2012年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)

文科数学

第I卷(共60分)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1)若复数z满足 $z(2-i)=11+7\mathrm{i}$(i 为虚数单位)，则 z 为

(A)3+5i　(B)3－5i　(C)－3+5i　　(D)－3－5i

(2)已知全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1,2,3\}$， $B=\{2,4\}$，则 $(\complement_U A)\cup B$ 为

(A) $\{1,2,4\}$　(B) $\{2,3,4\}$　(C) $\{0,2,4\}$　(D) $\{0,2,3,4\}$

(3)函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为

(A) $[-2,0)\cup(0,2]$　(B) $(-1,0)\cup(0,2]$　(C) $[-2,2]$　(D) $(-1,2]$

(4)在某次测量中得到的A样本数据如下：82，84，84，86，86，86，88，88，88，88.若B样本数据恰好是A样本数据都加2后所得数据，则A，B两样本的下列数字特征对应相同的是

(A)众数　　(B)平均数　　(C)中位数　　(D)标准差

(5)设命题p：函数 $y=\sin 2x$ 的最小正周期为$\dfrac{\pi}{2}$；命题q：函数 $y=\cos x$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称.则下列判断正确的是

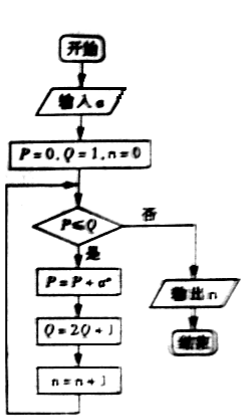
(A)p为真　　(B) $\neg q$ 为假　　(C) $p\wedge q$ 为假　　(D) $p\vee q$ 为真

(6)设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geq 2,\\2x+y\leq 4,\\4x-y\geq -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=3x-y$ 的取值范围是

(A) $[-\dfrac{3}{2},6]$　　(B) $[-\dfrac{3}{2},-1]$　　(C) $[-1,6]$　　(D) $[-6,\dfrac{3}{2}]$

(7)执行右面的程序框图，如果输入 $a=4$，那么输出的n的值为

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5



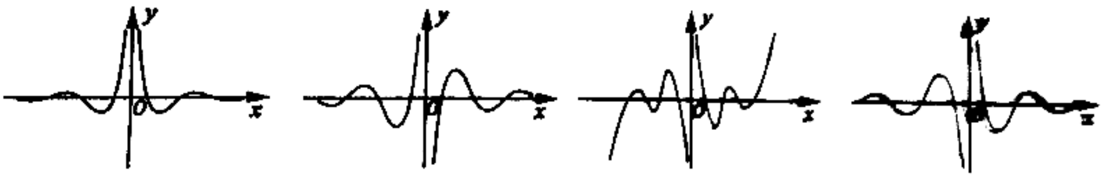
(8)函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi x}{6}-\dfrac{\pi}{3}\right)(0\leq x\leq 9)$ 的最大值与最小值之和为

(A) $2-\sqrt{3}$　　(B)0　　(C)－1　　(D) $-1-\sqrt{3}$

(9)圆 $(x+2)^2+y^2=4$ 与圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 的位置关系为

(A)内切　　(B)相交　　(C)外切　　(D)相离

(10)函数 $y=\dfrac{\cos 6x}{2^{x}-2^{-x}}$ 的图象大致为



(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

(11)已知双曲线 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为2.若抛物线 $C_2:x^2=2py(p>0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为2，则抛物线 C_2 的方程为

(A) $x^2=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}y$　　(B) $x^2=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}y$　　(C) $x^2=8y$　　(D) $x^2=16y$

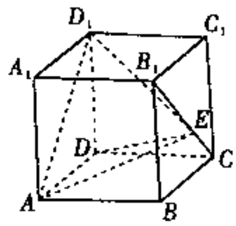
(12)设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=-x^2+bx$.若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则下列判断正确的是

(A) $x_1+x_2>0,y_1+y_2>0$　　　　(B) $x_1+x_2>0,y_1+y_2<0$

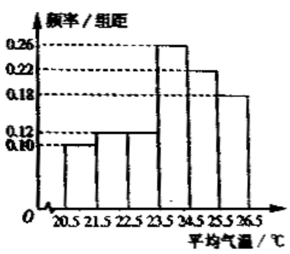
(C) $x_1+x_2<0,y_1+y_2>0$　　　　(D) $x_1+x_2<0,y_1+y_2<0$

第II卷(共90分)

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分.

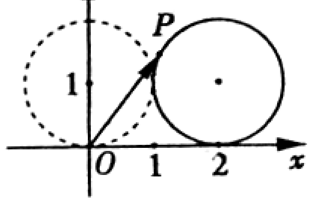


(13)如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，E为线段 B_1C 上的一点，则三棱锥 $A-DED_1$ 的体积为__________.



(14)右图是根据部分城市某年6月份的平均气温(单位：℃)数据得到的样本频率分布直方图，其中平均气温的范围是［20.5，26.5］，样本数据的分组为 $[20.5,21.5)$，$[21.5,22.5)$，$[22.5,23.5)$，$[23.5,24.5)$，$[24.5,25.5)$，$[25.5,26.5]$.已知样本中平均气温低于22.5℃的城市个数为11，则样本中平均气温不低于25.5℃的城市个数为________.

(15)若函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 在［－1，2］上的最大值为4，最小值为m，且函数 $g(x)=(1-4m)\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则a=________.



(16)如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一单位圆的圆心的初始位置在(0，1)，此时圆上一点P的位置在(0，0)，圆在x轴上沿正向滚动.当圆滚动到圆心位于(2，1)时，$\overrightarrow{OP}$ 的坐标为__

______.

三、解答题：本大题共6小题，共74分.

(17)（本小题满分12分）

在△ABC中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c ，已知 $\sin B(\tan A+\tan C)=\tan A\tan C$.

(I)求证： a,b,c 成等比数列；

(II)若 $a=1,c=2$ ，求△ ABC 的面积S.

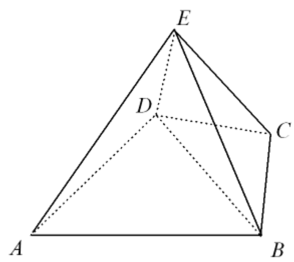
(18)（本小题满分12分）

袋中有五张卡片，其中红色卡片三张，标号分别为1，2，3；蓝色卡片两张，标号分别为1，2.

(I)从以上五张卡片中任取两张，求这两张卡片颜色不同且标号之和小于4的概率；

(II)现袋中再放入一张标号为0的绿色卡片，从这六张卡片中任取两张，求这两张卡片颜色不同且标号之和小于4的概率.

(19)（本小题满分12分）



如图，几何体 $E-ABCD$ 是四棱锥，△ ABD 为正三角形，$CB=CD,EC\perp BD$.

(I)求证： $BE=DE$ ；

(II)若 $\angle BCD=120°$ ，M为线段AE的中点，

求证： $DM\parallel$平面 BEC .

(20)（本小题满分12分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前5项和为105，且 $a_{20}=2a_5$.

(I)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

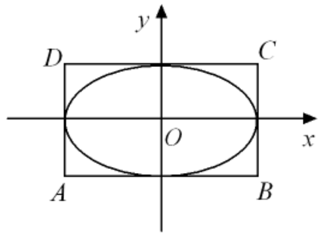
(II)对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，将数列 $\{a_n\}$ 中不大于 7^{2m} 的项的个数记为 b_m .求数列 $\{b_m\}$ 的前m项和 S_m .

(21)（本小题满分13分）

如图，椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形$ABCD$的面积为8.

(I)求椭圆M的标准方程；

(II) 设直线 $l:y=x+m(m\in\mathbf{R})$ 与椭圆M有两个不同的交点 P,Q,l 与矩形$ABCD$有两个不同的交点 S,T .求 $\frac{|PQ|}{|ST|}$ 的最大值及取得最大值时m的值.



(22)（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+k}{\mathrm{e}^x}$($k$ 为常数，e=2.71828…是自然对数的底数)，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与x轴平行.

(I)求k的值；

(II)求 $f(x)$ 的单调区间；

(III)设 $g(x)=xf'(x)$，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.证明：对任意 $x>0,g(x)<1+\mathrm{e}^{-2}$.

参考答案：

一、选择题：

(1)A **(2)**C **(3)**B **(4)**D **(5)**C **(6)**A **(7)**B **(8)**A **(9)**B **(10)**D **(11)**D **(12)**B

(12)解：设$F(x)=x^3-bx^2+1$，则方程$F(x)=0$与$f(x)=g(x)$同解，故其有且仅有两个不同零点x_1,x_2.由$F'(x)=0$得$x=0$或$x=\frac{2}{3}b$.这样，必须且只须$F(0)=0$或$F(\frac{2}{3}b)=0$，因为$F(0)=1$，故必有$F(\frac{2}{3}b)=0$由此得$b=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.不妨设$x_1<x_2$，则$x_2=\frac{2}{3}b=\sqrt[3]{2}$.所以$F(x)=(x-x_1)(x-\sqrt[3]{2})^2$，比较系数得$-x_1\sqrt[3]{4}=1$，故$x_1=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$.$x_1+x_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}>0$，由此知$y_1+y_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}<0$，故答案为B.

二、填空题

(13) $\frac{1}{6}$　以$\triangle ADD_1$为底面，则易知三棱锥的高为1，故$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{1}{6}$.

(14)9

最左边两个矩形面积之和为0.10×1+0.12×1＝0.22，总城市数为11÷0.22＝50，最右面矩形面积为0.18×1＝0.18，50×0.18＝9.

(15) $\frac{1}{4}$

当$a>1$时，有$a^2=4,a^{-1}=m$，此时$a=2,m=\frac{1}{2}$，此时$g(x)=-\sqrt{x}$为减函数，不合题意.

若$0<a<1$，则$a^{-1}=4,a^2=m$，故$a=\frac{1}{4},m=\frac{1}{16}$，检验知符合题意.

(16) $(2-\sin2,1-\cos2)$

三、解答题

(17)(I)由已知得：

$\sin B(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=\sin A\sin C$，

$\sin B\sin(A+C)=\sin A\sin C$，

$\sin^2 B=\sin A\sin C$，

再由正弦定理可得：$b^2=ac$，

所以a,b,c成等比数列.

(II)若$a=1,c=2$，则$b^2=ac=2$，

$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{3}{4}$，

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

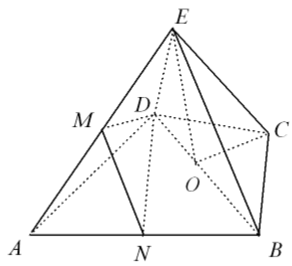
$\therefore\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 1\times 2\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

(18)(I)从五张卡片中任取两张的所有可能情况有如下10种：红$_1$红$_2$，红$_1$红$_3$，红$_1$蓝$_1$，红$_1$蓝$_2$，红$_2$红$_3$，红$_2$蓝$_1$，红$_2$蓝$_2$，红$_3$蓝$_1$，红$_3$蓝$_2$，蓝$_1$蓝$_2$.其中两张卡片的颜色不同且标号之和小于4的有3种情况，故所求的概率为 $P=\dfrac{3}{10}$.

(II)加入一张标号为0的绿色卡片后，从六张卡片中任取两张，除上面的10种情况外，多出5种情况：红$_1$绿$_0$，红$_2$绿$_0$，红$_3$绿$_0$，蓝$_1$绿$_0$，蓝$_2$绿$_0$，即共有15种情况，其中颜色不同且标号之和小于4的有8种情况，所以概率为 $P=\dfrac{8}{15}$.

(19)(I)设 BD 中点为O，连接OC，OE，则由 $BC=CD$ 知，

$CO\perp BD$，



又已知 $CE\perp BD$，所以 $BD\perp$ 平面OCE.

所以 $BD\perp OE$，即OE是BD的垂直平分线，

所以 $BE=DE$.

(II)取AB中点N，连接 MN,DN，

$\because M$是AE的中点，$\therefore MN\parallel BE$，

$\because\triangle ABD$ 是等边三角形，$\therefore DN\perp AB$.

由$\angle BCD=120°$知，$\angle CBD=30°$，所以$\angle ABC=60°+30°=90°$，即 $BC\perp AB$，

所以$ND\parallel BC$，

所以平面$MND\parallel$平面BEC，故$DM\parallel$平面BEC.

(20)(I)由已知得：$\begin{cases}5a_1+10d=105,\\ a_1+9d=2(a_1+4d),\end{cases}$

解得 $a_1=7,d=7$，

所以通项公式为 $a_n=7+(n-1)\cdot 7=7n$.

(II)由 $a_n=7n\le 7^{2m}$，得 $n\le 7^{2m-1}$，

即 $b_m=7^{2m-1}$.

$\because\dfrac{b_{k+1}}{b_k}=\dfrac{7^{2m+1}}{7^{2m-1}}=49$，

$\therefore\{b_m\}$ 是公比为49的等比数列，

$\therefore S_m=\dfrac{7(1-49^m)}{1-49}=\dfrac{7}{48}(49^m-1)$.

(21)(I) $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$ ……①

矩形$ABCD$面积为8，即 $2a\cdot 2b=8$ ……②

由①②解得： $a=2,b=1$，

$\therefore$椭圆M的标准方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(II) $\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\ y=x+m,\end{cases}\Rightarrow 5x^2+8mx+4m^2-4=0$，

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{8}{5}m,x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{5}$，

由 $\varDelta=64m^2-20(4m^2-4)>0$ 得 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$.

$|PQ|=\sqrt{2}\sqrt{\left(-\dfrac{8}{5}m\right)^2-4\dfrac{4m^2-4}{5}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{5-m^2}$.

当 l 过 A 点时， $m=1$，当 l 过 C 点时， $m=-1$.

①当 $-\sqrt{5}<m<-1$ 时，有 $S(-m-1,-1),T(2,2+m),|ST|=\sqrt{2}(3+m)$，

$\dfrac{|PQ|}{|ST|}=\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{5-m^2}{(3+m)^2}}=\dfrac{4}{5}\sqrt{-\dfrac{4}{t^2}+\dfrac{6}{t}-1}$，

其中 $t=m+3$，由此知当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{4}$，即 $t=\dfrac{4}{3},m=-\dfrac{5}{3}\in(-\sqrt{5},-1)$ 时，$\dfrac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值 $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.

②由对称性，可知若 $1<m<\sqrt{5}$，则当 $m=\dfrac{5}{3}$ 时，$\dfrac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值 $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.

③当 $-1\le m\le 1$ 时，$|ST|=2\sqrt{2}$，$\dfrac{|PQ|}{|ST|}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5-m^2}$，

由此知，当 $m=0$ 时，$\dfrac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值 $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.

综上可知，当 $m=\pm\dfrac{5}{3}$ 和0时，$\dfrac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值 $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.

(22)(I) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\ln x-k}{\mathrm{e}^x}$，

由已知，$f'(1)=\dfrac{1-k}{\mathrm{e}}=0$，$\therefore k=1$.

(II)由(I)知，$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\ln x-1}{\mathrm{e}^x}$.

设 $k(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$，则 $k'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}<0$，即 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

由 $k(1)=0$ 知，当 $0<x<1$ 时 $k(x)>0$，从而 $f'(x)>0$，

当 $x>1$ 时 $k(x)<0$，从而 $f'(x)<0$.

综上可知，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$，单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

(III)由(II)可知，当 $x\geq 1$ 时，$g(x)=xf'(x)\leq 0<1+\mathrm{e}^{-2}$，故只需证明 $g(x)<1+\mathrm{e}^{-2}$ 在 $0<x<1$ 时成立.

当 $0<x<1$ 时，$\mathrm{e}^{x}>1$，且 $g(x)>0$，$\therefore g(x)=\dfrac{1-x\ln x-x}{\mathrm{e}^{x}}<1-x\ln x-x$.

设 $F(x)=1-x\ln x-x$，$x\in(0,1)$，则 $F'(x)=-(\ln x+2)$，

当 $x\in(0,\mathrm{e}^{-2})$ 时，$F'(x)>0$，当 $x\in(\mathrm{e}^{-2},1)$ 时，$F'(x)<0$，

所以当 $x=\mathrm{e}^{-2}$ 时，$F(x)$ 取得最大值 $F(e^{-2})=1+\mathrm{e}^{-2}$.

所以 $g(x)<F(x)\leq 1+\mathrm{e}^{-2}$.

综上，对任意 $x>0$，$g(x)<1+\mathrm{e}^{-2}$.