

本套试题主要特点是注重基础、贯穿所学的考点，有实际应用问题（数学思想和方法解答实际问题，彰显了数学魅力），又由知识的综合与巧妙的结合（第 17 题把数列与概率巧妙的结合在一起，在知识交汇处命题，体现了高考命题的原则）

2012 福建数学试题解析（文史类）

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $(2+i)^2$ 等于

A. $3+4i$ B. $5+4i$ C. $3+2i$ D. $5+2i$

【解析】 $\because (2+i)^2 = 4 - 1 + 4i = 3 + 4i$.

【答案】A

【考点定位】考查复数的代数运算，是常考题.

2. 已知集合 $M=\{1, 2, 3, 4\}$, $N=\{-2, 2\}$, 下列结论成立的是

A. $N \subseteq M$ B. $M \cup N = M$ C. $M \cap N = N$ D. $M \cap N = \{2\}$

【解析】显然 A, B, C 错, D 正确;

【答案】D

【考点定位】考查集合包含关系与运算. 属基础题.

3. 已知向量 $a = (x-1, 2)$, $b = (2, 1)$, 则 $a \perp b$ 的充要条件是

A. $x = -\frac{1}{2}$ B. $x = 1$ C. $x = 5$ D. $x = 0$

【解析】有向量垂直的充要条件得 $2(x-1)+2=0$, 所以 $x=0$. D 正确.

【答案】D

【考点定位】考查数量积的运算和性质, 要明确性质.

4. 一个几何体的三视图形状都相同, 大小均等, 那么这个几何体不可以是

A 球 B 三棱锥 C 正方体 D 圆柱

【解析】分别比较 A, B, C 的三视图不符合条件, D 符合.

【答案】D

【考点定位】考查空间几何体的三视图与直观图, 考查空间想象能力、逻辑推理能力.

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点为 $(3, 0)$, 则该双曲线的离心率等于

A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

【解析】 $\because a^2 + 5 = 3^2, \therefore a = 2, \therefore e = \frac{3}{2}$. C 正确.

【答案】C

【考点定位】本题主要考察双曲线的标准方程、简单的几何性质, 把握性质是关键.

6. 阅读右图所示的程序框图，运行相应的程序，输出 s 值等于

A -3 B -10 C 0 D -2

【解析】

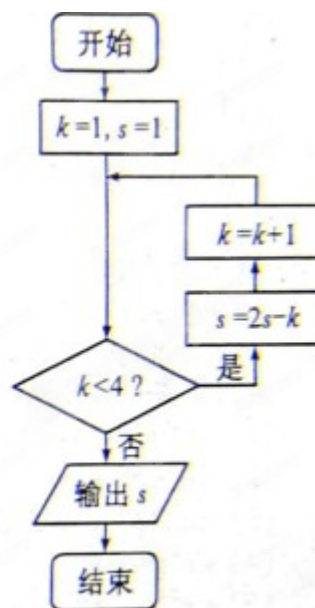
$$\therefore 1. S = 2 \times 1 - 1 = 1, K = 2$$

$$2. S = 2 \times 1 - 2 = 0, K = 3$$

$$3. S = 2 \times 0 - 3 = -3, K = 4, \text{ 输出 } -3.$$

【答案】A

【考点定位】该题主要考察算法的基本思想、结构和功能，把握算法的基本思想是解好此类问题的根本。



7. 直线 $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点，则弦 AB 的长度等于

A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

【解析】 \because 圆心 $(0, 0)$ ，半径 $r = 2$ ， \therefore 弦长 $|AB| = 2\sqrt{2^2 - \left(\frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 3}}\right)^2} = 2\sqrt{3}$. B 正确.

【答案】B

【考点定位】该题主要考查直线和圆的位置关系，考查计算求解能力。

8. 函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图像的一条对称轴是

A. $x = \frac{\pi}{4}$ B. $x = \frac{\pi}{2}$ C. $x = -\frac{\pi}{4}$ D. $x = -\frac{\pi}{2}$

【解析】把 $x = -\frac{\pi}{4}$ 代入后得到 $f(x) = -1$ ，因而对称轴为 $x = -\frac{\pi}{4}$ ，C 正确.

【答案】C

【考点定位】此题主要考察三角函数的图像和性质，代值逆推是主要解法。

9. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ ，则 $f(g(\pi))$ 的值为

A 1 B 0 C -1 D π

【解析】 $\because g(\pi) = 0$ ， $\therefore f(g(\pi)) = f(0) = 0$. B 正确.

【答案】B

【考点定位】该题主要考查函数的概念、定义域和值域，考查求值计算能力。

10. 若直线 $y=2x$ 上存在点 (x, y) 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-3 \leq 0 \\ x-2y-3 \leq 0 \\ x \geq m \end{cases}$, 则实数 m 的最大值为
- A. -1 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【解析】

$\because x+y-3=0$ 和 $y=2x$ 交点为 $(1, 2)$, \therefore 只有 $m \leq 1$ 才能符合条件. B 正确.

【答案】B

【考点定位】本题主要考察一元二次不等式表示平面区域, 考查分析判断能力、逻辑推理能力和求解能力.

11. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$, 其前 n 项和为 S_n , 则 S_{2012} 等于
- A. 1006 B. 2012 C. 503 D. 0

【解析】

$$\begin{aligned} \because a_n &= n \cos \frac{n\pi}{2}, \\ \therefore S_{2012} &= 1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 1 + \cdots + 2012 \times 1 \\ &= -2 + 4 - 6 + \cdots - 2010 + 2012 \\ &= 2 \times 503 = 1006. \end{aligned}$$

【答案】A

【考点定位】本题主要考察数列的项、前 n 项和, 考查数列求和能力. 此类问题关键是并项求和.

12. 已知 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - abc$, $a < b < c$, 且 $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. 现给出如下结论:

① $f(0) \cdot f(1) > 0$; ② $f(0) \cdot f(1) < 0$; ③ $f(0) \cdot f(3) > 0$; ④ $f(0) \cdot f(3) < 0$.

其中正确结论的序号是

- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

【解析】

$$\begin{aligned} \because f(0) &= -abc, f(1) = 4 - abc, f(3) = 27 - 54 + 27 - abc = -abc = f(0), \\ \because f'(x) &= 3(x-1)(x-3), \therefore f(x) \text{ 在 } (-\infty, 1) \text{ 和 } (3, +\infty) \text{ 上增加, 在 } (1, 3) \\ &\text{上减少, } \therefore a < 1 < b < 3 < c, \therefore f(0) \cdot f(1) < 0, f(0) \cdot f(3) > 0. \end{aligned}$$

【答案】C

【考点定位】本题考查函数的零点, 函数的单调性极值, 考查分析判断能力、必然与或然的能力.

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, 则 $AC =$ _____

【解析】由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$, $\therefore AC = \sqrt{2}$.

【答案】 $\sqrt{2}$

【考点定位】 本题考查三角形中的三角函数，正弦定理，考查求解计算能力.

14. 一支田径队有男女运动员 98 人，其中男运动员有 56 人。按男女比例用分层抽样的方法，从全体运动员中抽出一个容量为 28 的样本，那么应抽取女运动员人数是_____

【解析】 $\frac{98-56}{98} \times 28 = 12$.

【答案】 12

【考点定位】 此题考查分层抽样的概念和具体做法，明确分层抽样的本质是关键.

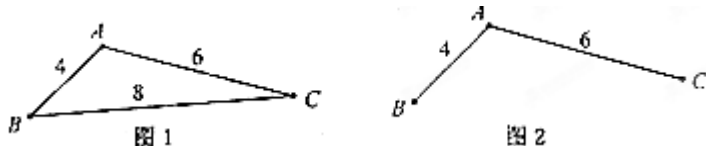
15. 已知关于 x 的不等式 $x^2 - ax + 2a > 0$ 在 \mathbb{R} 上恒成立，则实数 a 的取值范围是_____

【解析】 \because 该不等式恒成立， $\therefore \Delta < 0$, 即 $a^2 - 4 \cdot 2a < 0$, $\therefore 0 < a < 8$.

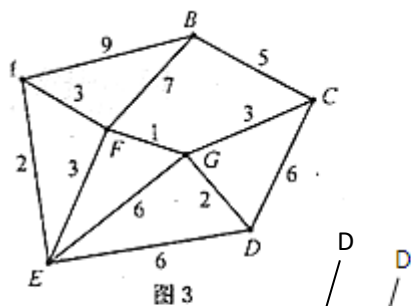
【答案】 $(0, 8)$

【考点定位】 该题主要考查一元二次不等式的解法，解法的三种情况的理解和把握是根本.

16. 某地区规划道路建设，考虑道路铺设方案，方案设计图中，求表示城市，两点之间连线表示两城市间可铺设道路，连线上数据表示两城市间铺设道路的费用，要求从任一城市都能到达其余各城市，并且铺设道路的总费用最小。例如：在三个城市道路设计中，若城市间可铺设道路的线路图如图 1，则最优设计方案如图 2，此时铺设道路的最小总费用为 10.



现给出该地区可铺设道路的线路图如图 3，则铺设道路的最小总费用为_____。



【解析】走线路 $E-A-F-G-C-B$ 最消费 16.

【答案】 16

【考点定位】 本题考查应用能力、创新能力、分析问题解决问题的能力.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中， $a_1 = b_1 = 1$ ， $b_4 = 8$ ， $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10} = 55$.

(I) 求 a_n 和 b_n ;

(II) 现分别从 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前3项中各随机抽取一项, 写出相应的基本事件, 并求这两项的值相等的概率

【解析】

(1) 设 d 是数列 $\{a_n\}$ 的公差, q 是 $\{b_n\}$ 的公比, 由题意得:

$$S_{10} = 10 + \frac{10 \times 9}{2} d = 55, b_4 = q^3 = 8. \text{解得: } d = 1, q = 2.$$

$$\therefore a_n = n, b_n = 2^{n-1}.$$

(2) 分别从 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 中的前三项中各随机抽取一项,

得到的基本事件有9个, $(1, 1), (1, 2), (1, 4),$

$(2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4).$

符合条件的有2个 $(1, 1), (2, 2).$ 故所求概率为 $P = \frac{2}{9}.$

【答案】 (1) $a_n = n, b_n = 2^n$, (2) $\frac{2}{9}$

【考点定位】 本题主要考察等差、等比数列、古典概型的基本知识, 考查运算求解能力, 考查转化与划归思想、必然与或然思想, 注意留心学习.

18.(本题满分 12 分)

某工厂为了对新研发的一种产品进行合理定价, 将该产品按事先拟定的价格进行试销, 得到如下数据:

单价 x (元)	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量 y (件)	90	84	83	80	75	68

(I) 求回归直线方程 $\hat{y} = bx + a$, 其中 $b = -20$, $a = \bar{y} - b\bar{x}$;

(II) 预计在今后的销售中, 销量与单价仍然服从 (I) 中的关系, 且该产品的成本是 4 元/件, 为使工厂获得最大利润, 该产品的单价应定为多少元? (利润=销售收入-成本)

【解析】

$$(1) \because \bar{x} = \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 8.5.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6) = 80.$$

$$\therefore a = \bar{y} - b\bar{x} = 80 + 20 \times 8.5 = 250. \therefore \text{回归直线方程:}$$

$$y = -20x + 250.$$

(2) 设工厂获利润为 L 元, 依题意:

$$L = x(-20x + 250) - 4(-20x + 250) = -20x^2 + 330x - 1000$$

$$= -20\left(x - \frac{33}{4}\right)^2 + 361.25.$$

当单价定为 $x = 8.25$ 时, 工厂获利最大.

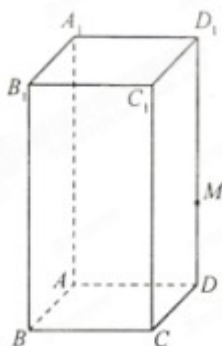
【答案】 (1) $y = -20x + 250$; (2) 8.25

【考点定位】 本题主要考察回归分析, 一元二次函数等基础知识, 考查运算能力、应用意

识、转化与化归思想、特殊与一般思想.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=1$, $AA_1=2$, M 为棱 DD_1 上的一点.



I 求三棱锥 $A-MCC_1$ 的体积;

II 当 A_1M+MC 取得最小值时, 求证: $B_1M \perp$ 平面 MAC

【解析】

(1) 由长方体知 $AD \perp$ 平面 CDD_1C_1 , 点 A 到平面 CDD_1C_1 的距离 $AD=1$,

$$\therefore S_{\triangle MCC_1} = \frac{1}{2} CC_1 \times CD = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1, \therefore V_{A-MCC_1} = \frac{1}{3} AD \cdot S_{\triangle MCC_1} = \frac{1}{3}.$$

(2) 将侧面 CDD_1C_1 绕 DD_1 逆时针转动 90° 展开, 与侧面 ADD_1A_1 共面,

当 A_1, M, C_1 共线时, A_1M+MC_1 取得最小值由 $AD=CD=1$, $AA_1=2$

得 M 为 DD_1 的中点连接 MC_1 在 $\triangle MC_1C$ 中, $MC_1=MC=\sqrt{2}$, $CC_1=2$,

$$\therefore CC_1^2 = MC_1^2 + MC^2, \therefore \angle CMC_1 = 90^\circ, CM \perp MC_1,$$

$$\because B_1C_1 \perp \text{平面 } CDD_1C_1, \therefore B_1C_1 \perp CM, \because AM \cap MC = C,$$

$$\therefore CM \perp \text{平面 } B_1C_1M, \text{ 同理可证 } B_1M \perp AM, \therefore B_1M \perp \text{平面 } MAC.$$

【答案】 $\frac{1}{3}$

【考点定位】 本题主要考察直线与直线、直线与平面的位置关系以及体积等基本知识, 考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力、数形结合思想、化归与转化思想.

20. (本小题满分 13 分)

某同学在一次研究性学习中发现, 以下五个式子的值都等于同一个常数.

(1) $\sin^2 13^\circ + \cos^2 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 17^\circ$

(2) $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 15^\circ$

(3) $\sin^2 18^\circ + \cos^2 12^\circ - \sin 18^\circ \cos 12^\circ$

(4) $\sin^2 (-18^\circ) + \cos^2 48^\circ - \sin (-18^\circ) \cos 48^\circ$

(5) $\sin^2 (-25^\circ) + \cos^2 55^\circ - \sin (-25^\circ) \cos 55^\circ$

I 试从上述五个式子中选择一个, 求出这个常数

II 根据 (I) 的计算结果, 将该同学的发现推广为三角恒等式, 并证明你的结论

【解析】

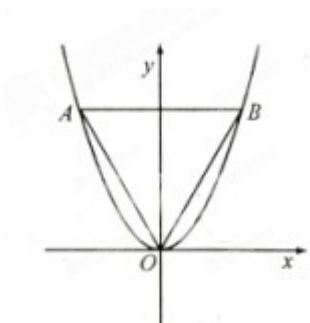
(1) 选择 (2) 式计算如下: $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 1 - \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{3}{4}$.

(2) 证明: $\sin^2 \alpha + \cos^2 (30^\circ - \alpha) - \sin \alpha \cos (30^\circ - \alpha)$
 $= \sin^2 \alpha + (\cos 30^\circ \cos \alpha + \sin 30^\circ \sin \alpha)^2 - \sin \alpha (\cos 30^\circ \cos \alpha + \sin 30^\circ \sin \alpha)$
 $\sin^2 \alpha + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$
 $= \frac{3}{4} \sin^2 \alpha + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$.

【考点定位】本题主要考察同角函数关系、两角和与差的三角函数公式、二倍角公式, 考查运算能力、特殊与一般思想、化归与转化思想.

21. (本小题满分 12 分)

如图, 等边三角形 OAB 的边长为 $8\sqrt{3}$, 且其三个顶点均在抛物线 E: $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上.



(1) 求抛物线 E 的方程;

(2) 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P, 与直线 $y = -1$ 相交于点 Q. 证明以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上某定点

【解析】

(1) 依题意 $|OB| = 8\sqrt{3}$, $\angle BOY = 30^\circ$, 设点 $B(x, y)$, 则 $x = 8\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 4\sqrt{3}$.

$y = 8\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 12$, $\therefore B(4\sqrt{3}, 12)$ 在抛物线上, $\therefore (4\sqrt{3})^2 = 2p \times 12$, $\therefore p = 2$,

抛物线 E 的方程为 $x^2 = 4y$.

(2) 设点 $P(x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$, $\therefore y = \frac{1}{4}x^2$, $y' = \frac{1}{2}x$,

切线方程: $y - y_0 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0)$, 即 $y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2$

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2 \\ y = -1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{x_0^2 - 4}{2x_0} \\ y = -1 \end{cases}$, $\therefore Q(\frac{x_0^2 - 4}{2x_0}, -1)$.

设 $M(0, y_1)$, $\therefore \overrightarrow{MP} = (x_0, y_0 - y_1)$, $\overrightarrow{MQ} = (\frac{x_0^2 - 4}{2x_0}, -1 - y_1)$, $\therefore \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$,

$$\frac{x_0^2 - 4}{2x_0} - y_0 - y_0 y_1 + y_1 + y_1^2 = 0, \text{ 又 } y_0 = \frac{1}{4}x_0^2 (x_0 \neq 0), \therefore \text{联立解得 } y_1 = 1.$$

故以 PQ 为直径的圆过 y 轴上的定点 $M(0, 1)$.

【答案】 $x^2 = 4y$

【考点定位】 本题主要考察抛物线的定义性质、圆的性质、直线与圆锥曲线的位置关系等基本知识，考查运用求解能力、推理论证能力、数形结合思想、转化与化归思想、特殊与一般思想.

22. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = ax \sin x - \frac{3}{2} (a \in R)$, 且在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\frac{\pi - 3}{2}$,

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内的零点个数, 并加以证明

【解析】

(1) $\because f'(x) = a(\sin x + x \cos x), x \in (0, \frac{\pi}{2}), \therefore \sin x + x \cos x > 0$,

当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\frac{3}{2}$ 不合题意;

当 $a < 0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, $f(x)_{\max} = f(0) = -\frac{3}{2}$ 不和题意;

当 $a > 0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, $f(x)_{\max} = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}a - \frac{3}{2} = \frac{\pi - 3}{2}$.

$\therefore a = 1. \therefore$ 综上 $f(x) = x \sin x - \frac{3}{2}$.

(2) $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个零点. 证明如下:

由 (1) 知 $f(x) = x \sin x - \frac{3}{2}$, $f(0) = -\frac{3}{2} < 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi-3}{2} > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上至少有一个零点. 又由 (1) 知 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增,

故在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上只有一个零点. 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, 令 $g(x) = f'(x) = \sin x + x \cos x$,

$g(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$, $g(\pi) = -\pi < 0$, $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上连续, $\therefore m \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $g(m) = 0$.

$g'(x) = 2 \cos x - x \sin x < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上递减. 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, m]$ 时, $g(x) > g(m) = 0$,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增, \therefore 当 $m \in (\frac{\pi}{2}, m)$ 时, $f(x) \geq f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi-3}{2} > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, m)$ 上无零点;

当 $x \in (m, \pi)$ 时, $g(x) < g(m) = 0$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 (m, π) 上递减, $\therefore f(m) > 0$, $f(\pi) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 (m, π) 上只有一个零点. 综上 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个零点.

【答案】 (1) $f(x) = x \sin x - \frac{3}{2}$; (2) 2 个零点.

【考点定位】 本题主要考察函数的最值、零点、单调性等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力、考查函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化化归思想.