

2012上海高考数学试题（理科）答案与解析

一. 填空题

1. 计算: $\frac{3-i}{1+i}$ = _____ (i 为虚数单位).

【答案】 $1-2i$

【解析】 $\frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$.

【点评】 本题着重考查复数的除法运算, 首先, 将分子、分母同乘以分母的共轭复数, 将分母实数化即可.

2. 若集合 $A = \{x \mid 2x+1 > 0\}$, $B = \{x \mid |x-1| < 2\}$, 则 $A \cap B$ = _____.

【答案】 $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

【解析】 根据集合 $A: 2x+1 > 0$, 解得 $x > -\frac{1}{2}$, 由 $|x-1| < 2$, 得到, $-1 < x < 3$, 所以

$$A \cap B = \left(-\frac{1}{2}, 3\right).$$

【点评】 本题考查集合的概念和性质的运用, 同时考查了一元一次不等式和绝对值不等式的解法. 解决此类问题, 首先分清集合的元素的构成, 然后, 借助于数轴或韦恩图解决.

3. 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & \cos x \\ \sin x & -1 \end{vmatrix}$ 的值域是_____.

【答案】 $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

【解析】 根据题目 $f(x) = -\sin x \cos x - 2 = -\frac{1}{2} \sin 2x - 2$, 因为 $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, 所以

$$-\frac{5}{2} \leq f(x) \leq -\frac{3}{2}.$$

【点评】 本题主要考查行列式的基本运算、三角函数的范围、二倍角公式, 属于容易题, 难度较小. 考纲中明确要求掌握二阶行列式的运算性质.

4. 若 $\vec{n} = (-2, 1)$ 是直线 l 的一个法向量, 则 l 的倾斜角的大小为_____

(结果用反三角函数值表示).

【答案】 $\arctan 2$

【解析】 设直线的倾斜角为 α , 则 $\tan \alpha = 2, \alpha = \arctan 2$.

【点评】本题主要考查直线的方向向量、直线的倾斜角与斜率的关系、反三角函数的表示.直线的倾斜角的取值情况一定要注意,属于低档题,难度较小.

5. 在 $(x - \frac{2}{x})^6$ 的二项展开式中, 常数项等于_____.

【答案】 -160

【解析】根据所给二项式的构成, 构成的常数项只有一项, 就是 $T_4 = C_6^3 x^3 (-\frac{2}{x})^3 = -160$.

【点评】本题主要考查二项式定理.对于二项式的展开式要清楚, 特别注意常数项的构成.属于中档题.

6. 有一列正方体, 棱长组成以1为首项、 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 体积分别记为 $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n) =$ _____.

【答案】 $\frac{8}{7}$

【解析】由正方体的棱长组成以1为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 可知它们的体积则组成了一个以

1为首项, $\frac{1}{8}$ 为公比的等比数列, 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$.

【点评】本题主要考查无穷递缩等比数列的极限、等比数列的通项公式、等比数列的定义.考查知识较综合.

7. 已知函数 $f(x) = e^{|x-a|}$ (a 为常数).若 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, 1]$

【解析】根据函数 $f(x) = e^{|x-a|} = \begin{cases} e^{x-a}, & x \geq a \\ e^{-x+a}, & x < a \end{cases}$ 看出当 $x \geq a$ 时函数增函数, 而已知函数 $f(x)$ 在

区间 $[1, +\infty)$ 上为增函数, 所以 a 的取值范围为: $(-\infty, 1]$.

【点评】本题主要考查指数函数单调性, 复合函数的单调性的判断, 分类讨论在求解数学问题中的运用.本题容易产生增根, 要注意取舍, 切勿随意处理, 导致不必要的错误.本题属于中低档题目, 难度适中.

8. 若一个圆锥的侧面展开图是面积为 2π 的半圆面, 则该圆锥的体积为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

【解析】 根据该圆锥的底面圆的半径为 r ，母线长为 l ，根据条件得到 $\frac{1}{2}\pi l^2 = 2\pi$ ，解得母线长

$$l = 2, \quad 2\pi r = \pi l = 2\pi, r = 1 \text{ 所以该圆锥的体积为: } V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \sqrt{2^2 - 1^2} \pi = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi.$$

【点评】 本题主要考查空间几何体的体积公式和侧面展开图. 审清题意，所求的为体积，不是其他的量，分清图形在展开前后的变化；其次，对空间几何体的体积公式要记准记牢，属于中低档题.

9. 已知 $y = f(x) + x^2$ 是奇函数，且 $f(1) = 1$ ，若 $g(x) = f(x) + 2$ ，则 $g(-1) = \underline{\quad}$.

【答案】 -1

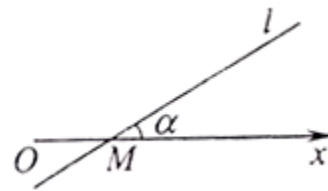
【解析】 因为函数 $y = f(x) + x^2$ 为奇函数，所以 $g(1) = f(1) + 2$ ，又 $f(1) = 1$ ，所以， $g(1) = 3$ ， $f(-1) = -3$ ， $g(-1) = f(-1) + 2 = -3 + 2 = -1$. $f(-1) = -f(1)$.

【点评】 本题主要考查函数的奇偶性. 在运用此性质解题时要注意：函数 $y = f(x)$ 为奇函数，所以有 $f(-x) = -f(x)$ 这个条件的运用，平时要加强这方面的训练，本题属于中档题，难度适中.

10. 如图，在极坐标系中，过点 $M(2,0)$ 的直线 l 与极轴的夹角 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ，

若将 l 的极坐标方程写成 $\rho = f(\theta)$ 的形式，则 $f(\theta) = \underline{\quad}$.

【答案】 $\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} - \theta)}$



【解析】 根据该直线过点 $M(2,0)$ ，可以直接写出代数形式的方程为： $y = \frac{1}{2}(x - 2)$ ，将此化成

极坐标系下的参数方程即可，化简得 $f(\theta) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} - \theta)}$.

【点评】 本题主要考查极坐标系，本部分为选学内容，几乎年年都有所涉及，题目类型以小题为主，复习时，注意掌握基本规律和基础知识即可. 对于不常见的曲线的参数方程不作要求. 本题属于中档题，难度适中.

11. 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人都选择其中两个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是 $\underline{\quad}$ （结果用最简分数表示）.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】一共有27种取法，其中有且只有两个人选择相同的项目的取法共有18种，所以根据古典概型得到此种情况下的概率为 $\frac{2}{3}$ 。

【点评】本题主要考查排列组合概率问题、古典概型.要分清基本事件数和基本事件总数.本题属于中档题.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 边 AB 、 AD 的长分别为2、1, 若 M 、 N 分别是边

BC 、 CD 上的点, 且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围是_____.

【答案】 $[2, 5]$

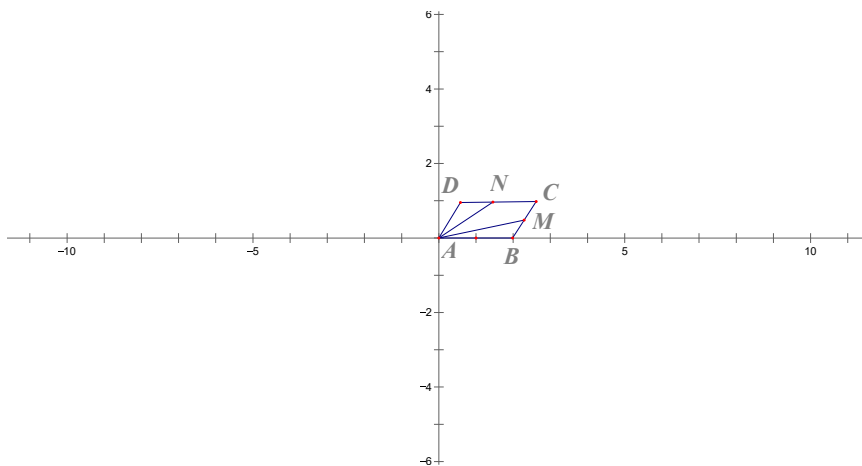
【解析】以向量 AB 所在直线为 x 轴, 以向量 AD 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系, 如图所

示, 因为 $AB = 2, AD = 1$, 所以 $A(0, 0), B(2, 0), C(\frac{5}{2}, 1), D(\frac{1}{2}, 1)$. 设

$N(x, 1) (\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2})$, 则 $BM = \frac{1}{2} CN$, $CN = \frac{5}{2} - x$, $BM = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x$, $M(2 + \frac{5}{8} - \frac{1}{4}x, (\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x)\sin \frac{\pi}{3})$.

根据题意, 有 $\overrightarrow{AN} = (x, 1), \overrightarrow{AM} = (\frac{21}{8} - \frac{x}{4}, \frac{5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x}{8})$.

所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = x(\frac{21}{8} - \frac{x}{4}) + \frac{5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x}{8} (\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2})$, 所以 $2 \leq \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \leq 5$.



【点评】本题主要考查平面向量的基本运算、概念、平面向量的数量积的运算律.做题时, 要切实注意条件的运用.本题属于中档题, 难度适中.

13. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象是折线段 ABC , 其中 $A(0,0)$ 、 $B(\frac{1}{2}, 5)$ 、 $C(1,0)$,

函数 $y = xf(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的图象与 x 轴围成的图形的面积为_____.

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】根据题意得到， $f(x) = \begin{cases} 10x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -10x + 10, \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ 从而得到

$$y = xf(x) = \begin{cases} 10x^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -10x^2 + 10x, \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{所以围成的面积为}$$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} 10x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-10x^2 + 10x) dx = \frac{5}{4}, \text{ 所以围成的图形的面积为 } \frac{5}{4}.$$

【点评】本题主要考查函数的图象与性质，函数的解析式的求解方法、定积分在求解平面图形中的运用. 突出体现数形结合思想，本题综合性较强，需要较强的分析问题和解决问题的能力，在以后的练习中加强这方面的训练，本题属于中高档试题，难度较大.

14. 如图， AD 与 BC 是四面体 $ABCD$ 中互相垂直的棱， $BC = 2$ ，若 $AD = 2c$ ，且 $AB + BD = AC + CD = 2a$ ，其中 a, c 为常数，则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是_____.

【答案】 $\frac{2}{3}c\sqrt{a^2 - c^2 - 1}$

【解析】据题 $AB + BD = AC + CD = 2a$ ，也就是说，线段 $AB + BD$ 与线段 $AC + CD$ 的长度是定值，因为棱 AD 与棱 BC 互相垂直，当 $BC \perp$ 平面 ABD 时，此时有最大值，此时最大值为： $\frac{2}{3}c\sqrt{a^2 - c^2 - 1}$.

【点评】本题主要考查空间四面体的体积公式、空间中点线面的关系. 本题主要考虑根据已知条件构造体积表达式，这是解决问题的关键，本题综合性强，运算量较大. 属于中高档试题.

二、选择题 (20分)

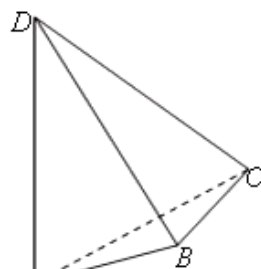
15. 若 $1 + \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一个复数根，则 ()

A. $b = 2, c = 3$ B. $b = -2, c = 3$ C. $b = -2, c = -1$ D. $b = 2, c = -1$

【答案】 B

【解析】根据实系数方程的根的特点 $1 - \sqrt{2}i$ 也是该方程的另一个根，所以

$1 + \sqrt{2}i + 1 - \sqrt{2}i = 2 = -b$ ，即 $b = -2$ ， $(1 - \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{2}i) = 3 = c$ ，故答案选择 B.



【点评】本题主要考查实系数方程的根的问题及其性质、复数的代数形式的四则运算，属于中档题，注重对基本知识和基本技巧的考查，复习时要特别注意。

16. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是（ ）

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不能确定

【答案】C

【解析】由正弦定理，得 $\frac{a}{2R} = \sin A, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2R} = \sin C$ ，代入得到 $a^2 + b^2 < c^2$ ，

由余弦定理的推理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$ ，所以C为钝角，所以该三角形为钝角三角形.故选

择C

【点评】本题主要考查正弦定理及其推理、余弦定理的运用.主要抓住所给式子的结构来选择定理，如果出现了角度的正弦值就选择正弦定理，如果出现角度的余弦值就选择余弦定理.本题属于中档题.

17. 设 $10 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 10^4$ ， $x_5 = 10^5$ ，随机变量 ξ_1 取值 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的概率

均为0.2，随机变量 ξ_2 取值 $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{x_4 + x_5}{2}, \frac{x_5 + x_1}{2}$ 的概率也均为0.2，

若记 $D\xi_1, D\xi_2$ 分别为 ξ_1, ξ_2 的方差，则（ ）

- A. $D\xi_1 > D\xi_2$ B. $D\xi_1 = D\xi_2$
C. $D\xi_1 < D\xi_2$ D. $D\xi_1$ 与 $D\xi_2$ 的大小关系与 x_1, x_2, x_3, x_4 的取值有关

【答案】A

【解析】由随机变量 ξ_1, ξ_2 的取值情况，它们的平均数分别为： $\bar{x}_1 = \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ ，

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{5} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \frac{x_4 + x_5}{2} + \frac{x_5 + x_1}{2} \right) = \bar{x}_1,$$

且随机变量 ξ_1, ξ_2 的概率都为0.2，所以有 $D\xi_1 > D\xi_2$. 故选择A.

【点评】本题主要考查离散型随机变量的期望和方差公式.记牢公式是解决此类问题的前提和基础，本题属于中档题.

18. 设 $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{25}$ ， $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，在 $S_1, S_2, \cdots, S_{100}$ 中，正数的个数是（ ）

- A. 25 B. 50 C. 75 D. 100

【答案】D

[解析] 对于 $1 \leq k \leq 25$, $a_k \geq 0$ (唯 $a_{25}=0$), 所以 S_k ($1 \leq k \leq 25$) 都为正数.

当 $26 \leq k \leq 49$ 时, 令 $\frac{\pi}{25} = \alpha$, 则 $\frac{k\pi}{25} = k\alpha$, 画出 $k\alpha$ 终边如右,

其终边两两关于 x 轴对称, 即有 $\sin k\alpha = -\sin(50-k\alpha)$,

所以 $S_k = \frac{1}{1}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{23}\sin 23\alpha + \frac{1}{24}\sin 24\alpha + 0$

$+ \frac{1}{26}\sin 26\alpha + \frac{1}{27}\sin 27\alpha + \frac{1}{k}\sin k\alpha$

$= \frac{1}{1}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + (\frac{1}{24} - \frac{1}{26})\sin 24\alpha + (\frac{1}{23} - \frac{1}{27})\sin 23\alpha +$

$+ (\frac{1}{50-k} - \frac{1}{k})\sin(50-k)\alpha$, 其中 $k=26, 27, \dots, 49$, 此时 $0 < 50-k < k$,

所以 $\frac{1}{50-k} - \frac{1}{k} > 0$, 又 $0 < (50-k)\alpha \leq 24\alpha < \pi$, 所以 $\sin(50-k)\alpha > 0$

从而当 $k=26, 27, \dots, 49$ 时, S_k 都是正数, $S_{50} = S_{49} + a_{50} = S_{49} + 0 = S_{49} > 0$.

对于 k 从 51 到 100 的情况同上可知 S_k 都是正数. 综上, 可选 D.

[评注]

本题中数列难于求和, 可通过数列中项的正、负匹配来分析 S_k 的符号, 为此, 需借助分类讨论、数形结合、先局部再整体等数学思想. 而重中之重, 是看清楚角序列的终边的对称性, 此为攻题之关键.

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 74 分)

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形,

$PA \perp$ 底面 $ABCD$, E 是 PC 的中点. 已知 $AB=2$,

$AD=2\sqrt{2}$, $PA=2$. 求:

(1) 三角形 PCD 的面积; (6 分)

(2) 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小. (6 分)

[解] (1) 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$, 又 $AD \perp CD$, 所以 $CD \perp$ 平面 PAD ,

从而 $CD \perp PD$.

.....3 分

因为 $PD = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$, $CD=2$,

所以三角形 PCD 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

(2) [解法一] 如图所示, 建立空间直角坐标系,

则 $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2\sqrt{2}, 0)$, $E(1, \sqrt{2}, 1)$,

$\overrightarrow{AE} = (1, \sqrt{2}, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2\sqrt{2}, 0)$8 分

设 \overrightarrow{AE} 与 \overrightarrow{BC} 的夹角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{4}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

由此可知, 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小是 $\frac{\pi}{4}$

[解法二] 取 PB 中点 F , 连接 EF 、 AF , 则

$EF \parallel BC$, 从而 $\angle AEF$ (或其补角) 是异面直线

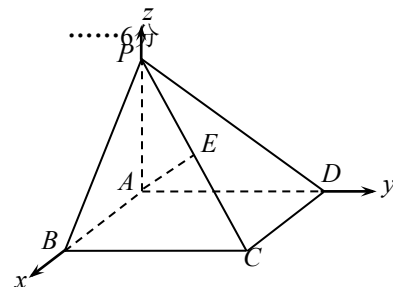
BC 与 AE 所成的角8 分

在 $\triangle AEF$ 中, 由 $EF = \sqrt{2}$ 、 $AF = \sqrt{2}$ 、 $AE = 2$

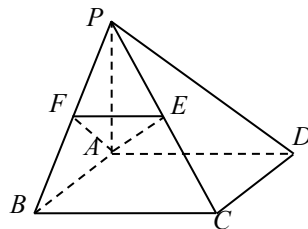
知 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形,

所以 $\angle AEF = \frac{\pi}{4}$.

因此异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小是 $\frac{\pi}{4}$



.....12 分



.....12 分

【点评】 本题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系, 考查空间想象能力和推理论证能力.

综合考查空间中两条异面直线所成的角的求解, 同时考查空间几何体的体积公式的运用. 本题源于

《必修 2》立体几何章节复习题, 复习时应注重课本, 容易出现找错角的情况, 要考虑全面, 考查

空间想象能力, 属于中档题.

20. 已知函数 $f(x) = \lg(x+1)$.

(1) 若 $0 < f(1-2x) - f(x) < 1$, 求 x 的取值范围; (6分)

(2) 若 $g(x)$ 是以2为周期的偶函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $g(x) = f(x)$, 求函数 $y = g(x)$ ($x \in [1, 2]$) 的反函数. (8分)

[解] (1) 由 $\begin{cases} 2-2x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$, 得 $-1 < x < 1$.

由 $0 < \lg(2-2x) - \lg(x+1) = \lg \frac{2-2x}{x+1} < 1$ 得 $1 < \frac{2-2x}{x+1} < 10$3分

因为 $x+1 > 0$, 所以 $x+1 < 2-2x < 10x+10$, $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$.

由 $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3} \end{cases}$ 得 $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$6分

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, $2-x \in [0, 1]$, 因此

$y = g(x) = g(x-2) = g(2-x) = f(2-x) = \lg(3-x)$10分

由单调性可得 $y \in [0, \lg 2]$.

因为 $x = 3 - 10^y$, 所以所求反函数是 $y = 3 - 10^x$, $x \in [0, \lg 2]$14分

【点评】 本题主要考查函数的概念、性质、分段函数等基础知识, 考查数形结合思想, 熟练掌握指数函数、对数函数、幂函数的图象与性质, 属于中档题.

21. 海事救援船对一艘失事船进行定位: 以失事船的当前位置为原点, 以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以1海里为单位长度), 则救援船恰在失事船的正南方向12海里 A 处, 如图. 现假设: ①失事船的移动路径可视为抛物线

$y = \frac{12}{49}x^2$; ②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援; ③救

援船出发 t 小时后, 失事船所在位置的横坐标为.

(1) 当 $t = 0.5$ 时, 写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合, 求救援船速度的大小和方向; (6分)

(2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船? (8分)

[解] (1) $t = 0.5$ 时, P 的横坐标 $x_P = 7t = \frac{7}{2}$, 代入抛物线方程 $y = \frac{12}{49}x^2$ 中, 得 P 的纵坐标 $y_P = 3$2分

由 $|AP| = \frac{\sqrt{949}}{2}$, 得救援船速度的大小为 $\sqrt{949}$ 海里/时.4分

由 $\tan \angle OAP = \frac{\frac{7}{2}}{3+12} = \frac{7}{30}$, 得 $\angle OAP = \arctan \frac{7}{30}$, 故救援船速度的方向为北偏东 $\arctan \frac{7}{30}$ 弧度.6分

(2) 设救援船的时速为 v 海里, 经过 t 小时追上失事船, 此时位置为 $(7t, 12t^2)$.

由 $vt = \sqrt{(7t)^2 + (12t^2 + 12)^2}$, 整理得 $v^2 = 144(t^2 + \frac{1}{t^2}) + 337$10分

因为 $t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 2$, 当且仅当 $t=1$ 时等号成立,

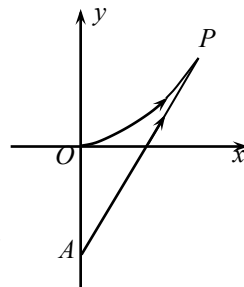
所以 $v^2 \geq 144 \times 2 + 337 = 25^2$, 即 $v \geq 25$.

因此, 救援船的时速至少是25海里才能追上失事船.14分

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C_1: 2x^2 - y^2 = 1$.

(1) 过 C_1 的左顶点引 C_1 的一条渐近线的平行线, 求该直线与另一条渐近线及 x 轴围成的三角形的面积; (4分)

(2) 设斜率为1的直线 l 交 C_1 于 P 、 Q 两点, 若 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 求证:



$OP \perp OQ$; (6分)

(3) 设椭圆 $C_2: 4x^2 + y^2 = 1$. 若 M 、 N 分别是 C_1 、 C_2 上的动点, 且 $OM \perp ON$, 求证: O 到直线 MN 的距离是定值. (6分)

[解] (1) 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - y^2 = 1$, 左顶点 $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, 渐近线方程: $y = \pm\sqrt{2}x$.

过点 A 与渐近线 $y = \sqrt{2}x$ 平行的直线方程为 $y = \sqrt{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$, 即 $y = \sqrt{2}x + 1$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ y = \sqrt{2}x + 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}. \quad \cdots \cdots 2 \text{分}$$

所以所求三角形的面积 $S = \frac{1}{2} |OA| |y| = \frac{\sqrt{2}}{8}$. \cdots \cdots 4 \text{分}

(2) 设直线 PQ 的方程是 $y = x + b$. 因直线与已知圆相切,

$$\text{故 } \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1, \text{ 即 } b^2 = 2. \quad \cdots \cdots 6 \text{分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = x + b \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - 2bx - b^2 - 1 = 0.$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2b \\ x_1 x_2 = -b^2 - 1 \end{cases}.$$

又2, 所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 = 2x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + b^2 \\ &= 2(-b^2 - 1) + b \cdot 2b + b^2 = b^2 - 2 = 0, \end{aligned}$$

故 $OP \perp OQ$.

\cdots \cdots 10 \text{分}

(3) 当直线 ON 垂直于 x 轴时,

$$|OM| = 1, |ON| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 则 } O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

当直线 ON 不垂直于 x 轴时,

设直线 ON 的方程为 $y = kx$ (显然 $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$), 则直线 OM 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4+k^2} \\ y^2 = \frac{k^2}{4+k^2} \end{cases}, \text{ 所以 } |ON|^2 = \frac{1+k^2}{4+k^2}.$$

$$\text{同理 } |OM|^2 = \frac{1+k^2}{2k^2-1}. \quad \cdots \cdots 13 \text{分}$$

设 O 到直线 MN 的距离为 d , 因为 $(|OM|^2 + |ON|^2)d^2 = |OM|^2 |ON|^2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{d^2} = \frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2} = \frac{3k^2+3}{k^2+1} = 3, \text{ 即 } d = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

综上, O 到直线 MN 的距离是定值.

\cdots \cdots 16 \text{分}

【点评】 本题主要考查双曲线的概念、标准方程、几何性质及其直线与双曲线的关系、椭圆的标准方程和圆的有关性质. 特别要注意直线与双曲线的关系问题, 在双曲线当中, 最特殊的为等轴双曲线, 它的离心率为 $\sqrt{2}$, 它的渐近线为 $y = \pm x$, 并且相互垂直, 这些性质的运用可以大大节省解题时间, 本题属于中档题.

23. 对于数集 $X = \{-1, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其中 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $n \geq 2$, 定义向量集

$Y = \{\vec{a} \mid \vec{a} = (s, t), s \in X, t \in X\}$. 若对于任意 $\vec{a}_1 \in Y$, 存在 $\vec{a}_2 \in Y$, 使得 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$, 则称 X 具有性质 P . 例如 $X = \{-1, 1, 2\}$ 具有性质 P .

(1) 若 $x > 2$, 且 $\{-1, 1, 2, x\}$, 求 x 的值; (4分)

(2) 若 X 具有性质 P , 求证: $1 \in X$, 且当 $x_n > 1$ 时, $x_1 = 1$; (6分)

(3) 若 X 具有性质 P , 且 $x_1 = 1$, $x_2 = q$ (q 为常数), 求有穷数列 x_1, x_2, \dots, x_n 的通项公式. (8分)

[解] (1) 选取 $\vec{a}_1 = (x, 2)$, Y 中与 \vec{a}_1 垂直的元素必有形式 $(-1, b)$2分

所以 $x = 2b$, 从而 $x = 4$4分

(2) 证明: 取 $\vec{a}_1 = (x_1, x_1) \in Y$. 设 $\vec{a}_2 = (s, t) \in Y$ 满足 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$.

由 $(s+t)x_1 = 0$ 得 $s+t=0$, 所以 s 、 t 异号.

因为 -1 是 X 中唯一的负数, 所以 s 、 t 中之一为 -1 , 另一为 1 ,

故 $1 \in X$7分

假设 $x_k = 1$, 其中 $1 < k < n$, 则 $0 < x_1 < 1 < x_n$.

选取 $\vec{a}_1 = (x_1, x_n) \in Y$, 并设 $\vec{a}_2 = (s, t) \in Y$ 满足 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$, 即 $sx_1 + tx_n = 0$,

则 s 、 t 异号, 从而 s 、 t 之中恰有一个为 -1 .

若 $s = -1$, 则 2 , 矛盾;

若 $t = -1$, 则 $x_n = sx_1 < s \leq x_n$, 矛盾.

所以 $x_1 = 1$10分

(3) [解法一] 猜测 $x_i = q^{i-1}$, $i=1, 2, \dots, n$12分

记 $A_k = \{-1, 1, x_2, \dots, x_k\}$, $k=2, 3, \dots, n$.

先证明: 若 A_{k+1} 具有性质 P , 则 A_k 也具有性质 P .

任取 $\vec{a}_1 = (s, t)$, $s, t \in A_k$. 当 s, t 中出现 -1 时, 显然有 \vec{a}_2 满足 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$;

当 $s \neq -1$ 且 $t \neq -1$ 时, $s, t \geq 1$.

因为 A_{k+1} 具有性质 P , 所以有 $\vec{a}_2 = (s_1, t_1)$, $s_1, t_1 \in A_{k+1}$, 使得 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$,

从而 s_1 和 t_1 中有一个是 -1 , 不妨设 $s_1 = -1$.

假设 $t_1 \in A_{k+1}$ 且 $t_1 \notin A_k$, 则 $t_1 = x_{k+1}$. 由 $(s, t) \cdot (-1, x_{k+1}) = 0$, 得 $s = tx_{k+1} \geq x_{k+1}$, 与

$s \in A_k$ 矛盾. 所以 $t_1 \in A_k$. 从而 A_k 也具有性质 P15分

现用数学归纳法证明: $x_i = q^{i-1}$, $i=1, 2, \dots, n$.

当 $n=2$ 时, 结论显然成立;

假设 $n=k$ 时, $A_k = \{-1, 1, x_2, \dots, x_k\}$ 有性质 P , 则 $x_i = q^{i-1}$, $i=1, 2, \dots, k$;

当 $n=k+1$ 时, 若 $A_{k+1} = \{-1, 1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ 有性质 P , 则 $A_k = \{-1, 1, x_2, \dots, x_k\}$

也有性质 P , 所以 $A_{k+1} = \{-1, 1, q, \dots, q^{k-1}, x_{k+1}\}$.

取 $\vec{a}_1 = (x_{k+1}, q)$, 并设 $\vec{a}_2 = (s, t)$ 满足 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$, 即 $x_{k+1}s + qt = 0$. 由此可得 s 与 t 中有且只有一个为 -1 .

若 $t = -1$, 则 1 , 不可能;

所以 $s = -1$, $x_{k+1} = qt \leq q \cdot q^{k-1} = q^k$, 又 $x_{k+1} > q^{k-1}$, 所以 $x_{k+1} = q^k$.

综上所述, $x_i = q^{i-1}$, $i=1, 2, \dots, n$18分

[解法二] 设 $\vec{a}_1 = (s_1, t_1)$, $\vec{a}_2 = (s_2, t_2)$, 则 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ 等价于 $\frac{s_1}{t_1} = -\frac{t_2}{s_2}$.

记 $B = \{\frac{s}{t} | s \in X, t \in X, |s| > |t|\}$, 则数集 X 具有性质 P 当且仅当数集 B 关于

原点对称.

……14分

注意到 -1 是 X 中的唯一负数, $B \cap (-\infty, 0) = \{-x_2, -x_3, \dots, -x_n\}$ 共有 $n-1$ 个数,

所以 $B \cap (0, +\infty)$ 也只有 $n-1$ 个数.

由于 $\frac{x_n}{x_{n-1}} < \frac{x_n}{x_{n-2}} < \dots < \frac{x_n}{x_2} < \frac{x_n}{x_1}$, 已有 $n-1$ 个数, 对以下三角数阵

$$\begin{array}{c} \frac{x_n}{x_{n-1}} < \frac{x_n}{x_{n-2}} < \dots < \frac{x_n}{x_2} < \frac{x_n}{x_1} \\ \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} < \frac{x_{n-1}}{x_{n-3}} < \dots < \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{x_2}{x_1} \end{array}$$

注意到 $\frac{x_n}{x_1} > \frac{x_{n-1}}{x_1} > \dots > \frac{x_2}{x_1}$, 所以 $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \dots = \frac{x_2}{x_1}$, 从而数列的通项公式为

$$x_k = x_1 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{k-1} = q^{k-1}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad \dots\dots 18分$$

【点评】 本题主要考查数集、集合的基本性质、元素与集合的关系等基础知识, 本题属于信息给予题, 通过定义“ X 具有性质 P ”这一概念, 考查考生分析探究及推理论证的能力. 综合考查集合的基本运算, 集合问题一直是近几年的命题重点内容, 应引起足够的重视.