2014 年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)

数学(文)

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设命题 $p:\forall x\in R,x^2+1>0$，则 $\neg p$ 为（　　）

$A.\ \exists x_0\in R,x_0^2+1>0$　　　$B.\ \exists x_0\in R,x_0^2+1\le 0$

$C.\ \exists x_0\in R,x_0^2+1<0$　　　$D.\ \forall x\in R,x^2+1\le 0$

【答案】B

【解析】全称命题的否定是特称命题,所以命题 p 的否定为 $\exists x_0\in R,x_0^2+1\le 0$,故选 B.

【考点定位】命题否定 全称命题 特称命题

2.已知集合 $A=\{x|x>2\},B=\{x|1<x<3\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

$A.\{x|x>2\}$　　$B.\{x|x>1\}$　　$C.\{x|2<x<3\}$　　$D.\{x|1<x<3\}$

【答案】C

【解析】由交集的定义可得 $A\bigcap B=\left\{x/2<x<3\right\}$,故选 C.

【考点定位】集合交集

3.对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本，当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时，总体中每个个体被抽中的概率分别为 p_1,p_2,p_3，则（　　）

$A.p_1=p_2<p_3$　　$B.p_2=p_3<p_1$　　$C.p_1=p_3<p_2$　　$D.p_1=p_2=p_3$

【答案】D

【解析】根据随机抽样的原理可得简单随机抽样,分层抽样,系统抽样都必须满足每个个体被抽到的概率相等,即 $p_1=p_2=p_3$,故选 D.

【考点定位】抽样调查

4.下列函数中，既是偶函数又在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增的是（　　）

$A.f(x)=\frac{1}{x^2}$ $B.f(x)=x^2+1$ $C.f(x)=x^3$ $D.f(x)=2^{-x}$

【答案】A

【解析】根据函数奇偶性的判断可得选项 A,B 为偶函数,C 为奇函数,D 为非奇非偶函数,所以排除 C,D 选项.由二次函数的图像可得选项 B 在 $(-\infty,0)$ 是单调递减的,根据排除法选 A.因为函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 是单调递减的且 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 是单调递增的,所以根据复合函数单调性的判断同增异减可得选项 A 在 $(-\infty,0)$ 是单调递减的.

【考点定位】奇偶性 单调性

5.在区间 $[-2,3]$ 上随机选取一个数 X，则 $X\le 1$ 的概率为（　　）.

$A.\frac{4}{5}$ $B.\frac{3}{5}$ $C.\frac{2}{5}$ $D.\frac{1}{5}$

【答案】B

【解析】在 $[-2,3]$ 上符合 $X\le 1$ 的区间为 $[-2,1]$,因为区间 $[-2,3]$ 的区间长度为 5 且区间 $[-2,1]$ 的区间长度为 3,所以根据几何概型的概率计学科网算公式可得 $P=\frac{3}{5}$,故选 B.

【考点定位】几何概型

6.若圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-6x-8y+m=0$，则 $m=$（　　）

$A.21$ $B.19$ $C.9$ $D.-11$

【答案】C

【解析】因为 $x^2+y^2-6x-8y+m=0\Rightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=25-m$,所以 $25-m>0\Rightarrow m<25$ 且圆 C_2 的圆心为 $(3,4)$,半径为 $\sqrt{25-m}$,根据圆与圆外切的判定(圆心距离等于半径和)可得 $\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=1+\sqrt{25-m}\Rightarrow m=9$,故选 C.

【考点定位】圆与圆之间的外切关系与判断

7.执行如图 1 所示的程序框图，如果输入的 $t\in[-2,2]$，则输出的 S 属于（　　）

A. $[-6,-2]$ B. $[-5,-1]$ C. $[-4,5]$ D. $[-3,6]$

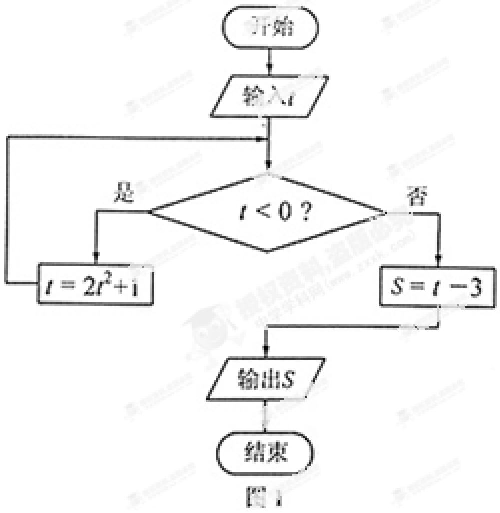


图1

【答案】D

【解析】当$t\in[-2,0)$时,运行程序如下,$t=2t^2+1\in(1,9]$,$S=t-3\in(-2,6]$,当$t\in[0,2]$时,$S=t-3\in[-3,-1]$,则$S\in(-2,6]\cup[-3,-1]=[-3,6]$,故选D.

【考点定位】程序框图 二次函数

8.一块石材表示的几何体的三视图如图2所示，将石材切削、打磨、加工成球，则能得到的最大球的半径等于（　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

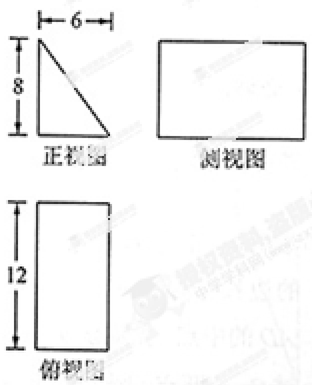


图2

【答案】B

【解析】由图可得该几何体为三棱柱,因为正视图,侧视图,俯视图的内切圆半径最小的是正视图(直角三角形)所对应的内切圆,所以最大球的半径为正视图直角三角形内切圆的半径r,

则$8-r+6-r=\sqrt{8^2+6^2}\Rightarrow r=2$,故选B.

【考点定位】三视图 内切圆 球 三棱柱

9.若 $0<x_1<x_2<1$，则（　　）

A. $e^{x_2}-e^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$　　　　B. $e^{x_2}-e^{x_1}<\ln x_2-\ln x_1$

C. $x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$　　　　D. $x_2e^{x_1}<x_1e^{x_2}$

【答案】C

【解析】设函数 $f(x)=e^x-\ln x$ 且 $g(x)=\frac{e^x}{x}$,求函数求导可得 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$, $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$,因为 $x\in(0,1)$,所以 $f'(x)$ 符号不确定且 $g'(x)<0$,所以函数 $f(x)$ 在(0，1)上不是单调函数,函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,则 $g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow\frac{e^{x_1}}{x_1}<\frac{e^{x_2}}{x_2}\Rightarrow x_2e^{x_1}<x_1e^{x_2}$,学科网所以选项 C 是正确的,故选 C.

【考点定位】导数 单调性

10.在平面直角坐标系中，O 为原点，$A(-1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$, $C(3,0)$，动点 D 满足 $|\overrightarrow{CD}|=1$，

则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}|$ 的取值范围是（　　）

A. $[4,6]$　　　　B. $[\sqrt{19}-1,\sqrt{19}+1]$　　　　C. $[2\sqrt{3},2\sqrt{7}]$

D. $[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1]$

【答案】D

【解析】因为 C 坐标为 $(3,0)$ 且 $|CD|=1$,所以动点 D 的轨迹为以 C 为圆心的单位圆,则 D 满足参数方程 $\begin{cases}x_D=3+\cos\theta\\ y_D=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数且 $\theta\in[0,2\pi)$）,所以设 D 的坐标为为 $(3+\cos\theta,\sin\theta)(\theta\in[0,2\pi))$,

则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}|=\sqrt{(3+\cos\theta-1)^2+(\sin\theta+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+2(2\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)}$,

因为 $2\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ 的取值范围为 $\left[-\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2},\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}\right]=[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$ 学科网

且 $\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{(1+\sqrt{7})^2}=1+\sqrt{7}$, $\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}=\sqrt{7}-1$,所以 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}|$ 的取值范围为 $\left[\sqrt{8-2\sqrt{7}},\sqrt{8+2\sqrt{7}}\right]=[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1]$,故选 D.

【考点定位】参数方程 圆 三角函数

二. 填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.复数$\dfrac{3+i}{i^2}$（i为虚数单位）的实部等于________.

【答案】-3

【解析】由题可得$\dfrac{3+i}{i^2}=-3-i$，$-3-i$的实部为-3，故填-3.

【考点定位】复数

12.在平面直角坐标系中，曲线$C:\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数）的普通方程为__________.

【答案】$x-y-1=0$

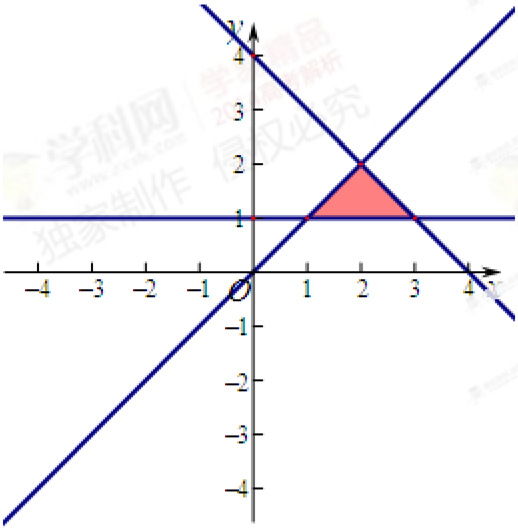
【解析】联立$\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$消$t$可得$x-y=1\Rightarrow x-y-1=0$，故填$x-y-1=0$.

【考点定位】参数方程

13.若变量x，y满足约束条件$\begin{cases}y\le x\\ x+y\le 4\\ y\ge 1\end{cases}$，则$z=2x+y$的最大值为________.

【答案】7

【解析】作出不等式组$\begin{cases} y\le x \\ x+y\le 4 \\ y\ge 1 \end{cases}$表示的区域如下,则根据线性规划的知识可得目标函数$z=2x+y$在点$(3,1)$处取得最大值7,故填7.学科网



【考点定位】线性规划

14.平面上以机器人在行进中始终保持与点$F(1,\ 0)$的距离和到直线$x=-1$的距离相等.若机器人接触不到过点$P(-1,\ 0)$且斜率为k的直线，则k的取值范围是__________.

【答案】$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

【解析】根据抛物线的概念可得机器人在以点$F(1,0)$为焦点的抛物线$y^2=4x$上,由题可得直线$y=k(x+1)$与抛物线$y^2=4x$没有交点,联立直线与抛物线$\begin{cases} y^2=4x \\ y=k(x+1) \end{cases}$消元可得

$y=k\cdot\frac{y^2}{4}+k\Rightarrow\frac{k}{4}\cdot y^2-y+k=0$,即该方程无根,则$k\neq 0$且$\Delta=1-k^2<0\Rightarrow k<-1$或$k>1$,所以$k$的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,故填$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$学科网

【考点定位】抛物线 直线与抛物线之间的关系

15.若$f(x)=\ln(e^{3x}+1)+ax$是偶函数，则$a=$___________.

【答案】$-\frac{3}{2}$ 学科网

【解析】因为函数 $f(x)=\ln\left(e^{3x}+1\right)+ax$ 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$

$$\Rightarrow \ln\left(e^{-3x}+1\right)-ax=\ln\left(e^{3x}+1\right)+ax \Rightarrow \ln\left(\frac{e^{3x}+1}{e^{3x}}\right)-ax=\ln\left(e^{3x}+1\right)+ax$$

$$\Rightarrow \ln\left(e^{3x}+1\right)-3x-ax=\ln\left(e^{3x}+1\right)+ax \Rightarrow -3x=2ax \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$,故填 $-\frac{3}{2}$.

【考点定位】奇偶性 对数运算

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算过程.

16.（本小题满分 12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n^2+n}{2}$，$n\in N^*$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=2^{a_n}+(-1)^n a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

【答案】(1) $a_n=n$ (2) $T_{2n}=2^{2n+1}+n-2$

【解析】

试题分析:(1)题目已知 a_n,S_n 之间的关系,令 $n=1$,利用 $a_1=S_1$,即可求的 a_1 的值,令 $n\ge 2$,利用 a_n 与前 n 项和之间的关系 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 即可得到 a_n,令 $n=1$ 检验首项即可得到 a_n 的通项公式.

(2)把(1)得到的通项公式代入 b_n 可以得到 b_n 是由等比数列 2^n,数列 $(-1)^n \bullet n$ 之和,才用分组求和法,首先利用

等比数列前 n 项和公式求的等比数列 2^n 的前 n 项和,再利用

$-1+2=-3+4=-5+6=\cdots=-(2n-1)+2n=1$ 对数列 $(-1)^n \bullet n$ 进行分组

$(-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+(-(2n-1)+2n)$ 即学科网可求的数列 b_n 的前 n 项和

试题解析:(1)当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$;

当 $n\ge 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n^2+n}{2}-\dfrac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=n$,

检验首项 $a_1=1$ 符合 $a_n=n$,所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$.

(2)由(1)可得 $b_n=2^n+(-1)^n \bullet n$,记数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n},

则 $T_{2n}=\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2n}\right)+(-1+2-3+4-5+\cdots+2n)$

$\Rightarrow T_{2n}=\dfrac{2^1-2^{2n}\bullet 2}{1-2}+\left[(-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+(-(2n-1)+2n)\right]$

$\Rightarrow T_{2n}=2^{2n+1}+n-2$

故数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $T_{2n}=2^{2n+1}+n-2$

【考点定位】数列前 n 项和 等差数列 等比数列 分组求和法

17.(本小题满分 12 分)某企业有甲、乙两个研发小组,为了比较他们的研发水平,现随机抽取这两个小组往年研发新产品的结果如下:

(a,b), $(a,\bar{b})$, (a,b), $(\bar{a},b)$, $(\bar{a},\bar{b})$, (a,b), (a,b), $(a,\bar{b})$,
$(\bar{a},b)$, $(a,\bar{b})$, $(\bar{a},\bar{b})$, (a,b), $(a,\bar{b})$, $(\bar{a},b)$, (a,b)

其中 a, $\bar{a}$ 分别表示甲组研发成功和失败; b, $\bar{b}$ 分别表示乙组研发成功和失败.

(1)若某组成功研发一种新产品,则给改组记 1 分,否记 0 分,试计算甲、乙两组研发新产品的成绩的平均数和方差,并比较甲、乙两组的研发水平;

(2)若该企业安排甲、乙两组各自研发一种新产品,试估算恰有一组研发成功的概率.

【答案】(1) $\overline{x_{甲}}=\dfrac{2}{3}, s_{甲}^2=\dfrac{2}{9}, \overline{x_{乙}}=\dfrac{3}{5}$, $s_{乙}^2=\dfrac{6}{25}$,甲组优于乙组 (2) $P(E)=\dfrac{7}{15}$

【解析】

试题分析:(1)按照题意对甲,乙两组 15 次实验的等分,再根据平均数求的甲,乙成绩平均数,再根据方差的计算公式即可求的甲乙的方差,再比较甲乙两组的平均数和方差,谁平均数大方差小,谁的研究水平较好.

(2)根据题意可知有 15 此实验,其中有 7 次是只有一组研发成功,频率除以总数即可得到概率的估算值,进而得到恰有一组研发成功的概率.

试题解析:(1)甲组研发新产品的成绩如下:1,1,1,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,0,1,其平均数 $\overline{x_{甲}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$;方差

$$s_{甲}^2=\frac{1}{15}\left[\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times 10+\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times 5\right]=\frac{2}{9},$$

乙组研发新产品的成绩为:1,0,1,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1,其平均数 $\overline{x_{乙}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$,方差为

$$s_{乙}^2=\frac{1}{15}\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\times 9+\left(0-\frac{3}{5}\right)^2\times 6\right]=\frac{6}{25},$$

因为 $\overline{x_{甲}}>\overline{x_{乙}}$,$s_{甲}^2<s_{乙}^2$,所以甲组的研发水平优于乙组.

(2)记 $E=\{恰有一组研发成功\}$,在所有抽的的 15 个结果中,恰有一组研发成功的结果如下:

$(a,\bar{b})$, $(\bar{a},b)$, $(a,\bar{b})$, $(\bar{a},b)$, $(a,\bar{b})$, $(a,\bar{b})$, $(\bar{a},b)$ 共 7 个,所以根据古典概型的概率计算公式可得 $P(E)=\frac{7}{15}$.

【考点定位】概率 平均数 方差

18.(本小题满分 12 分)如图 3,已知二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的大小为 60°,菱形 $ABCD$ 在面 β 内,A,B 两点在棱 MN 上,$\angle BAD=60^\circ$,E 是 AB 的中点,$DO\perp$ 面 α,垂足为 O.

(1)证明:$AB\perp$ 平面 ODE;

(2)求异面直线 BC 与 OD 所成角的余弦值.

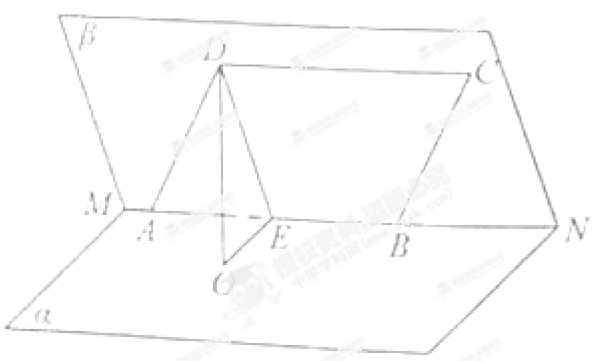


图 3

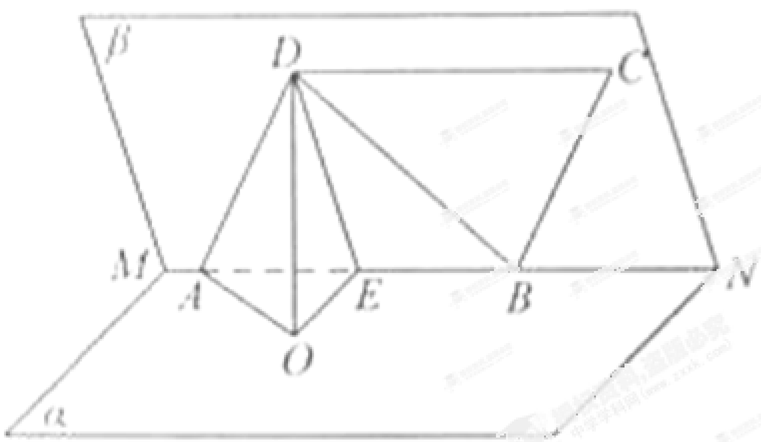
【答案】(1)详见解析 (2) $\frac{3}{4}$

【解析】

试题分析:(1)题目已知 $DO\perp\alpha$,利用线面垂直的性质可得 $DO\perp AB$,已知角 DAE 和 $DA=2AE$,利用余弦定理即可说明 $AB\perp DE$,即 AB 垂直于面 DOE 内两条相交的直线,根据线面垂直的判断即可得到直线 AB 垂直于面 DEO.

(2)菱形 $ABCD$ 为菱形可得 $AD//BC$,则 BC 与 OD 所成角与角 ADO 大小相等,即求 ADO 角的余弦值即可,利用菱形 $ABCD$ 所有边相等和一个角为 60^0 即可求的 DE 的长度,根据(1)可得 $AB\perp$面 DOE,即角 DEO 为二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的平面角为 60^0,结合 $\triangle DEO$ 为直角三角形与 DO 的长度,即可求的 DO,OE 长度,再直角 ΔAOD 中,AD,OD 已知,利用直角三角形中余弦的定义即可求的角 ADO 的余弦值,进而得到异面直线夹角的余弦值.

试题解析:(1)如图,因为 $DO\perp\alpha$,$AB\subseteq\alpha$,所以 $DO\perp AB$,连接 BD,由题可知 ΔABD 是正三角形,又 E 是 AB 的中点,所以 $DE\perp AB$,而 $DO\bigcap DE=D$,故 $AB\perp$平面 ODE.



(2)因为 $BC//AD$,所以 BC 与 OD 所成的角等于 AD 与 OD 所成的角,即 $\angle ADO$ 是 BC 与 OD 所成的角,由(1)可知,$AB\perp$平面 ODE,所以 $AB\perp OE$ 又 $DE\perp AB$,于是 $\angle DEO$ 是二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的平面角,从而 $\angle DEO=60^0$,不妨设 $AB=2$,则 $AD=2$,易知 $DE=\sqrt{3}$,在 $Rt\Delta DOE$ 中,$DO=DE\bullet\sin 60^0=\frac{3}{2}$,连接 AO,

在 $Rt\Delta AOD$ 中,$\cos\angle ADO=\frac{DO}{AD}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$,所以异面直线 BC 与 OD 所成角的余弦值为 $\frac{3}{4}$.

【考点定位】异面直线的夹角 二面角 线面垂直

19.（本小题满分 13 分）如图 4，在平面四边形 $ABCD$ 中，

$DA\perp AB, DE=1, EC=\sqrt{7}, EA=2, \angle ADC=\frac{2\pi}{3}, \angle BEC=\frac{\pi}{3}$

(1)求 $\sin\angle CED$ 的值；

(2)求 BE 的长

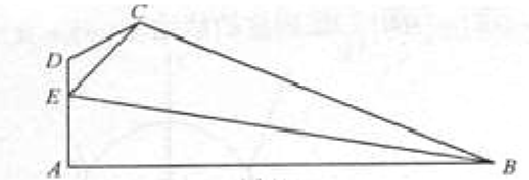


图 4

【答案】(1) $\frac{\sqrt{21}}{7}$ (2) $4\sqrt{7}$

【解析】

试题分析:(1)在 ΔCDE 中已知两边与一角,利用余弦定理即可求出第三条边 DC 的长度,再利用余弦定理即可求出角 CED 的正弦值.

(2)由(1)三角形 DEC 的三条边,根据正余弦直角的关系可得角 DEC 的余弦值(或者利用正余弦之间的关系也可求的),角 $\angle DEC, \angle BEC, \angle AEB$ 之和为 180^0,其中两个角的正余弦值已知,则可以利用余弦的和差角公式求的角 AEB 的余弦值, AE 长度已知,利用直角三角形 AEB 中余弦的定义即可求的 BE 长.

试题解析:如图设 $\angle CED=\alpha$

(1)在 ΔCDE 中,由余弦定理可得 $EC^2=CD^2+DE^2-2\cdot CD\cdot DE\cdot\cos\angle EDC$,于是又题设可知

$7=CD^2+1+CD$,即 $CD^2+CD-6=0$,解得 $CD=2$ ($CD=-3<0$ 舍去),

在 ΔCDE 中,由正弦定理可得 $\frac{DE}{\sin\angle EDC}=\frac{CD}{\sin\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{CD\cdot\sin\frac{2\pi}{3}}{EC}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

即 $\sin\angle CED=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(2)由题设可得 $0<\alpha<\frac{2\pi}{3}$,于是根据正余弦之间的关系可得 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{21}{49}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,而

$\angle AED=\frac{2\pi}{3}-\alpha$,所以 $\cos\angle AEB=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\alpha=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{7}}{14}$,在 $Rt\Delta EAB$ 中, $\cos\angle AEB=\frac{EA}{BE}=\frac{2}{BE}$,

所以 $BE=\frac{2}{\cos\Delta AEB}=\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)}=4\sqrt{7}$.

【考点定位】正余弦定理　正余弦和差角公式 直角三角形 正余弦之间的关系

20. （本小题满分 13 分）如图 5，O 为坐标原点，双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a_1^{\ 2}}-\frac{y^2}{b_1^{\ 2}}=1(a_1>0,b_1>0)$ 和椭圆 $C_2:\frac{x^2}{a_2^{\ 2}}+\frac{y^2}{b_2^{\ 2}}=1(a_2>b_2>0)$ 均过点 $P(\frac{2\sqrt{3}}{3},1)$，且以 C_1 的两个顶点和 C_2 的两个焦点为顶点的四边形是面积为 2 的正方形.

(1)求 C_1,C_2 的方程；

(2)是否存在直线 l，使得 l 与 C_1 交于 A,B 两点，与 C_2 只有一个公共点，且 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$？证明你的结论.

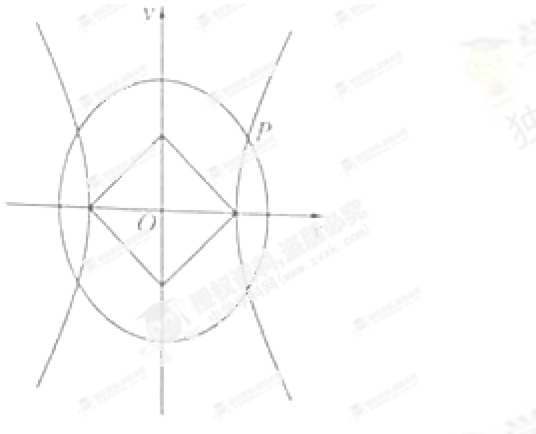


图 5

【答案】(1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1,\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$ (2)不存在

【解析】

试题分析:(1)利用正方形面积为 2,即可得到对角线的长为 2,则可得 C_1 的两个顶点和 C_2 的两个焦点的坐标,求的 a_1,c_2 的值,再结合点 P 在双曲线上,代入双曲线结合 a,b,c 之间的关系即可求的 b_1 的值,得到双曲线的方程,椭圆的焦点坐标已知,点 P 在椭圆上,利用椭圆的定义 $2a$ 即为 P 到两焦点的距离之和,求出距离即可得到

a_2的值,利用a,b,c之间的关系即可求出b_2的值,得到椭圆的标准方程.

(2)分以下两种情况讨论,当直线l的斜率不存在时,直线l与C_2只有一个公共点,即直线经过C_2的顶点,得到直线l的方程,代入双曲线求的A,B点的坐标验证是否符合等式$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$,当直线$l$的斜率存在时,直线$l$的方程为$y=kx+m$,联立直线$l$与双曲线消元得到二次方程,再利用根与系数之间的关系得到关于A,B两点横纵坐标之和的表达式,利用k,m出$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$,再立直线$l$与椭圆的方程$\Delta=0$即可得到$k,m$直线的关系,可得到内积$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$不可能等于0,进而得到$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}\neq\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$,即$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|\neq\left|\overrightarrow{AB}\right|$,即不存在这样的直线.

试题解析:的焦距为$2c_2$,由题可得$2c_2=2,2a_1=2$,从而$a_1=1,c_2=1$,因为点$P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},1\right)$在双曲线$x^2-\frac{y^2}{b_1^2}=1$上,所以$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{2}{b_1^2}=1\Rightarrow b_1^2=3$,由椭圆的定义可得

$2a_2=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+(1-1)^2}+\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow a_2=\sqrt{3}$,于是根据椭圆$a,b,c$之间的关系可得

$b_2^2=a_2^2-c_2^2=2$,所以C_1,C_2的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1,\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$.

(2)不存在符合题设条件的直线.

①若直线l垂直于x轴,即直线l的斜率不存在,因为l与C_2只有一个公共点,所以直线的方程为$l:x=\sqrt{2}$或$x=-\sqrt{2}$,

当$x=\sqrt{2}$时,易知$A\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right),B\left(\sqrt{2},-\sqrt{3}\right)$,所以$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=2\sqrt{2},\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{3}$,此时$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|\neq\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

当$x=-\sqrt{2}$时,同理可得$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|\neq\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

②当直线l不垂直于x轴时,即直线l的斜率存在且设直线l的方程为$y=kx+m$,联立直线与双曲线方程$\begin{cases}y=kx+m\\x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$可得$\left(3-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-3=0$,当$l$与$C_1$相交于$A,B$两点时,设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$,则

x_1,x_2满足方程$\left(3-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-3=0$,由根与系数的关系可得$x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2},x_1x_2=\frac{m^2+3}{k^2-3}$,于

是 $y_1y_2=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{3k^2-3m^2}{k^2-3}$，联立直线 l 与椭圆 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1\end{cases}$ 可得

$(2k^2+3)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，因为直线 l 与椭圆只有一个交点，

所以 $\Delta=0\Rightarrow 16k^2m^2-8(2k^2+3)(m^2-3)=0$，化简可得 $2k^2=m^2-3$，因此

$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{m^2+3}{k^2-3}+\frac{3k^2-3m^2}{k^2-3}=\frac{-k^2-3}{k^2-3}\neq 0$，

于是 $\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}\neq\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$，即 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2\neq\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|^2$，所以 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|\neq\left|\overrightarrow{AB}\right|$，

综上不存在符合题目条件的直线 l.

【考点定位】椭圆 双曲线 向量 向量内积

21.（本小题满分 13 分）已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x+1(x>0)$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）记 x_i 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $i(i\in N^*)$ 个零点，证明：对一切 $n\in N^*$，有 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{2}{3}$.

【答案】(1) 单调递减区间为 $(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in N^*)$，

单调递增区间为 $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k\in N^*)$. (2)详见解析

【解析】

试题分析:(1)对函数 $f(x)$ 求导得到导函数 $f'(x)(x>0)$，求 $f'(x)$ 大于 0 和小于 0 的解集得到单调减区间和单调增区间，但是必须注意正余弦的周期性和原函数的定义域 $(0,+\infty)$.

(2)利用(1)问的结果可知函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上是单调递减的，即 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上至多一个零点，根据正余弦的函数值可得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}$，再根据 $f(x)$ 在区间上 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 单调性和函数 $f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 端点处函数值异号可得函数 $f(x)$ 在区间 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 上有且只有一个零点，即

$n\pi<x_{n+1}<(n+1)\pi\Rightarrow\frac{1}{(n+1)^2\pi^2}<\frac{1}{x_{n+1}^2}<\frac{1}{n^2\pi^2}$，则依次讨论 $n=1,n=2,n\geq 3$ 利用放缩法即可证明

$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n^2}<\dfrac{2}{3}$.

试题解析:数 $f(x)$ 求导可得 $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x(x>0)$,令 $f'(x)=0$ 可得

$x=k\pi(k\in N^*)$,当 $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in N^*)$时,$\sin x>0$.此时 $f'(x)<0$;

当 $x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k\in N^*)$时,$\sin x<0$,此时 $f'(x)>0$,

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为$(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in N^*)$,

单调递增区间为$((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k\in N^*)$.

(2)由(1)可知函数 $f(x)$ 在区间$(0,\pi)$上单调递减,又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,所以 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$,

当 $n\in N^*$时,因为 $f(n\pi)f((n+1)\pi)=\left[(-1)^n n\pi+1\right]\left[(-1)^{n+1}(n+1)\pi+1\right]<0$,且函数 $f(x)$ 的图像是连续不断的,所以 $f(x)$ 在区间$(n\pi,(n+1)\pi)$内至少存在一个零点,又 $f(x)$ 在区间$(n\pi,(n+1)\pi)$上是单调的,故 $n\pi<x_{n+1}<(n+1)\pi$,因此,

当 $n=1$ 时,$\dfrac{1}{x_1^2}=\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{2}{3}$;

当 $n=2$ 时,$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}<\dfrac{1}{\pi^2}(4+1)<\dfrac{2}{3}$;

当 $n\geq 3$ 时,

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{\pi^2}\left[4+1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{\pi^2}\left[5+\frac{1}{1\times 2}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{\pi^2}\left[5+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\right]=\frac{1}{\pi^2}\left(6-\frac{1}{n-1}\right)<\frac{6}{\pi^2}<\frac{2}{3},$$

综上所述,对一切的 $n\in N^*$,$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n^2}<\dfrac{2}{3}$.

【考点定位】导数 单调性 放缩法 裂项求和