2008年陕西省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）（2008•陕西）sin330°等于（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B．$-\frac{1}{2}$ C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【考点】运用诱导公式化简求值．

【分析】根据330°=360°－30°，由诱导公式一可得答案．

【解答】解：$\because \sin 330^{\circ}=-\sin 30^{\circ}=-\frac{1}{2}$

故选B．

【点评】本题主要考查根据三角函数的诱导公式进行化简求值的问题．属基础题．对于三角函数的诱导公式一定要强化记忆．

2．（5分）（2008•四川）已知全集U={1，2，3，4，5}，集合A={1，3}，B={3，4，5}，则集合C_U（A∩B）=（　　）

A．{3}　B．{4，5}　C．{3，4，5}　D．{1，2，4，5}

【考点】交、并、补集的混合运算．

【分析】根据交集的含义求A∩B、再根据补集的含义求解．

【解答】解：A={1，3}，B={3，4，5}⇒A∩B={3}；

所以C_U（A∩B）={1，2，4，5}，

故选D

【点评】本题考查集合的基本运算，较简单．

3．（5分）（2008•陕西）某林场有树苗30000棵，其中松树苗4000棵．为调查树苗的生长情况，采用分层抽样的方法抽取一个容量为150的样本，则样本中松树苗的数量为（　　）

A．30　B．25　C．20　D．15

【考点】分层抽样方法．

【分析】先计算抽取比例，再计算松树苗抽取的棵数即可．

【解答】解：设样本中松树苗的数量为x，则$\frac{150}{30000}=\frac{x}{4000}\Rightarrow x=20$

故选C

【点评】本题考查分层抽样，属基本题．

4．（5分）（2008•陕西）已知$\{a_n\}$是等差数列，$a_1+a_2=4$，$a_7+a_8=28$，则该数列前10项和S_{10}等于（　　）

A．64　B．100　C．110　D．120

【考点】等差数列的前n项和．

【专题】计算题．

【分析】利用等差数列的通项公式，结合已知条件列出关于a_1，d的方程组，求出a_1和d，代入等差数列的前n项和公式求解即可．

【解答】解：设公差为d，

则由已知得$\begin{cases}2a_1+d=4\\2a_1+13d=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}\Rightarrow S_{10}=10\times1+\frac{10\times9}{2}\times2=100$，

故选B．

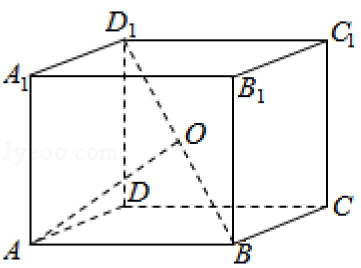
【点评】本题考查了等差数列的通项公式和前n项和公式，熟记公式是解题的关键，同时注意方程思想的应用．

5．（5分）（2008•陕西）直线$\sqrt{3}x-y+m=0$与圆$x^2+y^2-2x-2=0$相切，则实数m等于（　　）
A．$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$　B．$-\sqrt{3}$或$3\sqrt{3}$　C．$-3\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$　D．$-3\sqrt{3}$或$3\sqrt{3}$
【考点】直线与圆的位置关系．
【分析】圆心到直线的距离等于半径，求解即可．
【解答】解：圆的方程$(x-1)^2+y^2=3$，圆心（1，0）到直线的距离等于半径
$\Rightarrow\frac{|\sqrt{3}+m|}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}\Rightarrow|\sqrt{3}+m|=2\sqrt{3}\Rightarrow m=\sqrt{3}$或者$\Rightarrow m=-3\sqrt{3}$
故选C．
【点评】本题考查直线和圆的位置关系，是基础题．

6．（5分）（2008•陕西）“a=1”是“对任意的正数x，$2x+\frac{a}{x}\geqslant1$”的（　　）
A．充分不必要条件　B．必要不充分条件
C．充要条件 D．既不充分也不必要条件
【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断．
【分析】把a=1代入$2x+\frac{a}{x}\geqslant1$，不等式成立，当a=2时$2x+\frac{a}{x}\geqslant1$也成立，可推出其关系．
【解答】解：$a=1\Rightarrow2x+\frac{a}{x}=2x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{2x\times\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}>1$，显然a=2也能推出，所以“a=1”是“对任意的正数x，$2x+\frac{a}{x}\geqslant1$”的充分不必要条件．
故选A．
【点评】充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件；三者有明显区别，对任意的正数x，$2x+\frac{a}{x}\geqslant1$成立，可得$a\geq\frac{1}{2}$，而不仅仅是a=1

7．（5分）（2008•陕西）已知函数$f(x)=2^{x+3}$，$f^{-1}(x)$是f（x）的反函数，若mn=16（m，n∈R^+），则$f^{-1}(m)+f^{-1}(n)$的值为（　　）
A．10　B．4　C．1　D．﹣2
【考点】反函数．
【专题】计算题．
【分析】求出函数$f(x)=2^{x+3}$的反函数$f^{-1}(x)$，化简$f^{-1}(m)+f^{-1}(n)$的表达式，代入mn=16即可求值．
【解答】解：$f(x)=2^{x+3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2x-3$；
于是$f^{-1}(m)+f^{-1}(n)=\log_2m-3+\log_2n-3=\log_2mn-6=\log_216-6=4-6=-2$
故选D．
【点评】本题考查反函数的求法，函数值的求解，是基础题．

8．（5分）（2008•陕西）长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的各顶点都在半径为1的球面上，其中$AB:AD:AA_1=2:1:\sqrt{3}$，则两A，B点的球面距离为（　　）



A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

【考点】球面距离及相关计算.

【专题】计算题.

【分析】设出AD，然后通过球的直径求出AD，解出∠AOB，可求A，B两点的球面距离.

【解答】解：设AD=a，则AB=2a，$AA_1=\sqrt{3}a$⇒球的直径$2R=\sqrt{a^2+4a^2+3a^2}=2\sqrt{2}a$

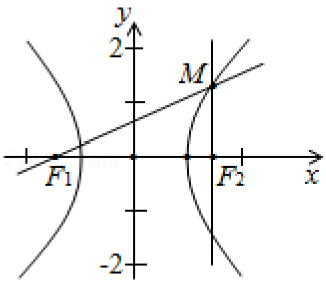
即$R=\sqrt{2}a$，在△AOB中，$OA=OB=R=\sqrt{2}a$，AB=2a，

$\Rightarrow OA^2+OB^2=AB^2\Rightarrow\angle AOB=90°$从而A，B点的球面距离为$\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}$

故选C.

【点评】本题考查球面距离及其他计算，实际上是球的内接长方体问题，考查学生发现问题解决问题能力，是基础题.

9. （5分）（2008•陕西）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点分别是$F_1$，$F_2$，过$F_1$作倾斜角为30°的直线交双曲线右支于M点，若$MF_2$垂直于x轴，则双曲线的离心率为（　　）



A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】双曲线的简单性质.

【专题】计算题.

【分析】先在Rt△MF_1F_2中，利用∠MF_1F_2和F_1F_2求得MF_1和MF_2，进而根据双曲线的定义求得a，最后根据a和c求得离心率.

【解答】解：如图在Rt△MF_1F_2中，∠MF_1F_2=30°，F_1F_2=2c

$\therefore MF_1=\frac{2c}{\cos30°}=\frac{4}{3}\sqrt{3}c$，$MF_2=2c\cdot\tan30°=\frac{2}{3}\sqrt{3}c$

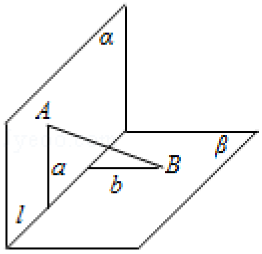
$\therefore 2a=MF_1-MF_2=\frac{4}{3}\sqrt{3}c-\frac{2}{3}\sqrt{3}c=\frac{2}{3}\sqrt{3}c$

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，

故选B.

【点评】本题主要考查了双曲线的简单性质，属基础题.

10. （5分）（2008•陕西）如图，α⊥β，α∩β=l，A∈α，B∈β，A、B到l的距离分别是a和b．AB与α、β所成的角分别是θ和φ，AB在α、β内的射影分别是m和n．若a＞b，则（　　）



A．θ＞ϕ，m＞n　B．θ＞ϕ，m＜n　C．θ＜ϕ，m＜n　D．θ＜ϕ，m＞n

【考点】平面与平面垂直的性质；三垂线定理．

【专题】计算题．

【分析】在图象中作出射影，在直角三角形中利用勾股定理与三角函数的定义建立相关等式，运算即可．

【解答】解：由题意可得$\begin{cases}AB^2=a^2+n^2=b^2+m^2\\ a>b\\ \tan\phi=\frac{a}{n}\\ \tan\theta=\frac{b}{m}\end{cases}$，

即有$\begin{cases}m>n\\ \theta<\phi\end{cases}$，

故选D．

【点评】本题考查对直二面角的认识程度，以及正确识图的能力、借且图象进行推理的能力．

11．（5分）（2008•陕西）定义在R上的函数f（x）满足f（x+y）=f（x）+f（y）+2xy（x，y∈R），f（1）=2，则f（﹣3）等于（　　）

A．2　　B．3　　C．6　　D．9

【考点】函数的值．

【专题】压轴题．

【分析】根据关系式f（x+y）=f（x）+f（y）+2xy，令x=y=0求出f（0），再令x=y=1，求出f（2），同样的道理求出f（3），最终求出f（﹣3）的值．

【解答】解：令x=y=0⇒f（0）=0，令x=y=1⇒f（2）=2f（1）+2=6；

令x=2，y=1⇒f（3）=f（2）+f（1）+4=12，

再令x=3，y=﹣3得0=f（3﹣3）=f（3）+f（﹣3）﹣18⇒f（﹣3）=18﹣f（3）=6

故选C．

【点评】本题主要考查已知函数的关系式求函数值的问题．这里经常取一些特殊点代入，要注意特殊点的选取技巧．

12．（5分）（2008•陕西）为提高信息在传输中的抗干扰能力，通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信息．设定原信息为$a_0a_1a_2$，a_i∈{0，1}（i=0，1，2），传输信息为$h_0a_0a_1a_2h_1$，其中$h_0=a_0⊕a_1$，$h_1=h_0⊕a_2$，⊕运算规则为：0⊕0=0，0⊕1=1，1⊕0=1，1⊕1=0，例如原信息为111，则传输信息为01111．传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错，则下列接收信息一定有误的是（　　）

A．11010　　B．01100　　C．10111　　D．00011

【考点】抽象函数及其应用．

【专题】压轴题．

【分析】首先理解⊕的运算规则，然后各选项依次分析即可．

【解答】解：A选项原信息为101，则$h_0=a_0⊕a_1=1⊕0=1$，$h_1=h_0⊕a_2=1⊕1=0$，所以传输信息为11010，A选项正确；

B选项原信息为110，则$h_0=a_0\oplus a_1=1\oplus 1=0$，$h_1=h_0\oplus a_2=0\oplus 0=0$，所以传输信息为01100，B选项正确；
C选项原信息为011，则$h_0=a_0\oplus a_1=0\oplus 1=1$，$h_1=h_0\oplus a_2=1\oplus 1=0$，所以传输信息为10110，C选项错误；
D选项原信息为001，则$h_0=a_0\oplus a_1=0\oplus 0=0$，$h_1=h_0\oplus a_2=0\oplus 1=1$，所以传输信息为00011，D选项正确；
故选C．
【点评】本题考查对新规则的阅读理解能力．

二、填空题（共4小题，每小题4分，满分16分）

13．（4分）（2008•陕西）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$c=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，B=120°，则a=_$\sqrt{2}$__．
【考点】正弦定理．
【专题】计算题．
【分析】由正弦定理求得sinC的值，进而求得C，进而求得A推断a=c，答案可得．
【解答】解：由正弦定理$\frac{\sqrt{6}}{\sin 120^{\circ}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{1}{2}$，
$\therefore C=30^{\circ}\Rightarrow A=30^{\circ}\Rightarrow a=c=\sqrt{2}$
故答案为$\sqrt{2}$
【点评】本题主要考查了正弦定理得应用．属基础题．

14．（4分）（2008•陕西）$\left(1-\frac{2}{x}\right)^7$的展开式中$\frac{1}{x^2}$的系数为
__84__．（用数字作答）
【考点】二项式系数的性质．
【专题】计算题．
【分析】利用二项展开式的通项个数求出第r+1项，令x的指数为﹣2，求出系数．
【解答】解：$T_{r+1}=C_7^r\left(-\frac{2}{x}\right)^{7-r}=(-2)^{7-r}C_7^r\frac{1}{x^{7-r}}$，
令7﹣r=2⇒r=5，
因此展开式中$\frac{1}{x^2}$的系数为$(-2)^{7-5}C_7^5=84$，
故答案为84．
【点评】本题考查利用二项展开式的通项个数解决展开式的特定项问题．

15．（4分）（2008•陕西）关于平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，有下列三个命题：

①若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则$\vec{b}=\vec{c}$、

②若$\vec{a}=(1,k)$，$\vec{b}=(-2,6)$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则k=﹣3．

③非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为60°．

其中真命题的序号为__②__．（写出所有真命题的序号）
【考点】命题的真假判断与应用．
【专题】压轴题；数形结合．

【分析】①向量不满足约分运算，但满足分配律，由此我们利用向量的运算性质，可判断平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的关系；

②中，由$\vec{a}\parallel\vec{b}$，我们根据两个向量平行，坐标交叉相乘差为0的原则，可以构造一个关于k的方程，解方程即可求出k值；

③中，若$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，我们利用向量加减法的平行四边形法则，可以画出满足条件图象，利用图象易得到两个向量的夹角；

【解答】解：①若$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet\vec{c}$，则$\vec{a}\bullet(\vec{b}-\vec{c})=0$，此时$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$，而不一定$\vec{b}=\vec{c}$，①为假.

②由两向量$\vec{a}\parallel\vec{b}$的充要条件，知$1\times6-k\bullet(-2)=0$，解得$k=-3$，②为真.

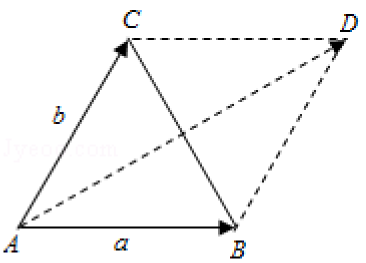
③如图，在△ABC中，设$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$，$\overrightarrow{CB}=a-b$，

由$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，可知△ABC为等边三角形.

由平行四边形法则作出向量$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AD}$，

此时$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$成的角为30°．③为假.

综上，只有②是真命题.
答案：②



【点评】本题考查的知识点是向量的运算性质及命题的真假判断与应用，处理的关键是熟练掌握向量的运算性质，如两个向量垂直，则数量积为0，两个向量平等，坐标交叉相乘差为0等.

16．（4分）（2008•陕西）某地奥运火炬接力传递路线共分6段，传递活动分别由6名火炬手完成．如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生，最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生，则不同的传递方案共有__96__种．（用数字作答）.
【考点】排列、组合的实际应用.
【专题】计算题；压轴题.
【分析】根据题意，如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生，最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生；按第一棒是丙或甲、乙中一人，分为两类，分别计算其情况数目，结合分类计数原理，计算可得答案.
【解答】解：分两类：第一棒是丙有$C_1^1\bullet C_2^1\bullet A_4^4=48$，
第一棒是甲、乙中一人有$C_2^1\bullet C_1^1\bullet A_4^4=48$
因此共有方案48+48=96种；
故答案为96.
【点评】本题考查排列、组合的综合应用，注意优先分析有特殊要求的元素，对于本题，注意分类的标准前后统一，要做到不重不漏.

三、解答题（共6小题，满分70分）

17．（12分）（2008•陕西）已知函数$f(x)=2\sin\frac{x}{4}\bullet\cos\frac{x}{4}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$.

（1）求函数f（x）的最小正周期及最值；

（2）令$g(x)=f(x+\frac{\pi}{3})$，判断函数$g(x)$的奇偶性，并说明理由．

【考点】三角函数的周期性及其求法；正弦函数的奇偶性；三角函数的最值．

【专题】计算题．

【分析】利用二倍角公式、两角和的正弦函数化简函数$f(x)=2\sin\frac{x}{4}\bullet\cos\frac{x}{4}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$，为$y=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$

，

（1）直接利用周期公式求出周期，求出最值．

（2）求出$g(x)=f(x+\frac{\pi}{3})$的表达式，$g(x)=2\cos\frac{x}{2}$．然后判断出奇偶性即可．

【解答】解：（1）$\because f(x)=\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$，

$\therefore f(x)$的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$．

当$\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})=-1$时，$f(x)$取得最小值$-2$；

当$\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})=1$时，$f(x)$取得最大值2．

（2）$g(x)$是偶函数．理由如下：

由（1）知$f(x)=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$，

又$g(x)=f(x+\frac{\pi}{3})$，

$\therefore g(x)=2\sin[\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]$

$=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})=2\cos\frac{x}{2}$．

$\because g(-x)=2\cos(-\frac{x}{2})=2\cos\frac{x}{2}=g(x)$，

$\therefore$函数$g(x)$是偶函数．

【点评】本题是基础题，考查三角函数的化简与求值，考查三角函数的基本性质，常考题型．

18．（12分）（2008•陕西）一个口袋中装有大小相同的2个红球，3个黑球和4个白球，从口袋中一次摸出一个球，摸出的球不再放回．

（Ⅰ）连续摸球2次，求第一次摸出黑球，第二次摸出白球的概率；

（Ⅱ）如果摸出红球，则停止摸球，求摸球次数不超过3次的概率．

【考点】相互独立事件的概率乘法公式；互斥事件的概率加法公式；古典概型及其概率计算公式．

【专题】计算题．

【分析】（Ⅰ）本题是一个古典概型，试验发生包含的事件是从袋中依次摸出2个球共有A_9^2种结果，满足条件的事件是第一次摸出黑球、第二次摸出白球有$A_3^1A_4^1$种结果，或者是题目按照相互独立事件同时发生的概率来理解．

（Ⅱ）摸球不超过三次，包括第一次摸到红球，第二次摸到红球，第三次摸到红球，这三个事件是互斥的，分别写出三个事件的概率，根据互斥事件的概率得到结果．

【解答】解：（Ⅰ）由题意知，本题是一个古典概型，

试验发生包含的事件是从袋中依次摸出2个球共有A_9^2种结果，

满足条件的事件是第一次摸出黑球、第二次摸出白球有$A_3^1A_4^1$种结果，

∴所求概率$P_1=\frac{A_3^1A_4^1}{A_9^2}=\frac{1}{6}$（或$P_1=\frac{3}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$）

（Ⅱ）摸球不超过三次，包括第一次摸到红球，
第二次摸到红球，第三次摸到红球，
这三个事件是互斥的

第一次摸出红球的概率为$\frac{A_2^1}{A_9^1}$，

第二次摸出红球的概率为$\frac{A_7^1A_2^1}{A_9^2}$，

第三次摸出红球的概率为$\frac{A_7^2A_2^1}{A_9^3}$，

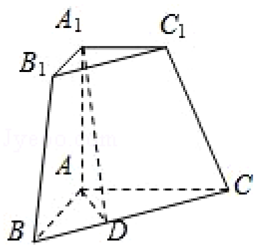
则摸球次数不超过3次的概率为$P_2=\frac{A_2^1}{A_9^1}+\frac{A_7^1A_2^1}{A_9^2}+\frac{A_7^2A_2^1}{A_9^3}=\frac{7}{12}$.

【点评】本题考查互斥事件的概率，考查相互独立事件同时发生的概率，考查古典概型，是一个综合题，解题时关键在于理解题意，同一个题目可以有不同的解法.

19．（12分）（2008•陕西）三棱锥被平行于底面ABC的平面所截得的几何体如图所示，截面为$A_1B_1C_1$，∠BAC=90°，A_1A⊥平面ABC，$A_1A=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{2}$，AC=2，A_1C_1=1，$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）证明：平面A_1AD⊥平面BCC_1B_1；

（Ⅱ）求二面角A－CC_1－B的大小.



【考点】平面与平面垂直的判定；二面角的平面角及求法.

【专题】计算题；证明题.

【分析】（Ⅰ）欲证平面A_1AD⊥平面BCC_1B_1，根据面面垂直的判定定理可知在平面BCC_1B_1内一直线与平面A_1AD垂直，根据线面垂直的性质可知A_1A⊥BC，AD⊥BC，又A_1A∩AD=A，根据线面垂直的判定定理可知BC⊥平面A_1AD，而BC⊂平面BCC_1B_1，满足定理所需条件；

（Ⅱ）作AE⊥C_1C交C_1C于E点，连接BE，由三垂线定理知BE⊥CC_1，从而∠AEB为二面角A－CC_1－B的平面角，过C_1作C_1F⊥AC交AC于F点，在Rt△BAE中，求出二面角A－CC_1－B的平面角即可.

【解答】证明：（Ⅰ）∵A_1A⊥平面ABC，BC⊂平面ABC，

∴A_1A⊥BC．在Rt△ABC中，$AB=\sqrt{2}$，AC=2，∴$BC=\sqrt{6}$，

∵BD：DC=1：2，∴$BD=\frac{\sqrt{6}}{3}$，又$\frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{AB}{BC}$，

∴△DBA∽△ABC，∴∠ADB=∠BAC=90°，即AD⊥BC．

又A_1A∩AD=A，∴BC⊥平面A_1AD，∵BC⊂平面BCC_1B_1，∴平面A_1AD⊥平面BCC_1B_1.

（Ⅱ）如图，作AE⊥C_1C交C_1C于E点，连接BE，

由已知得AB⊥平面ACC_1A_1．∴AE是BE在面ACC_1A_1内的射影．

由三垂线定理知BE⊥CC_1，∴∠AEB为二面角A－CC_1－B的平面角．

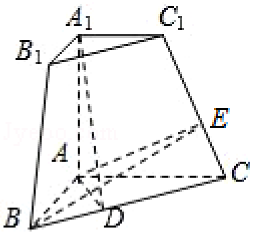
过C_1作$C_1F\perp AC$交AC于F点，

则$CF=AC-AF=1$，$C_1F=A_1A=\sqrt{3}$，$\therefore\angle C_1CF=60°$.

在Rt△AEC中，$AE=AC\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

在Rt△BAE中，$\tan AEB=\frac{AB}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. $\therefore\angle AEB=\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即二面角$A-CC_1-B$为$\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$.



【点评】本题主要考查平面与平面垂直的判定，以及二面角的平面角的度量，同时考查了空间想象能力，计算能力和推理能力，以及转化与划归的思想，属于中档题.

20．（12分）（2008•陕西）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\frac{2}{3}$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$，n=1，2，….

（Ⅰ）证明：数列$\{\frac{1}{a_n}-1\}$是等比数列；

（Ⅱ）求数列$\{\frac{n}{a_n}\}$的前n项和.

【考点】数列递推式；等比关系的确定；数列的求和.

【专题】计算题；压轴题.

【分析】（1）化简$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$构造新的数列$\{\frac{1}{a_n}-1\}$，进而证明数列$\{\frac{1}{a_n}-1\}$是等比数列.

（2）根据（1）求出数列$\{\frac{1}{a_n}-1\}$的递推公式，得出a_n，进而构造数列$\{\frac{n}{a_n}\}$，求出数列$\{\frac{n}{a_n}\}$的通项公式，进而求出前n项和S_n.

【解答】解：（Ⅰ）由已知：$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$，

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}$，（2分）

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-1)$，

又$a_1=\frac{2}{3}$，$\therefore\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2}$，（4分）

∴数列$\{\frac{1}{a_n}-1\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\frac{1}{a_n}-1=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^n}$，

即$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^n}+1$，$\therefore\frac{n}{a_n}=\frac{n}{2^n}+n$.（8分）

设$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，①

则$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，②

由①－②得：$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$，（10分）

$\therefore T_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$．又$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$．（12分）

∴数列$\{\frac{n}{a_n}\}$的前n项和：$S_n=2-\frac{2+n}{2^n}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+4}{2}-\frac{2+n}{2^n}$．（14分）

【点评】此题主要考查通过构造新数列达到求解数列的通项公式和前n项和的方法．

21．（12分）（2008•陕西）已知抛物线C：$y=2x^2$，直线$y=kx+2$交C于A，B两点，M是线段AB的中点，过M作x轴的垂线交C于点N．

（Ⅰ）证明：抛物线C在点N处的切线与AB平行；

（Ⅱ）是否存在实数k使$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，若存在，求k的值；若不存在，说明理由．

【考点】直线与圆锥曲线的综合问题；平面向量数量积的运算．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】（1）设A（x_1，$2x_1^2$），B（x_2，$2x_2^2$），把直线方程代入抛物线方程消去y，根据韦达定理求得x_1+x_2和x_1x_2的值，进而求得N和M的横坐标，表示点M的坐标，设抛物线在点N处的切线l的方程将$y=2x^2$代入进而求得m和k的关系，进而可知l∥AB．

（2）假设存在实数k，使$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$成立，则可知NA⊥NB，又依据M是AB的中点进而可知$|MN|=\frac{1}{2}|AB|$．

根据（1）中的条件，分别表示出|MN|和|AB|代入$|MN|=\frac{1}{2}|AB|$求得k．

【解答】解：（Ⅰ）如图，设A（x_1，$2x_1^2$），B（x_2，$2x_2^2$），

把$y=kx+2$代入$y=2x^2$得$2x^2-kx-2=0$，

由韦达定理得$x_1+x_2=\frac{k}{2}$，$x_1x_2=-1$，

$\therefore x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$，∴N点的坐标为$(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8})$．

设抛物线在点N处的切线l的方程为$y-\frac{k^2}{8}=m(x-\frac{k}{4})$，

将$y=2x^2$代入上式得$2x^2-mx+\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}=0$，

∵直线l与抛物线C相切，

$\therefore \triangle=m^2-8(\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8})=m^2-2mk+k^2=(m-k)^2=0$，

∴m=k，即l∥AB．

（Ⅱ）假设存在实数k，使$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，则NA⊥NB，

又∵M是AB的中点，∴$|MN|=\frac{1}{2}|AB|$.

由（Ⅰ）知$y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)=\frac{1}{2}[k(x_1+x_2)+4]=\frac{1}{2}(\frac{k^2}{2}+4)=\frac{k^2}{4}+2$.

∵MN⊥x轴，

∴$|MN|=|y_M-y_N|=\frac{k^2}{4}+2-\frac{k^2}{8}=\frac{k^2+16}{8}$.

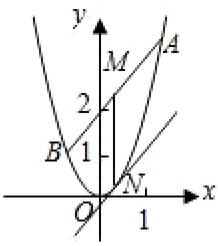
又$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=$

$\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{k}{2})^2-4\times(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$.

∴$\frac{k^2+16}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$，

解得$k=\pm2$.

即存在$k=\pm2$，使$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.



【点评】本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题．考查了学生综合把握所学知识和基本的运算能力．

22．（14分）（2008•陕西）设函数$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+1$，$g(x)=ax^2-2x+1$，其中实数$a\neq0$.

（Ⅰ）若$a>0$，求函数f（x）的单调区间；

（Ⅱ）当函数y=f（x）与y=g（x）的图象只有一个公共点且g（x）存在最小值时，记g（x）的最小值为h（a），求h（a）的值域；

（Ⅲ）若f（x）与g（x）在区间（a，a+2）内均为增函数，求a的取值范围．

【考点】利用导数研究函数的单调性．

【专题】压轴题．

【分析】（1）先对函数f（x）进行求导，令导函数大于0可求函数的增区间，令导函数小于0可求函数的减区间．

（2）令f（x）=g（x）整理可得$x[x^2-(a^2-2)]=0$，故$a^2-2\leq0$求出a的范围，再根据g（x）存在最小值必有$a>0$，最后求出h（a）的值域即可．

（3）分别求出函数f（x）与g（x）的单调区间，然后令（a，a+2）为二者单调增区间的子集即可．

【解答】解：（Ⅰ）∵$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=3(x-\frac{a}{3})(x+a)$，又$a>0$，

∴当$x<-a$或$x>\frac{a}{3}$时，$f'(x)>0$；

当$-a<x<\frac{a}{3}$时，$f'(x)<0$，

∴f（x）在$(-\infty,-a)$和$(\frac{a}{3},+\infty)$内是增函数，在$(-a,\frac{a}{3})$内是减函数．

（Ⅱ）由题意知$x^3+ax^2-a^2x+1=ax^2-2x+1$，

即$x[x^2-(a^2-2)]=0$恰有一根（含重根）．∴$a^2-2\leq0$，即$-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}$，

又$a\neq0$，∴$a\in[-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2}]$.

当$a>0$时，g（x）才存在最小值，∴$a\in(0,\sqrt{2}]$.

$g(x)=a(x-\frac{1}{a})^2+1-\frac{1}{a}$,

$\therefore h(a)=1-\frac{1}{a}$，$a\in(0,\sqrt{2}]$.

$h(a)\leq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\therefore h(a)$的值域为$(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

（Ⅲ）当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,-a)$和$(\frac{a}{3},+\infty)$内是增函数，$g(x)$在$(\frac{1}{a},+\infty)$内是增函数.

由题意得$\begin{cases}a>0\\a\geq\frac{a}{3}\\a\geq\frac{1}{a}\end{cases}$，解得$a\geq 1$；

当$a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,\frac{a}{3})$和$(-a,+\infty)$内是增函数，$g(x)$在$(-\infty,\frac{1}{a})$内是增函数.

由题意得$\begin{cases}a<0\\a+2\leq\frac{a}{3}\\a+2\leq\frac{1}{a}\end{cases}$，解得$a\leq -3$；

综上可知，实数a的取值范围为$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

【点评】本题主要考查函数的单调性与其导函数的正负情况之间的关系，即当导函数小于0时原函数单调递减，当导函数大于0时原函数单调递增.