# 2014年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共12小题，每小题5分）

1．（5分）已知集合A={x|$x^2$﹣2x﹣3≥0}，B={x|﹣2≤x＜2}，则A∩B=（　　）

A．[1，2）　　B．[﹣1，1]　　C．[﹣1，2）　　D．[﹣2，﹣1]

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】求出A中不等式的解集确定出A，找出A与B的交集即可．

【解答】解：由A中不等式变形得：（x﹣3）（x+1）≥0，

解得：x≥3或x≤﹣1，即A=（﹣∞，﹣1]∪[3，+∞），

∵B=[﹣2，2），

∴A∩B=[﹣2，﹣1]．

故选：D．

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．（5分）$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$=（　　）

A．1+i　　B．1﹣i　　C．﹣1+i　　D．﹣1﹣i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】5N：数系的扩充和复数．

【分析】由条件利用两个复数代数形式的乘除法，虚数单位i的幂运算性质，计算求得结果．

【解答】解：$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=\frac{2i(1+i)}{-2i}$=﹣（1+i）=﹣1﹣i，

故选：D．

【点评】本题主要考查两个复数代数形式的乘除法，虚数单位i的幂运算性质，

属于基础题.

3. （5分）设函数f（x），g（x）的定义域都为R，且f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，则下列结论正确的是（　　）

A. f（x）•g（x）是偶函数　　B. |f（x）|•g（x）是奇函数

C. f（x）•|g（x）|是奇函数　　D. |f（x）•g（x）|是奇函数

【考点】3K：函数奇偶性的性质与判断.

【专题】51：函数的性质及应用.

【分析】根据函数奇偶性的性质即可得到结论.

【解答】解：∵f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，

∴f（﹣x）=﹣f（x），g（﹣x）=g（x），

f（﹣x）•g（﹣x）=﹣f（x）•g（x），故函数是奇函数，故A错误，

|f（﹣x）|•g（﹣x）=|f（x）|•g（x）为偶函数，故B错误，

f（﹣x）•|g（﹣x）|=﹣f（x）•|g（x）|是奇函数，故C正确.

|f（﹣x）•g（﹣x）|=|f（x）•g（x）|为偶函数，故D错误，

故选：C.

【点评】本题主要考查函数奇偶性的判断，根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键.

4. （5分）已知F为双曲线C：$x^2-my^2=3m$（m＞0）的一个焦点，则点F到C的一条渐近线的距离为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 3　　C. $\sqrt{3}m$　　D. 3m

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】双曲线方程化为标准方程，求出焦点坐标，一条渐近线方程，利用点到直线的距离公式，可得结论.

【解答】解：双曲线C：$x^2-my^2=3m$（m＞0）可化为$\frac{x^2}{3m}-\frac{y^2}{3}=1$，

∴一个焦点为（$\sqrt{3m+3}$，0），一条渐近线方程为 $x+\sqrt{m}y=0$，

∴点F到C的一条渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3m+3}}{\sqrt{1+m}}=\sqrt{3}$.

故选：A.

【点评】本题考查双曲线的方程与性质，考查点到直线的距离公式，属于基础题.

5. （5分）4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{7}{8}$

【考点】C6：等可能事件和等可能事件的概率.

【专题】11：计算题；5I：概率与统计.

【分析】求得4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动、周六、周日都有同学参加公益活动的情况，利用古典概型概率公式求解即可.

【解答】解：4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，共有$2^4=16$种情况，

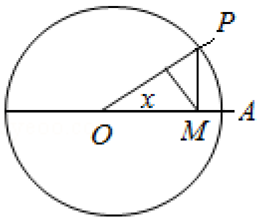
周六、周日都有同学参加公益活动，共有$2^4-2=16-2=14$种情况，

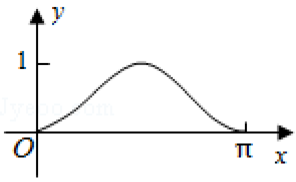
∴所求概率为$\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$.

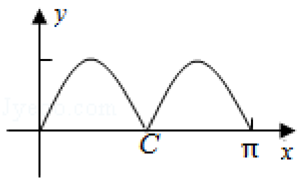
故选：D.

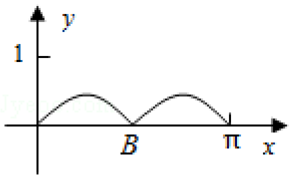
【点评】本题考查古典概型，是一个古典概型与排列组合结合的问题，解题时先要判断该概率模型是不是古典概型，再要找出随机事件A包含的基本事件的个数和试验中基本事件的总数.

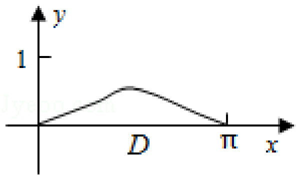
6. （5分）如图，圆O的半径为1，A是圆上的定点，P是圆上的动点，角x的始边为射线OA，终边为射线OP，过点P作直线OA的垂线，垂足为M，将点M到直线OP的距离表示为x的函数f（x），则y=f（x）在[0，π]的图象大致为（　　）




A. 


B. 


C. 


D. 


【考点】3P：抽象函数及其应用．

【专题】57：三角函数的图像与性质．

【分析】在直角三角形OMP中，求出OM，注意长度、距离为正，再根据直角三角形的锐角三角函数的定义即可得到f（x）的表达式，然后化简，分析周期和最值，结合图象正确选择．

【解答】解：在直角三角形OMP中，OP=1，∠POM=x，则OM=$|\cos x|$，

∴点M到直线OP的距离表示为x的函数f（x）=OM$|\sin x|$

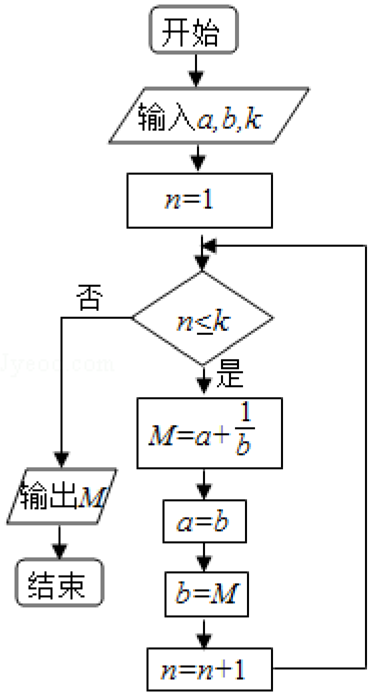
$=|\cos x|\bullet|\sin x|=\frac{1}{2}|\sin 2x|$，

其周期为$T=\frac{\pi}{2}$，最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为0，

故选：C．

【点评】本题主要考查三角函数的图象与性质，正确表示函数的表达式是解题的关键，同时考查二倍角公式的运用．

7．（5分）执行如图的程序框图，若输入的a，b，k分别为1，2，3，则输出的M=（　　）




A．$\frac{20}{3}$　　B．$\frac{7}{2}$　　C．$\frac{16}{5}$　　D．$\frac{15}{8}$

【考点】EF：程序框图．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】根据框图的流程模拟运行程序，直到不满足条件，计算输出M的值．

【解答】解：由程序框图知：第一次循环$M=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，a=2，$b=\frac{3}{2}$，n=2；

第二次循环$M=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$，$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{8}{3}$，n=3；

第三次循环$M=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$，$a=\frac{8}{3}$，$b=\frac{15}{8}$，n=4．

不满足条件n≤3，跳出循环体，输出$M=\frac{15}{8}$．

故选：D．

【点评】本题考查了当型循环结构的程序框图，根据框图的流程模拟运行程序是解答此类问题的常用方法．

8．（5分）设α∈（0，$\frac{\pi}{2}$），β∈（0，$\frac{\pi}{2}$），且$\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则（　　）

A．$3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B．$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　C．$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D．$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

【考点】GF：三角函数的恒等变换及化简求值.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】化切为弦，整理后得到sin（α﹣β）=cosα，由该等式左右两边角的关系可排除选项A，B，然后验证C满足等式sin（α﹣β）=cosα，则答案可求.

【解答】解：由$\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，得：

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，

即sinαcosβ=cosαsinβ+cosα，

$\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$，

∵$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

∴当$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$时，$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$成立.

故选：C.

【点评】本题考查三角函数的化简求值，训练了利用排除法及验证法求解选择题，是基础题.

9．（5分）不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\x-2y\leqslant 4\end{cases}$的解集记为D，有下列四个命题：

$p_1$：∀（x，y）∈D，x+2y≥﹣2 $p_2$：∃（x，y）∈D，x+2y≥2

$p_3$：∀（x，y）∈D，x+2y≤3$p_4$：∃（x，y）∈D，x+2y≤﹣1

其中真命题是（　　）

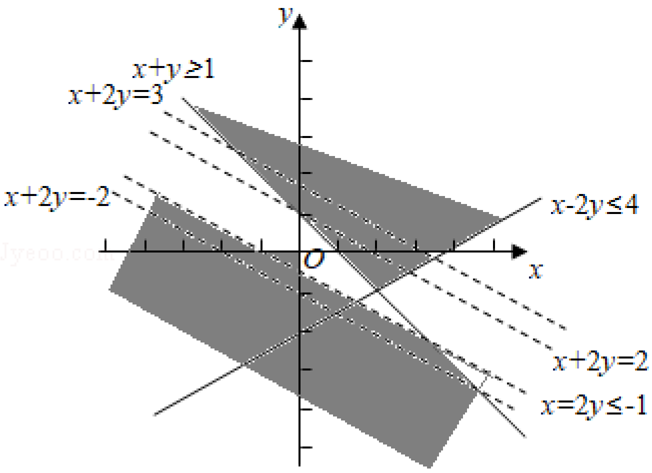
A．$p_2$，$p_3$　　B．$p_1$，$p_4$　　C．$p_1$，$p_2$　　D．$p_1$，$p_3$

【考点】2K：命题的真假判断与应用；7A：二元一次不等式的几何意义.

【专题】59：不等式的解法及应用；5L：简易逻辑.

【分析】作出不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\x-2y\leqslant 4\end{cases}$的表示的区域D，对四个选项逐一分析即可.

【解答】解：作出图形如下：




由图知，区域D为直线x+y=1与x﹣2y=4相交的上部角型区域，

$p_1$：区域D在x+2y≥﹣2 区域的上方，故：∀（x，y）∈D，x+2y≥﹣2成立；

$p_2$：在直线x+2y=2的右上方和区域D重叠的区域内，∃（x，y）∈D，x+2y≥2，故$p_2$：∃（x，y）∈D，x+2y≥2正确；

$p_3$：由图知，区域D有部分在直线x+2y=3的上方，因此$p_3$：∀（x，y）∈D，x+2y≤3错误；

$p_4$：x+2y≤﹣1的区域（左下方的虚线区域）恒在区域D下方，故$p_4$：∃（x，y）∈D，x+2y≤﹣1错误；

综上所述，$p_1$、$p_2$正确；

故选：C．

【点评】本题考查命题的真假判断与应用，着重考查作图能力，熟练作图，正确分析是关键，属于难题．

10．（5分）已知抛物线C：$y^2=8x$的焦点为F，准线为l，P是l上一点，Q是直线PF与C的一个交点，若$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则|QF|=（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　B．3　　C．$\frac{5}{2}$　　D．2

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】求得直线PF的方程，与$y^2=8x$联立可得x=1，利用|QF|=d可求．

【解答】解：设Q到l的距离为d，则|QF|=d，

$\because \overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，

∴|PQ|=3d，

∴不妨设直线PF的斜率为$-\frac{2\sqrt{2}d}{d}=-2\sqrt{2}$，

∵F（2，0），

∴直线PF的方程为$y=-2\sqrt{2}(x-2)$，

与$y^2=8x$联立可得x=1，

∴|QF|=d=1+2=3，

故选：B．

【点评】本题考查抛物线的简单性质，考查直线与抛物线的位置关系，属于基础题．

11．（5分）已知函数$f(x)=ax^3-3x^2+1$，若f（x）存在唯一的零点$x_0$，且$x_0>0$，则实数a的取值范围是（　　）

A．（1，+∞）　B．（2，+∞）　C．（﹣∞，﹣1）　D．（﹣∞，﹣2）

【考点】53：函数的零点与方程根的关系．

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用；53：导数的综合应用．

【分析】由题意可得$f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$，f（0）=1；分类讨论确定函数的零点的个数及位置即可．

【解答】解：∵$f(x)=ax^3-3x^2+1$，

∴$f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$，f（0）=1；

①当a=0时，$f(x)=-3x^2+1$有两个零点，不成立；

②当a＞0时，$f(x)=ax^3-3x^2+1$在（﹣∞，0）上有零点，故不成立；

③当a＜0时，$f(x)=ax^3-3x^2+1$在（0，+∞）上有且只有一个零点；

故$f(x)=ax^3-3x^2+1$在（﹣∞，0）上没有零点；

而当$x=\frac{2}{a}$时，$f(x)=ax^3-3x^2+1$在（﹣∞，0）上取得最小值；

故$f\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{8}{a^2}-3\bullet\frac{4}{a^2}+1>0$；

故a＜﹣2；

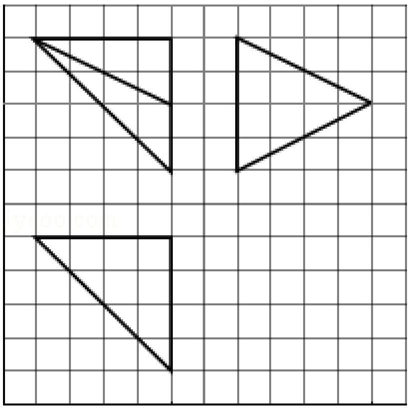
综上所述，

实数a的取值范围是（﹣∞，﹣2）；

故选：D．

【点评】本题考查了导数的综合应用及分类讨论的思想应用，同时考查了函数的零点的判定的应用，属于基础题．

12．（5分）如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为（　　）



A．$6\sqrt{2}$　　B．6　　C．$4\sqrt{2}$　　D．4

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

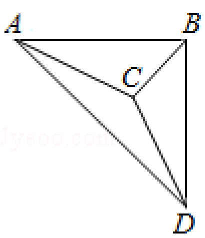
【分析】画出图形，结合三视图的数据求出棱长，推出结果即可．

【解答】解：几何体的直观图如图：AB=4，BD=4，C到BD的中点的距离为：4，

$\therefore BC=CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$．AC=$\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}$=6，AD=$4\sqrt{2}$，

显然AC最长．长为6．

故选：B．



【点评】本题考查三视图求解几何体的棱长，考查计算能力．

## 二、填空题（共4小题，每小题5分）

13．（5分）（x﹣y）（x+y）$^8$的展开式中$x^2y^7$的系数为＿﹣20＿．（用数字填写答案）

【考点】DA：二项式定理．

【专题】11：计算题；5P：二项式定理．

【分析】由题意依次求出（x+y）$^8$中$xy^7$，$x^2y^6$，项的系数，求和即可．

【解答】解：（x+y）$^8$的展开式中，含$xy^7$的系数是：8．

含$x^2y^6$的系数是28，

∴（x﹣y）（x+y）$^8$的展开式中$x^2y^7$的系数为：8﹣28=﹣20．

故答案为：﹣20

【点评】本题考查二项式定理系数的性质，二项式定理的应用，考查计算能力．

14．（5分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过A，B，C三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过B城市；

乙说：我没去过C城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为＿A＿．

【考点】F4：进行简单的合情推理．

【专题】5M：推理和证明．

【分析】可先由乙推出，可能去过A城市或B城市，再由甲推出只能是A，B中的一个，再由丙即可推出结论．

【解答】解：由乙说：我没去过C城市，则乙可能去过A城市或B城市，

但甲说：我去过的城市比乙多，但没去过B城市，则乙只能是去过A，B中的任一个，

再由丙说：我们三人去过同一城市，

则由此可判断乙去过的城市为A．

故答案为：A．

【点评】本题主要考查简单的合情推理，要抓住关键，逐步推断，是一道基础题．

15．（5分）已知A，B，C为圆O上的三点，若$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$），则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为__90°__．

【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】根据向量之间的关系，利用圆直径的性质，即可得到结论．

【解答】解：在圆中若$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$），

即$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

即$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$的和向量是过A，O的直径，

则以AB，AC为邻边的四边形是矩形，

则$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，

即$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为90°，

故答案为：90°

【点评】本题主要考查平面向量的夹角的计算，利用圆直径的性质是解决本题的关键，比较基础．

16．（5分）已知a，b，c分别为△ABC的三个内角A，B，C的对边，a=2且（2+b）（sinA﹣sinB）=（c﹣b）sinC，则△ABC面积的最大值为__$\sqrt{3}$__．

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理．

【专题】11：计算题；35：转化思想；48：分析法；58：解三角形．

【分析】由正弦定理化简已知可得$2a-b^2=c^2-bc$，结合余弦定理可求A的值，由基本不等式可求$bc\le 4$，再利用三角形面积公式即可计算得解.

【解答】解：因为：（2+b）（sinA﹣sinB）=（c﹣b）sinC

⇒（2+b）（a﹣b）=（c﹣b）c

⇒$2a-2b+ab-b^2=c^2-bc$，

又因为：a=2，

所以：$a^2-b^2=c^2-bc\Rightarrow b^2+c^2-a^2=bc\Rightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{3}$，

△ABC面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，

而$b^2+c^2-a^2=bc$

⇒$b^2+c^2-bc=a^2$

⇒$b^2+c^2-bc=4$

⇒$bc\le 4$

所以：$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$，即△ABC面积的最大值为$\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

【点评】本题主要考查了正弦定理，余弦定理，基本不等式，三角形面积公式在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于中档题.

## 三、解答题

17．（12分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n$，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中λ为常数.

（Ⅰ）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$

（Ⅱ）是否存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由.

【考点】83：等差数列的性质；8H：数列递推式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】（Ⅰ）利用$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，相减即可得出；

（Ⅱ）假设存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列，设公差为d．可得$\lambda=a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=2d$，$d=\dfrac{\lambda}{2}$．得到$\lambda S_n=\dfrac{\lambda^2}{4}n^2+(\lambda-\dfrac{\lambda^2}{4})n+2-\dfrac{\lambda}{2}$，根据$\{a_n$

}为等差数列的充要条件是$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 2-\dfrac{\lambda}{2}=0\end{cases}$，解得λ即可.

【解答】（Ⅰ）证明：∵$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，

∴$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$

∵$a_{n+1}\neq 0$，

∴$a_{n+2}-a_n=\lambda$.

（Ⅱ）解：假设存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列，设公差为d.

则$\lambda=a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=2d$，

∴$d=\dfrac{\lambda}{2}$.

∴$a_n=1+\dfrac{\lambda(n-1)}{2}$，$a_{n+1}=1+\dfrac{\lambda n}{2}$，

∴$\lambda S_n=1+\left[1+\dfrac{\lambda(n-1)}{2}\right]\left[1+\dfrac{\lambda n}{2}\right]=\dfrac{\lambda^2}{4}n^2+\left(\lambda-\dfrac{\lambda^2}{4}\right)n+2-\dfrac{\lambda}{2}$，

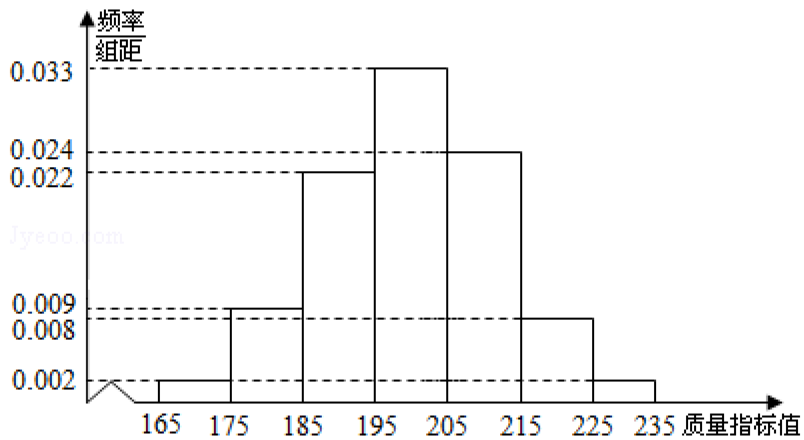
根据$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 2-\dfrac{\lambda}{2}=0\end{cases}$，解得λ=4.

此时可得$S_n=n^2$，$a_n=2n-1$.

因此存在λ=4，使得$\{a_n\}$为等差数列.

【点评】本题考查了递推式的意义、等差数列的通项公式及其前n项和公式、等差数列的充要条件等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力、分类讨论的思想方法，属于难题.

18. （12分）从某企业生产的某种产品中抽取500件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求这500件产品质量指标值的样本平均数$\overline{x}$和样本方差$s^2$（同一组中数据用该组区间的中点值作代表）；

（Ⅱ）由直方图可以认为，这种产品的质量指标值Z服从正态分布N（$\mu$，$\sigma^2$），其中$\mu$近似为样本平均数$\overline{x}$，$\sigma^2$近似为样本方差$s^2$.

（i）利用该正态分布，求P（187.8<Z<212.2）；

（ii）某用户从该企业购买了100件这种产品，记X表示这100件产品中质量指标值位于区间（187.8，212.2）的产品件数，利用（i）的结果，求EX.

附：$\sqrt{150}$≈12.2.

若Z～N（$\mu$，$\sigma^2$）则P（$\mu-\sigma$<Z<$\mu+\sigma$）=0.6826，P（$\mu-2\sigma$<Z<$\mu+2\sigma$）=0.9544.

【考点】CH：离散型随机变量的期望与方差；CP：正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

【专题】11：计算题；5I：概率与统计.

【分析】（Ⅰ）运用离散型随机变量的期望和方差公式，即可求出；

（Ⅱ）（i）由（Ⅰ）知Z～N（200，150），从而求出P（187.8<Z<212.2），注意运用所给数据；

（ii）由（i）知X～B（100，0.6826），运用EX=np即可求得.

【解答】解：（Ⅰ）抽取产品的质量指标值的样本平均数$\overline{x}$和样本方差$s^2$分别为：

$\overline{x}=170\times0.02+180\times0.09+190\times0.22+200\times0.33+210\times0.24+220\times0.08+230\times0.02=200$，

$s^2=(-30)^2\times0.02+(-20)^2\times0.09+(-10)^2\times0.22+0\times0.33+10^2\times0.24+20^2\times0.08+30^2\times0.02=150$.

（Ⅱ）（i）由（Ⅰ）知Z～N（200，150），从而P（187.8<Z<212.2）=P（200－12.2<Z<200+12.2）=0.6826；

（ii）由（i）知一件产品的质量指标值位于区间（187.8，212.2）的概率为0.6826，

依题意知X～B（100，0.6826），所以EX=100×0.6826=68.26.

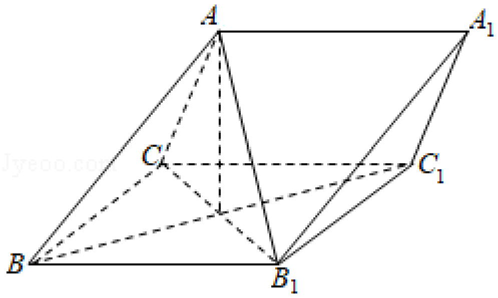
【点评】本题主要考查离散型随机变量的期望和方差，以及正态分布的特点及

概率求解，考查运算能力.

19. （12分）如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面$BB_1C_1C$为菱形，$AB\perp B_1C$.

（Ⅰ）证明：$AC=AB_1$；

（Ⅱ）若$AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60°$，$AB=BC$，求二面角$A-A_1B_1-C_1$的余弦值.




【考点】M7：空间向量的夹角与距离求解公式；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】5H：空间向量及应用.

【分析】（1）连结$BC_1$，交$B_1C$于点O，连结AO，可证$B_1C\perp$平面ABO，可得$B_1C\perp AO$，$B_10=CO$，进而可得$AC=AB_1$；

（2）以O为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为x轴的正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长度，$\overrightarrow{OB_1}$的方向为y轴的正方向，$\overrightarrow{OA}$的方向为z轴的正方向建立空间直角坐标系，分别可得两平面的法向量，可得所求余弦值.

【解答】解：（1）连结$BC_1$，交$B_1C$于点O，连结AO，

∵侧面$BB_1C_1C$为菱形，

∴$BC_1\perp B_1C$，且O为$BC_1$和$B_1C$的中点，

又∵$AB\perp B_1C$，∴$B_1C\perp$平面ABO，

∵$AO\subset$平面ABO，∴$B_1C\perp AO$，

又$B_10=CO$，∴$AC=AB_1$，

（2）∵$AC\perp AB_1$，且O为$B_1C$的中点，∴$AO=CO$，

又∵$AB=BC$，∴$\triangle BOA\cong\triangle BOC$，∴$OA\perp OB$，

∴OA，OB，$OB_1$两两垂直，

以O为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为x轴的正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长度，

$\overrightarrow{OB_1}$的方向为y轴的正方向，$\overrightarrow{OA}$的方向为z轴的正方向建立空间直角坐标系，

∵$\angle CBB_1=60°$，∴$\triangle CBB_1$为正三角形，又AB=BC，

∴A（0，0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$），B（1，0，0，），$B_1$（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，0），C（0，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，0）

∴$\overrightarrow{AB_1}$=（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$），$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$=（1，0，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$），$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}$=（﹣1，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，0），

设向量$\vec{n}$=（x，y，z）是平面$AA_1B_1$的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=x-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，可取$\vec{n}$=（1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$），

同理可得平面$A_1B_1C_1$的一个法向量$\vec{m}$=（1，﹣$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$），

∴$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{7}$，

∴二面角$A-A_1B_1-C_1$的余弦值为$\frac{1}{7}$

【点评】本题考查空间向量法解决立体几何问题，建立坐标系是解决问题的关键，属中档题．

20．（12分）已知点A（0，﹣2），椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，F是椭圆的右焦点，直线AF的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O为坐标原点．

（Ⅰ）求E的方程；

（Ⅱ）设过点A的直线l与E相交于P，Q两点，当△OPQ的面积最大时，求l的方程．

【考点】K4：椭圆的性质；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（Ⅰ）通过离心率得到a、c关系，通过A求出a，即可求E的方程；

（Ⅱ）设直线l：$y=kx-2$，设P（$x_1$，$y_1$），Q（$x_2$，$y_2$）将$y=kx-2$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，利用△>0，求出k的范围，利用弦长公式求出|PQ|，然后求出△OPQ的面积表达式，利用换元法以及基本不等式求出最值，然后求解直线方程．

【解答】解：（Ⅰ）设F（c，0），由条件知$\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得$c=\sqrt{3}$又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以a=2，$b^2=a^2-c^2=1$，故E的方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．….（5分）

（Ⅱ）依题意当l⊥x轴不合题意，故设直线l：$y=kx-2$，设P（$x_1$，$y_1$），Q（$x_2$，$y_2$）

将$y=kx-2$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得$(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$，

当$\Delta=16(4k^2-3)>0$，即$k^2>\frac{3}{4}$时，$x_{1,2}=\frac{8k\pm2\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

从而$|PQ|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

又点O到直线PQ的距离$d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，所以△OPQ的面积$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=\frac{4\sqrt{4K^2-3}}{1+4K^2}$，

设$\sqrt{4k^2-3}=t$，则$t>0$，$S_{\triangle OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\leqslant1$，

当且仅当t=2，$k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$等号成立，且满足△>0，

所以当△OPQ的面积最大时，l的方程为：$y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$或$y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$．…（12分）

【点评】本题考查直线与椭圆的位置关系的应用，椭圆的求法，基本不等式的应用，考查转化思想以及计算能力．

21．（12分）设函数$f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线$y=f(x)$在点（1，f（1））处得切线方程为$y=e(x-1)+2$．

（Ⅰ）求a、b；

（Ⅱ）证明：$f(x)>1$．

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】15：综合题；53：导数的综合应用．

【分析】（Ⅰ）求出定义域，导数f′（x），根据题意有f（1）=2，f′（1）=e，解出即可；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，f（x）＞1等价于$x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{x}$，设函数g（x）=xlnx，函数h（x）=$xe^{-x}-\frac{2}{e}$，只需证明g（x）$_{min}$＞h（x）$_{max}$，利用导数可分别求得g（x）$_{min}$，h（x）$_{max}$；

【解答】解：（Ⅰ）函数f（x）的定义域为（0，+∞），

f′（x）=$ae^{x}\ln x+\frac{a}{x}\cdot e^{x}-\frac{b}{x^{2}}\cdot e^{x-1}+\frac{b}{x}\cdot e^{x-1}$，

由题意可得f（1）=2，f′（1）=e，

故a=1，b=2；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，f（x）=$e^{x}\ln x+\frac{2}{x}\cdot e^{x-1}$，

∵f（x）＞1，∴$e^{x}\ln x+\frac{2}{x}\cdot e^{x-1}>1$，∴$\ln x>\frac{1}{e^{x}}-\frac{2}{xe}$，

∴f（x）＞1等价于$x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$，设函数g（x）=xlnx，则g′（x）=1+lnx，

∴当x∈（0，$\frac{1}{e}$）时，g′（x）＜0；当x∈（$\frac{1}{e}$，+∞）时，g′（x）＞0．

故g（x）在（0，$\frac{1}{e}$）上单调递减，在（$\frac{1}{e}$，+∞）上单调递增，从而g（x）在（0，+∞）上的最小值为g（$\frac{1}{e}$）=$-\frac{1}{e}$．

设函数h（x）=$xe^{-x}-\frac{2}{e}$，则h′（x）=$e^{-x}$（1﹣x）．

∴当x∈（0，1）时，h′（x）＞0；当x∈（1，+∞）时，h′（x）＜0，

故h（x）在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减，

从而h（x）在（0，+∞）上的最大值为h（1）=$-\frac{1}{e}$．

综上，当x＞0时，g（x）＞h（x），即f（x）＞1．

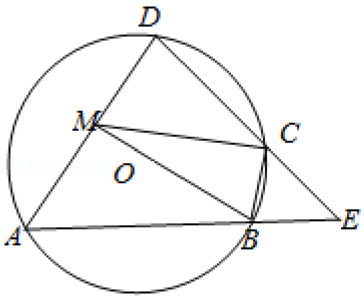
【点评】本题考查导数的几何意义、利用导数求函数的最值、证明不等式等，考查转化思想，考查学生分析解决问题的能力．

**选修4-1：几何证明选讲**

22．（10分）如图，四边形ABCD是⊙O的内接四边形，AB的延长线与DC的延长线交于点E，且CB=CE．

（Ⅰ）证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设AD不是⊙O的直径，AD的中点为M，且MB=MC，证明：△ADE为等边三角形．




【考点】NB：弦切角；NC：与圆有关的比例线段．

【专题】15：综合题；5M：推理和证明．

【分析】（Ⅰ）利用四边形ABCD是⊙O的内接四边形，可得∠D=∠CBE，由CB=CE，可得∠E=∠CBE，即可证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设BC的中点为N，连接MN，证明AD∥BC，可得∠A=∠CBE，进而可得∠A=∠E，即可证明△ADE为等边三角形．

【解答】证明：（Ⅰ）∵四边形ABCD是⊙O的内接四边形，

∴∠D=∠CBE，

∵CB=CE，

∴∠E=∠CBE，

∴∠D=∠E；

（Ⅱ）设BC的中点为N，连接MN，则由MB=MC知MN⊥BC，

∴O在直线MN上，

∵AD不是⊙O的直径，AD的中点为M，

∴OM⊥AD，

∴AD∥BC，

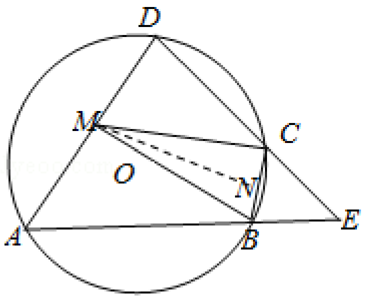
∴∠A=∠CBE，

∵∠CBE=∠E，

∴∠A=∠E，

由（Ⅰ）知，∠D=∠E，

∴△ADE为等边三角形．




【点评】本题考查圆的内接四边形性质，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

**选修4-4：坐标系与参数方程**

23．已知曲线C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，直线l：$\begin{cases}x=2+t\\ y=2-2t\end{cases}$（t为参数）

（Ⅰ）写出曲线C的参数方程，直线l的普通方程．

（Ⅱ）过曲线C上任意一点P作与l夹角为30°的直线，交l于点A，求|PA|的最大值与最小值．

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合；QH：参数方程化成普通方程．

【专题】5S：坐标系和参数方程．

【分析】（Ⅰ）联想三角函数的平方关系可取x=2cosθ、y=3sinθ得曲线C的参数方程，直接消掉参数t得直线l的普通方程；

（Ⅱ）设曲线C上任意一点P（2cosθ，3sinθ）．由点到直线的距离公式得到P到直线l的距离，除以

sin30°进一步得到|PA|，化积后由三角函数的范围求得|PA|的最大值与最小值

．

【解答】解：（Ⅰ）对于曲线C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，可令x=2cosθ、y=3sinθ，

故曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$，（θ为参数）．

对于直线l：$\begin{cases}x=2+t & ①\\y=2-2t & ②\end{cases}$，

由①得：t=x﹣2，代入②并整理得：2x+y﹣6=0；

（Ⅱ）设曲线C上任意一点P（2cosθ，3sinθ）．

P到直线l的距离为$d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|$．

则$|PA|=\frac{d}{\sin30^{\circ}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$，其中α为锐角．

当sin（θ+α）=﹣1时，|PA|取得最大值，最大值为$\frac{22\sqrt{5}}{5}$．

当sin（θ+α）=1时，|PA|取得最小值，最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

【点评】本题考查普通方程与参数方程的互化，训练了点到直线的距离公式，体现了数学转化思想方法，是中档题．

**选修4-5：不等式选讲**

24．若a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$．

（Ⅰ）求$a^3+b^3$的最小值；

（Ⅱ）是否存在a，b，使得2a+3b=6？并说明理由．

【考点】RI：平均值不等式．

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】（Ⅰ）由条件利用基本不等式求得ab≥2，再利用基本不等式求得$a^3+b^3$的最小值．

（Ⅱ）根据ab≥2及基本不等式求的2a+3b＞8，从而可得不存在a，b，使得2a+3b=6．

【解答】解：（Ⅰ）∵a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，

$\therefore\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，∴ab≥2，

当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时取等号．

$\because a^3+b^3\geq2\sqrt{(ab)^3}\geq2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时取等号，

$\therefore a^3+b^3$的最小值为$4\sqrt{2}$.

（Ⅱ）$\because 2a+3b\geq 2\sqrt{2a\bullet 3b}=2\sqrt{6ab}$，当且仅当$2a=3b$时，取等号.

而由（1）可知，$2\sqrt{6ab}\geq 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}>6$，

故不存在a，b，使得$2a+3b=6$成立.

【点评】本题主要考查基本不等式在最值中的应用，要注意检验等号成立条件是否具备，属于基础题.