2019年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）数学

参考公式：

若事件 A,B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 若事件 A,B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$ 若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 台体的体积公式 其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高	柱体的体积公式 $V=Sh$ 其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高 锥体的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ 其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高 球的表面积公式 $S=4\pi R^2$ 球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 其中 R 表示球的半径

选择题部分（共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知全集 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则（$\complement_U A$）$\cap B$=（　　）

A. $\{-1\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{-1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,3\}$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题借根据交集、补集的定义可得.容易题，注重了基础知识、基本计算能力的考查.

【详解】$C_U A=\{-1,3\}$，则 $(C_U A)\cap B=\{-1\}$

【点睛】易于理解集补集的概念、交集概念有误.

2.渐近线方程为 $x\pm y=0$ 的双曲线的离心率是（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】

本题根据双曲线的渐近线方程可求得$a=b=1$，进一步可得离心率.容易题，注重了双曲线基础知识、基本计算能力的考查.

【详解】因为双曲线的渐近线为$x\pm y=0$，所以a=b=1，则$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$，双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

【点睛】理解概念，准确计算，是解答此类问题的基本要求.部分考生易出现理解性错误.

3.若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x-3y+4\geq 0\\3x-y-4\leq 0\\x+y\geq 0\end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值是（　）

A. -1

B. 1

C. 10

D. 12

【答案】C

【解析】

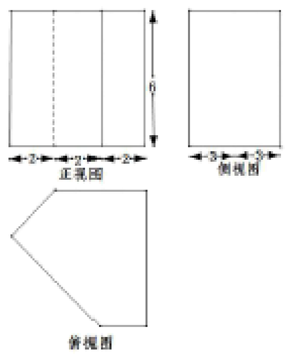
【分析】

本题是简单线性规划问题的基本题型，根据“画、移、解”等步骤可得解.题目难度不大题，注重了基础知识、基本技能的考查.

【详解】在平面直角坐标系内画出题中的不等式组表示的平面区域为以$(-1,1),(1,-1),(2,2)$为顶点的三角形区域（包含边界），由图易得当目标函数z=3x+2y经过平面区域的点$(2,2)$时，z=3x+2y取最大值$z_{\max}=3\times 2+2\times 2=10$.

【点睛】解答此类问题，要求作图要准确，观察要仔细.往往由于由于作图欠准确而影响答案的准确程度，也有可能在解方程组的过程中出错.

4.祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家.他提出的“幂势既同，则积不容易”称为祖暅原理，利用该原理可以得到柱体体积公式$V_{柱体}=Sh$，其中S是柱体的底面积，是柱体的高，若某柱体的三视图如图所示，则该柱体的体积是（　）



A. 158　　　　B. 162

C. 182　　　　D. 32

【答案】B

【解析】

【分析】

本题首先根据三视图，还原得到几何体—棱柱，根据题目给定的数据，计算几何体的体积.常规题目.难度不大，注重了基础知识、视图用图能力、基本计算能力的考查.

【详解】由三视图得该棱柱的高为6，底面可以看作是由两个直角梯形组合而成的，其中一个上底为4，下底为6，高为3，另一个的上底为2，下底为6，高为3，则该棱柱的体积为$\left(\frac{2+6}{2}\times 3+\frac{4+6}{2}\times 3\right)\times 6=162$.

【点睛】易错点有二，一是不能正确还原几何体；二是计算体积有误.为避免出错，应注重多观察、细心算.

5.若$a>0,b>0$，则“$a+b\le 4$”是“$ab\le 4$”的（　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

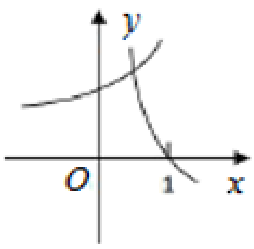
【分析】

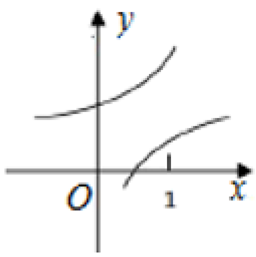
本题根据基本不等式，结合选项，判断得出充分性成立，利用“特殊值法”，通过特取ab的值，推出矛盾，确定必要性不成立.题目有一定难度，注重重要知识、基础知识、逻辑推理能力的考查.

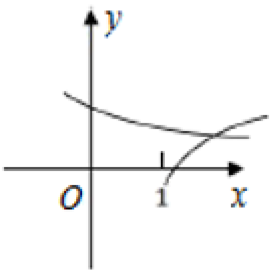
【详解】当$a>0, b>0$时，$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，则当$a+b\le 4$时，有$2\sqrt{ab}\le a+b\le 4$，解得$ab\le 4$，充分性成立；当$a=1, b=4$时，满足$ab\le 4$，但此时$a+b=5>4$，必要性不成立，综上所述，“$a+b\le 4$”是“$ab\le 4$”的充分不必要条件.

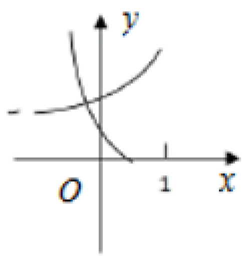
【点睛】易出现的错误有，一是基本不等式掌握不熟，导致判断失误；二是不能灵活的应用“赋值法”，通过特取a,b的值，从假设情况下推出合理结果或矛盾结果.

6.在同一直角坐标系中，函数$y=\dfrac{1}{a^x}, y=\log_a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$$(a>0$且$a\ne 0)$的图象可能是（   ）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【分析】

本题通过讨论a的不同取值情况，分别讨论本题指数函数、对数函数的图象和，结合选项，判断得出正确结论.题目不难，注重重要知识、基础知识、逻辑推理能力的考查.

【详解】当$0<a<1$时，函数$y=a^x$过定点$(0,1)$且单调递减，则函数$y=\dfrac{1}{a^x}$过定点$(0,1)$且单调递增，函数$y=\log_a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$过定点$(\dfrac{1}{2},0)$且单调递减，D选项符合；当$a>1$时，函数$y=a^x$过定点$(0,1)$且单调递

增，则函数 $y=\frac{1}{a^x}$ 过定点 $(0,1)$ 且单调递减，函数 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 过定点 $(\frac{1}{2},0)$ 且单调递增，各选项均不符合.综上，选 D.

【点睛】易出现的错误有，一是指数函数、对数函数的图象和性质掌握不熟，导致判断失误；二是不能通过讨论 a 的不同取值范围，认识函数的单调性.

7.设 $0<a<1$，则随机变量 X 的分布列是：

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0,1)$ 内增大时（ ）

A. $D(X)$ 增大

B. $D(X)$ 减小

C. $D(X)$ 先增大后减小

D. $D(X)$ 先减小后增大

【答案】D

【解析】

【分析】

研究方差随 a 变化的增大或减小规律，常用方法就是将方差用参数 a 表示，应用函数知识求解.本题根据方差与期望的关系，将方差表示为 a 的二次函数，二测函数的图象和性质解题.题目有一定综合性，注重重要知识、基础知识、运算求解能力的考查.

【详解】方法 1：由分布列得 $E(X)=\frac{1+a}{3}$，则

$D(X)=\left(\frac{1+a}{3}-0\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1+a}{3}-a\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1+a}{3}-1\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}$，则当 a 在 $(0,1)$ 内增大时，$D(X)$ 先减小后增大.

方法 2：则 $D(X)=E\left(X^2\right)-E(X)=0+\frac{a^2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{(a+1)^2}{9}=\frac{2a^2-2a+2}{9}=\frac{2}{9}\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$

故选 D.

【点睛】易出现的错误有，一是数学期望、方差以及二者之间的关系掌握不熟，无从着手；二是计算能力

差，不能正确得到二次函数表达式.

8.设三棱锥$V-ABC$的底面是正三角形，侧棱长均相等，P 是棱VA上的点（不含端点），记直线PB与直线AC所成角为α，直线PB与平面ABC所成角为β，二面角$P-AC-B$的平面角为γ，则（　）

A. $\beta<\gamma,\alpha<\gamma$

B. $\beta<\alpha,\beta<\gamma$

C. $\beta<\alpha,\gamma<\alpha$

D. $\alpha<\beta,\gamma<\beta$

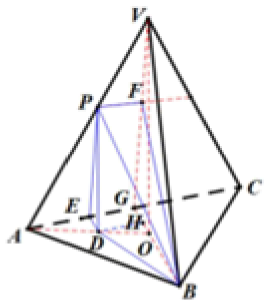
【答案】B

【解析】

【分析】

本题以三棱锥为载体，综合考查异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角的概念，以及各种角的计算.解答的基本方法是通过明确各种角，应用三角函数知识求解，而后比较大小.而充分利用图形特征，则可事倍功半.

【详解】方法1：如图G为AC中点，V 在底面ABC的投影为O，则P 在底面投影D在线段AO上，过D作DE垂直AE，易得$PE//VG$，过P作$PF//AC$交VG于F，过D作$DH//AC$，交BG于H，则$\alpha=\angle BPF$，$\beta=\angle PBD,\gamma=\angle PED$，则$\cos\alpha=\dfrac{PF}{PB}=\dfrac{EG}{PB}=\dfrac{DH}{PB}<\dfrac{BD}{PB}=\cos\beta$，即$\alpha>\beta$，$\tan\gamma=\dfrac{PD}{ED}>\dfrac{PD}{BD}=\tan\beta$，即$y>\beta$，综上所述，答案为B.



方法2：由最小角定理$\beta<\alpha$，记$V-AB-C$的平面角为γ'（显然$\gamma'=\gamma$）

由最大角定理$\beta<\gamma'=\gamma$，故选B.

法2：（特殊位置）取$V-ABC$为正四面体，P 为VA中点，易得

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{33}}{6},\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{3},\quad\sin\gamma=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$，故选B.

【点睛】常规解法下易出现的错误有，不能正确作图得出各种角.未能想到利用“特殊位置法”，寻求简便解

法.

9.已知 $a,b\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}x,x<0\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax,x\geq 0\end{cases}$，若函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有三个零点，则（ ）

A. $a<-1,b<0$

B. $a<-1,b>0$

C. $a>-1,b>0$

D. $a>-1,b<0$

【答案】D

【解析】

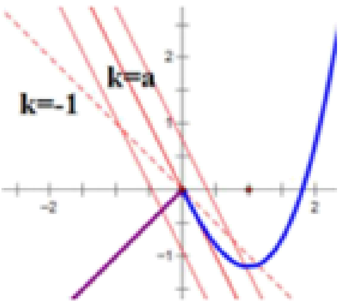
【分析】

本题综合性较强，注重重要知识、基础知识、运算求解能力、分类讨论思想及数形结合思想的考查.研究函数方程的方法较为灵活，通常需要结合函数的图象加以分析.

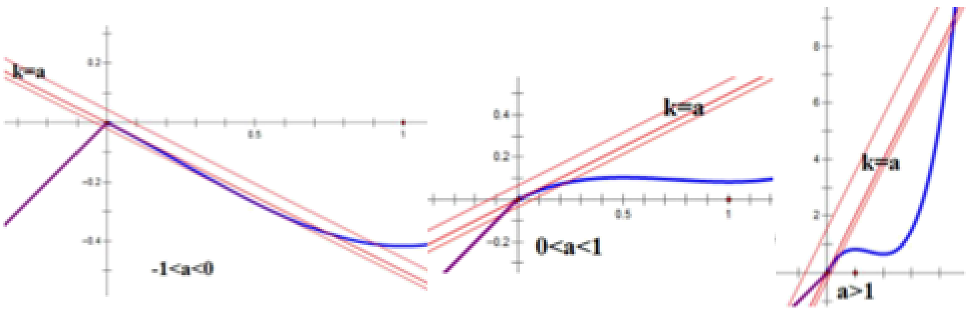
【详解】原题可转化为 $y=f(x)$ 与 $y=ax+b$，有三个交点.

当 $\overline{BC}=\lambda\overline{AP}$ 时，$f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)$，且 $f(0)=0,f'(0)=a$，则

（1）当 $a\leq -1$ 时，如图 $y=f(x)$ 与 $y=ax+b$ 不可能有三个交点（实际上有一个），排除 A，B



（2）当 $a>-1$ 时，分三种情况，如图 $y=f(x)$ 与 $y=ax+b$ 若有三个交点，则 $b<0$，答案选 D



下面证明：$a>-1$时，

$\overline{BC}=\lambda\overline{AP}$时$F(x)=f(x)-ax-b=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2-b$，$F'(x)=x^2-(a+1)x=x(x-(a+1))$，则

$F(0)>0$,$F(a+1)<0$，才能保证至少有两个零点，即$0>b>-\dfrac{1}{6}(a+1)^3$，若另一零点在<0

【点睛】遇到此类问题，不少考生会一筹莫展.由于方程中涉及a,b两个参数，故按“一元化”想法，逐步分类讨论，这一过程中有可能分类不全面、不彻底..

10.设$a,b\in R$，数列$\{a_n\}$中，$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n^2+b$，$n\in\mathbf{N}^*$，，则（　）

A. 当$b=\dfrac{1}{2},a_{10}>10$

B. 当$b=\dfrac{1}{4},a_{10}>10$

C. 当$b=-2,a_{10}>10$

D. 当$b=-4,a_{10}>10$

【答案】A

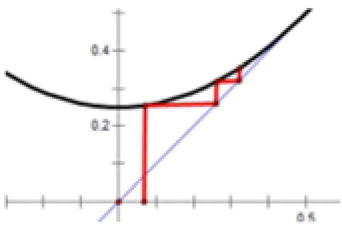
【解析】

【分析】

本题综合性较强，注重重要知识、基础知识、运算求解能力、分类讨论思想的考查.本题从确定不动点出发，通过研究选项得解.

【详解】选项B：不动点满足$x^2-x+\dfrac{1}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$时，如图，若$a_1=a\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，　$a_n<\dfrac{1}{2}$，

排除



如图，若a为不动点$\dfrac{1}{2}$则$a_n=\dfrac{1}{2}$

选项C：不动点满足$x^2-x-2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}=0$，不动点为$\dfrac{\text{ax}-1}{2}$，令$a=2$，则$a_n=2<10$，

排除

选项D：不动点满足$x^2-x-4=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{17}{4}=0$，不动点为$x=\dfrac{\sqrt{17}}{2}\pm\dfrac{1}{2}$，令$a=\dfrac{\sqrt{17}}{2}\pm\dfrac{1}{2}$，则

$a_n=\frac{\sqrt{17}}{2}\pm\frac{1}{2}<10$，排除.

选项 A：证明：当$b=\frac{1}{2}$时，$a_2=a_1^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$，$a_3=a_2^2+\frac{1}{2}\ge\frac{3}{4}$，$a_4=a_3^2+\frac{1}{2}\ge\frac{17}{16}\ge 1$，

处理一：可依次迭代到a_{10}；

处理二：当$n\ge 4$时，$a_{n+1}=a_n^2+\frac{1}{2}\ge a_n^2\ge 1$，则则

$a_{n+1}\ge\left(\frac{17}{16}\right)^{2^{n-1}}(n\ge 4)$，则$a_{10}\ge\left(\frac{17}{16}\right)^{2^6}=\left(1+\frac{1}{16}\right)^{64}=1+\frac{64}{16}+\frac{64\times 63}{2}\times\frac{1}{16^2}+\ldots\ldots>1+4+7>10$.

故选 A

【点睛】遇到此类问题，不少考生会一筹莫展.利用函数方程思想，通过研究函数的不动点，进一步讨论a的可能取值，利用“排除法”求解.

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分

11.复数$z=\frac{1}{1+i}$（i为虚数单位），则$|z|=$________.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】

本题先计算z，而后求其模.或直接利用模的性质计算. 容易题，注重基础知识、运算求解能力的考查.

【详解】$|z|=\frac{1}{|1+i|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题考查了复数模的运算，属于简单题.

12.已知圆C　的圆心坐标是$(0,m)$，半径长是r　.若直线$2x-y+3=0$与圆相切于点$A(-2,-1)$，则$m=$_____，$r=$______.

【答案】　(1). $m=-2$　(2). $r=\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

本题主要考查圆的方程、直线与圆的位置关系.首先通过确定直线 AC 的斜率，进一步得到其方程，将 $(0,m)$ 代入后求得 m，计算得解.

【详解】可知 $k_{AC}=-\frac{1}{2}\Rightarrow AC:y+1=-\frac{1}{2}(x+2)$，把 $(0,m)$ 代入得 $m=-2$，此时 $r=|AC|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

【点睛】：解答直线与圆的位置关系问题，往往要借助于数与形的结合，特别是要注意应用圆的几何性质.

13.在二项式 $(\sqrt{2}+x)^9$ 的展开式中，常数项是________；系数为有理数的项的个数是_______.

【答案】 (1). $16\sqrt{2}$ (2). 5

【解析】

【分析】

本题主要考查二项式定理、二项展开式的通项公式、二项式系数，属于常规题目.从写出二项展开式的通项入手，根据要求，考察 x 的幂指数，使问题得解.

【详解】$(\sqrt{2}+x)^9$ 的通项为 $T_{r+1}=C_9^r(\sqrt{2})^{9-r}x^r(r=0,1,2\cdots 9)$

可得常数项为 $T_1=C_9^0(\sqrt{2})^9=16\sqrt{2}$，

因系数为有理数，$r=1,3,5,7,9$，有 T_2,T_4,T_6,T_8,T_{10} 共 5 个项

【点睛】此类问题解法比较明确，首要的是要准确记忆通项公式，特别是“幂指数”不能记混，其次，计算要细心，确保结果正确.

14.在$\vee ABC$中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$AB=4$，$BC=3$，点 D 在线段 AC 上，若 $\angle BDC=45^{\circ}$，则 $BD=$____；$\cos\angle ABD=$________.

【答案】 (1). $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ (2). $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【解析】

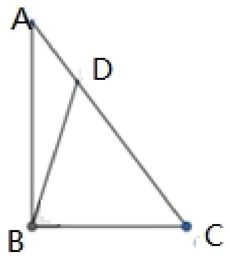
【分析】

本题主要考查解三角形问题，即正弦定理、三角恒等变换、数形结合思想及函数方程思想.通过引入 $CD=x$，在 ΔBDC 、ΔABD 中应用正弦定理，建立方程，进而得解. .

【详解】在ΔABD中，正弦定理有：$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAC}$，而$AB=4,\angle ADB=\dfrac{3\pi}{4}$，

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，$\sin\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{3}{5},\cos\angle BAC=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{4}{5}$，所以$BD=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$.

$\cos\angle ABD=\cos(\angle BDC-\angle BAC)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\angle BAC+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\angle BAC=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$



【点睛】解答解三角形问题，要注意充分利用图形特征.

15.已知椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$的左焦点为$F$，点$P$在椭圆上且在$x$轴的上方，若线段$PF$的中点在以原点$O$为圆心，$|OF|$为半径的圆上，则直线$PF$的斜率是_______.

【答案】$\sqrt{15}$

【解析】

【分析】

结合图形可以发现，利用三角形中位线定理，将线段长度用坐标表示考点圆的方程，与椭圆方程联立可进一步求解.利用焦半径及三角形中位线定理，则更为简洁.

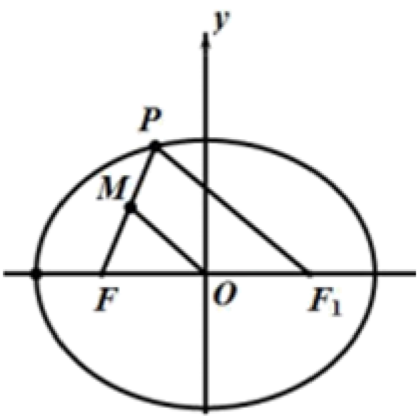
【详解】方法1：由题意可知$|OF|=|OM|=c=2$，

由中位线定理可得$|PF_1|=2|OM|=4$，设$P(x,y)$可得$(x-2)^2+y^2=16$，

联立方程$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

可解得$x=-\dfrac{3}{2},x=\dfrac{21}{2}$（舍），点$P$在椭圆上且在$x$轴的上方，

求得 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$，所以 $k_{PF}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}$



方法 2：焦半径公式应用

解析 1：由题意可知 $|OF|=|OM|=c=2$，

由中位线定理可得 $|PF_1|=2|OM|=4$，即 $a-ex_p=4\Rightarrow x_p=-\frac{3}{2}$

求得 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$，所以 $k_{PF}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}$.

【点睛】本题主要考查椭圆的标准方程、椭圆的几何性质、直线与圆的位置关系，利用数形结合思想，是解答解析几何问题的重要途径.

16.已知 $a\in R$，函数 $f(x)=ax^3-x$，若存在 $t\in R$，使得 $|f(t+2)-f(t)|\le\frac{2}{3}$，则实数 a 的最大值是____.

【答案】$a_{\max}=\frac{4}{3}$

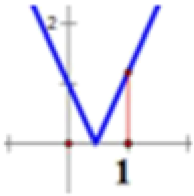
【解析】

【分析】

本题主要考查含参绝对值不等式、函数方程思想及数形结合思想，属于能力型考题.从研究 $f(t+2)-f(t)=2a\left(3t^2+6t+4\right)-2$ 入手，令 $m=3t^2+6t+4\in[1,+\infty)$，从而使问题加以转化，通过绘制函数图象，观察得解.

【详解】使得 $f(t+2)-f(t)=a\left(2\bullet(t+2)^2+t(t+2)+t^2\right)-2=2a\left(3t^2+6t+4\right)-2$，

使得令 $m=3t^2+6t+4\in[1,+\infty)$，则原不等式转化为存在 $m\ge 1,\quad |am-1|\le\frac{1}{3}$，由折线函数，如图



只需 $a-1\le\frac{1}{3}$，即 $a\le\frac{4}{3}$，即 a 的最大值是 $\frac{4}{3}$

【点睛】对于函数不等式问题，需充分利用转化与化归思想、数形结合思想.

17.已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，当每个 $\lambda_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 取遍 ± 1 时，

$|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|$ 的最小值是________；最大值是_______.

【答案】 (1). 0 (2). $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

本题主要考查平面向量的应用，题目难度较大.从引入“基向量”入手，简化模的表现形式，利用转化与化归思想将问题逐步简化.

【详解】

$\lambda_1\overline{AB}+\lambda_2\overline{BC}+\lambda_3\overline{CD}+\lambda_4\overline{DA}+\lambda_5\overline{AC}+\lambda_6\overline{BD}=(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)\overline{AB}+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\overline{AD}$

要使 $\left|\lambda_1\overline{AB}+\lambda_2\overline{BC}+\lambda_3\overline{CD}+\lambda_4\overline{DA}+\lambda_5\overline{AC}+\lambda_6\overline{BD}\right|$ 的最小，只需要

$|\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6|=|\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6|=0$，此时只需要取 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=1,\lambda_4=1,\lambda_5=1,\lambda_6=1$

此时 $\left|\lambda_1\overline{AB}+\lambda_2\overline{BC}+\lambda_3\overline{CD}+\lambda_4\overline{DA}+\lambda_5\overline{AC}+\lambda_6\overline{BD}\right|_{\min}=0$

$$\begin{aligned}&\left|\lambda_1\overline{AB}+\lambda_2\overline{BC}+\lambda_3\overline{CD}+\lambda_4\overline{DA}+\lambda_5\overline{AC}+\lambda_6\overline{BD}\right|^2=\left|(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)\overline{AB}+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\overline{AD}\right|^2\\&=(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)^2+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)^2\le(|\lambda_1|+|\lambda_3|+|\lambda_5-\lambda_6|)^2+(|\lambda_2|+|\lambda_4|+|\lambda_5+\lambda_6|)^2\\&=(2+|\lambda_5-\lambda_6|)^2+(2+|\lambda_5+\lambda_6|)^2=8+4(|\lambda_5-\lambda_6|+|\lambda_5+\lambda_6|)+(\lambda_5-\lambda_6)^2+(\lambda_5+\lambda_6)^2\\&=8+4\sqrt{(|\lambda_5-\lambda_6|+|\lambda_5+\lambda_6|)^2}+2(\lambda_5^2+\lambda_6^2)=12+4\sqrt{(\lambda_5-\lambda_6)^2+(\lambda_5+\lambda_6)^2+2|\lambda_5^2-\lambda_6^2|}\\&=12+4\sqrt{2(\lambda_5^2+\lambda_6^2)+2|\lambda_5^2-\lambda_6^2|}=20\end{aligned}$$

等号成立当且仅当$\lambda_1,-\lambda_3,\lambda_5-\lambda_6$均非负或者均非正，并且$\lambda_2,-\lambda_4,\lambda_5+\lambda_6$均非负或者均非正。

比如$\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=-1,\lambda_4=-1,\lambda_5=1,\lambda_6=1$

则$\left|\lambda_1\overline{AB}+\lambda_2\overline{BC}+\lambda_3\overline{CD}+\lambda_4\overline{DA}+\lambda_5\overline{AC}+\lambda_6\overline{BD}\right|_{\max}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

点睛：对于此题需充分利用转化与化归思想，从“基向量”入手，最后求不等式最值，是一道向量和不等式的综合题。

【点睛】对于平面向量的应用问题，需充分利用转化与化归思想、数形结合思想.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18.设函数$f(x)=\sin x, x\in\mathbf{R}$.

（1）已知$\theta\in[0,2\pi)$,函数$f(x+\theta)$是偶函数，求θ的值；

（2）求函数$y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2$ 的值域.

【答案】（1）$\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$；（2）$\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

【解析】

【分析】

(1)由函数的解析式结合偶函数的性质即可确定θ的值；

(2)首先整理函数的解析式为$y=a\sin(\omega x+\varphi)+b$的形式，然后确定其值域即可.

【详解】(1)由题意结合函数的解析式可得：$f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$,

函数为偶函数，则当$x=0$时，$x+\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，即$\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，结合$\theta\in[0,2\pi)$可取$k=0,1$，相应的$\theta$值为$\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$.

(2)由函数的解析式可得：$y=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

$=1-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x-\sin 2x\right)$

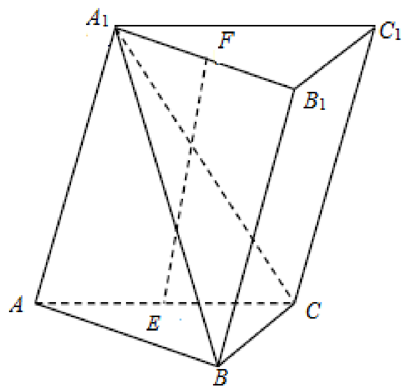
$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x\right)$

$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

据此可得函数的值域为：$\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

【点睛】本题主要考查由三角函数的奇偶性确定参数值，三角函数值域的求解，三角函数式的整理变形等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

19.如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=90°$，$\angle BAC=30°, A_1A=A_1C=AC, E, F$ 分别是 AC, A_1B_1 的中点.



（1）证明：$EF\perp BC$；

（2）求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{3}{5}$.

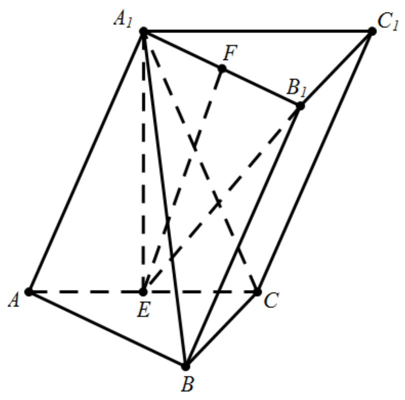
【解析】

【分析】

(1)由题意首先证得线面垂直，然后利用线面垂直的定义即可证得线线垂直；

(2)建立空间直角坐标系，分别求得直线的方向向量和平面的法向量，然后结合线面角的正弦值和同角三角函数基本关系可得线面角的余弦值.

【详解】(1)如图所示，连结 A_1E,B_1E，



等边$\triangle AA_1C$中， $AE=EC$，则$\because \sin B\neq 0,\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

平面$ABC\perp$平面A_1ACC_1，且平面$ABC\cap$平面$A_1ACC_1=AC$，

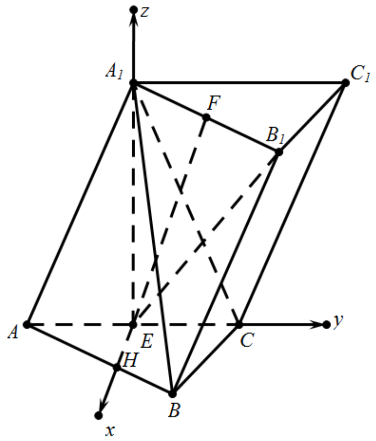
由面面垂直的性质定理可得：$A_1E\perp$平面ABC，故$A_1E\perp BC$，

由三棱柱的性质可知$A_1B_1/\!/AB$，而$AB\perp BC$，故$A_1B_1\perp BC$，且$A_1B_1\cap A_1E=A_1$，

由线面垂直的判定定理可得：$BC\perp$平面A_1B_1E，

结合$EF\subseteq$平面A_1B_1E，故$EF\perp BC$.

(2)在底面ABC内作$EH\perp AC$，以点E为坐标原点，EH,EC,EA_1方向分别为x,y,z轴正方向建立空间直角坐标系$E-xyz$.



设 $EH=1$，则 $AE=EC=\sqrt{3}$， $AA_1=CA_1=2\sqrt{3}$, $BC=\sqrt{3},AB=3$,

据此可得： $A\left(0,-\sqrt{3},0\right),B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),A_1\left(0,0,3\right),C\left(0,\sqrt{3},0\right)$,

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ 可得点 B_1 的坐标为 $B_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3},3\right)$,

利用中点坐标公式可得： $F\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\sqrt{3},3\right)$， 由于 $E\left(0,0,0\right)$,

故直线 EF 的方向向量为： $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\sqrt{3},3\right)$

设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$， 则：

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\left(x,y,z\right)\cdot\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-3\right)=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-3z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(x,y,z\right)\cdot\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)=-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases},$$

据此可得平面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(1,\sqrt{3},1\right)$， $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\sqrt{3},3\right)$

此时 $\cos\left\langle\overrightarrow{EF},\vec{m}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\times\left|\vec{m}\right|}=\frac{6}{\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\frac{4}{5}$,

设直线 EF 与平面 A_1BC 所成角为 θ， 则 $\sin\theta=\cos\left\langle\overrightarrow{EF},\vec{m}\right\rangle=\frac{4}{5},\cos\theta=\frac{3}{5}$.

【点睛】本题考查了立体几何中的线线垂直的判定和线面角的求解问题，意在考查学生的空间想象能力和逻辑推理能力；解答本题关键在于能利用直线与直线、直线与平面、平面与平面关系的相互转化，通过严密推理，同时对于立体几何中角的计算问题，往往可以利用空间向量法，通过求解平面的法向量，利用向量的夹角公式求解.

20.设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=4$，$a_4=S_3$，数列$\left\{b_n\right\}$满足：对每$n\in\mathbf{N}^*,S_n+b_n,S_{n+1}+b_n,S_{n+2}+b_n$成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$C_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}},n\in\mathbf{N}^*$，证明：$C_1+C_2+\cdots+C_n<2\sqrt{n},n\in\mathbf{N}^*$.

【答案】（1）$a_n=2(n-1)$，$b_n=n(n+1)$；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】

(1)首先求得数列$\left\{a_n\right\}$的首项和公差确定数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式，然后结合三项成等比数列的充分必要条件整理计算即可确定数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

(2)结合(1)的结果对数列$\left\{c_n\right\}$的通项公式进行放缩，然后利用不等式的性质和裂项求和的方法即可证得题中的不等式.

【详解】(1)由题意可得：$\begin{cases} a_1+2d=4 \\ a_1+3d=3a_1+\dfrac{3\times 2}{2}d \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a_1=0 \\ d=2 \end{cases}$，

则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为.

其前 n 项和$S_n=\dfrac{(0+2n-2)\times n}{2}=n(n-1)$.

则$n(n-1)+b_n,n(n+1)+b_n,(n+1)(n+2)+b_n$成等比数列，即：

$\left[n(n+1)+b_n\right]^2=\left[n(n-1)+b_n\right]\times\left[(n+1)(n+2)+b_n\right]$，

据此有：

$$n^2\left(n+1\right)^2+2n\left(n+1\right)b_n+b_n^2=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n+2\right)+\left(n+1\right)\left(n+2\right)b_n+n\left(n-1\right)b_n+b_n^2,$$

故 $b_n=\dfrac{n^2(n+1)^2-n(n-1)(n+1)(n+2)}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)+n\left(n-1\right)-2n\left(n+1\right)}=n\left(n+1\right)$.

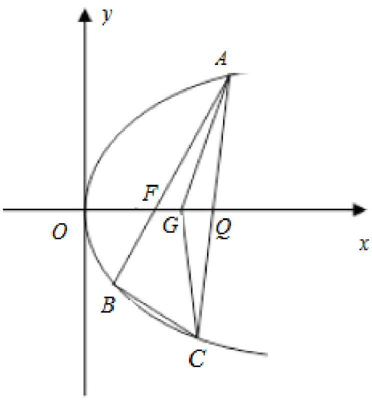
(2)结合(1)中的通项公式可得：

$$C_n=\sqrt{\frac{a_n}{2b_n}}=\sqrt{\frac{n-1}{n\left(n+1\right)}}<\sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right),$$

则 $C_1+C_2+\cdots+C_n<2\left(\sqrt{1}-0\right)+2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\cdots+2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=2\sqrt{n}$.

【点睛】本题主要考查数列通项公式的求解，，裂项求和的方法，数列中用放缩法证明不等式的方法等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

21.如图，已知点 $F(1,0)$ 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$，点 F 为焦点，过点 F 的直线交抛物线于 AB 两点，点 C 在抛物线上，使得 $\vee ABC$ 的重心 G 在 x 轴上，直线 AC 交 x 轴于点 Q，且 Q 在点 F 右侧. 记 $\triangle AFG,\triangle CQG$ 的面积为 S_1,S_2.



（1）求 p 的值及抛物线的标准方程；

（2）求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最小值及此时点 G 的坐标.

【答案】（1）1，$x=-1$；（2）$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$G\left(2,0\right)$.

【解析】

【分析】

(1)由焦点坐标确定 p 的值和准线方程即可；

(2)设出直线方程，联立直线方程和抛物线方程，结合韦达定理求得面积的表达式，最后结合均值不等式的结论即可求得 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值和点 G 的坐标.

【详解】(1)由题意可得 $\frac{p}{2}=1$，则 $p=2,2p=4$，抛物线方程为 $y^2=4x$，准线方程为 $x=-1$.

(2)设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x-1\right),k>0$，与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立可得：

$k^2x^2-\left(2k^2+4\right)x+k^2=0$，故：$x_2+x_2=2+\frac{4}{k^2},x_2x_2=1$，

$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2-2\right)=\frac{4}{k},y_1y_2=-\left(\sqrt{4x_1}\right)\times\left(\sqrt{4x_2}\right)=-4$，

设点 C 的坐标为 $C\left(x_3,y_3\right)$，由重心坐标公式可得：

$x_G=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{1}{3}\left(2+\frac{4}{k^2}+x_3\right)$，$y_G=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{k}+y_3\right)$，

令 $y_G=0$ 可得：$y_3=-\frac{4}{k}$，则 $x_3=\frac{y_3^2}{4}=\frac{4}{k^2}$.即 $x_G=\frac{1}{3}\left(2+\frac{4}{k^2}+\frac{4}{k^2}\right)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{8}{k^2}\right)$，

由斜率公式可得：$k_{AC}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{y_1-y_3}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_3}$，

直线 AC 的方程为：$y-y_3=\frac{4}{y_1+y_3}\left(x-x_3\right)$，

令 $y=0$ 可得：$x_Q=x_3+\frac{-y_3\left(y_1+y_3\right)}{4}=\frac{y_3^2}{4}+\frac{-y_3\left(y_1+y_3\right)}{4}=-\frac{y_1y_3}{4}$，

故 $S_1=\frac{1}{2}\times\left(x_G-x_F\right)\times y_1=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{3}\left(2+\frac{8}{k^2}\right)-1\right]\times y_1=\frac{y_1}{2}\times\left(\frac{8}{3k^2}-\frac{1}{3}\right)$，

且 $S_2=\frac{1}{2}\times\left(x_Q-x_G\right)\times\left(-y_3\right)=-\frac{y_3}{2}\left[-\frac{y_1y_3}{4}-\frac{1}{3}\left(2+\frac{8}{k^2}\right)\right]$，

由于 $y_3=-\frac{4}{k}$，代入上式可得：$S_2=\frac{2}{k}\left(\frac{y_1}{k}-\frac{2}{3}-\frac{8}{3k^2}\right)$，

由 $y_1+y_2=\frac{4}{k},y_1y_2=-4$ 可得 $y_1-\frac{4}{y_1}=\frac{4}{k}$，则 $k=\frac{4y_1}{y_1^2-4}$，

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{y_1}{2}\times\left(\frac{8}{3k^2}-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{k}\left(\frac{y_1}{k}-\frac{2}{3}-\frac{8}{3k^2}\right)}=\frac{2y_1^2\left(y_1^2-2\right)}{\left(y_1^2-4\right)\left(y_1^2+4\right)}=2-\frac{4}{\left(y_1^2-8\right)+\frac{48}{y_1^2-8}+16}$

$\geq 2-\frac{4}{2\sqrt{\left(y_1^2-8\right)\times\frac{48}{y_1^2-8}}+16}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当且仅当 $y_1^2-8=\frac{48}{y_1^2-8}$，即 $y_1^2=8+4\sqrt{3}$，$y_1=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 时等号成立.

此时 $k=\frac{4y_1}{y_1^2-4}=\sqrt{2}$，$x_G=\frac{1}{3}\left(2+\frac{8}{k^2}\right)=2$，则点 G 的坐标为 $G\left(2,0\right)$.

【点睛】直线与抛物线的位置关系和直线与椭圆、双曲线的位置关系类似，一般要用到根与系数的关系，本题主要考查了抛物线准线方程的求解，直线与抛物线的位置关系，三角形重心公式的应用，基本不等式求最值的方法等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

22.已知实数 $a\neq 0$，设函数 $f(x)=a\ln x+\sqrt{x+1},x>0$.

（1）当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）对任意 $x\in[\frac{1}{e^2},+\infty)$ 均有 $f(x)\leq\frac{\sqrt{x}}{2a}$，求 a 的取值范围.

注：$e=2.71828...$为自然对数的底数.

【答案】（1）$f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 $\left(3,+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(0,3\right)$；（2）$0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【解析】

【分析】

(1)首先求得导函数的解析式，然后结合函数的解析式确定函数的单调区间即可.

(2)由题意首先由函数在特殊点的函数值得到 a 的取值范围，然后证明所得的范围满足题意即可.

【详解】(1)当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，$f\left(x\right)=-\frac{3}{4}\ln x+\sqrt{x+1}$，函数的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，且：

$$f'(x)=-\frac{3}{4x}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{-3\sqrt{x+1}+2x}{4x\sqrt{x+1}}=\frac{(x-3)(4x+3)}{4x\sqrt{x+1}\left(3\sqrt{x+1}+2x\right)},$$

因此函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(3,+\infty)$,单调递减区间是 $(0,3)$.

(2)构造函数 $g(x)=a\ln x+\sqrt{1+x}-\frac{\sqrt{x}}{2a}$，

注意到：$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2a-\frac{1}{2ae}+\sqrt{1+\frac{1}{e^2}}\leq 0$，

注意到 $a>0$ 时 $2a+\frac{1}{2ae}\geq 2\sqrt{\frac{1}{e}}>\sqrt{1+\frac{1}{e^2}}$ 恒成立，满足 $g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2a-\frac{1}{2ae}+\sqrt{1+\frac{1}{e^2}}\leq 0$；

当 $a<0$ 时，$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2a-\frac{1}{2ae}+\sqrt{1+\frac{1}{e^2}}>0$，不合题意，

且 $g(1)=\sqrt{2}-\frac{1}{2a}\leq 0$，解得：$a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 $0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$.

下面证明 $0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$ 刚好是满足题意的实数 a 的取值范围.

分类讨论：

(a)当 $x\geq 1$ 时，$g(x)=a\ln x+\sqrt{1+x}-\frac{\sqrt{x}}{2a}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}\ln x+\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}$，

令 $\varphi(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln x+\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}$，则：

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}x}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}x-2\sqrt{x(1+x)}}{2\sqrt{2}x\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}x\sqrt{1+x}-\left(2x^2+3x-1\right)}{2\sqrt{2}x\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{2}x+2\sqrt{x(1+x)})}$$

$$=\frac{(1-x)\left(4x^3+8x^2+5x-1\right)}{2\sqrt{2}x\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{2}x+2\sqrt{x(1+x)}\right)\left(2\sqrt{2}x\sqrt{1+x}+\left(2x^2+3x-1\right)\right)},$$

易知$\varphi'(x)\le 0$，则函数$\varphi(x)$单调递减，$g(x)\le\varphi(x)\le\varphi(1)=0$，满足题意.

(b)当$\frac{1}{e^2}\le x<1$时，$g(x)\le 0$等价于$a^2\ln x+\sqrt{x+1}\cdot a-\frac{1}{2}\sqrt{x}\le 0$，

左侧是关于a的开口向下的二次函数$\mu(a)$,

其判别式$\Delta(x)=1+x+2\sqrt{x}\ln x=\sqrt{x}\left(4\ln\sqrt{x}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$,

令$t=\sqrt{x}$，注意到当$t>\frac{1}{e}$时,$\left(4\ln t+t+\frac{1}{t}\right)'=\frac{t^2+4t-1}{t^2}>0$，

于是$\Delta(x)$在$x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right)$上单调递增,而$\Delta\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}-2\ln 2<0$，

于是当$x\in\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{4}\right]$时命题成立,

而当$x\in\left(\frac{1}{4},1\right)$时,此时$\mu(a)$的对称轴为$a=\frac{\sqrt{x+1}}{-2\ln x}$随着$x$递增,

于是对称轴在$a=\frac{\sqrt{5}}{8\ln 2}$的右侧,而$\frac{\sqrt{5}}{8\ln2}>\frac{\sqrt{2}}{4}$成立，(不等式等价于$\ln 2<\sqrt{\frac{5}{8}}$).

因此$\mu(a)<u\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\le\varphi(1)=0$.

综上可得：实数a的取值范围是$0<a\le\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行： (1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系． (2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数． (3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题． (4)考查数形结合思想的应用．