2008年江苏省高考数学试卷

一、填空题（共14小题，每小题5分，满分70分）

1．（5分）（2008•江苏）若函数$y=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$（$\omega>0$）最小正周期为$\frac{\pi}{5}$，则ω=____________．

2．（5分）（2008•江苏）若将一颗质地均匀的骰子（一种各面上分别标有1，2，3，4，5，6个点的正方体玩具），先后抛掷两次，则出现向上的点数之和为4的概率是____________．

3．（5分）（2008•江苏）若将复数$\frac{1+i}{1-i}$表示为a+bi（a，b∈R，i是虚数单位）的形式，则a+b=____________．

4．（5分）（2008•江苏）若集合$A=\{x|(x-1)^2<3x+7，x\in R\}$，则A∩Z中有____________个元素．

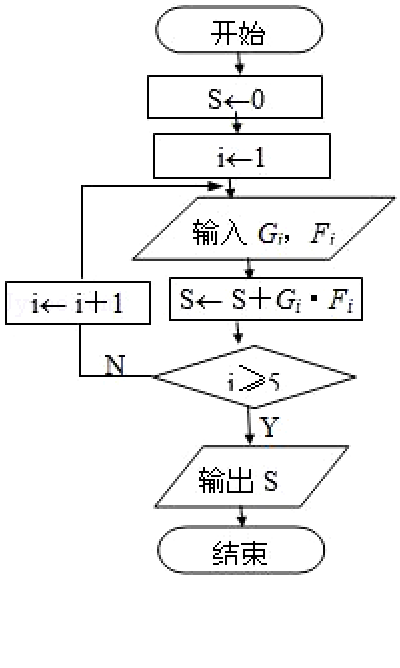
5．（5分）（2008•江苏）已知向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为120°，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，则$|5\vec{a}-\vec{b}|$=____________．

6．（5分）（2008•江苏）在平面直角坐标系xoy中，设D是横坐标与纵坐标的绝对值均不大于2的点构成的区域，E是到原点的距离不大于1的点构成的区域，向D中随机投一点，则所投点在E中的概率是____________．

7．（5分）（2008•江苏）某地区为了解70﹣80岁的老人的日平均睡眠时间（单位：h），随机选择了50位老人进行调查，下表是这50位老人睡眠时间的频率分布表：

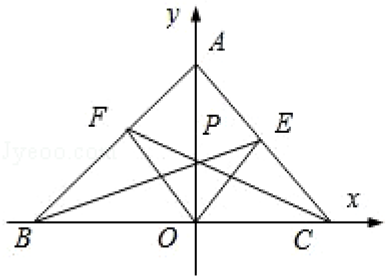
序号i	分组（睡眠时间）	组中值（G_i）	频数（人数）	频率（F_i）
1	[4，5）	4.5	6	0.12
2	[5，6）	5.5	10	0.20
3	[6，7）	6.5	20	0.40
4	[7，8）	7.5	10	0.20
5	[8，9]	8.5	4	0.08

在上述统计数据的分析中一部分计算见算法流程图，则输出的S的值为____________．



8．（5分）（2008•江苏）设直线$y=\frac{1}{2}x+b$是曲线y=lnx（x＞0）的一条切线，则实数b的值为____________.

9．（5分）（2008•江苏）如图，在平面直角坐标系xoy中，设三角形ABC的顶点分别为A（0，a），B（b，0），C（c，0），点P（0，p）在线段AO上的一点（异于端点），这里a，b，c，p均为非零实数，设直线BP，CP分别与边AC，AB交于点E，F，某同学已正确求得直线OE的方程为$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$，请你完成直线OF的方程：____________.



10．（5分）（2008•江苏）将全体正整数排成一个三角形数阵：按照以上排列的规律，第n行（n≥3）从左向右的第3个数为____________.

1

2 3

4 5 6

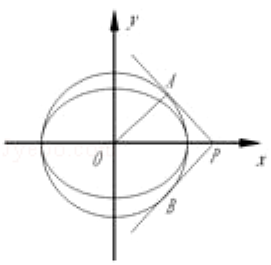
7 8 9 10

11 12 13 14 15

………………………

11．（5分）（2008•江苏）设x，y，z为正实数，满足x﹣2y+3z=0，则$\frac{y^2}{xz}$的最小值是____________.

12．（5分）（2008•江苏）在平面直角坐标系xOy中，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的焦距为2c，以O为圆心，a为半径作圆M，若过P（$\frac{a^2}{c}$，0）作圆M的两条切线相互垂直，则椭圆的离心率为____________.



13．（5分）（2008•江苏）满足条件AB=2，AC=$\sqrt{2}$BC的三角形ABC的面积的最大值是____________.

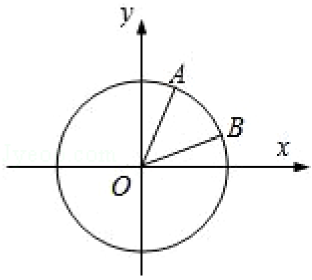
14．（5分）（2008•江苏）f（x）=ax^3﹣3x+1对于x∈[﹣1，1]总有f（x）≥0成立，则a=____________.

二、解答题（共12小题，满分90分）

15．（15分）（2008•江苏）如图，在平面直角坐标系xOy中，以Ox轴为始边作两个锐角α，β，它们的终边分别交单位圆于A，B两点．已知A，B两点的横坐标分别是$\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

（1）求tan（α+β）的值；

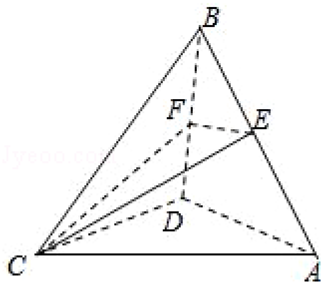
（2）求α+2β的值．



16．（15分）（2008•江苏）如图，在四面体ABCD中，CB=CD，AD⊥BD，点E，F分别是AB，BD的中点．求证：

（1）直线EF∥面ACD；

（2）平面EFC⊥面BCD．



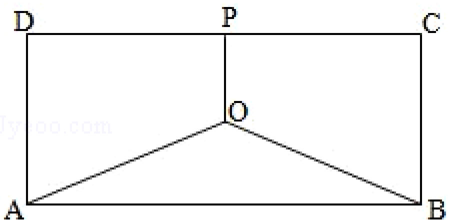
17．（15分）（2008•江苏）如图，某地有三家工厂，分别位于矩形ABCD的两个顶点A，B及CD的中点P处．AB=20km，BC=10km．为了处理这三家工厂的污水，现要在该矩形区域上（含边界）且与A，B等距的一点O处，建造一个污水处理厂，并铺设三条排污管道AO，BO，PO．记铺设管道的总长度为ykm．

（1）按下列要求建立函数关系式：

（i）设∠BAO=θ（rad），将y表示成θ的函数；

（ii）设OP=x（km），将y表示成x的函数；

（2）请你选用（1）中的一个函数关系确定污水处理厂的位置，使铺设的污水管道的总长度最短．



18．（15分）（2008•江苏）在平面直角坐标系xOy中，记二次函数f（x）=x^2+2x+b（x∈R）与两坐标轴有三个交点．经过三个交点的圆记为C．

（1）求实数b的取值范围；

（2）求圆C的方程；

（3）问圆C是否经过定点（其坐标与b的无关）？请证明你的结论．

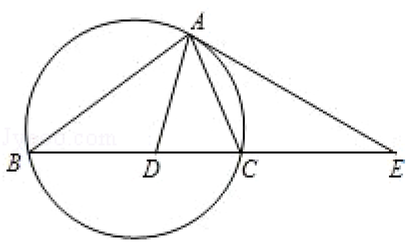
19．（15分）（2008•江苏）（1）设a_1，a_2，…，a_n是各项均不为零的n（n≥4）项等差数列，且公差d≠0，若将此数列删去某一项后得到的数列（按原来的顺序）是等比数列．

（i）当n=4时，求$\frac{a_1}{d}$的数值；

（ii）求n的所有可能值．
（2）求证：对于给定的正整数n（n≥4），存在一个各项及公差均不为零的等差数列b_1，b_2，…，b_n，其中任意三项（按原来的顺序）都不能组成等比数列．

20．（15分）（2008•江苏）已知函数$f_1(x)=3^{|x-p_1|}$，$f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$（x∈R，$p_1$，$p_2$为常数）．函数f（x）定义为：对每个给定的实数x，$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & 若f_1(x)\leqslant f_2(x)\\ f_2(x) & 若f_1(x)>f_2(x)\end{cases}$
（1）求f（x）=f_1（x）对所有实数x成立的充分必要条件（用p_1，p_2表示）；
（2）设a，b是两个实数，满足a＜b，且p_1，p_2∈（a，b）．若f（a）=f（b），求证：函数f（x）在区间[a，b]上的单调增区间的长度之和为$\frac{b-a}{2}$（闭区间[m，n]的长度定义为n﹣m）

21．（2008•江苏）如图，△ABC的外接圆的切线AE与BC的延长线相交于点E，∠BAC的平分线与BC交于点D．求证：$ED^2=EB\bullet EC$．



22．（2008•江苏）在平面直角坐标系xOy中，设椭圆$4x^2+y^2=1$在矩阵$\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$对应的变换作用下得到曲线F，求F的方程．

23．（2008•江苏）在平面直角坐标系xOy中，点P（x，y）是椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上的一个动点，求S=x+y的最大值．

24．（2008•江苏）设a，b，c为正实数，求证：$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\geqslant 2\sqrt{3}$．

25．（2008•江苏）记动点P是棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线BD_1上一点，记$\frac{D_1P}{D_1B}=\lambda$．当∠APC为钝角时，求λ的取值范围．

26．（2008•江苏）请先阅读：
在等式$\cos2x=2\cos^2x-1$（x∈R）的两边求导，得：$(\cos2x)'=(2\cos^2x-1)'$，由求导法则，得$(-\sin2x)\bullet 2=4\cos x\bullet(-\sin x)$，化简得等式：$\sin2x=2\cos x\bullet\sin x$．
（1）利用上题的想法（或其他方法），结合等式$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$（x∈R，正整数n≥2），证明：$n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum\limits_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$．
（2）对于正整数n≥3，求证：
（i）$\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n^k=0$；

（ii）$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}k^{2}C_{n}^{k}=0$;

（iii）$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}C_{n}^{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2008年江苏省高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（共14小题，每小题5分，满分70分）

1．（5分）

考点：三角函数的周期性及其求法．

专题：计算题．

分析：根据三角函数的周期公式，即$T=\frac{2\pi}{w}$可直接得到答案．

解答：解：$\because T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{5}\Rightarrow\omega=10$

故答案为：10

点评：本小题考查三角函数的周期公式，即$T=\frac{2\pi}{w}$．

2．（5分）

考点：古典概型及其概率计算公式．

专题：计算题．

分析：分别求出基本事件数，“点数和为4”的种数，再根据概率公式解答即可．

解答：解析：基本事件共6×6个，

点数和为4的有（1，3）、（2，2）、（3，1）共3个，

故$P=\frac{3}{6\times6}=\frac{1}{12}$．

故填：$\frac{1}{12}$．

点评：本小题考查古典概型及其概率计算公式，考查概率的求法：如果一个事件有n种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件A出现m种结果，那么事件A的概率P（A）=$\frac{m}{n}$．

3．（5分）

考点：复数的基本概念；复数代数形式的乘除运算．

专题：计算题．

分析：利用复数除法的法则：分子分母同乘以分母的共轭复数．

解答：解：$\because\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$，

∴a=0，b=1，

因此a+b=1

故答案为1

点评：本小题考查复数的除法运算．

4．（5分）

考点：交集及其运算．

分析：先化简集合A，即解一元二次不等式$(x-1)^2<3x+7$，再与Z求交集．

解答：解：由$(x-1)^2<3x+7$得$x^2-5x-6<0$，$\therefore A=(-1，6)$，因此$A\cap Z=\{0，1，2，3，4，5\}$，共有6个元素．

故答案是6

点评：本小题考查集合的运算和解一元二次不等式．

5．（5分）

考点：向量的模．

专题：计算题．

分析：根据向量的数量积运算公式得$|5\vec{a}-\vec{b}|^2=(5\vec{a}-\vec{b})^2$，化简后把已知条件代入求值．

解答：解：由题意得，$|5\vec{a}-\vec{b}|^2=(5\vec{a}-\vec{b})^2=25\vec{a}^2-10\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

$=25\times1^2-10\times1\times3\times(-\frac{1}{2})+3^2=49$，

$\therefore |5\vec{a}-\vec{b}|=7$．

故答案为：7．

点评：本小题考查向量模的求法，即利用数量积运算公式“$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$”进行求解．

6．（5分）

考点：古典概型及其概率计算公式．

专题：计算题．

分析：本题是一个几何概型，试验包含的所有事件是区域D表示边长为4的正方形的内部（含边界），满足条件的事件表示单位圆及其内部，根据几何概型概率公式得到结果．

解答：解析：本小题是一个几何概型，

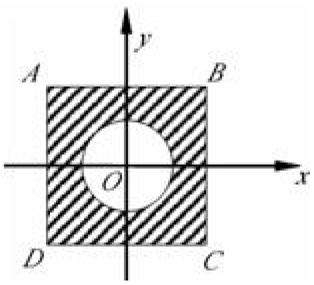
∵试验包含的所有事件是区域D表示边长为4的正方形的内部（含边界），面积是$4^2=16$，

满足条件的事件表示单位圆及其内部，面积是$\pi\times1^2$

根据几何概型概率公式得到

$\therefore P=\frac{\pi\times1^2}{4\times4}=\frac{\pi}{16}$

故答案为：$\frac{\pi}{16}$．



点评：本题考查几何概型，几何概型的概率的值是通过长度、面积、和体积、的比值得到，本题是通过两个图形的

：面积之比得到概率的值．本题可以以选择和填空形式出现．

7．（5分）

考点：频率分布表；工序流程图（即统筹图）．

专题：图表型．

分析：观察算法流程图知，此图包含一个循环结构，即求$G_1F_1+G_2F_2+G_3F_3+G_4F_4+G_5F_5$的值，再结合直方图中数据即可求解．

解答：解：由流程图知：

$S=G_1F_1+G_2F_2+G_3F_3+G_4F_4+G_5F_5$

$=4.5\times0.12+5.5\times0.20+6.5\times0.40+7.5\times0.2+8.5\times0.08$

$=6.42$，

故填：6.42．

点评：本题考查读频率分布直方图、算法流程图的能力和利用统计图获取信息的能力．利用图表获取信息时，必须认真观察、分析、研究图表，才能作出正确的判断和解决问题．

8．（5分）

考点：利用导数研究曲线上某点切线方程．

专题：计算题．

分析：欲实数b的大小，只须求出切线方程即可，故先利用导数求出在切点处的导函数值，再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率，最后求出切线方程与已知直线方程对照即可．

解答：解：$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$，令$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$得$x=2$，

∴切点为（2，ln2），代入直线方程$y=\frac{1}{2}x+b$，

∴$\ln2=\frac{1}{2}\times2+b$，∴$b=\ln2-1$．

故答案为：ln2 - 1

点评：本小题主要考查直线的方程、导数的几何意义、利用导数研究曲线上某点切线方程等基础知识，考查运算求解能力．属于基础题．

9．（5分）

考点：直线的一般式方程；归纳推理．

专题：转化思想．

分析：本题考查的知识点是类比推理，我们类比直线OE的方程为$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$，分析A（0，a），B（b，0），C（c，0），P（0，p），我们可以类比推断出直线OF的方程为：$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$．

解答：解：由截距式可得直线AB：$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$，

直线CP：$\frac{x}{c}+\frac{y}{p}=1$，

两式相减得$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$，

显然直线AB与CP的交点F满足此方程，

又原点O也满足此方程，

故为所求直线OF的方程．

故答案为：$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$．

点评：类比推理的一般步骤是：（1）找出两类事物之间的相似性或一致性；（2）用一类事物的性质去推测另一类事物的性质，得出一个明确的命题（猜想）．

10．（5分）

考点：归纳推理；等比数列的前n项和．

专题：压轴题；规律型．

分析：观察图例，我们可以得到每一行的数放在一起，是从一开始的连续的正整数，故n行的最后一个数，即为前n项数据的个数，故我们要判断第n行（n≥3）从左向右的第3个数，可先判断第n﹣1行的最后一个数，然后递推出最后一个数据．

解答：解：本小题考查归纳推理和等差数列求和公式．

前n﹣1行共有正整数1+2+…+（n﹣1）个，

即$\frac{n^2-n}{2}$个，

因此第n行第3个数是全体正整数中第$\frac{n^2-n}{2}$+3个，

即为$\frac{n^2-n+6}{2}$．

点评：归纳推理的一般步骤是：（1）通过观察个别情况发现某些相同性质；（2）从已知的相同性质中推出一个明确表达的一般性命题（猜想）．

11．（5分）

考点：基本不等式．

分析：由x﹣2y+3z=0可推出$y=\frac{x+3z}{2}$，代入$\frac{y^2}{xz}$中，消去y，再利用均值不等式求解即可．

解答：解：∵x﹣2y+3z=0，

∴$y=\frac{x+3z}{2}$，

∴$\frac{y^2}{xz}=\frac{x^2+9z^2+6xz}{4xz}\geqslant\frac{6xz+6xz}{4xz}=3$，当且仅当x=3z时取“=”．

故答案为3．

点评：本小题考查了二元基本不等式，运用了消元的思想，是高考考查的重点内容．

12．（5分）

考点：椭圆的简单性质．

专题：计算题；压轴题．

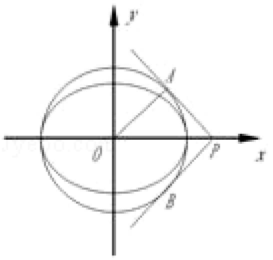
分析：抓住△OAP是等腰直角三角形，建立a，c的关系，问题迎刃而解．

解答：解：设切线PA、PB互相垂直，又半径OA垂直于PA，所以△OAP是等腰直角三角形，

故$\frac{a^2}{c}=\sqrt{2}a$，

解得$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故答案为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．



点评：本题考查了椭圆的离心率，有助于提高学生分析问题的能力．

13．（5分）

考点：三角形中的几何计算．

专题：计算题；压轴题．

分析：设BC=x，根据面积公式用x和sinB表示出三角形的面积，再根据余弦定理用x表示出sinB，代入三角形的面积表达式，进而得到关于x的三角形面积表达式，再根据x的范围求得三角形面积的最大值．

解答：解：设BC=x，则AC=$\sqrt{2}$x，

根据面积公式得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\bullet BC\sin B$

$=\frac{1}{2}\times 2x\sqrt{1-\cos^2 B}$，

根据余弦定理得$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\bullet BC}$

$=\frac{4+x^2-(\sqrt{2}x)^2}{4x}=\frac{4-x^2}{4x}$，

代入上式得

$S_{\triangle ABC}=x\sqrt{1-\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)^2}=\sqrt{\frac{128-(x^2-12)^2}{16}}$，

由三角形三边关系有$\begin{cases}\sqrt{2}x+x>2\\ x+2>\sqrt{2}x\end{cases}$，

解得$2\sqrt{2}-2<x<2\sqrt{2}+2$．

故当$x=2\sqrt{3}$时，$S_{\triangle ABC}$取得最大值$2\sqrt{2}$．

点评：本题主要考查了余弦定理和面积公式在解三角形中的应用．当涉及最值问题时，可考虑用函数的单调性和定义域等问题．

14．（5分）

考点：利用导数求闭区间上函数的最值．

专题：计算题；压轴题．

分析：这类不等式在某个区间上恒成立的问题，可转化为求函数最值的问题，本题要分三类：①x=0，②x＞0，③x＜0等三种情形，当x=0时，不论a取何值，f（x）≥0都成立；当x＞0时有$a\geq\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，可构造函数g（x）＝$\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，然后利用导数求g（x）的最大值，只需要使a≥g（x）$_{max}$，同理可得x＜0时的a的范围，从而可得a的值．

解答：解：若x=0，则不论a取何值，f（x）≥0都成立；

当x＞0即x∈（0，1]时，f（x）=$ax^3-3x+1\geq0$可化为：$a\geq\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$

设g（x）=$\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，则g′（x）=$\frac{3(1-2x)}{x^4}$，

所以g（x）在区间（0，$\frac{1}{2}$]上单调递增，在区间[$\frac{1}{2}$，1]上单调递减，

因此g（x）$_{max}$=g（$\frac{1}{2}$）=4，从而a≥4；

当x＜0即x∈[﹣1，0）时，f（x）=$ax^3-3x+1\geq0$可化为：$a\leq\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，

g（x）=$\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$在区间[﹣1，0）上单调递增，

因此g（x）$_{min}$=g（﹣1）=4，从而a≤4，综上a=4．

答案为：4

点评：本题考查的是含参数不等式的恒成立问题，考查分类讨论，转化与化归的思想方法，利用导数和函数的单调性求函数的最大值，最小值等知识与方法．在讨论时，容易漏掉x=0的情形，因此分类讨论时要特别注意该问题的解答．

二、解答题（共12小题，满分90分）

15．（15分）

考点：两角和与差的正切函数．

分析：（1）先由已知条件得$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；再求sinα、sinβ进而求出tanα、tanβ；

最后利用tan（α+β）=$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$解之．

（2）利用第一问把tan（α+2β）转化为tan[（α+β）+β]求之，再根据α+2β的范围确定角的值．

解答：解：（1）由已知条件即三角函数的定义可知$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

因为α为锐角，则sinα＞0，从而$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

同理可得$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

因此$\tan\alpha=7$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$．

所以$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{7+\frac{1}{2}}{1-7\times\frac{1}{2}}=-3$；

（2）$\tan(\alpha+2\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\beta]=\dfrac{-3+\frac{1}{2}}{1-(-3)\times\frac{1}{2}}=-1$，

又$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，故$0<\alpha+2\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，

所以由$\tan(\alpha+2\beta)=-1$得$\alpha+2\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

点评：本题主要考查正切的和角公式与转化思想．

16．（15分）

考点：直线与平面平行的判定；平面与平面垂直的判定．

专题：证明题．

分析：（1）根据线面平行关系的判定定理，在面ACD内找一条直线和直线EF平行即可，根据中位线可知EF∥AD，EF⊄面ACD，AD⊂面ACD，满足定理条件；

（2）需在其中一个平面内找一条直线和另一个面垂直，由线面垂直推出面面垂直，根据线面垂直的判定定理可知BD⊥面EFC，而BD⊂面BCD，满足定理所需条件．

解答：证明：（1）∵E，F分别是AB，BD的中点．

∴EF是△ABD的中位线，∴EF∥AD，

∵EF⊄面ACD，AD⊂面ACD，∴直线EF∥面ACD；

（2）∵AD⊥BD，EF∥AD，∴EF⊥BD，

∵CB=CD，F是BD的中点，∴CF⊥BD

又EF∩CF=F，∴BD⊥面EFC，

∵BD⊂面BCD，∴面EFC⊥面BCD

点评：本题主要考查线面平行的判定定理，以及面面垂直的判定定理．考查对基础知识的综合应用能力和基本定理的掌握能力．

17．（15分）

考点：在实际问题中建立三角函数模型．

分析：（1）（i）根据题意知PQ垂直平分AB，在直角三角形中由三角函数的关系可推得OP，从而得出y的函数关系式，注意最后要化为最简形式，确定自变量范围．（ii）已知OP，可得出OQ的表达式，由勾股定理推出OA，易得y的函数关系式．

（2）欲确定污水处理厂的位置，使铺设的污水管道的总长度最短也就是最小值问题，（1）中已求出函数关系式，故可以利用导数求解最值，注意结果应与实际情况相符合．

解答：解：（Ⅰ）①由条件知PQ垂直平分AB，若∠BAO=θ（rad），

则$OA=\dfrac{AQ}{\cos\theta}=\dfrac{10}{\cos\theta}$，故$OB=\dfrac{10}{\cos\theta}$，又OP=10﹣10tanθ，

所以$y=OA+OB+OP=\dfrac{10}{\cos\theta}+\dfrac{10}{\cos\theta}+10-10\tan\theta$，

所求函数关系式为$y=\dfrac{20-10\sin\theta}{\cos\theta}+10\ (0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4})$

②若OP=x（km），则OQ=10﹣x，所以OA=OB=$\sqrt{(10-x)^2+10^2}=\sqrt{x^2-20x+200}$

所求函数关系式为$y=x+2\sqrt{x^2-20x+200}$（$0\leqslant x\leqslant 10$）

（Ⅱ）选择函数模型①，

$$y'=\frac{-10\cos\theta\cdot\cos\theta-(20-10\sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{10(2\sin\theta-1)}{\cos^2\theta}$$

令y′=0得$\sin\theta=\frac{1}{2}$，因为$0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$，

当$\theta\in(0,\frac{\pi}{6})$时，y′<0，y是θ的减函数；当$\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$时，y′>0，y是θ的增函数，所以当$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$y_{min}=10+10\sqrt{3}$．这时点P位于线段AB的中垂线上，在矩形区域内且距离AB边$\frac{10\sqrt{3}}{3}$km处．

点评：本小题主要考查函数最值的应用．

①生活中的优化问题，往往涉及到函数的最值，求最值可利用单调性，也可直接利用导数求最值，要掌握求最值的方法和技巧．

②在求实际问题中的最大值或最小值时，一般先设自变量、因变量，建立函数关系式，并确定其定义域，利用求函数最值的方法求解，注意结果应与实际情况相符合．用导数求解实际问题中的最大（小）值时，如果函数在区间内只有一个极值点，那么根据实际意义该极值点也就是最值点．

18．（15分）

考点：二次函数的图象；圆的标准方程．

专题：计算题．

分析：（1）由题意知，由抛物线与坐标轴有三个交点可知抛物线不过原点即b不等于0，然后抛物线与x轴有两个交点即令f（x）=0的根的判别式大于0即可求出b的范围；

（2）设出圆的一般式方程，根据抛物线与坐标轴的交点坐标可知：令y=0得到与f（x）=0一样的方程；令x=0得到方程有一个根是b即可求出圆的方程；

（3）设圆的方程过定点（x_0，y_0），将其代入圆的方程得$x_0^2+y_0^2+2x_0-y_0+b(1-y_0)=0$，因为$x_0$，$y_0$不依赖于b得取值，所以得到$1-y_0=0$即$y_0=1$，代入$x_0^2+y_0^2+2x_0-y_0=0$中即可求出定点的坐标．

解答：解：．（1）令x=0，得抛物线与y轴交点是（0，b）；

令$f(x)=x^2+2x+b=0$，由题意b≠0且△>0，解得b<1且b≠0．

（2）设所求圆的一般方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

令y=0得$x^2+Dx+F=0$这与$x^2+2x+b=0$是同一个方程，故D=2，F=b．

令x=0得$y^2+Ey+F=0$，方程有一个根为b，代入得出E=﹣b﹣1．

所以圆C的方程为$x^2+y^2+2x-(b+1)y+b=0$．

（3）圆C必过定点，证明如下：

假设圆C过定点（x_0，y_0）（x_0，y_0不依赖于b），将该点的坐标代入圆C的方程，

并变形为$x_0^2+y_0^2+2x_0-y_0+b(1-y_0)=0$（*）

为使（*）式对所有满足b<1（b≠0）的b都成立，必须有$1-y_0=0$，结合（*）式得$x_0^2+y_0^2+2x_0-y_0=0$，解得$\begin{cases}x_0=0\\y_0=1\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=-2\\y_0=1\end{cases}$

经检验知，（﹣2，1）均在圆C上，因此圆C过定点．

点评：本小题主要考查二次函数图象与性质、圆的方程的求法．是一道综合题．

19．（15分）

考点：等差数列的性质；等比关系的确定；等比数列的性质．

专题：探究型；分类讨论；反证法．

分析：（1）根据题意，对n=4，n=5时数列中各项的情况逐一讨论，利用反证法结合等差数列的性质进行论证，进而推广到n≥4的所有情况．

（2）利用反证法结合等差数列的性质进行论证即可．

解答：解：（1）①当n=4时，a_1，a_2，a_3，a_4中不可能删去首项或末项，否则等差数列中连续三项成等比数列，则推出d=0．

若删去a_2，则$a_3^2=a_1\bullet a_4$，即$(a_1+2d)^2=a_1\bullet(a_1+3d)$化简得$a_1+4d=0$，得$\frac{a_1}{d}=-4$

若删去a_3，则$a_2^2=a_1\bullet a_4$，即$(a_1+d)^2=a_1\bullet(a_1+3d)$化简得$a_1-d=0$，得$\frac{a_1}{d}=1$

综上，得$\frac{a_1}{d}=-4$或$\frac{a_1}{d}=1$．

②当n=5时，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5中同样不可能删去a_1，a_2，a_4，a_5，否则出现连续三项．

若删去a_3，则$a_1\bullet a_5=a_2\bullet a_4$，即$a_1(a_1+4d)=(a_1+d)\bullet(a_1+3d)$化简得$3d^2=0$，因为d≠0，所以$a_3$不能删去；

当n≥6时，不存在这样的等差数列．事实上，在数列a_1，a_2，a_3，…，a_{n-2}，a_{n-1}，a_n中，由于不能删去首项或末项，

若删去a_2，则必有$a_1\bullet a_n=a_3\bullet a_{n-2}$，这与d≠0矛盾；

同样若删去a_{n-1}也有$a_1\bullet a_n=a_3\bullet a_{n-2}$，这与d≠0矛盾；

若删去a_3，，a_{n-2}中任意一个，则必有$a_1\bullet a_n=a_2\bullet a_{n-1}$，这与d≠0矛盾．（或者说：当n≥6时，无论删去哪一项，剩余的项中必有连续的三项）

综上所述，n=4．

（2）假设对于某个正整数n，存在一个公差为d的n项等差数列b_1，b_2，b_n，其中b_{x+1}，b_{y+1}，b_{z+1}（$0\le x<y<z\le n-1$）为任意三项成等比数列，则$b^2_{y+1}=b_{x+1}\bullet b_{z+1}$，即$(b_1+yd)^2=(b_1+xd)\bullet(b_1+zd)$，化简得$(y^2-xz)d^2=(x+z-2y)b_1d$（*）

由$b_1d\neq0$知，y^2-xz与$x+z-2y$同时为0或同时不为0

当y^2-xz与$x+z-2y$同时为0时，有x=y=z与题设矛盾．

故y^2-xz与$x+z-2y$同时不为0，所以由（*）得$\frac{b_1}{d}=\frac{y^2-xz}{x+z-2y}$

因为$0\le x<y<z\le n-1$，且x、y、z为整数，所以上式右边为有理数，从而$\frac{b_1}{d}$为有理数．

于是，对于任意的正整数n（n≥4），只要$\frac{b_1}{d}$为无理数，相应的数列就是满足题意要求的数列．

例如n项数列1，$1+\sqrt{2}$，$1+2\sqrt{2}$，，$1+(n-1)\sqrt{2}$满足要求．

点评：本题是一道探究性题目，考查了等差数列和等比数列的通项公式，以及学生的运算能力和推理论证能力．

20．（15分）

考点：指数函数综合题．

专题：计算题；压轴题；分类讨论．

分析：（1）根据题意，先证充分性：由f（x）的定义可知，f（x）=f_1（x）对所有实数成立，等价于$f_1(x)\le f_2(x)$对所有实数x成立等价于$3^{|x-p_1|}\leqslant 2\bullet 3^{|x-p_2|}$，即$3^{|x-p_1|-|x-p_2|}\leqslant 3^{\log_3 2}=2$对所有实数x均成立，分析容易得证；再证必要性：$3^{|x-p_1|-|x-p_2|}\leqslant 3^{\log_3 2}=2$对所有实数x均成立等价于

$3^{|p_1-p_2|}\leqslant 2$，即$|p_1-p_2|\le\log_3 2$，

（2）分两种情形讨论：①当$|p_1-p_2|\le\log_3 2$时，由中值定理及函数的单调性得到函数f（x）在区间[a，b]上的单调增区间的长度；②当$|p_1-p_2|>\log_3 2$时，a，b是两个实数，满足a＜b，且p_1，$p_2\in$（a，b）．若f（a）=f（b），根据图象和函数的单调性得到函数f（x）在区间[a，b]上的单调增区间的长度．

解答：解：（1）由f（x）的定义可知，f（x）=f_1（x）（对所有实数x）等价于$f_1(x)\le f_2(x)$（对所有实数x）

这又等价于$3^{|x-p_1|}\leqslant 2\cdot 3^{|x-p_2|}$，即$3^{|x-p_1|-|x-p_2|}\leqslant 3^{\log_3 2}=2$对所有实数x均成立．（*）

由于$|x-p_1|-|x-p_2|\le|(x-p_1)-(x-p_2)|=|p_1-p_2|$（x∈R）的最大值为$|p_1-p_2|$，

故（*）等价于$3^{|p_1-p_2|}\leqslant 2$，即$|p_1-p_2|\le\log_3 2$，这就是所求的充分必要条件

（2）分两种情形讨论

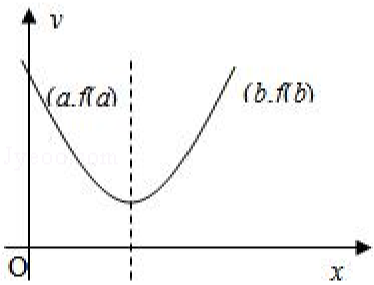
（i）当$|p_1-p_2|\le\log_3 2$时，由（1）知f（x）=f_1（x）（对所有实数x∈[a，b]）

则由f（a）=f（b）及$a<p_1<b$易知$p_1=\dfrac{a+b}{2}$，

再由$f_1(x)=\begin{cases}3^{p_1-x}, & x<p_1\\ 3^{x-p_1}, & x\geqslant p_1\end{cases}$的单调性可知，

函数f（x）在区间[a，b]上的单调增区间的长度

为$b-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}$（参见示意图）



（ii）$|p_1-p_2|>\log_3 2$时，不妨设$p_1<p_2$，，则$p_2-p_1>\log_3 2$，于是

当$x\le p_1$时，有$f_1(x)=3^{p_1-x}<3^{p_2-x}<f_2(x)$，从而f（x）=$f_1$（x）；

当$x\ge p_2$时，有$f_1(x)=3^{x-p_1}=3^{p_2-p_1+x-p_2}=3^{p_2-p_1}\cdot 3^{x-p_2}>3^{\log_3 2}\cdot 3^{x-p_2}=f_2(x)$

从而f（x）=f_2（x）；当$p_1<x<p_2$时，$f_1(x)=3^{x-p_1}$，及$f_2(x)=2\cdot 3^{p_2-x}$，由方程

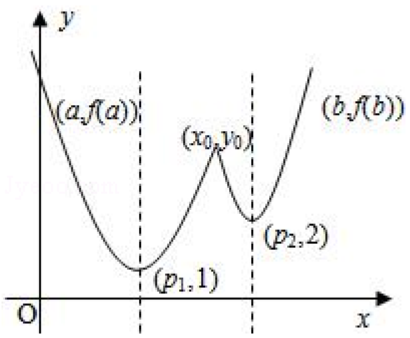
$3^{x-p_1}=2\cdot 3^{p_2-x}$

解得f_1（x）与f_2（x）图象交点的横坐标为$x_0=\dfrac{p_1+p_2}{2}+\dfrac{1}{2}\log_3 2$（1）

显然$p_1<x_0=p_2-\dfrac{1}{2}[(p_2-p_1)-\log_3 2]<p_2$，

这表明x_0在p_1与p_2之间．由（1）易知$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & p_1\leqslant x\leqslant x_0\\ f_2(x), & x_0<x\leqslant p_2\end{cases}$

综上可知，在区间[a，b]上，$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & a\leqslant x\leqslant x_0\\ f_2(x), & x_0<x\leqslant b\end{cases}$（参见示意图）



故由函数f_1（x）及f_2（x）的单调性可知，f（x）在区间[a，b]上的单调增区间的长度之和为（x_0-p_1）+（$b-p_2$），由于f（a）=f（b），即$3^{p_1-a}=2\cdot 3^{b-p_2}$，得$p_1+p_2=a+b+\log_3 2$（2）

故由（1）、（2）得$(x_0-p_1)+(b-p_2)=b-\frac{1}{2}[p_1+p_2-\log_3 2]=\frac{b-a}{2}$

综合（i）（ii）可知，f（x）在区间[a，b]上的单调增区间的长度和为$\frac{b-a}{2}$.

点评：考查学生理解充分必要条件的证明方法，用数形结合的数学思想解决问题的能力，以及充分必要条件的证明方法.

21．（2008•江苏）

考点：与圆有关的比例线段；二阶行列式与逆矩阵；简单曲线的极坐标方程；不等式的证明.

分析：根据已知EA是圆的切线，AC为过切点A的弦得两个角相等，再结合角平分线条件，从而得到△EAD是等腰三角形，再根据切割线定理即可证得.

解答：证明：因为EA是圆的切线，AC为过切点A的弦，

所以∠CAE=∠CBA.

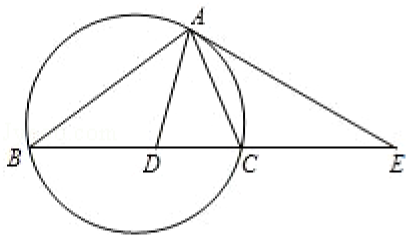
又因为AD是ÐBAC的平分线，所以∠BAD=∠CAD

所以∠DAE=∠DAC+∠EAC=∠BAD+∠CBA=∠ADE

所以，△EAD是等腰三角形，所以EA=ED.

又EA^2=EC•EB，

所以ED^2=EB•EC.



点评：此题主要是运用了弦切角定理的切割线定理．注意：切线长的平方应是EB和EC的乘积.

22．（2008•江苏）

考点：圆的标准方程；矩阵变换的性质.

专题：计算题.

分析：由题意先设椭圆上任意一点P（x_0，y_0），根据矩阵与变换的公式求出对应的点P′（x_0'，y_0'），得到两点的关系式，再由点P在椭圆上代入化简.

解答：解：设P（x_0，y_0）是椭圆上任意一点，

则点P（x_0，y_0）在矩阵A对应的变换下变为点P′（x_0'，y_0'）

则有$\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，即$\begin{cases}x_0'=2x_0\\y_0'=y_0\end{cases}$，所以$\begin{cases}x_0=\dfrac{x_0'}{2}\\y_0=y_0'\end{cases}$

又因为点P在椭圆上，故$4x_0^2+y_0^2=1$，从而（x_0'）^{2}+（y_0'）^{2}=1

所以，曲线F的方程是$x^2+y^2=1$

点评：本题主要考查了矩阵与变换的运算，结合求轨迹方程得方法：代入法求解；是一个较综合的题目．

23．（2008•江苏）

考点：椭圆的参数方程．

专题：计算题；转化思想．

分析：先根据椭圆的标准方程进行三角代换表示椭圆上任意一点，然后利用三角函数的辅助角公式进行化简，即可求出所求．

解答：解：因椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\phi\\y=\sin\phi\end{cases}$（φ为参数）

故可设动点P的坐标为（$\sqrt{3}\cos\phi$，$\sin\phi$），其中0≤φ<2π．

因此$S=x+y=\sqrt{3}\cos\phi+\sin\phi=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi+\frac{1}{2}\sin\phi\right)=2\sin\left(\phi+\frac{\pi}{3}\right)$

所以，当$\phi=\frac{\pi}{6}$时，S取最大值2．

点评：本题主要考查了椭圆的简单性质及参数方程的问题．考查了学生综合分析问题和解决问题的能力．

24．（2008•江苏）

考点：平均值不等式；不等式的证明．

专题：证明题．

分析：先根据平均值不等式证明$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\geqslant\frac{3}{abc}+abc$，再证$\frac{3}{abc}+abc\geqslant2\sqrt{\frac{3}{abc}\cdot abc}=2\sqrt{3}$．

解答：证明：因为a，b，c为正实数，由平均不等式可得$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}\cdot\frac{1}{c^3}}$，

即$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geqslant\frac{3}{abc}$，

所以，$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\geqslant\frac{3}{abc}+abc$，

而$\frac{3}{abc}+abc\geqslant2\sqrt{\frac{3}{abc}\cdot abc}=2\sqrt{3}$，

所以，$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\geqslant2\sqrt{3}$

点评：本题考查平均值不等式的应用，n个正数的算术平均数$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$大于或等于它们的几何平均数$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$．

25．（2008•江苏）

考点：用空间向量求直线间的夹角、距离．

专题：计算题；压轴题．

分析：由题意易知∠APC不可能为平角，则∠APC为钝角等价于$\cos\angle APC=\cos<\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}>=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}<0$，即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}<0$，再将$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PC}$用关于λ的字母表示，根据向量数量积的坐标运算即可

解答：解：由题设可知，以$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DD_1}$为单位正交基底，

建立如图所示的空间直角坐标系D－xyz，

则有A（1，0，0），B（1，1，0），C（0，1，0），D（0，0，1）

由$\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$，得$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}=(\lambda,\lambda,-\lambda)$，所以

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{D_1A}=(-\lambda,-\lambda,\lambda)+(1,0,-1)=(1-\lambda,-\lambda,\lambda-1)$

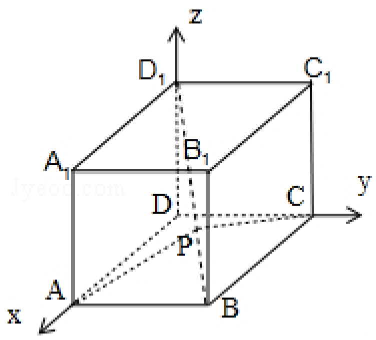
$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{D_1C}=(-\lambda,-\lambda,\lambda)+(0,1,-1)=(-\lambda,1-\lambda,\lambda-1)$

显然∠APC不是平角，所以∠APC为钝角等价于$\cos\angle APC=\cos<\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}>=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}<0$，则等价于

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}<0$

即（1－λ）（－λ）＋（－λ）（1－λ）＋（λ－1）^{2}＝（λ－1）（3λ－1）＜0，得$\frac{1}{3}<\lambda<1$

因此，λ的取值范围是$(\frac{1}{3},1)$



点评：本题考查了用空间向量求直线间的夹角，一元二次不等式的解法，属于基础题．

26．（2008•江苏）请先阅读：

考点：微积分基本定理；二项式定理；类比推理．

专题：证明题；综合题；压轴题．

分析：（1）对二项式定理的展开式两边求导数，移项得到恒等式．

（2）（i）对（1）中的x 赋值－1，整理得到恒等式．

（ii）对二项式的定理的两边对x求导数，再对得到的等式对x两边求导数，给x赋值－1化简即得证．

（iii）对二项式定理的两边求定积分；利用微积分基本定理求出两边的值，得到要证的等式．

解答：证明：（1）在等式$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2++C_n^nx^n$两边对x求导得$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x++(n-1)C_n^{n-1}x^{n-2}+nC_n^nx^{n-1}$

移项得$n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$（*）

（2）（i）在（*）式中，令$x=-1$，整理得$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k=0$

所以$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}kC_n^k=0$

（ii）由（1）知$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+\ldots+(n-1)C_n^{n-1}x^{n-2}+nC_n^nx^{n-1}$，$n\geq3$

两边对x求导，得$n(n-1)(1+x)^{n-2}=2C_n^2+3\bullet2C_n^3x+\ldots+n(n-1)C_n^nx^{n-2}$

在上式中，令$x=-1$，得$0=2C_n^2+3\bullet2C_n^3(-1)+\ldots+n(n-1)C_n^2(-1)^{n-2}$

即$\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k(-1)^{k-2}=0$，

亦即$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}(k^2-k)C_n^k=0$（1）

又由（i）知$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}kC_n^k=0$（2）

由（1）+（2）得$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}k^2C_n^k=0$

（iii）将等式$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$两边在[0，1]上对x积分

$$\int_0^1(1+x)^ndx=\int_0^1(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)dx$$

由微积分基本定理，得$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^kx^{k+1}\right)\Big|_0^1$

所以$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

点评：本题考查导数的运算法则、考查通过赋值求系数和问题、考查微积分基本定理．