2013年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

参考公式：

样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的方差$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，其中$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$。

棱锥的体积公式：$V=\frac{1}{3}Sh$，其中S是锥体的底面积，h为高。

棱柱的体积公式：$V=Sh$，其中S是柱体的底面积，h为高。

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分，请把答案填写在答题卡的相应位置上。

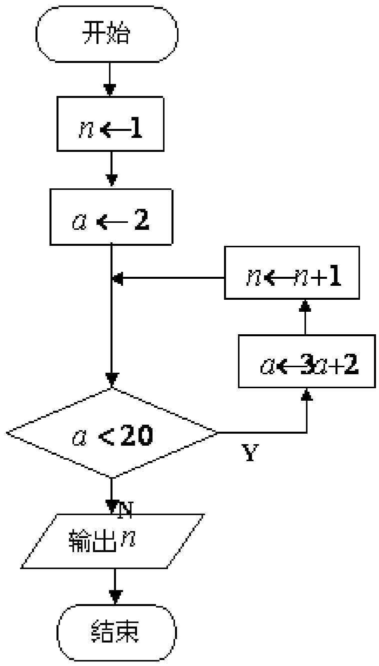
1、函数$y=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})$的最小正周期为__▲____。

2、设$z=(2-i)^2$（i为虚数单位），则复数z的模为__▲____。

3、双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的两条渐近线的方程为__▲____。

4、集合{-1，0，1}共有__▲____个子集。

5、右图是一个算法的流程图，则输出的n的值是__▲____。



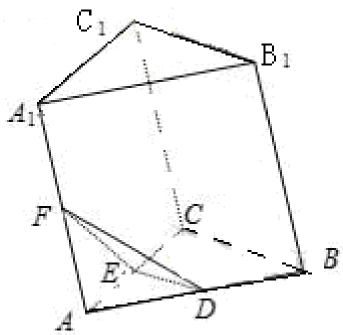
6、抽样统计甲、乙两位射击运动员的5次训练成绩（单位：环），结果如下：

运动员	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

则成绩较为稳定(方差较小)的那位运动员成绩的方差为__▲____。

7、现有某类病毒记作为X_mY_n，其中正整数$m,n(m\le 7,n\le 9)$可以任意选取，则m,n都取到奇数的概率为__▲____。

8、如图，在三棱柱$A_1B_1C_1$-ABC中，D、E、F分别为AB、AC、AA_1的中点，设三棱锥F-ADE的体积为V_1，三棱柱$A_1B_1C_1$-ABC的体积为V_2，则V_1：V_2=__▲____。



9、抛物线$y=x^2$在$x=1$处的切线与坐标轴围成三角形区域为D(包含三角

形内部与边界)。若点P(x，y)是区域D内的任意一点，则 $x+2y$ 的取值范围是__▲__。

10、设D、E分别是△ABC的边AB、BC上的点，且 $AD=\frac{1}{2}AB, BE=\frac{2}{3}BC$。若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$ (λ_1、λ_2 均为实数)，则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为__▲__。

11、已知 $f(x)$ 是定义在R上的奇函数。当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，则不等式 $f(x)>x$ 的解集用区间表示为__▲__。

12、在平面直角坐标系xoy中，椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点为F，右准线为 l，短轴的一个端点为B。设原点到直线BF的距离为 d_1，F到 l 的距离为 d_2。若 $d_2=\sqrt{6}d_1$，则椭圆C的离心率为__▲__。

13、在平面直角坐标系xoy中，设定点A(a,a)，P是函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 图象上的一动点。若点P、A之间的最短距离为 $2\sqrt{2}$，则满足条件的实数a的所有值为=__▲__。

14、在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=\frac{1}{2}, a_6+a_7=3$，则满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n>a_1a_2\cdots a_n$ 的最大正整数n的值为__▲__。

二、解答题：本大题共6小题，共计90分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明或演算步骤.

15、（本小题满分14分）

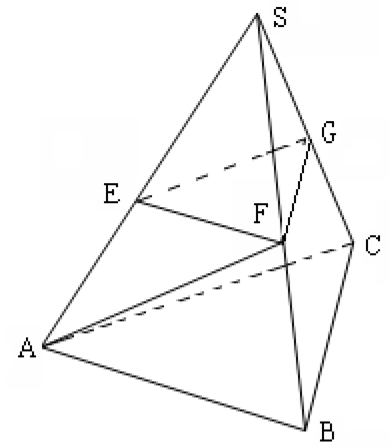
已知向量 $\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta),0<\beta<\alpha<\pi$。

（1）若 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$，求证：$\vec{a}\perp\vec{b}$；

（2）设 $\vec{c}=(0,1)$，若 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$，求 α,β 的值。

16、（本小题满分14分）

如图，在三棱锥S-ABC中，平面$SAB\perp$平面SBC, $AB\perp BC$，AS=AB。过A作$AF\perp SB$，垂足为F，点E、G分别为线段SA、SC的中点。



求证：（1）平面EFG//平面ABC;

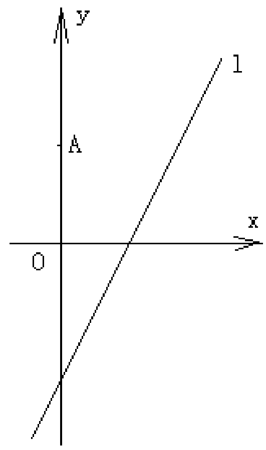
（2）$BC\perp SA$。

17、（本小题满分14分）

如图，在平面直角坐标系xoy中，点A(0,3)，直线$l: y=2x-4$，设圆C的半径为1，圆心在直线l上。

（1）若圆心C也在直线$y=x-1$上，过点A作圆C的切线，求切线的方程;

（2）若圆C上存在点M，使MA=2MO，求圆心C的横坐标a的取值范围。

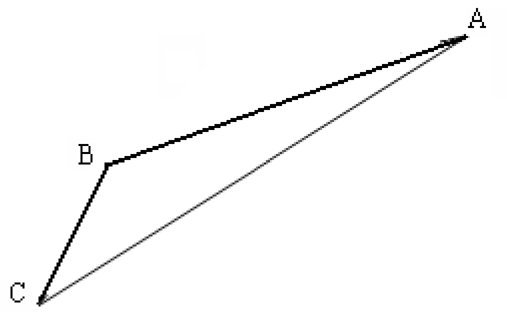


18、（本小题满分16分）

如图，游客从某旅游景区的景点A处下山至C处有两种路径。一种是从A沿直线步行到C，另

一种是先从A沿索道乘缆车到B，然后从B沿直线步行到C。

现有甲、乙两位游客从A处下山，甲沿AC匀速步行，速度为50米/分钟。在甲出发2分钟后，乙从A乘坐缆车到B，在B处停留1分钟后，再从B匀速步行到C。假设缆车速度为130米/分钟，山路AC的长为1260米，经测量，$\cos A=\frac{12}{13},\cos C=\frac{3}{5}$。



（1）求索道AB的长；

（2）问乙出发多少分钟后，乙在缆车上与甲的距离最短？

（3）为使两位游客在C处互相等待的时间不超过3分钟，乙步行的速度应控制在什么范围内？

19、（本小题满分16分）

设$\{a_n\}$是首项为a、公差为d的等差数列$(d\neq 0)$，S_n为其前n项和。记$b_n=\frac{nS_n}{n^2+c},n\in N^*$，其中c为实数。

（1）若c=0，且b_1,b_2,b_4成等比数列，证明：$S_{nk}=n^2S_k(n,k\in N^*)$

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，证明：c=0。

20、（本小题满分16分）

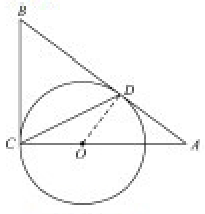
设函数$f(x)=\ln x-ax,g(x)=e^x-ax$，其中$a$为实数。

（1）若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数，且 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有最小值，求 a 的取值范围

；

（2）若 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是单调增函数，试求 $f(x)$ 的零点个数，并证明你的结论。

21．[选做题]本题包括A、B、C、D四小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．



（第 21–A 题）

A．[选修4－1：几何证明选讲]（本小题满分10分）

如图，AB和BC分别与圆O相切于点D、C，AC经过圆心O，且BC=2OC。

求证：AC=2AD。

B．[选修4－2：矩阵与变换]（本小题满分10分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 6\end{bmatrix}$，求矩阵 $A^{-1}B$．

C．[选修4－4：坐标系与参数方程]（本小题满分10分）

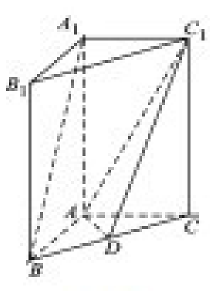
在平面直角坐标系 xoy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+1\\ y=2t\end{cases}$ （t 为参数），曲线C的参数方程为

$\begin{cases}x=2\tan^2\theta\\ y=2\tan\theta\end{cases}$ （θ 为参数）。试求直线 l 和曲线C的普通方程，并求出它们的公共点的坐标。

D．[选修4－5：不等式选讲]（本小题满分10分）

已知 $a\geqslant b>0$，求证：$2a^3-b^3\geqslant 2ab^2-a^2b$。

【必做题】第22题、第23题，每题10分，共计20分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．



22．（本小题满分10分）

如图，在直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中，AB⊥AC，AB=AC=2，A_1A=4，点D是BC的中点。

（1）求异面直线A_1B与C_1D所成角的余弦值；

（2）求平面ADC_1与平面ABA_1所成二面角的正弦值。

23．（本小题满分10分）

设数列$\{a_n\}$：1，-2，-2，3，3，3，-4，-4，-4，-4，…，$\overbrace{(-1)^{k-1}k,\cdots(-1)^{k-1}k}^{k个}$，…

即当$\frac{(k-1)k}{2}<n\le\frac{(k+1)k}{2}(k\in N^*)$时，$a_n=(-1)^{k-1}k$。记$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ $(n\in N^*)$。

对于$l\in N^*$，定义集合P_l=｛n | S_n为a_n的整数倍，$n\in N^*$，且$1\leqslant n\leqslant l$｝

(1)求P_{11}中元素个数；

(2)求集合P_{2000}中元素个数。

参考答案

1．【答案】π

【解析】$T=|\frac{2\pi}{\omega}|=|\frac{2\pi}{2}|=\pi$.

2．【答案】5

【解析】$z=3-4i$，$i^2=-1$，$|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

3．【答案】$y=\pm\frac{3}{4}x$

【解析】令：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=0$，得 $y=\pm\sqrt{\frac{9x^2}{16}}=\pm\frac{3}{4}x$.

4．【答案】8

【解析】$2^3=8$.

5．【答案】3

【解析】$n=1$，$a=2$，$a=4$，$n=2$；$a=10$，$n=3$；$a=28$，$n=4$.

6．【答案】2

【解析】易得乙较为稳定，乙的平均值为：$\bar{x}=\frac{89+90+91+88+92}{5}=90$.

方差为：$S^2=\frac{(89-90)^2+(90-90)^2+(91-90)^2+(88-90)^2+(92-90)^2}{5}=2$.

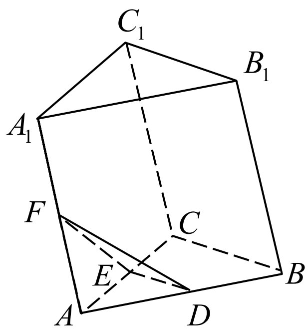
7．

【答案】$\frac{20}{63}$

【解析】m取到奇数的有1，3，5，7共4种情况；n取到奇数的有1，3，5，7，9共5种情况，则 m，n 都取到奇数的概率为 $\frac{4\times5}{7\times9}=\frac{20}{63}$.

8．

【答案】1：24



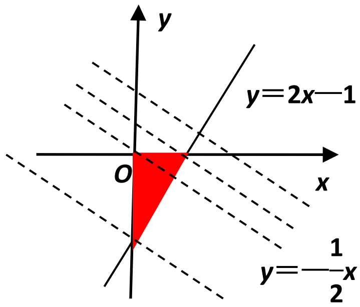
【解析】三棱锥 $F-ADE$ 与三棱锥 A_1-ABC 的相似比为1：2，故体积之比为1：8．又因三棱锥 A_1-ABC 与三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积之比为1：3．所以，三棱锥 $F-ADE$ 与三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积之比为1：24．

9．

【答案】$[-2，\frac{1}{2}]$

【解析】抛物线 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的切线易得为$y=2x-1$，令$z=x+2y$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$.

画出可行域如下，易得过点(0，—1)时，$z_{\min}=-2$，过点$(\frac{1}{2}，0)$时，$z_{\max}=\frac{1}{2}$.



10.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$

$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$$

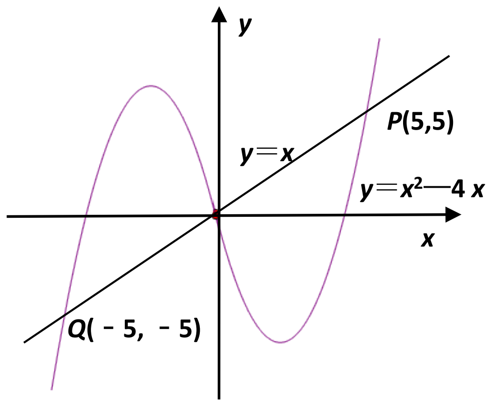
所以，$\lambda_1=-\frac{1}{6}$，$\lambda_2=\frac{2}{3}$，$\lambda_1+\lambda_2=\frac{1}{2}$.

11.

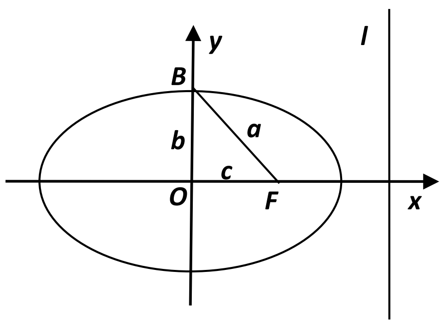
【答案】(－5，0) ∪(5， ＋∞)

【解析】做出 $f(x)=x^2-4x$

($x>0$)的图像，如下图所示。由于 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，利用奇函数图像关于原点对称做出x<0的图像。不等式 $f(x)>x$，表示函数y= $f(x)$ 的图像在y=x的上方，观察图像易得：解集为(－5，0) ∪(5， ＋∞)。



12. 【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$



【解析】如图，l：x=$\frac{a^2}{c}$，$d_2=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}$，由

等面积得：$d_1=\frac{bc}{a}$。若$d_2=\sqrt{6}d_1$，则$\frac{b^2}{c}=\sqrt{6}\ \frac{bc}{a}$，整理得：$\sqrt{6}a^2-ab-\sqrt{6}b^2=0$

，两边同除以：a^2，得：$\sqrt{6}\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)+\sqrt{6}=0$，解之得：$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以，离心率

为：$\mathrm{e}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13．

【答案】1或$\sqrt{10}$

【解析】

14．

【答案】12

【解析】设正项等比数列$\{a_n\}$首项为a_1，公比为q，则：$\begin{cases}a_1q_4=\frac{1}{2}\\a_1q_5(1+q)=3\end{cases}$，得：$a_1=\frac{1}{32}$

，$q=2$，$a_n=2^{6-n}$．记$T_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{2^n-1}{2^5}$，$\prod_n=a_1a_2\cdots a_n=2^{\frac{(n-1)n}{2}}$．

$T_n>\prod_n$，则$\frac{2^n-1}{2^5}>2^{\frac{(n-1)n}{2}}$，化简得：$2^n-1>2^{\frac{1}{2}n^2-\frac{11}{2}n+5}$，当$n>\frac{1}{2}n^2-\frac{11}{2}n+5$时，

$n=\frac{13+\sqrt{121}}{2}\approx 12$．当$n=12$时，$T_{12}>\prod_{12}$，当$n=13$时，$T_{13}<\prod_{13}$，故$n_{\max}=12$．

二、解答题：本大题共6小题，共计90分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．

解：（1）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha-\cos\beta，\sin\alpha-\sin\beta)$，

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=2$，

所以，$\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=0$，

所以，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

（2）$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=0 & ①\\\sin\alpha+\sin\beta=1 & ②\end{cases}$，①²＋②²得：$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$.

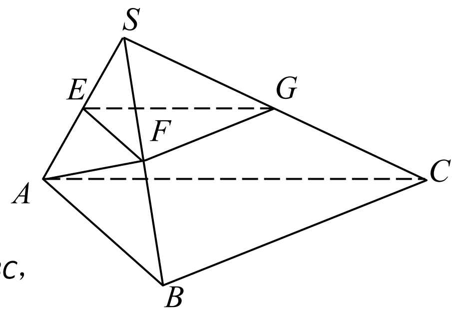
所以，$\alpha-\beta=\frac{2}{3}\pi$，$\alpha=\frac{2}{3}\pi+\beta$，

带入②得：$\sin(\frac{2}{3}\pi+\beta)+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta+\frac{1}{2}\sin\beta=\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)=1$，

所以，$\frac{\pi}{3}+\beta=\frac{\pi}{2}$.

所以，$\alpha=\frac{5\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{6}$.

16．



证：（1）因为$SA=AB$且$AF\perp SB$，

所以F为SB的中点.

又E，G分别为SA，SC的中点，

所以，$EF// AB$，$EG// AC$.

又$AB\cap AC=A$，$AB\subset$面SBC，$AC\subset$面ABC，

所以，平面$EFG//$平面ABC.

（2）因为平面$SAB\perp$平面SBC，平面$SAB\cap$平面$SBC=BC$，

$AF\subset$平面ASB，$AF\perp SB$.

所以，$AF\perp$平面SBC.

又$BC\subset$平面SBC，

所以，$AF\perp BC$.

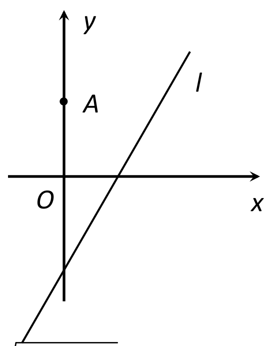
又$AB\perp BC$，$AF\cap AB=A$，

所以，$BC\perp$平面SAB.

又$SA\subset$平面SAB，

所以，$BC\perp SA$.

17． **解：**（1）联立：$\begin{cases} y=x-1 \\ y=2x-4 \end{cases}$，得圆心为：$C(3，2)$.



设切线为：$y=kx+3$，

$d=\frac{|3k+3-2|}{\sqrt{1+k^2}}=r=1$，得：$k=0\quad or\quad k=-\frac{3}{4}$.

故所求切线为：$y=0\quad or\quad y=-\frac{3}{4}x+3$.

（2）设点$M(x，y)$，由$MA=2MO$，知：$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，

化简得：$x^2+(y+1)^2=4$，

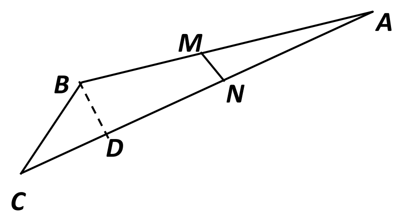
即：点M的轨迹为以$(0，1)$为圆心，2为半径的圆，可记为圆D.

又因为点M在圆C上，故圆C圆D的关系为相交或相切.

故：$1\leqslant|CD|\leqslant3$，其中$\left|CD\right|=\sqrt{a^2+(2a-3)^2}$.

解之得：$0\leqslant a\leqslant\frac{12}{5}$.

18．



解：（1）如图作$BD\perp CA$于点D，

设$BD=20k$，则$DC=25k$，$AD=48k$，

$AB=52k$，由$AC=63k=1260\text{m}$，

知：$AB=52k=1040\text{m}$．

（2）设乙出发x分钟后到达点M，

此时甲到达N点，如图所示．

则：$AM=130x$，$AN=50(x+2)$，

由余弦定理得：$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos A=7400x^2-14000x+10000$，

其中$0\leqslant x\leqslant 8$，当$x=\dfrac{35}{37}$(min)时，MN最小，此时乙在缆车上与甲的距离最短．

（3）由（1）知：$BC=500\text{m}$，甲到C用时：$\dfrac{1260}{50}=\dfrac{126}{5}$(min)．

若甲等乙3分钟，则乙到C用时：$\dfrac{126}{5}+3=\dfrac{141}{5}$(min)，在BC上用时：$\dfrac{86}{5}$(min)．

此时乙的速度最小，且为：$500\div\dfrac{86}{5}=\dfrac{1250}{43}$m/min．

若乙等甲3分钟，则乙到C用时：$\dfrac{126}{5}-3=\dfrac{111}{5}$(min)，在BC上用时：$\dfrac{56}{5}$(min)．

此时乙的速度最大，且为：$500\div\dfrac{56}{5}=\dfrac{625}{14}$m/min．

故乙步行的速度应控制在$[\dfrac{1250}{43},\dfrac{625}{14}]$范围内．

19．

证：（1）若$c=0$，则$a_n=a+(n-1)d$，$S_n=\dfrac{n[(n-1)d+2a]}{2}$，$b_n=\dfrac{(n-1)d+2a}{2}$．

当b_1，b_2，b_4成等比数列，$b_2^2=b_1b_4$，

即：$\left(a+\dfrac{d}{2}\right)^2=a\left(a+\dfrac{3d}{2}\right)$，得：$d^2=2ad$，又$d\neq 0$，故$d=2a$．

由此：$S_n=n^2a$，$S_{nk}=(nk)^2a=n^2k^2a$，$n^2S_k=n^2k^2a$．

故：$S_{nk}=n^2S_k$（$k,n\in N^*$）．

（2）$b_n=\dfrac{nS_n}{n^2+c}=\dfrac{n^2\dfrac{(n-1)d+2a}{2}}{n^2+c}$，

$$=\frac{n^2\dfrac{(n-1)d+2a}{2}+c\dfrac{(n-1)d+2a}{2}-c\dfrac{(n-1)d+2a}{2}}{n^2+c}$$

$$=\frac{(n-1)d+2a}{2}-\frac{c\dfrac{(n-1)d+2a}{2}}{n^2+c}．\qquad (※)$$

若$\{b_n\}$是等差数列，则$b_n=An+Bn$型．

观察(※)式后一项，分子幂低于分母幂，

故有：$\dfrac{c\dfrac{(n-1)d+2a}{2}}{n^2+c}=0$，即$c\dfrac{(n-1)d+2a}{2}=0$，而$\dfrac{(n-1)d+2a}{2}\neq 0$，

故$c=0$.

经检验，当$c=0$时$\{b_n\}$是等差数列.

20.

解：（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a\leqslant 0$在$(1,+\infty)$上恒成立，则$a\geqslant\dfrac{1}{x}$，　$x\in(1，+\infty)$.

故：$a\geqslant 1$.

$g'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

若$1\leqslant a\leqslant \mathrm{e}$，则$g'(x)=\mathrm{e}^x-a\geqslant 0$在$(1,+\infty)$上恒成立，

此时，$g(x)=e^x-ax$在$(1,+\infty)$上是单调增函数，无最小值，不合；

若$a>\mathrm{e}$，则$g(x)=e^x-ax$在$(1，\ln a)$上是单调减函数，在$(\ln a，+\infty)$上是单调增函数，$g_{\min}(x)=g(\ln a)$，满足.

故a的取值范围为：$a>\mathrm{e}$.

（2）$g'(x)=\mathrm{e}^x-a\geqslant 0$在$(-1,+\infty)$上恒成立，则$a\leqslant \mathrm{e}^x$，

故：$a\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$　$(x>0)$.

(ⅰ)若$0<a\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，令$f'(x)>0$得增区间为$(0，\dfrac{1}{a})$；

令$f'(x)<0$得减区间为$(\dfrac{1}{a}，+\infty)$.

当$x\to 0$时，$f(x)\to-\infty$；当$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$；

当$x=\dfrac{1}{a}$时，$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1\geqslant 0$，当且仅当$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时取等号.

故：当$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$f(x)$有1个零点；当$0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$f(x)$有2个零点.

(ⅱ)若$a=0$，则$f(x)=-\ln x$，易得$f(x)$有1个零点.

(ⅲ)若$a<0$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a>0$在$(0，+\infty)$上恒成立，

即：$f(x)=\ln x-ax$在$(0，+\infty)$上是单调增函数，

当$x\to 0$时，$f(x)\to-\infty$；当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$.

此时，$f(x)$有1个零点.

综上所述：当$a=\frac{1}{e}$或$a<0$时，$f(x)$有1个零点；当$0<a<\frac{1}{e}$时，$f(x)$有2个零点．