2010年辽宁高考理科数学真题及答案

第I卷

一、选择墨：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，

（1） 已知A，B均为集合U={1,3,5,7,9}的子集，且A∩B={3},($\complement_U$B∩A={9},则A=

（A）{1,3} (B){3,7,9} (C){3,5,9} (D){3,9}

(2)设a,b为实数，若复数$\dfrac{1+2i}{a+bi}=1+i$，则

（A）$a=\dfrac{3}{2},b=\dfrac{1}{2}$ (B) $a=3,b=1$

(C) $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2}$ (D) $a=1,b=3$

（3）两个实习生每人加工一个零件．加工为一等品的概率分别为$\dfrac{2}{3}$和$\dfrac{3}{4}$，两个零件是否加工为一等品相互独立，则这两个零件中恰有一个一等品的概率为

（A）$\dfrac{1}{2}$ (B)$\dfrac{5}{12}$ (C)$\dfrac{1}{4}$ (D)$\dfrac{1}{6}$

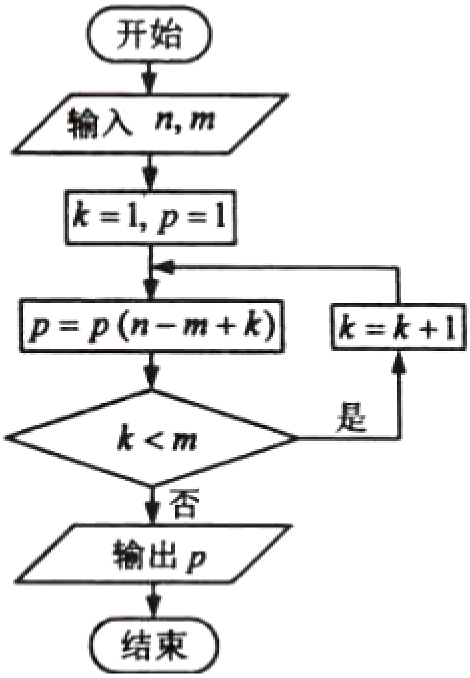
(4)如果执行右面的程序框图，输入正整数n，m，满足n≥m，那么输出的P等于

（A）C_n^{m-1}

(B) A_n^{m-1}

(C) C_n^m

(D) A_n^m



（5）设ω>0,函数y=sin(ωx+$\dfrac{\pi}{3}$)+2的图像向右平移$\dfrac{4\pi}{3}$个单位后与原图像重合，则ω的最小值是

（A）$\dfrac{2}{3}$ (B)$\dfrac{4}{3}$ (C)$\dfrac{3}{2}$ (D)3

（6）设{a_n}是有正数组成的等比数列，S_n为其前n项和。已知a_2a_4=1, $S_3=7$,则$S_5=$

（A）$\dfrac{15}{2}$　(B) $\dfrac{31}{4}$　(C) $\dfrac{33}{4}$　(D) $\dfrac{17}{2}$

(7)设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l, P 为抛物线上一点, PA⊥l, A 为垂足．如果直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 那么|PF|=

(A) $4\sqrt{3}$　(B)8　(C) $8\sqrt{3}$　(D) 16

(8)平面上 O, A, B 三点不共线，设 $\overline{OA}=a, \overline{OB}=b$，则△OAB 的面积等于

(A) $\sqrt{|a|^2|b|^2-(a\bullet b)^2}$　(B) $\sqrt{|a|^2|b|^2+(a\bullet b)^2}$

(C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|a|^2|b|^2-(a\bullet b)^2}$　(D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|a|^2|b|^2+(a\bullet b)^2}$

(9)设双曲线的一个焦点为 F；虚轴的一个端点为 B，如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直，那么此双曲线的离心率为

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

(10)已知点 P 在曲线 y=$\dfrac{4}{e^x+1}$上，a 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角，则 a 的取值范围是

(A)[0, $\dfrac{\pi}{4}$)　(B) $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$　$(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}]$　(D) $[\dfrac{3\pi}{4},\pi)$

(11)已知 a>0，则 x_0满足关于 x 的方程 ax=6 的充要条件是

(A) $\exists x\in R,\dfrac{1}{2}ax^2-bx\geq\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$　(B) $\exists x\in R,\dfrac{1}{2}ax^2-bx\leq\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

(C) $\forall x\in R,\dfrac{1}{2}ax^2-bx\geq\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$　(D) $\forall x\in R,\dfrac{1}{2}ax^2-bx\leq\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

(12) (12)有四根长都为 2 的直铁条，若再选两根长都为 a 的直铁条，使这六根铁条端点处相连能够焊接成一个三棱锥形的铁架，则 a 的取值范围是

(A)（0, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$）　(B)（1, $2\sqrt{2}$）

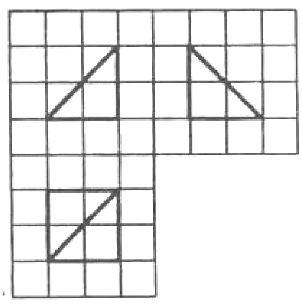
(C)（$\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$）　(D)（0, $2\sqrt{2}$）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

（13）$(1+x+x^2)(x-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项为________.

（14）已知 $-1<x+y<4$ 且 $2<x-y<3$，则 $z=2x-3y$ 的取值范围是_______（答案用区间表示）

（15）如图，网格纸的小正方形的边长是 1，在其上用粗线画出了某多面体的三视图，则这个多面体最长的一条棱的长为______.



（16）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=33, a_{n+1}-a_n=2n$，则$\dfrac{a_n}{n}$的最小值为__________.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 的对边，且

$$2a\sin A=(2a+c)\sin B+(2c+b)\sin C.$$

（Ⅰ）求 A 的大小；

（Ⅱ）求$\sin B+\sin C$的最大值.

（18）（本小题满分 12 分）

为了比较注射 A，B 两种药物后产生的皮肤疱疹的面积，选 200 只家兔做试验，将这 200 只家兔随机地分成两组，每组 100 只，其中一组注射药物 A，另一组注射药物 B。

（Ⅰ）甲、乙是 200 只家兔中的 2 只，求甲、乙分在不同组的概率；

（Ⅱ）下表 1 和表 2 分别是注射药物 A 和 B 后的试验结果.（疱疹面积单位：mm^2）

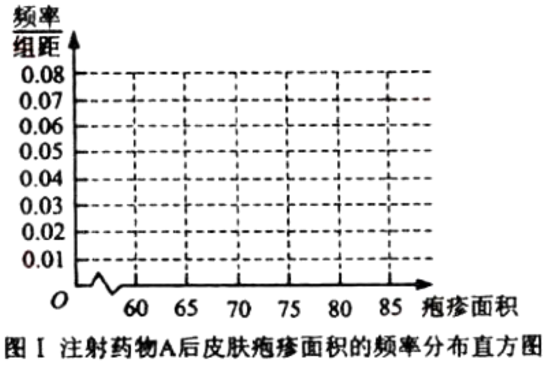
表 1：注射药物 A 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)
频数	30	40	20	10

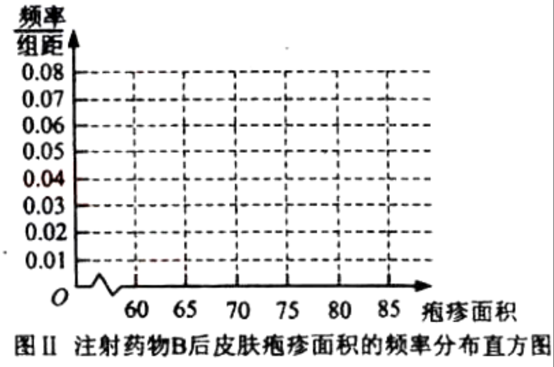
表 2：注射药物 B 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)	[80,85)
频数	10	25	20	30	15

（ⅰ）完成下面频率分布直方图，并比较注射两种药物后疱疹面积的中位数大小；



图Ⅰ 注射药物A后皮肤疱疹面积的频率分布直方图



图Ⅱ 注射药物B后皮肤疱疹面积的频率分布直方图

（ⅱ）完成下面2×2列联表，并回答能否有99.9%的把握认为“注射药物A后的疱疹面积与注射药物B后的疱疹面积有差异”.

表3：

	疱疹面积小于$70mm^2$	疱疹面积不小于$70mm^2$	合计
注射药物A	$a=$	$b=$	
注射药物B	$c=$	$d=$	
合计			$n=$

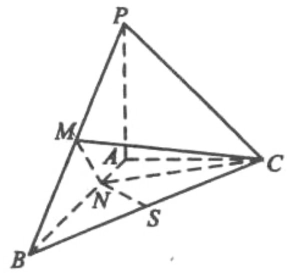
附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

（19）（本小题满分12分）

已知三棱锥P－ABC中，PA⊥ABC，AB⊥AC，PA=AC=½AB，N为AB上一点，AB=4AN,M,S分别为PB,BC的中点.

（Ⅰ）证明：CM⊥SN；

（Ⅱ）求SN与平面CMN所成角的大小.



(20)（本小题满分12分）

设椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为F，过点F的直线与椭圆C相交于A，B两点，直线l的倾斜角为60°, $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$.

(I)　求椭圆C的离心率；

(II)　如果|AB|=$\dfrac{15}{4}$，求椭圆C的方程.

（21）（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$

（I）讨论函数$f(x)$的单调性；

（II）设 $a<-1$. 如果对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)\geq 4|x_1-x_2|$，求 a 的取值范围。

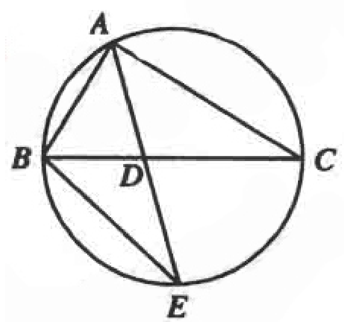
请考生在第（22）、（23）、（24）三题中任选一题做答，如果多做，则按所作的第一题记分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上吧所选题目对应题号下方的方框涂黑。

（22）（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

如图，ΔABC 的角平分线 AD 的延长线交它的外接圆于点 E

（I）证明：$\Delta ABE \backsim \Delta ADC$

（II）若 ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{2}AD\cdot AE$，求 $\angle BAC$ 的大小。



（23）（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

已知 P 为半圆 C：$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leq\theta\leq\pi$）上的点，点 A 的坐标为（1,0），O 为坐标原点，点 M 在射线 OP 上，线段 OM 与 C 的弧 $\overset{\frown}{AP}$ 的长度均为 $\frac{\pi}{3}$。

（I）以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，求点 M 的极坐标；

（II）求直线 AM 的参数方程。

（24）（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知 a,b,c 均为正数，证明：$a^2+b^2+c^2+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2\geq 6\sqrt{3}$，并确定 a,b,c 为何值时，等号成立。

参考答案

一、选择题

（1）D　（2）A　（3）B　（4）D　（5）C　（6）B

（7）B　（8）C　（9）D　（10）D　（11）C　（12）A

二、填空题

（13）-5　（14）（3,8）　（15）$2\sqrt{3}$　（16）$\frac{21}{2}$

（17）解：

（Ⅰ）由已知，根据正弦定理得 $2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$

即　$a^2=b^2+c^2+bc$

由余弦定理得　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

故　$\cos A=-\frac{1}{2}$，A=120°　　……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得：

$$\sin B+\sin C=\sin B+\sin(60^\circ-B)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$$
$$=\sin(60^\circ+B)$$

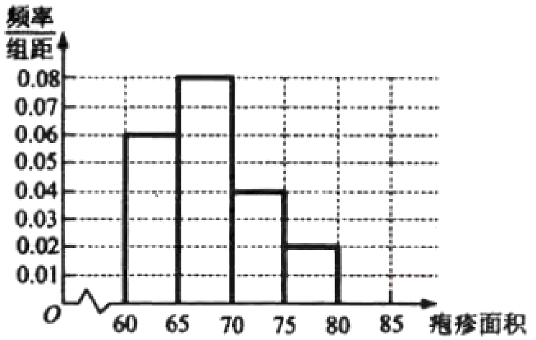
故当 B=30° 时，sinB+sinC 取得最大值 1。　　……12 分

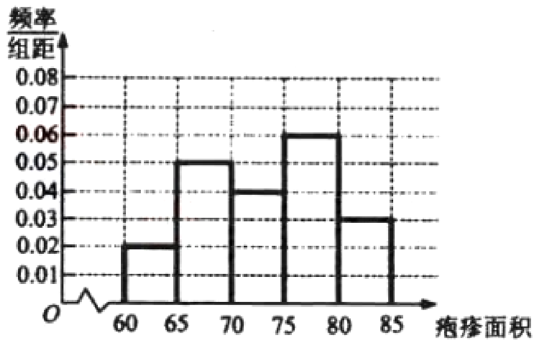
（18）解：

（Ⅰ）甲、乙两只家兔分在不同组的概率为

$$P=\frac{2C_{198}^{99}}{C_{200}^{100}}=\frac{100}{199}$$　　……4 分

（Ⅱ）（i）





图Ⅰ注射药物A后皮肤疱疹面积的频率分布直方图　　图Ⅱ注射药物B后皮肤疱疹面积的频率分布直方图

可以看出注射药物 A 后的疱疹面积的中位数在 65 至 70 之间，而注射药物 B 后的疱疹面积的中位数在 70 至 75 之间，所以注射药物 A 后疱疹面积的中位数小于注射药物 B 后疱疹面积的中位数。　　……8 分

（ii）表 3：

	疱疹面积小于 $70mm^2$	疱疹面积不小于 $70mm^2$	合计
注射药物 A	$a=70$	$b=30$	100
注射药物 B	$c=35$	$d=65$	100
合计	105	95	$n=200$

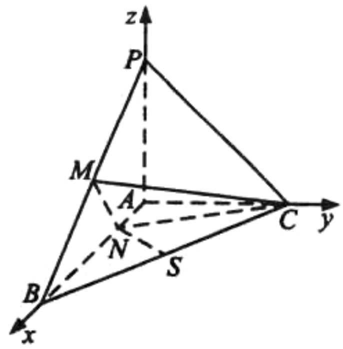
$$K^2=\frac{200\times(70\times65-35\times30)^2}{100\times100\times105\times95}\approx24.56$$

由于 $K^2>10.828$，所以有 99.9%的把握认为“注射药物 A 后的疱疹面积于注射药物 B 后的疱疹面积有差异”。

（19）证明：

设 $PA=1$，以 A 为原点，射线 AB，AC，AP 分别为 x，y，z 轴正向建立空间直角坐标系如图.

则 $P(0,0,1)$，$C(0,1,0)$，$B(2,0,0)$，$M(1,0,\frac{1}{2})$，$N(\frac{1}{2},0,0)$，$S(1,\frac{1}{2},0)$. ……4 分



（Ⅰ）$\overrightarrow{CM}=(1,-1,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{SN}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$，

因为 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{SN}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$，

所以 $CM\perp SN$. ……6 分

（Ⅱ）$\overrightarrow{NC}=(-\frac{1}{2},1,0)$，

设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 为平面 CMN 的一个法向量，

则 $\begin{cases}x-y+\frac{1}{2}z=0,\\-\frac{1}{2}x+y=0.\end{cases}$ 令 $x=2$，得 $\boldsymbol{a}=(2,1,-2)$.

……9 分

因为 $|\cos\langle\boldsymbol{a},\overrightarrow{SN}\rangle|=\left|\frac{-1-\frac{1}{2}}{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 SN 与平面 CMN 所成角为 45°. ……12 分

(20) 解:

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题意知 $y_1<0$，$y_2>0$.

(Ⅰ) 直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-c)$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

联立 $\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-c), \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得 $(3a^2+b^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0$.

解得 $y_1=\dfrac{-\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}$，$y_2=\dfrac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$.

因为 $\overline{AF}=2\overline{FB}$，所以 $-y_1=2y_2$.

即 $\dfrac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}=2\cdot\dfrac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$.

得离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$.

……6 分

(Ⅱ) 因为 $|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}|y_2-y_1|$，所以 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2+b^2}=\dfrac{15}{4}$.

由 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$ 得 $b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$. 所以 $\dfrac{5}{4}a=\dfrac{15}{4}$，得 $a=3$，$b=\sqrt{5}$.

椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

……12 分

(21) 解:

(Ⅰ) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{a+1}{x}+2ax=\dfrac{2ax^2+a+1}{x}$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加;

当 $a\leqslant -1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少;

当 $-1<a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{-\dfrac{a+1}{2a}}$. 则当 $x\in(0,\sqrt{-\dfrac{a+1}{2a}})$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(\sqrt{-\dfrac{a+1}{2a}},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-\dfrac{a+1}{2a}})$ 单调增加，在 $(\sqrt{-\dfrac{a+1}{2a}},+\infty)$ 单调减少.

……5 分

(Ⅱ) 不妨假设 $x_1\geqslant x_2$. 而 $a<-1$，由 (Ⅰ) 知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少，从而

$$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty),\ |f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$$

等价于

$$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty),\ f(x_2)+4x_2\geqslant f(x_1)+4x_1. \quad ①$$

令 $g(x)=f(x)+4x$，则 $g'(x)=\dfrac{a+1}{x}+2ax+4$.

①等价于 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少，即

$$\frac{a+1}{x}+2ax+4\leqslant 0.$$

从而 $$a\leqslant\frac{-4x-1}{2x^2+1}=\frac{(2x-1)^2-4x^2-2}{2x^2+1}=\frac{(2x-1)^2}{2x^2+1}-2.$$

故 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]$.

……12 分

（22）证明：

（Ⅰ）由已知条件，可得$\angle BAE=\angle CAD$.

因为$\angle AEB$与$\angle ACB$是同弧上的圆周角，所以$\angle AEB=\angle ACD$.

故$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$. ……5分

（Ⅱ）因为$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$，所以$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AC}$，即$AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

又$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC$，且$S=\dfrac{1}{2}AD\cdot AE$，故$AB\cdot AC\sin\angle BAC=AD\cdot AE$.

则$\sin\angle BAC=1$，又$\angle BAC$为三角形内角，所以$\angle BAC=90^\circ$. ……10分

（23）解：

（Ⅰ）由已知，M点的极角为$\dfrac{\pi}{3}$，且M点的极径等于$\dfrac{\pi}{3}$，

故点M的极坐标为$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3})$. ……5分

（Ⅱ）M点的直角坐标为$(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6})$，$A(1,0)$，故直线$AM$的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+(\dfrac{\pi}{6}-1)t, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}t, \end{cases}$$（t为参数）. ……10分

（24）证明：

（证法一）

因为 a, b, c 均为正数，由平均值不等式得

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}, \qquad ①$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 3(abc)^{-\frac{1}{3}},$$

所以 $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 \geqslant 9(abc)^{-\frac{2}{3}}$. ② ……6 分

故 $a^2+b^2+c^2+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 \geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}+9(abc)^{-\frac{2}{3}}$.

又 $3(abc)^{\frac{2}{3}}+9(abc)^{-\frac{2}{3}} \geqslant 2\sqrt{27}=6\sqrt{3}$, ③

所以原不等式成立. ……8 分

当且仅当 $a=b=c$ 时，①式和②式等号成立. 当且仅当 $3(abc)^{\frac{2}{3}}=9(abc)^{-\frac{2}{3}}$ 时，③式等号成立.

即当且仅当 $a=b=c=3^{\frac{1}{4}}$ 时，原式等号成立. ……10 分

（证法二）

因为 a,b,c 均为正数，由基本不等式得

$a^2+b^2 \geqslant 2ab$,

$b^2+c^2 \geqslant 2bc$,

$c^2+a^2 \geqslant 2ac$.

所以 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$ ①

同理 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$ ② ……6 分

故 $a^2+b^2+c^2+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2$

$\geqslant ab+bc+ac+3\frac{1}{ab}+3\frac{1}{bc}+3\frac{1}{ac}$

$\geqslant 6\sqrt{3}$. ③

所以原不等式成立 ……8 分

当且仅当 $a=b=c$ 时，① 式和 ② 式等号成立，当且仅当 $a=b=c$，$(ab)^2=(bc)^2=(ac)^2=3$ 时，③ 式等号成立.

即当且仅当 $a=b=c=3^{\frac{1}{4}}$ 时，原式等号成立. ……10 分