

2014 年普通高等学校招生全国统一考试 (辽宁卷)

理科数学

第 I 卷 (共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U = R, A = \{x | x \leq 0\}, B = \{x | x \geq 1\}$, 则集合 $C_U(A \cup B) = (\quad)$

A. $\{x | x \geq 0\}$ B. $\{x | x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x | 0 < x < 1\}$

【答案】D

【解析】

试题分析：因为 $A \cup B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$, 学科网所以 $C_U(A \cup B) = \{x | 0 < x < 1\}$, 故选 D.

考点：集合的运算.

2. 设复数 z 满足 $(z - 2i)(2 - i) = 5$, 则 $z = (\quad)$

A. $2 + 3i$ B. $2 - 3i$ C. $3 + 2i$ D. $3 - 2i$

【答案】A

【解析】

试题分析：因为 $z = \frac{5}{(2-i)} + 2i$, $z = 2 + 3i$, 故选 A.

考点：复数的运算.

3. 已知 $a = 2^{-\frac{1}{3}}, b = \log_2 \frac{1}{3}, c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 (\quad)

A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

【答案】C

【解析】

试题分析： $0 < a = 2^{-\frac{1}{3}} < 2^0 = 1, b = \log_2 \frac{1}{3} < 0, c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1$, 所以 $c > a > b$, 故选 C.

考点：1.指数对数化简；2.不等式大小比较.

4. 已知 m, n 表示两条不同直线, α 表示平面, 下列说法正确的是 ()

A. 若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$. B. 若 $m \perp \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \perp n$

C. 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n // \alpha$ D. 若 $m // \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$

【答案】B

【解析】

试题分析: 若 A. 若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 m 与 n 可能平行、相交、异面, 故 A 错误; B. 若 $m \perp \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \perp n$, 显然成立; C. 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n // \alpha$ 或 $n \subset \alpha$ 故 C 错误; D. 若 $m // \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$ 或 $n // \alpha$ 或 n 与 α 相交.

考点: 1. 命题的真假; 2. 线面之间的位置关系.

5. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是非零向量, 已知命题 P : 若 $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0, \vec{b} \bullet \vec{c} = 0$, 则 $\vec{a} \bullet \vec{c} = 0$; 命题 q : 若 $\vec{a} // \vec{b}, \vec{b} // \vec{c}$, 则 $\vec{a} // \vec{c}$, 则下列命题中真命题是 ()

A. $p \vee q$ B. $p \wedge q$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $p \vee (\neg q)$

【答案】A

【解析】

试题分析: 由题意可知, 命题 P 是假命题, 命题 q 是真命题, 故 $p \vee q$ 为真命题.

考点: 命题的真假.

6. 把椅子摆成一排, 3 人随机就座, 任何两人不相邻的做法种数为 ()

A. 144 B. 120 C. 72 D. 24

【答案】C

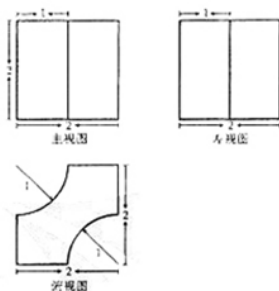
【解析】

试题分析: 如图, 将 6 把椅子依次编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 故任何两人不相邻的做法, 可安排: “1, 3, 5”; “1, 3, 6”; “1, 4, 6”; “2, 4, 6” 号位置做热坐人, 故总数由 $4 \cdot A_3^3 = 24$, 故选 D.

考点: 排列组合.

7. 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()

A. $8 - 2\pi$ B. $8 - \pi$ C. $8 - \frac{\pi}{2}$ D. $8 - \frac{\pi}{4}$



【答案】B

【解析】

试题分析：由三视图可知，该几何体的直观图是棱长为 2 的正方体，分别在两个对角截去了底面半径为 1，

高为 2 的圆柱的四分之一，故该几何体的体积为： $2^3 - 2 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 2 = 8 - \pi$.

考点：1.三视图；2.柱体的体积公式.

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，若数列 $\{2^{a_n}\}$ 为递减数列，则 ()

- A. $d < 0$ B. $d > 0$ C. $a_1 d < 0$ D. $a_1 d > 0$

【答案】C

【解析】

试题分析：因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ， $2^{a_n} = 2^{a_1 + (n-1)d} = 2^{a_1} \cdot 2^{(n-1)d}$ ，又由于 $\{2^{a_n}\}$ 为递减数

列，所以 $\frac{2^{a_1 a_n}}{2^{a_1 a_{n+1}}} = 2^{-a_1 d} > 1 = 2^0 \therefore a_1 d < 0$ ，故选 C.

考点：1.等差数列的概念；2.递减数列.

9. 将函数 $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，所得图象对应的函数 ()

- A. 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减
 B. 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 上单调递增
 C. 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减
 D. 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增

【答案】B

【解析】

试题分析：将函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，所得图象对应的函数解析式为

$$y = 3\sin(2x - \frac{2\pi}{3}), \text{ 令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } y = 3\sin(2x - \frac{2\pi}{3}) \text{ 的增区间}$$

为 $[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$, 令 $k=0$, 则可知 B 学科网正确.

考点：函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质.

10. 已知点 $A(-2, 3)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线上，过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B ，记 C 的焦点为 F ，则直线 BF 的斜率为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】

试题分析：由于点 $A(-2, 3)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线上，所以 $-\frac{p}{2} = -2 \therefore p = 4 \therefore y^2 = 8x$ ，设直

线 AB 的方程为 $x = k(y - 3) - 2 \dots (*)$ ，将 $(*)$ 与 $y^2 = 8x$ 联立，即

$$\begin{cases} x = k(y - 3) - 2 \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 8ky + 24k + 16 = 0 \dots (\otimes), \text{ 则 } \Delta = 64k^2 - 96k - 64 = 0 \therefore k = 2 \text{ (负值舍去)},$$

将 $k=2$ 代入 (\otimes) 得 $y=8$ ，即可求出 $x=8$ ，故 $B(8, 8)$ ，所以 $k_{BF} = \frac{8-0}{8-2} = \frac{4}{3}$ ，故选 D.

考点：1. 直线与抛物线的位置关系；2. 斜率公式.

11. 当 $x \in [-2, 1]$ 时，不等式 $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-5, -3]$ B. $[-6, -\frac{9}{8}]$ C. $[-6, -2]$ D. $[-4, -3]$

【答案】C

【解析】

试题分析：当 $x=0$ 时，原式恒成立；

当 $x \in (0, 1]$ 时，原式等价于 $a \geq (\frac{x^2 - 4x - 3}{x^3})_{\max}$ 恒成立；

当 $x \in [-2, 0)$ 时, 原式等价于 $a \leq (\frac{x^2 - 4x - 3}{x^3})_{\min}$ 恒成立;

令 $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3}, x \in [-2, 0) \cup (0, 1]$, $\therefore f(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3}$, 令 $t = \frac{1}{x}$, 即 $y = -3t^3 - 4t^2 + t$, $\therefore y' = -9t^2 - 8t + 1$, 可知 $(-1, \frac{1}{9})$ 为 y 的增区间, $(-\infty, -1), (\frac{1}{9}, +\infty)$ 为 y 的减区间, 所以当 $x \in (0, 1]$ 时, 即 $t \in [1, +\infty)$ 时, $t=1$ 时 $y_{\max} = -6$, 即 $f(x)_{\max} = -6 \therefore a \geq -6$; 当 $x \in [-2, 0)$ 时, 即 $t \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ 时, y 在 $(-\infty, -1)$ 上递减, 在 $(-1, -\frac{1}{2}]$ 上递增, 所以 $t=-1$ 时 $y_{\min} = -2$, 即 $f(x)_{\min} = -2 \therefore a \leq -2$; 综上, 可知 a 的取值范围是 $[-6, -2]$, 故选 C.

考点: 不等式恒成立问题.

12. 已知定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足:

① $f(0) = f(1) = 0$;

② 对所有 $x, y \in [0, 1]$, 且 $x \neq y$, 有 $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$.

若对所有 $x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| < k$, 则 k 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2\pi}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】B

【解析】

试题分析: 不妨令 $0 \leq x < y \leq 1$, 则 $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$

法一: $2|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(0) + f(x) - f(y) - [f(y) - f(1)]|$

$\leq |f(x) - f(0)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(1)|$

$< \frac{1}{2}|x - 0| + \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|y - 1| = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{2}(y - 1) = \frac{1}{2}$,

即得 $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{4}$,

另一方面, 当 $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x) = \begin{cases} ux & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -u(1-x) & , \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$, 符合题意,

当 $u \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| = \frac{u}{2} \rightarrow \frac{1}{4}$,

故 $k \leq \frac{1}{4}$

法二: 当 $x-y \leq \frac{1}{2}$ 时, $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x-y| \leq \frac{1}{4}$.

当 $x-y > \frac{1}{2}$ 时, $|f(x) - f(y)| = |[f(x) - f(0)] - [f(y) - f(1)]|$
 $\leq |f(x) - f(1)| + |f(y) - f(0)| < \frac{1}{2}|x-0| + \frac{1}{2}|y-1| = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(y-x) < \frac{1}{4}$,

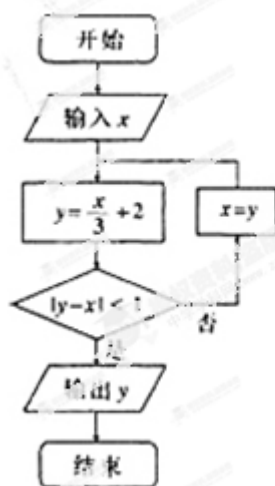
故 $k \leq \frac{1}{4}$

考点: 1. 抽象函数问题; 2. 绝对值不等式.

第II卷 (共 90 分)

二、填空题 (每题 5 分, 满分 20 分, 将答案填在答题纸上)

13. 执行右侧的程序框图, 若输入 $x=9$, 则输出 $y=$ _____.



【答案】 $\frac{29}{9}$ C

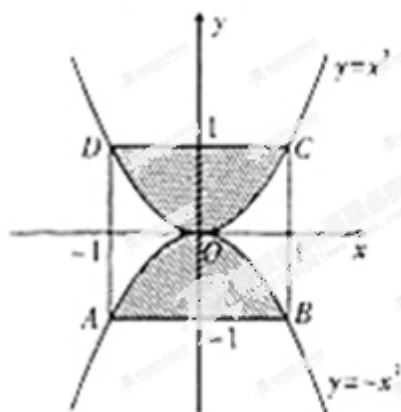
【解析】

试题分析：第一次运行后 $y=5$ ，第二次运行后 $y=\frac{11}{3}$ ，第三次运行后 $y=\frac{29}{9}$ ，此时

$$|y-x|=\left|\frac{29}{9}-\frac{11}{3}\right|=\frac{4}{9}<1, \text{ 满足条件, 故输出 } y=\frac{29}{9}.$$

考点：程序框图.

14. 正方形的四个顶点 $A(-1,-1), B(1,-1), C(1,1), D(-1,1)$ 分别在抛物线 $y=-x^2$ 和 $y=x^2$ 上，如图所示，若将一个质点随机投入正方形 $ABCD$ 中，则质点落在阴影区域的概率是_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

试题分析：有几何概型可知若将一个质点随机投入正方形 $ABCD$ 中，则质点落在阴影区域的概率

$$P = \frac{2 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx}{2^2} = \frac{2}{3}.$$

考点：1. 几何概型；2. 定积分.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，点 M 与 C 的焦点不重合，若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A, B ，线段

MN 的中点在 C 上，则 $|AN| + |BN| =$ _____.

【答案】 12

【解析】

试题分析：设 M, N 的中点坐标为 P ， $M(x_M, y_M), N(x_N, y_N), P(x_P, y_P), A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ ，则

$$x_M + x_A = -2\sqrt{5}, x_M + x_B = 2\sqrt{5},$$

$y_M + y_A = 0, y_M + y_B = 0, x_M + x_N = 2x_P, y_M + y_N = 2y_P$ ；由于

$|AN| + |BN| = \sqrt{(x_A - x_N)^2 + (y_A - y_N)^2} + \sqrt{(x_B - x_N)^2 + (y_B - y_N)^2}$ ，化简可得

$|AN| + |BN| = 2(\sqrt{(x_P + \sqrt{5})^2 + y_P^2} + \sqrt{(x_P - \sqrt{5})^2 + y_P^2})$ ，根据椭圆的定义

$\sqrt{(x_P + \sqrt{5})^2 + y_P^2} + \sqrt{(x_P - \sqrt{5})^2 + y_P^2} = 2 \times 3 = 6$ ，所以 $|AN| + |BN| = 12$ 。

考点：1.椭圆的定义；2.两点距离公式。

16. 对于 $c > 0$ ，当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$ ，且使 $|2a + b|$ 最大时， $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$ 的最小值为_____。

【答案】-2

【解析】

试题分析：法一：判别式法：令 $2a + b = t$ ，则 $b = t - 2a$ ，代入到 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$ 中，得

$$4a^2 - 2a(t - 2a) + 4(t - 2a)^2 - c = 0, \text{ 即 } 24a^2 - 18ta + 4t^2 - c = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

因为关于 a 的二次方程①有实根，所以 $\Delta = 18^2 t^2 - 4 \times 24(4t^2 - c) \geq 0$ ，可得 $t^2 \leq \frac{8c}{5}$ ，

$$|2a + b| \text{ 取最大值时, } \begin{cases} a = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = \sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = -\sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases},$$

$$\text{当 } \begin{cases} a = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = \sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases} \text{ 时, } \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} - \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = -2\sqrt{\frac{10}{c}} + \left(\sqrt{\frac{5}{c}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{c}} - \sqrt{2}\right)^2 - 2 \geq -2,$$

$$\text{当 } \begin{cases} a = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = -\sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases} \text{ 时, } \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = -\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} > 0,$$

综上所述可知当 $c = \frac{5}{2}, a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$ 时， $\left(\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}\right)_{\min} = -2$

法二：柯西不等式：由 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$ 可得： $2c = 3(a + b)^2 + 5(a - b)^2$

$$(2a + b)^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}(a + b) + \frac{\sqrt{5}}{10} \times \sqrt{5}(a - b) \right]^2$$

$$\leq \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{10} \right)^2 \right] \left[(\sqrt{3}(a+b))^2 + (\sqrt{5}(a-b))^2 \right] \leq 2c \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{20} \right) = \frac{8c}{5},$$

当且仅当 $\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{5}}{10} = \sqrt{3}(a+b) : \sqrt{5}(a-b)$ 时取等号, 即 $2a=3b$ 时, 取等号,

$$\text{这时} \begin{cases} a = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = \sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = -\sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases}$$

$$\text{当} \begin{cases} a = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = \sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases} \text{时, } \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} - \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = -\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = 5 \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{\sqrt{10}}{5} \right)^2 - 2 \geq -2,$$

$$\text{当} \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{c}{10}} \\ b = -\sqrt{\frac{c}{10}} \end{cases} \text{时, } \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = -\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}} + \frac{5}{c} > 0,$$

综上所述可知当 $c = \frac{5}{2}, a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$ 时, $\left(\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} \right)_{\min} = -2$

考点: 柯西不等式.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边 a, b, c , 且 $a > c$, 已知 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$, $\cos B = \frac{1}{3}$, $b = 3$, 求:

(1) a 和 c 的值;

(2) $\cos(B-C)$ 的值.

【答案】(1) $a=3, c=2$; (2) $\frac{23}{27}$.

【解析】

试题分析: (1) 由 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ 和 $\cos B = \frac{1}{3}$, 得 $ac=6$. 由余弦定理, 得 $a^2 + c^2 = 13$.

解 $\begin{cases} ac = 6 \\ a^2 + c^2 = 13 \end{cases}$, 即可求出 a, c ; (II) 在 $\triangle ABC$ 中, 利用同角基本关系得 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

由正弦定理, 得 $\sin C = \frac{c}{b} \sin B = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, 又因为 $a = b > c$, 所以 C 为锐角, 因此

$\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{7}{9}$, 利用 $\cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C$, 即可求出结果.

试题解析: (I) 由 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ 得, $c \cdot a \cos B = 2$, 又 $\cos B = \frac{1}{3}$, 所以 $ac = 6$.

由余弦定理, 得 $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \cos B$.

又 $b = 3$, 所以 $a^2 + c^2 = 9 + 2 \times 2 = 13$.

解 $\begin{cases} ac = 6 \\ a^2 + c^2 = 13 \end{cases}$, 得 $a = 2, c = 3$ 或 $a = 3, c = 2$.

因为 $a > c$, $\therefore a = 3, c = 2$.

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

由正弦定理, 得 $\sin C = \frac{c}{b} \sin B = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, 学科网又因为 $a = b > c$, 所以 C 为锐角, 因此

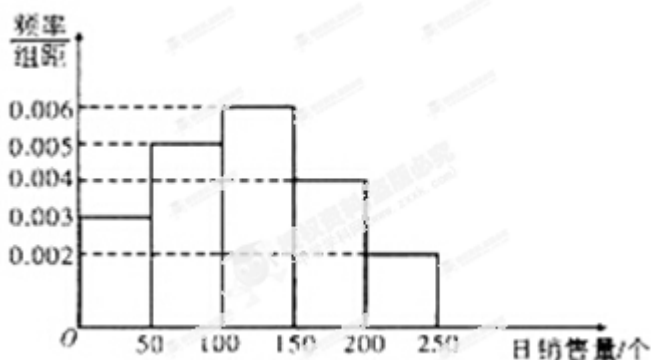
$\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2} = \frac{7}{9}$.

于是 $\cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{23}{27}$.

考点: 1. 解三角形; 2. 三角恒等变换.

18. (本小题满分 12 分)

一家面包房根据以往某种面包的销售记录, 绘制了日销售量的频率分布直方图, 如图所示:



将日销售量落入各组的频率视为概率，并假设每天的销售量相互独立.

(1) 求在未来连续 3 天里，有连续 2 天的日销售量都不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个的概率；

(2) 用 X 表示在未来 3 天里日销售量不低于 100 个的天数，求随机变量 X 的分布列，期望 $E(X)$ 及方差

$D(X)$.

【答案】(I) 0.108; (II) 详见解析.

【解析】

试题分析：(I) 设 A_1 表示事件“日销售量不低于 100 个”， A_2 表示事件“日销售量低于 50 个”， B 表示事件“在未来连续 3 天里有连续 2 天日销售量不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个”. 因此

可求出 $P(A_1) = 0.6$ ， $P(A_2) = 0.15$ ，利用事件的独立性即可求出 $P(B)$ ；(II) 由题意可知 $X \sim B(3, 0.6)$ ，所以即可列出分布列，求出期望为 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 的值.

试题解析：（Ⅰ）设 A_1 表示事件“日销售学科网量不低于 100 个”， A_2 表示事件“日销售量低于 50 个”， B 表示事件“在未来连续 3 天里有连续 2 天日销售量不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个”．因此

$$P(A_1) = (0.006 + 0.004 + 0.002) \times 50 = 0.6 .$$

$$P(A_2) = 0.003 \times 50 = 0.15 .$$

$$P(B) = 0.6 \times 0.6 \times 0.15 \times 2 = 0.108 .$$

（Ⅱ） X 的可能取值为 0,1,2,3. 相应的概率为

$$P(X=0) = C_3^0 \cdot (1-0.6)^3 = 0.064 ,$$

$$P(X=1) = C_3^1 \cdot 0.6(1-0.6)^2 = 0.288 ,$$

$$P(X=2) = C_3^2 \cdot 0.6^2(1-0.6) = 0.432 ,$$

$$P(X=3) = C_3^3 \cdot 0.6^3 = 0.216 ,$$

分布列为

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

因为 $X \sim B(3, 0.6)$, 所以期望为 $E(X) = 3 \times 0.6 = 1.8$ ，方差 $D(X) = 3 \times 0.6 \times (1-0.6) = 0.72$

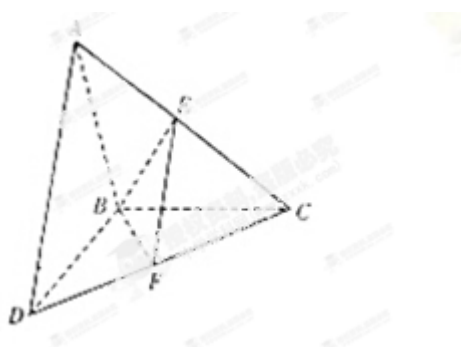
考点：1. 频率分布直方图；2. 二项分布.

19. （本小题满分 12 分）

如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直，且 $AB = BC = BD = 2$ ， $\angle ABC = \angle DBC = 120^\circ$ ， E 、 F 分别为 AC 、 DC 的中点.

（1）求证： $EF \perp BC$ ；

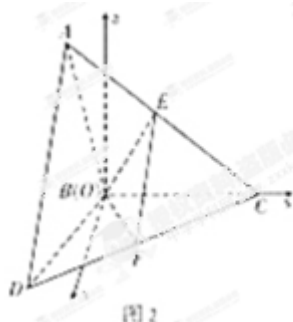
（2）求二面角 $E-BF-C$ 的正弦值.



【答案】(I) 详见解析; (II) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

试题分析: (I) (方法一) 过 E 作 $EO \perp BC$, 垂足为 O , 连 OF , 由 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ 可证出 $\triangle EOC \cong \triangle FOC$, 所以 $\angle EOC = \angle FOC = \frac{\pi}{2}$, 即 $FO \perp BC$, 又 $EO \perp BC$, 因此 $BC \perp$ 面 EFO , 即可证明 $EF \perp BC$. (方法二) 由题意, 以 B 为坐标原点, 在平面 DBC 内过 B 作垂直 BC 的直线为 x 轴, BC 所在直线为 y 轴, 在平面 ABC 内过 B 作垂直 BC 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



易得 $E(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{EF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$, 因此 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 从而得

$EF \perp BC$; (II) (方法一) 在图 1 中, 过 O 作 $OG \perp BF$, 垂足为 G , 连 EG , 由平面 $ABC \perp$ 平面 BDC , 从而 $EO \perp$ 平面 BDC , 从而 $EO \perp$ 面 BDC , 又 $OC \perp BF$, 由三垂线定理知 EG 垂直 BF , 因此 $\angle EGO$ 为二面角 $E-BF-C$ 的平面角; 在 $\triangle EOC$ 中, $EO = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} BC \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由 $\triangle BGO \sim \triangle BFC$ 知,

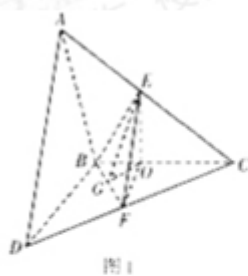
$OG = \frac{BO}{BC} \cdot FC = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 因此 $\tan \angle EGO = \frac{EO}{OG} = 2$, 从而 $\sin \angle EGO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即可求出二面角 $E-BF-C$ 的正弦值.

(方法二) 在图 2 中, 平面 BFC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (0, 0, 1)$, 设平面 BEF 的法向量 $\overrightarrow{n_2} = (x, y, z)$, 又由 $\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases}$ 得其中一个 $\overrightarrow{n_2} = (1, -\sqrt{3}, 1)$, 设二面角 $E-BF-C$ 的大小为 θ , 且由题意知 θ 为锐角, 则

$\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 学科网因此 $\sin \angle EGO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即可求出二面角 $E-BF-C$ 的正弦值.

试题解析：（1）证明：

（方法一）过 E 作 $EO \perp BC$ ，垂足为 O ，连 OF ，

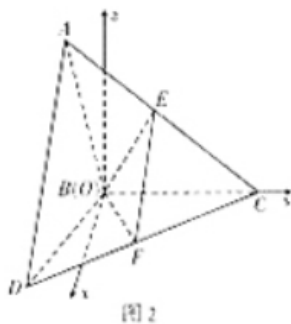


由 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ 可证出 $\triangle EOC \cong \triangle FOC$ ，所以 $\angle EOC = \angle FOC = \frac{\pi}{2}$ ，即 $FO \perp BC$ ，

又 $EO \perp BC$ ，因此 $BC \perp$ 面 EFO ，

又 $EF \subset$ 面 EFO ，所以 $EF \perp BC$ 。

（方法二）由题意，以 B 为坐标原点，在平面 DBC 内过 B 作垂直 BC 的直线为 x 轴， BC 所在直线为 y 轴，在平面 ABC 内过 B 作垂直 BC 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系。



易得 $B(0,0,0)$ ， $A(0, -1, \sqrt{3})$ ， $D(\sqrt{3}, -1, 0)$ ， $C(0, 2, 0)$ ，因而 $E(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ，所以

$\overrightarrow{EF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$ ，因此 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，从而 $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{BC}$ ，所以 $EF \perp BC$ 。

(II) (方法一) 在图 1 中, 过 O 作 $OG \perp BF$, 垂足为 G , 连 EG , 由平面 $ABC \perp$ 平面 BDC , 从而 $EO \perp$ 平面 BDC , 从而 $EO \perp$ 面 BDC , 又 $OG \perp BF$, 由三垂线定理知 EG 垂直 BF .

因此 $\angle EGO$ 为二面角 $E-BF-C$ 的平面角;

在 $\triangle EOC$ 中, $EO = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} BC \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由 $\triangle BGO \sim \triangle BFC$ 知, $OG = \frac{BO}{BC} \cdot FC = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 因此 $\tan \angle$

$EGO = \frac{EO}{OG} = 2$, 从而 $\sin \angle EGO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即二面角 $E-BF-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(方法二) 在图 2 中, 平面 BFC 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$, 设平面 BEF 的法向量 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

又 $\vec{BF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\vec{BE} = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 由 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{BF} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{BE} = 0 \end{cases}$ 得其中一个 $\vec{n}_2 = (1, -\sqrt{3}, 1)$, 设二面角 $E-BF-C$ 的大

小为 θ , 且由题意知 θ 为锐角, 则 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 因此 $\sin \angle EGO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即二

面角 $E-BF-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

考点: 1. 线面垂直的判定; 2. 二面角.

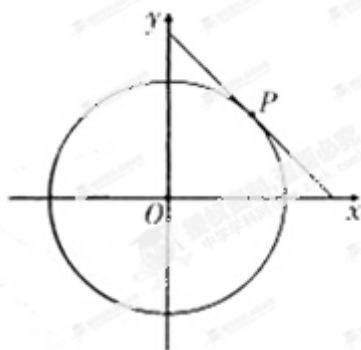
20. (本小题满分 12 分)

圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线与 x 轴正半轴, y 轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为 P (如

图), 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$.

(1) 求 C_1 的方程;

(2) 椭圆 C_2 过点 P 且与 C_1 有相同的焦点, 直线 l 过 C_2 的右焦点且与 C_2 交于 A, B 两点, 若以线段 AB 为直径的圆心过点 P , 求 l 的方程.



【答案】(I) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$; (II) $x - (\frac{3\sqrt{6}}{2} - 1)y - \sqrt{3} = 0$, 或 $x + (\frac{3\sqrt{6}}{2} - 1)y - \sqrt{3} = 0$.

【解析】

试题分析: (I) 设切点坐标为 $(x_0, y_0) (x_0 > 0, y_0 > 0)$, 则切线斜率为 $-\frac{x_0}{y_0}$, 切线方程为

$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, 即 $x_0x + y_0y = 4$. 此时, 学科网两个坐标轴的正半轴与切线围成的三角形面积为

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x_0} \cdot \frac{4}{y_0} = \frac{8}{x_0y_0}$. 由 $x_0^2 + y_0^2 = 4 \geq 2x_0y_0$ 知当且仅当 $x_0 = y_0 = \sqrt{2}$ 时 x_0y_0 有最大值, 即 S 有最小值,

因此点 P 得坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 由题意知 $\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 3a^2 \end{cases}$ 解得 $a^2 = 1, b^2 = 2$, 即可求出 C_1 的方程; (II) 由

(I) 知 C_2 的焦点坐标为 $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$, 由此 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{3+b_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, 其中 $b_1 > 0$.

由 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在 C_2 上, 得 $\frac{2}{3+b_1^2} + \frac{2}{b_1^2} = 1$, 显然, l 不是直线 $y=0$. 设 l 的方程为 $x=my+\sqrt{3}$, 点

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 由 $\begin{cases} x = my + \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(m^2 + 2)y^2 + 2\sqrt{3}my - 3 = 0$, 因

$\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2} - x_1, \sqrt{2} - y_1), \overrightarrow{BP} = (\sqrt{2} - x_2, \sqrt{2} - y_2)$ 由题意知 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, 所以

$x_1x_2 - \sqrt{2}(x_1 + x_2) + y_1y_2 - \sqrt{2}(y_1 + y_2) + 4 = 0$, 将韦达定理得到的结果代入

$x_1x_2 - \sqrt{2}(x_1 + x_2) + y_1y_2 - \sqrt{2}(y_1 + y_2) + 4 = 0$ 式整理得 $2m^2 - 2\sqrt{6}m + 4\sqrt{6} - 11 = 0$, 解得 $m = \frac{3\sqrt{6}}{2} - 1$

或 $m = -\frac{3\sqrt{6}}{2} + 1$, 即可求出直线 l 的方程.

试题解析：(I) 设切点坐标为 (x_0, y_0) ($x_0 > 0, y_0 > 0$)，则切线斜率为 $-\frac{x_0}{y_0}$ ，切线方程为

$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ ，即 $x_0x + y_0y = 4$ ，此时，两个坐标轴的正半轴与切线围成的三角形面积为

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x_0} \cdot \frac{4}{y_0} = \frac{8}{x_0y_0}$ 。由 $x_0^2 + y_0^2 = 4 \geq 2x_0y_0$ 知当且仅当 $x_0 = y_0 = \sqrt{2}$ 时 x_0y_0 有最大值，即 S 有最小值，

因此点 P 得坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ，

由题意知

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 3a^2 \end{cases} \quad \text{解得 } a^2 = 1, b^2 = 2, \text{ 故 } C_1 \text{ 方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

(II) 由 (I) 知 C_2 的焦点坐标为 $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ ，由此 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{3+b_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ ，其中 $b_1 > 0$ 。

由 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在 C_2 上，得 $\frac{2}{3+b_1^2} + \frac{2}{b_1^2} = 1$ ，

显然， l 不是直线 $y=0$ 。设 l 的方程为 $x=my+\sqrt{3}$ ，点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

由 $\begin{cases} x = my + \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(m^2 + 2)y^2 + 2\sqrt{3}my - 3 = 0$ ，又 y_1, y_2 是方程的根，因此

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}m}{m^2 + 2} & \text{①} \\ y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 2} & \text{②} \end{cases}, \text{ 由 } x_1 = my_1 + \sqrt{3}, x_2 = my_2 + \sqrt{3} \text{ 得}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{m^2 + 2} & \text{③} \\ x_1 x_2 = m^2 y_1 y_2 + \sqrt{3} m(y_1 + y_2) + 3 = \frac{6 - 6m^2}{m^2 + 2} & \text{④} \end{cases}$$

因 $\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2} - x_1, \sqrt{2} - y_1)$, $\overrightarrow{BP} = (\sqrt{2} - x_2, \sqrt{2} - y_2)$ 由题意知 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, 所以

$$x_1 x_2 - \sqrt{2}(x_1 + x_2) + y_1 y_2 - \sqrt{2}(y_1 + y_2) + 4 = 0 \quad \text{⑤}, \text{ 将①, ②, ③, ④代入⑤式整理得}$$

$$2m^2 - 2\sqrt{6}m + 4\sqrt{6} - 11 = 0, \text{ 解得 } m = \frac{3\sqrt{6}}{2} - 1 \text{ 或 } m = -\frac{3\sqrt{6}}{2} + 1, \text{ 因此直线 } l \text{ 的方程为}$$

$$x - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - 1\right)y - \sqrt{3} = 0, \text{ 或 } x + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - 1\right)y - \sqrt{3} = 0.$$

考点: 1. 椭圆的方程; 2. 直线与椭圆的位置关系.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (\cos x - x)(\pi + 2x) - \frac{8}{3}(\sin x + 1)$, $g(x) = 3(x - \pi)\cos x - 4(1 + \sin x)\ln(3 - \frac{2x}{\pi})$.

证明: (I) 存在唯一 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $f(x_0) = 0$;

(II) 存在唯一 $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使 $g(x_1) = 0$, 且对 (I) 中的 $x_0 + x_1 < \pi$.

【答案】(I) 详见解析; (II) 详见解析.

【解析】

试题分析: (I) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) = -(1 + \sin x)(\pi + 2x) - 2x - \frac{2}{3}\cos x < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上

为减函数, 又 $f(0) = \pi - \frac{8}{3} > 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = -\pi^2 - \frac{16}{3} < 0$, 所以存在唯一 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $f(x_0) = 0$. (II) 考

虑函数 $h(x) = \frac{3(x - \pi)\cos x}{1 + \sin x} - 4\ln(3 - \frac{2}{\pi}x)$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 令 $t = \pi - x$, 则 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

记 $u(t) = h(\pi - t) = \frac{3t\cos t}{1 + \sin t} - 4\ln(1 + \frac{2}{\pi}t)$, 则 $u'(t) = \frac{3f(t)}{(\pi + 2t)(1 + \sin t)}$, 有 (I) 得, 当 $t \in (0, x_0)$ 时,

$u'(t) > 0$, 当 $t \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $u'(t) < 0$. 在 $(0, x_0)$ 上 $u(t)$ 是增函数, 又 $u(0) = 0$, 从而当 $t \in (0, x_0]$ 时,

$u(t) > 0$, 所以 $u(t)$ 在 $(0, x_0]$ 上无零点. 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上 $u(t)$ 是减函数, 又 $u(x_0) > 0$, $u(\frac{\pi}{2}) = -4\ln 2 < 0$, 存在

唯一的 $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$, 使 $u(t_1) = 0$. 所以存在唯一的 $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 使 $u(t_1) = 0$. 因此存在唯一的

$x_1 = \pi - t_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使 $h(x_1) = h(\pi - t_1) = u(t_1) = 0$. 因为当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $1 + \sin x > 0$, 故

$g(x) = (1 + \sin x)h(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的零点, 所以存在唯一的 $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使 $g(x_1) = 0$. 因

$x_1 = \pi - t_1, t_1 > x_0$, 所以 $x_0 + x_1 < \pi$, 即命题得证.

试题解析: (I) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) = -(1 + \sin x)(\pi + 2x) - 2x - \frac{2}{3} \cos x < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上为减函数, 又 $f(0) = \pi - \frac{8}{3} > 0, f(\frac{\pi}{2}) = -\pi^2 - \frac{16}{3} < 0$, 所以存在唯一 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $f(x_0) = 0$.

(II) 考虑函数 $h(x) = \frac{3(x - \pi) \cos x}{1 + \sin x} - 4 \ln(3 - \frac{2}{\pi}x), x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$,

令 $t = \pi - x$, 则 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

记 $u(t) = h(\pi - t) = \frac{3t \cos t}{1 + \sin t} - 4 \ln(1 + \frac{2}{\pi}t)$, 则 $u'(t) = \frac{3f(t)}{(\pi + 2t)(1 + \sin t)}$,

有 (I) 得, 当 $t \in (0, x_0)$ 时, $u'(t) > 0$, 当 $t \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $u'(t) < 0$.

在 $(0, x_0)$ 上 $u(t)$ 是增函数, 又 $u(0) = 0$, 从而当 $t \in (0, x_0]$ 时, $u(t) > 0$, 所以 $u(t)$ 在 $(0, x_0]$ 上无零点.

在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上 $u(t)$ 是减函数, 又 $u(x_0) > 0, u(\frac{\pi}{2}) = -4 \ln 2 < 0$, 存在唯一的 $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$, 使 $u(t_1) = 0$.

所以存在唯一的 $t_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 使 $u(t_1) = 0$.

因此存在唯一的 $x_1 = \pi - t_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使 $h(x_1) = h(\pi - t_1) = u(t_1) = 0$.

因为当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $1 + \sin x > 0$, 故 $g(x) = (1 + \sin x)h(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的零点, 所以存在唯一的 $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使 $g(x_1) = 0$.

因 $x_1 = \pi - t_1, t_1 > x_0$, 所以 $x_0 + x_1 < \pi$

考点: 1. 零点唯一性的判断; 2. 函数的单调性的应用.

请考生在第 22、23、24 三题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分, 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-1: 几何证明选讲

如图, EP 交圆于 E、C 两点, PD 切圆于 D, G 为 CE 上一点且 $PG = PD$, 连接 DG 并延长交圆于点 A, 作弦 AB 垂直 EP, 垂足为 F.

(I) 求证: AB 为圆的直径;

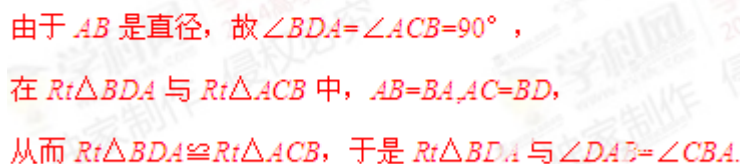
(II) 若 $AC = BD$, 求证: $AB = ED$.



试题分析：(I) 因为 $PD=PG$ ，所以 $\angle PDC=\angle PGD$ 。由于 PD 为切线，故 $\angle PDA=\angle DBA$ ，又由于 $\angle PGD=\angle EGA$ ，故 $\angle DBA=\angle EGA$ ，所以 $\angle DBA+\angle BAD=\angle EGA+\angle BAD$ ，从而 $\angle BDA=\angle PEA$ 。由于 AF 垂直 EP ，所以 $\angle PEA=90^\circ$ ，于是 $\angle BDA=90^\circ$ ，故 AB 是直径。(II) 连接 BC ， DC 。由于 AB 是直径，故 $\angle BDA=\angle ACB=90^\circ$ ，在 $Rt\triangle BDA$ 与 $Rt\triangle ACB$ 中， $AB=BA$ ， $AC=BD$ ，从而 $Rt\triangle BDA\cong Rt\triangle ACB$ ，于是 $Rt\triangle BDA$ 与 $\angle DAB=\angle CBA$ 。又因为 $\angle DCB=\angle DAB$ ，所以 $\angle DCB=\angle CBA$ ，故 $DC\parallel AB$ 。由于 ED 是直径，即可得出结论。

由于 PD 为切线, 故 $\angle PDA = \angle DBA$, 又由于 $\angle PGD = \angle EGA$, 故 $\angle DBA = \angle EGA$, 所以 $\angle DBA + \angle BAD = \angle EGA + \angle BAD$, 从而 $\angle BDA = \angle PFA$.

(II) 连接 BC, DC .



考点：1. 圆周角定理；2. 与圆有关的比例线段.

第20 页 | 共22 页

将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上每一点的横坐标保持不变，纵坐标变为原来的 2 倍，得曲线 C 。

(I) 写出 C 的参数方程；

(II) 设直线 $l: 2x + y - 2 = 0$ 与 C 的交点为 P_1, P_2 ，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极坐标建立极坐标系，

求过线段 P_1P_2 的中点且与 l 垂直的直线的极坐标方程。

【答案】(I) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ (t 为参数); (II) $\rho = \frac{3}{4 \sin \theta - 2 \cos \theta}$.

【解析】

试题分析：(I) 设 (x_1, y_1) 为圆上的点，在曲线 C 上任意取一点 (x, y) ，再根据 $\begin{cases} x = x_1 \\ y = 2y_1 \end{cases}$ ，由于点 (x_1, y_1) 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上，求出 C 的方程，化为参数方程。(II) 解方程组求得 P_1, P_2 的坐标，可得线段 P_1P_2 的中点坐标。再根据与 l 垂直的直线的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，用点斜式求得所求的直线的方程，再根据 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 可得所求的直线的极坐标方程。

试题解析：(I) 设 (x_1, y_1) 为圆上的点，在已知变换下得 C 上点 (x, y) ，依题意，得 $\begin{cases} x = x_1 \\ y = 2y_1 \end{cases}$ 由 $x_1^2 + y_1^2 = 1$ 得 $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$ ，即曲线 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ，故 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ (t 为参数)。

(II) 由 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$ 解得： $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ 。

不妨设 $P_1(1, 0), P_2(0, 2)$ ，则线段 P_1P_2 的中点坐标为 $(\frac{1}{2}, 1)$ ，所求直线的斜率为 $k = \frac{1}{2}$ ，于是所求直线方程为

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}),$$

化极坐标方程，并整理得

$$2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta = -3, \text{ 即 } \rho = \frac{3}{4 \sin \theta - 2 \cos \theta}.$$

考点：1. 参数方程化成普通方程；2. 点的极坐标和直角坐标的互化。

24. (本小题满分 10 分) 选修 4-5：不等式选讲

设函数 $f(x) = 2|x - 1| + x - 1$ ， $g(x) = 16x^2 - 8x + 1$ ，记 $f(x) \leq 1$ 的解集为 M ， $g(x) \leq 4$ 的解集为 N 。

(I) 求 M ;

(II) 当 $x \in M \cap N$ 时, 证明: $x^2 f(x) + x[f(x)]^2 \leq \frac{1}{4}$.

【答案】(I) $M = \{x | 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\}$; (II) 详见解析.

【解析】

试题分析: (I) 由所给的不等式可得当 $x \geq 1$ 时, 由 $f(x) = 3x - 3 \leq 1$, 或当 $x < 1$ 时, 由 $f(x) = 1 - x \leq 1$, 分别求得它们的解集, 再取并集, 即得所求. (II) 由 $g(x) \leq 4$, 求得 N , 可得 $M \cap N = \{x | 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\}$. 当 $x \in M \cap N$ 时, $f(x) = 1 - x$, 不等式的左边化为 $\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$, 显然它小于或等于 $\frac{1}{4}$, 要证的不等式得证.

试题解析: (I) $f(x) = \begin{cases} 3x - 3, & x \in [1, +\infty) \\ 1 - x, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$

当 $x \geq 1$ 时, 由 $f(x) = 3x - 3 \leq 1$ 得 $x \leq \frac{4}{3}$, 故 $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$;

当 $x < 1$ 时, 由 $f(x) = 1 - x \leq 1$ 得 $x \geq 0$, 故 $0 \leq x < 1$;

所以 $f(x) \leq 1$ 的解集为 $M = \{x | 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\}$.

(II) 由 $g(x) = 16x^2 - 8x + 1 \leq 4$ 得 $16(x - \frac{1}{4})^2 \leq 4$, 解得 $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$, 因此 $N = \{x | -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\}$, 故 $M \cap N = \{x | 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\}$.

当 $x \in M \cap N$ 时, $f(x) = 1 - x$, 于是

$$\begin{aligned} x^2 f(x) + x[f(x)]^2 &= xf(x)[x + f(x)] \\ &= xf(x) = x(1 - x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

考点: 1. 其他不等式的解法; 2. 交集及其运算.