绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数 学（理工类）

[学科网试卷总评] 稳定和创新”是2013年湖北省高考数学试卷的总体特征，既体现了新课改精神，又贴近新课程教学的实际;今年理科试卷的起点和难度较低，体现人文关怀，又注意甄别选拔功能，既强调依纲靠本，又注重适度创新。有部分题目较新颖，属于探究式问题，重点突出对学生能力的要求;

选择题与填空题重点突出新课标新增内容的知识以及高中数学六大主干知识板块内容的考察，其中新课标新增加的内容难度不大，学生在此处比较容易得分;主干知识依然突出对基本概念、基本思想和基本方法的考察。此外，选择题第9题考察了期望，题目较简单，计算量略大;填空题13题依然与去年一样考察了柯西不等式，学生只用考虑等式成立条件，就可以轻松解出此题，填空题14题考察了推理与证明，与去年相似，总体突出对学生归纳总结能力的考察;

解答题第一个解三角形的题比较常规，学生只需要注意边角转化，正确运用正弦定理就可以解出此题，数列题第一问求的是等差数列的通项公式，考生运用等比数列性质求解即可，第二问属于数列与不等式综合的存在性问题，难度适中，与平时练习区别不大。

立体几何，第一问属于探究式问题，第二问与传统的求线面角或已知线面角判断点的位置有所不同，需要学生先用参数求出所需要的角，再证明一个恒等式。第19题这次没有考分布列与期望，第一问考的是正态分布，好在题目提供了公式与参考数据，学生虽平时复习时易忽略此处，但相信大部分考生依然能正确解出此题，第二问属于线性规划的应用题，考生一般都能解出但应注意格式，这个其实也在警示我们复习时要注意那些我们容易忽略的考点。

圆锥曲线第一问考上只需要考虑一个特殊情况即可，可以很轻松解出此题，第二问其实只是将第一问的结论一般化，计算量较大，但总体难度较去年减小。

压轴题依然考察的是导数与不等式的综合问题，学生第一问一般都能得分，第二问是利用第一问结论去证明，考生只需将所需证明结论还原为第一问函数形式即可，第三问总体难度较大。

本试卷重视对常规思想方法的考查，如数形结合、分类讨论、化归转化等思想方法，学生应用能力，分析能力，以及心理素质都得到了考查。试卷对能力的考查全面且重点突出，特别对空间想象能力、推理论证能力、数据处理能力以及应用意识的要求较高。

今年新课标高考数学试题对我们今后数学教学和复习有很大启示：注重回归课本、扎实基础，努力提高学生的能力，在教学中要体现过程教学，精选习题，有效训练。倡导理性思维，强化探究能力的培养是高中数学教与学的大势所趋，而尊重学生的个性差异，因材施教，突出复习的针对性与实效性则是取得考试成功的良方.

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 在复平面内，复数 $z=\dfrac{2i}{1-i}$ (i为虚数单位) 的共轭复数对应的点位于

A.第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D.第四象限

[答案] D

[解析] $z=\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1+i$，$\bar{z}=1-i$，其对应点 $(1,-1)$ 在第四象限.

[学科网考点定位]本题考查复数乘除运算及共轭复数概念的理解，考查基本概念的理解能力.

2．已知集合为 R，集合 $A=\left\{x\mid(\frac{1}{2})^x\le 1\right\}$，$B=\{x\mid x^2-6x-8\le 0\}$，则 $A\cap C_R B=$

$A.\{x\mid x\le 0\}$　　$B.\{x\mid 2\le x\le 4\}$　　$C.\{x\mid 0\le x<2或x>4\}$　　$D.\{x\mid 0<x\le 2或x\ge 4\}$

[答案] C

[解析] $A=[0,+\infty)$，$B=[2,4]$，故 $C_R B=(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$，所以 $A\cap C_R B=[0,2)\cup(4,+\infty)$，故选 C.

[学科网考点定位]本题考查集合的运算，考查基本计算能力.

3．在一次跳伞训练中，甲、乙两位学员各跳一次．设命题 p 是“甲降落在指定范围”，q 是“乙降落在指定范围”，则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为

A．$(\neg p)\vee(\neg q)$　　B．$p\vee(\neg q)$　　C．$(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D．$p\vee q$

[答案] A

[解析] 至少有一位学员没有降落在指定范围即为甲乙中至少有一位没降落在指定范围，故可表示成为 $(\neg p)\vee(\neg q)$.

[学科网考点定位]本题考查逻辑连接词的应用，考查对基本数学概念的理解能力.

4．将函数 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x(x\in R)$ 的图像向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度后，所得到的图像关于 y 轴对称，则 m 的最小值是

A．$\dfrac{\pi}{12}$ B．$\dfrac{\pi}{6}$ C．$\dfrac{\pi}{3}$ D．$\dfrac{5\pi}{6}$

[答案] B

[解析] 易知 $y=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$，向左平移 m 个单位后得 $y=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3}+m)$，图像关于 y 轴对称，则令 $\dfrac{\pi}{3}+m=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，得 $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$，又 $m>0$，故 m 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$.选 B.

[学科网考点定位]本题考查三角函数的图像及平移变换，考查分析问题能力及转化思想.

5．已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，则双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=1$ 与 $C_2:\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}-\dfrac{x^2}{\sin^2\theta\tan^2\theta}=1$ 的

A．实轴长相等　B．虚轴长相等　C．焦距相等　D．离心率相等

[答案] D

[解析]易知 C_1 的离心率 $e_1=\frac{c_1}{a_1}=\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{a_1}=\frac{1}{\cos\theta}$，易知 C_2 的离心率

$e_2=\frac{c_2}{a_2}=\frac{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}{a_2}=\frac{\sqrt{\tan^2}}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$，故 $e_1=e_2$.故选 D.

[学科网考点定位] 本题考查椭圆的性质及同角三角函数的基本公式的综合运用，考查基本概念的理解能力及化简计算能力.

6．已知点 A（-1,1）、B（1,2）、C（-2,1）、D（3,4），则向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为

A．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{15}}{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{3\sqrt{15}}{2}$

[答案] A

[解析] $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{(2,1)\cdot(5,5)}{5\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,选 A.

[学科网考点定位]本题考查投影的定义及数量积的运算，考查概念的理解及基本运算能力.

7.一辆汽车在高速公路上行驶，由于遇到紧急情况而刹车，以速度 $v(t)=7-3t+\frac{25}{1+t}$ (t的单位：s, v的单位：m/s) 行驶至停止，在此期间汽车继续行驶的距离（单位：m）是

A．$1+25\ln 5$　　B．$8+25\ln\frac{11}{3}$　　C．$4+25\ln 5$　　D．$4+50\ln 2$

[答案] C

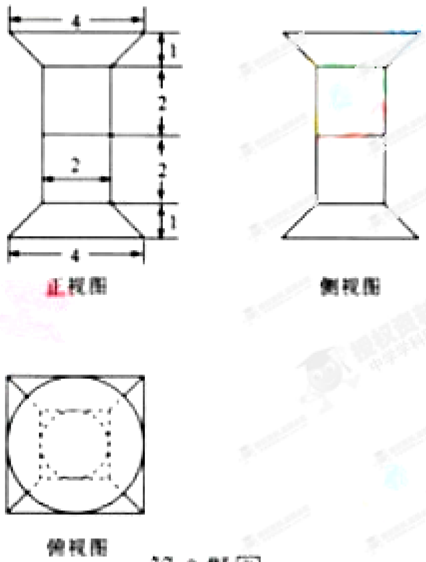
[解析]令 $v(t)=7-3t+\frac{25}{1+t}=0$，则 $t=4$, 或 $t=-\frac{8}{3}$(舍)，

刹车后继续行驶的距离 $s=\int_0^4 7-3t+\frac{25}{1+t}=[7t-\frac{3t^2}{2}+25\ln(1+t)]|_0^4=4+25\ln 5$，故选 C.

[学科网考点定位]本题考查导数及定积分的意义，考查分析问题和计算问题的能力.

8．一个几何体的三视图如图所示，该几何体从上到下由四个简单几何体组成，其体积分别为 V_1，V_2，V_3，V_4,这四个几何体为旋转体，下面两个简单几何体均为多面体，则有

$A.V_1<V_2<V_4<V_3$　　$B.V_1<V_3<V_2<V_4$　　$C.V_2<V_1<V_3<V_4$　　$D.V_2<V_3<V_1<V_4$



第 8 题图

[答案] C

[解析] 由三视图知，该几何体从上到下以此为圆台，圆柱、正方体，四棱台，故

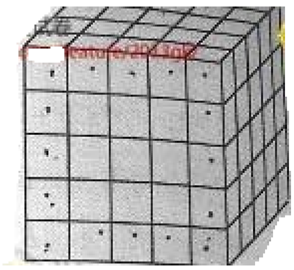
$V_1=\frac{1}{3}(4+2+1)\pi\times1=\frac{7}{3}\pi$,

$V_2=\pi\times2=2\pi, V_3=2^3=8$，$V_4=\frac{1}{3}(16+8+4)\times1=\frac{28}{3}$,故 $V_4>V_3>V_1>V_2$.故选 C.

[学科网考点定位]本题借助三视图还原实物图考查体积的计算，考查空间想象能力和计算能力.

9．如图，将一个各面都涂了油漆的正方体，切割为 125 个同样大小的小正方体，经过搅拌后，从中抽取一个小正方体，记它的涂漆面数为 X，则 X 的均值 E(X)=

A．$\frac{126}{125}$　　B．$\frac{6}{5}$　　C．$\frac{168}{125}$　　D．$\frac{7}{5}$


第 9 题图

[答案] B

[解析] 依题意，$X=0,1,2,3$,涂颜色面数为 0 的个数为 27，面数为 1 的 54 个，面数为 2 的个数 36 个，面数为 3 的个数为 8 个，故概率分别为 $P_0=\frac{27}{125}, P_1=\frac{54}{125}, P_2=\frac{36}{125}, P_3=\frac{8}{125}$,

故 $E(X)=\frac{27}{125}\times0+\frac{54}{125}\times1+\frac{36}{125}\times2+\frac{8}{125}\times3=\frac{6}{5}$.选 B.

[学科网考点定位]本题考查古典概率以及期望的求法，考查分析问题能力和计算能力.

10．已知 a 为常数，函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，则

A. $f(x_1)>0$ ， $f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$　　　B. $f(x_1)<0$ ， $f(x_2)<-\dfrac{1}{2}$

C. $f(x_1)>0$ ， $f(x_2)<-\dfrac{1}{2}$　　　D. $f(x_1)<0$ ， $f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$

[答案] D

[解析] $f'(x)=1+\ln x-2ax$,因为 a 为常数，令 $a=\dfrac{1}{4}$，则 $f'(x)=1+\ln x-\dfrac{1}{2}x$，易知 $x_1<1$，$x_2>1$，且 $x<x_1$时，$f'(x)<0$，$x_1<x<x_2$，$f'(x)>0$，$x>x_2$时，$f'(x)<0$，即函数在 $f(x_1)$ 到达极小值，在 $f(x_2)$达到极大值，而 $f(x_1)<f(1)=-\dfrac{1}{2}<0$，所以 $f(x_2)>f(1)=-\dfrac{1}{2}$，故选 D.

[学科网考点定位] 本题考查利用导数的性质考查函数的极值，考查综合分析问题的能力，难度较大.

二. 填空题：本大题共 6 小题，考生共需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，请将答案填在答题卡的对应题号的位置上，答错位置，书写不清，模棱两可均不得分.

11．从某小区抽取 100 户居民进行月用电量调查，发现其用电量都在 50 至 350 度之间，频率分布直方图如图所示。

（1）直方图中 x 的值为___________；

（2）在这些用户中，用电量落在区间[100,250)内的户数为___________.

[答案] （1）0.0044　（2）70

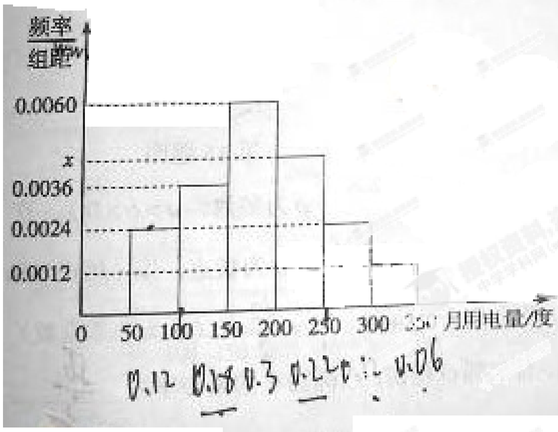
[解析] $x=\dfrac{1-(0.0012+0.0024\times 2+0.0036+0.006)\times 50}{50}=0.0044$，

用户落在$[100,250)$间的概率 $P=(0.0036+0.0044+0.0060)\times 50=0.697$，

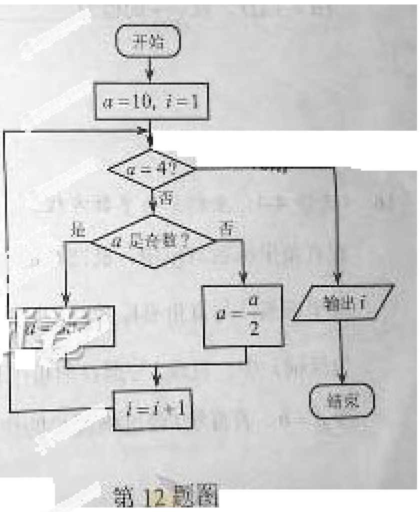
故在这个区间的用户 $0.697\times 100=70$ 人.

[学科网考点定位] 本题考查了频率直方图和由直方图求定区间概率的求法，考查观察图形及计算能力.

12.阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，输出的结果 i=___________。



第 11 题图



第 12 题图

[答案] $i=5$

[解析] 由程序框图可知，第一次执行，$a=5,i=2$，第二次执行，$a=16,i=3$，第三次执行，

$a=8,i=4$，第四次执行，$a=4,i=5$，退出循环，故输出结果为$i=5$.

[学科网考点定位]本题考查了程序框图及条件结构的判断，考查了算法的理解的理解能力和计算能力.

13．设$x,y,z\in R$，且满足：$x^2+y^2+z^2=1$，$x+2y+3z=\sqrt{14}$，则 x+y+z=__________.

[答案] $x+y+z=\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$

[解析]由柯西不等式$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)\ge(x+2y+3z)=\sqrt{14}$，所以$x^2+y^2+z^2\ge1$，又题目中

$x^2+y^2+z^2=1$，故$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$，又$x+2y+3z=\sqrt{14}$，即$x=\dfrac{\sqrt{14}}{14},y=\dfrac{2\sqrt{14}}{14},z=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，所以

$x+y+z=\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

[学科网考点定位] 本题考查了柯西不等式的应用及等号成立的条件，考查综合运用柯西不等式解题的能力.

14．古希腊毕达哥拉斯的数学家研究过各种多边形数，如三角形数 1,3,6,10,…,第 n 个三角形数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$，记第 n 个 k 边形数为 $N(n,k)(k\ge3)$，以下列出了部分 k 边形数中第 n 个数的表达式：

三角形数 $N(n,3)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}$n

正方形数 $N(n,4)=n^2$

五边形数 $N(n,5)=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}$n

六边形数 $N(n,6)=2n^2$-n

……………………………………………………………..

可以推测 N(n,k)的表达式，由此计算 N(10,24)=________________.

[答案] 1000

[解析] 依题意 $N(n,k)=\frac{k-2}{2}n^2+\frac{4-k}{2}n$，所以 $N(10,24)=\frac{24-2}{2}\times 10^2+\frac{4-24}{2}\times 10=1000$

[学科网考点定位] 本题考查了对新概念的理解能力，考查了观察规律，归纳推理能力.

（二）选考题（请考生在第 15、16 两题中任选一题作答，请现在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框图用 2B 铅笔涂黑，如果全选，则按第 15 题作答结果计分.）

15.（选修 4-1：几何证明选讲）

如图，圆 O 上一点 C 在直径 AB 上的射影为 D, 点 D 在半径 OC 上的射影为 E. 若

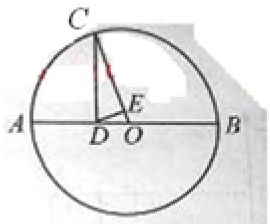
$AB=3AD, \frac{CE}{EO}$ 的值为_________________.

[答案] 8

[解析] 依题意，设

$AD=1$,则AB=3, DO=$\frac{1}{2}$, CO=$\frac{3}{2}$,所以 $CD=\sqrt{2}$, DE=$\frac{\sqrt{2}}{3}$

故CE=$\sqrt{2-\frac{2}{9}}=\frac{4}{3}$, $EO=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{2}{9}}=\frac{1}{6}$, 所以 $\frac{CE}{EO}=8$



第 15 题图

[学科网考点定位]本题考查了直角三角形中相似比问题，考查了综合分析问题的能力.

16.（选修 4-4：坐标系与参数方程）

在直线坐标系 xoy 中，椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$ $(\varphi$为参数$, a>b>0)$. 在极坐标系（与直角坐标系 xoy 取相同的长度单位，且以原点 O 为极点，以 x 轴为正半轴 为极轴）中，直线 l 与圆 O 的极坐标分别为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}m\left(m\text{为非零常数}\right)$ 与 $\rho=b$. 若直线 l 经过椭圆 C 的焦点，且与圆 O 相切，则椭圆的离心率为__________________.

[答案] $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

[解析] 椭圆的一般方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，直线方程为 $x+y=m$，圆的方程为 $x^2+y^2=b^2$，

又直线与圆相切，所以 $\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}=b$，即 $m^2=2b^2$，又直线经过椭圆 C，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=m$，

故 $a^2=b^2+m^2=\dfrac{3}{2}m^2$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m}{\sqrt{\dfrac{3}{2}m^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

[学科网考点定位]本题借助直线和椭圆的参数方程，考查了直线与椭圆的位置关系，考查了综合分析问题和数形结合的思想.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

在 ΔABC 中，角 A、B、C 对应的边分别为 a,b,c. 已知 $\cos 2A-3\cos(B+C)=1$.

（I）求角 A 的大小；

（II）若 ΔABC 的面积 $S=5\sqrt{3}$, $b=5$, 求 $\sin B\sin C$ 的值.

[答案] (1) $A=\dfrac{\pi}{3}$　（II）$\dfrac{5}{7}$

[解析] 分析：由已知条件 $\cos 2A-3\cos(B+C)=1$，先用 $B+C=\pi-A$ 消去 B,C，再利用倍角公式就可求出 $\cos A$. 先用面积公式和余弦定理分别求出 a,c，再用正弦定理即可求得 $\sin B\sin C$.

解：（I）由 $\cos 2A-3\cos(B+C)=1$，得 $2\cos^2 A+3\cos A-2=0$，

即 $(2\cos A-1)(\cos A+2)=0$，解得 $\cos A=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos A=-2$（舍去）.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（II）由 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=5\sqrt{3}$，得 $bc=20$. 又 $b=5$，知 $c=4$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+16-20=21$，故 $a=\sqrt{21}$.

又由正弦定理得 $\sin B\sin C=\dfrac{b}{a}\sin A\cdot\dfrac{c}{a}\sin A=\dfrac{bc}{a^2}\sin^2 A=\dfrac{20}{21}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{7}$.

[学科网考点定位] 本题考查解三角形及三角恒等变换，考查等价变换的转化思想.

18.（本小题满分 12 分）

已知等比数列$\{a_n\}$满足：$|a_2-a_3|=10, a_1a_2a_3=125.$

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）是否存在正整数m，使得$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}>1$?若存在，求$m$的最小值；若不存在，说明理由.

[答案] (1) $a_n=\frac{5}{3}\cdot 3^{n-1}$, 或 $a_n=-5\cdot(-1)^{n-1}$　　(2)不存在

[解析] 分析：（I）根据题目条件，用首项a_1，公比q表示已知等式建立方程即可求得a_1，q，进而求得$\{a_n\}$.

（II）先求得$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的和，再用放缩法即可证.

解：（I）由已知条件得：$a_2=5$，又$a_2|q-1|=10$，所以$q=-1$或3，

所以数列$\{a_n\}$的通项或$a_n=5\times 3^{n-2}$

（II）若$q=-1$，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=-\frac{1}{5}$或0，不存在这样的正整数$m$；

若$q=-3$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}=\frac{9}{10}[1-(\frac{1}{3})^n]<\frac{9}{10}$，不存在这样的正整数$m$.

[学科网考点定位] 本题考查等比数列的性质及求和方法，考查综合分析问题的能力.

19.（本小题满分 12 分）

如图，AB是圆O的直径,点C是圆O上异于A、B的点，直线$PC\perp$平面ABC,

E,F分别为PA,PB的中点.

（I）记平面BEF与平面ABC的交线为l，是判断l与平面PAC的位置关系，并加以说明；

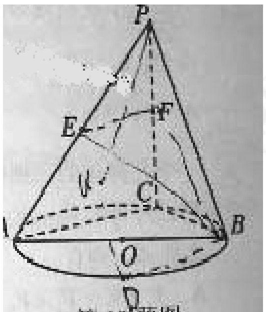
（II）设（I）中的直线l与圆O的另一个交点为D,且点Q满足$\vec{DQ}=\frac{1}{2}\vec{CP}$. 记直线

PQ与平面ABC所成的角为O,异面直线所成的锐角为o，二面角

$E-l-C$的大小为β，求证:$\sin\theta=\sin\alpha\sin\beta$.

[答案]（1）先证 $EF//l$　　（2）用三角形的边将 $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\theta$ 向表示出来，再建立关系.

[解析] 分析：（I）先用线面判定定理证得 $EF//$平面ABC，再由线面平行的性质定理证得 $EF//l$，从而证得 $l//$平面PAC.（II）先分别把角 θ，α，β 用三角形的边表示出来，进而再证得 $\sin\theta=\sin\alpha\sin\beta$.



第 19 题图

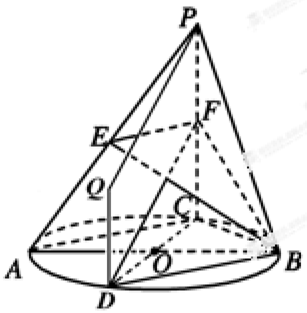
解：（Ⅰ）直线 l // 平面 PAC，证明如下：

连接 EF，因为 E，F 分别是 PA，PC 的中点，所以 EF // AC.

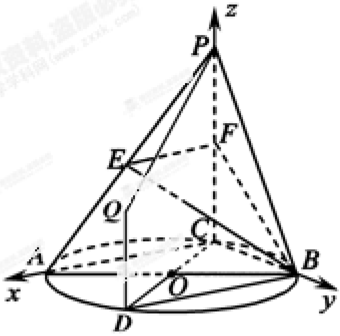
又 $EF\not\subset$ 平面 ABC，且 $AC\subset$ 平面 ABC，所以 EF // 平面 ABC.

而 $EF\subset$ 平面 BEF，且平面 $BEF\cap$ 平面 $ABC=l$，所以 EF // l.

因为 $l\not\subset$ 平面 PAC，$EF\subset$ 平面 PAC，所以直线 l // 平面 PAC.



第 19 题解答图 1



第 19 题解答图 2

（Ⅱ）（综合法）如图 1，连接 BD，由（Ⅰ）可知交线 l 即为直线 BD，且 l // AC.

因为 AB 是 $\odot O$ 的直径，所以 $AC\perp BC$，于是 $l\perp BC$.

已知 $PC\perp$ 平面 ABC，而 $l\subset$ 平面 ABC，所以 $PC\perp l$.

而 $PC\cap BC=C$，所以 $l\perp$ 平面 PBC.

连接 BE，BF，因为 $BF\subset$ 平面 PBC，所以 $l\perp BF$.

故 $\angle CBF$ 就是二面角 $E-l-C$ 的平面角，即 $\angle CBF=\beta$.

由 $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$，作 $DQ\parallel CP$，且 $DQ=\frac{1}{2}CP$.

连接 PQ，DF，因为 F 是 CP 的中点，$CP=2PF$，所以 $DQ=PF$，

从而四边形 $DQPF$ 是平行四边形，$PQ\parallel FD$.

连接 CD，因为 $PC\perp$ 平面 ABC，所以 CD 是 FD 在平面 ABC 内的射影，

故 $\angle CDF$ 就是直线 PQ 与平面 ABC 所成的角，即 $\angle CDF=\theta$.

又 $BD\perp$ 平面 PBC，有 $BD\perp BF$，知 $\angle BDF$ 为锐角，

故 $\angle BDF$ 为异面直线 PQ 与 EF 所成的角，即 $\angle BDF=\alpha$，

于是在 Rt△DCF，Rt△FBD，Rt△BCF 中，分别可得

$\sin\theta=\frac{CF}{DF}$，$\sin\alpha=\frac{BF}{DF}$，$\sin\beta=\frac{CF}{BF}$，

从而 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{CF}{BF}\cdot\frac{BF}{DF}=\frac{CF}{DF}=\sin\theta$，即 $\sin\theta=\sin\alpha\sin\beta$.

（Ⅱ）（向量法）如图 2，由 $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$，作 $DQ\parallel CP$，且 $DQ=\frac{1}{2}CP$.

连接 PQ，EF，BE，BF，BD，由（Ⅰ）可知交线 l 即为直线 BD.

以点 C 为原点，向量 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP}$ 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

设 $CA=a,CB=b,CP=2c$，则有

$C(0,0,0),A(a,0,0),B(0,b,0),P(0,0,2c),Q(a,b,c),E(\frac{1}{2}a,0,c),F(0,0,c)$.

于是 $\overrightarrow{FE}=(\frac{1}{2}a,0,0)$，$\overrightarrow{QP}=(-a,-b,c)$，$\overrightarrow{BF}=(0,-b,c)$，

所以 $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{FE}|\cdot|\overrightarrow{QP}|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，从而 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

又取平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，可得 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{QP}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{QP}|}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，

设平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\frac{1}{2}ax=0,\\ -by+cz=0\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(0,c,b)$.

于是 $|\cos\beta|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$，从而 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

故 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sin\theta$，即 $\sin\theta=\sin\alpha\sin\beta$.

[学科网考点定位] 本题考查线面位置关系判断及线面角的求法，考查空间想象能力.

20.（本小题满分 12 分）

假设每天从甲地去乙地的旅客人数 X 是服从正态分布 $N\left(800,50^2\right)$ 的随机变量，

记一天中从甲地去乙地的旅客人数不超过 900 的概率为 P_n.

求 P_n 的值；

（I）（参考数据：若 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，有 $P\left(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma\right)=0.6826,$）

$P\left(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma\right)=0.9544, P\left(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma\right)=0.9974.$

（II）某客运公司用 A、B 两种型号的车辆承担甲、乙两地间的长途客运业务，每年每天往返一次，A、B 两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人，从甲地去乙地的营运成本分别为 1600 元/辆和 2400 元/辆.公司拟组建一个不超过 21 辆车的客运车队，并要求 B 型车不多于 A 型车 7 辆。若每天要以不小于 P_0 的概率运完从甲地去乙地的旅客，且使公司从甲地去乙地的营运成本最小，那么应配备

A 型车、B 型车各多少辆？

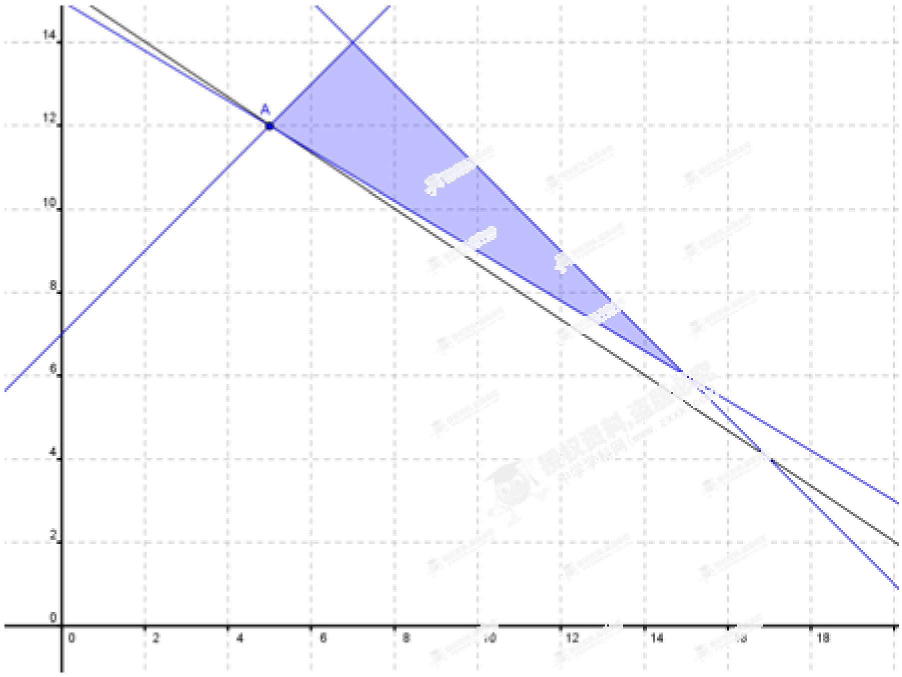
[答案] (1) 0.9772　　**(2)　A 型 5 辆，B 型 12 辆**

[解析] 分析：（I）直接根据正态分布的定义和公式即可求得，（II）先根据题意建立目标函数及线性约束条件，再利用图解法即可求解，但要注意的是最优解应取整数点.

解：（I） $p_0=0.5+\frac{1}{2}\times0.9544=0.9772$

（II）设配备 A 型车 x 辆，B 型车 y 辆，运营成本为 z 元，由已知条件得

$$\begin{cases} x+y\le 21 \\ 36x+60y\ge 900 \\ y-x\le 7 \\ x,y\in N \end{cases}，而 z=1600x+2400y$$



作出可行域，得到最优解.所以配备型车 5 辆，型车 12 辆可使运营成本最小.

[学科网考点定位] 本题考查正态分布及简单的线性规划的应用，考查分析问题和解决实际问题的能力.

21.（本小题满分 13 分）

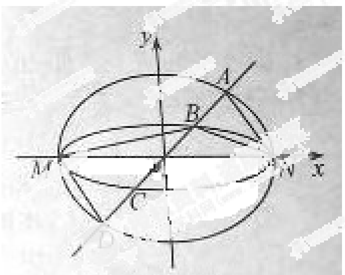
如图，已知椭圆 C_1与C_2的中心原点坐标O, 长轴均为MN且在x轴上, 短轴长分别为

$2m$、$2n\left(m>n\right)$, 过原点且不与 x 轴重合的直线 l 与 C_1、C_2的四个交点按纵坐标从大到小依次为

A、B、C、D. 记 $\lambda=\dfrac{m}{n}$, ΔBDM和ΔABN的面积分别为S_1、S_2.

（I）当直线 l 与 y 轴重合时，若 $S_1=\lambda S_2$, 求λ的值;

（II）当 λ 变化时，是否存在于坐标轴不重合的直线 l，使得 $S_1=\lambda S_2$, 并说明理由.



第 21 题图

[答案]（1）$\lambda=\sqrt{2}+1$　　（2）当$1<\lambda\le 1+\sqrt{2}$，不存在；当$\lambda>1+\sqrt{2}$，存在.

[解析] 分析：(I) 先把 S_1, S_2 用面积公式表示出来，再根据 $S_1=\lambda S_2$ 即可求得.

(II) 先假设存在，再根据题意分别求出 S_1, S_2，令 $S_1=\lambda S_2$，再计算即可得.

解：依题意可设椭圆 C_1 和 C_2 的方程分别为

C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{m^2}=1$，$C_2$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$. 其中 $a>m>n>0$，$\lambda=\dfrac{m}{n}>1$.

(Ⅰ) **解法 1：** 如图 1，若直线 l 与 y 轴重合，即直线 l 的方程为 $x=0$，则

$S_1=\dfrac{1}{2}|BD|\cdot|OM|=\dfrac{1}{2}a|BD|$，$S_2=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|ON|=\dfrac{1}{2}a|AB|$，所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|BD|}{|AB|}$.

在 C_1 和 C_2 的方程中分别令 $x=0$，可得 $y_A=m$，$y_B=n$，$y_D=-m$，

于是 $\dfrac{|BD|}{|AB|}=\dfrac{|y_B-y_D|}{|y_A-y_B|}=\dfrac{m+n}{m-n}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$.

若 $\dfrac{S_1}{S_2}=\lambda$，则 $\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}=\lambda$，化简得 $\lambda^2-2\lambda-1=0$. 由 $\lambda>1$，可解得 $\lambda=\sqrt{2}+1$.

故当直线 l 与 y 轴重合时，若 $S_1=\lambda S_2$，则 $\lambda=\sqrt{2}+1$.

解法 2： 如图 1，若直线 l 与 y 轴重合，则

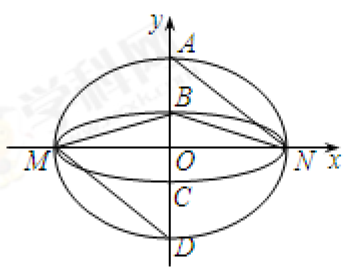
$|BD|=|OB|+|OD|=m+n$，$|AB|=|OA|-|OB|=m-n$；

$S_1=\dfrac{1}{2}|BD|\cdot|OM|=\dfrac{1}{2}a|BD|$，$S_2=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|ON|=\dfrac{1}{2}a|AB|$.

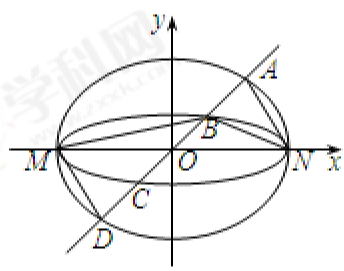
所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|BD|}{|AB|}=\dfrac{m+n}{m-n}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$.

若 $\dfrac{S_1}{S_2}=\lambda$，则 $\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}=\lambda$，化简得 $\lambda^2-2\lambda-1=0$. 由 $\lambda>1$，可解得 $\lambda=\sqrt{2}+1$.

故当直线 l 与 y 轴重合时，若 $S_1=\lambda S_2$，则 $\lambda=\sqrt{2}+1$.



第 22 题解答图 1



第 22 题解答图 2

(Ⅱ) **解法 1：** 如图 2，若存在与坐标轴不重合的直线 l，使得 $S_1=\lambda S_2$. 根据对称性，不妨设直线 l：$y=kx\ (k>0)$，

点 $M(-a,0)$，$N(a,0)$到直线 l 的距离分别为 d_1，d_2，则

因为 $d_1=\dfrac{|-ak-0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$，$d_2=\dfrac{|ak-0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $d_1=d_2$.

又 $S_1=\dfrac{1}{2}|BD|d_1$，$S_2=\dfrac{1}{2}|AB|d_2$，所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|BD|}{|AB|}=\lambda$，即 $|BD|=\lambda|AB|$.

由对称性可知 $|AB|=|CD|$，所以 $|BC|=|BD|-|AB|=(\lambda-1)|AB|$，

$|AD|=|BD|+|AB|=(\lambda+1)|AB|$，于是

$$\frac{|AD|}{|BC|}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}. \qquad ①$$

将 l 的方程分别与 C_1，C_2 的方程联立，可求得

$$x_A=\frac{am}{\sqrt{a^2k^2+m^2}},\quad x_B=\frac{an}{\sqrt{a^2k^2+n^2}}$$

根据对称性可知 $x_C=-x_B$，$x_D=-x_A$，于是

$$\frac{|AD|}{|BC|}=\frac{\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_D|}{\sqrt{1+k^2}\,|x_B-x_C|}=\frac{2x_A}{2x_B}=\frac{m}{n}\sqrt{\frac{a^2k^2+n^2}{a^2k^2+m^2}}. \qquad ②$$

从而由①和②式可得

$$\sqrt{\frac{a^2k^2+n^2}{a^2k^2+m^2}}=\frac{\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}. \qquad ③$$

令 $t=\dfrac{\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}$，则由 $m>n$，可得 $t\neq1$，于是由③可解得 $k^2=\dfrac{n^2(\lambda^2t^2-1)}{a^2(1-t^2)}$.

因为 $k\neq0$，所以 $k^2>0$. 于是③式关于 k 有解，当且仅当 $\dfrac{n^2(\lambda^2t^2-1)}{a^2(1-t^2)}>0$，

等价于 $(t^2-1)(t^2-\dfrac{1}{\lambda^2})<0$. 由 $\lambda>1$，可解得 $\dfrac{1}{\lambda}<t<1$，

即 $\dfrac{1}{\lambda}<\dfrac{\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}<1$，由 $\lambda>1$，解得 $\lambda>1+\sqrt{2}$，所以

当 $1<\lambda\leq1+\sqrt{2}$ 时，不存在与坐标轴不重合的直线 l，使得 $S_1=\lambda S_2$；

当 $\lambda>1+\sqrt{2}$ 时，存在与坐标轴不重合的直线 l 使得 $S_1=\lambda S_2$.

解法 2：如图 2，若存在与坐标轴不重合的直线 l，使得 $S_1=\lambda S_2$. 根据对称性，

不妨设直线 l：$y=kx\ (k>0)$，

点 $M(-a,0)$，$N(a,0)$到直线 l 的距离分别为 d_1，d_2，则

因为 $d_1=\dfrac{|-ak-0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$，$d_2=\dfrac{|ak-0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $d_1=d_2$.

又 $S_1=\dfrac{1}{2}|BD|d_1$，$S_2=\dfrac{1}{2}|AB|d_2$，所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|BD|}{|AB|}=\lambda$.

因为 $\frac{|BD|}{|AB|}=\frac{\sqrt{1+k^2}\,|x_B-x_D|}{\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|}=\frac{x_A+x_B}{x_A-x_B}=\lambda$，所以 $\frac{x_A}{x_B}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$.

由点 $A(x_A, kx_A)$，$B(x_B, kx_B)$分别在 C_1，C_2上，可得

$\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{k^2x_A^2}{m^2}=1$，$\frac{x_B^2}{a^2}+\frac{k^2x_B^2}{n^2}=1$，两式相减可得 $\frac{x_A^2-x_B^2}{a^2}+\frac{k^2(x_A^2-\lambda^2x_B^2)}{m^2}=0$，

依题意 $x_A>x_B>0$，所以 $x_A^2>x_B^2$. 所以由上式解得 $k^2=\frac{m^2(x_A^2-x_B^2)}{a^2(\lambda^2x_B^2-x_A^2)}$.

因为 $k^2>0$，所以由 $\frac{m^2(x_A^2-x_B^2)}{a^2(\lambda^2x_B^2-x_A^2)}>0$，可解得 $1<\frac{x_A}{x_B}<\lambda$.

从而 $1<\frac{\lambda+1}{\lambda-1}<\lambda$，解得 $\lambda>1+\sqrt{2}$，所以

当 $1<\lambda\le 1+\sqrt{2}$ 时，不存在与坐标轴不重合的直线 l，使得 $S_1=\lambda S_2$.

当 $\lambda>1+\sqrt{2}$ 时，存在与坐标轴不重合的直线 l 使得 $S_1=\lambda S_2$.

[学科网考点定位] 本题考查直线与椭圆的位置关系，考查综合分析问题的能力.

22.（本小题满分 14 分）

设 n 为正整数，r 为正有理数.

（I）求函数 $f(x)=(1+x)^{r+1}-(r+1)x-1\ (x>-1)$的最小值；

（II）证明：$\frac{n^{r+1}-(n-1)^{r+2}}{r+1}<n^r<\frac{(n+1)^{r+1}-n^{r+1}}{r+1}$；

（III）设 $x\in R$，记$[x]$为不小于 x 的最小整数，例如$[2]=2$，$[\pi]=4$，$\left[-\frac{3}{2}\right]=-1$.

令 $S=\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{82}+\sqrt[3]{83}+\cdots\cdots+\sqrt[3]{125}$，求$[S]$的值.

（参考数据：$80^{\frac{4}{3}}=344.7$，$81^{\frac{4}{3}}=350.5$，$124^{\frac{4}{3}}=618.3$，$126^{\frac{4}{3}}=631.7$.）

[答案]（1）最小值为 $f(0)=0$　（2）利用代换法构造不等式　（3）211

[解析] 分析：（I）先求函数 $f(x)$ 的导数，再令导数大于 0，小于 0 即可求出函数的单调区间，进而求得最小值.

（II）根据第一问的结论，构造不等式 $(1+x)^{r+1}>1+(r+1)x$，再代换即可证明结论.

（III）先放缩，再累加整理即可证明.

解：（I） $f'(x)=(r+1)(1+x)^r-(r+1)=(r+1)[(1+x)^r-1]$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单减，在 $(0,+\infty)$ 上单增. $\therefore f(x)_{\min}=f(0)=0$

（II）由（I）知：当 $x>-1$ 时，$(1+x)^{r+1}>(r+1)x+1$（就是伯努利不等式了）

所证不等式即为：$\begin{cases} n^{r+1}-(r+1)n^r<(n-1)^{r+1} \\ n^{r+1}+(r+1)n^r<(n+1)^{r+1} \end{cases}$

若 $n\ge 2$，则 $n^{r+1}-(r+1)n^r<(n-1)^{r+1}\Leftrightarrow (n-r-1)<(1-\frac{1}{n})^r(n-1)$

$\Leftrightarrow 1-\frac{r}{n-1}<(1-\frac{1}{n})^r$ ……………①

$\because (1-\frac{1}{n})^r>-\frac{r}{n}+1, -\frac{r}{n}>-\frac{r}{n-1}, \therefore (1-\frac{1}{n})^r>1-\frac{r}{n}>1-\frac{r}{n-1}$，故①式成立。

若 $n=1, n^{r+1}-(r+1)n^r<(n-1)^{r+1}$，显然成立.

$n^{r+1}+(r+1)n^r<(n+1)^{r+1}\Leftrightarrow n+r+1<(1+\frac{1}{n})^r(n+1)$

$\Leftrightarrow 1+\frac{r}{n+1}<(1+\frac{1}{n})^r$ ……………②,

$\because (1+\frac{1}{n})^r>\frac{r}{n}+1, \frac{r}{n}>\frac{r}{n+1}, \therefore (1+\frac{1}{n})^r>1+\frac{r}{n}>1+\frac{r}{n+1}$，故②式成立。

综上可得原不等式成立.

（III）由（II）可知：当 $k\in N^*$ 时，$\frac{3}{4}[k^{\frac{4}{3}}-(k-1)^{\frac{4}{3}}]<k^{\frac{1}{3}}<\frac{3}{4}[(k+1)^{\frac{4}{3}}-k^{\frac{4}{3}}]$

$$S>\frac{3}{4}\sum_{k=81}^{125}[k^{\frac{4}{3}}-(k-1)^{\frac{4}{3}}]=\frac{3}{4}(125^{\frac{4}{3}}-80^{\frac{4}{3}})\approx 210.225$$

$$S<\frac{3}{4}\sum_{K=81}^{125}[(k+1)^{\frac{4}{3}}-k^{\frac{4}{3}}]=\frac{3}{4}(126^{\frac{4}{3}}-81^{\frac{4}{3}})\approx 210.9, \therefore [S]=211$$

[**学科网考点定位**]本题考查高次函数的性质及不等式的证明，考查综合分析问题的能力.