

2014 年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数学（理科）

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. i 为虚数单位，则 $(\frac{1-i}{1+i})^2 = (\quad)$

- A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i

【答案】A

【解析】

试题分析：因为 $(\frac{1-i}{1+i})^2 = \frac{-2i}{2i} = -1$ ，学科网故选 A.

考点：复数的运算，容易题.

2. 若二项式 $(2x + \frac{a}{x})^7$ 的展开式中 $\frac{1}{x^3}$ 的系数是 84，则实数 $a = (\quad)$

- A. 2 B. $\sqrt[5]{4}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】C

【解析】

试题分析：因为 $C_7^r \cdot (2x)^r \cdot (\frac{a}{x})^{7-r} = C_7^r \cdot 2^r \cdot a^{7-r} \cdot x^{r-2r} = C_7^r \cdot 2^r \cdot a^{7-r} \cdot x^{-r}$ ，令 $-r = -3$ ，得 $r = 3$ ，

所以 $C_7^3 \cdot 2^3 \cdot a^{7-3} = 84$ ，解得 $a = 1$ ，故选 C. 学科网

考点：二项式定理的通项公式，容易题.

3. 设 U 为全集， A, B 是集合，则“存在集合 C 使得 $A \subseteq C, B \subseteq C_U C$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 (\quad)

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

试题分析：

①当 $A \subseteq C, B \subseteq C_U C$ ，且 $B \cap C = \emptyset$ ，则 $A \cap B = \emptyset$ ，反之当 $A \cap B = \emptyset$ ，必有 $A \subseteq C, B \subseteq C_U C$.

②当 $A=C$ ， $B \subseteq C_U C$ ，且 $B \cap C = \emptyset$ ，则 $A \cap B = \emptyset$ ，反之，若 $A \cap B = \emptyset$ ，则 $A \cap C = \emptyset$ ，

$B = C_U C$ ，所以 $A \subseteq C, B \subseteq C_U C$ 。

③当 $A=B=\emptyset$ ，则 $A \cap B = \emptyset$ ；反之， $A \cap B = \emptyset$ ，学科网 $A \subseteq C, B \subseteq C_U C$ 。

综上所述，“存在集合 C 使得 $A \subseteq C, B \subseteq C_U C$ 是 “ $A \cap B = \emptyset$ ” 的充要条件。

考点：集合与集合的关系，充分条件与必要条件判断，容易题。

4. 根据如下样本数据

| | | | | | | |
|-----|-----|-----|------|-----|------|------|
| x | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| y | 4.0 | 2.5 | -0.5 | 0.5 | -2.0 | -3.0 |

得到的回归方程为 $\hat{y} = bx + a$ ，则（ ）

- A. $a > 0, b > 0$ B. $a > 0, b < 0$ C. $a < 0, b > 0$ D. $a < 0, b < 0$

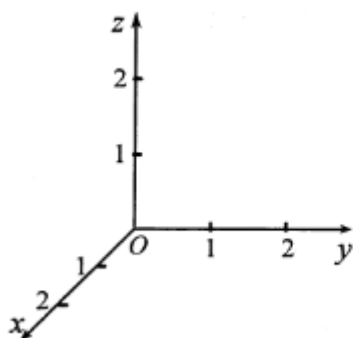
【答案】B

【解析】

试题分析：依题意，画散点图知，两个变量负相关，所以 $b < 0$ ， $a > 0$ 。选 B。

考点：已知样本数判断线性回归方程中的 b 与 a 的符号，容易题。

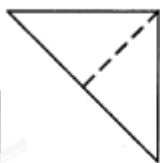
5. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，一个四面体的顶点坐标分别是 $(0, 0, 2)$ ， $(2, 2, 0)$ ， $(1, 2, 1)$ ， $(2, 2, 2)$ ，给出编号①、②、③、④的四个图，则该四面体的正视图和俯视图分别为（ ）



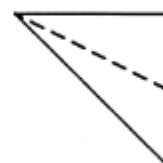
图①



图②



图③



图④

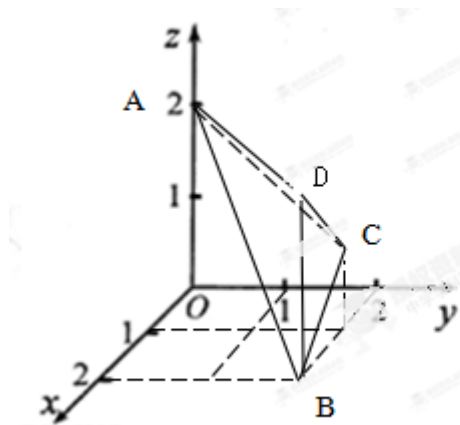
- A. ①和② B. ③和① C. ④和③ D. ④和②

【答案】D

【解析】

试题分析：设 $A(0,0,2), B(2,2,0), C(1,2,1), D(2,2,2)$ ，在坐标系中标出已知的四个点，根据三视图的画图规

则判断三棱锥的正视图为④与俯视图为②，故选 D.



考点：空间由已知条件，在空间坐标系中作出几何体的形状，再正视图与俯视图，容易题.

6. 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 满足 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$ ，则称 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的一组正交函数，给出

三组函数：① $f(x) = \sin \frac{1}{2}x, g(x) = \cos \frac{1}{2}x$ ；② $f(x) = x+1, g(x) = x-1$ ；③ $f(x) = x, g(x) = x^2$.

其中为区间 $[-1,1]$ 的正交函数的组数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】C

【解析】

试题分析：对① $\int_{-1}^1 (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x)dx = \int_{-1}^1 (\frac{1}{2} \sin x)dx = (-\frac{1}{2} \cos x)|_{-1}^1 = 0$ ，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 为区间 $[-1,1]$ 上的正交函数；

对② $\int_{-1}^1 (x+1)(x-1)dx = \int_{-1}^1 (x^2-1)dx = (\frac{1}{3}x^3-x)|_{-1}^1 = 0$ ，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 不为区间 $[-1,1]$ 上的正交函数；

对③ $\int_{-1}^1 x^3 dx = (\frac{1}{4}x^4)|_{-1}^1 = 0$ ，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 为区间 $[-1,1]$ 上的正交函数.

所以满足条件的正交函数有 2 组，故选 C.

考点：新定义题型，微积分基本定理的运用，容易题.

7. 由不等式 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y-x-2 \leq 0 \end{cases}$ 确定的平面区域记为 Ω_1 ，不等式 $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x+y \geq -2 \end{cases}$ ，确定的平面区域记为 Ω_2 ，在 Ω_1

中随机取一点，则该点恰好在 Ω_2 内的概率为 ()

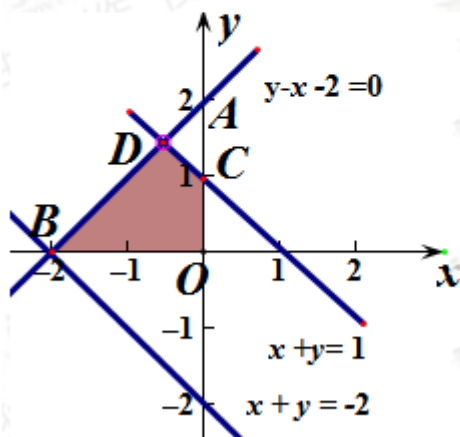
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{8}$

【答案】D

【解析】

【解析】依题意，不等式组表示的平面区域如图，易求得 $A(0,2)$ ， $B(-2,0)$ ， $C(0,1)$ ， $D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ，

由几何概型公式知，该点落在 Ω_2 内的概率为 $P = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times 2 \times 2} = \frac{7}{8}$ ，故选 D.



考点：不等式组表示的平面区域，面积型的几何概型，中等题.

8. 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土，这是我国现存最早的有系统的数学典籍，其中记载有求“盖”的术：置如其周，令相承也. 又以高乘之，三十六成一. 该术相当于给出了有圆锥的底面周长 L 与高 h ，计算其体积 V 的近似公式 $v \approx \frac{1}{36} L^2 h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为

3. 那么近似公式 $v \approx \frac{2}{75} L^2 h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为 ()

- A. $\frac{22}{7}$ B. $\frac{25}{8}$ C. $\frac{157}{50}$ D. $\frac{355}{113}$

【答案】B

【解析】

试题分析：设圆锥底面圆的半径为 r ，高为 h ，依题意， $L = 2\pi r$ ， $\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{75} (2\pi r)^2 h$ ，

所以 $\frac{1}{3} \pi = \frac{8}{75} \pi^2$ ，即 π 的近似值为 $\frac{25}{8}$ ，故选 B.

考点：《算数书》中 π 的近似计算，容易题.

9. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点， P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$ ，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 ()

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 3 D. 2

【答案】A

【解析】

试题分析：设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ($a > a_1$)，半

焦距为 c ，由面积公式得 $b^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = b_1^2 \times \sqrt{3}$ ，所以 $a^2 + a_1^2 \times \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)c^2$ ，

令 $\frac{a}{c} = 2 \cos \theta$ ， $\frac{\sqrt{3}a_1}{c} = 2 \sin \theta$ ， θ 为学科网参数，

所以 $\frac{1}{e} + \frac{1}{e_1} = \frac{a}{c} + \frac{a_1}{c} = 2 \cos \theta + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

所以椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，故选 A。

考点：椭圆、双曲线的定义与性质，利用三角换元法求最值，难度中等。

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \frac{1}{2}(|x - a^2| + |x - 2a^2| - 3a^2)$ ，若

$\forall x \in \mathbb{R}$ ， $f(x-1) \leq f(x)$ ，则实数 a 的取值范围为（ ）

- A. $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$ B. $[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$ C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ D. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

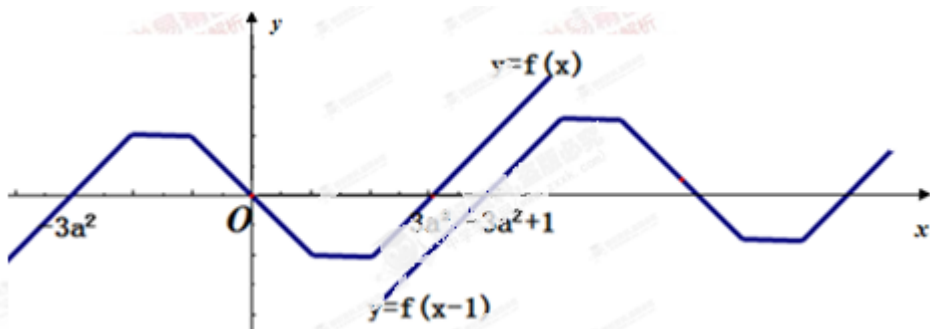
【答案】B

【解析】

试题分析：当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq a^2 \\ -a^2, & a^2 < x < 2a^2 \\ x - 3a^2, & x \geq 2a^2 \end{cases}$ ，由 $f(x)$ 是奇函数，可作出 $f(x)$ 的图像，如下图所示。

又因为 $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $f(x-1) \leq f(x)$ ，所以 $f(x-1)$ 的图像恒在 $f(x)$ 图像的下方，即将 $f(x)$ 的图像往右

平移一个单位后恒在 $f(x)$ 图像的下方，所以 $-3a^2 + 1 \geq 3a^2$ ，解得 $a \in [-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$ ，故选 B。



考点：函数的奇函数的性质、分段函数、最值及恒成立，难度中等。

二. 填空题：本大题共 6 小题，考生共需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分. 请将答案填在答题卡对应题号的位置上，答错位置，书写不清，模棱两可均不得分.

(一) 必考题 (11—14 题)

11. 设向量 $\mathbf{a} = (3, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -1)$, 若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$, 则实数 $\lambda =$ _____.

【答案】 ± 3

【解析】

试题分析：因为 $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = (3 + \lambda, 3 - \lambda)$, $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} = (3 - \lambda, 3 + \lambda)$,

因为 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$, 所以 $(3 + \lambda)(3 - \lambda) + (3 - \lambda)(3 + \lambda) = 0$, 解得 $\lambda = \pm 3$.

考点：平面向量的坐标运算、数量积，容易题. 向量的平行与垂直，学科网是高考考查的重点，应从代数和几何的角度加强训练.

12. 直线 $l_1: y = x + a$ 和 $l_2: y = x + b$ 将单位圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 分成长度相等的四段弧，则

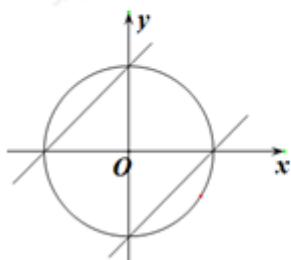
$a^2 + b^2 =$ _____.

【答案】 2

【解析】

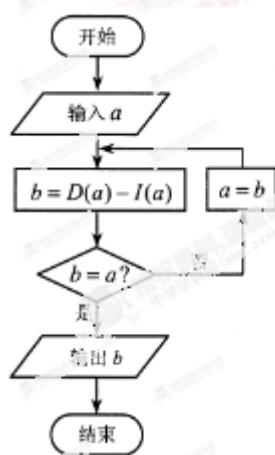
试题分析：依题意，设 l_1 与单位圆相交于 A, B 两点，则 $\angle AOB = 90^\circ$. 如图，当 $a = 1, b = -1$ 时满足题意，

所以 $a^2 + b^2 = 2$.



考点：直线与圆相交，相等弧的概念，容易题.

13. 设 a 是一个各位数字都不是 0 且没有重复数字的三位数. 将组成 a 的 3 个数字按从小到大排成的三位数记为 $I(a)$, 按从大到小排成的三位数记为 $D(a)$ (例如 $a = 815$, 则 $I(a) = 158$, $D(a) = 851$). 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 任意输入一个 a , 输出的结果 $b =$ _____.



【答案】495

【解析】

试题分析: 取 $a_1 = 815$, 则 $b_1 = 851 - 158 = 693 \neq 815$, 所以 $a_2 = 693$;

由 $a_2 = 693$, 则 $b_2 = 963 - 369 = 594 \neq 693$, 所以 $a_3 = 594$;

由 $a_3 = 594$, 则 $b_3 = 954 - 459 = 495 \neq 594$, 学科网所以 $a_4 = 495$;

由 $a_4 = 495$, 则 $b_4 = 954 - 459 = 495 = a_4$.

故输出 $b = 495$.

考点: 新定义题型, 程序框图, 当型循环结构, 容易题. 程序框图问题, 关键是要根据不同条件, 执行不同的步骤, 从而推理出正确的结论.

14. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数, 且 $f(x) > 0$, 对任意 $a > 0, b > 0$, 若经过点 $(a, f(a)), (b, -f(b))$ 的直线与 x 轴的交点为 $(c, 0)$, 则称 c 为 a, b 关于函数 $f(x)$ 的平均数, 记为 $M_f(a, b)$, 例如, 当

$f(x) = 1(x > 0)$ 时, 可得 $M_f(a, b) = c = \frac{a+b}{2}$, 即 $M_f(a, b)$ 为 a, b 的算术平均数.

(1) 当 $f(x) =$ _____ $(x > 0)$ 时, $M_f(a, b)$ 为 a, b 的几何平均数;

(2) 当 $f(x) =$ _____ $(x > 0)$ 时, $M_f(a, b)$ 为 a, b 的调和平均数 $\frac{2ab}{a+b}$;

(以上两空各只需写出一个符合要求的函数即可)

【答案】(1) $f(x) = \sqrt{x}(x > 0)$; (2) $f(x) = x(x > 0)$.

【解析】

试题分析：设 $A(a, f(a)), B(b, -f(b)), C(c, 0)$ ，则三点共线：

①依题意， $c = \sqrt{ab}$ ，则 $\frac{0-f(a)}{\sqrt{ab}-a} = \frac{0+f(b)}{\sqrt{ab}-b}$ ， $a > 0, b > 0$ ，化简得 $\frac{f(a)}{\sqrt{a}} = \frac{f(b)}{\sqrt{b}}$ ，

故可以选择 $f(x) = \sqrt{x}(x > 0)$ 。

②依题意， $c = \frac{2ab}{a+b}$ ，则 $\frac{0-f(a)}{\frac{2ab}{a+b}-a} = \frac{0+f(b)}{\frac{2ab}{a+b}-b}$ ， $a > 0, b > 0$ ，化简得 $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$ ，

故可以选择 $f(x) = x(x > 0)$ 。

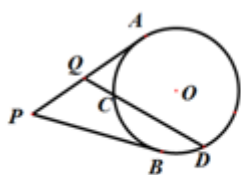
考点：两个数的几何平均数与调和平均数，难度中等. 新定义型试题是高考的热点试题，考生错误往往有二，其一为不能正确理解题意，将新问题转化为所熟悉的数学问题；其二，不具备归纳、猜想、推理、传化等数学能力. 但纵观湖北近四年高考试题，新定义型试题是必考试题，在专题复习中应加强训练。

(二) 选考题

15. (选修 4-1: 几何证明选讲)

如图， P 为 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，过 PA 的中点 Q 作割线交 $\odot O$ 于 C, D 两点，若

$QC = 1, CD = 3$ ，则 $PB =$ _____.



【答案】4

【解析】

试题分析：由切割线定理得 $QA^2 = QC \cdot QD = 1 \times (1+3) = 4$ ，所以 $QA = 2$ ，所以 $PB = PA = 4$ 。

考点：圆的切线长定理，切割线定理，容易题. 几何证明选讲一般考查圆的性质等简单的知识，主要以填空题的形式出现，难度一般较小。

16. (选修 4-4: 坐标系与参数方程)

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{\sqrt{3t}}{3} \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,

曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho = 2$, 则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_____.

【答案】 $(\sqrt{3}, 1)$

【解析】

试题分析: 由 $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{\sqrt{3t}}{3} \end{cases}$ 消去 t 得 $x^2 = 3y^2 (x \geq 0, y \geq 0)$, 由 $\rho = 2$ 学科网得 $x^2 + y^2 = 4$, 解方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 = 3y^2 \end{cases} \text{ 得 } C_1 \text{ 与 } C_2 \text{ 的交点坐标为 } (\sqrt{3}, 1).$$

考点: 参数方程、极坐标方程与平面直角坐标方程的转化, 曲线的交点, 容易题. 极坐标方程、参数方程与直角坐标方程互化, 主要以填空题的形式出现, 难度一般较小.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 11 分)

某实验室一天的温度 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 随时间 t (单位: h) 的变化近似满足函数关系:

$$f(t) = 10 - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} t - \sin \frac{\pi}{12} t, t \in [0, 24).$$

(1) 求实验室这一天的最大温差;

(2) 若要求实验室温度不高于 11°C , 则在哪段时间实验室需要降温?

【答案】 (1) 4°C ; (2) 在 10 时至 18 时实验室需要降温.

【解析】

试题分析: (1) 利用两个角的和的正弦公式把 $f(t)$ 变成 $f(t) = 10 - 2 \sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3})$, 根据 $0 \leq t < 24$ 求出

$\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}$ 的取值范围, 确定 $\sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3})$ 的取值范围, 从而求得 $f(t)$ 在 $[0, 24)$ 上的最大值与最小值; (2)

由题意知, 解三角不等式 $10 - 2 \sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}) > 11$, 得出 t 的取值范围, 从而得到结论.

试题解析: (1) 因为 $f(t) = 10 - 2(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{12} t + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} t) = 10 - 2 \sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3})$,

又 $0 \leq t < 24$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$, $-1 \leq \sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}) \leq 1$,

当 $t=2$ 时, $\sin(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3})=1$; 当 $t=14$ 时, $\sin(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3})=-1$;

于是 $f(t)$ 在 $[0,24)$ 上取得最大值 12, 取得最小值 8.

(2) 依题意, 当 $f(t) > 11$ 时实验室需要降温.

由 (1) 得 $f(t) = 10 - 2\sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3})$,

所以 $10 - 2\sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}) > 11$, 即 $\sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}) < -\frac{1}{2}$,

又 $0 \leq t < 24$, 因此 $\frac{7\pi}{6} < \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3} < \frac{11\pi}{6}$, 即 $10 < t < 18$,

故在 10 时至 18 时实验室需要降温.

考点: 三角函数的实际运用, 两个角的和的正弦公式, 三角不等式的解法.

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, 且 a_1 、 a_2 、 a_5 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在正整数 n , 使得 $S_n > 60n + 800$? 若存在, 求 n 的最小值; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $a_n = 2$ 或 $a_n = 4n - 2$.

【解析】

试题分析: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 根据 $2, 2+d, 2+4d$ 成等比数列求得 d 的值, 从而求得数列 $\{a_n\}$ 的

通项公式; (2) 由 (1) 中求得的 a_n , 根据等差数列的求和公式求出 S_n , 解不等式 $S_n > 60n + 800$ 求出满足条件的 n .

试题解析: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 依题意, $2, 2+d, 2+4d$ 成等比数列,

所以 $(2+d)^2 = 2(2+4d)$, 解得 $d = 0$ 或 $d = 4$,

当 $d = 0$ 时, $a_n = 2$; 当 $d = 4$ 时, $a_n = 2 + (n-1) \times 4 = 4n - 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2$ 或 $a_n = 4n - 2$.

(2) 当 $a_n = 2$ 时, $S_n = 2n$, 显然 $2n < 60n + 800$, 不存在正整数 n , 使得 $S_n > 60n + 800$.

当 $a_n = 4n - 2$ 时, $S_n = \frac{n[2 + (4n - 2)]}{2} = 2n^2$,

令 $2n^2 > 60n + 800$, 即 $n^2 - 30n - 400 > 0$,

解得 $n > 40$ 或 $n < -10$ (舍去)

此时存在正整数 n , 使得 $S_n > 60n + 800$ 成立, n 的最小值为 41.

综上所述, 当 $a_n = 2$ 时, 不存在正整数 n ;

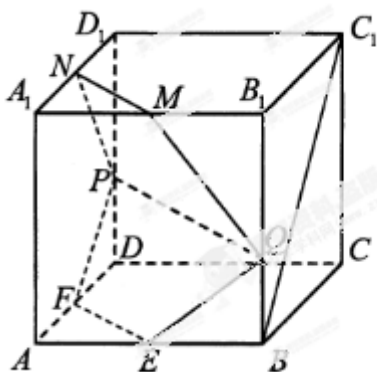
当 $a_n = 4n - 2$ 时, 存在正整数 n , 使得 $S_n > 60n + 800$ 成立, n 的最小值为 41.

考点: 等差数列、等比数列的性质, 等差数列的求和公式.

19. (本小题满分12分)

如图, 在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, M, N 分别是棱 AB, AD, A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BB_1 上移动, 且 $DP = BQ = \lambda (0 < \lambda < 2)$.

- (1) 当 $\lambda = 1$ 时, 证明: 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$;
- (2) 是否存在 λ , 使平面 $EFPQ$ 与面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



【答案】(1) 详见解析; (2) $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

试题分析：(1) 由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的性质得 $BC_1 \parallel AD_1$ ，当 $\lambda=1$ 时，证明 $FP \parallel AD_1$ ，由平行于同一条直线的两条直线平行得 $BC_1 \parallel FP$ ，根据线面平行的判定定理证明 $BC_1 \parallel$ 平面 $EF PQ$ ；(2) 解法 1，如图 2，连结 BD ，证明四边形 $EF PQ$ 与四边形 $PQ MN$ 是等腰梯形，分别取 EF 、 PQ 、 MN 的中点为 H 、 O 、 G ，连结 OH 、 OG ，证明 $\angle GOH$ 是平面 $EF PQ$ 与平面 $PQ MN$ 所成的二面角的平面角，设存在 λ ，使平面 $EF PQ$ 与平面 $PQ MN$ 所成的二面角为直二面角，求出 λ 的值；解法 2，以 D 为原点，射线 DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴的正半轴建立如图 3 的空间直角坐标系 $D-xyz$ ，用向量法求解。

试题解析：几何法：

(1) 证明：如图 1，连结 AD_1 ，由 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，知 $BC_1 \parallel AD_1$ ，当 $\lambda=1$ 时， P 是 DD_1 的中点，又 F 是 AD 的中点，所以 $FP \parallel AD_1$ ，所以 $BC_1 \parallel FP$ ，

而 $FP \subset$ 平面 $EF PQ$ ，且 $BC_1 \not\subset$ 平面 $EF PQ$ ，

故 $BC_1 \parallel$ 平面 $EF PQ$ 。

(2) 如图 2，连结 BD ，因为 E 、 F 分别是 AB 、 AD 的中点，所以 $EF \parallel BD$ ，且 $EF = \frac{1}{2}BD$ ，又 $DP = BQ$ ， $DP \parallel BQ$ ，

所以四边形 $PQBD$ 是平行四边形，

故 $PQ \parallel BD$ ，且 $PQ = BD$ ，

从而 $EF \parallel PQ$ ，且 $EF = \frac{1}{2}PQ$ ，

在 $Rt\triangle EBQ$ 和 $Rt\triangle FDP$ 中，因为 $BQ = DP = \lambda$ ， $BE = DF = 1$ ，

于是， $EQ = FP = \sqrt{1+\lambda^2}$ ，所以四边形 $EF PQ$ 是等腰梯形，

同理可证四边形 $PQ MN$ 是等腰梯形，

分别取 EF 、 PQ 、 MN 的中点为 H 、 O 、 G ，连结 OH 、 OG ，

则 $GO \perp PQ$ ， $HO \perp PQ$ ，而 $GO \cap HO = O$ ，

故 $\angle GOH$ 是平面 $EF PQ$ 与平面 $PQ MN$ 所成的二面角的平面角，

若存在 λ ，使平面 $EFPQ$ 与平面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角，则 $\angle GOH = 90^\circ$ ，

连结 EM 、 FN ，则由 $EF \parallel MN$ ，且 $EF = MN$ ，知四边形 $EFNM$ 是平行四边形，

连结 GH ，因为 H 、 G 是 EF 、 MN 的中点，所以 $GH = ME = 2$ ，

在 $\triangle GOH$ 中， $GH^2 = 4$ ， $OH^2 = 1 + \lambda^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \lambda^2 + \frac{1}{2}$ ，

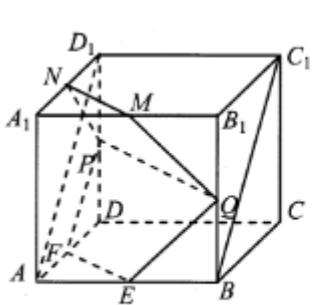
$OG^2 = 1 + (2 - \lambda)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (2 - \lambda)^2 + \frac{1}{2}$ ，

由 $OG^2 + OH^2 = GH^2$ 得 $(2 - \lambda)^2 + \frac{1}{2} + \lambda^2 + \frac{1}{2} = 4$ ，解得 $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

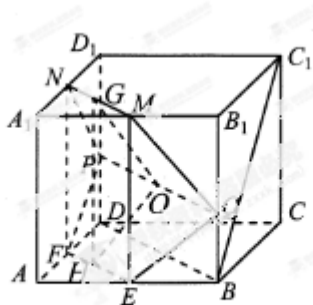
故存在 $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，使平面 $EFPQ$ 与平面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角。

向量法：

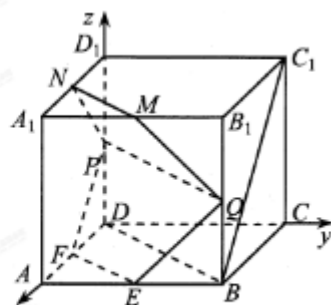
以 D 为原点，射线 DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴的正半轴建立如图 3 的空间直角坐标系 $D-xyz$ ，



第 19 题解答图 1



第 19 题解答图 2



第 19 题解答图 3

由已知得 $B(2, 2, 0)$, $C_1(0, 2, 2)$, $F(1, 0, 0)$, $P(0, 0, \lambda)$ ，

所以 $\overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2)$ ， $\overrightarrow{FP} = (-1, 0, \lambda)$ ， $\overrightarrow{FE} = (1, 1, 0)$ ，

(1) 证明：当 $\lambda = 1$ 时， $\overrightarrow{FP} = (-1, 0, 1)$ ，因为 $\overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2)$ ，

所以 $\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{FP}$ ，即 $BC_1 \parallel FP$ ，

而 $FP \subset$ 平面 $EFPQ$ ，且 $BC_1 \not\subset$ 平面 $EFPQ$ ，

故直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$ 。

(2) 设平面 $EFPQ$ 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ，

由 $\begin{cases} \overrightarrow{FE} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{FP} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + \lambda z = 0 \end{cases}$, 于是取 $\mathbf{n} = (\lambda, -\lambda, 1)$,

同理可得平面 $MNPQ$ 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (\lambda - 2, 2 - \lambda, 1)$,

若存在 λ , 使平面 $EFPQ$ 与平面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角,

则 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = (\lambda - 2, 2 - \lambda, 1) \cdot (\lambda, -\lambda, 1) = 0$,

即 $\lambda(\lambda - 2) - \lambda(2 - \lambda) + 1 = 0$, 解得 $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故存在 $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 使平面 $EFPQ$ 与平面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角.

考点: 正方体的性质, 空间中的线线、线面、面面平行于垂直, 二面角.

20. (本小题满分 12 分)

计划在某水库建一座至多安装 3 台发电机的水电站, 过去 50 年的水文资料显示, 水库年入流量 X (年入流量: 一年内上游来水与库区降水之和, 单位: 亿立方米) 都在 40 以上. 其中, 不足 80 的年份有 10 年, 不低于 80 且不超过 120 的年份有 35 年, 超过 120 的年份有 5 年. 将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率, 并假设各年的年入流量相互独立.

(1) 求未来 4 年中, 至多 1 年的年入流量超过 120 的概率;

(2) 水电站希望安装的发电机尽可能运行, 但每年发电机最多可运行台数受年入流量 X 限制, 并有如下关系:

| | | | |
|------------|---------------|----------------------|-----------|
| 年入流量 X | $40 < X < 80$ | $80 \leq X \leq 120$ | $X > 120$ |
| 发电量最多可运行台数 | 1 | 2 | 3 |

若某台发电机运行, 则该台年利润为 5000 万元; 若某台发电机未运行, 则该台年亏损 800 万元, 欲使水电站年总利润的均值达到最大, 应安装发电机多少台?

【答案】(1) 0.9477; (2) 8620, 2.

【解析】

试题分析: (1) 先求 $P_1 = P(40 < X < 80)$, $P_2 = P(80 \leq X \leq 120)$, $P_3 = P(X > 120)$, 再利用二项分布求解; (2) 记水电站年总利润为 Y (单位: 万元) ①安装 1 台发电机的情形. ②安装 2 台发电机. ③安装 3 台发电机, 分别求出 EY , 比较大小, 再确定应安装发电机台数.

试题解析：(1) 依题意， $P_1 = P(40 < X < 80) = \frac{10}{50} = 0.2$ ，

$$P_2 = P(80 \leq X \leq 120) = \frac{35}{50} = 0.7, \quad P_3 = P(X > 120) = \frac{5}{50} = 0.1,$$

由二项分布，在未来 4 年中至多有 1 年入流量超过 120 的概率为：

$$P = C_4^0(1-P_3)^4 + C_4^1(1-P_3)^3 P_3 = \left(\frac{9}{10}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 \times \frac{1}{10} = 0.9477.$$

(2) 记水电站年总利润为 Y (单位：万元)

①安装 1 台发电机的情形.

由于水库年入流量总大于 40，所以一台发电机运行的概率为 1，

对应的年利润 $Y = 5000$ ， $EY = 5000 \times 1 = 5000$.

②安装 2 台发电机.

当 $40 < X < 80$ 时，一台发电机运行，此时 $Y = 5000 - 800 = 4200$ ，

因此 $P(Y = 4200) = P(40 < X < 80) = P_1 = 0.2$ ，

当 $X \geq 80$ 时，两台发电机运行，此时 $Y = 5000 \times 2 = 10000$ ，

因此 $P(Y = 10000) = P(X \geq 80) = P_1 + P_2 = 0.8$. 由此得 Y 的分布列如下：

| | | |
|-----|------|-------|
| Y | 4200 | 10000 |
| P | 0.2 | 0.8 |

所以 $EY = 4200 \times 1 + 10000 \times 0.8 = 8840$.

③安装 3 台发电机.

依题意，当 $40 < X < 80$ 时，一台发电机运行，此时 $Y = 5000 - 1600 = 3400$ ，

因此 $P(Y = 3400) = P(40 < X < 80) = P_1 = 0.2$ ；

当 $80 \leq X \leq 120$ 时，两台发电机运行，此时 $Y = 5000 \times 2 - 800 = 9200$ ，

此时 $P(Y = 9200) = P(80 \leq X \leq 120) = P_2 = 0.7$ ，

当 $X > 120$ 时，三台发电机运行，此时 $Y = 5000 \times 3 = 15000$ ，

因此 $P(Y = 15000) = P(X > 120) = P_3 = 0.1$ ，

由此得 Y 的分布列如下：

| | | | |
|-----|------|------|-------|
| Y | 3400 | 9200 | 15000 |
|-----|------|------|-------|

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| P | 0.2 | 0.8 | 0.1 |
|-----|-----|-----|-----|

所以 $EY = 3400 \times 0.2 + 9200 \times 0.7 + 15000 \times 0.1 = 8620$.

综上，欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机 2 台.

考点：二项分布，随机变量的均值.

21. (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1，记点 M 的轨迹为 C .

(1) 求轨迹为 C 的方程；

(2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $p(-2,1)$ ，求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点，两个公共点，三个公共点时 k 的相应取值范围.

【答案】(1) $y^2 = \begin{cases} 4x(x \geq 0) \\ 0, (x < 0) \end{cases}$ ；(2) 当 $k \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时直线 l 与轨迹 C 恰有一个公共点；当

$k \in \{-1, \frac{1}{2}\} \cup [-\frac{1}{2}, 0)$ 时，故此时直线 l 与轨迹 C 恰有两个公共点；当 $k \in (-1, \frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时，故此时直线 l 与轨迹 C 恰有三个公共点.

【解析】

试题分析：(1) 设点 $M(x, y)$ ，根据条件列出等式 $|MF| = |x| + 1$ ，在用两点间的距离公式表示 $|MF|$ ，化简整理即得；(2) 在点 M 的轨迹 C 中，记 $C_1: y^2 = 4x(x \geq 0)$ ， $C_2: y = 0(x < 0)$ ，设直线 l 的方程为

$y - 1 = k(x + 2)$ ，联立方程组 $\begin{cases} y - 1 = k(x + 2) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 整理得 $ky^2 - 4y + 4(2k + 1) = 0$ ，分类讨论① $k = 0$ 时；

② $\begin{cases} \Delta < 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$ ；③ $\begin{cases} \Delta = 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$ ；④ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$ ，确定直线 l 与轨迹 C 的公共点的个数.

试题解析：(1) 设点 $M(x, y)$ ，依题意， $|MF| = |x| + 1$ ，即 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x| + 1$ ，

整理的 $y^2 = 2(|x| + x)$ ，

所以点 M 的轨迹 C 的方程为 $y^2 = \begin{cases} 4x(x \geq 0) \\ 0, (x < 0) \end{cases}$.

(2) 在点 M 的轨迹 C 中, 记 $C_1: y^2 = 4x(x \geq 0)$, $C_2: y = 0(x < 0)$,

依题意, 设直线 l 的方程为 $y - 1 = k(x + 2)$,

由方程组 $\begin{cases} y - 1 = k(x + 2) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $ky^2 - 4y + 4(2k + 1) = 0$ ①

当 $k = 0$ 时, 此时 $y = 1$, 把 $y = 1$ 代入轨迹 C 的方程得 $x = \frac{1}{4}$,

所以此时直线 l 与轨迹 C 恰有一个公共点 $(\frac{1}{4}, 1)$.

当 $k \neq 0$ 时, 方程①的判别式为 $\Delta = -16(2k^2 + k - 1)$ ②

设直线 l 与 x 轴的交点为 $(x_0, 0)$, 则由 $y - 1 = k(x + 2)$, 令 $y = 0$, 得 $x_0 = \frac{2k + 1}{k}$ ③

(i) 若 $\begin{cases} \Delta < 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$, 由②③解得 $k < -1$ 或 $k > \frac{1}{2}$.

即当 $k \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, 直线 l 与 C_1 没有公共点, 与 C_2 有一个公共点,

故此时直线 l 与轨迹 C 恰有一个公共点.

(ii) 若 $\begin{cases} \Delta = 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$, 由②③解得 $k \in \{-1, \frac{1}{2}\}$ 或 $-\frac{1}{2} \leq k < 0$,

即当 $k \in \{-1, \frac{1}{2}\}$ 时, 直线 l 与 C_1 有一个公共点, 与 C_2 有一个公共点.

当 $k \in [-\frac{1}{2}, 0)$ 时, 直线 l 与 C_1 有两个公共点, 与 C_2 没有公共点.

故当 $k \in \{-1, \frac{1}{2}\} \cup [-\frac{1}{2}, 0)$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有两个公共点.

(iii) 若 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$, 由②③解得 $-1 < k < -\frac{1}{2}$ 或 $0 < k < \frac{1}{2}$,

即当 $k \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时, 直线 l 与 C_1 有两个公共点, 与 C_2 有一个公共点.

故当 $k \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有三个公共点.

综上所述, 当 $k \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时直线 l 与轨迹 C 恰有一个公共点;

当 $k \in \{-1, \frac{1}{2}\} \cup [-\frac{1}{2}, 0)$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有两个公共点;

当 $k \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有三个公共点.

考点：两点间的距离公式，抛物线方程，直线与抛物线的位置关系.

22. (本题满分 14 分)

π 为圆周率, $e = 2.71828 \cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 求函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调区间;

(2) 求 e^3 , 3^e , e^π , π^e , 3^π , π^3 这 6 个数中的最大数与最小数;

(3) 将 e^3 , 3^e , e^π , π^e , 3^π , π^3 这 6 个数按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.

【答案】(1) 单调增区间为 $(0, e)$, 单调减区间为 $(e, +\infty)$; (2) 最大数为 3^π , 最小数为 3^e ; (3) 3^e , e^3 ,

π^e , e^π , π^3 , 3^π .

【解析】

试题分析: (1) 先求函数 $f(x)$ 的定义域, 用导数法求函数 $f(x)$ 的单调区间; (2) 利用 (1) 的结论结合函

数根据函数 $y = \ln x$ 、 $y = e^x$ 、 $y = \pi^x$ 的性质, 确定 e^3 , 3^e , e^π , π^e , 3^π , π^3 这 6 个数中的最大数与

最小数; (3) 由 (1), (2) 的结论只需比较 e^3 与 π^e 和 e^π 与 π^3 的大小, $0 < x < e$ 时, $f(x) < f(e) = \frac{1}{e}$,

即 $\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e}$, 在上式中, 令 $x = \frac{e^2}{\pi}$, 又 $\frac{e^2}{\pi} < e$, 则 $\ln \frac{e^2}{\pi} < \frac{e}{\pi}$, 即得 $\ln \pi > 2 - \frac{e}{\pi}$, 整理得 $e \ln \pi > e(2 - \frac{e}{\pi})$,

估算 $e(2 - \frac{e}{\pi})$ 的值, 比较 $e(2 - \frac{e}{\pi})$ 与 3 的大小, 从而确定 e^3 与 π^e 的大小关系, 再根据

$3 \ln \pi > 6 - \frac{3e}{\pi} > 6 - e > \pi$, 确定 e^π 与 π^3 的大小关系, 最后确定 6 个数从小到大的顺序.

试题解析: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因为 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 所以 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $f'(x) > 0$, 即 $0 < x < e$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $f'(x) < 0$, 即 $x > e$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减;

故函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, e)$, 单调减区间为 $(e, +\infty)$.

(2) 因为 $e < 3 < \pi$, 所以 $e \ln 3 < e \ln \pi$, $\pi \ln e < \pi \ln 3$, 即 $\ln 3^e < \ln \pi^e$, $\ln e^\pi < \ln 3^\pi$,

于是根据函数 $y = \ln x$ 、 $y = e^x$ 、 $y = \pi^x$ 在定义域上单调递增,

所以 $3^e < \pi^e < \pi^3$, $e^3 < e^\pi < 3^\pi$,

故这 6 个数的最大数在 π^3 与 3^π 之中, 最小数在 3^e 与 e^3 之中,

由 $e < 3 < \pi$ 及 (1) 的结论得 $f(\pi) < f(3) < f(e)$, 即 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln 3}{3} < \frac{\ln e}{e}$,

由 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln 3}{3}$ 得 $\ln \pi^3 < \ln 3^\pi$, 所以 $3^\pi > \pi^3$,

由 $\frac{\ln 3}{3} < \frac{\ln e}{e}$ 得 $\ln 3^e < \ln e^3$, 所以 $3^e < e^3$,

综上, 6 个数中的最大数为 3^π , 最小数为 3^e .

(3) 由 (2) 知, $3^e < \pi^e < \pi^3$, $3^e < e^3$, 又由 (2) 知, $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$,

故只需比较 e^3 与 π^e 和 e^π 与 π^3 的大小,

由 (1) 知, 当 $0 < x < e$ 时, $f(x) < f(e) = \frac{1}{e}$, 即 $\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e}$.

在上式中, 令 $x = \frac{e^2}{\pi}$, 又 $\frac{e^2}{\pi} < e$, 则 $\ln \frac{e^2}{\pi} < \frac{e}{\pi}$, 即得 $\ln \pi > 2 - \frac{e}{\pi}$ ①

由①得, $e \ln \pi > e(2 - \frac{e}{\pi}) > 2.7 \times (2 - \frac{2.71}{3.1}) > 2.7 \times (2 - 0.88) = 3.024 > 3$,

即 $e \ln \pi > 3$, 亦即 $\ln \pi^e > \ln e^3$, 所以 $e^3 < \pi^e$,

又由①得, $3 \ln \pi > 6 - \frac{3e}{\pi} > 6 - e > \pi$, 即 $3 \ln \pi > \pi$, 所以 $e^\pi > \pi^3$,

综上所述, $3^e < e^3 < \pi^e < e^\pi < \pi^3 < 3^\pi$, 即 6 个数从小到大的顺序为 3^e , e^3 , π^e , e^π , π^3 , 3^π .

考点: 导数法求函数的单调性、单调区间, 对数函数的性质, 比较大小.