

2012 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数 学 (理工类)

参考公式:

如果事件互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件相互独立, 那么

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p , 那么

在 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0,1,2,\dots,n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

第一部分 (选择题 共 60 分)

注意事项:

1、选择题必须使用 2B 铅笔将答案标号涂在机读卡上对应题目标号的位置上。

2、本部分共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。

一、选择题: 每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、 $(1+x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是 ()

A、42

B、35

C、28

D、21

2、复数 $\frac{(1-i)^2}{2i}$ = ()

A、1

B、-1

C、i

D、-i

3、函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x < 3 \\ \ln(x-2), & x \geq 3 \end{cases}$ 在 $x=3$ 处的极限是 ()

A、不存在

B、等于 6

C、等于 3

D、等于 0

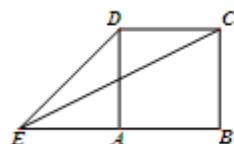
4、如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 延长 BA 至 E , 使 $AE=1$, 连接 EC 、 ED 则 $\sin \angle CED =$ ()

A、 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

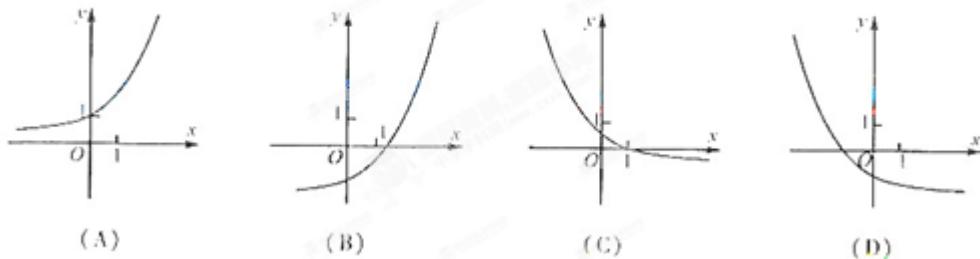
B、 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C、 $\frac{\sqrt{5}}{10}$

D、 $\frac{\sqrt{5}}{15}$



5、函数 $y = a^x - \frac{1}{a}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象可能是 ()



6、下列命题正确的是 ()

- A、若两条直线和同一个平面所成的角相等，则这两条直线平行
- B、若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等，则这两个平面平行
- C、若一条直线平行于两个相交平面，则这条直线与这两个平面的交线平行
- D、若两个平面都垂直于第三个平面，则这两个平面平行

7、设 \vec{a} 、 \vec{b} 都是非零向量，下列四个条件中，使 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立的充分条件是 ()

- A、 $\vec{a} = -\vec{b}$
- B、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- C、 $\vec{a} = 2\vec{b}$
- D、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

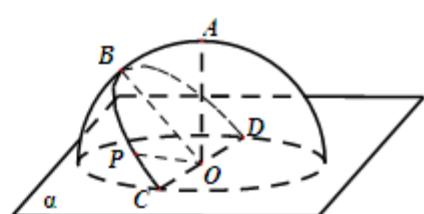
8、已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点 O ，并且经过点 $M(2, y_0)$ 。若点 M 到该抛物线焦点的距离为 3，则 $|OM| =$ ()

- A、 $2\sqrt{2}$
- B、 $2\sqrt{3}$
- C、4
- D、 $2\sqrt{5}$

9、某公司生产甲、乙两种桶装产品。已知生产甲产品 1 桶需耗 A 原料 1 千克、 B 原料 2 千克；生产乙产品 1 桶需耗 A 原料 2 千克， B 原料 1 千克。每桶甲产品的利润是 300 元，每桶乙产品的利润是 400 元。公司在生产这两种产品的计划中，要求每天消耗 A 、 B 原料都不超过 12 千克。通过合理安排生产计划，从每天生产的甲、乙两种产品中，公司共可获得的最大利润是 ()

- A、1800 元
- B、2400 元
- C、2800 元
- D、3100 元

10、如图，半径为 R 的半球 O 的底面圆 O 在平面 α 内，过点 O 作平面 α 的垂线交半球面于点 A ，过圆 O 的直径 CD 作平面 α 成 45° 角的平面与半球面相交，所得交线上到平面 α 的距离最大的点为 B ，该交线上的一点 P 满足 $\angle BOP = 60^\circ$ ，则 A 、 P 两点间的球面距离为 ()



- A、 $R \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$
- B、 $\frac{\pi R}{4}$
- C、 $R \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$
- D、 $\frac{\pi R}{3}$

11、方程 $ay = b^2 x^2 + c$ 中的 $a, b, c \in \{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}$ ，且 a, b, c 互不相同，在所有这些方程所表示的曲线中，不同的抛物线共有 ()

- A、60 条
- B、62 条
- C、71 条
- D、80 条

12、设函数 $f(x) = 2x - \cos x$, $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列,

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_5) = 5\pi, \text{ 则 } [f(a_3)]^2 - a_1 a_3 = (\quad)$$

A、0

B、 $\frac{1}{16}\pi^2$

C、 $\frac{1}{8}\pi^2$

D、 $\frac{13}{16}\pi^2$

第二部分 (非选择题 共 90 分)

注意事项:

(1) 必须使用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答, 作图题可先用铅笔绘出, 确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚。答在试题卷上无效。

(2) 本部分共 10 个小题, 共 90 分。

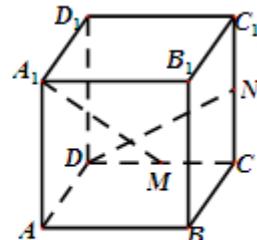
二、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 4 分, 共 16 分。把答案填在答题纸的相应位置上。)

13、设全集 $U = \{a, b, c, d\}$, 集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$, 则

$$(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

14、如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 、 N 分别是 CD 、 CC_1

的中点, 则异面直线 AM 与 DN 所成角的大小是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



15、椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F , 直线 $x = m$ 与椭圆相交于点 A 、

B , 当 $\triangle FAB$ 的周长最大时, $\triangle FAB$ 的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16、记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数, 例如, $[2] = 2$, $[1.5] = 1$, $[-0.3] = -1$ 。设 a 为正

整数, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = a$, $x_{n+1} = [\frac{x_n + [\frac{a}{x_n}]}{2}]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 现有下列命题:

①当 $a = 5$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 的前 3 项依次为 5, 3, 2;

②对数列 $\{x_n\}$ 都存在正整数 k , 当 $n \geq k$ 时总有 $x_n = x_k$;

③当 $n \geq 1$ 时, $x_n > \sqrt{a} - 1$;

④对某个正整数 k , 若 $x_{k+1} \geq x_k$, 则 $x_n = [\sqrt{a}]$ 。

其中的真命题有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(写出所有真命题的编号)

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 74 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。）

17、(本小题满分 12 分)

某居民小区有两个相互独立的安全防范系统（简称系统） A 和 B ，系统 A 和 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{10}$ 和 p 。

(I) 若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$ ，求 p 的值；

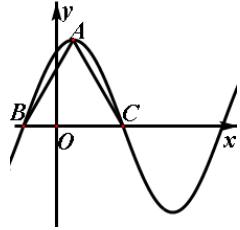
(II) 设系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数为随机变量 ξ ，求 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$ 。

18、(本小题满分 12 分)

函数 $f(x) = 6\cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \cos \omega x - 3 (\omega > 0)$ 在一个周期内的图象如图所示， A 为图象的最高点， B 、 C 为图象与 x 轴的交点，且 ΔABC 为正三角形。

(I) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域；

(II) 若 $f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ ，且 $x_0 \in (-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ ，求 $f(x_0 + 1)$ 的值。



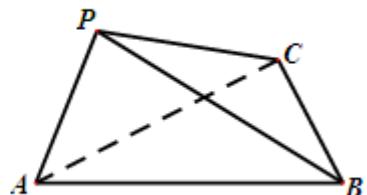
19、(本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\angle APB = 90^\circ$ ，

$\angle PAB = 60^\circ$ ， $AB = BC = CA$ ，平面 $PAB \perp$ 平面 ABC 。

(I) 求直线 PC 与平面 ABC 所成角的大小；

(II) 求二面角 $B-AP-C$ 的大小。



20、(本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 a_n = S_2 + S_n$ 对一切正整数 n 都成立。

(I) 求 a_1 ， a_2 的值；

(II) 设 $a_1 > 0$, 数列 $\{\lg \frac{10a_1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 当 n 为何值时, T_n 最大? 并求出 T_n 的最大值。

21、(本小题满分 12 分)

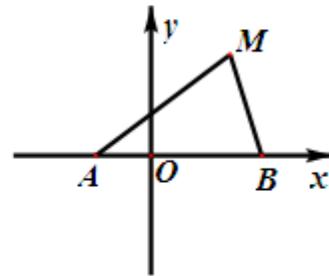
如图, 动点 M 到两定点 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 构成

$\triangle MAB$, 且 $\angle MBA = 2\angle MAB$, 设动点 M 的轨迹为 C 。

(I) 求轨迹 C 的方程;

(II) 设直线 $y = -2x + m$ 与 y 轴交于点 P , 与轨迹 C 相交

于点 Q 、 R , 且 $|PQ| < |PR|$, 求 $\frac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围。



22、(本小题满分 14 分)

已知 a 为正实数, n 为自然数, 抛物线 $y = -x^2 + \frac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A , 设 $f(n)$

为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距。

(I) 用 a 和 n 表示 $f(n)$;

(II) 求对所有 n 都有 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n^3}{n^3+1}$ 成立的 a 的最小值;

(III) 当 $0 < a < 1$ 时, 比较 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)-f(2k)}$ 与 $\frac{27}{4} \frac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$ 的大小, 并说明理由。