

2009年全国统一高考数学试卷（文科）（全国卷 I）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分） $\sin 585^\circ$ 的值为（ ）

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【考点】GE：诱导公式.

【分析】由 $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$ 、 $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$ 及特殊角三角函数值解之.

【解答】解： $\sin 585^\circ = \sin(585^\circ - 360^\circ) = \sin 225^\circ = \sin(45^\circ + 180^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故选：A.

【点评】本题考查诱导公式及特殊角三角函数值.

2. （5分）设集合 $A=\{4, 5, 7, 9\}$ ， $B=\{3, 4, 7, 8, 9\}$ ，全集 $U=A \cup B$ ，则集合 $C_U(A \cap B)$ 中的元素共有（ ）

A. 3个

B. 4个

C. 5个

D. 6个

【考点】1H：交、并、补集的混合运算.

【分析】根据交集含义取A、B的公共元素写出 $A \cap B$ ，再根据补集的含义求解.

【解答】解： $A \cup B = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$,

$A \cap B = \{4, 7, 9\} \therefore C_U(A \cap B) = \{3, 5, 8\}$ 故选A.

也可用摩根律： $C_U(A \cap B) = (C_U A) \cup (C_U B)$

故选：A.

【点评】本题考查集合的基本运算，较简单.

3. （5分）不等式 $|\frac{x+1}{x-1}| < 1$ 的解集为（ ）

A. $\{x | 0 < x < 1\} \cup \{x | x > 1\}$

B. $\{x | 0 < x < 1\}$

C. $\{x | -1 < x < 0\}$

D. $\{x|x<0\}$

【考点】7E：其他不等式的解法.

【分析】本题为绝对值不等式，去绝对值是关键，可利用绝对值意义去绝对值，也可两边平方去绝对值.

【解答】解：∵ $|\frac{x+1}{x-1}|<1$,

$$\therefore |x+1|<|x-1|,$$

$$\therefore x^2+2x+1<x^2-2x+1.$$

$$\therefore x<0.$$

∴不等式的解集为 $\{x|x<0\}$.

故选：D.

【点评】本题主要考查解绝对值不等式，属基本题. 解绝对值不等式的关键是去绝对值，去绝对值的方法主要有：利用绝对值的意义、讨论和平方.

4. (5分) 已知 $\tan\alpha=4$, $\cot\beta=\frac{1}{3}$, 则 $\tan(\alpha+\beta) = (\quad)$

A. $\frac{7}{11}$

B. $-\frac{7}{11}$

C. $\frac{7}{13}$

D. $-\frac{7}{13}$

【考点】GP：两角和与差的三角函数.

【专题】11：计算题.

【分析】由已知中 $\cot\beta=\frac{1}{3}$, 由同角三角函数的基本关系公式, 我们求出 β 角的

正切值, 然后代入两角和的正切公式, 即可得到答案.

【解答】解：∵ $\tan\alpha=4$, $\cot\beta=\frac{1}{3}$,

$$\therefore \tan\beta=3$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{4+3}{1-3 \times 4} = -\frac{7}{11}$$

故选：B.

【点评】本题考查的知识点是两角和与差的正切函数, 其中根据已知中 β 角的余切值, 根据同角三角函数的基本关系公式, 求出 β 角的正切值是解答本题的

关键.

5. (5分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的渐近线与抛物线 $y = x^2 + 1$ 相切, 则该双曲线的离心率为 ()
- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

【考点】KC: 双曲线的性质; KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】11: 计算题.

【分析】先求出渐近线方程, 代入抛物线方程, 根据判别式等于0, 找到a和b的关系, 从而推断出a和c的关系, 答案可得.

【解答】解: 由题双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{bx}{a}$,

代入抛物线方程整理得 $ax^2 - bx + a = 0$,

因渐近线与抛物线相切, 所以 $b^2 - 4a^2 = 0$,

即 $c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{5}$,

故选: C.

【点评】本小题考查双曲线的渐近线方程直线与圆锥曲线的位置关系、双曲线的离心率, 基础题.

6. (5分) 已知函数 $f(x)$ 的反函数为 $g(x) = 1 + 2\lg x$ ($x > 0$), 则 $f(1) + g(1) =$ ()
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

【考点】4R: 反函数.

【专题】11: 计算题.

【分析】将 $x=1$ 代入即可求得 $g(1)$, 欲求 $f(1)$, 只须求当 $g(x) = 1$ 时 x 的值即可. 从而解决问题.

【解答】解: 由题令 $1 + 2\lg x = 1$

得 $x=1$,

即 $f(1)=1$,

又 $g(1)=1$,

所以 $f(1)+g(1)=2$,

故选: C.

【点评】本小题考查反函数, 题目虽然简单, 却考查了对基础知识的灵活掌握情况, 也考查了运用知识的能力.

7. (5分) 甲组有5名男同学, 3名女同学; 乙组有6名男同学、2名女同学. 若从甲、乙两组中各选出2名同学, 则选出的4人中恰有1名女同学的不同选法共有 ()

A. 150种 B. 180种 C. 300种 D. 345种

【考点】D1: 分类加法计数原理; D2: 分步乘法计数原理.

【专题】50: 排列组合.

【分析】选出的4人中恰有1名女同学的不同选法, 1名女同学来自甲组和乙组两类.

【解答】解: 分两类 (1) 甲组中选出一名女生有 $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 = 225$ 种选法;

(2) 乙组中选出一名女生有 $C_5^2 \cdot C_6^1 \cdot C_2^1 = 120$ 种选法. 故共有345种选法.

故选: D.

【点评】分类加法计数原理和分类乘法计数原理, 最关键做到不重不漏, 先分类, 后分步!

8. (5分) 设非零向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, 则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ ()

A. 150° B. 120° C. 60° D. 30°

【考点】9S: 数量积表示两个向量的夹角.

【分析】根据向量加法的平行四边形法则, 两个向量的模长相等可构成菱形的

两条相邻边，三个向量起点处的对角线长等于菱形的边长，这样得到一个含有特殊角的菱形.

【解答】解：由向量加法的平行四边形法则，

∵两个向量的模长相等

∴ \vec{a} 、 \vec{b} 可构成菱形的两条相邻边，

∴ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

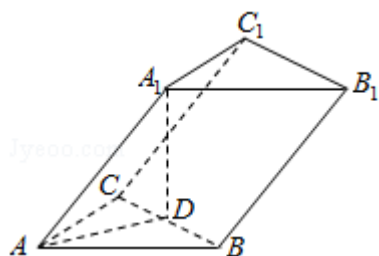
∴ \vec{a} 、 \vec{b} 为起点处的对角线长等于菱形的边长，

∴两个向量的夹角是 120° ，

故选：B.

【点评】本小题考查向量的几何运算、考查数形结合的思想，基础题. 向量知识，向量观点在数学、物理等学科的很多分支有着广泛的应用，而它具有代数形式和几何形式的“双重身份”能融数形于一体.

9. (5分) 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等， A_1 在底面 ABC 上的射影 D 为 BC 的中点，则异面直线 AB 与 CC_1 所成的角的余弦值为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

【考点】LO：空间中直线与直线之间的位置关系.

【分析】首先找到异面直线 AB 与 CC_1 所成的角（如 $\angle A_1AB$ ）；而欲求其余弦值可考虑余弦定理，则只要表示出 A_1B 的长度即可；不妨设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长为1，利用勾股定理即可求之.

【解答】解：设 BC 的中点为 D ，连接 A_1D 、 AD 、 A_1B ，易知 $\theta = \angle A_1AB$ 即为异面直线 AB 与 CC_1 所成的角；

并设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长为1，则 $|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $|A_1D| = \frac{1}{2}$ ， $|A_1B|$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由余弦定理，得 $\cos\theta=\frac{1+1-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$.

故选：D.

【点评】 本题主要考查异面直线的夹角与余弦定理.

10. (5分) 如果函数 $y=3\cos(2x+\phi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 中心对称，那么 $|\phi|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【考点】 HB: 余弦函数的对称性.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 先根据函数 $y=3\cos(2x+\phi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 中心对称，令 $x=\frac{4\pi}{3}$ 代入函数使其等于0，求出 ϕ 的值，进而可得 $|\phi|$ 的最小值.

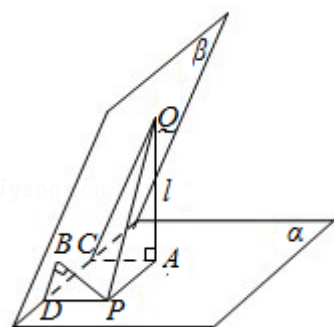
【解答】 解：∵函数 $y=3\cos(2x+\phi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 中心对称.

$$\therefore 2 \cdot \frac{4\pi}{3} + \phi = k\pi + \frac{\pi}{2} \therefore \phi = k\pi - \frac{13\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 由此易得 } |\phi|_{\min} = \frac{\pi}{6}.$$

故选：A.

【点评】 本题主要考查余弦函数的对称性. 属基础题.

11. (5分) 已知二面角 $\alpha - l - \beta$ 为 60° ，动点P、Q分别在面 α 、 β 内，P到 β 的距离为 $\sqrt{3}$ ，Q到 α 的距离为 $2\sqrt{3}$ ，则P、Q两点之间距离的最小值为 ()



A. 1

B. 2

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

【考点】LQ：平面与平面之间的位置关系.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】分别作 $QA \perp \alpha$ 于A， $AC \perp l$ 于C， $PB \perp \beta$ 于B， $PD \perp l$ 于D，连CQ，BD则 $\angle ACQ = \angle PBD = 60^\circ$ ，在三角形APQ中将PQ表示出来，再研究其最值即可.

【解答】解：如图

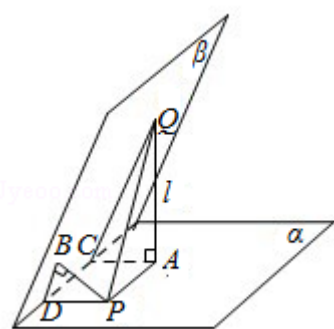
分别作 $QA \perp \alpha$ 于A， $AC \perp l$ 于C， $PB \perp \beta$ 于B， $PD \perp l$ 于D，

连CQ，BD则 $\angle ACQ = \angle PDB = 60^\circ$ ， $AQ = 2\sqrt{3}$ ， $BP = \sqrt{3}$ ，

$$\text{又} \because PQ = \sqrt{AQ^2 + AP^2} = \sqrt{12 + AP^2} \geq 2\sqrt{3}$$

当且仅当 $AP = 0$ ，即点A与点P重合时取最小值.

故选：C.



【点评】本题主要考查了平面与平面之间的位置关系，以及空间中直线与平面之间的位置关系，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题.

12. (5分) 已知椭圆C: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为F，右准线为l，点A ∈ l，线段AF交C

于点B，若 $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$ ，则 $|\overrightarrow{AF}| =$ ()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. 3

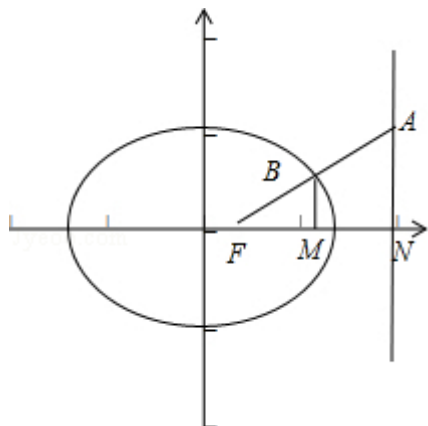
【考点】K4：椭圆的性质.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】过点B作 $BM \perp x$ 轴于M，设右准线l与x轴的交点为N，根据椭圆的性质可

知 $FN=1$ ，进而根据 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$ ，求出BM，AN，进而可得 $|AF|$ 。

【解答】解：过点B作 $BM \perp x$ 轴于M，



并设右准线l与x轴的交点为N，易知 $FN=1$ 。

由题意 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$ ，

故 $FM=\frac{1}{3}$ ，故B点的横坐标为 $\frac{4}{3}$ ，纵坐标为 $\pm\frac{1}{3}$

即 $BM=\frac{1}{3}$ ，

故 $AN=1$ ，

$\therefore |AF|=\sqrt{2}$ 。

故选：A。

【点评】本小题考查椭圆的准线、向量的运用、椭圆的定义，属基础题。

二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

13. （5分） $(x-y)^{10}$ 的展开式中， x^7y^3 的系数与 x^3y^7 的系数之和等于 -240

【考点】DA：二项式定理。

【专题】11：计算题。

【分析】首先要了解二项式定理： $(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2++C_n^ra^{n-r}b^r++C_n^na^0b^n$ ，各项的通项公式为： $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$ 。然后根据题目已知求解即可

【解答】解：因为 $(x-y)^{10}$ 的展开式中含 x^7y^3 的项为 $C_{10}^3x^{10-3}y^3(-1)^3 = -C_{10}^3x^7y^3$,

含 x^3y^7 的项为 $C_{10}^7x^{10-7}y^7(-1)^7 = -C_{10}^7x^3y^7$.

由 $C_{10}^3 = C_{10}^7 = 120$ 知， x^7y^3 与 x^3y^7 的系数之和为 -240 .

故答案为 -240 .

【点评】此题主要考查二项式定理的应用问题，对于公式： $(a+b)^n = C_n^0a^nb^0 + C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^ra^{n-r}b^r + \dots + C_n^na^0b^n$ ，属于重点考点，同学们需要理解记忆.

14. (5分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 的和为 S_n ，若 $S_9 = 72$ ，则 $a_2 + a_4 + a_6 = \underline{24}$.

【考点】83：等差数列的性质.

【分析】先由 $S_9 = 72$ 用性质求得 a_5 ，而 $3(a_1 + 4d) = 3a_5$ ，从而求得答案.

【解答】解： $\because S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5 = 72$

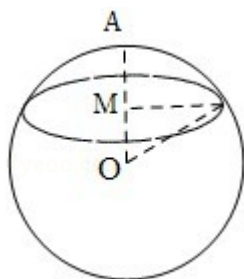
$\therefore a_5 = 8$

又 $\because a_2 + a_4 + a_6 = 3(a_1 + 4d) = 3a_5 = 24$

故答案是 24

【点评】本题主要考查等差数列的性质及项与项间的内在联系.

15. (5分) 已知 OA 为球 O 的半径，过 OA 的中点 M 且垂直于 OA 的平面截球面得到圆 M . 若圆 M 的面积为 3π ，则球 O 的表面积等于 $\underline{16\pi}$.



【考点】LG：球的体积和表面积.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】由题意求出圆M的半径，设出球的半径，二者与OM构成直角三角形，
求出球的半径，然后可求球的表面积.

【解答】解：∵圆M的面积为 3π ，∴圆M的半径 $r=\sqrt{3}$ ，

设球的半径为R，

由图可知， $R^2=\frac{1}{4}R^2+3$ ，∴ $\frac{3}{4}R^2=3$ ，∴ $R^2=4$.

∴ $S_{球}=4\pi R^2=16\pi$.

故答案为： 16π

【点评】本题是基础题，考查球的体积、表面积的计算，理解并能够应用小圆的半径、球的半径、以及球心与圆心的连线的关系，是本题的突破口，解题重点所在，仔细体会.

16. (5分) 若直线m被两平行线 $l_1: x - y + 1 = 0$ 与 $l_2: x - y + 3 = 0$ 所截得的线段的长为 $2\sqrt{2}$ ，则m的倾斜角可以是① 15° ② 30° ③ 45° ④ 60° ⑤ 75° 其中正确答案的序号是①或⑤ (写出所有正确答案的序号)

【考点】 l_2 : 直线的倾斜角; $N1$: 平行截割定理.

【专题】11: 计算题; 15: 综合题; 16: 压轴题.

【分析】先求两平行线间的距离，结合题意直线m被两平行线 l_1 与 l_2 所截得的线段的长为 $2\sqrt{2}$ ，求出直线m与 l_1 的夹角为 30° ，推出结果.

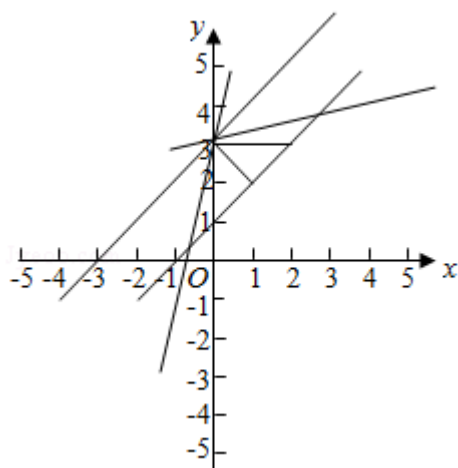
【解答】解：两平行线间的距离为 $d=\frac{|3-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$ ，

由图知直线m与 l_1 的夹角为 30° ， l_1 的倾斜角为 45° ，

所以直线m的倾斜角等于 $30^\circ+45^\circ=75^\circ$ 或 $45^\circ-30^\circ=15^\circ$.

故填写①或⑤

故答案为：①或⑤



【点评】 本题考查直线的斜率、直线的倾斜角，两条平行线间的距离，考查数形结合的思想.

三、解答题（共6小题，满分70分）

17. （10分） 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公比是正数的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，已知 $a_1=1$ ， $b_1=3$ ， $a_3+b_3=17$ ， $T_3 - S_3=12$ ，求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式

【考点】 8M： 等差数列与等比数列的综合.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q>0$ ，由题得

$$\begin{cases} 1+2d+3q^2=17 \\ 3q^2+3q+3-(3+3d)=12, \text{ 由此能得到 } \{a_n\}, \{b_n\} \text{ 的通项公式.} \\ q>0 \end{cases}$$

【解答】 解： 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q>0$ ，

$$\text{由题得} \begin{cases} 1+2d+3q^2=17 \\ 3q^2+3q+3-(3+3d)=12, \\ q>0 \end{cases}$$

解得 $q=2$ ， $d=2$

$$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1, \quad b_n=3 \cdot 2^{n-1}.$$

【点评】 本小题考查等差数列与等比数列的通项公式、前 n 项和，基础题.

18. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角A、B、C的对边长分别为a、b、c, 已知 $a^2 - c^2 = 2b$, 且 $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$, 求b.

【考点】HR: 余弦定理.

【分析】根据正弦定理和余弦定理将 $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$ 化成边的关系, 再根据 $a^2 - c^2 = 2b$ 即可得到答案.

【解答】解: 法一: 在 $\triangle ABC$ 中 $\because \sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$,

则由正弦定理及余弦定理有:

$$a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 3 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot c,$$

化简并整理得: $2(a^2 - c^2) = b^2$.

又由已知 $a^2 - c^2 = 2b \therefore 4b = b^2$.

解得 $b = 4$ 或 $b = 0$ (舍);

法二: 由余弦定理得: $a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \cos A$.

又 $a^2 - c^2 = 2b$, $b \neq 0$.

所以 $b = 2c \cos A + 2$ ① 又 $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$,

$\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C = 4 \cos A \sin C \sin(A + C) = 4 \cos A \sin C$,

即 $\sin B = 4 \cos A \sin C$ 由正弦定理得 $\sin B = \frac{b}{c} \sin C$,

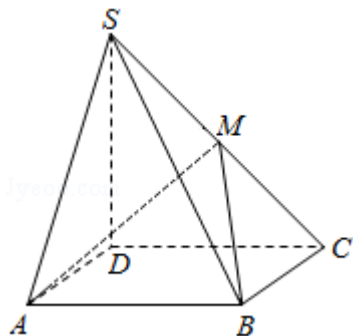
故 $b = 4c \cos A$ ② 由①, ②解得 $b = 4$.

【点评】本题主要考查正弦定理和余弦定理的应用. 属基础题.

19. (12分) 如图, 四棱锥S - ABCD中, 底面ABCD为矩形, $SD \perp$ 底面ABCD, $AD = \sqrt{2}$, $DC = SD = 2$, 点M在侧棱SC上, $\angle ABM = 60^\circ$

(I) 证明: M是侧棱SC的中点;

(II) 求二面角S - AM - B的大小.



【考点】LO：空间中直线与直线之间的位置关系；MJ：二面角的平面角及求法

【专题】11：计算题；14：证明题.

【分析】（Ⅰ）法一：要证明M是侧棱SC的中点，作 $MN \parallel SD$ 交CD于N，作 $NE \perp AB$ 交AB于E，连ME、NB，则 $MN \perp$ 面ABCD， $ME \perp AB$ ， $NE = AD = \sqrt{2}$ ，设 $MN = x$ ，则 $NC = EB = x$ ，解 $RT\triangle MNE$ 即可得x的值，进而得到M为侧棱SC的中点；

法二：分别以DA、DC、DS为x、y、z轴如图建立空间直角坐标系D - xyz，并求出S点的坐标、C点的坐标和M点的坐标，然后根据中点公式进行判断；

法三：分别以DA、DC、DS为x、y、z轴如图建立空间直角坐标系D - xyz，构造空间向量，然后数乘向量的方法来证明.

（Ⅱ）我们可以以D为坐标原点，分别以DA、DC、DS为x、y、z轴如图建立空间直角坐标系D - xyz，我们可以利用向量法求二面角S - AM - B的大小.

【解答】证明：（Ⅰ）作 $MN \parallel SD$ 交CD于N，作 $NE \perp AB$ 交AB于E，

连ME、NB，则 $MN \perp$ 面ABCD， $ME \perp AB$ ， $NE = AD = \sqrt{2}$

设 $MN = x$ ，则 $NC = EB = x$ ，

在 $RT\triangle MEB$ 中， $\because \angle MBE = 60^\circ \therefore ME = \sqrt{3}x$.

在 $RT\triangle MNE$ 中由 $ME^2 = NE^2 + MN^2 \therefore 3x^2 = x^2 + 2$

解得 $x = 1$ ，从而 $MN = \frac{1}{2}SD \therefore M$ 为侧棱SC的中点M.

（Ⅰ）证法二：分别以DA、DC、DS为x、y、z轴如图建立空间直角坐标系D - xyz，则 $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ ， $B(\sqrt{2}, 2, 0)$ ， $C(0, 2, 0)$ ， $S(0, 0, 2)$.

设 $M(0, a, b)$ ($a > 0, b > 0$)，

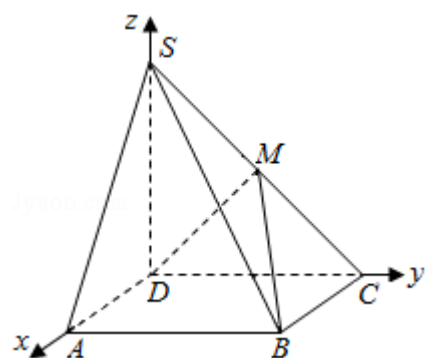
则 $\overrightarrow{BA} = (0, -2, 0)$ ， $\overrightarrow{BM} = (-\sqrt{2}, a-2, b)$ ， $\overrightarrow{SM} = (0, a, b-2)$ ， $\overrightarrow{SC} = (0, 2, -2)$ ，

$$\text{由题得} \begin{cases} \cos \langle \overrightarrow{BABM} \rangle = \frac{1}{2}, \\ \overrightarrow{SM} \parallel \overrightarrow{SC} \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{-2(a-2)}{2 \cdot \sqrt{(a-2)^2 + b^2 + 2}} = \frac{1}{2} \\ -2a = 2(b-2) \end{cases}$$

解之个方程组得 $a=1$, $b=1$ 即 $M(0, 1, 1)$

所以 M 是侧棱 SC 的中点.



(I) 证法三: 设 $\overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{MC}$,

$$\text{则 } M(0, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{2}{1+\lambda}), \overrightarrow{MB} = (\sqrt{2}, \frac{2}{1+\lambda}, \frac{-2}{1+\lambda})$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AB} \rangle = 60^\circ$$

$$\text{故 } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{MB}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } \frac{4}{1+\lambda} = \sqrt{2 + (\frac{2}{1+\lambda})^2 + (\frac{2}{1+\lambda})^2},$$

解得 $\lambda=1$, 所以 M 是侧棱 SC 的中点.

$$(II) \text{ 由 (I) 得 } M(0, 1, 1), \overrightarrow{MA} = (\sqrt{2}, -1, -1),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AS} = (-\sqrt{2}, 0, 2), \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0),$$

设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 分别是平面 SAM 、 MAB 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AS} = 0 \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases},$$

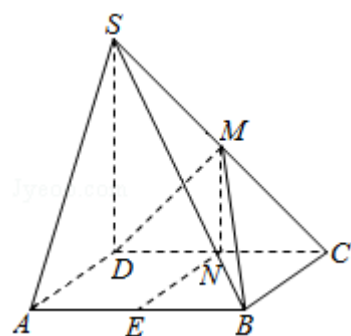
$$\text{即} \begin{cases} \sqrt{2}x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ -\sqrt{2}x_1 + 2z_1 = 0 \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} \sqrt{2}x_2 - y_2 - z_2 = 0 \\ 2y_2 = 0 \end{cases}$$

分别令 $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$ 得 $z_1 = 1, y_1 = 1, y_2 = 0, z_2 = 2$,

即 $\vec{n}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1), \vec{n}_2 = (\sqrt{2}, 0, 2)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{2+0+2}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

二面角 $S-AM-B$ 的大小 $\pi - \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.



【点评】 空间两条直线夹角的余弦值等于他们方向向量夹角余弦值的绝对值；
空间直线与平面夹角的余弦值等于直线的方向向量与平面的法向量夹角的正弦值；

空间锐二面角的余弦值等于他的两个半平面方向向量夹角余弦值的绝对值；

20. (12分) 甲、乙二人进行一次围棋比赛，约定先胜3局者获得这次比赛的胜利，比赛结束. 假设在一局中，甲获胜的概率为0.6，乙获胜的概率为0.4，各局比赛结果相互独立. 已知前2局中，甲、乙各胜1局.

(I) 求再赛2局结束这次比赛的概率；

(II) 求甲获得这次比赛胜利的概率.

【考点】 C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

【专题】 12: 应用题.

【分析】 根据题意，记“第*i*局甲获胜”为事件 A_i ($i=3, 4, 5$)， “第*j*局甲获胜”为事件 B_j ($j=3, 4, 5$)，

(1) “再赛2局结束这次比赛”包含“甲连胜3、4局”与“乙连胜3、4局”两个互斥的事件，而每局比赛之间是相互独立的，进而计算可得答案，

(2) 若“甲获得这次比赛胜利”，即甲在后3局中，甲胜2局，包括3种情况，根据概率的计算方法，计算可得答案.

【解答】解：记“第*i*局甲获胜”为事件 A_i ($i=3, 4, 5$)，

“第*j*局甲获胜”为事件 B_j ($j=3, 4, 5$)。

(Ⅰ) 设“再赛2局结束这次比赛”为事件 A ，则 $A=A_3 \bullet A_4 + B_3 \bullet B_4$ ，

由于各局比赛结果相互独立，

$$\begin{aligned} \text{故 } P(A) &= P(A_3 \bullet A_4 + B_3 \bullet B_4) = P(A_3 \bullet A_4) + P(B_3 \bullet B_4) = P(A_3) P(A_4) + P(B_3) P(B_4) \\ &= 0.6 \times 0.6 + 0.4 \times 0.4 = 0.52. \end{aligned}$$

(Ⅱ) 记“甲获得这次比赛胜利”为事件 H ，

因前两局中，甲、乙各胜1局，

故甲获得这次比赛胜利当且仅当在后面的比赛中，

甲先胜2局，从而 $B=A_3 \bullet A_4 + B_3 \bullet A_4 \bullet A_5 + A_3 \bullet B_4 \bullet A_5$ ，

由于各局比赛结果相互独立，

$$\begin{aligned} \text{故 } P(H) &= P(A_3 \bullet A_4 + B_3 \bullet A_4 \bullet A_5 + A_3 \bullet B_4 \bullet A_5) \\ &= P(A_3 \bullet A_4) + P(B_3 \bullet A_4 \bullet A_5) + P(A_3 \bullet B_4 \bullet A_5) \\ &= P(A_3) P(A_4) + P(B_3) P(A_4) P(A_5) + P(A_3) P(B_4) P(A_5) \\ &= 0.6 \times 0.6 + 0.4 \times 0.6 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 \times 0.6 = 0.648 \end{aligned}$$

【点评】本小题考查互斥事件有一个发生的概率、相互独立事件同时发生的概率，解题之前，要分析明确事件间的关系，一般先按互斥事件分情况，再由相互独立事件的概率公式，进行计算。

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ) 设点 P 在曲线 $y=f(x)$ 上，若该曲线在点 P 处的切线 l 通过坐标原点，求 l 的方程.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】16：压轴题.

【分析】(1) 利用导数求解函数的单调性的方法步骤进行求解.

(2) 根据已知，只需求出 $f(x)$ 在点 P 处的导数，即斜率，就可以求出切线方

程.

【解答】解：（Ⅰ） $f'(x) = 4x^3 - 6x = 4x(x + \frac{\sqrt{6}}{2})(x - \frac{\sqrt{6}}{2})$

令 $f'(x) > 0$ 得 $-\frac{\sqrt{6}}{2} < x < 0$ 或 $x > \frac{\sqrt{6}}{2}$;

令 $f'(x) < 0$ 得 $x < -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $0 < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$

因此， $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ 和 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$ 为增函数；

在区间 $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ 和 $(0, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 为减函数.

（Ⅱ）设点 $P(x_0, f(x_0))$,

由 l 过原点知， l 的方程为 $y = f'(x_0)x$,

因此 $f(x_0) = f'(x_0)x_0$, 即 $x_0^4 - 3x_0^2 + 6 - x_0(4x_0^3 - 6x_0) = 0$,

整理得 $(x_0^2 + 1)(x_0^2 - 2) = 0$, 解得 $x_0 = -\sqrt{2}$ 或 $x_0 = \sqrt{2}$.

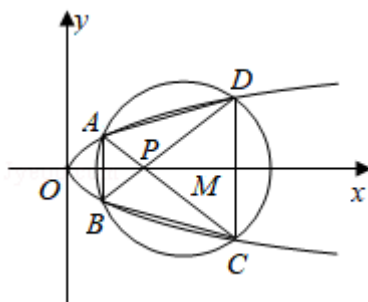
所以的方程为 $y = 2\sqrt{2}x$ 或 $y = -2\sqrt{2}x$

【点评】本题比较简单，是一道综合题，主要考查函数的单调性、利用导数的几何意义求切线方程等函数基础知识，应熟练掌握.

22. (12分) 如图，已知抛物线 $E: y^2 = x$ 与圆 $M: (x - 4)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于A、B、C、D四个点.

（Ⅰ）求 r 的取值范围；

（Ⅱ）当四边形ABCD的面积最大时，求对角线AC、BD的交点P的坐标.



【考点】IR：两点间的距离公式；JF：圆方程的综合应用；K8：抛物线的性质.

【专题】15：综合题；16：压轴题.

【分析】（1）先联立抛物线与圆的方程消去 y ，得到 x 的二次方程，根据抛物线 $E: y^2=x$ 与圆 $M: (x-4)^2+y^2=r^2 (r>0)$ 相交于A、B、C、D四个点的充要条件是此方程有两个不相等的正根，可求出 r 的范围。

（2）先设出四点A、B、C、D的坐标再由（1）中的 x 二次方程得到两根之和、两根之积，表示出面积并求出其的平方值，最后根据三次均值不等式确定得到最大值时的点P的坐标。

【解答】解：（I）将抛物线 $E: y^2=x$ 代入圆 $M: (x-4)^2+y^2=r^2 (r>0)$ 的方程，

消去 y^2 ，整理得 $x^2 - 7x + 16 - r^2 = 0$ （1）

抛物线 $E: y^2=x$ 与圆 $M: (x-4)^2+y^2=r^2 (r>0)$ 相交于A、B、C、D四个点的充要条件是：

方程（1）有两个不相等的正根

$$\therefore \begin{cases} 49-4(16-r^2) > 0 \\ x_1+x_2=7 > 0 \\ x_1 \cdot x_2=16-r^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} r < \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ 或 } r > \frac{\sqrt{15}}{2} \\ -4 < r < 4 \end{cases}$$

解这个方程组得 $\frac{\sqrt{15}}{2} < r < 4$ ， $r \in (\frac{\sqrt{15}}{2}, 4)$ 。

（II）设四个交点的坐标分别为

$$A(x_1, \sqrt{x_1}), B(x_1, -\sqrt{x_1}), C(x_2, -\sqrt{x_2}), D(x_2, \sqrt{x_2}).$$

则直线AC、BD的方程分别为 $y - \sqrt{x_1} = \frac{-\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ ， $y + \sqrt{x_1} = \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1}$

$$(x - x_1),$$

解得点P的坐标为 $(\sqrt{x_1 x_2}, 0)$ ，

则由（I）根据韦达定理有 $x_1+x_2=7$ ， $x_1 x_2=16-r^2$ ， $r \in (\frac{\sqrt{15}}{2}, 4)$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |x_2 - x_1| (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = |x_2 - x_1| (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$$

$$\therefore S^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2](x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}) = (7 + 2\sqrt{16 - r^2})(4r^2 - 15)$$

$$\text{令 } \sqrt{16 - r^2} = t,$$

则 $S^2 = (7 + 2t)^2(7 - 2t)$ 下面求 S^2 的最大值.

由三次均值有:

$$\begin{aligned} S^2 &= (7 + 2t)^2(7 - 2t) = \frac{1}{2}(7 + 2t)(7 + 2t)(14 - 4t) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{7 + 2t + 7 + 2t + 14 - 4t}{3} \right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{28}{3} \right)^3 \end{aligned}$$

当且仅当 $7 + 2t = 14 - 4t$, 即 $t = \frac{7}{6}$ 时取最大值.

经检验此时 $r \in (\frac{\sqrt{15}}{2}, 4)$ 满足题意.

故所求的点 P 的坐标为 $(\frac{7}{6}, 0)$.

【点评】 本题主要考查抛物线和圆的综合问题. 圆锥曲线是高考必考题, 要强化复习.