

2011年天津高考文科数学试题及答案详细解析 (天津卷)

参考公式:

如果事件A, B互斥, 那么

棱柱的体积公式 $V = Sh$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

其中S表示棱柱的底面面积。

一、选择题: 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{1-3i}{1-i} =$

- A. $2-i$ B. $2+i$ C. $-1-2i$ D. $-1+2i$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x+y-4 \leq 0, \\ x-3y+4 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 3x - y$ 的

最大值为

- A. -4 B. 0
C. $\frac{4}{3}$ D. 4

3. 阅读右边的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 x 的值为-

4, 则输出 y 的值为

- A. 0.5 B. 1
C. 2 D. 4

4. 设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 > 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\},$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) > 0\},$$

则“ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in C$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 即不充分也不必要条件

5. 已知 $a = \log_2 3.6, b = \log_4 3.2, c = \log_4 3.6$ 则

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $c > a > b$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的距

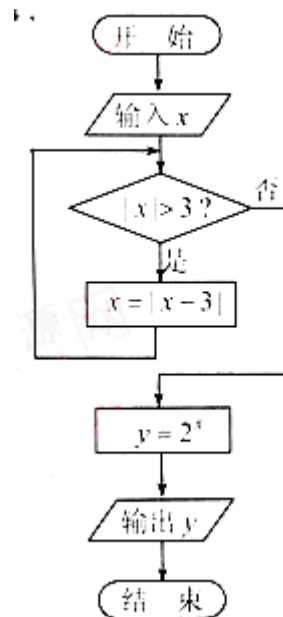
离为4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$, 则双曲线的焦距为 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbb{R}$, 其中 $\omega > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$, 若 $f(x)$ 的最小正周期

为 6π , 且当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则 ()

- A. $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0]$ 上是增函数 B. $f(x)$ 在区间 $[-3\pi, -\pi]$ 上是增函数
C. $f(x)$ 在区间 $[3\pi, 5\pi]$ 上是减函数 D. $f(x)$ 在区间 $[4\pi, 6\pi]$ 上是减函数



8. 对实数 a 和 b , 定义运算“ \otimes ”: $a \otimes b = \begin{cases} a, & a-b \leq 1, \\ b, & a-b > 1. \end{cases}$ 设函数

$f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - 1), x \in R$. 若函数 $y = f(x) - c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1] \cup (2, +\infty)$ B. $(-2, -1] \cup (1, 2]$ C. $(-\infty, -2) \cup (1, 2]$ D. $[-2, -1]$

二、填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分.

9. 已知集合 $A = \{x \in R \mid |x-1| < 2\}$, Z 为整数集, 则集合

$A \cap Z$ 中所有元素的和等于_____

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____ m^3

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, $n \in N^*$,

若 $a_3 = 16, S_{20} = 20$, 则 S_{10} 的值为_____

12. 已知 $\log_2 a + \log_2 b \geq 1$, 则 $3^a + 9^b$ 的最小值为_____

13. 如图已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F , E 是 AB 延长

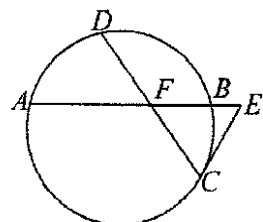
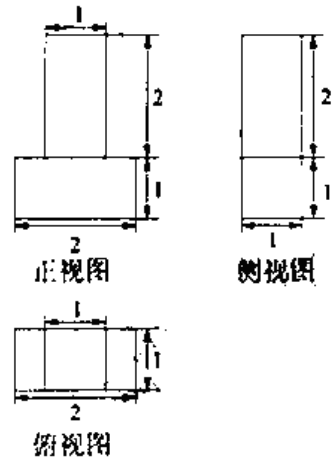
线上一点, 且 $DF = CF = \sqrt{2}, AF : FB : BE = 4 : 2 : 1$.

若 CE 与圆相切, 则 CE 的长为_____

14. 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \angle ADC = 90^\circ, AD = 2, BC = 1$,

P 是腰 DC 上的动点, 则 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为_____

三、解答题: 本大题共6小题, 共80分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.



15. 编号为 A_1, A_2, \dots, A_{16} 的16名篮球运动员在某次训练比赛中的得分记录如下：

运动员编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

(I) 将得分在对应区间内的人数填入相应的空格：

区间	$[10, 20)$	$[20, 30)$	$[30, 40]$
人数			

(II) 从得分在区间 $[20, 30)$ 内的运动员中随机抽取2人，

(i) 用运动员的编号列出所有可能的抽取结果； (ii) 求这2人得分之和大于50的概率

16.

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $B = C, 2b = \sqrt{3}a$.

(I) 求 $\cos A$ 的值；

(II) $\cos(2A + \frac{\pi}{4})$ 的值.

17. (本小题满分13分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为

平行四边形， $\angle ADC = 45^\circ$ ， $AD = AC = 1$ ， O 为 AC 中点，

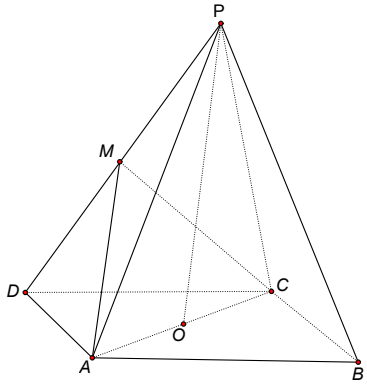
$PO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PO = 2$ ，

M 为 PD 中点.

(I) 证明： $PB \parallel$ 平面 ACM ；

(II) 证明： $AD \perp$ 平面 PAC ；

(III) 求直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.



18. (本小题满分13分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 。点 $P(a, b)$ 满足

$$|PF_2| = |F_1F_2|.$$

(I) 求椭圆的离心率 e ；

(II) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点，若直线 PF_2 与圆

$$(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$$

相交于 M, N 两点，且 $|MN| = \frac{5}{8} |AB|$ ，求椭圆的方程

19. (本小题满分14分) 已知函数 $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6tx + t - 1, x \in R$ ，其中 $t \in R$.

(I) 当 $t = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(II) 当 $t \neq 0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(III) 证明: 对任意的 $t \in (0, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点.

20. (本小题满分14分)

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足

$$b_{n+1}a_n + b_na_{n+1} = (-2)^n + 1, b_n = \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}, n \in N^*, \text{且} a_1 = 2.$$

(I) 求 a_2, a_3 的值;

(II) 设 $c_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}, n \in N^*$, 证明 $\{c_n\}$ 是等比数列;

(III) 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明 $\frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} + \cdots + \frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{a_{2n}} \leq n - \frac{1}{3} (n \in N^*)$.

参考答案

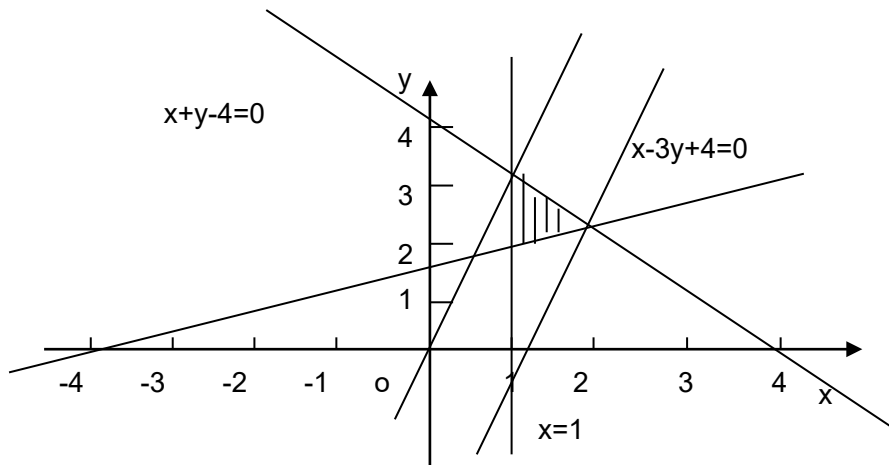
一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题5分，满分40分。

1. 【答案】A

【解析】 $\frac{1-3i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i.$

2. 【答案】D

【解析】可行域如图：



联立 $\begin{cases} x+y+4=0 \\ x-3y+4=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 当目标直线 $z=3x-y$ 移至 (2,2) 时, $z=3x-y$ 有最大

值4.

3. 【答案】C

【解析】当 $x=-4$ 时, $x=|x-3|=7$;

当 $x=7$ 时, $x=|x-3|=4$

当 $x=4$ 时, $x=|x-3|=1 < 3$,

$\therefore y=2'=2.$

4. 【答案】C

【解析】 $\because A = \{x \in k \mid x-2 > 0\}, B = \{x \in k \mid x < 0\},$

$\therefore A \cup B = \{x \mid x < 0, \text{ 或 } x > 2\},$ 又 $\because C = \{x \in k \mid x(x-2) > 0\} = \{x \in k \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\},$

$\therefore A \cup B = C$, 即“ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in C$ ”的充分必要条件.

5. 【答案】B

【解析】 $\because a = \log_2^{3.6} > \log_2^2 = 1$, 又 $\because y = \log_4^x$ 为单调递增函数,

$\therefore \log_4^{3.2} < \log_4^{3.6} < \log_4^4 = 1,$

$\therefore b < c < a.$

6. 【答案】B

【解析】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由双曲线的一条渐近线与抛物线的准

线的交点坐标为 $(-2, -1)$ 得 $-\frac{p}{2} = 2$, 即 $p = 4$,

又 $\because \frac{p}{2} + a = 4$, $\therefore a = 2$, 将 $(-2, -1)$ 代入 $y = \frac{b}{a}x$ 得 $b = 1$,

$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$, 即 $2c = 2\sqrt{5}$.

7. 【答案】A

【解析】 $\because \frac{2\pi}{\omega} = 6\pi$, $\therefore \omega = \frac{1}{3}$. 又 $\because \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} + = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 且 $-\pi < 4 < \pi$,

\therefore 当 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{3}, f(x) = 2\sin(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3})$, 要使 $f(x)$ 递增, 须有

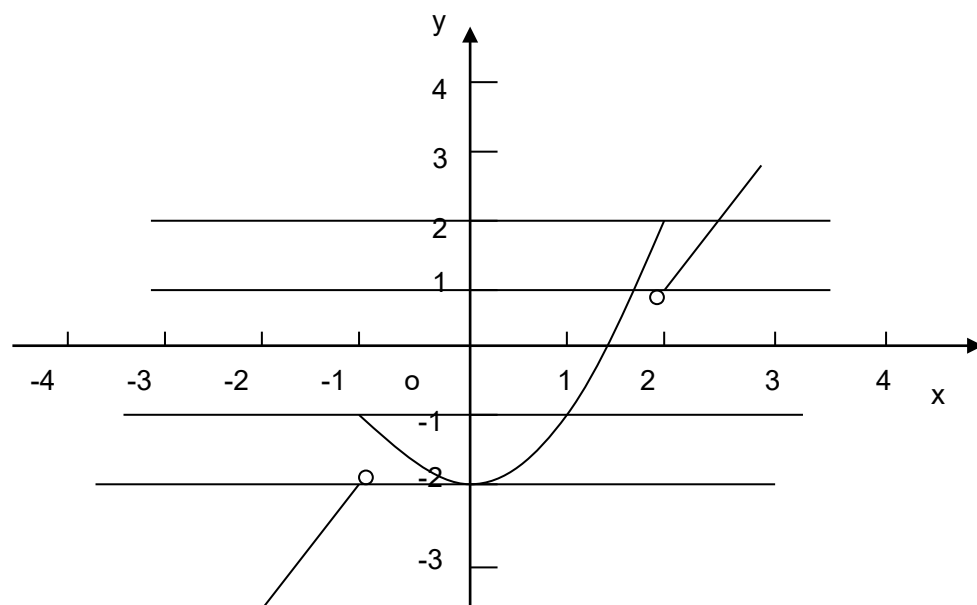
$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解之得 $6k\pi - \frac{5\pi}{2} \leq x \leq 6k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 当 $k = 0$

时, $-\frac{5}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\therefore f(x)$ 在 $[-\frac{5}{2}\pi, \frac{\pi}{2}]$ 上递增.

8. 【答案】B

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } f(x) &= \begin{cases} x^2 - 2, & x^2 - 2 - (x - 1) \leq 1 \\ x - x^2, & x^2 - 2 - (x - 1) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 - 2, & -1 \leq x \leq 2 \\ x - 1, & x < -1, \text{ 或 } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

则 $f(x)$ 的图象如图,



\because 函数 $y = f(x) - c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点,

\therefore 函数 $y = f(x)$ 与 $y = c$ 的图象有两个交点, 由图象可得 $-2 < c \leq 1$, 或 $1 < c \leq 2$.

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算, 每小题5分, 满分30分.

9. 【答案】3

【解析】 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2\} = \{x \mid -1 < x < 3\} \therefore A \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$, 即 $0+1+2=3$.

10. 【答案】 4

【解析】 $v = 2 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 = 4$.

11. 【答案】 110

【解析】 设等差数列的首项为 a_1 , 公差为 d , 由题意得,

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 16 \\ S_{20} = 20a_1 + \frac{20 \times 19}{2} \times (-2) = 20 \end{cases}, \text{解之得 } a_1 = 20, d = -2, \therefore$$

$$s_{10} = 10 \times 20 + \frac{10 \times 9}{2} \times (-2) = 110.$$

12. 【答案】 18

【解析】 $\because \log_2^a + \log_2^b = \log_2^{ab} \geq 1$,

$$\therefore ab \geq 2,$$

$$\therefore 3^a + 9^b = 3^a + 3^{2b} \geq 2\sqrt{3^a \cdot 3^{2b}} = 2\sqrt{3^{a+2b}} \geq 2\sqrt{3^{2\sqrt{2ab}}} = 18.$$

13. 【答案】 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【解析】 设 $AF = 4k$, $BF = 2k$, $BE = k$, 由 $DF \cdot FC = AF \cdot BF$ 得 $2 = 8k^2$, 即

$$k = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore AF = 2, BF = 1, BE = \frac{1}{2}, AE = \frac{7}{2},$$

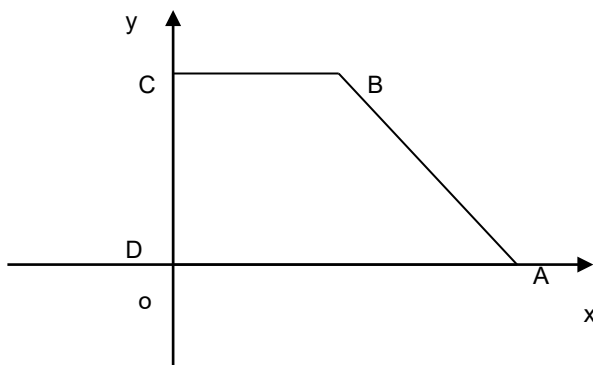
$$\text{由切割定理得 } CE^2 = BE \cdot EA = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4},$$

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

14. 【答案】 5

【解析】 建立如图所示的坐标系, 设 $PC = h$, 则 $A(2, 0), B(1, h)$, 设 $P(0, y), (0 \leq y \leq h)$

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} = (2, -y), \overrightarrow{PB} = (1, h-y), \therefore |\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}| = \sqrt{25 + (3h-4y)^2} \geq \sqrt{25} = 5.$$



三、解答题

(15) 本小题主要考查用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式的等基础知识, 考查数据处理能力及运用概率知识解决简单的实际问题的能力, 满分13分。

(I) 解: 4, 6, 6

(II) (i) 解: 得分在区间 $[20, 30)$ 内的运动员编号为 $A_3, A_4, A_5, A_{10}, A_{11}, A_{13}$. 从中随机抽取2人, 所有可能的抽取结果有:

$\{A_3, A_4\}, \{A_3, A_5\}, \{A_3, A_{10}\}, \{A_3, A_{11}\}, \{A_3, A_{13}\}, \{A_4, A_5\}, \{A_4, A_{10}\},$

$\{A_4, A_{11}\}, \{A_4, A_{13}\}, \{A_5, A_{10}\}, \{A_5, A_{11}\}, \{A_5, A_{13}\}, \{A_{10}, A_{11}\}, \{A_{10}, A_{13}\}, \{A_{11}, A_{13}\},$

共15种。

(ii) 解: “从得分在区间 $[20, 30)$ 内的运动员中随机抽取2人, 这2人得分之和大于50”

(记为事件B)的所有可能结果有: $\{A_4, A_5\}, \{A_4, A_{10}\}, \{A_4, A_{11}\}, \{A_5, A_{10}\}, \{A_{10}, A_{11}\}$, 共5种。

$$\text{所以 } P(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

(16) 本小题主要考查余弦定理、两角和的余弦公式、同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦、余弦公式等基础知识, 考查基本运算能力, 满分13分。

(I) 解: 由 $B = C, 2b = \sqrt{3}a$, 可得 $c = b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3}.$$

(II) 解: 因为 $\cos A = \frac{1}{3}, A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\cos 2A = -2\cos^2 A - 1 = -\frac{7}{9}. \text{ 故 } \sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos 2A \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{8+7\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

(17) 本小题主要考查直线与平面平行、直线与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识, 考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力。满分13分。

(I) 证明：连接BD，MO，在平行四边形ABCD中，因为O为AC的中点，所以O为BD的中点，又M为PD的中点，所以PB//MO。因为 $PB \not\subset$ 平面ACM， $MO \subset$ 平面ACM，所以PB//平面ACM。

(II) 证明：因为 $\angle ADC = 45^\circ$ ，且AD=AC=1，所以 $\angle DAC = 90^\circ$ ，即 $AD \perp AC$ ，又PO⊥平面ABCD， $AD \subset$ 平面ABCD，所以 $PO \perp AD$ ，而 $AC \cap PO = O$ ，所以 $AD \perp$ 平面PAC。

(III) 解：取DO中点N，连接MN，AN，因为M为PD的中点，所以MN//PO，且 $MN = \frac{1}{2}PO = 1$ ，由 $PO \perp$ 平面ABCD，得 $MN \perp$ 平面ABCD，所以 $\angle MAN$ 是直线AM与平面ABCD所成的角，在 $Rt\triangle DAO$ 中， $AD = 1, AO = \frac{1}{2}$ ，

所以 $DO = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，从而 $AN = \frac{1}{2}DO = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ，

在 $Rt\triangle ANM$ 中， $\tan \angle MAN = \frac{MN}{AN} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，

即直线AM与平面ABCD所成角的正切值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

(18) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、两点间的距离公式、点到直线的距离公式、直线与圆的位置关系等基础知识，考查用代数方法研究圆锥曲线的性质及数形结合的数学思想，考查解决问题能力与运算能力，满分13分。

(I) 解：设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$ ，因为 $|PF_2| = |F_1F_2|$ ，

所以 $\sqrt{(a-c)^2 + b^2} = 2c$ ，整理得 $2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$ ，得 $\frac{c}{a} = -1$ (舍)

或 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，所以 $e = \frac{1}{2}$ 。

(II) 解：由 (I) 知 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$ ，可得椭圆方程为 $3x^2 + 4y^2 = 12c^2$ ，直线FF₂

的方程为 $y = \sqrt{3}(x - c)$ 。

A，B两点的坐标满足方程组 $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12c^2 \\ y = \sqrt{3}(x - c) \end{cases}$ ，消去 y 并整理，得 $5x^2 - 8cx = 0$ 。

解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{5}c$ ，得方程组的解 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -\sqrt{3}c, \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{8}{5}c, \\ y_2 = \frac{3\sqrt{3}}{5}c. \end{cases}$

不妨设 $A\left(\frac{8}{5}c, \frac{3\sqrt{3}}{5}c\right)$ ， $B(0, -\sqrt{3}c)$ ，所以

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}c\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{5}c + \sqrt{3}c\right)^2} = \frac{16}{5}c.$$

$$\text{于是 } |MN| = \frac{5}{8}|AB| = 2c.$$

$$\text{圆心 } (-1, \sqrt{3}) \text{ 到直线 } PF_2 \text{ 的距离 } d = \frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3}c|}{2} = \frac{\sqrt{3}|2+c|}{2}.$$

$$\text{因为 } d^2 + \left(\frac{|MN|}{2}\right)^2 = 4^2, \text{ 所以 } \frac{3}{4}(2+c)^2 + c^2 = 16.$$

$$\text{整理得 } 7c^2 + 12c - 52 = 0, \text{ 得 } c = -\frac{26}{7} \text{ (舍)}, \text{ 或 } c = 2. \text{ 所以椭圆方程为}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

(19) 本小题主要考查导数的几何意义、利用导数研究函数的单调性、曲线的切线方程、函数的零点、解不等式等基础知识，考查运算能力及分类讨论的思想方法，满分14分。




$$(I) \text{ 解: 当 } t=1 \text{ 时, } f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x, f(0) = 0, f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

$$f'(0) = -6. \text{ 所以曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (0, f(0)) \text{ 处的切线方程为 } y = -6x.$$

$$(II) \text{ 解: } f'(x) = 12x^2 + 6tx - 6t^2, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = -t \text{ 或 } x = \frac{t}{2}.$$




因为 $t \neq 0$ ，以下分两种情况讨论：

(1) 若 $t < 0$ ，则 $\frac{t}{2} < -t$ ，当 x 变化时， $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty, \frac{t}{2}\right)$	$\left(\frac{t}{2}, -t\right)$	$(-t, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

所以， $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\infty, \frac{t}{2}\right), (-t, +\infty)$ ； $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(\frac{t}{2}, -t\right)$ 。

(2) 若 $t > 0$ ，则 $-t < \frac{t}{2}$ ，当 x 变化时， $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -t)$	$\left(-t, \frac{t}{2}\right)$	$\left(\frac{t}{2}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

所以, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -t), \left(\frac{t}{2}, +\infty\right)$; $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-t, \frac{t}{2}\right)$.

(III) 证明: 由 (II) 可知, 当 $t > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{t}{2}\right)$ 内的单调递减, 在 $\left(\frac{t}{2}, +\infty\right)$

内单调递增, 以下分两种情况讨论:

(1) 当 $\frac{t}{2} \geq 1$, 即 $t \geq 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减,

$$f(0) = t - 1 > 0, f(1) = -6t^2 + 4t + 3 \leq -6 \times 4 + 4 \times 2 + 3 < 0.$$

所以对任意 $t \in [2, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点。

(2) 当 $0 < \frac{t}{2} < 1$, 即 $0 < t < 2$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{t}{2}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$ 内单调递增

$$, \text{ 若 } t \in (0, 1], f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}t^3 + t - 1 \leq -\frac{7}{4}t^3 < 0.$$

$$f(1) = -6t^2 + 4t + 3 \geq -6t + 4t + 3 = -2t + 3 > 0.$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$ 内存在零点。

$$\text{若 } t \in (1, 2), f\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{7}{4}t^3 + (t-1) < -\frac{7}{4}t^3 + 1 < 0.$$

$$f(0) = t - 1 > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{t}{2}\right)$ 内存在零点。

所以, 对任意 $t \in (0, 2)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点。

综上, 对任意 $t \in (0, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点。

(20) 本小题主要考查等比数列的定义、数列求和等基础知识, 考查运算能力、推理论证能力、综合分析能力和解决问题的能力及分类讨论的思想方法。满分14分。

$$(I) \text{ 解: 由 } b_n = \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}, n \in N^*, \text{ 可得 } b_n = \begin{cases} 2, n \text{ 为奇数,} \\ 1, n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\text{又 } b_{n+1}a_n + b_na_{n+1} = (-2)^n + 1,$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 + 2a_2 = -1, \text{ 由 } a_1 = 2, \text{ 可得 } a_2 = -\frac{3}{2};$$

当 $n = 2$ 时, $2a_2 + a_3 = 5$, 可得 $a_3 = 8$.

(II) 证明: 对任意 $n \in N^*$

$$a_{2n-1} + 2a_{2n} = -2^{2n-1} + 1 \quad ①$$

$$2a_{2n} + a_{2n+1} = 2^{2n} + 1 \quad ②$$

②-①, 得 $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 3 \times 2^{2n-1}$, 即 $c_n = 3 \times 2^{2n-1}$, 于是 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 4$

所以 $\{c_n\}$ 是等比数列。

(III) 证明: $a_1 = 2$, 由 (II) 知, 当 $k \in N^*$ 且 $k \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= a_1 + (a_3 - a_1) + (a_5 - a_3) + (a_7 - a_5) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k-3}) \\ &= 2 + 3(2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2k-3}) = 2 + 3 \times \frac{2(1-4^{k-1})}{1-4} = 2^{2k-1} \end{aligned}$$

故对任意 $k \in N^*$, $a_{2k-1} = 2^{2k-1}$.

由①得 $2^{2k-1} + 2a_{2k} = -2^{2k-1} + 1$, 所以 $a_{2k} = \frac{1}{2} - 2^{2k-1}$, $k \in N^*$

因此, $S_{2k} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2k-1} + a_{2k}) = \frac{k}{2}$.

于是, $S_{2k} - 1 = S_{2k} - a_{2k} = \frac{k-1}{2} + 2^{2k-1}$.

故

$$\frac{S_{2k-1}}{a_{2k-1}} + \frac{S_{2k}}{a_{2k}} = \frac{\frac{k-1}{2} + 2^{2k-1}}{2^{2k-1}} + \frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2} - 2^{2k-1}} = \frac{k-1+2^{2k}}{2^{2k}} - \frac{k}{2^{2k}-1} = 1 - \frac{1}{4^k} - \frac{k}{4^k(4^k-1)}.$$