

2008 年普通高等学校招生全国统一考试(四川卷)

理科数学(非延考卷)

说明: 2008 年是四川省高考自主命题的第三年, 因突遭特大地震灾害, 四川六市州 40 县延考, 本卷为非延考卷.

一、选择题: (5'×12=60')

1. 若集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $C_U(A \cap B) =$ ()

- A. $\{2, 3\}$ B. $\{1, 4, 5\}$ C. $\{4, 5\}$ D. $\{1, 5\}$

2. 复数 $2i(1+i)^2 =$ ()

- A. -4 B. 4 C. $-4i$ D. $4i$

3. $(\tan x + \cot x) \cos^2 x =$ ()

- A. $\tan x$ B. $\sin x$ C. $\cos x$ D. $\cot x$

4. 直线 $y = 3x$ 绕原点逆时针旋转 90° , 再向右平移 1 个单位后所得的直线为 ()

- A. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ B. $y = -\frac{1}{3}x + 1$ C. $y = 3x - 3$ D. $y = \frac{1}{3}x + 1$

5. 若 $0 \leq \alpha < 2\pi$, $\sin \alpha > \sqrt{3} \cos \alpha$, 则 α 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ C. $(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ D. $(\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$

6. 从包括甲、乙共 10 人中选 4 人去参加公益活动, 要求甲、乙至少有 1 人参加, 则不同的选法有 ()

- A. 70 B. 112 C. 140 D. 168

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, 则该数列前三项和 S_3 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ C. D. $[3, +\infty)$

D. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

8. 设 M 、 N 是球 O 的半径 OP 上的两点, 且 $NP = MN = OM$, 分别过 N 、 M 、 O 作垂直于 OP 的面截球得三个圆, 则这三个圆的面积之比为 ()

- A. 3: 5: 6 B. 3: 6: 8 C. 5: 7: 9 D. 5: 8: 9

9. 设直线 $l \subset$ 平面 α , 过平面 α 外一点 A 且与 l 、 α 都成 30° 角的直线有且只有 ()

- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

10. 设 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\varphi > 0$, 则函数 $f(x)$ 是偶函数的充分必要条件是

()

- A. $f(0)=0$ B. $f(0)=1$ C. $f'(0)=1$ D. $f'(0)=0$

11. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) \cdot f(x+2)=13$, $f(1)=2$, 则 $f(99)=$ ()

- A. 13 B. 2 C. $\frac{13}{2}$ D. $\frac{2}{13}$

12. 设抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点为 F , 准线与 x 轴相交于点 K , 点 A 在 C 上且

$|AK|=\sqrt{2}|AF|$, 则 $\triangle AFK$ 的面积为 ()

- A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

二、填空题: (4'×4=16')

13. $(1+2x)^3(1-x)^4$ 的展开式中 x^2 项的系数是_____

14. 已知直线 $l: x-y+6=0$, 圆 $C: (x-1)^2+(y-1)^2=2$, 则圆 C 上各点到直线 l 的距离的最小值是_____

15. 已知正四棱柱的一条对角线长为 $\sqrt{6}$, 且与底面所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则该正四棱柱的体积是_____.

16. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_4 \geq 10$, $S_5 \leq 15$, 则 a_4 的最大值是_____.

三、解答题: (12'+12'+12'+12'+12'+14'=76') 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 求函数 $y=7-4\sin x \cos x+4\cos^2 x-4\cos^4 x$ 的最大值和最小值.

18. 设进入某商场的每一位顾客购买甲商品的概率 0.5, 购买乙商品的概率为 0.6, 且顾客购买甲商品与购买乙商品相互独立, 每位顾客间购买商品也相互独立.

(I) 求进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种的概率;

(II) 求进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种的概率;

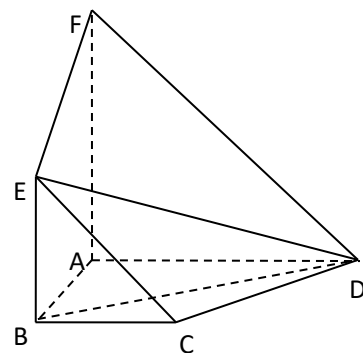
(III) 设 ξ 是进入商场的 3 位顾客至少购买甲、乙商品中一种的人数, 求 ξ 的分布列及期望.

19. 如图，面 $ABEF \perp$ 面 $ABCD$ ，四边形 $ABEF$ 与 $ABCD$ 都是直角梯形，

$$\angle BAD = \angle BAF = 90^\circ, \quad BC \parallel \frac{1}{2}AD, \quad BE \parallel \frac{1}{2}AF.$$

(I) 求证： $C、D、E、F$ 四点共面；

(II) 若 $BA = BC = BE$ ，求二面角 $A-ED-B$ 的大小.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $ba_n - 2^n = (b-1)S_n$.

(I) 当 $b=2$ 时, 求证: $\{a_n - n \cdot 2^{n-1}\}$ 是等比数列;

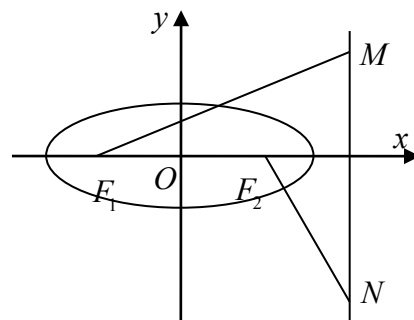
(II) 求 a_n 通项公式.

21. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1 、 F_2 ，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

右准线 l 上的两动点 M 、 N ，且 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$ 。

(I) 若 $|\overrightarrow{F_1M}| = |\overrightarrow{F_2N}| = 2\sqrt{5}$ ，求 a 、 b 的值；

(II) 当 $|\overrightarrow{MN}|$ 最小时，求证 $\overrightarrow{F_1M} + \overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线。



22. 已知 $x=3$ 是函数 $f(x)=a\ln(1+x)+x^2-10x$ 的一个极值点.

(I) 求 a 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 当直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像有 3 个交点, 求 b 的取值范围.

2008 年普通高等学校招生全国统一考试(四川卷)

理科数学

说明：2008 年是四川省高考自主命题的第三年，因突遭特大地震灾害，四川六市州 40 县延考，本卷为非延考卷。

一、选择题：（5'×12=60'）

1、解析：选 B. 离散型集合的交并补，送分题. 难度为三年来最低，究其原因，盖汶川地震之故.

2、解析：选 A. 计算题，无任何陷阱，徒送分耳. 2008 四川考生因祸得福.

3、解析：

原式

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cos^2 x = \sin x \cos x + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x \cos x + \cos^3 x}{\sin x} = \frac{\cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x,$$

选 D. 同角三角函数基本关系式，切化弦技巧等，属三角恒等变换范畴，辅以常规的代数变形. 中等生无忧.

4、解析：本题有新意，审题是关键.

旋转 90° 则与原直线垂直，故旋转后斜率为 $-\frac{1}{3}$. 再右移 1 得 $y = -\frac{1}{3}(x-1)$. 选

A.

本题一考两直线垂直的充要条件，二考平移法则. 辅以平几背景之旋转变换.

5、解析： $\sin \alpha > \sqrt{3} \cos \alpha$ ，即 $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha > 0$ ，即 $2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) > 0$ ，即

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) > 0;$$

$$\text{又由 } 0 \leq \alpha < 2\pi, \text{ 得 } -\frac{\pi}{3} \leq \alpha - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3};$$

综上， $0 \leq \alpha - \frac{\pi}{3} < \pi$ ，即 $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{4\pi}{3}$. 选 C. 本题考到了正弦函数的正负

区间.

除三角函数的定义域、值域和最值、单调性、奇偶性、周期性之外,还要记对称轴、对称中心、正负区间.

3, 4, 5 题是本卷第一个坡, 是中差生需消耗时间的地方.

6、解析: 审题后针对题目中的至少二字, 首选排除法. $C_{10}^4 - C_8^4 = 210 - 70 = 140$. 选 C. 本题应注意解题策略.

7、解析: $S_3 = x + 1 + \frac{1}{x} (x \neq 0)$. 由双勾函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象知, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 或 $x + \frac{1}{x} \leq -2$, 故本题选 D. 本题主要考查等比数列的相关概念和双勾函数的图象和性质. 以上诸题, 基本功扎实的同学耗时不多.

8、解析: 由题知, M 、 N 是 OP 的三等分点, 三个圆的面积之比即为半径的平方之比. 在球的轴载面图中易求得:

$R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8R^2}{9}$, $R^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{5R^2}{9}$, 故三个圆的半径的平方之比为:

$R^2 : \frac{8}{9}R^2 : \frac{5}{9}R^2$, 故本题选 D. 本题着重考查空间想象能力.

9、解析: 所求直线在平面 α 内的射影必与直线 l 平行, 这样的直线只有两条, 选 B. 本题考查空间角的概念和空间想象能力.

10、解析: 本题考查理性思维和综合推理能力. 函数 $f(x)$ 是偶函数, 则

$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f(0) = \pm 1$, 故排除 A, B.

又 $f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi)$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f'(0) = 0$. 选 D. 此为一般化思路. 也可

走特殊化思路, 取 $\omega = 1$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 验证.

11、解析: 由 $f(x) \cdot f(x+2) = 13$, 知 $f(x+2) \cdot f(x+4) = 13$, 所以 $f(x+4) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是周期函数,

周期为 4. 所以 $f(99) = f(3 + 4 \times 24) = f(3) = \frac{13}{f(1)} = \frac{13}{2}$. 选 C. 题着重考查抽象函

数的性质. 赋值、迭代、构造是解抽象函数问题不可或缺的三招. 本题看似艰深, 实为抽象函数问题中的常规题型, 优生要笑了.

12、解析: 解几常规题压轴, 不怕. 边读题边画图. $y^2 = 8x$ 的焦点 $F(2,0)$, 准线 $x = -2$, $K(-2,0)$. 设 $A(x,y)$, 由 $|AK| = \sqrt{2}|AF|$, 得 $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, 即 $(x+2)^2 + y^2 = 2[(x-2)^2 + y^2]$. 化简得:

$y^2 = -x^2 + 12x - 4$, 与 $y^2 = 8x$ 联立求解, 解得: $x = 2$,

$y = \pm 4$. $S_{\triangle AFK} = \frac{1}{2} \cdot |FK| \cdot |y_A| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$, 选 B.

本题的难度仅体现在对运算的准确性和快捷性上.

二、填空题: (4×4=16')

13、答案: -6.

解析: 二项式定理再现, 难度高于文科.

$$(1+2x)^3(1-x)^4 = (1+C_3^1 \cdot 2x + C_3^2 \cdot 4x^2 + \cdots)(1-C_4^1x + C_4^2x^2 + \cdots)$$

x^2 项的系数是 $C_4^2 - 2C_3^1C_4^1 + 4C_3^2 = 6 - 24 + 12 = -6$. 这是中档略偏难的常规题. 中差生在准确性和快捷性上有缺陷.

14、答案: $2\sqrt{2}$.

解析: 由数想形, 所求最小值 = 圆心到直线的距离 - 圆的半径. 圆心 $(1,1)$ 到直

线 $x - y + 6 = 0$ 的距离 $d = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$. 故最小值为 $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

15、答案: 2.

解析: 由题意,
$$\begin{cases} a^2 + a^2 + h^2 = 6 \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ h = 2 \end{cases}, \Rightarrow V = a^2h = 2$$

16、答案: 4.

解析: 由题意,
$$\begin{cases} 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d \geq 10 \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d \leq 15 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 4a_1 + 6d \geq 10 \\ 5a_1 + 10d \leq 15 \end{cases}, \begin{cases} 2a_1 + 3d \geq 5 \\ a_1 + 2d \leq 3 \end{cases},$$

$$a_4 = a_1 + 3d.$$

这是加了包装的线性规划，有意思．建立平面直角坐标系 a_1od ，画出可行

域 $\begin{cases} 2a_1 + 3d \geq 5 \\ a_1 + 2d \leq 3 \end{cases}$ （图略），画出目标函数即直线 $a_4 = a_1 + 3d$ ，由图知，当直线

$a_4 = a_1 + 3d$ 过可行域内 $(1,1)$ 点时截距最大，此时目标函数取最大值 $a_4 = 4$ ．本题明为数列，实为线性规划，着力考查了转化化归和数形结合思想．掌握线性规划问题“画一移一求一答”四步曲，理解线性规划解题程序的实质是根本．这是本题的命题意图．

因约束条件只有两个，本题也可走不等式路线．设

$$a_1 + 3d = \lambda_1(2a_1 + 3d) + \lambda_2(a_1 + 2d), \text{ 由 } \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}, \therefore$$

$$a_1 + 3d = -(2a_1 + 3d) + 3(a_1 + 2d), \text{ 由不等式的性质得: } \begin{cases} 2a_1 + 3d \geq 5 \\ a_1 + 2d \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(2a_1 + 3d) \leq -5 \\ 3(a_1 + 2d) \leq 9 \end{cases} \Rightarrow -(2a_1 + 3d) + 3(a_1 + 2d) \leq 4, \text{ 即 } a_4 = a_1 + 3d \leq 4, a_4 \text{ 的最大值是 } 4.$$

从解题效率来看，不等式路线为佳，尽管命题者的意图为线性规划路线．本题解题策略的选择至关重要．

三、解答题：（ $12'+12'+12'+12'+12'+14'=76'$ ）解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17、解析： $y = 7 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$

$$= 8 - 4\sin x \cos x - 1 + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$$

$$= 8 - 4\sin x \cos x - (1 - 2\cos^2 x)^2$$

$$= 8 - 2\sin 2x - \cos^2 2x$$

$$= 8 - 2\sin 2x - (1 - \sin^2 2x)$$

$$= 7 - 2\sin 2x + \sin^2 2x$$

$$= 6 + (1 - \sin 2x)^2$$

$$y_{\max} = 10, \quad y_{\min} = 6.$$

解析： $y = 7 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$

$$= 7 - 2 \sin 2x + 4 \cos^2 x (1 - \cos^2 x)$$

$$= 7 - 2 \sin 2x + 4 \cos^2 x \sin^2 x$$

$$= 7 - 2 \sin 2x + \sin^2 2x$$

$$= 6 + (1 - \sin 2x)^2$$

$$y_{\max} = 10, \quad y_{\min} = 6.$$

18、解析：题目这么容易，估计今年的评分标准要偏严了.

$$(I) \quad P = 0.5 \times (1 - 0.6) + (1 - 0.5) \times 0.6 = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

$$(II) \quad P = 1 - (1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.8$$

(III) ξ 可取 0, 1, 2, 3.

$$P(\xi = 0) = C_3^0 \times (1 - 0.8)^3 = 0.008$$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 \times (1 - 0.8)^2 \times 0.8 = 0.096$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \times (1 - 0.8) \times 0.8^2 = 0.384 \quad P(\xi = 3) = C_3^3 \times 0.8^3 = 0.512$$

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.008	0.096	0.384	0.512

$$\xi \sim B(3, 0.8)$$

$$E\xi = 3 \times 0.8 = 2.4.$$

19、解析：不是会不会的问题，而是熟不熟的问题，答题时间是最大问题.

(I) \because 面 $ABEF \perp$ 面 $ABCD$, $AF \perp AB = 90^\circ$

$\therefore AF \perp$ 面 $ABCD$.

\therefore 以 A 为原点，以 AB , AD , AF 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

不妨设 $AB = a$, $AD = 2b$, $AF = 2c$, 则

$$A(0,0,0), B(a,0,0), C(a,b,0), D(0,2b,0), E(a,0,c), F(0,0,2c).$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = (0, -2b, 2c), \overrightarrow{CE} = (0, -b, c), \therefore \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{CE},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} \parallel \overrightarrow{CE},$$

$$\because E \notin DF, \therefore DF \parallel CE,$$

$$\therefore C、D、E、F \text{ 四点共面.}$$

$$(II) \text{ 设 } AB = 1, \text{ 则 } BC = BE = 1, \therefore B(1,0,0), D(0,2,0), E(1,0,1).$$

设平面 AED 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 + z_1 = 0 \\ 2y_1 = 0 \end{cases}, \vec{n}_1 = (1, 0, -1)$$

设平面 BED 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} z_2 = 0 \\ -x_2 + 2y_2 = 0 \end{cases}, \vec{n}_2 = (2, 1, 0)$$

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

由图知, 二面角 $A-ED-B$ 为锐角, \therefore 其大小为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$.

20、解析: 由题意, 在 $ba_n - 2^n = (b-1)S_n$ 中, 令 $n=1$, 得 $ba_1 - 2 = (b-1)a_1$, $a_1 = 2$.

$$\text{由 } ba_n - 2^n = (b-1)S_n$$

$$\text{得 } ba_{n-1} - 2^{n-1} = (b-1)S_{n-1} \quad (n \geq 2, n \in N^*)$$

$$\text{两式相减得: } b(a_n - a_{n-1}) - 2^{n-1} = (b-1)a_n$$

$$\text{即 } a_n = ba_{n-1} + 2^{n-1} \quad (n \geq 2, n \in N^*) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$(I) \text{ 当 } b=2 \text{ 时, 由 } \textcircled{1} \text{ 知, } a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$\text{于是 } a_n - n \cdot 2^{n-1} = 2a_{n-1} - (n-1) \cdot 2^{n-1}$$

$$= 2[a_{n-1} - (n-1) \cdot 2^{n-2}] \quad (n \geq 2, n \in N^*)$$

又 $a_1 - 1 \cdot 2^{1-1} = 1 \neq 0$ ，所以 $\{a_n - n \cdot 2^{n-1}\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列。

(I) 变：当 $b=2$ 时，求 a_n 的通项公式。解法如下：

解：当 $b=2$ 时，由①知， $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$

两边同时除以 2^n 得 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2, n \in N^*)$

$$\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \quad (n \geq 2, n \in N^*)$$

$\therefore \{\frac{a_n}{2^n}\}$ 是等差数列，公差为 $\frac{1}{2}$ ，首项为 $\frac{a_1}{2} = 1$

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+1)$$

$\therefore a_n = (n+1)2^{n-1} \quad (\because a_n - n \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}, \therefore \{a_n - n \cdot 2^{n-1}\}$ 是等比数列，

首项为 1，公比为 2)

(II) 当 $b=2$ 时，由 (I) 知， $a_n - n \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ ，即 $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-1}$

当 $b \neq 2$ 时，由①： $a_n = ba_{n-1} + 2^{n-1}$

两边同时除以 2^n 得 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}$

$$\text{可设 } \frac{a_n}{2^n} + \lambda = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \lambda \right) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

展开②得 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{b-2}{2} \cdot \lambda$ ，与 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}$ 比较，

$$\text{得 } \frac{b-2}{2} \cdot \lambda = \frac{1}{2}, \therefore \lambda = \frac{1}{b-2}.$$

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{b-2} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{b-2} \right)$$

$\therefore \left\{ \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{b-2} \right\}$ 是等比数列，公比为 $\frac{b}{2}$ ，首项为

$$1 + \frac{1}{b-2} = \frac{b-1}{b-2}$$

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{b-2} = \frac{b-1}{b-2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} = \frac{b-1}{b-2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{b-2}$$

$$\therefore a_n = 2^n \left[\frac{b-1}{b-2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{b-2} \right] = \frac{2(b-1)b^{n-1} - 2^n}{b-2}$$

21、解析：数列和解几位列倒数第三和第二，意料之中。开始挤牙膏吧。

(I) 由已知， $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ 。由 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore a^2 = 2c^2$ 。

又 $a^2 = b^2 + c^2$ ， $\therefore b^2 = c^2$ ， $a^2 = 2b^2$ 。

$\therefore l: x = \frac{a^2}{c} = \frac{2c^2}{c} = 2c$ ， $M(2c, y_1)$ ， $N(2c, y_2)$ 。

延长 NF_2 交 MF_1 于 P ，记右准线 l 交 x 轴于 Q 。

$\therefore \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$ ， $\therefore \overrightarrow{F_1M} \perp \overrightarrow{F_2N}$ 。 $F_1M \perp F_2N$

由平几知识易证 $Rt\Delta MQF_1 \cong Rt\Delta F_2QN$

$\therefore |QN| = |F_1Q| = 3c$ ， $|QM| = |F_2Q| = c$

即 $|y_1| = c$ ， $|y_2| = 3c$ 。

$\therefore |\overrightarrow{F_1M}| = |\overrightarrow{F_2N}| = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore 9c^2 + c^2 = 20$ ， $c^2 = 2$ ， $b^2 = 2$ ， $a^2 = 4$ 。

$\therefore a = 2$ ， $b = \sqrt{2}$ 。

(I) 另解： $\therefore \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$ ， $\therefore (3c, y_1) \cdot (c, y_2) = 0$ ， $y_1 y_2 = -3c^2 < 0$ 。

又 $|\overrightarrow{F_1M}| = |\overrightarrow{F_2N}| = 2\sqrt{5}$

$$\text{联立} \begin{cases} y_1 y_2 = -3c^2 \\ 9c^2 + y_1^2 = 20 \\ c^2 + y_2^2 = 20 \end{cases}, \text{消去 } y_1, y_2 \text{ 得: } (20 - 9c^2)(20 - c^2) = 9c^2,$$

整理得: $9c^4 - 209c^2 + 400 = 0$, $(c^2 - 2)(9c^2 - 200) = 0$. 解得 $c^2 = 2$. 但解此方程组要考倒不少人.

$$(II) \because \overrightarrow{F_1 M} \cdot \overrightarrow{F_2 N} = (3c, y_1) \cdot (c, y_2) = 0, \therefore y_1 y_2 = -3c^2 < 0.$$

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = |y_1 - y_2|^2 = y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 \geq -2y_1 y_2 - 2y_1 y_2 = -4y_1 y_2 = 12c^2.$$

当且仅当 $y_1 = -y_2 = \sqrt{3}c$ 或 $y_2 = -y_1 = \sqrt{3}c$ 时, 取等号. 此时 $|\overrightarrow{MN}|$ 取最小值 $2\sqrt{3}c$.

$$\text{此时 } \overrightarrow{F_1 M} + \overrightarrow{F_2 N} = (3c, \pm\sqrt{3}c) + (c, \mp\sqrt{3}c) = (4c, 0) = 2\overrightarrow{F_1 F_2}.$$

$$\therefore \overrightarrow{F_1 M} + \overrightarrow{F_2 N} \text{ 与 } \overrightarrow{F_1 F_2} \text{ 共线.}$$

$$(II) \text{ 另解: } \because \overrightarrow{F_1 M} \cdot \overrightarrow{F_2 N} = 0, \therefore (3c, y_1) \cdot (c, y_2) = 0, y_1 y_2 = -3c^2.$$

设 MF_1 , NF_2 的斜率分别为 k , $-\frac{1}{k}$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x + c) \\ x = 2c \end{cases} \Rightarrow y_1 = 3kc, \text{ 由 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}(x - c) \\ x = 2c \end{cases} \Rightarrow y_2 = -\frac{c}{k}$$

$$|\overrightarrow{MN}| = |y_1 - y_2| = c \cdot \left| 3k + \frac{1}{k} \right| \geq 2\sqrt{3}c. \text{ 当且仅当 } 3k = \frac{1}{k} \text{ 即 } k^2 = \frac{1}{3}, k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时}$$

取等号.

$$\text{即当 } |\overrightarrow{MN}| \text{ 最小时, } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

此

时

$$\overrightarrow{F_1 M} + \overrightarrow{F_2 N} = (3c, 3kc) + (c, -\frac{c}{k}) = (3c, \pm\sqrt{3}c) + (c, \mp\sqrt{3}c) = (4c, 0) = 2\overrightarrow{F_1 F_2}.$$

$$\therefore \overrightarrow{F_1 M} + \overrightarrow{F_2 N} \text{ 与 } \overrightarrow{F_1 F_2} \text{ 共线.}$$

22、解析: 似曾相识. 通览后三题, 找感觉, 先熟后生, 先易后难, 分步得

分. 本卷后三难中, 压轴题最熟最易入手.

$$(I) \quad f(x) = a \ln(1+x) + x^2 - 10x$$

$$f'(x) = \frac{a}{1+x} + 2x - 10$$

$x=3$ 是函数 $f(x) = a \ln(1+x) + x^2 - 10x$ 的一个极值点.

$$f'(3) = \frac{a}{4} - 4 = 0$$

$$a = 16$$

$$(II) \quad \text{由 (I) } f(x) = 16 \ln(1+x) + x^2 - 10x, \quad x \in (-1, +\infty).$$

$$f'(x) = \frac{16}{1+x} + 2x - 10 = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x+1} = \frac{2(x-1)(x-3)}{x+1}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x=1$, $x=3$.

$f'(x)$ 和 $f(x)$ 随 x 的变化情况如下:

x	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

$f(x)$ 的增区间是 $(-1, 1)$, $(3, +\infty)$; 减区间是 $(1, 3)$.

(III) 由 (II) 知, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减.

$$\therefore f(x)_{\text{极大}} = f(1) = 16 \ln 2 - 9, \quad f(x)_{\text{极小}} = f(3) = 32 \ln 2 - 21.$$

又 $x \rightarrow -1^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$;

可据此画出函数 $y = f(x)$ 的草图 (图略), 由图可知,

当直线 $y = b$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像有 3 个交点时, b 的取值范围为 $(32 \ln 2 - 21, 16 \ln 2 - 9)$.