绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学Ⅰ

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1．本试卷共4页，均为非选择题(第1题~第20题，共20题)。本卷满分为160分，考试时间为120分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一片交回。

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。

3．请认真核对监考员从答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。

4．作答试题，必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

参考公式：

样本数据$x_1,x_2,\ldots,x_n$的方差$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，其中$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$．

柱体的体积$V=Sh$，其中S是柱体的底面积，h是柱体的高．

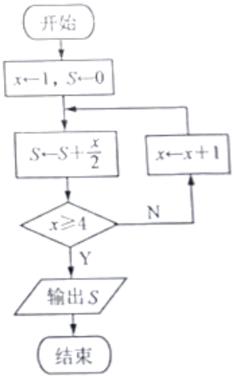
锥体的体积$V=\frac{1}{3}Sh$，其中S是锥体的底面积，h是锥体的高．

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

1．已知集合$A=\{-1,0,1,6\}$，$B=\{x\,|\,x>0,x\in\mathbf{R}\}$，则$A\cap B=$__▲__．

2．已知复数$(a+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$的实部为0，其中$\mathrm{i}$为虚数单位，则实数$a$的值是__▲__．

3．下图是一个算法流程图，则输出的S的值是__▲__．



（第3题）

4．函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是__▲__.

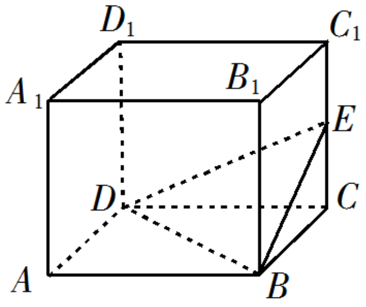
5．已知一组数据6，7，8，8，9，10，则该组数据的方差是__▲__.

6．从3名男同学和2名女同学中任选2名同学参加志愿者服务，则选出的2名同学中至少有1名女同学的概率是__▲__.

7．在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 经过点（3，4)，则该双曲线的渐近线方程是__▲__.

8．已知数列 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列，S_n 是其前n项和.若 $a_2a_5+a_8=0,S_9=27$，则 S_8 的值是__▲__.

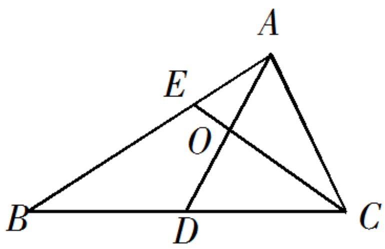
9．如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是120，E为 CC_1 的中点，则三棱锥E-BCD的体积是__▲__.



10．在平面直角坐标系 xOy 中，P是曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 上的一个动点，则点P到直线x+y=0的距离的最小值是__▲__.

11．在平面直角坐标系 xOy 中，点A在曲线y=lnx上，且该曲线在点A处的切线经过点（-e，-1)(e为自然对数的底数），则点A的坐标是__▲__.

12．如图，在 $\triangle ABC$ 中，D是BC的中点，E在边AB上，BE=2EA，AD与CE交于点 O.若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则 $\frac{AB}{AC}$ 的值是__▲__.



13．已知$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{2}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值是__▲__.

14．设$f(x),g(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的两个周期函数，$f(x)$的周期为4，$g(x)$的周期为2，且$f(x)$是奇函数.

当$x\in(0,2]$时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$，$g(x)=\begin{cases}k(x+2),0<x\le 1\\ -\dfrac{1}{2},1<x\le 2\end{cases}$，其中$k>0$.若在区间(0，9]上，关于$x$的方程$f(x)=g(x)$有8个不同的实数根，则$k$的取值范围是__▲__.

二、解答题：本大题共6小题，共计90分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（本小题满分14分）

在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c.

（1）若$a=3c$，$b=\sqrt{2}$，$\cos B=\dfrac{2}{3}$，求c的值；

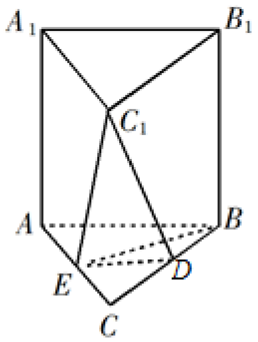
（2）若$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$，求$\sin(B+\dfrac{\pi}{2})$的值.

16．（本小题满分14分）

如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别为BC，AC的中点，$AB=BC$.

求证：（1）A_1B_1∥平面DEC_1；

（2）$BE\perp C_1E$.



17．（本小题满分14分）

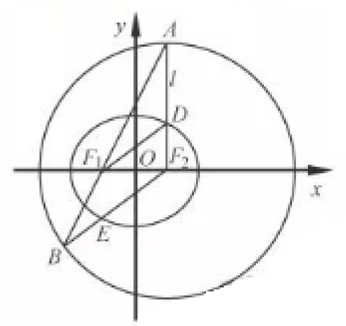
如图，在平面直角坐标系xOy中，椭圆C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为$F_1$（﹣1、0），

F_2（1，0）．过F_2作x轴的垂线l，在x轴的上方，l与圆F_2:$(x-1)^2+y^2=4a^2$交于点A，与椭圆C交于点D.连结AF_1并延长交圆F_2于点B，连结BF_2交椭圆C于点E，连结DF_1.

已知$DF_1=\dfrac{5}{2}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）求点E的坐标.



18．（本小题满分16分）

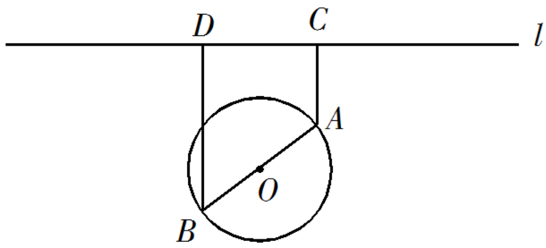
如图，一个湖的边界是圆心为O的圆，湖的一侧有一条直线型公路l，湖上有桥AB（AB是圆O的直径）．规划在公路l上选两个点P、Q，并修建两段直线型道路PB、QA．规划要求:线段PB、QA上的所有点到点O的距离均不小于圆O的半径．已知点A、B到直线l的距离分别为AC和BD（C、D为垂足），测得AB=10，AC=6，BD=12（单位:百米）．

（1）若道路PB与桥AB垂直，求道路PB的长；

（2）在规划要求下，P和Q中能否有一个点选在D处？并说明理由；

（3）对规划要求下，若道路PB和QA的长度均为d（单位：百米）.求当d最小时，P、Q两点间的距离

.



19．（本小题满分16分）

设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c), a,b,c\in \mathrm{R}$ 、 $f'(x)$ 为f（x）的导函数.

（1）若$a=b=c$，f（4）=8，求a的值；

（2）若$a\neq b$，$b=c$，且f（x）和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求f（x）的极小值；

（3）若 $a=0, 0<b\leq 1, c=1$，且f（x）的极大值为M，求证:$M\leqslant \dfrac{4}{27}$.

20．（本小满分16分）

定义首项为1且公比为正数的等比数列为“M—数列”.

（1）已知等比数列$\{a_n\}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$ 满足： $a_2a_4=a_5, a_3-4a_2+4a_1=0$ ，求证:数列$\{a_n\}$为“M—数列”

；

（2）已知数列$\{b_n\}$满足:$b_1=1, \dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$ ，其中S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和.

①求数列$\{b_n\}$的通项公式；

②设m为正整数，若存在“M—数列”$\{c_n\}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$ ，对任意正整数k，当$k\leqslant m$时，都有 $c_k\le b_k\le c_{k+1}$ 成立，求m的最大值.

数学Ⅱ(附加题)

21．【选做题】本题包括A、B、C三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两小题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A.[选修4-2：矩阵与变换]（本小题满分10分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

（1）求$\boldsymbol{A}^2$；

（2）求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

B.[选修4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分10分）

在极坐标系中，已知两点 $A\left(3,\dfrac{\pi}{4}\right),B\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，直线$l$的方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=3$.

（1）求A，B两点间的距离；（2）求点B到直线l的距离.

C.[选修4-5：不等式选讲]（本小题满分10分）

设 $x\in\mathbf{R}$，解不等式 $|x|+|2x-1|>2$.

【必做题】第22题、第23题，每题10分，共计20分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22.（本小题满分10分）设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, n\geqslant 4, n\in\mathbf{N}^*$.已知 $a_3^2=2a_2a_4$.

（1）求n的值；（2）设 $(1+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，其中 $a,b\in\mathbf{N}^*$，求 a^2-3b^2 的值.

23.（本小题满分10分）在平面直角坐标系xOy中，设点集 $A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\ldots,(n,0)\}$，

$B_n=\{(0,1),(n,1)\},C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\},n\in\mathbf{N}^*$.

令 $M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$.从集合M_n中任取两个不同的点，用随机变量X表示它们之间的距离.

（1）当$n=1$时，求X的概率分布；

（2）对给定的正整数n（$n\geq3$），求概率P（$X\leq n$）（用n表示）.

解析版

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学 I

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1．本试卷共4页，均为非选择题(第1题~第20题，共20题)。本卷满分为160分，考试时间为120分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一片交回。

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。

3．请认真核对监考员从答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。

4．作答试题，必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

参考公式：

样本数据 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，其中 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$．

柱体的体积 $V=Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高．

锥体的体积 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 是锥体的底面积，h 是锥体的高．

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

1.已知集合 $A=\{-1,0,1,6\}$，$B=\left\{x\middle|x\rangle 0,x\in R\right\}$，则 $A\cap B=$_____.

【答案】$\{1,6\}$.

【解析】

【分析】

由题意利用交集的定义求解交集即可.

【详解】由题知，$A\cap B=\{1,6\}$.

【点睛】本题主要考查交集的运算，属于基础题.

2.已知复数 $(a+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ 的实部为0，其中 i 为虚数单位，则实数a的值是_____.

【答案】2.

【解析】

【分析】

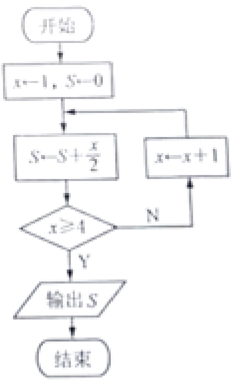
本题根据复数的乘法运算法则先求得 z，然后根据复数的概念，令实部为0即得a的值.

【详解】$\because (\mathrm{a}+2i)(1+\mathrm{i})=a+ai+2i+2i^2=a-2+(a+2)i$，

令 $a-2=0$ 得 $a=2$.

【点睛】本题主要考查复数的运算法则，虚部的定义等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

3.下图是一个算法流程图，则输出的S的值是_____.



【答案】5.

【解析】

【分析】

结合所给的流程图运行程序确定输出的值即可.

【详解】执行第一次，$S=S+\frac{x}{2}=\frac{1}{2},x=1\geq 4$ 不成立，继续循环，$x=x+1=2$；

执行第二次，$S=S+\frac{x}{2}=\frac{3}{2},x=2\geq 4$ 不成立，继续循环，$x=x+1=3$；

执行第三次，$S=S+\frac{x}{2}=3,x=3\geq 4$ 不成立，继续循环，$x=x+1=4$；

执行第四次，$S=S+\frac{x}{2}=5,x=4\geq 4$ 成立，输出 $S=5$.

【点睛】识别、运行程序框图和完善程序框图的思路：

(1)要明确程序框图的顺序结构、条件结构和循环结构.

(2)要识别、运行程序框图，理解框图所解决的实际问题.

(3)按照题目的要求完成解答并验证.

4.函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是_____.

【答案】$[-1,7]$.

【解析】

【分析】

由题意得到关于x的不等式，解不等式可得函数的定义域.

【详解】由已知得 $7+6x-x^2\geq 0$，

即 $x^2-6x-7\leq 0$

解得 $-1\leq x\leq 7$，

故函数的定义域为$[-1,7]$.

【点睛】求函数的定义域，其实质就是以函数解析式有意义为准则，列出不等式或不等式组，然后求出它们的解集即可.

5.已知一组数据6，7，8，8，9，10，则该组数据的方差是____.

【答案】$\frac{5}{3}$.

【解析】

【分析】

由题意首先求得平均数，然后求解方差即可.

【详解】由题意，该组数据的平均数为 $\frac{6+7+8+8+9+10}{6}=8$，

所以该组数据的方差是 $\frac{1}{6}[(6-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2]=\frac{5}{3}$.

【点睛】本题主要考查方差的计算公式，属于基础题.

6.从3名男同学和2名女同学中任选2名同学参加志愿者服务，则选出的2名同学中至少有1名女同学的概率是

_____.

【答案】$\frac{7}{10}$.

【解析】

【分析】

先求事件的总数，再求选出的2名同学中至少有1名女同学的事件数，最后根据古典概型的概率计算公式得出答案.

【详解】从3名男同学和2名女同学中任选2名同学参加志愿服务，共有$C_5^2=10$种情况.

若选出的2名学生恰有1名女生，有$C_3^1C_2^1=6$种情况，

若选出的2名学生都是女生，有$C_2^2=1$种情况，

所以所求的概率为$\frac{6+1}{10}=\frac{7}{10}$.

【点睛】计数原理是高考考查的重点内容，考查的形式有两种，一是独立考查，二是与古典概型结合考查，由于古典概型概率的计算比较明确，所以，计算正确基本事件总数是解题的重要一环.在处理问题的过程中，应注意审清题意，明确"分类""分步"，根据顺序有无，明确"排列""组合".

7.在平面直角坐标系xOy中，若双曲线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$经过点（3，4），则该双曲线的渐近线方程是_____.

【答案】$y=\pm\sqrt{2}x$.

【解析】

【分析】

根据条件求b，再代入双曲线的渐近线方程得出答案.

【详解】由已知得$3^2-\frac{4^2}{b^2}=1$，

解得$b=\sqrt{2}$或$b=-\sqrt{2}$，

因为$b>0$，所以$b=\sqrt{2}$.

因为$a=1$，

所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$.

【点睛】双曲线的标准方程与几何性质，往往以小题的形式考查，其难度一般较小，是高考必得分题.双曲线渐近线与双曲线标准方程中的a,b密切相关，事实上，标准方程中化1为0，即得渐近线方程.

8.已知数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是等差数列，$S_n$是其前$n$项和.若$a_2a_5+a_8=0,S_9=27$，则$S_8$的值是_____.

【答案】16.

【解析】

【分析】

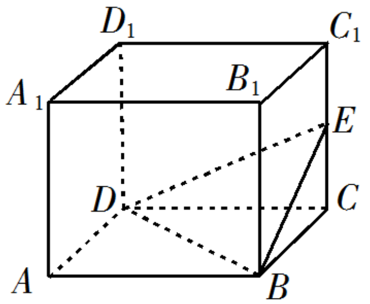
由题意首先求得首项和公差，然后求解前8项和即可.

【详解】由题意可得：$\begin{cases}a_2a_5+a_8=\left(a_1+d\right)\left(a_1+4d\right)+\left(a_1+7d\right)=0\\ S_9=9a_1+\dfrac{9\times 8}{2}d=27\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a_1=-5\\ d=2\end{cases}$，则$S_8=8a_1+\dfrac{8\times 7}{2}d=-40+28\times 2=16$.

【点睛】等差数列、等比数列的基本计算问题，是高考必考内容，解题过程中要注意应用函数方程思想，灵活应用通项公式、求和公式等，构建方程（组），如本题，从已知出发，构建a_1,d的方程组.

9.如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积是120，E为CC_1的中点，则三棱锥E-BCD的体积是_____.



【答案】10.

【解析】

【分析】

由题意结合几何体的特征和所给几何体的性质可得三棱锥的体积.

【详解】因为长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积为120，

所以$AB\cdot BC\cdot CC_1=120$，

因为E为CC_1的中点，

所以$CE=\frac{1}{2}CC_1$，

由长方体的性质知$CC_1\perp$底面$ABCD$，

所以CE是三棱锥$E-BCD$的底面BCD上的高，

所以三棱锥$E-BCD$的体积$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot CE==\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\frac{1}{2}CC_1=\frac{1}{12}\times120=10$.

【点睛】本题蕴含“整体和局部”的对立统一规律.在几何体面积或体积的计算问题中，往往需要注意理清整体和局部的关系，灵活利用“割”与“补”的方法解题.

10.在平面直角坐标系xOy中，P是曲线$y=x+\frac{4}{x}(x>0)$上的一个动点，则点P到直线$x+y=0$的距离的最小值是_____.

【答案】4.

【解析】

【分析】

将原问题转化为切点与直线之间的距离，然后利用导函数确定切点坐标可得最小距离

【详解】当直线$\frac{gR^2}{r^2}$平移到与曲线$y=x+\frac{4}{x}$相切位置时，切点Q即为点P到直线$\frac{gR^2}{r^2}$的距离最小.

由$y'=1-\frac{4}{x^2}=-1$，得$x=\sqrt{2}(-\sqrt{2}舍)$，$y=3\sqrt{2}$，

即切点$Q(\sqrt{2},3\sqrt{2})$，

则切点Q到直线$\frac{gR^2}{r^2}$的距离为$\frac{\left|\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$，

故答案为：4.

【点睛】本题考查曲线上任意一点到已知直线的最小距离，渗透了直观想象和数学运算素养.采取导数法和公式法，利用数形结合和转化与化归思想解题.

11.在平面直角坐标系xOy中，点A在曲线$y=\ln x$上，且该曲线在点A处的切线经过点（-e，-1)(e为自然对数的底数），则点A的坐标是____.

【答案】$(e,1)$.

【解析】

【分析】

设出切点坐标，得到切线方程，然后求解方程得到横坐标的值可得切点坐标.

【详解】设点 $A\left(x_0, y_0\right)$，则 $y_0=\ln x_0$.又 $y'=\frac{1}{x}$，

当 $x=x_0$ 时，$y'=\frac{1}{x_0}$，

点*A*在曲线 $y=\ln x$ 上的切线为 $y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

即 $y-\ln x_0=\frac{x}{x_0}-1$，

代入点 $(-e,-1)$，得 $-1-\ln x_0=\frac{-e}{x_0}-1$，

即 $x_0 \ln x_0=e$，

考查函数 $H\left(x\right)=x\ln x$，当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$H\left(x\right)<0$，当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$H\left(x\right)>0$，

且 $H'\left(x\right)=\ln x+1$，当 $x>1$ 时，$H'\left(x\right)>0, H\left(x\right)$ 单调递增，

注意到 $H\left(e\right)=e$，故 $x_0\ln x_0=e$ 存在唯一的实数根 $x_0=e$，此时 $y_0=1$，

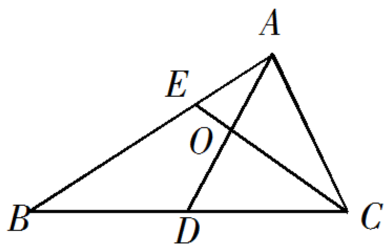
故点 A 的坐标为 $A\left(e,1\right)$.

【点睛】导数运算及切线的理解应注意的问题：

一是利用公式求导时要特别注意除法公式中分子的符号，防止与乘法公式混淆.

二是直线与曲线公共点的个数不是切线的本质，直线与曲线只有一个公共点，直线不一定是曲线的切线，同样，直线是曲线的切线，则直线与曲线可能有两个或两个以上的公共点.

12.如图，在$\vee ABC$ 中，*D*是*BC*的中点，*E*在边*AB*上，*BE*=2*EA*，*AD*与*CE*交于点 O.若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则 $\frac{AB}{AC}$ 的值是_____.



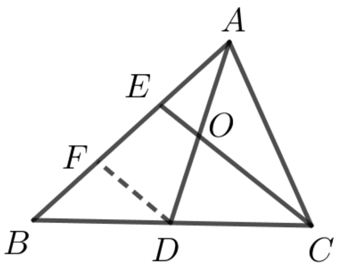
【答案】$\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】

由题意将原问题转化为基底的数量积，然后利用几何性质可得比值.

【详解】如图，过点D作$DF//CE$，交AB于点F，由$BE=2EA$，D为BC中点，知$BF=FE=EA,AO=OD$.



$$6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},$$

得$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}^2$,即$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|$,故$\frac{AB}{AC}=\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查在三角形中平面向量的数量积运算，渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算素养.采取几何法，利用数形结合和方程思想解题.

13.已知$\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{2}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值是_____.

【答案】$\dfrac{a_A}{a_C}=\dfrac{\dfrac{v_A^2}{r_A}}{\dfrac{v_C^2}{r_C}}=\dfrac{v_A^2}{v_C^2}=1:4$.

【解析】

【分析】

由题意首先求得 $\tan\alpha$ 的值，然后利用两角和差正余弦公式和二倍角公式将原问题转化为齐次式求值的问题，最后切化弦求得三角函数式的值即可.

【详解】由 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\tan\alpha}{\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}}=\dfrac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+1}=-\dfrac{2}{3}$，

得 $3\tan^2\alpha-5\tan\alpha-2=0$，

解得 $\tan\alpha=2$，或 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin2\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos2\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}\right)$,

当 $\tan\alpha=2$ 时，上式$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\times2+1-2^2}{2^2+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$;

当 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$ 时，上式$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

综上，$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

【点睛】本题考查三角函数的化简求值，渗透了逻辑推理和数学运算素养.采取转化法，利用分类讨论和转化与化归思想解题.

14.设 $f(x),g(x)$ 是定义在**R**上的两个周期函数，$f(x)$ 的周期为4，$g(x)$ 的周期为2，且 $f(x)$ 是奇函数.当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$，$g(x)=\begin{cases}k(x+2),0<x\le 1\\ -\dfrac{1}{2},1<x\le 2\end{cases}$，其中*k*>0.若在区间(0，9]上，关于*x*的方程 $f(x)=g(x)$ 有8个不同的实数根，则*k*的取值范围是_____.

【答案】$\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

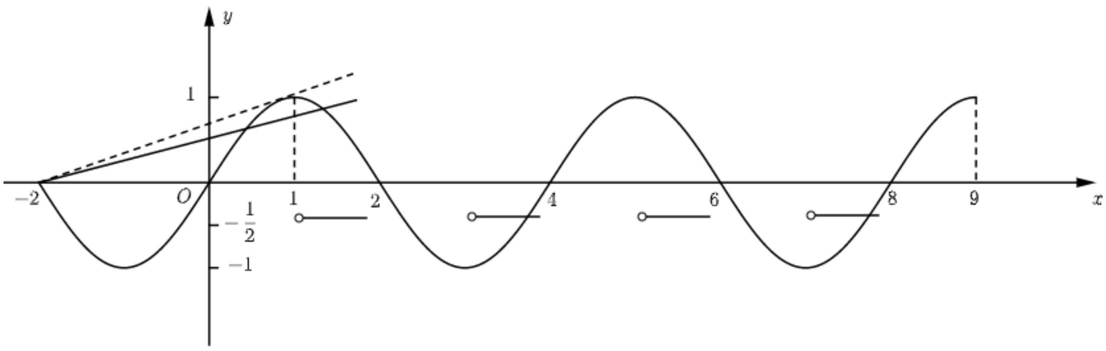
【解析】

【分析】

分别考查函数 $f\left(x\right)$ 和函数 $g\left(x\right)$ 图像的性质，考查临界条件确定*k*的取值范围即可.

【详解】当 $x\in\left(0,2\right]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-\left(x-1\right)^2}$, 即 $\left(x-1\right)^2+y^2=1,y\ge 0$.

又 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，其周期为4，如图，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象，要使 $f(x)=g(x)$ 在(0,9]上有8个实根，只需二者图象有8个交点即可.



当 $g(x)=-\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有2个交点；

当 $g(x)=k(x+2)$ 时，$g(x)$ 的图象为恒过点（-2，0）的直线，只需函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有6个交点.当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象相切时，圆心（1，0）到直线 $kx-y+2k=0$ 的距离为1，即 $\dfrac{|k+2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，得 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有3个交点；当 $g(x)=k(x+2)$ 过点（1,1）时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有6个交点，此时 $1=3k$，得 $k=\dfrac{1}{3}$.

综上可知，满足 $f(x)=g(x)$ 在(0,9]上有8个实根的*k*的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

【点睛】本题考点为参数的取值范围，侧重函数方程的多个实根，难度较大.不能正确画出函数图象的交点而致误，根据函数的周期性平移图象，找出两个函数图象相切或相交的临界交点个数，从而确定参数的取值范围.

二、解答题：本大题共6小题，共计90分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c．

（1）若a=3c，b=$\sqrt{2}$，cos$B$=$\frac{2}{3}$，求c的值；

（2）若$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$，求$\sin(B+\frac{\pi}{2})$的值.

【答案】（1）$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$；（2）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】

(1)由题意结合余弦定理得到关于c的方程，解方程可得边长c的值；

(2)由题意结合正弦定理和同角三角函数基本关系首先求得$\cos B$的值，然后由诱导公式可得$\sin(B+\frac{\pi}{2})$的值.

【详解】（1）因为$a=3c,b=\sqrt{2},\cos B=\frac{2}{3}$，

由余弦定理$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，得$\frac{2}{3}=\frac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\times3c\times c}$，即$c^2=\frac{1}{3}$.

所以$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）因为$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\frac{\cos B}{2b}=\frac{\sin B}{b}$，所以$\cos B=2\sin B$.

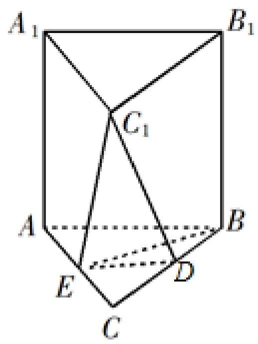
从而$\cos^2 B=(2\sin B)^2$，即$\cos^2 B=4\left(1-\cos^2 B\right)$，故$\cos^2 B=\frac{4}{5}$.

因为$\sin B>0$，所以$\cos B=2\sin B>0$，从而$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此$\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】本题主要考查正弦定理、余弦定理、同角三角函数关系、诱导公式等基础知识，考查运算求解能力.

16.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别为BC，AC的中点，$AB=BC$.



求证：（1）A_1B_1∥平面DEC_1；

（2）$BE\perp C_1E$.

【答案】（1）见解析；（2）见解析.

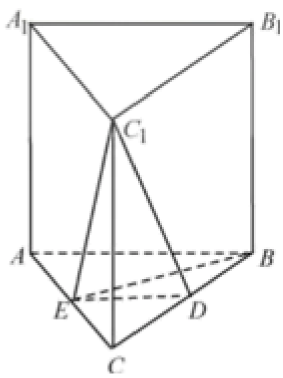
【解析】

【分析】

(1)由题意结合几何体的空间结构特征和线面平行的判定定理即可证得题中的结论；

(2)由题意首先证得线面垂直，然后结合线面垂直证明线线垂直即可.

【详解】（1）因为D，E分别为BC，AC的中点，



所以ED∥AB.

在直三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$中，$AB // A_1B_1$，

所以$A_1B_1 // ED$.

又因为$ED\subset$平面DEC_1，$A_1B_1\not\subset$平面DEC_1，

所以$A_1B_1 //$平面DEC_1.

（2）因为$AB=BC$，E为AC的中点，所以$BE\perp AC$.

因为三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$是直棱柱，所以$CC_1\perp$平面ABC.

又因为$BE\subset$平面ABC，所以$CC_1\perp BE$.

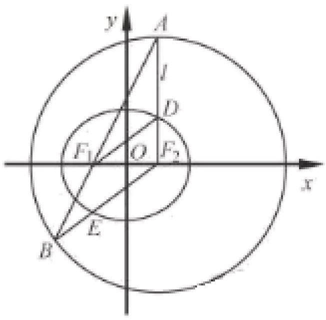
因为$C_1C\subset$平面A_1ACC_1，$AC\subset$平面A_1ACC_1，$C_1C\cap AC=C$，

所以$BE\perp$平面A_1ACC_1.

因为$C_1E\subset$平面A_1ACC_1，所以$BE\perp C_1E$.

【点睛】本题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识，考查空间想象能力和推理论证能力.

17.如图，在平面直角坐标系xOy中，椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为$F_1$（－1、0），$F_2$（1，0）．过$F_2$作$x$轴的垂线$l$，在$x$轴的上方，$l$与圆$F_2$:$(x-1)^2+y^2=4a^2$交于点$A$，与椭圆$C$交于点$D$.连结$AF_1$并延长交圆$F_2$于点$B$，连结$BF_2$交椭圆$C$于点$E$，连结$DF_1$．已知$DF_1=\frac{5}{2}$.



（1）求椭圆C的标准方程;

（2）求点E的坐标.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）$E(-1,-\frac{3}{2})$.

【解析】

【分析】

(1)由题意分别求得a,b的值即可确定椭圆方程；

(2)解法一：由题意首先确定直线AF_1的方程，联立直线方程与圆的方程，确定点B的坐标，联立直线BF_2与椭圆的方程即可确定点E的坐标；

解法二：由题意利用几何关系确定点E的纵坐标，然后代入椭圆方程可得点E的坐标.

【详解】（1）设椭圆C的焦距为$2c$.

因为$F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$，所以$F_1F_2=2$，$c=1$.

又因为$DF_1=\dfrac{5}{2}$，$AF_2\perp x$轴，所以$DF_2=\sqrt{DF_1^{\ 2}-F_1F_2^{\ 2}}=\sqrt{(\dfrac{5}{2})^2-2^2}=\dfrac{3}{2}$，

因此$2a=DF_1+DF_2=4$，从而$a=2$.

由$b^2=a^2-c^2$，得$b^2=3$.

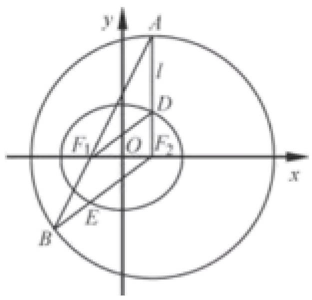
因此，椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）解法一：

由（1）知，椭圆C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$a=2$，

因为$AF_2\perp x$轴，所以点A的横坐标为1.

将$x=1$代入圆F_2的方程$(x-1)^2+y^2=16$，解得$y=\pm4$.



因为点A在x轴上方，所以$A(1，4)$.

又$F_1(-1，0)$，所以直线AF_1：$y=2x+2$.

由$\begin{cases}y=2x+2\\(x-1)^2+y^2=16\end{cases}$，得$5x^2+6x-11=0$，

解得$x=1$或$x=-\dfrac{11}{5}$.

将 $x=-\frac{11}{5}$ 代入 $y=2x+2$，得 $y=-\frac{12}{5}$，

因此 $B(-\frac{11}{5},-\frac{12}{5})$.又$F_2$(1，0)，所以直线$BF_2$： $y=\frac{3}{4}(x-1)$.

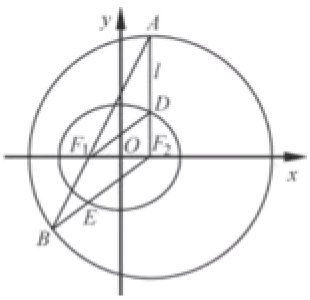
由 $\begin{cases} y=\frac{3}{4}(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $7x^2-6x-13=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{13}{7}$.

又因为E是线段BF_2与椭圆的交点，所以 $x=-1$.

将 $x=-1$ 代入 $y=\frac{3}{4}(x-1)$，得 $y=-\frac{3}{2}$.因此 $E(-1,-\frac{3}{2})$.

解法二：

由（1）知，椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.如图，连结$EF_1$.



因为BF_2=2a，EF_1+EF_2=2a，所以EF_1=EB，

从而$\angle BF_1E$=$\angle B$.

因为F_2A=F_2B，所以$\angle A$=$\angle B$，

所以$\angle A$=$\angle BF_1E$，从而$EF_1 /\!/ F_2A$.

因为$AF_2\perp x$轴，所以$EF_1\perp x$轴.

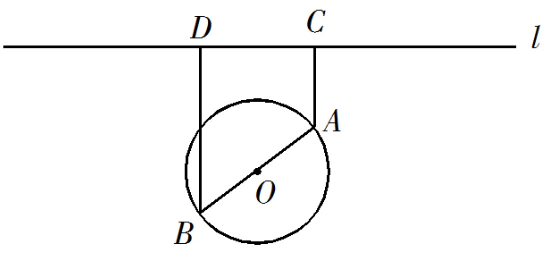
因为F_1(-1，0)，由 $\begin{cases} x=-1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $y=\pm\frac{3}{2}$.

又因为E是线段BF_2与椭圆的交点，所以 $y=-\frac{3}{2}$.

因此 $E(-1,-\frac{3}{2})$.

【点睛】本题主要考查直线方程、圆的方程、椭圆方程、椭圆的几何性质、直线与圆及椭圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、分析问题能力和运算求解能力.

18.如图，一个湖的边界是圆心为O的圆，湖的一侧有一条直线型公路l，湖上有桥AB（AB是圆O的直径）．规划在公路l上选两个点P、Q，并修建两段直线型道路PB、QA．规划要求:线段PB、QA上的所有点到点O的距离均不小于圆O的半径．已知点A、B到直线l的距离分别为AC和BD（C、D为垂足），测得AB=10，AC=6，BD=12（单位:百米）．



（1）若道路PB与桥AB垂直，求道路PB的长；

（2）在规划要求下，P和Q中能否有一个点选在D处？并说明理由；

（3）对规划要求下，若道路PB和QA的长度均为d（单位：百米）.求当d最小时，P、Q两点间的距离．

【答案】（1）15（百米）；

（2）见解析；

（3）17+$3\sqrt{21}$（百米）．

【解析】

【分析】

解：解法一：

（1）过A作 $AE\perp BD$，垂足为E.利用几何关系即可求得道路PB的长；

（2）分类讨论P和Q中能否有一个点选在D处即可.

（3）先讨论点P的位置，然后再讨论点Q的位置即可确定当d最小时，P、Q两点间的距离．

解法二：

（1）建立空间直角坐标系，分别确定点P和点B的坐标，然后利用两点之间距离公式可得道路PB的长；

（2）分类讨论P和Q中能否有一个点选在D处即可.

（3）先讨论点P的位置，然后再讨论点Q的位置即可确定当d最小时，P、Q两点间的距离．

【详解】解法一：

（1）过A作 $AE\perp BD$，垂足为E.

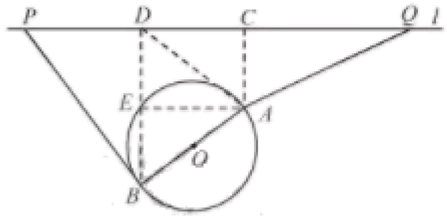
由已知条件得，四边形$ACDE$为矩形，$DE=BE=AC=6,\ AE=CD=8$.

因为$PB\perp AB$，

所以$\cos\angle PBD=\sin\angle ABE=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$.

所以$PB=\dfrac{BD}{\cos\angle PBD}=\dfrac{12}{\dfrac{4}{5}}=15$.

因此道路PB的长为15（百米）.



（2）①若P在D处，由（1）可得E在圆上，则线段BE上的点（除B，E）到点O的距离均小于圆O的半径，所以P选在D处不满足规划要求.

②若Q在D处，连结AD，由（1）知$AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=10$，

从而$\cos\angle BAD=\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\dfrac{7}{25}>0$，所以$\angle BAD$为锐角.

所以线段AD上存在点到点O的距离小于圆O的半径.

因此，Q选在D处也不满足规划要求.

综上，P和Q均不能选在D处.

（3）先讨论点P的位置.

当$\angle OBP<90°$时，线段PB上存在点到点O的距离小于圆O的半径，点P不符合规划要求；

当$\angle OBP\geq 90°$时，对线段PB上任意一点F，$OF\geq OB$，即线段PB上所有点到点O的距离均不小于圆O的半径，点P符合规划要求.

设$a^{x+y}=M\cdot N$为l上一点，且$P_1B\perp AB$，由（1）知，$P_1B=15$，

此时$P_1D=P_1B\sin\angle P_1BD=P_1B\cos\angle EBA=15\times\dfrac{3}{5}=9$；

当$\angle OBP>90°$时，在$\triangle PP_1B$中，$PB>P_1B=15$.

由上可知，$d\geq 15$.

再讨论点Q的位置.

由（2）知，要使得$QA\geq 15$，点Q只有位于点C的右侧，才能符合规划要求.当$QA=15$时，

$CQ=\sqrt{QA^2-AC^2}=\sqrt{15^2-6^2}=3\sqrt{21}$.此时，线段$QA$上所有点到点$O$的距离均不小于圆$O$的半径.

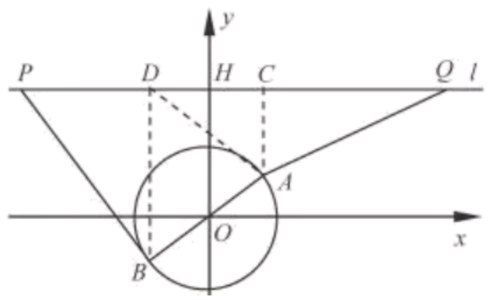
综上，当$PB\perp AB$，点Q位于点C右侧，且$CQ=3\sqrt{21}$时，d最小，此时P，Q两点间的距离$PQ=PD+CD+CQ=17+3\sqrt{21}$.

因此，d最小时，P，Q两点间的距离为$17+3\sqrt{21}$（百米）.

解法二：

（1）如图，过O作$OH\perp l$，垂足为H.

以O为坐标原点，直线OH为y轴，建立平面直角坐标系.



因为$BD=12$，$AC=6$，所以$OH=9$，直线l的方程为$y=9$，点A，B的纵坐标分别为3，−3.

因为AB为圆O的直径，$AB=10$，所以圆O的方程为$x^2+y^2=25$.

从而A（4，3），B（−4，−3），直线AB的斜率为$\frac{3}{4}$.

因为$PB\perp AB$，所以直线PB的斜率为$-\frac{4}{3}$，

直线PB的方程为$y=-\frac{4}{3}x-\frac{25}{3}$.

所以P（−13，9），$PB=\sqrt{(-13+4)^2+(9+3)^2}=15$.

因此道路PB的长为15（百米）.

（2）①若P在D处，取线段BD上一点E（−4，0），则$EO=4<5$，所以P选在D处不满足规划要求.

②若Q在D处，连结AD，由（1）知D（−4，9），又A（4，3），

所以线段AD：$y=-\frac{3}{4}x+6(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

在线段AD上取点M（3，$\frac{15}{4}$），因为$OM=\sqrt{3^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2}<\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以线段AD上存在点到点O的距离小于圆O的半径.

因此Q选在D处也不满足规划要求.

综上，P和Q均不能选在D处.

（3）先讨论点P的位置.

当$\angle OBP$<90°时，线段PB上存在点到点O的距离小于圆O的半径，点P不符合规划要求；

当$\angle OBP$≥90°时，对线段PB上任意一点F，OF≥OB，即线段PB上所有点到点O的距离均不小于圆O的半径，点P符合规划要求.

设$a^{x+y}=M\cdot N$为l上一点，且$P_1B\perp AB$，由（1）知，$P_1B=15$，此时$P_1\left(-13,9\right)$；

当$\angle OBP$>90°时，在$\triangle PP_1B$中，$PB>P_1B=15$.

由上可知，d≥15.

再讨论点Q的位置.

由（2）知，要使得QA≥15，点Q只有位于点C的右侧，才能符合规划要求.

当QA=15时，设Q（a，9），由$AQ=\sqrt{(a-4)^2+(9-3)^2}=15(a>4)$，

得a=$4+3\sqrt{21}$，所以Q（$4+3\sqrt{21}$，9），此时，线段QA上所有点到点O的距离均不小于圆O的半径.

综上，当P（−13，9），Q（$4+3\sqrt{21}$，9）时，d最小，此时P，Q两点间的距离

$PQ=4+3\sqrt{21}-(-13)=17+3\sqrt{21}$.

因此，d最小时，P，Q两点间的距离为$17+3\sqrt{21}$（百米）.

【点睛】本题主要考查三角函数的应用、解方程、直线与圆等基础知识，考查直观想象和数学建模及运用数学知识分析和解决实际问题的能力.

19.设函数$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c),a,b,c\in\mathrm{R}$，$f'(x)$为$f$（$x$）的导函数.

（1）若a=b=c，f（4）=8，求a的值；

（2）若a≠b，b=c，且f（x）和$f'(x)$的零点均在集合$\{-3,1,3\}$中，求f（x）的极小值；

（3）若$a=0,0<b\leqslant 1,c=1$，且f（x）的极大值为M，求证:M≤$\frac{4}{27}$.

【答案】（1）$a=2$；

（2）见解析；

（3）见解析.

【解析】

【分析】

（1）由题意得到关于a的方程，解方程即可确定a的值；

（2）由题意首先确定a,b,c的值从而确定函数的解析式，然后求解其导函数，由导函数即可确定函数的极小值.

（3）由题意首先确定函数的极大值M的表达式，然后可用如下方法证明题中的不等式：

解法一：由函数的解析式结合不等式的性质进行放缩即可证得题中的不等式；

解法二：由题意构造函数，求得函数在定义域内的最大值，

因为$0<b\le 1$，所以$x_1\in(0,1)$.

当$x\in(0,1)$时，$f(x)=x(x-b)(x-1)\le x(x-1)^2$.

令$g(x)=x(x-1)^2, x\in(0,1)$，则$g'(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$.

令$g'(x)=0$，得$x=\frac{1}{3}$. 列表如下：

x	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$
$g'(x)$	+	0	–
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以当$x=\frac{1}{3}$时，$g(x)$取得极大值，且是最大值，故$g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$.

所以当$x\in(0,1)$时，$f(x)\le g(x)\le\frac{4}{27}$，因此$M\le\frac{4}{27}$.

【详解】（1）因为$a=b=c$，所以$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)^3$.

因为$f(4)=8$，所以$(4-a)^3=8$，解得$a=2$.

（2）因为$b=c$，

所以$f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而$f'(x)=3(x-b)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)$. 令$f'(x)=0$，得$x=b$或$x=\frac{2a+b}{3}$.

因为$a,b,\frac{2a+b}{3}$，都在集合$\{-3,1,3\}$中，且$a\neq b$，

所以$\frac{2a+b}{3}=1,a=3,b=-3$.

此时$f(x)=(x-3)(x+3)^2$，$f'(x)=3(x+3)(x-1)$.

令$f'(x)=0$，得$x=-3$或$x=1$．列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$的极小值为$f(1)=(1-3)(1+3)^2=-32$.

（3）因为$a=0,c=1$，所以$f(x)=x(x-b)(x-1)=x^3-(b+1)x^2+bx$，

$f'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$.

因为$0<b\leq 1$，所以$\Delta=4(b+1)^2-12b=(2b-1)^2+3>0$，

则$f'(x)$有2个不同的零点，设为$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$.

由$f'(x)=0$，得$x_1=\frac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3},x_2=\frac{b+1+\sqrt{b^2-b+1}}{3}$.

列表如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$\left(x_1,x_2\right)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$的极大值$M=f\left(x_1\right)$.

解法一：

$M=f\left(x_1\right)=x_1^3-(b+1)x_1^2+bx_1$

$=\left(3x_1^2-2(b+1)x_1+b\right)\left(\frac{x_1}{3}-\frac{b+1}{9}\right)-\frac{2\left(b^2-b+1\right)}{9}x_1+\frac{b(b+1)}{9}$

$=\frac{-2\left(b^2-b+1\right)(b+1)}{27}+\frac{b(b+1)}{9}+\frac{2}{27}\left(\sqrt{b^2-b+1}\right)^3$

$=\frac{b(b+1)}{27}-\frac{2(b-1)^2(b+1)}{27}+\frac{2}{27}(\sqrt{b(b-1)+1})^3$

$\le\frac{b(b+1)}{27}+\frac{2}{27}\le\frac{4}{27}$．因此 $M\le\frac{4}{27}$．

解法二：

因为 $0<b\le1$，所以 $x_1\in(0,1)$．

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x(x-b)(x-1)\le x(x-1)^2$．

令 $g(x)=x(x-1)^2, x\in(0,1)$，则 $g'(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$．

令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{3}$．列表如下：

x	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$
$g'(x)$	+	0	–
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$g(x)$ 取得极大值，且是最大值，故 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$．

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\le g(x)\le\frac{4}{27}$，因此 $M\le\frac{4}{27}$．

【点睛】本题主要考查利用导数研究函数的性质，考查综合运用数学思想方法分析与解决问题以及逻辑推理能力．

20.定义首项为1且公比为正数的等比数列为“M－数列”．

（1）已知等比数列$\{a_n\}$满足：$a_2a_4=a_5, a_3-4a_2+4a_1=0$，求证:数列$\{a_n\}$为“M－数列”；

（2）已知数列$\{b_n\}$满足:$b_1=1, \frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}$，其中$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

①求数列$\{b_n\}$的通项公式；

②设m为正整数，若存在“M－数列”$\{c_n\}$ θ，对任意正整数k，当$k≤m$时，都有$c_k \le b_k \le c_{k+1}$成立，求m的最大值.

【答案】（1）见解析；

（2）①$b_n=n\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$；②5.

【解析】

【分析】

（1）由题意分别求得数列的首项和公比即可证得题中的结论；

（2）①由题意利用递推关系式讨论可得数列$\{b_n\}$是等差数列，据此即可确定其通项公式；

②由①确定b_k的值，将原问题进行等价转化，构造函数，结合导函数研究函数的性质即可求得m的最大值

.

【详解】（1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，所以$a_1≠0$，$q≠0$.

由$\begin{cases}a_2a_4=a_5\\a_3-4a_2+4a_1=0\end{cases}$，得$\begin{cases}a_1^2q^4=a_1q^4\\a_1q^2-4a_1q+4a_1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\q=2\end{cases}$.

因此数列$\{a_n\}$为“M—数列”.

（2）①因为$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}$，所以$b_n\ne 0$.

由$b_1=1, S_1=b_1$得$\frac{1}{1}=\frac{2}{1}-\frac{2}{b_2}$，则$b_2=2$.

由$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}$，得$S_n=\frac{b_nb_{n+1}}{2(b_{n+1}-b_n)}$，

当$n\ge 2$时，由$b_n=S_n-S_{n-1}$，得$b_n=\frac{b_nb_{n+1}}{2\left(b_{n+1}-b_n\right)}-\frac{b_{n-1}b_n}{2\left(b_n-b_{n-1}\right)}$，

整理得$b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n$.

所以数列$\{b_n\}$是首项和公差均为1的等差数列.

因此，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n\left(n\in N^*\right)$.

②由①知，$b_k=k$，$k\in N^*$.

因为数列$\{c_n\}$为“M–数列”，设公比为q，所以$c_1=1$，$q>0$.

因为$c_k\le b_k\le c_{k+1}$，所以$q^{k-1}\le k\le q^k$，其中$k=1$，2，3，…，m.

当$k=1$时，有$q\ge1$；

当$k=2$，3，…，m时，有$\dfrac{\ln k}{k}\le\ln q\le\dfrac{\ln k}{k-1}$.

设f（x）$=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令$f'(x)=0$，得$x=e$.列表如下：

x	$(1,e)$	e	$(e，+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–
f（x）	↗	极大值	↘

因为$\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 8}{6}<\dfrac{\ln 9}{6}=\dfrac{\ln 3}{3}$，所以$f(k)_{\max}=f(3)=\dfrac{\ln 3}{3}$.

取$q=\sqrt[3]{3}$，当$k=1$，2，3，4，5时，$\dfrac{\ln k}{k}\leqslant\ln q$，即$k\le q^k$，

经检验知$q^{k-1}\le k$也成立.

因此所求m的最大值不小于5.

若$m\ge6$，分别取$k=3$，6，得$3\le q^3$，且$q^5\le6$，从而$q^{15}\ge243$，且$q^{15}\le216$，

所以q不存在.因此所求m的最大值小于6.

综上，所求m的最大值为5.

【点睛】本题主要考查等差和等比数列的定义、通项公式、性质等基础知识，考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力.

数学Ⅱ(附加题)

【选做题】本题包括21、22、23三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两小题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

21.A已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$

（1）求$\boldsymbol{A}^2$；

（2）求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

【答案】（1）$\begin{bmatrix}11 & 5\\10 & 6\end{bmatrix}$；

（2）$\lambda_1=1,\lambda_2=4$.

【解析】

【分析】

(1)利用矩阵的乘法运算法则计算 $\boldsymbol{A}^2$ 的值即可；

(2)首先求得矩阵的特征多项式，然后利用特征多项式求解特征值即可.

【详解】（1）因为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3\times3+1\times2 & 3\times1+1\times2\\2\times3+2\times2 & 2\times1+2\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 5\\10 & 6\end{bmatrix}$.

（2）矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\-2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4.$$

令 $f(\lambda)=0$，解得$\boldsymbol{A}$的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=4$.

【点睛】本题主要考查矩阵的运算、特征值等基础知识，考查运算求解能力.

B.在极坐标系中，已知两点 $A\left(3,\frac{\pi}{4}\right),B\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)$，直线$l$的方程为$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=3$.

（1）求A，B两点间的距离；

（2）求点B到直线l的距离.

【答案】（1）$\sqrt{5}$；

（2）2.

【解析】

【分析】

(1)由题意，在$\triangle OAB$中，利用余弦定理求解AB的长度即可；

(2)首先确定直线的倾斜角和直线所过的点的极坐标，然后结合点B的坐标结合几何性质可得点B到直线l的距离.

【详解】（1）设极点为O.在$\triangle OAB$中，A（3，$\frac{\pi}{4}$），B（$\sqrt{2}$，$\frac{\pi}{2}$），

由余弦定理，得$AB=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2-2\times3\times\sqrt{2}\times\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{5}$.

（2）因为直线l的方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=3$，

则直线l过点$(3\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$.

又$B(\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，所以点$B$到直线$l$的距离为$(3\sqrt{2}-\sqrt{2})\times\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=2$.

【点睛】本题主要考查曲线的极坐标方程等基础知识，考查运算求解能力.

C.设$x\in\mathbf{R}$，解不等式$|x|+|2x-1|>2$.

【答案】$\{x\,|\,x<-\frac{1}{3}或x>1\}$.

【解析】

【分析】

由题意结合不等式的性质零点分段即可求得不等式的解集.

【详解】当$x<0$时，原不等式可化为$-x+1-2x>2$，解得$x<-\frac{1}{3}$；

当$0\le x\le\frac{1}{2}$时，原不等式可化为$x+1-2x>2$，即$x<-1$，无解；

当$x>\frac{1}{2}$时，原不等式可化为$x+2x-1>2$，解得$x>1$.

综上，原不等式的解集为$\{x\,|\,x<-\frac{1}{3}或x>1\}$.

【点睛】本题主要考查解不等式等基础知识，考查运算求解和推理论证能力.

【必做题】第22题、第23题，每题10分，共计20分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22.设$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, n\geqslant 4, n\in\mathbf{N}^*$.已知$a_3^2=2a_2a_4$.

（1）求n的值；

（2）设$(1+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，其中$a,b\in\mathbf{N}^*$，求$a^2-3b^2$的值.

【答案】（1）$n=5$；

（2）-32.

【解析】

【分析】

(1)首先由二项式展开式的通项公式确定a_2,a_3,a_4的值，然后求解关于n的方程可得n的值；

(2)解法一：利用(1)中求得的n的值确定有理项和无理项从而可得a,b的值，然后计算a^2-3b^2的值即可；

解法二：利用(1)中求得的n的值，由题意得到$\left(1-\sqrt{3}\right)^5$的展开式，最后结合平方差公式即可确定$a^2-3b^2$的值.

【详解】（1）因为$(1+x)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$，$n\geq 4$，

所以$a_2=\mathrm{C}_n^2=\frac{n(n-1)}{2}, a_3=\mathrm{C}_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$，

$a_4=\mathrm{C}_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

因为$a_3^2=2a_2a_4$，

所以$[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}]^2=2\times\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$，

解得$n=5$.

（2）由（1）知，$n=5$.

$(1+\sqrt{3})^n=(1+\sqrt{3})^5$

$=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5$

$=a+b\sqrt{3}$.

解法一：

因为$a,b\in\mathbf{N}^*$，所以$a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=76,b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$，

从而$a^2-3b^2=76^2-3\times44^2=-32$.

解法二：

$(1-\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1(-\sqrt{3})+C_5^2(-\sqrt{3})^2+C_5^3(-\sqrt{3})^3+C_5^4(-\sqrt{3})^4+C_5^5(-\sqrt{3})^5$

$=C_5^0-C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2-C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4-C_5^5(\sqrt{3})^5$.

因为$a,b\in\mathbf{N}^*$，所以$(1-\sqrt{3})^5=a-b\sqrt{3}$.

因此$a^2-3b^2=(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^5\times(1-\sqrt{3})^5=(-2)^5=-32$.

【点睛】本题主要考查二项式定理、组合数等基础知识，考查分析问题能力与运算求解能力.

23.在平面直角坐标系xOy中，设点集$A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\ldots,(n,0)\}$，

$B_n=\{(0,1),(n,1)\},C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\},n\in N^*$.令$M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$.从集合$M_n$中任取两个不同的点，用随机变量$X$表示它们之间的距离.

（1）当n=1时，求X的概率分布；

（2）对给定的正整数n（n≥3），求概率P（X≤n）（用n表示）.

【答案】（1）见解析；

（2）见解析.

【解析】

【分析】

(1)由题意首先确定X可能的取值，然后利用古典概型计算公式求得相应的概率值即可确定分布列；

(2)将原问题转化为对立事件的问题求解$P\left(X>n\right)$的值，据此分类讨论①.$b=d$，②.$b=0,d=1$，③.$b=0,d=2$，④.$b=1,d=2$四种情况确定X满足$X>n$的所有可能的取值，然后求解相应的概率值即可确定$P\left(X\leqslant n\right)$的值.

【详解】（1）当$n=1$时，X的所有可能取值是$1,\sqrt{2},2,\sqrt{5}$．

X的概率分布为$P(X=1)=\frac{7}{C_6^2}=\frac{7}{15},P(X=\sqrt{2})=\frac{4}{C_6^2}=\frac{4}{15}$，

$P(X=2)=\frac{2}{C_6^2}=\frac{2}{15},P(X=\sqrt{5})=\frac{2}{C_6^2}=\frac{2}{15}$．

（2）设$A(a,b)$和$B(c，d)$是从M_n中取出的两个点．

因为$P(X\le n)=1-P(X>n)$，所以仅需考虑$X>n$的情况．

①若$b=d$，则$AB\le n$，不存在$X>n$的取法；

②若$b=0,d=1$，则$AB=\sqrt{(a-c)^2+1}\le\sqrt{n^2+1}$，所以$X>n$当且仅当$AB=\sqrt{n^2+1}$，此时

$a=0$，$c=n$或$a=n$，$c=0$，有2种取法；

③若$b=0,d=2$，则$AB=\sqrt{(a-c)^2+4}\le\sqrt{n^2+4}$，因为当$n\ge3$时，$\sqrt{(n-1)^2+4}\le n$，所以$X>n$

当且仅当$AB=\sqrt{n^2+4}$，此时$a=0$，$c=n$或$a=n$，$c=0$，有2种取法；

④若$b=1,d=2$，则$AB=\sqrt{(a-c)^2+1}\le\sqrt{n^2+1}$，所以$X>n$当且仅当$AB=\sqrt{n^2+1}$，此时

$a=0$，$c=n$或$a=n$，$c=0$，有2种取法．

综上，当$X>n$时，X的所有可能取值是$\sqrt{n^2+1}$和$\sqrt{n^2+4}$，且

$P(X=\sqrt{n^2+1})=\frac{4}{C_{2n+4}^2},P(X=\sqrt{n^2+4})=\frac{2}{C_{2n+4}^2}$．

因此，$P(X\le n)=1-P(X=\sqrt{n^2+1})-P(X=\sqrt{n^2+4})=1-\frac{6}{C_{2n+4}^2}$．

【点睛】本题主要考查计数原理、古典概型、随机变量及其概率分布等基础知识，考查逻辑思维能力和推理论证能力．