

绝密 ★ 启用前

# 2008年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

## 数学（文史类）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第 I 卷1至2页，第 II 卷3至10页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

### 第 I 卷

#### 注意事项：

- 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、科目涂写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。
- 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试卷上的无效。
- 本卷共10小题，每小题5分，共50分。

#### 参考公式：

如果时间A，B互斥，那么 球的表面积公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad S = 4\pi R^2.$$

如果事件A，B相互独立，那么 其中R表示球的半径。

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

#### 一、选择题：在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合  $U = \{x \in N \mid 0 < x \leq 8\}$ ， $S = \{1, 2, 4, 5\}$ ， $T = \{3, 5, 7\}$ ，则  $S \cap (\complement_U T) =$

- (A) {1, 2, 4} (B) {1, 2, 3, 4, 5, 7} (C) {1, 2} (D) {1, 2, 4, 5, 6, 8}

解析：因为  $\complement_U T = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ ，所以  $S \cap (\complement_U T) = \{1, 2, 4\}$ ，选A.

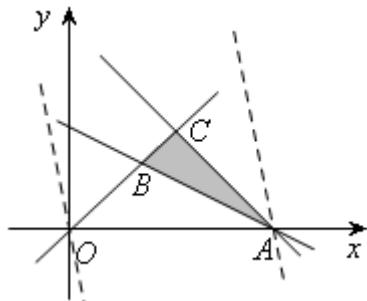
(2) 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 1 \end{cases}$ ，则目标函数  $z = 5x + y$  的最大值为

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

解析：如图，由图象可知目标函数

$z = 5x + y$  过点  $A(1, 0)$  时  $z$  取得最大值， $z_{\max} = 5$ ，

选D.



(3) 函数  $y = 1 + \sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 4$ ) 的反函数是

(A)  $y = (x - 1)^2$  ( $1 \leq x \leq 3$ )      (B)  $y = (x - 1)^2$  ( $0 \leq x \leq 4$ )

(C)  $y = x^2 - 1$  ( $1 \leq x \leq 3$ )      (D)  $y = x^2 - 1$  ( $0 \leq x \leq 4$ )

解析：当  $0 \leq x \leq 4$  时， $1 + \sqrt{x} \in [1, 3]$ ，解  $y = 1 + \sqrt{x}$  得  $f^{-1}(x) = (x - 1)^2$ ，选A.

(4) 若等差数列  $\{a_n\}$  的前5项和  $S_5 = 25$ ，且  $a_2 = 3$ ，则  $a_7 =$

(A) 12      (B) 13      (C) 14      (D) 15

解析： $S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(a_2 + a_4)}{2} \Rightarrow a_4 = 7$ ，所以  $a_7 = a_2 + 5d = a_2 + 5 \cdot \frac{a_4 - a_2}{2} = 13$ ，

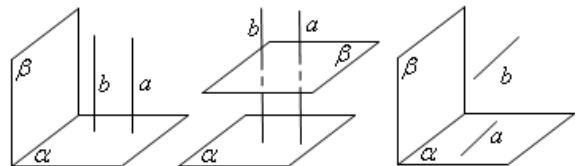
选B.

(5) 设  $a, b$  是两条直线， $\alpha, \beta$  是两个平面，则  $a \perp b$  的一个充分条件是

(A)  $a \perp \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$       (B)  $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$

(C)  $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$       (D)  $a \subset \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$

解析：选C，A、B、D的反例如图.



(6) 把函数  $y = \sin x$  ( $x \in R$ ) 的图象上所有点向左平行移动  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度，再把所得

图象上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍（纵坐标不变），得到的图象所表示的函数是

(A)  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ,  $x \in R$       (B)  $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ ,  $x \in R$

(C)  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ,  $x \in R$       (D)  $y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ ,  $x \in R$

解析：选C，

$$y = \sin x \xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位}} y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{横坐标缩短到原来的 } \frac{1}{2} \text{ 倍}} y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}).$$

(7) 设椭圆  $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$  ( $m > 0$ ,  $n > 0$ ) 的右焦点与抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点相同，离心

率为 $\frac{1}{2}$ , 则此椭圆的方程为

(A)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$     (B)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$     (C)  $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{64} = 1$     (D)  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

解析: 抛物线的焦点为 $(2, 0)$ , 椭圆焦点在 $x$ 轴上, 排除A、C, 由 $e = \frac{1}{2}$ 排除D, 选B.

(8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ -x+2, & x > 0 \end{cases}$ , 则不等式 $f(x) \geq x^2$ 的解集是

(A)  $[-1, 1]$     (B)  $[-2, 2]$     (C)  $[-2, 1]$     (D)  $[-1, 2]$

解析: 依题意得 $\begin{cases} x \leq 0 \\ x+2 \geq x^2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x > 0 \\ -x+2 \geq x^2 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$  或  $0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ , 选A

(9) 设 $a = \sin \frac{5\pi}{7}$ ,  $b = \cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $c = \tan \frac{2\pi}{7}$ , 则

(A)  $a < b < c$     (B)  $a < c < b$     (C)  $b < c < a$     (D)  $b < a < c$

解析:  $a = \sin \frac{2\pi}{7}$ , 因为 $\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ , 所以 $0 < \cos \frac{2\pi}{7} < \sin \frac{2\pi}{7} < 1 < \tan \frac{2\pi}{7}$ , 选

D.

(10) 设 $a > 1$ , 若对于任意的 $x \in [a, 2a]$ , 都有 $y \in [a, a^2]$ 满足方程 $\log_a x + \log_a y = 3$ , 这时 $a$ 的取值集合为

(A)  $\{a | 1 < a \leq 2\}$     (B)  $\{a | a \geq 2\}$     (C)  $\{a | 2 \leq a \leq 3\}$     (D)  $\{2, 3\}$

解析: 易得 $y = \frac{a^3}{x}$ , 在 $[a, 2a]$ 上单调递减, 所以 $y \in [\frac{a^2}{2}, a^2]$ , 故 $\begin{cases} \frac{a^2}{2} \geq a \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a \geq 2$ , 选

B.

## 第II卷

注意事项:

1. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。
2. 用钢笔或圆珠笔直接答在试卷上
3. 本卷共12小题, 共100分。

### 二、填空题 (本大题共6个小题, 每小题4分, 共24分. 把答案填在题中横线上.)

(11) 一个单位共有职工200人, 其中不超过45岁的有120人, 超过45岁的有80人. 为了调查职工的健康状况, 用分层抽样的方法从全体职工中抽取一个容量为25的样本, 应抽取超过45岁的职工\_\_\_\_\_人.

解析：依题意知抽取超过45岁的职工为  $\frac{25}{200} \times 80 = 10$ .

(12)  $(x + \frac{2}{x})^5$  的二项展开式中， $x^3$  的系数是\_\_\_\_\_ (用数字作答).

解析： $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \cdot (\frac{2}{x})^r = 2^r C_5^r x^{5-2r}$ ,  $r=1$ , 所以系数为10.

(13) 若一个球的体积为  $4\sqrt{3}\pi$ ，则它的表面积为\_\_\_\_\_.

解析：由  $\frac{4\pi}{3}R^3 = 4\sqrt{3}\pi$  得  $R = \sqrt{3}$ ，所以  $S = 4\pi R^2 = 12\pi$ .

(14) 已知平面向量  $\vec{a} = (2, 4)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2)$ . 若  $\vec{c} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$ ，则  $|\vec{c}| =$ \_\_\_\_\_

解析：因为  $\vec{c} = (2, 4) - 6(-1, 2) = (8, -8)$ ，所以  $|\vec{c}| = 8\sqrt{2}$ .

(15) 已知圆C的圆心与点  $P(-2, 1)$  关于直线  $y = x + 1$  对称. 直线  $3x + 4y - 11 = 0$  与圆C相交于  $A, B$  两点，且  $|AB| = 6$ ，则圆C的方程为\_\_\_\_\_.

解析：圆心的坐标为  $(0, -1)$ ，所以  $r^2 = 3^2 + \frac{(-4-11)^2}{5^2} = 18$ ，圆的方程为

$$x^2 + (y+1)^2 = 18.$$

(16) 有4张分别标有数字1, 2, 3, 4的红色卡片和4张分别标有数字1, 2, 3, 4的蓝色卡片，从这8张卡片中取出4张卡片排成一行. 如果取出的4张卡片所标数字之和等于10，则不同的排法共有\_\_\_\_\_种 (用数字作答).

解析：数字之和为10的情况有4, 4, 1, 1; 4, 3, 2, 1; 3, 3, 2, 2.

所以共有  $2A_4^4 + 2^4 A_4^4 = 18A_4^4 = 432$  种不同排法.

### 三、解答题 (本题共6道大题, 满分76分)

(17) (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = 2\cos^2 \omega x + 2\sin \omega x \cos \omega x + 1$  ( $x \in R, \omega > 0$ ) 的最小正周期是  $\frac{\pi}{2}$ .

(I) 求  $\omega$  的值;

(II) 求函数  $f(x)$  的最大值，并且求使  $f(x)$  取得最大值的  $x$  的集合.

(17) 本小题主要考查特殊角三角函数值、两角和的正弦、二倍角的正弦与余弦、函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  的性质等基础知识，考查基本运算能力. 满分12分.

(I) 解：

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + \sin 2\omega x + 1 \\
&= \sin 2\omega x + \cos 2\omega x + 2 \\
&= \sqrt{2} \left( \sin 2\omega x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\omega x \sin \frac{\pi}{4} \right) + 2 \\
&= \sqrt{2} \sin \left( 2\omega x + \frac{\pi}{4} \right) + 2
\end{aligned}$$

由题设，函数  $f(x)$  的最小正周期是  $\frac{\pi}{2}$ ，可得  $\frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}$ ，所以  $\omega = 2$ .

(II) 由 (I) 知， $f(x) = \sqrt{2} \sin \left( 4x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$ .

当  $4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ，即  $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 时， $\sin \left( 4x + \frac{\pi}{4} \right)$  取得最大值 1，所以函数

$f(x)$  的最大值是  $2 + \sqrt{2}$ ，此时  $x$  的集合为  $\left\{ x \mid x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

(18) (本小题满分12分)

甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球，命中率分别为  $\frac{1}{2}$  与  $p$ ，且乙投球2次均未命中的概率为  $\frac{1}{16}$ .

(I) 求乙投球的命中率  $p$ ；

(II) 求甲投球2次，至少命中1次的概率；

(III) 若甲、乙两人各投球2次，求两人共命中2次的概率.

(18) 本小题主要考查随机事件、互斥事件、相互独立事件等概率的基础知识，考查运用概率知识解决实际问题的能力. 满分12分.

(I) 解法一：设“甲投球一次命中”为事件A，“乙投球一次命中”为事件B.

由题意得  $(1 - P(B))^2 = (1 - p)^2 = \frac{1}{16}$

解得  $p = \frac{3}{4}$  或  $\frac{5}{4}$  (舍去)，所以乙投球的命中率为  $\frac{3}{4}$ .

解法二：设“甲投球一次命中”为事件A，“乙投球一次命中”为事件B.

由题意得  $P(\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{16}$ ，于是  $P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$  或  $P(\bar{B}) = -\frac{1}{4}$  (舍去)，故  $p = 1 - P(\bar{B}) = \frac{3}{4}$

所以乙投球的命中率为  $\frac{3}{4}$ .

(II) 解法一：由题设和 (I) 知  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ .

故甲投球2次至少命中1次的概率为  $1 - P(\bar{A} \cdot \bar{A}) = \frac{3}{4}$

解法二：

由题设和(I)知  $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$

故甲投球2次至少命中1次的概率为  $C_2^1 P(A)P(\bar{A}) + P(A)P(A) = \frac{3}{4}$

(III) 由题设和(I)知,  $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{4}, P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$

甲、乙两人各投球2次, 共命中2次有三种情况: 甲、乙两人各中一次; 甲中两次, 乙两次均不中; 甲两次均不中, 乙中2次。概率分别为

$$C_2^1 P(A)P(\bar{A}) \cdot C_2^1 P(B)P(\bar{B}) = \frac{3}{16},$$

$$P(A \cdot A)P(\bar{B} \cdot \bar{B}) = \frac{1}{64},$$

$$P(\bar{A} \cdot \bar{A})P(B \cdot B) = \frac{9}{64}$$

所以甲、乙两人各投两次, 共命中2次的概率为  $\frac{3}{16} + \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{11}{32}$ .

(19) (本小题满分12分)

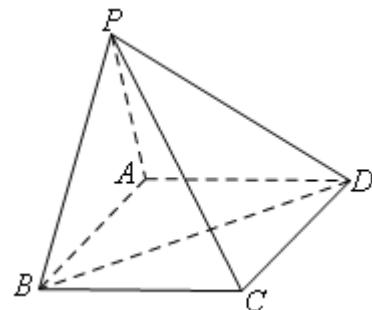
如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形. 已知

$$AB = 3, AD = 2, PA = 2, PD = 2\sqrt{2}, \angle PAB = 60^\circ.$$

(I) 证明  $AD \perp$  平面  $PAB$ ;

(II) 求异面直线  $PC$  与  $AD$  所成的角的大小;

(III) 求二面角  $P-BD-A$  的大小.



(19) 本小题主要考查直线和平面垂直, 异面直线所成的角、二面角等基础知识, 考查空间想象能力, 运算能力和推理论证能力. 满分12分.

(I) 证明: 在  $\triangle PAD$  中, 由题设  $PA = 2, PD = 2\sqrt{2}$  可得

$$PA^2 + AD^2 = PD^2 \text{ 于是 } AD \perp PA. \text{ 在矩形 } ABCD \text{ 中, } AD \perp AB. \text{ 又 } PA \cap AB = A,$$

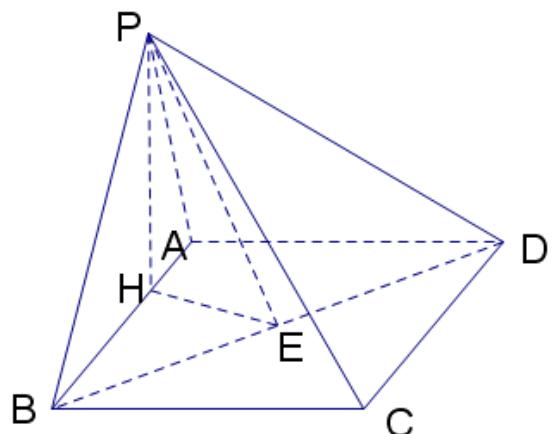
所以  $AD \perp$  平面  $PAB$ .

(II) 解: 由题设,  $BC \parallel AD$ , 所以  $\angle PCB$  (或其补角) 是异面直线  $PC$  与  $AD$  所成的角.

在  $\triangle PAB$  中, 由余弦定理得

$$PB = \sqrt{PA^2 + AB^2 - 2PA \cdot AB \cdot \cos PAB} = \sqrt{7}$$

由(I)知  $AD \perp$  平面  $PAB$ ,  $PB \subset$  平面  $PAB$ ,  
所以  $AD \perp PB$ , 因而  $BC \perp PB$ , 于是  $\triangle PBC$  是直角三



角形，故  $\tan PCB = \frac{PB}{BC} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

所以异面直线  $PC$  与  $AD$  所成的角的大小为  $\arctan \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

(III) 解：过点  $P$  做  $PH \perp AB$  于  $H$ ，过点  $H$  做  $HE \perp BD$  于  $E$ ，连结  $PE$   
因为  $AD \perp$  平面  $PAB$ ， $PH \subset$  平面  $PAB$ ，所以  $AD \perp PH$ . 又  $AD \cap AB = A$ ，  
因而  $PH \perp$  平面  $ABCD$ ，故  $HE$  为  $PE$  在平面  $ABCD$  内的射影. 由三垂线定理可知，  
 $BD \perp PE$ ，从而  $\angle PEH$  是二面角  $P - BD - A$  的平面角。

由题设可得，

$$PH = PA \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}, AH = PA \cdot \cos 60^\circ = 1,$$

$$BH = AB - AH = 2, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{13},$$

$$HE = \frac{AD}{BD} \cdot BH = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\text{于是再 } RT\Delta PHE \text{ 中, } \tan PEH = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

$$\text{所以二面角 } P - BD - A \text{ 的大小为 } \arctan \frac{\sqrt{39}}{4}.$$

(20) (本小题满分12分)

在数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且  $a_{n+1} = (1+q)a_n - qa_{n-1}$  ( $n \geq 2, q \neq 0$ ) .

(I) 设  $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n \in N^*$ )，证明  $\{b_n\}$  是等比数列；

(II) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(III) 若  $a_3$  是  $a_6$  与  $a_9$  的等差中项，求  $q$  的值，并证明：对任意的  $n \in N^*$ ， $a_n$  是  $a_{n+3}$  与

$a_{n+6}$  的等差中项。

(20) 本小题主要考查等差数列、等比数列的概念、等比数列的通项公式及前  $n$  项和公式，考查运算能力和推理论证能力及分类讨论的思想方法。满分12分。

(I) 证明：由题设  $a_{n+1} = (1+q)a_n - qa_{n-1}$  ( $n \geq 2$ )，得

$$a_{n+1} - a_n = q(a_n - a_{n-1})，\text{ 即 } b_n = qb_{n-1}，n \geq 2.$$

又  $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ ， $q \neq 0$ ，所以  $\{b_n\}$  是首项为1，公比为  $q$  的等比数列。

(II) 解法：由 (I)

$$a_2 - a_1 = 1，$$

$$a_3 - a_2 = q,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = q^2, \quad (n \geq 2).$$

将以上各式相加，得  $a_n - a_1 = 1 + q + \cdots + q^{n-2}$  ( $n \geq 2$ ).

所以当  $n \geq 2$  时， $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1-q^{n-1}}{1-q}, & q \neq 1, \\ n, & q = 1. \end{cases}$

上式对  $n=1$  显然成立.

(III) 解：由 (II)，当  $q=1$  时，显然  $a_3$  不是  $a_6$  与  $a_9$  的等差中项，故  $q \neq 1$ .

由  $a_3 - a_6 = a_9 - a_3$  可得  $q^5 - q^2 = q^2 - q^8$ ，由  $q \neq 0$  得  $q^3 - 1 = 1 - q^6$ ，①

整理得  $(q^3)^2 + q^3 - 2 = 0$ ，解得  $q^3 = -2$  或  $q^3 = 1$  (舍去). 于是  $q = -\sqrt[3]{2}$ .

另一方面， $a_n - a_{n+3} = \frac{q^{n+2} - q^{n-1}}{1-q} = \frac{q^{n-1}}{1-q}(q^3 - 1)$ ,

$$a_{n+6} - a_n = \frac{q^{n-1} - q^{n+5}}{1-q} = \frac{q^{n-1}}{1-q}(1 - q^6).$$

由①可得  $a_n - a_{n+3} = a_{n+6} - a_n$ ,  $n \in N^*$ .

所以对任意的  $n \in N^*$ ,  $a_n$  是  $a_{n+3}$  与  $a_{n+6}$  的等差中项.

(21) (本小题满分14分)

已知函数  $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + b$  ( $x \in R$ )，其中  $a, b \in R$ .

(I) 当  $a = -\frac{10}{3}$  时，讨论函数  $f(x)$  的单调性；

(II) 若函数  $f(x)$  仅在  $x=0$  处有极值，求  $a$  的取值范围；

(III) 若对于任意的  $a \in [-2, 2]$ ，不等式  $f(x) \leq 1$  在  $[-1, 1]$  上恒成立，求  $b$  的取值范围.

(21) 本小题主要考查利用导数研究函数的单调性、函数的最大值、解不等式等基础知识，考查综合分析和解决问题的能力. 满分14分.

(I) 解： $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 4x = x(4x^2 + 3ax + 4)$ .

当  $a = -\frac{10}{3}$  时， $f'(x) = x(4x^2 - 10x + 4) = 2x(2x-1)(x-2)$ .

令  $f'(x)=0$ , 解得  $x_1=0$ ,  $x_2=\frac{1}{2}$ ,  $x_3=2$ .

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(2, +\infty)$  内是增函数, 在  $(-\infty, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 2)$  内是减函数.

(II) 解:  $f'(x)=x(4x^2+3ax+4)$ , 显然  $x=0$  不是方程  $4x^2+3ax+4=0$  的根.

为使  $f(x)$  仅在  $x=0$  处有极值, 必须  $4x^2+3ax+4 \geq 0$  成立, 即有  $\Delta=9a^2-64 \leq 0$ .

解些不等式, 得  $-\frac{8}{3} \leq a \leq \frac{8}{3}$ . 这时,  $f(0)=b$  是唯一极值.

因此满足条件的  $a$  的取值范围是  $[-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}]$ .

(III) 解: 由条件  $a \in [-2, 2]$ , 可知  $\Delta=9a^2-64 < 0$ , 从而  $4x^2+3ax+4 > 0$  恒成立.

当  $x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ .

因此函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最大值是  $f(1)$  与  $f(-1)$  两者中的较大者.

为使对任意的  $a \in [-2, 2]$ , 不等式  $f(x) \leq 1$  在  $[-1, 1]$  上恒成立, 当且仅当  $\begin{cases} f(1) \leq 1 \\ f(-1) \leq 1 \end{cases}$ , 即

$\begin{cases} b \leq -2-a \\ b \leq -2+a \end{cases}$ , 在  $a \in [-2, 2]$  上恒成立.

所以  $b \leq -4$ , 因此满足条件的  $b$  的取值范围是  $(-\infty, -4]$ .

(22) (本小题满分14分)

已知中心在原点的双曲线C的一个焦点是  $F_1(-3, 0)$ , 一条渐近线的方程是  $\sqrt{5}x - 2y = 0$ .

(I) 求双曲线C的方程;

(II) 若以  $k(k \neq 0)$  为斜率的直线  $l$  与双曲线C相交于两个不同的点M, N, 且线段MN的

垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为  $\frac{81}{2}$ , 求  $k$  的取值范围.

(22) 本小题主要考查双曲线的标准方程和几何性质、直线方程、两条直线垂直、线段的

定比分点等基础知识，考查曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法，考查推理运算能力。满分14分。

(I) 解：设双曲线C的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ )。由题设得

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 5 \end{cases}, \text{所以双曲线方程为} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

(II) 解：设直线 ①  $l$  的方程为  $y = kx + m$  ( $k \neq 0$ )。点  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  的

坐标满足方程组 ②  $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$

将①式代入②式，得  $\frac{x^2}{4} - \frac{(kx+m)^2}{5} = 1$ ，整理得  $(5-4k^2)x^2 - 8kmx - 4m^2 - 20 = 0$ 。

此方程有两个一等实根，于是  $5-4k^2 \neq 0$ ，且  $\Delta = (-8km)^2 + 4(5-4k^2)(4m^2 + 20) > 0$ 。

整理得  $m^2 + 5 - 4k^2 > 0$ 。 ③

由根与系数的关系可知线段  $MN$  的中点坐标  $(x_0, y_0)$  满足

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4km}{5-4k^2}, \quad y_0 = kx_0 + m = \frac{5m}{5-4k^2}.$$

从而线段  $MN$  的垂直平分线方程为  $y - \frac{5m}{5-4k^2} = -\frac{1}{k}(x - \frac{4km}{5-4k^2})$ 。

此直线与  $x$  轴,  $y$  轴的交点坐标分别为  $(\frac{9km}{5-4k^2}, 0)$ ,  $(0, \frac{9m}{5-4k^2})$ 。由题设可得

$$\frac{1}{2} \left| \frac{9km}{5-4k^2} \right| \cdot \left| \frac{9m}{5-4k^2} \right| = \frac{81}{2}. \text{ 整理得 } m^2 = \frac{(5-4k^2)^2}{|k|}, \quad k \neq 0.$$

将上式代入③式得  $\frac{(5-4k^2)^2}{|k|} + 5 - 4k^2 > 0$ ，整理得  $(4k^2 - 5)(4k^2 - |k| - 5) > 0$ ,  $k \neq 0$

解得  $0 < |k| < \frac{\sqrt{5}}{2}$  或  $|k| > \frac{5}{4}$ .

所以  $k$  的取值范围是  $(-\infty, -\frac{5}{4}) \cup (-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{5}{4}, +\infty)$ 。