

# 2012 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

## 数学文科

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 6 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

一选择题：本大题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 设集合  $M = \{-1, 0, 1\}$ ,  $N = \{x | x^2 = x\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )

- A.  $\{-1, 0, 1\}$       B.  $\{0, 1\}$       C.  $\{1\}$       D.  $\{0\}$

2. 复数  $z = i(i+1)$  ( $i$  为虚数单位) 的共轭复数是 ( )

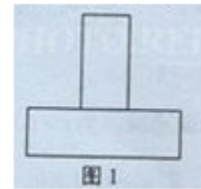
- A.  $-1 - i$       B.  $-1 + i$       C.  $1 - i$       D.  $1 + i$

3. 命题“若  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , 则  $\tan \alpha = 1$ ”的逆否命题是 ( )

- A. 若  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ , 则  $\tan \alpha \neq 1$       B. 若  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , 则  $\tan \alpha \neq 1$

- C. 若  $\tan \alpha \neq 1$ , 则  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$       D. 若  $\tan \alpha \neq 1$ , 则  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

4. 某几何体的正视图和侧视图均如图 1 所示，则该几何体的俯视图不可能是 ( C )



5. 设某大学的女生体重  $y$  (单位:  $kg$ ) 与身高  $x$  (单位:  $cm$ ) 具有线性相关关系，根据

一组样本数据  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 用最小二乘法建立的回归方程为  $\hat{y} = 0.85x - 85.71$ ,

则下列结论不正确的是 ( )

A.  $y$  与  $x$  具有正的线性相关关系

B. 回归直线过样本点的中心  $(\bar{x}, \bar{y})$

C. 若该大学某女生身高增加  $1cm$ , 则其体重约增加  $0.85kg$

D. 若该大学某女生身高为  $170cm$ , 则可断定其体重必为  $58.79kg$

6. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的焦距为 10, 点  $P(2, 1)$  在的渐近线上, 则  $C$  的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$       B.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$       C.  $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$       D.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$

7. 设  $a > b > 1$ ,  $c < 0$ , 给出下列三个结论:

①  $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$ ; ②  $a^c < b^c$ ; ③  $\log_b(a-c) > \log_a(b-c)$ .

其中所有的正确结论的序号是 ( D )

- A. ① B. ①② C. ②③ D. ①②③

8. 在  $\triangle ABC$  中,  $AC = \sqrt{7}$ ,  $BC = 2$ ,  $B = 60^\circ$ , 则  $BC$  边上的高等于 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  B.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  C.  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$  D.  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{39}}{4}$

9. 设定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  是最小正周期为  $2\pi$  的偶函数,  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数,

当  $x \in [0, \pi]$  时,  $0 < f(x) < 1$ ; 当  $x \in (0, \pi)$  且  $x \neq \frac{\pi}{2}$  时,  $(x - \frac{\pi}{2})f'(x) > 0$ .

则函数  $y = f(x) - \sin x$  在  $[-2\pi, 2\pi]$  上的零点个数为 ( )

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 8

二、填空题: 本大题共 7 小题, 考生作答 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 把答案填在答题卡中对应题号的横线上。

一、选做题 (请考生在第 10、11 二题中任选一题作答, 如果全做, 则按第一题记分)

10. 在极坐标系中, 曲线  $C_1: \rho(\sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta) = 1$  与曲线  $C_2: \rho = a (a > 0)$  的一个交点在极轴上, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

11. 某制药企业为了对某种药用液体进行生物测定, 需要优选培养温度, 试验范围定为  $29^\circ\text{C} : 63^\circ\text{C}$ , 精确度要求  $\pm 1^\circ\text{C}$ . 用分数法进行优选时, 能保证找到最佳培养温度需要的最少试验次数为\_\_\_\_\_.

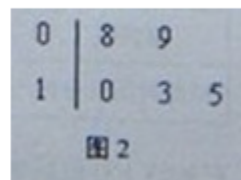
二、必做题 (12~16 题)

12. 不等式  $x^2 - 5x + 6 \leq 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

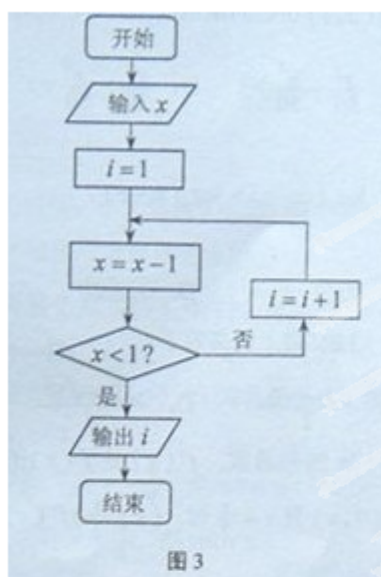
13. 图 2 是某学校一名篮球运动员在五场比赛中所得分数的茎叶图, 则该运动员在这五场比赛中得分的方差为\_\_\_\_\_.

(注: 方差  $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ,

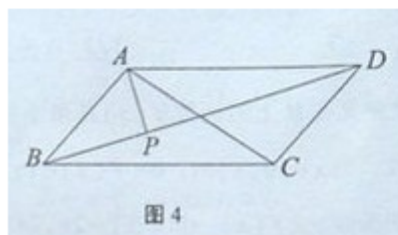
其中  $\bar{x}$  为  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的平均数)



14. 如果执行如图 3 所示的程序框图，输入  $x = 4.5$ ，则输出的数  $i = \underline{\hspace{2cm}}$ .



15. 如图 4，在平行四边形  $ABCD$  中， $AP \perp BD$ ，垂足为  $P$ ，且  $AP = 3$ ，则  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ .



16. 对于  $n \in \mathbb{N}^*$ ，将  $n$  表示为  $n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$ ，当  $i = k$  时， $a_i = 1$ ，当  $0 \leq i < k - 1$  时， $a_i$  为 0 或 1. 定义  $b_n$  如下：在  $n$  的上述表示中，当  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$  中等于 1 的个数为奇数时， $b_n = 1$ ；否则  $b_n = 0$ .

(1)  $b_2 + b_4 + b_6 + b_8 = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2) 记  $c_m$  为数列  $\{b_n\}$  中第  $m$  个为 0 的项与第  $m + 1$  个为 0 的项之间的项数，则  $c_m$  的最大值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

某超市为了了解顾客的购物量及结算时间等信息，安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据，如下表所示：

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件以上
-------	---------	---------	----------	-----------	--------

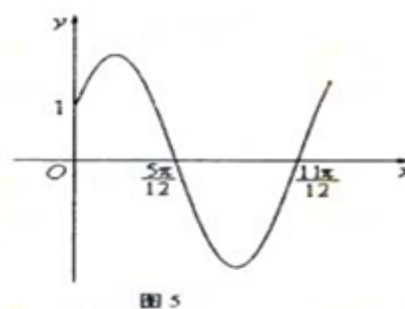
顾客数（人）	$x$	30	25	$y$	10
结算时间（分钟/人）	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

- (1) 确定  $x, y$  的值，并估计顾客一次购物的结算时间的平均值；
- (2) 求一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率. (将频率视为概率)

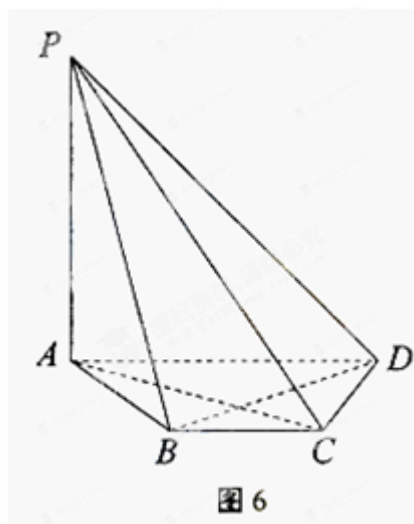
18. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $x \in \mathbb{R}, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图 5 所示,

- (1) 求函数  $f(x)$  的解析式;
- (2) 求函数  $g(x) = f(x - \frac{\pi}{12}) - f(x + \frac{\pi}{12})$  的单调递增区间.



19. (本小题满分 12 分)

如图 6, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  是等腰梯形,  $AD \parallel BC$ ,  $AC \perp BD$ .



- (1) 证明:  $BD \perp PC$ ;
- (2) 若  $AD = 4, BC = 2$ , 直线  $PD$  与平面  $PAC$  所成的角为  $30^\circ$ , 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积.

20. 某公司一下属企业从事某种高科技产品的生产. 该企业第一年年初有资金 2000 万元, 将其投入生产, 到当年年底资金增长了 50%. 预计以后每年资金年增长率与第一年的相同. 公司要求企业从第一年开始, 每年年底上缴资金  $d$  万元, 并将剩余资金全部投入下一年生产. 设第  $n$  年年底企业上缴资金后的剩余资金为  $a_n$  万元.

(1) 用  $d$  表示  $a_1, a_2$ , 并写出  $a_{n+1}$  与  $a_n$  的关系式;

(2) 若公司希望经过  $m(m \geq 3)$  年使企业的剩余资金为 4000 万元, 试确定企业每年上交资金  $d$  的值 (用  $m$  表示).

21. (本小题满分 13 分) 在直角坐标系  $xOy$  中, 已知中心在原点, 离心率为  $\frac{1}{2}$  的椭圆  $E$

的一个焦点为圆  $C: x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$  的圆心.

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 设  $P$  是椭圆  $E$  上一点, 过  $P$  作两条斜率之积为  $\frac{1}{2}$  的直线  $l_1, l_2$ . 当直线  $l_1, l_2$  都与圆  $C$  相切时, 求  $P$  的坐标.

22. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = e^x - ax$ , 其中  $a > 0$ .

(I) 若对一切  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 1$  恒成立, 求  $a$  的取值集合;

(II) 在函数  $f(x)$  的图象上取定两点  $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)) (x_1 < x_2)$ , 记直线  $AB$  的斜率为  $k$ , 证明: 存在  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , 使  $f'(x_0) = k$  成立.