|k| > 1$, 进而证明圆不是“ C_1 - C_2 型点”;

(3) 求证: 圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内的点都不是“ C_1 - C_2 型点”.

【答案】 (1) $\sqrt{3}y - x - \sqrt{3} = 0$

【解析】 (1)

由 C_1 方程: $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 可知: $a^2 = 2, b^2 = 1, c^2 = a^2 + b^2 = 3, F_1(-\sqrt{3}, 0)$

显然, 由双曲线 C_1 的几何图像性质可知, 过 F_1 的任意直线都与曲线 C_1 相交. 从曲线 C_2 图像上取点 $P(0, 1)$, 则直线 PF_1 与两曲线 C_1 、 C_2 均有交点. 这时直线方程为

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3}y - x - \sqrt{3} = 0$$

(2) 先证明“若直线 $y = kx$ 与 C_2 有公共点, 则 $|k| > 1$ ”.

双曲线 C_1 的渐近线: $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}x$.

若直线 $y = kx$ 与双曲线 C_1 有交点, 则 $k \in A = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

若直线 $y = kx$ 与双曲线 C_2 有交点, 则 $k \in B = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

所以直线 $y=kx$ 与 C_2 有公共点, 则 $|k| > 1$. (证毕)

$\therefore A \cap B = \emptyset, \therefore$ 直线 $y = kx$ 与曲线 C_1 、 C_2 不能同时有公共交点。

所以原点不是“ C_1 - C_2 型点”; (完)

(3) 设直线 l 过圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内一点, 则直线 l 斜率不存在时与曲线 C_1 无交点。

设直线 l 方程为: $y = kx + m$, 则: $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2m^2 - 1 < k^2$

假设直线 l 与曲线 C_2 相交上方, 则 $y \geq 1$

2013年全国普通高等学校招生统一考试

上海 数学试卷(文史类)

答案要点及评分标准

说明

1. 本解答列出试题的解法, 如果考生的解法与所列解法不同, 可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2. 评阅试卷, 应坚持每题评阅到底, 不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅. 当考生的解答在某一步出现错误, 影响了后继部分, 但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时, 可视影响程度决定后面部分的给分, 这时原则上不应超过后面部分应给分数之半. 如果有较严重的概念性错误, 就不给分.

解答

一、(第1题至第14题)

1. $0 < x < \frac{1}{2}$ 2. 15 3. -2 4. 1 5. $\frac{2\pi}{3}$ 6. 78
7. -2 8. $\log_3 4$ 9. $-\frac{7}{9}$ 10. $\sqrt{3}$ 11. $\frac{5}{7}$ 12. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
13. $[\frac{1}{5}, +\infty)$ 14. -5

二、(第15题至第18题)

题 号	15	16	17	18
代 号	A	B	A	D

三、(第19题至第23题)

19. [解] 由已知条件可知, 正三棱锥 $O-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形,

经计算得底面 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 2分

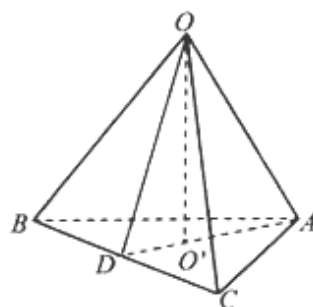
所以该三棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 4分

设 O' 是正三角形 ABC 的中心.

由正三棱锥的性质可知, OO' 垂直于平面 ABC .

延长 AO' 交 BC 于 D , 得 $AD = \sqrt{3}$, $O'D = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 7分

又因为 $OO' = 1$, 所以正三棱锥的斜高 $OD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 9分



第19题图

故侧面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

所以该三棱锥的表面积为 $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$,

因此, 所求三棱锥的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 表面积为 $3\sqrt{3}$ 12分

20. [解] (1) 生产 a 千克该产品, 所用的时间是 $\frac{a}{x}$ 小时, 3分

所获得的利润为 $100 \left(5x + 1 - \frac{3}{x} \right) \cdot \frac{a}{x}$.

所以, 生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$ 元. 5分

(2) 生产 900 千克该产品, 获得的利润为 $90000 \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$, $1 \leq x \leq 10$ 7分

记 $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} + 5$, $1 \leq x \leq 10$,

则 $f(x) = -3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{12} + 5$, 当且仅当 $x = 6$ 时取到最大值. 11分

获得最大利润 $90000 \times \frac{61}{12} = 457500$ 元.

因此甲厂应以 6 千克/小时的速度生产, 可获得最大利润为 457500 元. 14分

21. [解] (1) $f(x) = 2\sin x$,

$F(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2(\sin x + \cos x)$ 2分

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$, $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq F\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 4分

所以, $F(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数. 6分

(2) $f(x) = 2\sin 2x$,

将 $y = f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位后得到

$y = 2\sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 的图像, 所以 $g(x) = 2\sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 8分

令 $g(x) = 0$, 得 $x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$ 或 $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

因为 $[a, a + 10\pi]$ 恰含 10 个周期, 所以,

当 a 是零点时, 在 $[a, a + 10\pi]$ 上零点个数为 21; 11分

当 a 不是零点时, $a + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 也都不是零点, 区间 $[a + k\pi, a + (k + 1)\pi]$ 上恰有两个零点, 故在 $[a, a + 10\pi]$ 上有 20 个零点.

综上, $y = g(x)$ 在 $[a, a + 10\pi]$ 上零点个数的所有可能值为 21 或 20. 14分

22. [解] (1) $a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 2$ 3分

$$(2) a_2 = 2 - |a_1| = 2 - a_1, a_3 = 2 - |a_2| = 2 - |2 - a_1|.$$

① 当 $0 < a_1 \leq 2$ 时, $a_3 = 2 - (2 - a_1) = a_1$, 所以 $a_1^2 = (2 - a_1)^2$, 得 $a_1 = 1$ 5分

② 当 $a_1 > 2$ 时, $a_3 = 2 - (a_1 - 2) = 4 - a_1$, 所以 $a_1(4 - a_1) = (2 - a_1)^2$,

$$\text{得 } a_1 = 2 - \sqrt{2} \text{ (舍去) 或 } a_1 = 2 + \sqrt{2}.$$

综合①②得 $a_1 = 1$ 或 $a_1 = 2 + \sqrt{2}$ 8分

(3) 假设这样的等差数列存在, 那么 $a_2 = 2 - |a_1|, a_3 = 2 - |2 - |a_1||$.

$$\text{由 } 2a_2 = a_1 + a_3 \text{ 得 } 2 - a_1 + |2 - |a_1|| = 2|a_1| \text{ (*)}.$$

以下分情况讨论:

① 当 $a_1 > 2$ 时, 由 (*) 得 $a_1 = 0$, 与 $a_1 > 2$ 矛盾; 10分

② 当 $0 < a_1 \leq 2$ 时, 由 (*) 得 $a_1 = 1$, 从而 $a_n = 1 (n = 1, 2, \dots)$,

所以 $\{a_n\}$ 是一个等差数列; 12分

③ 当 $a_1 \leq 0$ 时, 则公差 $d = a_2 - a_1 = (a_1 + 2) - a_1 = 2 > 0$, 因此存在 $m \geq 2$ 使得 $a_m = a_1 + 2(m-1) > 2$. 此时 $d = a_{m+1} - a_m = 2 - |a_m| - a_m < 0$, 矛盾.

综合①②③可知, 当且仅当 $a_1 = 1$ 时, a_1, a_2, a_3, \dots 构成等差数列. 16分

23. [解] (1) C_1 的左焦点为 $(-\sqrt{3}, 0)$, 写出的直线方程可以是以下形式:

$$x = -\sqrt{3} \text{ 或 } y = k(x + \sqrt{3}), \text{ 其中 } |k| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 3分}$$

(2) 因为直线 $y = kx$ 与 C_2 有公共点,

所以方程组 $\begin{cases} y = kx, \\ |y| = |x| + 1 \end{cases}$ 有实数解, 因此 $|kx| = |x| + 1$, 得 $|k| = \frac{|x| + 1}{|x|} > 1$ 6分

若原点是“ $C_1 - C_2$ 型点”, 则存在过原点的直线与 C_1, C_2 都有公共点.

考虑过原点与 C_2 有公共点的直线 $x = 0$ 或 $y = kx (|k| > 1)$.

显然直线 $x = 0$ 与 C_1 无公共点.

如果直线为 $y = kx (|k| > 1)$, 则由方程组 $\begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $x^2 = \frac{2}{1 - 2k^2} < 0$, 矛盾.

所以直线 $y = kx (|k| > 1)$ 与 C_1 也无公共点.

因此原点不是“ $C_1 - C_2$ 型点”. 9分

(3) 记圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, 取圆 O 内的一点 Q . 设有经过 Q 的直线 l 与 C_1 、 C_2 都有公共点. 显然 l 不垂直于 x 轴, 故可设 $l: y = kx + b$.

若 $|k| \leq 1$, 由于圆 O 夹在两组平行线 $y = x \pm 1$ 与 $y = -x \pm 1$ 之间, 因此圆 O 也夹在直线 $y = kx \pm 1$ 与 $y = -kx \pm 1$ 之间, 从而过 Q 且以 k 为斜率的直线 l 与 C_2 无公共点, 矛盾, 所以 $|k| > 1$ 11分

因为 l 与 C_1 有公共点, 所以方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases}$ 有实数解,

得 $(1 - 2k^2)x^2 - 4kbx - 2b^2 - 2 = 0$. 因为 $|k| > 1$, 所以 $1 - 2k^2 \neq 0$,

因此 $\Delta = (4kb)^2 - 4(1 - 2k^2)(-2b^2 - 2) = 8(b^2 + 1 - 2k^2) \geq 0$,

即 $b^2 \geq 2k^2 - 1$ 14分

因为圆 O 的圆心 $(0, 0)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{|b|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

所以 $\frac{b^2}{1 + k^2} = d^2 < \frac{1}{2}$, 从而 $\frac{1 + k^2}{2} > b^2 \geq 2k^2 - 1$, 得 $k^2 < 1$, 与 $|k| > 1$ 矛盾.

因此, 圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内的点都不是 “ $C_1 - C_2$ 型点”. 18分