

2015 年全国普通高等学校招生考试(四川)

文科数学

一、选择题

1、设集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, 集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$

- (A) $\{x | -1 < x < 3\}$ (B) $\{x | -1 < x < 1\}$ (C) $\{x | 1 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$

【答案】A

【解析】学科网

由已知, 集合 $A = (-1, 2)$, $B = (1, 3)$, 故 $A \cup B = (-1, 3)$, 选 A

【考点定位】本题主要考查集合的概念, 集合的表示方法和并集运算.

【名师点睛】集合的运算通常作为试卷的第一小题, 是因为概念较为简单, 学生容易上手, 可以让考生能够信心满满的尽快进入考试状态. 另外, 集合问题一般与函数、方程、不等式及其性质关联, 也需要考生熟悉相关知识点和方法. 本题最后求两个集合的并集, 相对来说比较容易, 与此相关的交集、补集等知识点也是常考点, 应多加留意. 属于简单题.

2、设向量 $a = (2, 4)$ 与向量 $b = (x, 6)$ 共线, 则实数 $x = (\quad)$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

【答案】B

【解析】由向量平行的性质, 有 $2 : 4 = x : 6$, 解得 $x = 3$, 选 B

【考点定位】本题考查平面向量的坐标表示, 向量共线的性质, 考查基本的运算能力.

【名师点睛】平面向量的共线、垂直以及夹角问题, 我们通常有两条解决通道: 一是几何法, 可以结合正余弦定理来处理. 二是代数法, 特别是非零向量的平行与垂直, 一般都直接根据坐标之间的关系, 两个非零向量平行时, 对应坐标成比例(坐标中有 0 时单独讨论); 两个向量垂直时, 对应坐标乘积之和等于 0, 即通常所采用的“数量积”等于 0. 属于简单题.

3、某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异, 拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查, 则最合理的抽样方法是()

- (A) 抽签法 (B) 系统抽样法 (C) 分层抽样法 (D) 随机数法

【答案】C

【解析】按照各种抽样方法的适用范围可知, 应使用分层抽样. 选 C

【考点定位】本题考查几种抽样方法的概念、适用范围的判断, 考查应用数学方法解决实际问题的能

力.

【名师点睛】样本抽样是现实生活中常见的事件，一般地，抽签法和随机数表法适用于样本总体较少的抽样，系统抽样法适用于要将样本总体均衡地分为 n 个部分，从每一部分中按规则抽取一个个体；分层抽样法则是当总体明显的分为几个层次时，在每一个层次中按照相同的比例抽取样本.本题条件适合于分层抽样的条件，故应选用分层抽样法.属于简单题.

4、设 a, b 为正实数，则 “ $a>b>1$ ” 是 “ $\log_2 a > \log_2 b > 0$ ” 的()

【答案】A

【解析】 $a>b>1$ 时, 有 $\log_2 a > \log_2 b > 0$ 成立,

反之当 $\log_2 a > \log_2 b > 0$ 成立时, $a > b > 1$ 也正确. 选 A.

【考点定位】本题考查对数函数的概念和性质、充要条件等基本概念，考查学生综合运用数学知识和方法解决问题的能力。

【名师点睛】判断条件的充要性，必须从“充分性”和“必要性”两个方向分别判断，同时注意涉及的相关概念和方法.本题中涉及对数函数基本性质——单调性和函数值的符号，因此可以结合对数函数的图象进行判断，从而得出结论.属于简单题.

5、下列函数中，最小正周期为 π 的奇函数是()

- (A) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ (B) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$
 (C) $y = \sin 2x + \cos 2x$ (D) $y = \sin x + \cos x$

【答案】B

【解析】 A 、 B 、 C 的周期都是 π , D 的周期是 2π

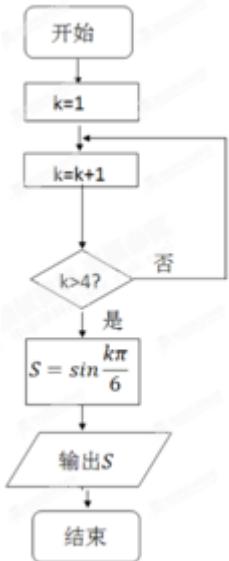
但 A 中, $y = \cos 2x$ 是偶函数, C 中 $y = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 是非奇非偶函数

故正确答案为 B 学科网

【考点定位】本题考查三角函数的基本概念和性质，考查函数的周期性和奇偶性，考查简单的三角函数恒等变形能力.

【名师点睛】讨论函数性质时，应该先注意定义域，在不改变定义域的前提下，将函数化简整理为标准形式，然后结合图象进行判断.本题中，*C*、*D*两个选项需要先利用辅助角公式整理，再结合三角函数的周期性和奇偶性(对称性)进行判断即可.属于中档题.

6、执行如图所示的程序框图，输出 S 的值为()



(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】第四次循环后， $k=5$ ，满足 $k>4$ ，输出 $S=\sin \frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ，选 D

【考点定位】本题考查循环结构形式的程序框图，考查特殊角的三角函数值，考查基本运算能力.

【名师点睛】在算法的考点上，四川省以程序框图的考查为主，而考查程序框图，必定是以循环结构形式出现，它可以包括程序框图的所有结构类型.本题只需对循环后的 k 值进行判定，最后输出相应的三角函数值即可，属于简单题.

7、过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线交该双曲线的两条渐近线于 A, B 两点，则 $|AB| =$ ()

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】由题意, $a=1$, $b=\sqrt{3}$, 故 $c=2$,

渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

将 $x=2$ 代入渐近线方程, 得 $y_{1,2}=\pm 2\sqrt{3}$

故 $|AB|=4\sqrt{3}$, 选 D

【考点定位】本题考查双曲线的概念、双曲线渐近线方程、直线与直线的交点、线段长等基础知识, 考查简单的运算能力.

【名师点睛】本题跳出直线与圆锥曲线位置关系的常考点, 进而考查直线与双曲线渐近线交点问题, 考生在解题中要注意识别. 本题需要首先求出双曲线的渐近线方程, 然后联立方程组, 接触线段 AB 的端点坐标, 即可求得 $|AB|$ 的值. 属于中档题.

8、某食品的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $y=e^{kx+b}$ ($e=2.718\ldots$ 为自然对数的底数, k, b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时, 在 22°C 的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在 33°C 的保鲜时间是()

- (A) 16 小时 (B) 20 小时 (C) 24 小时 (D) 21 小时

【答案】C

【解析】由题意, $\begin{cases} 192 = e^b \\ 48 = e^{22k+b} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 192 = e^b \\ \frac{1}{2} = e^{11k} \end{cases}$

于是当 $x=33$ 时, $y=e^{33k+b}=(e^{11k})^3 \cdot e^b=(\frac{1}{2})^3 \times 192=24$ (小时)

【考点定位】本题考查指数函数的概念及其性质, 考查函数模型在现实生活中的应用, 考查整体思想, 考查学生应用函数思想解决实际问题的能力.

【名师点睛】指数函数是现实生活中最常容易遇到的一种函数模型, 如人口增长率、银行储蓄等等, 与人们生活密切相关. 本题已经建立好了函数模型, 只需要考生将已知的两组数据代入, 即可求出其中的待定常数. 但本题需要注意的是: 并不需要得到 k 和 b 的准确值, 而只需要求出 e^b 和 e^{11k} , 然后整体代入后面的算式, 即可得到结论, 否则将增加运算量. 属于中档题.

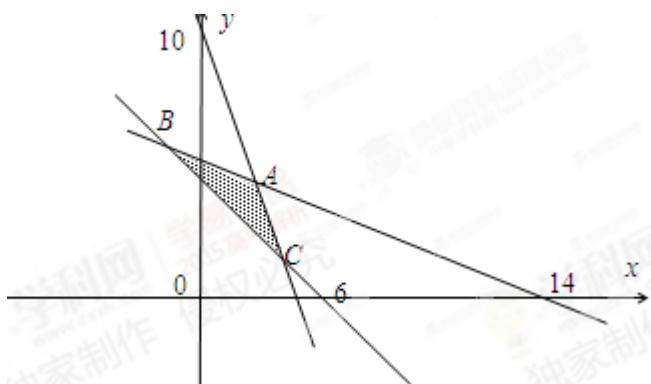
9、设实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x+y \leq 10 \\ x+2y \leq 14 \\ x+y \geq 6 \end{cases}$, 则 xy 的最大值为()

(A) $\frac{25}{2}$

(B) $\frac{49}{2}$

(C) 12

(D) 14



【答案】A

【解析】画出可行域如图

在 $\triangle ABC$ 区域中结合图象可知

当动点在线段 AC 上时 xy 取得最大

此时 $2x+y=10$

$$xy = \frac{1}{2}(2x \cdot y) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x+y}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}$$

当且仅当 $x = \frac{5}{2}$, $y = 5$ 时取等号, 对应点 $(\frac{5}{2}, 5)$ 落在线段 AC 上,

故最大值为 $\frac{25}{2}$

选 A

【考点定位】本题主要考查线性规划与基本不等式的基础知识，考查知识的整合与运用，考查学生综合运用知识解决问题的能力。

【名师点睛】本题中，对可行域的处理并不是大问题，关键是“求 xy 最大值”中， xy 已经不是“线性”

$\frac{k}{x}$

问题了，如果直接设 $xy=k$ ，则转化为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的曲线与可行域有公共点问题，难度较大，且有超出“线性”的嫌疑。而上面解法中，用基本不等式的思想，通过系数的配凑，即可得到结论，当然，对于等号成立的条件也应该给以足够的重视。属于较难题。

10、设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A , B 两点, 与圆 C : $(x-5)^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切于点 M , 且 M 为线段 AB 中点, 若这样的直线 l 恰有 4 条, 则 r 的取值范围是()

(A)(1, 3)

(B)(1, 4)

(C)(2, 3)

(D)(2, 4)

【答案】D

【解析】不妨设直线 $l: x=ty+m$,

代入抛物线方程有: $y^2-4ty-4m=0$

则 $\Delta=16t^2+16m>0$

又中点 $M(2t^2+m, 2t)$, 则 $k_{MC}k_l=-1$

即 $m=3-2t^2$

当 $t=0$ 时, 若 $r \geq 5$, 满足条件的直线只有 1 条, 不合题意,

若 $0 < r < 5$, 则斜率不存在的直线有 2 条, 此时只需对应非零的 t 的直线恰有 2 条即可.

当 $t \neq 0$ 时, 将 $m=3-2t^2$ 代入 $\Delta=16t^2+16m$, 可得 $3-t^2>0$, 即 $0 < t^2 < 3$

又由圆心到直线的距离等于半径,

$$\text{可得 } d=r=\frac{|5-m|}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}=2\sqrt{1+t^2}$$

由 $0 < t^2 < 3$, 可得 $r \in (2, 4)$. 选 D 学科网

【考点定位】本题考查直线、圆及抛物线等基本概念, 考查直线与圆、直线与抛物线的位置关系、参数取值范围等综合问题, 考查数形结合和分类与整合的思想, 考查学生分析问题和处理问题的能力.

【名师点睛】本题实质是考查弦的中垂线过定点问题, 注意到弦的斜率不可能为 0, 但有可能不存在, 故将直线方程设为 $x=ty+m$, 可以避免忘掉对斜率不存在情况的讨论. 在对 r 的讨论中, 要注意图形的对称性, 斜率存在时, 直线必定是成对出现, 因此, 斜率不存在($t=0$)时也必须要有两条直线满足条件. 再根据方程的判别式找到另外两条直线存在对应的 r 取值范围即可. 属于难题.

二、填空题

11、设 i 是虚数单位, 则复数 $i-\frac{1}{i}=$ _____.

【答案】 $2i$

【解析】 $i-\frac{1}{i}=i+i=2i$

【考点定位】本题考查复数的概念, 复数代数形式的四则运算等基础知识.

$$\frac{1}{i} = -i$$

【名师点睛】解决本题的关键取决于对复数运算的熟练程度, 也就是 $\frac{1}{i}=-i$ 的运算, 容易误解为 $\frac{1}{i}=i$, 从而导致答案错误. 一般地, $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, 而 $\frac{1}{i}=i^{-1}=-i$. 属于容易题

12、 $\lg 0.01 + \log_2 16 =$ _____.

【答案】2

【解析】 $\lg 0.01 + \log_2 16 = -2 + 4 = 2$

【考点定位】本题考查对数的概念、对数运算的基础知识，考查基本运算能力。

【名师点睛】对数的运算通常与指数运算相对应，即“若 $a^b=N$ ，则 $\log_a N=b$ ”，因此，要求 $\log_a N$ 的值，只需看 a 的多少次方等于 N 即可，由此可得结论。当然本题中还要注意的是：两个对数的底数是不相同的，对数符号的写法也有差异，要细心观察，避免过失性失误。属于简单题。

13、已知 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$ ，则 $2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$ 的值是_____。

【答案】-1

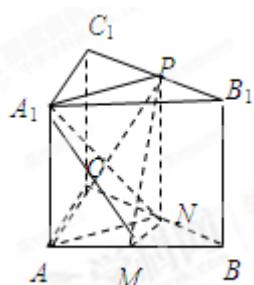
【解析】由已知可得， $\sin\alpha=-2\cos\alpha$ ，即 $\tan\alpha=-2$

$$2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1} = \frac{-4-1}{4+1} = -1$$

【考点定位】本意考查同角三角函数关系式、三角函数恒等变形等基础知识，考查综合处理问题的能力。

【名师点睛】同角三角函数(特别是正余弦函数)求值问题的通常解法是：结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ，解出 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的值，然后代入计算，但这种方法往往比较麻烦，而且涉及符号的讨论。利用整体代换思想，先求出 $\tan\alpha$ 的值，对所求式除以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha(=1)$ 是此类题的常见变换技巧，通常称为“齐次式方法”，转化为 $\tan\alpha$ 的一元表达式，可以避免诸多繁琐的运算。属于中档题。

14、在三棱住 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形，俯视图是直角边长为 1 的等腰直角三角形，设点 M ， N ， P 分别是 AB ， BC ， B_1C_1 的中点，则三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积是_____。



【答案】 $\frac{1}{24}$

【解析】由题意，三棱柱是底面为直角边长为1的

等腰直角三角形，高为1的直三棱柱，底面积为 $\frac{1}{2}$

如图，因为 $AA_1 \parallel PN$ ，故 $AA_1 \parallel$ 面 PMN ，

故三棱锥 $P-A_1MN$ 与三棱锥 $P-AMN$ 体积相等，

三棱锥 $P-AMN$ 的底面积是三棱锥底面积的 $\frac{1}{4}$ ，高为1

故三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ 学科网

【考点定位】本题主要考查空间几何体的三视图、直观图及空间线面关系、三棱柱与三棱锥的体积等基础知识，考查空间想象能力、图形分割与转换的能力，考查基本运算能力.

【名师点睛】解决本题，首先要正确画出三棱柱的直观图，包括各个点的对应字母所在位置，结合条件，三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积可以直接计算，但转换为三棱锥 $P-AMN$ 的体积，使得计算更为简便，基本上可以根据条件直接得出结论. 属于中档偏难题.

15、已知函数 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2+ax$ (其中 $a \in R$).对于不相等的实数 x_1 , x_2 , 设 $m=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $n=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$,

$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$, 现有如下命题:

①对于任意不相等的实数 x_1 , x_2 , 都有 $m>0$;

②对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1 , x_2 , 都有 $n>0$;

③对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1 , x_2 , 使得 $m=n$;

④对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1 , x_2 , 使得 $m=-n$.

其中真命题有_____ (写出所有真命题的序号).

【答案】①④

【解析】对于①, 因为 $f'(x)=2^x \ln 2 > 0$ 恒成立, 故①正确

对于②, 取 $a=-8$, 即 $g(x)=2x-8$, 当 x_1 , $x_2 < 4$ 时 $n<0$, ②错误

对于③, 令 $f'(x)=g'(x)$, 即 $2^x \ln 2 = 2x+a$

记 $h(x)=2^x \ln 2 - 2x$, 则 $h'(x)=2^x (\ln 2)^2 - 2$

存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 可知函数 $h(x)$ 先减后增, 有最小值.

因此, 对任意的 a , $m=n$ 不一定成立. ③错误

对于④, 由 $f'(x) = -g(x)$, 即 $2^x \ln 2 = -2x - a$

令 $h(x) = 2^x \ln 2 + 2x$, 则 $h(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 2 > 0$ 恒成立,

即 $h(x)$ 是单调递增函数,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$

因此对任意的 a , 存在 $y=a$ 与函数 $h(x)$ 有交点. ④正确 学科网

【考点定位】本题主要考查函数的性质、函数的单调性、导数的运算等基础知识, 考查函数与方程的思想和数形结合的思想, 考查分析问题和解决问题的能力.

【名师点睛】本题首先要正确认识 m , n 的几何意义, 它们分别是两个函数图象的某条弦的斜率, 因此, 借助导数研究两个函数的切线变化规律是本题的常规方法, 解析中要注意“任意不相等的实数 x_1 , x_2 ”与切线斜率的关系与差别, 以及“都有”与“存在”的区别, 避免过失性失误. 属于较难题.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

16. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ ($n=1, 2, 3\dots$) 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - a_3$, 且 a_1, a_2+1, a_3 成等差数列.

(I) 求数列的通项公式;

(II) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

【解析】(I) 由已知 $S_n = 2a_n - a_1$, 有

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{即 } a_n = 2a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{从而 } a_2 = 2a_1, \quad a_3 = 2a_2 = 4a_1,$$

又因为 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列

$$\text{即 } a_1 + a_3 = 2(a_2 + 1)$$

$$\text{所以 } a_1 + 4a_1 = 2(2a_1 + 1), \text{ 解得 } a_1 = 2$$

所以, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列

$$\text{故 } a_n = 2^n.$$

$$(II) \text{ 由(I) 得 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}, \text{ 所以 } T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{学科网}$$

【考点定位】本题考查等差数列与等比数列的概念、等比数列通项公式与前 n 项和等基础知识, 考查运算求解能力.

【名师点睛】数列问题放在解答题第一题, 通常就考查基本概念和基本运算, 对于已知条件是 S_n 与 a_n 关系式的问题, 基本处理方法是“变更序号作差”, 这种方法中一定要注意首项 a_1 是否满足一般规律(代入检验即可, 或者根据变换过程中 n 的范围和递推关系中的表达式判断). 数列求和时, 一定要注意首项、公比和项数都不能出错. 同时注意, 对于较为简单的试题, 解析步骤一定要详细具体, 不可随意跳步. 属于简单题.

17、(本小题满分 12 分)

一辆小客车上有 5 个座位, 其座位号为 1, 2, 3, 4, 5, 乘客 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的座位号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 他们按照座位号顺序先后上车, 乘客 P_1 因身体原因没有坐自己号座位, 这时司机要求余下的乘客按以下规则就座: 如果自己的座位空着, 就只能坐自己的座位. 如果自己的座位已有乘客就坐, 就在这 5 个座位的剩余空位中选择座位.

(I) 若乘客 P_1 坐到了 3 号座位, 其他乘客按规则就座, 则此时共有 4 种坐法. 下表给出其中两种坐法, 请填入余下两种坐法(将乘客就坐的座位号填入表中空格处)

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	1	4	5
	3	2	4	5	1

--	--	--	--	--	--

(II)若乘客 P_1 坐到了 2 号座位，其他乘客按规则就坐，求乘客 P_1 坐到 5 号座位的概率。

【解析】(I)余下两种坐法如下表所示

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	4	1	5
	3	2	5	4	1

(II)若乘客 P_1 做到了 2 号座位，其他乘客按规则就坐

则所有可能坐法可用下表表示为

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	2	1	3	4	5
	2	3	1	4	5
	2	3	4	1	5
	2	3	4	5	1
	2	3	5	4	1
	2	4	3	1	5
	2	4	3	5	1
	2	5	3	4	1

于是，所有可能的坐法共 8 种

设“乘客 P_5 坐到 5 号座位”为事件 A ，则事件 A 中的基本事件的个数为 4

$$\text{所以 } P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

答：乘客 P_5 坐到 5 号座位的概率为 $\frac{1}{2}$.

【考点定位】本题主要考查随机事件的概率、古典概型等概念及相关计算，考查运用概率知识与方法分析和解决问题的能力，考查推理论证能力、应用意识.

【名师点睛】概率统计问题，文科的考查重点是随机事件、古典概型以及列举法求概率，本题需要考生根据条件细致填写座位表，通常采取按照某种顺序，如本题中已经设定的 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的座位号顺序填写，只要能正确填写好表格，相应概率随之得到. 属于简单题.

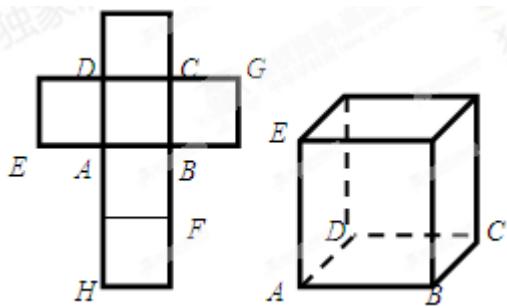
18、(本小题满分 12 分)

一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示.

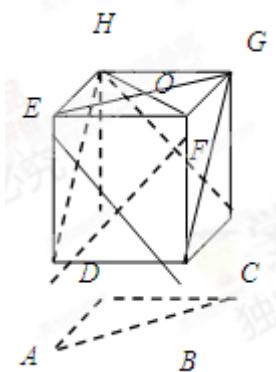
(I) 请按字母 F, G, H 标记在正方体相应地顶点处(不需要说明理由)

(II) 判断平面 BEG 与平面 ACH 的位置关系，并说明你的结论.

(III) 证明：直线 $DF \perp$ 平面 BEG



【解析】(I)点 F , G , H 的位置如图所示



(II)平面 $BEG\parallel$ 平面 ACH . 证明如下

因为 $ABCD-EFGH$ 为正方体, 所以 $BC\parallel FG$, $BC=FG$

又 $FG\parallel EH$, $FG=EH$, 所以 $BC\parallel EH$, $BC=EH$

于是 $BCEH$ 为平行四边形

所以 $BE\parallel CH$

又 $CH\subset$ 平面 ACH , $BE\not\subset$ 平面 ACH ,

所以 $BE\parallel$ 平面 ACH

同理 $BG\parallel$ 平面 ACH

又 $BE\cap BG=B$

所以平面 $BEG\parallel$ 平面 ACH

(III) 连接 FH

因为 $ABCD-EFGH$ 为正方体，所以 $DH \perp$ 平面 $EFGH$

因为 $EG \subset$ 平面 $EFGH$ ，所以 $DH \perp EG$

又 $EG \perp FH$, $EG \cap FH = O$, 所以 $EG \perp$ 平面 $BFHD$

又 $DF \subset$ 平面 $BFDH$ ，所以 $DF \perp EG$

同理 $DF \perp BG$

又 $EG \cap BG = G$

所以 $DF \perp$ 平面 BEG . 学科网

【考点定位】本题主要考查简单空间图形的直观图、空间线面平行与垂直的判定与性质等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力.

【名师点睛】本题引入了几何体表面的折展问题，对空间想象能力要求较高.立体几何的证明一定要详细写出所有步骤，列举(推证)出所有必备的条件，如在(II)中证明两个平面平行时，除了找到两组平行线外，一定不能忘掉“相交”这个条件；同样，(III)中证明线面垂直，也不能忘掉“ $EG \cap BG = G$ ”这个条件.属于中档题.

19、(本小题满分 12 分)

已知 A 、 B 、 C 为 $\triangle ABC$ 的内角， $\tan A$ 、 $\tan B$ 是关于方程 $x^2 + \sqrt{3}px - p + 1 = 0 (p \in R)$ 两个实根.

(I) 求 C 的大小

(II) 若 $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$, 求 p 的值

【解析】(I) 由已知，方程 $x^2 + \sqrt{3}px - p + 1 = 0$ 的判别式

$$\Delta = (\sqrt{3}p)^2 - 4(-p+1) = 3p^2 + 4p - 4 \geq 0$$

$$\text{所以 } p \leq -2 \text{ 或 } p \geq \frac{2}{3}$$

由韦达定理，有 $\tan A + \tan B = -\sqrt{3}p$, $\tan A \tan B = 1 - p$

于是 $1 - \tan A \tan B = 1 - (1 - p) = p \neq 0$

$$\text{从而 } \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{-\sqrt{3}p}{p} = -\sqrt{3}$$

所以 $\tan C = -\tan(A+B) = \sqrt{3}$

所以 $C = 60^\circ$

(II)由正弦定理, 得

$$\sin B = \frac{AC \sin C}{AB} = \frac{\sqrt{6} \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

解得 $B=45^\circ$ 或 $B=135^\circ$ (舍去)

于是 $A=180^\circ-B-C=75^\circ$

$$\text{则 } \tan A = \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{所以 } p = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\tan A + \tan B) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3} + 1) = -1 - \sqrt{3}$$

【考点定位】本题主要考查和角公式、诱导公式、正弦定理、一元二次方程根与系数关系等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程、化归与转化等数学思想.

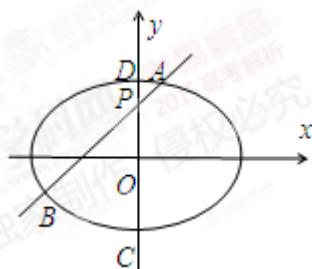
【名师点睛】本题利用一元二次方程的韦达定理, 给出三角形两个内角正切值的关系式, 求解过程中要注意对判别式的判定, 表面上看, 判别式对结论没有什么影响, 但这对考查学生思维习惯及其严谨性是很有必要的. 第(I)问得到 $C=60^\circ$ 后, 第(II)问中要注意舍去 $B=135^\circ$, 否则造成失误. 属于中档题.

20、(本小题满分 13 分)

如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0, 1)$ 在短轴 CD 上, 且 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = -1$

(I)求椭圆 E 的方程;

(II)设 O 为坐标原点, 过点 P 的动直线与椭圆交于 A 、 B 两点. 是否存在常数 λ , 使得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



【解析】(I)由已知, 点 C , D 的坐标分别为 $(0, -b)$, $(0, b)$

又点 P 的坐标为 $(0, 1)$, 且 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = -1$

于是 $\begin{cases} 1-b^2 = -1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 - b^2 = c^2 \end{cases}$, 解得 $a=2$, $b=\sqrt{2}$

所以椭圆 E 方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(II)当直线 AB 斜率存在时, 设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$

A , B 的坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx + 1 \end{cases}$, 得 $(2k^2+1)x^2 + 4kx - 2 = 0$

其判别式 $\Delta = (4k)^2 + 8(2k^2+1) > 0$

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{4k}{2k^2+1}$, $x_1 x_2 = -\frac{2}{2k^2+1}$

从而 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \lambda[x_1 x_2 + (y_1 - 1)(y_2 - 1)]$

$= (1+\lambda)(1+k^2)x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1$

$= \frac{(-2\lambda-4)k^2 + (-2\lambda-1)}{2k^2+1}$

$= -\frac{\lambda-1}{2k^2+1} - \lambda - 2$

所以, 当 $\lambda=1$ 时, $-\frac{\lambda-1}{2k^2+1} - \lambda - 2 = -3$

此时, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -3$ 为定值

当直线 AB 斜率不存在时, 直线 AB 即为直线 CD

此时 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = -2 - 1 = -3$

故存在常数 $\lambda=-1$, 使得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 为定值 -3 .

【考点定位】本题主要考查椭圆的标准方程、直线方程、平面向量等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查数形结合、化归与转化、特殊与一般、分类与整合等数学思想.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【名师点睛】本题属于解析几何的基本题型，第(I)问根据“离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = -1$ ”建立方程组可以求出椭圆方程；第(II)问设出直线方程后，代入椭圆方程，利用目标方程法，结合韦达定理，得到两交点横坐标的和与积，再代入 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 中化简整理.要得到定值，只需判断有无合适的 λ ，使得结论与 k 无关即可，对考生代数式恒等变形能力要求较高.属于较难题.

21、(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = -2\ln x + x^2 - 2ax + a^2$ ，其中 $a > 0$.

(I) 设 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，讨论 $g(x)$ 的单调性；

(II) 证明：存在 $a \in (0, 1)$ ，使得 $f(x) \geq 0$ 恒成立，且 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.

【解析】(I) 由已知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$g(x) = f'(x) = 2(x - 1 - \ln x - a)$$

$$\text{所以 } g(x) = 2 - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x}$$

当 $x \in (0, 1)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增

(II) 由 $f'(x) = 2(x - 1 - \ln x - a) = 0$ ，解得 $a = x - 1 - \ln x$

$$\text{令 } \Phi(x) = -2x\ln x + x^2 - 2x(x - 1 - \ln x) + (x - 1 - \ln x)^2 = (1 + \ln x)^2 - 2x\ln x$$

则 $\Phi(1) = 1 > 0$ ， $\Phi(e) = 2(2 - e) < 0$

于是存在 $x_0 \in (1, e)$ ，使得 $\Phi(x_0) = 0$

令 $a_0 = x_0 - 1 - \ln x_0 = u(x_0)$ ，其中 $u(x) = x - 1 - \ln x (x \geq 1)$

由 $u'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ 知，函数 $u(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增

故 $0 = u(1) < a_0 = u(x_0) < u(e) = e - 2 < 1$

即 $a_0 \in (0, 1)$

当 $a = a_0$ 时，有 $f'(x_0) = 0$ ， $f(x_0) = \Phi(x_0) = 0$

再由(I)知， $f'(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增

当 $x \in (1, x_0)$ 时， $f'(x) < 0$ ，从而 $f(x) > f(x_0) = 0$

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，从而 $f(x) > f(x_0) = 0$

又当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = (x-a_0)^2 - 2x\ln x > 0$

故 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$

综上所述, 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 且 $f(x)=0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.

【考点定位】本题主要考查导数的运算、导数在研究函数中的应用、函数的零点等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识, 考查函数与方程、数形结合、化归与转化等数学思想.

【名师点睛】本题第(I)问隐藏二阶导数知识点, 由于连续两次求导后, 参数 a 消失, 故函数的单调性是确定的, 讨论也相对简单. 第(II)问需要证明的是: 对于某个 $a \in (0, 1)$, $f(x)$ 的最小值恰好是 0, 而且在 $(1, +\infty)$ 上只有一个最小值. 因此, 本题仍然要先讨论 $f(x)$ 的单调性, 进一步说明对于找到的 a , $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有且只有一个等于 0 的点, 也就是在 $(1, +\infty)$ 上有且只有一个最小值点. 属于难题.