

2023年上海高考数学真题及答案

考生注意：

1. 本试卷共5页, 21道试题, 满分150分. 考试时间120分钟.
2. 本考试分设试卷和答题纸. 试卷包括试题与答题要求. 作答必须涂(选择题)或写(非选择题)在答题纸上, 在试卷上作答一律不得分.
3. 答卷前, 务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号, 并将核对后的条形码贴在指定位置上, 在答题纸反面清楚地填写姓名.

一、填空题(本大题共有12题, 满分54分, 第^{1~6}题每题4分, 第^{7~12}题每题5分)考生应在答题纸的相应位置填写结果.

1. 不等式 $|x - 2| < 1$ 的解集为 _____ ;

2. 已知 $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ ;

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = 3, q = 2$, 求 $s_6 =$ _____ ;

4. 已知 $\tan \alpha = 3$, 求 $\tan 2\alpha =$ _____ ;

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的值域是 _____ ;

6. 已知当 $z = 1 + i$, 则 $|1 - i \cdot z| =$ _____ ;

7. 已知 $x^2 + y^2 - 4y - m = 0$ 的面积为 $\frac{\pi}{4}$, 求 $m =$ _____ ;

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 求 $\sin A =$ _____ ;

9. 国内生产总值(GDP)是衡量地区经济状况的最佳指标, 根据统计数据显示, 某市在2020年间经济高质量增长, GDP稳步增长, 第一季度和第四季度的GDP分别为231和242, 且四个季度GDP的中位数与平均数相等, 则2020年GDP总额为 _____ ;

10. 已知 $(1 + 2023x)^{100} + (2023 - x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, 其中

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{100} \in \mathbb{R}$, 若 $0 \leq k \leq 100$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 当 $a_k < 0$ 时, a_k 的最大值是_____;

11. 公园修建斜坡, 假设斜坡起点在水平面上, 斜坡与水平面的夹角为 θ , 斜坡终点距离水平面的垂直高度为4米, 游客每走一米消耗的体能为 $(1.025 - \cos\theta)$, 要使游客从斜坡底走到斜坡顶端所消耗的总体能最少, 则 $\theta =$ _____;

12. 空间内存在三点 A, B, C , 满足 $AB = AC = BC = 1$, 在空间内取不同两点 (不计顺序), 使得这两点与 A, B, C 可以组成正四棱锥, 求方案数为_____;

二、选择题 (本题共有4题, 满分18分, ^{13、14} 每题4分, ^{15、16} 题每题5分) 每题有且只有一个正确选项, 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

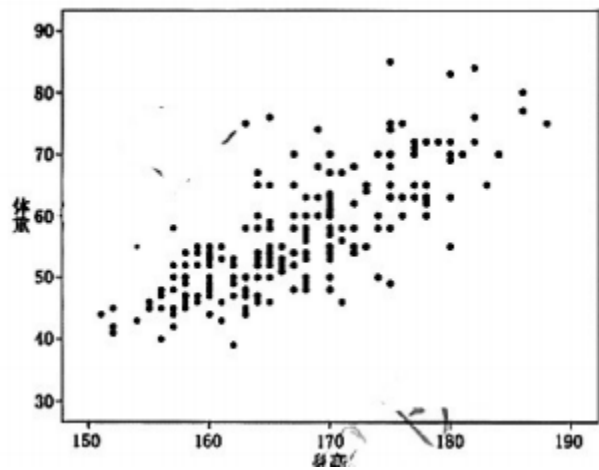
13. 已知 $P = \{1, 2\}, Q = \{2, 3\}$, 若 $M = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$, 则 $M = (\quad)$.

- A. $\{1\}$
- B. $\{2\}$
- C. $\{1, 2\}$
- D. $\{1, 2, 3\}$

14. 根据身高和体重散点图, 下列说法正确的是().

- A. 身高越高, 体重越重
- B. 身高越高, 体重越轻

C. 身高与体重成正相关



D. 身高与体重成负相关

15. 设 $a > 0$, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最小值为 s_a , 在 $[2a, 3a]$ 上的最小值为 t_a , 当 a 变化时, 以下不可能的情形是 ().

- A. $s_a > 0$ 且 $t_a > 0$
- B. $s_a < 0$ 且 $t_a < 0$
- C. $s_a > 0$ 且 $t_a < 0$
- D. $s_a < 0$ 且 $t_a > 0$

16. 在平面上, 若曲线 Γ 具有如下性质: 存在点 M , 使得对于任意点 $P \in \Gamma$, $Q \in \Gamma$ 使得

$|PM| \cdot |QM| = 1$. 则称这条曲线为“自相关曲线”. 判断下列两个命题的真假 ().

- (1) 所有椭圆都是“自相关曲线”.
- (2) 存在是“自相关曲线”的双曲线.
- A. (1) 假命题; (2) 真命题
- B. (1) 真命题; (2) 假命题
- C. (1) 真命题; (2) 真命题
- D. (1) 假命题; (2) 假命题

三、解答题(本大题共有5题, 满分78分) 解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小邀满分6分, 第2小题满分8分.

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB \parallel DC$, $AB \perp AD$, $AB = 2$, $AD = 3$, $DC = 4$.

(1) 求证: $A_1B \perp$ 面 DCC_1D

(2) 若四棱柱体积为36, 求二面角 $A_1 - BD - A$ 的大小

18. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

函数 $f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a}$ ($a, c \in R$)

(1) 当 $a = 0$ 是, 是否存在实数 c , 使得 $f(x)$ 为奇函数

(2) 函数 $f(x)$ 的图像过点 $(1,3)$, 且 $f(x)$ 的图像 x 轴负半轴有两个交点求实数 a 的取值范围

19. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分2分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

21世纪汽车博览会在上海2023年6月7日在上海举行, 下表为某汽车模型公司共有25个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1) 若小明从这些模型中随机拿一个模型, 记事件 A 为小明取到的模型为红色外观, 事件B取到模型有棕色内饰

求 $P(B)$ 、 $P(B/A)$, 并据此判断事件A和事件B是否独立

(2) 该公司举行了一个抽奖活动, 规定在一次抽奖中, 每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型, 给出以下假设: 1、拿到的两个模型会出现三种结果, 即外观和内饰均为同色、外观内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色; 2、按结果的可能性大小, 概率越小奖项越高; (3) 奖金额为一

等奖600元,二等奖300元,三等奖150元,请你分析奖项对应的结果,设 X 为奖金额,写出 X 的分布列并求出 X 的数学期望

20. (本题满分16分) 本题共有3个小题,第1小题满分4分,第2小题满分6分,第3小题满分6分.

曲线 $\Gamma: y^2 = 4x$, 第一象限内点 A 在 Γ 上, 的纵坐标是 a .

(1) 若 A 到准线距离为3, 求 a ;

(2) 若 $a = 4$, B 在 x 轴上, AB 中点在 Γ 上, 求点 B 坐标和坐标原点 O 到 AB 距离;

(3) 直线 $l: x = -3$, 令 P 是第一象限 Γ 上异于 A 的一点, 直线 PA 交 l 于 Q , H 是 P 在 l 上的投影, 若点 A 满足 “对于任意 P 都有 $|HQ| > 4$ ” 求 a 的取值范围.

21. (本题满分18分) 本题共有3个小题,第1小题满分4分,第2小题满分6分,第3小题满分8分.

令 $f(x) = \ln x$, 取点 $(a_1, f(a_1))$ 过其曲线 $y = f(x)$ 做切线交 y 轴于 $(0, a_2)$, 取点 $(a_2, f(a_2))$ 过其做切线交 y 轴于 $(0, a_3)$, 若 $a_3 < 0$ 则停止, 以此类推, 得到数列 $\{a_n\}$.

(1) 若正整数 $m \geq 2$, 证明 $a_m = \ln a_{m-1} - 1$;

(2) 若正整数 $m \geq 2$, 试比较 a_m 与 $a_{m-1} - 2$ 大小;

(3) 若正整数 $k \geq 3$, 是否存在 a_1, a_2, \dots, a_k 依次成等差数列? 若存在, 求出 a_k 的所有取值, 若不存在, 试说明理由.

参考答案

1、 (1,3)

2、 4

3、 189

$$-\frac{3}{4}$$

4、

$$[1, + \infty)$$

5、

$$\sqrt{5}$$

6、

7、 -3

$$\frac{\sqrt{7}}{4}$$

8、

9、 946

10、 49

$$\arccos \frac{40}{41}$$

11、

12、 9

13、 A

14、 C

15、 D

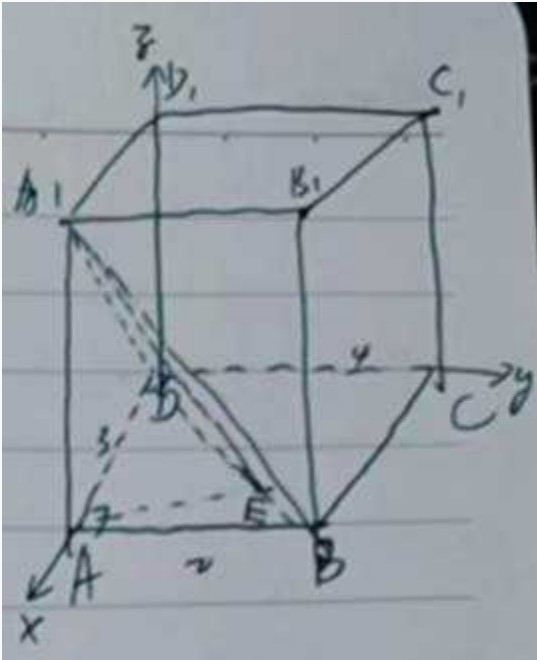
16、 B

17、

(1) 因为AB平行于CD，所以AB与平面 CDC_1D_1 平行
又因为 AA_1 平行 DD_1 ，所以AA1平行与平面 CDC_1D_1 平行

因为 AA_1 与 AB 相交于点 A ，所以平面 ABB_1A_1 与平面 CDC_1D_1 平行

因为 A_1B 属于平面 ABB_1A_1 ，所以 A_1B 平行于平面 CDC_1D_1



(2) 因为四棱柱体积为36，设 $AA_1 = h$

$$sh = 36 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (2 + 4) \cdot 3h = 36 \Rightarrow h = 4$$

所以

在底面内作 AE 垂直 BD 与 E ，连 A_1E

因为 BD 垂直 AE ， BD 垂直于 AA_1 ，所以 BD 垂直平面 AA_1E ，所以 BD 垂直 A_1E

所以 $\angle A_1EA$ 即为所求二面角的平面角

$$AE = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

在直角三角形 A_1AE 中， $AA_1 = 4$ ，

所以

$$\tan \angle A_1EA = \frac{AA_1}{AE} = \frac{2\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \cos \angle A_1EA = \frac{3\sqrt{61}}{61}$$

18、

$$f(x) = \frac{x^2 + x + c}{x}$$

(1) 当a=0时,

定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

假设 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$

$$\frac{x^2 - x + c}{x} = -\frac{x^2 + x + c}{x}$$

所以, 此方程无解, 故 $f(x)$ 不可能为奇函数

所以不存在实数c, 使得 $f(x)$ 为奇函数

(2) 因为 $f(x)$ 图像过 (1, 3), 所以 $f(1) = 3$, 即 $\frac{1 + 3a + 1 + c}{1 + a} = 3$

所以c=1

$$f(x) = \frac{x^2 + (3a + 1)x + 1}{x + a}$$

所以

令 $f(x) = 0$, 则 $x^2 + (3a + 1)x + 1 = 0$ (x不等于-a)

因为 $f(x)$ 图像与x轴负半轴有2个交点

$$\begin{cases} \Delta = (3a+1)^2 - 4 > 0 \\ x_1 + x_2 = -(3a+1) < 0 \\ a^2 - a(3a+1) + 1 \neq 0 \end{cases}$$

所以

$$a > \frac{1}{3} \text{ 且 } a \neq \frac{1}{2}$$

所以

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

所以a的取值范围为

19、

(1)

$$\because P(A) = \frac{15}{25}, P(B) = \frac{20}{25}, P(AB) = \frac{12}{25}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\because P(B|A) \neq P(B)$$

$\therefore A, B$ 不独立

(2) 设三种结果：内外均同，内同或外同，内外均不同分别为事件 A_1, A_2, A_3 ，则

$$P(A_1) = \frac{C_{12}^2 + C_8^2 + C_2^2 + C_3^2}{C_{25}^2} = \frac{98}{300}$$

$$P(A_2) = \frac{C_{12}^1 C_2^1 + C_8^1 C_3^1 + C_{12}^2 C_8^1 + C_2^1 C_3^1}{C_{25}^2} = \frac{150}{300}$$

$$P(A_3) = \frac{C_{12}^1 C_3^1 + C_2^1 C_8^1}{C_{25}^2} = \frac{52}{300}$$

\therefore

概率越小奖金越高

$$\therefore P(X=600) = P(A_3) = \frac{52}{300}$$

$$P(X=300) = P(A_1) = \frac{98}{300}$$

$$P(X=150) = P(A_2) = \frac{150}{300}$$

分布列

X	600	300
P	$\frac{52}{300}$	$\frac{98}{300}$

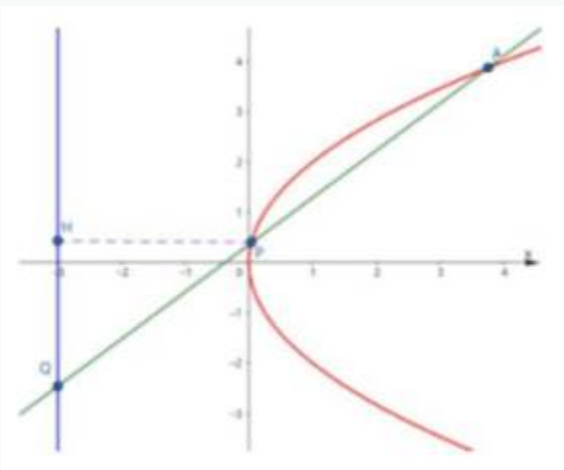
$$E(X) = 600 \cdot \frac{52}{300} + 300 \cdot \frac{98}{300} + 150 \cdot \frac{150}{300} = 277(\text{元})$$

20、

(1) 由题意得 $a > 0$, $A(\frac{a^2}{4}, a)$, 准线 $x = -1$, 则

$$\frac{a^2}{4} - (-1) = 3 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

;



当 $a = 4$ 时, $A(4, 4)$, $B(t, 0)$, B在x轴上, 设, 则线段AB的中点为

$$C\left(\frac{4+t}{2}, 2\right) \quad \Gamma: y^2 = 4x \quad 2^2 = 4 \cdot \frac{4+t}{2}$$

在 上, 则有

解得 $t = -2$, 即 $B(-2, 0)$, 则直线AB的斜率

$$k_{AB} = \frac{4-0}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$$

, 直线

$$AB: y = \frac{2}{3}(x+2) \quad 2x - 3y + 4 = 0$$

, 一般式为

$$d = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

, 则原点O到AB的距离

$$P = \left(\frac{y_0^2}{4}, y_0 \right), A \left(\frac{a^2}{4}, a \right)$$

(3) 设

$$H(-3, y_0) \quad k_{PA} = \frac{4}{y_0 + a}$$

由已知:

$$PA: y - a = \frac{4}{y_0 + a} \left(x - \frac{a^2}{4} \right)$$

令 $x = -3$,

$$y_Q = a - \frac{12 + a^2}{y_0 + a} \quad \therefore Q \left(-3, a - \frac{12 + a^2}{y_0 + a} \right)$$

$$\therefore |HQ| > 4$$

$$\therefore y_H - y_Q > 4, \text{ 即 } y_0 - a + \frac{12 + a^2}{y_0 + a} > 4$$

$$\text{即 } 4a < y_0^2 - 4y_0 + 12 = (y_0 - 2)^2 + 8 \leq 8$$

$$\text{故 } 4a < 8$$

$$\therefore a < 2 \quad (-\infty, 2)$$

即 a 的取值范围为

21、

$$(1) \text{ 由 } f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{当 } m \geq 2 \text{ 时, 曲线在}$$

$$(a_{m-1}, f(a_{m-1})) \text{ 处的切线方程为:}$$

$$y - \ln a_{m-1} = \frac{1}{a_{m-1}}(x - a_{m-1}) = \frac{x}{a_{m-1}} - 1$$

, 由

$$\text{题意令 } x = 0, \quad y = a_m = \ln a_{m-1} - 1, \quad \text{命题得证;}$$

$$(2) \quad a_m \text{ 与 } a_{m-1} - 2$$

$$a_{m+1} \text{ 与 } a_m - 2 \quad \text{即} \quad \ln a_{m-1} \text{ 与 } a_m - 2$$

$$\ln a_m - 1 - (a_m - 2) = \ln a_m - a_m + 1$$

$$\text{令 } g(x) = \ln x - x + 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad (0,1) \uparrow \quad (1, +\infty) \downarrow$$

$$g(1) = 0$$

$x=1$ 时

$$\therefore g(x) \leq 0$$

$$\therefore a_{m+1} \leq a_m - 2$$

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

(3) 假设存在 k , 使得

依次成等差数列, 所以公差

$$d = a_k - a_{k-1} = \ln a_{k-1} - 1 - a_{k-1}$$

, 构造函数

$$h(x) = \ln x - x - 1 \quad (0, +\infty)$$

, 函数的定义域

, 则

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad x \in (0, 1) \quad h'(x) > 0$$

, 易得

,

,

$$h(x) \quad x \in (1, +\infty) \quad h'(x) < 0 \quad h(x) \quad \text{严格递增;}$$

严格递增;

,

,

严格

$$h(x)_{\min} = h(1) = \ln 1 - 1 - 1 = -2$$

格递减; 所以

, 所以

$$h(x) \leq -2 \quad d \leq -2$$

, 即

, 即

$$a_k - a_{k-1} = \ln a_{k-1} - 1 - a_{k-1} \leq -2$$

，计算

$$a_2 = \ln a_1 - 1 \Rightarrow a_1 = e^{a_2+1}, \quad a_3 = \ln a_2 - 1$$

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

，若

$$a_1 + a_3 = 2a_2$$

成等差，则

，即

$$2a_2 = e^{a_2+1} + \ln a_2 - 1$$

，整理

$$e^{a_2+1} - 2a_2 + \ln a_2 - 1 = 0$$

，令

$$m(x) = e^{x+1} - 2x + \ln x - 1 = 0, \quad x > 0$$

，

$$m'(x) = e^{x+1} + \frac{1}{x} - 2$$

，因为

$$m'(x) > m'(0) = e - 2 > 0$$

，即

$$m(x)$$

在

$$(0, +\infty)$$

上递增，

结合数列的单调性，因为

$$x \rightarrow 0, \quad m(x) < 0, \quad m(1) = e^2 - 3 > 0$$

，则

$$m(x)$$

函数

$$(0, 1)$$

在

$$x_0 = a_2$$

上必有唯一的零点

，结合

$$a_1 = e^{a_2+1} > 0, \quad a_3 = \ln a_2 - 1 < 0$$

，运算停止，即存

$$a_1, a_2, a_3$$

在

$$k = 3$$

成等差数列，此时

