2013 年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）

数学试题卷（文史类）

点评：今年是重庆市在新课标下的第一年高考，数学（文/理）试卷充分体现了新课标的精神，在考查传统基础知识的同时，突出考察了新课标下新知识，如算法框图，统计茎叶图、回归分析、立几三视图、填空题三选二中的平面几何及参数方程与极坐标。考查了学生的空间想象能力，抽象概括能力，推理论证及数据处理、运算求解能力。整套试卷注重文理差异，利于人才选拔，推进新课程改革，试题过渡平稳，衔接有序，稳中求变，变中有律。

一、全面考查了课改中的核心与主干知识

今年文、理两套试卷均对新课标中的函数与导数、立体几何、【学科网解析】几何、概率、三角函数等核心内容作了重点考查，新增内容有选择性地在选择、填空题中出现，知识点分布合理，层次分明，利于较全面地考查所学内容。

二、注重了数学本质的考查，同时强调了数学能力立意

试卷也注重在知识与方法交汇处命题，例如文科（15）题将三角函数与不等式融合，理科（8）将对数性质与程序框图相结合，理科（18）、文科（20）将函数与导数有机结合，特别值得关注的是，今年理科（22）题新颖别致有创意，与往年命题风格完全不同，既考查了分类讨论、反证法、构造法等多种数学思想，又是一道以能力立意的好题，有较大的开放度和灵活性。

三、注重文理有别，难易适中、贴近生活

本次考试理科试题题目标号多增加一个，学生实际答题个数与去年一样。与去年相比，解答题题目位置和内容都稍有变化，知识考查个数增多，难度略比去年大；文科题目个数不变，难度大致与去年相当，文理差异突出，但也有共同之处。即 1、2 题均相同，相关题有 6 个题，但考查知识点不尽相同，其余试题都不同。充分体现了文理考生不同教学要求的考查目标，命题更具有针对性。数学源于生活，考题接近生活，例如理 18 题“摸球”概率题，文 17 题的线性相关问题和 20 题水池建造问题均与现实生活息息相关。

总之，今年文理试题仍保持了重庆以往命题风格，既关注面向全体同学，又能较好的区分数学能力不同的考生。有利于今后的考试导向，有利于提高学生的学习积极性，有利于高中数学课堂改革，有利于体现新课改精神。

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个备选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）已知集合 $U=\{1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则 ð$_U(A\cup B)=$

（A）$\{1,3,4\}$　（B）$\{3,4\}$　（C）$\{3\}$　（D）$\{4\}$

【学科网解析】：本题考查集合的混合运算，解题时要细心，不要遗漏元素．$A\cup B=\{1,2,3\}$，$C_U(A\cup B)=\{4\}$

【答案】D.

（2）命题“对任意 $x\in R$，都有 $x^2\ge 0$”的否定为

（A）存在 $x_0\in R$，都有 $x_0^2<0$　（B）对任意 $x\in R$，使得 $x^2<0$

（C）存在 $x_0\in R$，都有 $x_0^2\ge 0$　（D）不存在 $x\in R$，使得 $x^2<0$

【学科网解析】：掌握全称命题的否定是特称命题是解题的关键．根据命题“∀x∈R，

p（x）”的否定是“∃x_0∈R，￢p（x）”，∴命题：“对任意 x∈R，都有 $x^2 \geq 0$ ”的否定是“∃x_0∈R，使得 $x_0^2 < 0$ ”.

【答案】A.

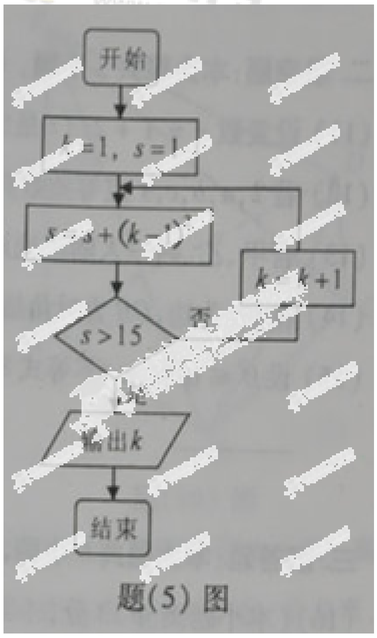
（3）函数 $y = \dfrac{1}{\log_2(x-2)}$ 的定义域为

（A）$(-\infty, 2)$　　（B）$(2, +\infty)$

（C）$(2,3)\cup(3,+\infty)$　　（D）$(2,4)\cup(4,+\infty)$

【学科网解析】：$\begin{cases} x-2>0 \\ x-2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow 2<x<3或x>3$

【答案】C.



题(5) 图

（4）设 P 是圆 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ 上的动点，Q 是直线 $x=-3$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的最小值为

（A）6　　（B）4　　（C）3　　（D）2

【学科网解析】：圆心与直线 $x=-3$ 垂直时距离为 6，$|PQ|$ 的最小值为 $6-2=4$

【答案】B.

（5）执行如题（5）图所示的程序框图，则输出的 k 的值是

（A）3

（B）4

（C）5

（D）6

【学科网解析】：当 $k=4$ 时 $S=1+1^2+2^2+3^2=15$，当 $k=5$ 时 $S=1+1^2+2^2+3^2+4^2=31>15$，循环终止。

【答案】C.

（6）下图是某公司 10 个销售店某月销售某产品数量（单位：台）的茎叶图，则数据落在区间[22,30）内的概率为

（A）0.2　　（B）0.4

（C）0.5　　（D）0.6

1	8	9			
2	1	2	2	7	9
3	0	0	3		

题（6）图

【学科网解析】：数据落在区间[22,30）内的有 4 个，数据落在区间[20,30）内的概率为 $\dfrac{4}{10}=0.4$

【答案】B.

（7）关于 x 的，且：$x_2 - x_1 = 15$，则 $a=$

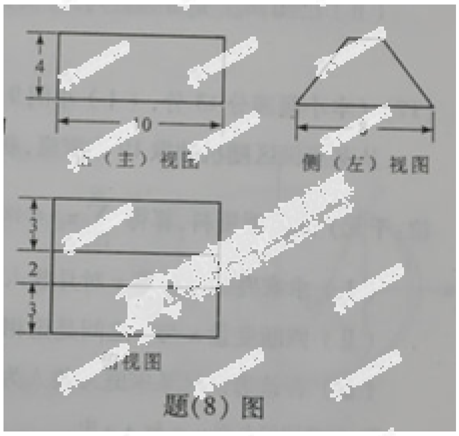
（A）$\dfrac{5}{2}$　　（B）$\dfrac{7}{2}$　　（C）$\dfrac{15}{4}$　　（D）$\dfrac{15}{2}$

【学科网解析】：由不等式 $x^2-2ax-8a^2<0$（$a>0$）的解集为 (x_1,x_2) 得 $x_1=-2a, x_2=4a$ 由 $x_2-x_1=15$ 得 $4a+2a=15$ 所以 $a=\dfrac{5}{2}$

【答案】A.

（8）某几何体的三视图如题（8）所示，则该几何体的表面积为

（A）180
（B）200
（C）220
（D）240



题(8) 图

【学科网解析】：通过三视图复原的几何体的形状，结合三视图的数据求出几何体的体积即可．由三视图可知该几何体的表面积为 $S=(2+8+10)\times 10+2\times\dfrac{1}{2}(2+8)\times 4=240$

【答案】D.

（9）已知函数 $f(x)=ax^3+b\sin x+4(a,b\in R)$，$f(\lg(\log_2 10))=5$，则 $f(\lg(\lg 2))=$

（A）-5　　（B）-1　　（C）3　　（D）4

【学科网解析】：$\lg(\log_2 10)=\lg\dfrac{1}{\lg 2}=-\lg(\lg 2)$ 由 $f(\lg(\log_2 10))=5$ 得

$-a[\lg(\lg 2)]^3-b\sin[\lg(\lg 2)]+4=5$ 则 $a[\lg(\lg 2)]^3+b\sin[\lg(\lg 2)]=-1$ 所以

$f(\lg(\lg 2))=a[\lg(\lg 2)]^3+b\sin[\lg(\lg 2)]+4=-1+4=3$

【答案】C.

（10）设双曲线 C 的中心为点 O，若有且只有一对相交于点 O、所成的角为 60^0 的直线

A_1B_1 和 A_2B_2，使 $|A_1B_1|=|A_2B_2|$，其中 A_1、B_1 和 A_2、B_2 分别是这对直线与双曲线

C 的交点，则该双曲线的离心率的取值范围是

（A） $(\frac{2\sqrt{3}}{3},2]$　　（B） $[\frac{2\sqrt{3}}{3},2)$　　（C） $(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$　　（D） $[\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$

【学科网解析】：设渐近线的夹角为 2α 则 $2\alpha>60^0$ 所以 $\tan\alpha>\tan 30^0$ 即 $\frac{b}{a}>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 所以 $e>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，不妨设 A_1B_1 倾斜角最大值为 60^0，因为直线 A_1B_1 与双曲线 C 相交，所以 $\frac{b}{a}\le\sqrt{3}$ 即 $\frac{c^2-a^2}{a^2}\le 3$ 故 $e\le 2$

【答案】A.

二．填空题：本大题共 6 小题，考生作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填写在答题卡相应位置上．

（11）已知复数 $z=1+2i$ （i 是虚数单位），则 $|z|=$____________.

【学科网解析】：本题考查复数的求模，$|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

【答案】$\sqrt{5}$． zha

（12）若 2、a、b、c、9 成等差数列，则 $c-a=$____________.

【学科网解析】：2、a、b、c、9 成等差数列，所以 $4d=9-2$，故 $c-a=2d=\frac{7}{2}$

【答案】$\frac{7}{2}$． z

（13）若甲、乙、丙三人随机地站成一排，则甲、乙两人相邻而站的概率为____________.

【学科网解析】：甲、乙、丙三人随机地站成一排有 6 种站法，甲、乙两人相邻而站有 4 种，则甲、乙两人相邻而站的概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

【答案】$\frac{2}{3}$.

（14）OA 为边，OB 为对角线的矩形中，$\overrightarrow{OA}=(-3,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-2,k)$，则实数 $k=$____________.

【学科网解析】：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,k)-(-3,1)=(1,k-1)$，由 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$ 得 $(-3,1)\cdot(1,k-1)=0$ 故 $k=4$

【答案】4．

（15）设$0\le\alpha\le\pi$，不等式$8x^2-(8\sin\alpha)x+\cos2\alpha\ge0$对$x\in R$恒成立，则$a$的取值范围为____________.

【学科网解析】：$8x^2-(8\sin\alpha)x+\cos2\alpha\ge0$对$x\in R$恒成立，所以$\Delta=64\sin^2\alpha-4\times8\times\cos2\alpha\le0$即$2\sin^2\alpha-(1-2\sin^2\alpha)\le0$所以$-\le\frac{1}{2}\sin\alpha\le\frac{1}{2}$因为$0\le\alpha\le\pi$所以$0\le\frac{1}{2}\sin\alpha\le\frac{1}{2}$故$0\le\alpha\le\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}\le\alpha\le\pi$

【答案】$[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi]$.

三．解答题：本大题共6小题，共75分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（16）（本小题满分13分，（Ⅰ）小问7分，（Ⅱ）小问6分）

设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n$，$n\in N_+$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式及前n项和S_n；

（Ⅱ）已知$\{b_n\}$是等差数列，T_n为前n项和，且$b_1=a_2$，$b_3=a_1+a_2+a_3$，求T_{20}.

【学科网解析】：（Ⅰ）由题意知$\{a_n\}$是首项为1，公比为3的等比数列，所以$a_n=3^{n-1}$，

$S_n=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{1}{2}(3^n-1)$

（Ⅱ）$b_1=a_2=3$，$b_3=1+3+9=13$，$b_3-b_1=10=2d$所以公差$d=5$故

$T_{20}=20\times3+\frac{20\times19}{2}\times5=1010$

（17）（本小题满分13分，（Ⅰ）小问9分，（Ⅱ）、（Ⅲ）小问各2分）

从某居民区随机抽取10个家庭，获得第i个家庭的月收入x_i（单位：千元）与月储蓄y_i（单位：千元）的数据资料，算得$\sum_{i=1}^{10}x_i=80$，$\sum_{i=1}^{10}y_i=20$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=184$，$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=720$.

（Ⅰ）求家庭的月储蓄y对月收入x的线性回归方程$y=bx+a$；

（Ⅱ）判断变量x与y之间是正相关还是负相关；

（Ⅲ）若该居民区某家庭月收入为7千元，预测该家庭的月储蓄.

附：线性回归方程 $y=bx+a$ 中，$b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$a=\overline{y}-b\overline{x}$，

其中 $\overline{x}$，$\overline{y}$ 为样本平均值，线性回归方程也可写为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$.

【学科网解析】:（Ⅰ）$\because \overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}x_i}{10}=8,\ \overline{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}y_i}{10}=2$……..2 分

$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=184,\ \sum_{i=1}^{10}x_i^2=720\ \therefore b=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\times\overline{x}^2}=\dfrac{184-10\times8\times2}{720-10\times64}=0.3$

$a=2-0.3\times8=-0.4\ \therefore y=0.3x-0.4$…….9 分

（Ⅱ）由于变量 y 的值随 x 的值增加而增加（$b=0.3>0$）故 x 与 y 之间是正相关

（III）该居民区某家庭月收入为 7 千元，该家庭的月储蓄 $y=0.3\times7-0.4=1.7$ 千元

（18）（本小题满分 13 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 9 分）在△ ABC 中，内角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c，且 $a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}ab$.（Ⅰ）求 A；（Ⅱ）设 $a=\sqrt{3}$，S 为△ ABC 的面积，求 $S+3\cos B\cos C$ 的最大值，并指出此时 B 的值.

【学科网解析】: 体现了数学转化与化归思想

（Ⅰ）由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-\sqrt{3}bc}{2bc}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$，又因 $0<A<\pi$ 所以 $A=\dfrac{5\pi}{6}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\sin A=\dfrac{1}{2}$ 又由正弦定理及 $a=\sqrt{3}$

得 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sin B}{\sin A}a\sin C=3\sin B\sin C$

因此 $S+3\cos B\cos C=3(\cos B\cos C+\sin B\sin C)=3\cos(B-C)$

所以当 $B=C$ 即 $B=\dfrac{\pi-A}{2}=\dfrac{\pi}{12}$ 时 $S+3\cos B\cos C$ 取最大值 3

（19）（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 7 分）

如题（19）图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=2\sqrt{3}$，

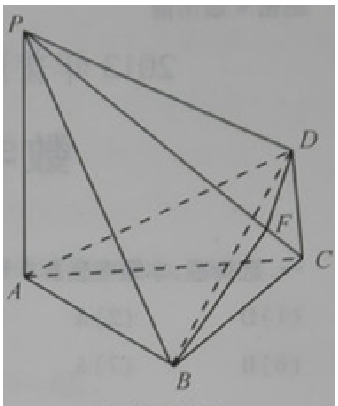
$BC=CD=2$，$\angle ACB=\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅰ）求证：$BD\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）若侧棱 PC 上的点 F 满足 $PF=7FC$，求三棱锥 $P-BDF$ 的体积.

【学科网解析】：考查了空间想象能力和观察问题的能力；

（Ⅰ）因 $BC=CD$ 即 $\triangle BCD$ 为等腰三角形，又 $\angle ACB=\angle ACD$ 故 $AC\perp BD$，因 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$ 从而 BD 与平面 PAC 内两条相交直线 PA、AC 都垂直，所以 $BD\perp$ 平面 PAC



题(19) 图

（Ⅱ）三棱锥 $P-BCD$ 的底面 BCD 的面积

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$$

由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$ 得

$$V_{P-BCD}=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot PA=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=2$$

由 $PF=7FC$ 得三棱锥 $F-BCD$ 的高为 $\frac{1}{8}PA$ 故

$$V_{F-BCD}=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot\frac{1}{8}PA=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{1}{4}$$

所以 $V_{P-BDF}=V_{P-BCD}-V_{F-BCD}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

（20）（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 7 分）

某村庄拟修建一个无盖的圆柱形蓄水池（不计厚度）．设该蓄水池的底面半径为 r 米，高为 h 米，体积为 V 立方米．假设建造成本仅与表面积有关，侧面积的建造成本为 100 元/平方米，底面的建造成本为 160 元/平方米，该蓄水池的总建造成本为 12000 π 元（π 为圆周率）．

（Ⅰ）将 V 表示成 r 的函数 $V(r)$，并求该函数的定义域；

（Ⅱ）讨论函数 $V(r)$ 的单调性，并确定 r 和 h 为何值时该蓄水池的体积最大．

【学科网解析】：（Ⅰ）蓄水池侧面的总成本为 $100\cdot 2\pi rh=200\pi rh$ 元， 底面的总成本为 $160\pi r^2$ 元，所以蓄水池的总成本为 $(200\pi rh+160\pi r^2)$ 元又据题意 $200\pi rh+160\pi r^2=12000\pi$ 所以 $h=\frac{1}{5r}(300-4r^2)$ 从而 $V(r)=\pi r^2h=\frac{\pi}{5}(300r-4r^3)$ 因 $r>0$ 又由 $h>0$ 可得 $r<5\sqrt{3}$ 故函数 $V(r)$ 的定义域 $(0,5\sqrt{3})$

（Ⅱ）因 $V(r)=\frac{\pi}{5}(300r-4r^3)$ 故 $V'(r)=\frac{\pi}{5}(300-12r^2)$ 令 $V'(r)=0$，解得 $r_1=5$，$r_2=-5$（不在定义域内，舍去）当 $r\in(0,5)$ 时 $V'(r)>0$ 故 $V(r)$ 在 $(0,5)$ 上为增函数；当 $r\in(5,5\sqrt{3})$ 时 $V'(r)<0$ 故 $V(r)$ 在 $(5,5\sqrt{3})$ 上为减函数；由此可知 $V(r)$ 在 $r=5$ 处取得最大值，此时 $h=8$，即当 $r=5,h=8$ 时该蓄水池的体积最大

（21）（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 8 分）

如题（21）图，椭圆的中心为原点 O，长轴在 x 轴上，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，过左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于 A、A' 两点，$|AA'|=4$．

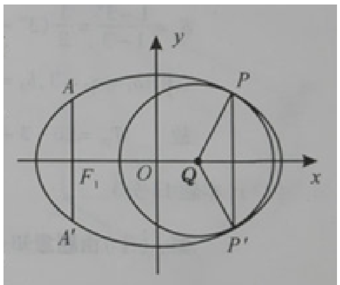
（Ⅰ）求该椭圆的标准方程；

（Ⅱ）取平行于 y 轴的直线与椭圆相较于不同的两点 P 、 P'，过 P 、 P' 作圆心为 Q 的圆，使椭圆上的其余点均在圆 Q 外．求 $\Delta PP'Q$ 的面积 S 的最大值，并写出对应的圆 Q 的标准方程．

【学科网解析】：（Ⅰ）由题意知点 $A(-c,2)$ 在椭圆上，则 $\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1$ 从而 $e^2+\frac{4}{b^2}=1$，由 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

得 $b^2=\frac{4}{1-e^2}=8$，从而 $a^2=\frac{b^2}{1-e^2}=16$，故该椭圆的标准方程为

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$



题(21)图

（Ⅱ）由椭圆的对称性，可设 $Q(x_0,0)$，又设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点，

则

$|QM|^2=(x-x_0)^2+y^2=x^2-2xx_0+x_0^2+y^2$

$=x^2-2xx_0+x_0^2+8(1-\frac{x^2}{16})$

$=\frac{1}{2}(x-2x_0)^2-x_0^2+8(x\in[-4,4])$

设 $P(x_1,y_1)$，由题意，P 是椭圆上到 Q 的距离最小的点，因此，上式当 $x=x_1$ 时取得最小值，又因 $x_1\in(-4,4)$，所以上式当 $x_1=2x_0$ 时 取得最小值，从而 $x_1=2x_0$ 且 $|QP|^2=8-x_0^2$

由对称性知 $P'(x_1,-y_1)$ 故 $|PP'|=|2y_1|$ 所以 $S=\frac{1}{2}|2y_1||x-x_0|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{8(1-\frac{x^2}{16})}|x_0|$

$=\sqrt{2}\sqrt{(4-x_0^2)x_0^2}=\sqrt{2}\sqrt{-(x_0^2-2)^2+4}$ 当 $x_0=\pm\sqrt{2}$ 时 $\Delta PP'Q$ 的面积 S 的最大值 $2\sqrt{2}$

此时对应的圆 Q 的圆心坐标为 $Q(\pm\sqrt{2},0)$，半径 $|QP|=\sqrt{8-x_0^2}=\sqrt{6}$ 因此这样的圆有两个，其标准方程分别为 $(x+\sqrt{2})^2+y^2=6$，$(x-\sqrt{2})^2+y^2=6$