2013年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

文 科 数 学

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷(非选择题)两部分, 共150分. 考试用时120分钟. 第I卷1至2页, 第II卷3至5页.

第I卷

参考公式:

如果事件*A*, *B*互斥, 那么

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

·棱柱的体积公式$V = Sh$，

其中*S*表示棱柱的底面面积, *h*表示棱柱的高.

·如果事件*A*, *B*相互独立, 那么

$P(AB)=P(A)P(B)$

·球的体积公式$V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

其中*R*表示球的半径.

一. 选择题: 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1) 已知集合$A = \{x\in \mathbf{R} \mid |x|\le 2\}$, $B = \{x\in \mathbf{R} \mid x\le 1\}$, 则 $A\cap B=$

(A) $(-\infty,2]$　　(B) [1,2]　　(C) [－2,2]　　(D) [－2,1]

(2) 设变量*x*, *y*满足约束条件$\begin{cases}3x+y-6\ge 0,\\ x-y-2\le 0,\\ y-3\le 0,\end{cases}$ 则目标函数$z = y-2x$的最小值为

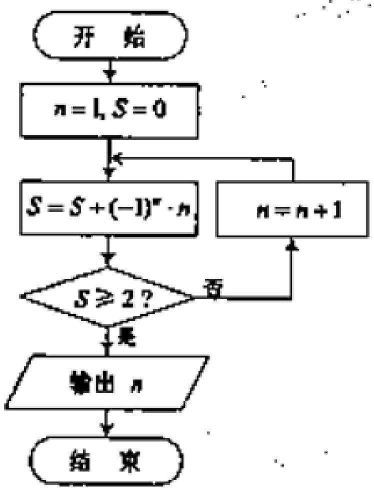
(A) －7　　(B) －4

(C) 1　　(D) 2

(3) 阅读右边的程序框图, 运行相应的程序, 则输出*n*的值为

(A) 7　　　　　(B) 6

(C) 5　　　　　(D) 4



(4) 设 $a,b\in \boldsymbol{R}$, 则 “$(a-b)a^2<0$”是“$a<b$”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知过点*P*(2,2) 的直线与圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 相切, 且与直线 $ax-y+1=0$ 垂直, 则 $a=$

(A) $-\frac{1}{2}$　　　　(B) 1

(C) 2　　　　(D) $\frac{1}{2}$

(6) 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值是

(A) -1　　　　(B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　(D) 0

(7)　已知函数 $f(x)$ 是定义在***R***上的偶函数,　且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增.　若实数*a*满足 $f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}} a)\le 2f(1)$, 则*a*的取值范围是

(A) $[1,2]$　　　　(B) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　　　(D) $(0,2]$

(8) 设函数 $f(x)=e^x+x-2, g(x)=\ln x+x^2-3$. 若实数*a*, *b*满足 $f(a)=0, g(b)=0$, 则

(A) $g(a)<0<f(b)$　(B) $f(b)<0<g(a)$

(C) $0<g(a)<f(b)$　(D) $f(b)<g(a)<0$

第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.
2. 本卷共12小题, 共110分.

二. 填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分.

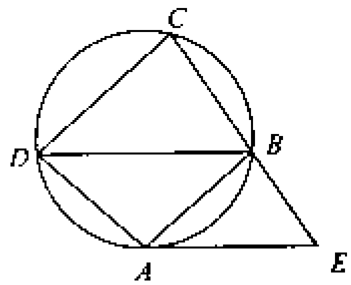
(9) i是虚数单位. 复数$(3 + i)(1-2i)$ = ___.

(10) 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上. 若球的体积为$\frac{9\pi}{2}$, 则正方体的棱长为 ___.

(11) 已知抛物线$y^2=8x$的准线过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点, 且双曲线的离心率为2, 则该双曲线的方程为___.

(12) 在平行四边形$ABCD$中, $AD = 1$, $\angle BAD=60^\circ$, E为CD的中点. 若$\overline{AC}\cdot\overline{BE}=1$, 则$AB$的长为___.

(13) 如图, 在圆内接梯形$ABCD$中, $AB//DC$, 过点A作圆的切线与CB的延长线交于点E. 若$AB = AD = 5$, $BE = 4$, 则弦BD的长为___.



(14) 设$a + b = 2$, $b>0$, 则$\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$的最小值为___.

三. 解答题: 本大题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分13分)

某产品的三个质量指标分别为x, y, z, 用综合指标$S = x + y + z$评价该产品的等级. 若$S\le 4$, 则该产品为一等品. 现从一批该产品中, 随机抽取10件产品作为样本, 其质量指标列表如下:

产品编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
质量指标(x, y, z)	(1,1,2)	(2,1,1)	(2,2,2)	(1,1,1)	(1,2,1)
产品编号	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
质量指标(x, y, z)	(1,2,2)	(2,1,1)	(2,2,1)	(1,1,1)	(2,1,2)

(I) 利用上表提供的样本数据估计该批产品的一等品率;

(II) 在该样品的一等品中, 随机抽取2件产品,

(1.) 用产品编号列出所有可能的结果;

(2.) 设事件B为 "在取出的2件产品中, 每件产品的综合指标S都等于4", 求事件B发生的概率.

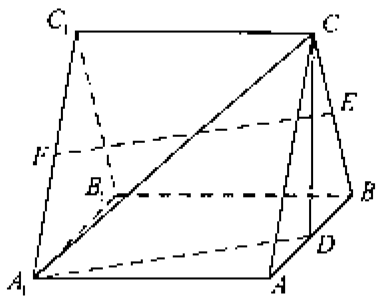
(16) (本小题满分13分)

在△ABC中, 内角A, B, C所对的边分别是a, b, c. 已知$b\sin A=3c\sin B$, a = 3, $\cos B=\frac{2}{3}$.

(I) 求b的值;

(II) 求$\sin\left(2B-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

(17) (本小题满分13分)



如图, 三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中, 侧棱A_1A⊥底面ABC,且各棱长均相等. D, E, F分别为棱AB, BC, A_1C_1的中点.

(I) 证明EF//平面A_1CD;

(II) 证明平面A_1CD⊥平面A_1ABB_1;

(III) 求直线BC与平面A_1CD所成角的正弦值.

(18) (本小题满分13分)

设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$, 离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,

过点F且与x轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设A, B分别为椭圆的左,右顶点, 过点F且斜率为k的直线与椭圆交于C, D两点. 若$\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{CB}=8$, 求$k$的值.

(19) (本小题满分14分)

已知首项为$\frac{3}{2}$的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n(n\in \boldsymbol{N}^*)$, 且$-2S_2,S_3,4S_4$成等差数列.

(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(II) 证明$S_n+\frac{1}{S_n}\le\frac{13}{6}(n\in \boldsymbol{N}^*)$.

(20) (本小题满分14分)

设$a\in[-2,0]$, 已知函数$f(x)=\begin{cases} x^3-(a+5)x, & x\le 0, \\ x^3-\frac{a+3}{2}x^2+ax, & x>0. \end{cases}$

(I) 证明$f(x)$在区间(－1,1)内单调递减, 在区间(1, + ∞)内单调递增;

(II) 设曲线$y=f(x)$在点$P_i(x_i,f(x_i))(i=1,2,3)$处的切线相互平行, 且$x_1x_2x_3\ne 0$, 证明$x_1+x_2+x_3>\frac{1}{3}$.

2013年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基础运算。每小题5分。满分40分。

（1）D　（2）A　（3）D　（4）A

（5）C　（6）B　（7）C　（8）A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分30分。

（9）5-5i　（10）$\sqrt{3}$　（11）$x^2-\frac{y^2}{3}=1$

（12）$\frac{1}{2}$　（13）$\frac{15}{2}$　（14）$\frac{3}{4}$

三、解答题

（15）本小题主要考查样本估计总体的方法、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基础知识。考查数据处理能力和运用概率知识解决简单问题的能力。满分13分。

（I）解：计算10件产品的综合指标S，如下表:

产品编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
S	4	4	6	3	4	5	4	5	3	5

其中S≤4的有A_1，A_2，A_4，A_5，A_7，A_9，共6件，故该样本的一等品率为$\frac{6}{10}$=0.6，

从而可估计该批产品的一等品率为0.6.

（II）

（i）解：在该样本的一等品中，随机抽取2件产品的所有可能结果为$\{A_1, A_2\}$，$\{A_1, A_4\}$，$\{A_1, A_5\}$，$\{A_1, A_7\}$，$\{A_1, A_9\}$，$\{A_2, A_4\}$，$\{A_2, A_5\}$，$\{A_2, A_7\}$，$\{A_2, A_9\}$，$\{A_4, A_5\}$，$\{A_4, A_7\}$，$\{A_4, A_9\}$，$\{A_5, A_7\}$，$\{A_5, A_9\}$，$\{A_7, A_9\}$，共15种.

（ii）解：在该样本的一等品中，综合指标S等于4的产品编号分别为A_1，A_2，

A_5， A_7，则事件B发生的所有可能结果为$\{A_{1,}\ A_2\}$，$\{A_{1,}\ A_5\}$，$\{A_{1,}\ A_7\}$，$\{A_2, A_5\}$，$\{A_2, A_7\}$，$\{A_5, A_7\}$共6种。

所以P(B)= $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

（16）本小题主要考查同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦与余弦公式、两角差的正弦公式以及正弦定理、余弦定理等基础知识.考查基本运算求解能力.满分13分。

（I）**解**：在ΔABC中，由$\frac{a}{\sin A}$=$\frac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$,又由$b\sin A=3c\sin B$，可得a=3c，又a=3，故c=1.

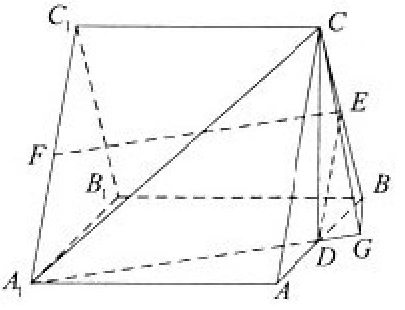
由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， $\cos B$=$\frac{2}{3}$，可得$b=\sqrt{6}$.

（II）**解**：由$\cos B$=$\frac{2}{3}$，得$\sin B$=$\frac{\sqrt{5}}{3}$，进而得$\cos 2B$=$2\cos^2 B-1$=$-\frac{1}{9}$，

$\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

所以sin$\left(2B-\frac{\pi}{3}\right)$=sin$2B\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2B\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{5}+\sqrt{3}}{18}$.

（17）本小题主要考查直线与平面平行、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识。考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力。满分13分。



（I）**证明**：如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC \parallel A_1C_1$，且$AC=A_1C_1$，连接ED，在ΔABC中，因为D,E分别为AB,BC的中点，所以DE=$\frac{1}{2}AC$且DE∥AC，又因为F为A_1C_1的中点，可得$A_1F=DE$,且$A_1F \parallel DE$，即四边形A_1DEF为平行四边形，所以$EF \parallel DA_1$. 又$EF \not\subset$平面A_1CD,$DA_1 \subset$平面A_1CD，所以，$EF \parallel$平面A_1CD。

（II）**证明**：由于底面ABC是正三角形，D为AB的中点，故CD⊥AB，又由于侧棱$A_1A\perp$底面ABC，CD⊂平面ABC，所以$A_1A\perp$CD，又$A_1A\cap AB=A$，因此CD⊥平面A_1ABB_1，而CD⊂平面A_1CD，所以平面$A_1CD\perp A_1ABB_1$。

（III）**解**：在平面A_1ABB_1内，过点B作BG⊥A_1D交直线A_1D于点G，连接CG.

由于平面$A_1CD\perp$平面A_1ABB_1，而直线A_1D是平面A_1CD与平面A_1ABB_1的交线，故BG⊥平面A_1CD。由此得$\angle BCG$为直线BC与平面A_1CD所成的角。

设棱长为a，可得$A_1D=\frac{\sqrt{5}a}{2}$，由$\Delta A_1AD\backsim\Delta BGD$，易得BG$=\frac{\sqrt{5}a}{5}$。在Rt$\Delta BGC$中，sin

$\angle BCG=\frac{BG}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线BC与平面A_1CD所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$。

（18）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、向量的运算等基础知识。考查用代数方法研究圆锥曲线的性质。考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力。满分13分。

（I）**解**：设F（$-c,0$），由$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,知$a=\sqrt{3}c$.

过点F且与x轴垂直的直线为$x=-c$，代入椭圆方程有$\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，解得$y=\pm\frac{\sqrt{6}b}{3}$，于是

$\frac{2\sqrt{6}b}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，解得$b=\sqrt{2}$，又$a^2-c^2=b^2$，从而$a=\sqrt{3}$，c=1，所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

（II）**解**：设点$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$,由F（-1，0）得直线CD的方程为$y=k(x+1)$，由方程组

$\begin{cases}y=k(x+1)\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$消去$y$，整理得$(2+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$.

求解可得$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-6}{2+3k^2}$.　因为A($-\sqrt{3},0$), $B(\sqrt{3},0)$，所以$\overline{AC}\bullet\overline{DB}+\overline{AD}\bullet\overline{CB}$=（

$x_1+\sqrt{3},y_1$）$\bullet(\sqrt{3}-x_2,-y_2)+(x_2+\sqrt{3},y_2)\bullet(\sqrt{3}-x_1,-y_1)$

$=6-2x_1x_2-2y_1y_2=5-2x_1x_2-2k^2(x_1+1)(x_2+1)$ $-6-$

$(2+2k^2)x_1x_2-2k^2(x_1+x_2)-2k^2$

$=6+\dfrac{2k^2+12}{2+3k^2}$.

由已知得$6+\dfrac{2k^2+12}{2+3k^2}$=8，解得$k=\pm\sqrt{2}$.

（19）本小题主要考查等差数列的概念，等比数列的概念、通项公式、前n项和公式，数列的基本性质等基础知识.
考查分类讨论的思想，考查运算能力、分析问题和解决问题的能力. 满分14分.

（I）解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，因为$-2S_2,S_3$，

$4S_4$成等差数列，所以$S_3+2S_2=4S_4-S_3$，即$S_4-S_3=S_2-S_4$，可得2$a_4=-a_3$，于是$q=\dfrac{a_4}{a_3}=-\dfrac{1}{2}$.

又$a_1=\dfrac{3}{2}$，所以等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\bullet\dfrac{3}{2^n}$.

（II）证明：

$$S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n, S_n+\frac{1}{S_n}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=\begin{cases}2+\dfrac{1}{2^n(2^n+1)}, n\text{为奇数，}\\ 2+\dfrac{1}{2^n(2^n-1)}, n\text{为偶数。}\end{cases}$$

当n为奇数时，$S_n+\dfrac{1}{S_n}$随n的增大而减小，所以$S_n+\dfrac{1}{S_n}\le S_1+\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{13}{6}$.

当n为偶数时，$S_n+\dfrac{1}{S_n}$随n的增大而减小，所以$S_n+\dfrac{1}{S_n}\le S_2+\dfrac{1}{S_2}=\dfrac{25}{12}$.

故对于$n\in N^n$,有$S_n+\dfrac{1}{S_n}\le\dfrac{13}{6}$.

（20）本小题主要考查导数的运算及其几何意义，利用导数研究函数的单调性，考查分类讨论思想、化归思想、函数思想. 考查综合分析问题和解决问题的能力. 满分14分。

（I）证明：设函数$f_1(x)=x^3-(a+5)x\ (x\le 0)$，$f_2(x)-x^3-\dfrac{a+3}{2}x^2+ax\ (x\ge 0)$,

① $f_1^{'}(x)=3x^2-(a+5)$, 由$a\in[-2,0]$，从而当$-1<x<0$时，$f_1^{'}(x)=3x^2-(a+5)$ $<3-a-5\le 0$，所以函数$f_1(x)$在区间$(-1,0]$内单调递减.

②

$f_2^{'}(x)=3x^2-(a+3)x+a=(3x-a)(x-1)$，由于$a\in[-2,0]$，所以当$0<x<1$时，$f_2^{'}(x)<0$；当

$x>1$时，$f_2'(x)>0$. 即函数$f_2(x)$在区间$[0,1)$内单调递减，在区间$(1,+\infty)$内单调递增.
综合①，②及$f_1(0)=f_2(0)$，可知函数$f(x)$在区间（-1,1）内单调递减，在区间$(1,+\infty)$内单调递增.

（II）**证明**：由（I）知$f'(x)$在区间$(-\infty,0)$内单调递减，在区间$\left(0,\frac{a+3}{6}\right)$内单调递减，在区间$\left(\frac{a+3}{6},+\infty\right)$内单调递增.

因为曲线$y=f(x)$在点$P_1(x_1,f(x_1))$（i=1,2,3）处的切线相互平行，从而x_1,x_2,x_3互不相等，且$f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)$. 不防设$x_1<0<x_2<x_3$，由

$3x_1^2-(a+5)=3x_2^2-(a+3)x_2+a=3x_3^2-(a+3)x_3+a$，

可得$3x_2^2-3x_3^2-(a+3)(x_2-x_3)=0$，解得$x_2+x_3=\frac{a+3}{3}$，从而$0<x_2<\frac{a+3}{6}<x_3$.

设$g(x)=3x^2-(a+3)x+a$，则$g\left(\frac{a+3}{6}\right)<g(x_2)<g(0)=a$.

由$3x_1^2-(a+5)=g(x_2)<a$，解得$-\sqrt{\frac{2a+5}{3}}<x_1<0$，所以$x_1+x_2+x_3>-\sqrt{\frac{2a+5}{3}}+\frac{a+3}{3}$，

设$t=\sqrt{\frac{2a+5}{3}}$，则$a=\frac{3t^2-5}{2}$，因为$a\in[-2,0]$，所以$t\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3}\right]$，故$x_1+x_2+x_3>$

$-t+\frac{3t^2+1}{6}=\frac{1}{2}(t-1)^2-\frac{1}{3}\geq-\frac{1}{3}$，

即$x_1+x_2+x_3>-\frac{1}{3}$.