

# 2015年江苏省高考数学试卷

## 一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共计70分）

1. (5分) (2015·江苏) 已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{2, 4, 5\}$ , 则集合 $A \cup B$ 中元素的个数为\_\_\_\_\_.

2. (5分) (2015·江苏) 已知一组数据4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为\_\_\_\_\_.

3. (5分) (2015·江苏) 设复数 $z$ 满足 $z^2=3+4i$  ( $i$ 是虚数单位), 则 $z$ 的模为\_\_\_\_\_.

4. (5分) (2015·江苏) 根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 $S$ 为\_\_\_\_\_.

```
S←1  
I←1  
While I<8  
    S←S+2  
    I←I+3  
End While  
Print S
```

5. (5分) (2015·江苏) 袋中有形状、大小都相同的4只球, 其中1只白球、1只红球、2只黄球, 从中一次随机摸出2只球, 则这2只球颜色不同的概率为\_\_\_\_\_.

6. (5分) (2015·江苏) 已知向量 $\vec{a}=(2, 1)$ ,  $\vec{b}=(1, -2)$ , 若 $m\vec{a}+n\vec{b}=(9, -8)$

( $m, n \in \mathbb{R}$ ), 则 $m-n$ 的值为\_\_\_\_\_.

7. (5分) (2015·江苏) 不等式 $2x^2-x < 4$ 的解集为\_\_\_\_\_.

8. (5分) (2015·江苏) 已知 $\tan\alpha=-2$ ,  $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{7}$ , 则 $\tan\beta$ 的值为\_\_\_\_\_.

9. (5分) (2015·江苏) 现有橡皮泥制作的底面半径为5, 高为4的圆锥和底面半径为2, 高为8的圆柱各一个, 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个, 则新的底面半径为\_\_\_\_\_.

10. (5分) (2015·江苏) 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 以点(1, 0)为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0$  ( $m \in \mathbb{R}$ )相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为\_\_\_\_\_.

11. (5分) (2015·江苏) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ , 且 $a_{n+1} - a_n = n+1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前10项的和为\_\_\_\_\_.

12. (5分) (2015·江苏) 在平面直角坐标系xOy中, P为双曲线 $x^2 - y^2=1$ 右支上的一个动点, 若点P到直线 $x - y+1=0$ 的距离大于c恒成立, 则实数c的最大值为\_\_\_\_\_.

13. (5分) (2015·江苏) 已知函数 $f(x) = |\ln x|$ ,  $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$ , 则方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为\_\_\_\_\_.

14. (5分) (2015·江苏) 设向量 $\overrightarrow{a_k} = (\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6})$  ( $k=0, 1, 2, \dots, 12$ ), 则 $\sum_{k=0}^{11} (a_k \cdot a_{k+1})$  的值为\_\_\_\_\_.

**二、解答题 (本大题共6小题, 共计90分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

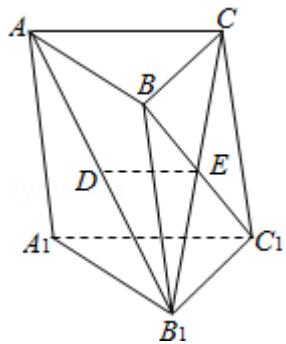
15. (14分) (2015·江苏) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$ ,  $AC=3$ ,  $A=60^\circ$ .

- (1) 求 $BC$ 的长;
- (2) 求 $\sin 2C$ 的值.

16. (14分) (2015·江苏) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AC \perp BC$ ,  $BC=CC_1$ , 设 $AB_1$ 的中点为D,  $B_1C \cap BC_1=E$ .

求证:

- (1)  $DE \parallel$  平面 $AA_1C_1C$ ;
- (2)  $BC_1 \perp AB_1$ .



17. (14分) (2015·江苏) 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路, 记两条相互垂直的公路为 $l_1$ ,  $l_2$ , 山区边界曲线为C, 计划修建的公路为l, 如图所示, M, N为C的两个端点, 测得点M到 $l_1$ ,  $l_2$ 的距离分别为5千米和40千米, 点N到 $l_1$ ,  $l_2$ 的距离分别为20千米和2.5千米,

以 $l_2$ ,  $l_1$ 在的直线分别为x, y轴, 建立平面直角坐标系xOy, 假设曲线C符合函数 $y=\frac{a}{x^2+b}$  (

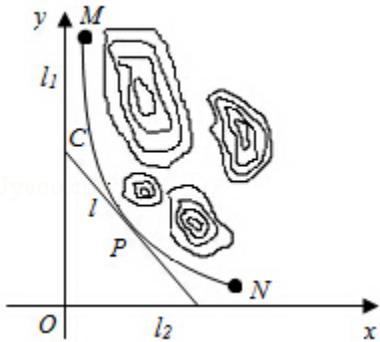
其中a, b为常数) 模型.

(1) 求a, b的值;

(2) 设公路l与曲线C相切于P点, P的横坐标为t.

①请写出公路l长度的函数解析式 $f(t)$ , 并写出其定义域;

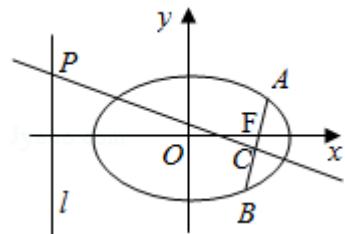
②当t为何值时, 公路l的长度最短? 求出最短长度.



18. (16分) (2015·江苏) 如图, 在平面直角坐标系xOy中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且右焦点F到左准线l的距离为3.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过F的直线与椭圆交于A, B两点, 线段AB的垂直平分线分别交直线l和AB于点P, C, 若 $PC=2AB$ , 求直线AB的方程.



19. (16分) (2015·江苏) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $b=c-a$  (实数c是与a无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ , 求c的值.

20. (16分) (2015·江苏) 设 $a_1, a_2, a_3, a_4$ 是各项为正数且公差为d ( $d \neq 0$ ) 的等差数列.

(1) 证明:  $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$  依次构成等比数列;

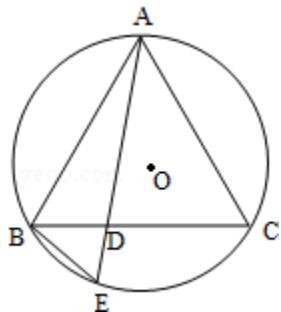
(2) 是否存在 $a_1, d$ , 使得 $a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4$  依次构成等比数列? 并说明理由;

(3) 是否存在  $a_1, d$  及正整数  $n, k$ ，使得  $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$  依次构成等比数列？并说明理由。

**三、附加题（本大题包括选做题和必做题两部分）【选做题】**本题包括21-24题，请选定其中两小题作答，若多做，则按作答的前两小题评分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤**【选修4-1：几何证明选讲】**

21. (10分) (2015·江苏) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的弦AE交B于点D.

求证： $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ .



**【选修4-2：矩阵与变换】**

22. (10分) (2015·江苏) 已知 $x, y \in \mathbb{R}$ ，向量 $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ 的属于特征值  $-2$  的一个特征向量，求矩阵A以及它的另一个特征值.

**【选修4-4：坐标系与参数方程】**

23. (2015·江苏) 已知圆C的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$ ，求圆C的半径.

**【选修4-5：不等式选讲】**

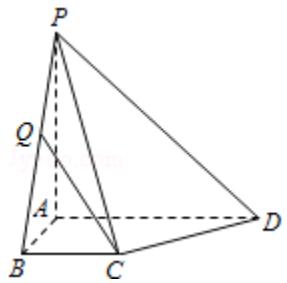
24. (2015·江苏) 解不等式 $x + |2x + 3| \geq 2$ .

**【必做题】每题10分，共计20分，解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤**

25. (10分) (2015·江苏) 如图，在四棱锥P-ABCD中，已知 $PA \perp$ 平面ABCD，且四边形ABCD为直角梯形， $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ， $PA = AD = 2$ ， $AB = BC = 1$ .

(1) 求平面PAB与平面PCD所成二面角的余弦值；

(2) 点Q是线段BP上的动点，当直线CQ与DP所成的角最小时，求线段BQ的长.



26. (10分) (2015·江苏) 已知集合 $X=\{1, 2, 3\}$ ,  $Y_n=\{1, 2, 3, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 设 $S_n=\{(a, b) | a \text{整除} b \text{或整除} a, a \in X, b \in Y_n\}$ , 令 $f(n)$ 表示集合 $S_n$ 所含元素的个数.

- (1) 写出 $f(6)$ 的值;
- (2) 当 $n \geq 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.