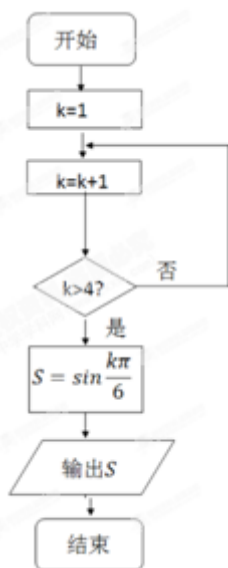


一、选择题

- 1、设集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, 集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$
(A) $\{x | -1 < x < 3\}$ (B) $\{x | -1 < x < 1\}$ (C) $\{x | 1 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$
- 2、设向量 $a = (2, 4)$ 与向量 $b = (x, 6)$ 共线, 则实数 $x = (\quad)$
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6
- 3、某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异, 拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查, 则最合理的抽样方法是(\quad)
(A) 抽签法 (B) 系统抽样法 (C) 分层抽样法 (D) 随机数法
- 4、设 a, b 为正实数, 则 “ $a > b > 1$ ” 是 “ $\log_2 a > \log_2 b > 0$ ” 的(\quad)
(A) 充要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 5、下列函数中, 最小正周期为 π 的奇函数是(\quad)
(A) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ (B) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$
(C) $y = \sin 2x + \cos 2x$ (D) $y = \sin x + \cos x$
- 6、执行如图所示的程序框图, 输出 S 的值为(\quad)



- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

7、过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线交该双曲线的两条渐近线于 A 、 B 两点，则 $|AB| = (\quad)$

- (A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$

8、某食品的保鲜时间 y (单位：小时) 与储藏温度 x (单位： $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ ($e = 2.718\ldots$ 为自然对数的底数， k, b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时，在 22°C 的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33°C 的保鲜时间是()

- (A) 16 小时 (B) 20 小时 (C) 24 小时 (D) 21 小时

9、设实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 14 \\ x + y \geq 6 \end{cases}$ ，则 xy 的最大值为()

- (A) $\frac{25}{2}$ (B) $\frac{49}{2}$ (C) 12 (D) 14

10、设直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点，与圆 $C: (x-5)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切于点 M ，且 M 为线段

AB 中点, 若这样的直线 l 恰有 4 条, 则 r 的取值范围是()

- (A)(1, 3) (B)(1, 4) (C)(2, 3) (D)(2, 4)

二、填空题

11、设 i 是虚数单位, 则复数 $i - \frac{1}{i} =$ _____.

12、 $\lg 0.01 + \log_2 16 =$ _____.

13、已知 $\sin \alpha + 2\cos \alpha = 0$, 则 $2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha$ 的值是_____.

14、在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形, 俯视图是直角边长为 1 的等腰直角三角形, 设点 M, N, P 分别是 AB, BC, B_1C_1 的中点, 则三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积是_____.

15、已知函数 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 + ax$ (其中 $a \in \mathbb{R}$). 对于不相等的实数 x_1, x_2 , 设 $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, $n =$

$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$, 现有如下命题:

- ①对于任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $m > 0$;
- ②对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $n > 0$;
- ③对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = n$;
- ④对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = -n$.

其中真命题有_____ (写出所有真命题的序号).

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

16. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - a_3$, 且 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列.

(I) 求数列的通项公式;

(II) 设数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

17、(本小题满分 12 分)

一辆小客车上共有 5 个座位, 其座位号为 1, 2, 3, 4, 5, 乘客 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的座位号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 他们按照座位号顺序先后上车, 乘客 P_1 因身体原因没有坐自己号座位, 这时司机要求余下的乘客按以下规则就座: 如果自己的座位空着, 就只能坐自己的座位. 如果自己的座位已有乘客就坐, 就在这 5 个座位的剩余空位中选择座位.

(I) 若乘客 P_1 坐到了 3 号座位, 其他乘客按规则就座, 则此时共有 4 种坐法. 下表给出其中两种坐法, 请填入余下两种坐法(将乘客就坐的座位号填入表中空格处)

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	1	4	5
	3	2	4	5	1

(II) 若乘客 P_1 坐到了 2 号座位, 其他乘客按规则就座, 求乘客 P_1 坐到 5 号座位的概率.

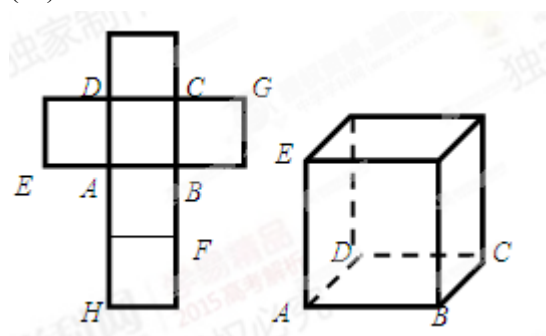
18、(本小题满分 12 分)

一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示.

(I) 请按字母 F, G, H 标记在正方体相应地顶点处(不需要说明理由)

(II) 判断平面 BEG 与平面 ACH 的位置关系. 并说明你的结论.

(III) 证明: 直线 $DF \perp$ 平面 BEG



19、(本小题满分 12 分)

已知 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角, $\tan A, \tan B$ 是关于方程 $x^2 + \sqrt{3}px - p + 1 = 0 (p \in \mathbb{R})$ 两个实根.

(I) 求 C 的大小

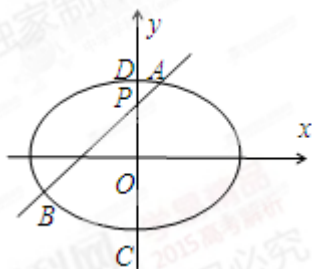
(II) 若 $AB = 1, AC = \sqrt{6}$, 求 p 的值

20、(本小题满分 13 分)

如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0, 1)$ 在短轴 CD 上, 且 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = -1$

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设 O 为坐标原点, 过点 P 的动直线与椭圆交于 A 、 B 两点. 是否存在常数 λ , 使得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



21、(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = -2\ln x + x^2 - 2ax + a^2$, 其中 $a > 0$.

(I) 设 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(II) 证明: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.