

绝密★启用前

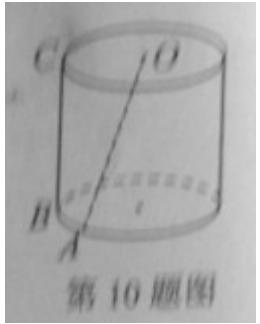
2013年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）  
数学试卷（文史类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 不等式  $\frac{x}{2x-1} < 0$  的解为\_\_\_\_\_.
2. 在等差数列  $\{a_n\}$  中，若  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 30$ ，则  $a_2 + a_3 =$  \_\_\_\_\_.
3. 设  $m \in \mathbf{R}$ ， $m^2 + m - 2 + (m^2 - 1)i$  是纯虚数，其中  $i$  是虚数单位，则  $m =$  \_\_\_\_\_.
4. 若  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ， $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ，则  $y =$  \_\_\_\_\_.
5. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 。若  $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0$ ，则角  $C$  的大小是\_\_\_\_\_.
6. 某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%。在一次考试中，男、女生平均分数分别为75、80，则这次考试该年级学生平均分数为\_\_\_\_\_.
7. 设常数  $a \in \mathbf{R}$ 。若  $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$  的二项展开式中  $x^7$  项的系数为-10，则  $a =$  \_\_\_\_\_.
8. 方程  $\frac{9}{3^x - 1} + 1 = 3^x$  的实数解为\_\_\_\_\_.
9. 若  $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{3}$ ，则  $\cos(2x - 2y) =$  \_\_\_\_\_.
10. 已知圆柱  $\Omega$  的母线长为  $l$ ，底面半径为  $r$ ， $O$  是上地面圆心， $A$ 、 $B$  是下底面圆心上两个不同的点， $BC$  是母线，如图。若直线  $OA$  与  $BC$  所成角的大小为  $\frac{\pi}{6}$ ，则  $\frac{l}{r} =$  \_\_\_\_\_。

第10题图
11. 盒子中装有编号为1,2,3,4,5,6,7的七个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是\_\_\_\_\_。（结果用最简分数表示）。
12. 设  $AB$  是椭圆  $\Gamma$  的长轴，点  $C$  在  $\Gamma$  上，且  $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$ 。若  $AB = 4$ ， $BC = \sqrt{2}$ ，则  $\Gamma$  的两个焦点之间的距离为\_\_\_\_\_。
13. 设常数  $a > 0$ ，若  $9x + \frac{a^2}{x} \geq a + 1$  对一切正实数  $x$  成立，则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_。
14. 已知正方形  $ABCD$  的边长为1。记以  $A$  为起点，其余顶点为终点的向量分别为  $\vec{a}_1$ 、

$\vec{a}_2$ 、 $\vec{a}_3$ ；以  $C$  为起点，其余顶点为终点的向量分别为  $\vec{c}_1$ 、 $\vec{c}_2$ 、 $\vec{c}_3$ 。若  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$  且  $i \neq j, k \neq l$ ，则  $(\vec{a}_i + \vec{a}_j) \cdot (\vec{c}_k + \vec{c}_l)$  的最小值是\_\_\_\_\_。

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分.

15. 函数  $f(x) = x^2 - 1$  ( $x \geq 1$ ) 的反函数为  $f^{-1}(x)$ , 则  $f^{-1}(2)$  的值是 ( )  
 (A)  $\sqrt{3}$                                   (B)  $-\sqrt{3}$                                   (C)  $1 + \sqrt{2}$                                   (D)  $1 - \sqrt{2}$

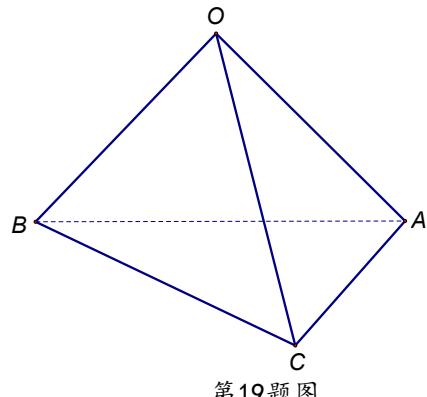
16. 设常数  $a \in \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | (x-1)(x-a) \geq 0\}$ ,  $B = \{x | x \geq a-1\}$ . 若  $A \cup B = \mathbf{R}$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )  
 (A)  $(-\infty, 2)$                               (B)  $(-\infty, 2]$                               (C)  $(2, +\infty)$                               (D)  $[2, +\infty)$

17. 钱大姐常说“好货不便宜”, 她这句话的意思是: “好货”是“不便宜”的 ( )  
 (A) 充分条件                                      (B) 必要条件  
 (C) 充分必要条件                                      (D) 既非充分又非必要条件

18. 记椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{ny^2}{4n+1} = 1$  围成的区域 (含边界) 为  $\Omega_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 当点  $(x, y)$  分别在  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  上时,  $x+y$  的最大值分别是  $M_1, M_2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n =$  ( )

三. 解答题(本大题共有5题, 满分74分) 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域写出必要的步骤.

- 如图, 正三棱锥  $O-ABC$  底面边长为 2, 高为 1, 求该三棱锥的体积及表面积.



第19题图

20. (本题满分14分) 本题共有2个小题. 第1小题满分5分, 第2小题满分9分.

甲厂以  $x$  千米/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求  $1 \leq x \leq 10$ ），每小时可获得的利润是  $100(5x+1-\frac{3}{x})$  元。

- (1) 求证: 生产  $a$  千克该产品所获得的利润为  $100a\left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ ;  
 (2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该如何选取何种生产速度? 并求此最大利润.

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题. 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

已知函数  $f(x) = 2 \sin(\omega x)$ , 其中常数  $\omega > 0$ .

(1) 令  $\omega = 1$ , 判断函数  $F(x) = f(x) + f(x + \frac{\pi}{2})$  的奇偶性并说明理由;

(2) 令  $\omega = 2$ , 将函数  $y = f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 再往上平移 1 个单位, 得到

函数  $y = g(x)$  的图像. 对任意的  $a \in R$ , 求  $y = g(x)$  在区间  $[a, a + 10\pi]$  上零点个数的所有可能值.

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题. 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分8分.

已知函数  $f(x) = 2 - |x|$ . 无穷数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = f(a_n), n \in N^*$ .

(1) 若  $a_1 = 0$ , 求  $a_2, a_3, a_4$ ;

(2) 若  $a_1 > 0$ , 且  $a_1, a_2, a_3$  成等比数列, 求  $a_1$  的值;

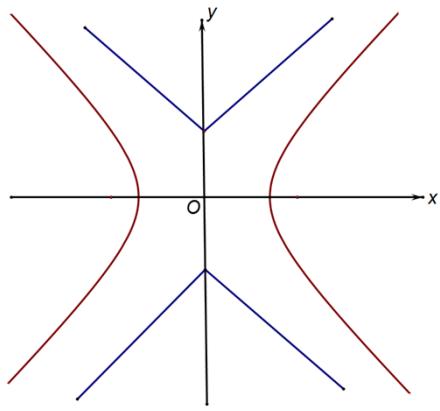
(3) 是否存在  $a_1$ , 使得  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$  成等差数列? 若存在, 求出所有这样的  $a_1$ ; 若不存在, 说明理由.

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题. 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分9分.

如图, 已知双曲线  $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ , 曲线

$C_2: |y| = |x| + 1$ .  $P$  是平面内一点, 若存在过点  $P$  的直线与  $C_1, C_2$  都有公共点, 则称  $P$  为“ $C_1 - C_2$  型点”.

(1) 在正确证明  $C_1$  的左焦点是“ $C_1 - C_2$  型点”时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);



- (2) 设直线  $y = kx$  与  $C_2$  有公共点, 求证  $|k| > 1$ , 进而证明原点不是“ $C_1 - C_2$  型点”;
- (3) 求证: 圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内的点都不是“ $C_1 - C_2$  型点”.

2013年上海高考数学试题（文科）  
参考答案

一. 填空题

1.  $0 < X < \frac{1}{2}$

2. 15

3. -2

4. 1

5.  $\frac{2\pi}{3}$

6. 78

7. -2

8.  $\log_3 4$

9.  $-\frac{7}{9}$

10.  $\sqrt{3}$

11.  $\frac{5}{7}$

12.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

13.  $\left[ \frac{1}{5}, +\infty \right)$

14. -5

二. 选择题

题号	15	16	17	18
代号	A	B	A	D

三. 解答题

19.解：由已知条件可知，正三棱锥O-ABC的底面△ABC是边长为2的正三角形。

经计算得底面△ABC的面积为 $\sqrt{3}$

所以该三锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

设O'是正三角形ABC的中心

由正三棱锥的性质可知，OO'垂直于平面ABC

延长AO'交BC于D，得 $AD = \sqrt{3}$ ,  $O'D = \frac{\sqrt{3}}{3}$

又因为 $OO' = 1$ ，所以正三棱锥的斜高 $OD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

故侧面积为  $\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

所以该三棱锥的表面积为  $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

因此，所求三棱锥的体积为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，表面积为  $3\sqrt{3}$

20.解：

(1) 生产  $a$  千克该产品，所用的时间是  $\frac{a}{x}$  小时

所获得的利润为  $100 \left( 5x + 1 - \frac{3}{x} \right) \cdot \frac{a}{x}$

所以生产  $a$  千克该产品所获得的利润为  $100a \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$  元

(2) 生产 900 千克该产品，获得的利润为  $90000 \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$ ,

$1 \leq x \leq 10$ , 记  $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} + 5, 1 \leq x \leq 10$

则  $f(x) = -3 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{12} + 5$ , 当且仅当  $x = 6$  时取到最大值。

获得最大利润  $90000 \times \frac{61}{12} = 457500$  元。

因此甲厂应以 6 千克/小时的速度生产，可获得最大利润 457500 元。

21.解：(1)  $f(x) = 2 \sin x, F(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin x + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2(\sin x + \cos x)$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}, F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0, F\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq F\left(\frac{\pi}{4}\right), F\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

所以， $F(x)$  既不是奇函数也不是偶函数。

(2)  $f(x) = 2 \sin x,$

将  $y =$

$f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，再向上平移 1 个单位后

得到  $y = 2 \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$  的图像，所以  $g(x) = 2 \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

令  $g(x) = 0$ , 得  $x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$  或  $x = k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$

因为  $[a, a+10\pi]$  上零点个数为 21

当 $a$ 不是零时，

$a+k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 也都不是零点，区间  $[a+k\pi, a+(k+1)\pi]$  上恰有两个零点，故在  $[a, a+10\pi]$  上有20个零点。

综上， $y = g(x)$  在  $[a, a+10\pi]$  上零点个数的所有可能值为21或20.

22. 解：(1)  $a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 2$

$$(2) a_2 = 2 - |a_1| = 2 - a_1, a_3 = 2 - |a_2| = 2 - |2 - a_1|$$

① 当  $0 < a_1 \leq 2$  时， $a_3 = 2 - (2 - a_1) = a_1$ ，所以  $a_1^2 = (2 - a_1)^2$ ，得  $a_1 = 1$

② 当  $a_1 > 2$  时，

$$a_3 = 2 - (a_1 - 2) = 4 - a_1, \text{ 所以 } a_1(4 - a_1) = (2 - a_1)^2, \text{ 得 } a_1 = 2 - \sqrt{2} (\text{舍去}) \text{ 或 } a_1 = 2 + \sqrt{2}$$

综合①②得  $a_1 = 1$  或  $a_1 = 2 + \sqrt{2}$

(3) 假设这样的等差数列存在，那么  $a_2 = 2 - |a_1|, a_3 = 2 - |2 - |a_1||$

$$\text{由 } 2a_2 = a_1 + a_3 \text{ 得 } 2 - |a_1| + |2 - |a_1|| = 2|a_1| (*)$$

以下分情况讨论：

① 当  $a_1 > 2$  时，由 (\*) 得  $a_1 = 0$ ，与  $a_1 > 2$  矛盾

② 当  $0 < a_1 \leq 2$  时，有 (\*) 得  $a_1 = 1$ ，从而  $a_n = 1 (n = 1, 2, \dots)$

所以  $\{a_n\}$  是一个的等差数列

③ 当  $a_1 \leq 0$  时，则公差  $d = a_2 - a_1 = (a_1 + 2) - a_1 = 2 > 0$ ，因此存在

$$m \geq 2 \text{ 使得 } a_m = a_1 + 2(m-1) > 2. \text{ 此时 } d = a_{m+1} - a_m = 2 - |a_m| - a_m$$

$< 0$ ，矛盾

综合①②③可知，当且仅当

$a_1 = 1$  时， $a_1, a_2, a_3, \dots$  构成等差数列

23. 解：(1)  $C_1$  的左焦点为  $F(-\sqrt{3}, 0)$ ，过  $F$  的直线  $x = -\sqrt{3}$  与  $C_1$  交于  $(-\sqrt{3}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，

与  $C_2$  交于  $(-\sqrt{3}, \pm(\sqrt{3}+1))$ ，故  $C_1$  的左焦点为“ $C_1$ -

$C_2$ 型点”，且直线可以为  $x = -\sqrt{3}$ ；

(2) 直线  $y = kx$  与  $C_2$  有交点，则

$$\begin{cases} y = kx \\ |y| = |x| + 1 \end{cases} \Rightarrow (|k| - 1)|x| = 1, \text{ 若方程组有解，则必须 } |k| > 1;$$

直线  $y = kx$  与  $C_2$  有交点，则

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (1 - 2k^2)x^2 = 2, \text{ 若方程组有解，则必须 } k^2 < \frac{1}{2}$$

故直线  $y = kx$  至多与曲线  $C_1$  和  $C_2$  中的一条有交点，即原点不是“ $C_1$ - $C_2$ 型点”。

(3) 显然过圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内一点的直线  $l$  若与曲线  $C_1$  有交点，则斜率必存在

;

根据对称性, 不妨设直线  $l$  斜率存在且与曲线  $C_2$  交于点  $(t, t+1)$  ( $t \geq 0$ ), 则  

$$l: y = (t+1) = k(x-t) \Rightarrow kx - y + (1+t-kt) = 0$$

直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内部有交点，故  $\frac{|1+t-kt|}{\sqrt{k^2+1}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

若直线  $l$  与曲线  $C_1$  有交点，则

$$\begin{cases} y = kx - kt + t + 1 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (k^2 - \frac{1}{2})x^2 + 2k(1+t-kt)x + (1+t-kt)^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 4k^2(1+t-kt)^2 - 4(k^2 - \frac{1}{2})[(1+t-kt)^2 + 1] \geq 0 \Rightarrow (1+t-kt)^2 \geq 2(k^2 - 1)$$

化简得,  $(1+t-kt)^2 \geq 2(k^2 - 1)$ 。 . . . . (2)

$$\text{由①②得, } 2(k^2 - 1) \leq (1+t-tk)^2 < \frac{1}{2}(k^2 + 1) \Rightarrow k^2 < 1$$

但此时, 因为  $t \geq 0$ ,  $[1+t(1-k)]^2 \geq 1$ ,  $\frac{1}{2}(k^2+1) < 1$ , 即①式不成立;

当  $k^2 = \frac{1}{2}$  时, ①式也不成立

综上，直线 $l$ 若与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内有交点，则不可能同时与曲线 $C_1$ 和 $C_2$ 有交点。

,

即圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内的点都不是“ $C_1$ - $C_2$ 型点”.

2013年全国普通高等学校招生统一考试  
上海 数学试卷（文史类）

考生注意：

1. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名。
2. 本试卷共有23道试题，满分150分。考试时间120分钟。

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 不等式  $\frac{x}{2x-1} < 0$  的解为  $(0, \frac{1}{2})$ 。

【答案】 $(0, \frac{1}{2})$

【解析】 $x(2x-1) < 0 \Rightarrow x \in (0, \frac{1}{2})$

2. 在等差数列  $\{a_n\}$  中，若  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 30$ ，则  $a_2 + a_3 =$  15。

【答案】15

【解析】 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2(a_2 + a_3) = 30 \Rightarrow a_2 + a_3 = 15$

3. 设  $m \in \mathbb{R}$ ， $m^2+m-2+(m^2-1)i$  是纯虚数，其中  $i$  是虚数单位，则  $m =$  \_\_\_\_\_。

【答案】-2

【解析】 $m^2 + m - 2 + (m^2 - 1)i$  是纯虚数  $\Rightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = -2$

4. 已知  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ， $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ，则  $y =$  1。

【答案】1

【解析】已知  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ，又  $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y = 1$

联立上式，解得  $x = 2, y = 1$ ，

5. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ 。若  $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0$ ，则角  $C$  的大小是  $-\frac{2}{3}\pi$ 。

【答案】 $-\frac{2}{3}\pi$

【解析】 $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-1}{2} \Rightarrow C = \frac{2}{3}\pi$

6. 某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%。在一次考试中，男、女生平均分数分别是75、80，则这次考试该年级学生平均分为 78。

【答案】78

【解析】平均成绩 =  $\frac{40}{100} \cdot 75 + \frac{60}{100} \cdot 80 = 78$

7. 设常数  $a \in \mathbb{R}$ . 若  $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$  的二项展开式中  $x^7$  项的系数为 -10, 则  $a = \underline{-2}$ .

**【答案】** -2

**【解析】**  $(x^2 + \frac{a}{x})^5 \Rightarrow C_5^r (x^2)^{5-r} (\frac{a}{x})^r = -10x^7 \Rightarrow r=1, C_5^1 a = -10 \Rightarrow 5a = -10, a = -2$

8. 方程  $\frac{9}{3^x - 1} + 1 = 3^x$  的实数解为  $\underline{\log_3 4}$ .

**【答案】**  $\log_3 4$

**【解析】**

$$\frac{9}{3^x - 1} + 1 = 3^x \Rightarrow \frac{9}{3^x - 1} = 3^x - 1 \Rightarrow 3^x - 1 = \pm 3 \Rightarrow 3^x = \pm 3 + 1 > 0 \Rightarrow 3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4$$

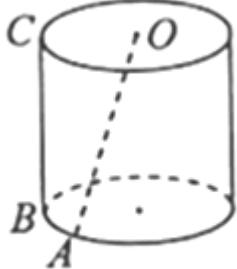
9. 若  $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{3}$ , 则  $\cos(2x - 2y) = \underline{-\frac{7}{9}}$ .

**【答案】**  $-\frac{7}{9}$

**【解析】**

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2(x - y) = 2\cos^2(x - y) - 1 = -\frac{7}{9}$$

10. 已知圆柱  $\Omega$  的母线长为 1, 底面半径为  $r$ ,  $O$  是上底面圆心,  $A$ 、 $B$  是下底面圆周上的两个不同的点,  $BC$  是母线, 如图. 若直线  $OA$  与  $BC$  所成角的大小为  $\frac{\pi}{6}$ , 则  $\frac{l}{r} = \underline{\sqrt{3}}$ .



第 10 题图

**【答案】**  $\sqrt{3}$

**【解析】** 由题知,  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{r}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{l}{r} = \sqrt{3}$

11. 盒子中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的七个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是  $\underline{\frac{5}{7}}$  (结果用最简分数表示).

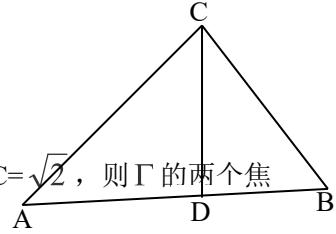
**【答案】**  $\frac{5}{7}$

**【解析】** 考查排列组合; 概率计算策略: 正难则反。

从 4 个奇数和 3 个偶数共 7 个数中任取 2 个, 共有  $C_7^2 = 21$  个

2个数之积为奇数  $\Rightarrow$  2个数分别为奇数，共有  $C_4^2 = 6$  个。

所以2个数之积为偶数的概率  $P = 1 - \frac{C_4^2}{C_7^2} = 1 - \frac{6}{21} = \frac{5}{7}$



12. 设AB是椭圆 $\Gamma$ 的长轴，点C在 $\Gamma$ 上，且 $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$ . 若 $AB=4$ ,  $BC=\sqrt{2}$ , 则 $\Gamma$ 的两个焦

点之间的距离为  $-\frac{4}{3}\sqrt{6}$ .

【答案】 $\frac{4}{3}\sqrt{6}$

【解析】如右图所示。

设D在AB上，且 $CD \perp AB$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = \sqrt{2}$ ,  $\angle CBA = 45^\circ \Rightarrow CD = 1$ ,  $DB = 1$ ,  $AD = 3 \Rightarrow C(1,1)$   
 $\Rightarrow 2a = 4$ , 把 $C(1,1)$ 代入椭圆标准方程得  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ ,  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$ ,  $c^2 = \frac{8}{3}$   
 $\Rightarrow 2c = \frac{4}{3}\sqrt{6}$

13. 设常数 $a > 0$ . 若  $9x + \frac{a^2}{x} \geq a + 1$  对一切正实数x成立，则a的取值范围为  $[\frac{1}{5}, \infty)$ .

【答案】 $[\frac{1}{5}, \infty)$

【解析】考查均值不等式的应用。

由题知，当 $x > 0$ 时， $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} \geq 2\sqrt{9x \cdot \frac{a^2}{x}} = 6a \geq a + 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{5}$

14. 已知正方形ABCD的边长为1. 记以A为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{a}_1$ 、 $\vec{a}_2$ 、 $\vec{a}_3$ ；以C为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{c}_1$ 、 $\vec{c}_2$ 、 $\vec{c}_3$ . 若 $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ 且 $i \neq j, k \neq l$ ，则 $(\vec{a}_i + \vec{a}_j) \cdot (\vec{c}_k + \vec{c}_l)$ 的最小值是  $-5$ .

【答案】-5

【解析】根据对称性，

当向量 $(\vec{a}_i + \vec{a}_j)$ 与 $(\vec{c}_k + \vec{c}_l)$ 互为相反向量，且它们的模最大时， $(\vec{a}_i + \vec{a}_j) \cdot (\vec{c}_k + \vec{c}_l)$ 最小。这时 $\vec{a}_i = \vec{AC}$ ,  $\vec{a}_j = \vec{AD}$ ,  $\vec{c}_k = \vec{CA}$ ,  $\vec{c}_l = \vec{CB}$ ,  
 $(\vec{a}_i + \vec{a}_j) \cdot (\vec{c}_k + \vec{c}_l) = -|\vec{a}_i + \vec{a}_j|^2 = -5$ .

二、选择题（本大题共有4小题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分。

15. 函数 $f(x) = x^2 - 1$  ( $x \geq 0$ ) 的反函数为 $f^{-1}(x)$ ，则 $f^{-1}(2)$ 的值是 (A)

- (A)  $\sqrt{3}$  (B)  $-\sqrt{3}$  (C)  $1 + \sqrt{2}$  (D)  $1 - \sqrt{2}$

【答案】A

【解析】由反函数的定义可知， $x \geq 0, 2 = f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

选A

16. 设常数  $a \in \mathbb{R}$ , 集合  $A = \{x | (x-1)(x-a) \geq 0\}$ ,  $B = \{x | x \geq a-1\}$ . 若  $A \cup B = \mathbb{R}$ , 则  $a$  的取值范围为

- (B)  
(A)  $(-\infty, 2)$  (B)  $(-\infty, 2]$  (C)  $(2, +\infty)$  (D)  $[2, +\infty)$

【答案】B

【解析】方法：代值法，排除法。当  $a=1$  时， $A=\mathbb{R}$ ，符合题意；当  $a=2$  时，  
 $\therefore B=[1,+\infty), A=(-\infty,1] \cup [+\infty), 2) \therefore A \cup B=R$ ，符合题意。

综上，选B

标准解法如下： $\because B=[a-1,+\infty), A \cup B=R \therefore A \supseteq (-\infty, a-1)$

由  $(x-1)(x-a) \geq 0 \Rightarrow$  当  $a=1$  时， $x \in \mathbb{R}$ ，当  $a=1$  符合题意；当  $a>1$  时  $x \in (-\infty,1] \cup [a,+\infty)$ ,

$\Rightarrow 1 \geq a-1$  解得  $1 < a \leq 2$ ；当  $a < 1$  时  $x \in (-\infty, a] \cup [1,+\infty) \Rightarrow a \geq a-1 \Rightarrow a < 1$ .

综上， $a \leq 2$

选B

17. 钱大姐常说“好货不便宜”，她这句话的意思是：“好货”是“不便宜”的 (A)

- (A) 充分条件 (B) 必要条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

【答案】A

【解析】便宜没好货  $\Leftrightarrow$  便宜则不是好货  $\Leftrightarrow$  好货则不便宜

所以“好货”是“不便宜”的充分条件

选A

当点  $(x, y)$  分别在  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  上时， $x+y$  的最大值分别是  $M_1, M_2, \dots$ ，则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n =$  (D)

- (A) 0 (B)  $\frac{1}{4}$  (C) 2 (D)  $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】椭圆方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{ny^2}{4n+1} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ u = x + y \end{cases} \Rightarrow x^2 + (u-x)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 2ux + u^2 - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 4u^2 - 8(u^2 - 4) \geq 0$

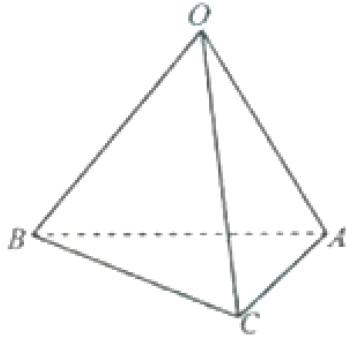
$\Rightarrow u^2 - 2(u^2 - 4) \geq 0 \Rightarrow 8 \leq u^2 \Rightarrow u \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ , 所以  $x+y$  的最大值为  $2\sqrt{2}$

选D

三、解答题（本大题共有5下题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19. (本题满分12分)

如图，正三棱锥O-ABC的底面边长为2，高为1，求该三棱锥的体积及表面积。



第 19 题图

**【答案】**  $V_{O-ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3}; S_{O-ABC} = 3\sqrt{3}$

**【解析】** 三棱锥  $O-ABC$  的体积  $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$

设  $O$  在面  $ABC$  中的射影为  $Q$ ,  $BC$  的中点为  $E$ , 则  $OQ = 1$ ,  $QE = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 在  $Rt\triangle OQE$  中  
 $, OE^2 = OQ^2 + EQ^2 \Rightarrow 1^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow OE = \frac{2}{\sqrt{3}}$

三棱锥  $O-ABC$  的表面积  $S_{O-ABC} = 3S_{\triangle OBC} + S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \frac{BC}{2} \cdot OE + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

所以, 三棱锥  $O-ABC$  的体积  $V_{O-ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 表面积  $S_{O-ABC} = 3\sqrt{3}$

20. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分9分.

甲厂以  $x$  千克/小时的速度匀速生产某种产品 (生产条件要求  $1 \leq x \leq 10$ ), 每小时可获得的利润是  $100 \left( 5x + 1 - \frac{3}{x} \right)$  元.

(1) 求证: 生产  $a$  千克该产品所获得的利润为  $100a \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$  元;

(2) 要使生产900千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该选取何种生产速度? 并求此最大利润.

**【答案】** (1) 见下

(2) 当生产速度为6千克/小时, 这时获得最大利润为457500元。

**【解析】** (1) 证明: 由题知, 生产  $a$  千克该产品所需要的时间  $t = \frac{a}{x}$  小时,

所获得的利润  $y = \frac{a}{x} \cdot 100 \left( 5x + 1 - \frac{3}{x} \right) = 100a \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$  (元), 其中  $1 \leq x \leq 10$ .

所以, 生产  $a$  千克该产品所获得的利润为  $100a \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$  元; (证毕)

(2) 由 (1) 知, 生产900千克该产品即  $a=900$  千克时, 获得的利润

$$y = 100 \cdot 900 \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 90000 \left[ 5 + \frac{1}{x} \left( 1 - 3 \cdot \frac{1}{x} \right) \right]$$

由二次函数的知识可知, 当  $\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$ , 即  $x=6$  时,  $y \leq 90000 \left[ 5 + \frac{1}{6} \left( 1 - 3 \cdot \frac{1}{6} \right) \right]$

$$= 450000 + 7500 = 457500(\text{元})$$

所以，当生产速度为6千克/小时，这时获得最大利润为457500元。

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分。

已知函数  $f(x) = 2 \sin(\omega x)$ ，其中常数  $\omega > 0$ 。

(1) 令  $\omega=1$ ，判断函数  $F(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  的奇偶性，并说明理由；

(2) 令  $\omega=2$ ，将函数  $y=f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，再向上平移1个单位，得到函数  $y=g(x)$  的图像。对任意  $a \in \mathbb{R}$ ，求  $y=g(x)$  在区间  $[a, a+10\pi]$  上零点个数的所有可能值。

**【答案】** (1) 不是奇函数，也不是偶函数。

(2) 20,21

**【解析】** (1)

$$\omega=1 \text{ 时, } f(x) = 2 \sin x, F(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin x + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \sin x + 2 \cos x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \therefore \text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi, y = 2\sqrt{2} \sin x \text{ 是奇函数,}$$

$\therefore$  图像左移  $\frac{\pi}{4}$  后得  $f(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，即不是奇函数，也不是偶函数。

(2)  $\omega=2$ ，将函数  $y=f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，再向上平移1个单位，得到函数  $y=g(x)$ :

$$f(x) = 2 \sin 2x, g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1, \text{最小正周期 } T = \pi.$$

令  $f(x) = 0 \Rightarrow \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$  在一个周期内最多有3个零点，最少2个零点。

所以  $y=g(x)$  在区间  $[a, a+10\pi]$ 、其长度为10个周期上，零点个数可以取20, 21个

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分。

已知函数  $f(x) = 2 - |x|$ ，无穷数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

(1) 若  $a_1=0$ ，求  $a_2, a_3, a_4$ ；

(2) 若  $a_1>0$ ，且  $a_1, a_2, a_3$  成等比数列，求  $a_1$  的值。

(3) 是否存在  $a_1$ ，使得  $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$  成等差数列？若存在，求出所有这样的  $a_1$ ；若不存在，说明理由。

**【答案】** (1)  $a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 2$

(2)  $a_1 = 1$ ，或  $a_1 = 2 + \sqrt{2}$

(3)  $a_1 = 1$ ，且  $a_n = 1$

**【解析】** (1) 由  $a_{n+1} = f(a_n) \Rightarrow a_{n+1} = 2 - |a_n|$ .  $a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 2$

(2)  $\because a_1, a_2, a_3$  成等比  $\Rightarrow a_3 = \frac{a_2^2}{a_1} = 2 - |a_2| \Rightarrow a_2^2 = a_1(2 - |a_2|)$ ，且  $a_2 = 2 - |a_1|$

$$\Rightarrow (2 - |a_1|)^2 = a_1[2 - |2 - |a_1||] \Rightarrow (2 - a_1)^2 = a_1[2 - |2 - a_1|]$$

分情况讨论如何：

当 $2 - a_1 \geq 0$ 时,  $(2 - a_1)^2 = a_1[2 - (2 - a_1)] = a_1^2 \Rightarrow a_1 = 1$ , 且 $a_1 \leq 2$

当 $2 - a_1 < 0$ 时,  $(2 - a_1)^2 = a_1[2 - (a_1 - 2)] = a_1(4 - a_1) \Rightarrow 2a_1^2 - 8a_1 + 4 = 0 \Rightarrow a_1^2 - 4a_1 + 4 = 2 \Rightarrow 2a_1^2 - 8a_1 + 4 = 0 \Rightarrow (a_1 - 2)^2 = 2 \Rightarrow a_1 = 2 + \sqrt{2}$ , 且 $a_1 \geq 2$

综上,  $a_1 = 1$ , 或 $a_1 = 2 + \sqrt{2}$

(3) 假设存在公差为 $d$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足题意, 则:  $\forall n \in N^*, a_{n+1} = 2 - |a_n| = a_n + d \Rightarrow 2 - d = a_n + |a_n|$ . 讨论如下:

当 $a_n = m$ 即数列 $\{a_n\}$ 为常数数列时,  $d = 0, 2 = 2a_n \Rightarrow a_n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

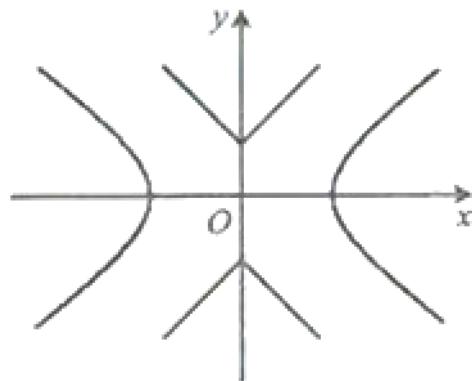
当数列 $\{a_n\}$ 不是常数数列时  $\Rightarrow a_n < 0, 2 - d = 0 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow \exists a_n > 0$ , 所以不满足题意。

综上, 存在 $a_1 = 1$ 的等差数列 $\{a_n\}$ , 且 $a_n = 1$ 满足题意。

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分9分.

如图, 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ , 曲线 $C_2: |y| = |x| + 1$ . P是平面内一点. 若存在过点P的直

线与 $C_1$ 、 $C_2$ 都有共同点, 则称P为“ $C_1-C_2$ 型点”.



第23题图

(1) 在正确证明 $C_1$ 的左焦点是“ $C_1-C_2$ 型点”时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);

(2) 设直线 $y = kx$ 与 $C_2$ 有公共点, 求证 $|k| > 1$ , 进而证明圆点不是“ $C_1-C_2$ 型点”;

(3) 求证: 圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内的点都不是“ $C_1-C_2$ 型点”.

【答案】 (1)  $\sqrt{3}y - x - \sqrt{3} = 0$

【解析】 (1)

由 $C_1$ 方程:  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 可知:  $a^2 = 2, b^2 = 1, c^2 = a^2 + b^2 = 3, F_1(-\sqrt{3}, 0)$

显然, 由双曲线 $C_1$ 的几何图像性质可知, 过 $F_1$ 的任意直线都与曲线 $C_1$ 相交. 从曲线 $C_2$ 图像上取点 $P(0, 1)$ , 则直线 $PF_1$ 与两曲线 $C_1$ 、 $C_2$ 均有交点。这时直线方程为

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3}y - x - \sqrt{3} = 0$$

(2) 先证明“若直线 $y = kx$ 与 $C_2$ 有公共点, 则 $|k| > 1$ ”.

双曲线  $C_1$  的渐近线:  $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}x$ .

若直线  $y = kx$  与双曲线  $C_1$  有交点, 则  $k \in A = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

若直线  $y = kx$  与双曲线  $C_2$  有交点, 则  $k \in B = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

所以直线  $y = kx$  与  $C_2$  有公共点, 则  $|k| > 1$ . (证毕)

$\because A \cap B = \emptyset$ , ∴ 直线  $y = kx$  与曲线  $C_1$ 、 $C_2$  不能同时有公共交点。

所以原点不是“ $C_1-C_2$ 型点”; (完)

(3) 设直线  $l$  过圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内一点, 则直线  $l$  斜率不存在时与曲线  $C_1$  无交点。

设直线  $l$  方程为:  $y = kx + m$ , 则:  $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2m^2 - 1 < k^2$

假设直线  $l$  与曲线  $C_2$  相交上方, 则  $y \geq 1$

# 2013年全国普通高等学校招生统一考试

## 上海 数学试卷(文史类)

### 答案要点及评分标准

#### 说明

1. 本解答列出试题的解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分。
2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅。当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半。如果有较严重的概念性错误，就不给分。

#### 解答

##### 一、(第1题至第14题)

1.  $0 < x < \frac{1}{2}$       2. 15      3. -2      4. 1      5.  $\frac{2\pi}{3}$       6. 78  
7. -2      8.  $\log_3 4$       9.  $-\frac{7}{9}$       10.  $\sqrt{3}$       11.  $\frac{5}{7}$       12.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$   
13.  $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$       14. -5

##### 二、(第15题至第18题)

题号	15	16	17	18
代号	A	B	A	D

##### 三、(第19题至第23题)

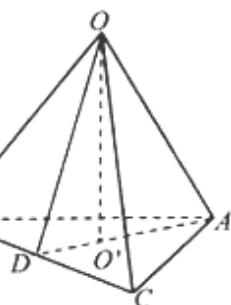
19. [解] 由已知条件可知，正三棱锥  $O-ABC$  的底面  $\triangle ABC$  是边长为 2 的正三角形。

经计算得底面  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ . ..... 2分

所以该三棱锥的体积为  $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . ..... 4分

设  $O'$  是正三角形  $ABC$  的中心。

由正三棱锥的性质可知， $OO'$  垂直于平面  $ABC$ .



第19题图

延长  $AO'$  交  $BC$  于  $D$ ，得  $AD = \sqrt{3}$ ， $O'D = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . ..... 7分

又因为  $OO' = 1$ ，所以正三棱锥的斜高  $OD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . ..... 9分

$$\text{故侧面积为 } \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

所以该三棱锥的表面积为  $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ ,

因此, 所求三棱锥的体积为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 表面积为  $3\sqrt{3}$ . ..... 12分

20. [解] (1) 生产  $a$  千克该产品, 所用的时间是  $\frac{a}{x}$  小时, ..... 3分

$$\text{所获得的利润为 } 100 \left( 5x + 1 - \frac{3}{x} \right) \cdot \frac{a}{x}.$$

所以, 生产  $a$  千克该产品所获得的利润为  $100a \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$  元. ..... 5分

(2) 生产 900 千克该产品, 获得的利润为  $90000 \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$ ,  $1 \leq x \leq 10$ . ..... 7分

$$\text{记 } f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} + 5, \quad 1 \leq x \leq 10,$$

则  $f(x) = -3 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{12} + 5$ , 当且仅当  $x = 6$  时取到最大值. ..... 11分

$$\text{获得最大利润 } 90000 \times \frac{61}{12} = 457500 \text{ 元.}$$

因此甲厂应以 6 千克/小时的速度生产, 可获得最大利润为 457500 元. ..... 14分

21. [解] (1)  $f(x) = 2 \sin x$ ,

$$F(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin x + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2(\sin x + \cos x). \quad \dots 2 \text{分}$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}, \quad F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad F\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq F\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad F\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -F\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad \dots 4 \text{分}$$

所以,  $F(x)$  既不是奇函数, 也不是偶函数. ..... 6分

(2)  $f(x) = 2 \sin 2x$ ,

将  $y = f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 再向上平移 1 个单位后得到

$$y = 2 \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \text{ 的图像, 所以 } g(x) = 2 \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1. \quad \dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = 0, \text{ 得 } x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \text{ 或 } x = k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

因为  $[a, a+10\pi]$  恰含 10 个周期, 所以,

当  $a$  是零点时, 在  $[a, a+10\pi]$  上零点个数为 21; ..... 11分

当  $a$  不是零点时,  $a+k\pi (k \in \mathbb{Z})$  也都不是零点, 区间  $[a+k\pi, a+(k+1)\pi]$  上恰有两个零点, 故在  $[a, a+10\pi]$  上有 20 个零点.

综上,  $y = g(x)$  在  $[a, a+10\pi]$  上零点个数的所有可能值为 21 或 20. ..... 14分

22. [解] (1)  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 2$ . ..... 3分

(2)  $a_2 = 2 - |a_1| = 2 - a_1$ ,  $a_3 = 2 - |a_2| = 2 - |2 - a_1|$ .

① 当  $0 < a_1 \leq 2$  时,  $a_3 = 2 - (2 - a_1) = a_1$ , 所以  $a_1^2 = (2 - a_1)^2$ , 得  $a_1 = 1$ . ..... 5分

② 当  $a_1 > 2$  时,  $a_3 = 2 - (a_1 - 2) = 4 - a_1$ , 所以  $a_1(4 - a_1) = (2 - a_1)^2$ ,

得  $a_1 = 2 - \sqrt{2}$  (舍去) 或  $a_1 = 2 + \sqrt{2}$ .

综合①②得  $a_1 = 1$  或  $a_1 = 2 + \sqrt{2}$ . ..... 8分

(3) 假设这样的等差数列存在, 那么  $a_2 = 2 - |a_1|$ ,  $a_3 = 2 - |2 - |a_1||$ .

由  $2a_2 = a_1 + a_3$  得  $2 - a_1 + |2 - |a_1|| = 2|a_1|$  (\*).

以下分情况讨论:

① 当  $a_1 > 2$  时, 由 (\*) 得  $a_1 = 0$ , 与  $a_1 > 2$  矛盾; ..... 10分

② 当  $0 < a_1 \leq 2$  时, 由 (\*) 得  $a_1 = 1$ , 从而  $a_n = 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

所以  $\{a_n\}$  是一个等差数列; ..... 12分

③ 当  $a_1 \leq 0$  时, 则公差  $d = a_2 - a_1 = (a_1 + 2) - a_1 = 2 > 0$ , 因此存在  $m \geq 2$  使得  $a_m = a_1 + 2(m-1) > 2$ . 此时  $d = a_{m+1} - a_m = 2 - |a_m| - a_m < 0$ , 矛盾.

综合①②③可知, 当且仅当  $a_1 = 1$  时,  $a_1, a_2, a_3, \dots$  构成等差数列. ..... 16分

23. [解] (1)  $C_1$  的左焦点为  $(-\sqrt{3}, 0)$ , 写出的直线方程可以是以下形式:

$$x = -\sqrt{3} \text{ 或 } y = k(x + \sqrt{3}), \text{ 其中 } |k| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ ..... 3分}$$

(2) 因为直线  $y = kx$  与  $C_2$  有公共点,

所以方程组  $\begin{cases} y = kx, \\ |y| = |x| + 1 \end{cases}$  有实数解, 因此  $|kx| = |x| + 1$ , 得  $|k| = \frac{|x| + 1}{|x|} > 1$ . ..... 6分

若原点是 “ $C_1 - C_2$  型点”, 则存在过原点的直线与  $C_1$ 、 $C_2$  都有公共点.

考虑过原点与  $C_2$  有公共点的直线  $x = 0$  或  $y = kx$  ( $|k| > 1$ ).

显然直线  $x = 0$  与  $C_1$  无公共点.

如果直线为  $y = kx$  ( $|k| > 1$ ), 则由方程组  $\begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases}$  得  $x^2 = \frac{2}{1 - 2k^2} < 0$ , 矛盾.

所以直线  $y = kx$  ( $|k| > 1$ ) 与  $C_1$  也无公共点.

因此原点不是 “ $C_1 - C_2$  型点”. ..... 9分

(3) 记圆  $O: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ , 取圆  $O$  内的一点  $Q$ . 设有经过  $Q$  的直线  $l$  与  $C_1$ 、 $C_2$  都有公共点. 显然  $l$  不垂直于  $x$  轴, 故可设  $l: y = kx + b$ .

若  $|k| \leq 1$ , 由于圆  $O$  夹在两组平行线  $y = x \pm 1$  与  $y = -x \pm 1$  之间, 因此圆  $O$  也夹在直线  $y = kx \pm 1$  与  $y = -kx \pm 1$  之间, 从而过  $Q$  且以  $k$  为斜率的直线  $l$  与  $C_2$  无公共点, 矛盾, 所以  $|k| > 1$ . ..... 11分

因为  $l$  与  $C_1$  有公共点, 所以方程组  $\begin{cases} y = kx + b, \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases}$  有实数解,

得  $(1-2k^2)x^2 - 4kbx - 2b^2 - 2 = 0$ . 因为  $|k| > 1$ , 所以  $1-2k^2 \neq 0$ ,

因此  $\Delta = (4kb)^2 - 4(1-2k^2)(-2b^2 - 2) = 8(b^2 + 1 - 2k^2) \geq 0$ ,

即  $b^2 \geq 2k^2 - 1$ . ..... 14分

因为圆  $O$  的圆心  $(0, 0)$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$ ,

所以  $\frac{b^2}{1+k^2} = d^2 < \frac{1}{2}$ , 从而  $\frac{1+k^2}{2} > b^2 \geq 2k^2 - 1$ , 得  $k^2 < 1$ , 与  $|k| > 1$  矛盾.

因此, 圆  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  内的点都不是“ $C_1-C_2$  型点”. ..... 18分