2012年普通高等学校招生统一考试（江西卷）数学试题卷（理工类）解析版

试卷总评

今年高考理科数学试卷难度和想象的差不多，总体难度比较平稳，有些题目很有新意。如第10题、第18题仔细分析，意味深刻。尤其是理科最后一题命题比较灵活、有所创新，有些考生不一定接触过。这次考试中有很多常规题目，考生看了比较眼熟。没有出现偏题、怪题，尤其是文科试卷，可以充分考验学生的数学思想，平时是不是学透了。“总体来说，这次试卷很不错，算是‘正统’的高考试题，整体难度可能比去年还低一些。”平时认真复习的考生应该都能考出不错的成绩。

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷第1至2页，第II卷第3至第4页。满分150分，考试时间120分钟。

考生注意：

1.答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写答题卡上。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2.第I卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第II卷用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答题无效。

3.考试结束，务必将试卷和答题卡一并上交。

参考公式：

锥体体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中S为底面积，h为高。

第I卷

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若集合A={-1，1}，B={0，2}，则集合{z丨z=x+y, x∈A, y∈B}中的元素的个数为

A．5　　B.4　　C.3　　D.2

【答案】：C

【解析】.容易看出$x+y$只能取-1, 1, 3等3个数值.故共有3个元素.

【考点定位】本题考查集合的概念及元素的个数

2.下列函数中，与函数 y=$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 定义域相同的函数为

A．y=$\frac{1}{\sin x}$　　B.y=$\frac{\ln x}{x}$　　C.y=xe^x　　D. $\frac{\sin x}{x}$

【答案】：D

【解析】函数 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而答案中只有 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．故选 D

【考点定位】本题考查常有关对数函数，指数函数，分式函数的定义域以及三角函数的值域.

3.若函数 f(x)= $\begin{cases} x2+1, x\le 1 \\ \lg x, x>1 \end{cases}$，则 f(f(10)=

A.lg101　　B.2　　C.1　　D.0

【答案】：B

【解析】因为 $10>1$，所以 $f(10)=\lg 10=1$．所以 $f(f(10))=f(1)=1^2+1=2$．

【考点定位】本题考查分段函数及对数性质。

4.若 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ =4,则 $\sin 2\theta=$

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】：D

【解析】本题考查三角恒等变形式以及转化与化归的数学思想.

因为 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}=4$，所以. $\sin 2\theta=\frac{1}{2}$.

【考点定位】本题考查三角恒等变形式以及转化与化归的数学思想

5.下列命题中，假命题为

A.存在四边相等的四边形不是正方形

B．$Z_1,z_2\in C, z_1+z_2$ 为实数的充分必要条件是 z_1,z_2 互为共轭复数

C.若 x,y∈R，且 x+y＞2，则 x,y 至少有一个大于 1

D．.对于任.意 $n\in N, C_n^0+C_n^1\cdots+C_n^n$ 都是偶数

【答案】：B

【解析】本题以命题的真假为切入点，综合考查了充要条件，复数、特称命题、全称命题、二项式定理等.

（验证法）对于 B 项，令 $z_1=-1+mi, z_2=9-mi\left(m\in\mathbf{R}\right)$,显然 $z_1+z_2=8\in\mathbf{R}$，但 z_1, z_2 不互为共轭复数，故 B 为假命题,应选 B.

6．观察下列各式：a+b=1 ，$a^2+b^2=3$，$a^3+b^3=4$ ，$a^4+b^4=7, a^5+b^5=11,\cdots$，则 $a^{10}+b^{10}=$

A.28　B.76　C.123　D.199

【答案】：C

【解析】本题考查归纳推理的思想方法.

观察各等式的右边,它们分别为 1,3,4,7,11，⋯，发现从第 3 项开始，每一项就是它的前两项之和，故等式的右边依次为 1,3,4,7,11，18,29,47,76,123,⋯，故 $a^{10}+b^{10}=123$.

7.在直角三角形 ABC 中，点 D 是斜边 AB 的中点，点 P 为线段 CD 的中点，则

$$\frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=$$

A.2　B.4　C.5　D.10

【答案】：D

【解析】本题主要考查两点间的距离公式，以及坐标法这一重要的解题方法和数形结合的数学思想.

不失一般性，取特殊的等腰直角三角形，不妨令 $|AC|=|BC|=4$,则 $|AB|=4\sqrt{2}$, $|CD|=\frac{1}{2}|AB|=2\sqrt{2}$, $|PC|=|PD|=\frac{1}{2}|CD|=\sqrt{2}$, $|PA|=|PB|=\sqrt{|AD|^2+|PD|^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{10}$,所以 $\frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=\frac{10+10}{2}=10$.

8.某农户计划种植黄瓜和韭菜，种植面积不超过 50 亩，投入资金不超过 54 万元，假设种植黄瓜和韭菜的产量、成本和售价如下表

	年产量/亩	年种植成本/亩	每吨售价
黄瓜	4 吨	1.2 万元	0.55 万元
韭菜	6 吨	0.9 万元	0.3 万元

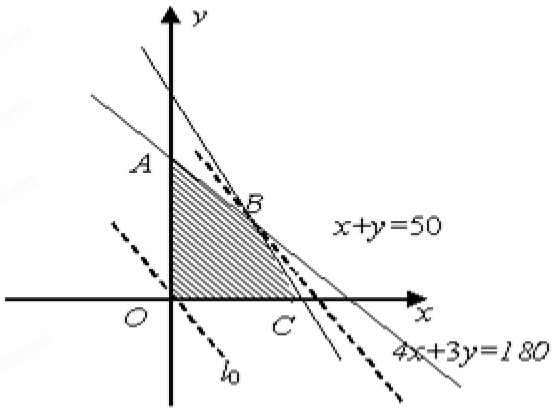
为使一年的种植总利润（总利润=总销售收入-总种植成本）最大，那么黄瓜和韭菜的种植面积（单位：亩）分别为

A.50,0　　B.30.20　　C.20,30　　D.0,50

【答案】：B

【解析】本题考查线性规划知识在实际问题中的应用，同时考查了数学建模的思想方法以及实践能力.设黄瓜和韭菜的种植面积分别为 x,y 亩,总利润为 z 万元，则目标函数为

$z=(0.55\times4x-1.2x)+(0.3\times6y-0.9y)=x+0.9y$.线性



约束条件为 $\begin{cases}x+y\le50,\\1.2x+0.9y\le54,\\x\ge0,\\y\ge0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y\le50,\\4x+3y\le180,\\x\ge0,\\y\ge0.\end{cases}$ 作出不等式组 $\begin{cases}x+y\le50,\\4x+3y\le180,\\x\ge0,\\y\ge0\end{cases}$ 表示的可行域,易求得点

$A(0,50),B(30,20),C(0,45)$.平移直线 $z=x+0.9y$，可知当直线 $z=x+0.9y$ 经过点

$B(30,20)$,即 $x=30,y=20$ 时,z 取得最大值,且 $z_{max}=48$（万元）.故选 B.

9.样本（$x_1,x_2\cdots$，x_n）的平均数为 x，样本（y_1，y_2，…，y_n）的平均数为 $\overline{y}(\overline{x}\ne\overline{y})$。若样本（$x_1,x_2\cdots$，$x_n$，$y_1$，$y_2$，…，$y_n$）的平均数 $\overline{z}=a\overline{x}+(1-a)\overline{y}$，其中 $0<\alpha<\frac{1}{2}$，则 n，m 的大小关系为

A.n＜m　　B.n＞m　　C.n=m　　D.不能确定

【答案】：A

【解析】本题考查统计中的平均数，作差法比较大小以及整体思想.

由统计学知识，可得 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n\overline{x}, y_1+y_2+\cdots+y_m=m\overline{y}$,

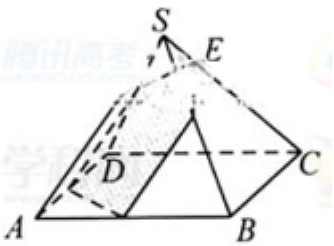
$x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_m=(m+n)\overline{z}=(m+n)\left[\alpha\overline{x}+(1-\alpha)\overline{y}\right]$.

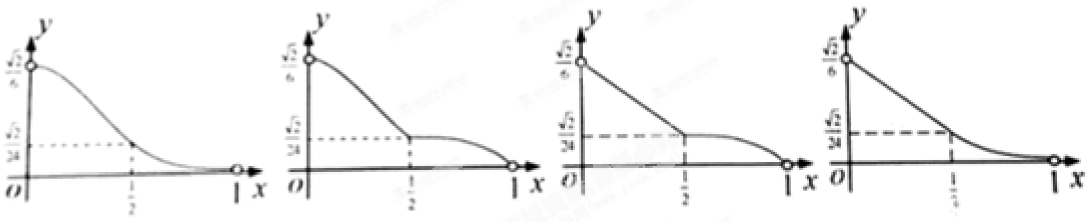
$=(m+n)\alpha\overline{x}+(m+n)(1-\alpha)\overline{y}$，所以 $n\overline{x}+m\overline{y}=(m+n)\alpha\overline{x}+(m+n)(1-\alpha)\overline{y}$.

所以 $\begin{cases} n=(m+n)\alpha, \\ m=(m+n)(1-\alpha). \end{cases}$ 故 $n-m=(m+n)[\alpha-(1-\alpha)]=(m+n)(2\alpha-1)$.

因为 $0<\alpha<\frac{1}{2}$,所以 $2\alpha-1<0$.所以 $n-m<0$.即 $n<m$.

10.如图，已知正四棱锥 S-ABCD 所有棱长都为 1，点 E 是侧棱 SC 上一动点，过点 E 垂直于 SC 的截面将正四棱锥分成上、下两部分。记 SE=x（0＜x＜1），截面下面部分的体积为 V（x），则函数 y=V（x）的图像大致为





A　　B　　C　　D

【答案】：A

【解析】本题综合考查了棱锥的体积公式，线面垂直，同时考查了函数的思想,导数法解决几何问题等重要的解题方法.当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，随着 x 的增大，观察图形可知，$V(x)$ 单调递减，且递减的速度越来越快；当 $\frac{1}{2}\le x<1$ 时，随着 x 的增大，观察图形可知，$V(x)$ 单调递减，且递减的速度越来越慢；再观察各选项中的图象，发现只有 A 图象符合.故选 A.

2012 年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）理科数学

第 II 卷

注：第Ⅱ卷共 2 页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答。若在试题卷上作答，答案无效。

二。填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

11.计算定积分 $\int_{-1}^{1}(x^2+\sin x)\,dx=$________。

【答案】：$\frac{2}{3}$

【解析】：$\int_{-1}^{1}(x^2+\sin x)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\cos x|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}-\cos 1+\frac{1}{3}+\cos 1=\frac{2}{3}$

12.设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列，若 $a_1+b_1=7$，$a_3+b_3=21$，则 $a_5+b_5=$___________。

【答案】：35【解析】本题考查等差中项的性质及整体代换的数学思想

（解法一）因为数列$\{a_n\},\{b_n\}$都是等差数列，所以数列$\{a_n+b_n\}$也是等差数列.

故由等差中项的性质，得$(a_5+b_5)+(a_1+b_1)=2(a_3+b_3)$，即$(a_5+b_5)+7=2\times 21$，解得

$a_5+b_5=35$.

（解法二）设数列$\{a_n\},\{b_n\}$的公差分别为d_1,d_2.

因为$a_3+b_3=(a_1+2d_1)+(b_1+2d_2)=(a_1+b_1)+2(d_1+d_2)=7+2(d_1+d_2)=21$,

所以$d_1+d_2=7$.所以$a_5+b_5=(a_3+b_3)+2(d_1+d_2)=35$

13 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右顶点分别是 A,B,左、右焦点分别是 F_1，F_2。若 $|AF_1|$，$|F_1F_2|$，$|F_1B|$成等比数列，则此椭圆的离心率为______________.

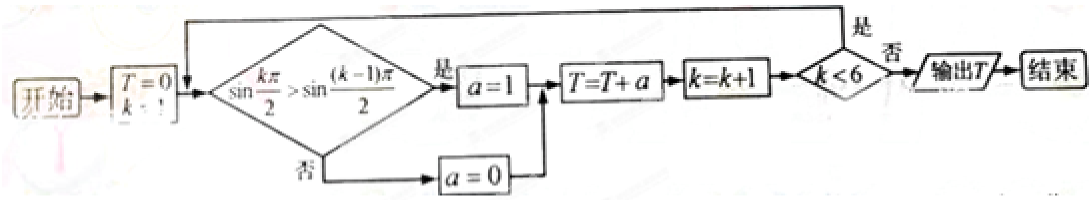
【答案】：

【解析】：$|AF_1|=a-c,|F_1F_2|=2c,|F_1B|=a+c$ 由$|AF_1|,|F_1F_2|,|F_1B|$成等比数列得

$(2c)^2=(a-c)(a+c)$即$a^2=5c^2\Rightarrow e=\frac{\sqrt{5}}{5}$

【考点定位】本题主要考查椭圆的定义和离心率的概念．属基础题

14 下图为某算法的程序框图，则程序运行后输出的结果是_____________.



【答案】：3

【解析】由程序框图可知：第一次:T=0,k=1, $\sin\frac{\pi}{2}=1>\sin 0=0$成立，a=1,T=T+a=1,k=2,2<6,满足判断条件，继续循环;

第二次: $\sin\pi=0>\sin\frac{\pi}{2}=1$不成立，a=0,T=T+a=1,k=3,3<6，满足判断条件，继续循环;

第三次: $\sin\frac{3\pi}{2}=-1>\sin\pi=0$不成立，a=0,T=T+a=1,k=4,4<6, 满足判断条件，继续循环;

第四次：$\sin 2\pi=0>\sin\frac{3\pi}{2}=-1$成立，a=1,T=T+a=2,k=5, 满足判断条件，继续循环;

第五次：$\sin\frac{5\pi}{2}=1>\sin 2\pi=0$成立，a=1,T=T+a=2,k=6，6<6 不成立，不满足判断条件，跳出循环,故输出 T 的值 3

三、选做题：请在下列两题中任选一题作答。若两题都做，则按第一题评阅计分。本题共 5 分。

15.（1）（坐标系与参数方程选做题）曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$，以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，则曲线 C 的极坐标方程为__________。

【答案】：$\rho=2\cos\theta$

【解析】本题考查极坐标方程与直角坐标方程的互化及转化与化归的数学思想.

由极坐标方程与直角坐标方程的互化公式$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$得

$x^2+y^2-2x=\rho^2-2\rho\cos\theta=0$，又 $\rho>0$，所以 $\rho=2\cos\theta$.

15.（2）（不等式选做题）在实数范围内，不等式$|2x-1|+|2x+1|\leqslant 6$ 的解集为__________。

【答案】：$\left\{x\in\mathbf{R}\mid -\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right\}$

【解析】本题考查绝对值不等式的解法以及转化与划归、分类讨论的数学思想.

原不等式可化为$\begin{cases}x\le-\frac{1}{2},\\1-2x-2x-1\le 6,\end{cases}$①或$\begin{cases}-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\2x-1-2x-1\le 6,\end{cases}$②或$\begin{cases}x\ge\frac{1}{2},\\2x-1+2x+1\le 6,\end{cases}$③

由①得$-\frac{3}{2}\le x\le-\frac{1}{2}$；由②得$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$；由③得$\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$,

综上，得原不等式的解集为$\left\{x\in\mathbf{R}\mid -\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right\}$

四．解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（本小题满分 12 分）

已知数列{a_n}的前 n 项和$S_n=-\frac{1}{2}n^2+kn$（其中$k\in N$）,且 S_n 的最大值为 8.

（1）确定常数 k，求 a_n；（2）求数列$\left\{\frac{9-2a_n}{2^n}\right\}$的前 n 项和 T_n。

【答案】：（1）$a_n=\frac{9}{2}-n$（2）$T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

【解析】：（1）当$n=k\in N_+$时，$S_n=-\frac{1}{2}n^2+kn$取最大值，即$8=S_k=-\frac{1}{2}k^2+k^2=\frac{1}{2}k^2$,

故$k^2=16$,因此$k=4$，

从而$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{9}{2}-n(n\ge 2)$.又$a_1=S_1=\frac{7}{2}$，所以$a_n=\frac{9}{2}-n$。

（2）因为$b_n=\frac{9-2a_n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$，

所以$T_n=2T_n-T_n=2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

【考点定位】本题考查数列的通项，递推、错位相减法求和以及二次函数的最值的综合应用.利用$a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\S_n-S_{n-1}\end{cases}$来实现$a_n$与$S_n$的相互转化是数列问题比较常见的技巧之一，要注意$a_n=S_n-S_{n-1}$不能用来求解首项$a_1$，首项$a_1$一般通过$a_1=S_1$来求解.运用错位相减法求数列的前 n 项和适用的情况：当数列通项由两项的乘积组成，其中一项是等差数列、另一项是等比数列.

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a，b，c。已知 $A=\frac{\pi}{4}$，

bsin（$\frac{\pi}{4}+C$）-csin（$\frac{\pi}{4}+B$）$=a$

（1）求证：$B-C=\frac{\pi}{2}$（2）若 a=$\sqrt{2}$，求△ABC 的面积。

【答案】：（2）$\frac{1}{2}$

【解析】：（1）证明：由 $b\sin(\frac{\pi}{4}+C)-c\sin(\frac{\pi}{4}+B)=a$，应用正弦定理，得

$$\sin B\sin(\frac{\pi}{4}+C)-\sin C\sin(\frac{\pi}{4}+B)=\sin A,$$

$$\sin B(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C)-\sin C(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin B+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理得 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=1$，

即 $\sin(B-C)=1$，由于 $0<B,c<\frac{3}{4}\pi$，从而 $B-C=\frac{\pi}{2}$。

（2）解：$B+C=\pi-A=\frac{3\pi}{4}$，因此 $B=\frac{5\pi}{8},C=\frac{\pi}{8}$

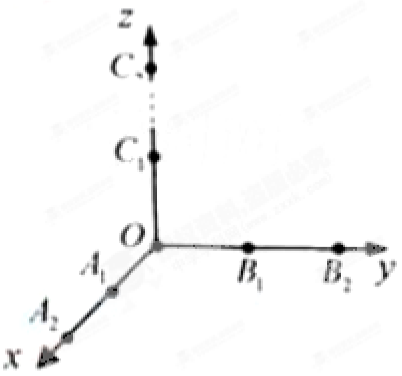
由 $a=\sqrt{2},A=\frac{\pi}{4}$，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=2\sin\frac{5\pi}{8},c=\frac{a\sin C}{\sin A}=2\sin\frac{\pi}{8}$，

所以 ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}$。

【考点定位】本题考查解三角形，三角形的面积，三角恒等变换、三角和差公式以及正弦定理的应用.高考中，三角解答题一般有两种题型：一、解三角形：主要是运用正余弦定理来求解边长，角度，周长，面积等；二、三角函数的图像与性质：主要是运用和角公式，倍角公式，辅助角公式进行三角恒等变换，求解三角函数的最小正周期，单调区间，最值（值域）等.来年需要注意第二种题型的考查

18.（本题满分 12 分）

如图，从 A_1（1,0,0），A_2（2,0,0），B_1（0，1，0），B_2（0,2,0），C_1（0,0,1），C_2（0,0,2）这 6 个点中随机选取 3 个点，将这 3 个点及原点 O 两两相连构成一个“立体”，记该“立体”的体积为随机变量 V（如果选取的 3 个点与原点在同一个平面内，此时“立体”的体积 V=0）。



（1）求 V=0 的概率；(2)求 V 的分布列及数学期望 EV。

【答案】:（1）$\frac{3}{5}$（2）$\frac{9}{40}$

【解析】:：（1）从 6 个点中随机选取 3 个点总共有 $C_6^3=20$ 种取法，选取的 3 个点与原点在同一个平面内的取法有 $C_3^1C_4^3=12$ 种，因此 $V=0$ 的概率为 $P(V=0)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

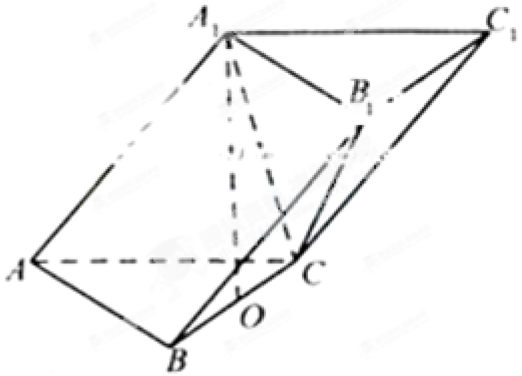
（2）V 的所有可能取值为 $0,\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}$，因此 V 的分布列为

V	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

由 V 的分布列可得 $EV=0\times\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{20}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{20}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{20}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{20}=\frac{9}{40}$

【考点定位】本题考查组合数，随机变量的概率，离散型随机变量的分布列、期望等. 高考中，概率解答题一般有两大方向的考查.一、以频率分布直方图为载体，考查统计学中常见的数据特征：如平均数，中位数，频数，频率等或古典概型；二、以应用题为载体，考查条件概率，独立事件的概率，随机变量的期望与方差等.来年需要注意第一种方向的考查.

19.（本题满分 12 分）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AB=AC=AA_1=\sqrt{5}$，$BC=4$，点 A_1 在底面 ABC 的投影是线段 BC 的中点 O。



（1）证明在侧棱 AA_1 上存在一点 E，使得 OE⊥平面 BB_1C_1C，并求出 AE 的长；

（2）求平面 A_1B_1C 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值。

【答案】：（1）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ （2）$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

【解析】：（1）证明：连接 AO，ΔAOA_1中，作$OE \perp AA_1$于点E，因为$AA_1 // BB_1$，得$OE \perp BB_1$，

$A_1O \perp$平面ABC，所以$A_1O \perp BC$

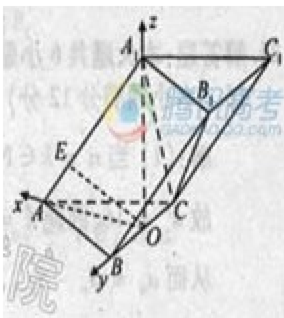
因为$AB = AC$，$OB = OC$，得$AO \perp BC$，所以$BC \perp$平面AA_1O，所以$BC \perp OE$，

所以$OE \perp$平面BB_1C_1C，又$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = 1$，$AA_1 = \sqrt{5}$，

得$AE = \dfrac{AO^2}{AA_1} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

（2）解：如图，分别以 OA, OB, OA_1 所在直线为 x, y, z 轴，

建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,-2,0)$，$A_1(0,0,2)$



由 $\overline{AE} = \dfrac{1}{5}\overline{AA_1}$ 得点 E 的坐标是 $(\dfrac{4}{5}, 0, \dfrac{2}{5})$

由（1）得平面 BB_1C_1C 的法向量是 $\overline{OE} = (\dfrac{4}{5}, 0, \dfrac{2}{5})$，

设平面 A_1B_1C 的法向量 $n = (x, y, z)$，

由$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{A_1C}=0 \end{cases}$得$\begin{cases} -x+2y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$，令$y=1$,得$x=2$, $z=-1$,即$n=(2,1,-1)$.

所以$\cos\langle\overrightarrow{OE},n\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OE}\cdot n}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|n|}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$即平面

BB_1C_1C与平面A_1B_1C的夹角的余弦值是$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

【考点定位】本题考查线面垂直，二面角、向量法在解决立体几何问题中的应用以及空间想象的能力. 高考中，立体几何解答题一般有以下三大方向的考查.一、考查与垂直，平行有关的线面关系的证明；二、考查空间几何体的体积与表面积；三、考查异面角，线面角，二面角等角度问题.前两种考查多出现在第 1 问，第 3 种考查多出现在第 2 问；对于角度问题，一般有直接法与空间向量法两种求解方法

20. （本题满分 13 分）

已知三点 O（0,0），A（-2,1），B（2,1），曲线 C 上任意一点 M（x，y）满足

$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+2$.求曲线 C 的方程;（2）动点 Q（$x_0$，$y_0$）（-2＜$x_0$＜2）在曲线 C 上，曲线 C 在点 Q 处的切线为 L，问：是否存在定点 P（0，t）（t＜0），使得 L 与 PA，PB 都相交，交点分别为 D,E，且△QAB 与△PDE 的面积之比是常数？若存在，求 t 的值。若不存在，说明理由。

【答案】:（1）$x^2=4y$.（2）2

【解析】:（1）由$\overrightarrow{MA}=(-2-x,1-y)$, $\overrightarrow{MB}=(2-x,1-y)$，

$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=\sqrt{(-2x)^2+(2-2y)^2}$, $\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(x,y)\cdot(0,2)=2y$,

由已知得$\sqrt{(-2x)^2+(2-2y)^2}=2y+2$,

化简得曲线C 的方程：$x^2=4y$.

（2）假设存在点$P(0,t)(t<0)$ 满足条件，则直线

PA的方程是$y=\dfrac{t-1}{2}x+t$, PB的方程是$y=\dfrac{1-t}{2}x+t$

曲线C在Q处的切线l的方程是$y=\dfrac{x_0}{2}x-\dfrac{x_0}{4}$,它与$y$轴的交点为$F(0,-\dfrac{x_0^2}{4})$.

由于 $-2<x_0<2$,因此 $-1<\dfrac{x_0}{2}<1$，

①$-1<t<0$, $-1<\dfrac{t-1}{2}<-\dfrac{1}{2}$,存在 $x_0\in(-2,2)$, 使得 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{t-1}{2}$

即 l 与直线 PA 平行，故当 $-1<t<0$ 时不符合题意。

②当 $t\le -1$时, $\dfrac{t-1}{2}\le -1<\dfrac{x_0}{2}$, $\dfrac{1-t}{2}\ge 1>\dfrac{x_0}{2}$,所以 l 与直线 PA, PB 一定相交。

分别联立议方程组 $\begin{cases} y=\dfrac{t-1}{2}x+t \\ y=\dfrac{x_0}{2}x-\dfrac{x_0^2}{4}\end{cases}$, $\begin{cases} y=\dfrac{1-t}{2}x+t \\ y=\dfrac{x_0}{2}x-\dfrac{x_0^2}{4}\end{cases}$,解得 D, E 的横坐标分别是

$$x_0=\frac{x_0^2+4}{2(x_0+1-t)},\ x_E=\frac{x_0^2+4t}{2(x_0+t-1)},\text{则 } x_E-x_0=(1-t)\frac{x_0^2+4t}{x_0^2-(t-1)^2},$$

$$\text{又}\ |FP|=-\frac{x_0^2}{4}-t,\ \text{有}\ S_{\Delta PDE}=\frac{1}{2}\cdot|FP|\cdot|x_E\cdot x_D|=\frac{1-t}{8}\cdot\frac{(x_0^2+4t)^2}{(t-1)^2-x_0^2},$$

$$\text{又}\ S_{\Delta QAB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(1-\frac{x_0^2}{4})=\frac{4-x_0^2}{2},\ \ \text{于是}\ \frac{S_{\Delta QAB}}{S_{\Delta PDE}}=1-\frac{4}{1-t}\cdot\frac{(x_0^2-4)\left[x_0^2-(t-1)^2\right]}{(x_0^2+4t)^2}$$

$$=\frac{4}{1-t}\cdot\frac{x_0^4-\left[4+(t-1)^2\right]x_0^2+4(t-1)^2}{x_0^4+8tx_0^2+16t^2}$$

对任意 $x_0\in(-2,2)$，要使 $\dfrac{S_{\Delta QAB}}{S_{\Delta PDE}}$ 为常数，即只须 t 满足 $\begin{cases} -4-(t-1)^2=8t \\ 4(t-1)^2=16t^2\end{cases}$,

解得 $t=-1$，此时 $\dfrac{S_{\Delta QAB}}{S_{\Delta PDE}}$=2，故存在 $t=-1$，使得 ΔQAB 与 ΔPDE 的面积之比是常数 2。

【考点定位】本题以平面向量为载体，考查抛物线的方程，直线与抛物线的位置关系以及分类讨论的数学思想. 高考中，解析几何解答题一般有三大方向的考查.一、考查椭圆的标准方程，离心率等基本性质，直线与椭圆的位置关系引申出的相关弦长问题，定点，定值，探讨性问题等；二、考查抛物线的标准方程，准线等基本性质，直线与抛物线的位置关系引申出的相关弦长问题，中点坐标公式，定点，定值，探讨性问题等；三、椭圆，双曲线，抛物线综合起来考查.一般椭圆与抛物线结合考查的可能性较大，因为它们都是考纲要求理解的内容.

21. （本小题满分 14 分）若函数 h(x)满足

（1）h(0)=1，h(1)=0；（2）对任意 $a\in[0,1]$，有 h(h(a))=a；（3）在（0,1）上单调递减。

则称 h(x)为补函数。已知函数 $h(x)=(\frac{1-x^p}{1+\lambda x^p})^{\frac{1}{p}}(\lambda>-1,p>0)$。

（1）判断函数 h(x)是否为补函数，并证明你的结论；

（2）若存在 $m\in[0,1]$，使得 h(m)=m，若 m 是函数 h(x)的中介元，记 $p=\frac{1}{n}(n\in N)$ 时 h(x) 的中介元为 x_n，且 $S_n=\sum_{n-1}^{n}x_1$，若对任意的 $n\in N_+$，都有 $S_n<\frac{1}{2}$,求 λ 的取值范围；

（3）当 λ=0，$x\in(0,1)$时，函数 y= h(x)的图像总在直线 y=1-x 的上方，求 P 的取值范围。

【答案】:（1）补函数（2）$\lambda\in[3,+\infty)$（3）$(1,+\infty)$.

【解析】:：（1）函数 $h(x)$ 是补函数，证明如下：

① $h(0)=(\frac{1-0}{1+0})^{\frac{1}{p}}=1,h(1)=(\frac{1-1}{1+\lambda})^{\frac{1}{p}}=0$；

② 任意 $a\in[0,1]$，有 $h(h(a)=h((\frac{1-a^p}{1+\lambda a^p})^{\frac{1}{p}})=\left(\frac{1-\frac{1-a^p}{1+\lambda a^p}}{1+\lambda\frac{1-a^p}{1+\lambda a^p}}\right)=(\frac{(1+\lambda)a^p}{1+\lambda})^{\frac{1}{p}}=a$;

③ $g(x)=(h(x))^p$，有 $g'(x)=\frac{-px^{p-1}(1+\lambda x^p)-(1-x^p)\lambda px^{p-1}}{(1+\lambda x^p)^2}=\frac{-p(1+\lambda)x^{p-1}}{(1+\lambda x^p)^2}$

因为 $\lambda>-1,p>0$,所以当 $x\in(0,1)$ 时, $g'(x)<0$,所以函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

故函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减。

（2）当 $p=\frac{1}{n}(n\in N_*)$,由 $h(x)=x$,得: $\lambda x^{\frac{2}{n}}+2x^{\frac{1}{n}}-1=0\cdots\cdots(*)$,

（i）当 $\lambda=0$ 时，中介元 $x_n=(\frac{1}{2})^n$;

（ii）当 $\lambda>-1$ 且 $\lambda\neq0$ 时, 由 (*) 得 $x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1}\in(0,1)$ 或 $x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{1-\sqrt{1+\lambda}}\notin[0,1]$;

得中介元 $x_n=(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1})^n$.

综合（i）(ii)；对任意的 $\lambda>-1$，中介元为 $x_n=(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1})(n\in N_*)$.

于是，当 $\lambda>-1$ 时，有 $S_n=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1})^i=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}(1-(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1})^n)<\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$,

当 n 无限增大时，$(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1})^n$ 无限接近于 0，S_n 无限接近于 $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$,

故对任意的 $n\in N_*, S_n<\frac{1}{2}$ 成立等价于 $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\le\frac{1}{2}$, 即 $\lambda\in[3,+\infty)$。

（3）当 $\lambda=0$ 时，$h(x)=(1-x^p)^{\frac{1}{p}}$, 中介元为 $x_p=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{p}}$,

（i）当 $0<p\le1$ 时, $\frac{1}{p}\ge1$, 中介元为 $x_p=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{p}}\le\frac{1}{2}$,

所以点 $(x_p,h(x_p))$ 不在直线 $y=1-x$ 的上方，不符合条件；

（ii）当 $p>1$ 时，依题意只须 $(1-x^p)^{\frac{1}{p}}>1-x$ 在 $x\in(0,1)$ 时恒成立，

也即 $x^p+(1+x)^p<1$ 在 $x\in(0,1)$ 时恒成立，

设 $\varphi'(x)=x^p+(1-x)^p, x\in[0,1]$, 则 $\varphi'(x)=p\left[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}\right]$,

由 $\varphi'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$, 且当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$\varphi'(x)<0$, 当 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 时 $\varphi'(x)>0$,

又因为 $\varphi(0)=\varphi(1)=1$, 所以当 $x\in(0,1)$ 时, $\varphi(x)<1$ 恒成立

综上：p 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

【考点定位】本题考查导数的应用、函数的新定义，函数与不等式的综合应用以及分类讨论，数形结合的数学思想．高考中，导数解答题一般有以下几种考查方向：一、导数的几何意义，求函数的单调区间；二、用导数研究函数的极值，最值；三、用导数求最值的方法证明不等式.来年需要注意用导数研究函数最值的考查.