# 2015年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

## 数　学（理工类）

**一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1．i 为虚数单位，$i^{607}$ 的共轭复数为（　　）．

A．i　　B．$-i$　　C．1　　D．$-1$

2．我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米1534石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得254粒内夹谷28粒，则这批米内夹谷约为（　　）．

A．134石　　B．169石　　C．338石　　D．1365石

3．已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为（　　）．

A．$2^{12}$　　B．$2^{11}$　　C．$2^{10}$　　D．$2^{9}$

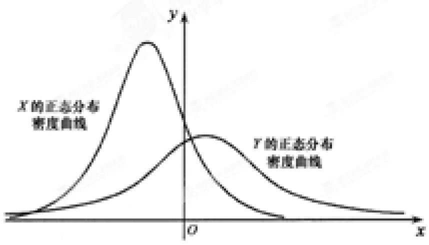
4．设 $X \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，这两个正态分布密度曲线如图所示．下列结论中正确的是（　　）．

A．$P(Y \geq \mu_2) \geq P(Y \geq \mu_1)$

B．$P(X \leq \sigma_2) \leq P(X \leq \sigma_1)$

C．对任意正数 $t$，$P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$

D．对任意正数 $t$，$P(X \geq t) \geq P(Y \geq t)$




5．设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$，$n \geq 3$．若 $p$：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成等比数列；

$q$：$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)^2$，则（　　）．

A．$p$ 是 $q$ 的充分条件，但不是 $q$ 的必要条件

B．$p$ 是 $q$ 的必要条件，但不是 $q$ 的充分条件

C．$p$ 是 $q$ 的充分必要条件

D．$p$ 既不是 $q$ 的充分条件，也不是 $q$ 的必要条件

6．已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$g(x) = f(x) - f(ax)\ (a > 1)$，则

A．$\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$　　B．$\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$

C. $\operatorname{sgn}[g(x)]=\operatorname{sgn}[f(x)]$　　　　D. $\operatorname{sgn}[g(x)]=-\operatorname{sgn}[f(x)]$

7．在区间$[0, 1]$上随机取两个数$x,y$，记$p_1$为事件“$x+y\ge\frac{1}{2}$”的概率，$p_2$为事件“$|x-y|\le\frac{1}{2}$”的概率，$p_3$为事件“$xy\le\frac{1}{2}$”的概率，则（　　）．

A. $p_1<p_2<p_3$　　　　B. $p_2<p_3<p_1$

C. $p_3<p_1<p_2$　　　　D. $p_3<p_2<p_1$

8. 将离心率为$e_1$的双曲线$C_1$的实半轴长$a$和虚半轴长$b$ $(a\ne b)$同时增加$m$ $(m>0)$个单位　长度，得到离心率为$e_2$的双曲线$C_2$，则（　　）．

A．对任意的$a, b$，$e_1>e_2$　　　　B．当$a>b$时，$e_1>e_2$；当$a<b$时，$e_1<e_2$

C．对任意的$a, b$，$e_1<e_2$　　　　D．当$a>b$时，$e_1<e_2$；当$a<b$时，$e_1>e_2$

9．已知集合$A=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1, x,y\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\big||x|\le 2, |y|\le 2, x,y\in\mathbf{Z}\}$，定义集合$A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)\big|(x_1,y_1)\in A, (x_2,y_2)\in B\}$，则$A\oplus B$中元素的个数为（　　）．

A．77　　B．49　　C．45　　D．30

10. 设$x\in\mathbf{R}$，$[x]$表示不超过$x$的最大整数．若存在实数$t$，使得$[t]=1$，$[t^2]=2$，…，$[t^n]=n$　同时成立，则正整数$n$的最大值是（　　）．

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

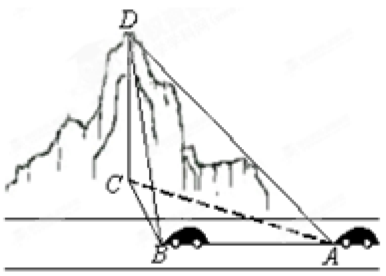
## 二、填空题：本大题共6小题，考生需作答5小题，每小题5分，共25分．请将答案填在答题卡对应题号的位置上．答错位置，书写不清，模棱两可均不得分．

（一）必考题（11—14题）

11．已知向量$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$__________．

12．函数$f(x)=4\cos^2\frac{x}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-x)-2\sin x-|\ln(x+1)|$的零点个数为__________．

13．如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到$A$处时测得公路北侧一山顶$D$在西偏北$30^\circ$的方向上，行驶600m后到达$B$处，测得此山顶在西偏北$75^\circ$的方向上，仰角为$30^\circ$，则此山的高度$CD=$　　m.



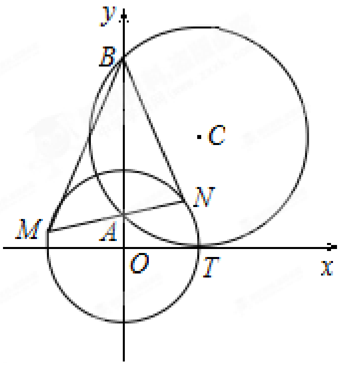
14．如图，圆 $C$ 与 $x$ 轴相切于点 $T(1, 0)$，与 $y$ 轴正半轴交于两点 $A, B$（$B$ 在 $A$ 的上方），且 $|AB| = 2$．

（Ⅰ）圆 $C$ 的标准方程为__________；

（Ⅱ）过点 $A$ 任作一条直线与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 $M, N$ 两点，下列三个结论：

①$\dfrac{|NA|}{|NB|} = \dfrac{|MA|}{|MB|}$；　②$\dfrac{|NB|}{|NA|} - \dfrac{|MA|}{|MB|} = 2$；　③$\dfrac{|NB|}{|NA|} + \dfrac{|MA|}{|MB|} = 2\sqrt{2}$．

其中正确结论的序号是__________．（写出所有正确结论的序号）

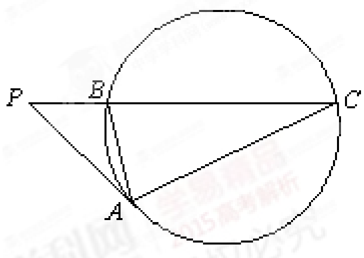



（二）选考题（请考生在第 15、16 两题中任选一题作答，请先在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框用 2B 铅笔涂黑．如果全选，则按第 15 题作答结果计分．）

15．（选修 4-1：几何证明选讲）

如图，$PA$ 是圆的切线，$A$ 为切点，$PBC$ 是圆的割线，

且 $BC = 3PB$，则 $\dfrac{AB}{AC} =$_______．




第 15 题图

16．（选修 4-4：坐标系与参数方程）

在直角坐标系 $xOy$ 中，以 $O$ 为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．已知直线 $l$ 的极坐标方程为

$\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=0$，曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=t-\dfrac{1}{t}, \\ y=t+\dfrac{1}{t} \end{cases}$ （ $t$ 为参数），$l$ 与 $C$ 相交于 $A,B$ 两点，则

$|AB|=$________.

**三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分． 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17．（本小题满分 11 分）

某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

| $\omega x+\varphi$ | $0$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\dfrac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $\dfrac{\pi}{3}$ | | $\dfrac{5\pi}{6}$ | |
| $A\sin(\omega x+\varphi)$ | $0$ | $5$ | | $-5$ | $0$ |

（Ⅰ）请将上表数据补充完整，填写在答题卡上相应位置，并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）将 $y=f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\theta$ $(\theta>0)$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 的图象. 若 $y=g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$，求 $\theta$ 的最小值.

18．（本小题满分 12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，前 $n$ 项和为 $S_n$，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q$．已知 $b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）当 $d>1$ 时，记 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$．

19．（本小题满分 12 分）

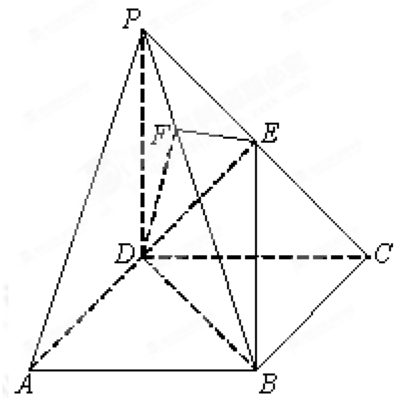
《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=CD$，过棱 $PC$ 的中点 $E$，作 $EF\perp PB$ 交 $PB$

于点 $F$，连接 $DE, DF, BD, BE$.

（Ⅰ）证明：$PB\perp$ 平面$DEF$．试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，说明理由；

（Ⅱ）若面 $DEF$ 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\frac{DC}{BC}$ 的值.




20.（本小题满分 12 分）

某厂用鲜牛奶在某台设备上生产 $A,B$ 两种奶制品．生产 1 吨 $A$ 产品需鲜牛奶 2 吨，使用设备 1 小时，获利 1000 元；生产 1 吨 $B$ 产品需鲜牛奶 1.5 吨，使用设备 1.5 小时，获利 1200 元．要求每天 $B$ 产品的产量不超过 $A$ 产品产量的 2 倍，设备每天生产 $A,B$ 两种产品时间之和不超过 12 小时．假定每天可获取的鲜牛奶数量 $W$（单位：吨）是一个随机变量，其分布列为

| $W$ | 12 | 15 | 18 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.3 | 0.5 | 0.2 |

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产，使其获利最大，因此每天的最大获利 $Z$（单位：元）是一个随机变量.

（Ⅰ）求 $Z$ 的分布列和均值；

（Ⅱ） 若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立，求 3 天中至少有 1 天的最大获利超过 10000 元的概率.

21.（本小题满分 14 分）

一种作图工具如图 1 所示．$O$ 是滑槽 $AB$ 的中点，短杆 $ON$ 可绕 $O$ 转动，长杆 $MN$ 通过 $N$ 处铰链与 $ON$ 连接，$MN$ 上的栓子 $D$ 可沿滑槽 $AB$ 滑动，且 $DN=ON=1$，$MN=3$．当栓子 $D$ 在滑槽 $AB$ 内作往复运动时，带动 $N$ 绕 $O$ 转动一周（$D$ 不动时，$N$ 也不动），$M$ 处的笔尖画出的曲线记为 $C$．以 $O$ 为原点，$AB$ 所在的直线为 $x$ 轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系.

（Ⅰ）求曲线 $C$ 的方程；

（Ⅱ）设动直线 $l$ 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 $P,Q$ 两点．若直线 $l$ 总与曲线 $C$ 有且只有一个公共点，试探究：△$OPQ$ 的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由.

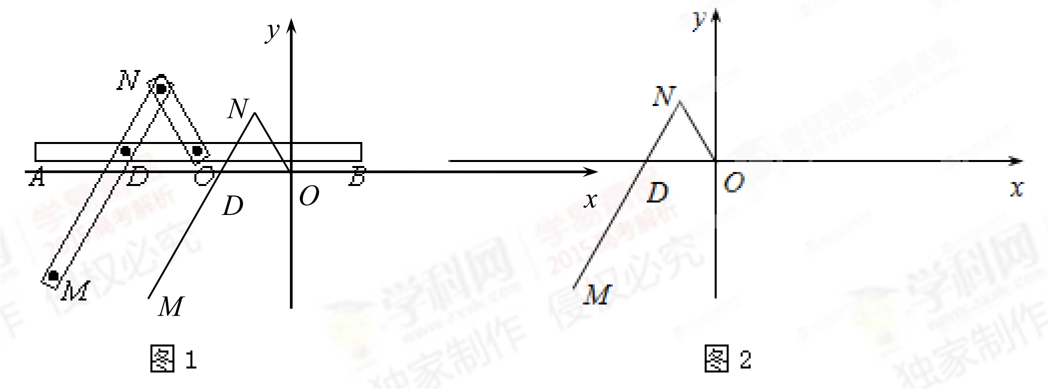



图 1　　　　　　　　　　　　　　　　图 2

22.（本小题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$b_n = n(1+\frac{1}{n})^n a_n \quad (n \in \mathbf{N}_+)$，e 为自然对数的底数.

（Ⅰ）求函数 $f(x)=1+x-\mathrm{e}^x$ 的单调区间，并比较 $(1+\frac{1}{n})^n$ 与 e 的大小；

（Ⅱ）计算 $\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$，$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$，由此推测计算 $\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 的公式，并给出证明；

（Ⅲ）令 $c_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，数列 $\{a_n\}$，$\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和分别记为 $S_n$，$T_n$，证明：$T_n < \mathrm{e}S_n$.