

## 2016年天津市高考数学试卷（理科）

### 一、选择题

1. （5分）（2016•天津）已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $B=\{y|y=3x-2, x\in A\}$ ，则 $A\cap B=$ （ ）

A.  $\{1\}$  B.  $\{4\}$  C.  $\{1, 3\}$  D.  $\{1, 4\}$

2. （5分）（2016•天津）设变量 $x, y$ 满足约束条件
$$\begin{cases} x-y+2\geq 0 \\ 2x+3y-6\geq 0 \\ 3x+2y-9\leq 0 \end{cases}$$
，则目标函数 $z=2x+5y$

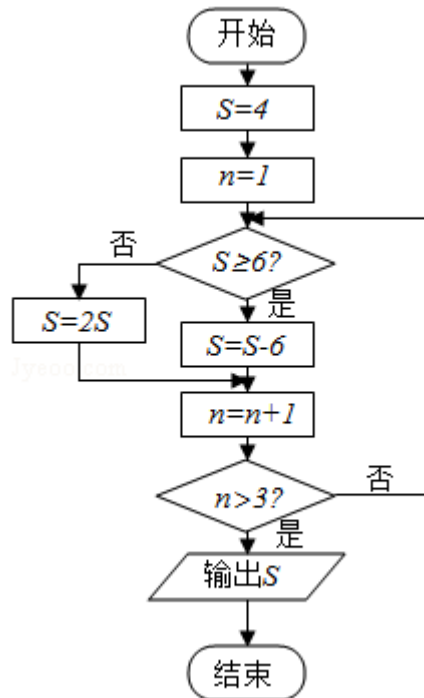
的最小值为（ ）

A. -4 B. 6 C. 10 D. 17

3. （5分）（2016•天津）在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=\sqrt{13}$ ， $BC=3$ ， $\angle C=120^\circ$ ，则 $AC=$ （ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. （5分）（2016•天津）阅读如图的程序图，运行相应的程序，则输出 $S$ 的值为（ ）



A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

5. （5分）（2016•天津）设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列，公比为 $q$ ，则“ $q<0$ ”是“对任意的正整数 $n$ ， $a_{2n-1}+a_{2n}<0$ ”的（ ）

A. 充要条件 B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

6. （5分）（2016•天津）已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b>0$ )，以原点为圆心，双曲线的实

半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于A, B, C, D四点，四边形ABCD的面积为 $2b$ ，则双曲线的方程为（ ）

A.  $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$  B.  $\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{3} = 1$  C.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$  D.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

7. (5分) (2016•天津) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形, 点D、E分别是边AB、BC的中点, 连接DE并延长到点F, 使得 $DE=2EF$ , 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ( )

A.  $-\frac{5}{8}$  B.  $\frac{1}{8}$  C.  $\frac{1}{4}$  D.  $\frac{11}{8}$

8. (5分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$  ( $a > 0$ , 且 $a \neq 1$ )

在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 且关于 $x$ 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 $a$ 的取值范围是 ( )

A.  $(0, \frac{2}{3}]$  B.  $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$  C.  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup \{\frac{3}{4}\}$  D.  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{\frac{3}{4}\}$

## 二、填空题

9. (5分) (2016•天津) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i$ 是虚数单位, 若 $(1+i)(1-bi) = a$ , 则 $\frac{a}{b}$ 的值为

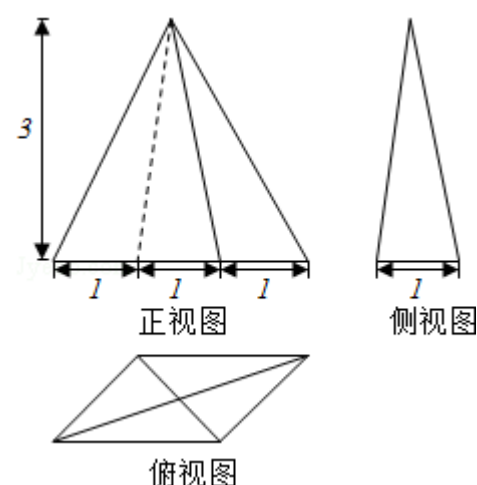
.

10. (5分) (2016•天津)  $(x^2 - \frac{1}{x})^8$ 的展开式中 $x^7$ 的系数为\_\_\_\_\_

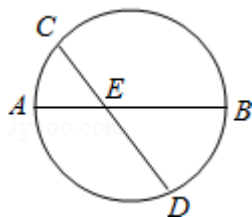
(用数字作答)

11. (5分) (2016•天津) 已知一个四棱锥的底面是平行四边形, 该四棱锥的三视图如图所示(单位: m), 则该四棱锥的体积为

\_\_\_\_\_  $m^3$



12. (5分) (2016•天津) 如图, AB是圆的直径, 弦CD与AB相交于点E,  $BE=2AE=2$ ,  $BD=ED$ , 则线段CE的长为\_\_\_\_\_.



13. (5分) (2016•天津) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 若实数 $a$ 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$ , 则 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. (5分) (2016•天津) 设抛物线 $\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$  ( $t$ 为参数,  $p>0$ ) 的焦点为 $F$ , 准线为 $l$ ,

过抛物线上一点 $A$ 作 $l$ 的垂线, 垂足为 $B$ , 设 $C(\frac{7}{2}p, 0)$ ,  $AF$ 与 $BC$ 相交于点 $E$ . 若 $|CF|=2|AF|$ , 且 $\triangle ACE$ 的面积为 $3\sqrt{2}$ , 则 $p$ 的值为\_\_\_\_\_.

### 三、计算题

15. (13分) (2016•天津) 已知函数 $f(x) = 4\tan x \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}$ .

(1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调性.

16. (13分) (2016•天津) 某小组共10人, 利用假期参加义工活动, 已知参加义工活动次数为1, 2, 3的人数分别为3, 3, 4, 现从这10人中随机选出2人作为该组代表参加座谈会.

(1) 设 $A$ 为事件“选出的2人参加义工活动次数之和为4”, 求事件 $A$ 发生的概率;

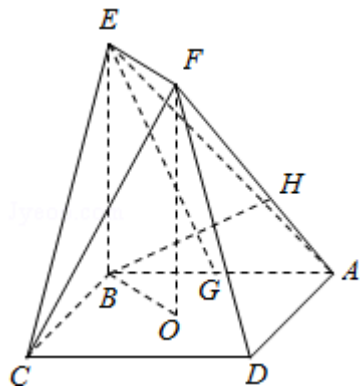
(2) 设 $X$ 为选出的2人参加义工活动次数之差的绝对值, 求随机变量 $X$ 的分布列和数学期望.

17. (13分) (2016•天津) 如图, 正方形 $ABCD$ 的中心为 $O$ , 四边形 $OBEF$ 为矩形, 平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$ , 点 $G$ 为 $AB$ 的中点,  $AB=BE=2$ .

(1) 求证:  $EG \parallel$  平面 $ADF$ ;

(2) 求二面角 $O-EF-C$ 的正弦值;

(3) 设 $H$ 为线段 $AF$ 上的点, 且 $AH = \frac{2}{3}HF$ , 求直线 $BH$ 和平面 $CEF$ 所成角的正弦值.



18. (13分) (2016•天津) 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, 公差为 $d$ , 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $b_n$ 是 $a_n$ 和 $a_{n+1}$ 的等比中项.

(1) 设  $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , 求证: 数列  $\{c_n\}$  是等差数列;

(2) 设  $a_1 = d$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 求证:  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$ .

19. (14分) (2016•天津) 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$  ( $a > \sqrt{3}$ ) 的右焦点为F, 右顶点为A. 已知

$$\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|},$$

其中O为原点, e为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点A的直线l与椭圆交于点B (B不在x轴上), 垂直于l的直线与l交于点M, 与y轴于点H, 若  $BF \perp HF$ , 且  $\angle MOA \leq \angle MAO$ , 求直线l的斜率的取值范围.

20. (14分) (2016•天津) 设函数  $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 其中a, b  $\in \mathbb{R}$ .

(1) 求f(x)的单调区间;

(2) 若f(x)存在极值点 $x_0$ , 且  $f(x_1) = f(x_0)$ , 其中  $x_1 \neq x_0$ , 求证:  $x_1 + 2x_0 = 3$ ;

(3) 设  $a > 0$ , 函数  $g(x) = |f(x)|$ , 求证: g(x)在区间[0, 2]上的最大值不小于  $\frac{1}{4}$ .