

# 2019年北京市高考数学试卷（理科）

## 参考答案与试题解析

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. (5分) 已知复数 $z=2+i$ ，则 $z \cdot \overline{z} = (\quad)$

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{5}$       C. 3      D. 5

【分析】直接由 $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ 求解。

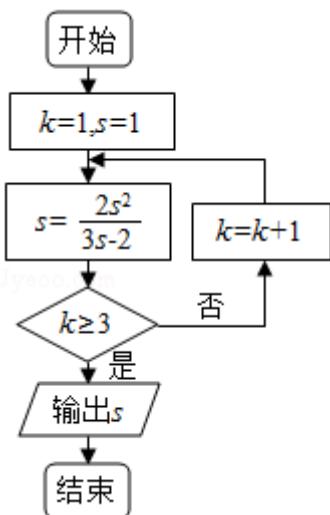
【解答】解： $\because z=2+i$ ，

$$\therefore z \cdot \overline{z} = |z|^2 = (\sqrt{2^2+1^2})^2 = 5.$$

故选：D.

【点评】本题考查复数及其运算性质，是基础的计算题。

2. (5分) 执行如图所示的程序框图，输出的 $s$ 值为( )



- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

【分析】由已知中的程序语句可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 $s$ 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案。

【解答】解：模拟程序的运行，可得

$$k=1, s=1$$

$$s=2$$

不满足条件 $k \geq 3$ ，执行循环体， $k=2, s=2$

不满足条件 $k \geq 3$ ，执行循环体， $k=3, s=2$

此时，满足条件  $k \geq 3$ ，退出循环，输出  $s$  的值为 2.

故选：B.

**【点评】**本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，是基础题.

3. (5 分) 已知直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \end{cases}$  ( $t$  为参数)，则点  $(1, 0)$  到直线  $l$  的距

离是 ( )

- A.  $\frac{1}{5}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $\frac{4}{5}$       D.  $\frac{6}{5}$

**【分析】** 消参数  $t$  化参数方程为普通方程，再由点到直线的距离公式求解.

**【解答】** 解：由  $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \end{cases}$  ( $t$  为参数)，消去  $t$ ，可得  $4x - 3y + 2 = 0$ .

则点  $(1, 0)$  到直线  $l$  的距离是  $d = \frac{|4 \times 1 - 3 \times 0 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{5}$ .

故选：D.

**【点评】**本题考查参数方程化普通方程，考查点到直线距离公式的应用，是基础题.

4. (5 分) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{1}{2}$ ，则 ( )

- A.  $a^2 = 2b^2$       B.  $3a^2 = 4b^2$       C.  $a = 2b$       D.  $3a = 4b$

**【分析】** 由椭圆离心率及隐含条件  $a^2 = b^2 + c^2$  得答案.

**【解答】** 解：由题意， $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，得  $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ ，则  $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ ，

$$\therefore 4a^2 - 4b^2 = a^2，即 3a^2 = 4b^2.$$

故选：B.

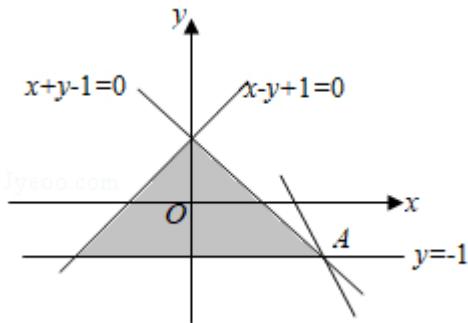
**【点评】**本题考查椭圆的简单性质，熟记隐含条件是关键，是基础题.

5. (5 分) 若  $x, y$  满足  $|x| \leq 1 - y$ ，且  $y \geq -1$ ，则  $3x + y$  的最大值为 ( )

- A. -7      B. 1      C. 5      D. 7

**【分析】** 由约束条件作出可行域，令  $z = 3x + y$ ，化为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，把最优解的坐标代入目标函数得答案.

**【解答】** 解：由  $\begin{cases} |x| \leq 1 - y \\ y \geq -1 \end{cases}$  作出可行域如图，



联立  $\begin{cases} y=-1 \\ x+y=0 \end{cases}$ , 解得  $A(2, -1)$ ,

令  $z=3x+y$ , 化为  $y=-3x+z$ ,

由图可知, 当直线  $y=-3x+z$  过点  $A$  时,  $z$  有最大值为  $3 \times 2 - 1 = 5$ .

故选: C.

**【点评】**本题考查简单的线性规划, 考查数形结合的解题思想方法, 是中档题.

6. (5分) 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足  $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ , 其中星等为  $m_k$  的星的亮度为  $E_k$  ( $k=1, 2$ ). 已知太阳的星等是 -26.7, 天狼星的星等是 -1.45, 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ( )

- A.  $10^{10.1}$       B. 10.1      C.  $\lg 10.1$       D.  $10^{-10.1}$

**【分析】**把已知熟记代入  $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ , 化简后利用对数的运算性质求解.

**【解答】**解: 设太阳的星等是  $m_1 = -26.7$ , 天狼星的星等是  $m_2 = -1.45$ ,

由题意可得:  $-1.45 - (-26.7) = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ ,

$$\therefore \lg \frac{E_1}{E_2} = \frac{50.5}{5} = 10.1, \text{ 则 } \frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}.$$

故选: A.

**【点评】**本题考查对数的运算性质, 是基础的计算题.

7. (5分) 设点  $A, B, C$  不共线, 则 “ $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AC}$  的夹角为锐角” 是 “ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ” 的 ( )
- A. 充分而不必要条件      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件

**【分析】**“ $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AC}$  的夹角为锐角”  $\Rightarrow$  “ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”, “ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”  $\Rightarrow$  “ $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AC}$

的夹角为锐角”，由此能求出结果.

【解答】解：点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  不共线，

“ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角” $\Rightarrow$ “ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$ ”，

“ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$ ” $\Rightarrow$ “ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”，

$\therefore$ 设点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  不共线，则“ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$ ”的充分必要条件.

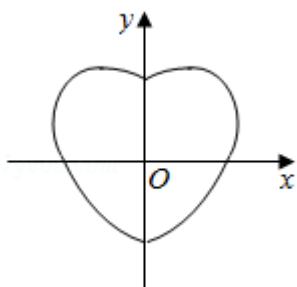
故选：C.

【点评】本题考查充分条件、必要条件、充要条件的判断，考查向量等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于基础题.

8. (5分) 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线  $C$ :  $x^2+y^2=1+|x|y$  就是其中之一(如图). 给出下列三个结论：

- ① 曲线  $C$  恰好经过 6 个整点(即横、纵坐标均为整数的点)；
- ② 曲线  $C$  上任意一点到原点的距离都不超过  $\sqrt{2}$ ；
- ③ 曲线  $C$  所围成的“心形”区域的面积小于 3.

其中，所有正确结论的序号是( )



- A. ①      B. ②      C. ①②      D. ①②③

【分析】将  $x$ 换成  $-x$  方程不变，所以图形关于  $y$  轴对称，根据对称性讨论  $y$  轴右边的图形可得.

【解答】解：将  $x$ 换成  $-x$  方程不变，所以图形关于  $y$  轴对称，

当  $x=0$  时，代入得  $y^2=1$ ， $\therefore y=\pm 1$ ，即曲线经过  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ；

当  $x>0$  时，方程变为  $y^2 - xy + x^2 - 1 = 0$ ，所以  $\Delta = x^2 - 4(x^2 - 1) \geq 0$ ，解得  $x \in (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$ ，

所以  $x$  只能取整数 1，当  $x=1$  时， $y^2 - y = 0$ ，解得  $y=0$  或  $y=1$ ，即曲线经过  $(1, 0)$ ,

(1, 1),

根据对称性可得曲线还经过 (-1, 0), (-1, 1),

故曲线一共经过 6 个整点, 故①正确.

当  $x > 0$  时, 由  $x^2 + y^2 = 1 + xy$  得  $x^2 + y^2 - 1 = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ , (当  $x = y$  时取等),

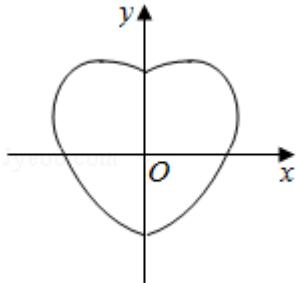
$\therefore x^2 + y^2 \leq 2$ ,  $\therefore \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}$ , 即曲线  $C$  上  $y$  轴右边的点到原点的距离不超过  $\sqrt{2}$ , 根

据对称性可得: 曲线  $C$  上任意一点到原点的距离都不超过  $\sqrt{2}$ ; 故②正确.

在  $x$  轴上图形面积大于矩形面积  $= 1 \times 2 = 2$ ,  $x$  轴下方的面积大于等腰直角三角形的面积

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ , 因此曲线  $C$  所围成的“心形”区域的面积大于  $2+1=3$ , 故③错误.

故选: C.



**【点评】**本题考查了命题的真假判断与应用, 属中档题.

## 二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

9. (5 分) 函数  $f(x) = \sin^2 2x$  的最小正周期是  $\frac{\pi}{2}$ .

**【分析】**用二倍角公式可得  $f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2}$ , 然后用周期公式求出周期即可.

**【解答】**解:  $\because f(x) = \sin^2(2x)$ ,

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的周期 } T = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\pi}{2}.$$

**【点评】**本题考查了三角函数的图象与性质, 关键是合理使用二倍角公式, 属基础题.

10. (5 分) 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_2 = -3$ ,  $S_5 = -10$ , 则  $a_5 = \underline{0}$ ,  $S_n$  的最小值为 -10.

**【分析】**利用等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和公式、通项公式列出方程组, 能求出  $a_1 = -4$ ,  $d =$

1, 由此能求出  $a_5$  的  $S_n$  的最小值.

**【解答】**解: 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_2 = -3$ ,  $S_5 = -10$ ,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + d = -3 \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = -10 \end{cases},$$

解得  $a_1 = -4$ ,  $d = 1$ ,

$$\therefore a_5 = a_1 + 4d = -4 + 4 \times 1 = 0,$$

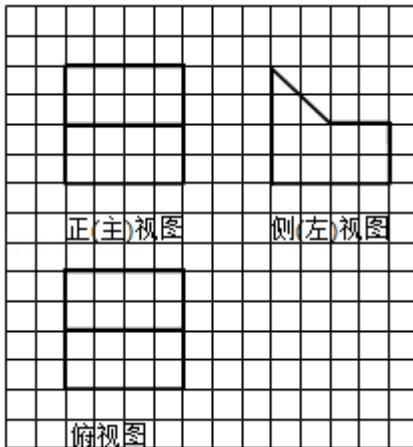
$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -4n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n - \frac{9}{2})^2 - \frac{81}{8},$$

$\therefore n=4$  或  $n=5$  时,  $S_n$  取最小值为  $S_4 = S_5 = -10$ .

故答案为: 0, -10.

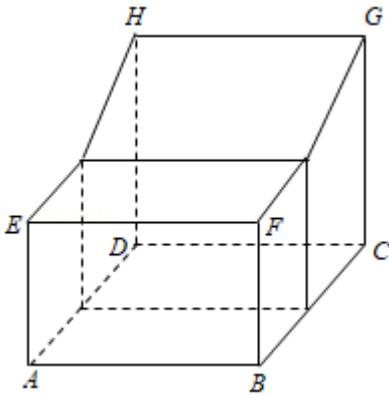
**【点评】**本题考查等差数列的第 5 项的求法, 考查等差数列的前  $n$  项和的最小值的求法, 考查等差数列的性质等基础知识, 考查推理能力与计算能力, 属于基础题.

11. (5 分) 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为 40.



**【分析】**由三视图还原原几何体, 然后利用一个长方体与一个棱柱的体积作和求解.

**【解答】**解: 由三视图还原原几何体如图,



该几何体是把棱长为 4 的正方体去掉一个四棱柱，

$$\text{则该几何体的体积 } V = 4 \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} (2+4) \times 2 \times 4 = 40.$$

故答案为：40.

**【点评】**本题考查由三视图求面积、体积，关键是由三视图还原原几何体，是中档题.

12. (5分) 已知  $l, m$  是平面  $\alpha$  外的两条不同直线. 给出下列三个论断：

- ①  $l \perp m$ ; ②  $m \parallel \alpha$ ; ③  $l \perp \alpha$ .

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：若  $l \perp \alpha, l \perp m$ ，则  $m \parallel \alpha$ .

**【分析】**由  $l, m$  是平面  $\alpha$  外的两条不同直线，利用线面平行的判定定理得若  $l \perp \alpha, l \perp m$ ，则  $m \parallel \alpha$ .

**【解答】**解：由  $l, m$  是平面  $\alpha$  外的两条不同直线，知：

由线面平行的判定定理得：

若  $l \perp \alpha, l \perp m$ ，则  $m \parallel \alpha$ .

故答案为：若  $l \perp \alpha, l \perp m$ ，则  $m \parallel \alpha$ .

**【点评】**本题考查满足条件的真命题的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于中档题.

13. (5分) 设函数  $f(x) = e^x + ae^{-x}$  ( $a$  为常数). 若  $f(x)$  为奇函数，则  $a = \underline{-1}$ ；若  $f(x)$  是  $R$  上的增函数，则  $a$  的取值范围是 ( $-\infty, 0]$ ).

**【分析】**对于第一空：由奇函数的定义可得  $f(-x) = -f(x)$ ，即  $e^{-x} + ae^x = - (e^x + ae^{-x})$ ，变形可得分析可得  $a$  的值，即可得答案；

对于第二空：求出函数的导数，由函数的导数与单调性的关系分析可得  $f(x)$  的导数  $f'(x) = e^x - ae^{-x} \geq 0$  在  $R$  上恒成立，变形可得： $a \leq e^{2x}$  恒成立，据此分析可得答案.

**【解答】**解：根据题意，函数  $f(x) = e^x + ae^{-x}$ ,

若  $f(x)$  为奇函数，则  $f(-x) = -f(x)$ ，即  $e^{-x} + ae^x = - (e^x + ae^{-x})$ ，变形可得  $a = -1$ ，

函数  $f(x) = e^x + ae^{-x}$ ，导数  $f'(x) = e^x - ae^{-x}$

若  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的增函数，则  $f(x)$  的导数  $f'(x) = e^x - ae^{-x} \geq 0$  在  $\mathbb{R}$  上恒成立，

变形可得： $a \leq e^{2x}$  恒成立，分析可得  $a \leq 0$ ，即  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 0]$ ；

故答案为：-1， $(-\infty, 0]$ .

**【点评】**本题考查函数的奇偶性与单调性的判定，关键是理解函数的奇偶性与单调性的定义，属于基础题.

14. (5分) 李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为60元/盒、65元/盒、80元/盒、90元/盒。为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到120元，顾客就少付  $x$  元。每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的80%.

①当  $x=10$  时，顾客一次购买草莓和西瓜各1盒，需要支付 130 元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则  $x$  的最大值为 15。

**【分析】**①由题意可得顾客一次购买的总金额，减去  $x$ ，可得所求值；

②在促销活动中，设订单总金额为  $m$  元，可得  $(m - x) \times 80\% \geq m \times 70\%$ ，解不等式，结合恒成立思想，可得  $x$  的最大值。

**【解答】**解：①当  $x=10$  时，顾客一次购买草莓和西瓜各1盒，可得  $60+80=140$  (元)，即有顾客需要支付  $140 - 10=130$  (元)；

②在促销活动中，设订单总金额为  $m$  元，

可得  $(m - x) \times 80\% \geq m \times 70\%$ ，

即有  $x \leq \frac{m}{8}$ ，

由题意可得  $m \geq 120$ ，

可得  $x \leq \frac{120}{8} = 15$ ，

则  $x$  的最大值为 15 元。

故答案为：130，15

**【点评】**本题考查不等式在实际问题的应用，考查化简运算能力，属于中档题.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (13 分) 在  $\triangle ABC$  中， $a=3$ ,  $b - c=2$ ,  $\cos B = -\frac{1}{2}$ .

( I ) 求  $b$ ,  $c$  的值；

( II ) 求  $\sin(B - C)$  的值.

**【分析】**( I ) 利用余弦定理可得  $b^2=a^2+c^2-2accosB$ , 代入已知条件即可得到关于  $b$  的方程，解方程即可；

( II )  $\sin(B - C) = \sin B \cos C - \cos B \sin C$ , 根据正弦定理可求出  $\sin C$ , 然后求出  $\cos C$ , 代入即可得解.

**【解答】**解：( I )  $\because a=3$ ,  $b - c=2$ ,  $\cos B = -\frac{1}{2}$ .

$\therefore$  由余弦定理，得  $b^2=a^2+c^2-2accosB$

$$=9+(b-2)^2-2\times 3\times(b-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore b=7, \therefore c=b-2=5;$$

( II ) 在  $\triangle ABC$  中， $\cos B = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

由正弦定理有： $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ ,

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$\because b > c$ ,  $\therefore B > C$ ,  $\therefore C$  为锐角,

$$\therefore \cos C = \frac{11}{14},$$

$$\therefore \sin(B - C) = \sin B \cos C - \cos B \sin C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

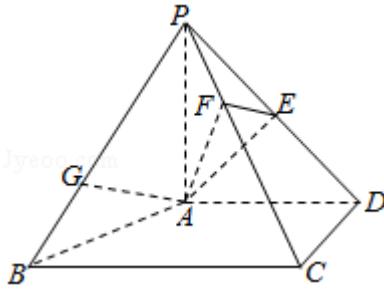
**【点评】**本题考查了正弦定理余弦定理和两角差的正弦公式，属基础题.

16. (14 分) 如图，在四棱锥  $P - ABCD$  中， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \perp CD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $PA = AD = CD = 2$ ,  $BC = 3$ .  $E$  为  $PD$  的中点，点  $F$  在  $PC$  上，且  $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$ .

( I ) 求证： $CD \perp$  平面  $PAD$ ;

( II ) 求二面角  $F - AE - P$  的余弦值;

(III) 设点  $G$  在  $PB$  上, 且  $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$ . 判断直线  $AG$  是否在平面  $AEF$  内, 说明理由.



**【分析】**(I) 推导出  $PA \perp CD$ ,  $AD \perp CD$ , 由此能证明  $CD \perp$  平面  $PAD$ .

(II) 以  $A$  为原点, 在平面  $ABCD$  内过  $A$  作  $CD$  的平行线为  $x$  轴,  $AD$  为  $y$  轴,  $AP$  为  $z$  轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法能求出二面角  $F - AE - P$  的余弦值.

(III) 求出  $\overrightarrow{AG} = (\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3})$ , 平面  $AEF$  的法向量  $\vec{n} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{m} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$ , 从而直线  $AG$  在平面  $AEF$  内.

**【解答】** 证明: (I)  $\because PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore PA \perp CD$ ,

$\because AD \perp CD$ ,  $PA \cap AD = A$ ,

$\therefore CD \perp$  平面  $PAD$ .

解: (II) 以  $A$  为原点, 在平面  $ABCD$  内过  $A$  作  $CD$  的平行线为  $x$  轴,

$AD$  为  $y$  轴,  $AP$  为  $z$  轴, 建立空间直角坐标系,

$$A(0, 0, 0), E(0, 1, 1), F(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}),$$

$$P(0, 0, 2), B(2, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{AE} = (0, 1, 1), \overrightarrow{AF} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}),$$

$$\text{平面 } AEP \text{ 的法向量 } \vec{n} = (1, 0, 0),$$

$$\text{设平面 } AEF \text{ 的法向量 } \vec{m} = (x, y, z),$$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = y + z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = 1, \text{ 得 } \vec{m} = (1, 1, -1),$$

设二面角  $F - AE - P$  的平面角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \text{二面角 } F - AE - P \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(III) 直线  $AG$  在平面  $AEF$  内, 理由如下:

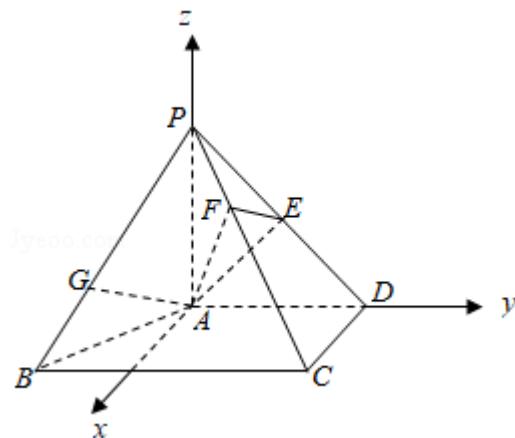
$$\because \text{点 } G \text{ 在 } PB \text{ 上, 且 } \frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}. \therefore G(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),$$

$\because$  平面  $AEF$  的法向量  $\vec{n} = (1, 1, -1)$ ,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0,$$

故直线  $AG$  在平面  $AEF$  内.



**【点评】**本题考查线面垂直的证明, 考查二面角的余弦值的求法, 考查直线是否在已知平面内的判断与求法, 考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识, 考查推理能力与计算能力, 属于中档题.

17. (13分) 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月  $A$ ,  $B$  两种移动支付方式的使用情况, 从全校学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中  $A$ ,  $B$  两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用  $A$  和仅使用  $B$  的学生的支付金额分布情况如下:

支付方式 \ 支付金额 (元)	(0, 1000]	(1000, 2000]	大于 2000
支付方式			
仅使用 $A$	18 人	9 人	3 人
仅使用 $B$	10 人	14 人	1 人

(I) 从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月  $A$ ,  $B$  两种支付方式都使用的概率;

(II) 从样本仅使用  $A$  和仅使用  $B$  的学生中各随机抽取 1 人, 以  $X$  表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数, 求  $X$  的分布列和数学期望;

(III) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用  $A$  的学生中, 随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元. 根据抽查结果, 能否认为样本仅使用  $A$  的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

**【分析】**(I) 从全校所有的 1000 名学生中随机抽取的 100 人中,  $A$ ,  $B$  两种支付方式都不使用的有 5 人, 仅使用  $A$  的有 30 人, 仅使用  $B$  的有 25 人, 从而  $A$ ,  $B$  两种支付方式都使用的人数有 40 人, 由此能求出从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月  $A$ ,  $B$  两种支付方式都使用的概率.

(II) 从样本仅使用  $A$  和仅使用  $B$  的学生中各随机抽取 1 人, 以  $X$  表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数, 则  $X$  的可能取值为 0, 1, 2, 分别求出相应的概率, 由此能求出  $X$  的分布列和数学期望  $E(X)$ .

(III) 从样本仅使用  $A$  的学生有 30 人, 其中 27 人月支付金额不大于 2000 元, 有 3 人月支付金额大于 2000 元, 随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元的概率

为  $p = \frac{C_3^3}{C_{30}^3} = \frac{1}{4060}$ , 不能认为样本仅使用  $A$  的学生中本月支付金额大于 2000 元的

人数有变化.

**【解答】**解: (I) 由题意得:

从全校所有的 1000 名学生中随机抽取的 100 人中,

$A$ ,  $B$  两种支付方式都不使用的有 5 人,

仅使用  $A$  的有 30 人, 仅使用  $B$  的有 25 人,

$\therefore A$ ,  $B$  两种支付方式都使用的人数有:  $100 - 5 - 30 - 25 = 40$ ,

$\therefore$  从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月  $A$ ,  $B$  两种支付方式都使用的概率  $p = \frac{40}{100} = 0.4$ .

(II) 从样本仅使用  $A$  和仅使用  $B$  的学生中各随机抽取 1 人, 以  $X$  表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数,

则  $X$  的可能取值为 0, 1, 2,

样本仅使用  $A$  的学生有 30 人, 其中支付金额在  $(0, 1000]$  的有 18 人, 超过 1000 元的有 12 人,

样本仅使用  $B$  的学生有 25 人, 其中支付金额在  $(0, 1000]$  的有 10 人, 超过 1000 元的有 15 人,

$$P(X=0) = \frac{18}{30} \times \frac{10}{25} = \frac{180}{750} = \frac{6}{25},$$

$$P(X=1) = \frac{18}{30} \times \frac{15}{25} + \frac{12}{30} \times \frac{10}{25} = \frac{390}{750} = \frac{13}{25},$$

$$P(X=2) = \frac{12}{30} \times \frac{15}{25} = \frac{180}{750} = \frac{6}{25},$$

$\therefore X$  的分布列为:

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{6}{25} + 1 \times \frac{13}{25} + 2 \times \frac{6}{25} = 1.$$

(III) 不能认为样本仅使用  $A$  的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化,

理由如下:

从样本仅使用  $A$  的学生有 30 人, 其中 27 人月支付金额不大于 2000 元, 有 3 人月支付金额大于 2000 元,

随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元的概率为  $p = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{1}{4060}$ ,

虽然概率较小, 但发生的可能性为  $\frac{1}{4060}$ .

故不能认为样本仅使用  $A$  的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化.

**【点评】**本题考查概率、离散型随机变量的分布列、数学期望的求法, 考查古典概型、相互独立事件概率乘法公式等基础知识, 考查推理能力与计算能力, 是中档题.

18. (14 分) 已知抛物线  $C: x^2 = -2py$  经过点  $(2, -1)$ .

(I) 求抛物线  $C$  的方程及其准线方程;

(II) 设  $O$  为原点, 过抛物线  $C$  的焦点作斜率不为 0 的直线  $l$  交抛物线  $C$  于两点  $M, N$ , 直线  $y = -1$  分别交直线  $OM, ON$  于点  $A$  和点  $B$ . 求证: 以  $AB$  为直径的圆经过  $y$  轴上的两个定点.

**【分析】**(I) 代入点  $(2, -1)$ , 解方程可得  $p$ , 求得抛物线的方程和准线方程;

(II) 抛物线  $x^2 = -4y$  的焦点为  $F(0, -1)$ , 设直线方程为  $y = kx - 1$ , 联立抛物线方程, 运用韦达定理, 以及直线的斜率和方程, 求得  $A, B$  的坐标, 可得  $AB$  为直径的圆方程, 可令  $x=0$ , 解方程, 即可得到所求定点.

**【解答】**解: (I) 抛物线  $C: x^2 = -2py$  经过点  $(2, -1)$ . 可得  $4 = 2p$ , 即  $p = 2$ ,

可得抛物线  $C$  的方程为  $x^2 = -4y$ , 准线方程为  $y=1$ ;

(II) 证明: 抛物线  $x^2 = -4y$  的焦点为  $F(0, -1)$ ,

设直线方程为  $y=kx-1$ , 联立抛物线方程, 可得  $x^2+4kx-4=0$ ,

设  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ ,

可得  $x_1+x_2=-4k$ ,  $x_1x_2=-4$ ,

直线  $OM$  的方程为  $y=\frac{y_1}{x_1}x$ , 即  $y=-\frac{x_1}{4}x$ ,

直线  $ON$  的方程为  $y=\frac{y_2}{x_2}x$ , 即  $y=-\frac{x_2}{4}x$ ,

可得  $A(\frac{4}{x_1}, -1)$ ,  $B(\frac{4}{x_2}, -1)$ ,

可得  $AB$  的中点的横坐标为  $2(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})=2\cdot\frac{-4k}{-4}=2k$ ,

即有  $AB$  为直径的圆心为  $(2k, -1)$ ,

半径为  $\frac{|AB|}{2}=\frac{1}{2}|\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}|=2\cdot\frac{\sqrt{16k^2+16}}{4}=2\sqrt{1+k^2}$ ,

可得圆的方程为  $(x-2k)^2+(y+1)^2=4(1+k^2)$ ,

化为  $x^2-4kx+(y+1)^2=4$ ,

由  $x=0$ , 可得  $y=1$  或  $-3$ .

则以  $AB$  为直径的圆经过  $y$  轴上的两个定点  $(0, 1)$ ,  $(0, -3)$ .

**【点评】**本题考查抛物线的定义和方程、性质, 以及圆方程的求法, 考查直线和抛物线方程联立, 运用韦达定理, 考查化简整理的运算能力, 属于中档题.

19. (13 分) 已知函数  $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$ .

(I) 求曲线  $y=f(x)$  的斜率为 1 的切线方程;

(II) 当  $x \in [-2, 4]$  时, 求证:  $x-6 \leq f(x) \leq x$ ;

(III) 设  $F(x)=|f(x)-(x+a)|$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), 记  $F(x)$  在区间  $[-2, 4]$  上的最大值为  $M(a)$ . 当  $M(a)$  最小时, 求  $a$  的值.

**【分析】**(I) 求导数  $f'(x)$ , 由  $f'(x)=1$  求得切点, 即可得点斜式方程;

(II) 把所证不等式转化为  $-6 \leq f(x)-x \leq 0$ , 再令  $g(x)=f(x)-x$ , 利用导数研究  $g(x)$  在  $[-2, 4]$  的单调性和极值点即可得证;

(III) 先把  $F(x)$  化为  $|g(x)-a|$ , 再利用 (II) 的结论, 引进函数  $h(t)=|t-a|$ , 结

合绝对值函数的对称性，单调性，通过对称轴  $t=a$  与  $-3$  的关系分析即可.

【解答】解：( I )  $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$ ,

由  $f'(x) = 1$  得  $x(x - \frac{8}{3}) = 0$ ,

得  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{8}{3}$ .

又  $f(0) = 0$ ,  $f(\frac{8}{3}) = \frac{8}{27}$ ,

$\therefore y=x$  和  $y = \frac{8}{27} = x - \frac{8}{3}$ ,

即  $y=x$  和  $y = x - \frac{64}{27}$ ;

( II ) 证明：欲证  $x - 6 \leq f(x) \leq x$ ,

只需证  $-6 \leq f(x) - x \leq 0$ ,

令  $g(x) = f(x) - x = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ ,  $x \in [-2, 4]$ ,

则  $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x = \frac{3}{4}x(x - \frac{8}{3})$ ,

可知  $g'(x)$  在  $[-2, 0]$  为正，在  $(0, \frac{8}{3})$  为负，在  $[\frac{8}{3}, 4]$  为正，

$\therefore g(x)$  在  $[-2, 0]$  递增，在  $[0, \frac{8}{3}]$  递减，在  $[\frac{8}{3}, 4]$  递增，

又  $g(-2) = -6$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(\frac{8}{3}) = -\frac{64}{27} > -6$ ,  $g(4) = 0$ ,

$\therefore -6 \leq g(x) \leq 0$ ,

$\therefore x - 6 \leq f(x) \leq x$ ;

(III) 由 (II) 可得，

$$F(x) = |f(x) - (x+a)|$$

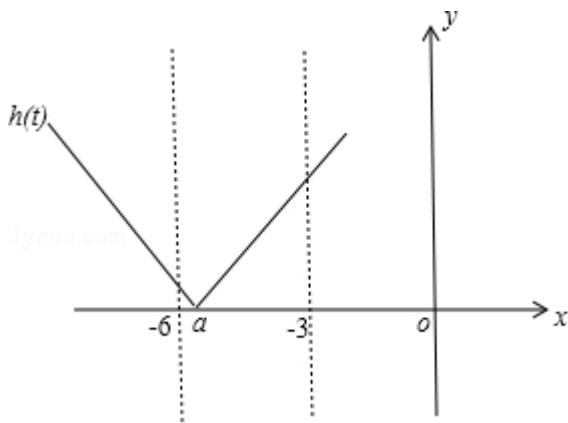
$$= |f(x) - x - a|$$

$$= |g(x) - a|$$

$\because$  在  $[-2, 4]$  上， $-6 \leq g(x) \leq 0$ ,

令  $t = g(x)$ ,  $h(t) = |t - a|$ ,

则问题转化为当  $t \in [-6, 0]$  时， $h(t)$  的最大值  $M(a)$  的问题了，



①当  $a \leq -3$  时,  $M(a) = h(0) = |a| = -a$ ,

此时  $-a \geq 3$ , 当  $a = -3$  时,  $M(a)$  取得最小值 3;

②当  $a \geq -3$  时,  $M(a) = h(-6) = |-6 - a| = |6 + a|$ ,

$\because 6 + a \geq 3$ ,  $\therefore M(a) = 6 + a$ ,

也是  $a = -3$  时,  $M(a)$  最小为 3.

综上, 当  $M(a)$  取最小值时  $a$  的值为 -3.

**【点评】**此题考查了导数的综合应用, 构造法, 转化法, 数形结合法等, 难度较大.

20. (13 分) 已知数列  $\{a_n\}$ , 从中选取第  $i_1$  项、第  $i_2$  项、 $\cdots$ 、第  $i_m$  项 ( $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ ), 若  $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_m}$ , 则称新数列  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$  为  $\{a_n\}$  的长度为  $m$  的递增子列. 规定: 数列  $\{a_n\}$  的任意一项都是  $\{a_n\}$  的长度为 1 的递增子列.

(I) 写出数列 1, 8, 3, 7, 5, 6, 9 的一个长度为 4 的递增子列;

(II) 已知数列  $\{a_n\}$  的长度为  $p$  的递增子列的末项的最小值为  $a_{n_0}$ , 长度为  $q$  的递增子列的末项的最小值为  $a_{n_0}$ . 若  $p < q$ , 求证:  $a_{n_0} < a_{n_0}$ ;

(III) 设无穷数列  $\{a_n\}$  的各项均为正整数, 且任意两项均不相等. 若  $\{a_n\}$  的长度为  $s$  的递增子列末项的最小值为  $2s - 1$ , 且长度为  $s$  末项为  $2s - 1$  的递增子列恰有  $2^{s-1}$  个 ( $s = 1, 2, \dots$ ), 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

**【分析】**(I) 1, 3, 5, 6. 答案不唯一.

(II) 考虑长度为  $q$  的递增子列的前  $p$  项可以组成长度为  $p$  的一个递增子列, 可得  $a_{n_0} >$ 该

数列的第  $p$  项  $\geq a_{n_0}$ , 即可证明结论.

(III) 考虑  $2s - 1$  与  $2s$  这一组数在数列中的位置. 若  $\{a_n\}$  中有  $2s$ , 在  $2s$  在  $2s - 1$  之后, 则必然在长度为  $s+1$ , 且末项为  $2s$  的递增子列, 这与长度为  $s$  的递增子列末项的最小值为  $2s - 1$  矛盾, 可得  $2s$  必在  $2s - 1$  之前. 继续考虑末项为  $2s+1$  的长度为  $s+1$  的递增子

列. 因此对于数列  $2n - 1, 2n$ , 由于  $2n$  在  $2n - 1$  之前, 可得研究递增子列时, 不可同时取  $2n$  与  $2n - 1$ , 即可得出: 递增子列最多有  $2^s$  个. 由题意, 这  $s$  组数列对全部存在于原数列中, 并且全在  $2s+1$  之前. 可得  $2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots$ , 是唯一构造.

【解答】解: (I)  $1, 3, 5, 6$ .

(II) 证明: 考虑长度为  $q$  的递增子列的前  $p$  项可以组成长度为  $p$  的一个递增子列,

$$\therefore a_{n_0} > \text{该数列的第 } p \text{ 项} \geq a_{m_0},$$

$$\therefore a_{m_0} < a_{n_0}.$$

(III) 解: 考虑  $2s - 1$  与  $2s$  这一组数在数列中的位置.

若  $\{a_n\}$  中有  $2s$ , 在  $2s$  在  $2s - 1$  之后, 则必然在长度为  $s+1$ , 且末项为  $2s$  的递增子列, 这与长度为  $s$  的递增子列末项的最小值为  $2s - 1$  矛盾,  $\therefore 2s$  必在  $2s - 1$  之前.

继续考虑末项为  $2s+1$  的长度为  $s+1$  的递增子列.

$\because$  对于数列  $2n - 1, 2n$ , 由于  $2n$  在  $2n - 1$  之前,  $\therefore$  研究递增子列时, 不可同时取  $2n$  与  $2n - 1$ ,

$\because$  对于 1 至  $2s$  的所有整数, 研究长度为  $s+1$  的递增子列时, 第 1 项是 1 与 2 二选 1, 第 2 项是 3 与 4 二选 1,  $\dots$ , 第  $s$  项是  $2s - 1$  与  $2s$  二选 1,

故递增子列最多有  $2^s$  个. 由题意, 这  $s$  组数列对全部存在于原数列中, 并且全在  $2s+1$  之前.

$\therefore 2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots$ , 是唯一构造.

即  $a_{2k}=2k - 1, a_{2k-1}=2k, k \in \mathbb{N}^*$ .

【点评】本题考查了数列递推关系、数列的单调性, 考查了逻辑推理能力、分析问题与解决问题的能力, 属于难题.