绝密★本科目考试启用前

2024年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共12页，150分.考试时长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合$M=\{x\mid -4<x\le 1\}$，$N=\{x\mid -1<x<3\}$，则$M\cup N=$（　　）

A. $\{x|-4<x<3\}$　　B. $\{x|-1<x\le 1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{x|-1<x<4\}$

2. 已知$\dfrac{z}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-1$，则$z=$（　　）.

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $-1-\mathrm{i}$　　D. 1

3. 求圆$x^2+y^2-2x+6y=0$的圆心到$x-y+2=0$的距离（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{6}$

4. $\left(x-\sqrt{x}\right)^4$的二项展开式中$x^3$的系数为（　　）

A. 15　　B. 6　　C. -4　　D. -13

5. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，则“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$”的（　　）条件.

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知$f\left(x\right)=\sin\omega x\left(\omega>0\right)$，$f\left(x_1\right)=-1$，$f\left(x_2\right)=1$，$|x_1-x_2|_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$，则$\omega=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 记水的质量为$d=\dfrac{S-1}{\ln n}$，并且d越大，水质量越好．若S不变，且$d_1=2.1$，$d_2=2.2$，则n_1与n_2的关系为（　　）

A. $n_1<n_2$

B. $n_1 > n_2$

C. 若 $S<1$，则 $n_1<n_2$；若 $S>1$，则 $n_1>n_2$；

D. 若 $S<1$，则 $n_1>n_2$；若 $S>1$，则 $n_1<n_2$；

8. 已知以边长为 4 的正方形为底面的四棱锥，四条侧棱分别为 4，4，$2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，则该四棱锥的高为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

9. 已知$\left(x_1, y_1\right)$，$\left(x_2, y_2\right)$是函数 $y=2^x$ 图象上不同的两点，则下列正确的是（　　）

A. $\log_2 \dfrac{y_1+y_2}{2} > \dfrac{x_1+x_2}{2}$　　B. $\log_2 \dfrac{y_1+y_2}{2} < \dfrac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2 \dfrac{y_1+y_2}{2} > x_1+x_2$　　D. $\log_2 \dfrac{y_1+y_2}{2} < x_1+x_2$

10. 若集合 $\left\{(x, y) \mid y=x+t(x^2-x), 0 \le t \le 1, 1 \le x \le 2\right\}$ 表示的图形中，两点间最大距离为 d、面积为 S，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知抛物线 $y^2=16x$，则焦点坐标为________.

12. 已知 $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$，且 α 与 β 的终边关于原点对称，则 $\cos\beta$ 的最大值为________.

13. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，则过 $(3,0)$ 且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为________.

14. 已知三个圆柱的体积为公比为 10 的等比数列．第一个圆柱的直径为 65mm，第二、三个圆柱的直径为 325mm，第三个圆柱的高为 230mm，求前两个圆柱的高度分别为________.

15. 已知 $M=\left\{k \mid a_k=b_k\right\}$，$a_n$，$b_n$ 不为常数列且各项均不相同，下列正确的是______.

①a_n，b_n 均为等差数列，则 M 中最多一个元素；

②a_n，b_n 均为等比数列，则 M 中最多三个元素；

③a_n 为等差数列，b_n 为等比数列，则 M 中最多三个元素；

④a_n 单调递增，b_n 单调递减，则 M 中最多一个元素.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在△ABC 中，$a=7$，A 为钝角，$\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

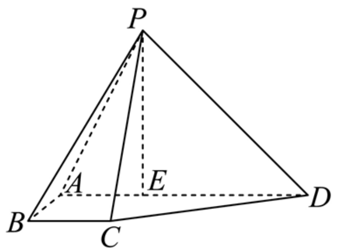
（1）求 $\angle A$；

（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求△ABC 的面积.

①$b=7$；②$\cos B=\dfrac{13}{14}$；③$c\sin A=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知四棱锥 P-$ABCD$，$AD//BC$，$AB=BC=1$，$AD=3$，$DE=PE=2$，E 是 AD 上一点，$PE\perp AD$.



（1）若 F 是 PE 中点，证明：$BF//$ 平面 PCD.

（2）若 $AB\perp$ 平面 PED，求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.

18. 已知某险种的保费为 0.4 万元，前 3 次出险每次赔付 0.8 万元，第 4 次赔付 0.6 万元

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

在总体中抽样 100 单，以频率估计概率：

（1）求随机抽取一单，赔偿不少于 2 次的概率；

（2）（i）毛利润是保费与赔偿金额之差．设毛利润为 X，估计 X 的数学期望；

（ii）若未赔偿过的保单下一保险期的保费下降 4%，已赔偿过的增加 20%．估计保单下一保险期毛利润的数学期望.

19. 已知椭圆方程 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，焦点和短轴端点构成边长为 2 的正方形，过 $\left(0,t\right)$ $\left(t>\sqrt{2}\right)$ 的直线 l 与椭圆交于 A，B，$C\left(0,1\right)$，连接 AC 交椭圆于 D.

（1）求椭圆方程和离心率；

（2）若直线 BD 的斜率为 0，求 t.

20. 已知 $f(x)=x+k\ln(1+x)$ 在 $(t,f(t))(t>0)$ 处切线为 l.

（1）若切线 l 的斜率 $k=-1$，求 $f(x)$ 单调区间；

（2）证明：切线 l 不经过 $(0,0)$；

（3）已知 $k=1$，$A(t,f(t))$，$C(0,f(t))$，$O(0,0)$，其中 $t>0$，切线 l 与 y 轴交于点 B 时．当 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，符合条件的 A 的个数为？

（参考数据：$1.09<\ln 3<1.10$，$1.60<\ln 5<1.61$，$1.94<\ln 7<1.95$）

21. 设集合 $M=\{(i,j,s,t)|i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},s\in\{5,6\},t\in\{7,8\},2|(i+j+s+t)\}$．对于给定有穷数列 $A:\{a_n\}(1\le n\le 8)$，及序列 $\Omega:\omega_1,\omega_2,...,\omega_s$，$\omega_k=(i_k,j_k,s_k,t_k)\in M$，定义变换 T：将数列A的第 i_1,j_1,s_1,t_1 项加 1，得到数列 $T_1(A)$；将数列 $T_1(A)$ 的第 i_2,j_2,s_2,t_2 列加1，得到数列 $T_2T_1(A)$ …；重复上述操作，得到数列 $T_s...T_2T_1(A)$，记为 $\Omega(A)$．

（1）给定数列 $A:1,3,2,4,6,3,1,9$ 和序列 $\Omega:(1,3,5,7),(2,4,6,8),(1,3,5,7)$，写出 $\Omega(A)$；

（2）是否存在序列 Ω，使得 $\Omega(A)$ 为 $a_1+2,a_2+6,a_3+4,a_4+2,a_5+8,a_6+2,a_7+4,a_8+4$，若存在，写出一个符合条件的 Ω；若不存在，请说明理由；

（3）若数列A的各项均为正整数，且 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，证明：“存在序列 Ω，使得 $\Omega(A)$ 为常数列”的充要条件为“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$”．