

2020 年上海市春季高考数学试卷

2020.01

一. 填空题 (本大题共 12 题, 满分 54 分, 第 1~6 题每题 4 分, 第 7~12 题每题 5 分)

1. 集合 $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ _____
2. 不等式 $\frac{1}{x} > 3$ 的解集为 _____
3. 函数 $y = \tan 2x$ 的最小正周期为 _____
4. 已知复数 z 满足 $z + 2\bar{z} = 6 + i$, 则 z 的实部为 _____
5. 已知 $3\sin 2x = 2\sin x$, $x \in (0, \pi)$, 则 $x =$ _____
6. 若函数 $y = a \cdot 3^x + \frac{1}{3^x}$ 为偶函数, 则 $a =$ _____
7. 已知直线 $l_1: x + ay = 1$, $l_2: ax + y = 1$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 l_1 与 l_2 的距离为 _____
8. 已知二项式 $(2x + \sqrt{x})^5$, 则展开式中 x^3 的系数为 _____
9. 三角形 ABC 中, D 是 BC 中点, $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____
10. 已知 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $a, b \in A$, 则 $|a| < |b|$ 的情况有 _____ 种
11. 已知 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 五个点, 满足 $\overrightarrow{A_n A_{n+1}} \cdot \overrightarrow{A_{n+1} A_{n+2}} = 0$ ($n = 1, 2, 3$), $|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}| \cdot |\overrightarrow{A_{n+1} A_{n+2}}| = n + 1$ ($n = 1, 2, 3$), 则 $|\overrightarrow{A_1 A_5}|$ 的最小值为 _____
12. 已知 $f(x) = \sqrt{x-1}$, 其反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $f^{-1}(x) - a = f(x - a)$ 有实数根, 则 a 的取值范围为 _____

二. 选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^{n-1}}{3^n} =$ ()
 A. 3 B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. 5
14. “ $\alpha = \beta$ ” 是 “ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ ” 的 ()
 A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 作垂直于 x 轴的垂线交椭圆于 A, B 两点, 作垂直于 y 轴的垂线交椭圆于 C, D 两点, 且 $AB = CD$, 两垂线相交于点 P , 则点 P 的轨迹是 ()
 A. 椭圆 B. 双曲线 C. 圆 D. 抛物线

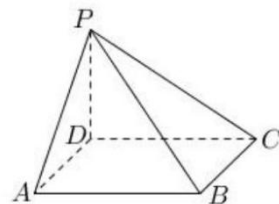
16. 数列 $\{a_n\}$ 各项均为实数，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 满足 $a_{n+3} = a_n$ ，且行列式 $\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{vmatrix} = c$ 为定值，则下列选项中不可能的是（ ）

- A. $a_1 = 1, c = 1$ B. $a_1 = 2, c = 2$ C. $a_1 = -1, c = 4$ D. $a_1 = 2, c = 0$

三. 解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17. 已知四棱锥 $P-ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为正方形，边长为 3， $PD \perp$ 平面 $ABCD$.

- (1) 若 $PC = 5$ ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；
(2) 若直线 AD 与 BP 的夹角为 60° ，求 PD 的长.



18. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$.

- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， $S_{10} = 70$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列， $a_4 = \frac{1}{8}$ ，求满足 $S_n > 100a_n$ 时 n 的最小值.

19. 有一条长为 120 米的步行道 OA ， A 是垃圾投放点 ω_1 ，若以 O 为原点， OA 为 x 轴正半轴建立直角坐标系，设点 $B(x, 0)$ ，现要建设另一座垃圾投放点 $\omega_2(t, 0)$ ，函数 $f_t(x)$ 表示与 B 点距离最近的垃圾投放点的距离.

- (1) 若 $t = 60$ ，求 $f_{60}(10)$ 、 $f_{60}(80)$ 、 $f_{60}(95)$ 的值，并写出 $f_{60}(x)$ 的函数解析式；
(2) 若可以通过 $f_t(x)$ 与坐标轴围成的面积来测算扔垃圾的便利程度，面积越小越便利.

问：垃圾投放点 ω_2 建在何处才能比建在中点时更加便利？

20. 已知抛物线 $y^2 = x$ 上的动点 $M(x_0, y_0)$ ，过 M 分别作两条直线交抛物线于 P 、 Q 两点，交直线 $x = t$ 于 A 、 B 两点.

(1) 若点 M 纵坐标为 $\sqrt{2}$ ，求 M 与焦点的距离；

(2) 若 $t = -1$ ， $P(1,1)$ ， $Q(1,-1)$ ，求证： $y_A \cdot y_B$ 为常数；

(3) 是否存在 t ，使得 $y_A \cdot y_B = 1$ 且 $y_A \cdot y_B$ 为常数？若存在，求出 t 的所有可能值，若不存在，请说明理由.

21. 已知非空集合 $A \subseteq \mathbf{R}$ ，函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，若对任意 $t \in A$ 且 $x \in D$ ，不等式 $f(x) \leq f(x+t)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 具有 A 性质.

(1) 当 $A = \{-1\}$ ，判断 $f(x) = -x$ 、 $g(x) = 2x$ 是否具有 A 性质；

(2) 当 $A = (0,1)$ ， $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ， $x \in [a, +\infty)$ ，若 $f(x)$ 具有 A 性质，求 a 的取值范围；

(3) 当 $A = \{-2, m\}$ ， $m \in \mathbf{Z}$ ，若 D 为整数集且具有 A 性质的函数均为常值函数，求所有符合条件的 m 的值.

参考答案

一. 填空题

1. 3 2. $(0, \frac{1}{3})$ 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. 2
5. $\arccos \frac{1}{3}$ 6. 1 7. $\sqrt{2}$ 8. 10
9. $\frac{19}{4}$ 10. 18 11. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 12. $[\frac{3}{4}, +\infty)$

二. 选择题

13. D 14. A 15. B 16. B

三. 解答题

17. (1) 12; (2) $3\sqrt{2}$
18. (1) $a_n = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3}$, $n \in \mathbf{N}^*$; (2) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, 即 $2^n > 101$, n 的最小值为 7
19. (1) $f_{60}(10) = |60 - 10| = 50$, $f_{60}(80) = |60 - 80| = 20$, $f_{60}(95) = |120 - 95| = 25$.
 $f_{60}(x) = \begin{cases} |60 - x| & x \leq 90 \\ |120 - x| & x > 90 \end{cases}$; (2) $20 < t < 60$
20. (1) $MF = x_M + \frac{p}{2} = \frac{9}{4}$; (2) $x \cdot y = -1$; (3) 存在 $t = 1$
21. (1) $f(x) = -x$ 具有 A 性质; $g(x) = 2x$ 不具有 A 性质;
(2) $a \in [1, +\infty)$; (3) m 为奇数