

# 2023年上海高考数学真题及答案

考生注意：

1. 本试卷共5页，21道试题，满分150分。考试时间120分钟。
2. 本考试分设试卷和答题纸。试卷包括试题与答题要求。作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分。
3. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码粘在指定位置上，在答题纸反面清超地填写姓名。

1 ~ 6

7 ~ 12

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第\_\_\_\_\_题每题4分，第\_\_\_\_\_题每题5分）考生应在答题纸的相应位置填写结果。

1. 不等式 $|x - 2| < 1$ 的解集为 \_\_\_\_\_；

2. 已知 $\vec{a} = (-2, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2)$ , 求 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ \_\_\_\_\_；

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1 = 3, q = 2$ , 求 $s_6 =$ \_\_\_\_\_；

4. 已知 $\tan \alpha = 3$ , 求 $\tan 2\alpha =$ \_\_\_\_\_；

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则 $f(x)$ 的值域是\_\_\_\_\_；

6. 已知当 $z = 1 + i$ , 则 $|1 - i \cdot z| =$ \_\_\_\_\_；

7. 已知 $x^2 + y^2 - 4y - m = 0$ 的面积为 $\frac{\pi}{4}$ , 求 $m =$ \_\_\_\_\_；

8. 在 $\triangle ABC$ 中,  $a = 4, b = 5, c = 6$ , 求 $\sin A =$ \_\_\_\_\_；

9. 国内生产总值(GDP)是衡量地区经济状况的最佳指标, 根据统计数据显示, 某市在2020年间经济高质量增长, GDP稳步增长, 第一季度和第四季度的GDP分别为231和242, 且四个季度GDP的中位数与平均数相等, 则2020年GDP总额为\_\_\_\_\_；

10. 已知 $(1+2023x)^{100} + (2023-x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{100}x^{100}$ , 其中

$a_6, a_1, a_2, \dots, a_{100} \in \mathbb{R}$ , 若 $0 \leq k \leq 100$ 且 $k \in \mathbb{N}$ , 当 $a_k < 0$ 时,  $\frac{k}{a_k}$ 的最大值是\_\_\_\_\_;

11. 公园修建斜坡, 假设斜坡起点在水平面上, 斜坡与水平面的夹角为 $\theta$ , 斜坡终点距离水平面的垂直高度为4米, 游客每走一米消耗的体能为 $(1.025 - \cos\theta)$ , 要使游客从斜坡底走到斜坡顶端所消耗的总体能最少, 则 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

12. 空间内存在三点 $A, B, C$ , 满足 $AB = AC = BC = 1$ , 在空间内取不同两点(不计顺序), 使得这

两点与 $A, B, C$ 可以组成正四棱锥, 求方案数为\_\_\_\_\_;

13、14      15、16

二、选择题(本题共有4题, 满分18分, \_\_\_\_\_每题4分, \_\_\_\_\_题每题5分) 每题有且只有一个正确选项, 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

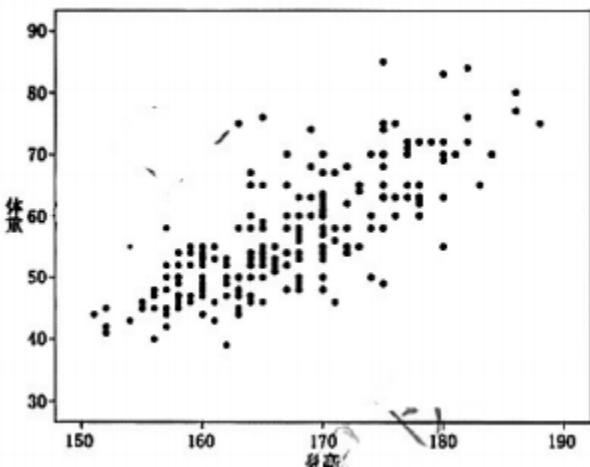
13. 已知 $P = \{1, 2\}, Q = \{2, 3\}$ , 若 $M = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$ , 则 $M = (\quad)$ .

- A. {1}
- B. {2}
- C. {1, 2}
- D. {1, 2, 3}

14. 根据身高和体重散点图, 下列说法正确的是().

- A. 身高越高, 体重越重
- B. 身高越高, 体重越轻

C. 身高与体重成正相关



D. 身高与体重成负相关

15. 设  $a > 0$ , 函数  $y = \sin x$  在区间  $[a, 2a]$  上的最小值为  $s_a$ , 在  $[2a, 3a]$  上的最小值为  $t_a$ , 当  $a$  变化时, 以下不可能的情形是().

- A.  $s_a > 0$  且  $t_a > 0$
- B.  $s_a < 0$  且  $t_a < 0$
- C.  $s_a > 0$  且  $t_a < 0$
- D.  $s_a < 0$  且  $t_a > 0$

16. 在平面上, 若曲线  $\Gamma$  具有如下性质: 存在点  $M$ , 使得对于任意点  $P \in \Gamma$ , 都有  $Q \in \Gamma$  使得

$|PM| \cdot |QM| = 1$ . 则称这条曲线为“自相关曲线”. 判断下列两个命题的真假().

- (1) 所有椭圆都是“自相关曲线”.
  - (2) 存在是“自相关曲线”的双曲线.
- A. (1) 假命题; (2) 真命题
  - B. (1) 真命题; (2) 假命题
  - C. (1) 真命题; (2) 真命题
  - D. (1) 假命题; (2) 假命题

三、解答题(本大题共有5题, 满分78分) 解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AB = 2$ ,  $AD = 3$ ,  $DC = 4$ .

(1) 求证:  $A_1B \perp$  面  $DCC_1D$

(2) 若四棱柱体积为36, 求二面角  $A_1-BD-A$  的大小

18. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

函数  $f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a}$  ( $a, c \in R$ )

(1) 当  $a = 0$  是, 是否存在实数  $c$ , 使得  $f(x)$  为奇函数

(2) 函数  $f(x)$  的图像过点  $(1, 3)$ , 且  $f(x)$  的图像与  $x$  轴负半轴有两个交点求实数  $a$  的取值范围

19. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分2分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

21世纪汽车博览会在上海2023年6月7日在上海举行, 下表为某汽车模型公司共有25个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1) 若小明从这些模型中随机拿一个模型, 记事件  $A$  为小明取到的模型为红色外观, 事件  $B$  取到模型有棕色内饰

求  $P(B)$ 、 $P(B/A)$ , 并据此判断事件  $A$  和事件  $B$  是否独立

(2) 该公司举行了一个抽奖活动, 规定在一次抽奖中, 每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型, 给出以下假设: 1、拿到的两个模型会出现三种结果, 即外观和内饰均为同色、外观内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色; 2、按结果的可能性大小, 概率越小奖项越高; (3) 奖金额为一

等獎600元,二等獎300元,三等獎150元,请你分析獎項對應的結果,設 $X$ 為獎金額,写出 $X$ 的分布

列並求出 $X$ 的數學期望

20. (本題滿分16分) 本題共有3個小題, 第1小題滿分4分, 第2小題滿分6分, 第3小題滿分6分.

曲線 $\Gamma: y^2 = 4x$ , 第一象限內點 $A$ 在 $\Gamma$ 上, 的縱坐標是 $a$ .

(1) 若 $A$ 到準線距離為3, 求 $a$ ;

(2) 若 $B$ 在 $x$ 軸上, 中點在 $\Gamma$ 上, 求點 $B$ 坐標和坐标原點 $O$ 到 $AB$ 距離;

(3) 直線 $l: x = -3$ , 令 $P$ 是第一象限上異於 $A$ 的一點, 直線 $PA$ 交 $l$ 於 $Q$ ,  $H$ 是 $Q$ 在 $l$ 上的投影, 若點 $H$ 滿

足“對於任意 $a$ 都有 $|HQ| > 4$ ”求 $a$ 的取值範圍.

21. (本題滿分18分) 本題共有3個小題, 第1小題滿分4分, 第2小題滿分6分, 第3小題滿分8分.

令 $f(x) = \ln x$ , 取點 $(a_1, f(a_1))$ 過其曲線 $y = f(x)$ 做切線交 $y$ 軸於 $(0, a_2)$ , 取點 $(a_2, f(a_2))$ 過其做切線交 $y$ 軸於 $(0, a_3)$ , 若 $a_3 < 0$ 則停止, 以此類推, 得到數列 $\{a_n\}$ .

- (1) 若正整数  $m \geq 2$ , 证明  $a_m = \ln a_{m-1} - 1$ ;
- (2) 若正整数  $m \geq 2$ , 试比较  $a_m$  与  $a_{m-1} - 2$  大小;
- (3) 若正整数  $k \geq 3$ , 是否存在  $k$  使得  $a_1, a_2, \dots, a_k$  依次成等差数列? 若存在, 求出  $k$  的所有取值, 若不存在, 试说明理由.

#### 参考答案

1、  $(1, 3)$

2、 4

3、 189

$$4、 -\frac{3}{4}$$

$$5、 [1, + \infty)$$

$$6、 \sqrt{5}$$

7、 -3

$$8、 \frac{\sqrt{7}}{4}$$

9、 946

10、 49

$$11、 \arccos \frac{40}{41}$$

12、 9

13、 A

14、 C

15、 D

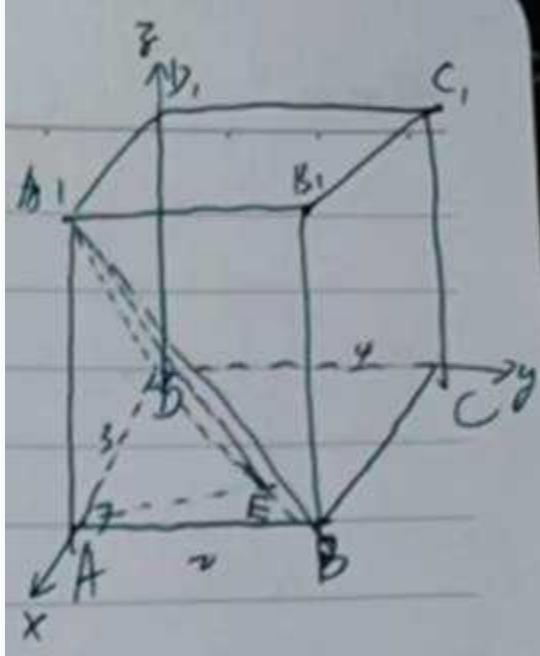
16、 B

17、

(1) 因为AB平行于CD，所以AB与平面  $CDC_1D_1$  平行  
又因为  $AA_1$  平行  $DD_1$ ，所以  $AA_1$  平行与平面  $CDC_1D_1$  平行

因为  $AA_1$  与 AB 相交于点 A，所以平面  $ABB_1A_1$  与平面  $CDC_1D_1$  平行

因为  $A_1B$  属于平面  $ABB_1A_1$ ，所以  $A_1B$  平行于平面  $CDC_1D_1$



(2) 因为四棱柱体积为36，设  $AA_1=h$

$$sh = 36 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (2+4) \cdot 3h = 36 \Rightarrow h = 4$$

所以

$A_1E$

在底面内作  $AE$  垂直  $BD$  与  $E$ ，连

因为  $BD$  垂直  $AE$ ， $BD$  垂直于  $AA_1$ ，所以  $BD$  垂直平面  $AA_1E$ ，所以  $BD$  垂直  $A_1E$

所以  $\angle A_1EA$  即为所求二面角的平面角

$$AE = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

在直角三角形  $A_1AE$  中， $AA_1=4$ ，

所以

$$\tan \angle A_1EA = \frac{AA_1}{AE} = \frac{2\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \cos \angle A_1EA = \frac{3\sqrt{61}}{61}$$

18、

$$f(x) = \frac{x^2 + x + c}{x}$$

(1) 当  $a=0$  时，

定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

假设  $f(x)$  为奇函数，则  $f(-x) = -f(x)$

$$\frac{x^2 - x + c}{x} = -\frac{x^2 + x + c}{x}$$

所以  $x^2 - x + c = -x^2 - x - c$ ，此方程无解，故  $f(x)$  不可能为奇函数

$$f(x)$$

所以不存在实数  $c$ ，使得  $f(x)$  为奇函数

$$f(1) = 3, \text{ 即 } \frac{1+3a+1+c}{1+a} = 3$$

(2) 因为  $f(x)$  图像过  $(1, 3)$ ，所以

所以  $c=1$

$$f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + 1}{x+a}$$

所以

令  $f(x) = 0$ ，则  $x^2 + (3a+1)x + 1 = 0$  ( $x$  不等于  $-a$ )

因为  $f(x)$  图像与  $x$  轴负半轴有 2 个交点

$$\begin{cases} \Delta = (3a+1)^2 - 4 > 0 \\ x_1 + x_2 = -(3a+1) < 0 \\ a^2 - a(3a+1) + 1 \neq 0 \end{cases}$$

所以

$$a > \frac{1}{3} \text{ 且 } a \neq \frac{1}{2}$$

所以

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

所以a的取值范围为  
19、

(1)

$$\because P(A) = \frac{15}{25}, P(B) = \frac{20}{25}, P(AB) = \frac{12}{25}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$\because P(B|A) \neq P(B)$$

$\therefore A, B$  不独立

$A_1, A_2, A_3$

(2) 设三种结果：内外均同，内同或外同，内外均不同分别为事件

$$P(A_1) = \frac{C_{12}^2 + C_8^2 + C_2^2 + C_3^2}{C_{25}^2} = \frac{98}{300}$$

$$P(A_2) = \frac{C_{12}^1 C_2^1 + C_8^1 C_3^1 + C_{12}^2 C_8^1 + C_2^1 C_3^1}{C_{25}^2} = \frac{150}{300}$$

$$P(A_3) = \frac{C_{12}^1 C_3^1 + C_2^1 C_8^1}{C_{25}^2} = \frac{52}{300}$$

$\therefore$

概率越小奖金越高

$$\therefore P(X=600) = P(A_3) = \frac{52}{300}$$

$$P(X=300) = P(A_1) = \frac{98}{300}$$

$$P(X=150) = P(A_2) = \frac{150}{300}$$

分布列

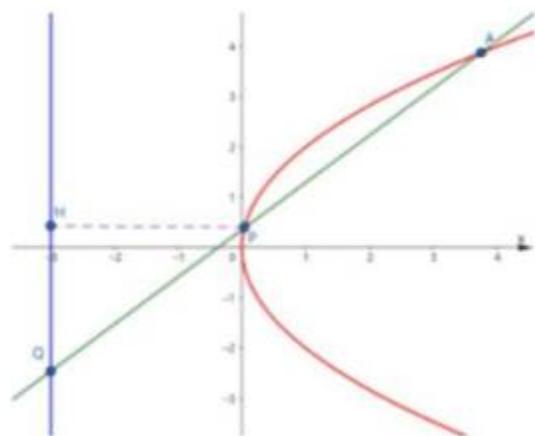
X	600	300
P	$\frac{52}{300}$	$\frac{98}{300}$

$$E(X) = 600 \cdot \frac{52}{300} + 300 \cdot \frac{98}{300} + 150 \cdot \frac{150}{300} = 277(\text{元})$$

20、

(1) 由题意得  $a > 0$ ,  $A\left(\frac{a^2}{4}, a\right)$ , 准线  $x = -1$ , 则

$$\frac{a^2}{4} - (-1) = 3 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$



当  $a=4$  时,  $A(4,4)$ ,  $B(t,0)$ , 则线段AB的中点为

$$C\left(\frac{4+t}{2}, 2\right) \quad \Gamma: y^2 = 4x \quad 2^2 = 4 \cdot \frac{4+t}{2}$$

在 上, 则有

解得  $t=-2$ , 即  $B(-2,0)$ , 则直线AB的斜率

$$k_{AB} = \frac{4-0}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$$

, 直线

$$AB: y = \frac{2}{3}(x+2), \quad 2x - 3y + 4 = 0$$

, 一般式为

$$d = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

, 则原点O到AB的距离

$$P\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right), A\left(\frac{a^2}{4}, a\right)$$

(3) 设

$$H(-3, y_0) \quad k_{PA} = \frac{4}{y_0+a}$$

由已知:

$$PA: y - a = \frac{4}{y_0 + a} \left(x - \frac{a^2}{4}\right)$$

令  $x = -3$ ,

$$y_Q = a - \frac{12 + a^2}{y_0 + a} \quad \therefore Q\left(-3, a - \frac{12 + a^2}{y_0 + a}\right)$$

$$\therefore |HQ| > 4$$

$$\therefore y_H - y_Q > 4, \text{ 即 } y_0 - a + \frac{12 + a^2}{y_0 + a} > 4$$

$$\text{即 } 4a < y_0^2 - 4y_0 + 12 = (y_0 - 2)^2 + 8 \leq 8$$

故  $4a < 8$

$$\therefore a < 2 \quad (\text{即 } a \text{ 的取值范围为 })$$

21、

(1) 由  $f(x) = \ln x$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , 当  $m \geq 2$  时, 曲线在  $(a_{m-1}, f(a_{m-1}))$  处的切线方程式为:

$$y - \ln a_{m-1} = \frac{1}{a_{m-1}}(x - a_{m-1}) = \frac{x}{a_{m-1}} - 1, \text{ 由}$$

题意令  $x = 0$ , 得  $y = a_m = \ln a_{m-1} - 1$ , 命题得证;

(2)  $a_m$  与  $a_{m-1} - 2$

即  $a_{m+1}$  与  $a_m - 2$     即  $\ln a_{m-1}$  与  $a_m - 2$

$$\ln a_m - 1 - (a_m - 2) = \ln a_m - a_m + 1$$

令  $g(x) = \ln x - x + 1$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad (0, 1) \uparrow \quad (1, +\infty) \downarrow$$

$$g(1) = 0$$

$x=1$  时

$$\therefore g(x) \leq 0$$

$$\therefore a_{m+1} \leq a_m - 2$$

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

(3) 假设存在  $k$ , 使得

依次成等差数列, 所以公差

$$d = a_k - a_{k-1} = \ln a_{k-1} - 1 - a_{k-1}, \text{ 构造函数}$$

$$h(x) = \ln x - x - 1, \text{ 函数的定义域 } (0, +\infty), \text{ 则}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1, \quad x \in (0, 1), \quad h'(x) > 0,$$

$$h(x) \text{ 严格递增; } x \in (1, +\infty), \quad h'(x) < 0, \quad h(x) \text{ 严}$$

$$\text{格递减; 所以 } h(x)_{\min} = h(1) = \ln 1 - 1 - 1 = -2, \text{ 所以}$$

$$h(x) \leq -2, \text{ 即 } d \leq -2, \text{ 即}$$

$$a_k - a_{k-1} = \ln a_{k-1} - 1 - a_{k-1} \leq -2$$

，计算

$$a_2 = \ln a_1 - 1 \Rightarrow a_1 = e^{a_2+1}, \quad a_3 = \ln a_2 - 1$$

若  $a_1, a_2, \dots, a_k$  成等差，则  $a_1 + a_3 = 2a_2$ ，即

$$2a_2 = e^{a_2+1} + \ln a_2 - 1$$

，整理

$$e^{a_2+1} - 2a_2 + \ln a_2 - 1 = 0$$

，令

$$m(x) = e^{x+1} - 2x + \ln x - 1 = 0, \quad x > 0$$

$$m'(x) = e^{x+1} + \frac{1}{x} - 2$$

，因为

$$m'(x) > m'(0) = e - 2 > 0$$

，即  $m(x)$  在

$(0, +\infty)$  上递增，

结合数列的单调性，因为

$$x \rightarrow 0, \quad m(x) < 0, \quad m(1) = e^2 - 3 > 0$$

，则

函数  $m(x)$  在  $(0, 1)$  上必有唯一的零点  $x_0 = a_2$ ，结合

$$a_1 = e^{a_2+1} > 0, \quad a_3 = \ln a_2 - 1 < 0$$

，运算停止，即存

$a_1, a_2, a_3$  成等差数列，此时  $k = 3$

