

2012 年陕西省高考理科数学试题

一、选择题

1. 集合 $M = \{x | \lg x > 0\}$, $N = \{x | x^2 \leq 4\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$
- A. $(1, 2)$ B. $[1, 2)$ C. $(1, 2]$ D. $[1, 2]$
2. 下列函数中, 既是奇函数又是增函数的为 (\quad)
- A. $y = x + 1$ B. $y = -x^2$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = x|x|$
3. 设 $a, b \in R$, i 是虚数单位, 则 “ $ab = 0$ ” 是 “复数 $a + \frac{b}{i}$ 为纯虚数” 的 (\quad)
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$, l 过点 $P(3, 0)$ 的直线, 则 (\quad)
- A. l 与 C 相交 B. l 与 C 相切 C. l 与 C 相离 D. 以上三个选项均有可能
5. 如图, 在空间直角坐标系中有直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $CA=CC_1=2CB$, 则直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角的余弦值为 (\quad)
- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{3}{5}$
-
6. 从甲乙两个城市分别随机抽取 16 台自动售货机, 对其销售额进行统计, 统计数据用茎叶图表示 (如图所示), 设甲乙两组数据的平均数分别为 $\bar{x}_甲$, $\bar{x}_乙$, 中位数分别为 $m_甲$, $m_乙$, 则 (\quad)
- A. $\bar{x}_甲 < \bar{x}_乙$, $m_甲 > m_乙$
B. $\bar{x}_甲 < \bar{x}_乙$, $m_甲 < m_乙$
C. $\bar{x}_甲 > \bar{x}_乙$, $m_甲 > m_乙$
D. $\bar{x}_甲 > \bar{x}_乙$, $m_甲 < m_乙$
- | 甲 | | 乙 | |
|---|------|---|-------|
| 8 | 65 | 0 | |
| 8 | 8400 | 1 | 028 |
| 7 | 52 | 2 | 02337 |
| 8 | 00 | 3 | 12448 |
| 3 | 1 | 4 | 238 |

7. 设函数 $f(x) = xe^x$, 则 ()
- A. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点 B. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点
 C. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点 D. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点
8. 两人进行乒乓球比赛, 先赢三局者获胜, 决出胜负为止, 则所有可能出现的情形(各人输赢局次的不同视为不同情形)共有()
- A. 10 种 B. 15 种 C. 20 种 D. 30 种
9. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边长分别为 a, b, c , 若 $a^2 + b^2 = 2c^2$, 则 $\cos C$ 的最小值为()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
10. 右图是用模拟方法估计圆周率 π 的程序框图, P 表示估计结果, 则图中空白框内应填入()
- A. $P = \frac{N}{1000}$
 B. $P = \frac{4N}{1000}$
 C. $P = \frac{M}{1000}$
 D. $P = \frac{4M}{1000}$
-
- ```

graph TD
 Start([开始]) --> Init[M=0, N=0, i=1]
 Init --> Generate[产生0~1之间的两个随机数分别赋给xi, yi]
 Generate --> Cond{xi2 + yi2 ≤ 1}
 Cond -- 是 --> CountM[M=M+1]
 CountM --> CountN[N=N+1]
 CountN --> NextI[i=i+1]
 NextI --> Cond
 Cond -- 否 --> NextI
 NextI --> EndI{i > 1000}
 EndI -- 是 --> OutputP[P=M/N]
 OutputP --> End([结束])

```

二. 填空题: 把答案填写在答题卡相应的题号后的横线上(本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 观察下列不等式

$$1 + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{5}{3},$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} < \frac{7}{4}$$

.....

照此规律, 第五个不等式为\_\_\_\_\_。

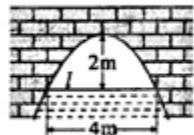
12.  $(a+x)^5$  展开式中  $x^2$  的系数为 10, 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_。

13. 右图是抛物线形拱桥, 当水面在  $l$  时, 拱顶离水面 2 米, 水面宽 4 米, 水位下降 1 米后,

水面宽\_\_\_\_\_米。

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ -2x-1, & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $D$  是由  $x$  轴和曲线  $y=f(x)$

及该曲线在点  $(1, 0)$  处的切线所围成的封闭区域，则  $z=x-2y$  在  $D$  上的最大值为\_\_\_\_\_。

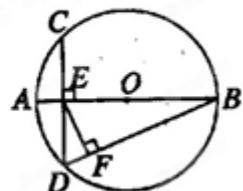


15. (考生注意：请在下列三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题评分)

A. (不等式选做题) 若存在实数  $\alpha$  使  $|x-\alpha|+|x-1|\leq 3$  成立，

则实数  $\alpha$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

B. (几何证明选做题) 如图，在圆  $O$  中，直径  $AB$  与弦  $CD$  垂直，垂足为  $E$ ， $EF \perp DB$ ，垂足为  $F$ ，若  $AB=6$ ， $AE=1$ ，则  $DF \cdot DB =$ \_\_\_\_\_。



C. (坐标系与参数方程) 直线  $2\rho \cos \theta = 1$  与圆  $\rho = 2 \cos \theta$  相交的弦长为\_\_\_\_\_。

### 三、解答题

16. (本小题满分 12 分)

函数  $f(x) = A \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + 1$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 的最大值为 3，其图像相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ ，

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式；

(2) 设  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则  $f(\frac{\alpha}{2}) = 2$ ，求  $\alpha$  的值。

17. (本小题满分 12 分)

设  $\{\alpha_n\}$  的公比不为 1 的等比数列，其前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $\alpha_5, \alpha_3, \alpha_4$  成等差数列。

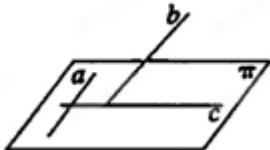
(1) 求数列  $\{\alpha_n\}$  的公比；

(2) 证明：对任意  $k \in N_+$ ， $S_{k+2}, S_k, S_{k+1}$  成等差数列。

18. (本小题满分 12 分)

(1) 如图，证明命题“ $a$  是平面  $\pi$  内的一条直线， $b$  是  $\pi$  外的一条直线 ( $b$  不垂直于  $\pi$ )， $c$  是直线  $b$  在  $\pi$  上的投影，若  $a \perp b$ ，则  $a \perp c$ ”为真。

(2) 写出上述命题的逆命题，并判断其真假 (不需要证明)



19. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 椭圆  $C_2$  以  $C_1$  的长轴为短轴, 且与  $C_1$  有相同的离心率。

(1) 求椭圆  $C_2$  的方程;

(2) 设  $O$  为坐标原点, 点  $A, B$  分别在椭圆  $C_1$  和  $C_2$  上,  $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ , 求直线  $AB$  的方程。

20. (本小题满分 13 分)

某银行柜台设有一个服务窗口, 假设顾客办理业务所需的时间互相独立, 且都是整数分钟, 对以往顾客办理业务所需的时间统计结果如下:

|              |     |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 办理业务所需的时间(分) | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
| 频 率          | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.1 | 0.1 |

从第一个顾客开始办理业务时计时。

(1) 估计第三个顾客恰好等待 4 分钟开始办理业务的概率;

(2)  $X$  表示至第 2 分钟末已办理完业务的顾客人数, 求  $X$  的分布列及数学期望。

21. (本小题满分 14 分)

设函数  $f_n(x) = x^n + bx + c$  ( $n \in N_+, b, c \in R$ )

(1) 设  $n \geq 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = -1$ , 证明:  $f_n(x)$  在区间  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  内存在唯一的零点;

(2) 设  $n = 2$ , 若对任意  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ , 有  $|f_2(x_1) - f_2(x_2)| \leq 4$ , 求  $b$  的取值范围;

(3) 在 (1) 的条件下, 设  $x_n$  是  $f_n(x)$  在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  内的零点, 判断数列  $x_2, x_3, \dots, x_n \dots$  的增减性。