2016年普通高等学校招生全国统一考试

上海　数学试卷（理工农医类）

考生注意：

1. 本试卷共4页，23道试题，满分150分. 考试时间120分钟.
2. 本考试分设试卷和答题纸. 试卷包括试题与答题要求. 作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分.
3. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．设$x\in R$,则不等式$|x-3|<1$的解集为____________.

【答案】（2,4）

【解析】试题分析：

由题意得：$-1<x-3<1$，解得$2<x<4$.

考点：绝对值不等式的基本解法.

2．设$z=\frac{3+2i}{i}$，其中i为虚数单位，则$\operatorname{Im}z=$____________.

【答案】-3

【解析】

试题分析：

$$z=\frac{3+2i}{i}=2-3i,\operatorname{Im}z=-3.$$

考点：1.复数的运算；2.复数的概念.

3．已知平行直线$l_1:2x+y-1=0,l_2:2x+y+1=0$，则$l_1$与$l_2$的距离是____________.

【答案】$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】试题分析：

利用两平行线间的距离公式得$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-1-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

考点：两平行线间距离公式.

4．某次体检，6位同学的身高（单位：米）分别为1.72，1.78，1.75，1.80，1.69，1.77，则这组数据的中位数是________（米）．

【答案】1.76

【解析】试题分析：

将这 6 位同学的身高按照从低到高排列为：1.69,1.72,1.75，1.77,1.78，1.80，这六个数的中位数是 1.75 与 1.77 的平均数，显然为 1.76. 学.科.网

考点：中位数的概念.

5．已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图像上，则 $f(x)$的反函数$f^{-1}(x)=$________．

【答案】$\log_2(x-1)$

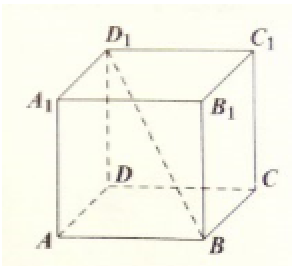
【解析】试题分析：

将点（3，9）代入函数 $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=1+\mathrm{a}^{\mathrm{x}}$ 中得 $\mathrm{a}=2$，所以 $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=1+2^{\mathrm{x}}$，用 y 表示 x 得

$\mathrm{x}=\log_2(\mathrm{y}-1)$，所以 $\mathrm{f}^{-1}\left(\mathrm{x}\right)=\log_2(\mathrm{x}-1)$.

考点：反函数的概念以及指、对数式的转化.

6．如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 的边长为3，BD_1 与底面所成的角的大小为 $\arctan\dfrac{2}{3}$，则该正四棱柱的高等于__________.



【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】试题分析：

连结BD，则由题意得 $\tan\angle DBD_1=\dfrac{DD_1}{BD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{DD_1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow DD_1=2\sqrt{2}$.

考点：线面角

7．方程 $3\sin x=1+\cos 2x$ 在区间 $\left[0,2\pi\right]$ 上的解为_________.

【答案】$\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

【解析】试题分析：

化简$3\sin x=1+\cos 2x$得：$3\sin x=2-2\sin^2 x$，所以$2\sin^2 x+3\sin x-2=0$，解得

$\sin x=\frac{1}{2}$或$\sin x=-2$（舍去），又$x\in[0,2\pi]$，所以$x=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.

考点：二倍角公式及三角函数求值.

8．在$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}\right)^n$的二项展开式中，所有项的二项式系数之和为256，则常数项等于________.

【答案】112

【解析】试题分析：

由二项式定理得：所有项的二项式系数之和为2^n，即$2^n=256$，所以$n=8$，又二项展开式的通项为$T_{r+1}=C_8^r(\sqrt[3]{x})^{8-r}(-\frac{2}{x})^r=(-2)^rC_8^r x^{\frac{8}{3}-\frac{4}{3}r}$，令$\frac{8}{3}-\frac{4}{3}r=0$，所以$r=2$，所以

$T_3=112$，即常数项为112.

考点：二项式定理.

9．已知ΔABC的三边长分别为3,5,7，则该三角形的外接圆半径等于________.

【答案】$\frac{7\sqrt{3}}{3}$

【解析】试题分析：

利用余弦定理可求得最大边7所对应角的余弦值为$\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$，所以此角的正弦值

为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，由正弦定理得$2R=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,所以$R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

考点：正弦、余弦定理.

10．设$a>0,b>0$.若关于x,y的方程组$\begin{cases}ax+y=1\\x+by=1\end{cases}$，无解，则$a+b$的取值范围是____________.

【答案】$(2,+\infty)$

【解析】试题分析：

将方程组中上面的式子化简得 $y=1-ax$，代入下面的式子整理得 $(1-ab)x=1-b$，方程组无解应该满足 $1-ab=0$ 且 $1-b\neq 0$，所以 $ab=1$ 且 $b\neq 1$，所以由基本不等式得 $a+b>2\sqrt{ab}=2$，即 $a+b$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

考点：方程组的思想以及基本不等式的应用.

11．无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若对任意 $n\in \mathrm{N}^*$，$S_n\in\{2,3\}$，则 k 的最大值为________.

【答案】4

【解析】试题分析：

当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 或 $a_1=3$；当 $n\geqslant 2$ 时，若 $S_n=2$，$S_{n-1}=2$，于是 $a_n=0$，若 $S_n=3$，$S_{n-1}=3$，于是 $a_n=0$，从而存在 $k\in\mathbf{N}^*$，当 $n\geqslant k$ 时，$a_k=0$.所以要涉及最多的不同的项数列 $\{a_n\}$ 可以为：2, 1, -1, 0, 0…，从而可看出 $k_{\max}=4$. 学科.网

考点：数列的项与和.

12．在平面直角坐标系中，已知 A（1,0），B（0，-1），P 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上一个动点，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是_____________.

【答案】$[0,1+\sqrt{2}]$

【解析】试题分析：

由题意设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\alpha\in[0,\pi]$，则 $\overrightarrow{BP}=(\cos\alpha,1+\sin\alpha)$，又 $\overrightarrow{BA}=(1,1)$，所以

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}=\cos\alpha+\sin\alpha+1=\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})+1\in[0,1+\sqrt{2}]$.

考点：1.数量积的运算；2.数形结合的思想.

13.设 $a,b\in R,c\in[0,2\pi)$.若对任意实数 x 都有 $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=a\sin(bx+c)$，则满足条件的有序实数组 (a,b,c) 的组数为____.

【答案】4

【解析】试题分析：

当 $a=2$ 时，$\sin(3x-\frac{\pi}{3})=\sin(3x-\frac{\pi}{3}+2\pi)=\sin(3x+\frac{5\pi}{3})$，$(b,c)=(3,\frac{5\pi}{3})$，又

$\sin(3x-\frac{\pi}{3})=\sin[\pi-(3x-\frac{\pi}{3})]=\sin(-3x+\frac{4\pi}{3})$，$(b,c)=(-3,\frac{4\pi}{3})$，注意到 $c\in[0,2\pi)$

，所以只有2组：$(2,3,\frac{5\pi}{3})$，$(2,-3,\frac{4\pi}{3})$满足题意；当 $a=-2$ 时，同理可得出满足题意的

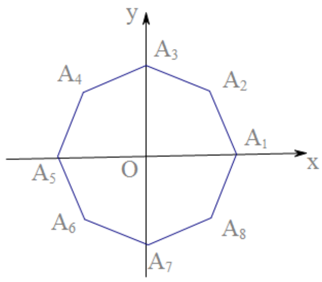
(a,b,c)也有2组，故共有4组.

考点：三角函数

14.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，O为正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的中心，$A_1(1,0)$.任取不同

的两点 A_i,A_j，点P满足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}=\vec{0}$，则点$P$落在第一象限的概率是____________

_.



【答案】$\frac{5}{28}$

【解析】试题分析：

共有 $C_8^2=28$ 种基本事件，其中使点P落在第一象限的情况有 $C_3^2+2=5$ 种，故所求概率为

$\frac{5}{28}$.

考点：古典概型

二、**选择题**（本大题共有4题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得五分，否则一律得零分.

15.设 $a\in R$，则“$a>1$”是“$a^2>1$”的（　）.

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　（D）既非充分也非必要条件

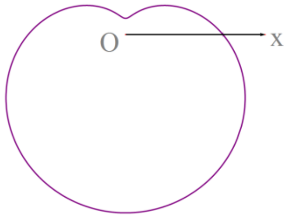
【答案】A

【解析】试题分析：

$a>1\Rightarrow a^2>1, a^2>1\Rightarrow a>1或a<-1$，所以“$a>1$”是“$a^2>1$”的充分非必要条件，选A.

考点：充要条件

16.下列极坐标方程中，对应的曲线为如图的是（　）.



（A）$\rho=6+5\cos\theta$　　（B）$\rho=6+5\sin\theta$

（C）$\rho=6-5\cos\theta$　　（D）$\rho=6-5\sin\theta$

【答案】D

【解析】试题分析：

依次取 $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$，结合图形可知只有 $\rho=6-5\sin\theta$ 满足，选D.

考点：极坐标方程

17.已知无穷等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.下列条件中，使得$2S_n<S\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$恒成立的是（　）.

（A）$a_1>0, 0.6<q<0.7$　　（B）$a_1<0, -0.7<q<-0.6$

（C）$a_1>0, 0.7<q<0.8$　　（D）$a_1<0, -0.8<q<-0.7$

【答案】B

【解析】试题分析：

由题意得：$S_n=a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}=S(0<|q|<1)$，所以$2a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}<a_1\cdot\dfrac{1}{1-q}(0<|q|<1)$对一切正整数恒成立，当$a_1>0$时，$q^n>\dfrac{1}{2}$不恒成立，舍去；当$a_1<0$时，$q^n<\dfrac{1}{2}\Rightarrow q^2<\dfrac{1}{2}$，因此选 B.

考点：1.数列的极限；2.等比数列求和.

18．设$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$是定义域为R的三个函数，对于命题：①若$f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$均是增函数，则$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$中至少有一个增函数；②若$f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$均是以T为周期的函数，则$f(x)$、$g(x)$、

$h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，下列判断正确的是（　）.

（A）①和②均为真命题　　（B）①和②均为假命题

（C）①为真命题，②为假命题 （D）①为假命题，②为真命题

【答案】D

【解析】

试题分析：

因为 $f(x)=\dfrac{[f(x)+g(x)]+[f(x)+h(x)]-[g(x)+h(x)]}{2}$，所以

$f(x+T)=\dfrac{[f(x+T)+g(x+T)]+[f(x+T)+h(x+T)]-[g(x+T)+h(x+T)]}{2}$,又 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、 $g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，所以

$f(x+T)=\dfrac{[f(x)+g(x)]+[f(x)+h(x)]-[g(x)+h(x)]}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，同理可得 $g(x)$、$h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，②正确； $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个增函数包含一个增函数、两个减函数；两个增函数、一个减函数；三个增函数，其中当三个函数中一个为增函数、另两个为减函数时，由于减函数加减函数一定为减函数，所以①不正确.选D.

考点：1.抽象函数；2.函数的单调性；3.函数的周期性.

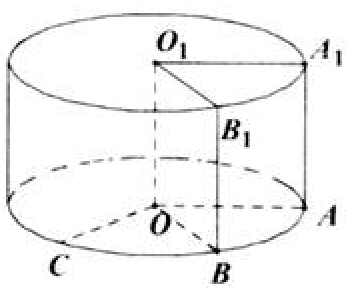
三、解答题（本大题共有5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19.（本题满分12分）本题共有2个小题，第一小题满分6分，第二小题满分6分.

将边长为1的正方形 AA_1O_1O（及其内部）绕的 OO_1 旋转一周形成圆柱，如图，$\overset{\frown}{AC}$ 长为 $\dfrac{2}{3}\pi$，$\overset{\frown}{A_1B_1}$ 长为 $\dfrac{\pi}{3}$，其中 B_1 与 C 在平面 AA_1O_1O 的同侧.

（1）求三棱锥 $C-O_1A_1B_1$ 的体积；

（2）求异面直线 B_1C 与 AA_1 所成的角的大小.



【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$；（2）$\dfrac{\pi}{4}$.

【解析】

试题分析：（1）由题意可知，圆柱的高 $h=1$，底面半径 $r=1$，$\angle A_1O_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$，再由三角形面积公式计算 $S_{\Delta O_1A_1B_1}$ 后即得.

（2）设过点 B_1 的母线与下底面交于点 B，根据 $BB_1//AA_1$，知 $\angle CB_1B$ 或其补角为直线 B_1C 与 AA_1 所成的角，再结合题设条件确定 $\angle COB=\dfrac{\pi}{3}$，$CB=1$．得出 $\angle CB_1B=\dfrac{\pi}{4}$ 即可.

试题解析：（1）由题意可知，圆柱的高 $h=1$，底面半径 $r=1$.

由 $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 的长为 $\dfrac{\pi}{3}$，可知 $\angle A_1O_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$.

$$S_{\Delta O_1A_1B_1}=\frac{1}{2}O_1A_1\cdot O_1B_1\cdot\sin\angle A_1O_1B_1=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$V_{C-O_1A_1B_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta O_1A_1B_1}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

（2）设过点 B_1 的母线与下底面交于点 B，则 $BB_1//AA_1$，

所以 $\angle CB_1B$ 或其补角为直线 B_1C 与 AA_1 所成的角.

由 $\overset{\frown}{AC}$ 长为 $\dfrac{2\pi}{3}$，可知 $\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$，

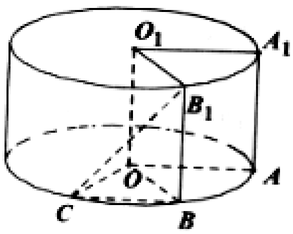
又 $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\angle COB=\dfrac{\pi}{3}$，

从而 ΔCOB 为等边三角形，得 $CB=1$.

因为 $B_1B\perp$ 平面 AOC，所以 $B_1B\perp CB$． 学科&网

在 ΔCB_1B 中，因为 $\angle B_1BC=\dfrac{\pi}{2}$，$CB=1$，$B_1B=1$，所以 $\angle CB_1B=\dfrac{\pi}{4}$，

从而直线 B_1C 与 AA_1 所成的角的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.

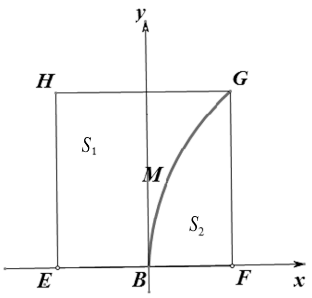


考点：1.几何体的体积；2.空间角.

20．（本题满分14）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

有一块正方形菜地 $EFGH$, EH 所在直线是一条小河.收获的蔬菜可送到 F 点或河边运走.

于是，菜地分为两个区域 S_1 和 S_2，其中 S_1 中的蔬菜运到河边较近，S_2 中的蔬菜运到 F 点较近，而菜地内 S_1 和 S_2 的分界线 C 上的点到河边与到 F 点的距离相等，现建立平面直角坐标系，其中原点 O 为 EF 的中点，点 F 的坐标为（1,0），如图.



（1）求菜地内的分界线 C 的方程;

（2）菜农从蔬菜运量估计出 S_1 面积是 S_2 面积的两倍，由此得到 S_1 面积的“经验值”为 $\dfrac{8}{3}$.设 M 是 C 上纵坐标为1的点，请计算以 EH 为一边、另有一边过点 M 的矩形的面积，及五边形 $EOMGH$ 的面积，并判断哪一个更接近于 S_1 面积的经验值.

【答案】（1） $y^2=4x$（$0<y<2$）；（2）矩形面积为 $\dfrac{5}{2}$，五边形面积为 $\dfrac{11}{4}$，五边形面积更接近于 S_1 面积的“经验值”.

【解析】

试题分析：（1）由C上的点到直线EH与到点F的距离相等，知C是以F为焦点、以EH为准线的抛物线在正方形EFGH内的部分.

（2）通过计算矩形面积，五边形面积，以及计算矩形面积与“经验值”之差的绝对值，五边形面积与“经验值”之差的绝对值，比较二者大小即可.

试题解析：（1）因为C上的点到直线EH与到点F的距离相等，所以C是以F为焦点、以

EH为准线的抛物线在正方形EFGH内的部分，其方程为$y^2=4x$（$0<y<2$）.

（2）依题意，点M的坐标为$\left(\frac{1}{4},1\right)$.

所求的矩形面积为$\frac{5}{2}$，而所求的五边形面积为$\frac{11}{4}$.

矩形面积与“经验值”之差的绝对值为$\left|\frac{5}{2}-\frac{8}{3}\right|=\frac{1}{6}$，而五边形面积与“经验值”之差

的绝对值为$\left|\frac{11}{4}-\frac{8}{3}\right|=\frac{1}{12}$，所以五边形面积更接近于$S_1$面积的“经验值”.

考点：1.抛物线的定义及其标准方程；2.面积计算.

21.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

双曲线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，直线$l$过$F_2$且与双曲线交于

A、B两点.

（1）若l的倾斜角为$\frac{\pi}{2}$，ΔF_1AB是等边三角形，求双曲线的渐近线方程；

（2）设$b=\sqrt{3}$，若l的斜率存在，且$(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求$l$的斜率.

【答案】（1）$y=\pm\sqrt{2}x$；（2）$\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$.

【解析】

试题分析：（1）设$A(x_A,y_A)$，根据题设条件得到$4(1+b^2)=3b^4$，从而解得b^2的值.

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线$l: y=k(x-2)$与双曲线方程联立，得到一元二次方程，根据l与双曲线交于两点，可得$k^2-3\neq0$，且$\Delta=36(1+k^2)>0$. 再设AB的中点为$M(x_M,y_M)$，由$\left(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$即$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，从而得到$k_{F_1M}\cdot k=-1$，进而构建关于$k$的方程求解即可.

试题解析：（1）设$A(x_A,y_A)$.

由题意，$F_2(c,0)$，$c=\sqrt{1+b^2}$，$y_A^2=b^2(c^2-1)=b^4$，

因为ΔF_1AB是等边三角形，所以$2c=\sqrt{3}|y_A|$，

即$4(1+b^2)=3b^4$，解得$b^2=2$.

故双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$.

（2）由已知，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$. 学.科.网

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线$l: y=k(x-2)$. 显然$k\neq 0$.

由$\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \\ y=k(x-2) \end{cases}$，得$(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$.

因为l与双曲线交于两点，所以$k^2-3\neq 0$，且$\Delta=36(1+k^2)>0$.

设AB的中点为$M(x_M,y_M)$.

由$(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B})\cdot\overrightarrow{AB}=0$即$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，知$F_1M\perp AB$，故$k_{F_1M}\cdot k=-1$.

而$x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$，$y_M=k(x_M-2)=\dfrac{6k}{k^2-3}$，$k_{F_1M}=\dfrac{3k}{2k^2-3}$，

所以$\dfrac{3k}{2k^2-3}\cdot k=-1$，得$k^2=\dfrac{3}{5}$，故$l$的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

考点：1.双曲线的几何性质；2.直线与双曲线的位置关系；3.平面向量的数量积.

22.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分.

已知$a\in R$，函数$f(x)=\log_2(\dfrac{1}{x}+a)$.

（1）当$a=5$时，解不等式$f(x)>0$；

（2）若关于x的方程$f(x)-\log_2[(a-4)x+2a-5]=0$的解集中恰好有一个元素，求$a$的取值范围；

（3）设$a>0$，若对任意$t\in[\dfrac{1}{2},1]$，函数$f(x)$在区间$[t,t+1]$上的最大值与最小值的差不

超过1，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(0,+\infty)$；（2）$(1,2]\cup\{3,4\}$；（3）$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

【解析】

试题分析：（1）由 $\log_2\left(\frac{1}{x}+5\right)>0$，得 $\frac{1}{x}+5>1$，从而得解.

（2）将其转化为 $(a-4)x^2+(a-5)x-1=0$，讨论当 $a=4$、$a=3$ 时，以及 $a\neq3$ 且 $a\neq4$ 时的情况即可.

（3）讨论 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，再确定函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值之差，从而得到 $at^2+(a+1)t-1\geq0$，对任意 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 成立.

试题解析：（1）由 $\log_2\left(\frac{1}{x}+5\right)>0$，得 $\frac{1}{x}+5>1$，

解得 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(0,+\infty)$.

（2）$\frac{1}{x}+a=(a-4)x+2a-5$，$(a-4)x^2+(a-5)x-1=0$，

当 $a=4$ 时，$x=-1$，经检验，满足题意.

当 $a=3$ 时，$x_1=x_2=-1$，经检验，满足题意.

当 $a\neq3$ 且 $a\neq4$ 时，$x_1=\frac{1}{a-4}$，$x_2=-1$，$x_1\neq x_2$.

x_1 是原方程的解当且仅当 $\frac{1}{x_1}+a>0$，即 $a>2$；

x_2 是原方程的解当且仅当 $\frac{1}{x_2}+a>0$，即 $a>1$.

于是满足题意的 $a\in(1,2]$.

综上，a 的取值范围为 $(1,2]\cup\{3,4\}$.

（3）当 $0<x_1<x_2$ 时，$\frac{1}{x_1}+a>\frac{1}{x_2}+a$，$\log_2\left(\frac{1}{x_1}+a\right)>\log_2\left(\frac{1}{x_2}+a\right)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值分别为 $f(t)$，$f(t+1)$.

$f(t)-f(t+1)=\log_2\left(\frac{1}{t}+a\right)-\log_2\left(\frac{1}{t+1}+a\right)\le 1$ 即 $at^2+(a+1)t-1\ge 0$，对任意

$t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 成立. 学科.网

因为 $a>0$，所以函数 $y=at^2+(a+1)t-1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，$t=\frac{1}{2}$ 时，y

有最小值 $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}$，由 $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}\ge 0$，得 $a\ge\frac{2}{3}$.

故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

考点：1.对数函数的性质；2.函数与方程；3.二次函数的性质.

23.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分.

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：只要 $a_p=a_q(p,q\in\mathrm{N}^*)$，必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$，则称 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

（1）若 $\{a_n\}$ 具有性质 P，且 $a_1=1,a_2=2,a_4=3,a_5=2$，$a_6+a_7+a_8=21$，求 a_3；

（2）若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$b_1=c_5=1$，$b_5=c_1=81$，$a_n=b_n+c_n$，判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（3）设 $\{b_n\}$ 是无穷数列，已知 $a_{n+1}=b_n+\sin a_n(n\in\mathrm{N}^*)$.求证："对任意 $a_1,\{a_n\}$ 都具有性质 P"的充要条件为"$\{b_n\}$ 是常数列".

【答案】（1）16；（2）$\{a_n\}$ 不具有性质 P，理由见解析；（3）见解析.

【解析】

试题分析：（1）根据已知条件，得到$a_6+a_7+a_8=a_3+3+2$，结合$a_6+a_7+a_8=21$求解即可.

（2）根据$\{b_n\}$的公差为20，$\{c_n\}$的公比为$\frac{1}{3}$，写出通项公式，从而可得

$a_n=b_n+c_n=20n-19+3^{5-n}$.

通过计算$a_1=a_5=82$，$a_2=48$，$a_6=\frac{304}{3}$，$a_2\ne a_6$，即知$\{a_n\}$不具有性质P.

（3）从充分性、必要性两方面加以证明，其中必要性用反证法证明.

试题解析：（1）因为$a_5=a_2$，所以$a_6=a_3$，$a_7=a_4=3$，$a_8=a_5=2$.

于是$a_6+a_7+a_8=a_3+3+2$，又因为$a_6+a_7+a_8=21$，解得$a_3=16$.

（2）$\{b_n\}$的公差为20，$\{c_n\}$的公比为$\frac{1}{3}$，

所以$b_n=1+20(n-1)=20n-19$，$c_n=81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3^{5-n}$.

$a_n=b_n+c_n=20n-19+3^{5-n}$.

$a_1=a_5=82$，但$a_2=48$，$a_6=\frac{304}{3}$，$a_2\ne a_6$，

所以$\{a_n\}$不具有性质P.

[证]（3）充分性：

当$\{b_n\}$为常数列时，$a_{n+1}=b_1+\sin a_n$.

对任意给定的a_1，只要$a_p=a_q$，则由$b_1+\sin a_p=b_1+\sin a_q$，必有$a_{p+1}=a_{q+1}$.

充分性得证.

必要性：

用反证法证明．假设$\{b_n\}$不是常数列，则存在$k\in\mathrm{N}^*$，

使得$b_1=b_2=\cdots=b_k=b$，而$b_{k+1}\ne b$.

下面证明存在满足$a_{n+1}=b_n+\sin a_n$的$\{a_n\}$，使得$a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}$，但$a_{k+2}\ne a_{k+1}$.

设$f(x)=x-\sin x-b$，取$m\in\mathrm{N}^*$，使得$m\pi>|b|$，则

$f(m\pi)=m\pi-b>0$，$f(-m\pi)=-m\pi-b<0$，故存在 c 使得 $f(c)=0$.

取 $a_1=c$，因为 $a_{n+1}=b+\sin a_n$（$1\le n\le k$），所以 $a_2=b+\sin c=c=a_1$，

依此类推，得 $a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}=c$.

但 $a_{k+2}=b_{k+1}+\sin a_{k+1}=b_{k+1}+\sin c\ne b+\sin c$，即 $a_{k+2}\ne a_{k+1}$.

所以 $\{a_n\}$ 不具有性质P，矛盾.

必要性得证.

综上，“对任意 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质P”的充要条件为“$\{b_n\}$ 是常数列”.

考点：1.等差数列、等比数列的通项公式；2.充要条件的证明；3.反证法.