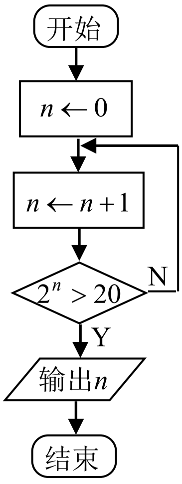
2014年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

1. 已知集合$A=\{-2,-1,3,4\}$，$B=\{-1,2,3\}$，则$A\cap B=$_▲_.

2. 已知复数$z=(5+2\mathrm{i})^2$ (i为虚数单位),则z的实部为_▲_.

3. 右图是一个算法流程图,则输出的n的值是_▲_.



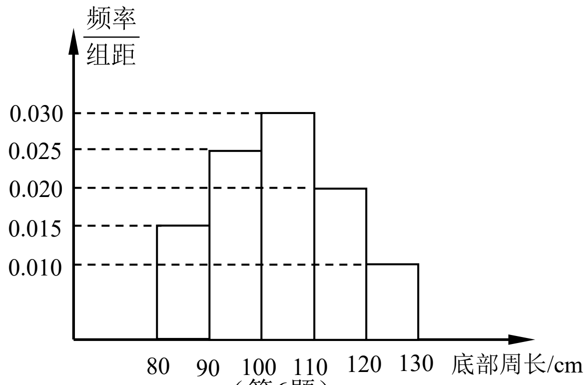
（第3题）

4. 从1,2,3,6这4个数中一次随机地取2个数,则所取2个数的乘积为6的概率是_▲_.

5. 已知函数$y=\cos x$与$y=\sin(2x+\varphi)$ $(0\leqslant\varphi<\pi)$,zxxk它们的图象有一个横坐标为$\dfrac{\pi}{3}$的交点,则φ的值是_▲_.

6.

设抽测的树木的底部周长均在区间[80,130]上,其频率分布直方图如图所示,则在抽测的60株树木中,有_▲_株树木的底部周长小于100cm.



（第6题）

7. 在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=1$, $a_8=a_6+2a_4$,则a_6的值是_▲_.

8.

设甲、乙两个圆柱的底面分别为S_1，S_2，体积分别为V_1，V_2，若它们的侧面积相等，且$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{9}{4}$，则$\dfrac{V_1}{V_2}$的值是_▲_.

9. 在平面直角坐标系xOy中,直线$x+2y-3=0$被圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$截得的弦长为_▲_.

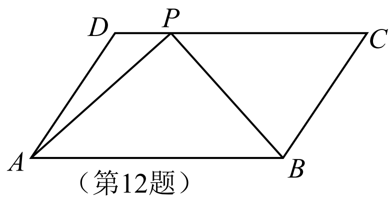
10.

已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$,若对于任意 $x\in[m,m+1]$,都有 $f(x)<0$ 成立,则实数 m 的取值范围是▲.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，若曲线 $y=ax^2+\dfrac{b}{x}$(a，b为常数)

zxxk过点 $P(2,-5)$，且该曲线在点P处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行，则 $a+b$ 的值是▲.

12. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=8$，$AD=5$，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是▲.



（第12题）

13.

已知 $f(x)$ 是定义在**R**上且周期为3的函数,当 $x\in[0,3)$ 时,$f(x)=|x^2-2x+\dfrac{1}{2}|$.若函数 $y=f(x)-a$ 在区间 $[-3,4]$ 上有10个零点(互不相同),则实数 a 的取值范围是▲.

14. 若△ABC 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$,则 $\cos C$ 的最小值是▲.

二、解答题：本大题共6小题，共计90分．请在答题卡指定区域内作答，学科网解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本小题满分14分)

已知 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

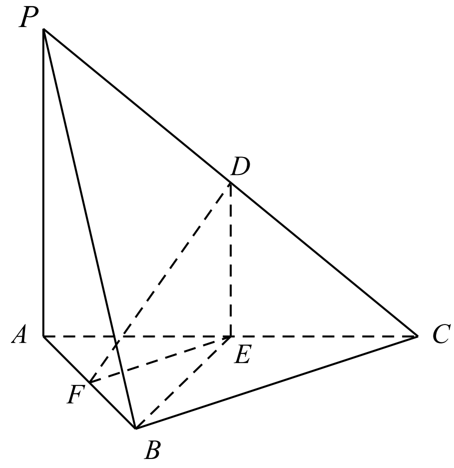
(1)求 $\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$ 的值;

(2)求 $\cos(\dfrac{5\pi}{6}-2\alpha)$ 的值.

16.(本小题满分14分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，D，E，F分zxxk别为棱 PC,AC,AB 的中点.已知

$PA \perp AC$, $PA = 6$,
$BC = 8, DF = 5$.
求证: (1)直线 PA // 平面 DEF ；
(2)平面 $BDE \perp$ 平面 ABC .



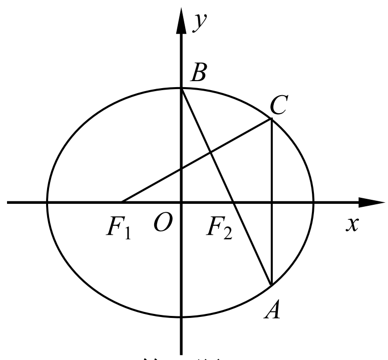
（第16题）

17.(本小题满分14分)

如图,在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，顶点 B 的坐标为 $(0,b)$ ，连结 BF_2 并延长交椭圆于点A，过点A作 x 轴的垂线交椭圆于另一点C，连结 F_1C .

(1)若点C的坐标为 $(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$,且 $BF_2=\sqrt{2}$,求椭圆的方程;

(2)若 $F_1C \perp AB$, 求椭圆离心率e的值.



(第17题)

18.(本小题满分16分)

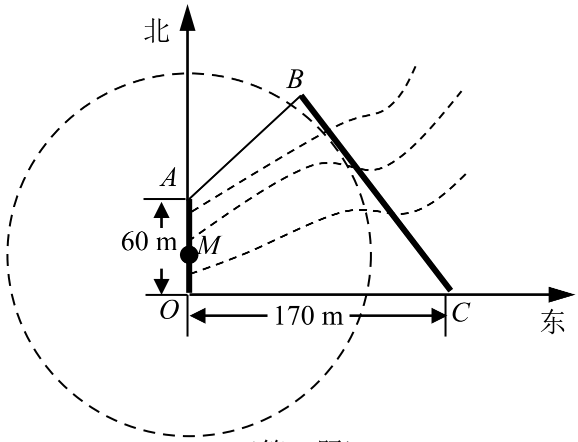
如图,为了保护河上古桥 OA ,规划建一座新桥BC,同时设立一个圆形学科网保护区.规划要求:新桥BC与河岸AB垂直;保护区的边界为圆心M在线段OA上并与BC相切的圆.且古桥两端O和A到该圆上任意一点的距离均不少于80m.

经测量，点A位于点O正北方向60m处，　　　点C位于点O正东方向170m处(OC为河岸)，

$\tan\angle BCO=\dfrac{4}{3}$.

(1)求新桥BC的长；

(2)当OM多长时,圆形保护区的面积最大？



（第18题）

19.(本小题满分16分)

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$,其中e是自然对数的底数.

(1)证明: $f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数；

(2)若关于x的不等式$mf(x)\le \mathrm{e}^{-x}+m-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，学科网求实数$m$的取值范围；

(3)已知正数a满足：存在$x_0\in[1,+\infty)$，使得$f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立.试比较e^{a-1}与$a^{\mathrm{e}-1}$的大小，并证明你的结论.

20.(本小题满分16分)

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若对任意正整数n，学科网总存在正整数m，使得$S_n=a_m$，则称$\{a_n\}$是“H数列”.

(1)若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n$($n\in\mathbf{N}^*$),证明: $\{a_n\}$是“H数列”；

(2)设$\{a_n\}$ 是等差数列,其首项$a_1=1$,公差$d<0$.若$\{a_n\}$ 是“H数列”,求d的值；

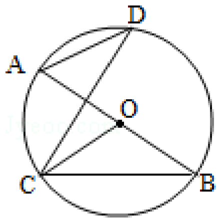
(3)证明：对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个“H数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得

$a_n=b_n+c_n$

($n\in\mathbf{N}^*$)成立.

三、附加题（本大题包括选做题和必做题两部分）（一）选择题（本题包括21、22、23、24四小题，请选定其中两个小题作答，若多做，则按作答的前两个小题评分）【选修4-1：几何证明选讲】

21．（10分）（2014•江苏）如图，AB是圆O的直径，C，D是圆O上位于AB异侧的两点，证明：∠OCB=∠D．



【选修4-2：矩阵与变换】

22．（10分）（2014•江苏）已知矩阵A=$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & x\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，向量$\overrightarrow{\alpha}$=$\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}$，x，y为实数，若A$\overrightarrow{\alpha}$=B$\overrightarrow{\alpha}$，求x+y的值．

【选修4-3：极坐标及参数方程】

23．（2014•江苏）在平面直角坐标系xOy中，已知直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（t为参数），直线l与抛物线$y^2=4x$相交于A，B两点，求线段AB的长．

【选修4-4：不等式选讲】

24．（2014•江苏）已知x＞0，y＞0，证明$(1+x+y^2)(1+x^2+y)\geq 9xy$．

(二）必做题（本部分包括25、26两题，每题10分，共计20分）

25．（10分）（2014•江苏）盒中共有9个球，其中有4个红球，3个黄球和2个绿球，这些球除颜色外完全相同．

（1）从盒中一次随机取出2个球，求取出的2个球颜色相同的概率P；

（2）从盒中一次随机取出4个球，其中红球、黄球、绿球的个数分别记为x_1，x_2，x_3，随机变量X表示x_1，x_2，x_3中的最大数，求X的概率分布和数学期望E（X）．

26．（10分）（2014•江苏）已知函数f_0（x）$=\frac{\sin x}{x}$（x＞0），设f_n（x）为f_{n-1}（x）的导数，$n\in N^*$．

（1）求$2f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$的值；

（2）证明：对任意$n\in N^*$，等式$\left|nf_{n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$都成立．

2014年江苏省高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共计70分）

1．（5分）（2014•江苏）已知集合A={﹣2，﹣1，3，4}，B={﹣1，2，3}，则A∩B=__{﹣1，3}__．

考点：交集及其运算．

专题：集合．

分析：根据集合的基本运算即可得到结论．

解答：解：∵A={﹣2，﹣1，3，4}，B={﹣1，2，3}，

∴A∩B={﹣1，3}，

故答案为：{﹣1，3}

点评：本题主要考查集合的基本运算，比较基础．

2．（5分）（2014•江苏）已知复数z=（5+2i）^{2}（i为虚数单位），则z的实部为__21__．

考点：复数的基本概念；复数代数形式的乘除运算．

专题：数系的扩充和复数．

分析：根据复数的有关概念，即可得到结论．

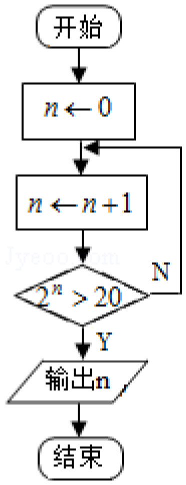
解答：解：z=（5+2i）^{2}=25+20i+4i^2=25﹣4+20i=21+20i，

故z的实部为21，

故答案为：21

点评：本题主要考查复数的有关概念，利用复数的基本运算是解决本题的关键，比较基础．

3．（5分）（2014•江苏）如图是一个算法流程图，则输出的n的值是__5__．



考点：程序框图．

专题：算法和程序框图．

分析：算法的功能是求满足$2^n>20$的最小的正整数n的值，代入正整数n验证可得答案．

解答：解：由程序框图知：算法的功能是求满足$2^n>20$的最小的正整数n的值，

∵$2^4=16<20$，$2^5=32>20$，

∴输出n=5．

故答案为：5．

点评：本题考查了直到型循环结构的程序框图，根据框图的流程判断算法的功能是解题的关键．

4．（5分）（2014•江苏）从1，2，3，6这4个数中一次随机抽取2个数，则所取2个数的乘积为6的概率是__$\frac{1}{3}$__．

考点：古典概型及其概率计算公式．

专题：概率与统计．

分析：首先列举并求出“从1，2，3，6这4个数中一次随机抽取2个数”的基本事件的个数再从中找到满足“所取2个数的乘积为6”的事件的个数，利用概率公式计算即可．

解答：解：从1，2，3，6这4个数中一次随机抽取2个数的所有基本事件有（1，2），（1，3），（1，6），（2，3），（2，6），（3，6）共6个，

所取2个数的乘积为6的基本事件有（1，6），（2，3）共2个，

故所求概率P=$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$．

故答案为：$\frac{1}{3}$．

点评：本题主要考查了古典概型的概率公式的应用，关键是一一列举出所有的基本事件．

5．（5分）（2014•江苏）已知函数y=cosx与y=sin（2x+φ）（0≤φ＜π），它们的图象有一个横坐标为$\frac{\pi}{3}$的交点，则φ的值是__$\frac{\pi}{6}$__．

考点：三角方程；函数的零点．

专题：三角函数的求值；三角函数的图像与性质．

分析：由于函数y=cosx与y=sin（2x+φ），它们的图象有一个横坐标为$\frac{\pi}{3}$的交点，可得$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\phi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$．根据φ的范围和正弦函数的单调性即可得出．

解答：解：∵函数y=cosx与y=sin（2x+φ），它们的图象有一个横坐标为$\frac{\pi}{3}$的交点，

$\therefore\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\phi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$．

∵0≤φ＜π，$\therefore\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}+\phi\leqslant\frac{5\pi}{3}$，

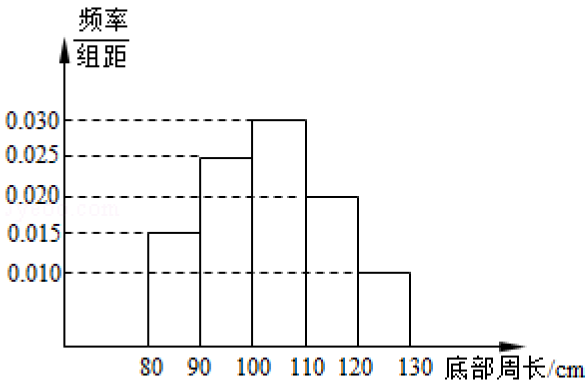
$\therefore\frac{2\pi}{3}+\phi=\frac{5\pi}{6}$，

解得$\phi=\frac{\pi}{6}$．

故答案为：$\frac{\pi}{6}$．

点评：本题考查了三角函数的图象与性质、三角函数求值，属于基础题．

6．（5分）（2014•江苏）为了了解一片经济林的生长情况，随机抽测了其中60株树木的底部周长（单位：cm），所得数据均在区间[80，130]上，其频率分布直方图如图所示，则在抽测的60株树木中，有__24__株树木的底部周长小于100cm．



考点：频率分布直方图．

专题：概率与统计．

分析：根据频率=小矩形的面积=小矩形的高×组距底部求出周长小于100cm的频率，再根据频数=样本容量×频率求出底部周长小于100cm的频数．

解答：解：由频率分布直方图知：底部周长小于100cm的频率为（0.015+0.025）×10=0.4，

∴底部周长小于100cm的频数为60×0.4=24（株）．

故答案为：24．

点评：本题考查了频率分布直方图，在频率分布直方图中频率=小矩形的面积=小矩形的高×组距$=\frac{频数}{样本容量}$．

7．（5分）（2014•江苏）在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2=1$，$a_8=a_6+2a_4$，则a_6的值是__4__．

考点：等比数列的通项公式．

专题：等差数列与等比数列．

分析：利用等比数列的通项公式即可得出．

解答：解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q>0$，$a_1>0$．

$\because a_8=a_6+2a_4$，

$\therefore a_1q^7=a_1q^5+2a_1q^3$，

化为$q^4-q^2-2=0$，解得$q^2=2$．

$\therefore a_6=a_1q^5=a_2q^4=1\times2^2=4$.

故答案为：4．

点评：本题考查了等比数列的通项公式，属于基础题．

8．（5分）（2014•江苏）设甲、乙两个圆柱的底面积分别为S_1，S_2，体积分别为V_1，V_2，若它们的侧面积相等，且$\frac{S_1}{S_2}=\frac{9}{4}$，则$\frac{V_1}{V_2}$的值是__$\frac{3}{2}$__．

考点：棱柱、棱锥、棱台的体积；旋转体（圆柱、圆锥、圆台）．

专题：立体几何．

分析：设出两个圆柱的底面半径与高，通过侧面积相等，推出高的比，然后求解体积的比．

解答：解：设两个圆柱的底面半径分别为R，r；高分别为H，h；

$\because\frac{S_1}{S_2}=\frac{9}{4}$，

$\therefore\frac{R}{r}=\frac{3}{2}$，它们的侧面积相等，$\frac{2\pi RH}{2\pi rh}=1$

$\therefore\frac{H}{h}=\frac{2}{3}$，

$\therefore\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R^2H}{\pi r^2h}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$．

故答案为：$\frac{3}{2}$．

点评：本题考查柱体体积公式以及侧面积公式的直接应用，是基础题目．

9．（5分）（2014•江苏）在平面直角坐标系xOy中，直线x+2y﹣3=0被圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$截得的弦长为__$\frac{2\sqrt{55}}{5}$__．

考点：直线与圆的位置关系．

专题：直线与圆．

分析：求出已知圆的圆心为C（2，﹣1），半径r=2．利用点到直线的距离公式，算出点C到直线直线l的距离d，由垂径定理加以计算，可得直线x+2y﹣3=0被圆截得的弦长．

解答：解：圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$的圆心为C（2，﹣1），半径r=2，

：

$\because$点C到直线直线x+2y－3=0的距离$d=\frac{|2-2-3|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$，

$\therefore$根据垂径定理，得直线x+2y－3=0被圆（x－2）^{2}+（y+1）^{2}=4截得的弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{9}{5}}=\frac{2\sqrt{55}}{5}$

故答案为：$\frac{2\sqrt{55}}{5}$.

点评：本题给出直线与圆的方程，求直线被圆截得的弦长，着重考查点到直线的距离公式、圆的方程和直线与圆的位置关系等知识，属于基础题.

10．（5分）（2014•江苏）已知函数f（x）=x^2+mx－1，若对于任意x∈[m，m+1]，都有f（x）＜0成立，则实数m的取值范围是__（$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，0）__.

考点：二次函数的性质.

专题：函数的性质及应用.

分析：由条件利用二次函数的性质可得$\begin{cases}f(m)=2m^2-1<0\\ f(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1<0\end{cases}$，由此求得m的范围.

解答：解：$\because$二次函数f（x）=x^2+mx－1的图象开口向上，

对于任意x∈[m，m+1]，都有f（x）＜0成立，$\therefore$

$\begin{cases}f(m)=2m^2-1<0\\ f(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1<0\end{cases}$，

即$\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ m(2m+3)<0\end{cases}$，解得$-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$，

故答案为：（$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，0）.

点评：本题主要考查二次函数的性质应用，体现了转化的数学思想，属于基础题.

11．（5分）（2014•江苏）在平面直角坐标系xOy中，若曲线$y=ax^2+\frac{b}{x}$（a，b为常数）过点P（2，－5），且该曲线在点P处的切线与直线7x+2y+3=0平行，则a+b的值是__－3__.

考点：利用导数研究曲线上某点切线方程.

专题：导数的概念及应用.

：

分析：由曲线$y=ax^2+\frac{b}{x}$（a，b为常数）过点P（2，﹣5），且该曲线在点P处的切线与直线7x+2y+3=0平行，可得$y|_{x=2}=-5$，且$y'|_{x=2}=-\frac{7}{2}$，解方程可得答案．

解答：解：∵直线7x+2y+3=0的斜率$k=-\frac{7}{2}$，

曲线$y=ax^2+\frac{b}{x}$（a，b为常数）过点P（2，﹣5），且该曲线在点P处的切线与直线7x+2y+3=0平行，

∴$y'=2ax-\frac{b}{x^2}$，

∴$\begin{cases}4a+\frac{b}{2}=-5\\4a-\frac{b}{4}=-\frac{7}{2}\end{cases}$，

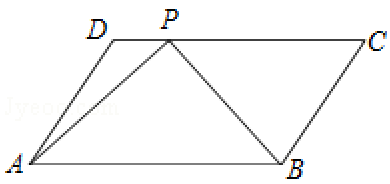
解得：$\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$，

故a+b=﹣3，

故答案为：﹣3

点评：本题考查的知识点是利用导数研究曲线上某点切线方程，其中根据已知得到$y|_{x=2}=-5$，且$y'|_{x=2}=-\frac{7}{2}$，是解答的关键．

12．（5分）（2014•江苏）如图，在平行四边形ABCD中，已知AB=8，AD=5，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=2$，则$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}$的值是__22__．



考点：向量在几何中的应用；平面向量数量积的运算．

专题：平面向量及应用．

分析：由$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，可得$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，进而由AB=8，AD=5，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=2$，构造方程，进而可得答案．

解答：解：∵$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，

又∵AB=8，AD=5，

$\therefore \overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})\bullet(\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}-\frac{3}{16}|\overrightarrow{AB}|^2=25-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}-12=2$，

故$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=22$，

故答案为：22．

点评：本题考查的知识点是向量在几何中的应用，平面向量数量积的运算，其中根据已知得到$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，是解答的关键．

13．（5分）（2014•江苏）已知f（x）是定义在R上且周期为3的函数，当x∈[0，3）时，f（x）$=|x^2-2x+\frac{1}{2}|$，若函数y=f（x）﹣a在区间[﹣3，4]上有10个零点（互不相同），则实数a的取值范围是___$(0,\frac{1}{2})$___．

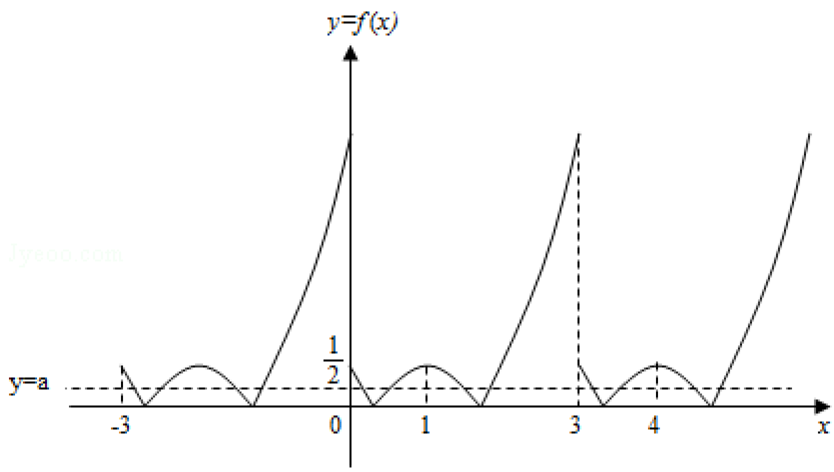
考点：根的存在性及根的个数判断．

专题：函数的性质及应用．

分析：在同一坐标系中画出函数的图象与直线y=a的图象，利用数形结合判断a的范围即可．

解答：解：f（x）是定义在R上且周期为3的函数，当x∈[0，3）时，f（x）$=|x^2-2x+\frac{1}{2}|$，若函数y=f（x）﹣a在区间[﹣3，4]上有10个零点（互不相同），在同一坐标系中画出函数f（x）与y=a的图象如图：由图象可知$a\in(0,\frac{1}{2})$．

故答案为：$(0,\frac{1}{2})$．



点评：本题考查函数的图象以函数的零点的求法，数形结合的应用．

14．（5分）（2014•江苏）若△ABC的内角满足$\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$，则cosC的最小值是__$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$__．

考点：余弦定理；正弦定理．

专题：三角函数的图像与性质；解三角形．

分析：根据正弦定理和余弦定理，利用基本不等式即可得到结论．

解答：解：由正弦定理得$a+\sqrt{2}b=2c$，得$c=\frac{1}{2}(a+\sqrt{2}b)$，

由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{4}(a+\sqrt{2}b)^2}{2ab}=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{\sqrt{2}}{2}ab}{2ab}$

$=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2}{2ab}-\frac{\sqrt{2}}{4}\geq\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b}{2ab}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}b$时，取等号，

故$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\leq\cos C<1$，故cosC的最小值是$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$．

点评：本题主要考查正弦定理和余弦定理的应用，利用基本不等式是解决本题的关键．

二、解答题（本大题共6小题，共计90分）

15．（14分）（2014•江苏）已知$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

（1）求$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$的值；

（2）求$\cos(\frac{5\pi}{6}-2\alpha)$的值．

考点：两角和与差的正弦函数；两角和与差的余弦函数．

专题：三角函数的求值；三角函数的图像与性质．

分析：（1）通过已知条件求出cosα，然后利用两角和的正弦函数求$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$的值；

（2）求出cos2α，然后利用两角差的余弦函数求cos（$\frac{5\pi}{6}$ - 2α）的值.

解答：解：α∈（$\frac{\pi}{2}$，π），sinα=$\frac{\sqrt{5}}{5}$. ∴cosα= - $\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

（1）sin（$\frac{\pi}{4}$+α）=sin$\frac{\pi}{4}$cosα+cos$\frac{\pi}{4}$sinα=$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$;

∴sin（$\frac{\pi}{4}$+α）的值为： - $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

（2）∵α∈（$\frac{\pi}{2}$，π），sinα=$\frac{\sqrt{5}}{5}$. ∴cos2α=1 - 2sin^{2}α=$\frac{3}{5}$，sin2α=2sinαcosα= - $\frac{4}{5}$

∴cos（$\frac{5\pi}{6}$ - 2α）=cos$\frac{5\pi}{6}$cos2α+sin$\frac{5\pi}{6}$sin2α=$-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

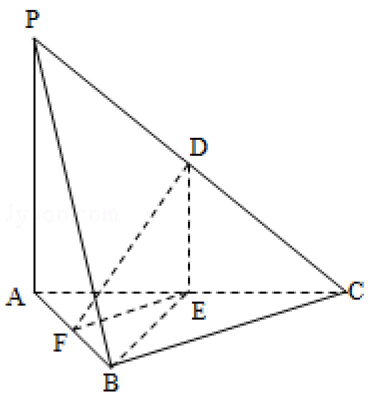
cos（$\frac{5\pi}{6}$ - 2α）的值为： - $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

点评：本题考查两角和与差的三角函数，三角函数的基本关系式的应用，考查计算能力.

16. （14分）（2014•江苏）如图，在三棱锥P - ABC中，D，E，F分别为棱PC，AC，AB的中点，已知PA⊥AC，PA=6，BC=8，DF=5．求证：

（1）直线PA∥平面DEF;

（2）平面BDE⊥平面ABC.



考点：平面与平面垂直的判定；直线与平面垂直的判定.

专题：空间位置关系与距离；空间角；立体几何.

分析：（1）由D、E为PC、AC的中点，得出DE∥PA，从而得出PA∥平面DEF;

（2）要证平面BDE⊥平面ABC，只需证DE⊥平面ABC，即证DE⊥EF，且DE⊥AC即可.

解答：证明：（1）∵D、E为PC、AC的中点，∴DE∥PA，

又∵PA⊄平面DEF，DE⊂平面DEF，

∴PA∥平面DEF;

（2）∵D、E为PC、AC的中点，∴$DE=\frac{1}{2}PA=3$；

又∵E、F为AC、AB的中点，∴$EF=\frac{1}{2}BC=4$；

∴$DE^2+EF^2=DF^2$，

∴∠DEF=90°，

∴DE⊥EF；

∵DE∥PA，PA⊥AC，∴DE⊥AC；

∵AC∩EF=E，∴DE⊥平面ABC；

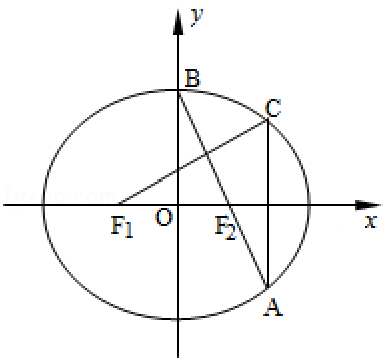
∵DE⊂平面BDE，∴平面BDE⊥平面ABC．

点评：本题考查了空间中的平行与垂直问题，解题时应明确空间中的线线、线面、面面之间的垂直与平行的互相转化关系，是基础题目．

17．（14分）（2014•江苏）如图，在平面直角坐标系xOy中，F_1，F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点，顶点B的坐标为（0，b），连接BF_2并延长交椭圆于点A，过点A作x轴的垂线交椭圆于另一点C，连接F_1C．

（1）若点C的坐标为（$\frac{4}{3}$，$\frac{1}{3}$），且$BF_2=\sqrt{2}$，求椭圆的方程；

（2）若$F_1C⊥AB$，求椭圆离心率e的值．



考点：椭圆的简单性质；椭圆的标准方程．

专题：圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析：（1）根据椭圆的定义，建立方程关系即可求出a，b的值．

（2）求出C的坐标，利用$F_1C⊥AB$建立斜率之间的关系，解方程即可求出e的值．

解答：解：（1）∵C的坐标为（$\frac{4}{3}$，$\frac{1}{3}$），

∴$\frac{\frac{16}{9}}{a^2}+\frac{\frac{1}{9}}{b^2}=1$，即$\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=9$，

∵$BF_2^2=b^2+c^2=a^2$，

$\therefore a^2=(\sqrt{2})^2=2$，即$b^2=1$，

则椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）设F_1（﹣c，0），F_2（c，0），

∵B（0，b），

∴直线BF_2：$y=-\frac{b}{c}x+b$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）得$(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2})x^2-\frac{2}{c}x=0$，

解得x=0，或$x=\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$，

∵A$(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2})$，且A，C关于x轴对称，

∴C$(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},-\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2})$，

则$k_{F_1C}=-\frac{\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}}{\frac{2a^2c}{a^2+c^2}+c}=\frac{a^2b-bc^2}{3a^2c+c^3}$，

∵$F_1C\perp AB$，

∴$\frac{b(a^2-c^2)}{3a^2c+c^3}\times(-\frac{b}{c})=-1$，

由$b^2=a^2-c^2$得$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{5}$，

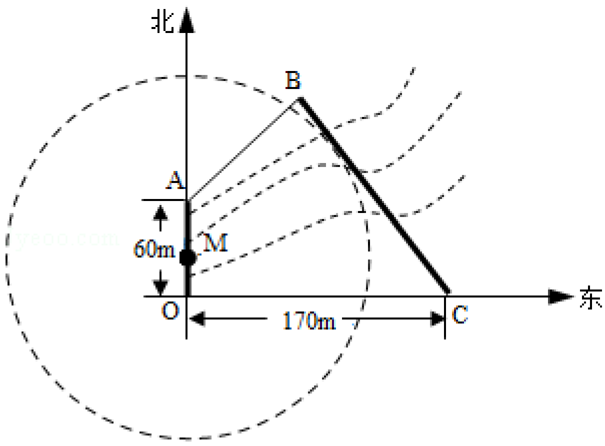
即$e=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

点评：本题主要考查圆锥曲线的综合问题，要求熟练掌握椭圆方程的求法以及直线垂直和斜率之间的关系，运算量较大．

18．（16分）（2014•江苏）如图，为保护河上古桥OA，规划建一座新桥BC，同时设立一个圆形保护区，规划要求：新桥BC与河岸AB垂直；保护区的边界为圆心M在线段OA上并与BC相切的圆，且古桥两端O和A到该圆上任意一点的距离均不少于80m，经测量，点A位于点O正北方向60m处，点C位于点O正东方向170m处（OC为河岸），$\tan\angle BCO=\frac{4}{3}$．

（1）求新桥BC的长；

（2）当OM多长时，圆形保护区的面积最大？



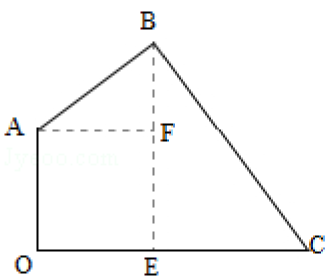
考点：圆的切线方程；直线与圆的位置关系．

专题：直线与圆．

分析：（1）在四边形AOCB中，过B作BE⊥OC于E，过A作AF⊥BE于F，设出AF，然后通过解直角三角形列式求解BE，进一步得到CE，然后由勾股定理得答案；

（2）设BC与⊙M切于Q，延长QM、CO交于P，设OM=xm，把PC、PQ用含有x的代数式表示，再结合古桥两端O和A到该圆上任意一点的距离均不少于80m列式求得x的范围，得到x取最小值时圆的半径最大，即圆形保护区的面积最大．

解答：解：（1）如图，



过B作BE⊥OC于E，过A作AF⊥BE于F，

∵∠ABC=90°，∠BEC=90°，

∴∠ABF=∠BCE，

$\therefore \tan\angle ABF=\tan\angle BCO=\frac{4}{3}$．

设AF=4x（m），则BF=3x（m）．

∵∠AOE=∠AFE=∠OEF=90°，

∴OE=AF=4x（m），EF=AO=60（m），

∴BE=（3x+60）m．

$\because \tan\angle BCO=\frac{4}{3}$，

$\therefore CE=\frac{3}{4}BE=\left(\frac{9}{4}x+45\right)$（m）．

$\therefore OC=\left(4x+\frac{9}{4}x+45\right)$（m）．

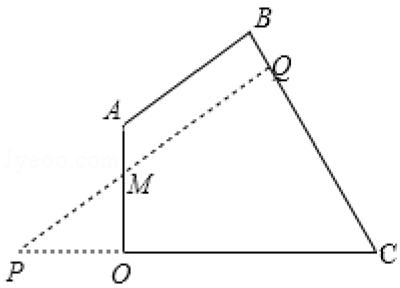
$\therefore 4x+\frac{9}{4}x+45=170$，

解得：x=20．

∴BE=120m，CE=90m，

则BC=150m；

（2）如图，



设BC与⊙M切于Q，延长QM、CO交于P，

∵∠POM=∠PQC=90°，

∴∠PMO=∠BCO．

设OM=xm，则OP=$\frac{4}{3}x$m，PM=$\frac{5}{3}x$m．

∴PC=（$\frac{4}{3}x+170$）m，PQ=（$\frac{16}{15}x+136$）m．

设⊙M半径为R，

∴R=MQ=（$\frac{16}{15}x+136-\frac{5}{3}x$）m=（$136-\frac{3}{5}x$）m．

∵A、O到⊙M上任一点距离不少于80m，

则R﹣AM≥80，R﹣OM≥80，

∴$136-\frac{3}{5}x-(60-x)\geq 80$，$136-\frac{3}{5}x-x\geq 80$．

解得：10≤x≤35．

∴当且仅当x=10时R取到最大值．

∴OM=10m时，保护区面积最大．

点评：本题考查圆的切线，考查了直线与圆的位置关系，解答的关键在于对题意的理解，是中档题．

19．（16分）（2014•江苏）已知函数f（x）=e^x+e^{-x}，其中e是自然对数的底数．

（1）证明：f（x）是R上的偶函数；

（2）若关于x的不等式mf（x）≤$e^{-x}+m-1$在（0，+∞）上恒成立，求实数m的取值范围；

（3）已知正数a满足：存在$x_0\in[1,+\infty)$，使得$f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立，试比较e^{a-1}与a^{e-1}的大小，并证明你的结论．

考点：利用导数求闭区间上函数的最值．

专题：导数的综合应用．

分析：（1）根据函数奇偶性的定义即可证明f（x）是R上的偶函数；

：（2）利用参数分离法，将不等式mf（x）≤e^{-x}+m－1在（0，+∞）上恒成立，进行转化求最值问题即可求实数m的取值范围；

（3）构u造函数，利用函数的单调性，最值与单调性之间的关系，分别进行讨论即可得到结论．

解答：解：（1）∵f（x）=e^x+e^{-x}，

∴f（－x）=$e^{-x}+e^x$=f（x），即函数：f（x）是R上的偶函数；

（2）若关于x的不等式mf（x）≤e^{-x}+m－1在（0，+∞）上恒成立，

即m（$e^x+e^{-x}-1$）≤$e^{-x}-1$，

∵x＞0，

∴$e^x+e^{-x}-1>0$，

即m≤$\frac{e^{-x}-1}{e^x+e^{-x}-1}$在（0，+∞）上恒成立，

设t=e^x，（t＞1），则m≤$\frac{1-t}{t^2-t+1}$在（1，+∞）上恒成立，

∵$\frac{1-t}{t^2-t+1}=-\frac{t-1}{(t-1)^2+(t-1)+1}=-\frac{1}{t-1+\frac{1}{t-1}+1}\geqslant-\frac{1}{3}$，当且仅当t=2时等号成立，

∴m$\leqslant-\frac{1}{3}$．

（3）令g（x）=$e^x+e^{-x}-a(-x^3+3x)$，

则g′（x）=$e^x-e^{-x}+3a(x^2-1)$，

当x＞1，g′（x）＞0，即函数g（x）在[1，+∞）上单调递增，

故此时g（x）的最小值g（1）=e+$\frac{1}{e}$－2a，

由于存在x_0∈[1，+∞），使得f（x_0）＜a（－$x_0^3+3x_0$）成立，

故e+$\frac{1}{e}$－2a＜0，

即a＞$\frac{1}{2}$（e+$\frac{1}{e}$），

令h（x）=x－（e－1）lnx－1，

则h′（x）=1－$\frac{e-1}{x}$，

由h′（x）=1－$\frac{e-1}{x}$=0，解得x=e－1，

当0＜x＜e－1时，h′（x）＜0，此时函数单调递减，

当x＞e－1时，h′（x）＞0，此时函数单调递增，

∴h（x）在（0，+∞）上的最小值为h（e－1），

注意到h（1）=h（e）=0，

∴当x∈（1，e－1）⊆（0，e－1）时，h（e－1）≤h（x）＜h（1）=0，

当x∈（e－1，e）⊆（e－1，+∞）时，h（x）＜h（e）=0，

∴h（x）＜0，对任意的x∈（1，e）成立．

①$a\in(\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e}),e)\subseteq(1,e)$时，h（a）<0，即a - 1<（e - 1）lna，从而$e^{a-1}<a^{e-1}$，

②当a=e时，$a^{e-1}=e^{a-1}$，

③当$a\in(e,+\infty)\subseteq(e-1,+\infty)$时，当a>e - 1时，h（a）>h（e）=0，即a - 1>（e - 1）lna，从而$e^{a-1}>a^{e-1}$.

点评：本题主要考查函数奇偶性的判定，函数单调性和最值的应用，利用导数是解决本题的关键，综合性较强，运算量较大．

20．（16分）（2014•江苏）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若对任意的正整数n，总存在正整数m，使得$S_n=a_m$，则称$\{a_n\}$是“H数列”．

（1）若数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=2^n$（$n\in N^*$），证明：$\{a_n\}$是“H数列”；

（2）设$\{a_n\}$是等差数列，其首项$a_1=1$，公差d<0，若$\{a_n\}$是“H数列”，求d的值；

（3）证明：对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个“H数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得$a_n=b_n+c_n$（$n\in N^*$）成立．

考点：数列的应用；等差数列的性质．

专题：等差数列与等比数列．

分析：（1）利用“当n≥2时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，当n=1时，$a_1=S_1$”即可得到a_n，再利用“H”数列的意义即可得出．

（2）利用等差数列的前n项和即可得出S_n，对$\forall n\in N^*$，$\exists m\in N^*$使$S_n=a_m$，取n=2和根据d<0即可得出；

（3）设$\{a_n\}$的公差为d，构造数列：$b_n=a_1-(n-1)a_1=(2-n)a_1$，$c_n=(n-1)(a_1+d)$，可证明$\{b_n\}$和$\{c_n\}$是等差数列．再利用等差数列的前n项和公式及其通项公式、“H”的意义即可得出．

解答：解：（1）当n≥2时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，

当n=1时，$a_1=S_1=2$．

当n=1时，$S_1=a_1$．

当n≥2时，$S_n=a_{n+1}$．

∴数列$\{a_n\}$是“H”数列．

（2）$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n+\frac{n(n-1)}{2}d$，

对$\forall n\in N^*$，$\exists m\in N^*$使$S_n=a_m$，即$n+\frac{n(n-1)}{2}d=1+(m-1)d$，

取n=2时，得1+d=（m - 1）d，解得$m=2+\frac{1}{d}$，

∵d<0，∴m<2，

又$m\in N^*$，∴m=1，∴d= - 1．

（3）设$\{a_n\}$的公差为d，令$b_n=a_1-(n-1)a_1=(2-n)a_1$，

对$\forall n\in N^*$，$b_{n+1}-b_n=-a_1$，

$c_n=(n-1)(a_1+d)$，

对$\forall n\in N^*$，$c_{n+1}-c_n=a_1+d$，

则$b_n+c_n=a_1+(n-1)d=a_n$，且数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$是等差数列．

数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}(-a_1)$，

令$T_n=(2-m)a_1$，则$m=\frac{n(n-3)}{2}+2$．

当n=1时，m=1；当n=2时，m=1．

当n≥3时，由于n与n﹣3的奇偶性不同，即n（n﹣3）为非负偶数，$m\in N^*$．

因此对$\forall n\in N^*$，都可找到$m\in N^*$，使$T_n=b_m$成立，即$\{b_n\}$为H数列．

数列$\{c_n\}$的前n项和$R_n=\frac{n(n-1)}{2}(a_1+d)$，

令$c_m=(m-1)(a_1+d)=R_n$，则$m=\frac{n(n-1)}{2}+1$．

∵对$\forall n\in N^*$，n（n﹣3）为非负偶数，∴$m\in N^*$．

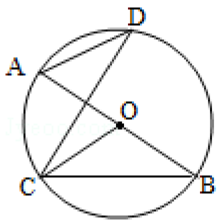
因此对$\forall n\in N^*$，都可找到$m\in N^*$，使$R_n=c_m$成立，即$\{c_n\}$为H数列．

因此命题得证．

点评：本题考查了利用“当n≥2时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，当n=1时，$a_1=S_1$”求a_n、等差数列的前n项和公式及其通项公式、新定义“H”的意义等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力、构造法，属于难题．

三、附加题（本大题包括选做题和必做题两部分）（一）选择题（本题包括21、22、23、24四小题，请选定其中两个小题作答，若多做，则按作答的前两个小题评分）【选修4-1：几何证明选讲】

21．（10分）（2014•江苏）如图，AB是圆O的直径，C，D是圆O上位于AB异侧的两点，证明：∠OCB=∠D．



考点：弦切角．

专题：直线与圆．

分析：利用OC=OB，可得∠OCB=∠B，利用同弧所对的圆周角相等，即可得出结论．

解答：证明：∵OC=OB，

∴∠OCB=∠B，

∵∠B=∠D，

∴∠OCB=∠D．

点评：本题考查同弧所对的圆周角相等，考查学生分析解决问题的能力，属于基础题．

【选修4-2：矩阵与变换】

22．（10分）（2014•江苏）已知矩阵A=$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & x\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，向量$\overrightarrow{\alpha}$=$\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}$，x，y为实数，若A$\overrightarrow{\alpha}$=B$\overrightarrow{\alpha}$，求x+y的值．

考点：矩阵与向量乘法的意义．

专题：矩阵和变换．

分析：利用矩阵的乘法，结合A$\overrightarrow{\alpha}$=B$\overrightarrow{\alpha}$，可得方程组，即可求x，y的值，从而求得x+y的值．

解答：解：∵矩阵A=$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & x\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，向量$\overrightarrow{\alpha}$=$\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}$，A$\overrightarrow{\alpha}$=B$\overrightarrow{\alpha}$，

$\therefore\begin{cases}2y-2=2+y\\ 2+xy=4-y\end{cases}$，

$\therefore x=-\frac{1}{2}$，y=4，

$\therefore x+y=\frac{7}{2}$

点评：本题考查矩阵的乘法，考查学生的计算能力，属于基础题．

【选修4-3：极坐标及参数方程】

23．（2014•江苏）在平面直角坐标系xOy中，已知直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（t为参数），直线l与抛物线$y^2=4x$相交于A，B两点，求线段AB的长．

考点：直线的参数方程．

专题：计算题；坐标系和参数方程．

分析：直线l的参数方程化为普通方程，与抛物线$y^2=4x$联立，求出A，B的坐标，即可求线段AB的长．

解答：解：直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，化为普通方程为x+y=3，

与抛物线$y^2=4x$联立，可得$x^2-10x+9=0$，

∴交点A（1，2），B（9，﹣6），

$\therefore |AB|=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$.

点评：本题主要考查了直线与抛物线的位置关系：相交关系的应用，考查学生的计算能力，属于基础题．

【选修4-4：不等式选讲】

24．（2014•江苏）已知x＞0，y＞0，证明（$1+x+y^2$）（$1+x^2+y$）≥9xy．

考点：不等式的证明．

专题：证明题；不等式的解法及应用．

分析：由均值不等式可得$1+x+y^2\geq 3\sqrt[3]{xy^2}$，$1+x^2+y\geq 3\sqrt[3]{x^2y}$，两式相乘可得结论．

解答：证明：由均值不等式可得$1+x+y^2\geq 3\sqrt[3]{xy^2}$，$1+x^2+y\geq 3\sqrt[3]{x^2y}$

分别当且仅当$x=y^2=1$，$x^2=y=1$时等号成立，

∴两式相乘可得（$1+x+y^2$）（$1+x^2+y$）≥9xy．

点评：本题考查不等式的证明，正确运用均值不等式是关键．

(二）必做题（本部分包括25、26两题，每题10分，共计20分）

25．（10分）（2014•江苏）盒中共有9个球，其中有4个红球，3个黄球和2个绿球，这些球除颜色外完全相同．

（1）从盒中一次随机取出2个球，求取出的2个球颜色相同的概率P；

（2）从盒中一次随机取出4个球，其中红球、黄球、绿球的个数分别记为x_1，x_2，x_3，随机变量X表示x_1，x_2，x_3中的最大数，求X的概率分布和数学期望E（X）．

考点：离散型随机变量的期望与方差；古典概型及其概率计算公式．

专题：概率与统计．

分析：（1）先求出取2个球的所有可能，再求出颜色相同的所有可能，最后利用概率公式计算即可；

（2）先判断X的所有可能值，在分别求出所有可能值的概率，列出分布列，根据数学期望公式计算即可．

解答：解（1）一次取2个球共有$C_9^2=36$种可能，2个球颜色相同共有$C_4^2+C_3^2+C_2^2=10$种可能情况

∴取出的2个球颜色相同的概率$P=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

（2）X的所有可能值为4，3，2，则P（X=4）$=\frac{C_4^4}{C_9^4}=\frac{1}{126}$，P（X=3）=

$\frac{C_4^3 \cdot C_5^1+C_3^3 \cdot C_6^1}{C_9^4}=\frac{13}{63}$

于是P（X=2）=1 - P（X=3） - P（X=4）=$\frac{11}{14}$，

X的概率分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{63}$	$\frac{1}{126}$

故X数学期望E（X）=$2\times\frac{11}{14}+3\times\frac{13}{63}+4\times\frac{1}{126}=\frac{20}{9}$.

点评：本题考查了排列组合，概率公式以概率的分布列和数学期望，知识点比较多，属基础题.

26. （10分）（2014•江苏）已知函数f_0（x）=$\frac{\sin x}{x}$（x＞0），设f_n（x）为f_{n-1}（x）的导数，n∈N*.

（1）求$2f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$的值；

（2）证明：对任意n∈N*，等式$\left|nf_{n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$都成立.

考点：三角函数中的恒等变换应用；导数的运算.

专题：函数的性质及应用；三角函数的求值.

分析：（1）由于求两个函数的相除的导数比较麻烦，根据条件和结论先将原函数化为：xf_0（x）=sinx，然后两边求导后根据条件两边再求导得：$2f_1$（x）+xf_2（x）=﹣sinx，把x=$\frac{\pi}{2}$代入式子求值；

（2）由（1）得，f_0（x）+xf_1（x）=cosx和$2f_1$（x）+xf_2（x）=﹣sinx，利用相同的方法再对所得的式子两边再求导，并利用诱导公式对所得式子进行化简、归纳，再进行猜想得到等式，用数学归纳法进行证明等式成立，主要利用假设的条件、诱导公式、求导公式以及题意进行证明，最后再把x=$\frac{\pi}{4}$代入所给的式子求解验证.

解答：解：（1）∵f_0（x）=$\frac{\sin x}{x}$，∴xf_0（x）=sinx，

则两边求导，[xf_0（x）]′=（sinx）′，

∵f_n（x）为f_{n-1}（x）的导数，n∈N*，

∴f_0（x）+xf_1（x）=cosx，

两边再同时求导得，$2f_1$（x）+xf_2（x）=﹣sinx，

将x=$\frac{\pi}{2}$代入上式得，$2f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$=﹣1，

（2）由（1）得，$f_0(x)+xf_1(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，

恒成立两边再同时求导得，$2f_1(x)+xf_2(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)$，

再对上式两边同时求导得，$3f_2(x)+xf_3(x)=-\cos x=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$，

同理可得，两边再同时求导得，$4f_3(x)+xf_4(x)=\sin x=\sin(x+2\pi)$，

猜想得，$nf_{n-1}(x)+xf_n(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ 对任意$n\in N^*$恒成立，

下面用数学归纳法进行证明等式成立：

①当n=1时，$f_0(x)+xf_1(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 成立，则上式成立；

②假设n=k（k>1且$k\in N^*$）时等式成立，即

$kf_{k-1}(x)+xf_k(x)=\sin(x+\frac{k\pi}{2})$，

$\because [kf_{k-1}(x)+xf_k(x)]'=kf_{k-1}'(x)+f_k(x)+xf_k'(x)$
$=(k+1)f_k(x)+xf_{k+1}(x)$

又$[\sin(x+\frac{k\pi}{2})]'=\cos(x+\frac{k\pi}{2})\cdot(x+\frac{k\pi}{2})'$

$=\cos(x+\frac{k\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2}+x+\frac{k\pi}{2})=\sin[x+\frac{(k+1)\pi}{2}]$，

∴那么n=k+1（k>1且$k\in N^*$）时．等式

$(k+1)f_k(x)+xf_{k+1}(x)=\sin[x+\frac{(k+1)\pi}{2}]$也成立，

由①②得，$nf_{n-1}(x)+xf_n(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ 对任意$n\in N^*$恒成立，

令$x=\frac{\pi}{4}$代入上式得，$nf_{n-1}(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}f_n(\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2})=\pm\cos\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以，对任意$n\in N^*$，等式$|nf_{n-1}(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}f_n(\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$都成立．

点评：本题考查了三角函数、复合函数的求导数公式和法则、诱导公式，以及数学归纳法证明命题、转化思想等，本题设计巧妙，题型新颖，立意深刻，是一道不可多得的好题，难度很大，考查了学生观察问题、分析问题、解决问题的能力，以及逻辑思维能力．